



Ц. В. СОЛОВЬЕВ
Е. В. ТАРАСОВ

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
МЕЖПЛАНЕТНЫХ
ПОЛЕТОВ**

Ц. В. СОЛОВЬЕВ, Е. В. ТАРАСОВ

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПОЛЕТОВ



МОСКВА
МАШИНОСТРОЕНИЕ
1973

Соловьев Ц. В., Тарасов Е. В. Прогнозирование межпланетных полетов. М., «Машиностроение», 1973, 400 с.

Книга посвящена методам расчета проектно-баллистических характеристик межпланетных аппаратов и определению наиболее благоприятных дат старта для полетов на планеты. Рассмотрены возможные схемы полета КЛА на другие планеты как с возвращением аппаратов на Землю, так и без возвращения. Исследованы также особые схемы полета КЛА на планеты и к Солнцу, когда для улучшения баллистических характеристик используются гравитационные поля других планет, в частности Венеры и Юпитера.

Методы поиска оптимальных решений, базирующиеся на кусочно-конической аппроксимации межпланетных траекторий, построены с учетом как импульсного изменения скорости, так и конечной протяженности активных участков. Даны приближенные решения дифференциальных уравнений движения КЛА, позволяющие с хорошей точностью и со значительным сокращением времени расчетов на ЭЦВМ провести поиск оптимальных проектных решений КЛА.

В книге широко представлены результаты расчетов различных характеристик межпланетных аппаратов, которые в обозримом будущем могут совершать полеты на планеты Солнечной системы.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров и специалистов ряда отраслей промышленности. Она будет полезна также студентам вузов.

Табл. 27. Ил. 247. Список лит. 82 назв.

Рецензент д-р техн. наук, проф. **М. К. Тихонравов**

С $\frac{265-194}{038(01)-73}$ 194—73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная космонавтика развивается по трем основным направлениям.

Первое — применение космических летательных аппаратов для народного хозяйства, например для связи, для предсказания погоды, для нужд навигации как морской, так и воздушной, для изучения Земли и других целей.

Второе — освоение с помощью пилотируемых аппаратов космического пространства. Под освоением космического пространства понимаются действия, направленные на то, чтобы научиться жить и работать в космосе, быть в межпланетном пространстве не путешественником, а постоянным жителем. В околоземном пространстве в недалеком будущем будут собираться и функционировать долговременные орбитальные пилотируемые станции, прообразом которых является советская орбитальная станция «Салют».

Орбитальные станции могут выполнять также задачи, свойственные первому и, как будет видно ниже, третьему направлениям. Эти станции дадут начало долговременным поселениям в космосе, о которых мечтали К. Э. Циолковский и его последователи. На них будут функционировать различные научные лаборатории, например космической биологии и медицины, геофизики и астрофизики, будут устроены астрономические обсерватории. Эти станции станут отправными пунктами для полетов к другим планетам.

Третье направление — систематические научные исследования и эксперименты в космосе с помощью автоматических аппаратов и пилотируемых кораблей.

За сравнительно короткий период были созданы специализированные системы межпланетных аппаратов научного назначения. Выдающиеся достижения в космонавтике стимулировали развитие ряда новых областей естествознания: космической биологии и медицины, физики планет и межпланетного пространства. Многие отрасли техники приобрели эпитет «космическая»: космическое двигателестроение, космическая радиоэлектроника, космическое материаловедение. Ракетно-космическая индустрия и космонавтика тесно связаны с научно-технической революцией,

переживаемой человечеством, выступая и как ее порождение и как ее стимулятор.

Необходимо ввести разделение стоящих перед наукой и космонавтикой задач на две группы: исследования в ближнем космосе, в околоземном пространстве и исследования более далеких объектов Солнечной системы, например планет.

В первой группе своеобразным научно-техническим «полигоном» стали Луна и окололунное пространство. Здесь ведутся разнообразные научные исследования, проходят всестороннюю проверку технические средства. На Луне успешно могут действовать стационарные и передвижные автоматические средства как помощь экспедициям, организованным с участием ученых. На Луне могут быть изучены технические средства, предназначенные для будущего изучения Венеры, Марса, Меркурия и других планет.

Вторая группа — это исследования в первую очередь ближних планет — Венеры и Марса, а также астероидов, планет Меркурия, Юпитера и более удаленных. В перспективе открываются широкие возможности в изучении других небесных тел Солнечной системы — комет и спутников планет.

Данная книга посвящена решению задач второй группы.

Вряд ли сейчас найдутся скептики, которые отрицали бы огромную важность и жизненную необходимость изучения Солнца, планет и других небесных тел и самого межпланетного пространства. Непосредственное изучение Солнечной системы — предпосылка ее освоения человеком. К наиболее значительным и заманчивым научным задачам, решение которых — цель межпланетных полетов, можно отнести: изучение геологического развития планет, поиски на других планетах неизвестных форм живой материи, выяснение возможности возникновения жизни в условиях окружающей среды, которые радикально отличаются от земных, изучение происхождения и эволюции Солнечной системы, изучение природы тяготения, исследования проблемы обеспечения автономного существования человека, земных растений и животных вне Земли. Многие тайны Земли, возможно, легче могут быть раскрыты на Луне, Венере, Марсе и других небесных телах Солнечной системы. Кто решится и может предсказать даже начало конца этих исследований?

Результаты космических исследований могут коренным образом изменить наши взгляды и сложившиеся понятия. В связи с этим заранее трудно предугадать, какие именно направления принесут максимальный научный и практический эффект. Очердность исследования тел Солнечной системы определяется техническими возможностями и научными интересами.

В решении научных проблем межпланетные аппараты являются только средством. Однако научные цели изучения Солнечной системы выдвигают требования совершенствования технических средств исследования космоса. Определение перспектив

изучения невозможно без выяснения возможностей космических средств исследования и освоения космического пространства.

В настоящее время получили широкое распространение автоматические средства изучения космоса.

Размеры и масса автоматических аппаратов зависят в основном от задач эксперимента и возможностей ракет-носителей, автоматические аппараты могут работать и давать информацию в самых различных условиях.

Научная эффективность выполненных на таких аппаратах исследований и быстрота получения информации зависят не только от выбора научных целей, но и от методов и последовательности проведения исследований.

Анализ развития космических средств и предварительных результатов изучения Луны и окололунного пространства, Венеры и Марса показал, что программу изучения планеты можно приблизительно представить состоящей из следующих этапов.

Сначала выполняются предварительные исследования с помощью межпланетных аппаратов, совершающих полет по пролетным траекториям. Они позволяют получить предварительную информацию об общих характеристиках планеты, таких, например, как строение ее поверхности, наличие магнитного поля и радиационных поясов, некоторых данных об атмосфере.

Затем производятся орбитальные полеты аппаратов, позволяющие проводить более детальные и всесторонние исследования, включая картографирование, сравнение различных районов планеты, более глубокое исследование атмосферы и др.

Далее осуществляются спуск и посадка аппаратов в заданные точки поверхности планеты в соответствии с их научной значимостью, определенной на основании орбитальных наблюдений. После успешного решения задачи посадки могут последовать спуски автоматизированных средств с аппаратами для перемещения по поверхности планеты, движение которых может корректироваться дистанционно с Земли.

И, наконец, решаются задачи возврата автоматизированных средств на Землю. Вряд ли стоит говорить, что это качественно новый этап, его решение — триумф космической автоматики. Ведь требуется обеспечить автоматизированный старт с планеты; выход на орбиту около планеты и, если необходимо, стыковку с основным кораблем; старт с орбиты и выход на возвратную траекторию для встречи с Землей; в нужные моменты времени провести коррекцию траектории возвращения; за счет атмосферы Земли погасить гиперболическую скорость входа и посадить аппарат в заданном районе Земли.

Эта последовательность может быть и нарушена. Отдельные этапы могут быть опущены в зависимости от конструкции автоматических средств управления и самих космических аппаратов.

Однако автоматы не могут обеспечить все научные исследования в космическом пространстве. Автоматы работают по за-

ранее заданной человеком программе и регистрируют величину и характер заранее назначенных параметров. Автоматы могут доставить все данные, но только заранее заданные тематически. Конечно, можно изменить программу по радио, но надо знать, как изменить, что новое поручить регистрировать автомату и каким образом это сделать. А для того, чтобы знать, надо там находиться, что невозможно, если в космосе с целью исследования летает только автомат.

Следовательно, необходимы пилотируемые полеты, во время которых человек может активно участвовать в проведении исследований, увидеть и почувствовать совершенно новые явления, о которых не подозревалось ранее, когда человек сам может направлять работу автоматических приборов на регистрацию наиболее важных параметров и встретившихся, может быть, еще неизвестных проявлений природы космоса.

Собственно говоря, необходимость в пилотируемых полетах не требует доказательств. Автоматические космические аппараты будут помогать проводить научные исследования в той степени, в которой они могут это делать, и тем большей, чем больше и глубже человек будет познавать природу. Кроме того, за автоматами всегда останется приоритет в посещении мест, недоступных человеку. Пилотируемые корабли с научными работниками на борту способны тщательнее и быстрее исследовать космос, главное — они призваны осваивать межпланетное пространство, что является актуальнейшей задачей для будущего человечества.

Взаимное положение планет меняется со временем вследствие их движения. В зависимости от положения планет в момент старта и прибытия по-разному выглядит траектория межпланетного перелета космического корабля от одной планеты к другой и меняются энергетические затраты, необходимые для перелета. Поэтому результаты баллистического проектирования межпланетного летательного аппарата во многом зависят от времени старта и прибытия. В настоящее время одним из главных ограничивающих факторов в выборе момента старта межпланетного корабля является ограниченный диапазон удельной тяги двигательных установок. Приобретают значение поиски методов наиболее экономичных полетов при достижении намеченной цели. Такими полетами являются, например, полеты с использованием гравитационных полей Юпитера, Венеры и других планет.

Сравнительная редкость благоприятных окон старта — диапазон оптимальных дат старта для полета к планетам — налагает ограничения на программу прямого исследования планет с помощью КЛА. Прогнозирование проектно-баллистических характеристик основывается на методах поиска оптимальных траекторий полета и оптимальных проектных параметров межпланетных летательных аппаратов. Излагаемое в настоящей работе приближенное решение дифференциальных уравнений

управляемого движения КЛА является оригинальным и плодотворным. Оно позволяет с хорошей точностью и со значительным сокращением времени расчетов на ЭЦВМ проводить поиск оптимальных проектных решений КЛА.

В книге рассматриваются разнообразные схемы полета межпланетного аппарата на различные планеты как с учетом возвращения аппаратов к Земле, так и без возвращения и дается их оценка. Исследуются особые схемы полетов КЛА на планеты и к Солнцу, когда для улучшения баллистических характеристик используются гравитационные поля других планет. Широко представлены результаты расчетов различных характеристик межпланетных аппаратов, которые в будущем могут совершать полеты на планеты Солнечной системы.

Книга написана по оригинальным материалам, полученным авторами в области баллистического проектирования КЛА, и с использованием публикаций в отечественной и зарубежной печати. Она отличается от других работ в этой области тем, что в ней с одних научных позиций рассматривается целый комплекс задач проектирования межпланетных летательных аппаратов с учетом энергетических затрат, окон старта и чувствительности траекторий к отклонениям от расчетных данных.

М. К. ТИХОНРАВОВ

ОТ АВТОРОВ

Бурное развитие космонавтики поставило перед наукой ряд сложнейших проблем по осуществлению межпланетных полетов космических летательных аппаратов (КЛА). Планирование новых полетов КЛА к планетам Солнечной системы вызывает необходимость дальнейшего исследования возможных схем полетов, энергетических затрат и других характеристик межпланетного аппарата.

В последнее время в периодической печати нашей страны и за рубежом появились работы, в которых рассматриваются баллистические задачи выхода КЛА на околопланетную орбиту и посадки десантируемых аппаратов на планету, задачи возврата КЛА с планеты назначения на Землю и т. д. В ряде публикаций широко обсуждаются проблемы использования гравитационных полей планет для улучшения баллистических характеристик межпланетного аппарата. Как, например, для полетов на Меркурий и Марс использовать гравитационное поле Венеры, а для полетов к Солнцу и дальним планетам — гравитационное поле Юпитера. Обращается внимание на важность решения задачи уменьшения скорости входа в атмосферу Земли возвращаемых аппаратов, что может быть достигнуто, например, специальными маневрами на гелиоцентрическом участке обратного полета КЛА. Серьезные проблемы возникают при решении задач оптимизации межпланетных полетов.

Цель настоящей книги состоит в том, чтобы дать систематизацию проблем баллистического проектирования межпланетного аппарата и привести некоторые методы их решения, причем особое внимание уделено кусочно-конической аппроксимации межпланетной траектории и приближенному решению дифференциальных уравнений управляемого движения в виде конечных аналитических выражений. Проведенная в книге классификация схем межпланетных полетов позволила систематизировать решение ранее известных и новых задач баллистического проектирования КЛА при традиционном допущении, когда планеты рассматриваются в качестве негравитирующих центров при расчете гелиоцентрических участков перелета. Излагаемые методы поиска оптимальных проектных решений построены с учетом как импульсного изменения скорости полета, так и конечной протяженности активных участков.

В книге по-новому рассматривается задача «стыковки» гелиоцентрического участка с планетоцентрическими участками траектории, причем оптимизация баллистических характеристик и основных проектных параметров КЛА производится совместно.

Учет размеров грависфер некоторых планет в ряде задач космонавтики становится практически необходимым. Поэтому здесь рассмотрены методы оптимального баллистического проектирования КЛА, учитывающие влияние размеров грависфер планет на гелиоцентрический участок.

Главы I, II (§ 1, 3), III, IV (§ 1) и VII, IX (§ 3, 4) написаны Е. В. Тарасовым, а главы II (§ 2, 4), IV (§ 2, 3), V, VI, VIII, IX (§ 1, 2) и X — Ц. В. Соловьевым.

Авторы приносят глубокую благодарность всем товарищам, дружеская помощь которых помогла написать и издать книгу.

Авторы весьма признательны рецензенту книги доктору технических наук М. К. Тихонравову за ряд ценных замечаний, позволивших улучшить содержание книги.

Особую признательность авторы выражают А. В. Лещенко, А. М. Потапову и Н. Ф. Шмаковой за помощь в разработке некоторых методов и проведение расчетов.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — большая полуось орбиты.
- b — малая полуось орбиты.
- $C_{ик}, C_0$ — постоянные интегрирования.
- C — хорда орбиты.
- c_x — коэффициент аэродинамического лобового сопротивления.
- c_y — коэффициент аэродинамической подъемной силы.
- E — эксцентрическая аномалия.
- e — эксцентриситет орбиты.
- F — сила; вспомогательная переменная.
- f — постоянная тяготения.
- G — вес (сила тяжести).
- g — гравитационное ускорение.
- h, H — высота полета.
- H — аргумент гиперболы.
- i — угол наклона плоскости орбиты к основной плоскости.
- K — аэродинамическое качество.
- L, l — дальность полета (угловая или линейная).
- M — угол перелета; текущая масса КЛА; средняя аномалия.
- m — масса материальной точки; масса планеты.
- n — перегрузка.
- n_x — осевая перегрузка.
- n_0 — начальная тяговооруженность КЛА.
- P — сила тяги двигательной установки КЛА.
- $P_{уд}$ — удельная тяга двигателя.
- p — фокальный параметр орбиты; вспомогательный угол.
- Q — интегральный тепловой поток.
- q — удельный тепловой поток.
- R — расстояние от Солнца до материальной точки.
- r — расстояние от центра планеты до КЛА.
- T_c — синодический период.
- T — период обращения ИСП; температура.
- t — время полета.
- $\Delta t, \Delta t_{1,2}$ — время перелета КЛА от начальной до конечной точки орбиты (кривой конического сечения).
- U — силовая функция.
- u — угловое расстояние от узла орбиты (аргумент широты).
- V — скорость; скорость тела относительно Солнца.
- V_∞ — гиперболический избыток скорости.
- $V_\Sigma, V_{x\Sigma}$ — суммарная характеристическая скорость.
- W — скорость истечения продуктов рабочего тела из сопла двигателя.
- X — сила аэродинамического сопротивления.
- Y — аэродинамическая подъемная сила.
- x, y, z — декартовы координаты материальной точки.
- α — угол между вектором скорости и вектором тяги; угол атаки; вспомогательный угол в уравнении Ламберта при гиперболическом движении; прямое восхождение.

- β — центральный угол участка выведения; вспомогательный угол в уравнении Ламберта при гиперболическом движении; логарифмический градиент плотности.
 δ — склонение.
 ε — угол наклона плоскости экватора Земли к плоскости эклиптики; константа сжатия планеты.
 θ — траекторный угол.
 Φ — угол тангажа.
 λ — долгота проекции точки на базовую плоскость; переменный коэффициент Лагранжа.
 μ — относительная текущая масса КЛА; гравитационная постоянная.
 τ — постоянная интегрирования, характеризующая момент прохождения КЛА перицентра орбиты.
 Φ — угловая дальность полета КЛА по кривой конического сечения.
 φ — угол асимптоты гиперболической орбиты.
 v — истинная аномалия.
 Ω — долгота восходящего узла.
 ω — угловое расстояние перицентра орбиты от линии восходящего узла.
-

Глава I ● ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРИТЯЖЕНИЯ

Космос (межпланетное пространство) — это среда, в которой из всех сил природы, действующих на летательный аппарат, главной является сила притяжения небесных тел. Теория притяжения, краеугольным камнем которой является закон всемирного тяготения Ньютона, позволяет количественно оценивать силы притяжения различных материальных тел. Знание принципиальных позиций этой теории и ее основных результатов необходимо для понимания основ теории движения космических летательных аппаратов.

Материальная точка. Закон всемирного тяготения Ньютона

Следует остановиться на понятии о материальной точке, ибо в теории притяжения и в механике всякое материальное тело рассматривается в виде или материальной точки, или совокупности материальных точек. *Материальная точка* есть часть материи бесконечно малых размеров, которая, однако, может обладать конечной массой. Поэтому в качестве материальной точки можно принимать геометрическую точку конечной массы. С действительных позиций это представление чисто фиктивное, но в механическом смысле существуют точки, имеющие тождественное значение с материальной точкой конечной массы. В самом деле, если тело движется под действием силы, приложенной к центру масс, то движение совсем не зависит ни от густоты расположения материи, ни от формы тела, а только от количества материи в теле, т. е. центр масс движется так, если бы в нем одном была сосредоточена масса всего тела. В этом видна реализация представления о материальной точке.

Материальные точки имеют свойство притягивать друг друга. Согласно закону всемирного тяготения И. Ньютона, *всякие две материальные точки притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих точек и обратно пропорциональной квадрату их взаимного расстояния*. Величина силы притяжения определяется по формуле

$$F = f \frac{m_1 m_2}{\Delta^2}, \quad (1.1.1)$$

где m_1 — масса одной материальной точки;

m_2 — масса другой материальной точки;

Δ — расстояние между материальными точками;

f — коэффициент пропорциональности, называемый *постоянной притяжения*, или *постоянной тяготения*.

Численное значение постоянной притяжения f , размерность которой определяется равенством

$$[f] = m^{-1}l^3t^{-2},$$

зависит от выбора основных единиц массы, длины и времени.

Если взять астрономическую систему единиц измерения, в которой за единицу массы принимается масса Солнца, за единицу длины — среднее расстояние между Солнцем и центром масс системы Земля+Луна и за единицу времени — средние солнечные сутки, то постоянная $f = k^2$ [30, стр. 34], где

$$k = 0,01720209895.$$

Коэффициент k в этом случае называется *гауссовой постоянной тяготения*.

В системе единиц СГС (см, г, с) постоянная притяжения f , определяемая из расчетов,

$$f = 6,669 \cdot 10^{-8}.$$

Коэффициент f обычно определяется опытным путем, что дает

$$f = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}) \text{ [30, стр. 34].}$$

При решении задач космонавтики, в которых в качестве центрального небесного тела принимается Солнце или какая-либо планета, удобно применять так называемые гелиоцентрическую гравитационную постоянную $GS = fm_{\odot}$ либо планетоцентрическую гравитационную постоянную $GM_{\text{пл}} = fm_{\text{пл}}$. В новую систему астрономических постоянных включены только гелиоцентрическая и геоцентрическая гравитационные постоянные, численное значение которых принимается равным [30, стр. 34]

$$GS = 132718 \cdot 10^{15} \text{ м}^3/\text{с}^2,$$

$$GE = 398603 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2.$$

Для остальных планет значение планетоцентрической гравитационной постоянной можно определить, умножив f на массу соответствующей планеты $m_{пл}$.

Формула (1.1.1) симметрична относительно точек M_1 и M_2 и не зависит от выбора системы координат. Однако в задачах механики полета космического аппарата и небесной механики рассматриваются составляющие силы притяжения по каким-либо координатам.

Выберем декартову систему координат $Oxyz$ (рис. 1.1.1). Величина вектора силы $\vec{F}$, с которой материальная точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ притягивает материальную точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$, определяется по формуле (1.1.1). Расстояние Δ между точками условимся всегда считать направленным от притягивающей точки к притягиваемой. Поэтому направление силы $\vec{F}$ противоположно направлению вектора $\vec{\Delta}$, и имеет место равенство

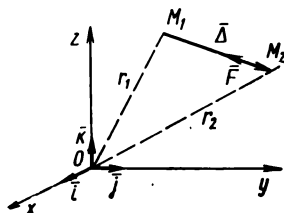


Рис. 1.1.1. Схема действующих сил притяжения

$$\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{\Delta^2} \frac{\vec{\Delta}}{\Delta}, \quad (1.1.2)$$

причем

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}.$$

Силовому полю, вызываемому взаимным притяжением материальных точек M_1 и M_2 , соответствует *силовая функция*

$$U = f \frac{m_1 m_2}{\Delta}, \quad (1.1.3)$$

которая является функцией всех шести координат этих точек. В этой связи вектор силы притяжения можно определить по формуле

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.1.4)$$

т. е.

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.1.5)$$

Производная силовой функции по произвольному направлению имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial l} = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, \vec{l}).$$

Силовая функция U всегда положительна, конечна, непрерывна и однозначна при любых не совпадающих положениях точек M_1 и M_2 . Если эти точки стремятся к одной и той же

точке пространства M , так что $M_1 \rightarrow M$ и $M_2 \rightarrow M$, то функция U неограниченно растет и ее предел стремится к бесконечности. Если же точки M_1 и M_2 неограниченно удаляются друг от друга, то и ее производные по координатам стремятся к нулю. Силовая функция U аналитична, т. е. имеет непрерывные производные всех порядков и регулярна на бесконечности.

Силовая функция U имеет определенный физический смысл. Если судить по ее размерности, то, как видно из (1.1.3), размерность силовой функции совпадает с размерностью энергии и работы. Значение силовой функции U совпадает со значением работы, которую следует затратить, чтобы преодолеть притяжение притягивающей массы m_1 и удалить притягиваемую массу m_2 на бесконечно большое расстояние от массы m_1 . Величину $U(x, y, z)$ называют потенциальной энергией поля в точке (x, y, z) .

Притяжение материальной точки телом

При изучении движения космического летательного аппарата его обыкновенно принимают как материальную точку. Планеты же следует в большинстве случаев рассматривать в качестве материальных тел, имеющих достаточно протяженные геометрические размеры и определенные формы со специфическим распределением масс. В этом случае для расчета притяжения космического летательного аппарата небесным телом нельзя непосредственно применять закон всемирного тяготения, так как оно (тело) является уже притягивающей системой, состоящей из бесчисленного множества материальных точек.

Для определения величины силы притяжения, с которой небесное тело (материальное тело) P действует на космический летательный аппарат (материальную точку) A , и для определения силового поля, вызываемого наличием тела P , разобьем его на большое число весьма малых элементов массы dm_j , сосредоточенных в точках P_j . Эти материальные точки притягивают материальную точку A с силой, определяемой из закона всемирного тяготения.

Переходя к пределу суммы сил притяжения при неограниченном возрастании числа элементарных масс и неограниченном уменьшении их объемов получим определенный интеграл, взятый по всей притягивающей массе m , в виде

$$F = fM \int_{(m)} \frac{dm}{\Delta^2} \quad (1.1.6)$$

и тем самым найдем *силовую функцию тела*

$$U = fM \int_{(m)} \frac{dm}{\Delta}, \quad (1.1.7)$$

где интегрирование распространено на всю притягивающую массу, а Δ_j есть расстояние притягиваемой материальной точки (космического летательного аппарата) A от притягивающего элемента массы dm , который равен произведению плотности на элемент объема, выраженного в соответствующих координатах. Выражение силовой функции небесного тела P в точке $A(x, y, z)$, определяющей положение космического летательного аппарата, зависит от формы тела, его внутреннего строения и положения небесного тела относительно принятой системы координат. Однако полная масса притягивающего тела определяется во всех случаях формулой

$$m = \int_{(m)} dm. \quad (1.1.8)$$

Кроме того, частные производные от силовой функции по координатам совпадают с проекциями силы притяжения на соответствующие оси. Так, для декартовой системы координат x, y, z имеем

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.1.9)$$

Вид и аналитическая структура силовой функции U , выраженной определенным интегралом (1.1.7), в котором координаты космического летательного аппарата и небесного тела играют роль параметров, могут быть весьма сложными и разнообразными, так как он может быть вычислен в элементарных функциях только в некоторых исключительных случаях, а вообще оказывается совершенно невычислимым [12]. Предметом теории притяжения является изучение свойств и характера силовых функций, определяемых интегралами вида (1.1.7), и разработка методов их приближенного представления и вычисления [12, 18]. Воспользовавшись результатами теории притяжения, перейдем непосредственно к изложению свойств силовой функции U , определяемой интегральной формой (1.1.7), во внешнем пространстве.

Силовая функция однозначна, ограничена и непрерывна во всем пространстве и вне притягивающих масс аналитична. Составляющие силы притяжения, действующей на космический аппарат [точка $A(x, y, z)$], рассматриваемые как функция координат точки A , конечны, непрерывны и однозначны.

Пусть Δ — расстояние между материальной точкой A и точкой, неизменно связанной с телом P . Тогда при неограниченном росте расстояния Δ произведение ΔU стремится к определенному, конечному пределу, равному $\int M dm$. Из этого свойства вытекает, что когда расстояние Δ достаточно велико по сравнению с

линейными размерами небесного тела P , то имеют место приближенные равенства:

$$U = f \frac{Mm}{\Delta}, \quad \frac{\partial U}{\partial \Delta} = -f \frac{Mm}{\Delta^2}. \quad (1.1.10)$$

Данный результат понятен: при расстоянии между материальной точкой A и небесным телом P , значительно большем линейных размеров тела P , в подынтегральном выражении (1.1.7) Δ можно осреднить и в связи с (1.1.9) получить зависимости (1.1.10).

Вывод 1. *Небесное тело P любой формы и любой структуры притягивает весьма удаленный от него космический летательный аппарат (материальную точку A) так, как будто вся масса тела сконцентрирована в одной точке*.*

Космический летательный аппарат может совершать маневры и вблизи планеты. В этом случае силовая функция и сила притяжения планеты будут зависеть не только от расстояния космического летательного аппарата до центра планеты, но и от ее формы, размеров и распределения масс. В первом приближении планеты можно принять шарами со сферическим** или однородным распределением плотностей. Это позволяет в формуле (1.1.7) взять интеграл в явном виде и получить

$$U = f \frac{Mm}{\Delta}$$

и

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где Δ — расстояние от центра шара до материальной точки.

Вывод 2. *Планета (материальное тело), имеющая форму шара со сферическим или однородным распределением плотностей, притягивает космический летательный аппарат (внешнюю материальную точку) так, как будто бы вся масса планеты сконцентрирована в ее центре.*

Полученные результаты широко используются в механике полета космического аппарата и позволяют в удобной и простой форме вычислять силы притяжения небесных тел. Принятые здесь допущения вполне удовлетворяют тем точностям, которые необходимы для исследования проектно-баллистических характеристик космического летательного аппарата на этапе его эскизных разработок.

* Для небесных тел можно аналогично показать, что два достаточно удаленных друг от друга, совершенно произвольных по форме и структуре, небесных тела притягиваются взаимно почти так же, как две материальные точки с соответствующими массами [12].

** Сферическое распределение плотности — это изменение плотности в зависимости от расстояния до центра шара.

При изучении и прогнозировании движения искусственных спутников планет, особенно движущихся по низким орбитам, необходима более точная информация о гравитационном поле планеты и ранее принятые допущения о распределении масс и форме планеты могут быть слишком грубыми. Так, например, даже непосредственные оптические наблюдения показывают, что сжатие планет Юпитера и Сатурна на порядок больше сжатия Земли. Полных сведений о форме и размерах Земли как геоида и других планет в настоящее время нет. Однако можно предложить физические модели планет, аппроксимирующие в зависимости от порядка малости отбрасываемых и удерживаемых членов практически с любой степенью точности форму и потенциал планеты. Кроме потенциала сферы, в качестве моделей потенциалов планет могут рассматриваться потенциалы сфероида, трехосного эллипсоида, несимметричного сфероида, трехосного несимметричного эллипсоида и т. д. Выбранная модель обыкновенно называется нормальным гравитационным потенциалом, а его отклонения от действительного — гравитационными аномалиями. Выбор нормального потенциала определяется поставленной задачей и требуемым уровнем точности решений.

Для задач баллистического проектирования и недолгосрочного прогнозирования околопланетных орбит допущение об осевой симметрии тел, т. е. о симметричном распределении масс относительно оси вращения планеты, справедливо и дает хорошие результаты. В этом случае в результате разложения потенциала планеты по сферическим функциям *гравитационный потенциал* U можно представить, ограничиваясь вторым членом разложения, в форме [1]

$$U = \frac{f m_{пл}}{r} \left[1 - \frac{2}{3} J \left(\frac{R_{пл}}{r} \right)^2 P_2(\sin \delta) - \dots \right] = \\ = \frac{f m_{пл}}{r} \left[1 - J \left(\frac{R_{пл}}{r} \right)^2 \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) - \dots \right], \quad (1.1.11)$$

где $R_{пл}$ — средний экваториальный радиус планеты;
 r, δ — планетоцентрический радиус-вектор и склонение КЛА;

$P_2 = \frac{3 \sin^2 \delta - 1}{2}$ — полином Лежандра 2-го порядка;

J — безразмерная постоянная, характеризующая форму планеты*.

* Для Земли $J_2 = \frac{2}{3} J = 0,0010827$ [30]; для Марса $J = 0,002920$; для Юпитера $J = 0,02206$; для Сатурна $J = 0,02501$ [10].

Притяжение материальной точки системой конечного числа материальных тел

При полете космического аппарата в Солнечной системе на него действует сила притяжения не одного, а многих небесных тел. Важно уметь рассчитывать равнодействующую этих сил и ее составляющие на оси координат. Если речь идет об оценке равнодействующей сил притяжения многих небесных тел, то можно говорить о большом удалении космического аппарата от них. В противном случае с хорошим приближением можно учитывать только силу притяжения планеты, вблизи которой космический аппарат находился. Тогда, обозначив через

$$\bar{q}_a = x_a \bar{i} + y_a \bar{j} + z_a \bar{k}, \quad \bar{q}_j = x_j \bar{j} + y_j \bar{j} + z_j \bar{k}$$

радиус-вектор космического летательного аппарата и радиус-вектор j -го небесного тела в инерциальной декартовой системе координат, в соответствии с выводом 1 равнодействующую сил притяжения представим в виде

$$\bar{F} = \frac{\partial U_a}{\partial x_a} \bar{i} + \frac{\partial U_a}{\partial y_a} \bar{j} + \frac{\partial U_a}{\partial z_a} \bar{k},$$

$$\text{где } U_a = M \sum_{j=1}^n f \frac{m_j}{\Delta_{aj}} \quad (1.1.12)$$

— силовая функция системы материальных тел *;

$$\Delta_{aj} = |\bar{q}_a - \bar{q}_j| = [(\bar{q}_a - \bar{q}_j) (\bar{q}_a - \bar{q}_j)]^{1/2};$$

n — число материальных тел системы.

Поэтому $\bar{F}$ и ее составляющие можно записать в виде

$$\bar{F} = -fM \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{aj}^3} (\bar{q}_a - \bar{q}_j), \quad (1.1.13)$$

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{\partial U_a}{\partial x_a} = -fM \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{aj}^3} (x_a - x_j), \\ F_y &= \frac{\partial U_a}{\partial y_a} = -fM \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{aj}^3} (y_a - y_j), \\ F_z &= \frac{\partial U_a}{\partial z_a} = -fM \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{aj}^3} (z_a - z_j). \end{aligned} \right\} \quad (1.1.14)$$

* Силовая функция системы свободных материальных точек, за которые принимаются небесные тела, принципиально отличается от U_a и равна

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad \text{причем } i \neq j \text{ [12]}. \quad (1.1.12a)$$

§ 2. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ КЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ СОЛНЦА И ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ. ГРАВИСФЕРЫ ПЛАНЕТ

Движение КЛА происходит под действием различного рода сил, причем одни силы, природа и характер действия которых известны, можно оценить количественно, другие же очень приближенно или вообще не поддаются количественной оценке. В общем случае силы, действующие на КЛА, можно представить состоящими из реактивной силы P , сил притяжения небесных тел F и силы сопротивления внешней среды* Q , составляющие которой не всегда поддаются количественной оценке, поскольку законы и характер их проявления плохо изучены или вообще не известны. Дифференциальное уравнение движения КЛА в векторной форме запишется так:

$$M\ddot{\bar{q}}_a = \bar{P} + \bar{F} + \bar{Q}, \quad (1.2.1)$$

где M — масса КЛА;
 $\bar{q}_a$ — радиус-вектор КЛА.

При изучении межпланетных полетов КЛА силой сопротивления внешней среды часто пренебрегают, так как движение КЛА происходит в основном за пределами атмосферы, а остальные составляющие силы Q оказывают малое влияние на полет** (хотя все их количественно оценить практически невозможно). Поэтому дифференциальное уравнение движения КЛА в векторной форме будем представлять в виде

$$M\ddot{\bar{q}}_a = \bar{P} + \bar{F}. \quad (1.2.2)$$

Движение КЛА, описываемое уравнением (1.2.2), называется *управляемым движением*, поскольку оно может изменяться посредством управления вектором реактивной силы ракетного двигателя. При выключенной двигательной установке движение КЛА описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$M\ddot{\bar{q}} = \bar{F}. \quad (1.2.3)$$

* К силам сопротивления внешней среды относятся, например, сила сопротивления атмосферы планеты, сила давления солнечных лучей, электромагнитные силы, возникающие благодаря наличию различных электромагнитных полей в межпланетном пространстве, и т. д.

** Например, для обычных спутников, движущихся по достаточно высоким круговым орбитам, со значениями коэффициента A , выражающего отношение характерной площади к массе спутника, в пределах $0,003 \div 0,3 \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ возмущения от светового давления равны по периоду обращения $\Delta P = 5 \cdot 10^{-7} \div 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$, по радиусу за один оборот $\Delta r_{\max} = 0,02 \div 0,2 \text{ м}$ [50].

Это движение называется *баллистическим (неуправляемым) движением КЛА*.

Если Солнце и планетные системы принять за материальные точки, то

$$\bar{F} = \frac{\partial U_a}{\partial \bar{q}_a} = - fM \sum_{j=0}^n \frac{m_j}{\Delta_{aj}^3} (\bar{q}_a - \bar{q}_j)$$

[см. формулы (1.1.12) и (1.1.13)],

где $\bar{q}_j$ — радиус-вектор j -го небесного тела ($j=0, 1, \dots, 9$);

$\Delta_{aj} = |\bar{q}_a - \bar{q}_j|$ — расстояние между j -м небесным телом и КЛА.

Управляемое движение или *активные участки разгона и торможения*, на которых достигается требуемый энергетический уровень для совершения аппаратом заданного маневра, определяющим образом влияет на выбор проектно-баллистических характеристик межпланетных полетов. Однако в зависимости от типа двигательной установки КЛА протяженность активных участков межпланетной траектории полета может быть самой различной. КЛА с двигательными установками типа ЖРД обладают большими реактивными ускорениями, и поэтому требуемый энергетический уровень достигается за несколько минут вблизи планеты отправления или назначения. Баллистический же полет может длиться в зависимости от планеты назначения несколько месяцев и даже лет. КЛА с электроракетными двигательными установками (ЭРД) обладают весьма малыми реактивными ускорениями, и поэтому активный участок разгона (торможения) является соизмеримым с баллистическим. Методы решения дифференциального уравнения управляемого движения (1.2.2) во многом определяются протяженностью активных участков. В книге рассматриваются КЛА с жидкостными ракетными двигателями. Это позволяет выявить и оценить специфические методы определения активных участков в зависимости от требуемой точности расчетов.

Для нахождения решения дифференциального уравнения управляемого (1.2.2) или баллистического (1.2.3) движения нужно иметь информацию об изменении радиуса-вектора планеты $\bar{q}_j$ в зависимости от времени полета t . Эта информация может быть получена различными способами. Наиболее простой способ ее получения заключается в предположении о кеплеровом движении планет вокруг Солнца (т. е. о движении планет под действием силы притяжения Солнца) и об изолированности солнечной системы (т. е. о прямолинейном и равномерном движении центра масс Солнечной системы). Для более точных расчетов уравнения (1.2.2) и (1.2.3) следует рассматривать совместно с дифференциальными уравнениями движения планет и Солнца.

Однако изучать движение КЛА с учетом влияния сил притяжения многих небесных тел в абсолютной системе координат

неудобно и трудно, поскольку астрономические наблюдения дают только относительные положения и скорости небесных тел. В пособиях по небесной механике [13, 48] предлагается изучать движение небесных тел (планет) в относительной (например гелиоцентрической) системе координат, когда начало координат помещается в центр масс одного из небесных тел (например Солнца). Поэтому следует перейти к *дифференциальным уравнениям относительного движения КЛА*, когда за начало координат принимается центр масс центрального тела*.

Для получения дифференциального уравнения управляемого относительного движения следует из левой и правой частей уравнения (1.2.2) вычесть соответственно левую и правую части дифференциального уравнения движения центрального тела

$$m_0 \ddot{\bar{q}}_0 = \bar{F}_0,$$

что дает

$$\ddot{\bar{q}}_a - \ddot{\bar{q}}_0 = \frac{\bar{P}}{M} + \frac{\bar{F}}{M} - \frac{\bar{F}_0}{m_0}.$$

Отсюда *дифференциальное уравнение управляемого относительного движения КЛА* примет вид

$$\ddot{\bar{R}}_a = \frac{\bar{P}}{M} - \frac{f m_0}{R_a^3} \bar{R}_a - \sum_{j=1}^n f m_j \left(\frac{\bar{\Delta}_{aj}}{\Delta_{aj}^3} + \frac{\bar{R}_j}{R_j^3} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R}_a &= \bar{q}_a - \bar{q}_0, \quad \bar{R}_j = \bar{q}_j - \bar{q}_0 \quad (j=1, \dots, n), \\ \bar{\Delta}_{aj} &= \bar{R}_a - \bar{R}_j. \end{aligned}$$

В связи со справедливостью соотношения

$$\frac{\bar{\Delta}_{aj}}{\Delta_{aj}^3} + \frac{\bar{R}_j}{R_j^3} = -\bar{\nabla} \left(\frac{1}{\Delta_{aj}} - \frac{\bar{R}_a \bar{R}_j}{R_j^3} \right),$$

где $\bar{\nabla}$ — оператор градиента по компонентам вектора $\bar{R}_a$, получим

$$\ddot{\bar{R}}_a = \frac{\bar{P}}{M} - \frac{f m_0}{R_a^3} \bar{R}_a + \bar{\nabla} R_p. \quad (1.2.4)$$

Скалярная функция

$$R_p = \sum_{j=1}^n f m_j \left(\frac{1}{\Delta_{aj}} - \frac{\bar{R}_a \bar{R}_j}{R_j^3} \right)$$

* *Центральное тело* — это небесное тело, относительно которого рассматривается движение.

характеризует действия притяжения небесных тел, за исключением центрального тела, и поэтому ее можно назвать *возмущающей функцией*, так как сила притяжения центрального тела является определяющей из всех сил притяжения. Это название R_p дано по аналогии с возмущающими функциями в небесной механике, возникающими при изучении относительного движения планет [13, стр. 110]. Дифференциальное уравнение (1.2.4) определяет *управляемое относительное движение*. *Баллистическое относительное движение* описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{\bar{R}}_a = -\frac{f m_0}{R_a^3} \bar{R}_a + \bar{\nabla} R_p, \quad (1.2.5)$$

полученным из (1.2.4). Если центральное тело выбрано правильно, то в правых частях уравнений (1.2.4) и (1.2.5) $\left| \frac{f m_0}{R_a^3} \bar{R}_a \right| \gg |\bar{\nabla} R_p|$

и член $|\bar{\nabla} R_p|$ можно трактовать как возмущающее ускорение, возникающее от возмущающих сил — сил притяжения небесных тел, за исключением центрального. Исходя из такой трактовки действия сил притяжения небесных тел (кроме центрального) относительное движение, описываемое уравнениями (1.2.4) и (1.2.5), часто рассматривают как *относительное возмущенное движение КЛА*. Это позволяет применять специфические аналитические и численные методы для решения уравнений (1.2.4) и (1.2.5), рассматриваемые в теории возмущенного движения (см., например [13, ч. III, гл. VII—IX]).

Дифференциальные уравнения относительного движения КЛА (1.2.4) и (1.2.5) в конечном виде не интегрируются. Для получения решения и характеристик движения КЛА используют различные приемы численного интегрирования, аналитические и качественные методы небесной механики. Аналитические методы в ряде случаев дают возможность найти общее или частное решение в основном дифференциального уравнения движения (1.2.5) в виде бесконечно сходящихся рядов, позволяющих находить числовые значения нужных характеристик движения с любой степенью точности. Качественные методы позволяют установить некоторые общие свойства характеристик движения КЛА без знания общего решения дифференциального уравнения движения. Отличительной особенностью методов численного интегрирования является их универсальность. В то время как применение аналитических методов имеет определенные ограничения, вызываемые малостью возмущений, пределами в значениях параметров орбит КЛА и т. д., при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения вообще не возникает вопроса о характере орбит КЛА и о величине возмущений. Однако систематическое накопление ошибки в процессе интегрирования в некоторых случаях может ограничивать возможности численных методов по сравнению с анали-

тически, свободными от этого недостатка. При решении конкретных задач межпланетного полета КЛА для получения большей информации о характеристиках движения следует сочетать все методы: аналитические, качественные и численные. Получая решения дифференциальных уравнений относительного движения КЛА (1.2.4) и (1.2.5), не следует забывать, что они являются приближенными. Приближения вызываются двумя различными причинами, связанными с физической и математической природой решения задачи. Физические причины приближения обусловлены уровнем знаний о действующих силах, пренебрежением (или невозможностью учета) некоторыми из них. Математические причины приближений вызываются методами решения уравнений движения. Если все эти приближения четко представить и правильно осмыслить, то можно избежать излишней точности и ненужных трудностей в процессе поиска инженерных решений и анализа проектно-баллистических характеристик межпланетных КЛА.

Путь к улучшению и упрощению численного интегрирования дифференциальных уравнений относительного движения КЛА — в определении области преобладающего воздействия на КЛА силы притяжения небесного тела, которое и следует рассматривать в качестве центрального тела. Этим телом могут быть Солнце и любая планета. В небесной механике уже возникала такая задача при изучении движения комет. Ее решение свелось к определению сферы действия планеты*.

Сфера действия планеты

Область пространства, в которой при вычислении возмущений целесообразно принимать планету за центральное тело, а Солнце — за возмущающее, называется сферой действия планеты. Количественная оценка этой области зависит от оценки отношения возмущающего ускорения к ускорению от силы притяжения центрального тела при сведении общей задачи к задаче трех тел: КЛА (или небесное тело очень малой массы) — планета — Солнце. Пусть δS — возмущающее ускорение, создаваемое силой притяжения Солнца, и F — ускорение от силы притяжения планеты, когда она рассматривается в качестве центрального тела; δF — возмущающее ускорение, создаваемое силой притяжения планеты, и S — ускорение от силы притяжения Солнца, когда оно принимается за центральное тело. Поверхность границы сферы действия выражается равенством

$$\frac{\delta S}{F} = \frac{\delta F}{S}.$$

* Понятие «сфера действия планеты» введено в небесную механику Лапласом в связи с изучением движения комет при их сближении с Юпитером.

Поверхность, определяемая этим уравнением, весьма близка к сфере с центром в центре планеты и радиусом

$$\Delta_l = R \left(\frac{m_{пл}}{m_{\odot}} \right)^{2/5}, \quad (1.2.6)$$

где R — средний радиус орбиты планеты. Значения Δ_l для планет даны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Радиусы грависфер планет

Планета	Радиус грависферы в млн. км			
	Δ_l	Δ_x	Δ_k	$\Delta_0 = \Delta_{p.v}$
Меркурий	0,113	0,221	0,367	0,320
Венера	0,616	1,01	1,68	1,46
Земля	0,925	1,49	2,48	2,16
Марс	0,578	1,08	1,80	1,56
Юпитер	48,2	51,9	88,1	76,6
Сатурн	54,6	64,3	108,3	94,1
Уран	51,9	69,6	116,4	101,2
Нептун	87,0	115,4	193,1	167,9
Плутон	37,6	57,4	95,4	83,0

Следует отметить, что в небесной механике введение понятия сферы действия было направлено на достижение более точных результатов численного интегрирования, поскольку это позволяет избежать чрезмерно больших значений слагаемых в правой части дифференциальных уравнений движения комет.

В космонавтике совершенствование методов численного интегрирования дифференциальных уравнений движения отвечает требованию повышения точности расчетов траекторий полета на завершающем этапе проектирования КЛА. Совершенствование же методов баллистического проектирования КЛА связано с поиском наиболее простых способов достижения нужного решения при требованиях к точности, отвечающих начальному этапу проектирования. Решения дифференциальных уравнений баллистического движения КЛА можно получить в законченном виде, т. е. найти все шесть первых интегралов, если пренебречь возмущениями и рассматривать движение КЛА под действием только силы притяжения центрального тела. Возникает вопрос, насколько точно такое решение и при каких условиях тогда следует переходить при изучении межпланетной траектории от планеты как центрального тела к Солнцу как центральному телу, и наоборот. Ответ на него представляет интерес, поскольку весь

ма заманчиво и удобно в инженерной практике проектирования использование законченного решения задачи двух тел: КЛА — небесное тело. Очевидно, оно будет приемлемо и по точности при малом влиянии возмущений на точное решение. Таким образом, возникает задача, как, оставаясь в рамках решений задачи двух тел, свести к минимуму отклонения от точного решения. Речь идет о представлении гравитационного поля Солнечной системы в виде *гравитационного поля Солнца*, ограниченного *гелиогравитоповерхностью*, и отдельных *гравитационных полей* планет, каждая из которых ограничена *гравитационной поверхностью планеты* (планетогравитоповерхностью). Правильно описать поверхности границ грависфер — значит найти минимум отклонений от точного решения при принятой модели гравитационного поля Солнечной системы. Здесь принципиальным моментом является вопрос о критерии, оценивающем такое отклонение.

До недавнего времени в практике баллистического проектирования КЛА в качестве границы поверхности грависферы планеты широко использовалась сфера действия планеты, определенная Лапласом. При этом утверждалось, что отклонения от точного решения находятся в пределах допустимого для баллистического проектирования. Однако, как уже отмечалось выше, введение понятия сферы действия планеты или грависферы Лапласа * совсем не предназначалось для решения такого рода задач — оценки решения задач двух тел. Поэтому некритическое использование грависферы Лапласа в практике баллистического проектирования КЛА может в дальнейшем привести к нежелательным методическим ошибкам, особенно в связи с ростом требований к точности предварительных разработок. Правда, до сих пор остается открытой задача геометрического описания оптимальных (правильных) гравитационных поверхностей планет. В 1964 г. на это обратил внимание М. Д. Кислик [26].

Грависфера Кислика **

М. Д. Кислик воспользовался возможностями, вытекающими из существования обобщенного интеграла энергии (интеграла Якоби) в ограниченной круговой задаче трех тел. В качестве критерия оптимальности, минимум которого определялся, была принята ошибка приближенного расчета постоянной обобщенного интеграла энергии (постоянной Якоби). Тем самым была сделана попытка наиболее близко подойти к решению ранее сформулированной общей задачи. Действительно, сравнение точных

* Такое название сферы действия планеты позволяет терминологически более четко отделить ее от других определений грависфер планет.

** М. Д. Кислик назвал определенную им грависферу «сфера влияния». Однако в литературе иногда так называют и сферу действия (грависферу Лапласа). Введенные здесь названия позволят более четко разграничить грависферы, определяемые различным образом.

расчетов траектории с приближенными показало, что ошибки расчета других параметров траектории (Δa , Δe и т. д.) на границе грависферы Кислика стали в среднем минимальны при перелете от одной планеты к другой.

Не вдаваясь в подробности вывода [26], отметим, что границу поверхности грависферы Кислика можно представить как сферу, центр которой совпадает с планетой, а радиус Δ_K определяется выражением

$$\Delta_K = 1,15R \left(\frac{m_{пл}}{m_{\odot}} \right)^{1/3}. \quad (1.2.7)$$

Значения Δ_K даны в табл. 1.1. Соотношение между Δ_L и Δ_K выражается равенством

$$\Delta_K = \frac{1,15}{\sqrt[3]{\frac{m_{пл}}{m_{\odot}}}} \Delta_L.$$

Сравнение значений Δ_K и Δ_L показывает, что размеры грависферы Кислика в 2—3 раза превышают размеры грависферы Лапласа.

В связи с отсутствием решения общей задачи о точности приближенного решения представляет интерес область пространства вокруг планеты, которая трактуется как теоретическая граница существования спутников планеты.

Грависфера Хилла

В результате исследования решения ограниченной круговой задачи трех тел (КЛА — планета — Солнце) выявляются пять особых точек, так называемых точек либрации, в которых в случае равенства нулю скорости полета КЛА равно нулю и его ускорение. Такая особая точка (точка L_1) существует и на прямой, соединяющей Солнце с планетой, между Солнцем и планетой.

Расстояние либрационной точки L_1 от планеты определяется следующей формулой [48, стр. 312]:

$$\Delta_x = R \left(v - \frac{1}{3} v^2 - \frac{1}{9} v^3 \right) \approx R \left(\frac{m_{пл}}{3m_{\odot}} \right)^{1/3}, \quad (1.2.8)$$

где

$$v = \left(\frac{m_{пл}}{3m_{\odot}} \right)^{1/3}.$$

Численные значения Δ_x даны в табл. 1.1. Область пространства с центром в планете и с радиусом Δ_x будем называть *грависферой Хилла*.

Поверхность сферы является поверхностью нулевой скорости. Она обладает еще рядом интересных свойств. Пусть постоянная

Якоби — постоянная обобщенного интеграла энергии в задаче трех тел — на поверхности грависферы Хилла равняется C_1 . Если постоянная Якоби баллистического движения КЛА больше постоянной C_1 , то можно утверждать, что он всегда останется внутри грависферы Хилла. Такая устойчивость носит название устойчивости по Хиллу. Поверхность грависферы Хилла может рассматриваться как теоретическая граница существования спутников планеты*.

Для точек, расположенных на поверхности грависферы Лапласа, Хилла и Кислика, максимальные значения соотношения $\delta S/F$ соответственно равны

$$\left(\frac{\delta S}{F}\right)_\text{л} = 2 \left(\frac{m_\text{пл}}{m_\odot}\right)^{1/5}; \quad \left(\frac{\delta S}{F}\right)_\text{х} = \frac{2}{3}; \quad \left(\frac{\delta S}{F}\right)_\text{к} = \sqrt{10}. \quad (1.2.9)$$

В связи с приведенными значениями отношения $\delta S/F$ представляет интерес область пространства около планеты, ограниченная поверхностью, на которой возмущающее ускорение δS , вызываемое силой притяжения Солнца, равно ускорению F от силы притяжения планеты, когда она принимается за центральное тело. Из равенства $\delta S = F$ найдем [48], что эта область мало отличается от сферы с центром в центре планеты и радиусом, равным

$$\Delta_{\text{р.в}} = R \left(\frac{m_\text{пл}}{m_\odot}\right)^{1/3}. \quad (1.2.10)$$

Сферу с радиусом $\Delta_{\text{р.в}}$ условно будем именовать *грависферой равных гравитационных воздействий или грависферой равных воздействий*.

Грависфера минимальных отклонений

Обращает на себя внимание такой факт, что, несмотря на несколько разные исходные предпосылки, грависферы Кислика, Хилла и равных воздействий в первом приближении описываются по форме одинаковым выражением вида [см. (1.2.7), (1.2.8) и (1.2.10)]

$$\Delta_l = k_l R \left(\frac{m_\text{пл}}{m_\odot}\right)^{1/3}, \quad (1.2.11)$$

где k_l соответственно равны $k_\text{к} = 1,15$, $k_\text{х} = 0,7$, $k_{\text{р.в}} = 1,0$. Поэтому допустимо предположение, что и гравитационную поверхность планеты, отвечающую решению ранее сформулированной общей задачи о минимальном отклонении, в первом приближении также можно представить сферой, радиус которой выра-

* Примечательно, что все естественные спутники планет в Солнечной системе, за исключением четырех спутников Юпитера с обратным движением (*VIII*, *IX*, *XI* и *XII*), являются устойчивыми по Хиллу.

жается соотношением вида (1.2.11). Эту грависферу условно назовем *грависферой минимальных отклонений*.

Выскажем ряд соображений по поводу возможной количественной оценки коэффициента $k_l = k_0$ для определения радиуса грависферы минимальных отклонений. Прежде всего отметим, что коэффициенты k_l изменяются довольно медленно в следующей последовательности: 0,7, 1,0 и 1,15 и лежат в узком диапазоне, максимальные же значения отношений $\left(\frac{\delta S}{F}\right)_{\max}$ на поверхности грависфер Хилла, равных воздействий и Кислика резко растут в такой последовательности: $\frac{2}{3}$, 1,0 и 3,3. Таким образом, значения коэффициентов изменяются всего в 1,5 раза, а значения $\left(\frac{\delta S}{F}\right)_{\max}$ в 5 раз. Такая скудность значений коэффициентов k_l при большом разбросе значений $\left(\frac{\delta S}{F}\right)_{\max}$ позволяет предположить, что значение k_0 также лежит в пределах $0,7 \leq k_0 \leq 1,2$. Если же принять во внимание отсутствие решения ранее сформулированной общей задачи о минимуме отклонений и сделанные допущения при определении радиуса грависферы Кислика [26] и учесть принципиальную роль влияния величины отношения $\delta S/F$ на возникновение отклонения приближенного решения от точного, то имеет смысл выбрать значение коэффициента k_0 как среднее квадратичное значений k_X , $k_{p.v}$ и k_K . Тогда получим

$$k_0 = \left(\frac{k_X^2 + k_{p.v}^2 + k_K^2}{3} \right)^{1/2} \approx 1.$$

Следовательно, в первом приближении грависфера минимальных отклонений довольно близка к грависфере равных воздействий, и ее радиус определяется выражением

$$\Delta_0 = R \left(\frac{m_{п.л}}{m_{\odot}} \right)^{1/3}. \quad (1.2.12)$$

§ 3. УПРАВЛЯЕМОЕ И БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ КЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ОДНОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА

Итак, решение дифференциальных уравнений управляемого и баллистического возмущенного движения (1.2.4) и (1.2.5) позволяет получить практически точную информацию о характеристиках траекторий межпланетных перелетов. Если отвлечься от ошибок аппаратной реализации законов управления на активных участках полета, то действительная траектория полета будет мало отличаться от расчетной. Это свидетельство не только объективности наших знаний, но и правильной оценки внешних сил, действующих на КЛА, и, в частности, преобладающей роли

сил притяжения. Однако обращаться к точным решениям следует только тогда, когда, по крайней мере, заканчивается разработка проекта.

При предварительных проектных разработках КЛА вряд ли необходимо иметь более точную информацию о характеристиках движения, чем точность проектно-весовых характеристик КЛА и данных о материалах конструкции, топливе и т. д. Возникает задача о получении приближенных решений дифференциальных уравнений движения КЛА, позволяющих достаточно просто, но с необходимой для проектных разработок точностью оценивать характеристики межпланетных перелетов и определять требования к КЛА. Достигнуть этого можно упрощением правых частей дифференциальных уравнений движения (1.2.4) и (1.2.5), если не учитывать силы притяжения тех небесных тел (планет, Солнца), которые по тем или иным причинам (большие расстояния, меньшие массы и т. д.) оказывают слабое воздействие на движение КЛА. Из всех допустимых решений наиболее простое достигается в том случае, когда пренебрегают возмущающим ускорением, полагая $R_p = 0$. В этом случае имеет место как бы фиктивное движение КЛА, возникающее под действием силы тяги и силы притяжения центрального тела, которое назовем *невозмущенным движением*. Оно аппроксимирует в первом приближении действительное движение. Существуют определенные границы (см. § 2), в пределах которых можно утверждать о хорошем приближении характеристик невозмущенного движения к действительным.

Согласно (1.2.4) *управляемое невозмущенное движение КЛА* описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{\bar{R}} = \frac{\bar{P}}{M} - \frac{f m_0}{R^3} \bar{R}, \quad (1.3.1)$$

где $\bar{R}$ — радиус-вектор КЛА;
 M — текущая масса КЛА.

Решения дифференциального уравнения управляемого невозмущенного движения (1.3.1) могут быть найдены только при задании начальных условий полета и закона изменения вектора тяги по времени. К сожалению, нет точных аналитических решений данного уравнения. Если же рассматривать дифференциальное уравнение *баллистического невозмущенного движения*

$$\ddot{\bar{R}} = - \frac{f m_0}{R^3} \bar{R}, \quad (1.3.2)$$

то можно получить все необходимые первые интегралы, полностью описывающие движение. Для нахождения первых интегралов баллистического невозмущенного движения обыкновенно используют хорошо разработанные в небесной механике методы решения задачи двух тел (см., например [13, гл. IV, V]).

Здесь отличие заключается в том, что одно из тел (КЛА) принимается за тело бесконечно малой массы. Баллистическое невозмущенное движение КЛА иногда называют еще *кеплеровым движением*.

При решении задач межпланетных полетов методически более удобно баллистическое движение рассматривать как частный случай управляемого движения, которым начинается межпланетный полет. Поэтому было бы желательно найти такой подход к решению дифференциального уравнения управляемого невозмущенного движения, при котором управляемое и баллистическое движения выступают в единстве, а первые интегралы баллистического движения определяются как частный случай общего решения.

Перейдем к рассмотрению уравнения (1.3.1). Приняв $\dot{\vec{R}} = \vec{V}$, представим его в виде

$$\dot{\vec{V}} = \frac{\vec{P}}{M} - \frac{f m_0}{R^3} \vec{R}, \quad (1.3.3)$$

где $\vec{V}$ — вектор скорости КЛА.

Интеграл энергии

Умножив скалярно левую и правую части уравнения (1.3.3) на $2\vec{V}$, найдем

$$2\vec{V} \cdot \dot{\vec{V}} = -\frac{2f m_0}{R^3} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{R}}) + \frac{2(\vec{P} \cdot \vec{V})}{M}.$$

После интегрирования найдем

$$V^2 - \frac{2f m_0}{R} = h_0 + 2 \int_{t_0}^t \frac{(\vec{P} \cdot \vec{V})}{M} dt, \quad (1.3.4)$$

где h_0 — постоянная интегрирования.

Переходя к относительной массе $\mu = \frac{M}{M_0}$ и учитывая равенство $\vec{P} = -\bar{p} W \dot{M}$, где $\bar{p}$ — единичный вектор тяги, получим

$$V^2 - \frac{2f m_0}{R} = h_0 - 2W \int_1^\mu \frac{(\bar{p} \cdot \vec{V})}{\mu} d\mu = h_0 - 2W \int_1^\mu (\bar{p} \cdot \vec{V}) d \ln \mu, \quad (1.3.5)$$

так как $M(t_0) = M_0$, и поэтому $\mu(t_0) = 1$. Приняв

$$h_u = h_0 - 2W \int_1^\mu (\bar{p} \cdot \vec{V}) d \ln \mu, \quad (1.3.6a)$$

будем иметь

$$V^2 - \frac{2f m_0}{R} = h_u. \quad (1.3.7a)$$

Уравнение (1.3.7а) будем называть *интегралом энергии управляемого движения*, показывающим, что полная энергия — сумма кинетической и потенциальной энергии, приходящаяся на единицу массы КЛА, меняется на активном участке от h_0 до

$$h_{u\kappa} = h_0 - 2W \int_1^{\mu_{\kappa}} (\bar{p}\bar{V}) d \ln \mu \quad (1.3.66)$$

(μ_{κ} — относительная конечная масса КЛА), а на участке баллистического полета она остается постоянной и равной $h_{u\kappa}$. Изменение при управляемом движении полной энергии единицы массы КЛА происходит благодаря работе, совершаемой силой тяги ракетного двигателя. Если сила тяги всегда нормальна вектору скорости, то, так как $(\bar{P} \cdot \bar{V}) = 0$, работа силы тяги двигателя будет равна нулю, и полная энергия на единицу массы КЛА не изменится на протяжении всего полета. Для получения на конце активного участка полета КЛА максимального значения полной энергии надо так управлять вектором тяги, чтобы в каждый момент времени управляемого полета $\frac{(\bar{P} \cdot \bar{V})}{M} = \max$. *

В случае баллистического движения интеграл энергии представим в виде

$$V^2 - \frac{2fm_0}{R} = h_{u\kappa}. \quad (1.3.76)$$

Векторный интеграл момента количества движения

После умножения левой и правой частей уравнения (1.3.3) векторно на $\bar{R}$ будем иметь

$$\bar{R} \times \dot{\bar{V}} = \frac{\bar{R} \times \bar{P}}{M} - \frac{fm_0}{R^3} (\bar{R} \times \bar{R}),$$

и в результате интегрирования получим

$$\bar{R} \times \bar{V} = \bar{C}_0 + \int_{t_0}^t \frac{\bar{R} \times \bar{P}}{M} dt = \bar{C}_0 - \int_{t_0}^t \frac{\bar{R} \times \bar{W}}{M} \dot{M} dt, \quad (1.3.8)$$

где $\bar{C}_0$ — постоянная интегрирования.

* Ошибочно предполагать, что $\max(\bar{P} \cdot \bar{V}) = PV(t)$ при $\cos(\widehat{\bar{P}\bar{V}}) = 1$. В этом случае скорость полета $V(t)$ будет меньше скорости полета $V_{\text{opt}}(t)$ при оптимальном управлении вектором тяги и $V_{\text{opt}}(t) \cos(\widehat{\bar{P}\bar{V}})_{\text{opt}} > V(t)$.

По аналогии с ранее выполненными преобразованиями это уравнение приведем к виду

$$\bar{R} \times \bar{V} = \bar{C}_0 - W \int_1^{\mu} (\bar{R} \times \bar{p}) d \ln \mu. \quad (1.3.9)$$

Обозначив

$$\bar{C}_u = \bar{C}_0 - W \int_1^{\mu} (\bar{R} \times \bar{p}) d \ln \mu, \quad (1.3.10)$$

представим (1.3.9) так:

$$\bar{R} \times \bar{V} = \bar{C}_u. \quad (1.3.11a)$$

Полученное уравнение будем называть *векторным интегралом момента количества движения управляемого полета**, приходящегося на единицу массы КЛА. Он показывает, что вектор момента количества движения единицы массы КЛА при управляемом движении меняется от $\bar{C}_0$ до значения $\bar{C}_{u\kappa} = \bar{C}_0 - W \int_0^{\mu_{\kappa}} (\bar{R} \times \bar{p}) \times$

$\times d \ln \mu$, а после выключения двигателя — на участке баллистического движения — является постоянным и равным $\bar{C}_{u\kappa}$. На участке управляемого движения вектор момента количества движения изменяется вследствие изменения вектора момента количества движения истекающих частиц рабочего тела ракетного двигателя. Если закон управления тягой таков, что вектор силы тяги всегда параллелен радиусу-вектору КЛА, то вектор момента количества движения на единицу массы КЛА не изменится и на протяжении всего полета будет равен $\bar{C}_0$.

Для баллистического движения векторный интеграл момента количества движения выражается в форме

$$\bar{R} \times \bar{V} = \bar{C}_{u\kappa}. \quad (1.3.11б)$$

Уравнение плоскости

Если умножить правую и левую части уравнения (1.3.1a) скалярно на $\bar{R}$ и на $\bar{V}$, то получим

$$\bar{R} \cdot \bar{C}_u = 0, \quad (1.3.12)$$

$$\bar{V} \cdot \bar{C}_u = 0. \quad (1.3.13)$$

Следовательно, вектор момента количества движения единицы массы КЛА $\bar{C}_u$ всегда нормален *мгновенной плоскости*, проходящей через центр масс центрального тела так, что в ней, кроме радиуса-вектора КЛА $\bar{R}$, находится и вектор скорости $\bar{V}$

* По аналогии с интегралами задачи двух тел небесной механики уравнение (1.3.8) можно назвать *векторным интегралом площадей*.

(рис. 1.3.1). Баллистическое невозмущенное движение происходит в одной плоскости, являющейся мгновенной плоскостью конца активного участка и определяемой уравнением

$$\bar{R}_a \cdot \bar{C}_{u\kappa} = 0, \quad (1.3.14)$$

где $\bar{R}_a$ — радиус-вектор конца активного участка.

Косинус угла наклонения мгновенной плоскости к плоскости начальной орбиты (см. рис. 1.3.1)

$$\cos \eta = \frac{\bar{C}_0 \cdot \bar{C}_u}{C_0 \cdot C_u} = \frac{C_0^2 + (\bar{C}_0 \cdot \bar{I}_c)}{C_0^2 + C_0 I_c}, \quad (1.3.15)$$

где

$$\bar{I}_c = -W \int_1^\mu (\bar{R} \times \bar{p}) d \ln \mu.$$

Поэтому согласно (1.3.15) угол наклонения плоскости орбиты баллистического движения к плоскости начальной орбиты будет

$$\eta_\kappa = \arccos \frac{\bar{C}_0 \cdot \bar{C}_{u\kappa}}{C_0 \cdot C_{u\kappa}}, \quad (1.3.16)$$

Если вектором тяги управлять так, что вектор $\bar{I}_c$ будет параллелен начальному вектору момента количества движения $\bar{C}_0$, то согласно (1.3.15) $\eta=0$ и управляемое и баллистическое движение будет происходить в одной плоскости — в плоскости начальной орбиты. В этом случае будем иметь

$$\bar{R} \cdot \bar{C}_0 = 0 \quad \text{и} \quad \bar{R} \cdot \bar{I}_c = 0.$$

Последнее уравнение соответствует условию $\bar{C}_0 \times \bar{I}_c = 0$ и поэтому $\bar{C}_0 \cdot \bar{p} = 0$.

Векторный интеграл Лапласа

После умножения векторно на $\bar{C}_u$ правой и левой частей уравнения (1.3.3) и ввиду равенства

$$\bar{R} \times \bar{C}_u = \bar{R} \times (\bar{R} \times \dot{\bar{R}})$$

получим

$$\dot{\bar{V}} \times \bar{C}_u = -\frac{f m_0}{R^3} [\bar{R} \times (\bar{R} \times \dot{\bar{R}})] + \frac{\bar{P} \times \bar{C}_u}{M}.$$

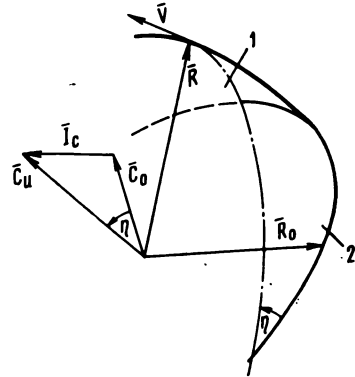


Рис. 1.3.1. Определение мгновенной плоскости и векторной переменной $\bar{C}_u$:

1—мгновенная плоскость; 2—начальная плоскость

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^3} [\bar{R} \times (\bar{R} \times \dot{\bar{R}})] &= \frac{1}{R^3} [\bar{R} (\bar{R} \cdot \dot{\bar{R}}) - \dot{\bar{R}} (\bar{R} \cdot \bar{R})] = \\ &= -(\dot{\bar{R}} \bar{R} - \bar{R} \dot{\bar{R}}) / R^2 = -\frac{d}{dt} \frac{\bar{R}}{R}, \end{aligned}$$

то после интегрирования, учитывая равенство

$$\int (\dot{\bar{V}} \times \bar{C}_u) dt = - \int \bar{C}_u \times d\bar{V} = \bar{V} \times \bar{C}_u - \int \bar{V} \times d\bar{C}_u,$$

будем иметь

$$\bar{V} \times \bar{C}_u = f m_0 \frac{\bar{R}}{R} + \int_{t_0}^t \left(\bar{V} \times \dot{\bar{C}}_u + \frac{\bar{P} \times \bar{C}_u}{M} \right) dt + f m_0 \bar{e}_0,$$

где $\bar{e}_0$ — векторная постоянная интегрирования.

Обозначив

$$f m_0 \bar{e}_u = f m_0 \bar{e}_0 + \int_{t_0}^t \left(\bar{V} \times \dot{\bar{C}}_u + \frac{\bar{P} \times \bar{C}_u}{M} \right) dt,$$

последнее уравнение приведем к виду

$$\bar{V} \times \bar{C}_u = f m_0 \frac{\bar{R}}{R} + f m_0 \bar{e}_u \quad (1.3.17)$$

и по аналогии с решением задачи двух тел небесной механики назовем его *векторным интегралом Лапласа*, а переменный вектор $\bar{f}_u = f m_0 \bar{e}_u$ — *переменным вектором Лапласа управляемого невозмущенного движения*. Учитывая согласно (1.3.8) и (1.3.11) выражения для переменных векторов $\bar{C}_u$ и $\bar{C}_u$, вектор $\bar{e}_u$ представим

$$\bar{e}_u = \bar{e}_0 + \frac{1}{f m_0} \int_{t_0}^t [\bar{V} \times (\bar{R} \times \bar{P}) + \bar{P} \times (\bar{R} \times \bar{V})] \frac{dt}{M}.$$

Раскрывая выражение двойного векторного произведения, получим

$$\bar{e}_u = \bar{e}_0 + \frac{1}{f m_0} \int_{t_0}^t [2 (\bar{P} \cdot \bar{V}) \bar{R} - (\bar{P} \cdot \bar{R}) \bar{V} - (\bar{V} \cdot \bar{R}) \bar{P}] \frac{dt}{M} \quad (1.3.18)$$

или, учитывая значение вектора $\bar{P}$, будем иметь

$$\bar{e}_u = \bar{e}_0 - \frac{W}{f m_0} \int_1^\mu [2 (\bar{p} \cdot \bar{V}) \bar{R} - (\bar{p} \cdot \bar{R}) \bar{V} - (\bar{V} \cdot \bar{R}) \bar{p}] d \ln \mu. \quad (1.3.19a)$$

Для баллистического невозмущенного полета вектор $\bar{e}_u$ становится постоянным и равным

$$\bar{e}_{u\kappa} = \bar{e}_0 - \frac{W}{fm_0} \int_1^{\mu_\kappa} [2(\bar{p} \cdot \bar{V}) \bar{R} - (\bar{p} \cdot \bar{R}) \bar{V} - (\bar{V} \cdot \bar{R}) \bar{p}] d \ln \mu, \quad (1.3.196)$$

а интеграл Лапласа имеет вид

$$\bar{V} \times \bar{C}_{u\kappa} = fm_0 \frac{\bar{R}}{R} + fm_0 \bar{e}_{u\kappa}. \quad (1.3.20)$$

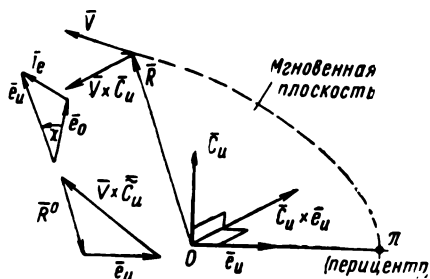


Рис. 1.3.2. Схема векторных соотношений:

$$\bar{R}^0 = \frac{\bar{R}}{R}; \quad \bar{C}_u = \frac{\bar{C}_u}{fm_0}$$

Положение вектора $\bar{e}_u$ в пространстве можно определить, умножив левую и правую части уравнения (1.3.17) скалярно на $\bar{C}_u$, что приводит к условию

$$\bar{C}_u \cdot \bar{e}_u = 0. \quad (1.3.21)$$

Таким образом, вектор Лапласа $\bar{e}_u$ * ортогонален векторной переменной интеграла момента количества движения $\bar{C}_u$. Поэтому вектор Лапласа $\bar{e}_u$ всегда лежит в мгновенной плоскости (рис. 1.3.2), определяемой уравнением (1.3.12).

Уравнение орбиты

Умножив правую и левую части уравнения (1.3.17) скалярно на $\bar{R}$ и имея в виду равенство

$$(\bar{V} \times \bar{C}_u) \cdot \bar{R} = (\bar{R} \times \bar{V}) \cdot \bar{C}_u = \bar{C}_u \cdot \bar{C}_u = C_u^2,$$

найдем

$$R + (\bar{R} \cdot \bar{e}_u) = \frac{C_u^2}{fm_0}. \quad (1.3.22)$$

Это уравнение *мгновенной поверхности*, в одной из точек которой находится в текущий момент времени КЛА. Совместно с уравнением мгновенной плоскости (1.3.12) уравнение мгновенной поверхности (1.3.22) определяет *мгновенную орбиту управ-*

* В дальнейшем для упрощения терминологии вектор $\bar{e}_u$ также будем называть вектором Лапласа.

ляемого движения. Поэтому два уравнения — (1.3.12) и (1.3.22) — представляют *общее уравнение мгновенной орбиты*, в одной из точек которой в данный момент находится КЛА. Уравнение (1.3.22) изображает в каждый момент времени поверхность второго порядка. Выясним вид поверхности. Семейство плоскостей, перпендикулярных текущему направлению переменного вектора Лапласа $\bar{e}_u$, определяется уравнением

$$\bar{R} \cdot \bar{e}_u = d, \quad (1.3.23)$$

где d — параметр семейства. Тогда согласно уравнению (1.3.22) получим

$$R = \frac{C_u^2}{f m_0} - d, \quad (1.3.24)$$

т. е. сечения мгновенной поверхности второго порядка (1.3.22) семейством плоскостей, перпендикулярных прямой, направленной вдоль текущего вектора Лапласа $\bar{e}_u$, есть окружности. Следовательно, *мгновенная поверхность (1.3.22) является поверхностью вращения второго порядка вокруг оси, направленной вдоль $\bar{e}_u$, и есть либо эллипсоид, либо параболоид, либо гиперболоид вращения*. Один из фокусов этой поверхности совпадает с центром масс центрального тела. Поскольку мгновенная плоскость (1.3.12) проходит через ось вращения поверхности, то *мгновенная орбита управляемого движения КЛА является плоской кривой второго порядка, один из фокусов которой совпадает с центром масс центрального тела и линия апсид (главная или фокальная ось) которой совпадает с направлением текущего вектора Лапласа*.

Текущий вектор Лапласа $\bar{e}_u$ всегда направлен в перигцентр мгновенной орбиты — в точку, наиболее близко расположенную на мгновенной орбите к центру масс центрального тела, принимаемого за правый фокус орбиты. Приняв угол между текущим радиусом-вектором КЛА и текущим вектором Лапласа равным v , уравнение мгновенной орбиты в мгновенной плоскости согласно (1.3.22) представим в виде

$$R = \frac{C_u^2 / f m_0}{1 + e_u \cos v}. \quad (1.3.25)$$

Полученное уравнение является *полярным уравнением конического сечения*, если принять $r_u = C_u^2 / f m_0$ — *фокальным параметром мгновенной орбиты*; e_u — *эксцентриситетом мгновенной орбиты*; v — *истинной аномалией мгновенной орбиты*.

Таким образом, семейство пространственных траекторий полета управляемого движения находится на поверхности, являющейся огибающей мгновенных эллипсоидов, параболоида и гиперболоидов, определяемых уравнением (1.3.22); в случае плоского управляемого движения траекторией полета является

огибающая мгновенных эллипсов, параболы и гипербол, выражаемых уравнением (1.3.25).

Поэтому мгновенное коническое сечение конца активного участка является орбитой баллистического невозмущенного движения, выражаемой уравнением

$$R = \frac{C_{u\kappa}^2 / f m_0}{1 + e_{u\kappa} \cos v} = \frac{p_{u\kappa}}{1 + e_{u\kappa} \cos v}. \quad (1.3.26)$$

Орбита находится в плоскости, задаваемой уравнением (1.3.14).

Угол между начальным и текущим векторами Лапласа χ можно определить из уравнения

$$\cos \chi = \frac{\bar{e}_0 \cdot \bar{e}_u}{e_0 e_u} = \frac{e_0^2 + (\bar{e}_0 \cdot \bar{I}_e)}{e_0^2 + e_0 I_e}, \quad (1.3.27)$$

где

$$\bar{I}_e = - \frac{W}{f m_0} \int_1^\mu [2 (\bar{p} \cdot \bar{V}) \bar{R} - (\bar{p} \cdot \bar{R}) \bar{V} - (\bar{V} \cdot \bar{R}) \bar{p}] d \ln \mu. \quad (1.3.28)$$

Тогда угол наклона вектора Лапласа орбиты баллистического невозмущенного движения к начальному вектору $\bar{e}_0$ равен

$$\chi_\kappa = \arccos \frac{\bar{e}_0 \cdot \bar{e}_{u\kappa}}{e_0 e_{u\kappa}} = \arccos \frac{e_0^2 + (\bar{e}_0 \cdot \bar{I}_{e\kappa})}{e_0^2 + e_0 I_{e\kappa}}. \quad (1.3.29)$$

Текущий вектор Лапласа $\bar{e}_u$ всегда будет параллелен начальному, если закон управления вектором тяги таков, что соблюдается равенство

$$\bar{e}_0 \times \bar{e}_u = \bar{e}_0 \times \bar{I}_e = 0,$$

которое удовлетворяется при выполнении условия

$$2 (\bar{p} \cdot \bar{V}) (\bar{e}_0 \times \bar{R}) - (\bar{p} \cdot \bar{R}) (\bar{e}_0 \times \bar{V}) - (\bar{V} \cdot \bar{R}) (\bar{e}_0 \times \bar{p}) = 0. \quad (1.3.30)$$

Полученное соотношение может быть удовлетворено при двух различных законах управления вектором тяги. Если вектор тяги, как и вектор скорости, будет всегда параллелен радиусу-вектору, направленному вдоль линии апсид начальной орбиты, то ввиду $\bar{e}_0 \times \bar{R} = \bar{e}_0 \times \bar{V} = \bar{e}_0 \times \bar{p} = 0$ соотношение (1.3.30) удовлетворяется и $\bar{e}_u = \bar{e}_0$. В случае параллельности вектора тяги $\bar{P}$ вектору скорости $\bar{V}$, который ортогонален радиусу-вектору $\bar{R}$, направленному в перицентр начальной орбиты, соотношение (1.3.30) выполняется ввиду $\bar{e}_0 \times \bar{R} = 0$ и $(\bar{p} \cdot \bar{R}) = (\bar{V} \cdot \bar{R}) = 0$. Это возможно при расположении вектора тяги в плоскости орбиты и при импульсном изменении тяги (т. е. импульсном изменении скорости полета) в перицентре мгновенной орбиты.

Для баллистического невозмущенного движения может представлять интерес зависимость вектора скорости КЛА $\bar{V}$ от ра-

диуса-вектора, которую можно получить после векторного умножения на $\bar{C}_{u\kappa}$ левой и правой частей уравнения (1.3.20) и ряда преобразований в виде

$$\bar{V} = \frac{fm_0}{C_{u\kappa}} e_{u\kappa} \bar{C}_{u\kappa}^0 \times \bar{e}_{u\kappa}^0 + \frac{fm_0}{C_{u\kappa}} \bar{C}_{u\kappa}^0 \times \bar{R}^0.$$

Примечательно, что вектор скорости $\bar{V}$ выражается как сумма двух составляющих, постоянных по величине, одна из которых перпендикулярна радиусу-вектору и равна $fm_0/C_{u\kappa}$, а другая — перпендикулярна линии апсид и равна $\frac{fm_0}{C_{u\kappa}} e_{u\kappa}$. Далее, учитывая согласно определению истинной аномалии выражение

$$\bar{R}^0 = \bar{e}_{u\kappa}^0 \cos v + (\bar{C}_{u\kappa}^0 \times \bar{e}_{u\kappa}^0) \sin v, \quad (1.3.31a)$$

предыдущее уравнение можно записать в следующей форме:

$$\bar{V} = \frac{fm_0}{C_{u\kappa}} [(e_{u\kappa} + \cos v) \bar{C}_{u\kappa}^0 \times \bar{e}_{u\kappa}^0 - \bar{e}_{u\kappa}^0 \sin v], \quad (1.3.31b)$$

раскрывающей зависимость вектора скорости КЛА $\bar{V}$ при баллистическом невозмущенном движении от истинной аномалии и векторных постоянных интегрирования $\bar{C}_{u\kappa}$ и $\bar{e}_{u\kappa}$.

Взаимосвязь векторных переменных $\bar{C}_u$, $\bar{e}_u$ и h_u

Существует взаимная связь векторных переменных $\bar{C}_u$, $\bar{e}_u$ и переменной h_u . Найдем ее. После умножения правой и левой частей уравнения (1.3.17) скалярно на $\bar{e}_u$ будем иметь

$$fm_0(\bar{e}_u \cdot \bar{e}_u) = (\bar{V} \times \bar{C}_u) \cdot \bar{e}_u - \frac{fm_0}{R} (\bar{R} \cdot \bar{e}_u).$$

Подставляя в это уравнение значение $\bar{e}_u$ и $(\bar{R} \cdot \bar{e}_u)$ согласно (1.3.17) и (1.3.22) и учитывая равенства

$$(\bar{V} \times \bar{C}_u) \cdot (\bar{V} \times \bar{C}_u) = (\bar{C}_u \cdot \bar{C}_u) V^2,$$

$$(\bar{V} \times \bar{C}_u) \cdot \bar{R} = (\bar{C}_u \cdot \bar{C}_u),$$

получим

$$(\bar{e}_u \cdot \bar{e}_u) = 1 + \frac{(\bar{C}_u \cdot \bar{C}_u)}{(fm_0)^2} h_u$$

или

$$e_u^2 = 1 + \left(\frac{C_u}{fm_0} \right)^2 h_u. \quad (1.3.32a)$$

Отсюда имеет место равенство

$$h_u = (fm_0)^2 \frac{(\bar{e}_u \cdot \bar{e}_u) - 1}{(\bar{C}_u \cdot \bar{C}_u)}. \quad (1.3.32b)$$

Баллистическое движение

Имеет смысл более подробно познакомиться с характеристиками баллистического движения, так как оно охватывает наибольший промежуток времени межпланетного полета. Баллистическое невозмущенное движение описывается первыми интегралами (1.3.76), (1.3.116) и (1.3.20). Постоянные интегрирования $h_{u\kappa}$, $C_{u\kappa}$ и $\bar{f}_{u\kappa}$ полностью определяют положение орбитальной плоскости, ориентацию орбиты в плоскости движения, ее форму и размеры. Понятно, что из семи скалярных величин $h_{u\kappa}$, $C_{u\kappa}^i$ и $f_{u\kappa}^i$ ($i=1, 2, 3$) только пять являются независимыми, поскольку они согласно (1.3.21) и (1.3.32) связаны следующими соотношениями:

$$\bar{C}_{u\kappa} \bar{f}_{u\kappa} = 0, \quad h_{u\kappa} = \frac{(\bar{f}_{u\kappa} \bar{f}_{u\kappa}) - (f m_0)^2}{(\bar{C}_{u\kappa} \bar{C}_{u\kappa})}. \quad (1.3.33)$$

Поэтому для образования общего интеграла векторного уравнения движения (1.3.2) нужно найти шестой интеграл, содержащий время явно. Условие (1.3.14), характеризующее баллистическое движение как плоское, позволяет интеграл момента количества движения (1.3.116) в плоскости орбиты представить в форме $R^2 \frac{dv}{dt} = C_{u\kappa}$, что даст возможность с учетом полярного уравнения орбиты (1.3.26) записать недостающий (шестой) независимый первый интеграл в виде

$$t - t_a = \frac{C_{u\kappa}^3}{(f m_0)^2} \int_{v_a}^v \frac{1}{(1 + e \cos v)^2} dv \quad (1.3.34a)$$

или

$$t - \tau = \frac{C_{u\kappa}^3}{(f m_0)^2} \int_0^{\Phi} \frac{1}{(1 + e \cos v)^2} dv, \quad (1.3.34b)$$

где $e = |\bar{e}_{u\kappa}| = \frac{|\bar{f}_{u\kappa}|}{f m_0}$ — эксцентриситет орбиты баллистического движения.

τ — момент времени прохождения КЛА перицентра орбиты;

t_a — момент времени окончания работы двигательной установки или начальный момент баллистического движения, называемый начальной эпохой;

v_a — истинная аномалия КЛА мгновенной орбиты в момент выключения двигательной установки.

Интеграл (1.3.34) является табличным. Однако в зависимости от типа баллистического движения он берется по-разному.

В случае *эллиптического движения* [13, § 2 гл. V] (когда $V_a^2 < \frac{2fm_0}{R_a}$ и $e < 1$) получим

$$n(t - t_a) = E - E_a - e(\sin E - \sin E_a) \quad (1.3.35a)$$

или

$$n(t - \tau) = E - e \sin E, \quad (1.3.35b)$$

где E — эксцентриская аномалия, геометрическая интерпретация которой дана на рис. 1.3.3;

$$n = \sqrt{\frac{fm_0}{a^3}};$$

a — большая полуось орбиты.

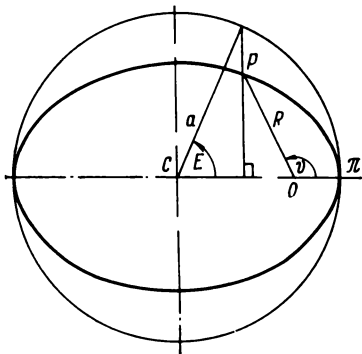


Рис. 1.3.3. Геометрическая интерпретация истинной аномалии ν и эксцентриской аномалии E эллиптической орбиты

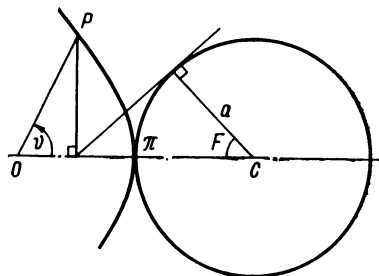


Рис. 1.3.4. Геометрическая интерпретация истинной аномалии ν и вспомогательной переменной F гиперболической орбиты

Для *гиперболического движения* [13, § 2 гл. V] (когда $V_a^2 > \frac{2fm_0}{R_a}$ и $e > 1$) имеем

$$n(t - t_a) = e(\operatorname{tg} F - \operatorname{tg} F_a) - \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right) / \operatorname{tg} \left(\frac{F_a}{2} + 45^\circ \right) \right] \quad (1.3.36a)$$

или

$$n(t - \tau) = e \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right), \quad (1.3.36b)$$

где F — вспомогательная переменная, геометрическая интерпретация которой дана на рис. 1.3.4.

Если ввести новую вспомогательную переменную H , связанную с F соотношением

$$\operatorname{sh} H = \operatorname{tg} F,$$

то будем иметь

$$n(t - t_a) = e(\operatorname{sh} H - \operatorname{sh} H_a) - (H - H_a) \quad (1.3.37a)$$

или

$$n(t - \tau) = e \operatorname{sh} H - H. \quad (1.3.37b)$$

Кроме эллиптического и гиперболического движения КЛА принципиально можно рассматривать в качестве невозмущенного движения круговое ($e=0$, $V_a = \sqrt{\frac{f m_0}{R_a}}$), параболическое ($e=1$, $V_a = \sqrt{2 \frac{f m_0}{R_a}}$) и прямолинейное движение. Если последний тип движения — прямолинейное — следует трактовать как вырожденное, то к круговому и параболическому нужно подходить как к предельным случаям кеплеровского движения. Если эксцентриситет эллиптической орбиты мал (например, $e < 0,02$ при $R_{cp} < 10000$ км), то удобно пользоваться зависимостями теории кругового движения, рассматривая его как первое приближение к эллиптическому движению, что позволяет координаты (и составляющие скорости) КЛА представить в виде явной зависимости от времени [50]:

$$v = M + 2e \sin M, \quad (1.3.38)$$

$$R = a(1 - e \cos M), \quad (1.3.39)$$

где $M = \frac{V \sqrt{f m_0}}{a^{3/2}}(t - \tau)$. При этом приближенные оценки для линейных погрешностей в определении положения КЛА по направлению радиуса ΔR и по нормали ΔN к нему (лежащей в плоскости орбиты) можно рассчитывать по следующим зависимостям [50]:

$$|\Delta R| \leq e^2 R_{cp}, \quad |\Delta N| \leq \frac{5}{4} e^2 R_{cp}. \quad (1.3.40)$$

Переход от точных формул эллиптического движения к теории почти кругового движения можно считать вполне оправданным при значениях ΔR и ΔN , не превосходящих величин 5—10 км, поскольку ошибки, возникающие от допущения о невозмущенности движения (неучет влияния нецентральности поля сил тяжести, аэродинамического сопротивления, силы притяжения Солнца и т. д.), могут достигать величин порядка десятков и даже сотен километров. Понятно, что теория кругового и почти кругового движения может быть использована для изучения характеристик баллистического движения только искусственных спутников планет.

Параболическое движение КЛА — это предельный случай эллиптического или гиперболического движения. В действительности параболическое движение как тип движения может существовать только одно мгновение, переходя под действием даже очень малых возмущений в другой тип: эллиптический или гиперболический. Однако в теоретическом плане параболическое движение и параболическая скорость, определяемая по формуле

$$V_a = \sqrt{\frac{2fm_0}{R_a}},$$

представляет определенный интерес, позволяя выявить предельные характеристики движения искусственных спутников планет и минимальные энергетические возможности межпланетных полетов. В случае параболического движения, поскольку

$$V_a = \sqrt{\frac{2fm_0}{R_a}} \text{ и } e=1, \quad \text{согласно (1.3.34) получим}$$

$$2n(t-t_a) = \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_a}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} - \operatorname{tg}^3 \frac{v_a}{2} \right) \quad (1.3.41a)$$

или

$$2n(t-\tau) = \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2}, \quad (1.3.41b)$$

что позволяет задачу определения истинной аномалии v для заданного момента времени t свести к решению кубического уравнения

$$\sigma^3 + 3\sigma - M = 0, \quad (1.3.42)$$

имеющего единственное действительное решение. Здесь $\sigma = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$, $M = 6n(t-t_a)$ или $M = 6n(t-\tau)$.

Таким образом, соотношения (1.3.76), (1.3.116), (1.3.20) и (1.3.34) [или вместо (1.3.34) уравнения (1.3.35), (1.3.36) и (1.3.41)] позволяют с учетом (1.3.33) определить шесть независимых первых интегралов и тем самым образовать общий интеграл векторного уравнения движения (1.3.2). Знание из семи пяти независимых постоянных $h_{u\kappa}$, $C_{u\kappa}^i$, $f_{u\kappa}^i$ ($i=1, 2, 3$) и t_a или τ дает возможность однозначно определить положение КЛА в пространстве и в заданный момент времени. Шесть постоянных интегрирования, позволяющих однозначно определить положение КЛА в любой момент времени при баллистическом невозмущенном движении, называются *элементами орбиты КЛА*. Рассмотренная система элементов орбиты КЛА является полной. Кроме нее, можно ввести много других полных систем элементов орбиты КЛА [50, § 5.4, 5.6], [7, § 1.8], [52, § 3.7, 3.8], определяя их различными способами. Для решения ряда задач, излагаемых в последующих главах, важно представление баллистической орбиты и характеристик движения в зависимости от кинематических параметров в конце активного участка и t_a .

Система элементов $\bar{R}_a$, $\bar{V}_a$ и t_a

Пусть в качестве элементов орбиты используются радиус-вектор $\bar{R}_a$ и вектор скорости $\bar{V}_a$ в момент окончания работы двигательной установки t_a . По интегральным соотношениям (1.3.11) и (1.3.20) и связи (1.3.32) определим значения постоянных интегрирования в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{u\kappa} &= \bar{R}_a \times \bar{V}_a, \\ \bar{f}_{u\kappa} &= \bar{V}_a \times \bar{C}_{u\kappa} - f m_0 \frac{\bar{R}_a}{R_a}, \\ h_{u\kappa} &= \frac{f_{u\kappa}^2 - (f m_0)^2}{C_{u\kappa}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.43)$$

Далее можно найти и некоторые кеплеровские элементы орбиты (см., например [13, § 3 гл. IV]): фокальный параметр p , эксцентриситет e и большую полуось орбиты a по следующим зависимостям:

$$e = e_{u\kappa} = \left\{ \left[\frac{(\bar{R}_a \times \bar{V}_a)^2}{f m_0 R_a} - 1 \right]^2 + \left[\frac{|\bar{R}_a \times \bar{V}_a|}{f m_0 R_a} (\bar{R}_a \cdot \bar{V}_a) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (1.3.44)$$

$$p = p_{u\kappa} = \frac{(\bar{R}_a \times \bar{V}_a)^2}{f m_0}, \quad a = \frac{f m_0}{2 \frac{f m_0}{R_a} - V_a^2}, \quad (1.3.45)$$

причем

$$|\bar{R}_a \times \bar{V}_a| = R_a \cdot V_a \cdot \cos \theta_a = \sqrt{(R_a V_a)^2 - (\bar{R}_a \cdot \bar{V}_a)^2} \quad (1.3.46)$$

и $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (рис. 1.3.5). Элементы p , e и a характеризуют форму и размеры орбиты. Учитывая определение истинной аномалии, найдем

$$\left. \begin{aligned} \cos v_a &= \frac{1}{f m_0 e} \left[\frac{(\bar{R}_a \times \bar{V}_a)^2}{R_a} - f m_0 \right], \\ \sin v_a &= \frac{|\bar{R}_a \times \bar{V}_a|}{f m_0 e R_a} (\bar{R}_a \cdot \bar{V}_a). \end{aligned} \right\} \quad (1.3.47)$$

* Значение $a < 0$ соответствует гиперболической орбите, условно представляемой в виде мнимой эллиптической (эллипс с отрицательной большой полуосью и мнимой малой полуосью), что позволяет формально перенести на гиперболическую орбиту все соотношения, полученные для движения по эллиптической орбите.

Решая уравнения (1.3.31а) и (1.3.31б) относительно единичных векторов $\bar{e}_{u\kappa}^0$ и $\bar{l}^0 = \bar{C}_{u\kappa}^0 \times \bar{e}_{u\kappa}^0$ при заданных $\bar{R}_a$, $\bar{V}_a$ и v_a , получим

$$\bar{e}_{u\kappa}^0 = \frac{e + \cos v_a}{p} \bar{R}_a - \frac{R_a}{\sqrt{f m_0 p}} \sin v_a \bar{V}_a, \quad (1.3.48)$$

$$\bar{l}^0 = \frac{\sin v_a}{p} \bar{R}_a + \frac{R_a}{\sqrt{f m_0 p}} \cos v_a \bar{V}_a. \quad (1.3.49)$$

Здесь следует иметь в виду, что вектор $\bar{e}_{u\kappa}^0$ направлен из центра небесного тела в перицентр орбиты, а вектор $\bar{l}^0$ перпендикуля-

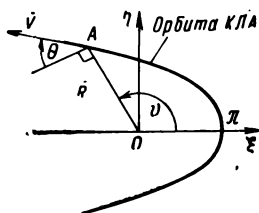


Рис. 1.3.5. Орбитальная полярная система координат:

v — истинная аномалия; $\bar{R}$ — расстояние от центра небесного тела до КЛА (точка А)

рен к нему в плоскости орбиты при правой системе координат (рис. 1.3.6). Интересно отметить, что радиус-вектор перицентра орбиты $\bar{R}_\pi$ выражается формулой

$$\bar{R}_\pi = \frac{e + \cos v_a}{1 + e} \bar{R}_a - \sqrt{\frac{p}{f m_0}} \frac{R_a \sin v_a}{(1 + e)} \bar{V}_a, \quad (1.3.50)$$

легко получаемой из уравнения (1.3.48) после умножения левой и правой ее частей на R_π с учетом равенства $p = R_\pi(1 + e)$.

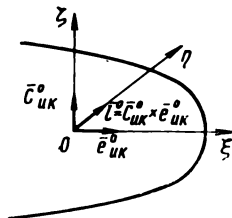


Рис. 1.3.6. Орбитальная система координат и ее орты

Обращаясь опять к уравнениям (1.3.31а) и (1.3.31б), можно с учетом полученных соотношений (1.3.48) и (1.3.49) представить зависимость текущих значений радиуса-вектора $\bar{R}$ и вектора скорости $\bar{V}$ от $\bar{R}_a$, $\bar{V}_a$ и разности $(v - v_a)$ в виде

$$\bar{R} = \left\{ 1 - \frac{R}{p} [1 - \cos (v - v_a)] \right\} \bar{R}_a + \frac{R \cdot R_a}{\sqrt{f m_0 p}} \sin (v - v_a) \bar{V}_a, \quad (1.3.51)$$

$$\bar{V} = \left\{ \frac{(\bar{R}_a \cdot \bar{V}_a)}{p R_a} [1 - \cos(v - v_a)] - \frac{1}{R_a} \sqrt{\frac{f m_0}{p}} \sin(v - v_a) \right\} \bar{R}_a + \\ + \left\{ 1 - \frac{R_a}{p} [1 - \cos(v - v_a)] \right\} \bar{V}_a. \quad (1.3.52)$$

Выражая $\cos v = \cos[(v - v_a) + v_a]$ и учитывая зависимость

$$(\bar{V} \cdot \bar{R}^0) = \dot{R} = \sqrt{\frac{f m_0}{p}} e \sin v, \quad (1.3.53)$$

запишем для удобства вычислений радиуса R полярное уравнение орбиты в следующей форме:

$$R = \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{R_a} - 1 \right) \cos(v - v_a) - \frac{1}{R_a} \sqrt{\frac{p}{f m_0}} (\bar{R}_a \cdot \bar{V}_a) \sin(v - v_a)}. \quad (1.3.54)$$

Для определения зависимости текущих значений $\bar{R}$, R и $\bar{V}$ от времени полета t при заданных $\bar{R}_a$, $\bar{V}_a$ и t_a необходимо обратиться в зависимости от типа движения к уравнениям (1.3.35а), (1.3.37а) — (1.3.39) и (1.3.41). Однако можно получить и другие более удобные для вычислений зависимости R и V от t при заданных $\bar{R}_a$, $\bar{V}_a$ и t_a , которые, правда, будут непосредственно связаны с конкретным типом движений.

Эллиптическое движение

Имея в виду определение эксцентрической аномалии E (см. рис. 1.3.3), получим

$$R = a(1 - e \cos E), \quad (1.3.55)$$

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad (1.3.56)$$

$$\cos E = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}, \quad \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin v}{1 + e \cos v}, \quad (1.3.57)$$

поэтому можно написать:

$$\cos E = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{R}{a} \right), \quad \sin E = \frac{\bar{R} \cdot \bar{V}}{e \sqrt{f m_0 a}}. \quad (1.3.58)$$

Последние соотношения позволяют уравнение (1.3.35а) после ряда преобразований представить в следующей форме [7, § 2.6]:

$$n(t - t_a) = (E - E_a) + \frac{\bar{R}_a \cdot \bar{V}_a}{\sqrt{f m_0 a}} [1 - \cos(E - E_a)] - \\ - \left(1 - \frac{R_a}{a} \right) \sin(E - E_a). \quad (1.3.59)$$

Подставляя в уравнения (1.3.31) и (1.3.48), (1.3.49) значения $\cos v$ и $\sin v$ согласно (1.3.56), после некоторых преобразований уравнения (1.3.31) выразим в виде

$$\bar{R} = \left\{ 1 - \frac{a}{R_a} [1 - \cos (E - E_a)] \right\} \bar{R}_a + \\ + \left\{ (t - t_a) - \frac{1}{n} [(E - E_a) - \sin (E - E_a)] \right\} \bar{V}_a, \quad (1.3.60)$$

$$\bar{V} = - \frac{\sqrt{f m_0 a}}{R \cdot R_a} \sin (E - E_a) \bar{R}_a + \left\{ 1 - \frac{a}{R} [1 - \cos (E - E_a)] \right\} \bar{V}_a. \quad (1.3.61)$$

Гиперболическое движение

Аналогичным образом, учитывая уравнения

$$R = a (e \operatorname{ch} H - 1), \quad (1.3.62)$$

$$\cos v = \frac{e - \operatorname{ch} H}{e \operatorname{ch} H - 1}, \quad \sin v = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H}{e \operatorname{ch} H - 1}, \quad (1.3.63)$$

$$\operatorname{ch} H = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}, \quad \operatorname{sh} H = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin v}{1 + e \cos v}, \quad (1.3.64)$$

преобразуем уравнения (1.3.31) и (1.3.37а) к виду

$$n (t - t_a) = \frac{(\bar{R}_a \cdot \bar{V}_a)}{\sqrt{f m_0 a}} [\operatorname{ch} (H - H_a) - 1] + \\ + \left(1 + \frac{R_a}{a} \right) \operatorname{sh} (H - H_a) - (H - H_a), \quad (1.3.65)$$

$$\bar{R} = \left\{ 1 - \frac{a}{R_a} [\operatorname{ch} (H - H_a) - 1] \right\} \bar{R}_a + \\ + \left\{ (t - t_a) - \frac{1}{n} [\operatorname{sh} (H - H_a) - (H - H_a)] \right\} \bar{V}_a, \quad (1.3.66)$$

$$\bar{V} = - \frac{\sqrt{f m_0 a}}{R \cdot R_a} \operatorname{sh} (H - H_a) \bar{R}_a + \left\{ 1 - \frac{a}{R} [\operatorname{ch} (H - H_a) - 1] \right\} \bar{V}_a. \quad (1.3.67)$$

Таким образом, по значениям кинематических параметров в конце активного участка можно определить положение КЛА, скорость и ее составляющие в каждый момент времени. Существует взаимно однозначное соответствие между совокупностями кинематических параметров в конце активного участка и постоянными интегрирования и кеплеровскими элементами.

Движение КЛА по околопланетным орбитам в нормальном гравитационном поле

В ряде задач межпланетного полета КЛА должен выйти (или сойти) на эллиптическую или круговую околопланетную орбиту. Выбор ее характеристик неразрывно связан с расчетом межпланетной траектории полета. Кроме того, в случае требования определенного времени пребывания КЛА на орбите возникает задача о прогнозировании его движения, поскольку элементы орбиты со временем изменяются под влиянием действительного гравитационного поля планеты. Поэтому прогнозирование движения КЛА по околопланетной орбите является неотъемлемой частью задачи расчета межпланетных траекторий полета.

Для уровня точности прогнозирования движения, требующегося для задач проектирования орбит, вполне можно воспользоваться представлением нормального потенциала планеты в виде соотношения (1.1.11). Тогда в векторной форме дифференциальное уравнение относительного баллистического движения КЛА в нормальном гравитационном поле планеты согласно (1.2.3) представим следующим образом:

$$\ddot{\vec{R}} = - \frac{f m_{\text{пл}}}{R^3} \vec{R} - \nabla U_1; \quad (1.3.68)$$

где

$$U_1 = \frac{f m_{\text{пл}}}{R} J \left(\frac{R_{\text{пл}}}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta \right),$$

причем

$$\sin \delta = \vec{R}^0 \times \vec{i}_z; \quad \nabla (\vec{R}^0 \cdot \vec{i}_z) = \frac{1}{R} [\vec{i}_z - (\vec{R}^0 \cdot \vec{i}_z) \vec{R}^0]; \quad \nabla R = \vec{R}^0; \quad (1.3.69)$$

$\vec{i}_z$ — единичный вектор вдоль оси симметрии.

В работах М. Д. Кислика [24, 25] было получено точное решение данного уравнения движения*, которое является следующим приближением по сравнению с теорией кеплеровского движения в описании действительного околопланетного движения КЛА в пространстве без атмосферы.

Используя первые интегралы, полученные М. Д. Кисликом, можно довольно точно, исключая влияние аномалий силы тяжести и возмущения от Солнца, прогнозировать движение КЛА. Для задач проектирования околопланетных орбит главное в прогнозировании — изменение характеристик движения за период обращения. Поэтому, представляя каждый раз через период (пе-

* Система дифференциальных уравнений возмущенного движения искусственного спутника планеты в общем случае не может быть проинтегрирована в замкнутом виде. Однако имеются различные пути получения приближенных решений, описывающих движение спутника в нецентральной гравитационном поле. В настоящее время известно довольно много таких приближенных способов. См., например [10, 17].

риоды) обращения орбиту эллиптической, пойдем по пути сравнения ее элементов с исходной эллиптической орбитой, построенной по начальным данным условий перехода КЛА на орбиту около планеты. Изменения элементов орбиты за период обращения называются *вековыми изменениями* (возмущениями). Анализ указанных интегралов уравнений движения строго показал отсутствие вековых возмущений элементов начальной орбиты КЛА p , e и i и существование вековых изменений элементов Ω , ω и τ , подчиняющихся следующим условиям*:

$$\frac{d\Omega}{dN} = -2J \frac{\pi R_{\text{пл}}^2}{p^2} \cos i, \quad (1.3.70)$$

$$\frac{d\omega}{dN} = \frac{\pi R_{\text{пл}}^2}{p^2} (5 \cos^2 i - 1), \quad (1.3.71)$$

$$\frac{d\tau}{dN} = -J \frac{\pi R_{\text{пл}}^2}{p^2} \sqrt{\frac{p^3}{f m_{\text{пл}}}} (1 + 5 \cos^2 i), \quad (1.3.72)$$

где $\frac{d\Omega}{dN}$, $\frac{d\omega}{dN}$ и $\frac{d\tau}{dN}$ — изменение элементов Ω , ω и τ за один оборот КЛА.

Погрешность формулы (1.3.71) растет с уменьшением e и достигает максимального значения (величины порядка $\epsilon^2 = = J R_{\text{пл}}^2 / p^2$) при $e(\epsilon^2)$. К таким орбитам применять формулу (1.3.71) нельзя, так как ошибка достигает того же порядка, что и сама определяемая величина $\frac{d\omega}{dN}$. При $e \approx 1$ эта ошибка имеет порядок ϵ^4 .

Уравнение (1.3.70) показывает, что под влиянием сил притяжения нормального гравитационного поля планеты начальный угол восходящего узла изменяется в направлении, противоположном вращению КЛА. Изменение происходит тем быстрее, чем меньше наклон плоскости орбиты к плоскости экватора. Под влиянием тех же сил перигентр и его угловое расстояние начальной эллиптической орбиты изменяются за период (1.3.71). Угловое расстояние перигентра увеличивается, если $(5 \cos^2 i - 1) > 0$, т. е. $i < 63,4^\circ$, и уменьшается, если $(5 \cos^2 i - 1) < 0$. При значении $i = 63,4^\circ$ перигентр практически не изменяет своего положения. Таким образом, под влиянием сил притяжения планеты-сфероида изменяется положение начальной эллиптической орбиты как за счет вращения плоскости орбиты, так и за счет вращения линии апсид, т. е. вращения самой орбиты в плоскости, причем форма и размеры орбиты вековых изменений не испытывают. Вместе с этим за период обращения изменяется момент прохождения КЛА восходящего узла.

* См. [25], формулы (111), (120) и (130).

Период обращения КЛА по орбите в нормальном гравитационном поле планеты с погрешностью порядка $\varepsilon^2 e^2 \sqrt{\frac{p^3}{f m_{пл}}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{f m_{пл}}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 [(1 + 5 \cos^2 i) + 6e \cos \omega + 2e \cos(\zeta - \omega)(1 - 5 \cos^2 i)] \right\}, \quad (1.3.73)$$

где

$$\varepsilon = J \frac{R_{пл}^2}{p^2},$$

$$\sin \zeta \approx \frac{\sin \delta}{\sin i}.$$

Драконический период обращения КЛА T_d в нормальном гравитационном поле планеты (интервал времени между двумя последовательными прохождением КЛА через восходящий узел) можно представить в виде зависимости

$$T_d = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{f m_{пл}}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 [(1 + 5 \cos^2 i) - 2e \cos \omega (1 - 5 \sin^2 i)] \right\}. \quad (1.3.74)$$

Приведенные соотношения позволяют проводить прогноз эволюции начальной орбиты КЛА около планеты, нормальный потенциал которой описывается соотношением (1.1.11).

§ 1. Определение орбит по двум положениям КЛА

Существуют различные методы расчета орбит межпланетных перелетов КЛА в гелиосфере. Различие в методах вызывается

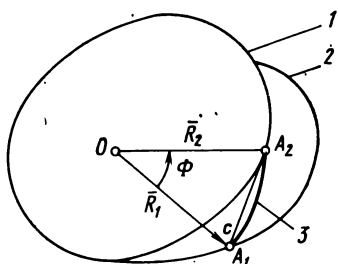


Рис. 2. 1. 1. Орбита межпланетного перелета КЛА:

1—орбита планеты назначения;
2—орбита планеты отправления;
3—орбита межпланетного перелета КЛА

главным образом различными исходными данными, определяющими требования и задачу межпланетного перелета. В ряде случаев в качестве исходных данных могут рассматриваться положения КЛА в начале и конце полета, задаваемые радиусами-векторами $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ (рис. 2. 1. 1), время старта t_1 и перелета $\Delta t_{1,2}$. Задание $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, t_1 и $\Delta t_{1,2}$ позволяет полностью определить форму и размеры орбиты перелета, положение ее плоскости в пространстве и ее кеплеровские элементы. Однако это связано с решением системы из шести трансцендентных

уравнений относительно шести параметров орбиты. Перейдем к описанию уравнений указанной системы и к методам ее решения.

Метод Ламберта

Уравнение Ламберта. Так как модуль векторной постоянной $|\bar{C}_{ук}|$ векторного интеграла момента количества движения равен удвоенной секториальной скорости, то удвоенная площадь сектора

$$S_{1,2} = C_{ук}(t_2 - t_1) = C_{ук}\Delta t_{1,2}.$$

Учитывая зависимость $C_{ик} = \sqrt{f m_0 p}$, найдем

$$\Delta t_{1,2} = \frac{S_{1,2}}{\sqrt{f m_0 p}} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{f m_0}} \frac{S_{1,2}}{a \sqrt{a p}}. \quad (2.1.1)$$

Оказывается, что правую часть уравнения (2.1.1) можно представить в виде зависимости от a , R_1 , R_2 и c или Φ (см. рис. 2.1.1), структура которой связана с типом движения и воз-

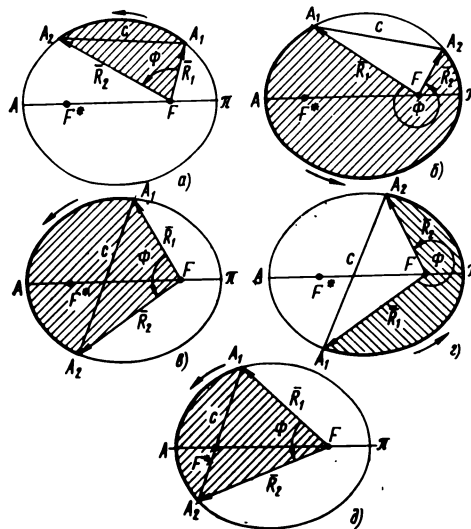


Рис. 2.1.2. Эллиптические траектории:

$a - \Phi < \pi$, хорда A_1A_2 не пересекает линию апсид между фокусами FF^* ; $b - \Phi > \pi$, $\Phi = 2\pi - \Phi_a$, хорда A_1A_2 не пересекает линию апсид между фокусами FF^* ; $в - \Phi < \pi$, хорда A_1A_2 пересекает линию апсид между фокусами FF^* ; $г - \Phi > \pi$, $\Phi = 2\pi - \Phi_b$, хорда A_1A_2 пересекает линию апсид между фокусами FF^* ; $д -$ свободный фокус F^* лежит на хорде A_1A_2

никающей неоднозначностью в определении кривой конического сечения, поскольку положение свободного фокуса не фиксировано [41, гл. V]. Дело в том, что при неизвестном положении свободного фокуса (в главном фокусе находится небесное тело) через две заданные точки в пространстве могут проходить две конкретного типа орбиты при одинаковом значении полной энергии $h_{ик}$, приходящейся на единицу массы КЛА, т. е. при одном и том же значении большой полуоси a . Поэтому площадь сектора зависит не только от значения угла Φ , но и от положения свободного фокуса относительно хорды A_1A_2 (для эллиптической орбиты см. рис. 2.1.2).

Уравнение Ламберта получим для эллиптических орбит, так как межорбитальные перелеты характеризуются в основном такими орбитами. В общем случае имеем

$$\frac{S_{1,2}}{a \sqrt{ap}} = (\bar{\epsilon} - \sin \bar{\epsilon}) - (\bar{\delta} - \sin \bar{\delta}), \quad (2.1.2)$$

где значения углов ϵ и δ определяются неоднозначно из соотношений

$$\sin \frac{\bar{\epsilon}}{2} = \pm \sqrt{\frac{R_1 + R_2 + c}{4a}}, \quad \sin \frac{\bar{\delta}}{2} = \pm \sqrt{\frac{R + R_2 - c}{4a}}. \quad (2.1.3)$$

Однако вычислить секториальную площадь можно по более определенной формуле, если значения $\bar{\epsilon}/2$ и $\bar{\delta}/2$ выбирать в пределах от нуля до $\pi/2$, учитывая при этом особенности возможных случаев перелета (см. рис. 2.1.2). На основании этого рисунка найдем

$$(S_{1,2})_6 = S - (S_{1,2})_a,$$

$$(S_{1,2})_r = S - (S_{1,2})_b,$$

где S — удвоенная площадь эллипса.

Для рис. 2.1.2, a и b соответственно имеем [41]

$$\left. \begin{aligned} \frac{(S_{1,2})_a}{a \sqrt{ap}} &= (\epsilon - \sin \epsilon) - (\delta - \sin \delta), \\ \frac{(S_{1,2})_b}{a \sqrt{ap}} &= 2\pi - (\epsilon - \sin \epsilon) - (\delta - \sin \delta), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

причем $0 \leq \epsilon \leq \pi$, $0 \leq \delta < \pi$ и выражаются уравнениями (2.1.3). Тогда для рис. 2.1.2, b и g получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{(S_{1,2})_6}{a \sqrt{ap}} &= 2\pi - (\epsilon - \sin \epsilon) + (\delta - \sin \delta), \\ \frac{(S_{1,2})_r}{a \sqrt{ap}} &= (\epsilon - \sin \epsilon) + (\delta - \sin \delta). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

Обобщая эти случаи расчета секториальных площадей и учитывая уравнение (2.1.1), *уравнение Ламберта* представим в виде

$$\Delta t_{1,2} = \frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{f m_0}} \left\{ 1 + \frac{\text{sign}(\sin \Phi)}{\pi} [\pm (\epsilon - \sin \epsilon - \pi) - (\delta - \sin \delta)] \right\}, \quad (2.1.6)$$

где верхний знак соответствует случаям a и b , когда хорда A_1A_2 не пересекает линию апсид между фокусами *. Здесь $\text{sign}(\sin \Phi)$ определяется как $+1, 0, -1$ согласно знаку аргумента $\sin \Phi$, т. е.

$$\text{sign}(\sin \Phi) = \begin{cases} +1 & \sin \Phi > 0 \\ 0 & \sin \Phi = 0 \\ -1 & \sin \Phi < 0 \end{cases}$$

Если КЛА до встречи с планетой назначения совершает несколько оборотов по переходной орбите, то время перелета будет

$$\Delta t = NT + \Delta t_{1,2},$$

где $T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{f m_0}}$ — период обращения по переходной эллиптической орбите;
 N — число оборотов по переходной орбите ($N = 0, 1, \dots$).

В этом случае *обобщенное уравнение Ламберта* (2.1.6) приводится к следующей форме:

$$\Delta t_{1,2} = \frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{f m_0}} \left\{ 2N + 1 + \frac{\text{sign}(\sin \Phi)}{\pi} [\pm(\epsilon - \sin \epsilon - \pi) - (\delta - \sin \delta)] \right\}. \quad (2.1.7)$$

Следовательно, решая трансцендентное уравнение (2.1.7) при известном числе оборотов КЛА N до встречи с планетой назначения и при заданных Δt , $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$, можно вычислить большую полуось орбиты перелета a .

Уравнения (2.1.2) и (2.1.7) дают соотношение между разностью углов $(\epsilon - \delta)$ и $(\bar{\epsilon} - \bar{\delta})$ представить в следующей форме:

$$\Delta = \bar{\epsilon} - \bar{\delta} = (2N + 1)\pi + \text{sign}(\sin \Phi) [\pm(\epsilon - \pi) - \delta]. \quad (2.1.8)$$

Кроме того, определение углов $\bar{\epsilon}$ и $\bar{\delta}$ связано с равенством

$$E_2 - E_1 = \bar{\epsilon} - \bar{\delta} = \Delta. \quad (2.1.9)$$

Примечание. Для гиперболической орбиты аналогом обобщенного уравнения Ламберта является уравнение

$$\Delta t_{1,2} = \frac{\sqrt{-a^3}}{\sqrt{f m_0}} [(\text{sh } \alpha - \alpha) - (\text{sh } \beta - \beta) \text{sign}(\sin \Phi)], \quad (2.1.10)$$

* Встречается и другая классификация орбит. Эллиптические траектории, у которых свободный фокус орбиты лежит вне сегмента (площадь между траекторией и прямой A_1A_2), называют *эллиптическими траекториями (орбитами) первого рода* (случаи «а» и «г»). Эллиптические траектории, у которых свободный фокус орбиты лежит внутри сегмента (случаи «б» и «в»), называют *эллиптическими траекториями (орбитами) второго рода*. Эллиптические траектории, у которых свободный фокус лежит на хорде A_1A_2 , называют *границными эллиптическими траекториями* (см. рис. 2.1.2, д).

вытекающее из (2.1.1) с учетом возможных перелетов (рис. 2.1.3). Здесь

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{R_1 + R_2 + c}{-4a}}, \quad \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{R_1 + R_2 - c}{-4a}}, \quad \alpha \geq \beta > 0. \quad (2.1.11)$$

Время полета из точки R_1 в точку R_2 по параболической траектории (возможные случаи см. рис. 2.1.4) согласно (2.1.1) выражается уравнением Эйлера

$$\Delta t_{\text{пар}} = \frac{1}{6 \sqrt{f m_0}} [(R_1 + R_2 + c)^{3/2} - (R_1 + R_2 - c)^{3/2} \operatorname{sign}(\sin \Phi)]. \quad (2.1.12)$$

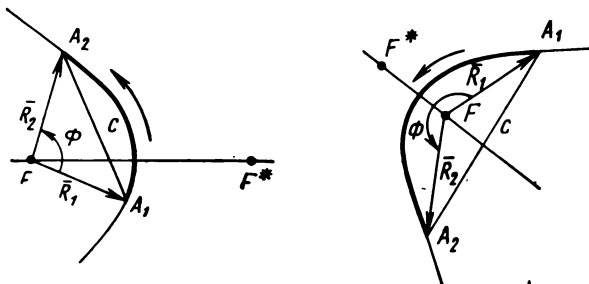


Рис. 2.1.3. Гиперболические траектории

Определение типа траектории. Решение трансцендентных уравнений (2.1.7) и (2.1.10), (2.1.12) относительно большой полуоси a можно проводить известными численными методами, если заранее известны тип движения, расположение свободного фокуса относительно хорды и число оборотов N в случае эллиптической орбиты. Предварительное определение этих условий позволит

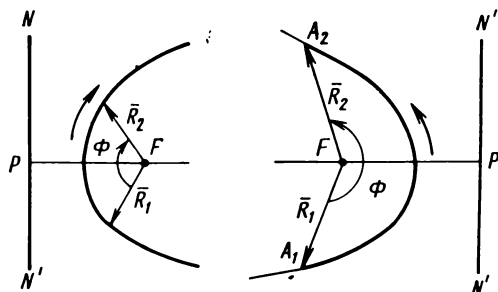


Рис. 2.1.4. Параболические траектории:
 NN' —директриса; FP —линия апсид

упростить и облегчить проведение итерационного процесса. Вполне естественно при одних и тех же граничных условиях $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ выполнение неравенства $\Delta t_{\text{г}} < \Delta t_{\text{пар}} < \Delta t_{\text{эл}}$. Поэтому для

определения типа орбиты достаточно по формуле (2.1.12) вычислить $\Delta t_{\text{пар}}$. Если заданное $\Delta t_{1,2}$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta t_{1,2} < \Delta t_{\text{пар}}, \quad (2.1.13)$$

то переход из точки $\bar{R}_1$ в точку $\bar{R}_2$ возможно осуществить только по гиперболической орбите; если же

$$\Delta t_{1,2} > \Delta t_{\text{пар}}, \quad (2.1.14)$$

то перелет может быть реализован только по эллиптической орбите.

Граничная эллиптическая орбита (см. рис. 2.1.2д) характеризуется нахождением свободного фокуса F^* на хорде, соединяющей точки $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$. Фокальное свойство эллипса позволяет написать

$$R_1 + F^*A_1 + R_2 + F^*A_2 = 4a$$

и тем самым ввиду $F^*A_1 + F^*A_2 = c$ найти значение большой полуоси граничной эллиптической орбиты:

$$a_m = \frac{1}{4} (R_1 + R_2 + c). \quad (2.1.15)$$

Следует отметить, что a_m — наименьшее значение большой полуоси, при которой еще возможна при заданных $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ эллиптическая траектория. Для граничной траектории время перелета согласно (2.1.7) и (2.1.3) выражается формулой

$$\Delta t_m = \frac{a_m^{3/2}}{\sqrt{f m_0}} [(2N+1)\pi - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)], \quad (2.1.16)$$

причем $\sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{R_1 + R_2 - c}{R_1 + R_2 + c}}, \quad \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2}.$

Значение Δt_m при выполнении неравенства (2.1.14) позволяет выяснить вид эллиптической траектории. Исследования при $N=0$ показывают [50, § 8.6, 8.7], что при удовлетворении заданного $\Delta t_{1,2}$ неравенству

$$\Delta t_{1,2} < \Delta t_m \quad (2.1.17)$$

перелет КЛА возможно осуществить только по эллиптической траектории первого рода; если же

$$\Delta t_{1,2} > \Delta t_m, \quad (2.1.18)$$

то реализация перелета возможна только по эллиптической траектории второго рода.

Таким образом, уравнение Ламберта (2.1.6) можно представить в виде

$$\Delta t_{1,2} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{f m_0}} [\pi + \text{sign}(\Delta t_m - \Delta t_{1,2})(\epsilon - \sin \epsilon - \pi) - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)]. \quad (2.1.19)$$

При $N \geq 1$ решение обобщенного уравнения Ламберта (2.1.7) неоднозначно. Однако при $\Delta t_{1,2} < \Delta t_m$ и заданном N эллиптические траектории второго рода реализоваться не могут. Кроме того, можно показать, что если для заданных значений $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ и $\Delta t_{1,2}$ решение возможно при каком-то $N = N_k$, то оно возможно и при любом $N < N_k$. Пусть k — наибольшее значение N , при котором еще возможно решение задачи. Оно определяется из условия

$$\Delta t_k \leq \Delta t_{1,2}, \quad \Delta t_{k+1} > \Delta t_{1,2},$$

где Δt_k — минимально возможное Δt при $N = k$. Тогда число возможных решений уравнения (2.1.7) равно $2k$ [50, § 8.7].

Определение векторов скорости $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$. В результате решения уравнения Ламберта вычисляется большая полуось орбиты a . Остальные элементы орбиты и ее положение в пространстве определяются уже значительно проще. Для решения этой задачи вполне достаточно найти вектор скорости в начальной точке $\bar{V}_1$, т. е. свести задачу к определению орбиты по начальным данным $\bar{R}_1$ и $\bar{V}_1$, которая уже решена в § 3 гл. I. Полезно иметь также зависимость вектора скорости в конечной точке $\bar{V}_2$ от $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$.

Обратимся к формулам (1.3.60) и (1.3.61). Имея в виду равенство (2.1.9) и новые обозначения, представим их в следующей форме:

$$\bar{R}_2 = \left[1 - \frac{a}{R_1} (1 - \cos \Delta) \right] \bar{R}_1 + \left[\Delta t_{1,2} - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{f m_0}} (\Delta - \sin \Delta) \right] \bar{V}_1,$$

$$\bar{V}_2 = - \frac{\sqrt{f m_0 a}}{R_1 R_2} \sin \Delta \bar{R}_1 + \left[1 - \frac{a}{R_2} (1 - \cos \Delta) \right] \bar{V}_1,$$

причем согласно ранее изложенному при $N = 0$ имеем

$$\Delta = \pi + \text{sign}(\Delta t_m - \Delta t_{1,2}) (\varepsilon - \pi) - \text{sign}(\sin \Phi) \delta. \quad (2.1.20)$$

После преобразования получим

$$\bar{V}_1 = A \bar{R}_2 - B_1 \bar{R}_1, \quad (2.1.21)$$

$$\bar{V}_2 = B_2 \bar{R}_2 - C \bar{R}_1, \quad (2.1.22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \left[\Delta t_{1,2} - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{f m_0}} (\Delta - \sin \Delta) \right]^{-1}, \\ B_1 &= A \left[1 - \frac{a}{R_1} (1 - \cos \Delta) \right], \quad B_2 = A \left[1 - \frac{a}{R_2} (1 - \cos \Delta) \right], \\ C &= \frac{\sqrt{f m_0 a}}{R_1 R_2} \sin \Delta + B_1 \left[1 - \frac{a}{R_2} (1 - \cos \Delta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.23a)$$

Если учесть равенство (2. 1. 8) и зависимость

$$\sqrt{R_1 R_2} \cos \frac{\Phi}{2} = 2a \sin \frac{\bar{\epsilon}}{2} \sin \frac{\bar{\delta}}{2},$$

то значения коэффициентов A , B и C можно представить еще в виде

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{f m_0 / a R_1 R_2}}{2 \sin \frac{\Delta}{2} \cos \frac{\Phi}{2}}, \quad B_1 = A \left(1 - \frac{2a}{R_1} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \right), \\ B_2 &= A \left(1 - \frac{2a}{R_2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \right), \\ C &= \frac{\sqrt{f m_0 a}}{R_1 R_2} \sin \Delta + B_1 \left(1 - \frac{2a}{R_2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2. 1. 23б)$$

Примечание. Для гиперболической орбиты значения коэффициентов A , B и C выражаются следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} A &= \left[\Delta t_{1.2} - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{f m_0}} (\operatorname{sh} \Delta - \Delta) \right]^{-1}; \\ B_1 &= A \left[1 - \frac{a}{R_1} (\operatorname{ch} \Delta - 1) \right], \quad B_2 = A \left[1 - \frac{a}{R_2} (\operatorname{ch} \Delta - 1) \right]; \\ C &= \frac{\sqrt{f m_0 a} \sin \Delta}{R_1 R_2} + B_1 \left[1 - \frac{a}{R_2} (\operatorname{ch} \Delta - 1) \right], \end{aligned} \right\} \quad (2. 1. 24)$$

где $\Delta = \alpha - \beta \operatorname{sign}(\sin \Phi)$.

Основываясь на факте, что касательные к орбите в точках A_1 и A_2 и биссектриса центрального угла Φ имеют общую точку пересечения, можно получить зависимость

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= \operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cos \frac{\Delta}{2} \operatorname{cosec} \frac{\Phi}{2}; \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \cos \frac{\Delta}{2} \operatorname{cosec} \frac{\Phi}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (2. 1. 25)$$

выражающую значение траекторного угла в точках A_1 и A_2 .

Определение фокального параметра p . В ряде случаев может быть более удобен другой алгоритм определения орбиты, когда после решения уравнения Ламберта (вычисления a) непосредственно обращаются к зависимостям, определяющим фокальный параметр p . Согласно соотношениям между истинной и эксцентрической аномалиями имеем

$$\sqrt{R_1 R_2} \sin \frac{\Phi}{2} = \sqrt{a p} \sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1). \quad (2. 1. 26)$$

Далее, используя равенство

$$C^2 = (\bar{R}_2 - \bar{R}_1)^2 = 2a \sin \frac{E_2 - E_1}{2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{E_2 + E_1}{2}}$$

и определение ε и δ в пределах от нуля до π с учетом неравенств (2. 1. 17) и (2. 1. 18), найдем

$$p = \frac{R_1 R_2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{a \sin^2 \frac{\varepsilon - \gamma}{2}} \quad (2. 1. 27a)$$

или

$$p = \frac{4aR_1 R_2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{c^2} \sin^2 \frac{\varepsilon + \gamma}{2}, \quad (2. 1. 276)$$

где

$$\gamma = \delta [\operatorname{sign}(\Delta t_m - \Delta t_{1,2}) \operatorname{sign}(\sin \Phi)].$$

Воспользовавшись уравнением (1. 3. 51), с учетом новых обозначений получим формулу, определяющую вектор скорости в начальной точке:

$$\bar{V}_1 = \frac{V \sqrt{f m_0 p}}{R_1 R_2 \sin \Phi} \left\{ \bar{R}_2 - \left[1 - \frac{R_2}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \bar{R}_1 \right\}. \quad (2. 1. 28)$$

Таким образом, задача сведена к задаче определения орбиты по начальным условиям $\bar{R}_1$ и $\bar{V}_1$, решенной в § 3 гл. I.

Примечание. Для гиперболической орбиты фокальный параметр p определяется по формуле

$$p = - \frac{4aR_1 R_2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{c^2} \operatorname{sh} \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad (2. 1. 29)$$

где

$$\gamma = \beta \operatorname{sign}(\sin \Phi).$$

При определении положения плоскости орбиты в пространстве можно встретиться с рядом особенностей решения, когда $\Phi = \pi$ и заданные точки положения КЛА лежат по разные стороны прямой, проходящей через притягивающий центр. Геометрически это означает, что положение орбиты не определено — она может располагаться в любой плоскости, проходящей через прямую $A_1 A_2$. Для определения орбиты необходимо предварительно задаться положением ее плоскости и направлением движения. Кроме того, в этом случае можно встретиться с трудностями вычисления некоторых других элементов орбиты, поскольку в ряде соотношений, приведенных выше, знаменатель обращается в нуль.

Метод v -итераций

Для избежания указанных особенностей в вычислении элементов, характеризующих форму и размеры орбиты, следует использовать метод итераций по истинной аномалии (метод v -итераций). Исследования показали, что этот метод является очень удобным и позволяет достаточно быстро определить орбиту по двум положениям и интервалу времени перелета [52, § 6.5 гл. VI].

Метод v -итераций заключается в предварительном задании начального значения истинной аномалии в начальной точке v_1 . Далее вычисляется эксцентриситет орбиты по формуле

$$e = \frac{R_2 - R_1}{(R_1 - R_2 \cos \Phi) \cos v_1 + R_2 \sin \Phi \sin v_1}, \quad (2.1.30)$$

получаемой из полярного уравнения орбиты с учетом заданных двух положений КЛА. Если $\Delta t_{1,2} < \Delta t_{\text{пар}}$, то исходное значение v_{10} должно удовлетворять условию $e \geq 1$, что может быть достигнуто при ее определении из (2.1.30) при $e=1$, т. е. из уравнения

$$\cos v_{10} + \frac{R_2 \sin \Phi}{R_1 - R_2 \cos \Phi} \sin v_{10} - \frac{R_2 - R_1}{R_1 - R_2 \cos \Phi} = 0. \quad (2.1.31)$$

В случае $\Delta t_{1,2} > \Delta t_{\text{пар}}$ значение v_{10} нужно выбирать в диапазоне от нуля до v , определяемого из (2.1.31).

Фокальный параметр p и большая полуось орбиты вычисляются по следующим соотношениям:

$$p = R_1 (1 + e \cos v_1), \quad a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (2.1.32)$$

Теперь можно проверить правильность выбора v_{1j} ($j=0, 1, \dots, n$ — номер итерации), обращаясь в зависимости от значения e и соотношений (2.1.17) и (2.1.18) к уравнению (2.1.7) или (2.1.10). После удовлетворения заданной точности решения задачи, проверяемой по значению разности $[\Delta t_{1,2} - (\Delta t)_{vj}]$, следует по формуле (2.1.8) вычислить угол Δ . Обращение к соотношениям (2.1.21) — (2.1.23) позволяет найти $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ и тем самым определить положение орбиты по начальным условиям.

Кроме изложенных существуют и другие методы определения орбиты по двум положениям КЛА $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ и времени перелета $\Delta t_{1,2}$, имеющие свои преимущества и недостатки. Для анализа проектно-баллистических характеристик КЛА, совершающих межпланетные перелеты, рассмотренные методы наиболее удобны и характеризуются хорошей сходимостью итерационного процесса.

§ 2. МЕТОД «ПОПАДАЮЩИХ ТРАЕКТОРИЙ»

Использование метода Ламберта для построения поля изолиний характеристик траекторий межпланетного полета требует интерполяционной программы, которая увеличивает время работы на ЭЦВМ. Поэтому для расчета поля изолиний был разработан прямой метод, названный методом «попадающих траекторий». Идея этого метода сводится к краевой задаче, в которой

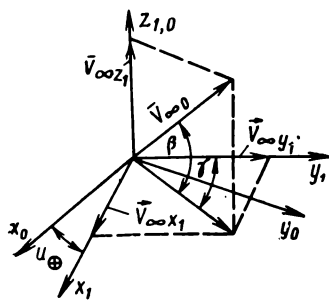


Рис. 2.2.1. Кинематическая схема составляющих векторов скорости КЛА и Земли

при заданной дате старта t_0 подбираются такие параметры вектора скорости выхода из сферы действия Земли $\bar{V}_{\infty 0}$, которые обеспечивают попадание КЛА в планету назначения.

Рассмотрим случай расчета изолинии при заданной величине модуля вектора $|\bar{V}_{\infty 0}|$. Введем транспортирующую систему координат, начало которой расположено в центре Земли или планеты (рис. 2.2.1). Ось x_1 направим по радиусу-вектору к Солнцу, ось y_1 — перпендикулярна оси x_1 и направлена в сторону движения Земли. Оси x_1 и y_1 лежат в

плоскости эклиптики. Ось z_1 дополняет систему до правой.

Направление вектора $\bar{V}_{\infty 0}$ будем задавать двумя углами: углом β , образованным проекцией вектора $\bar{V}_{\infty 0}$ на плоскость x_1, y_1 с вектором $\bar{V}_{\infty 0}$; углом γ между проекцией вектора $\bar{V}_{\infty 0}$ на плоскость x_1, y_1 и осью y_1 . Проекции вектора $\bar{V}_{\infty 0}$ на оси этой системы координат (x_1, y_1, z_1) будут:

$$\left. \begin{aligned} V_{\infty x_1} &= V_{\infty 0} \cos \beta \sin \gamma; \\ V_{\infty y_1} &= V_{\infty 0} \cos \beta \cos \gamma; \\ V_{\infty z_1} &= V_{\infty 0} \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

Проекции вектора $\bar{V}_{\infty 0}$ на оси эклиптической гелиоцентрической системы координат (x_0, y_0, z_0) равны:

$$\left. \begin{aligned} V_{\infty x_0} &= V_{\infty x_1} \cos u_{\odot} - V_{\infty y_1} \sin u_{\odot}; \\ V_{\infty y_0} &= V_{\infty x_1} \sin u_{\odot} + V_{\infty y_1} \cos u_{\odot}; \\ V_{\infty z_0} &= V_{\infty z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

Складывая составляющие векторов скорости Земли и скорости КЛА на сфере действия $\bar{V}_{\infty 0}$ [уравнения (2.2.2)], получим составляющие вектора скорости аппарата $\bar{V}_0$ в гелиоцентрической

системе координат в начальный момент времени (момент старта):

$$\left. \begin{aligned} V_{x_0} &= V_{\oplus x_0} + V_{\infty x_0}; \\ V_{y_0} &= V_{\oplus y_0} + V_{\infty y_0}; \\ V_{z_0} &= V_{\oplus z_0} + V_{\infty z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

Зная начальные условия $x_0, y_0, z_0, V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0}$, по известным формулам определим элементы перелетной орбиты космического аппарата: a, e, Ω, i, ω , что позволяет в зависимости от времени перелета Δt найти координаты КЛА в конечный момент x_k, y_k, z_k и определить расстояние между КЛА и планетой назначения по формуле

$$\Delta R = \sqrt{(x_{пл} - x_k)^2 + (y_{пл} - y_k)^2 + (z_{пл} - z_k)^2}. \quad (2.2.4)$$

При увеличении времени полета (от $\Delta t_0 = 0$) величина промаха ΔR при фиксированных значениях β и γ будет иметь минимум при некотором значении $\Delta t = \Delta t_m$. Изменяя определенным образом значения β и γ , можно уменьшить промах ΔR до заданной точности попадания $\Delta R_{доп}$ (рис. 2.2.2).

Таким образом, задача сводится к определению искомых величин $\Delta t_m, \beta_m, \gamma_m$. Существует несколько методов для решения такого рода задач. Исследования показали, что сходимость поиска улучшается, если использовать комбинацию градиентного метода наискорейшего спуска по параметрам β и γ с перебором Δt . Суть алгоритма состоит в следующем.

Если $\Delta R = \Delta R(\beta, \gamma)$ — оптимизируемая функция и

$$\text{grad } \Delta R = \left\{ \frac{\partial \Delta R}{\partial \beta}, \frac{\partial \Delta R}{\partial \gamma} \right\},$$

то для нахождения минимума следует двигаться по направлению, противоположному градиенту.

Шаг по параметрам β и γ находят по формулам

$$\begin{aligned} \Delta \beta &= \frac{\partial \Delta R / \partial \beta}{\frac{\partial \Delta R}{\partial \gamma} \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta R / \partial \gamma}{\partial \Delta R / \partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta R / \partial \beta}{\partial \Delta R / \partial \gamma} \right)^2}}; \\ \Delta \gamma &= \frac{\partial \Delta R / \partial \gamma}{\frac{\partial \Delta R}{\partial \beta} \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta R / \partial \gamma}{\partial \Delta R / \partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta R / \partial \beta}{\partial \Delta R / \partial \gamma} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Этот шаг автоматически регулируется по мере приближения к решению. После 5—6 шагов процесс обычно сходится к заданной точности по ΔR ($\Delta R_{доп} = 1000$ км). Таким образом, для заданной даты старта t_0 и V_{∞} определяются t_m, β_m и γ_m , формирующие попадающую траекторию. При аппроксимации оптимизи-

руемой функции параболой по трем точкам время вычисления сокращается.

Изменяя дату старта t_0 , можно определять величины Δt , β и γ , соответствующие изолинии заданного модуля вектора скорости (рис. 2.2.3).

При построении замкнутой изолинии с какого-то момента t_0 для t_0 при заданном V_{∞} попадание не будет обеспечено (процесс поиска сходится к $\Delta R > \Delta R_{\text{доп}}$). В этом случае осуществляется поиск точки 6 (см. рис. 2.2.3), лежащей на вертикальной касательной (возврат с дроблением шага δt_0). После этого знак из-

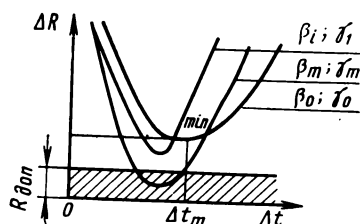


Рис. 2.2.2. Схема вычислительного процесса метода попадающих траекторий

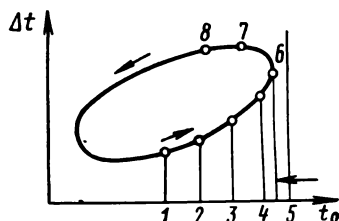


Рис. 2.2.3. Схема вычислительного процесса построения изолиний характеристики траектории полета

менения шага δt_0 меняется на обратный и рассчитываются точки 7, 8 и т. д. Процесс поиска в последующих точках существенно сокращается, если в качестве нулевых приближений использовать параметры Δt_m , β_m , γ_m предыдущей точки. Такой алгоритм построения изолиний обеспечивает унимодальность области градиентного метода поиска. Таким образом может быть рассчитано поле изолиний траекторий полета по 1-му полувитку (угол перелета $\Phi \leq \pi$).

Для расчета поля изолиний 2-го полувитка ($\Phi \geq \pi$) значение Δt_0 в процессе поиска точки изолинии должно выбираться таким, чтобы первая траектория заведомо оказалась в области траектории второго полувитка.

Аналогичным образом, не меняя логики метода, могут быть построены и изолинии других параметров (β и γ).

Использование метода попадающих траекторий позволяет определять начальные кинематические параметры гелиоцентрического участка перелета и в точной постановке с учетом конечных размеров сфер действия планет и влияния различных возмущений.

§ 3. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ КЛА

Если взять интегралы в правых частях уравнений (1.3.6), (1.3.10) и (1.3.19), т. е. определить h_u , $\bar{Q}_u$ и $\bar{e}_u$ в функции от кинематических параметров, относительного текущего веса μ и начальной тяговооруженности n_0 КЛА, то соотношения (1.3.7a), (1.3.11a) и (1.3.17) явятся базой для анализа проектно-баллистических характеристик КЛА. При заданном законе управления вектором тяги получить такие решения точно можно только одним из численных методов, причем результаты будут зависеть от начальной тяговооруженности n_0 и конечного относительного веса μ_k . Все это затрудняет проведение анализа проектно-баллистических характеристик КЛА.

Для выявления же оптимальных проектно-баллистических характеристик КЛА необходимо обратиться к теории оптимального проектирования летательного аппарата [43, гл. III], базирующейся на вариационном исчислении и численных методах решения краевой задачи.

На начальной стадии проектирования особенно заметна основная слабость численных методов, заключающаяся в том, что, давая довольно точные ответы, они мало вскрывают сущность задачи. В стадии предварительного проектирования КЛА и начальных разработок траекторий межпланетного перелета наиболее важно, чтобы конструкторы и расчетчики изучили существенные аспекты приближенных решений, что поможет им выявить определяющие элементы и параметры и найти рациональные пути осуществления общей идеи проекта. Здесь важную роль могут сыграть приближенные методы решения дифференциальных уравнений управляемого движения, степень точности которых должна удовлетворять требованиям предварительного проектирования.

Предварительный анализ межпланетных траекторий полета КЛА основывается иногда на импульсной аппроксимации, не учитывающей конечную длительность активных участков в сфере действия планеты и заменяющей конечную тягу, прикладываемую в течение определенного времени, импульсом тяги нулевой длительности, приводящим к скачкообразному изменению скорости полета.

Однако импульсная аппроксимация не всегда отвечает требованиям точности и не позволяет выявить влияние такого важного основного параметра КЛА, как начальная тяговооруженность n_0 , на проектно-баллистические характеристики. Более плодотворными и охватывающими более широкий круг требований являются методы, основывающиеся на приближенных приемах вычисления определенных интегралов.

Активный участок разгона КЛА

В конечной точке активного участка полета значение $h_{u\kappa}$ согласно (1.3.66)

$$h_{u\kappa} = h_0 - 2W \int_1^{\mu_\kappa} (\bar{p} \cdot \bar{v}) d \ln \mu.$$

После интегрирования по частям найдем

$$h_{u\kappa} = h_0 - 2W \left[(\bar{p} \cdot \bar{v})_a \ln \mu_\kappa - \int_{(\bar{p} \cdot \bar{v})_0}^{(\bar{p} \cdot \bar{v})_a} \ln \mu d(\bar{p} \cdot \bar{v}) \right].$$

В случае непрерывного увеличения (уменьшения) скалярной величины $(\bar{p} \cdot \bar{v})$ по времени, используя теорему о среднем*, получим

$$h_{u\kappa} = h_0 - 2W \{ (\bar{p} \cdot \bar{v})_a \ln \mu_\kappa - a_e \ln \mu_\kappa [(\bar{p} \cdot \bar{v})_a - (\bar{p} \cdot \bar{v})_0] \}, \quad (2.3.1)$$

где

$$a_e = \frac{(\ln \mu)_e}{\ln \mu_\kappa};$$

$(\ln \mu)_e$ — промежуточное значение $\ln \mu$ на интервале $[(\bar{p} \cdot \bar{v})_0, (\bar{p} \cdot \bar{v})_a]$.

Тогда интеграл энергии управляемого движения (1.3.7a) для момента окончания активного участка представим в виде

$$v_a^2 - \frac{2fm_0}{r_a} = h_0 - 2 \left[(1 - a_e) (\bar{p} \cdot \bar{v})_a + a_e (\bar{p} \cdot \bar{v})_0 \right] W \ln \mu_\kappa. \quad (2.3.2)$$

Аналогичным способом преобразуем и векторный интеграл момента количества движения (1.3.11a). В результате интегрирования правой части уравнения (1.3.10) найдем

$$\bar{C}_{u\kappa} = \bar{C}_0 - W \{ (\bar{r} \times \bar{p})_a \ln \mu_\kappa - a_m \ln \mu_\kappa [(\bar{r} \times \bar{p})_a - (\bar{r} \times \bar{p})_0], \quad (2.3.3)$$

где

$$a_m = \frac{(\ln \mu)_m}{\ln \mu_\kappa},$$

$(\ln \mu)_m$ — промежуточное значение $\ln \mu$ на интервале интегрирования $[(\bar{r} \times \bar{p})_0, (\bar{r} \times \bar{p})_a]$.

Учитывая (2.3.3), векторный интеграл момента количества движения (1.3.11a) для момента t_a представим формулой

$$(\bar{r} \times \bar{v})_a = \bar{C}_0 - \left[(1 - a_m) (\bar{r} \times \bar{p})_a + a_m (\bar{r} \times \bar{p})_0 \right] W \ln \mu_\kappa. \quad (2.3.4)$$

* См., например, Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. I, ГИТТЛ, 1956 (§ 2 гл. XI).

Поскольку промежуточные значения $(\ln \mu)_e$ и $(\ln \mu)_m$ определены в области

$$0 \leq (-\ln \mu)_e < (-\ln \mu_k), \quad 0 \leq (-\ln \mu)_m < (-\ln \mu_k),$$

то функции a_e и a_m могут изменяться в пределах

$$0 < a_e < 1, \quad 0 < a_m < 1. \quad (2.3.5)$$

При точном представлении a_e и a_m от $\ln \mu_k$ (или $\ln \mu$) соотношения (2.3.2) и (2.3.4) являются точными*. К сожалению, получение такой информации связано только с вычислением интегралов (1.3.7a) и (1.3.11a), что равносильно численному интегрированию системы. Однако возможен другой путь: построение приближенных зависимостей a_e и a_m от μ_k и n_0 при различных законах изменения вектора тяги. В этом случае соотношения (2.3.2) и (2.3.4) будут уже приближенными, причем на их точность влияет определенным образом точность построения зависимостей a_e и a_m . Исследования показали, что при широко используемых законах изменения вектора тяги точность построения зависимостей a_e и a_m от μ_k и n_0 в диапазоне их реальных значений для КЛА с ЖРД слабо влияет на точность решения интеграла энергии и векторного интеграла момента количества движения, представляемого в виде соотношений (2.3.2) и (2.3.4). Поэтому данный метод приближенного решения дифференциальных уравнений управляемого движения КЛА является удобным и наглядным и позволяет достаточно просто достигнуть требуемой для проектных разработок точности определения проектно-баллистических характеристик КЛА. Перейдем к рассмотрению приближенных решений соотношений (2.3.2) и (2.3.4) при известных законах управления вектором тяги.

Полет в плоскости начальной орбиты

Пусть имеет место управляемый разгон (торможение) КЛА в плоскости околопланетной орбиты. Начальная орбита задается постоянными h_0 , $\bar{C}_0$ и $\bar{e}_0$. Поскольку движение плоское, то угол между векторами тяги $\bar{p}$ и скорости $\bar{v}$ выражается углом атаки α , а угол между вектором тяги $\bar{p}$ и радиусом-вектором $\bar{r}$ — углом $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha)$ (рис. 2.3.1).

Определение v_a . Интеграл энергии (2.3.2) представим в виде

$$v_a^2 - \frac{2fm_0}{r_a} + 2v_a(1 - a_e)W \cos \alpha_a \ln \mu_k - \\ - (h_0 - 2v_0 a_e W \cos \alpha_0 \ln \mu_k) = 0. \quad (2.3.6)$$

* Точность решений ограничивается условиями выполнения теоремы о среднем.

Приняв

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{нл}a} &= 1 - w \cos \alpha_a \ln \mu_k; \quad v_{ea} = 1 - a_e w \cos \alpha_a \ln \mu_k; \\ \tilde{v}_a &= \frac{v_a}{v_0}; \quad \tilde{v}_{\text{кр.о}}^2 = \frac{f m_0 / r_0}{v_0^2}; \\ w &= \frac{W}{v_0}; \quad \tilde{r}_a = \frac{r_a}{r_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

интеграл энергии для плоского управляемого движения (2.3.6) преобразуем к следующей форме:

$$\tilde{v}_a = (v_{\text{нл}a} - v_{ea}) + v_{ea} \left\{ 1 - \frac{2}{v_{ea}^2} \left[\tilde{v}_{\text{кр.о}}^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_a} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - [(\cos \alpha_a - \cos \alpha_0) a_e + (0,5 - a_e) w \cos^2 \alpha_a \ln \mu_k] w \ln \mu_k \right] \right\}^{1/2}. \quad (2.3.8)$$

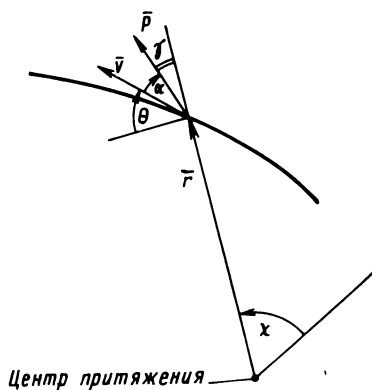


Рис. 2.3.1. Кинематика активного участка

Раскладывая радикал в ряд и ограничиваясь первым членом разложения, получим

$$\tilde{v}_a = v_{\text{нл}a} - \frac{\tilde{v}_{\text{кр.о}}^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_a} \right) - [(\cos \alpha_a - \cos \alpha_0) a_e + \\ + (0,5 - a_e) w \cos^2 \alpha_a \ln \mu_k] w \ln \mu_k}{v_{ea}}. \quad (2.3.9)$$

Исследования показали, что независимо от известных законов изменения $\alpha(t)$ * при $n_0 \geq 0,1$ и $\mu_k \geq 0,05$ значения a_e близки к 0,5. Поэтому уравнение (2.3.9) можно представить в виде приближения

$$\tilde{v}_a = v_{\text{нл}a} - \frac{1}{v_{ea}} \left[\tilde{v}_{\text{кр.о}}^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_a} \right) - (\cos \alpha_a - \cos \alpha_0) a_e w \ln \mu_k \right]. \quad (2.3.10)$$

* Проводились расчеты при тангенциальном, трансверсальном и оптимальном (обеспечивалось $\max \dot{n}_{u \text{ к}}$) законах изменения $\alpha(t)$.

В ряде случаев $\cos \alpha_a \approx \cos \alpha_0$, что позволяет получить новое приближение в виде

$$\tilde{v}_a = v_{\text{нл}a} - \frac{\tilde{v}_{\text{кр.о}}^2}{v_{ea}} \left(1 - \frac{1}{r_a} \right). \quad (2.3.11)$$

Учитывая, что в первом приближении при $n_0 > 0,1$ значения $\tilde{r}_a$ близки к единице, вычислить $\tilde{v}_a$ для определения нулевого приближения можно по формуле

$$\tilde{v}_a = v_{\text{нл}a} = 1 - w \cos \alpha_a \ln \mu_k, \quad (2.3.12)$$

причем истинная скорость находится в пределах

$$(1 - w \cos \alpha \ln \mu_k) - \frac{v_{\text{кр.о}}^2}{v_{ea}} (1 - 1/r_a) < \tilde{v}_a < (1 - w \cos \alpha_a \ln \mu_k). \quad (2.3.13)$$

Таким образом, соотношения (2.3.8) — (2.3.12) при известном законе изменения $\alpha(t)$ раскрывают с различной степенью приближения зависимость v_a от $\tilde{r}_a$, μ_k и n_0 , причем зависимость от n_0 проявляется через a_e и $\tilde{r}_a$.

Определение θ_a . Векторный интеграл момента количества (2.3.4) для плоского управляемого движения представим в виде

$$r_a v_a \cos \theta_a = C_0 - [(1 - a_m) r_a \cos(\theta_a + \alpha_a) + a_m r_0 \cos(\theta_0 + \alpha_0)] W \ln \mu_k. \quad (2.3.14)$$

Переходя к относительным величинам, после несложных преобразований получим

$$\cos \theta_a = \frac{\cos \theta_0 - [a_m \cos(\theta_0 + \alpha_0) - \tilde{r}_a (1 - a_m) \sin \theta_a \sin \alpha_a] w \ln \mu_k}{\tilde{r}_a [\tilde{v}_a + (1 - a_m) w \cos \alpha_a \ln \mu_k]}. \quad (2.3.15)$$

Формула (2.3.15) при заданном законе изменения $\alpha(t)$ выражает зависимость θ_a от $\tilde{r}_a$, μ_k и n_0 , проявляемую от n_0 через $\tilde{r}_a$, a_e и a_m . Следовательно, для определения зависимости $\tilde{v}_a$ и θ_a от μ_k и n_0 необходимо найти зависимость $\tilde{r}_a$ от этих параметров. Выявить ее можно различными методами соответственно определенному закону управления $\alpha(t)$.

Прежде всего отметим, что метод вывода уравнений (2.3.8) и (2.3.15) может быть использован для вычисления текущих значений v и θ по траектории полета КЛА, если a_e и a_m будут соответствовать таким $(\ln \mu)_e$ и $(\ln \mu)_m$, которые удовлетворяют неравенствам

$$0 < (\ln \mu)_e < \ln \mu, \quad 0 < (\ln \mu)_m < \ln \mu,$$

где μ — текущее значение относительного веса.

Имея это в виду, найдем

$$\tilde{v} = (v_{нл} - v_e) + v_e \left\{ 1 - \frac{2}{v_e} \left[\tilde{v}_{кр.о}^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{n}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - [(\cos \alpha - \cos \alpha_0) a_e + (0,5 - a_e) w \cos^2 \alpha \ln \mu] w \ln \mu \right] \right\}^{1/2}; \quad (2.3.16)$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta_0 - [a_m \cos (\theta_0 + \alpha_0) - \tilde{r} (1 - a_m) \sin \theta \sin \alpha] w \ln \mu}{\tilde{r} [\tilde{v} + (1 - a_m) w \cos \alpha \ln \mu]}, \quad (2.3.17)$$

где $v_{нл} = 1 - w \cos \alpha \ln \mu$, $v_e = 1 - a_e w \cos \alpha \ln \mu$;

$\tilde{v}$, θ , α — текущие значения скорости, траекторного угла и угла атаки.

Формулы (2.3.16) и (2.3.17) выражают при известном законе управления вектором тяги $\alpha(t)$ зависимость текущих значений скорости полета $\tilde{v}$ и траекторного угла θ от текущих значений радиуса $\tilde{r}$ и относительного веса μ . Таким образом, активный участок будет определен, если будет найдена зависимость текущего значения радиуса r от текущего значения относительного веса μ . Решение этой задачи с той или иной степенью приближения связано с конкретным законом управления вектором тяги $\alpha(t)$.

Тангенциальный закон управления

Тангенциальный закон управления вектором тяги [$\alpha(t) = 0$] интересен тем, что он по результатам достаточно близок к оптимальному, при котором суммарная энергия в конце активного участка полета (величина $h_{ук}$), приходящаяся на единицу массы КЛА, достигает максимального значения при заданном μ_k . Обыкновенно орбита старта (промежуточная орбита) является круговой ($v_0 = \sqrt{\frac{f m_0}{r_0}}$, $\theta_0 = 0$).

Определение $\tilde{v}_a$ и $\tilde{v}$. Уравнение (2.3.8) упростится и примет вид

$$\tilde{v}_a = (v_{нла} - v_{ea}) + v_{ea} \left\{ 1 - \frac{2}{v_{ea}^2} \left[\left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_a} \right) - (0,5 - a_e) (w \ln \mu_k)^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (2.3.18)$$

Ограничиваясь первым членом разложения радикала в ряд и учитывая $a_e \approx 0,5$, получим

$$\tilde{v}_a = (1 - w \ln \mu_k) - \frac{1 - \frac{1}{\tilde{r}_a}}{1 - a_e w \ln \mu_k}. \quad (2.3.19)$$

Воспользовавшись аналогичными упрощениями, уравнение (2.3.16) приведем к виду

$$\tilde{v} = (1 - w \ln \mu) - \frac{1 - \frac{1}{\tilde{r}}}{1 - a_e w \ln \mu}. \quad (2.3.20)$$

Определение θ_a и θ . Уравнения (2.3.15) и (2.3.17) преобразуем к форме

$$\cos \theta_a = \frac{1 - a_m w \ln \mu_k}{\tilde{r}_a [\tilde{v}_a + (1 - a_m) w \ln \mu_k]}; \quad (2.3.21)$$

$$\cos \theta = \frac{1 - a_m w \ln \mu}{\tilde{r} [\tilde{v} + (1 - a_m) w \ln \mu]}. \quad (2.3.22)$$

Подставляя в (2.3.21) и (2.3.22) значения v_a и v согласно уравнениям (2.3.19) и (2.3.20) соответственно, получим

$$\cos \theta_a = \frac{v_{ea} v_{ma}}{\tilde{r}_a \left[v_{ea} v_{ma} - \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_a} \right) \right]}; \quad (2.3.23)$$

$$\cos \theta = \frac{v_e v_m}{\tilde{r} \left[v_e v_m - \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}} \right) \right]}, \quad (2.3.24)$$

где $v_m = 1 - a_m w \ln \mu$, $v_{ma} = 1 - a_m w \ln \mu_k$;
 $v_e = 1 - a_e w \ln \mu$, $v_{ea} = 1 - a_e w \ln \mu_k$.

Определение $\tilde{r}_a$ и $\tilde{r}$. Активные участки КЛА с двигателями больших тяг (ЖРД, РДТТ) имеют небольшую протяженность. Расчеты показывают, что при $n_0 \geq 0,1$ и $\mu_k \geq 0,05$ имеют место неравенства

$$h_a = \frac{r_a - r_0}{r_0} < 1 \text{ и } \theta_a < \frac{\pi}{4}.$$

В связи с этим, раскладывая в ряд по h правую часть уравнения (2.3.24) и пренебрегая членами выше второго порядка малости, получим

$$\frac{v_e v_m}{\tilde{r} \left[v_e v_m - \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}} \right) \right]} = 1 - \frac{v_e v_m - 1}{v_e v_m} (h - h^2).$$

С учетом разложения $\cos \theta$ в ряд по θ и ограничиваясь первым членом, уравнение (2.3.24) преобразуем к виду

$$\theta = \left[2 \frac{v_e v_m - 1}{v_e v_m} (h - h^2) \right]^{1/2}. \quad (2.3.25)$$

Поскольку имеет место кинематическое соотношение

$$\dot{r} = v \sin \theta,$$

а секундное изменение относительной массы

$$\dot{\mu} = -\frac{n_0}{P_{y\lambda}},$$

то можно записать

$$\frac{dh}{d\mu} = -\frac{w}{n_0 \tilde{r}_0^2} \tilde{v} \sin \theta$$

или с учетом принятых допущений об угле θ получим

$$\frac{dh}{d\mu} = -\frac{w}{n_0 \tilde{r}_0^2} \tilde{v} \theta,$$

где

$$\tilde{r}_0 = \frac{r_0}{R_3}.$$

Подставляя в это уравнение значение θ согласно уравнению (2. 3. 25), будем иметь

$$\frac{dh}{d\mu} = -\sqrt{2} \frac{d \cdot v}{n_0} \left[\left(1 - \frac{1}{v_e v_m} \right) (h - h^2) \right]^{1/2},$$

где

$$d = \frac{w}{\tilde{r}_0^2}.$$

Учитывая, что при интегрировании введенные погрешности уменьшаются, в правую часть данного уравнения вместо $\tilde{v}$ подставим его первое приближение. Тогда получим

$$\int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h(1-h)}} = -\sqrt{2} \frac{d}{n_0} \int_1^\mu (1 - w \ln \mu) \times \\ \times \sqrt{1 - \frac{1}{(1 - a_e w \ln \mu)(1 - a_m w \ln \mu)}} d\mu.$$

Принимая во внимание равенство *

$$\int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h(1-h)}} = -\arcsin(1-2h) \Big|_0^h = \arccos(1-2h),$$

* И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963, № 2261.

найдем

$$h = \frac{1 - \cos\left(\frac{\sqrt{2}d}{n_0} I_r\right)}{2}$$

или

$$\tilde{r} = 1 + \frac{1 - \cos\left(\frac{\sqrt{2}d}{n_0} I_r\right)}{2} = 1 + \sin^2\left(\frac{\sigma}{n_0} I_r\right), \quad (2.3.26)$$

где $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} d$,

$$I_r = - \int_1^{\mu} (1 - w \ln \mu) \sqrt{1 - \frac{1}{(1 - a_e w \ln \mu)(1 - a_m w \ln \mu)}} d\mu. \quad (2.3.27)$$

Для конечной точки активного участка получим

$$\tilde{r}_a = 1 + \sin^2\left(\frac{\sigma}{n_0} I_{ra}\right), \quad (2.3.28)$$

где

$$I_{ra} = - \int_1^{\mu_k} (1 - w \ln \mu) \sqrt{1 - \frac{1}{(1 - a_e w \ln \mu)(1 - a_m w \ln \mu)}} d\mu. \quad (2.3.29)$$

Таким образом, определение текущего значения радиуса $\tilde{r}$ и его конечного значения $\tilde{r}_a$ в зависимости от μ сведено к вычислению квадратур (2.3.27) и (2.3.29), численные методы расчета которых просты и хорошо известны. Правда, эти квадратуры могут быть также выражены аналитически с любой степенью приближения. Весьма важное свойство формул (2.3.26) и (2.3.28) заключается в слабом влиянии отклонений a_e и a_m от их «средних» значений, выбираемых для диапазона $\mu_k \leq \mu \leq 1$ постоянными, на точность вычисления $\tilde{r}$ и $\tilde{r}_a$. В табл. 2.1 даны значения ошибок $\left(\Delta r = \left| \frac{\tilde{r}_{a \text{ точ}} - \tilde{r}_a}{\tilde{r}_{a \text{ точ}}} \right| \cdot 100\% \right)$ вычисления r_a по приближенной формуле (2.3.28), соответствующие $\mu_k = 0,1$ и $n_0 = 0,2$, при различных и характерных значениях a_e и a_m , принимаемых постоянными в диапазоне $0,1 \leq \mu_k \leq 1$ *. Благодаря указанной особенности можно выбрать такие значения a_e и a_m , постоянные для любого μ_k в диапазоне $0,1 \leq \mu_k \leq 1$ и ввиду слабой зависимости a_e и a_m от n_0 для любого значения n_0 в диапазоне $n_0 \geq 0,2$,

* Вычисления проводились при следующих исходных данных: радиус круговой орбиты старта $R_0 = 6571$ км, удельная тяга $P_{уд} = 350$ с.

Таблица 2.1

$\begin{matrix} a_m \\ a_e \end{matrix}$	0,6	0,62	0,64	0,68
0,48	0,92	0,57	0,23	0,43
0,5	0,50	0,22	0,12	0,77

при которых ошибки вычисления $\tilde{v}_a$, θ_a и $\tilde{r}_a$ (или $\tilde{v}$, θ и $\tilde{r}$) являются минимальными и вполне допустимыми для проектно-баллистических расчетов. Проведенные исследования позволяют рекомендовать следующие значения:

$$a_e=0,5, a_m=0,64. \quad (2.3.30)$$

Кстати, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, можно показать, что при $\mu=1$ согласно (2.3.19) $a_e=0,5$, причем с уменьшением μ a_e изменяется мало.

В табл. 2.2 и 2.3 показаны значения ошибок *

$$\left(\Delta v_a = \left| \frac{\tilde{v}_{a \text{ точ}} - \tilde{v}_a}{\tilde{v}_{a \text{ точ}}} \right| \cdot 100\%; \quad \Delta \cos \theta_a = \left| \frac{\cos \theta_{a \text{ точ}} - \cos \theta_a}{\cos \theta_{a \text{ точ}}} \right| \cdot 100\%; \right. \\ \left. \Delta r = \left| \frac{\tilde{r}_{a \text{ точ}} - \tilde{r}_a}{\tilde{r}_{a \text{ точ}}} \right| \cdot 100\% \right)$$

вычисления $\tilde{v}_a$, $\cos \theta_a$ и $\tilde{r}_a$ по приближенным формулам (2.3.18), (2.3.19), (2.3.21), (2.3.23), (2.3.28) при выбранных постоянных значениях a_e и a_m по сравнению с точными расчетами $\tilde{v}_{a \text{ точ}}$, $\cos \theta_{a \text{ точ}}$ и $\tilde{r}_{a \text{ точ}}$ при различных значениях n_0 и μ_k . Видна хорошая точность рассматриваемого метода приближенных расчетов, вполне удовлетворяющая требованиям, предъявляемым к точности проектно-баллистических расчетов на этапе предварительного проектирования КЛА. Полученные результаты позволяют при выбранных значениях $a_e=0,5$ и $a_m=0,64$ затабулировать квадратуру I_r в зависимости от μ , что значительно облегчает и упрощает расчеты.

* Расчеты проводились для табл. 2.2 при $P_{уд}=350$ с, для табл. 2.3 при $P_{уд}=450$ с. Верхние значения в клетках относятся к расчетам по формулам (2.3.18) и (2.3.21).

Таблица 2.3

n_0	μ_K	$\Delta v_a, \%$	$\Delta \cos \theta_a, \%$	$\Delta I_a, \%$
0,2	0,5	$\frac{0,14}{0,74}$	$\frac{1,21}{0,54}$	0,27
	0,4	$\frac{0,53}{0,81}$	$\frac{1,34}{0,21}$	0,80
	0,3	$\frac{0,87}{1,25}$	$\frac{0,54}{2,02}$	0,19
	0,2	$\frac{0,15}{2,55}$	$\frac{1,23}{4,12}$	1,14
	0,1	$\frac{3,06}{4,75}$	$\frac{1,84}{3,31}$	7,15
0,4	0,5	$\frac{0,27}{0,31}$	$\frac{0,51}{0,46}$	0,76
	0,4	$\frac{0,22}{0,34}$	$\frac{0,84}{0,70}$	1,06
	0,3	$\frac{0,06}{0,31}$	$\frac{1,03}{0,75}$	1,19
	0,2	$\frac{0,092}{0,31}$	$\frac{0,66}{0,17}$	1,02
	0,1	$\frac{0,13}{0,60}$	$\frac{1,11}{1,70}$	1,57
0,8	0,5	$\frac{0,09}{0,09}$	$\frac{0,15}{0,14}$	0,23
	0,4	$\frac{0,1}{0,11}$	$\frac{0,27}{0,26}$	0,38
	0,3	$\frac{0,1}{0,12}$	$\frac{0,42}{0,40}$	0,54
	0,2	$\frac{0,07}{0,11}$	$\frac{0,5}{0,47}$	0,68
	0,1	$\frac{0,071}{0,13}$	$\frac{0,24}{0,19}$	0,70

Определение полярного угла χ_a . Кинематическое уравнение

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{v}{r} \cos \theta$$

представим в виде

$$\frac{d\chi}{d\mu} = - \frac{d}{n_0} \frac{\tilde{v} \cos \theta}{\tilde{r}}.$$

Подставляя в это уравнение значения $\tilde{v}$, $\cos \theta$ и $\tilde{r}$ согласно (2. 3. 20), (2. 3. 22) и (2. 3. 26), получим

$$\frac{d\chi}{d\mu} = - \frac{d}{n_0} \frac{\left[1 + \left(1 - \frac{1}{v_e v_{нл}} \right) \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_r \right] v_{нл}}{\left[1 + \left(1 - \frac{1}{v_e v_m} \right) \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_r \right] \left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_r \right)^2}.$$

Таким образом, вычисление χ_a сводится к вычислению квадратуры

$$\chi_a = - \frac{d}{n_0} \int_1^{\mu_K} \frac{\left[1 + \left(1 - \frac{1}{v_e v_{нл}} \right) \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_r \right] v_{нл}}{\left[1 + \left(1 - \frac{1}{v_e v_m} \right) \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_r \right] \left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_r \right)^2} d\mu. \quad (2. 3. 31)$$

С хорошей степенью точности ее можно представить в виде

$$\chi_a = - \frac{d}{n_0} \int_1^{\mu_K} \frac{v_{нл}}{\left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_r \right)^2} d\mu. \quad (2. 3. 32)$$

После разложения в ряд подынтегрального выражения найдем

$$\chi_a = - \frac{d}{n_0} \int_1^{\mu_K} v_{нл} \left[1 - 2 \left(\frac{\sigma}{n_0} I_r \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma}{n_0} I_r \right)^4 - 4 \left(\frac{\sigma}{n_0} I_r \right)^6 - \dots \right] d\mu.$$

В результате будем иметь

$$\chi_a = \frac{d}{n_0} \left[(1 + w)(1 - \mu_K) + \mu_K w \ln \mu_K - 2 \left(\frac{\sigma}{n_0} \right)^2 I_{\chi 2} + \right. \\ \left. + 3 \left(\frac{\sigma}{n_0} \right)^4 I_{\chi 4} - 4 \left(\frac{\sigma}{n_0} \right)^6 I_{\chi 6} + 5 \left(\frac{\sigma}{n_0} \right)^8 I_{\chi 8} \right], \quad (2. 3. 33)$$

где

$$I_{\chi 2} = - \int_1^{\mu_K} v_{нл} I_r^2 d\mu; \quad I_{\chi 4} = - \int_1^{\mu_K} v_{нл} I_r^4 d\mu; \\ I_{\chi 6} = - \int_1^{\mu_K} v_{нл} I_r^6 d\mu; \quad I_{\chi 8} = - \int_1^{\mu_K} v_{нл} I_r^8 d\mu. \quad (2. 3. 34)$$

Формулы (2.3.31) — (2.3.33) позволяют с различной степенью точности вычислять значения полярного угла χ в конце управляемого полета КЛА в зависимости от μ_K и n_0 . Выражение (2.3.31) дает относительно лучшую точность. Для оперативных расчетов и анализа проектно-баллистических характеристик более удобна формула (2.3.33), поскольку значения интегралов (2.3.34) зависят (при равных значениях ω) только от μ_K , что позволяет их затабулировать. Ошибки вычисления $\Delta\chi_a$ для $P_{уд} = 350$, возникающие при расчете χ_a по этой формуле, даны в табл. 2.4.

Таблица 2.4

$\mu_K \backslash n_0$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0,2	0,55	0,56	0,44	0,28	0,30
0,4	0,20	0,32	0,41	0,43	0,26

Таким образом, используемый в данном параграфе метод решения интегралов управляемого движения позволил для тангенциального управления вектором тяги найти с допустимым приближением аналитические зависимости $\tilde{v}_a$, θ_a , $\tilde{r}_a$ и χ_a от основных проектных параметров КЛА μ_K и n_0 .

Определение h_{uK} , C_{uK} и e_{uK} . Полученные результаты позволяют выявить зависимость постоянных интегрирования h_{uK} , C_{uK} и e_{uK} непосредственно от μ_K и n_0 . Поскольку для случая управляемого движения в неподвижной плоскости

$$h_{uK} = v_a^2 - \frac{2fm_0}{r_a};$$

$$C_{uK} = v_a r_a \cos \theta_a,$$

то, подставляя в эти уравнения значения v_a , r_a и $\cos \theta_a$ согласно выражениям (2.3.19), (2.3.23) и (2.3.28), после несложных преобразований получим

$$\frac{h_{uK}}{h_0} = \frac{\left[1 + \left(1 - \frac{1}{v_{ea} v_{илa}}\right) \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra}\right]^2 v_{илa}^2}{\left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra}\right)^2} - \frac{2}{1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra}}; \quad (2.3.35)$$

$$\frac{C_{u\kappa}}{C_0} = \frac{1 + \left(1 - \frac{1}{v_{ea} v_{\text{нл}a}}\right) \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra}}{1 + \left(1 - \frac{1}{v_{ea} v_{ma}}\right) \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra}} v_{\text{нл}a} \left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra}\right). \quad (2.3.36)$$

Следует отметить, что в первом приближении определять $C_{u\kappa}$ можно по формуле

$$\frac{C_{u\kappa}}{C_0} = v_{\text{нл}a} \quad (2.3.37)$$

с ошибкой вычисления, не превосходящей 5—8%.

Постоянная $e_{u\kappa}$ согласно уравнению (1.3.32а) определяется зависимостью

$$e_{u\kappa} = \sqrt{1 + \left(\frac{C_{u\kappa}}{f m_0}\right)^2} h_{u\kappa}. \quad (2.3.38)$$

Активный участок торможения КЛА

До сих пор при выводе приближенных формул имелся в виду разгон КЛА со стартовой орбиты планеты отправления до какой-то орбиты отрыва, характеризуемой постоянными $h_{u\kappa}$, $\bar{C}_{u\kappa}$ и $\bar{e}_{u\kappa}$. В ряде случаев межпланетный полет КЛА заканчивается выходом на планируемую орбиту (назовем ее *конечной орбитой*) около планеты назначения. Для выхода КЛА на эту орбиту необходим активный участок торможения, когда задачей управляемого движения является такое снижение скорости, после которого полет КЛА будет совершаться по заданной конечной орбите около планеты. Если торможение КЛА происходит в одной плоскости при тангенциальном управлении вектором тяги [$\alpha(t) = \pi$], то можно воспользоваться предыдущими результатами, используя принцип обращения движения. При этом следует учитывать известный факт [51], что торможение по энергозатратам будет наиболее экономичным, если активный участок заканчивается в перигентре конечной орбиты, т. е. при $r_{\kappa} = r_{\kappa\kappa}$ и $\theta_{\kappa} = \theta_{\kappa\kappa}$. Используя уравнения (2.3.19), (2.3.23), (2.3.28), (2.3.29) и (2.3.31) или (2.3.33) и (2.3.34), выражения для скорости $\tilde{v}_T$, траекторного угла θ_T , радиуса $\tilde{r}_T$ и полярного угла χ_T в начале активного участка торможения (рис. 2.3.2) представим в виде

$$\tilde{v}_T = v_{\text{нл}T} - \frac{\left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_T}\right) \tilde{v}_{\kappa\kappa}^2}{v_{eT}}; \quad (2.3.39)$$

$$\cos \theta_T = \frac{v_{mT} v_{eT}}{\tilde{r}_T [v_{mT} v_{eT} - \tilde{v}_{\kappa\kappa}^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_T}\right)]}; \quad (2.3.40)$$

$$\tilde{r}_\tau = 1 + \sin^2 \frac{\sigma_\tau}{n_0^*} I_{r\tau}; \quad (2.3.41)$$

$$\chi_1 = -\frac{d}{n_0^*} \int_1^{\mu_K} \frac{\left[1 + \left(1 - \frac{\tilde{v}_{\text{кр.к}}^2}{v_e v_{\text{нл}}} \right) \sin^2 \frac{\sigma}{n_0^*} I_r \right] v_{\text{нл}}}{\left[1 + \left(1 - \frac{\tilde{v}_{\text{кр.к}}^2}{v_e v_m} \right) \sin^2 \frac{\sigma}{n_0^*} I_r \right] \left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0^*} I_r \right)^2} d\mu \quad (2.3.42)$$

или

$$\chi_1 = \frac{d}{n_0^*} \left[(1+w)(1-\mu_K) + \mu_K \ln \mu_K - 2 \left(\frac{\sigma}{n_0^*} \right)^2 I_{\chi 2} + \right. \\ \left. + 3 \left(\frac{\sigma}{n_0^*} \right)^4 I_{\chi 4} - 4 \left(\frac{\sigma}{n_0^*} \right)^6 I_{\chi 6} + 5 \left(\frac{\sigma}{n_0^*} \right)^8 I_{\chi 8} \right]. \quad (2.3.43)$$

Здесь $n_0^* = \frac{g_{0\oplus}}{g_{0\text{пл}}} n_0$,

$$\tilde{v}_\tau = \frac{v_\tau}{v_{\text{кр}}}, \quad w = \frac{W}{v_{\text{кр}}}, \quad \tilde{v}_{\text{кр.к}}^2 = \frac{f m_{\text{пл}}}{v_{\text{кр}}^2}, \quad \tilde{r}_\tau = \frac{r_\tau}{r_{\text{кр}}}, \\ d = \frac{w}{\tilde{r}_\text{к}^2 v_{\text{кр.к}}^2}, \quad \tilde{r}_\text{к} = \frac{R_{\text{кр}}}{R_{\text{пл}}}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} d_\tau, \\ v_{\text{нл.т}} = 1 - w \ln \mu_K, \quad v_{e\tau} = 1 - a_e w \ln \mu_K, \\ v_{m\tau} = 1 - a_m \ln \mu_K; \\ I_{r\tau} = - \int_1^{\mu_K} v_{\text{нл}} \left(1 - \frac{\tilde{v}_{\text{кр.к}}^2}{v_e v_m} \right)^{1/2} d\mu; \quad (2.3.44)$$

$$I_r = - \int_1^{\mu_K} v_{\text{нл}} \left(1 - \frac{\tilde{v}_{\text{кр.к}}^2}{v_e v_m} \right)^{1/2} d\mu; \quad (2.3.45)$$

$$I_{\chi 2} = - \int_1^{\mu_K} v_{\text{нл}} I_r^2 d\mu, \quad I_{\chi 4} = - \int_1^{\mu_K} v_{\text{нл}} I_r^4 d\mu, \\ I_{\chi 6} = - \int_1^{\mu_K} v_{\text{нл}} I_r^6 d\mu, \quad I_{\chi 8} = - \int_1^{\mu_K} v_{\text{нл}} I_r^8 d\mu. \quad (2.3.46)$$

Выражения (2.3.39) — (2.3.43) раскрывают зависимость кинематических параметров начальной точки активного участка торможения от основных проектных параметров КЛА μ_K и n_0 , выполнение которой связано с выходом КЛА на конечную ор-

биту около планеты назначения при тангенциальном управлении вектором тяги на участке торможения.

К известным законам управления вектором тяги на участках разгона и торможения КЛД в заданной неподвижной плоскости относится трансверсальный закон, когда $\alpha(t) = -\theta(t)$. Однако этот закон энергетически неэкономичен, так как при одних и тех же значениях основных проектных параметров μ_k и n_0 энергетический уровень разгона (торможения), характеризующийся

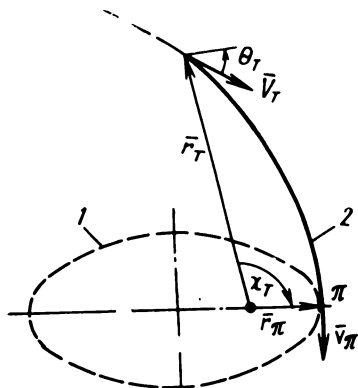


Рис. 2.3.2. Кинематика активного участка торможения:

1—конечная орбита; 2—активный участок торможения

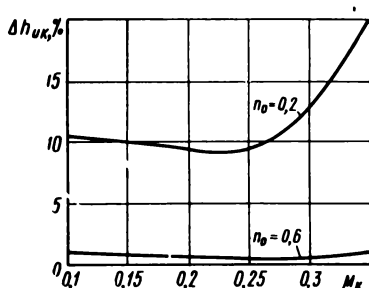


Рис. 2.3.3. Энергетические потери при трансверсальном управлении

значением $h_{u k}$, при трансверсальном управлении ниже, чем при тангенциальном. На рис. 2.3.3 показано изменение величины

$$\Delta h_{u k} = \frac{(h_{u k})_{\alpha=0} - (h_{u k})_{\alpha=-\theta}}{(h_{u k})_{\alpha=0}}, \quad \text{характеризующей уменьшение}$$

энергетического уровня разгона при трансверсальном управлении по сравнению с тангенциальным, в зависимости от μ_k при различных n_0 . Кроме того, рассматривался «смешанный» закон управления вектором тяги, включающий в себя два закона: до параболической скорости разгон совершается при трансверсальном законе $\alpha(t) = -\theta(t)$, после — при тангенциальном законе $\alpha(t) = 0$. На рис. 2.3.4 дано изменение величины $\Delta h_{u k} = \frac{(h_{u k})_{\alpha=0} - (h_{u k})_{\text{см}}}{(h_{u k})_{\alpha=0}}$ в зависимости от μ_k при различных n_0 . Видно,

что «смешанный» закон при малых значениях μ_k приводит к значительно меньшим потерям, чем трансверсальный. Сравнение тангенциального управления с оптимальным, при котором при одинаковых μ_k и n_0 достигается максимум $h_{u k}$, показывает, что различие в величинах $h_{u k}$ в широком диапазоне значений μ_k и n_0 не превосходит одного процента. Поэтому в рамках принима-

емых допущений и приближений, отвечающих требованиям проектно-баллистических расчетов, тангенциальный закон управления вектором тяги вполне можно рассматривать в качестве оптимального. Это повышает важность и ценность полученных приближенных решений дифференциальных уравнений управляемого движения КЛА.

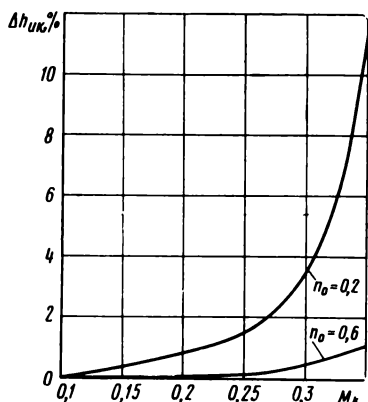


Рис. 2.3.4. Энергетические потери при смешанном управлении

§ 4. РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИЙ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ ИМПУЛЬСОМ

Импульсные траектории перелета между двумя планетами являются плоскими траекториями, принадлежащими к классу конических сечений. В этом случае плоскость траекторий перелета определяется по трем точкам (рис. 2.4.1): *I* — точка старта с первой планеты; *II* — точка прилета ко второй планете; $\odot$ — центр тяготения (Солнце).

Угол i между плоскостями орбит планет невелик, поэтому обычно плоскость орбиты перелета имеет малое наклонение к

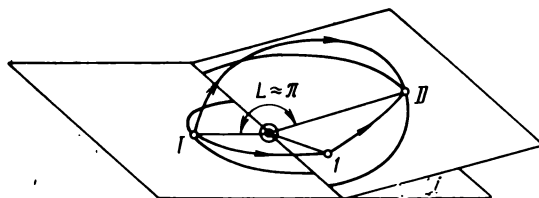


Рис. 2.4.1. Схема пространственного перелета с промежуточным импульсом

плоскостям орбит планет (или к плоскости эклиптики). Однако в особых случаях, когда угол перелета L приближается к π (или $k\pi$, где $k=1, 2, \dots$), происходит резкое увеличение наклонения орбиты перелета до величин $\pm \frac{\pi}{2}$. Это приводит к увеличению

относительной скорости старта (скорость V_∞ выхода из грависферы планеты) с первой планеты и относительной скорости

подхода ко второй планете и, следовательно, к увеличению энергозатрат на перелет. На полях изолиний характеристической скорости (или скорости V_∞) появляется (см. рис. 5.2.1) «энергетический хребет». Полоса значений дат старта и дат прилета, прилегающая к этому хребту, не может быть реализована. Очевидно, что энергозатраты для траекторий перелета в области «энергетического хребта» могут быть снижены при переходе к траектории, состоящей из двух (или более) плоских участков [52, 60]. В этом случае в точке I подается дополнительный импульс, ломающий траекторию перелета. В ряде случаев целесообразно использовать траекторию перелета с промежуточным

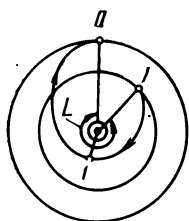


Рис. 2.4.2. Схема плоского перелета с промежуточным импульсом

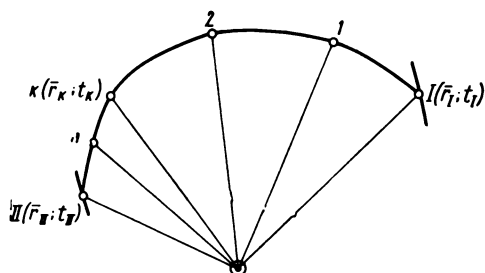


Рис. 2.4.3. Схема перелета с промежуточными импульсами

импульсом (или несколькими импульсами) для перелетов и в одной плоскости [82]. Так, при больших углах перелета $L > \pi$ между планетами I и II (рис. 2.4.2) энергетически выгодным будет маневр с заходом внутрь орбиты планеты I и с подачей дополнительного импульса в точке I (импульс практически не изменяет плоскости перелета) и перелетом по двум траекториям конических сечений. Момент и положение точки I должны выбираться из условия минимума суммарных энергозатрат на участке перелета между планетами I и II . Оптимизируемыми параметрами будут три координаты, определяющие положение точки подачи промежуточного импульса, и время подачи импульса.

Таким образом, при заданных моментах времени t_I старта с планеты I и времени t_{II} прилета на планету II задача оптимизации траектории перелета с одним промежуточным импульсом является четырехпараметрической. В общем случае, когда число промежуточных импульсов равно n , число оптимизируемых параметров $N = 4n$.

Рассмотрим такой случай перелета между планетами I и II с подачей промежуточных импульсов (рис. 2.4.3). Задание времени старта t_I с планеты I и времени прилета t_{II} на планету II определяет положение радиусов-векторов планет $\bar{r}_I$ и $\bar{r}_{II}$ и векто-

ров скорости планет $\bar{V}_I$ и $\bar{V}_{II}$. Координаты промежуточных точек (радиус-вектор $\bar{r}_k$) и моменты времени прохождения точек (момент подачи промежуточного импульса t_k) выбираются из условия минимума суммарной характеристической скорости. Для общности рассмотрим траекторию перелета между планетами с подачей стартового импульса у планеты I и тормозного импульса у планеты II . В этом случае суммарная характеристическая скорость

$$V_{\Sigma} = \Delta V_I + \Delta V_{II} + \sum_{k=1}^n |\bar{V}_{k+1}^n - \bar{V}_k^k|,$$

где ΔV_I и ΔV_{II} — характеристическая скорость старта с планеты I и торможения у планеты II соответственно;

$\bar{V}_{k+1}^n$ — вектор скорости КЛА в начале $(k+1)$ участка перелета;

$\bar{V}_k^k$ — вектор скорости КЛА в конце k -го участка перелета.

Характеристическая скорость старта с планеты I (Земля) приближенно равна приращению скорости

$$\Delta V_I \approx V_{\pi\Gamma}^{\text{ст}} - V_{\text{кр}}^{\oplus},$$

где $V_{\text{кр}}^{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{(R^{\oplus} + h)}}$ — круговая скорость на стартовой орбите ИСЗ ($h=200$ км);

$V_{\pi\Gamma}^{\text{ст}} = \sqrt{(V_{\text{пар}}^{\oplus})^2 + (V_{\infty}^{\oplus})^2}$ — скорость в перигеуме стартовой гиперболы;

$V_{\text{пар}}^{\oplus}$ — параболическая скорость на высоте h ;

$V_{\infty}^{\oplus}$ — скорость выхода из сферы действия Земли.

Аналогично характеристическая скорость торможения на орбиту искусственного спутника планеты (ИСП)

$$\Delta V_{II} = V_{\pi\Gamma}^{\text{пл}} - V_{\pi\text{эл}}^{\text{пл}},$$

где $V_{\pi\Gamma}^{\text{пл}} = \sqrt{(V_{\text{пар}}^{\text{пл}})^2 + (V_{\infty}^{\text{пл}})^2}$;

$V_{\pi\text{эл}}^{\text{пл}}$ — скорость в перигеуме орбиты ИСП.

Для пролетных и десантных траекторий полета (без активного торможения на орбиту ИСП) составляющая $\Delta V_{II}=0$. При заданных параметрах точек подачи промежуточных импульсов определение траектории на каждом участке сводится к определению орбиты по двум положениям. Эта задача может быть решена методом Ламберта или другими. Оптимизация параметров точек подачи промежуточных импульсов проводится градиентным методом. Задача решается последовательным пере-

бором количества импульсов. Вначале определяется траектория перелета без промежуточного импульса, затем с одним промежуточным импульсом, двумя и т. д. Для каждого случая определяется суммарная скорость V_{Σ} . Оптимальное количество промежуточных импульсов определяется из условия минимума V_{Σ} . Если ограничить общий угол перелета $L < 2\pi$ (траектории 1-го

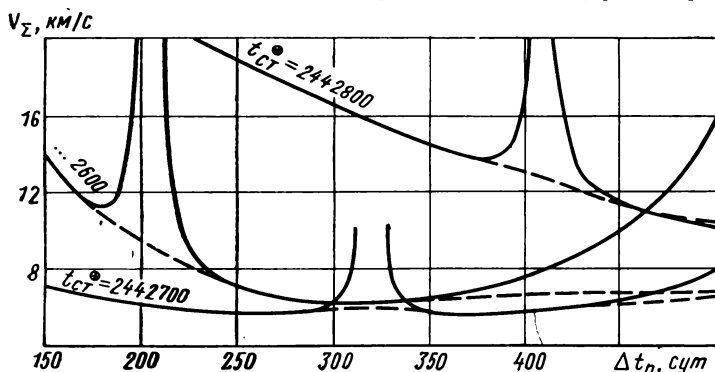


Рис. 2.4.4. Перелет орбита ИСЗ — орбита ИСМ ($h_{кр}^{\oplus} = 300$ км, $h_{\pi}^{\oplus} = 1000$ км, $h_{\alpha}^{\oplus} = 20000$ км)

— обычные траектории; --- с промежуточным импульсом

или 2-го полувитка в случае перелета без промежуточного импульса), то угол перелета на каждом участке $L_k < \pi$ (траектория 1-го полувитка). В этом случае область поиска экстремума V_{Σ} даже при одном промежуточном импульсе будет унимодальной

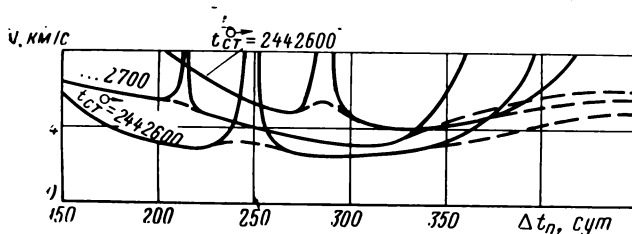


Рис. 2.4.5. Перелет орбита ИСМ — Земля

(область с одним экстремумом), что обеспечивает сходимость градиентных методов. При последовательной оптимизации количества импульсов целесообразно принять следующую стратегию выбора нулевых приближений для параметров промежуточных импульсов. Для оптимизации траекторий с одним промежуточным импульсом момент подачи его для нулевого приближения определяется так:

$$t_1^0 = \frac{t_I + t_{II}}{2}.$$

Вектор $\bar{r}_1^0$ выбирается равным радиусу-вектору плоской траектории перелета в момент t_1^0 . Для траектории с двумя промежуточными импульсами

$$t_1^0 = t_1 + \frac{t_{11} - t_1}{3} ;$$

$$t_2^0 = t_{11} - \frac{t_{11} - t_1}{3} .$$

Векторы $\bar{r}_1^0$ и $\bar{r}_2^0$ соответствуют положениям в моменты t_1^0 и t_2^0 на плоской траектории перелета. Для ускорения времени счета при массовых расчетах для построения полей изолиний в качестве нулевых приближений целесообразно выбирать параметры предыдущей точки. Как показывают расчеты, при приложении дополнительных импульсов срезается «энергетический хребет» на полях изолиний характеристической скорости (рис. 2.4.4 и 2.4.5). Кроме того, при наличии промежуточных импульсов снижаются энергозатраты при полетах по траекториям 2-го полувитка при большом времени полета. Для траекторий полета с орбиты ИСЗ на орбиту искусственного спутника Марса (ИСМ) характерно достаточно полное «срезание энергетического хребта», разделяющего траектории 1 и 2-го полувитков. Для траекторий полета с орбиты ИСМ к Земле остаются некоторые «следы энергетического хребта».

Глава III ● СХЕМЫ И ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА МЕЖПЛАНЕТНЫХ АППАРАТОВ

§ 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРАЕКТОРИЙ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА

Выполнение задачи доставки полезной нагрузки к планете назначения включает несколько этапов, из которых главное влияние на энергозатраты полета оказывают:

- выведение КЛА ракетой-носителем на промежуточную орбиту;

- сход с промежуточной орбиты и разгон до нужного энергетического уровня, позволяющего преодолеть гравитационное поле Земли;

- баллистический полет к планете назначения, для которого, однако, планируются энергозатраты, связанные с решением навигационных задач, поддерживающих близость истинной траектории к номинальной;

- торможение КЛА при подходе к планете назначения, позволяющее выйти на околопланетную орбиту;

- сход КЛА с околопланетной орбиты и посадка его на поверхность планеты назначения *;

- возвращение, включающее энергозатраты на выполнение задачи возвращения КЛА к Земле и состоящее из этапов, аналогичных ранее рассмотренным (при полете к планете назначения)..

Трудно оценить степень влияния отдельного этапа на проектно-баллистические характеристики и величину полезной нагрузки КЛА — все этапы взаимосвязаны. Однако каждый этап имеет специфику, связанную с реализацией маневра, управлением вектором тяги и выполнением конечных условий этапа полета. Поэтому для предварительных проектных разработок КЛА можно найти приближенные методы решения задач, учитывающие

* Если планируется прямая посадка КЛА, то вместо последних двух этапов следует рассматривать один этап торможения (активного или пассивного) и посадки КЛА на планету.

специфику каждого этапа. Взаимосвязи всех отдельно полученных решений можно добиться методом последовательных приближений. Такой путь удобен и плодотворен еще и потому, что он позволяет в полной мере использовать известный метод аппроксимации истинной межпланетной траектории полета КЛА участками конического сечения (см. § 2 гл. I). Кусочно-коническая аппроксимация позволяет определить кусочную межпланетную траекторию, представляющую для проектных разработок хорошее приближение к точной траектории. Кроме того, эту кусочную кривую удобно рассматривать в качестве первого приближения для соответствующего итерационного процесса, применяемого при определении окончательной межпланетной траектории с учетом различного рода возмущений.

Представление в действительности непрерывной межпланетной траектории в виде кусков конического сечения основывается на допущении о действии силы притяжения только центрального тела при движении КЛА в грависфере планеты или вне ее (в гелиосфере). В этом случае активный участок разгона КЛА в грависфере Земли заканчивается *гиперболической орбитой отрыва*, а активному участку торможения КЛА в грависфере планеты назначения предшествует *гиперболическая орбита прибытия*. Вне грависфер планет (в гелиосфере) рассматривается преимущественно баллистический полет КЛА, происходящий, по предположению, под действием силы притяжения только центрального тела — Солнца. Здесь в качестве орбит учитываются в основном эллиптические орбиты перелета.

Для повышения энергетической эффективности перелета в ряде случаев целесообразно введение дополнительных активных участков в гелиосфере (см. § 4 гл. II).

Активный участок выведения КЛА на *промежуточную орбиту*, которая обыкновенно принимается круговой с высотой 150—200 км, определяется проектно-баллистическими характеристиками ракеты-носителя. При планировании межпланетных полетов обычно вновь проектируются и создаются только КЛА, параметры, компоновка и конструкция которых выбираются с учетом специфики выполняемой задачи по исследованию планет и межпланетного пространства. Выведение же КЛА осуществляется обычно ракетой-носителем, наиболее экономичной для несения заданной полезной нагрузки (вес КЛА), из серии типов штатных ракет-носителей, представляющих собой многоцелевую ракетно-космическую систему. Правда, в ряде случаев из соображения более рационального использования возможностей ракеты-носителя и КЛА производится модификация последней ступени ракеты.

Сход с круговой промежуточной орбиты и разгон до требуемого энергетического уровня, баллистический полет к планете назначения, торможение вблизи планеты для выхода на около-

планетную орбиту и возвращение к Земле определяют задачу выбора проектно-баллистических характеристик КЛА и величины полезной нагрузки, доставляемой к планете назначения и к Земле. В зависимости от требуемой точности и количества выбираемых параметров эту задачу можно решать различными методами, в основе которых лежит кусочно-коническая аппроксимация баллистической траектории полета. Принципиально эти методы можно разделить на два типа: *метод импульсной аппрок-*

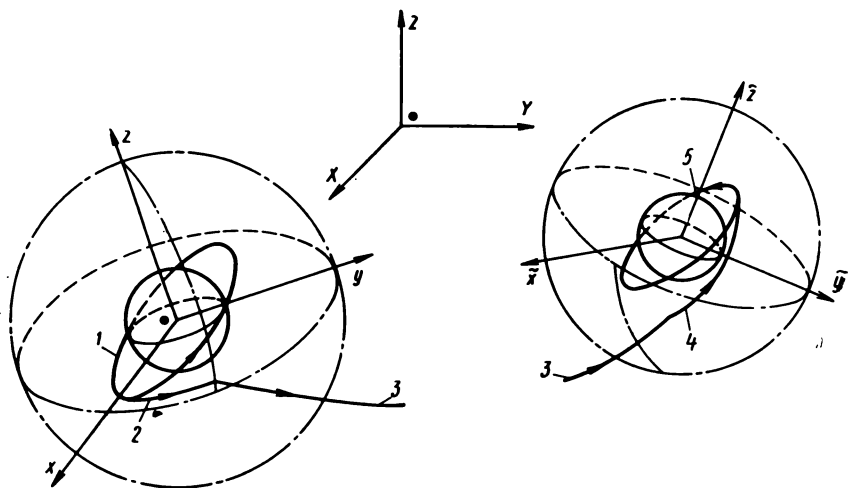


Рис. 3.1.1. Кусочно-коническая аппроксимация межпланетной траектории полета при импульсном изменении скорости:

1—промежуточная орбита; 2—гиперболическая орбита отрыва; 3—гелиоцентрический участок межорбитального перелета; 4—гиперболическая орбита прибытия; 5—конечная орбита

симации и методы, учитывающие протяженность и непрерывность активных участков разгона и торможения КЛА, которые условно назовем *методами конечных тяг*.

В методе импульсной аппроксимации активный участок представляется в виде мгновенного изменения скорости при неизменном положении КЛА. Таким образом, предполагается, что вследствие импульсного изменения КЛА мгновенно переходит в точке схода на круговой промежуточной орбите на гиперболическую орбиту отрыва, а в одной из точек (в точке схода) гиперболической орбиты прибытия КЛА — на планируемую околопланетную конечную орбиту *. Благодаря такой импульсной аппроксимации активных участков вся межпланетная траектория представляется из трех кусков конического сечения (рис. 3.1.1): гиперболи-

* В случае отсутствия промежуточных пассивных участков при разгоне или торможении. Такая аппроксимация допустима при непрерывном активном участке.

ческой орбиты отрыва (грависфера Земли), гелиоцентрического (эллиптического или гиперболического) участка межорбитального перелета (орбита Земли — орбита назначения) и гиперболической орбиты прибытия (грависфера планеты назначения). Гелиоцентрический участок межорбитального перелета, в свою очередь, может состоять из нескольких кеплеровых орбит, если для разгона или торможения КЛА используются гравитационные поля других планет или существуют промежуточные активные участки. Стыковка указанных кусков конического сечения считается выполненной, если асимптота гиперболической орбиты отрыва параллельна вектору гиперболического избытка скорости $\bar{V}_{\infty 0}$, определяемого из равенства

$$\bar{V}_{\infty 0} = \bar{V}_0 - \bar{V}_{\oplus}, \quad (3.1.1)$$

а асимптота гиперболической орбиты прибытия параллельна вектору гиперболического избытка скорости прибытия $\bar{V}_{\infty k}$, определяемого из равенства

$$\bar{V}_{\infty k} = \bar{V}_k - \bar{V}_{\text{пл}}. \quad (3.1.2)$$

Здесь $\bar{V}_0$, $\bar{V}_k$ — векторы начальной и конечной скорости полета на гелиоцентрическом участке; $\bar{V}_{\oplus}$ — вектор скорости движения Земли в начальный момент полета КЛА в гелиосфере; $\bar{V}_{\text{пл}}$ — вектор скорости движения планеты назначения в конечный момент полета КЛА в гелиосфере. Тем самым предполагается, что момент выхода КЛА из грависферы Земли и момент входа его в грависферу планеты назначения совпадают соответственно с точками пересечения эллиптической орбиты перелета с орбитами Земли и планеты назначения. С физической точки зрения это означает, что планеты рассматриваются в качестве негравитирующих центров, а с геометрической — является следствием пренебрежения размерами грависфер планет.

Однако такой подход к оценке стыковки гелиоцентрического участка с планетоцентрическими не всегда оправдан. Для некоторых схем полета, особенно когда речь идет о полетах к планетам, имеющим большие размеры грависфер, гелиоцентрический участок следует определять для требуемой точности расчетов с учетом размеров грависфер планет. В этом случае стыковка достигается в результате совместного расчета гелиоцентрического и планетоцентрических участков.

Метод импульсной аппроксимации основывается на рассмотренных допущениях, которые хотя и приводят к определенной идеализации истинной картины межпланетного перелета, но позволяют в первом приближении достаточно простым способом определить энергетические затраты, требующиеся для реализации межпланетного полета.

Использование метода импульсной аппроксимации позволяет построить следующую структурную схему решения задачи по

определению проектно-баллистических характеристик КЛА. Вначале решается задача по определению гелиоцентрического участка межорбитального перелета, одним из результатов которой является нахождение $\bar{V}_{\infty 0}$ и $\bar{V}_{\infty K}$. Далее обращаются к алгоритмам поиска гиперболических орбит отрыва и прибытия, соответствующие асимптоты которых должны быть параллельны $\bar{V}_{\infty 0}$ и $\bar{V}_{\infty K}$, а константы интегралов энергии равны $\bar{V}_{\infty 0}^2$ и $\bar{V}_{\infty K}^2$ соответственно.

Важной частью этих алгоритмов являются блоки расчета минимальных значений характеристических скоростей участков разгона $V_{x\bar{x}}^p$ и торможения $V_{x\bar{x}}^T$, выражающих относительные конечные веса разгонного μ_{K1} и тормозного μ_{K2} модулей КЛА следующим образом:

$$\mu_{K1} = \exp \left(- \frac{V_{x\bar{x}}^p}{g_0 P_{y11}} \right); \quad (3.1.3)$$

$$\mu_{K2} = \exp \left(- \frac{V_{x\bar{x}}^T}{g_0 P_{y12}} \right), \quad (3.1.4)$$

где P_{y11} , P_{y12} — удельные тяги двигательных установок разгонного и тормозного модулей соответственно;
 g_0 — гравитационное ускорение Земли.

Дело в том, что при допущении о возможности промежуточных пассивных участков при разгоне и торможении КЛА на основе импульсной аппроксимации траектории разгона и торможения могут быть представлены в виде нескольких кусков конического сечения. В этом случае минимизация суммарных характеристических скоростей участков разгона и торможения приобретает важное значение. Использование большого числа импульсов позволяет не просто подбирать траекторию, удовлетворяющую граничным условиям, но и оптимизировать требуемое значение суммарной характеристической скорости.

Метод импульсной аппроксимации, привлекающий относительной простотой и наглядностью алгоритма вычисления межпланетной траектории полета и энергозатрат на ее реализацию, приводит к приближенной оценке энергозатрат перелета и не позволяет в полной мере выявить проектно-баллистические характеристики КЛА.

Погрешности, вызываемые импульсной аппроксимацией, являются результатом неучета гравитационных потерь и изменения ориентации вектора тяги на активном участке, пренебрежения эффектом параллакса (протяженности грависферы планет) при расчете гелиоцентрического участка межорбитального перелета и протяженностью активного участка.

На рис. 3.1.2 показано изменение относительной величины гравитационных потерь $\left(\Delta\mu = \frac{\mu_{\text{к.имп}} - \mu_{\text{к}}}{\mu_{\text{к}}}\right)$, не учитываемых при импульсной аппроксимации, на участке разгона с промежуточной круговой орбиты при $n_0=0,2$ в зависимости от значения $\mu_{\text{к}}$.

Этот метод не позволяет определить необходимые для маневра начальные тяговооруженности ступеней КЛА.

Однако метод импульсной аппроксимации широко используется при проектных разработках КЛА, поскольку решения, получаемые с помощью этого метода, вполне можно использовать в качестве первого приближения*.

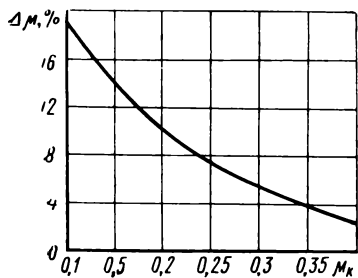


Рис. 3.1.2. Гравитационные потери относительного конечного веса КЛА на участке разгона ($n_0=0,2$; $R_{\text{уд}}=350$ с, $r_0=6571$ км)

Методу конечных тяг не свойственны многие недостатки метода импульсной аппроксимации. В нем достаточно полно учитываются гравитационные потери и изменение вектора тяги по времени; он дает возможность определить оптимальные значения начальных тяговооруженностей ступеней КЛА. Метод конечных тяг базируется на приближенных решениях системы дифференциальных уравнений управляемого движения КЛА. Поэтому определение кинематических параметров

конца активных участков разгона или торможения неточно и приводит к ошибкам, которые существенно меньше ошибок при импульсной аппроксимации, что вполне удовлетворяет требованиям предэскизных разработок КЛА.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ СХЕМ ПОЛЕТА МЕЖПЛАНЕТНЫХ АППАРАТОВ

Выбор проектно-баллистических характеристик межпланетного аппарата связан с несколькими критериальными оценками: энергетическими затратами, общим временем полета, диапазоном окна старта, чувствительностью номинальной траектории к возможным отклонениям и т. д. Оптимальные проектно-баллистические характеристики отвечают экстремальному значению одного из критериев при ограничениях на другие. Однако используемые аналитические зависимости, характер поиска оптимальных проектно-баллистических характеристик и результаты решения

* Обстоятельный обзор работ, посвященных методу импульсной аппроксимации, дан в работе [64].

существенно зависят от схемы полета межпланетного аппарата. Выбор схемы полета, выражающий (без излишних подробностей) профиль межпланетной траектории, позволяет найти принципиальные пути решения конкретной задачи межпланетного полета. Классификация схем полета может явиться составным элементом алгоритма оптимизации проектно-баллистических характеристик межпланетного аппарата, если в ее основу будут положены алгоритмическая близость схем полета и баллистические требования к конечному маневру и к маневру при облете промежуточной планеты, базирующиеся на конечной цели полета.

Большое разнообразие гелиоцентрических участков полета к планетам может привести в будущем к значительному увеличению числа возможных профилей полета, которые обычно образуются из различного рода сочетаний известных типов гелиоцентрических орбит полета. Все это делает полезным проведение классификации схем полета межпланетных аппаратов.

Возможные схемы полета к планетам можно разделить на два типа: первый — схемы полета к планете назначения без возвращения КЛА к Земле, второй — схемы полета к планете назначения с возвращением КЛА к Земле. В свою очередь каждый тип делится на два класса: класс схемы прямых полетов к планете назначения и класс схем полетов с учетом маневра при облете промежуточной планеты. Для большей определенности конкретной схемы полета классы разбиваются на группы.

1-й тип — схемы полета к планете назначения без возвращения к Земле

Для сбора информации о планетах солнечной системы важное место занимают и будут занимать полеты к планетам назначения без возвращения к Земле. Такие схемы полета могут быть присущи только автоматическим межпланетным аппаратам, главная задача которых — доставить полезный груз в район планеты назначения для получения нужной информации. Хотя существует много конкретных схем таких полетов, их можно разделить на два принципиально разных класса.

1-й класс — схемы прямых полетов к планете назначения (без возврата к Земле). Схема прямого полета к планете назначения предназначена для непосредственного перелета КЛА от Земли к планете назначения без использования пертурбационных эффектов. Формальная систематизация множества гелиоцентрических участков межпланетных траекторий прямого полета КЛА к планете назначения позволяет их представить тринадцатью типами орбит [51, т. II, ч. 2, § 9. 2]: девятью типами эллиптических, одной параболической и тремя гиперболическими (рис. 3. 2. 1 и 3. 2. 2). Классификация же схем прямых полетов к планете назначения с учетом ранее указанных требований, не нарушая формальную

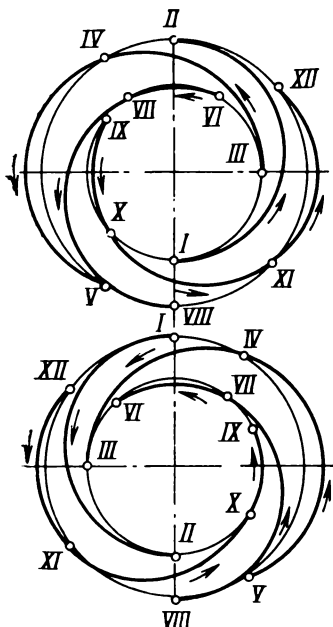


Рис. 3. 2. 1. Девять основных типов эллиптических гелиоцентрических участков перелета. Крайние точки:
 $I \rightleftharpoons II$, $III \rightleftharpoons IV$, $III \rightleftharpoons V$, $VI \rightleftharpoons VIII$,
 $VII \rightleftharpoons VIII$, $IX \rightleftharpoons XI$, $IX \rightleftharpoons XII$, $X \rightleftharpoons XI$,
 $X \rightleftharpoons XII$

систематизацию гелиоцентрических участков, сводит возможные схемы полета к четырем группам.

1-я группа — схемы полета по пролетно-падающим траекториям (см. рис. 3. 2. 3). Полет начинается с промежуточной орбиты около Земли, заканчивается —

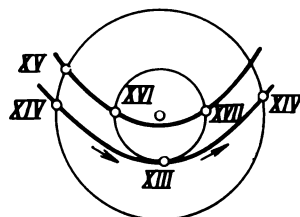


Рис. 3. 2. 2. Три основных типа гиперболических гелиоцентрических участков перелета. Крайние точки:
 $XIII \rightleftharpoons XIV$, $XV \rightleftharpoons XVI$, $XV \rightleftharpoons XVII$

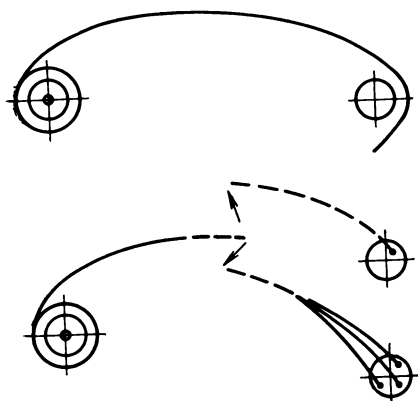


Рис. 3. 2. 3. Схема полета автоматического межпланетного аппарата по пролетно-падающей траектории

либо пролетом вблизи планеты по гиперболической планетоцентрической траектории, либо «прямым» попаданием аппарата (аппаратов) в заданный район (районы) планеты, причем уменьшение скорости может быть достигнуто за счет торможе-

ния в атмосфере планеты. Для обеспечения попадания аппаратов в заданные районы необходима система автоматической навигации и коррекции траекторий на припланетном участке.

2-я группа — *схемы полета с выходом на конечную орбиту около планеты назначения (рис. 3.2.4)*. Полет, как и в предыдущем случае, начинается с промежуточной орбиты около Земли, заканчивается — выходом на конечную орбиту около планеты назначения. Выхода на заданную конечную орбиту

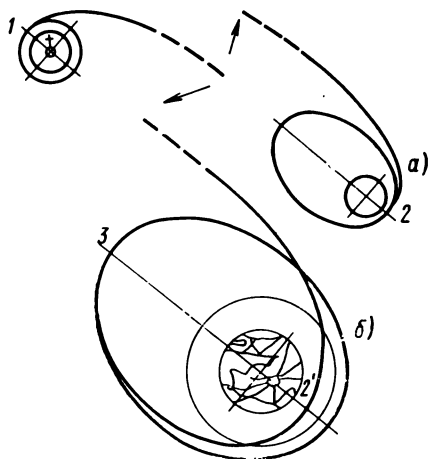


Рис. 3.2.4. Схема полета автоматического межпланетного аппарата с выходом на орбиту около планеты назначения:

а — схема с активным торможением; б — схема с аэродинамическим торможением (1 — старт с промежуточной орбиты; 2 — активное торможение для выхода на конечную орбиту; 2' — торможение в атмосфере планеты; 3 — коррекция для выхода на конечную орбиту)

около планеты можно достигнуть различными способами. Существуют два принципиально разных способа торможения: активное торможение, когда скорость уменьшается за счет реактивной силы, и пассивное, при котором скорость уменьшается за счет торможения аппарата в атмосфере планеты. Возможна комбинация этих способов. Выбор того или иного способа торможения зависит от постановки задачи и задания конечной орбиты.

3-я группа — *схемы полета с выходом к планете и с высадкой десанта (рис. 3.2.5)*. Особенность данной схемы полета заключается в том, что после старта с промежуточной орбиты около Земли и подхода к планете в ней предусматривается посадка десантного аппарата (десантных аппаратов) на поверхность планеты. Мягкая посадка десантных аппаратов может быть обеспечена различными способами: путем торможения за счет реактивной силы и комбинации указанного способа с торможением в атмосфере планеты (баллистический спуск, спуск с аэродинамиче-

ским качеством). В рассматриваемой схеме полета предусматривается возможность посадки на планету как всего аппарата, так и последовательная посадка отдельных его модулей (десантных аппаратов).

4-я группа — комбинированные схемы полета (рис. 3.2.6). К комбинированным относятся такие схемы межпланетных полетов, когда на участке подлета к планете межпланетный ап-

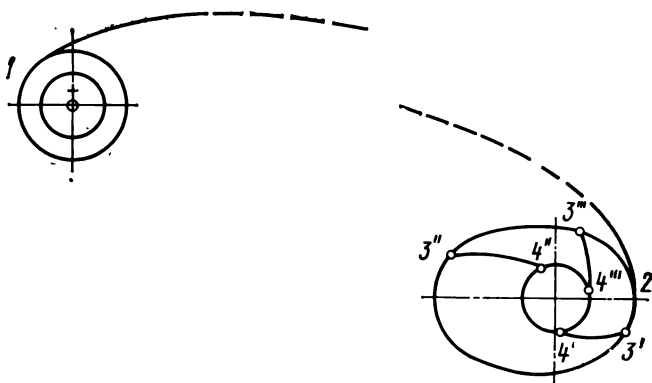


Рис. 3.2.5. Схема полета автоматического межпланетного аппарата с выходом на околопланетную орбиту и с высадкой десанта на поверхность планеты:

1—старт с промежуточной орбиты; 2—выход на околопланетную орбиту; 3—4—участок спуска на поверхность планеты ($3'-4'$; $3''-4''$; $3'''-4'''$)

парат делится на модули, из которых задача одних — пролететь мимо планеты (пролетно-десантная схема, рис. 3.2.6, а) или выйти на околопланетную орбиту (орбитально-десантная схема, рис. 3.2.6, б и в), а других — спуститься на поверхность планеты (рис. 3.2.6). Возможна также схема, когда один модуль выходит на околопланетную орбиту, другой — пролетает мимо планеты.

2-й класс — схемы полета к планете назначения с использованием пертурбационного эффекта промежуточной планеты. Использование гравитационных полей других планет при полете к планете назначения — задача весьма перспективная. В ряде случаев это позволяет добиться большего эффекта от межпланетного полета. Дело в том, что в результате пролета КЛА вблизи промежуточной планеты вследствие воздействия ее гравитационного поля гелиоцентрический участок межпланетной траектории изменяется. Планирование соответствующего изменения и его правильное использование могут привести к положительным результатам: уменьшению суммарных энергетических затрат, увеличению окон старта и т. д. Весьма заманчиво и то, что одним меж-

планетным аппаратом можно провести исследования нескольких планет. Правда, здесь повышаются требования к навигации КЛА, но современные технические возможности позволяют их удовлетворить.

На классификацию такого рода схем полета оказывают влияние маневры как около промежуточной планеты, так и на конечном этапе полета около планеты назначения. В связи с этим мно-

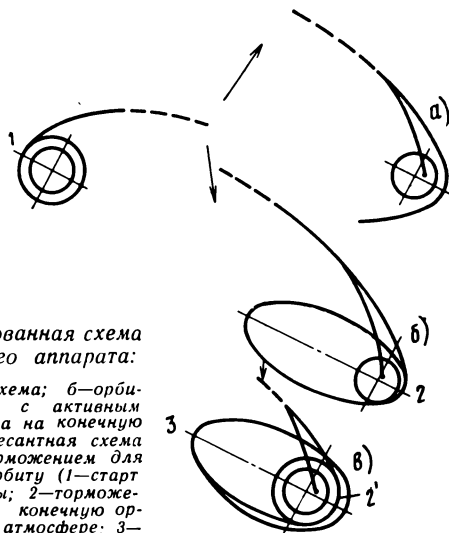


Рис. 3. 2. 6. Комбинированная схема полета межпланетного аппарата:

а—пролетно-десантная схема; *б*—орбитально-десантная схема с активным торможением для выхода на конечную орбиту; *в*—орбитально-десантная схема с аэродинамическим торможением для выхода на конечную орбиту (*1*—старт с промежуточной орбиты; *2*—торможение для выхода на конечную орбиту; *2'*—торможение в атмосфере; *3*—коррекция выхода на конечную орбиту)

жество схем полетов данного 2-го класса можно свести к нескольким группам.

1-я группа — схемы полета по облетно-пролетным траекториям с использованием пертурбационного эффекта (рис. 3. 2. 7). После старта межпланетный аппарат проходит вблизи промежуточной планеты по гиперболической (относительно планеты) траектории и в результате соответствующего изменения гелиоцентрического участка достигает планеты назначения. Изменение гелиоцентрического участка межпланетной траектории происходит в основном от пертурбационного эффекта. Однако в ряде случаев для повышения эффекта маневра вблизи промежуточной планеты используют и импульсы. В конце полета планируется либо пролет КЛА около планеты назначения, либо «прямое» попадание в заданный район планеты.

В ряде случаев могут рассматриваться схемы полета, при которых до достижения планеты назначения КЛА пролетает несколько планет, гравитационные поля которых каждый раз соответствующим образом изменяют гелиоцентрический участок межпланетной траектории.

2-я группа — схемы полета с использованием пертурбационного эффекта промежуточной планеты и выходом на конечную орбиту около планеты назначения. Отличие данной группы схем полетов от предыдущей заключается в конечном маневре, предназначенном для выхода межпланетного аппарата на околопланетную орбиту.

3-я группа — схемы полетов с использованием пертурбационного эффекта промежуточной планеты, выходом к планете и высадкой десанта.



Рис. 3.2.7. Схема полета по облетно-пролетным межпланетным траекториям

В планировании пролета около промежуточной планеты и использовании ее гравитационного поля заключается отличие данной группы схем полетов от аналогичной группы предыдущего класса.

4-я группа — комбинированные схемы полетов с использованием пертурбационного эффекта промежуточной планеты. В данную группу схем полетов входят такие, при которых пролет промежуточной планеты может быть совмещен с высадкой десанта на ее поверхность, а на конечном этапе полета вблизи планеты назначения межпланетный аппарат разделяется на модули, из которых задача одних — пролететь около планеты или выйти на околопланетную орбиту, а других — совершить мягкую посадку на поверхность планеты и т. д.

2-й тип — схемы полета к планете назначения с возвращением к Земле

Возвращение к Земле — главное требование к межпланетным пилотируемым аппаратам. Такое же требование может быть выдвинуто и при планировании полетов автоматических межпланетных аппаратов. Дальнейшее накопление знаний о солнечной системе вряд ли мыслимо без реализации таких схем полета.

Все эти схемы полета могут быть разделены на два класса. Общим для них является вход аппарата в атмосферу Земли со скоростью, превышающей вторую космическую. Допускается возможность использования импульсов в точках гелиоцентрического участка траектории возврата. Импульсы позволяют в ряде случаев заметно снизить скорость входа КЛА в атмосферу Земли.

1-й класс — схемы прямых полетов к планете назначения с возвращением к Земле. Данный класс включает схемы прямых пере-

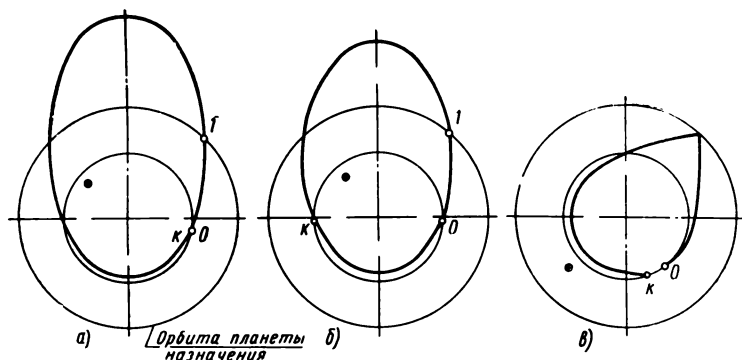


Рис. 3. 2. 8. Схемы полета по пролетно-возвратным траекториям:

а—схема полета с возвращением к Земле через целое число сидерических лет и без учета пертурбационного эффекта планеты назначения; б—схема полета с возвращением к Земле через дробное число сидерических лет и без учета пертурбационного эффекта планеты назначения; в—схема полета с возвращением к Земле с учетом пертурбационного эффекта планеты назначения

летов Земля — планета назначения и планета назначения — Земля. Здесь не предусматривается использование пертурбационных эффектов от других планет ни на этапе полетов к планете назначения, ни на этапе возвращения к Земле. Множество схем прямых полетов рассматриваемого класса может быть разбито на группы.

1-я группа — схемы полета по пролетно-возвратным траекториям (рис. 3. 2. 8). К этой группе относятся схемы полетов, включающие пролет межпланетного аппарата вблизи планеты назначения и его возвращение к Земле. Возвращение обеспечивается различными способами: подбором соответствующего гелиоцентрического участка и даты старта; использованием пертурбационного эффекта от планеты назначения; введением дополнительных импульсов для изменения гелиоцентрического участка межпланетной траектории возврата.

2-я группа — схема полета с выходом на орбиту ожидания около планеты назначения и возвращением к Земле. Данная группа схем полетов отличается от предыдущей выходом на орбиту ожидания около планеты назначения, определенным вре-

менем пребывания на ней и для возвращения к Земле сходом с орбиты. Все это требует значительных дополнительных энергозатрат.

3-я группа — схемы полета с высадкой десанта на поверхность планеты назначения и возвращением к Земле (рис. 3.2.9,

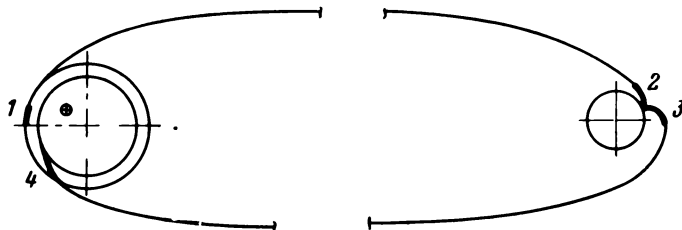


Рис. 3.2.9. Схема полета межпланетного аппарата с высадкой десанта на планету назначения и возвратом к Земле:

1—старт с промежуточной орбиты; 2—посадка на планету назначения; 3—старт с поверхности планеты; 4—посадка на Землю

3.2.10). К этой группе относятся схемы полетов, по которым предусматривается высадка десанта на поверхность планеты назначения. Высадка десанта может быть обеспечена «прямой» посадкой КЛА, при которой гиперболическая орбита прибытия непосредственно стыкуется с траекторией спуска, либо спуском с околопланетной орбиты, на которую предварительно выходит

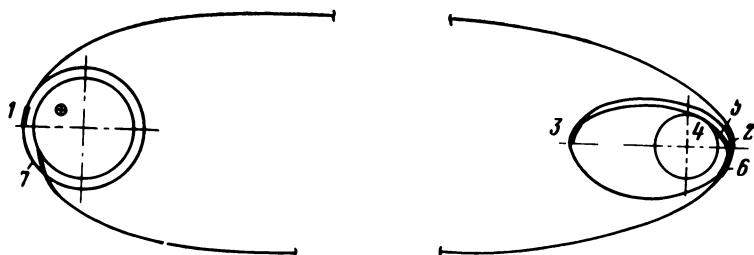


Рис. 3.2.10. Схема полета возвращающегося на Землю межпланетного аппарата с выходом на орбиту и посадкой на планету назначения:

1—старт с промежуточной орбиты; 2—торможение для выхода на орбиту ожидания; 3, 4—спуск с орбиты на планету; 5—старт с поверхности планеты и выход на орбиту; 6—старт с орбиты; 7—посадка на Землю

КЛА. Для возвращения к Земле планируются старт с планеты, активный участок выведения на околопланетную орбиту и далее сход с нее. Реализация таких схем межпланетных полетов предъявляет особые требования к двигательным установкам и системам управления и к космической технике вообще.

4-я группа — комбинированные схемы полета с возвращением к Земле (рис. 3.2.11, 3.2.12). В комбинированных схемах полета задача пролета межпланетного аппарата около планеты

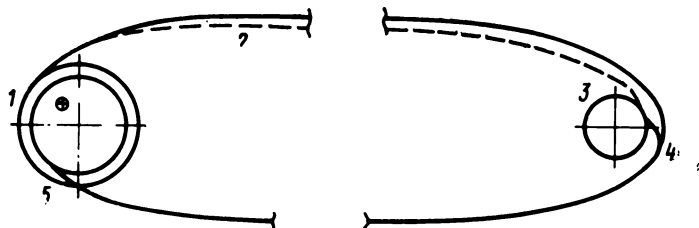


Рис. 3.2.11. Комбинированная схема полета возвращающегося на Землю межпланетного аппарата с облетом и посадкой на планету назначения:

1—старт с промежуточной орбиты; 2—коррекция межпланетной траектории; 3—посадка десантного модуля; 4—старт с поверхности Марса и сближение с облетным кораблем; 5—посадка на Землю

назначения или выхода на околопланетную орбиту совмещается с высадкой десанта посадочного модуля (модулей) КЛА на ее поверхность, которая может происходить по схеме предыдущей группы. Возвращение к Земле обеспечивается различными способами. Например, оно может происходить в результате стыковки стартующего с поверхности планеты модуля с пролетным ап-

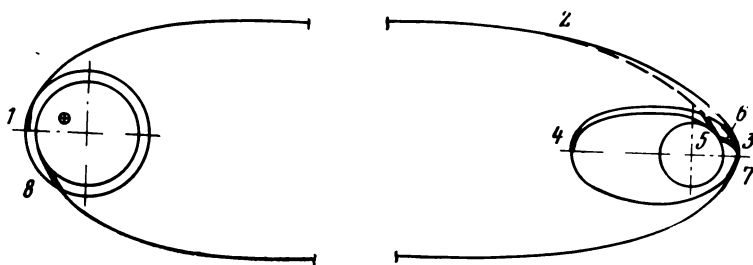


Рис. 3.2.12. Комбинированная схема полета возвращающегося на Землю межпланетного аппарата с выходом на орбиту и посадкой на планету назначения:

1—старт с промежуточной орбиты; 2, 5—вариант с прямой посадкой планетного комплекса; 3—торможение для выхода на конечную орбиту; 4—спуск с орбиты на планету десантного аппарата; 6—старт с поверхности и выход на орбиту; 7—старт с орбиты; 8—посадка на Землю

паратом (см. рис. 3.2.11). Другое решение задачи возвращения достигается путем стыковки стартующего с планеты модуля с орбитальным аппаратом, после которой образовавшийся комплекс сходит с околопланетной орбиты и выходит на траекторию возврата (см. рис. 3.2.12).

2-й класс — схемы полета к планете назначения с возвращением к Земле и использованием пертурбационного эффекта промежуточной планеты. При таких схемах полета влияние пертурбационного эффекта от промежуточной планеты может проявиться как на этапе полета к планете назначения, так и на этапе возвращения. Использование пертурбационного эффекта позволит снизить суммарные энергозатраты, расширить окна старта с Земли и планеты назначения и уменьшить скорость входа в атмосферу Земли.

Данный класс представим следующими группами.

1-я группа — схемы полета по пролетно-возвратным траекториям с учетом пертурбационного эффекта промежуточной планеты. Данная группа схем полета отличается от такой же группы предыдущего класса тем, что вследствие использования гравитационного поля планеты, мимо которой планируется пролет КЛА, изменятся либо гелиоцентрический участок полета к планете назначения, либо гелиоцентрический участок траектории возврата.

2-я группа — схемы полета с учетом пертурбационного эффекта промежуточной планеты, выходом на орбиту ожидания около планеты назначения и возвращением к Земле. Отличие этой группы от предыдущей — в маневрах выхода на промежуточную орбиту и схода с нее.

3-я группа — схемы полета с учетом пертурбационного эффекта промежуточной планеты, высадкой десанта на поверхность планеты назначения и возвращением к Земле. Данная группа отличается от 3-й группы предыдущего класса только планируемым изменением гелиоцентрического участка полета после контакта КЛА с промежуточной планетой либо на этапе полета к планете назначения, либо при возврате.

4-я группа — комбинированные схемы полета с возвращением к Земле и использованием пертурбационного эффекта промежуточной планеты. Комбинированные схемы полета включают схемы, когда пролет планеты назначения совмещается с высадкой десанта посадочного модуля (модулей). Кроме того, предусматривается и высадка десанта при контакте КЛА с промежуточной планетой на участке полета к планете назначения.

**§ 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ УЧАСТКА
ВЫВЕДЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТОЙ
НА ГИПЕРБОЛУ ОТРЫВА ОТ ЗЕМЛИ**

Траектория полета от точки старта до момента, когда вектор скорости КЛА приобретает нужное направление, называется участком выведения. Назначение участка выведения — обеспечить движение КЛА при выходе из грависферы с вектором скорости, равным вектору гиперболического избытка скорости $\bar{V}_{\infty 0}$, определенному в результате решения внешней задачи.

Участок выведения состоит из траектории управляемого полета (*активный участок выведения*) и траектории пассивного полета (*пассивный участок выведения*). Пассивный участок, которым заканчивается выведение, является гиперболической орбитой отрыва с $h_{\text{ук}} = V_{\infty 0}^2$.

Активный участок выведения может быть двух типов: первый — *активный участок непрерывного подъема*, на котором двигатели практически непрерывно работают и их промежуточное выключение не связано с выполнением задач выведения; второй — *активный участок с промежуточной орбитой*, на котором планируется промежуточное выключение двигателей для обеспечения пассивного движения аппарата по заранее выбранной промежуточной орбите, способствующей лучшему решению задач выведения. Если исходить из оценки активных участков по решению задачи правильного времени старта и задачи навигации с наименьшими энергозатратами, то предпочтение следует отдать активному участку с промежуточной орбитой (рис. 4.1.1), который широко используется для решения задач выведения.

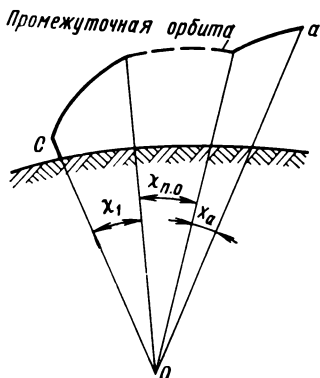
Перейдем к оценке геометрических характеристик участка выведения и их взаимосвязей, учитывая, что большая полуось и направление асимптоты орбиты отрыва предопределены заданием $V_{\infty 0}$ и $\bar{V}_{\infty 0}^0$. Для решения задачи параллельности асимптоты

гиперболической орбиты отрыва единичному вектору $\bar{V}_{\infty 0}^0$ необходимо, чтобы он находился в ее плоскости. Если $\bar{N}$ — нормаль к плоскости орбиты отрыва, то этому условию отвечает векторное уравнение плоскости

$$\bar{N} \cdot \bar{V}_{\infty 0}^0 = 0.$$

**Соотношение между углом наклона
плоскости орбиты i и склонением вектора цели δ_0**

Пусть **вектор цели $\bar{W}$** , проведенный из начала координат параллельно $\bar{V}_{\infty 0}^0$ и равный ему, во второй экваториальной геоцен-



трической системе координат определяется прямым восхождением α_0 и склонением δ_0 (рис. 4.1.2). Тогда, учитывая кинематическое уравнение $\bar{N} \cdot \bar{N} = 1$, решение векторного уравнения плоскости относительно N_x и N_y можно представить в виде

Рис. 4.1.1. Схема активного участка выведения с промежуточной орбитой:

C — точка старта; a — конец активного участка выведения

$$\left. \begin{aligned} N_y &= \frac{-\cos i \sin \delta_0 \sin \alpha_0 \pm \cos \alpha_0 (1 - \sin^2 \delta_0 - \cos^2 i)^{1/2}}{\cos \delta_0}; \\ N_x &= -\frac{N_y \sin \alpha_0 \cos \delta_0 + \cos i \sin \delta_0}{\cos \alpha_0 \cos \delta_0}, \end{aligned} \right\} (4.1.1)$$

поскольку $N_z = \cos i$, $W_x = \cos \alpha_0 \cos \delta_0$, $W_y = \sin \alpha_0 \cos \delta_0$, $W_z = \sin \delta_0$. Следовательно, положение плоскости орбиты отрыва должно удовлетворять неравенству

$$\cos^2 i \leq \cos^2 \delta_0 \text{ или } \pm \cos i \leq \cos \delta_0, \quad (4.1.2)$$

которое сводится к условию при запуске:

в северо-восточном направлении ($0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}$)

$$i \geq |\delta_0|, \quad (4.1.3a)$$

в юго-восточном направлении ($\frac{\pi}{2} \leq i \leq \pi$)

$$(\pi - i) \geq |\delta_0|. \quad (4.1.3b)$$

Таким образом, положение плоскости гиперболической орбиты отрыва должно быть таким, что ее угол наклона к эква-

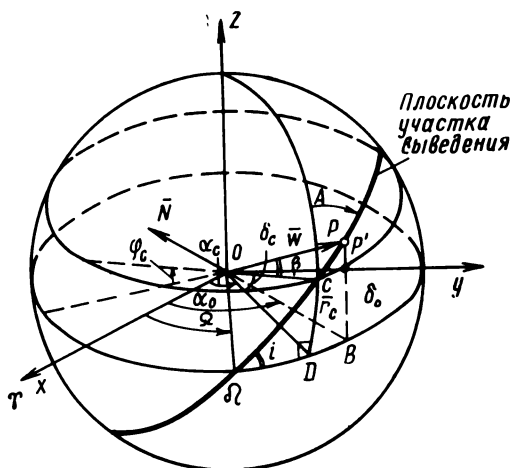


Рис. 4.1.2. Кинематика участка выведения

тору i (или $\pi - i$) может быть только больше склонения вектора цели $|\delta_0|$ или равен ему, т. е.

$$|\delta_0| \leq i \leq \pi - |\delta_0|. \quad (4.1.3в)$$

Соотношение между углом i и склонением точки старта $\delta_{ст}$

Энергозатраты выведения будут меньше, если в плоскости орбиты отрыва будет находиться активный участок — отсутствуют затраты на пространственный маневр. Поэтому если $\vec{r}_{ст}^0$ — единичный радиус-вектор точки старта C , то данному требованию отвечает векторное уравнение плоскости

$$\vec{N} \cdot \vec{r}_{ст}^0 = 0,$$

решение которого с учетом $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$ возможно при удовлетворении неравенства

$$\pm \cos i \leq \cos \delta_{ст}, \quad (4.1.4)$$

которое сводится к условию:

при запуске в северо-восточном направлении $(0 \leq i \leq \frac{\pi}{2})$

$$i \geq |\delta_{ст}|, \quad (4.1.5a)$$

в юго-восточном $(\frac{\pi}{2} \leq i \leq \pi)$

$$(\pi - i) \geq |\delta_{ст}|. \quad (4.1.5б)$$

Таким образом, положение плоскости гиперболической орбиты отрыва должно быть таким, что ее угол наклона к экватору i (или $\pi - i$) может быть только больше географической широты $|\varphi_{\text{ст}}|$ точки старта или равен ей (или в момент старта — склонению $|\delta_{\text{ст}}|$), т. е.

$$|\varphi_{\text{CT}}| \leq i \leq \pi - |\varphi_{\text{CT}}|. \quad (4.1.5\text{B})$$

При решении задачи выбора угла наклонения i плоскости промежуточной орбиты (плоскости орбиты отрыва) склонение вектора цели δ_0 и географическая широта точки старта $\varphi_{\text{ст}}$ являются величинами, заранее заданными. В соответствии со значением величин δ_0 и $\varphi_{\text{ст}}$ и следует определять границы возможных значений i согласно условиям (4.1.3) и (4.1.5). Если широта точки старта $\varphi_{\text{ст}}$ больше склонения вектора цели δ_0 ($\varphi_{\text{ст}} \geq \delta_0$) или равна ему, то выбор угла наклонения i определяется неравенствами (4.1.5) и не зависит от δ_0 . Если же склонение вектора цели δ_0 больше широты точки старта или равно ей ($\varphi_{\text{ст}} < \delta_0$), то выбор угла наклонения определяется неравенствами (4.1.3) и не зависит от широты точки старта.

Оптимизация угла наклона i из условия наименьших энергозатрат

Соотношения (4.1.3) и (4.1.5) дают некоторую свободу в выборе угла наклона плоскости траектории выведения к экватору. Однако этот угол опре-

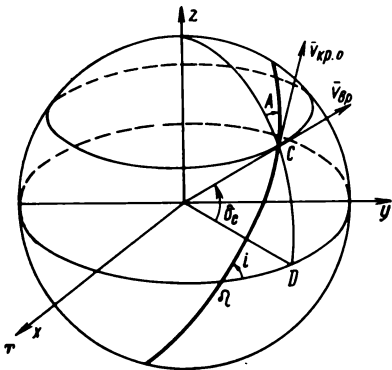


Рис. 4.1.3. К оптимизации угла
наклонения i

тору. Однако этот угол определенным образом влияет на энергозатраты активного участка. Поэтому желательно путем соответствующего выбора угла наклона i уменьшить энергозатраты выведения. Основой для этого является правильное использование энергии вращения Земли. Будем предполагать импульсное изменение скорости. Тогда энергозатраты выведения на промежуточную орбиту будут выражаться характеристической скоростью, равной (рис. 4.1.3)

$$V_{\text{х выв}} = v_{\text{кр.о}} - v_{\text{вп}} \cos(\bar{v}_{\text{кр.о}}, \hat{\bar{v}}_{\text{вп}}) = v_{\text{кр.о}} - \omega_s R_s \cos \delta_{\text{сг}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right),$$

где $v_{кр. 0}$ — круговая скорость ракеты на промежуточной орбите;

 ω_3 — угловая скорость вращения Земли; R_3 — радиус Земли;

$\vec{v}_{вр}$ — вектор скорости вращения Земли в точке C ;

A — азимут запуска — угол между меридиональной плоскостью точки старта и плоскостью траектории выведения, положительной к востоку от точного направления на север (см. рис. 4.1.3).

Из сферического прямоугольного треугольника $\triangle CD$ найдем

$$\sin A = \frac{\pm \cos i}{\cos \delta_{ст}} \quad *, \quad (4.1.6)$$

где знак минус соответствует $\frac{\pi}{2} < i \leq \pi$.

Отсюда получим

$$V_{х.выв} = v_{кр.0} - \omega_s R_s (\pm \cos i).$$

Таким образом, энергозатраты при выведении ракеты на промежуточную орбиту будут наименьшими при максимально возможных значениях $(\pm \cos i)$. Теперь в зависимости от соотношения углов δ_0 и $\varphi_{ст}$ можно определить оптимальные значения угла наклона i . Если $\varphi_{ст} \geq \delta_0$, то при запуске:

в северо-восточном направлении

$$i = \varphi_{ст}; \quad (4.1.7a)$$

в юго-восточном

$$i = \pi - |\varphi_{ст}|. \quad (4.1.7b)$$

Если $\varphi_{ст} \leq \delta_0$, то при запуске:

в северо-восточном направлении

$$i = \delta_0; \quad (4.1.8a)$$

в юго-восточном

$$i = \pi - |\delta_0|. \quad (4.1.8b)$$

Ограничения на выбор азимута запуска A

Влияние азимута запуска A на геометрию участка выведения сказывается через угол наклона i . При изменении азимута запуска A плоскость траектории выведения поворачивается относительно радиуса-вектора точки старта. Однако такое вращение может происходить только при определенных ограничениях, поскольку в плоскости траектории выведения должен находиться и вектор цели $\vec{W}$. Воспользовавшись условием (4.1.2) и уравнением (4.1.6), запишем

$$\sin A \leq \frac{\cos \delta_0}{\cos \varphi_{ст}}. \quad (4.1.9)$$

Следовательно, если склонение вектора цели δ_0 больше широты точки старта $\varphi_{ст}$ ($\varphi_{ст} < \delta_0$), то существует диапазон азимутов

* Предполагается запуск только в восточном направлении.

запуска (симметричный относительно направления на восток)
 $\arcsin \frac{\cos \delta_0}{\cos \delta_{\text{ст}}} = A_1 < A < A_2 = \pi - \arcsin \frac{\cos \delta_0}{\cos \delta_{\text{ст}}}$, в котором не-
 возможно осуществить запуск из заданного места старта. Если
 же склонение вектора цели δ_0 меньше широты точки старта
 $\varphi_{\text{ст}}$ ($\varphi_{\text{ст}} \geq \delta_0$) или равно ей, то запуск можно осуществить при
 всех допустимых (внутри пределов безопасности) азимутах.

Долгота восходящего узла Ω

Долгота восходящего узла промежуточной орбиты (гипербо-
 лической орбиты отрыва) определяется из сферического прямо-
 угольного треугольника ΩPB (см. рис. 4. 1. 2). Имеем

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \sin (\alpha_0 - \Omega) \operatorname{tg} i \quad (4. 1. 10a)$$

или

$$\Omega = \alpha_0 - \arcsin \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\operatorname{tg} i}. \quad (4. 1. 10б)$$

Соотношения между центральным углом выведения β и склонениями δ_0 , $\delta_{\text{ст}}$ и азимутом запуска A

Центральный угол участка выведения β — это угол между
 радиусом-вектором точки старта и вектором цели (направлени-
 ем асимптоты) (см. рис. 4. 1. 2). Он представляет собой полное
 угловое расстояние, которое должна пролететь ракета от момен-
 та запуска до момента, когда вектор скорости КЛА будет парал-
 лелен вектору $\vec{V}_{\infty}$. При известном положении точки старта ($\varphi_{\text{ст}}$)
 и заданном значении склонения цели δ_0 угол β зависит от ази-
 мута запуска A .

Из сферического прямоугольного треугольника CPP' (см.
 рис. 4. 1. 2) получим

$$\cos \beta = \operatorname{ctg} P \cdot \operatorname{tg} A,$$

а из сферического прямоугольного треугольника ΩPB найдем

$$\sin P = \frac{\cos i}{\cos \delta_0}$$

или с учетом (4. 1. 6)

$$\sin P = \frac{\cos \delta_{\text{ст}} \sin A}{\cos \delta_0}.$$

Тогда будем иметь

$$\cos \beta = \pm \sqrt{\left(\frac{\cos \delta_0}{\cos \delta_{\text{ст}} \sin A} \right)^2 - 1} \operatorname{tg} A. \quad (4. 1. 11)$$

Двузначность в определении угла β соответствует двум возможным моментам времени запуска в сутки для определенного азимута запуска.

Угол наклона асимптоты φ к линии апсид гиперболической орбиты отрыва определяется из уравнения

$$\cos \varphi = -\frac{1}{e} \left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \right).$$

При импульсном разгоне с промежуточной орбиты ее радиус равен радиусу перигея орбиты отрыва. Поэтому имеет место равенство

$$e = \frac{r_0}{a} + 1$$

или, поскольку $a = \frac{fm_{\oplus}}{V_{\infty 0}^2}$, получим

$$e = 1 + \frac{V_{\infty 0}^2}{v_{кр.о}^2}. \quad (4.1.12)$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = -\frac{1}{1 + V_{\infty 0}^2/v_{кр.о}^2}. \quad (4.1.13)$$

Знание угла наклона асимптоты φ к линии апсид гиперболической орбиты отрыва позволяет при известном направлении асимптоты, определяемом вектором цели $\vec{W}$, найти точку схода с промежуточной орбиты при импульсном разгоне.

Зависимости (4.1.7) — (4.1.13) характеризуют геометрию участка выведения, определяя положение плоскости траектории выведения и ориентацию, размеры и форму гиперболической орбиты отрыва.

Задача запуска в правильный момент времени

В основу решения задачи запуска в правильный момент времени можно положить существующую строгую зависимость между азимутом запуска и временем старта. Так, если время запуска в течение суток задано заранее, то азимут запуска должен выбираться так, чтобы плоскость траектории выведения содержала вектор цели $\vec{W}$. С другой стороны, если азимут запуска фиксирован заранее, то запуск должен быть осуществлен в момент времени, когда точка старта пересекает плоскость траектории выведения.

В момент совмещения точки старта с фиксированной в пространстве плоскостью траектории выведения должны удовлетворяться следующие уравнения (рис. 4. 1. 4):

$$\begin{aligned}\bar{N} \cdot \bar{r}_{\text{ст}}^0 &= 0; \\ (\bar{N} \times \bar{r}_{\text{ст}}^0) \cdot \bar{k} &= \sin i.\end{aligned}$$

Решая данные уравнения относительно прямого восхождения точки старта $\alpha_{\text{ст}}$, получим

$$\left. \begin{aligned}\cos \alpha_{\text{ст}} &= - \frac{N_x \cos i \sin \delta_{\text{ст}} + N_y \sin i}{\sin^2 i \cos \delta_{\text{ст}}}; \\ \sin \alpha_{\text{ст}} &= - \frac{N_y \cos i \sin \delta_{\text{ст}} - N_x \sin i}{\sin^2 i \cos \delta_{\text{ст}}}.\end{aligned}\right\} \quad (4. 1. 14)$$

Здесь имелось в виду, что $\bar{r}_{\text{ст}}^0 = \cos \alpha_{\text{ст}} \cos \delta_{\text{ст}} \bar{i} + \sin \alpha_{\text{ст}} \cos \delta_{\text{ст}} \bar{j} + \sin \delta_{\text{ст}} \bar{k}$.

Выражения (4. 1. 14) с учетом (4. 1. 1) позволяют определить значение прямого восхождения точки старта $\alpha_{\text{ст}}$ в зависимости

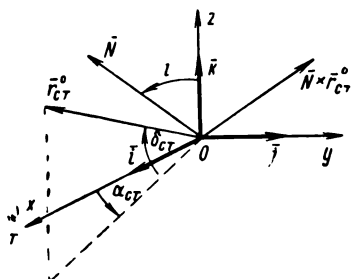


Рис. 4. 1. 4. Схема векторов в момент запуска

от азимута запуска. Кроме того, прямое восхождение точки старта $\alpha_{\text{ст}}$ связано со временем старта $t_{\text{ст}}$, отсчитываемым от полуночи суток запуска, следующим соотношением:

$$\alpha_{\text{ст}} = -GHA + \lambda_{\text{ст}} + \omega_3 t_{\text{ст}} \quad (4. 1. 15a)$$

или

$$t_{\text{ст}} = \frac{1}{\omega_3} (\alpha_{\text{ст}} - GHA - \lambda_{\text{ст}}), \quad (4. 1. 15b)$$

где GHA — гринвичский часовой угол в полночь суток запуска;
 $\lambda_{\text{ст}}$ — географическая долгота точки старта.

Зависимость (4. 1. 15) позволяет при выбранном азимуте запуска A и заданных значениях склонения цели δ_0 и склонения точки старта $\delta_{\text{ст}}$, используя соотношения (4. 1. 1) и (4. 1. 14), определить время запуска в течение суток известной даты старта.

Таким образом, получено аналитическое решение задачи выведения, позволяющее при заданном и неизменном векторе $\bar{V}_{\infty 0}$ рассчитать геометрические характеристики участка выведения и определить время старта $t_{ст}$ в течение суток.

Выбор угла наклона i из условия увеличения окна старта при учете возмущений

До сих пор рассматривалась задача выбора кинематических параметров участка выведения без учета нецентральности гравитационного поля Земли и изменения вектора гиперболического избытка скорости $\bar{V}_{\infty 0}$ от времени. Если же принять во внимание возможность отклонения времени старта от номинальной даты, то такие упрощения могут привести к чувствительным ошибкам.

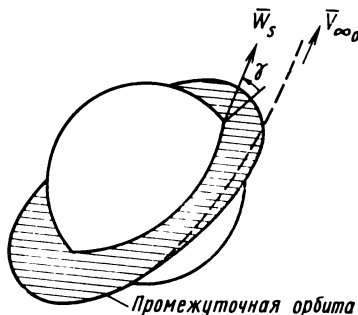


Рис. 4.1.5. Отклонение вектора гиперболического избытка скорости (вектора цели) от плоскости промежуточной орбиты при действительной дате старта

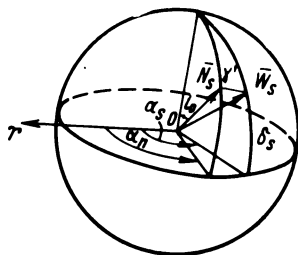


Рис. 4.1.6. Кинематика векторов при действительной дате старта и геометрическая интерпретация угла γ :

$$\alpha_n = \frac{3}{2} \pi + \Omega_s; \quad \gamma' = \gamma \pm \frac{\pi}{2}$$

В действительности нецентральность поля Земли приводит к изменению положения плоскости промежуточной орбиты от времени. В первом приближении (см. § 3 гл. I) изменение ее долготы восходящего узла можно оценить следующим образом:

$$\Delta\Omega = -\omega_s \Delta t_s, \quad (4.1.16)$$

где $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_0$;

Ω_0 , Ω_s — долгота восходящего узла плоскости промежуточной орбиты при номинальной и действительной дате старта $t_s = t_0 + \Delta t_s$;

ω_s — скорость регрессии узлов плоскости промежуточной орбиты.

Кроме того, вектор гиперболического избытка скорости $\bar{V}_{\infty 0}$ также изменяется от времени по величине и направлению, обра-

зуя с плоскостью промежуточной орбиты угол γ (рис. 4.1.5), который определяется из следующего уравнения (рис. 4.1.6):

$$\sin \gamma = \cos i \sin \delta_s + \sin i \cos \delta_s \cos (\alpha_s - \alpha_n),$$

где α_n, α_s — прямое восхождение векторов $\vec{N}_s, \vec{W}_s$;

$\vec{N}_s, \vec{W}_s$ — вектор нормали к плоскости промежуточной орбиты и вектор цели при действительной дате старта.

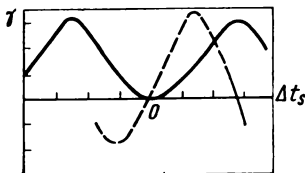


Рис. 4.1.7. Изменение угла γ при отклонении от номинальной даты старта

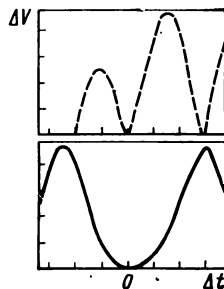


Рис. 4.1.8. Потери характеристической скорости на пространственный маневр

Так как согласно определению углов имеем

$$\alpha_n = \frac{3}{2} \pi + \Omega_s = \frac{3}{2} \pi + \Omega_0 + \Delta\Omega,$$

то с учетом формул (4.1.10) и (4.1.16) получим

$$\alpha_n = \frac{3}{2} \pi + \alpha_0 - \arcsin(\operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \delta_0) - \omega_s \Delta t_s.$$

Подставляя полученное значение α_n в предыдущее уравнение, после некоторых преобразований найдем

$$\sin \gamma = \cos i [\sin \delta_s - \cos (\alpha_0 - \alpha_s - \omega_s \Delta t_s) \cos \delta_s \operatorname{tg} \delta_0] \pm \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \delta_0} \sec \delta_0 \sin (\alpha_0 - \alpha_s - \omega_s \Delta t_s) \cos \delta_s, \quad (4.1.17)$$

где в случае прямого движения берется знак «+» при $0 \leq (\alpha_0 - \Omega_0) \leq \frac{\pi}{2}$ и знак «—» при $(\alpha_0 - \Omega_0) > \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, при отклонении времени старта от номинальной даты старта вследствие прецессии промежуточной орбиты и изменения вектора гиперболического избытка скорости орбиты отрыва могут возникнуть условия, при которых вектор гиперболического избытка скорости уже не будет находиться в плоскости промежуточной орбиты. Такая ситуация приводит к необходимости пространственного маневра разгонного модуля КЛА, что связано с дополнительными расходами (по сравнению с компланарным полетом) на разгон. На рис. 4.1.7 показаны типичные изменения угла γ от Δt_s , а на рис. 4.1.8 — соответствующее

этим изменениям приращение характеристической скорости разгона. Заметно резкое увеличение характеристической скорости разгона вследствие появления угла γ при отклонении от номинальной даты старта.

Рассмотренный процесс заметно уменьшает диапазон окна старта, оказывая тем самым принципиальное влияние на выбор угла наклона промежуточной орбиты. Оказывается, что выби-

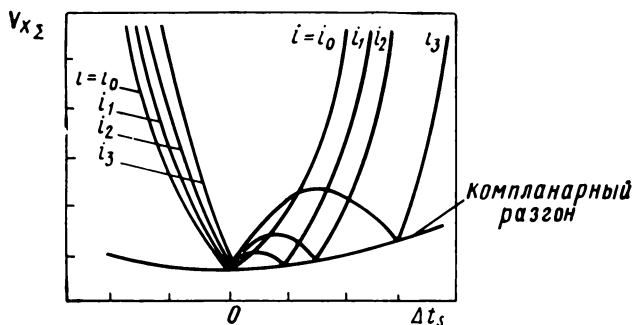


Рис. 4. 1. 9. Потребные значения характеристической скорости разгона при отклонении от номинальной даты старта в зависимости от угла наклона промежуточной орбиты

рая i в диапазоне, определяемом условиями (4. 1. 3), можно при некоторых значениях Δt_s несколько снизить рост характеристической скорости разгона по сравнению с компланарным разгоном (рис. 4. 1. 9), что позволяет значительно увеличить окно старта. В этом смысле выбранный таким образом угол наклона промежуточной орбиты i будет оптимальным. При построении алгоритма такого процесса следует использовать соотношение (4. 1. 17), которое дает возможность определить зависимость γ от i при заданном Δt_s .

§ 2. ИМПУЛЬСНЫЕ МАНЕВРЫ КЛА В ГРАВИТАЦИОННОЙ СФЕРЕ ПЛАНЕТЫ

При баллистическом анализе схем полета КЛА к планетам существенным является вопрос о маневрах КЛА в грависферах планет. Приближенная задача обычно рассматривается в импульсной постановке, что вполне достаточно на этом этапе исследований.

Ниже рассмотрены основные виды маневров, применяемых в различных схемах полета межпланетных КЛА.

Перицентральный переход между компланарными эллиптическими и гиперболическими орбитами

Переход такого типа используется при торможении КЛА на орбиту ИСП или старте с нее. Потребное приращение скорости

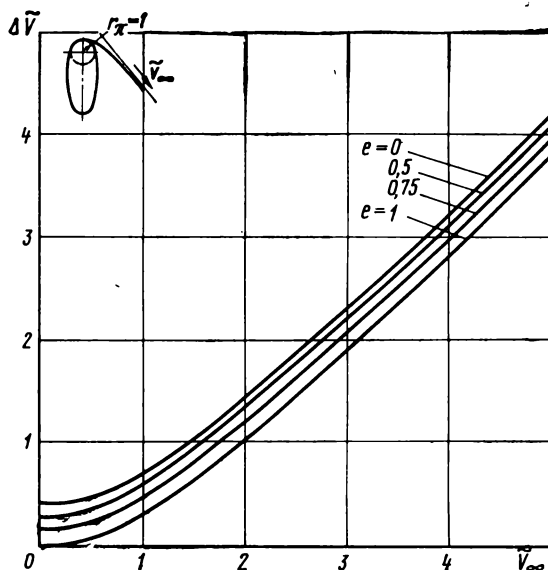


Рис. 4.2.1. Характеристики перехода эллипс — гипербола при $\tilde{r}_\pi = 1$

для перехода с эллиптической орбиты на гиперболическую (или обратно) будет

$$\Delta V = V_{\pi\Gamma} - V_{\pi\epsilon},$$

где $V_{\pi\Gamma} = \sqrt{2V_{\text{кр}\pi}^2 + V_\infty^2}$ — скорость в перицентре гиперболы с гиперболическим избытком скорости V_∞ ;

$V_{\text{кр}\pi} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{пл}}}{r_\pi}}$ — круговая скорость, соответствующая радиусу r_π перицентра точки перехода;

$V_{\pi\epsilon} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a} \right)}$ — скорость в перицентре эллиптической орбиты;

$a = \frac{r_\pi}{1-e}$ — большая полуось эллипса с эксцентриситетом $e = \frac{r_a - r_\pi}{r_a + r_\pi}$.

Тогда

$$\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu}{r_\pi} + V_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{r_\pi}}.$$

Если в качестве опорной принята круговая орбита с $r_{кр} = r_{\pi}$, то

$$\Delta \tilde{V} = \sqrt{2 + \tilde{V}_{\infty}^2} - \sqrt{1 + e},$$

где

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_{кр}}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{2\pi}$$

Для переходов с круговой орбиты на гиперболу (или обратно)

$$\Delta \tilde{V} = \sqrt{2 + \tilde{V}_{\infty}^2} - 1.$$

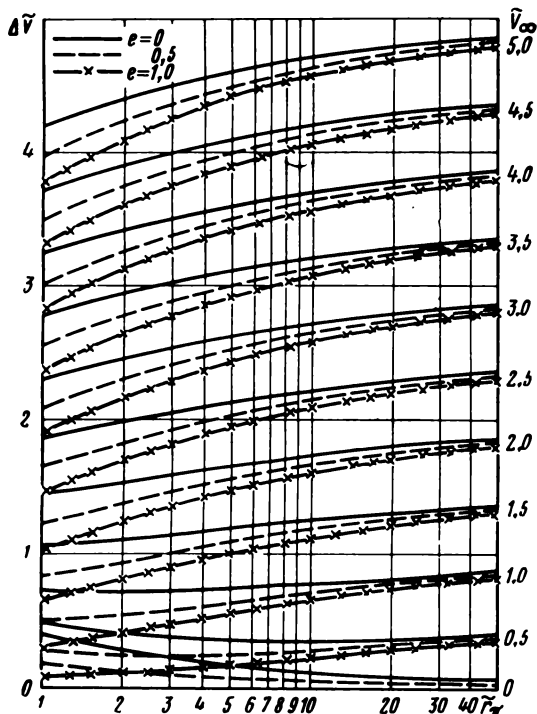


Рис. 4.2.2. Характеристики периферического перехода эллипс — гипербола

Характеристики компланарных периферических переходов эллипс — гипербола при $r_{\pi} = 1$ приведены на рис. 4.2.1, а переходов эллипс — гипербола для различных $\tilde{r}_{\pi}$ — на рис. 4.2.2.

Непериферический переход между компланарными эллиптической и гиперболической орбитами

Этот переход может быть использован при формировании орбиты ожидания у планеты.

Эллиптическая орбита задана следующими параметрами:
 $r_{\pi \text{эл}}$ — радиус перицентра и $r_{\alpha \text{эл}}$ — радиус апоцентра.

Точка M перехода с эллипса на гиперболу задана истинной аномалией $v_{\text{эл}}$ (рис. 4.2.3). Для гиперболы известен модуль гиперболического избытка скорости V_{∞} . Через точку M при заданном модуле V_{∞} можно провести семейство гипербол. В качестве параметра этого семейства выберем радиус перицентра ги-

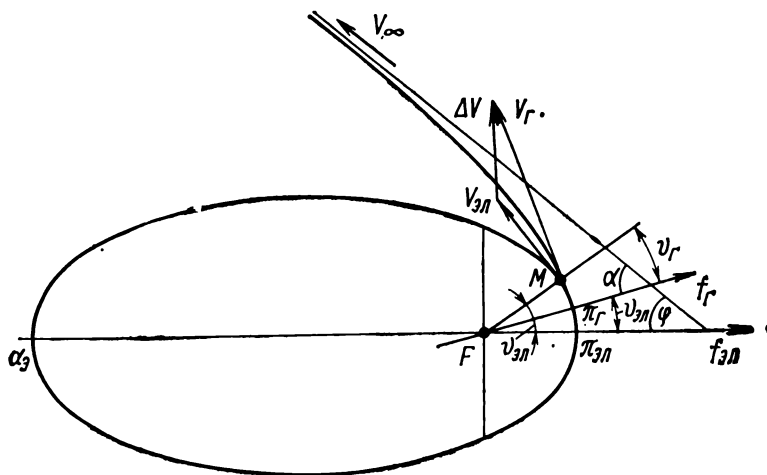


Рис. 4.2.3. Схема непериферического перехода эллипс — гипербола

перболы $r_{\pi \text{г}}$. Необходимо найти такое значение $r_{\pi \text{г}}$, которое обеспечивает минимум модуля вектора $\Delta \tilde{V} = \tilde{V}_{\text{г}} - \tilde{V}_{\text{эл}}$, обеспечивающего переход с эллипса на гиперболу (или обратно). Модуль вектора $|\Delta \tilde{V}|$ (безразмерная скорость, отнесенная к круговой скорости орбиты с $r_{\text{кр}} = r_{\pi \text{эл}}$)

$$\Delta \tilde{V} = \sqrt{\Delta \tilde{V}_n^2 + \Delta \tilde{V}_r^2},$$

где

$$\Delta \tilde{V}_n = \tilde{V}_{\text{гн}} - \tilde{V}_{\text{элн}}; \quad \Delta \tilde{V}_r = \tilde{V}_{\text{гр}} - \tilde{V}_{\text{эlr}};$$

$\tilde{V}_{\text{элн}}$; $\tilde{V}_{\text{гн}}$ — нормальные составляющие скорости гиперболы и эллипса в точке M ;

$\tilde{V}_{\text{эlr}}$; $\tilde{V}_{\text{гр}}$ — радиальные составляющие скорости в точке M .
 Эти составляющие скорости в точке M эллипса

$$\tilde{V}_{\text{элн}} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{пл}}}{p_{\text{эл}}}} (1 + e_{\text{эл}} \cos v_{\text{эл}});$$

$$\tilde{V}_{\text{эlr}} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{пл}}}{p_{\text{эл}}}} e_{\text{эл}} \sin v_{\text{эл}}.$$

Относя скорости к $V_{кр\pi}^{эл} = \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{r_{\pi эл}}}$ и расстояния к $r_{\pi эл}$, получим

$$\tilde{V}_{\pi эл} = \frac{1 + e_{эл} \cos v_{эл}}{\sqrt{\tilde{p}_{эл}}}; \quad \tilde{V}_{r эл} = \frac{e_{эл} \sin v_{эл}}{\sqrt{\tilde{p}_{эл}}},$$

где

$$\tilde{p}_{эл} = \frac{2\tilde{r}_{аэл}}{\tilde{r}_{аэл} + 1}; \quad e_{эл} = \frac{\tilde{r}_{аэл} - 1}{\tilde{r}_{аэл} + 1}$$

— параметр и эксцентриситет эллиптической орбиты.

Составляющие относительной скорости в точке M гиперболы

$$\tilde{V}_{\pi r} = \frac{1 + e_r \cos v_r}{\sqrt{\tilde{p}_r}}; \quad \tilde{V}_{r r} = \frac{e_r \sin v_r}{\sqrt{\tilde{p}_r}},$$

где

$$\tilde{p}_r = \tilde{a}_r (e_r^2 - 1) = \tilde{r}_{\pi r} (2 + \tilde{V}_{\infty}^2 \tilde{r}_{\pi r});$$

$$e_r = 1 + \frac{\tilde{r}_{\pi r}}{\tilde{a}_r} = 1 + \tilde{r}_{\pi r} \tilde{V}_{\infty}^2; \quad \tilde{a}_r = \frac{1}{\tilde{V}_{\infty}^2}.$$

Истинная аномалия гиперболы в точке M найдется из условия

$$\tilde{r}_r = \tilde{r}_{эл} \quad \text{или} \quad \frac{\tilde{p}_r}{1 + e_r \cos v_r} = \frac{\tilde{p}_{эл}}{1 + e_{эл} \cos v_{эл}}.$$

Отсюда

$$\cos v_r = \frac{1}{e_r} \left[\frac{\tilde{p}_r}{\tilde{p}_{эл}} (1 + e_{эл} \cos v_{эл}) - 1 \right].$$

При заданной истинной аномалии $v_{эл}$ точки перехода M и V_{∞} модуль скорости $\Delta \tilde{V} = f(\tilde{r}_{\pi r})$. Предельное значение радиуса перигея гиперболы, обеспечивающее пересечение с эллипсом в точке M , равно $r_{\pi r} = r_{эл}$ в точке перехода. Расчеты показывают, что в основном значения $r_{\pi r \text{ opt}}$, обеспечивающие минимум $\Delta \tilde{V}$, соответствуют предельным. При малых значениях эксцентриситета эллипса и малых $v_{эл}$ значения $r_{\pi r \text{ opt}}$ несколько больше предельных. Однако из-за пологости оптимума $\Delta \tilde{V} = f(\tilde{r}_{\pi r})$ значения $\Delta \tilde{V}$, соответствующие $r_{\pi r}$ предельным, мало отличаются от минимальных. На рис. 4.2.4 приведены зависимости минимальных значений $\Delta \tilde{V} = f(v_{эл})$ для различных $\tilde{V}_{\infty}$ и $\tilde{r}_{аэл} = 5$. Там же нане-

сены значения угла наклона вектора импульса $\Delta \vec{V}$ к местному горизонту:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta V_r}{\Delta V_n}.$$

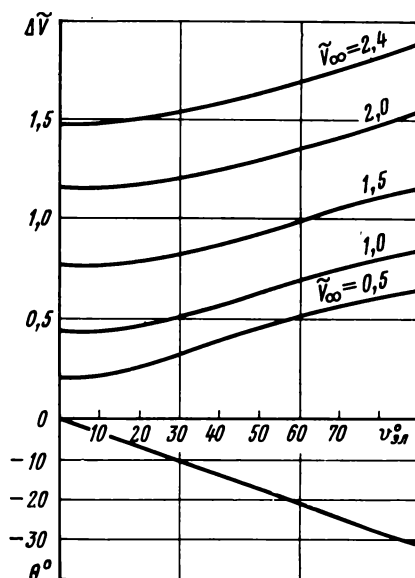


Рис. 4. 2. 4. Характеристики непериферического перехода при $\tilde{r}_{\text{эл}}=5$

Угол между осью апсид эллипса и асимптотой гиперболы

$$\varphi = \pi - [v + (\pi - \alpha)] = \alpha - v,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{1}{e_r}; \quad v = v_{\text{эл}} - v_r.$$

Поворот плоскости эллиптической орбиты

Этот маневр может использоваться при изменении наклона орбиты ИСП и формирования орбиты ожидания у планеты. Поворот плоскости эллиптической орбиты на угол κ с минимальными энергозатратами должен производиться путем поворота вектора скорости на угол κ в апоцентре орбиты, где скорость полета по орбите минимальна. В этом случае потребный импульс скорости ΔV

$$\Delta V = V_a \sqrt{2(1 - \cos \kappa)} = 2V_a \sin \frac{\kappa}{2}.$$

Скорость в апоцентре эллиптической орбиты определим из соотношения

$$V_a^2 = \mu_{пл} \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right).$$

Заменив $\mu_{пл} = V_{кр\pi}^2 r_\pi$ и $a = \frac{r_a + r_\pi}{2}$, получим

$$V_a = V_{кр\pi} \sqrt{\frac{2r_a^2}{r_a(r_a + r_\pi)}},$$

где $V_{кр\pi}$ — круговая скорость при $r = r_\pi$.

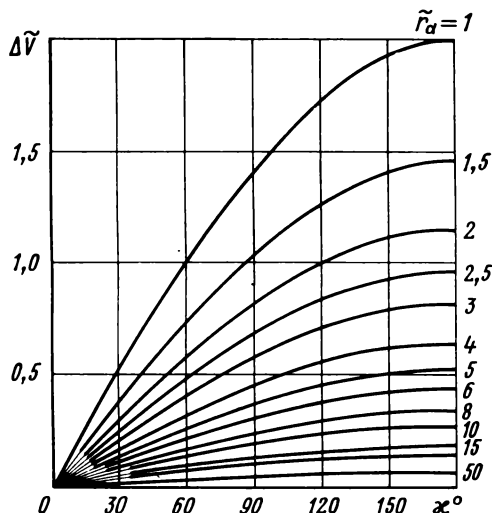


Рис. 4. 2. 5. Характеристики маневра поворота плоскости эллиптической орбиты

Перейдем к безразмерным величинам, относя r к r_π , а V_a к $V_{кр\pi}$. Тогда

$$\tilde{V}_a = \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a(\tilde{r}_a + 1)}}.$$

Таким образом, минимальный относительный импульс скорости, потребный для поворота плоскости эллиптической орбиты на угол χ ,

$$\Delta \tilde{V} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \chi}{\tilde{r}_a(\tilde{r}_a + 1)}} = 2 \sin \frac{\chi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a(\tilde{r}_a + 1)}}.$$

Зависимость $\Delta \tilde{V} = f(\chi; \tilde{r}_a)$ приведена на рис. 4. 2. 5. Видно, что энергозатраты, потребные на повороты плоскости эллиптической орбиты, существенно снижаются при увеличении радиуса апоцентра r_a .

Одноимпульсный поворот апсид эллиптической орбиты

Такой маневр может использоваться при формировании орбиты ИСП.

Пусть оси компланарных эллиптических орбит 1 и 2 развернуты на угол ω (рис. 4.2.6). Одноимпульсный переход между этими орбитами возможен в двух точках пересечения I и II.

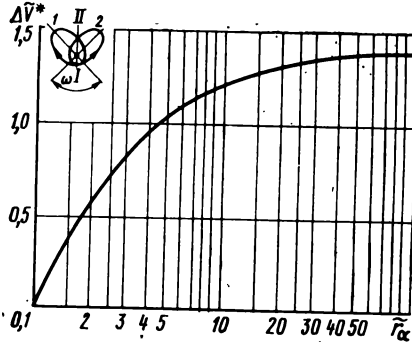


Рис. 4.2.6. Характеристики маневра одноимпульсного поворота оси апсид

Истинная аномалия точек пересечения эллипсов равна:

— для перехода в точке I

$$v_1^1 = 2\pi - \frac{\omega}{2} \quad \text{или} \quad v_1^2 = \frac{\omega}{2};$$

— для перехода в точке II

$$v_{11}^1 = \pi - \frac{\omega}{2} \quad \text{или} \quad v_{11}^2 = \pi + \frac{\omega}{2}.$$

Рассмотрим переход в точке I. Нормальные составляющие скорости в этой точке:

$$V_{n1} = \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{p}} \left[1 + e \cos \left(-\frac{\omega}{2} \right) \right] = \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{p}} \left(1 + e \cos \frac{\omega}{2} \right);$$

$$V_{n2} = \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{p}} \left(1 + e \cos \frac{\omega}{2} \right),$$

т. е. равны.

Радиальные составляющие скорости равны, но противоположны по направлению:

$$V_{r1} = \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{p}} e \sin \left(-\frac{\omega}{2} \right) = -\sqrt{\frac{\mu_{пл}}{p}} e \sin \frac{\omega}{2};$$

$$V_{r2} = \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{p}} e \sin \frac{\omega}{2}.$$

Импульс для перехода между орбитами

$$\Delta V = 2|V_r| = 2 \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{p}} e \sin \frac{\omega}{2}$$

и направлен радиально от притягивающего центра. В точке II нормальные составляющие скоростей также равны. Радиальные составляющие также равны и противоположны по знаку. Импульс перехода $\Delta V = 2|V_r|$ и направлен радиально, но по направлению к притягивающему центру. Отнесем скорости к круговой скорости орбиты с r_π ($V_{кр\pi} = \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{r_\pi}}$), а расстояния — к r_π . Тогда, приняв во внимание, что

$$\tilde{p} = \frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r}_a + 1}; \quad e = \frac{\tilde{r}_a - 1}{\tilde{r}_a + 1},$$

получим

$$\Delta \tilde{V} = \frac{V^2 (\tilde{r}_a - 1)}{V \tilde{r}_a (\tilde{r}_a + 1)} \sin \frac{\omega}{2} = \Delta \tilde{V}^* \sin \frac{\omega}{2},$$

где $\tilde{r}_a$ — относительный радиус апоцентра эллипса. Значения $\Delta V^* = f(\tilde{r}_a)$ приведены на рис. 4.2.6. При $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$

$$\Delta \tilde{V} \rightarrow \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\omega}{2}.$$

Двухимпульсный поворот оси аспид эллиптической орбиты

Схема такого перехода между двумя эллиптическими орбитами показана на рис. 4.2.7. В точке 1 аппарат переводится на эллипс перехода, затем в точке 2 — на эллиптическую орбиту, повернутую относительно исходной на угол ω . Переходы такого типа рассмотрены в сборнике [36] (статья Дерка Ф. Лоудена «Импульсный переход между эллиптическими орбитами»). По материалам этой статьи на рис. 4.2.7 приведены основные характеристики такого перехода: $\tilde{R}_*$ и $\tilde{R}_a$ — радиусы перигея и апогея орбиты перехода, отнесенные к r_π исходного эллипса. $\Delta \tilde{V}_\Sigma$ — суммарный импульс скорости, потребной для перехода (отнесен к $V_{кр\pi}$ с $r = r_\pi$).

Наибольшие энергозатраты приходится на переходы с относительным радиусом апоцентра исходного эллипса $\tilde{r}_a \approx 5 \div 7$. Угол $\omega = 180^\circ$ соответствует переходу с наибольшими значениями ΔV . Орбита перехода в этом случае будет круговой, с $\tilde{R} = \tilde{r}_a$. Поворот оси апсид в этом случае происходит следующим обра-

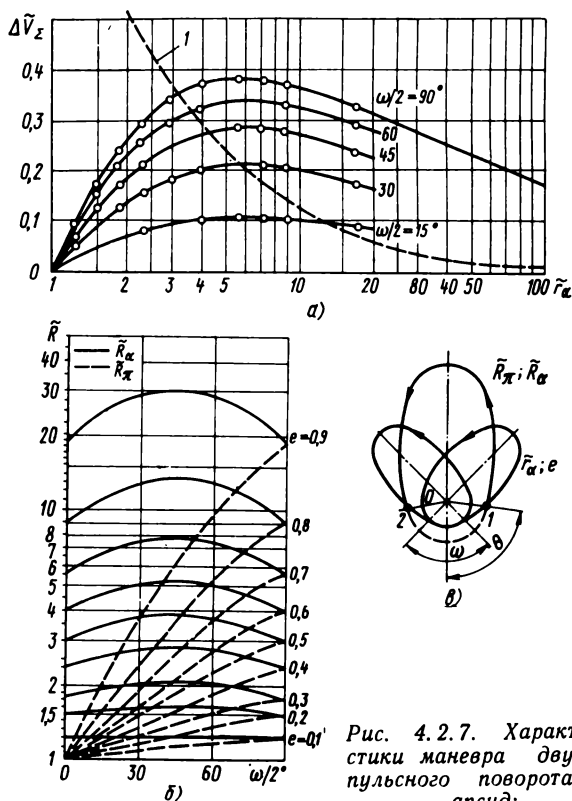


Рис. 4.2.7. Характеристики маневра двухимпульсного поворота оси апсид:

а—зависимость суммарной скорости $\Delta \tilde{V}_\Sigma$ от радиуса апоцентра r_a и от угла поворота оси апсид ω ; б—зависимость радиуса апоцентра $\tilde{R}_a$ и радиуса перицентра $\tilde{R}_\pi$ переходного эллипса от угла ω ; в—схема перехода

зом. В апоцентре исходной орбиты аппарату сообщается первый импульс ΔV , переводящий его на круговую орбиту с $r = r_a$ эллипса. После поворота на необходимый угол аппарат вторым импульсом ΔV переводится на исходный эллипс. Импульс скорости

$$\Delta V = V_{\text{кра}} - V_a,$$

где

$$V_{\text{кра}} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{пл}}}{r_a}}, \quad V_a = V_{\text{кра}} \sqrt{1-e}.$$

Переходя к безразмерным величинам,

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_{кр\pi}} \text{ и } \tilde{r} = \frac{r}{r_{\pi}},$$

получим

$$\Delta \tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}} - \sqrt{\frac{1-e}{\tilde{r}_a}}.$$

Подставив значение

$$e = \frac{r_a - r_{\pi}}{r_a + r_{\pi}} = \frac{\tilde{r}_a - 1}{\tilde{r}_a + 1},$$

получим

$$\tilde{V}_a = \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a(\tilde{r}_a + 1)}} \text{ и } \Delta \tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}_a + 1}} \right).$$

В этом случае энергетика перехода не зависит от угла поворота оси аписид. При $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ величина $\Delta \tilde{V}_z \rightarrow 0$.

Гравитационный маневр при облете планеты

Для ряда схем межпланетных полетов целесообразно использование маневра в гравитационном поле планеты для изменения направления и величины вектора гелиоцентрической скорости.

Рассмотрим схему гравитационного маневра в сфере действия планеты (рис. 4.2.8). Вектор скорости входа в сферу действия планеты $\bar{V}_{\infty 1}$ определится как разность между вектором гелиоцентрической скорости подлета к планете $\bar{V}_1$ и вектором скорости планеты $\bar{V}_{пл}$. В процессе гравитационного маневра в сфере действия планеты вектор $\bar{V}_{\infty 1}$, не изменяясь по модулю, поворачивается на угол φ и преобразуется в вектор скорости выхода из сферы действия планеты $\bar{V}_{\infty 2}$. Вектор гелиоцентрической скорости отлета $\bar{V}_2$ будет суммой векторов $\bar{V}_{\infty 2}$ и $\bar{V}_{пл}$. Видно, что гелиоцентрические векторы $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ различны как по модулю, так и по направлению.

Угол поворота вектора $\bar{V}_{\infty 1}$ определится как угол между асимптотами гиперболы облета (рис. 4.2.9):

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{OP}{OF} = \frac{AO}{OF} = \frac{a}{a + r_{\pi}} = \frac{1}{1 + \frac{r_{\pi}}{a}}.$$

$$\text{Так как } a = \frac{\mu}{V_{\infty}^2}, \text{ то } \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{1 + \frac{r_{\pi} V_{\infty}^2}{\mu}}.$$

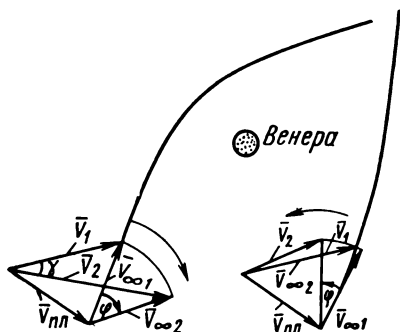


Рис. 4.2.8. Схема гравитационного маневра при облете планеты

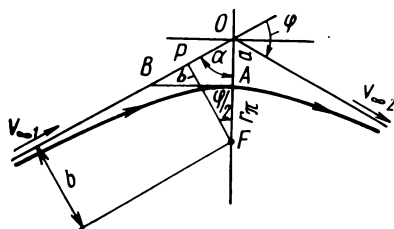


Рис. 4.2.9. Схема полета по облетной гиперболе

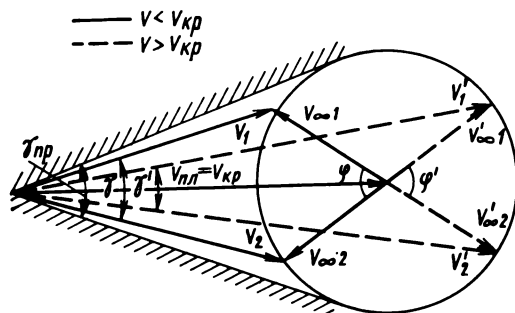


Рис. 4.2.10. Схема определения наибольшего угла поворота γ вектора гелиоцентрической скорости

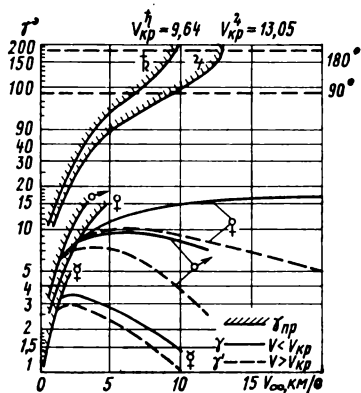


Рис. 4.2.11. Зависимость угла γ от V_{∞} для различных планет

Поворот вектора $\bar{V}_\infty$ на угол φ приводит к повороту вектора гелиоцентрической скорости КЛА на угол γ (см. рис. 4.2.8). Экстремальные значения модуля угла поворота γ при заданном значении угла φ будут соответствовать случаю, когда $V_1 = V_2 = V$ (рис. 4.2.10). Для круговых орбит планет, когда $V_{пл} = V_{кр}$, угол γ определяется из соотношения

$$\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{V_\infty}{V},$$

где

$$V^2 = V_{кр}^2 + V_\infty^2 \pm 2V_\infty V_{кр} \cos \frac{\varphi}{2},$$

откуда

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{V_\infty \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{V_{кр}^2 + V_\infty^2 \pm 2V_\infty V_{кр} \cos \frac{\varphi}{2}}}.$$

Здесь знак плюс соответствует $V > V_{кр}$, минус — $V < V_{кр}$.

Величина угла γ не может превышать предельных значений $\gamma_{пр}$ (см. рис. 4.2.10), когда

$$\sin \frac{\gamma_{пр}}{2} = \frac{V_\infty}{V_{кр}}.$$

Величины угла γ в зависимости от V_∞ при предельных маневрах, когда $r_\pi = R_{доп}$ ($R_{доп}$ не менее радиуса планеты и высоты ее плотных слоев атмосферы), для различных планет приведены на рис. 4.2.11.

Видно, что для планет земной группы существуют такие значения V_∞ , которые обеспечивают максимальные углы γ . При полетах к внутренним планетам $V > V_{кр}$, и максимальные γ будут $\gamma_{\max} \approx 10^\circ$ при пролете Венеры и $\gamma_{\max} \approx 3^\circ$ при пролете Меркурия. При полетах к внешним планетам $V < V_{кр}$ и при пролете Марса $\gamma_{\max} \approx 9,5^\circ$. Таким образом, максимальные возможные значения угла γ для маневров в гравитационном поле Марса и Венеры примерно одинаковы.

Возможности гравитационного маневра в полях тяготения больших планет (Юпитер и Сатурн) практически всегда соответствуют $\gamma_{пред}$ и при значениях $V_\infty = V_{кр}$ обеспечивают поворот вектора гелиоцентрической скорости на 180° . Поворот вектора гелиоцентрической скорости на угол $\gamma = 90^\circ$ в поле тяготения Юпитера или Сатурна обеспечивает полет на Солнце по вырожденной прямолинейной гиперболе. Однако это обеспечивается лишь при $V_\infty \geq 9,5$ км/с для Юпитера и $V_\infty \geq 7,3$ км/с для Сатурна, что го-

ворит о том, что такие полеты на близкое расстояние к Солнцу возможны при значениях V_∞ у планеты больших, чем для траекторий минимальной энергии полета к Юпитеру или Сатурну (см. табл. 5.4 и 5.8).

Активно-гравитационный маневр при облете планеты

Возможности пассивного гравитационного маневра в поле тяготения планет земной группы ограничены пределом снижения высоты перигентра облетной гиперболы до значений $r_\pi < R_{\text{доп}}$. Поэтому в ряде случаев становится целесообразным активно-гравитационный маневр с дополнительным импульсным изменением скорости на участке пролета гипербола подлета — гипербола отлета планеты. Достаточно полное изложение этой задачи приведено в работе [63].

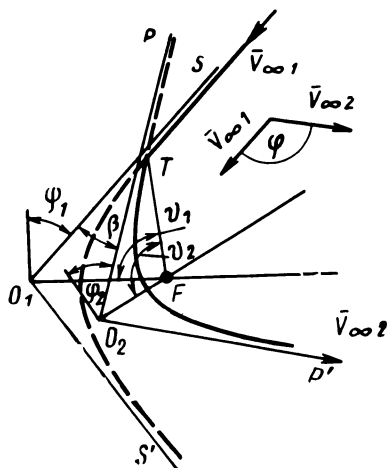


Рис. 4.2.12. Общая схема одноимпульсного перехода гипербола—гипербола (F—фокус гиперболы)

Общая схема такого плоского одноимпульсного перехода представлена на рис. 4.2.12. Аппарат в точке T переходит с входящей ветви S подлетной гиперболы на входящую ветвь P гиперболы отлета. Возможные четыре варианта переходов гипербола —

гипербола приведены на рис. 4.2.13. Угол поворота асимптот гипербола (см. рис. 4.2.12)

$$\varphi = \beta + 2\psi_2, \quad (4.2.1)$$

где β — угол между входящими асимптотами гиперболы;
 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ — угол, дополняющий до $\pi/2$ угол наклона асимптоты гипербола α .

Для переходов каждого типа справедливо соотношение

$$\beta = (\psi_1 - \psi_2) + (v_2 - v_1), \quad (4.2.2)$$

где v_i — истинная аномалия точки подачи импульса (положительная при повороте от оси аписид по часовой стрелке).

Объединяя (4.2.1) и (4.2.2), получим независимо от типа перехода

$$\varphi = (\psi_1 + \psi_2) + (v_2 - v_1). \quad (4.2.3)$$

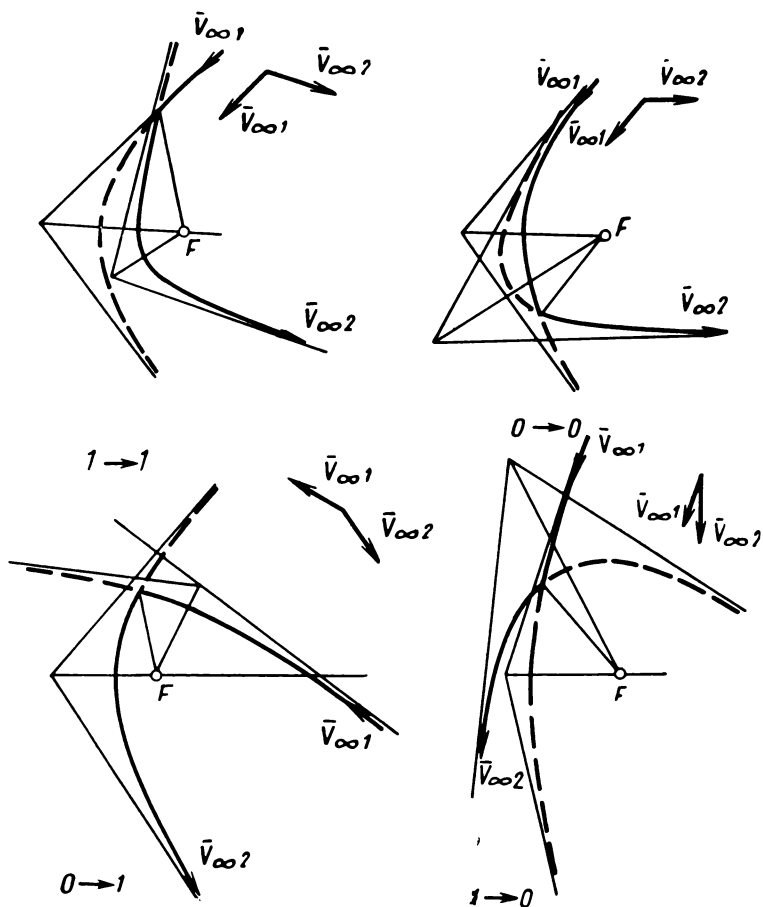


Рис. 4.2.13. Возможные варианты перехода между гиперболами

Из треугольника скорости в точке подачи импульса можно определить величину импульса

$$\Delta V = (V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \alpha)^{1/2}, \quad (4.2.4)$$

где

$$\alpha = \theta_2 - \theta_1,$$

θ — угол с местным горизонтом.

Как показано в [63], если в качестве независимых переменных взять ψ_1 и ψ_2 и учитывать, что $a = \frac{\mu}{V_\infty^2}$, можно углы θ и ν представить в виде

$$\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \psi \left[\frac{rV_\infty^2}{\mu} \left(2 + \frac{rV_\infty^2}{\mu} \right) \right]^{1/2}} \right). \quad (4.2.5)$$

$$\nu = \pm \cos^{-1} \left[\sin \psi \left(\frac{1}{\frac{rV_\infty^2}{\mu} \operatorname{tg}^2 \psi} - 1 \right) \right]. \quad (4.2.6)$$

Скорость на траектории конического сечения

$$V = \left[\mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.2.7)$$

Исключая из (4.2.3) и (4.2.4) — (4.2.7) все переменные, кроме ψ_1 и ψ_2 , получим

$$\begin{aligned} \Delta V = & \left(\frac{\mu}{a_1} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{4}{r/a_1} - \frac{2(a_2/a_1)^{1/2}}{(r/a_1)^2 \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2} \times \right. \\ & \times \left. \left(1 + \left\{ \left[\frac{r}{a_1} \left(2 + \frac{r}{a_1} \right) \operatorname{tg}^2 \psi_1 - 1 \right] \left[\frac{r}{a_2} \left(2 + \frac{r}{a_2} \right) \operatorname{tg}^2 \psi_2 - 1 \right] \right\}^{1/2} \right) \right]^{1/2}; \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

$$A(r/a_1)^2 + B(r/a_1) + C = 0, \quad (4.2.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A = & [\cos(\varphi - \psi_1 - \psi_2) - \sin \psi_1 \sin \psi_2]^2 - \cos^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2; \\ B = & 2 \left[\cos(\varphi - \psi_1 + \psi_2) \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2} \left(\frac{a_2}{a_1} \operatorname{tg}^2 \psi_1 + \operatorname{tg}^2 \psi_2 \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{a_2}{a_1} \cos^2 \psi_2 - \cos^2 \psi_1 \right) \right]; \\ C = & \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2} \left[\frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2} \left(\frac{a_2 \cos \psi_2}{a_1 \cos \psi_1} \right)^2 + \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} \left(\frac{\cos \psi_1}{\cos \psi_2} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2 \frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi - \psi_1 - \psi_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.10)$$

Если разрешить (4.2.9) относительно r/a_1 , то задача отыскания минимума ΔV сводится к нахождению минимума по двум параметрам: ψ_1 и ψ_2 . Если ΔV отнести к $V_{\infty 1}$,

$$\frac{\Delta V}{V_{\infty 1}} = \left(\frac{a_1 \Delta V^2}{\mu} \right)^{1/2}$$

и учесть, что

$$\frac{r V_{\infty 1}^2}{\mu} = \frac{r}{a_1},$$

то решение можно выразить только через два параметра: a_2/a_1 [или $\left(\frac{V_{\infty 1}}{V_{\infty 2}}\right)^2$] и φ . Таким образом, задача оптимизации импульса становится независимой от гравитационной постоянной планеты и скорости $V_{\infty 1}$.

Рассмотрим частный случай перехода, когда импульс подается в перицентрах гипербол. Для такого перичентрального перехода $v_1 = v_2 = 0$. Для этого случая получено [63]

$$\frac{r}{a_1} = \frac{\frac{a_2}{a_1} \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} \frac{\operatorname{tg}^2 \psi_1}{\operatorname{tg}^2 \psi_2} - 1}{\operatorname{tg}^2 \psi_1 \left(\frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} - 1 \right)}; \quad (4.2.11)$$

$$\varphi = \psi_1 + \psi_2; \quad (4.2.12)$$

$$\sin \psi_1 \left(\frac{1}{\frac{r}{a_1} \operatorname{tg} \psi_1} - 1 \right) = 1. \quad (4.2.13)$$

Исключая r/a_1 из (4.2.11) и (4.2.13), можно получить выражение, связывающее ψ_1 и ψ_2 :

$$\sin \psi_1 = \frac{\sin \psi_2}{\frac{a_2}{a_1} + \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) \sin \psi_2}. \quad (4.2.14)$$

Так как импульс для перичентрального перехода направлен по трансверсали, то $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ и формулу для $\Delta V/V_{\infty 1}$ можно привести к виду

$$\frac{\Delta V}{V_{\infty 1}} = \left(1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{2}{r/a_1} \left[2 - \left\{ \left(2 + \frac{r}{a_1} \right) \cdot \left(2 + \frac{a_1}{a_2} \frac{r}{a_1} \right) \right\}^{1/2} \right] \right)^{1/2}. \quad (4.2.15)$$

Из (4.2.12) и (4.2.14) получим уравнение связи

$$\sin (\varphi - \psi_2) = \frac{\sin \psi_2}{\frac{a_2}{a_1} + \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) \sin \psi_2}. \quad (4.2.16)$$

Сводные графики характеристик для периферических и оптимальных непериферических переходов приведены на рис. 4.2.14 и 4.2.15. Для обратных отношений скоростей $V_{\infty 2}/V_{\infty 1}$

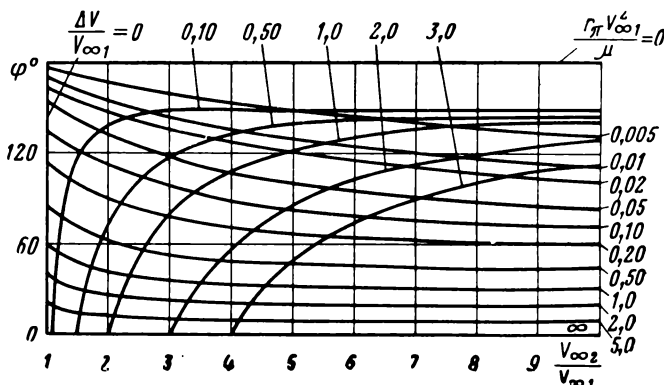


Рис. 4.2.14. Сводный график характеристик периферического перехода между гиперболами

имеют место «зеркальные» решения с равными значениями потребной характеристической скорости ΔV . Поэтому значения характеристик приведены только для $V_{\infty 2}/V_{\infty 1} \geq 1$.

Кривые характеристики периферических переходов на рис. 4.2.14 ограничены прямыми линиями слева, а также сверху

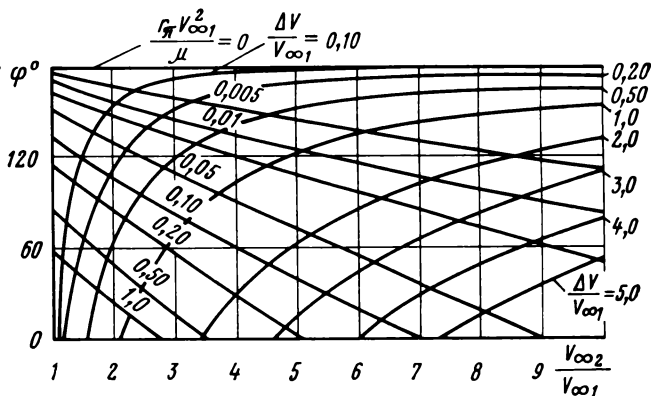


Рис. 4.2.15. Характеристики оптимальных непериферических переходов между гиперболами

и снизу. Ограничение слева $V_{\infty 2}/V_{\infty 1} = 1$ соответствует случаю пассивного гравитационного маневра, рассмотренного выше. В этом случае $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\varphi}{2}$.

Нижняя граница $\varphi=0$ представляет вырожденный случай невозмущенной прямолинейной траектории, когда импульс прикладывается за пределами сферы действия планеты и вектор скорости изменяется импульсно только по величине, а не по направлению.

Верхняя граница $\varphi=\pi$ ($r_{\pi}V_{\infty 1}^2/\mu=0$ и $\Delta V/V_{\infty 1}=0$) соответствует также вырожденной прямолинейной гиперболе, проходящей через фокус и не требующей приложения импульса. Практически этот случай не реализуется из-за ограничения $r_{\pi} \geq R_{\text{дон}}$.

График для характеристик оптимальных непериферических переходов на рис. 4.2.15 в общем аналогичен графику рис. 4.2.14.

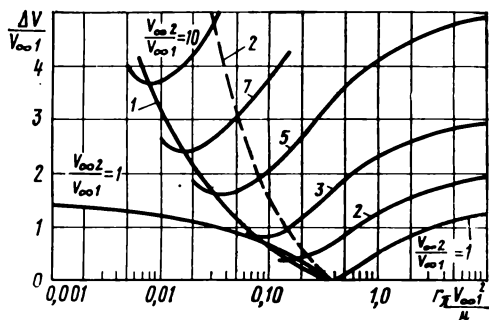


Рис. 4.2.16. Характеристики непериферических переходов между гиперболами для $\varphi=90^\circ$.

1—оптимальные переходы; 2—периферические переходы

Однако оптимальные переходы реализуются при меньшем значении ΔV , что видно из сравнения кривых постоянных значений $\Delta V/V_{\infty 1}$. Заметны различия характеристик при $\varphi=0$, где периферические переходы происходят на бесконечности, в то время как для оптимальных непериферических переходов параметр $r_{\pi}V_{\infty 1}^2/\mu$ не стремится к бесконечности, а изменяется в зависимости от значения $V_{\infty 2}/V_{\infty 1}$. Следует отметить, что на границе $V_{\infty 2}/V_{\infty 1}=1$ кривые $r_{\pi}V_{\infty 1}^2/\mu$ на рис. 4.2.14 и 4.2.15 начинаются при одних и тех же значениях φ .

Для практических случаев параметр $r_{\pi}V_{\infty 1}^2/\mu$ ограничен из-за условия, что переход должен реализоваться при минимальном значении $r_{\pi} \geq R_{\text{дон}}$. В этом случае удобно представить характеристики перехода в виде, показанном на рис. 4.2.16.

Кривая $V_{\infty 2}/V_{\infty 1}=\text{const}$ имеет горизонтальную асимптоту при $r_{\pi}V_{\infty 1}^2/\mu \rightarrow \infty$, для которой

$$\frac{\Delta V}{V_{\infty 1}} = \left[\left(\frac{V_{\infty 2}}{V_{\infty 1}} \right)^2 + 1 - 2 \frac{V_{\infty 2}}{V_{\infty 1}} \cos \varphi \right]^{1/2}.$$

При подходе к планете $\Delta V/V_{\infty 1}$ уменьшается, достигая минимума с меньшими $\Delta V/V_{\infty 1}$, чем для периферических переходов. Затем значения $\Delta V/V_{\infty 1}$ снова увеличиваются, приближаясь ко второй горизонтальной асимптоте при $r_{\pi} V_{\infty 1}^2/\mu \rightarrow 0$ (вырожденная прямолинейная гипербола, проходящая через фокус), для которой

$$\frac{\Delta V}{V_{\infty 1}} = \left[\left(\frac{V_{\infty 2}}{V_{\infty 1}} \right)^3 + 1 + 2 \frac{V_{\infty 2}}{V_{\infty 1}} \cos \varphi \right]^{1/2}.$$

Переходы в области справа от периферических соответствуют переходу типа $O-O$ (на рис. 4.2.13), т. е. КЛА приближается к планете по входящей ветви гиперболы и совершает переход на вторую гипербола только после прохождения периферия первой гиперболы.

Переходы в области слева от периферических, включающие и оптимальные переходы, соответствуют переходам типа $I-I$ на рис. 4.2.13, т. е. КА переходит на вторую гипербола на входящей ветви первой гиперболы до ее периферия. Минимальное расстояние соответствует радиусу периферия второй гиперболы. Таким образом, оптимальные переходы соответствуют типу $I-I$, если $V_{\infty 2}/V_{\infty 1} > 1$. Для $V_{\infty 2}/V_{\infty 1} < 1$ области меняются местами и оптимальные переходы соответствуют типу $O-O$.

Кривая для $V_{\infty 2}/V_{\infty 1} = 1$ имеет минимальную точку с $\Delta V/V_{\infty 1} = 0$ и совпадает с точкой периферических переходов. В этом случае обеспечивается пассивный гравитационный маневр при облете планеты.

На зависимостях типа представленных на рис. 4.2.16 легко учитывается ограничение на параметр $r_{\pi} V_{\infty 1}^2/\mu$ из условия $r_{\pi} \geq R_{\text{дон}}$.

Так как оптимальные непериферические переходы лежат в окрестности периферических переходов, то можно использовать следующий алгоритм поиска экстремума ΔV . Вначале при заданных $V_{\infty 1}$, $V_{\infty 2}$ и φ определяются ΔV и параметры ψ_1^* и ψ_2^* для периферических переходов. Затем от этих значений ψ_1^* и ψ_2^* осуществляется поиск минимального ΔV для непериферических переходов по параметрам ψ_1 и ψ_2 . Такой алгоритм обеспечивает унимодальность области поиска и позволяет использовать прямые методы поиска экстремума (например, градиентные).

§ 3. ВЫБОР СХЕМЫ ВЫВЕДЕНИЯ И ПАРАМЕТРОВ РАКЕТНОЙ СТУПЕНИ ВЗЛЕТА С ПОВЕРХНОСТИ МАРСА

Анализ схем полета к Марсу (см. гл. VIII) показывает, что при старте с поверхности Марса возможно выведение полезного груза на следующие орбиты:

— круговую с $H_{\text{кр}} = 500 \div 2000$ км;

- эллиптическую с $H_{\pi} = 500 \div 2000$ км и $H_{\alpha} = 20 \div 30$ тыс. км;
- гиперболические орбиты с $H_{\pi} = 500 \div 2000$ км.

Для выведения на такие высокие орбиты рациональна двухимпульсная схема выведения, или схема с дожогом.

В этом случае космический аппарат первоначально выводится на переходную эллиптическую орбиту. Апоцентр этого переходного эллипса соответствует высоте перицентра заданной орбиты. В апоцентре этого эллипса происходит повторное включение двигателя и разгон до выхода на заданную орбиту (рис. 4.3.1).

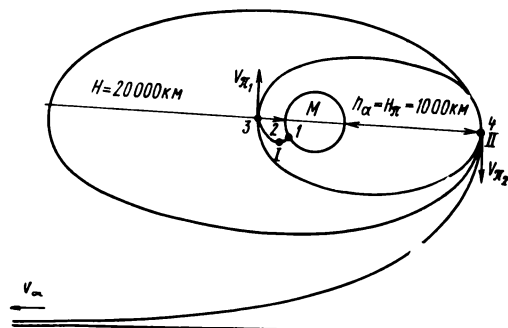


Рис. 4.3.1. Схема взлета с поверхности Марса:

I—первое включение; II—второе;
1—старт; 1—2—вертикальный подъем; 2—3—про-
граммный разворот; 3—4—пассивный полет; 4—раз-
гон до $V_k = V_{\pi_2}$

Величина полезного груза зависит от программы тангажа на первом и втором участках выведения и от параметров переходного эллипса. Так как разреженная атмосфера Марса достаточно протяженна, то при полете по переходному эллипсу возможно заметное влияние сопротивления на траекторию полета.

Рассматривая первый активный участок полета в разреженной атмосфере Марса ($p_0 = 5 \div 20$ мбар), можно предположить, что аэродинамические нагрузки и потери на сопротивление будут невелики. Поэтому можно допустить, что аэродинамические подъемные силы отсутствуют, а коэффициент лобового сопротивления не зависит от скорости полета. Не затрагивая вопросов управления около центра масс, рассмотрим движение ракеты как точки переменной массы. Такая постановка задачи для оценки энергозатрат и веса полезного груза при проектных исследованиях вполне правомочна и используется в проектных расчетах траекторий выведения носителей при старте с Земли.

Уравнения движения носителя в скоростной системе координат с учетом принятых допущений имеют вид

$$\dot{V} = \frac{g_{03} \left(\bar{P}_0 - \frac{p}{P_0} \Delta P_0 \right)}{1 - \frac{\bar{P}_0}{P_{y\lambda}} t} \cos \alpha - \frac{g_{03} \sigma_x}{1 - \frac{\bar{P}_0}{P_{y\lambda}} t} q - \frac{\mu_{пл}}{r^2} \sin \theta;$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{V} \left[\frac{g_{03} \left(\bar{P}_0 - \frac{p}{P_0} \Delta P_0 \right)}{1 - \frac{\bar{P}_0}{P_{y\lambda}} t} \sin \alpha + \left(\frac{V^2}{r} - \frac{\mu_{пл}}{r^2} \right) \cos \theta \right];$$

$$\dot{r} = V \sin \theta;$$

$$\lambda = \frac{V}{r} \cos \theta,$$

где

$$g_{03} = 9,81 \text{ м/с}^2;$$

$$q — \text{скоростной напор } \left(q = \frac{\rho V^2}{2} \right);$$

$\rho = \rho(h)$ и $p = p(h)$ — плотность и давление (заданы моделями атмосферы планеты);

$h = r - r_{пл}$ — высота полета;

$r_{пл}$ — радиус планеты;

$\sigma_x = \frac{c_x S_{мид}}{G_0}$ — баллистический коэффициент;

$S_{мид}$ — площадь мишени;

$$\bar{P}_0 = \frac{P}{G_0} — \text{тяговооруженность носителя } \left(\Delta \bar{P}_0 = \frac{S_a P_0}{G_0} \right);$$

p_0 — давление на поверхности планеты;

S_a — площадь сопла;

G_0 — стартовый вес;

V — скорость полета;

θ — угол наклона вектора к местному горизонту;

r — расстояние от центра масс планеты;

λ — угловая дальность полета;

$\mu_{пл}$ — гравитационная постоянная планеты;

$P_{y\lambda}$ — удельная тяга;

α — угол атаки.

Угол тангажа $\varphi = \theta + \alpha - \lambda$. Известно, что при отсутствии аэродинамических потерь оптимальная программа тангажа близка к линейной. Как показывают расчетные оценки, в разреженной атмосфере Марса аэродинамические потери действительно невелики. Поэтому примем, что программа тангажа линейно зависит от времени, т. е. $\varphi = \varphi_0 - \dot{\varphi}(t - t_0)$. Такая программа выне-

дения по характеристической скорости разгона отличается, как показывают расчеты, от более сложных оптимальных программ выведения не более чем на 2—3 %.

Предположим, что носитель стартует с поверхности вертикально. Тогда за начальные условия можно принять параметры конца вертикального активного участка *:

$$V(t_0) = V_0, \quad \theta(t_0) = \frac{\pi}{2}, \quad r(t_0) = r_0, \quad \lambda(t_0) = 0.$$

Конечные условия определяются параметрами в заданной точке переходного эллипса. Если задана высота апоцентра h_a переходного эллипса и истинная аномалия точки выведения v_k , то конечные условия представляются в виде

$$r_k = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v_k};$$

$$V_k = \sqrt{\mu_{пл} \left(\frac{2}{r_k} - \frac{1}{a} \right)};$$

$$\theta_k = \arctg \frac{e \sin v_k}{1 + e \cos v_k};$$

где

$$a = \frac{r_a + r_\pi}{2};$$

$$e = \frac{r_a - r_\pi}{r_a + r_\pi}.$$

Наличие свободных параметров (параметры переходного эллипса) позволяет удовлетворить этим начальным и конечным условиям.

Для линейной программы тангажа на первом активном участке исследовалось влияние параметров переходного эллипса на потребную для выведения на заданную орбиту суммарную характеристическую скорость:

$$V_x = V_{x1} + V_{x2} + \Delta V_{\text{комп}},$$

где V_{x1} и V_{x2} — характеристическая скорость, потребная для выведения на переходный эллипс и с переходного эллипса на заданную орбиту;

$\Delta V_{\text{комп}}$ — характеристическая скорость, потребная для компенсации аэродинамических потерь при движении по переходному эллипсу.

* Продолжительность вертикального участка выбиралась из условия достижения $V_0 = 60$ м/с.

При изменении высоты перицентра переходного эллипса, например при увеличении ее, возрастают гравитационные потери на первом активном участке, но уменьшаются потребная характеристическая скорость V_{x2} и компенсирующий импульс. Поэтому

имеется такая высота переходного эллипса, при которой суммарные потребные энергозатраты минимальны.

Исследование влияния протяженности второго активного участка траектории при выведении с переходного эллипса на заданную орбиту (при ориентации вектора тяги, выбираемой из условия минимизации потребного значения характеристической скорости V_{x2}) показало, что вследствие малости гравитационных потерь V_{x2} можно приближенно определить как геометрическую разность скоростей на переходном эллипсе и на заданной орбите в точке перехода.

При движении по переходному эллипсу при малых высотах перицентра вследствие влияния сопротивления атмосферы переходная орбита искажается (уменьшается высота апоцентра и требуются дополнительные энергозатраты для компенсации действия атмосферы). Для этого в некоторой точке переходного эллипса требуется сообщение дополнительного импульса скорости

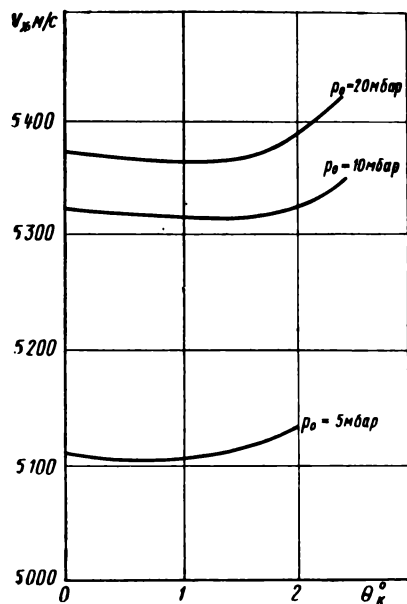


Рис. 4.3.2. Зависимость V_x от угла θ_k при $H_a = 1000$ км и $H_a = 20\,000$ км:

ρ_0 , м бар	20	10	5
$\bar{\rho}_0$	1,2	1,2	1,2
h_k , км	65	45	40

$\Delta V_{\text{комп}}$. Так, например, при $h_k = 60$ и 70 км вследствие воздействия атмосферы высота апоцентра переходного эллипса уменьшается с 1000 до 609 и 858 км соответственно (при максимальной модели атмосферы).

Расчеты показали, что дополнительный импульс скорости целесообразнее всего сообщать (для минимальных потребных затрат) в районе перицентра переходного эллипса, т. е. необходимо несколько увеличить скорость в конце первого участка выведения.

Потребные энергозатраты для компенсации влияния атмосферы могут достигать $\Delta V_{\text{комп}} = 200$ м/с.

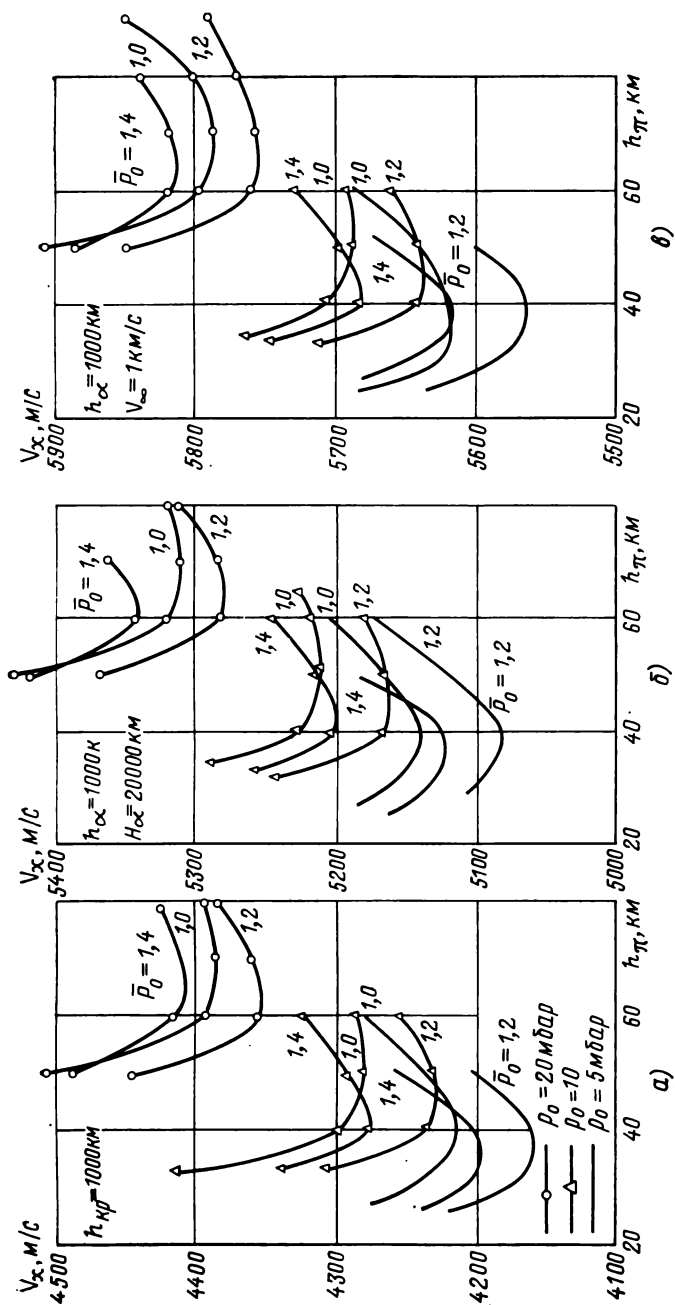


Рис. 4.3.3. Влияние высоты h_π перигея переходного эллипса на V_x для разных конечных орбит

На рис. 4.3.2 представлена зависимость потребных значений характеристической скорости V_x от угла наклона вектора скорости к местному горизонту θ_k в конце первого активного участка. Видно, что эта зависимость имеет очень пологий оптимум при $\theta_k = 0,5 \div 1,5^\circ$.

Рассмотрено также влияние положения точки перехода с переходного эллипса на заданную орбиту. Результаты расчетов показали, что величина импульса дожога имеет минимум при истинной аномалии точки перехода на заданную орбиту, несколько отличной от точки апоцентра. Однако суммарные энергозатраты при этом практически не отличаются от энергозатрат для схем выведения в апоцентр. Поэтому в дальнейшем принята следующая схема выведения:

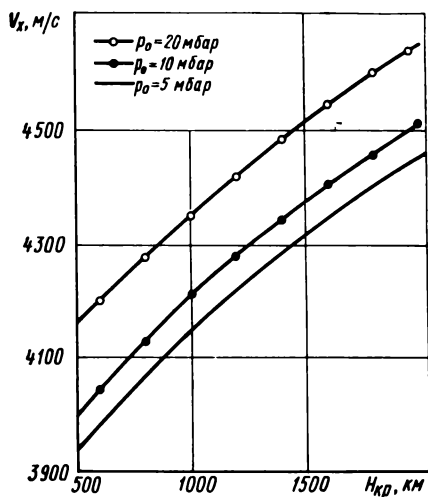


Рис. 4.3.4. Влияние высоты круговой орбиты $H_{кр}$ на V_x при $\bar{P}_0 = 1,2$:

p_0 , м бар	20	10	5
$h_{кр}$, км	60	45	35

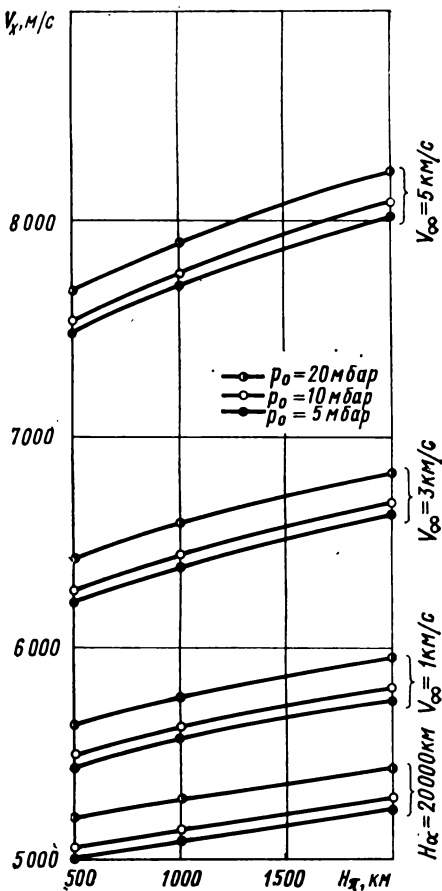


Рис. 4.3.5. Влияние высоты перигея конечных эллиптических и гиперболических орбит на V_x при $\bar{P}_0 = 1,2$:

p_0 , м бар	20	10	5
$h_{п}$, км	65	50	40

— старт с поверхности Марса и выведение в перигей переходного эллипса со скоростью, обеспечивающей компенсацию аэродинамических потерь на переходном эллипсе;

— пассивный полет до апогея и разгон в апогее до выведения на заданную орбиту (при этом высота апогея переходного эллипса равна высоте перигея конечной заданной орбиты).

Для этой схемы выведения было исследовано влияние высоты перигея переходного эллипса h_{π} на потребные энергозатраты при выведении на различные конечные орбиты. Результаты расчетов представлены на рис. 4.3.3. Как видно из расчетов, существует оптимальное значение высоты перигея h_{π} переходного эллипса, позволяющее получить минимальные потребные энергозатраты. При этом оптимальное значение высоты перигея определяется в основном моделью атмосферы и составляет $h_{\pi}=35\div 40$ км для минимальной модели $p_0=5$ мбар, 40—50 км для средней модели $p_0=10$ мбар, 60—70 км для максимальной модели $p_0=20$ мбар, незначительно изменяясь при изменении высоты апогея переходной орбиты.

Оптимальное значение тяговооруженности $p_0\approx 1,2$.

На рис. 4.3.4 показано влияние высоты конечной круговой орбиты $H_{кр}$ на суммарную характеристическую скорость. Увеличение высоты круговой орбиты с $H_{кр}=500$ км до $H_{кр}=2000$ км приводит к росту V_x примерно на 500 м/с.

На рис. 4.3.5 показано влияние высоты перигея h_{π} конечных эллиптических и гиперболических орбит на V_x . Увеличение высоты перигея h_{π} на 500 км приводит к росту V_x примерно на 250—500 м/с в зависимости от типа конечной орбиты.

§ 1. КАЛЕНДАРЬ ПОЛЕТОВ К ПЛАНЕТАМ

Точное определение характеристик траекторий межпланетных полетов связано с решением пространственной задачи, требующей достаточно трудоемких вычислений. Предварительные оценки основных характеристик траекторий и опорных дат старта для

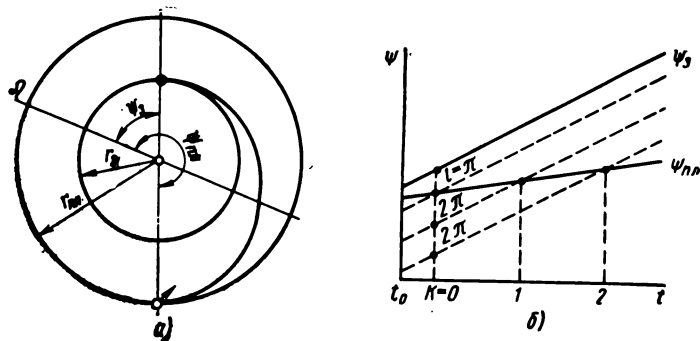


Рис. 5.1.1. Схемы перелета

а — эллипс Хомана; б — определение разности долгот Земли и планеты

циклов оптимальных полетов к планетам можно провести при следующих предположениях:

- орбиты Земли и планет круговые и все лежат в одной плоскости;
- перелет осуществляется по траекториям минимальной энергии.

Траектории минимальной энергии для этого случая рассмотрены Хоманом [51] и представляют собой эллипсы (рис. 5.1.1, а), касающиеся в точках апсид круговых орбит планет.

Указанная постановка задачи не строга, но позволяет получить простые приближенные зависимости, которые можно использовать как характеристики нулевого приближения.

Время полета

Период обращения по такому эллипсу

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_{\odot}}} a^{\frac{3}{2}},$$

где a — большая полуось орбиты полета аппарата;
 $\mu_{\odot}$ — гравитационная постоянная Солнца.

Для круговых орбит Земли и планеты

$$a = \frac{r_z + r_{пл}}{2},$$

где r_z , $r_{пл}$ — средние значения радиуса орбиты Земли и планеты соответственно.

Будем выражать расстояния в астрономических единицах ($r_z=1$), а время — в земных сидерических периодах ($T_z=1$); тогда

$$T = V \tilde{a}^3.$$

Время полета от Земли к планете $\Delta t_{\pi} = \frac{T}{2}$. Подставив величину $\tilde{a} = \frac{1 + \tilde{r}_{пл}}{2}$, получим

$$\Delta t_{\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1 + \tilde{r}_{пл}}{2}\right)^3} = 0,177 V(1 + \tilde{r}_{пл})^3.$$

Таблица 5.1

Планета		Солнце	Меркурий	Венера	Марс	Астероиды
Δt_{π}	годы	0,177	0,288	0,401	0,710	1,01—1,74
	сутки	65	105	146	259	369—636
Планета		Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Δt_{π}	годы	2,745	5,980	16,0	30,65	45,80
	сутки	1000	2180	5840	11200	16800

Время полета к планетам с Земли приведено в табл. 5.1 и на рис. 5.1.2. Время полета к поясу астероидов (97% астероидов имеют орбиты в пределах $\tilde{r}_{\text{ср}} = 2,2 \div 3,6$) равно $\Delta t_{\text{п}}^{\text{З-А}} = 1,01 \div 1,74$ года. Для случая полета с планеты на планету

$$\Delta t_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2}{2} \right)^3}.$$

где $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$ — средние значения радиуса орбиты планет.

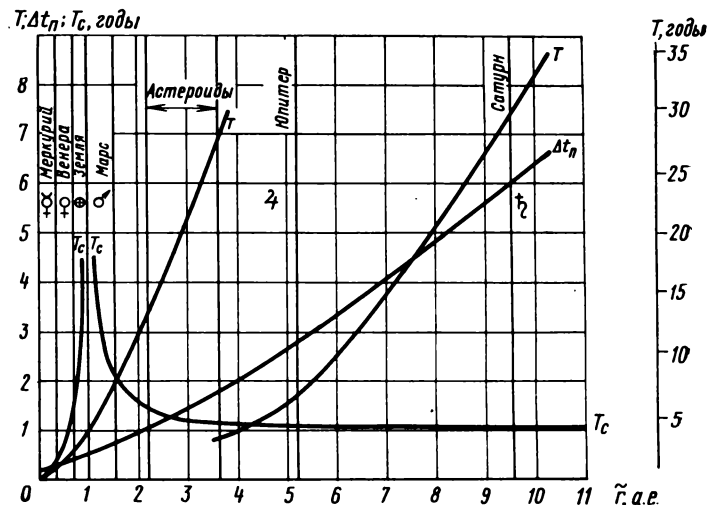


Рис. 5.1.2. Период обращения планет T , время полета $\Delta t_{\text{п}}$ и синодический период $T_{\text{с}}$ в зависимости от расстояния r от Солнца

Так, время полета с Венеры на Меркурий $\Delta t_{\text{п}} = 0,207$ года ≈ 76 сут, а для полета Марс—астероиды $\Delta t_{\text{п}} = 1,27 \div 2,05$, Марс — Юпитер $\Delta t_{\text{п}} = 3,08$, Марс — Сатурн $\Delta t_{\text{п}} = 6,53$, Юпитер — Сатурн $\Delta t_{\text{п}} = 10$ лет, Юпитер — Уран $\Delta t_{\text{п}} = 21,4$ года.

Приведенные выше значения $\Delta t_{\text{п}}$ подсчитаны для круговых орбит. Для оценки влияния эксцентриситета орбит на время полета определим

$$\Delta \tilde{t}_{\text{п max}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\tilde{r}_{\text{З max}} + \tilde{r}_{\text{пл max}}}{2} \right)^3};$$

$$\Delta t_{\text{п min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\tilde{r}_{\text{З min}} + \tilde{r}_{\text{пл min}}}{2} \right)^3}.$$

Такое сочетание орбит маловероятно, но значения $\Delta t_{\text{п}}$, близкие к $\Delta \tilde{t}_{\text{п max}}$ и $\Delta t_{\text{п min}}$, возможны через периоды великих противостояний. Значения $\Delta t_{\text{п max}}$ и $\Delta t_{\text{п min}}$ приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Планета		Меркурий	Венера	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
$\Delta t_{л \min}$	годы	0,260	0,390	0,644	2,550	5,36	15,0	30,2	38,5
	сутки	95	138	234	935	1955	5475	11040	11060
$\Delta t_{л \max}$	годы	0,320	0,412	0,780	2,910	6,600	17,1	30,8	57,3
	сутки	115	150	283	1070	2408	6240	11250	20950

Даты старта

Полет с Земли на планету. Дата старта может быть определена из условия, что разность гелиоцентрических долгот Земли в момент старта и планеты в момент прилета (угол перелета) равна $l = \pi$.

Долгота Земли в момент старта

$$\psi_z = \psi_{z,0} + \omega_z t_{ст.з},$$

где $\psi_{z,0}$ — долгота Земли в момент начала отсчета времени в рад;

$\omega_z = \frac{2\pi}{T_z} = 2\pi$ — угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца в рад/год;

$t_{ст.з}$ — время старта с Земли на планету от начала отсчета времени в годах.

Долгота планеты в момент прилета

$$\psi_{пл} = \psi_{пл,0} + \omega_{пл} (t_{ст.з} + \Delta t_{п}),$$

где $\psi_{пл,0}$ — долгота планеты в момент начала отсчета времени;

$\omega_{пл} = \frac{2\pi}{T_{пл}}$ — угловая скорость обращения планеты вокруг Солнца.

Разность долгот Земли и планеты может отличаться на 2π (рис. 5. 1. а, б):

$$\psi_z - \psi_{пл} = \pm \pi + k2\pi; \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3),$$

где k — количество циклов от начала отсчета времени.

С другой стороны, разность долгот

$$\psi_z - \psi_{пл} = (\psi_{z,0} - \psi_{пл,0}) + (\omega_z - \omega_{пл}) t_{ст.з} - \omega_{пл} \Delta t_{п},$$

откуда время старта с Земли на планету

$$t_{\text{ст.з}} = \frac{\pm \pi + k2\pi - \Delta\psi_0 + \omega_{\text{пл}}\Delta t_{\text{п}}}{\omega_3 - \omega_{\text{пл}}} = t_{\text{ст.з}}^0 + kT_{\text{с}},$$

где

$$\Delta\psi_0 = \psi_{3,0} - \psi_{\text{пл},0};$$

$t_{\text{ст.з}}^0$ — время старта для нулевого цикла;

$T_{\text{с}}$ — период времени между циклами.

Период времени между циклами равен

$$T_{\text{с}} = \frac{2\pi}{\omega_3 - \omega_{\text{пл}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{T_{\text{пл}}}} = \frac{T_{\text{пл}}}{T_{\text{пл}} - 1},$$

т. е. синодическому периоду обращения планеты.

Синодические периоды для планет приведены в таблице приложения и на рис. 5. 1. 2. Синодический период обращения и период времени между циклами для полетов к какому-либо астероиду

$$T_{\text{с}} = 1,44 \div 1,15$$

(период обращения $T_{\text{аст}} = \sqrt{\tilde{r}_{\text{аст}}^3} = \sqrt{(2,2 \div 3,6)^3} = 3,26 \div 6,85$).

Для полета с планеты на планету синодический период

$$T_{\text{с}} = \frac{1}{\left| \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right|} = \frac{T_1 \cdot T_2}{|T_2 - T_1|}. \quad -)$$

Время старта с Земли для нулевого цикла от начала отсчета времени

$$t_{\text{ст.з}} = \frac{\pm \pi - \Delta\psi_0 + \omega_{\text{пл}}\Delta t_{\text{п}}}{\omega_3 - \omega_{\text{пл}}} = \frac{\left(\pm \frac{1}{2} - \tilde{\Delta\varphi}_0 \right) + T_{\text{пл}}\Delta t_{\text{п}}}{T_{\text{пл}} - 1},$$

где

$$\tilde{\Delta\psi} = \frac{\Delta\psi_0}{2\pi}.$$

Для определения даты старта необходимо знать гелиоцентрические долготы планет в начальный момент времени.

Календарь полетов к планетам приведен на рис. 5. 1. 3.

Полет с планеты на Землю. Долгота планеты в момент старта $\psi_{\text{пл}} = \psi_{\text{пл},0} + \omega_{\text{пл}}t_{\text{ст.пл}}$. Долгота Земли в момент прилета $\psi_3 = \psi_{3,0} + \omega_3(t_{\text{ст.з}} + \Delta t_{\text{п}})$. Разность долгот $\psi_3 - \psi_{\text{пл}} = \pm \pi + k2\pi$

или

$$\psi_3 - \psi_{\text{пл}} = (\psi_{3,0} - \psi_{\text{пл},0}) + (\omega_3 - \omega_{\text{пл}})t_{\text{ст.пл}} + \omega_3\Delta t_{\text{п}}.$$

Время старта с планеты на Землю

$$t_{\text{ст.пл}} = \frac{\pm \pi + k2\pi - \Delta\psi_0 - \omega_3 \Delta t_{\text{п}}}{\omega_3 - \omega_{\text{пл}}} = t_{\text{ст.пл}}^0 + kT_c.$$

Период времени между циклами

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_3 - \omega_{\text{пл}}} = \frac{T_{\text{пл}}}{T_{\text{пл}} - 1}$$

такой же, как и при полетах с Земли на планету.

Время старта нулевого цикла от начала отсчета времени

$$t_{\text{ст.пл}}^0 = \frac{\pm \pi - \Delta\psi_0 + \omega_3 \Delta t_{\text{п}}}{\omega_3 - \omega_{\text{пл}}} = \frac{\left(\pm \frac{1}{2} - \Delta\tilde{\psi}_0 \right) + \Delta t_{\text{п}}}{T_{\text{пл}} - 1}.$$

Зная гелиоцентрические долготы планет в момент начала отсчета времени, можно определить $t_{\text{ст.пл}}^0$ и даты старта нулевого цикла.

Зная даты старта и время полета, можно определить время ожидания $\Delta t_{\text{ож}}$ на планете и время, потребное на полный цикл, Δt_{Σ} — полет к планете, ожидание и полет к Земле (табл. 5.3 и рис. 5.1.3), где

$$\Delta t_{\text{ож}} = t_{\text{ст.пл}} - (t_{\text{ст.З}} + \Delta t_{\text{п}});$$

$$\Delta t_{\Sigma} = 2\Delta t_{\text{п}} + \Delta t_{\text{ож}}.$$

Таблица 5.3

Планета	$\Delta t_{\text{ож}}$		Δt_{Σ}	
	годы	дни	годы	дни
Меркурий	0,18	66	0,76	277
Венера	1,284	469	2,085	762
Марс	1,234	453	2,666	972
Юпитер	0,56	214	6,48	2209
Сатурн	0,93	40	13,026	4758
Уран	0,936	—	33,01	12060
Нептун	0,935	—	62,17	22710

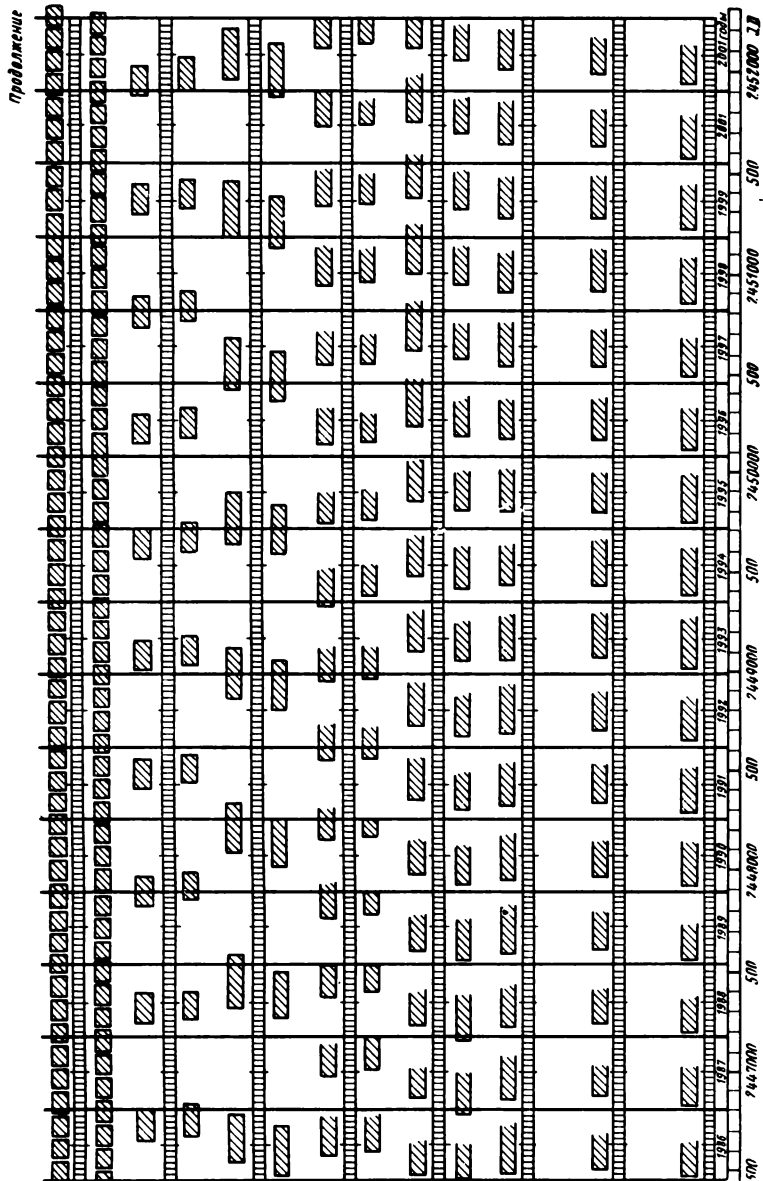


Рис. 5.1.3. Календарь полетов к планетам;

T_c —время между циклами полетов в годах; Δt_{Π} —время полета в годах; $\Delta t_{ож}$ —время ожидания на планете в годах;
 $\Delta t_{\Sigma} = \Delta t_{\Pi} + \Delta t_{ож} + \Delta t_{\Pi}$ —время полного цикла экспедиции в годах

Потребные скорости старта и скорости подхода к планете

Скорость движения тела по орбите

$$V^2 = 2\mu_{\odot} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right).$$

Круговая скорость на расстоянии r от центрального тела

$$V_{кр}^2 = \frac{\mu_{\odot}}{r}.$$

Подставляя $V_{кр}$ в выражение для V , получим

$$V = V_{кр} \sqrt{2 \left(1 - \frac{r}{2a} \right)}.$$

Рассмотрим момент старта с Земли, т. е. момент выхода из сферы действия Земли. В этом случае скорость, необходимая для перехода на эллиптическую орбиту, касающуюся орбит Земли и планеты,

$$V_{ст.з} = V_{кр.з} \sqrt{2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_з}{2a} \right)} = V_{кр.з} \sqrt{\frac{2\tilde{r}_{пл}}{1 + \tilde{r}_{пл}}};$$

$$2a = \tilde{r}_з + \tilde{r}_{пл} = 1 + \tilde{r}_{пл}; \quad \tilde{r}_з = 1.$$

Относительная скорость старта (приблизительно скорость на сфере действия планеты $V_{\infty}^{\oplus}$)

$$V_{\infty}^{\oplus} = \Delta V_{ст.з}^{\infty} = V_{ст.з} - V_{кр.з}.$$

Значения этих скоростей приведены в табл. 5.4 и на рис. 5.1.4. Для полета к астероидам ($\tilde{r} = 2,2 \div 3,6$) относительная скорость старта

$$V_{\infty}^{\oplus} = 5,14 \div 7,52 \text{ км/с.}$$

Для случая старта с планеты на Землю

$$V_{ст.пл} = V_{кр.пл} \sqrt{2 \left(1 - \frac{r_{пл}}{2a} \right)} = V_{кр.пл} \sqrt{\frac{2}{1 + \tilde{r}_{пл}}}.$$

Относительная скорость старта

$$V_{\infty}^{пл} = \Delta V_{ст.пл}^{\infty} = V_{ст.пл} - V_{кр.пл}.$$

Легко заметить, что относительная скорость старта с планеты $\Delta V_{ст.пл}^{\infty}$ равна скорости подхода к ней $\Delta V_{п.пл}^{\infty}$ при полете с Земли и относительная скорость старта с Земли $\Delta V_{ст.з}^{\infty}$ равна скорости подхода к ней $\Delta V_{п.з}^{\infty}$ при полете с планеты.

Таблица 5.4

Планета	$V_{\infty}^{\oplus} = \Delta V_{\text{ст.з}}^{\infty} = \Delta V_{\text{п.з}}$	$V'_{\text{ст.з}} = V_{\text{вх.з}}$	$\Delta V_{\text{ст}}^{\oplus} = \Delta V_{\text{т}}^{\oplus} \text{ ИСЗ}$	$V_{\infty}^{\text{пл}} = \Delta V_{\text{ст.пл}}^{\infty} = \Delta V_{\text{п.пл}}$	$V_{\text{вх.п}} = V'_{\text{ст.п}}$	$\Delta V_{\text{ст}}^{\text{пл}} = \Delta V_{\text{т}}^{\text{пл}} \text{ ИСП}$
Солнце	—29,8	31,7	23,8	—	—	—
Меркурий	$-7,50 \left(\frac{-6,04}{-9,38} \right)$	13,7	5,8	9,56	10,25	7,71
Венера	—2,53	11,5	3,6	2,80	10,56	3,36
Марс	$2,98 \left(\frac{3,50}{2,32} \right)$	$11,6 \left(\frac{11,75}{11,45} \right)$	$3,7 \left(\frac{3,85}{3,55} \right)$	$-2,65 \left(\frac{-3,24}{-1,92} \right)$	$5,65 \left(\frac{5,95}{5,35} \right)$	$2,11 \left(\frac{2,43}{1,83} \right)$
Астероиды	5,14—7,52	12,35—13,5	4,45—5,6	—	—	—
Юпитер	8,70	14,2	6,3	—5,65	60,01	17,51
Сатурн	10,30	15,2	7,3	5,49	36,45	10,85
Уран	11,30	15,9	8,0	—4,56	21,5	6,7
Нептун	11,68	16,2	8,3	3,94	23,35	7,05
Плутон	$11,85 \left(\frac{11,92}{11,65} \right)$	16,3	8,4	4,88	—	—
∞	12,31	16,68	8,78	0	—	—

Используя интеграл энергии, получим

$$(V'_{\text{ст.пл}})^2 - \frac{2\mu_{\text{пл}}}{R_{\text{пл}}} = (V_{\infty}^{\text{пл}})^2 - \frac{2\mu_{\text{пл}}}{R_{\text{сф.д.пл}}} \approx (V_{\infty}^{\text{пл}})^2$$

при $R_{\text{сф.д.пл}} \rightarrow \infty$;

$$V_{\text{пар}}^2 = \frac{2\mu_{\text{пл}}}{R_{\text{пл}}},$$

где $V'_{\text{ст.пл}} = V_{\text{вх.пл}}$ — скорость старта с поверхности планеты, равная скорости подхода к поверхности планеты без учета потерь на гравитацию и сопротивление атмосферы;

$V_{\text{пар}}$ — параболическая скорость на поверхности планеты;

$R_{\text{пл}}$ — радиус планеты;

$R_{\text{сф.д.пл}}$ — радиус сферы действия планеты.

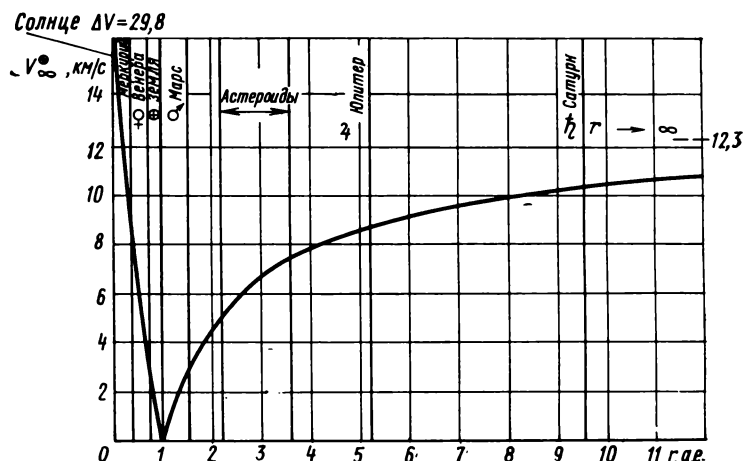


Рис. 5.1.4. Скорость на выходе из сферы действия Земли для полета к планетам

Используя эти два выражения, получим

$$V_{\text{вх.пл}} = V'_{\text{ст.пл}} = \sqrt{V_{\text{пар}}^2 + (V_{\infty}^{\text{пл}})^2}.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 5.4. Для полета с планеты на планету

$$V_{\text{ст}2} = V_{\text{кр}2} \sqrt{\frac{2\tilde{r}_1}{\tilde{r}_2 + \tilde{r}_1}} \quad \text{и} \quad V_{\text{ст}1} = V_{\text{кр}1} \sqrt{\frac{2\tilde{r}_2}{\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2}}.$$

Так, для полета Венера — Меркурий $\Delta V_{\text{ст}}^{\infty} = -5,6$, Меркурий — Венера $\Delta V_{\text{ст}}^{\infty} = 7,15$, Марс — астероиды $\Delta V_{\text{ст}}^{\infty} = 2,16 \div 4,58$, Марс — Юпитер $\Delta V_{\text{ст}}^{\infty} = 5,98$, Марс — Сатурн $\Delta V_{\text{ст}}^{\infty} = 8,20$, Юпитер — Сатурн $\Delta V_{\text{ст}}^{\infty} = 1,79$, Юпитер — Уран $\Delta V_{\text{ст}}^{\infty} = 3,28$ км/с.

Для оценки влияния эксцентриситета орбит планет получим

$$V_{\text{ст.з max}} = V_{\text{кр.з}} \sqrt{\frac{2\tilde{r}_{\text{пл max}}}{1 + \tilde{r}_{\text{пл max}}}};$$

$$V_{\text{ст.з min}} = V_{\text{кр.з}} \sqrt{\frac{2\tilde{r}_{\text{пл min}}}{1 + \tilde{r}_{\text{пл min}}}}.$$

Значения $\Delta V_{\text{ст.з max}}^{\infty}$ и $\Delta V_{\text{ст.з min}}^{\infty}$ для планет с большим эксцентриситетом приведены в табл. 5.4 (цифры в скобках).

Скорость старта с круговой орбиты ИСП (искусственного спутника планеты) радиусом $R_{\text{кр}} = R_{\text{пл}}$

$$\Delta V_{\text{ст}}^{\text{пл}} = V'_{\text{ст.пл}} - V_{\text{кр}},$$

где

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{пл}}}{R_{\text{пл}}}}.$$

Скорость старта с орбиты ИСП $\Delta V_{\text{ст}}^{\text{пл}}$ равна скорости торможения на орбиту ИСП $\Delta V_{\text{т}}^{\text{пл}}$. Значения $\Delta V_{\text{ст}}^{\text{пл}}$ и $\Delta V_{\text{т}}^{\text{пл}}$ для ИСЗ и ИСП приведены в табл. 5.4.

Приведенные выше характеристики хомановских межпланетных траекторий дают ориентировочные представления о реальных значениях этих характеристик. Так, время полета по эллипсу Хомана лежит примерно между реальными временами полета по оптимальным траекториям 1 и 2-го полувитков. Энергозатраты хомановских траекторий соответствуют примерно энергозатратам реальных полетов в наилучших циклах. Даты старта по этим траекториям лежат примерно между реальными датами старта полета по оптимальным траекториям 1 и 2-го полувитков. Эти даты старта можно использовать как опорные для расчета реальных траекторий.

Ускоренные траектории

Полеты к дальним планетам по траекториям минимальной энергии требуют длительного времени. Интересно оценить, какого увеличения энергозатрат потребует сокращение времени полета.

Для предварительного анализа возможности обеспечения ускоренных полетов к планетам проведем оценки характеристик таких траекторий полета в следующих предположениях.

1. Орбиты планет Солнечной системы будем считать круговыми и лежащими в плоскости эклиптики.

2. Траектория полета КА лежит также в плоскости эклиптики. Старт КА производится в направлении скорости движения Земли по орбите, т. е. точка старта есть апсидальная точка ор-

биты перелета КА (касательный старт). Касательный старт обеспечивает полет по траекториям, близким к траекториям минимальной энергии при фиксированном времени полета Δt («ускоренные траектории»).

В этом случае величина стартовой гелиоцентрической скорости V_0 определяет траекторию полета.

Параметр траектории полета

$$p = \frac{V_0^2 r_0^2}{\mu_{\odot}} = \frac{V_0^2}{V_{кр}^2} r_0;$$

эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{\mu_{\odot}} \left(V_0^2 - \frac{2\mu_{\odot}}{r} \right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{V_{кр}} \right)^2 (V_0^2 - 2V_{кр}^2)};$$

радиус

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}.$$

Время полета для эллиптических траекторий

$$\Delta t_{эл} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_{\odot}}} (E - e \sin E),$$

где

$$a = \frac{p}{1 - e^2}; \quad \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}};$$

для параболической траектории

$$\Delta t_{пар} = \frac{a^{3/2}}{2\sqrt{\mu_{\odot}}} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right)$$

и для гиперболической

$$\Delta t_r = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_{\odot}}} (e \operatorname{sh} H - H),$$

где

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}; \quad \operatorname{tg} \frac{H}{2} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} \sqrt{\frac{e - 1}{e + 1}}.$$

Перейдем к безразмерным величинам, относя линейные размеры к радиусу точки старта r_0 , а скорости — к круговой скорости в точке старта $V_{кр} = \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{r_0}}$. В этом случае

$$\tilde{p} = \tilde{V}_0^2; \quad e = \sqrt{1 + \tilde{V}_0^2 (\tilde{V}_0^2 - 2)};$$

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{p}}{1 + e \cos v},$$

$$\tilde{a} = \frac{\tilde{p}}{1 - e^2} \text{ — для эллипса};$$

$$\tilde{a} = \frac{\tilde{p}}{e^2 - 1} \text{ — для гиперболы}.$$

Время полета отнесем к периоду обращения на стартовой орбите:

$$T_{кр} = 2\pi \frac{r_{кр}^{3/2}}{\sqrt{\mu_{пл}}}.$$

Тогда относительное время полета для эллипса

$$\Delta \tilde{t}_{эл} = \frac{\tilde{a}^{3/2}}{2\pi} (E - e \sin E);$$

для параболы

$$\Delta \tilde{t}_{пар} = \frac{\tilde{a}^{3/2}}{4\pi} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right);$$

для гиперболы

$$\Delta \tilde{t}_г = \frac{\tilde{a}^{3/2}}{2\pi} (e \operatorname{sh} H - H).$$

На рис. 5.1.5 приведены зависимости скорости выхода из сферы действия Земли $V_\infty^\oplus$ и скорости входа в сферу действия планеты $V_\infty^{пл}$ для ускоренных траекторий полета. Хотя такие траектории представляют наибольший интерес при полетах к дальним внешним планетам, интересно выяснить возможности сокращения времени полета и к ближним планетам.

Уменьшение времени полета Δt_π при увеличении скорости выхода из сферы действия Земли на $\Delta V_\infty^\oplus = 0,5$ км/с по сравнению с минимальной показано в табл. 5.5.

Видно, что не очень большое увеличение энергозатрат траектории существенно снижает время полета к ближним планетам.

При полетах к дальним планетам увеличение энергозатрат на $\Delta V_\infty^\oplus = 0,5$ км/с позволяет сократить время полета Δt_π в 1,5—2 раза, что объясняется довольно пологим оптимумом кривых $V_\infty^\oplus = f(\Delta t_\pi)$. Однако при таком резком сокращении времени по-

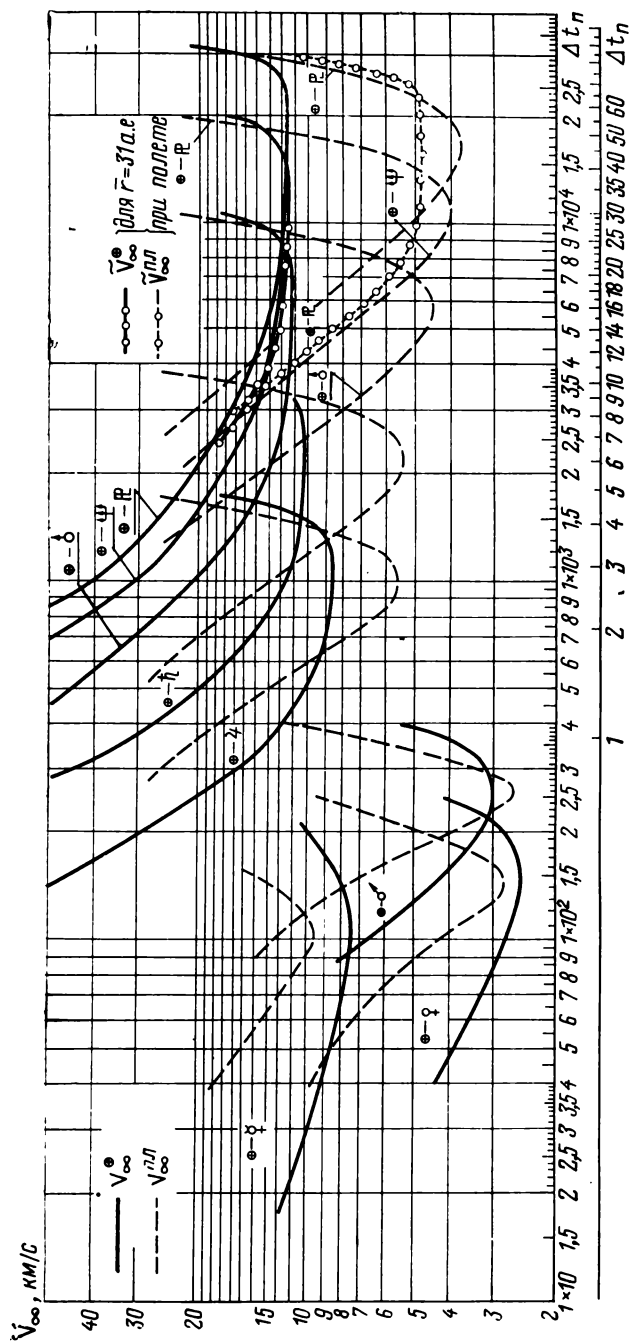


Рис. 5.1.5. Характеристики ускоренных траекторий

Таблица 5.5

Вит траектории	Характеристика	Планета							
		Меркурий	Венера	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон*
Оптимальная	$V_{\infty}^{\oplus}$, км/с	7,5	2,5	3,0	8,7	10,3	11,3	11,7	11,8
	$\Delta t_{п}$, сут	106	146	259	2,73 г	6,05 г	16,04 г	30,6 г	33 г
Ускоренная	$V_{\infty}^{\oplus}$, км/с	8,0	3,0	3,5	9,3	10,8	11,9	12,1	12,3
	$\Delta t_{п}$, сут	65	81	180	1,75 г	3,7 г	8,0 г	16,0 г	14 г

* Для полетов в период 1970—1980 гг.

лета существенно увеличивается скорость встречи КЛА с планетой $V_{\infty}^{пл}$, что может вызвать затруднения для КЛА, входящих в атмосферу планет. Так, при полетах по ускоренным траекториям к Венере скорость $V_{\infty}^{\oplus}$ возрастает с 2,7 до 5,6 км/с, что приводит к увеличению скорости входа в атмосферу планеты $V_{вх}^{\oplus}$ с 10,4 до 11,5 км/с. При ускоренных полетах к Марсу значения $V_{\infty}^{\oplus}$ возрастают с 2,6 до 5,5 км/с, что вызывает увеличение скорости входа с 5,55 до 7,4 км/с. Для посадки КЛА в разреженной атмосфере Марса это может иметь существенное значение.

При ускоренных полетах к Юпитеру скорость V_{∞}^{24} возрастает с 5,7 до 9,3 км/с, что из-за большой параболической скорости Юпитера вызывает увеличение скорости входа в атмосферу Юпитера с 60 до 61 км/с.

Из изложенного видно, что уже по оценочным данным ускоренные траектории полета представляются достаточно интересными для реализации полета автоматических межпланетных аппаратов.

§ 2. ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ УЧАСТКОВ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА НА ПОЛЯХ ИЗОЛИНИЙ

Траектории полета пролетных, десантных и некоторых видов комбинированных схем полетов относятся к одноимпульсным.

Характеристики одноимпульсных траекторий полета удобно представлять в виде изолиний характеристической скорости стар-

та $\Delta V_{\text{ст}}^{\oplus}$ с орбиты ИСЗ (или $V_{\infty}^{\oplus}$) в координатах дат старта $t_{\text{ст}}^{\oplus}$ и времени перелета $\Delta t_{\text{п}}$. Такое типичное поле изолиний для цикла полетов к Марсу приведено на рис. 5.2.1. Поле скоростей $V_{\infty}^{\oplus}$ делится «хребтом» с большими значениями $V_{\infty}^{\oplus}$ (при углах перелета $L \approx 180^\circ$) на две области:

- перелеты по 1-му полувитку (нижняя область с $L < 180^\circ$);
- перелеты по 2-му полувитку (верхняя область с $L > 180^\circ$).

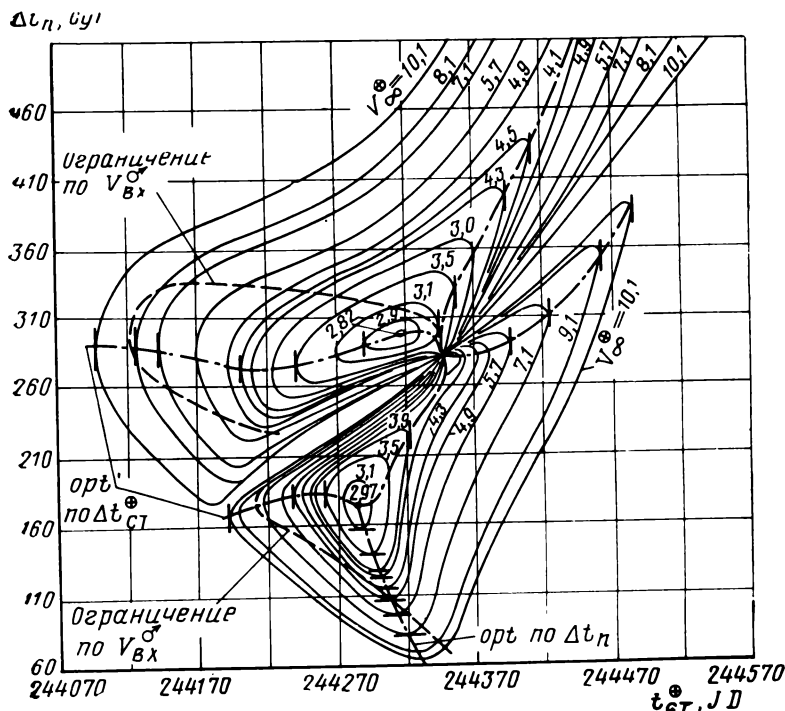


Рис. 5.2.1. Поле изолиний V_{∞} для полета к Марсу

Для каждой области существуют точки с минимальным значением $V_{\infty}^{\oplus}$. Реализация траектории вблизи этих точек, естественно, обеспечивает наибольший вес полезного груза, выводимого на траекторию полета к планете. Кроме того, на таком поле изолиний можно провести оптимизацию траекторий в двух вариантах:

- траектории, обеспечивающие минимум $V_{\infty}^{\oplus}$ при наибольшем диапазоне дат старта $t_{\text{ст}}^{\oplus}$ (максимум «окна» дат старта);
- траектории, обеспечивающие минимум $V_{\infty}^{\oplus}$ при заданном времени перелета $\Delta t_{\text{п}}$ («ускоренные» траектории).

Первый класс траекторий может быть реализован при полетах к ближним планетам (Марс, Венера) и дальним внутренним (Меркурий), когда отсутствуют ограничения по времени перелета. На поле изолиний $V_{\infty}^{\oplus}$ эти траектории лежат на кривой, соединяющей точки касания прямых с $t_{\text{ст}}^{\oplus} = \text{const}$ с изолиниями $V_{\infty}^{\oplus}$.

При полетах к дальним внешним планетам (Юпитер, Сатурн и пр.), когда существенным является ограничение времени перелета, могут быть реализованы траектории второго класса. На поле изолиний $V_{\infty}^{\oplus}$ они лежат на кривой, соединяющей точки касания прямых с $\Delta t_{\text{п}} = \text{const}$ с изолиниями $V_{\infty}^{\oplus}$. Естественно, из этого класса наибольший интерес представляют траектории 1-го полувитка, лежащие ниже точки минимума на поле изолиний $V_{\infty}^{\oplus}$.

Скорость полета около планеты или скорость встречи с планетой можно характеризовать скоростью входа (встречи) $V_{\infty}^{\text{пл}}$ в сферу действия планеты. При наличии ограничений на $V_{\infty}^{\text{пл}}$ (например, ограничение скорости входа $V_{\text{вх}} \approx V_{\pi}$ в атмосферу планеты из-за условий ввода парашютных тормозных систем или ограничение скорости пролета мимо планеты из условий четкости изображения и пр.) на поле изолиний можно нанести граничную изолинию $V_{\infty}^{\text{пл}}$ и провести оптимизацию по указанным выше классам траекторий с учетом ограничения по $V_{\infty}^{\text{пл}}$.

На рис. 5.2.2 на поле изолиний $V_{\infty}^{\oplus}$ у Земли для траекторий 1-го полувитка нанесены изолинии V_{∞}^{σ} . Траектории, оптимизирующие $V_{\infty}^{\oplus}$ и V_{∞}^{σ} , соответствуют точкам касания * этих изолиний. Такая трасса нанесена на рис. 5.2.2. Она, естественно, должна проходить через точки минимума $V_{\infty}^{\oplus}$ и V_{∞}^{σ} . Видно, что в этом случае точка минимума $V_{\infty}^{\oplus}$ ограничивает даты старта слева. На участке правее этой точки (до точки $\min V_{\infty}^{\sigma}$) точки дат старта близки к трассе траекторий, оптимизируемых по максимуму «окна» дат старта. Правее точки $\min V_{\infty}^{\sigma}$ точки V_{∞}^{σ} резко отходят вниз от трассы траекторий, оптимальных по «окну» дат старта.

Рассмотрим другие примеры оптимизации траекторий. На рис. 5.2.3 нанесены поля изолиний для траекторий полета к Венере. На поле изолиний скорости старта $V_{\text{ст}}^{\oplus}$ с орбиты ИСЗ нанесено поле изолиний угла склонения $\delta_{\infty}^{\oplus}$ вектора скорости выхода из сферы действия Земли $V_{\infty}^{\oplus}$. Этот угол характеризует условия видимости КА на начальном участке траектории полета. Для пунктов, расположенных в Северном полушарии, наилучшие

* Следует различать трассы с $\min V_{\infty}^{\sigma}$ и $\max V_{\infty}^{\sigma}$ при заданном значении $V_{\infty}^{\oplus}$ (см. рис. 5.2.2).

условия видимости соответствуют максимальному значению $\delta_{\text{ст}}^{\oplus}$. На рис. 5.2.3 нанесена такая трасса на поле изолиний $V_{\text{ст}}^{\oplus}$. Наибольшие $\delta_{\text{ст}}^{\oplus}$ при заданных энергозатратах ($V_{\text{ст}}^{\oplus}$) лежат левее точки минимума $V_{\text{ст}}^{\oplus}$. Там же нанесена трасса, соответствующая оптимизации траекторий по датам старта $t_{\text{ст}}^{\oplus}$. На рис. 5.2.3 нанесена также трасса, обеспечивающая $\min V_{\infty}^{\oplus}$ (следовательно, минимум скорости входа в атмосферу планеты). Трасса этих оптимальных траекторий близка к трассе траекторий, оптимизируемых по датам старта.

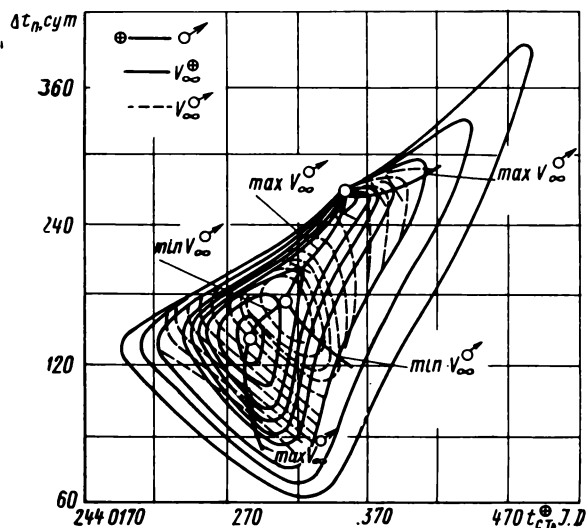
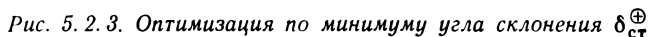


Рис. 5.2.2. Оптимизация по минимуму скорости встречи с Марсом $\bar{V}_{\infty}^{\oplus}$

Мы рассмотрели некоторые случаи оптимизации траекторий на полях изолиний. Возможно построение изолиний других критериев, например, непосредственно веса полезного груза или других каких-то комбинированных критериев. Оптимизация на полях изолиний позволяет определить не только оптимальные траектории, но и поведение критерия в окрестности оптимальных значений. Это позволяет в процессе баллистического проектирования отходить от оптимальных трасс, учитывая дополнительные соображения.

Характеристики траекторий при различных условиях оптимизации можно снимать с поля изолиний. Однако более удобно эти характеристики получать отдельно. Так, например, оптими-

- траектории 1-го полувитка с $0^\circ < L < 180^\circ$;
- траектории 2-го полувитка с $180^\circ < L < 360^\circ$.



$0 < L \leq \pi - (i + \varepsilon)$ — для траектории 1-го полувитка;
 $\pi + (i + \varepsilon) \leq L \leq 2\pi - (i + \varepsilon)$ — для траектории 2-го полувитка.

В табл. 5.6—5.8 приведены характеристики траекторий минимальных энергозатрат для полета к Марсу, Венере и Юпитеру в 1970—1990 гг.

* Полет из узла орбиты Земли в узел орбиты планеты.

Таблица 5.6

Характеристики одноимпульсных траекторий полета к Венере

Год	Полувиток	$t_{\text{ст}}^{\oplus}$	$\Delta t_{\text{п}}$	$V_{\text{ст}}^{\oplus}$	$V_{\infty}^{\ominus}$
		сут		км/с	
1970	1	18.08.70	117	3,60	5,40
	2	16.09.70	167	3,70	6,35
1972	1	28.03.72	112	3,77	6,06
	2	07.04.72	117	3,59	5,42
1973	1	10.11.73	107	3,82	4,80
	2	09.11.73	156	3,55	4,29
1975	1	10.06.75	143	3,51	3,61
	2	31.05.75	154	3,49	3,69
1977	1	10.01.77	128	3,56	4,39
	2	09.12.76	157	3,73	4,45
1978	1	16.08.78	118	3,60	5,33
	2	15.09.78	167	3,70	6,38
1980	1	26.03.80	112	3,76	6,05
	2	05.04.80	171	3,60	5,47
1981	1	08.11.81	107	3,82	4,92
	2	07.11.81	157	3,56	4,36
1983	1	10.06.83	143	3,52	3,53
	2	28.05.83	155	3,49	3,66
1985	1	07.01.85	129	3,56	4,29
	2	08.12.84	157	3,71	3,73
1986	1	13.08.86	119	3,59	5,26
	2	13.09.86	167	3,71	6,44
1988	1	24.03.88	112	3,76	6,05
	2	03.04.88	171	3,60	5,51
1989	1	05.11.89	107	3,82	5,04
	2	07.11.89	156	3,56	4,42
1991	1	10.06.91	142	3,54	3,54
	2	26.05.91	156	3,49	3,60

Таблица 5.7

Характеристики одноимпульсных траекторий полета к Марсу

Год	Полувиток	$t_{\text{ст}}^{\oplus}$	Δt_{II}	$v_{\text{ст}}^{\oplus}$	$v_{\infty}^{\oplus}$
		сут		км/с	
1971	1	24.05.71	210	3,43	2,84
	2	03.05.71	249	3,56	3,14
1973	1	30.07.73	193	3,72	3,00
	2	28.08.73	408	3,91	3,68
1975	1	15.09.75	207	3,91	3,75
	2	17.09.75	373	3,66	2,89
1977	1	19.10.77	224	3,83	4,04
	2	09.10.77	333	3,55	2,45
1979	1	03.11.79	286	3,48	2,87
	2	03.11.79	287	3,48	2,84
1981	1	18.12.81	214	3,48	5,19
	2	16.12.81	327	3,47	3,85
1984	1	08.02.84	185	3,47	5,49
	2	07.03.84	313	3,42	5,28
1986	1	22.04.86	187	3,43	3,35
	2	06.05.86	259	3,41	3,89
1988	1	05.07.88	192	3,59	2,77
	2	19.08.88	414	3,83	3,96
1990	1	30.08.90	201	3,77	3,46
	2	10.09.90	388	3,711	3,17

Таблица 5.8

**Характеристики одноимпульсных траекторий полета к Юпитеру
(1-й полувиток)**

Год	$t_{\oplus \text{ст}}$	$\Delta t_{\text{п}}$	$v_{\oplus \text{ст}}$	v_{∞}^2
	сут		км/с	
1970	03.01.70	1005	6,24	5,69
1971	30.01.71	826	6,30	6,47
1972	04.03.72	749	6,42	7,05
1973	09.04.73	721	6,53	7,12
1974	18.05.74	742	6,56	6,66
1975	30.06.75	909	6,45	5,71
1976	29.07.76	820	6,47	5,97
1977	03.09.77	774	6,65	6,48
1978	06.10.78	716	6,78	6,86
1979	07.11.79	787	6,77	6,79
1980	07.12.90	848	6,60	6,21
1982	04.01.82	1002	6,23	5,69
1983	03.02.83	819	6,32	6,59
1984	03.04.84	743	6,44	7,08
1985	15.04.85	721	6,54	7,09
1986	23.05.86	749	6,56	6,58
1987	05.07.87	1029	6,37	5,73
1988	30.08.88	810	6,49	6,03
1989	07.09.89	770	6,68	6,55
1990	11.10.90	767	6,78	6,84

За период с 1970 по 1980 гг. (табл. 5.6) минимум энергозатрат при полетах к Венере по траекториям 1-го полувитка приходится на 1975 г. ($V_{\infty}^{\ominus} = 2,5$ км/с).

«Окно» запусков по датам старта $\Delta t_{\text{ст}}^{\oplus}$ при запасе $\Delta V_x \approx \pm 0,5$ км/с составляет $\Delta t_{\text{ст}}^{\oplus} \approx 2 \div 3$ мес.

При полете к Марсу (табл. 5.7) оптимальными для траекторий 1-го полувитка будут циклы полетов с 1979 по 1986 гг. ($V_{\infty}^{\oplus} = 3$ км/с). «Окно» запусков $\Delta t_{\text{ст}}^{\oplus} \approx 1 \div 1,5$ мес для траекторий 1-го полувитка и $\Delta t_{\text{ст}}^{\oplus} = 3 \div 4$ мес для 2-го.

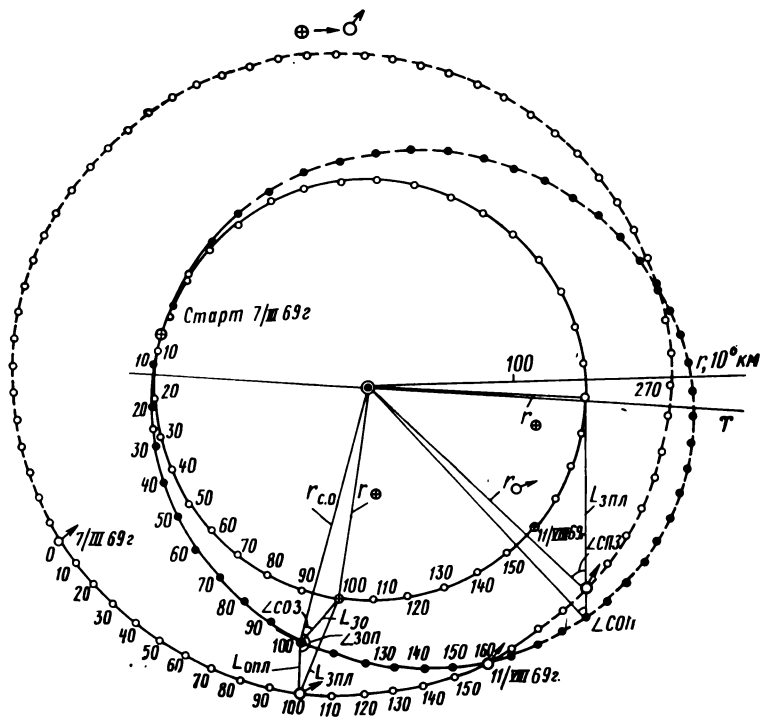


Рис. 5. 2. 4. Траектория полета Земля — Марс (цикл 1969 г.)

Для полетов к Юпитеру (табл. 5.8) оптимальным был 1970 г. с потребной скоростью $\Delta V_{\text{ст}}^{\oplus} = 6,24$ км/с. Полеты автоматических КЛА с продолжительностью 2—3 года представляют серьезные трудности в части обеспечения ресурса работы бортовых систем и аппарата в целом. Поэтому при полетах к дальним планетам представляют интерес энергетически оптимальные «ускоренные» траектории полета.

На рис. 5.2.4 в проекции на плоскость эклиптики нанесена близкая к оптимальной траектория КЛА к Марсу для одного из

циклов полетов. Траектория полета относится к группе траекторий 1-го полувитка. В момент старта расстояние между Землей и Марсом составляет $L_{з.пл} \approx 165$ млн. км. При $\Delta t_{п} \approx 90$ сут происходит противостояние Марса с расстоянием $L_{з.пл} \approx 73$ млн. км. На 160-е сутки полета КЛА проходит около Марса. При этом его расстояние от Земли $L_{з.пл} \approx 100$ млн. км. После пролета Марса *

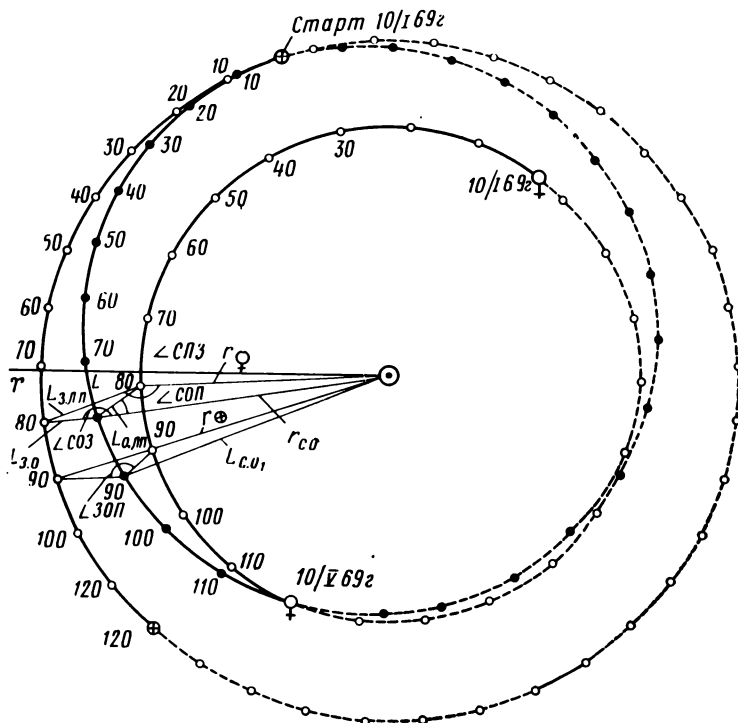


Рис. 5.2.5. Траектория полета Земля — Венера (цикл 1969 г.)

расстояние КЛА от Солнца увеличивается, достигая максимума $r_{с.о} \approx 228$ млн. км на 270-е сутки полета. Наибольшего расстояния от Земли КЛА достигает при $\Delta t_{п} \approx 380$ сут, где оно равно $L_{з.о} \approx 318$ млн. км. Расстояние КЛА от Солнца $L_{с.о}$ определяет мощность солнечных батарей, расстояние от Земли до КЛА $L_{з.о}$ — дальность линии радиосвязи.

На рис. 5.2.5 приведены геометрические характеристики траектории полета к Венере. Аппарат стартует с Земли по траектории, близкой по энергозатратам к оптимальной траектории 1-го полувитка. На Венеру КЛА прибывает ровно через 4 мес.

* Пролет вне сферы действия планеты.

Минимальное расстояние между Землей и Венерой $L_{з.пл} \approx 42$ млн. км приходится на 90-е сутки полета. В момент прилета КЛА на Венеру расстояние до нее $L_{з.пл} \approx 67$ млн. км.

На рис. 5.2.6 приведены геометрические характеристики оптимальной ускоренной траекторий полета к Юпитеру со временем

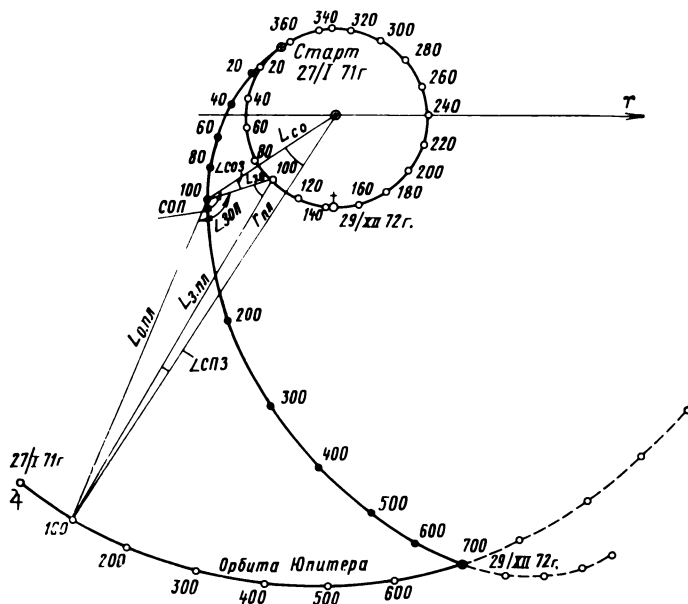


Рис. 5.2.6. Траектория полета Земля — Юпитер (цикл 1971 г.)

полета $\Delta t_{п} = 700$ сут. Максимальное расстояние от Земли до КЛА примерно соответствует моменту прилета его на Юпитер и составляет $L_{з.о} \approx 925$ млн. км. Интересно, что это расстояние в отличие от полета к ближним планетам меняется не монотонно. Так, локальный максимум $L_{з.о}$ приходится на 350-е сутки полета, а локальный минимум — на 500-е.

§ 3. ИЗМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПО ЦИКЛАМ ПОЛЕТОВ

Выше было отмечено, что циклы полетов к планете по траекториям минимальных энергий чередуются через периоды, близкие к синодическим периодам планет T_c . Известно также, что в различные циклы полетов характеристики траекторий минимальной энергии различны. Анализируя результаты массовых расчетов по характеристикам оптимальных траекторий для различных

циклов полетов, можно заметить некоторые закономерности изменения их по циклам. Однако такой путь достаточно трудоемок и не всегда вскрывает сложные зависимости изменения характеристик по циклам, особенно при полетах к внутренним планетам.

Определению динамики изменения этих характеристик для различных циклов полетов посвящен данный параграф, написанный по материалам работы [6]. В нем использованы идеи метода «достижимых областей». Суть этого метода заключается в том, что при заданной характеристической скорости старта с круговой орбиты определяется граница максимально достижимой области пространства. Траектория минимальной энергии полета реализуется, если планета-цель находится на границе максимальной

достижимой области.

Достижимая область представляет собой тело вращения относительно оси $N-N$, проходящей через притягивающий центр S перпендикулярно плоскости исходной круговой орбиты (рис. 5.3.1). Поэтому достаточно определить сечение достижимой области секущей плоскостью P , проходящей через ось вращения $N-N$.

Основной особенностью предлагаемого метода является то, что он позволяет отделить за-

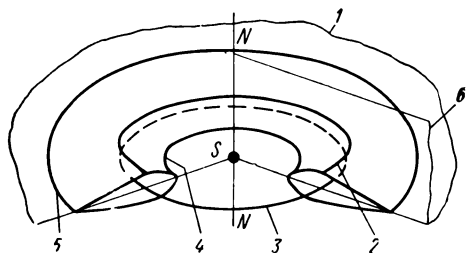


Рис. 5.3.1. Достижимая область и ее сечение:

1—плоскость исходной круговой орбиты; 2—линия максимального отклонения от плоскости исходной круговой орбиты; 3—исходная круговая орбита; 4—линия минимального удаления от притягивающего центра; 5—линия максимального удаления от притягивающего центра; 6—секущая плоскость P

дачу определения оптимальных дат старта от задачи определения геометрических и кинематических характеристик оптимальных траекторий. Кроме того, этим методом дискретный процесс изменения характеристик по циклам полетов можно свести к периодическому непрерывному. Вместо обычно применяемых графических или численных методов поиска экстремума он сводит задачу к получению решения уравнения огибающей семейства траекторий в плоскости P . Для некоторых случаев возможно получение аналитического решения этого уравнения. Это существенно снижает трудоемкость расчета характеристик оптимальных траекторий и позволяет выявить достаточно сложную картину изменения этих характеристик по циклам полетов.

В дальнейшем приняты следующие допущения.

1. Орбита Земли вследствие малости ее эксцентриситета принята круговой.

2. Элементы орбит планет в ближайшие 20—30 лет вследствие вековых возмущений не претерпевают существенных изменений и в расчетах приняты постоянными.

3. Сферы действия планет, как это принято в задачах приближенных расчетов межпланетных траекторий, считаются точечными.

4. Скорость при старте с орбиты изменяется импульсно.

Определение контура сечения достижимой области

Космическому аппарату, находящемуся на орбите ИСЗ, сообщается импульс скорости $\Delta V_{\text{ст}}^{\oplus}$, обеспечивающий необходимую скорость на выходе из сферы действия Земли $V_{\infty}^{\oplus}$. Гелиоцентрическая скорость КА

$$\bar{V} = \bar{V}_{\text{кр}}^{\oplus} + \bar{V}_{\infty}^{\oplus},$$

где $\bar{V}_{\text{кр}}^{\oplus}$ — скорость движения Земли по круговой орбите.

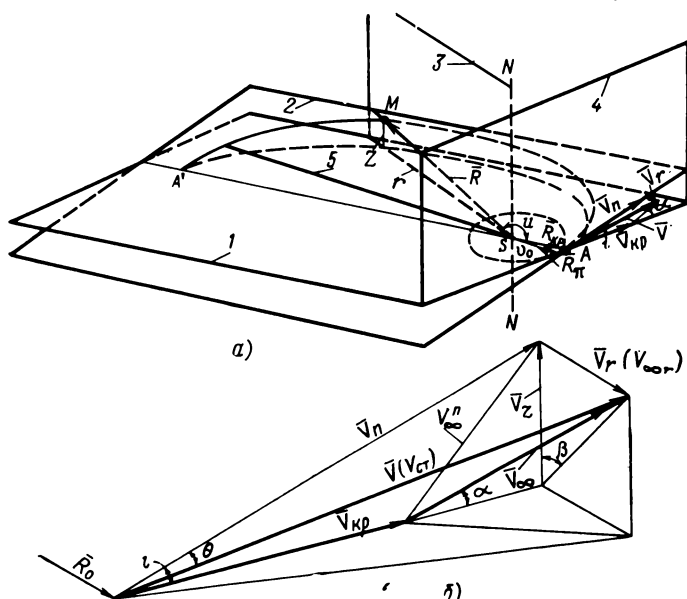


Рис. 5.3.2. Схема траектории перелета:

a—взаимное расположение основных плоскостей; *б*—треугольник стартовых скоростей;
1—плоскость орбиты Земли; 2—плоскость орбиты перелета; 3—секущая плоскость *P*; 4—касательная плоскость ($\perp \bar{R}_0$); 5—линия апсид

Оптимальное положение вектора $\bar{V}_{\infty}^{\oplus}$ в пространстве определяется двумя углами (рис. 5.3.2) α и β . Рассмотрим частный случай, когда треугольник скоростей лежит в плоскости, касательной к орбите Земли ($\beta=0$, $\theta=0$ и $v_0=0$). В этом случае положение вектора в пространстве определяется одним углом α . Этот случай («касательный старт») дает решения, близкие к оптимальным, для основных характеристик траекторий полета.

Определение контура сечения достижимой области для касательного старта. Рассмотрим гелиоцентрическую траекторию (см. рис. 5.3.2), по которой движется КЛА.

Плоскость P сечения достижимой области проходит через притягивающий центр перпендикулярно плоскости эклиптики и вращается относительно оси $N-N$. При фиксированном значении модуля вектора $|\vec{V}_\infty^\oplus|$ и направлении α вектора $\vec{V}_\infty^\oplus$ в плоскости P при ее вращении относительно оси $N-N$ остается

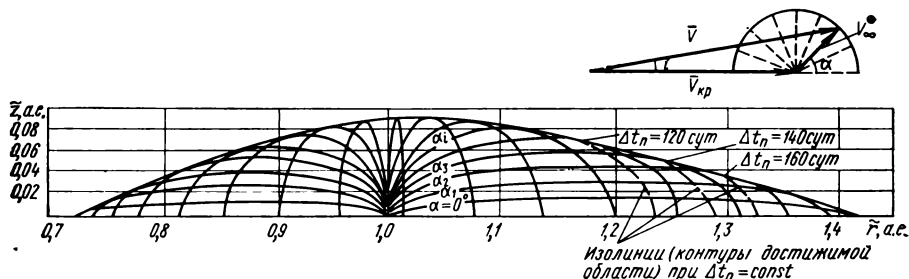


Рис. 5.3.3а. Контур сечения достижимой области для касательного старта при $V_\infty^\oplus = 2,5$ км/с

след траектории полета КЛА. Построим огибающую следов траекторий при различных α , изменяющихся в интервале $0-180^\circ$ (рис. 5.3.3а). Эта огибающая и будет максимальным контуром сечения достижимой области или изолинией скорости $V_\infty^\oplus = \text{const}$. Гелиоцентрическая скорость КА в момент старта

$$V^2 = (V_{\text{кр}}^\oplus)^2 + 2V_{\text{кр}}^\oplus V_\infty^\oplus \cos \alpha + (V_\infty^\oplus)^2. \quad (5.3.1)$$

Расстояние R от притягивающего центра S до точки M на траектории

$$R = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (5.3.2)$$

где p — параметр, $e = \frac{p}{R_{\text{кр}}} - 1$ — эксцентриситет траектории;
 v — истинная аномалия.

Расстояние точки M от плоскости эклиптики z (см. рис. 5.3.2)

$$z = R \sin v \sin i, \quad (5.3.3)$$

где i — наклонение траектории к плоскости эклиптики, и

$$\sin i = \frac{V_\infty^\oplus \sin \alpha}{V}. \quad (5.3.4)$$

Очевидно, z при $\alpha > 0$ будет иметь как положительные (при $v < 180^\circ$), так и отрицательные (при $v > 180^\circ$) значения. Это бу-

дет соответствовать полету по первому и второму полувиткам траектории перелета. Если z и α имеют одноименные знаки, то полет происходит по 1-му полувитку, если разноименные — по 2-му.

Исключив из (5.3.2) и (5.3.3) величину v , после преобразований получим уравнение семейства следов траекторий в плоскости P :

$$\frac{\left(\frac{P}{R}-1\right)^2}{\left(\frac{P}{R_{кр}}-1\right)^2} + \frac{z^2 V^2}{R^2 (V_{\infty}^{\oplus})^2 \sin^2 \alpha} = 1. \quad (5.3.5)$$

Перейдем к относительным величинам:

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_{кр}^{\oplus}}; \quad \tilde{V}_{\infty} = \frac{V_{\infty}^{\oplus}}{V_{кр}^{\oplus}}; \quad \tilde{q} = \frac{R}{R_{кр}}; \quad \tilde{\zeta} = \frac{z}{R_{кр}}. \quad (5.3.6)$$

Уравнение (5.3.5) после некоторых преобразований можно представить в виде

$$(1 - \gamma^2)(1 - \tilde{q})[(1 + \tilde{q})(1 + \tilde{V}_{\infty}^2 + 2\tilde{V}_{\infty}\gamma) - 2\tilde{q}] + \tilde{\zeta}^2(\tilde{V}_{\infty} + 2\gamma)^2 = 0, \quad (5.3.7)$$

где $\gamma = \cos \alpha$.

Это уравнение при фиксированном $\tilde{V}_{\infty}$ определяет однопараметрическое (параметр α) семейство кривых, каждая из которых является следом на плоскости P некоторой траектории полета космического аппарата.

Продифференцировав (5.3.7) по параметру γ , получим

$$\tilde{V}_{\infty}(1 - \gamma^2)(1 - \tilde{q})(1 + \tilde{q}) - \gamma(1 - \tilde{q})[(1 + \tilde{q})(1 + 2\tilde{V}_{\infty}\gamma + \tilde{V}_{\infty}^2) - 2\tilde{q}] + 2\tilde{\zeta}^2(\tilde{V}_{\infty} + 2\gamma) = 0. \quad (5.3.8)$$

Решая систему уравнений (5.3.7) и (5.3.8), получим следующие формулы для определения огибающей:

$$\tilde{q} = \frac{2 + \tilde{V}_{\infty}\gamma + \tilde{V}_{\infty}(\tilde{V}_{\infty} + 2\gamma)(1 + \tilde{V}_{\infty}\gamma + \gamma^2)}{2 + \tilde{V}_{\infty}\gamma - \tilde{V}_{\infty}(\tilde{V}_{\infty} + 2\gamma)(1 + \tilde{V}_{\infty}\gamma + \gamma^2)}; \quad (5.3.9)$$

$$\tilde{\zeta} = \frac{\pm 2\tilde{V}_{\infty}(-\gamma^2)\sqrt{1 + \tilde{V}_{\infty}\gamma + \gamma^2}}{2 + \tilde{V}_{\infty}\gamma - \tilde{V}_{\infty}(\tilde{V}_{\infty} + 2\gamma)(1 + \tilde{V}_{\infty}\gamma + \gamma^2)}. \quad (5.3.10)$$

Определение контура достижимой области для двупараметрической задачи (пространственный старт). Пусть вектор скорости на выходе из сферы действия Земли произвольно ориентирован в пространстве, и его положение определяется двумя углами α и β (рис. 5.3.2, б). Величина стартовой гелиоцентрической ско-

рости при таком выборе параметров является функцией α и не зависит от β :

$$V^2 = (V_{кр}^\oplus)^2 + 2V_{кр}^\oplus V_\infty^\oplus \cos \alpha + (V_\infty^\oplus)^2.$$

Компоненты стартовой скорости — составляющая скорости по нормали к радиусу-вектору в точке старта, лежащая в плоскости траектории полета

$$V_n^2 = (V_{кр}^\oplus + V_\infty^\oplus \cos \alpha)^2 + (V_\infty^\oplus)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta;$$

— радиальная составляющая

$$V_r = V_\infty^\oplus \sin \alpha \sin \beta;$$

— проекция стартовой скорости на плоскость, перпендикулярную вектору круговой скорости

$$V_z = V_\infty^\oplus \sin \alpha \cos \beta.$$

Расстояние от притягивающего центра определится из выражения:

$$R = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)}, \quad (5.3.11)$$

где ω — аргумент перицентра.

Отклонение от плоскости эклиптики

$$z = R \sin i \sin u, \quad (5.3.12)$$

где

$$\sin i = \frac{V_z}{V_n}. \quad (5.3.13)$$

Перейдем к относительным величинам по (5.3.6). Подставив (5.3.13) в (5.3.12), получим

$$\sin u = \frac{\tilde{\zeta} \tilde{V}_n}{\tilde{q} \tilde{V}_z}. \quad (5.3.14)$$

Исключив из (5.3.14) и (5.3.11) величину θ , после преобразования получим

$$V_n^2 (1 + \tilde{\zeta} \operatorname{tg} \beta - \tilde{q}) [V_n^2 (1 + \tilde{\zeta} \operatorname{tg} \beta + \tilde{q}) - 2\tilde{q}] + \tilde{\zeta}^2 (\tilde{V}_n^2 - 1) = 0, \quad (5.3.15)$$

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{V}_z}.$$

Полученное соотношение при фиксированном $\tilde{V}_\infty$ определяет двупараметрическое семейство кривых, каждая из которых является следом некоторой траектории полета КА на плоскости P .

Огибающая двухпараметрического семейства определится из системы типа

$$\left. \begin{aligned} F(\tilde{q}, \tilde{\zeta}, \alpha, \beta) &= 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\tilde{q}, \tilde{\zeta}, \alpha, \beta) &= 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \beta}(\tilde{q}, \tilde{\zeta}, \alpha, \beta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.16)$$

Для первых двух уравнений этой системы (5.3.16) можно получить аналитическое решение в виде

$$\tilde{q} = \frac{AK}{2B - A}; \quad (5.3.17)$$

$$\tilde{\zeta} = \frac{-L \operatorname{tg} \beta \pm \sqrt{L^2 - LM}}{L \operatorname{tg} \beta + M}, \quad (5.3.18)$$

где $A = (\tilde{V}_n^2 - 1)(\tilde{V}_z^2 \tilde{V}_n' + \tilde{V}_n^2 \tilde{V}_z') - 2\tilde{V}_n^2 \tilde{V}_z^2 \tilde{V}_n'$;

$$B = (\tilde{V}_n^2 - 1)\tilde{V}_n' - 2\tilde{V}_z^2 \tilde{V}_n';$$

$$\tilde{V}_n' = \frac{\partial \tilde{V}_n}{\partial \alpha}; \quad \tilde{V}_z' = \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial \alpha};$$

$$L = \tilde{V}_z^2 \tilde{V}_n^2 (1 + K); \quad M = (\tilde{V}_n^2 - 1); \quad K = 1 + \tilde{\zeta} \operatorname{tg} \beta.$$

Однако для полной системы (5.3.16) не удалось получить достаточно простого аналитического решения, и поэтому для построения огибающей двухпараметрического семейства кривых был разработан алгоритм для ЭЦВМ с использованием аналитического решения системы первых двух уравнений (5.3.17) (5.3.18).

Двухпараметрическая огибающая дает несколько большую достижимую область, чем для касательного старта (см. рис. 5.3.3 б). Угол β обращается в нуль в трех точках: при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180^\circ$ (соответствует внешнему и внутреннему хома-

новскому переходам) и $\alpha_3 = 2 \arcsin \frac{V_\infty^\oplus}{2V_{кр}^\oplus}$ (соответствует макси-

альному повороту плоскости стартовой круговой орбиты). Значение α_3 разделяет области внешних и внутренних перелетов.

По изложенной выше методике, изменяя значение модуля вектора скорости на выходе из сферы действия Земли $V_\infty^\oplus$, можно построить поле сечений достижимых областей. Такое поле для диапазона координат $\tilde{r}$ и $\tilde{z}$, соответствующих полетам к Меркурию, Венере и Марсу, приведено на рис. 5.3.4, а к Юпитеру, Сатурну, Урану и Нептуну — на рис. 5.3.5. На эти поля нанесены изолинии времени полета Δt_n и линии положения планет — следы орбит планет на плоскости P .

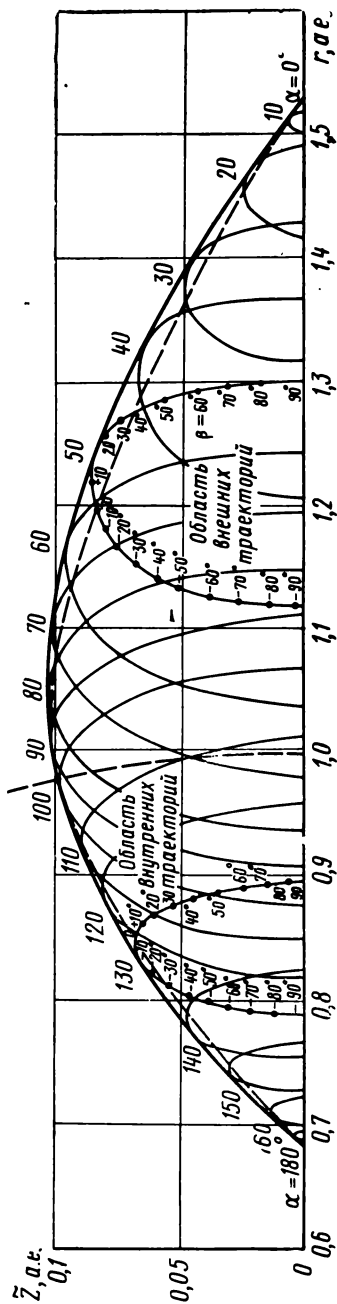


Рис. 5.3.36. Контур сечения достижимой области для пространственного старта при $V_\infty = 0.1$:

α°	180	170	160	150	140	130	120	110	100	92°51'	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
β°_{opt}	0	-8,5	-18,3	-17,5	-15,6	-13,7	-10,6	-7,4	-3	0	0,75	5,7	11,1	14,5	17,5	19,7	21	22,2	22,25	0

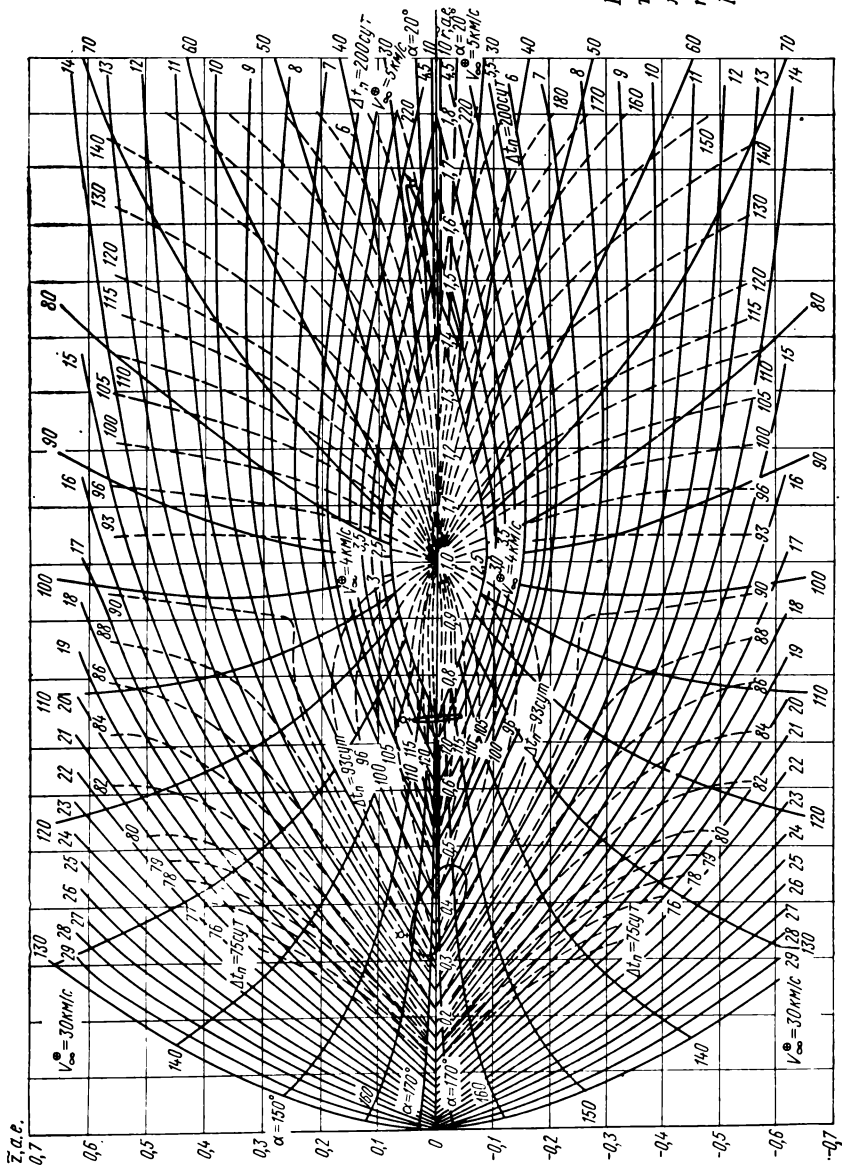


Рис. 5.3.4. Контуры достижимых областей при полетах к Меркурию, Венере и Марсу

Следы проекций орбит планет на плоскости P представляют замкнутые кривые, соответствующие всевозможным положениям планет за их звездный период обращения. При заданном положении планеты в момент прилета с таких полей изолиний можно определить характеристики оптимальных траекторий. Рассматривая все положения планеты на ее орбите, получим все возможные значения характеристик траекторий.

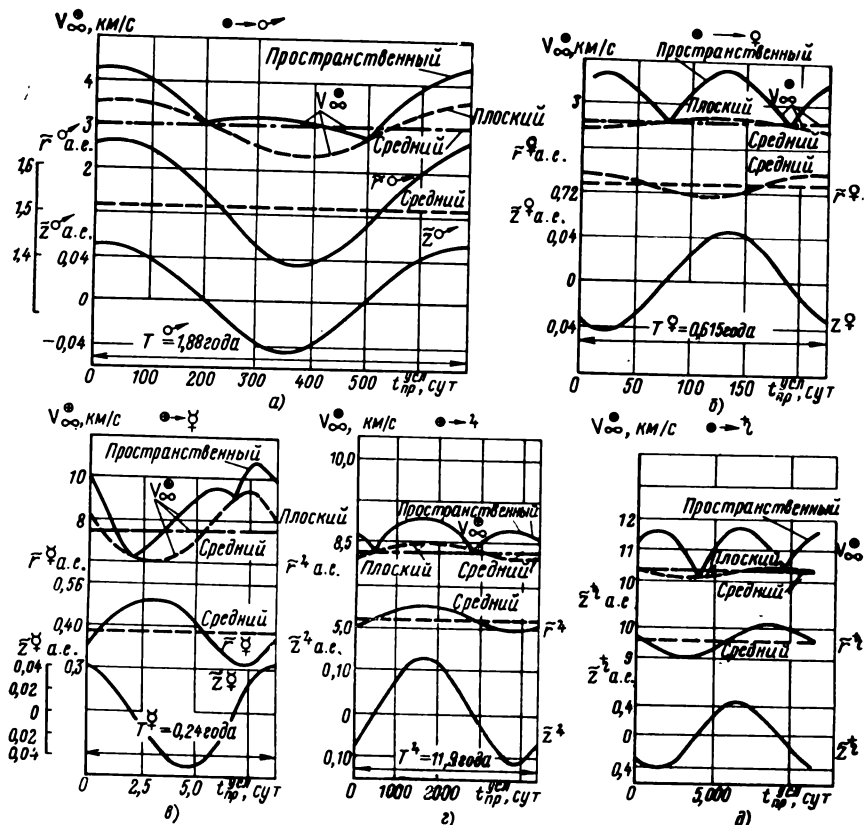


Рис. 5.3.6. Скорость на выходе из сферы действия Земли, необходимая для полета к различным планетам, — плоские и пространственные перелеты

На рис. 5.3.6 показано изменение скорости на выходе из сферы действия Земли $V_{\infty}^{(\cdot)\oplus}$ в зависимости от положения планеты на орбите. Это положение характеризует зависимость условной даты прилета $t_{пр}^{усл}$ от следующих величин:

- радиуса $\tilde{r}$ проекции орбиты планеты на плоскость эклиптики;
- расстояния $\tilde{z}$ планеты от этой плоскости.

Видно, что отклонение $V_{\infty}^{\oplus}$ от средних значений (плоские круговые орбиты планет) коррелирует с отклонением радиуса $\tilde{r}^{пл}$ от среднего значения и изменением модуля $\tilde{z}$. Увеличение радиуса $\tilde{r}^{пл}$ планеты требует увеличения энергозатрат ($V_{\infty}^{\oplus}$). «Выход» планеты из плоскости эклиптики также требует увеличения энергозатрат. Наиболее сильно влияние эллиптичности и некомпланарности проявляется для Меркурия. Для Марса влияние обоих факторов примерно одинаково. Для других планет наиболее сильно проявляется влияние некомпланарности их орбит. Это показывает, что учет некомпланарности орбит планет является существенным фактором при выявлении динамики изменения характеристик по циклам полетов.

Определение характеристик траекторий полета от условных дат старта

Полученные выше выражения для определения контура сечения достижимой области (огигающей следов траекторий) позволяют определить основные характеристики траекторий полета. Пространственная задача сводится к задаче на плоскости P : через заданную точку пространства, определяемую координатами $\tilde{r}$ и $\tilde{z}$, провести сечение максимальной достижимой области. Для этого необходимо подобрать значения параметров α_{opt} и β_{opt} , определяющих траекторию минимальной энергии, которая в заданной точке будет касаться контура сечения максимальной достижимой области.

Для определения $V_{\infty}^{\oplus}$ и α для случая касательного старта используем решение относительно $\tilde{V}_{\infty}$ и γ уравнений огигающей (5.3.9) и (5.3.10) в безразмерном виде. Решение этих уравнений относительно $\tilde{V}_{\infty}$ может быть получено аналитически:

$$\tilde{V}_{\infty} = \frac{4\tilde{V}_{\infty}^2 \gamma [\tilde{V}_{\infty}^2 (\tilde{q} - 1)^2 - (\tilde{q}^2 - 1)]}{\tilde{\zeta}^2 (\tilde{q}^2 - 1) (3 - \gamma^2) - (\tilde{q}^2 - 1)^2 (1 - \gamma^2)^2 - 2\tilde{\zeta}^4}. \quad (5.3.19)$$

Подставив значение $\tilde{V}_{\infty}$ в уравнение (5.3.8), получим уравнение шестой степени относительно γ . Был составлен алгоритм определения $\tilde{V}_{\infty}$ и γ на ЭЦВМ из уравнений (5.3.9)–(5.3.10), используя который можно определить значения $V_{\infty}^{\oplus}$ и α для любого положения планеты при полете по траектории минимальной энергии. Эти значения $V_{\infty}^{\oplus}$ и α использовались как нулевое приближение для расчета траектории пространственного старта при решении системы (5.3.16).

Задавая положение планеты на орбите в течение звездного периода обращения планеты, можно определить характеристики траекторий минимальной энергии при полете по 1 и 2-му полувиткам. Эти характеристики могут быть представлены в виде непрерывных кривых от условных дат старта следующим обра-

зом. Задается «нулевая» дата прилета на планету (0.01.1965 г.), от которой отсчитываются условные даты прилета $t_{\text{пр}}^{\text{усл}}$. Условная дата старта

$$t_{\text{ст}}^{\text{усл}} = t_{\text{пр}}^{\text{усл}} - \Delta t_{\text{п}},$$

где время полета по 1-му полувитку

$$\Delta t_{\text{п}_1} = \frac{a \sqrt{a}}{2\pi} \left[E - \left(1 - \frac{1}{a} \right) \sin E \right],$$

где $a = \frac{1}{2 - \tilde{v}^2}$ — большая полуось траектории полета;

$\tilde{v}$ — безразмерная скорость старта.

Время полета по 2-му полувитку

$$\Delta t_{\text{п}_2} = \frac{a \sqrt{a}}{2\pi} - \Delta t_{\text{п}_1}.$$

Для отрицательных значений $t_{\text{ст}}^{\text{усл}}$ прибавляется звездный период $T^{\text{пл}}$ планеты. Изменяя условную дату прилета от нуля до величины звездного периода $T^{\text{пл}}$ с нужным интервалом, переберем все возможные положения планеты на орбите и получим все возможные характеристики траекторий минимальной энергии.

По этой методике были получены характеристики траекторий минимальной энергии при касательном ($\beta=0$) и пространственном старте (β_{opt}), приведенные на рис. 5.3.7—5.3.10.

Величины $V_{\infty}^{\oplus}$ и $\Delta t_{\text{п}}$ для оптимальных траекторий пространственного старта (скорость на выходе из сферы действия Земли $V_{\infty}^{\oplus}$ и время полета $\Delta t_{\text{п}}$) мало отличаются от таковых для траекторий касательного старта.

Вектор относительной скорости (скорости входа в сферу действия планеты)

$$\bar{V}_{\alpha \text{ вх}} = \bar{V}_{\text{пл}} - \bar{V}_{\text{ка}}.$$

Модули скорости входа в сферу действия планеты назначения $V_{\infty}^{\text{пл}}$ представлены на рис. 5.3.7—5.3.10. Различие между кривыми $V_{\infty}^{\text{пл}}$ для касательного и пространственного старта существенно. Поэтому значения $V_{\infty}^{\text{пл}}$ необходимо определять по более точной расчетной схеме пространственного старта с орбиты Земли.

На рис. 5.3.7—5.3.10 точками нанесены значения характеристик траекторий, определенных оптимизацией их на полях изолиний $V_{\infty}^{\oplus*}$. Хорошо ложатся на кривые точки значений $V_{\infty}^{\oplus}$

* Расчет на ЭЦВМ траекторий по методу Ламберта — Эйлера (см. § 1 гл. II) с оптимизацией по параметрам $t_{\text{ст}}^{(\oplus)}$ и $\Delta t_{\text{п}}$.

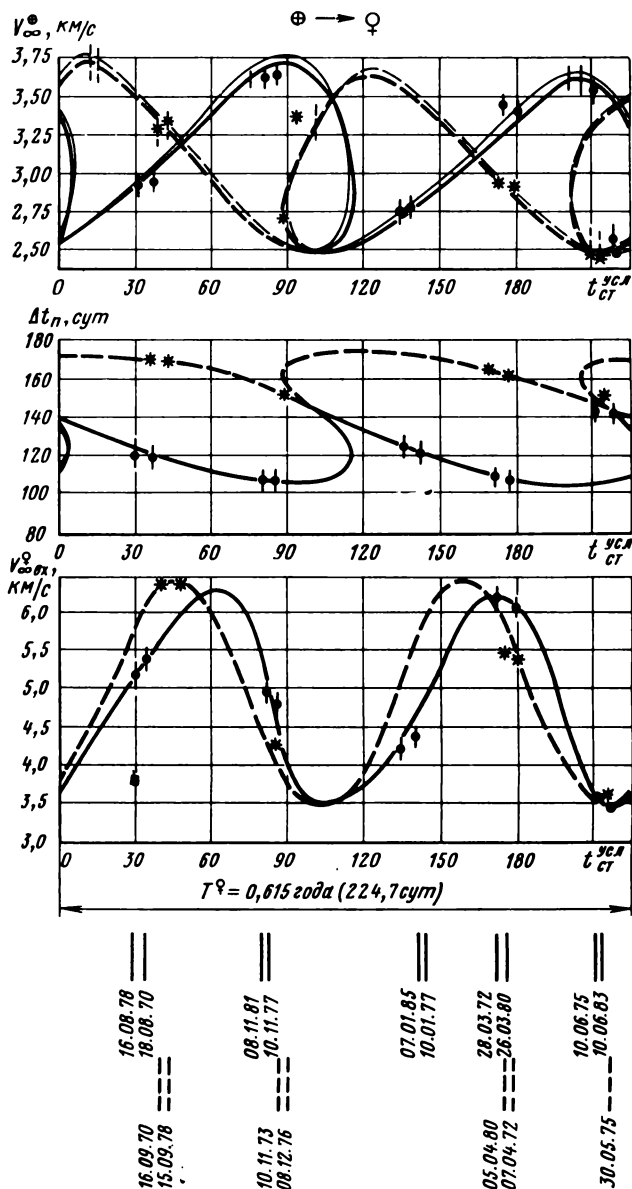


Рис. 5.3.7. Динамика изменения характеристик оптимальных траекторий полета к Венере:

$T_{\text{в.л}} = 8 \text{ лет}$; $i = 3^\circ 23' 40''$; $a = 0,7233$; $e = 0,00685$; $T_c = 1,599 \text{ года}$.

● × — точки, рассчитанные по методу Ламберта—Эйлера с оптимизацией по $t_{\text{ст}}^{\text{т}}$ и Δt_n ;
 — — 1-й полувиток, $\beta = 0$, касательный старт, — — 2-й полувиток, $\beta = 0$, касательный старт;
 — — 1-й полувиток, $\beta = \beta_{\text{opt}}$, пространственный старт; — — 2-й полувиток, $\beta = \beta_{\text{opt}}$, пространственный старт

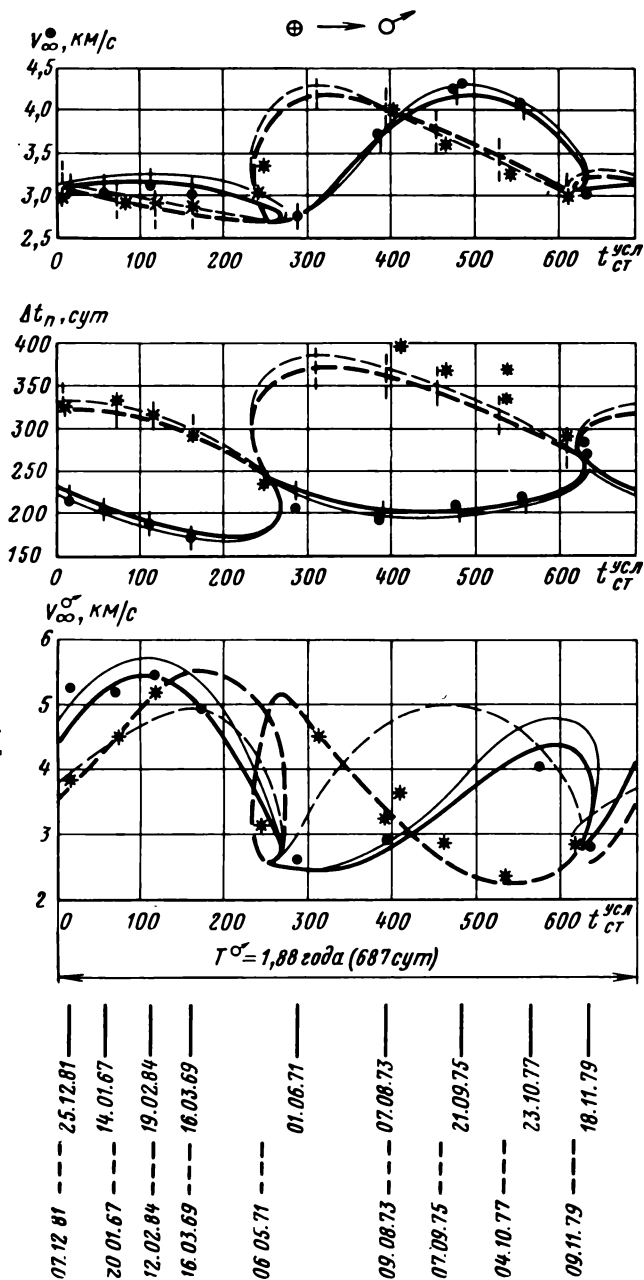


Рис. 5.3.8. Динамика изменения характеристик оптимальных траекторий полета к Марсу:

$T_{\text{в.п}} = 15,83 \text{ года}$; $a = 1,5327 \text{ а. е.}$; $e = 0,0934$; $i = 1^{\circ}51'03''$; $T_c = 2,135 \text{ года}$

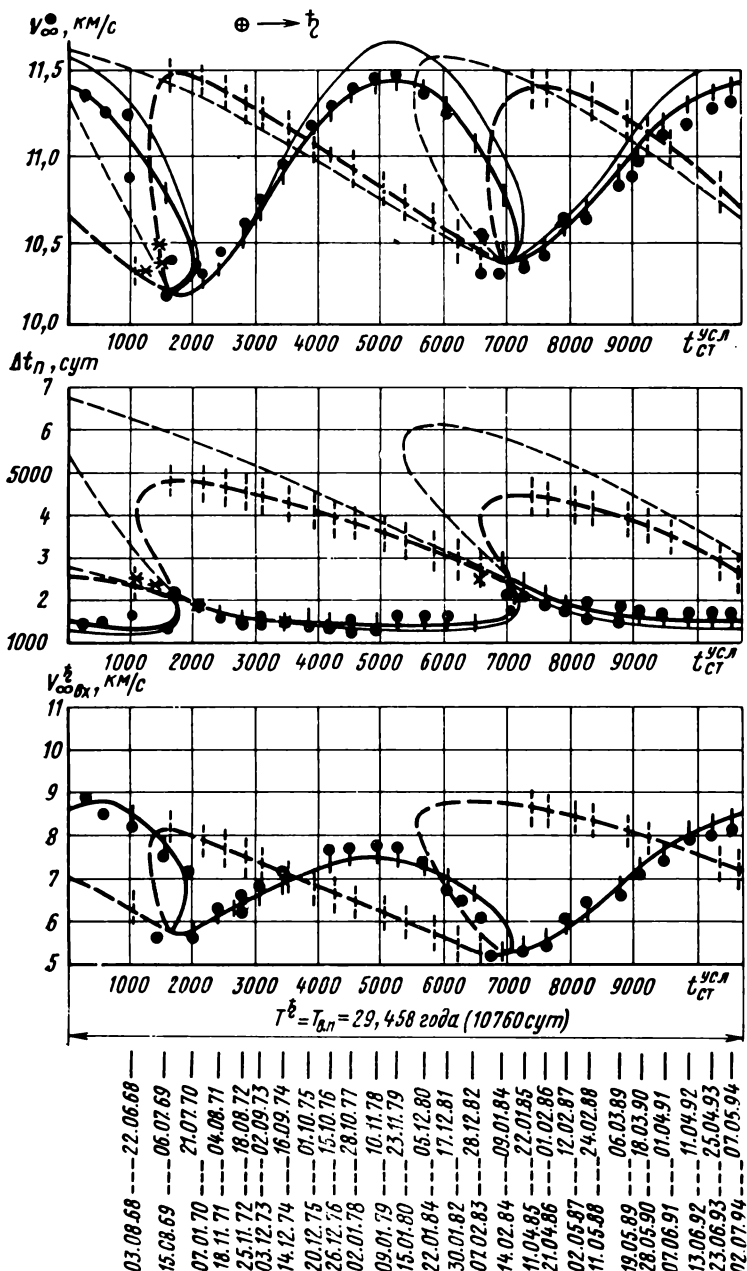


Рис. 5.3.10. Динамика изменения характеристик оптимальных траекторий полета к Сатурну:

$i=2^{\circ}29'19''$; $a=9,545 \text{ а. е.}$; $e=0,0552$; $T_c=1,065 \text{ года}$

(критерий оптимизации). Точки значений $\Delta t_{\text{п}}$ и $V_{\infty \text{вх}}$ имеют заметный разброс, так как их точное определение на полях изолиний из-за пологости минимума $V_{\infty}^{\oplus}$ затруднительно.

По этим характеристикам также можно проследить изменение энергозатрат при учете эллиптичности и некомпланарности орбит планет.

Определение дат старта (задача фазирования)

По методике, изложенной выше, определялись геометрические параметры траектории $R_{\text{КА}}$ и $e_{\text{КА}}$ и наклонение траектории к плоскости эклиптики $i_{\text{КА}}$. Долгота восходящего узла траектории КА совпадет с точкой старта

$$\Omega_{\text{КА}} = \lambda_{\text{пл}}^{\text{пр}} - \Delta\lambda_{\text{п}},$$

где $\lambda_{\text{пл}}^{\text{пр}}$ — гелиоцентрическая долгота планеты в момент прилета КА;

$\Delta\lambda_{\text{п}}$ — проекция угла перелета на плоскость эклиптики.

Гелиоцентрическая долгота планеты назначения

$$\lambda_{\text{пр}}^{\text{пл}} = \Omega_{\text{пл}} + \text{Arc tg} [\text{tg} (\omega_{\text{пл}} + v_{\text{пр}}^{\text{пл}}) \cos i_{\text{пл}}] = \lambda_{\text{пр}}^{\text{пл}} (t_{\text{пр}}^{\text{пл}}),$$

где $\Omega_{\text{пл}}$ — долгота узла планеты; $\omega_{\text{пл}}$ — аргумент широты перигелия планеты.

Земля в момент старта занимает положение, характеризующееся гелиоцентрической долготой

$$\lambda_{\text{ст}}^{\oplus} = \lambda_0^{\oplus} + n^{\oplus} t_{\text{ст}}^{\oplus} = \lambda_{\text{ст}}^{\oplus} (t_{\text{ст}}^{\oplus}),$$

где $\lambda_0^{\oplus}$ — гелиоцентрическая долгота Земли в начальный момент времени;

$n^{\oplus}$ — суточное движение Земли.

Разность гелиоцентрических долгот планеты в момент прилета и Земли в момент старта КА равна $\lambda_{\text{пр}}^{\text{пл}} - \lambda_{\text{ст}}^{\oplus} = \Delta\lambda$.

В момент прилета к планете назначения проекция угла перелета КА на плоскость эклиптики $\gamma_{\text{КА}}$ и разность гелиоцентрических долгот планеты в момент прилета и Земли в момент старта должны быть

$$\Delta\lambda_{\text{п}} = \Delta\lambda. \quad (5.3.20)$$

Зная в этот момент дату прилета и время полета, определяем дату старта КА с Земли:

$$t_{\text{ст}} = t_{\text{пр}} - \Delta t_{\text{п}}.$$

Поэтому процесс отыскания дат старта при полете по оптимальным траекториям сводится к перебору времени прилета в задан-

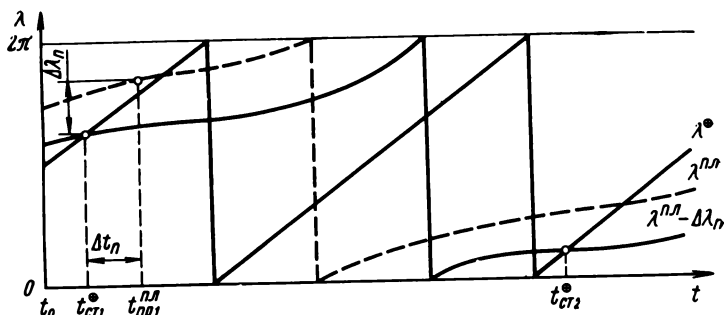


Рис. 5.3.11. Схема определения корней уравнения синхронизации

ном диапазоне и отысканию корней уравнения синхронизации (5.3.20) (рис. 5.3.11).

На рис. 5.3.7—5.3.10 рисками нанесены даты старта с Земли $t_{ст}^{\oplus}$, определенные из решения уравнений синхронизации.

Изменение характеристик оптимальных траекторий для различных циклов полета

Известно, что циклы полетов КА к планетам по траекториям минимальных энергий лежат в области дат старта с Земли, близких к таковым при полете по траекториям Хомана для случая плоских круговых орбит планет. Для этих траекторий циклы полетов наступают через время T_c — синодический период обращения планеты относительно Земли, $\frac{1}{T_c} = \left| \frac{1}{T^{\oplus}} - \frac{1}{T^{пл}} \right|$.

Для реальных (эллиптических и некомпланарных) орбит планет в эти циклы планета—цель занимает различные положения на своей орбите. Однако эти положения будут приблизительно повторяться через период $T_{в.п}$ — период великих противостояний планеты*. Следовательно, и характеристики оптимальных траекторий полета будут также приблизительно повторяться через $T_{в.п}$ при старте из произвольного положения на орбите Земли.

Изложенная выше методика позволяет определить динамику изменения характеристик траекторий минимальных энергий для различных циклов полетов. На рис. 5.3.7—5.3.10 содержится информация о характеристиках оптимальных траекторий к планетам для любых циклов полетов. Каждой точке этих кривых будет соответствовать (или соответствовал) определенный цикл

* $T_{в.п} \approx k_1 T^{\oplus} \approx k_2 T^{пл} \approx |k_2 - k_1| T_c$ — приближенное общее наименьшее кратное $T^{\oplus}$, $T^{пл}$ и T_c (см. § 1 гл. IX).

реальных полетов, поэтому эти кривые можно рассматривать как непрерывные зависимости. Эти зависимости носят достаточно сложный характер, который вряд ли можно было бы выявить, рассчитывая по существующим методам оптимизации траекторий отдельные дискретные значения характеристик даже для достаточно большого числа циклов полетов. Видно, что для некоторых циклов значения характеристик неоднозначны, что находит отражение на полях изолиний $V_{\infty}^{\oplus}$ в координатах $t_{\text{ст}}^{\oplus}$ и $\Delta t_{\text{п}}$ (области с несколькими локальными минимумами $V_{\infty}^{\oplus}$). Точки характеристик на стыке кривых траекторий 1-го и 2-го полуитков соответствуют полету по траекториям в плоскости эклиптики в точку, когда планета — цель находится в узле своей орбиты.

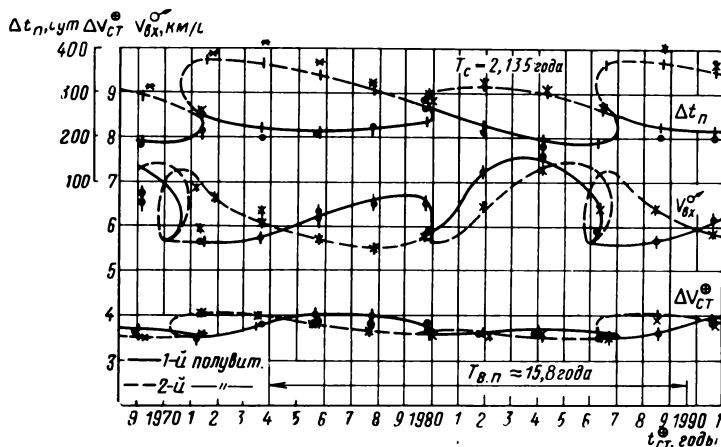


Рис. 5.3.12. Характеристики оптимальных траекторий полета к Марсу

Однако для практических целей удобно представлять зависимость характеристик оптимальных траекторий не от условных, а от реальных дат старта $t_{\text{ст}}^{\oplus*}$. На рис. 5.3.12—5.3.15 приведены такие зависимости для полетов к Марсу, Юпитеру, Венере и Меркурию, условно представленные в виде непрерывных кривых с рисками, отмечающими реальные даты старта с Земли.

На рис. 5.3.12 представлены характеристики оптимальных траекторий полета к Марсу:

$\Delta V_{\text{ст}}^{\oplus}$ — скорость, необходимая для старта с круговой орбиты ИСЗ ($h_{\text{кр}} \approx 200$ км);

$\Delta t_{\text{п}}$ — время полета;

$V_{\text{вх}}^{\sigma}$ — скорость входа КЛА в атмосферу планеты.

Зависимости этих характеристик имеют период, равный периоду великих противостояний $T_{\text{в.п}} \approx 15,8$ года. Циклы полетов к

* Выборка соответствующих характеристик с периодом, примерно равным $T_{\text{с}}$, из периодических зависимостей этих характеристик с периодом $T_{\text{п.л.}}$.

Марсу чередуются примерно через синодический период $T_c = 2,135$ года. Точками нанесены значения соответствующих характеристик, рассчитанные по оптимизации на полях изолиний.

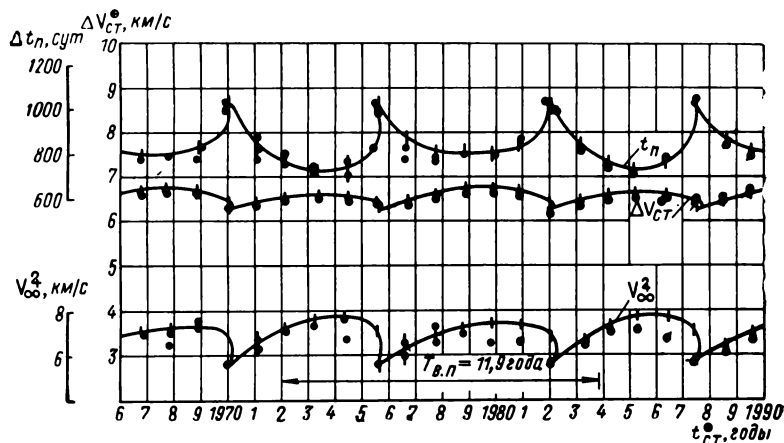


Рис. 5.3.13. Характеристики оптимальных траекторий полета к Юпитеру (1-й полувиток)

В районе минимальных энергозатрат полета (скорость старта $\Delta V_{ст}^{\oplus}$) лежат циклы полетов 1971, 1979 и 1986 гг. по траекториям 1-го полувитка. Циклы полетов к Марсу в 70-х годах соответст-

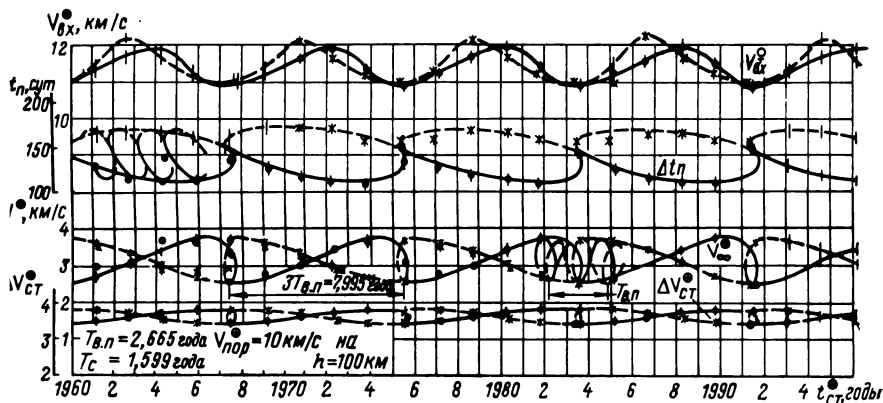


Рис. 5.3.14. Характеристики оптимальных траекторий полета к Венере

вуют наибольшему изменению оптимальных характеристик. Наибольшие значения $\Delta V_{ст}^{\oplus}$ приходятся на циклы полетов 1975 и 1977 гг. по траекториям 1-го полувитка. Увеличение $V_{ст}^{\oplus}$ по сравнению с «лучшим» циклом 1971 г. составляет около 500—1000 м/с. В эти «плохие» циклы полетов по траекториям 1-го полувитка возможен переход на более экономичные для этих цик-

лов полетов траектории 2-го полувитка. Но, как видно из рис. 5.3.16, это приведет к увеличению времени полета с $\Delta t_{\pi} \approx 210 \div 220$ сут до $\Delta t_{\pi} = 300 \div 400$ сут.

Циклы полетов к Марсу в 80-х годах, так же как и прошедшие циклы полетов в 60-х годах, более стабильны в отношении изменения энергозатрат полетов. Для аппаратов, десантируемых на поверхность Марса, важной характеристикой является скорость входа V_{∞}^{σ} в атмосферу планеты *. Наименьшие значения

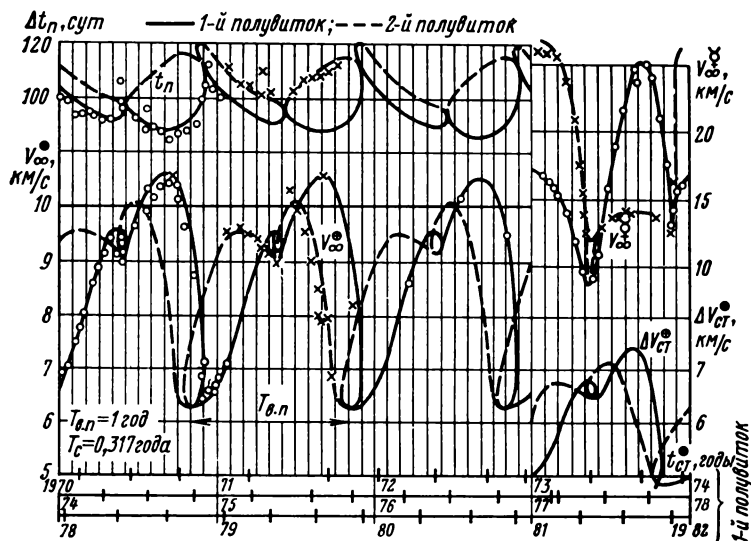


Рис. 5.3.15. Характеристики оптимальных траекторий полета к Меркурию

V_{∞}^{σ} приходится на циклы полетов 1971 и 1973 гг. для траекторий 1-го полувитка. Эти циклы полетов, по-видимому, наиболее благоприятны для создания аппаратов, десантируемых на поверхность Марса.

На рис. 5.3.13 приведены характеристики оптимальных траекторий для полетов к Юпитеру. Период великих противостояний $T_{в.п.}$ этой планеты примерно равен ее звездному периоду ($T_{в.п.} = 11,9$ года). Циклы полетов к Юпитеру чередуются через $T_c \approx 1,09$ года. На первую половину 70-х годов приходятся циклы с меньшим изменением энергозатрат (перепад $\Delta V_{ст}^{\oplus} \approx 300$ м/с между «лучшими» и «худшими» циклами полетов). Лучшими будут циклы полетов в 1970 и 1975 гг. Однако они соответствуют большому времени полета $t_{\pi} = 800 \div 850$ сут (полет почти в узлы орбиты Юпитера). Полет по другим траекториям в эти циклы приводит к повышению $\Delta V_{ст}^{\oplus}$ на 200 м/с, но позволяет сократить

* Определяется через скорость входа в сферу действия планеты V_{∞}^{σ} .

время полета до $\Delta t_{\pi}=720\div 730$ сут. Динамику полетов к Сатурну из-за большого периода противостояний этой планеты ($T_{в.п}\approx T_{пл}\approx 29,5$ года) можно проследить по зависимостям характеристик траектории от условных дат старта (см. рис. 5.3.10).

Наименьшим энергозатратам соответствуют циклы полетов в 1970 и 1985 гг. Наихудшие в этом смысле — циклы, близкие к 1980 г. Однако этим циклам соответствует наименьшее значение времени полета $\Delta t_{\pi}=1300$ сут по сравнению с «лучшими» циклами, где $\Delta t_{\pi}=1600\div 1800$ сут. Энергозатраты для полетов к Сатурну существенно больше (диапазон $\Delta V_{ст}^{\oplus}=7,2\div 8$ км/с), чем для полетов к Юпитеру.

Динамика изменения характеристик траекторий полетов к Венере показана на рис. 5.3.14. Великие противостояния этой планеты происходят через $T_{в.п}\approx 8$ лет (см. § 1 гл. IX). Синодический период $T_c=1,598$ года. Диапазон изменения $\Delta V_{ст}^{\oplus}$ для различных циклов полетов составляет примерно 400 м/с. Наилучшими по энергозатратам были циклы полетов в 1967—1969 гг. (траектория 1-го полувитка) и будут в 1975—1977 гг. Скорость входа в атмосферу Венеры изменяется в пределах $V_{вх}^{\sigma}=10,9\div 12,2$ км/с.

Оптимальные циклы полетов к Меркурию приходятся 3 раза в год ($T_c=0,317$ года). Период великих соединений этой планеты мал — $T_{в.п}\approx 1$ год. Динамика изменения характеристик носит быстропеременный и сложный характер (см. рис. 5.3.15). Энергозатраты при полетах к Меркурию существенно больше (диапазон изменения $\Delta V_{ст}^{\oplus}=4,9\div 7,5$ км/с), чем к Венере. Практически каждый год среди оптимальных траекторий 1-го или 2-го полувитков можно найти траекторию с энергозатратами, близкими к минимальным ($\Delta V_{ст}^{\oplus}\approx 5$ км/с).

Схема решения задачи определения оптимальных характеристик ускоренных траекторий методом достижимых областей

При полетах по траекториям минимальной энергии время полета по траекториям 1-го полувитка (угол перелета $\bar{L}<180^\circ$) к внешним планетам изменяется в широких пределах и может достигать больших значений. Диапазон оптимального времени полета к этим планетам составляет: к Марсу $\Delta t_{\pi}=190\div 250$ сут, к Юпитеру $\Delta t_{\pi}=700\div 1000$ сут, к Сатурну $\Delta t_{\pi}=1200\div 2500$ сут.

В настоящее время созданы КА с ресурсом работы около 1 года (КА для полетов к Венере и Марсу и спутники связи). Увеличение ресурса работы автоматических КА представляет серьезную конструкторскую проблему. Поэтому отыскание оптимальных по энергозатратам ускоренных траекторий является актуальной задачей.

Оптимизация траекторий методом достижимых областей позволяет получить характеристики оптимальных ускоренных траекторий для всех возможных циклов полетов (в пределах допущения стабильности параметров орбит планет для интервала времени около 20—30 лет).

Задача формулируется следующим образом: при старте с орбиты Земли определить траектории минимальной энергии при полете в любую точку Солнечной системы за время полета, меньшее или равное заданному $\Delta t_{\text{п}} \leq \Delta t_{\text{п. зад.}}$.

Рассмотрен общий случай, когда вектор стартовой скорости не лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости эклиптики и касательной к круговой орбите Земли («пространственный старт»). Оптимизация траекторий на полях изолиний характеристической скорости дает близкие значения характеристик оптимальных траекторий.

Каждой точке следа траектории полета на огибающей контура достижимых областей (рис. 5.3.16) соответствует определенное время полета, определяемое из уравнения Кеплера

$$\Delta t_{\text{п}} = \frac{a \sqrt{a}}{2\pi} [(E - E_0) - e(\sin E - \sin E_0)],$$

где $a = \frac{1}{2 - \tilde{V}^2}$ — большая полуось траектории полета;

$\tilde{V} = \frac{V}{V_{\text{кр}}^{\oplus}}$ — безразмерная гелиоцентрическая скорость старта;

$e = 1 - \frac{1}{a}$ — эксцентриситет траектории полета;

$E = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right)$ — эксцентрическая аномалия;

v — истинная аномалия.

Ограничим достижимую область линиями фиксированного времени полета $\Delta t_{\text{п}}$ при $|V_{\infty}^{\oplus}| = \text{const}$.

Задавая параметры a и v_0 , определим траекторию полета (параметры p , e и a) следующим образом.

Из формулы для $\Delta t_{\text{п}}$, зная величину a и время полета $\Delta t_{\text{п}}$, определим эксцентрическую аномалию E , а следовательно, и истинную аномалию v . После этого по формулам

$$e = \left(\frac{V^2}{\mu/R_{\text{кр}}} - 1 \right), \quad R = \frac{p}{1 + e \cos(v - v_0)}, \quad z = R \sin i \sin(v - v_0),$$

$$\sin i = \frac{V_{\infty}^{\oplus} \sin \alpha \cos \beta^*}{V_n}, \quad r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

определим значения координат r и z в плоскости P .

* β определится через θ (см. рис. 5.3.2, б), зависящую от v_0 .

Перебирая параметры α и v_0 , получим огибающую контура достижимой области при фиксированном времени полета Δt_{π} . Изолинии фиксированного времени Δt_{π} (при $|V_{\infty}^{\oplus}| = \text{const}$) касаются изолиний максимальной достижимой области при свободном времени полета. Таким образом, контур достижимой области при $\Delta t_{\pi} \leq \Delta t_{\text{зад}}$ будет состоять из участка изолинии со свободным временем полета до точки, где $\Delta t_{\pi} = \Delta t_{\text{зад}}$, и изолинии фиксированного времени $\Delta t_{\text{зад}}$ полета.

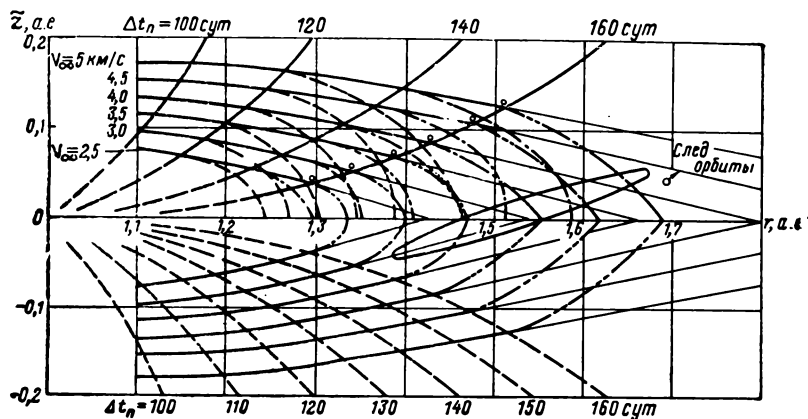


Рис. 5.3.16. Контуры достижимых областей для траекторий с фиксированным временем полета (ускоренные траектории)

Задавая различные значения модуля $|V_{\infty}^{\oplus}| = \text{const}$, можно построить поле достижимых областей при свободном и фиксированном времени полета. На рис. 5.3.16 нанесено поле таких изолиний для координат $\tilde{r}$ и $\tilde{z}$, соответствующих полетам к Марсу. Зная элементы орбиты планеты — цели, по тем же формулам для R и z , задавая $v_{\text{пл}}$ в диапазоне от 0 до 2π , можно рассчитать след орбиты планеты в плоскости P . На рис. 5.3.16 таким образом нанесен след орбиты Марса. Каждой точке на следе орбиты планеты соответствует определенное время прилета на планету $t_{\text{пр}}$. Введем, как и раньше, условное время прилета $t_{\text{пр}}^{\text{усл}}$, изменяющееся от нуля до $T^{\text{пл}}$ (звездный период обращения планеты). Задавая фиксированное время полета Δt_{π} и перебирая значения $|V_{\infty}^{\oplus}|$, можно построить зависимость $|V_{\infty}^{\oplus}| = f(t_{\text{ст}}^{\text{усл}})$. Условное время старта $t_{\text{ст}}^{\text{усл}}$ с Земли

$$t_{\text{ст}}^{\text{усл}} = t_{\text{пр}}^{\text{усл}} - \Delta t_{\pi}.$$

Таким образом, получим зависимость $|V_{\infty}^{\oplus}| = f(t_{\text{ст}}^{\text{усл}})$ для фиксированных значений времени полета Δt_{π} . На рис. 5.3.17—5.3.19 для фиксированных Δt_{π} приведены зависимости скорости

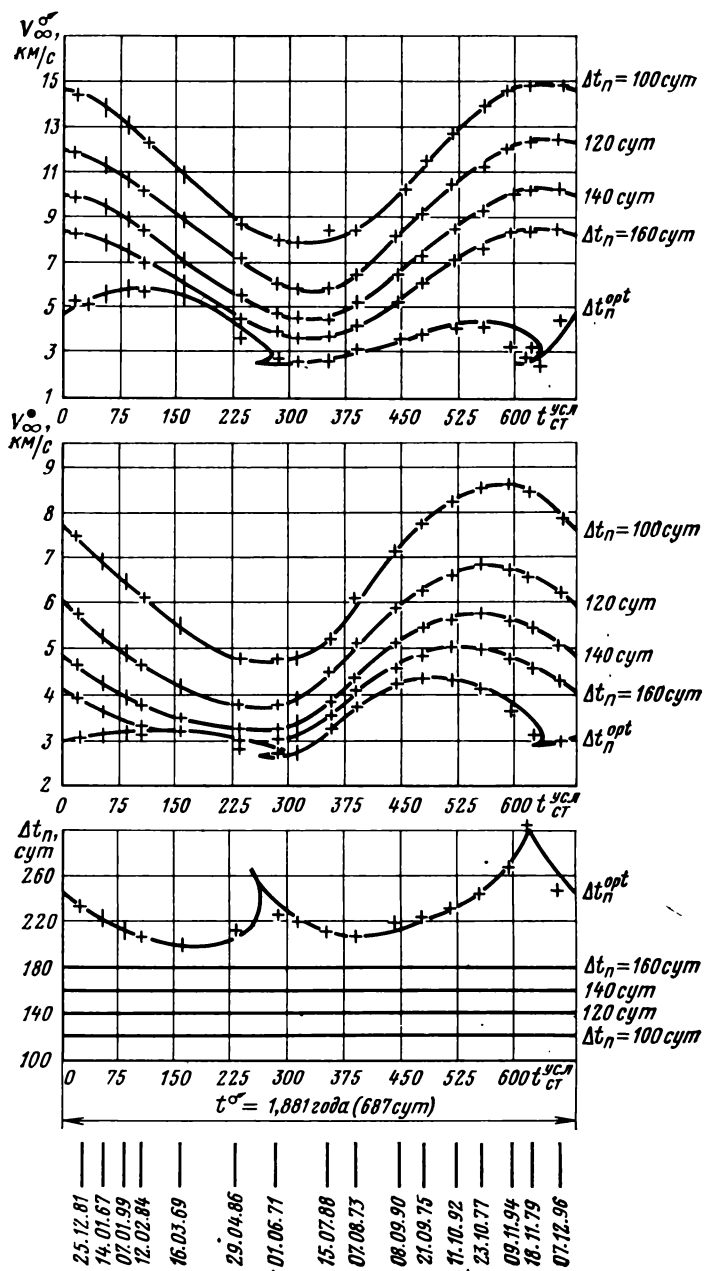


Рис. 5.3.17. Характеристики ускоренных траекторий полета к Марсу:
 $T_{в.п.} = 15,8 \text{ года (5771 сут)}$; $i = 1^{\circ}51'03''$; $e = 0,0934$; $a = 1,5237 \text{ а. е.}$

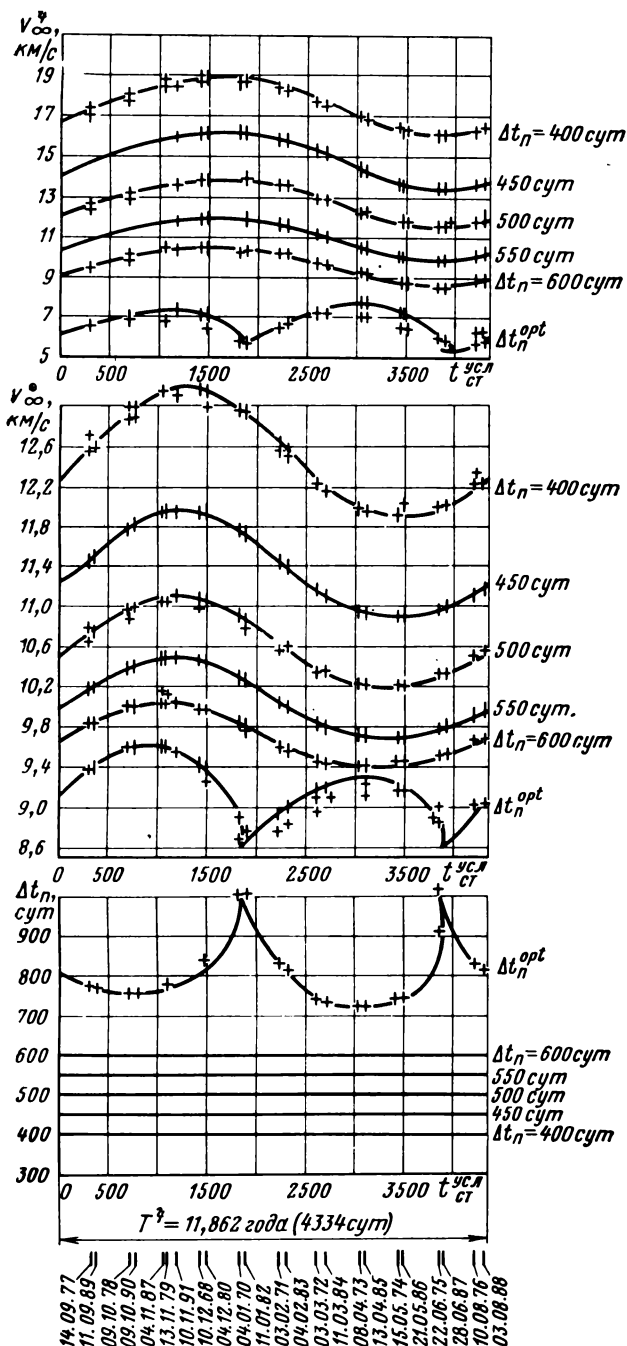


Рис. 5.3.18. Характеристики ускоренных траекторий полета к Юпитеру:
 $T_{в.п} = 11,862$ года (4334 сут); $i = 1^\circ 18' 22''$; $e = 0,0482$; $a = 5,2025$ а. е.

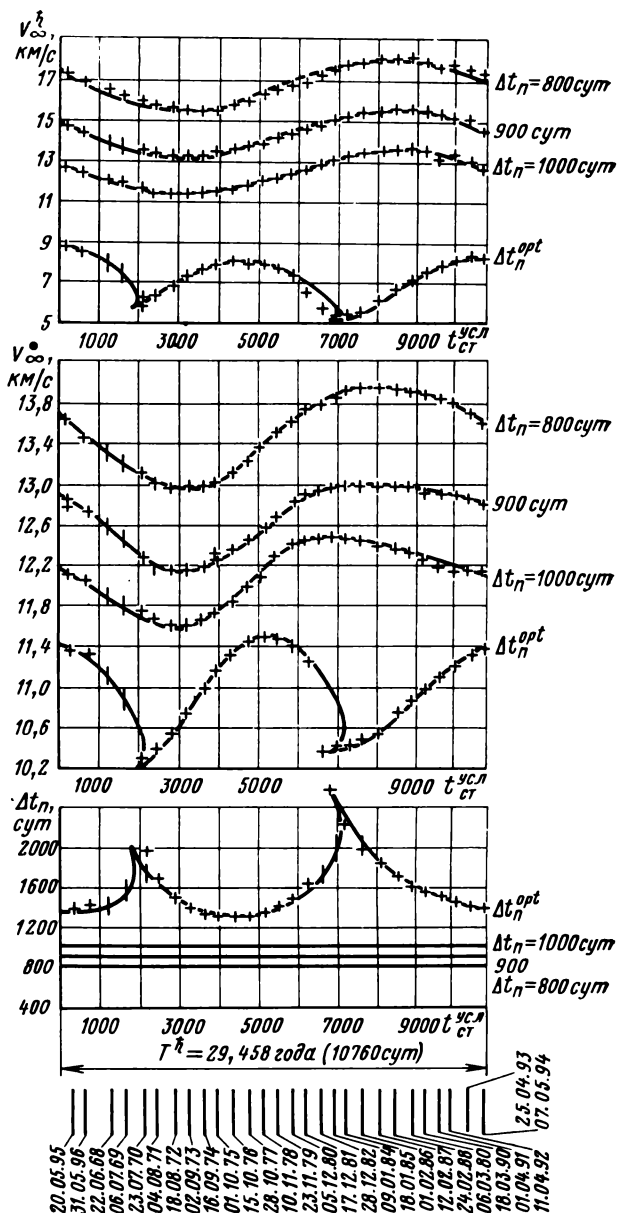


Рис. 5.3.19. Характеристики ускоренных траекторий полета к Сатурну

$T_{\Sigma} = 29,458$ года (10750 cym); $i = 2^{\circ}29'19''$; $e = 0,0552$; $a = 9,515$ а. е.

выхода из сферы действия Земли $V_{\infty}^{\oplus}$ и скорости входа в сферу действия планеты $V_{\infty}^{\text{пл}}$ от условных дат старта $t_{\text{ст}}^{\text{усл}}$ для полетов к Марсу, Юпитеру и Сатурну.

Динамика изменений оптимальных характеристик ускоренных траекторий полета

Ускорение траекторий представляет интерес для полета к дальним внешним планетам (Юпитер, Сатурн). Время полета к этим планетам по траекториям минимальных энергий достаточно велико (к Юпитеру — 2—3 года, а к Сатурну — 3,5—6 лет).

Рассмотрение ускоренных траекторий полета к более далеким планетам (за Сатурн) в импульсной постановке нецелесообразно. Из-за сравнительно высоких энергозатрат полеты к этим планетам, по-видимому, будут использоваться с ДУ малой тяги.

Хотя время полета по оптимальным энергетическим траекториям к Марсу не превышает 1 года, однако оно достаточно велико (от 6 до 9 мес). Поэтому целесообразно рассмотреть возможность сокращения времени полета и к этой планете.

На рис. 5.3.17 приведены характеристики ускоренных траекторий полета к Марсу:

$V_{\infty}^{\oplus}$ — скорость выхода из сферы действия Земли, необходимая для полета к Марсу;

$\Delta t_{\text{п}}$ — время полета с Земли на Марс;

V_{∞}^{σ} — скорость входа в сферу действия Марса в зависимости от условных дат старта — $t_{\text{ст}}^{\text{усл}}$.

Там же рисками нанесены значения оптимальных дат старта для циклов полета с 1967 по 2000 год.

Как показали расчеты, даты старта для «ускоренных» траекторий полета мало отличаются от таковых для свободных траекторий полета ($\Delta t_{\text{ст}}^{\oplus} = 10 \div 15$ сут).

Как видно из приведенных графиков, с уменьшением времени полета возрастают энергозатраты для полета к Марсу ($V_{\infty}^{\oplus}$), а также скорость входа в сферу действия планеты (V_{∞}^{σ}). Эти зависимости характеристик траекторий полетов можно развернуть для календарных дат старта (как это было сделано выше для траекторий минимальных энергий).

Цикличность изменения всех характеристик будет соответствовать периоду великих противостояний Марса $T_{\text{в.п}} \approx 15,8$ года. Циклы полетов по ускоренным траекториям с энергозатратами, близкими к минимальным, будут в 1971, 1973, 1981, 1986 и 1988 гг. Циклам полетов с наименьшими энергозатратами примерно соответствуют и наименьшие значения скорости входа в сферу действия Марса.

На рис. 5.3.17 крестиками нанесены значения соответствующих характеристик траекторий полета, определенных из оптимизаций на полях изолиний $V_{\infty}^{\oplus}$.

На рис. 5.3.18 приведены характеристики ускоренных траекторий полетов к Юпитеру. Зависимости характеристик траекторий от дат старта носят также циклический характер с периодом, равным $T_{в.п} \approx T_4 \approx 11,9$ года. Циклы полетов к Юпитеру по ускоренным траекториям с энергозатратами, близкими к оптимальным, были в 1970 и 1971 и будут в 1982 и 1983 гг.

На рис. 5.3.19 приведены характеристики ускоренных траекторий полетов к Сатурну. Зависимости характеристик траекторий от дат старта носят также циклический характер с периодом $T_{в.п} \approx T_4 \approx 29,5$ года.

Характеристики траекторий, полученные оптимизацией на полях изолиний $V_{\infty}^{\oplus}$, несколько отличаются от полученных методом достижимых областей. Однако это отличие не превышает ошибок, связанных с приближенностью метода достижимых областей (круговая орбита Земли, касательный старт), вносящих погрешности в определение $V_{\infty}^{\oplus}$ не более 200—300 м/с.

Глава VI. ● ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА МЕЖПЛАНЕТНЫХ АППАРАТОВ С ВЫХОДОМ НА ОРБИТУ ОКОЛО ПЛАНЕТЫ

§ 1. ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ С ВЫХОДОМ НА ОРБИТУ ОКОЛО ПЛАНЕТЫ НАЗНАЧЕНИЯ

Оптимизация траекторий КА искусственных спутников планет (ИСП) производится по максимуму веса полезного груза.

Для ИСП с аэродинамическим торможением полезный груз

$$G_{\text{ИСП}} = G_{\text{п.н}}^I - G_{\text{а.т}},$$

где $G_{\text{п.н}}^I$ — вес полезной нагрузки ступени старта с орбиты ИСЗ;

$G_{\text{а.т}}$ — вес средств аэродинамического торможения на орбите ИСП.

Как известно, $G_{\text{п.н}}^I = f(V_{\text{ст}}^{\oplus})$ и его максимум соответствуют минимуму характеристической скорости старта с ИСЗ $V_{\text{ст}}^{\oplus}$ или скорости на выходе из сферы действия Земли $V_{\infty}^{\oplus}$. Вес $G_{\text{а.т}}$ зависит от аэродинамических параметров средств торможения КА и условий входа в атмосферу (скорости входа $V_{\text{вх}}^{\text{пл}}$ и угла входа). Из этих параметров на выбор траектории влияет только $V_{\text{вх}}^{\text{пл}}$. Поэтому в общем случае критерий оптимизации такой схемы

$$J = f(V_{\infty}^{\oplus}; V_{\infty}^{\text{пл}}),$$

так как

$$V_{\text{вх}}^{\text{пл}} \approx V_{\text{пт}}^{\text{пл}} = \sqrt{(V_{\text{пар}}^{\text{пл}})^2 + (V_{\infty}^{\text{пл}})^2}.$$

Однако в большинстве случаев $G_{\text{а.т}} \ll G_{\text{п.н}}^I$, и практически оптимизация траектории такой схемы полета сводится к отысканию оптимума для одноимпульсной схемы. При заданном значении $V_{\text{ст}}^{\oplus}$ на полях изолиний выбирается область с меньшим значением $V_{\infty}^{\text{пл}}$.

Для схемы с активным торможением траектория оптимизируется по максимуму $G_{п.н} = G_{п.н}^I G_{п.н}^{II}$. Для однотипных ракетных ступеней максимум $G_{п.н}$ соответствует минимуму суммарной характеристической скорости $V_{хэ}$. Приблизительно это справедливо и для ступеней с характеристиками, не очень сильно отличающимися.

Обычно $V_{хэ}$ делится на первую и вторую ступени так, как этого требует реальное разделение $V_{хэ}$ по траектории. Однако могут быть случаи, когда целесообразно оптимальное разделение $V_{хэ}$ на составляющие, не соответствующие реальному разделению импульсов. В этом случае какая-либо из ступеней работает с разрывом — два активных участка, разделенных временем перелета с Земли на планету.

При полетах к некоторым планетам возможно, что первый этап (старт с ИСЗ) или второй (торможение на ИСП) потребует разделения на две ступени. Так, например, при полете к Юпитеру большой полезный груз обеспечивают две ступени старта с Земли при ДУ на ЖРД.

В большинстве же практических случаев траектория оптимизируется по минимуму суммарной характеристической скорости:

$$V_{хэ} = \Delta V_{ст}^{\oplus} + \Delta V_{т}^{пл},$$

где $\Delta V_{ст}^{\oplus}$ — характеристическая скорость старта с орбиты ИСЗ;
 $\Delta V_{т}^{пл}$ — характеристическая скорость торможения на орбиту ИСП.

Оптимизация также может производиться в двух вариантах:

— по максимуму «окна» дат старта, т. е. когда ищется $\min V_{хэ}$ при заданном времени старта $t_{ст}^{\oplus}$ с орбиты ИСЗ (вертикальные касательные на поле изолиний $V_{хэ}$ в координатах $t_{ст}^{\oplus}, \Delta t_{п}$);

— для ускоренных траекторий, когда ищется $\min V_{хэ}$ при заданном времени полета $\Delta t_{п}$ (горизонтальные касательные на поле $V_{хэ}$).

Характеристики двухимпульсных траекторий рассмотрены для двух вариантов орбит ИСП:

— предельно низкая круговая орбита ИСП;
 — энергетически более выгодная предельно вытянутая эллиптическая орбита ИСП с минимальной высотой перицентра h_{π} .

Для спутников Марса за такие орбиты можно принять, например, орбиты со следующими параметрами:

— круговая орбита с $h_{кр} = 1000$ км;
 — эллиптическая орбита с $h_{\pi} = 1$ тыс. км и $h_a = 20$ тыс. км.

Для спутников Венеры:

— круговая орбита с $h_{кр} = 500$ км;
 — эллиптическая орбита $h_{\pi} = 500$ км и $h_a = 50$ тыс. км.

Таблица 6.1

**Характеристики двухимпульсных траекторий полета к Марсу
(круговая орбита ИСМ)**

Год	Полувиток	$t_{\text{СТ}}^{\oplus}$	$\Delta t_{\text{П}}$	$V_{\text{ХЭ}}$	$V_{\text{Т}}^{\sigma}$
		сут		км/с	
1971	1	23.05.71	205	5,61	2,19
	2	13.05.71	245	5,81	2,29
1973	1	08.08.73	211	5,85	2,07
	2	29.07.73	344	6,18	2,27
1975	1	28.09.75	242	6,14	2,06
	2	05.09.75	345	5,76	2,05
1977	1	01.11.77	270	6,00	2,05
	2	07.10.77	327	5,55	2,00
1979	1	15.11.79	260	5,96	2,45
	2	04.11.79	310	5,57	2,09
1982	1	07.01.82	228	6,52	2,79
	2	28.11.81	299	5,80	2,31
1984	1	28.02.84	208	6,42	2,75
	2	02.01.84	280	6,18	2,61
1986	1	28.04.86	201	5,97	2,36
	2	09.05.86	250	6,05	2,74
1988	1	12.07.88	202	5,99	2,08
	2	28.05.88	264	6,25	2,15
1990	1	11.09.90	230	6,07	2,06
	2	24.08.90	348	5,90	2,12
1992	1	20.10.92	259	6,12	2,04
	2	25.09.92	335	5,61	2,00

Таблица 6.2

**Характеристики двухимпульсных траекторий полета к Венере
(круговая орбита ИСВ)**

Год	Полувиток	$t_{\text{ст}}^{\oplus}$	$\Delta t_{\text{п}}$	$V_{\text{хз}}$	$V_{\text{т}}^{\ominus}$
		сут		км/с	
1970	1	04.09.70	110	7,69	3,97
	2	15.06.70	191	7,41	3,38
1972	1	17.04.72	110	7,77	3,75
	2	28.02.72	185	7,73	3,94
1973	1	25.11.73	113	7,30	3,37
	2	14.11.73	154	7,34	3,78
1975	1	09.06.75	142	6,88	3,31
	2	06.06.75	150	6,91	3,38
1977	1	11.01.77	127	7,40	3,84
	2	09.12.76	170	7,11	3,28
1978	1	01.09.78	111	7,68	3,98
	2	15.06.78	190	7,39	3,38
1980	1	14.04.80	110	7,78	3,77
	2	21.02.80	188	7,73	3,87
1981	1	23.11.81	112	7,34	3,38
	2	12.11.81	154	7,37	3,81
1983	1	09.06.83	143	6,92	3,35
	2	07.06.83	148	6,90	3,40
1985	1	10.01.85	128	7,38	3,82
	2	08.12.84	168	7,08	3,28
1986	1	29.08.86	111	7,67	3,98
	2	15.06.86	188	7,36	3,37
1988	1	12.04.88	110	7,80	3,79
	2	18.02.88	192	7,73	3,75
1989	1	21.11.89	111	7,37	3,40
	2	10.11.89	155	7,41	3,85
1991	1	10.06.91	139	6,94	3,33
	2	09.06.91	141	6,94	3,35

Такая высота круговых орбит обеспечивает длительное (порядка года) время существования ИСП из-за торможения в верхних слоях атмосферы, а параметры эллиптических орбит с предельно малой высотой h_* по энергетическим характеристикам близки к минимально возможным (выход на параболу).

В табл. 6.1 приведены характеристики оптимальных траекторий 1 и 2-го полувитков полета на орбиту ИСМ в 1970 и 1980-е гг.

Сопоставляя оптимальные даты старта двухимпульсных и одноимпульсных траекторий (см. табл. 5.7), можно заметить, что они различаются не более чем на 10—15 сут. Минимальные энергозатраты соответствуют циклы полетов в 1971 и 1979 гг.

В табл. 6.2 приведены характеристики оптимальных траекторий к Венере. Минимальные энергозатраты приходятся на циклы полетов в 1975 и 1983 гг.

§ 2. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ОРБИТЫ СПУТНИКА ПЛАНЕТЫ

Выбор параметров орбиты искусственного спутника планеты (ИСП) производится из условий обеспечения минимальных энергозатрат для выведения КЛА на орбиту и удовлетворения требований, связанных с назначением КЛА.

Задачу можно рассматривать в следующей постановке. Считаем, что вектор входа в сферу действия планеты $\bar{V}_{\infty}^{пл}$ задан, т. е. заданы модуль скорости $|\bar{V}_{\infty}^{пл}|$ и углы его ориентации в экваториальной планетоцентрической системе координат: $\delta_{пл}$ — угол склонения и $\alpha_{пл}$ — угол прямого восхождения.

Рассмотрим вначале параметры орбиты ИСП в плоскости подлетной гиперболы. Выход из плоскости подлетной гиперболы обычно связан с большими энергозатратами.

Для задач приближенного определения энергозатрат старта с эллиптической орбиты на гиперболу и торможения с нее на эллипс можно считать, что переходы между этими орбитами происходят импульсно. В этом случае оптимальными будут плоские переходы с сопряжением траекторий в их перицентрах, рассмотренные в § 2 гл. IV. Характеристики этих переходов приведены на рис. 4.2.1 и 4.2.2. Угол α_r между асимптотой гиперболы и осью аписид эллипса

$$\cos \alpha_r = -\frac{1}{e_r}. \quad (6.2.1)$$

Через этот угол определяется положение точки перехода с гиперболы на эллипс относительно вектора $\bar{V}_{\infty}^{пл}$.

Из изложенного в § 2 гл. IV видно, что энергетически оптимальная орбита ИСП должна иметь минимально допустимый радиус перигея r_{π} и максимально допустимый радиус апогея r_a .

Период обращения на такой орбите

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{V_{\text{пл}}},$$

где $a = \frac{r_a + r_{\pi}}{2}$ — большая полуось орбиты.

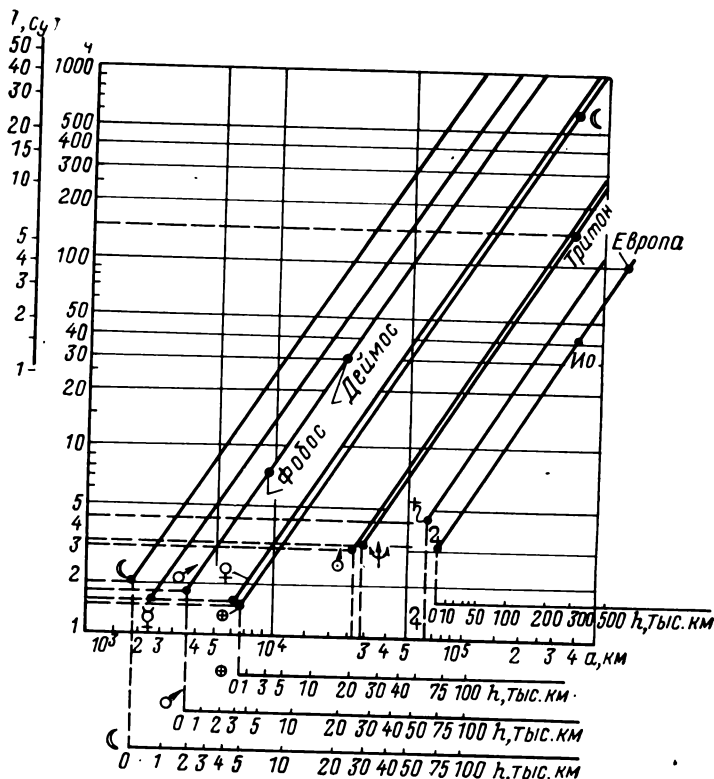


Рис. 6. 2. 1. Период обращения спутников планет

На рис. 6. 2. 1 приведены значения T для спутников различных планет.

Выбор периода T может влиять на r_a орбиты ИСП. При выборе T , кратного периоду обращения планеты, ИСП будет перемещаться по одним и тем же трассам на поверхности планеты, что может противоречить требованиям картографирования пла-

неты. Выбор периода T , кратного земным суткам, обеспечивает сеансы связи с КЛА в одно и то же время.

Рассмотрим характеристики, определяющие положение плоскости орбиты ИСП.

Если задан угол наклонения i орбиты ИСП к экватору (рис. 6.2.2), то долгота линии узлов Ω от направления Υ (нача-

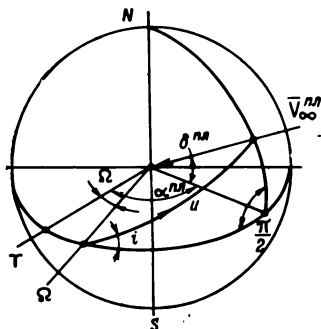


Рис. 6.2.2. Определение долготы узла Ω орбиты спутника планеты

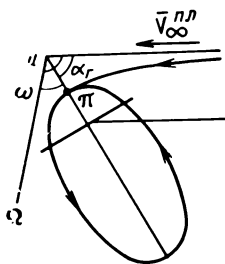


Рис. 6.2.3. Определение аргумента широты ω спутника планеты

ло отсчета — направление на точку весеннего равноденствия Земли) определится из соотношения

$$\sin(\alpha_{пл} - 2) = \frac{\operatorname{tg} \delta_{пл}}{\operatorname{tg} i}. \quad (6.2.2)$$

Угол между вектором $\overline{V}_{\infty}^{пл}$ и линией узлов определится из равенства

$$\sin u = \frac{\sin \delta}{\sin i}, \quad (6.2.3)$$

а угловое расстояние ω перицентра π от линии узлов Ω (рис. 6.2.3)

$$\omega = u - \alpha_r. \quad (6.2.4)$$

Из рис. 6.2.2 и формулы (6.2.2) следует, что наклонение i орбиты ИСП не может быть меньше, чем угол $\delta_{пл}$, т. е.

$$i \geq \delta_{пл} \quad (6.2.5)$$

при плоском переходе с подлетной гиперболы на эллиптическую орбиту ИСП.

Орбита ИСП подвержена различного рода возмущениям. Наиболее сильное влияние на параметры орбиты оказывает нецентральность поля тяготения планеты. Учет эффекта сжатия планеты приводит к тому, что изменяются долгота узла Ω орбиты спутника и угловое положение ω перицентра орбиты. В § 3 гл. I

приведены следующие формулы для определения изменения Ω и ω за один оборот спутника:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dN} &= -\frac{2\pi\epsilon}{\mu_{\text{пл}} p^2} \cos i; \\ \frac{d\omega}{dN} &= \frac{\pi\epsilon}{\mu_{\text{пл}} p^2} (5 \cos^2 i - 1). \end{aligned} \right\} \quad (6.2.6)$$

На рис. 6.2.4 приведены графики для определения характеристик эволюции параметров орбиты ИСП от сжатия планеты:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dN} &= -\Omega^N \cos i; \\ \frac{d\omega}{dN} &= \frac{1}{2} \Omega^N (5 \cos^2 i - 1); \\ \tilde{p} &= \frac{p}{a_{\text{ЭК}}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.7)$$

где $a_{\text{ЭК}}$ — радиус экватора планеты.

Величины сжатия $\alpha_{\text{пл}}^{\text{сж}}$ и угловой скорости планет $\omega_{\text{пл}}$ и $a_{\text{ЭК}}$ приведены в приложении.

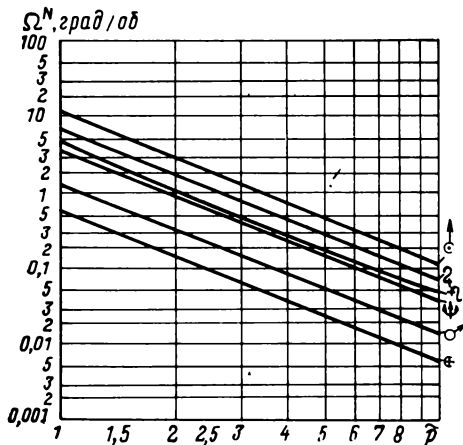


Рис. 6.2.4. Характеристики эволюции орбиты спутника от нецентральности поля тяготения планеты

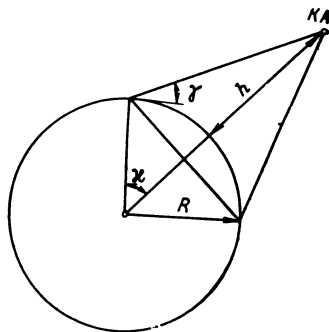


Рис. 6.2.5. Определение границ зоны видимости

Изменение величин Ω и ω будет наибольшим для орбит с наклонением i , близким к нулю. Орбита ИСП с $i \approx 63,4^\circ$ не имеет возмущений аргумента широты перигея орбиты. Полярная орбита $i=90^\circ$ не имеет ухода линии узлов орбиты. Существенное влияние на параметры орбит ИСП с относительно малым радиу-

200

сом перицентра может оказывать сопротивление верхних слоев атмосферы планеты. Методика учета этого влияния на движение спутников изложена в работе [50]. Однако в настоящее время не имеется достаточно достоверных данных о характеристиках верхних слоев атмосферы планет. Для спутника Марса можно ориентировочно считать, что приемлемое время его существования (порядка 1 год) может быть получено при $r_{\pi} \geq 1$ тыс. км, а для спутника Венеры $r_{\pi} \geq 500$ км.

Отношение масс спутников планет к массе планеты существенно меньше соотношения масс Луна—Земля. Поэтому влияние спутников планет на параметры орбиты ИСП будет слабее, чем влияние Луны на орбиты ИСЗ.

Влияние Солнца и других планет на параметры ИСП будет еще меньше. О порядке величины такого влияния можно судить по влиянию Солнца и планет на параметры ИСЗ (см., например, [50]).

Влияние Солнца и других планет на параметры орбиты ИСП будет заметным при длительном времени существования ИСП (порядка нескольких месяцев или лет). Методы расчета эволюции орбит ИСП от этих факторов изложены в работах [10, 50].

Рассмотрим вопросы расчета трассы ИСП и зон видимости с его орбиты.

Для задач фотографирования поверхности планеты при облете и картографирования ее с орбиты ИСП необходимо знать трассу КА на поверхности планеты и границы зоны видимости.

Угловое расстояние κ границы зоны видимости (рис. 6.2.5) определяется по формуле

$$\kappa = \arccos \left(\frac{R_{пл}}{R_{пл} + h} \cos \gamma \right) - \gamma, \quad (6.2.8)$$

где $R_{пл}$ — радиус планеты;

h — высота ИСП над ее поверхностью;

γ — угол возвышения ИСП над горизонтом.

Трасса ИСП или проекция орбиты спутника на поверхности планеты определится из следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \arcsin (\sin u \sin i); \\ \lambda &= \Omega + \arctg (\tg u \cos i) - \omega_{пл}(t - \tau) + \Delta\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.9)$$

где ψ — широта точки трассы;

λ — долгота точки трассы;

$u = \omega + v + \Delta\omega$ — аргумент широты точки на орбите ИСП;

Ω — долгота восходящего узла орбиты;

ω — аргумент широты перицентра орбиты;

i — наклонение орбиты ИСП к плоскости экватора;

τ — время прохождения перицентра;

$$\Delta\omega = \frac{d\omega}{dt} \frac{t-\tau}{T} \text{ — изменение } \omega \text{ от сжатия планеты;}$$

$$\Delta\Omega = \frac{d\Omega}{dt} \frac{t-\tau}{T} \text{ — изменение } \Omega \text{ от сжатия планеты;}$$

T — период обращения ИСП;

t — время, соответствующее аномалии θ ИСП.

Граница зоны видимости определяется из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \psi_T &= \arcsin(\sin \psi \cos \kappa + \cos \psi \sin \kappa \cos \varphi); \\ \lambda_T &= \lambda \pm \arcsin \left(\frac{\cos \kappa - \cos \psi \sin \varphi}{\cos \psi \cos \psi} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.2.10)$$

е ψ_T и λ_T — широта и долгота точек на границе зоны видимости;

φ — угол от точки трассы до точки на границе зоны видимости (изменяется от 0 до 2π при определении границы зоны видимости).

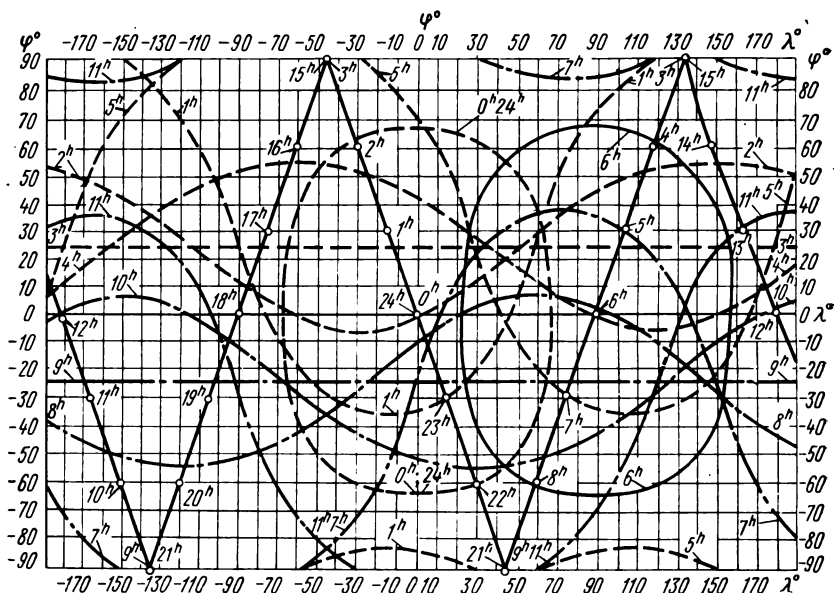
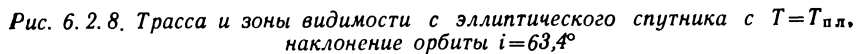
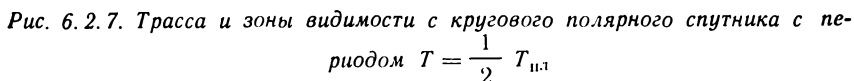


Рис. 6.2.6. Трасса и зоны видимости с кругового полярного спутника с периодом обращения T , равным периоду вращения планеты $T_{пл}$

На рис. 6.2.6—6.2.7 показаны трассы границы зоны видимости круговых полярных спутников с периодом обращения T , равным одному периоду и половине периода вращения планеты $T_{пл}$. Трассы этих спутников замкнуты, т. е. проходят по одним



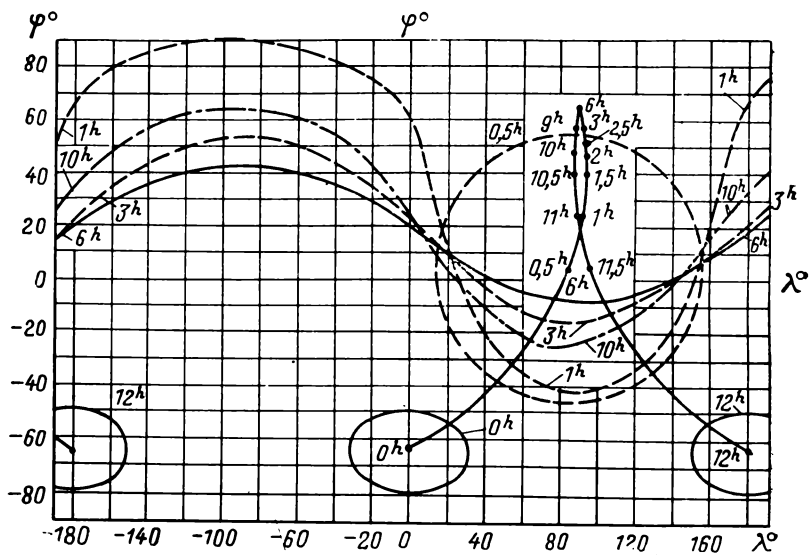


Рис. 6.2.9. Трасса и зоны видимости с эллиптического спутника
с $T = \frac{1}{2} T_{\text{пл}}$, $i = 63,4^\circ$

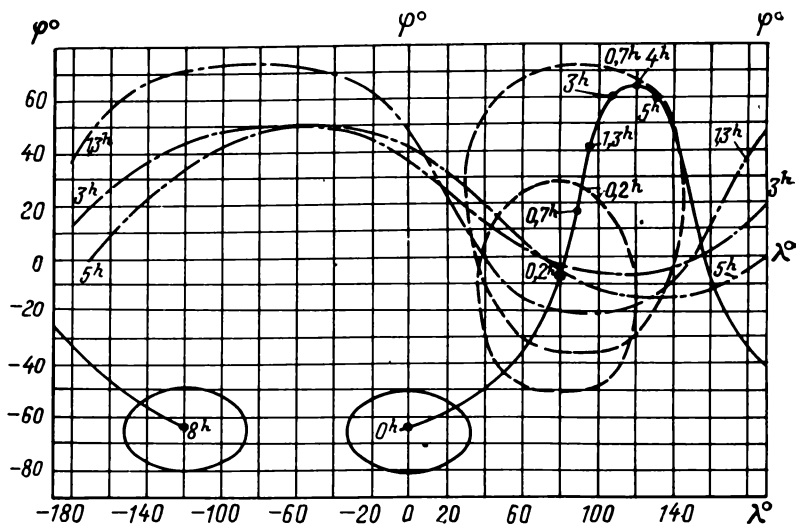


Рис. 6.2.10. Трасса и зоны видимости с эллиптического спутника
с $T = \frac{1}{3} T_{\text{пл}}$, $i = 63,4^\circ$

и тем же местам поверхности. Зоны обзора с таких орбит достаточно обширны и позволяют увидеть всю поверхность планеты.

Интересно отметить, что круговая орбита спутника Марса с $T \approx T_{\text{пл}}$ обеспечивает минимальные энергозатраты для выведения на нее КА (в классе круговых орбит).

Как указано выше, ИСП с наклоном $i = 63,4^\circ$ не имеет возмущений аргумента широты перицентра ω от сжатия планеты. Трассы и зоны видимости таких ИСП на эллиптических орбитах с $h_\pi \approx 0,05 R_{\text{пл}}$ и с периодами обращения $T = \frac{1}{3} T_{\text{пл}}$; $\frac{1}{2} T_{\text{пл}}$ и $T_{\text{пл}}$ показаны на рис. 6.2.8—6.2.10. Так как период обращения ИСП кратен периоду обращения планеты $T_{\text{пл}}$, то трассы спутников замкнуты. В апогейной части орбиты ИСП зоны видимости весьма обширны (для ИСП с $T = T_{\text{пл}}$ зона видимости охватывает почти половину поверхности планеты).

§ 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЦИКЛОВ ПОЛЕТОВ

Выявить динамику изменения характеристик оптимальных двухимпульсных траекторий по циклам полета можно путем накопления данных расчетов таких траекторий для различных циклов полетов. Однако, как и в случае решения такой задачи для одноимпульсных траекторий, целесообразнее эту задачу решить методом достижимых областей. Задача решалась при тех же предположениях, что и в § 3 гл. V.

Оптимизация траекторий

Оптимальная траектория должна обеспечивать минимум критерия оптимизации — суммарной характеристической скорости V_Σ , равной

$$V_{\Sigma} = \Delta V_{\text{ст}}^{\oplus} + \Delta V_{\text{т}}^{\text{пл}},$$

где $\Delta V_{\text{ст}} = \sqrt{(V_{\text{пар}})^2 + (V_{\infty}^{\oplus})^2} - V_{\text{кр}}^{\oplus}$ — скорость старта с орбиты ИСЗ;

$$V_{\text{пар}}^{\oplus} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_{\text{кр}}}} \quad \text{— параболическая скорость на стартовой орбите;}$$

$$V_{\text{кр}}^{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_{\text{кр}}}} \quad \text{— круговая скорость стартовой орбиты ИСЗ;}$$

$V_{\infty}^{\oplus}$ — скорость на выходе из сферы действия Земли;

$r_{кр} = R_{\oplus} + h_{кр}$ — радиус стартовой круговой орбиты ($h_{кр} = 200$ км);
 $R_{\oplus}$ — радиус Земли;
 $\mu_{\oplus}$ — гравитационная постоянная Земли;

$$\Delta V_r = \sqrt{(V_{пар}^{пл})^2 + (V_{\infty}^{пл})^2} - V_{\pi}^{пл};$$

$$V_{пар} = \sqrt{\frac{2\mu_{пл}}{r_{\pi эл}}} \text{ — параболическая скорость у планеты;}$$

$$V_{\pi} = \sqrt{\frac{2\mu_{пл}r_a}{r_{\pi}(r_{\pi} + r_a)}} \text{ — скорость в перигеетре эллиптической орбиты ИСП;}$$

$V_{\infty}^{пл}$ — скорость на входе в сферу действия планеты;

$$r_{\pi} = R_{пл} + h_{\pi}; \quad r_a = R_{пл} + h_a;$$

$R_{пл}$ — радиус планеты;
 h_{π} и h_a — высота перигеетра и апогеетра орбиты ИСП соответственно.

Основной особенностью метода «достижимых областей» является отделение задачи определения оптимальных характеристик траектории от задачи определения дат старта. Следуя идеям метода «достижимых областей» (см. § 3 гл. V), задаемся положением планеты назначения в момент прилета (см. рис. 5.3.2). При этом нам будут известны радиус R планеты, отклонение ее от плоскости эклиптики z и вектор скорости планеты $\bar{V}_{пл}$. Задача отыскания оптимальной траектории является двухпараметрической. В качестве параметров оптимизации примем: λ — проекция угла перелета на плоскость эклиптики и v_0 — истинная аномалия орбиты перелета в точке старта. Величины z и R определяют гелиоцентрическую широту точки прилета φ :

$$\sin \varphi = \frac{z}{R};$$

при этом знак z определяет знак φ . Из прямоугольного сферического треугольника A_1BC (рис. 6.3.1, а) определим угол перелета

$$\cos L = \cos \lambda \cos \varphi.$$

Так как величины λ и L близки, то значение L можно определить по $\cos L$.

Наклонение i траектории перелета определяется как

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \lambda};$$

при этом знак i соответствует знаку z для траекторий 1-го полу-
витка ($0 < L < \pi$) и меняется на противоположный для траек-
торий 2-го ($\pi < L < 2\pi$).

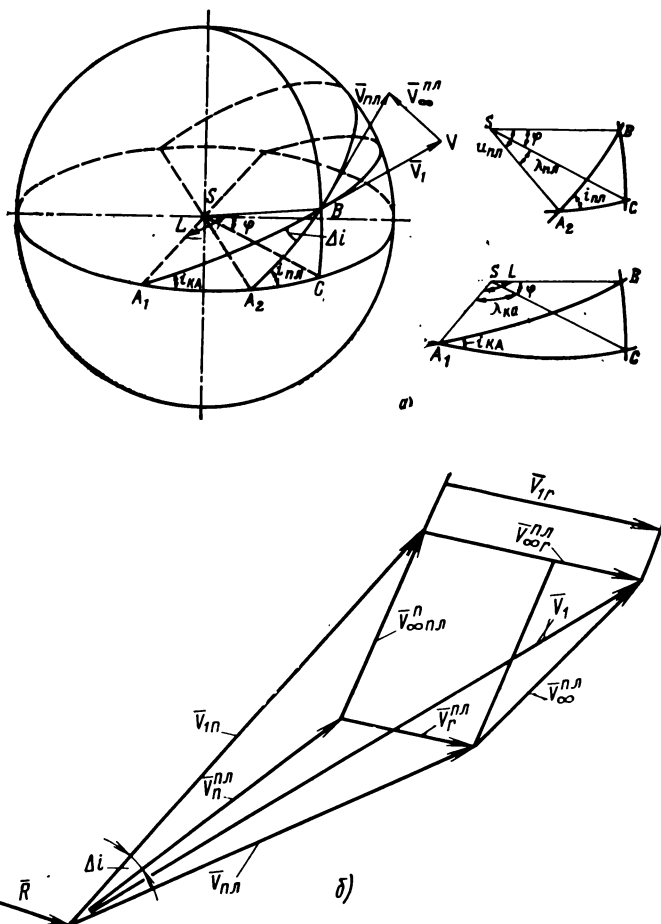


Рис. 6.3.1. Определение скорости встречи с планетой

Параметр траектории перелета при заданной величине v_0 будет

$$p = R_0(1 + e \cos v_0).$$

Эксцентриситет траектории перелета определяется из соотношений

$$R_0 = \frac{p}{1 + e \cos v_0}; \quad R = \frac{p}{1 + e \cos (L + v_0)}$$

и будет

$$e = \frac{R - R_0}{R_0 \cos v_0 - R \cos (L + v_0)}.$$

Полученные выше параметры траектории определяют гелиоцентрические скорости старта с Земли $\bar{V}_{\text{ст}}$ и прилета к планете $\bar{V}_1$:

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v) - \text{трансверсальная составляющая};$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v - \text{радиальная составляющая};$$

$$V = \sqrt{V_n^2 + V_r^2} - \text{модуль вектора скорости},$$

где $v = v_0$ в момент старта и $v = L + v_0$ в момент прилета.

Компоненты вектора $V_\infty^\oplus$ выхода из сферы действия Земли и его модуль определяются из стартового треугольника скоростей (см. рис. 5.3.2) *

$$V_{\infty n}^\oplus = \sqrt{V_{\text{ст}n}^2 + V_{\text{кр}}^2 - 2V_{\text{ст}n}V_{\text{кр}} \cos i};$$

$$V_{\infty r}^\oplus = V_{1r}; \quad V_\infty^\oplus = \sqrt{(V_{\infty n}^\oplus)^2 + (V_{\infty r}^\oplus)^2}.$$

Положение планеты в момент прилета КЛА определяют вектор скорости $\bar{V}_{\text{пл}}$ и его составляющие $\bar{V}_n^{\text{пл}}$ и $\bar{V}_r^{\text{пл}}$. Компоненты вектора входа в сферу действия планеты и его модуль (см. рис. 6.3.16):

$$V_{\infty n}^{\text{пл}} = \sqrt{V_{1n}^2 + (V_n^{\text{пл}})^2 - 2V_{1n}V_n^{\text{пл}} \cos \Delta i};$$

$$V_{\infty r}^{\text{пл}} = V_{1r} - V_r^{\text{пл}}; \quad V_\infty^{\text{пл}} = \sqrt{(V_{\infty n}^{\text{пл}})^2 + (V_{\infty r}^{\text{пл}})^2}.$$

Здесь неизвестен лишь угол Δi между плоскостями траектории полета и орбиты планеты назначения. Из сферического треугольника A_1BA_2 (см. рис. 6.4.1, а) определим

$$\text{ctg } \Delta i = \frac{\sin L \text{ ctg } (\lambda - \lambda_{\text{пл}}) - \cos L \cos i}{\sin i},$$

где $\lambda_{\text{пл}}$ — долгота планеты от узла ее орбиты.

Для реальных траекторий полета угол Δi мал ($|\Delta i| < \frac{\pi}{2}$), поэтому $\cos \Delta i$ всегда положителен. Зная величины $V_\infty^\oplus$ и $V_\infty^{\text{пл}}$,

* На рис. 5.3.2 индекс $\oplus$ у вектора $\bar{V}_\infty^\oplus$ опущен.

можно определить скорости $V_{\text{ст}}^{\oplus}$ старта с орбиты ИСЗ и торможения $V_{\text{т}}^{\text{пл}}$ на орбиту ИСП, а следовательно, и суммарную характеристическую скорость $V_{\text{хс}}$.

Оптимизация траекторий, обеспечивающая минимум $V_{\text{хс}}$, по параметрам λ и v_0 осуществлялась методом Гаусса — Зейделя (координатный спуск). В качестве нулевого приближения использовались оптимальные одноимпульсные траектории (см. § 3 гл. V). Разбиение траекторий по углу перелета L на траектории 1 и 2-го полувитков обеспечивает выделение области с одним экстремумом.

Динамика изменения оптимальных характеристик двухимпульсных траекторий полета к Меркурию, Венере, Марсу и Юпитеру

На рис. 6.3.2—6.3.5 приведена динамика изменения характеристик двухимпульсных траекторий полета к планетам Солнеч-

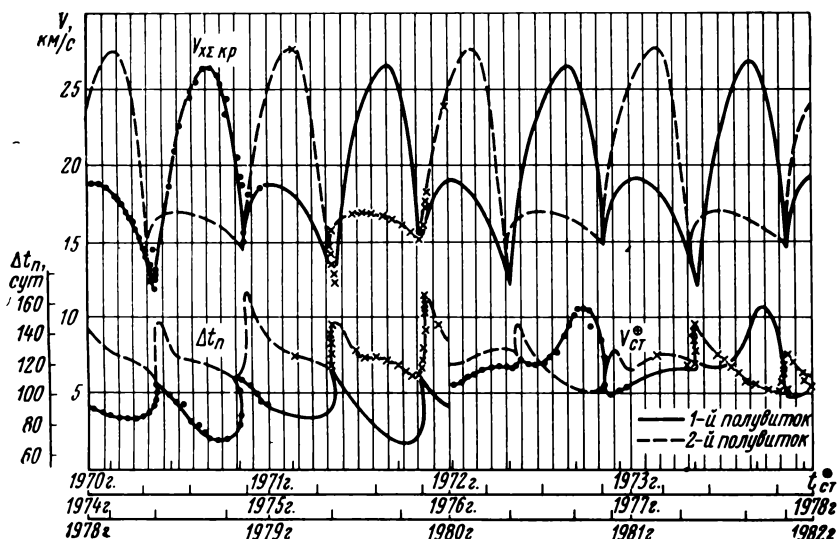


Рис. 6.3.2. Характеристики оптимальных траекторий полета на орбиту искусственного спутника Меркурия

ной системы. Зависимости, представленные на рис. 6.3.2, определяют динамику изменения основных характеристик траекторий полета к Меркурию (Δt_n — время полета, $V_{\text{ст}}^{\oplus}$ — характеристическая скорость старта с орбиты и $V_{\text{хс}}$ — суммарная характеристическая скорость).

При расчете двухимпульсных траекторий полета к Меркурию с выходом на орбиту искусственного спутника планеты была выбрана круглая орбита ИСП с $h_{кр}=1000$ км. При полете на орбиту искусственного спутника Меркурия основные характеристики траекторий полета меняются в следующих пределах:

— время полета $\Delta t_{п1}=70\div 110$ сут. для траекторий 1-го полувитка;

$\Delta t_{п2}=110\div 160$ сут. для траекторий 2-го полувитка;

— стартовая характеристическая скорость $\Delta V_{ст}^{\oplus}=4,9\div 10,5$ км/с;

— скорость торможения по орбите спутника $\Delta V_{т}^{\otimes}=5,5\div 17,5$ км/с;

— суммарная характеристическая скорость

$$V_{хз}=12,3\div 28 \text{ км/с.}$$

Характеристики $\Delta t_{п}$, $\Delta V_{ст}^{\oplus}$ и $V_{хз}$ даны в зависимости от дат старта. Рисками отмечены календарные даты старта для различных циклов полетов (траектории 1-го полувитка). Циклы оптимальных полетов на орбиту спутника Меркурия чередуются примерно через $1/3$ года (синодический период Меркурия $T_c^{\otimes}=0,317$ года) для траекторий каждого полувитка. Как правило, из шести возможных циклов полетов в год по траекториям первого и второго полувитков имеется один, приходящийся на область дат старта при наименьших энергозатратах. Большой диапазон изменения характеристик полета к Меркурию объясняется большим эксцентриситетом и наклоном плоскости орбиты планеты. Периодичность изменения характеристик соответствует приблизительно периоду великих противостояний Меркурия

$$T_{в.п}^{\otimes} \approx 1 \text{ год.}$$

При полете к Венере для расчетов была выбрана круговая орбита с $h_{кр}=500$ км и вытянутая эллиптическая орбита ИСП с параметрами: $h_{\pi}=500$ км, $h_{\alpha}=50$ тыс. км.

На рис. 6.3.3 показана динамика изменения минимальных значений $V_{хз}$ для циклов полетов на орбиту ИСВ.

Так же как и для одноимпульсных траекторий, период изменения энергозатрат двухимпульсных траекторий $T_{в.п}^{\otimes} \approx 8$ лет. Оптимальным для выведения автоматического аппарата на орбиту ИСВ является цикл полетов в 1975 г.

Для спутника Марса принята круговая орбита с параметрами $h_{кр}=1000$ км и эллиптическая с $h_{\pi}=1000$ км, $h_{\alpha}=20$ тыс. км.

На рис. 6.3.4 показана динамика изменения минимальных значений суммарной характеристической скорости $V_{хз}$ для циклов полетов на орбиту ИСМ. Видно, что, как и для одноимпульсных траекторий, период изменения энергетических двухимпульсных траекторий полета соответствует периоду великих противостояний $T_{в.п}^{\otimes} \approx 15,8$ года планеты. Так, наилучшим с точки

зрения энергозатрат полета на орбиту ИСМ был цикл полетов в 1971 г. по 1-му полувитку и будут циклы полетов в 1977 и 1979 гг. по 2-му. Вообще циклы полетов 1970-х годов благоприятны для

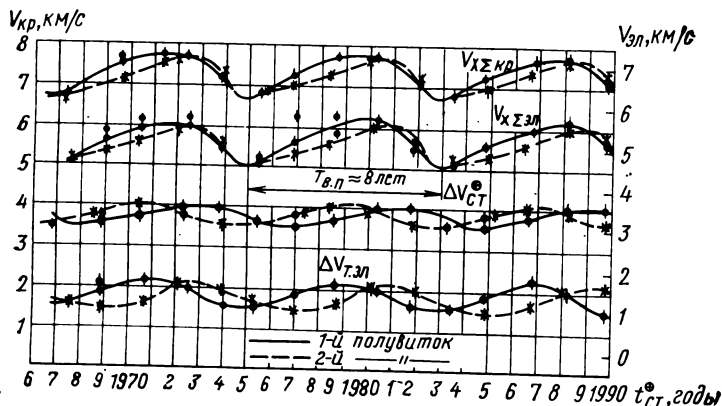


Рис. 6.3.3. Динамика изменения характеристик траекторий полета на орбиту спутника Венеры

полетов на орбиту ИСМ. Максимум энергозатрат соответствовал циклам полетов в 1967, 1969 гг. и будет в 1982, 1984 гг.

На рис. 6.3.5 приведены основные характеристики оптимальных траекторий полета к Юпитеру (1-й полувиток). Для Юпи-

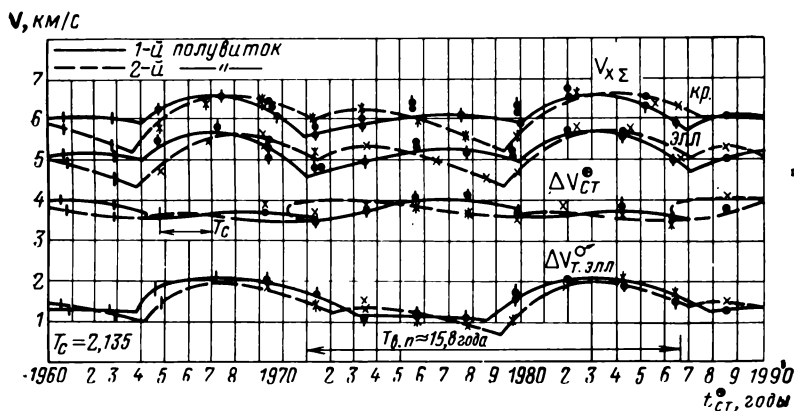


Рис. 6.3.4. Динамика изменения характеристик траекторий полета на орбиту спутника Марса

тера была выбрана орбита спутников с параметрами: круговая с $h_{кр} = 1000$ км и эллиптическая с $h_{\pi} = 1000$ км, $h_{\alpha} = 1$ млн. км. Диапазон времени полета $\Delta t_{п} = 760 \div 1025$ сут.

Величина стартового импульса изменяется в пределах $\Delta V_{\text{ст}}^{\oplus} = 6,3 \div 6,8$ км/с, тормозного (для эллиптической орбиты) — $\Delta V_{\text{т}}^{\oplus} = 2,3 \div 2,5$ км/с. Суммарная характеристическая скорость $V_{\text{хх}} = 8,6 \div 9,3$ км/с.

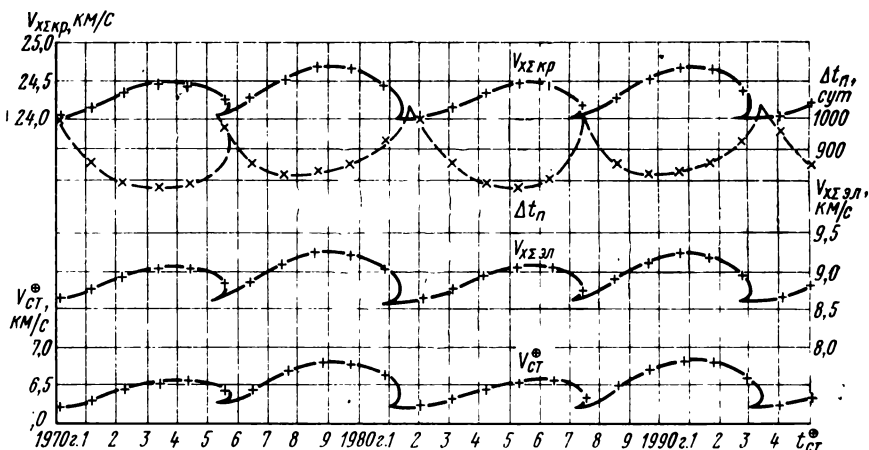


Рис. 6.3.5. Характеристики оптимальных траекторий полета на орбиту искусственного спутника Юпитера (траектории 1-го полувитка)

Циклы полетов к Юпитеру происходят примерно через $T_{\text{с}}^4 \approx 1,092$ года. Период великих противостояний этой планеты $T_{\text{в.п}}^4 \approx 11,9$ года.

При изменении параметров орбиты спутника планеты характеристики оптимальной траектории перелета практически не меняются. Тормозной импульс может быть пересчитан для любой орбиты спутника при известном значении скорости на входе в сферу действия планеты $V_{\infty}^{\text{пл}}$.

Глава VII ● ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНО-БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕЖПЛАНЕТНЫХ АППАРАТОВ С УЧЕТОМ ПРОТЯЖЕННОСТИ АКТИВНЫХ УЧАСТКОВ ПОЛЕТА

§ 1. ОПТИМИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ ПРОЕКТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ПЛАНЕТОЦЕНТРИЧЕСКИХ УЧАСТКОВ ПОЛЕТА МЕЖПЛАНЕТНЫХ АППАРАТОВ

Введение кусочно-конической аппроксимации баллистической траектории полета позволяет создать, рассматривая движение аппарата в планетоцентрических координатах, методы выбора основных проектных параметров и расчета активного участка разгона или торможения, требуемой гиперболической орбиты отрыва или прибытия межпланетного аппарата при известных характеристиках гелиоцентрического участка межорбитального перелета. При этом главным требованием является стыковка гелиоцентрического участка с гиперболическими орбитами отрыва и прибытия. Решение задачи стыковки во многом зависит от метода и точности определения гелиоцентрического участка. Если он рассчитан без учета возмущающего влияния Земли и планеты назначения и протяженности грависфер планет, когда точка выхода КЛА из грависферы Земли и точка входа КЛА в грависферу планеты условно совмещаются соответственно с точками пересечения орбиты межорбитального перелета КЛА с орбитами Земли и планеты назначения, то решение задачи стыковки участков обеспечивается при равенстве

$$\bar{V}_{\infty 0} = \bar{V}_0 - \bar{V}_{\oplus}, \quad \bar{V}_{\infty k} = \bar{V}_k - \bar{V}_{\text{пл}}. \quad (7.1.1)$$

Здесь $\bar{V}_{\infty 0}$, $\bar{V}_{\infty k}$ — гиперболические избытки скоростей орбит отрыва и прибытия соответственно, достигаемые КЛА при движении в планетоцентрических координатах. Такой путь решения наиболее прост и в основном удовлетворяет уровню точности проектных разработок КЛА.

При другом методе расчета гелиоцентрического участка межпланетного перелета, когда учитывается протяженность грависфер планет, величины векторов $(\bar{V}_0 - \bar{V}_{\oplus})$ и $(\bar{V}_k - \bar{V}_{\text{пл}})$ будут

зависеть от места выхода и входа КЛА на грависферах планет. В этом случае удовлетворительное решение внутренних и внешней задач можно найти только при их совместном рассмотрении.

Вначале решение задачи выбора основных проектных параметров КЛА и их оптимизации, расчет активного участка полета и гиперболических орбит в грависфере планеты будем рассматривать при допущении, что стыковка гелиоцентрического участка

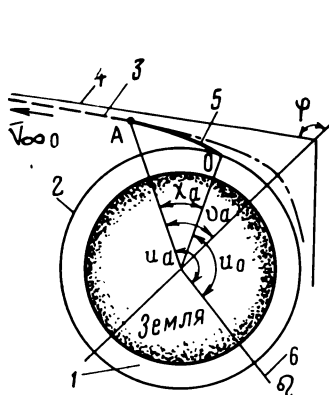


Рис. 7.1.1. Схема участка разгона:

А—точка конца активного участка; О—начальная точка активного участка разгона (1—плоскость промежуточной орбиты; 2—промежуточная орбита; 3—гипербола отрыва; 4—асимптота; 5—активный участок разгона; 6—линия восходящего угла плоскости орбиты отрыва)

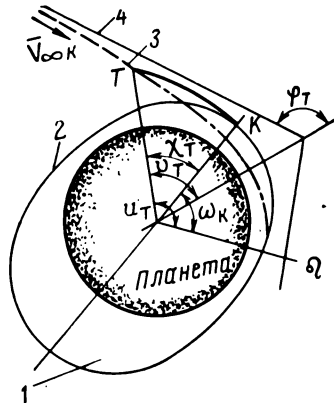


Рис. 7.1.2. Схема участка торможения:

Т—точка начала активного участка торможения; К—точка конца активного участка торможения (1—плоскость конечной орбиты; 2—конечная орбита; 3—гипербола прибытия; 4—асимптота)

с гиперболическими орбитами отрыва и прибытия обеспечивается выполнением равенств (7.1.1). Соблюдению равенств (7.1.1) отвечают условия

$$V_{\infty 0} = |\bar{V}_0 - \bar{V}_{\oplus}|, \quad \bar{V}_{\infty 0}^0 = (\bar{V}_0 - \bar{V}_{\oplus})/V_{\infty 0}, \quad (7.1.2)$$

$$V_{\infty K} = |\bar{V}_K - \bar{V}_{пл}|, \quad \bar{V}_{\infty K}^0 = (\bar{V}_K - \bar{V}_{пл})/V_{\infty K}, \quad (7.1.3)$$

где $V_{\infty 0}$, $|\bar{V}_0 - \bar{V}_{\oplus}|$, $V_{\infty K}$, $|\bar{V}_K - \bar{V}_{пл}|$ — скалярные значения векторов;

$\bar{V}_{\infty 0}^0$, $\bar{V}_{\infty K}^0$ — единичные векторы.

Предположим, что из определения гелиоцентрического участка известны скалярные значения $V_{\infty 0}$, $V_{\infty K}$ и единичные векторы $\bar{V}_{\infty 0}^0$, $\bar{V}_{\infty K}^0$. Поэтому выбирать основные проектные параметры КЛА μ_K и n_0 , определять активные участки разгона или торможения и гиперболическую орбиту отрыва или прибытия необходимо таким образом, чтобы были удовлетворены заданные величины $V_{\infty 0}$ и $\bar{V}_{\infty 0}^0$ или $V_{\infty K}$ и $\bar{V}_{\infty K}^0$. При решении поставленной задачи будем предполагать, что активные участки разгона и тор-

можения, гиперболические орбиты отрыва и прибытия лежат в плоскостях промежуточной и конечной орбит соответственно (рис. 7.1.1 и 7.1.2), которые должны быть определены. Это отвечает требованию получения наименьших энергозатрат, поскольку отсутствуют затраты на пространственный маневр.

Пусть выполнение требований (7.1.2) будет возлагаться на *разгонный модуль* межпланетного аппарата, а требований (7.1.3) — на *тормозной модуль*. Перейдем к задачам баллистического проектирования разгонного и тормозного модулей, т. е. к выбору проектно-баллистических характеристик разгонного и тормозного модулей.

Разгонный модуль межпланетного аппарата

Задача проектирования разгонного модуля заключается в выборе таких проектно-баллистических характеристик, при которых удовлетворялись бы заданные значения $V_{\infty 0}$ и $\bar{V}_{\infty 0}^0$. Важно найти решение, при котором относительная полезная нагрузка $\mu_{п.н}$ достигает максимального значения ($\max \mu_{п.н}$). Проектно-баллистические характеристики, соответствующие $\max \mu_{п.н}$, будем называть *оптимальными проектно-баллистическими характеристиками разгонного модуля*. Поиск оптимальных проектно-баллистических характеристик составляет главную задачу баллистического проектирования разгонного модуля. Его особенностью является постоянство и независимость от проектно-баллистических характеристик значений $V_{\infty 0}$ и $\bar{V}_{\infty 0}^0$, заданных из решения внешней задачи. Указанная особенность позволяет всю задачу баллистического проектирования разбить на две: *проектно-баллистическую и навигационно-баллистическую*.

Содержанием проектно-баллистической задачи является выбор основных проектных параметров модуля μ_k и n_0 , а также определение активного участка полета и кеплеровских элементов гиперболической орбиты отрыва, характеризующих ее форму и размеры, при которых удовлетворяется заданное значение $V_{\infty 0}$. Оптимизация проектно-баллистических характеристик связана с решением только этой задачи.

Решение навигационно-баллистической задачи заключается в определении положения плоскости промежуточной орбиты (в которой, по предположению, находится и активный участок разгона и гиперболическая орбита отрыва) в геоцентрической системе координат и точки старта КЛА с промежуточной орбиты, которые допускают выполнение условия для $\bar{V}_{\infty 0}^0$. Разумеется, что решать данную задачу следует с учетом требований к выбору плоскости промежуточной орбиты для выведения на орбиту ракетой-носителем максимальной полезной нагрузки.

Проектно-баллистическая задача

Основная трудность решения проектно-баллистической задачи состоит в правильном представлении и оценке активного участка полета разгонного модуля. В общем случае относительно точные характеристики управляемого полета можно получить только в результате численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения (см. § 2 и 3 гл. I). В этом случае для решения главной задачи — выбора оптимального режима движения и оптимальных основных проектных параметров — необходимо обратиться к математической теории оптимального проектирования летательного аппарата (см. например [43]). При таком подходе решения хотя и получаются точными, но достигаются они нелегко и немалой ценой. Каждый раз приходится сталкиваться с «проклятием» сходимости итерационного процесса и оценкой точности удовлетворения краевым и другим критериальным условиям. Поэтому не всегда и не каждый конструктор может позволить себе «роскошь» обращения к таким весьма трудоемким алгоритмам оптимизации. (Разумеется, что в ряде случаев и на определенном этапе проектных разработок КЛА бывает трудно обойтись без них.)

В связи с этим становится понятной полезность приближенных методов расчета проектно-баллистических характеристик КЛА. Приближенным методом расчета активного участка и выбора основных проектных параметров КЛА можно достаточно оперативно и без привлечения больших ЭЦВМ проводить оценку кинематических параметров активного участка и выбирать основные проектные параметры разгонного модуля, удовлетворяющие заданному значению $V_{\infty 0}$. Таким является метод, подробно изложенный в § 3 гл. II. Его ценность еще и в том, что он позволяет приближенно определить оптимальные значения основных проектных параметров.

Имея в виду, что тангенциальное управление вектором тяги, как показано в § 3 гл. II, наиболее близко к оптимальному, воспользуемся приближенным интегрированием системы дифференциальных уравнений управляемого движения при таком управлении. Тогда согласно (2.3.19), (2.3.23) и (2.3.28), (2.3.32) имеем

$$\tilde{v}_a = v_{нл.а} - \frac{1 - 1/\tilde{r}_a}{v_{ea}}; \quad (7.1.4)$$

$$\cos \theta_a = \frac{v_{ea} v_{ma}}{\tilde{r}_a [v_{ea} v_{ma} - (1 - 1/\tilde{r}_a)]}; \quad (7.1.5)$$

$$\tilde{r}_a = 1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra}; \quad (7.1.6)$$

$$\chi_a = -\frac{d}{n_0} \int_1^{\mu_k} \frac{v_{ил}}{\left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_r\right)} d\mu \quad (7.1.7a)$$

или

$$\chi_a = \frac{d}{n_0} \left[(1+w)(1-\mu_k) + \mu_k w \ln \mu_k - 2 \left(\frac{\sigma}{n_0} \right)^2 I_{\chi^2} + \right. \\ \left. + 3 \left(\frac{\sigma}{n_0} \right)^4 I_{\chi^4} - 4 \left(\frac{\sigma}{n_0} \right)^6 I_{\chi^6} + 5 \left(\frac{\sigma}{n_0} \right)^8 I_{\chi^8} \right], \quad (7.1.7b)$$

где

$$v_{ил,a} = 1 - w \ln \mu_k, \quad v_{ea} = 1 - 0,5w \ln \mu_k, \quad (7.1.8) \\ v_{ma} = 1 - 0,64w \ln \mu_k.$$

Поскольку гиперболический избыток скорости орбиты отрыва

$$V_{\infty 0} = \frac{f m_{\oplus}}{a},$$

то постоянная интеграла энергии в конце активного участка должна быть

$$h_{u\kappa} = V_{\infty 0}^2 \quad (7.1.9a)$$

или в относительных величинах

$$h = \tilde{v}_{\infty}^2, \quad (7.1.9b)$$

где

$$h = \frac{h_{u\kappa}}{V_{кр.о}^2}; \quad \tilde{v}_{\infty} = \frac{V_{\infty 0}}{V_{кр.о}};$$

$V_{кр.о} = \sqrt{\frac{f m_{\oplus}}{r_0}}$ — круговая скорость круговой промежуточной орбиты с радиусом r_0 .

В конце активного участка разгона согласно интегралу энергии должно выполняться следующее равенство:

$$\tilde{v}_a^2 - \frac{2}{\tilde{r}_a} = \tilde{v}_{\infty}^2.$$

Подставляя в это уравнение значения $\tilde{v}_a$ и $\tilde{r}_a$ согласно (7.1.4) и (7.1.6), найдем

$$\tilde{v}_{\infty}^2 = \frac{\left[\left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra} \right) - \frac{\sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra}}{v_{ea} v_{ил,a}} \right]^2}{\left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra} \right)^2 - \frac{2}{1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_{ra}}} v_{ил,a} \quad (7.1.10)$$

Таким образом, требование об удовлетворении заданного гиперболического избытка скорости V_{∞} может быть связано с выполнением равенства (7.1.10).

При заданной высоте круговой промежуточной орбиты и известных характеристиках топлива двигательной установки правая часть уравнения (7.1.10) зависит только от основных проектных параметров μ_k и n_0 . Поэтому выбор основных проектных параметров связан с решением уравнения (7.1.10) относительно μ_k или n_0 . Кроме того, уравнение (7.1.10) позволяет определить зависимость n_0 от μ_k или μ_k от n_0 , соблюдение которой при выборе μ_k или n_0 позволяет говорить об удовлетворении первого равенства (7.1.2). Решая уравнение (7.1.10) относительно n_0 , получим

$$n_0 = \frac{\omega I_{ra}}{\tilde{r}_0^2 \sqrt{2} \arcsin q}, \quad (7.1.11)$$

где

$$q = \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{v_{ea}^2} (\tilde{v}_{\infty}^2 - p_1^2) + (1 - p_2)^2} - (1 - p_2)}{\tilde{v}_{\infty}^2 - p_1^2} - 1 \right]^{1/2}; \quad (7.1.12)$$

$$p_1 = \frac{v_{ea} v_{на} - 1}{v_{ea}}, \quad p_2 = \frac{p_1}{v_{ea}}. \quad (7.1.13)$$

В другой форме уравнение (7.1.11) представим так:

$$n_0 = \frac{N}{\tilde{r}_0^2}, \quad (7.1.14)$$

где

$$N = \frac{\omega I_{ra}}{\sqrt{2} \arcsin q}. \quad (7.1.15)$$

Уравнение (7.1.11) или (7.1.14) при заданном значении $\tilde{v}_{\infty}$ и известных данных $\tilde{r}_0$ и ω позволяет рассчитать n_0 в зависимости от μ_k . Правда, следует иметь в виду, что выбор μ_k при заданном $\tilde{v}_{\infty}$ ограничен верхним $\mu_{k,в}$ и нижним $\mu_{k,н}$ пределом. Верхний предел $\mu_{k,в}$ соответствует импульсному изменению скорости, что отвечает равенству $\sin^2 \frac{\sigma}{n_0} I_r = 0$ вследствие $n_0 \rightarrow \infty$ и согласно (7.1.10) приводит к условию

$$v_{нд.а} = \sqrt{2 + \tilde{v}_{\infty}^2}$$

и, следовательно, согласно (7.1.8) к равенству

$$\mu_{k,в} = \exp \left[- \frac{\sqrt{2 + \tilde{v}_{\infty}^2} - 1}{\omega} \right]. \quad (7.1.16)$$

Нижний предел $\mu_{к.н}$ определяется значениями $n_0 \approx 0,1$ или значениями подрадикальных выражений (7.1.12), близких к нулю.

Расчет n_0 по формуле (7.1.14) можно значительно упростить, если функцию N затабулировать по $\tilde{v}_\infty$, ω и μ_k в пределах $\mu_{к.н} < \mu_k < \mu_{к.в.}$, меняющихся в зависимости от $\tilde{v}_\infty$ и ω .

Оптимизация основных проектных параметров μ_k и n_0 разгонного модуля

Произвольный выбор μ_k в ранее указанных пределах может привести к таким значениям n_0 , при которых разгон КЛА до заданного значения $h_{у.к} = V_{\infty}^2$ приведет к значительно заниженным величинам относительной полезной нагрузки $\mu_{п.н}$. Следовательно, нужно уметь выбирать такие μ_k и n_0 , при которых заданное значение $\tilde{v}_\infty$ достигается при максимальной относительной полезной нагрузке $\mu_{п.н}$.

Относительную полезную нагрузку можно выразить в виде следующей зависимости или проектного уравнения (см., например [42, приложение])

$$\mu_{п.н} = f_{пр}(\mu_k, n_0, \gamma_i), \quad (7.1.17)$$

где γ_i — проектно-весовые коэффициенты, значения которых определяются из статистики.

Задача формулируется так: найти оптимальные значения μ_k и n_0 , при которых заданное значение $\tilde{v}_\infty$ достигается при максимальной $\mu_{п.н}$, выражаемой зависимостью (7.1.17). Поскольку требуется удовлетворить заданному $\tilde{v}_\infty$, то значения n_0 связаны с μ_k уравнением (7.1.11) или (7.1.14). Тогда необходимым условием максимума $\mu_{п.н}$ является уравнение

$$\frac{\partial \mu_{п.н}}{\partial \mu_k} = \left(\frac{\partial f_{пр}}{\partial \mu_k} \right)_{n_0} + \left(\frac{\partial f_{пр}}{\partial n_0} \right)_{\mu_k} \frac{\partial n_0}{\partial \mu_k} = 0.$$

Если $f_{пр}$ линейно зависит от μ_k и n_0 , то $A_\mu = \frac{\partial f_{пр}}{\partial \mu_k}$ и $A_n = -\frac{\partial f_{пр}}{\partial n_0}$ не зависят от них, а условие максимума выражается в виде

$$\frac{A_\mu}{A_n} = \frac{\partial n_0}{\partial \mu_k}. \quad (7.1.18)$$

Имея в виду уравнения (7.1.14) и (7.1.15), условие максимального значения $\mu_{п.н}$ (7.1.18) представим следующим образом:

$$\frac{A_\mu}{A_n} = \frac{1}{\tilde{r}_0^2} \frac{\partial N}{\partial \mu_k} \quad (7.1.19a)$$

или

$$\frac{A_\mu}{A_n} - \frac{N}{\tilde{r}_0^2} \left(\frac{\frac{\partial I_{ra}}{\partial \mu_k}}{I_{ra}} - \frac{\frac{\partial q}{\partial \mu_k}}{\sqrt{1-q^2} \arcsin q} \right) = 0. \quad (7.1.19b)$$

Принимая во внимание выражения для q (7.1.12) и для I_{ra} (2.3.29), последнее уравнение приведем к виду

$$\frac{A_p}{A_n} - \frac{N}{\tilde{r}_0^2} \left[\frac{v_{ил a}}{I_{ra}} \left(1 - \frac{1}{v_{ea} v_{ma}} \right)^{1/2} - \frac{\frac{\partial m}{\partial \mu_k}}{2 \sqrt{(m-1)(2-m)} \arcsin \sqrt{m-1}} \right] = 0, \quad (7.1.19b)$$

где

$$m = \frac{p_3 + p_2 - 1}{\tilde{v}_\infty^2 - p_1^2}, \quad p_3 = \left[\frac{1}{v_{ea}^2} (\tilde{v}_\infty^2 - p_1^2) + (p_2 - 1)^2 \right]^{1/2}, \quad (7.1.20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial \mu_k} = & - \frac{w}{\mu_k (\tilde{v}_\infty^2 - p_1^2)} \left\{ \left(1 + \frac{0,5}{v_{ea}^2} \right) \left(2m p_1 - \frac{1/p_3 - 1}{v_{ea}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{0,5}{v_{ea}^2} \left[(1/p_3 - 1) p_1 - \frac{\tilde{v}_\infty^2}{v_{ea} p_3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.1.20b)$$

Уравнения (7.1.19) позволяют при заданном $\tilde{v}_\infty$ определить оптимальное значение μ_k^{opt} . Отметим, что конечное значение производной $\frac{\partial n_0}{\partial \mu_k}$ существует при $1 < m < 2$ [см. (7.1.19b)]. Это в какой-то мере позволяет определить диапазон μ_k , в котором существует μ_k^{opt} . Анализ показал, что при $m=1$ $\mu_k = \mu_{k, в}$, а при $m=2$ μ_k , равное своему нижнему значению $\mu_{k, н}$, удовлетворяет уравнению

$$\ln \mu_{k, н} = - \frac{(v_\infty^2 + 1)^{1/2} + \sqrt{[(v_\infty^2 + 1)^{1/2} + 1]^2 + 4 - 3}}{2w}.$$

Таким образом, алгоритм решения главной задачи баллистического проектирования состоит в следующем: путем решения при заданном $\tilde{v}_\infty$ трансцендентного уравнения (7.1.19) определяется оптимальное значение μ_k^{opt} ; далее по формуле (7.1.14) при вычисленном μ_k^{opt} определяется оптимальное значение тяговооруженности n_0^{opt} . Решение задачи значительно облегчается, если величина $\frac{\partial N}{\partial \mu_k}$ затабулирована в зависимости от $\tilde{v}_\infty$, w и μ_k .

Полученный алгоритм оптимизации основных проектных параметров довольно прост и позволяет быстро и оперативно рассчитывать μ_k^{opt} и n_0^{opt} . Примечательно, что он обходится без численного интегрирования системы дифференциальных уравнений управляемого движения КЛА и без решения вариационной задачи, что позволило избежать краевой задачи. Кроме того, простота алгоритма удачно сочетается с требуемой точностью расчетов μ_k^{opt} и n_0^{opt} . Так, ошибки в вычислении μ_k^{opt} и n_0^{opt} при заданном $\tilde{v}_\infty$

не превышают 0,3 и 4% соответственно, причем при верхних значениях ошибок μ_k^{opt} и n_0^{opt} ошибки в вычислении $\mu_{\text{д.н}}$ не превышают 0,4%.

Примечание. При расчете $\mu_{\text{д.н}}$ проектное уравнение (7.1.17) обычно выражается в виде [42]

$$\mu_{\text{д.н}} = \frac{1 + a_{\text{т.о}}}{1 - \mu_{\text{кон}}} \mu_k - \frac{\gamma_{\text{д.у}}}{1 - \mu_{\text{кон}}} n_0 - \frac{a_{\text{т.о}} + \mu_{\text{кон}}}{1 - \mu_{\text{кон}}}, \quad (7.1.21)$$

где $a_{\text{т.о}}$ — коэффициент топливного отсека;

$\mu_{\text{кон}}$ — относительный вес различных конструктивных элементов;

$\gamma_{\text{д.у}}$ — относительный вес двигательной установки.

В предполагаемом диапазоне изменения тяги двигателя вес двигательной установки $G_{\text{д.у}}$ с хорошей степенью точности можно представить в виде линейной зависимости от тяги P .

$$G_{\text{д.у}} = \frac{\partial G_{\text{д.у}}}{\partial P} P + \left(G_{\text{д.у}}^0 - \frac{\partial G_{\text{д.у}}}{\partial P} P^0 \right),$$

где $G_{\text{д.у}}^0, P^0$ — значения $G_{\text{д.у}}$ и P в начале рассматриваемого диапазона изменения тяги.

Отсюда

$$\frac{G_{\text{д.у}}}{P} = \gamma_{\text{д.у}} = \gamma_P + \frac{G_{\text{д.у}}^0 - \gamma_P P^0}{n_0 G_0},$$

где

$$\gamma_P = \frac{\partial G_{\text{д.у}}}{\partial P}.$$

Учитывая принятые зависимости, получим

$$\frac{A_\mu}{A_n} = \frac{1 + a_{\text{т.о}}}{\gamma_P}.$$

Иногда в первом приближении принимают $G_{\text{д.у}}^0$ и P^0 равными нулю, что

приводит к равенству $\gamma_{\text{д.у}} = \gamma_P = \frac{\partial G_{\text{д.у}}}{\partial P}$.

На рис. 7.1.3—7.1.6 даны зависимости производной $\frac{\partial n_0}{\partial \mu_k}$, определенной численным образом в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения на ЭЦВМ, от n_0 и μ_k при различных значениях $V_{\infty 0}$. Примечательно, что кривые $\partial n_0 / \partial \mu_k$ в зависимости от n_0 при $P_{\text{уд}} = 450$ с образуют довольно узкий пучок, который несколько расширяется при $P_{\text{уд}} = 1000$ с. Поэтому оптимальные значения n_0 при характерных величинах $\gamma_{\text{д.у}}$ и $a_{\text{т.о}}$ находятся при $P_{\text{уд}} = 450$ с в небольшом диапазоне, хотя диапазон изменения $V_{\infty 0}$ довольно большой — от 2 до 16 км/с. Так, например, при $\gamma_{\text{д.у}} = \gamma_P = 0,05 \div 0,02$ оптимальные значения n_0^{opt} лежат в пределах $n_0^{\text{opt}} = 0,3 \div 0,5$ при изменении $V_{\infty 0} = 2 \div 16$ км/с. Если в будущем увеличение $P_{\text{уд}}$ до 800—1000 с не будет сопровождаться изменением диапазона возможных зна-

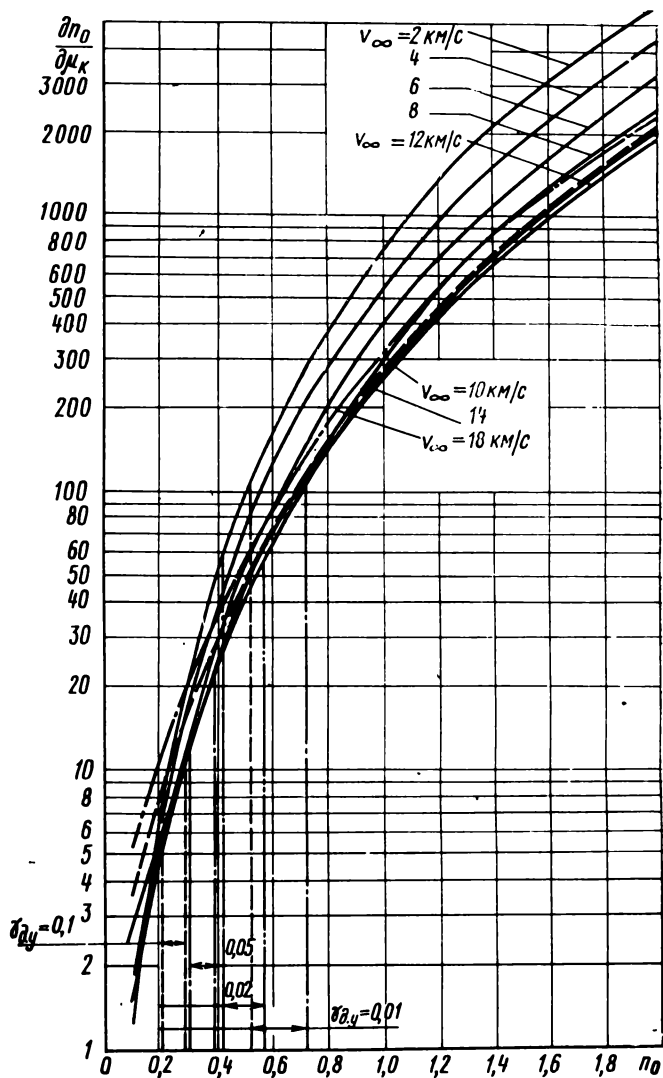


Рис. 7.1.3. Изменение производной $\frac{\partial v_0}{\partial \mu_k}$ в зависимости от тяговооруженности при различных значениях гиперболического избытка скорости и при $P_{уд} = 450$ с

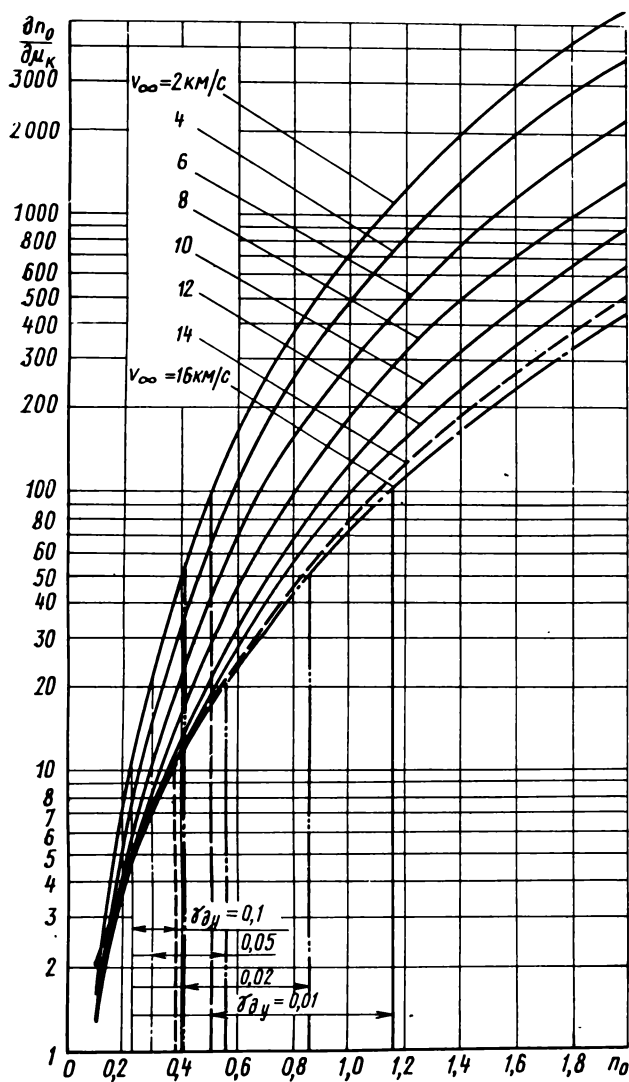


Рис. 7.1.4. Изменение производной $\frac{\partial \rho_0}{\partial \mu_k}$ в зависимости от тяговооруженности при различных значениях гиперболического избытка скорости и при $P_{yd} = 1000$ с

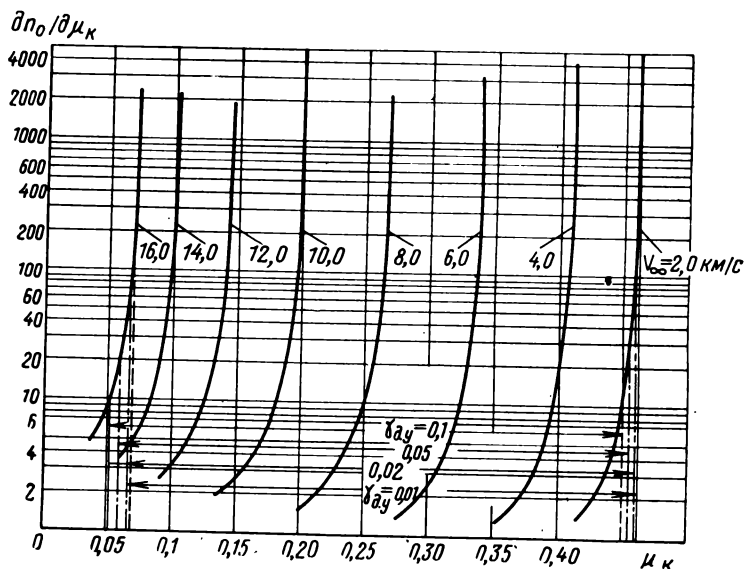


Рис. 7.1.5. Изменение производной $dp_0/\delta\mu_k$ в зависимости от относительного конечного веса при различных значениях гиперболического избытка скорости и при $P_{уд}=450$ с

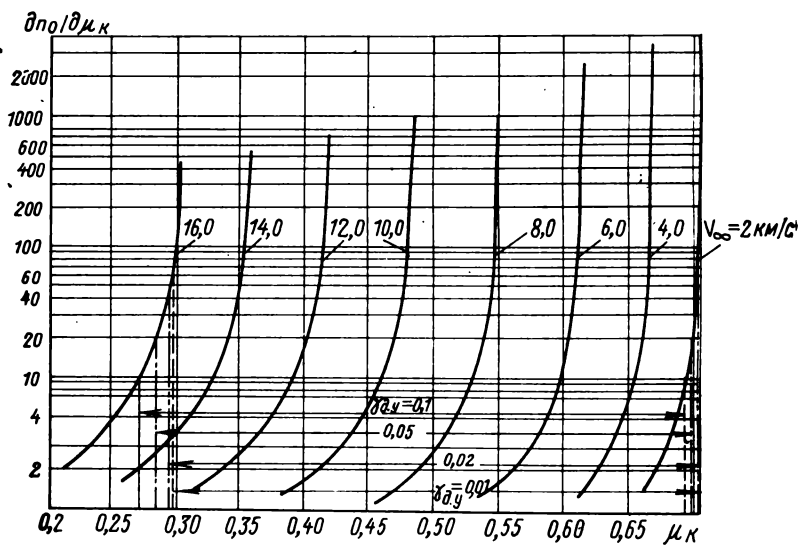


Рис. 7.1.6. Изменение производной $dp_0/\delta\mu_k$ в зависимости от относительного конечного веса при различных значениях гиперболического избытка скорости и при $P_{уд}=1000$ с

чений $\gamma_p = \gamma_{д.у}$, то верхняя граница оптимальных значений n_0^{opt} будет продвигаться к $n_0 = 1,0$.

После вычисления μ_k и n_0 или μ_k^{opt} и n_0^{opt} следует, обращаясь к зависимостям (7.1.4—7.1.7), определить кинематические параметры конца активного участка $\tilde{v}_a$, θ_a , $\tilde{r}_a$ и χ_a . В результате можно найти кеплеровские элементы гиперболической орбиты отрыва $a_{г.о}$, $p_{г.о}$ и $e_{г.о}$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_{г.о} &= \frac{1}{\tilde{v}_\infty^2}, \quad \tilde{p}_{г.о} = (\tilde{v}_a \tilde{r}_a \cos \theta_a)^2, \\ e_{г.о} &= [1 + (\tilde{v}_\infty \tilde{v}_a \tilde{r}_a \cos \theta_a)^2]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.22)$$

$$\text{где } a_{г.о} = \frac{a_{г.о}}{r_0}, \quad p_{г.о} = \frac{p_{г.о}}{r_0}. \quad (7.1.23)$$

Тогда угол асимптоты найдется из уравнения

$$\cos \varphi = -[1 + (\tilde{v}_\infty \tilde{v}_a \tilde{r}_a \cos \theta_a)^2]^{-1/2}. \quad (7.1.24)$$

Таким образом, проектно-баллистическая задача полностью решена.

Навигационно-баллистическая задача

После решения проектно-баллистической задачи нужно определить плоскость орбиты отрыва, совпадающей по условию с плоскостью промежуточной орбиты, и точку схода на промежуточной орбите, при которых возможно удовлетворение условия

$$\bar{V}_{\infty 0}^0 = (\bar{V}_0 - \bar{V}_{\oplus}) / V_{\infty 0}.$$

Это и составляет содержание навигационно-баллистической задачи.

В дальнейшем единичный вектор $\bar{V}_{\infty 0}^0$ будем называть *вектором цели*. Он является входной величиной для навигационно-баллистической задачи. Используя уравнение (1.3.52), запишем условие реализации вектора цели

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\infty 0}^0 &= \left[1 - \frac{r_a}{p_{г.о}} [1 - \cos(\varphi - v_a)] \right] \frac{v_a}{V_{\infty 0}} \bar{V}_a^0 - \left[\sqrt{\frac{f m_{\oplus}}{p_{г.о}}} \sin(\varphi - v_a) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_a v_a \sin \theta_a}{p_{г.о}} [1 - \cos(\varphi - v_a)] \right] \frac{\tilde{r}_a^0}{V_{\infty 0}}. \end{aligned} \quad (7.1.25)$$

Переходя к относительным величинам, *условие реализации вектора цели* (7.1.25) представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\infty 0}^0 = & \left[1 - \frac{\tilde{r}_a}{\tilde{p}_{r.0}} (1 - \cos \beta) \right] \frac{\tilde{v}_a}{\tilde{v}_{\infty}} \bar{V}_a^0 - \\ & - [\sin \beta - \operatorname{tg} \theta_a (1 - \cos \beta)] \frac{\tilde{r}_a^0}{\tilde{v}_{\infty} \sqrt{\tilde{p}_{r.0}}}, \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

где

$$\beta = \varphi - v_a, \quad \cos v_a = \left(\frac{\tilde{p}_{r.0}}{\tilde{r}_a} - 1 \right) \frac{1}{e_{r.0}}. \quad (7.1.27)$$

Следовательно, решение навигационно-баллистической задачи заключается в выборе единичных векторов $\bar{V}_a^0$ и $\bar{r}_a^0$, удовлетворяющих векторному уравнению (7.1.26).

Направление радиуса-вектора точки окончания активного участка разгонного модуля в экваториальной геоцентрической системе координат будет определяться кеплеровскими угловыми элементами орбиты отрыва: Ω — долготой восходящего узла; i — углом наклона плоскости орбиты, ω — угловым расстоянием перицентра и u_a — аргументом широты (см. § 3 гл. I). Следовательно, будет иметь место

$$\begin{aligned} \bar{r}_a^0 = & (\cos u_a \cos \Omega - \sin u_a \sin \Omega \cos i) \bar{i}_x + (\cos u_a \sin \Omega + \\ & + \sin u_a \cos \Omega \cos i) \bar{i}_y + (\sin u_a \sin i) \bar{i}_z, \end{aligned} \quad (7.1.28)$$

где $\bar{i}_x$, $\bar{i}_y$, $\bar{i}_z$ — орты геоцентрической экваториальной системы. После дифференцирования уравнения (7.1.28) по времени и некоторых преобразований найдем

$$\begin{aligned} \bar{V}_a^0 = & -[\sin(u_a - \theta_a) \cos \Omega + \cos(u_a - \theta_a) \sin \Omega \cos i] \bar{i}_x - \\ & - [\sin(u_a - \theta_a) \sin \Omega - \cos(u_a - \theta_a) \cos \Omega \cos i] \bar{i}_y + \\ & + [\cos(u_a - \theta_a) \sin i] \bar{i}_z. \end{aligned} \quad (7.1.29)$$

Единичный вектор гиперболического избытка скорости представим в виде

$$\bar{V}_{\infty 0}^0 = (\cos \alpha_0 \cos \delta_0) \bar{i}_x + (\sin \alpha_0 \cos \delta_0) \bar{i}_y + \sin \delta_0 \bar{i}_z, \quad (7.1.30)$$

где α_0 — прямое восхождение вектора цели;
 δ_0 — склонение вектора цели (см. § 1 гл. IV).

Принимая во внимание уравнения (7. 1. 28) — (7. 1. 30), векторное уравнение (7. 1. 26) выразим в виде следующих трех скалярных:

$$\cos \alpha_0 \cos \delta_0 = -A_v \{ [\sin (u_a - \theta_a) + B_r \cos u_a] \cos \Omega + \\ + [\cos (u_a - \theta_a) - B_r \sin u_a] \sin \Omega \cos i \}; \quad (7. 1. 31)$$

$$\sin \alpha_0 \cos \delta_0 = -A_v \{ [\sin (u_a - \theta_a) + B_r \cos u_a] \sin \Omega - \\ - [\cos (u_a - \theta_a) - B_r \sin u_a] \cos \Omega \cos i \}; \quad (7. 1. 32)$$

$$\sin \delta_0 = A_v [\cos (u_a - \theta_a) - B_r \sin u_a] \sin i \quad (7. 1. 33a)$$

или

$$\sin i = \frac{\sin \delta_0}{A_v [\cos (u_a - \theta_a) - B_r \sin u_a]}, \quad (7. 1. 33б)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_v &= \left[1 - \frac{\tilde{r}_a}{\tilde{p}_{r.o}} (1 - \cos \beta) \right] \frac{\tilde{v}_a}{\tilde{v}_\infty}, \\ A_r &= [\sin \beta - \operatorname{tg} \theta_a (1 - \cos \beta)] \frac{1}{\tilde{v}_\infty \sqrt{\tilde{p}_{r.o}}}, \\ B_r &= A_r / A_v. \end{aligned} \right\} \quad (7. 1. 33в)$$

Уравнения (7. 1. 31) — (7. 1. 33) являются *условием реализации вектора цели в скалярном виде*. Решение навигационно-баллистической задачи теперь конкретизируется: оно заключается в удовлетворении скалярного условия реализации вектора цели.

Умножив уравнения (7. 1. 31) и (7. 1. 32) на $\cos \Omega$ и на $\sin \Omega$ соответственно и сложив, после преобразований получим

$$\cos (\Omega - \alpha_0) = -\frac{A_v}{\cos \delta_0} [\sin (u_a - \theta_a) + B_r \cos u_a]. \quad (7. 1. 34)$$

После умножения уравнений (7. 1. 31) и (7. 1. 32) на $-\sin \Omega$ и на $\cos \Omega$ соответственно и сложения, в результате преобразований найдем

$$\sin (\Omega - \alpha_0) = -\frac{A_v \cos i}{\cos \delta_0} [\cos (u_a - \theta_a) - B_r \sin u_a] \quad (7. 1. 35a)$$

или с учетом (7. 1. 33)

$$\sin (\Omega - \alpha_0) = -\operatorname{tg} \delta_0 \operatorname{ctg} i. \quad (7. 1. 35б)$$

Решая уравнение (7.1.33) относительно $\sin u_a$ и $\cos u_a$, приходим к следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sin u_a &= \frac{b \cdot c \pm \sqrt{1 + b^2 - c^2}}{1 + b^2}, \\ \cos u_a &= \frac{c \mp b \sqrt{1 + b^2 - c^2}}{1 + b^2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.36a)$$

где

$$b = \frac{\sin \theta_a - B_r}{\cos \theta_a}, \quad c = \frac{\sin \delta_0}{A_r \sin i \cos \theta_a}. \quad (7.1.36b)$$

Согласно определению u_a (см. рис. 7.1.1) угловое расстояние точки схода модуля с промежуточной орбиты от линии восходящего узла

$$u_0 = u_a - \chi_a. \quad (7.1.37)$$

Таким образом, при известных кинематических параметрах конца активного участка разгона соотношения (7.1.35) — (7.1.37) позволяют в зависимости от угла наклона плоскости промежуточной орбиты (или орбиты отрыва) i и задания $\tilde{v}_\infty$, α_0 , δ_0 определить долготу восходящего узла Ω и точку схода модуля с промежуточной орбиты. Казалось бы, навигационно-баллистическая задача решена. Однако остается открытым вопрос о выборе угла наклона плоскости промежуточной орбиты i .

Вообще говоря, выбор угла наклона плоскости промежуточной орбиты i ограничен различными требованиями к участку выведения КЛА ракетой-носителем. Активный участок выведения КЛА ракетой-носителем для уменьшения энергетических потерь на пространственный маневр обычно должен выполняться так, чтобы он находился в плоскости промежуточной орбиты. В этом случае выбор угла i может быть ограничен допустимыми значениями азимута безопасности и кинематическими связями, возникающими из требования нахождения в плоскости орбиты отрыва активного участка выведения КЛА ракетой-носителем, активного участка разгонного модуля и орбиты отрыва. Кинематические ограничения выражаются следующими неравенствами (см. § 1 гл. IV):

$$\left. \begin{aligned} \cos i &\leq \pm \cos \delta_0; \\ \cos i &\leq \pm \cos \varphi_{ст}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.38)$$

где $\varphi_{ст}$ — географическая широта точки запуска (космодрома).

Для полного использования скорости вращения Земли при выведении КЛА на промежуточную орбиту ракетой-носителем угол i должен быть как можно меньшим. В зависимости от значений $\varphi_{ст}$ и δ_0 угол i принимает различную наименьшую величину. Если склонение цели δ_0 больше географической широты точки запуска $\varphi_{ст}$, т. е. $\delta_0 \geq \varphi_{ст}$, то с учетом условий (7.1.38) получим

$$\cos i_{\min} = \pm \cos \delta_0. \quad (7.1.39a)$$

Если же склонение цели δ_0 меньше географической широты точки запуска φ_c , т. е. $\delta_0 < \varphi_{ct}$, то с учетом условий (7.1.38) будем иметь

$$\cos i_{\min} = \pm \cos \varphi_{ct}. \quad (7.1.396)$$

Азимут A — угол между меридианной плоскостью точки запуска и плоскостью промежуточной орбиты в момент старта ракеты-носителя, отсчитываемый в направлении на восток, может быть определен из соотношения (см. § 1 гл. IV)

$$\sin A = \frac{\pm \cos i}{\cos \varphi_{ct}}.$$

Поэтому в случае существования ограничения на выбор азимута A , выражаемого предельным азимутом A_{np} , при наличии неравенства

$$\sin A_{np} < \frac{\pm \cos i_{\min}}{\cos \varphi_{ct}},$$

угол i следует определять из уравнения

$$\cos i_{np} = \pm \cos \varphi_{ct} \sin A_{np}. \quad (7.1.40)$$

Таким образом, формулы (7.1.39) и (7.1.39а) позволяют однозначно выбрать угол наклона плоскости промежуточной орбиты i и, используя соотношения (7.1.35) — (7.1.37), до конца решить навигационно-баллистическую задачу.

Интересен случай $\delta_0 \geq \varphi_{ct}$, когда согласно (7.1.40) можно принять $\cos i_{\min} = \pm \cos \delta_0$, т. е.

$$i_{\min} = |\delta_0| \quad \text{или} \quad i_{\min} = \pi - |\delta_0|.$$

Полученные равенства благодаря соотношениям (7.1.33) — (7.1.35) приводят к следующим уравнениям:

$$\sin(\Omega - \alpha_0) = -\operatorname{sign}(\operatorname{tg} \delta_0 \operatorname{ctg} i), \quad (7.1.41)$$

$$\sin(u_a - \theta_a) + B_r \cos u_a = 0,$$

$$A_v [\cos(u_a - \theta_a) - B_r \sin u_a] = \operatorname{sign}(\sin \delta_0).$$

Совместно решая два последних уравнения, получим *

$$\cos u_a = \operatorname{sign}(\sin \delta_0) \sin \beta. \quad (7.1.42)$$

Следовательно, в случае $\delta_0 \geq \varphi_{ct}$ положение плоскости промежуточной орбиты и точка схода разгонного модуля определяются из равенств (7.1.39), (7.1.41) и (7.1.42) весьма просто.

* Можно сказать, что решение (7.1.42) совместимо с указанными двумя уравнениями.

Тормозной модуль межпланетного аппарата

Тормозной модуль должен обеспечить выход межпланетного аппарата на конечную орбиту около планеты назначения, когда гиперболическая орбита прибытия предопределяется условиями (7.1.3). Поэтому задача баллистического проектирования тормозного модуля разбивается на две: проектно-баллистическую и навигационно-баллистическую.

Проектно-баллистическая задача

Содержанием проектно-баллистической задачи является выбор основных проектных параметров тормозного модуля μ_k и n_0 , определение кеплеровских элементов орбиты прибытия, характеризующих ее форму и размеры, и точки включения на ней тормозной двигательной установки, обеспечивающей выход модуля на конечную орбиту. Предполагается, что модуль выводит межпланетный аппарат в перигентр конечной орбиты.

Для решения поставленной задачи воспользуемся приближенным методом интегрирования дифференциальных уравнений движения при тангенциальном управлении (см. § 3 гл. II), имея в виду ранее здесь сказанное об этом методе. Тогда согласно уравнениям (2.3.39) — (2.3.41) и (2.3.43) будем иметь

$$\tilde{v}_\tau = v_{ил.\tau} - \frac{\left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_\tau}\right) \tilde{v}_{кр.к}^2}{v_{e\tau}}; \quad (7.1.43)$$

$$\cos \theta_\tau = \frac{v_{m\tau} v_{e\tau}}{\tilde{r}_\tau \left[v_{m\tau} v_{e\tau} - \tilde{v}_{кр.к}^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_\tau}\right) \right]}; \quad (7.1.44)$$

$$\tilde{r}_\tau = 1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0^*} I_{r\tau}; \quad (7.1.45)$$

$$\chi_\tau = -\frac{d_\tau}{n_0^*} \int_1^{\mu_k} \frac{v_{ил}}{\left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0^*} I_r\right)^2} d\mu$$

или

$$\begin{aligned} \chi_\tau = \frac{d}{n_0^*} & \left[(1 + w)(1 - \mu_k) + \mu_k w \ln \mu_k - 2 \left(\frac{\sigma}{n_0^*} \right)^2 I_{\chi\tau^2} + \right. \\ & \left. + 3 \left(\frac{\sigma}{n_0^*} \right)^4 I_{\chi\tau^4} - 4 \left(\frac{\sigma}{n_0^*} \right)^6 I_{\chi\tau^6} + 5 \left(\frac{\sigma}{n_0^*} \right)^8 I_{\chi\tau^8} \right], \end{aligned} \quad (7.1.46)$$

где

$$w = \frac{W}{V_{кр.к}} \cdot \frac{V_{кр.к}}{V_{кк}} = w_{кр} \cdot \tilde{v}_{кр.к}; \quad \tilde{r}_\tau = \frac{r_\tau}{r_{кк}};$$

$$I_{r\tau} = - \int_1^{\mu_k} v_{ил} \left(1 - \frac{\tilde{v}_{кр.к}^2}{v_{e\tau} v_m} \right)^{1/2} d\mu.$$

В начальной точке активного участка торможения интеграл энергии

$$V_{\tau}^2 - \frac{2fm_{\text{пл}}}{r_{\tau}} = V_{\infty}^2.$$

Учитывая соотношения (7.1.43) и (7.1.45), запишем его в относительных величинах следующим образом:

$$\tilde{v}_{\infty}^2 = \left[\frac{v_{\text{ил.т}} v_{e\tau} - \tilde{v}_{\text{кр.к}}^2}{v_{e\tau}} + \frac{\tilde{v}_{\text{кр.к}}^2}{v_{e\tau} \left(1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0^*} I_{r\tau} \right)} \right]^2 \frac{1}{\tilde{v}_{\text{кр.к}}^2} - \frac{2}{1 + \sin^2 \frac{\sigma}{n_0^*} I_{r\tau}}, \quad (7.1.47)$$

где

$$\tilde{v}_{\infty} = V_{\infty} / \sqrt{f \frac{m_{\text{пл}}}{r_{\text{кк}}}}.$$

Приняв

$$\left. \begin{aligned} p_{1\tau} &= \frac{v_{\text{ил.т}} v_{e\tau} - \tilde{v}_{\text{кр.к}}^2}{v_{e\tau}}, \quad p_{2\tau} = \frac{p_{1\tau}}{v_{e\tau}}, \\ q_{\tau} &= \left\{ \left[\sqrt{(1-p_{2\tau})^2 + \frac{1}{v_{e\tau}^2} (\tilde{v}_{\infty}^2 \tilde{v}_{\text{кр.к}}^2 - p_{1\tau}^2)} - (1-p_{2\tau}) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\tilde{v}_{\text{кр.к}}^2}{\tilde{v}_{\infty}^2 \tilde{v}_{\text{кр.к}}^2 - p_{1\tau}^2} - 1 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.48a)$$

после решения последнего уравнения относительно n_0^* получим

$$n_0^* = \frac{v_{\text{к}}^2 w I_{r\tau}}{\tilde{r}_{\text{к}}^2 \sqrt{2} \arcsin q_{\tau}} \quad (7.1.48b)$$

или

$$n_0^* = \frac{N_{\tau}}{r_{\text{к}}^2} v_{\text{к}}^2, \quad (7.1.49a)$$

где

$$N_{\tau} = \frac{w I_{r\tau}}{\sqrt{2} \arcsin q_{\tau}}. \quad (7.1.49b)$$

Значения N_{τ} в зависимости от $\mu_{\text{к}}$ при различных значениях $\tilde{v}_{\infty}$, $\tilde{v}_{\text{кр.к}}$ или $v_{\text{к}} = \frac{1}{\tilde{v}_{\text{кр.к}}}$ и w можно затабулировать.

Здесь, так же как и в предыдущей задаче, выбор $\mu_{\text{к}}$ ограничен верхним $\mu_{\text{к.в}}$ и нижним $\mu_{\text{к.н}}$ значениями. Верхняя граница значений определяется из следующего уравнения:

$$\mu_{\text{к.в}} = \exp \left(- \frac{\sqrt{2 + \tilde{v}_{\infty}^2} - v_{\text{к}}}{w v_{\text{к}}} \right).$$

Уравнения (7.1.48) или (7.1.49) дают возможность в зависимости от μ_k определить значения начальной тяговооруженности n_0 , позволяющие тормозному модулю при заданном значении $\tilde{v}_{\infty k}$ выйти в перигентр конечной орбиты при тангенциальном управлении тягой. Имея в виду соотношения (7.1.43) — (7.1.46), можно говорить в определенном смысле о решении проектно-баллистической задачи. Однако оптимизация проектно-баллистических решений и здесь остается главной задачей.

Оптимизация основных проектных параметров μ_k и n_0 тормозного модуля

Проектно-весовое уравнение для тормозного модуля можно представить также в виде (7.1.17). Тогда условием максимального значения μ_k будет уравнение

$$\frac{\partial \mu_{п.н}}{\partial \mu_k} = A_\mu - \frac{A_n^* v_k^2}{\tilde{r}_k^2} \frac{\partial N_\tau}{\partial \mu_k} = 0$$

или

$$\frac{A_\mu}{A_n^*} = \frac{v_k^2}{\tilde{r}_k^2} \frac{\partial N_\tau}{\partial \mu_k}.$$

Здесь согласно (7.1.49) имеем

$$A_n^* = \frac{g_{0пл}}{g_{0\oplus}} A_n,$$

$$\frac{\partial N_\tau}{\partial \mu_k} = N_\tau \left[\frac{v_{ил.т}}{I_{r\tau}} \left(1 - \frac{\tilde{v}_{кр.к}^2}{v_{e\tau} v_{m\tau}} \right)^{1/2} - \frac{\frac{\partial m_\tau}{\partial \mu_k}}{2 \sqrt{(m_1 - 1)(2 - m_\tau)} \arcsin \sqrt{m_\tau - 1}} \right], \quad (7.1.50б)$$

$$m_\tau = \frac{\tilde{v}_{кр.к}^2 (p_{3\tau} + p_{2\tau} - 1)}{\tilde{v}_{кр.к}^2 \tilde{v}_{\infty k}^2 - p_{1\tau}^2}, \quad (7.1.50в)$$

$$p_{1\tau} = \frac{v_{e\tau} v_{ил.т} - \tilde{v}_{кр.к}^2}{v_{e\tau}}, \quad p_{2\tau} = \frac{p_{1\tau}}{v_{e\tau}},$$

$$p_{3\tau} = \left[\frac{1}{v_{e\tau}^2} (\tilde{v}_{кр.к}^2 \tilde{v}_{\infty k}^2 - p_{1\tau}^2) + (p_{2\tau} - 1)^2 \right]^{1/2}, \quad (7.1.50г)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_\tau}{\partial \mu_k} = & - \frac{w}{\mu_k (\tilde{v}_{кр.к}^2 \tilde{v}_{\infty k}^2 - p_{1\tau}^2)} \left\{ \left(1 + \frac{0,5 \tilde{v}_{кр.к}^2}{v_{e\tau}^2} \right) \left(\frac{2 m_\tau p_{1\tau}}{\tilde{v}_{кр.к}^2} - \frac{1/p_{3\tau} - 1}{v_{e\tau}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{0,5}{v_{e\tau}^2} \left[\left(\frac{1}{p_{3\tau}} - 1 \right) p_{1\tau} - \frac{\tilde{v}_{кр.к}^2 \tilde{v}_{\infty k}^2}{v_{e\tau} p_{3\tau}} \right] \right\}. \quad (7.1.50д) \end{aligned}$$

Совместно решая уравнения (7.1.49) и (7.1.50), можно однозначно определить оптимальные значения основных проектных

параметров тормозного модуля μ_k^{opt} и n_o^{opt} , при которых маневр торможения будет совершаться при максимальном значении $\mu_{\text{п.н. max}}$. Далее, обращаясь к формулам (7.1.43) — (7.1.46), найдем кинематические параметры начальной точки активного участка торможения, позволяющие модулю выйти в перигецентр конечной орбиты с заданными значениями радиуса перигецентра $r_{\text{кп}}$ и апоцентра $r_{\text{ка}}$ (или a_k и e_k).

Значения $\partial N_T / \partial \mu_k$ в зависимости от μ_k при фиксированных значениях $\tilde{v}_{\infty k}$, $\tilde{v}_{\text{кр.к}}$ и ω можно затабулировать.

Навигационно-баллистическая задача

Решение навигационно-баллистической задачи зависит от условия задания конечной орбиты. Если положение конечной орбиты не фиксировано, то требуемого положения ее плоскости можно добиваться путем соответствующего выбора места включения тормозной установки. Имея в виду метод решения навигационно-баллистической задачи разгона, зависимость угла наклона i_k и долготы восходящего узла Ω_k плоскости конечной орбиты от аргумента широты точки включения тормозной установки u_T представим следующим образом:

$$\sin i_k = \frac{\sin \delta_k}{A_T [\cos (u_T - \theta_T) - B_T \sin u_T]} ; \quad (7.1.51)$$

$$\sin (\Omega_k - \alpha_k) = -\operatorname{tg} \delta_k \operatorname{ctg} i_k ; \quad (7.1.52a)$$

$$\cos (\Omega_k - \alpha_k) = -\frac{A_T}{\cos \delta_k} [\sin (u_T - \theta_T) + B_T \cos u_T], \quad (7.1.52b)$$

где α_k , δ_k — прямое восхождение и склонение вектора цели $\bar{V}_{\infty k}^0$ в планетоцентрической системе координат;

$$A_T = \left[1 - \frac{\tilde{r}_T}{\tilde{p}_{\text{г.п}}} (1 - \cos \beta_T) \right] \frac{\tilde{v}_T}{\tilde{v}_{\infty k}},$$

$$B_T = [\sin \beta_T - \operatorname{tg} \theta_T (1 - \cos \beta_T)] / \left[1 - \frac{\tilde{r}_T}{\tilde{p}_{\text{г.п}}} (1 - \cos \beta_T) \right] \tilde{v}_T \sqrt{\tilde{p}_{\text{г.п}}},$$

$\tilde{p}_{\text{г.п}} = \frac{p_{\text{г.п}}}{r_{\text{кп}}}$ — относительный фокальный параметр гиперболической орбиты прибытия.

Так как имеет место равенство (см. рис. 7.1.2)

$$u_T = \chi_T + \omega_k, \quad (7.1.53)$$

то путем соответствующего подбора углового расстояния перигецентра конечной орбиты ω_k по соотношениям (7.1.51) и (7.1.52) можно найти желаемое значение i_k или Ω_k . Таким образом, навигационно-баллистическая задача будет решена.

§ 2. МЕТОД РАСЧЕТА И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНО-БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕЖПЛАНЕТНОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ СТЫКОВКИ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОГО УЧАСТКА С ПЛАНЕТОЦЕНТРИЧЕСКИМИ УЧАСТКАМИ ТРАЕКТОРИИ

В предыдущем параграфе дано решение задачи оптимизации основных проектных параметров и активного участка полета межпланетного аппарата в сфере действия планеты при заданном векторе гиперболического избытка скорости $\vec{V}_\infty$. Предполагалось, что гелиоцентрический участок перелета рассчитывается без учета возмущающего влияния Земли, планеты назначения и протяженности сфер действия планет, когда точка выхода КЛА из сферы действия Земли и точки входа КЛА в сферу действия планеты условно совмещаются соответственно с точками пересечения орбиты межорбитального перелета КЛА с орбитами Земли и планеты назначения. Такое допущение, удовлетворяющее уровню точности проектных разработок КЛА, позволяет довольно просто решить задачу стыковки гелиоцентрического участка с гиперболическими орбитами отрыва и прибытия путем выполнения условий (7.1.1).

Существенно, что полученные в § 1 решения основывались на предположении о невлиянии основных проектных параметров КЛА и активных участков разгона и торможения на определение гелиоцентрического участка межорбитального перелета. Однако такое допущение не всегда правомерно. С другой стороны, представляет интерес и для практики весьма полезен и удобен метод расчета и оптимизации проектно-баллистических характеристик многоступенчатого межпланетного аппарата, в котором задачи отрыва и захвата (внутренние задачи) и задача определения гелиоцентрического участка межорбитального перелета рассматриваются в комплексе и с учетом их взаимного влияния. Разработке и изложению именно такого метода и посвящен данный параграф. В результате дается алгоритм определения как оптимальной «единой» траектории межпланетного перелета от промежуточной до конечной орбиты около планеты, так и оптимальных основных проектных параметров многоступенчатого межпланетного аппарата μ_{ki} и n_{0i} ($i=1, \dots, n$).

Условно общую задачу определения «единой» траектории межпланетного перелета и основных проектных параметров многоступенчатого межпланетного аппарата разобьем на три задачи: *задачу баллистического расчета гелиоцентрического участка межпланетного перелета, проектную задачу и навигационную задачу* *.

* Здесь, как и в § 1, термин «навигационная задача» надо понимать условно. Он относится только к этапу проектно-баллистических разработок КЛА.

Задача баллистического расчета гелиоцентрического участка

Задачей баллистического расчета гелиоцентрического участка межпланетного перелета является определение кинематических параметров в начальной (точка P_0 на рис. 7.2.1) и в конечной (точка P_K) точках переходной орбиты, времени перелета Δt и значений гиперболических избытков скорости $V_{\infty 0}$ и $V_{\infty K}$, которые являются исходными данными для решения проектной задачи.

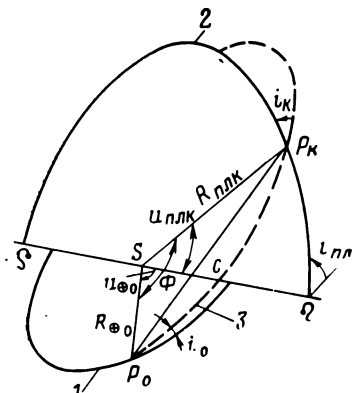


Рис. 7.2.1. Кинематическая схема гелиоцентрического участка межпланетного перелета: 1 — орбита планеты отправления (Земли); 2 — орбита планеты назначения; 3 — гелиоцентрический участок

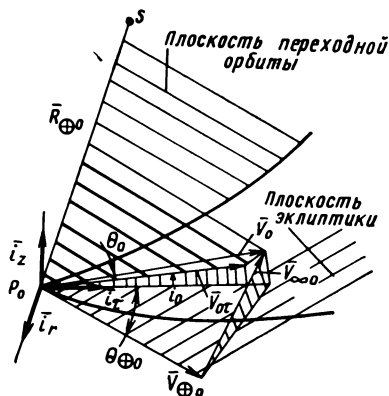


Рис. 7.2.2. Треугольник скоростей в точке P_0

В прямоугольной системе координат с началом, совпадающим с положением Земли в начальный момент (точка P_0), вектор гелиоцентрической скорости КЛА $\bar{V}_0$ можно выразить в виде

$$\overline{V}_0 = V_{0r} \cdot \bar{i}_r + V_{0\tau} \cos i_0 \cdot \bar{i}_\tau + V_{0z} \sin i_0 \bar{i}_z.$$

Здесь V_{0r} , $V_{0\tau}$ — проекции гелиоцентрической скорости КЛА V_0 соответственно на радиус $R_{\oplus 0}$ и на нормаль к нему в плоскости переходной орбиты; $\vec{i}_r$, $\vec{i}_\tau$, $\vec{i}_z$ — орты (рис. 7.2.2); $\vec{i}_r$ — параллелен радиусу-вектору $\vec{R}_{\oplus 0}$ точки P_0 и направлен от Солнца; $\vec{i}_z$ — параллелен оси Z гелиоцентрической эклиптической системы и совпадает с ее положительным направлением; $\vec{i}_\tau$ — образует правую систему; i_0 — угол наклона плоскости переходной орбиты к плоскости эклиптики.

Определение гиперболических избытков скоростей $V_{\infty 0}$ и $V_{\infty K}$

Принимая во внимание треугольник скоростей в точке P_0 (см. рис. 7.2.2), вектор гиперболического избытка скорости $\tilde{V}_{\infty 0}$ представим так:

$$\tilde{V}_{\infty 0} = (V_{0r} - V_{\oplus r}) \bar{i}_r + (V_{0\tau} \cos i_0 - V_{\oplus \tau}) \bar{i}_\tau + V_{0\tau} \sin i_0 \bar{i}_z. \quad (7.2.1)$$

Отсюда получим

$$\tilde{v}_{\infty 0} = x_0 [(V_{0r} - V_{\oplus r})^2 + (V_{0\tau} \cos i_0 - V_{\oplus \tau})^2 + (V_{0\tau} \sin i_0)^2]^{1/2}, \quad (7.2.2)$$

где

$$\tilde{v}_{\infty 0} = \frac{V_{\infty 0}}{\sqrt{\frac{f m_{\oplus}}{r_0}}} \quad (\text{см. § 1 стр. 219});$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{m_{\odot} r_0}{m_{\oplus} a_{\oplus}}};$$

$$\tilde{V}_{0r} = \frac{V_{0r}}{\sqrt{\frac{f m_{\odot}}{a_{\oplus}}}}, \quad \tilde{V}_{0\tau} = \frac{V_{0\tau}}{\sqrt{\frac{f m_{\odot}}{a_{\oplus}}}},$$

$$\tilde{V}_{\oplus r} = \frac{V_{\oplus r}}{\sqrt{f m_{\odot} / a_{\oplus}}}, \quad \tilde{V}_{\oplus \tau} = \frac{V_{\oplus \tau}}{\sqrt{f m_{\odot} / a_{\oplus}}}; *$$

$a_{\oplus}$ — большая полуось орбиты Земли;

r_0 — радиус круговой промежуточной орбиты.

Учитывая выражения

$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}_{0r} &= \tilde{V}_0 \sin \theta_0, & \tilde{V}_{0\tau} &= \tilde{V}_0 \cos \theta_0, \\ \tilde{V}_0 &= \sqrt{\left(2 - \frac{R_0}{a}\right) \frac{1}{R_0}}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.3)$$

где $R_0 = R_{\oplus 0} / a_{\oplus}$; θ_0 — траекторный угол переходной орбиты в точке P_0 и a — большая полуось переходной орбиты, формулу (7.2.2) преобразуем к виду

$$\tilde{v}_{\infty 0} = \frac{x_0}{\sqrt{R_0}} \left[4 - \frac{R_0}{a} \left(1 + \frac{a}{a_{\oplus}} \right) - \frac{2}{R_0} \sqrt{p_{\oplus} p} (\cos i_0 + \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \theta_{\oplus 0}) \right]^{1/2}, \quad (7.2.4a)$$

где p — фокальный параметр переходной орбиты.

* Расчет кинематических параметров движения планет см. приложение.

В первом приближении ввиду того, что $e_{\oplus} = 0,01657 \ll 1$, можно принять орбиту Земли круговой, т.е. $e_{\oplus 0} = 0$, что позволяет (7.2.4) представить так:

$$\tilde{v}_{\infty 0} = x_0 \left(3 - \frac{1}{a} - 2 \sqrt{p} \cos i_0 \right)^{1/2}. \quad (7.2.46)$$

Аналогичным образом гиперболический избыток скорости $\tilde{v}_{\infty k}$ в точке P_k выразим в виде следующей зависимости:

$$\tilde{v}_{\infty k} = x_k [(\tilde{V}_{kr} - \tilde{V}_{плr})^2 + (\tilde{V}_{k\tau} \cos i_k - \tilde{V}_{пл\tau})^2 + (\tilde{V}_{k\tau} \sin i_k)^2]^{1/2}. \quad (7.2.5)$$

Здесь

$$\tilde{v}_{\infty k} = \frac{V_{\infty k}}{\sqrt{f m_{пл}/r_{k\pi}}} \quad (\text{см. § 1, стр. 233});$$

$$\tilde{V}_{kr} = \frac{V_{kr}}{\sqrt{\frac{f m_{\odot}}{a_{\oplus}}}}, \quad \tilde{V}_{k\tau} = \frac{V_{k\tau}}{\sqrt{\frac{f m_{\odot}}{a_{\oplus}}}}, \quad \tilde{V}_{плr} = \frac{V_{плr}}{\sqrt{\frac{f m_{\odot}}{a_{\oplus}}}},$$

$$\tilde{V}_{пл\tau} = \frac{V_{пл\tau}}{\sqrt{\frac{f m_{\odot}}{a_{\oplus}}}};$$

V_{kr} , $V_{k\tau}$ — проекции гелиоцентрической скорости КЛА V_k соответственно на радиус $R_{пл.k}$ и на нормаль к нему в плоскости переходной орбиты;

$$x_k = \sqrt{\frac{m_{\odot} r_{k\pi}}{m_{пл} a_{\oplus}}};$$

$r_{k\pi}$ — радиус перицентра конечной орбиты около планеты;

i_k — угол наклона плоскости переходной орбиты к плоскости орбиты планеты назначения (см. рис. 7.2.1).

Принимая во внимание равенства

$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}_{kr} &= \tilde{V}_k \sin \theta_k, \quad \tilde{V}_{k\tau} = \tilde{V}_k \cos \theta_k, \\ \tilde{V}_k &= \sqrt{\frac{1}{R_k} \left(2 - \frac{R_k}{a} \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.6)$$

где $R_k = \frac{R_{плk}}{R_{\oplus 0}}$ и θ_k — траекторный угол переходной орбиты в точке P_k , уравнение (7.2.5) приведем к виду

$$\tilde{v}_{\infty k} = \frac{x_k}{\sqrt{R_k}} \left[4 - \frac{R_k}{a} \left(1 + \frac{a}{a_{пл}} \right) - 2 \frac{V_{плп}}{R_k} (\cos i_k + \operatorname{tg} \theta_k \operatorname{tg} \theta_{пл.k}) \right]^{1/2}, \quad (7.2.7a)$$

Поскольку для планет $e_{\text{пл}} < 0,095$ (кроме Меркурия и Плутона, см. приложение), то, допуская в первом приближении орбиты планет назначения круговыми, получим

$$\tilde{v}_{\infty k} = \frac{r_k}{\sqrt{R_k}} \left(3 - \frac{R_k}{a} - 2 \sqrt{\frac{p}{R_k}} \cos i_k \right)^{1/2}. \quad (7.2.76)$$

Определение угловых переменных Φ , i_0 , i_k

Важным параметром, во многом определяющим кинематические характеристики гелиоцентрического участка межпланетного перелета, является угол перелета Φ — угловое расстояние от точки P_0 до точки P_k в плоскости переходной орбиты (см. рис. 7.2.1). Согласно теореме косинусов сферической тригонометрии из сферического треугольника $\triangle P_k'P_0'$ (см. рис. 7.2.1) найдем

$$\cos \Phi = \cos u_{\oplus 0} \cos u_{\text{пл.к}} - \sin u_{\oplus 0} \sin u_{\text{пл.к}} \cos i_{\text{пл}}, * \quad (7.2.8a)$$

где

$$u_{\oplus 0} = 2\pi - (\tilde{u}_{\oplus 0} - \Omega_{\text{пл.к}});$$

P_0' , P_k' — проекции точек P_0 и P_k на единичную сферу.

Так как $\Phi < (u_{\text{пл.к}} + u_{\oplus 0})$, то квадрант угла Φ в основном определяется квадрантом угла $(u_{\text{пл.к}} + u_{\oplus 0})$, т. е.

$$\sin \Phi = \text{sign} [\sin (u_{\text{пл.к}} + u_{\oplus 0})] \sqrt{1 - \cos^2 \Phi}. \quad (7.2.8b)$$

Нетрудно показать, что при $u_{\text{пл.к}} + u_{\oplus 0} = \pi$ имеет место неравенство $(\pi - i_{\text{пл}}) < \Phi < \pi$. Из сферического треугольника $\triangle P_k'P_0'$ согласно теоремам синуса и косинуса получим

$$\left. \begin{aligned} \sin i_0 &= \sin i_{\text{пл}} \frac{\sin u_{\text{пл.к}}}{\sin \Phi}; \\ \cos i_0 &= \frac{\cos u_{\text{пл.к}} - \cos u_{\oplus 0} \cos \Phi}{\sin u_{\oplus 0} \sin \Phi}; \end{aligned} \right\} \quad (7.2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin i_k &= \sin i_{\text{пл}} \frac{\sin u_{\oplus 0}}{\sin \Phi}; \\ \cos i_k &= \frac{\cos u_{\oplus 0} - \cos u_{\text{пл.к}} \cos \Phi}{\sin u_{\text{пл.к}} \sin \Phi}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.10)$$

Определение времени межпланетного перелета на гелиоцентрическом участке Δt и фокального параметра p переходной орбиты

В данном случае время перелета Δt от точки P_0 до точки P_k и фокальный параметр переходной орбиты p проще и удобнее определять, базируясь на метод Ламберта (см. § 1 гл. II). В за-

* Алгоритм расчета $\tilde{u}_{\oplus 0}$ и $u_{\text{пл.к}}$ см. приложение.

висимости от типа переходной орбиты время перелета Δt и фокальный параметр выражаются следующими зависимостями:

эллиптическая переходная орбита

$$\left. \begin{aligned} \Delta t &= \frac{a^{3/2}}{2} \left\{ 2N + 1 + \frac{1}{\pi} [\text{sign}(\Delta t_m - \Delta t)(\epsilon - \sin \epsilon - \pi) - \right. \\ &\quad \left. - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)] \right\}, \\ \sin \frac{\epsilon}{2} &= \left(\frac{s}{2a} \right)^{1/2}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \left(\frac{s-c}{2a} \right)^{1/2}, \\ c^2 &= R_0^2 + R_k^2 - 2R_0 R_k \cos \Phi, \quad s = \frac{1}{2}(R_0 + R_k + c), \\ \Delta t_m &= \frac{s^{3/2}}{4\sqrt{2}} \left[2N + 1 - \frac{\text{sign} \sin \Phi}{\pi} (\delta_m - \sin \delta_m) \right], \\ \sin \frac{\delta_m}{2} &= \left(\frac{s-c}{s} \right)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.11\text{э})$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{R_0 R_k (1 - \cos \Phi)}{2a \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(\epsilon - \gamma)}, \\ \gamma &= \delta [\text{sign}(\Delta t_m - \Delta t) \text{sign}(\sin \Phi)]; \end{aligned} \right\} \quad (7.2.12\text{э})$$

*параболическая переходная орбита **

$$\Delta t_{\text{пар}} = \frac{\sqrt{2}}{6\pi} [s^{3/2} - (s-c)^{3/2} \text{sign}(\sin \Phi)], \quad (7.2.11\text{п})$$

$$p = \frac{2(s-r_0)(s-r_k)}{c^2} [s^{1/2} + \text{sign}(\sin \Phi)(s-c)^{1/2}]^2; \quad (7.2.12\text{п})$$

*гиперболическая переходная орбита **

$$\left. \begin{aligned} \Delta t &= \frac{\sqrt{(-a)^3}}{2} [(\text{sh } \alpha - \alpha) - (\text{sh } \beta - \beta) \text{sign}(\sin \Phi)], \\ \text{sh } \frac{\alpha}{2} &= \left(-\frac{s}{2a} \right)^{1/2}, \quad \text{sh } \frac{\beta}{2} = \left(-\frac{s-c}{2a} \right)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.11\text{г})$$

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{R_0 R_k (1 - \cos \Phi)}{2a \text{sh}^2 \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)}, \\ \gamma &= \beta \text{sign}(\sin \Phi). \end{aligned} \right\} \quad (7.2.12\text{г})$$

* Реальные решения связаны с эллиптическими переходными орбитами. Обращение к параболическим и гиперболическим переходным орбитам диктуется поиском нужных решений.

Определение траекторных углов θ_0 и θ_K переходной орбиты

Воспользовавшись соотношениями (2.1.25), получим

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Phi - \sqrt{\frac{R_0}{R_K}} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \Phi \cos \frac{\Delta}{2}, \quad (7.2.13)$$

$$\operatorname{tg} \theta_K = \sqrt{\frac{R_K}{R_0}} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \Phi \cos \frac{\Delta}{2} - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Phi. \quad (7.2.14)$$

Здесь для эллиптических переходных орбит

$$\Delta = (2N + 1)\pi + (\varepsilon - \pi) \operatorname{sign}(\Delta t_m - \Delta t) - \delta \operatorname{sign}(\sin \Phi), \quad (7.2.15\text{э})$$

для гиперболических переходных орбит

$$\Delta = \alpha - \beta \operatorname{sign}(\sin \Phi). \quad (7.2.15\text{г})$$

Проектная задача

Содержанием проектной задачи является оптимизация основных проектных параметров n_{0i} и μ_{Ki} разгонного и тормозного модулей межпланетного аппарата. Ее решение связано с заданием исходных данных. Если речь идет о межпланетных полетах КЛА с промежуточной орбиты около Земли до конечной орбиты около планеты назначения, то в качестве исходных данных обычно рассматриваются *номинальная дата старта* t_0 — начальный момент времени (точка P_0) гелиоцентрического участка перелета или *номинальная дата прибытия* t_K — конечный момент времени (точка P_K) гелиоцентрического участка. В общем же случае к исходным данным они не относятся, и время перелета Δt и даты t_0 и t_K являются искомыми параметрами.

В случае задания даты t_0 или t_K и времени перелета Δt проектная задача сводится к задаче оптимизации основных проектных параметров разгонного и тормозного модулей при известных значениях гиперболических избытков скоростей $V_{\infty 0}$ и $V_{\infty K}$, решение которой изложено в § 1 данной главы. Такой вывод является следствием однозначного определения значений $V_{\infty 0}$ и $V_{\infty K}$ в результате решения задачи баллистического расчета гелиоцентрического участка межпланетного перелета при задании даты t_0 или t_K и времени перелета Δt .

В случае же задания только даты t_0 (или t_K) решение проектной задачи будет связано с взаимным влиянием основных проектных параметров многоступенчатого межпланетного аппарата и кинематических параметров гелиоцентрического участка.

Оптимизация μ_{ki} и n_{0i} ($i=1,2$) при задании t_0 или t_k и времени перелета Δt

Если исходными данными проектной задачи являются t_0 или t_k и Δt , то вследствие равенства

$$t_k = t_0 + \Delta t \quad (7.2.16)$$

это равносильно заданию номинальных дат старта и прибытия. Поэтому, имея в виду приложение, в котором дается алгоритм расчета положения планет в зависимости от T , можно считать известными $R_0, R_k, u_{\odot 0}, u_{\text{пл.к}}, i_{\text{пл}}, \theta_{\odot 0}, \theta_{\text{пл.к}}$ и $p_{\odot}, p_{\text{пл}}$.

Теперь, обращаясь к зависимости (7.2.8) — (7.2.10), найдем Φ, i_0 и i_k . Далее в результате решения уравнений (7.2.11) определим значения большой полуоси переходной орбиты a , что позволяет рассчитать на основе зависимостей (7.2.12) фокальный параметр переходной орбиты p и с помощью соотношений (7.2.13) — (7.2.14) траекторные углы θ_0 и θ_k . Кроме того, уравнения (7.2.3) и (7.2.6) дают возможность найти значения гелиоцентрических скоростей КЛА в начальной ($\vec{V}_0$) и конечной ($\vec{V}_k$) точках переходной орбиты.

Полученных данных вполне достаточно для однозначного определения из уравнений (7.2.4) и (7.2.7) гиперболических избытков скоростей $\tilde{v}_{\infty 0}$ и $\tilde{v}_{\infty k}$.

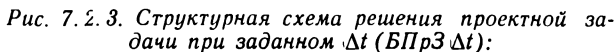
Таким образом, проектная задача при задании даты t_0 или t_k и времени перелета Δt после определения кеплеровских элементов переходной орбиты i_0, p и a , ее кинематических параметров в точках P_0 и P_k — V_0, θ_0 и V_k, θ_k и гиперболических избытков скоростей $\tilde{v}_{\infty 0}$ и $\tilde{v}_{\infty k}$ сводится к задаче оптимизации основных проектных параметров разгонного и тормозного модулей, которая подробно решена в § 1 данной главы. Структурная схема решения рассмотренной проектной задачи дана на рис. 7.2.3.

Вполне понятно, что если речь идет о межпланетном полете КЛА с промежуточной орбиты около Земли до планеты назначения с пролетом вблизи нее при заданных t_0 или t_k и Δt , то проектная задача после определения по изложенной методике (рис. 7.2.3) кеплеровских элементов переходной орбиты i_0, p и a , ее кинематических параметров $\tilde{v}_0, \theta_0$ в точке P_0 и гиперболического избытка скорости $\tilde{v}_{\infty 0}$ также сводится к задаче оптимизации основных проектных параметров разгонного модуля при известном $\tilde{v}_{\infty 0}$, рассмотренной в § 1.

Оптимизация основных проектных параметров μ_{ki} и n_{0i} ($i=1,2$), времени перелета Δt при задании t_0 или t_k

В предыдущей постановке проектной задачи на результаты баллистического расчета гелиоцентрического участка межпланетного перелета не оказывали влияния основные проектные пара-

242



БЭПл — блок расчета элементов планет; БУЭП — блок расчета угловых переменных; БИТВах — блок итерационного выбора большой полуоси орбиты перехода а; БСК — блок расчета гелиоцентрических скоростей $\tilde{V}_0$ и $\tilde{V}_K$ и гиперболических избытков скорости $\tilde{v}_{\infty 0}$ и $\tilde{v}_{\infty K}$; БИТВ μ_{kl}^{opt} — блок итерационного выбора оптимальных значений μ_{k1}^{opt} и μ_{k2}^{opt} .

этому гелиоцентрического участка и основных проектных параметров n_{0i} и μ_{ki} позволяет выдвинуть требование о таком их определении, при котором относительная полезная нагрузка μ_{pi} достигала бы максимального значения. Такой гелиоцентрический участок межпланетного перелета и такие значения времени пере-

лета Δt и основных проектных параметров μ_{ki} и n_{0i} будем называть оптимальными. Нахождение их связано с решением задачи на максимум $\mu_{п.н}$ при наличии связей в виде проектно-весовых и кинематических уравнений. Раскрывая эти связи, отметим ряд их особенностей.

Проектно-весовое уравнение двухступенчатого межпланетного аппарата выражается в виде

$$\mu_{п.н} = \mu_{0I} \cdot \mu_{0II},$$

где относительный полезный вес разгонного $\mu_{0I} = G_{0II}/G_0$ и тормозного модулей $\mu_{0II} = G_{п.н}/G_{0II}$ зависит от относительных значений весовых коэффициентов γ_{ji} и основных проектных параметров n_{0i} и μ_{ki} , т. е.

$$\mu_{0I} = \mu_{0I}(\mu_{k1}, n_{01}, \gamma_{j1}) \text{ и } \mu_{0II} = \mu_{0II}(\mu_{k2}, n_{02}, \gamma_{j2}).$$

Базируясь на интеграл энергии и зависимости $\tilde{v}_a$ и $\tilde{r}_a$ от μ_{ki} и n_{0i} и $\tilde{v}_T$ и $\tilde{r}_T$ от μ_{k2} и n_{02} , согласно (7. 1. 10) и (7. 1. 47) имеем

$$\tilde{v}_{\infty l} = \tilde{v}_{\infty l}(n_{0l}, \mu_{kl}) \quad (l=0, k; i=1, 2).$$

Учитывая уравнения (7. 2. 8) и (7. 2. 11) при наличии соотношений (7. 2. 9), (7. 2. 10) и (7. 2. 12)—(7. 2. 15), можно говорить о существовании зависимости Φ и a от времени перелета Δt . Поэтому согласно (7. 2. 4) и (7. 2. 7) имеем право записать

$$\tilde{v}_{\infty l} = \varphi_l(\Delta t) \quad (l=0, k).$$

Теперь задача о максимуме $\mu_{п.н}$ формулируется таким образом: найти такие значения Δt , μ_{ki} и n_{0i} , при которых достигается условие

$$\mu_{п.н \max} = \max_{n_{0l}, \mu_{ki}} \mu_{0I} \mu_{0II}$$

при наличии связей в виде

$$F_1 = \tilde{v}_{\infty 0}(n_{01}, \mu_{k1}) - \varphi_0(\Delta t) = 0,$$

$$F_2 = \tilde{v}_{\infty k}(n_{02}, \mu_{k2}) - \varphi_k(\Delta t) = 0.$$

Для решения поставленной задачи сформируем с помощью коэффициентов Лагранжа λ_j ($j=1, 2$) новую функцию J следующим образом:

$$J = \mu_{0I} \mu_{0II} + \sum_{j=1}^2 \lambda_j F_j.$$

Необходимым условием максимума J (или $\mu_{п.н}$) являются уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \mu_{к1}} &= \mu_{011} \frac{\partial \mu_{01}}{\partial \mu_{к1}} + \lambda_1 \frac{\partial \tilde{v}_{\infty 0}}{\partial \mu_{к1}} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial n_{01}} &= \mu_{011} \frac{\partial \mu_{01}}{\partial n_{01}} + \lambda_1 \frac{\partial \tilde{v}_{\infty 0}}{\partial n_{01}} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \mu_{к2}} &= \mu_{01} \frac{\partial \mu_{011}}{\partial \mu_{к2}} + \lambda_2 \frac{\partial \tilde{v}_{\infty к}}{\partial \mu_{к2}} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial n_{02}} &= \mu_{01} \frac{\partial \mu_{011}}{\partial n_{02}} + \lambda_2 \frac{\partial \tilde{v}_{\infty к}}{\partial n_{02}} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \Delta t} &= \lambda_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \Delta t} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_{к}}{\partial \Delta t} = 0.\end{aligned}$$

Исключая из полученной системы уравнений коэффициенты Лагранжа λ_1 и λ_2 , найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu_{01}/\partial \mu_{к1}}{\partial \mu_{01}/\partial n_{01}} + \frac{\partial \tilde{v}_{\infty 0}/\partial \mu_{к1}}{\partial \tilde{v}_{\infty 0}/\partial n_{01}} &= 0, \\ \frac{\partial \mu_{011}/\partial \mu_{к2}}{\partial \mu_{011}/\partial n_{02}} + \frac{\partial \tilde{v}_{\infty к}/\partial \mu_{к2}}{\partial \tilde{v}_{\infty к}/\partial n_{02}} &= 0, \\ \mu_{011} \frac{\partial \mu_{01}}{\partial \mu_{к1}} \frac{\partial \varphi_1/\partial \Delta t}{\partial \tilde{v}_{\infty 0}^2/\partial \mu_{к1}} + \mu_{01} \frac{\partial \mu_{011}}{\partial \mu_{к2}} \frac{\partial \varphi_2/\partial \Delta t}{\partial \tilde{v}_{\infty к}^2/\partial \mu_{к2}} &= 0\end{aligned}\quad (7.2.17)$$

или в другой форме

$$\frac{\partial \mu_{01}/\partial \mu_{к1}}{\partial \mu_{01}/\partial n_{01}} + \left(\frac{\partial n_{01}}{\partial \mu_{к1}} \right) \tilde{v}_{\infty 0} = 0, \quad (7.2.18)$$

$$\frac{\partial \mu_{011}/\partial \mu_{к2}}{\partial \mu_{011}/\partial n_{02}} + \left(\frac{\partial n_{02}}{\partial \mu_{к2}} \right) \tilde{v}_{\infty к} = 0, \quad (7.2.19)$$

$$\mu_{011} \frac{\partial \mu_{01}}{\partial \mu_{к1}} \frac{\partial \mu_{к1}}{\partial \Delta t} + \mu_{01} \frac{\partial \mu_{011}}{\partial \mu_{к2}} \frac{\partial \mu_{к2}}{\partial \Delta t} = 0. \quad (7.2.20)$$

Уравнения (7.2.18) и (7.2.19) с учетом равенств (7.1.11) и (7.1.49) являются условиями оптимизации соответственно n_{01} , $\mu_{к1}$ и n_{02} , $\mu_{к2}$ при постоянных значениях $\tilde{v}_{\infty 0}$ и $\tilde{v}_{\infty к}$. Интересно отметить, что они идентичны условиям оптимизации основных проектных параметров разгонного и тормозного модулей при заданных значениях $\tilde{v}_{\infty 0}$ и $\tilde{v}_{\infty к}$ (7.1.18) и (7.1.50), найденных в § 1.

Уравнение (7.2.20) является условием оптимизации времени полета Δt , и его выполнение во многом зависит от основных про-

ектных параметров μ_{ki} и n_{0i} многоступенчатого межпланетного аппарата. Этим оно принципиально отличается от известного условия оптимизации Δt , когда в качестве критерия оптимальности рассматривается сумма характеристических скоростей (или сумма абсолютных значений гиперболических избытков скоростей $\tilde{v}_{\infty 0}$ и $\tilde{v}_{\infty K}$), необходимых для межпланетного перелета с промежуточной до конечной орбиты около планеты назначения.

Проектная задача при задании только даты t_0 или t_K решается следующим образом. Вначале следует задаться (произвольно) временем перелета Δt на гелиоцентрическом участке межпланетного полета. Далее расчет ведется по алгоритму, изложенному выше и изображенному на рис. 7.2.3. После определения элементов переходной орбиты, $\tilde{v}_{\infty 0}$ и $\tilde{v}_{\infty K}$, основных проектных параметров n_{0i} и μ_{ki} надо проверить выполнение условия (7.2.20). Если оно не выполняется, то, определенным образом задавшись новым значением Δt , повторим схему решения задачи. Цикл заканчивается, когда условие оптимизации времени перелета Δt (7.2.20) удовлетворяется. Структурная схема решения этой проектной задачи изображена на рис. 7.2.4.

Только проектная задача, связанная с поиском оптимальных проектных решений, определяющих оптимальные значения основных проектных параметров n_{0i} и μ_{ki} многоступенчатого межпланетного аппарата и времени перелета Δt , отвечает основному требованию проектирования КЛА—достижению максимального значения $\mu_{п.н.}$ В этом случае существует взаимосвязь между оптимальным гелиоцентрическим участком межпланетного перелета и оптимальными основными проектными параметрами μ_{ki} и n_{0i} , проявляемая через уравнение (7.2.20) и оказывающая влияние на распределение масс топлива и значений тяги двигательных установок между разгонным и тормозным модулями межпланетного аппарата, что непосредственно сказывается на энергетическом уровне активных участков разгона и торможения. Поэтому к результатам решения задач оптимизации времени перелета Δt и межпланетных траек-

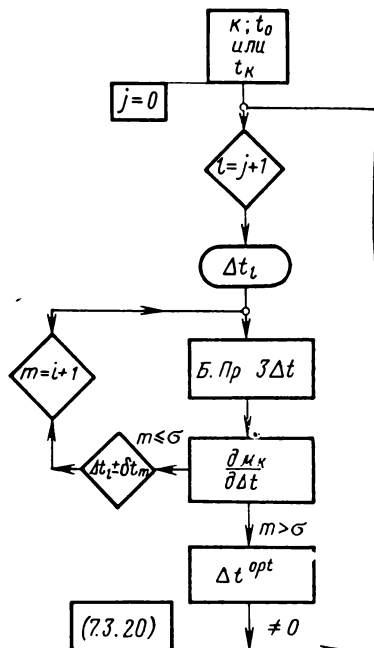


Рис. 7.2.4. Структурная схема решения проектной задачи при оптимизации Δt , μ_{ki} и n_{0i} (БПРЗ Δt^{opt})

торий полета с выходом на орбиту около планеты назначения и на этой основе к результатам выбора проектно-баллистических характеристик многоступенчатого межпланетного аппарата, когда за критерий оптимальности принимается сумма характеристических скоростей $V_{\Sigma} = V_{x1} + V_{x2}$, следует относиться осторожно.

Решение проектной задачи для пролетных межпланетных траекторий, когда КЛА должен только пролететь вблизи планеты назначения, связано, помимо (7.2.18), согласно (7.2.17) со следующим условием оптимизации:

$$\frac{\partial \tilde{v}_{\infty 0}}{\partial \Delta t} = 0.$$

Данное условие позволяет полностью решить задачу баллистического расчета гелиоцентрического участка межпланетного перелета при задании только t_0 или t_k и найти кейлеровские элементы переходной орбиты i_0 , a и p , время перелета Δt и значение гиперболического избытка скорости $\tilde{v}_{\infty 0}$. Таким образом, эта проектная задача при задании только t_0 или t_k сводится к задаче оптимизации основных проектных параметров разгонного модуля при известном значении $\tilde{v}_{\infty 0}$, решенной в § 1 данной главы.

Оптимизация основных проектных параметров μ_{ki} и n_{0i} , даты гелиоцентрического старта t_0 и времени перелета Δt

Возникает задача в заданном диапазоне календаря определить дату гелиоцентрического старта t_0 или t_k и проектно-баллистические характеристики КЛА, позволяющие с учетом маневра у планеты назначения достигнуть $\max \mu_{п.н.}$. Отличие данной задачи от предыдущей — в оптимизации (кроме времени перелета Δt и основных проектных параметров n_{0i} и μ_{ki}) даты гелиоцентрического старта t_0 или t_k в заданном диапазоне календаря, который может охватывать часть, один или несколько синодических периодов.

В основе решения сформулированной задачи может лежать алгоритм решения предыдущей задачи, который позволяет оптимизацию t_0 (или t_k) построить на одном из методов поиска экстремума функции по одной переменной [46]. В этом случае схема решения задачи выражается так:

$$\mu_{п.н. \max} = \max_{t_{0 \min} < t_0 < t_{0 \max}} \left\{ \max_{\Delta t} \left[\max_{n_{0i}, \mu_{ki}} (\mu_{п.н.})_{\Delta t = \text{const}} \right]_{t_0 = \text{const}} \right\} \quad (7.2.21a)$$

или в случае задания диапазона календарных гелиоцентрических дат прибытия t_k

$$\mu_{п.н. \max} = \max_{t_{k \min} < t_k < t_{k \max}} \left\{ \max_{\Delta t} \left[\max_{n_{0i}, \mu_{ki}} (\mu_{п.н.})_{\Delta t = \text{const}} \right]_{t_k = \text{const}} \right\}. \quad (7.2.21b)$$

Навигационная задача (внешняя)

Решением навигационной задачи является определение векторов гелиоцентрических скоростей КЛА в начальной и конечной точках гелиоцентрического участка и векторов гиперболических избытков скоростей $\bar{V}_{\infty 0}^0$ и $\bar{V}_{\infty k}^0$, что позволяет получить исходные данные для решения задачи отрыва и захвата: сферические координаты векторов цели в экваториальной планетоцентрической системе.

Векторы гелиоцентрических скоростей КЛА в начальной и конечной точках гелиоцентрического участка можно определить по соотношениям (2.1.21) и (2.1.22), выражаемым в данном случае следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_0 &= A\bar{R}_k - B_1\bar{R}_0, \\ \bar{V}_k &= B_2\bar{R}_k - C\bar{R}_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.22)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A &= [\Delta t - a^{3/2}(\Delta - \sin \Delta)]^{-1}, \\ B_1 &= A \left[1 - \frac{a}{R_0} (1 - \cos \Delta) \right], \quad B_2 = A \left[1 - \frac{a}{R_k} (1 - \cos \Delta) \right], \\ C &= \frac{\sqrt{a} \sin \Delta}{R_0 R_k} + B_1 \left[1 - \frac{a}{R_k} (1 - \cos \Delta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.23)$$

Однако в связи с определением углов Φ , θ_0 , θ_k и положения Земли и планеты назначения составляющие векторов $\bar{V}_0$ и $\bar{V}_k$ в эклиптической гелиоцентрической системе и векторов $\bar{V}_{\infty 0}$, $\bar{V}_{\infty k}$ во второй экваториальной геоцентрической системе и в экваториальной планетоцентрической системе для нахождения сферических координат вектора цели нагляднее и проще выразить с помощью некоторых преобразований, используя кинематические схемы рис. 7.2.5—7.2.7.

Определим составляющие единичного вектора $\bar{V}_0^0$ в эклиптической гелиоцентрической системе координат XYZ (см. рис. 7.2.5). Используя теорему косинусов сферической тригонометрии, из сферических треугольников на единичной небосфере P_0B_0Y , $P_0B_0C_0$ и $P_0B_0D_0$ соответственно найдем

$$\left. \begin{aligned} V_{x0}^0 &= \cos A_{x0} = \cos \tilde{u}_{\oplus 0} \sin \theta_0 - \sin \tilde{u}_{\oplus 0} \cos \theta_0 \cos i_0, \\ V_{y0}^0 &= \cos A_{y0} = \sin \tilde{u}_{\oplus 0} \sin \theta_0 + \cos \tilde{u}_{\oplus 0} \cos \theta_0 \cos i_0, \\ V_{z0}^0 &= \cos A_{z0} = \cos \theta_0 \sin i_0, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.24)$$

где $\tilde{u}_{\oplus 0}$ — аргумент широты Земли в эклиптической гелиоцентрической системе координат в момент t_0 .

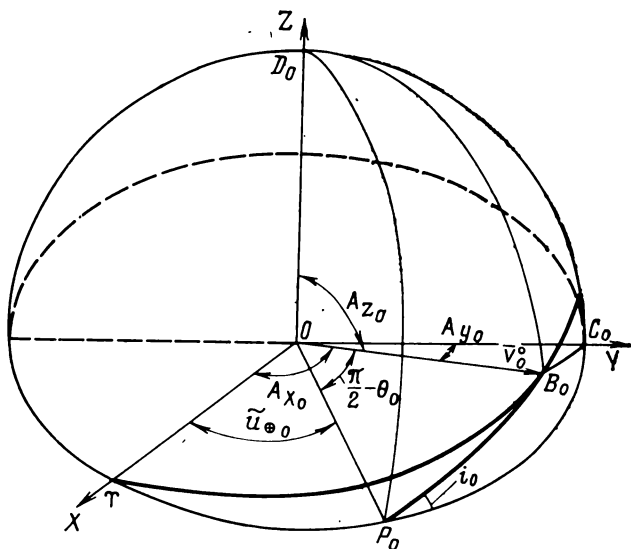


Рис. 7.2.5. Кинематическая схема определения составляющих единичного вектора $\bar{V}_0^0$

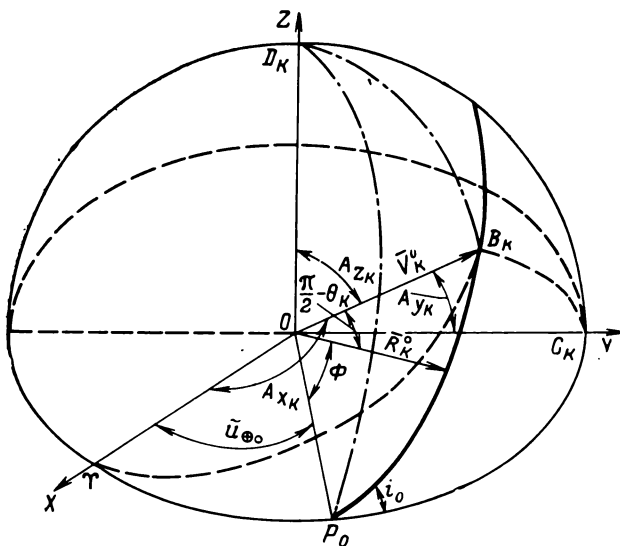


Рис. 7.2.6. Кинематическая схема определения составляющих единичного вектора $\bar{V}_k^0$

1—плоскость экватора планеты назначения; 2—плоскость экватора Земли; 3—плоскость орбиты планеты назначения

$$\left. \begin{aligned} V_{x\kappa}^0 &= \cos A_{x\kappa} = -[\cos \tilde{u}_{\oplus 0} \sin(\Phi - \theta_{\kappa}) + \\ &\quad + \sin \tilde{u}_{\oplus 0} \cos(\Phi - \theta_{\kappa}) \cos i_0], \\ V_{y\kappa}^0 &= \cos A_{y\kappa} = -\sin \tilde{u}_{\oplus 0} \sin(\Phi - \theta_{\kappa}) + \\ &\quad + \cos \tilde{u}_{\oplus 0} \cos(\Phi - \theta_{\kappa}) \cos i_0, \\ V_{z\kappa}^0 &= \cos A_{z\kappa} = \cos(\Phi - \theta_{\kappa}) \sin i_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.25)$$
$$\left. \begin{aligned} V_{\infty x 0}^0 &= \frac{x_0}{\tilde{v}_{\infty 0}} (\tilde{V}_{x 0} - \tilde{V}_{\oplus x}), \\ V_{\infty y 0}^0 &= \frac{x_0}{\tilde{v}_{\infty 0}} [(\tilde{V}_{y 0} - \tilde{V}_{\oplus y}) \cos \varepsilon - \tilde{V}_{z 0} \sin \varepsilon], \\ V_{\infty z 0}^0 &= \frac{x_0}{\tilde{v}_{\infty 0}} [(\tilde{V}_{y 0} - \tilde{V}_{\oplus y}) \sin \varepsilon + \tilde{V}_{z 0} \cos \varepsilon], \end{aligned} \right\} (7.2.26)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_{\infty x k}^0 &= \frac{-x_k}{\tilde{V}_{\infty k}} (\tilde{V}_{пл x} - \tilde{V}_{x k}), \\ \hat{V}_{\infty y k}^0 &= \frac{-y_k}{\tilde{V}_{\infty k}} [(\tilde{V}_{пл y} - \tilde{V}_{y k}) \cos \varepsilon - (\tilde{V}_{пл z} - \tilde{V}_{z k}) \sin \varepsilon], \\ \hat{V}_{\infty z k}^0 &= \frac{-z_k}{\tilde{V}_{\infty k}} [(\tilde{V}_{пл y} - \tilde{V}_{y k}) \sin \varepsilon + (\tilde{V}_{пл z} - \tilde{V}_{z k}) \cos \varepsilon]. \end{aligned} \right\} (7.2.27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{x0} &= \tilde{V}_0 \cos A_{x0}, \quad \tilde{V}_{y0} = \tilde{V}_0 \cos A_{y0}, \quad \tilde{V}_{z0} = \tilde{V}_0 \cos A_{z0}; \\ \tilde{V}_{xk} &= \tilde{V}_k \cos A_{xk}, \quad \tilde{V}_{yk} = \tilde{V}_k \cos A_{yk}, \quad \tilde{V}_{zk} = \tilde{V}_k \cos A_{zk}; \end{aligned}$$

$V_{\oplus x}$, $V_{\oplus y}$ и $V_{пл x}$, $V_{пл y}$ и $V_{пл z}$ — составляющие векторов скорости Земли и планеты назначения соответственно в эклиптической гелиоцентрической системе координат, равные

$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}_{\oplus x} &= -\tilde{V}_{\oplus 0} \sin(\tilde{u}_{\oplus 0} - \theta_{\oplus 0}), \\ \tilde{V}_{\oplus y} &= \tilde{V}_{\oplus 0} \cos(\tilde{u}_{\oplus 0} - \theta_{\oplus 0}), \\ \tilde{V}_{\oplus z} &= 0; \end{aligned} \right\} (7.2.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}_{пл x} &= -\tilde{V}_{пл k} [\sin(u_{пл k} - \theta_{пл k}) \cos \Omega_{пл} + \\ &\quad + \cos(u_{пл k} - \theta_{пл k}) \sin \Omega_{пл} \cos i_{пл}], \\ \tilde{V}_{пл y} &= \tilde{V}_{пл k} [-\sin(u_{пл k} - \theta_{пл k}) \sin \Omega_{пл} + \\ &\quad + \cos(u_{пл k} - \theta_{пл k}) \cos \Omega_{пл} \cos i_{пл}], \\ \tilde{V}_{пл z} &= \tilde{V}_{пл k} \cos(u_{пл k} - \theta_{пл k}) \sin i_{пл}. \end{aligned} \right\} (7.2.29)$$

Учитывая полученные соотношения, сферические координаты векторов цели $\tilde{V}_{\infty 0}^0$ и $\tilde{V}_{\infty k}^0$ во второй экваториальной системе представим соответственно в виде

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{V_{\infty z0}^0}{V \sqrt{(V_{\infty x0}^0)^2 + (V_{\infty y0}^0)^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \delta_0 \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad (7.2.30)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \frac{V_{\infty y0}^0}{V \sqrt{(V_{\infty x0}^0)^2 + (V_{\infty y0}^0)^2}} \quad (0 \leq \alpha_0 \leq 2\pi), \\ \cos \alpha_0 &= \frac{V_{\infty x0}^0}{V \sqrt{(V_{\infty x0}^0)^2 + (V_{\infty y0}^0)^2}}, \end{aligned} \right\} (7.2.31)$$

$$\operatorname{tg} \hat{\delta}_k = \frac{\hat{V}_{\infty z k}^0}{V(\hat{V}_{\infty x k}^0)^2 + (\hat{V}_{\infty y k}^0)^2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \hat{\delta}_k \leq \frac{\pi}{2}\right); \quad (7.2.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \hat{\alpha}_k &= \frac{\hat{V}_{\infty y k}^0}{V(\hat{V}_{\infty x k}^0)^2 + (\hat{V}_{\infty y k}^0)^2} \\ \cos \hat{\alpha}_k &= \frac{\hat{V}_{\infty x k}^0}{V(\hat{V}_{\infty x k}^0)^2 + (\hat{V}_{\infty y k}^0)^2} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \hat{\alpha}_k \leq 2\pi), \quad (7.2.33)$$

Для определения сферических координат вектора цели $\bar{V}_{\infty k}^0$ в экваториальной планетоцентрической системе следует выполнить ряд преобразований. Пусть Ω' — угловое расстояние от точки весеннего равноденствия Земли до восходящего узла экватора планеты назначения на экваторе Земли Ω_0 (см. рис. 7.2.7); $\omega' = R_{\hat{V}_{\text{пл}}} \bar{R}_{\Omega'}$ — угол между радиусом-вектором точки весеннего равноденствия планеты назначения $\bar{R}_{V_{\text{пл}}}$ и радиусом-вектором точки восходящего узла $\bar{R}_{\Omega'}$ линии узлов экваториальных плоскостей Земли и планеты назначения; i' — угол наклона плоскости экватора планеты назначения к плоскости экватора Земли. Если α_N и δ_N — средние сферические координаты северного полюса планеты назначения в экваториальной геоцентрической системе *, то (см. рис. 7.2.7)

$$\left. \begin{aligned} \Omega' &= \frac{\pi}{2} + \alpha_N, \\ i' &= \frac{\pi}{2} - \delta_N. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.34)$$

Выполняя с учетом введенных углов известное преобразование поворота, составляющие единичного вектора $\bar{V}_{\infty k}^0$ в экваториальной планетоцентрической системе можно найти из соотношения

$$\begin{bmatrix} V_{\infty x k}^0 \\ V_{\infty y k}^0 \\ V_{\infty z k}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_x \hat{P}_y \hat{P}_z \\ \hat{Q}_x \hat{Q}_y \hat{Q}_z \\ \hat{W}_x \hat{W}_y \hat{W}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_{\infty x k}^0 \\ \hat{V}_{\infty y k}^0 \\ \hat{V}_{\infty z k}^0 \end{bmatrix}, \quad (7.2.35)$$

* Значения α_N и δ_N для планет даны в приложении.

где с учетом (7.2.34)

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_x &= -(\cos \omega' \sin \alpha_N + \sin \omega' \cos \alpha_N \sin \delta_N), \\ \hat{P}_y &= \cos \omega' \cos \alpha_N - \sin \omega' \sin \alpha_N \sin \delta_N, \\ \hat{P}_z &= \sin \omega' \cos \delta_N; \\ \hat{Q}_x &= \sin \omega' \sin \alpha_N - \cos \omega' \cos \alpha_N \sin \delta_N, \\ \hat{Q}_y &= -(\sin \omega' \cos \alpha_N + \cos \omega' \sin \alpha_N \sin \delta_N), \\ \hat{Q}_z &= \cos \omega' \cos \delta_N, \\ \hat{W}_x &= \cos \alpha_N \cos \delta_N, \\ \hat{W}_y &= \sin \alpha_N \cos \delta_N, \\ \hat{W}_z &= \sin \delta_N. \end{aligned} \right\} (7.2.36)$$

В результате определения $V_{\infty x k}^0$, $V_{\infty y k}^0$ и $V_{\infty z k}^0$ сферические координаты вектора цели $\bar{V}_{\infty k}^0$ в экваториальной планетоцентрической системе можно представить так:

$$\operatorname{tg} \delta_k = \frac{V_{\infty z k}^0}{\sqrt{(V_{\infty x k}^0)^2 + (V_{\infty y k}^0)^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \delta_k \leq \frac{\pi}{2} \right); \quad (7.2.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_k &= \frac{V_{\infty y k}^0}{\sqrt{(V_{\infty x k}^0)^2 + (V_{\infty y k}^0)^2}} \quad (0 \leq \alpha_k \leq 2\pi); \\ \cos \alpha_k &= \frac{V_{\infty x k}^0}{\sqrt{(V_{\infty x k}^0)^2 + (V_{\infty y k}^0)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.38)$$

Для использования соотношения (7.2.35) нужно найти зависимость ω' от известных средних угловых элементов планеты $\Omega_{\text{пл}}$, $i_{\text{пл}}$, α_N и δ_N . Из сферического треугольника $P_0 \gamma_{\text{пл}} \Omega'$ согласно теоремам косинусов и синусов получим (см. рис. 7.2.7)

$$\cos \omega' = \cos \beta \cos \varphi_{\gamma} + \sin \beta \sin \varphi_{\gamma} \cos (q - i_{\text{пл}}), \quad (7.2.39)$$

$$\sin \omega' = \frac{\sin (q - i_{\text{пл}}) \sin \beta}{\sin i_{\text{э}}}, \quad (7.2.40a)$$

где $\beta = \widehat{R_{\Omega}} \cdot \bar{R}_P$ — угловое расстояние от гелиоцентрической точки P_0 до восходящего узла Ω'

q — угол наклона плоскости $P_0 O \Omega'$ к плоскости эклиптики;

$\varphi_{\gamma} = \widehat{R_{\oplus R}} \cdot \bar{R}_{\gamma_{\text{пл}}}$ — угловое расстояние от точки P_0 до точки весеннего равноденствия планеты назначения;

$i_{\text{э}}$ — угол наклона плоскости экватора планеты назначения к плоскости ее орбиты.

Из того же сферического треугольника

$$\sin \varphi_{\gamma} = \frac{\sin \beta \cos (p + \delta_N)}{\sin i_3}, \quad (7.2.41a)$$

$$\cos \varphi_{\gamma} = \cos \omega' \cos \beta + \sin \omega' \sin \beta \sin (p + \delta_N).$$

Совместно решая последнее уравнение с уравнением (7.2.39), получим

$$\begin{aligned} \cos \omega' = & [\cos \beta \sin (q - i_{пл}) \sin (p + \delta_N) + \\ & + \cos (q - i_{пл}) \cos (p + \delta_N)] \frac{1}{\sin i_3}, \end{aligned} \quad (7.2.40b)$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{\gamma} = & [\sin (q - i_{пл}) \sin (p + \delta_N) + \\ & + \cos (q - i_{пл}) \cos (p + \delta_N)] \frac{1}{\sin i_3}. \end{aligned} \quad (7.2.41b)$$

Следовательно, для определения ω' и φ_{γ} в зависимости от угловых элементов планеты назначения $\Omega_{пл}$, $i_{пл}$, α_N и δ_N нужно выявить зависимость β , q , p и i_3 от них. Для этого обратимся к сферическому треугольнику $P_0\Omega'\Upsilon$, из которого найдем

$$\begin{aligned} \cos \beta = & -\sin \alpha_N \cos \Omega_{пл} + \cos \alpha_N \sin \Omega_{пл} \cos \varepsilon, \\ \sin \beta = & \frac{\sin \varepsilon \cos \alpha_N}{\sin q}. \end{aligned} \quad (7.2.42a)$$

или, так как
$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin q} > 0,$$

$$\sin \beta = \text{sign}(\cos \alpha_N) \sqrt{1 - \cos^2 \beta}. \quad (7.2.42b)$$

Рассматривая тот же сферический треугольник $P_0\Omega'\Upsilon$, получим

$$-\sin \alpha_N = \cos \Omega_{пл} \cos \beta - \sin \Omega_{пл} \sin \beta \cos q$$

или с учетом (7.2.42)

$$\cos q = \frac{\sin \alpha_N \sin \Omega_{пл} + \cos \alpha_N \cos \Omega_{пл} \cos \varepsilon}{\sin \beta}, \quad (7.2.43a)$$

$$\sin q = \frac{\sin \varepsilon \cos \alpha_N}{\sin \beta}. \quad (7.2.43b)$$

Кроме того, из него же будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sin p = & \frac{\sin \varepsilon \sin \Omega_{пл}}{\sin \beta}, \\ \cos p = & \frac{\cos \alpha_N \cos \Omega_{пл} + \sin \alpha_N \sin \Omega_{пл} \cos \varepsilon}{\sin \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.44)$$

Выразим угол i_3 . По теореме косинусов (вторая форма) из сферического треугольника $P_0 \nabla \Omega'$ найдем

$$\cos i_3 = \cos(q - i_{пл}) \sin(p + \delta_N) - \sin(q - i_{пл}) \cos(p + \delta_N) \cos \beta. \quad (7.2.45)$$

Соотношения (7.2.42) — (7.2.45) определяют зависимость ω' от известных угловых элементов планеты назначения $\Omega_{пл}$, $i_{пл}$, α_N и δ_N . Таким образом, навигационная задача (внешняя) решена.

§ 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ МЕЖПЛАНЕТНОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ РАЗМЕРОВ ГРАВИСФЕР ПЛАНЕТ

В предыдущих параграфах гелиоцентрический участок межпланетной траектории определялся без учета размеров грависфер планет, т. е. Земля и планета назначения рассматривались как бы в качестве негравитирующих центров. Это традиционный путь оценки гелиоцентрических участков. Однако с повышением требований к точности проектных разработок может возникнуть необходимость в учете гравитационных полей планет, проявляемых по крайней мере в пределах их грависфер. Для планет юпитеровой группы в связи с большими размерами их грависфер такой учет может стать даже обязательным.

Оценка влияния размеров грависфер планет

Действительно, рассматривая в качестве исходной информации дату гелиоцентрического старта t_1 и время полета $\Delta t_{1,2}$ (или

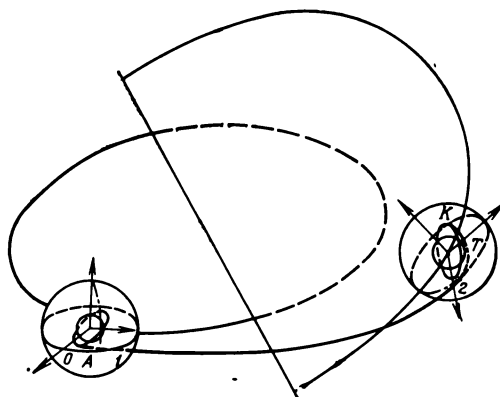


Рис. 7.3.1. Схема кусочно-конической межпланетной траектории полета при учете размеров грависфер планет:

О—А—активный участок разгона; А—пассивный участок полета в грависфере Земли; 1—2—гелиоцентрический участок полета; 2—Т—пассивный участок полета в грависфере планеты назначения; Т—К—активный участок торможения

дату гелиоцентрического прибытия t_2), которые определяют положение Земли и планеты назначения, вследствие отличия $\bar{R}_1$ от

$\bar{R}_{\oplus 0}$ и $\bar{R}_2$ от $\bar{R}_{\text{пл.к}}$ (рис. 7.3.1) существует разность (рис. 7.3.2, 7.3.3)

$$\delta \bar{V}_0 = \bar{V}_0 - \bar{V}_1 = \delta \bar{V}_{\infty 0} = \bar{V}_{\infty 0} - \bar{v}_1,$$

$$\delta \bar{V}_k = \bar{V}_k - \bar{V}_2 = \delta \bar{V}_{\infty k} = \bar{V}_{\infty k} - \bar{v}_2,$$

где

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ — векторы геоцентрической и планетоцентрической скорости КЛА на грависферах;

$\bar{V}_1, \bar{V}_2$ — векторы гелиоцентрической скорости в начале и конце гелиоцентрического участка, представляемого с учетом размеров грависфер планет;

$\bar{V}_{\infty 0}, \bar{V}_{\infty k}, \bar{V}_0, \bar{V}_k$ — векторы гиперболических избытков скорости и векторы гелиоцентрических скоростей в начале и конце гелиоцентрического участка, представляемого без учета размеров грависфер;

$\bar{R}_{\oplus 0}, \bar{R}_{\text{пл.к}}, \bar{R}_1, \bar{R}_2$ — радиусы-векторы начальной и конечной точек гелиоцентрического участка, рассчитанного без учета и с учетом размеров грависфер планет соответственно.

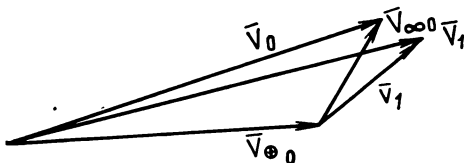


Рис. 7.3.2. Треугольники скоростей в момент гелиоцентрического старта без учета ($\bar{V}_{\oplus 0}, \bar{V}_0, \bar{V}_{\infty 0}$) и с учетом ($\bar{V}_{\oplus 0}, \bar{V}_1, \bar{v}_1$) размеров грависферы Земли

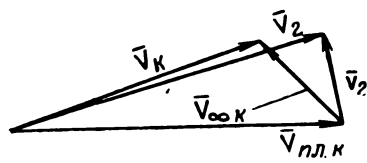


Рис. 7.3.3. Треугольники скоростей в момент гелиоцентрического прибытия без учета ($\bar{V}_{\text{пл.к}}, \bar{V}_k, \bar{V}_{\infty k}$) и с учетом ($\bar{V}_{\text{пл.к}}, \bar{V}_2, \bar{v}_2$) размеров грависферы планеты назначения

Так как согласно (7.2.22) векторы гелиоцентрических скоростей в начальной и конечной точках гелиоцентрического участка равны

$$\bar{V}_0 = \bar{A}_0 \bar{R}_{\text{пл.к}} - B_{01} \bar{R}_{\oplus 0}, \quad \bar{V}_k = B_{02} \bar{R}_{\text{пл.к}} - C_0 \bar{R}_{\oplus 0};$$

$$\bar{V}_1 = A_1 \bar{R}_2 - B_1 \bar{R}_1, \quad \bar{V}_2 = B_2 \bar{R}_2 - C_1 \bar{R}_1,$$

то, представляя $\bar{R}_1 = \bar{R}_{\oplus 0} + \bar{r}_1$ и $\bar{R}_2 = \bar{R}_{\text{пл.к}} + \bar{r}_2$, векторы $\delta \bar{V}_0$ и $\delta \bar{V}_k$, $\delta \bar{V}_{\infty 0}$ и $\delta \bar{V}_{\infty k}$ найдем из соотношений

$$\delta \bar{V}_0 = \delta \bar{V}_{\infty 0} = (A_0 - A_1) \bar{R}_{\text{пл.к}} - (B_{01} - B_1) \bar{R}_{\oplus 0} - (A_1 \bar{r}_2 - B_1 \bar{r}_1), \quad (7.3.1)$$

$$\delta \bar{V}_k = \delta \bar{V}_{\infty k} = (B_{02} - B_2) \bar{R}_{\text{пл.к}} - (C_0 - C_1) \bar{R}_{\oplus 0} - (B_2 \bar{r}_2 - C_1 \bar{r}_1). \quad (7.3.2)$$

Здесь коэффициенты A_0, B_{01}, B_{02}, C_0 и A_1, B_1, B_2, C_1 выражаются формулами (7.2.23) для гелиоцентрических участков, рассчитанных соответственно без учета и с учетом размеров грависфер планет, и $r_1 = \Delta_{\oplus}, r_2 = \Delta_{\text{пл}}$.

Приведенные выражения подтверждают, что учет размеров грависфер планет приводит к различию векторов $\bar{V}_1$ и $\bar{v}_1, \bar{V}_2$ и $\bar{v}_2$ от векторов $\bar{V}_0$ и $\bar{V}_{\infty 0}, \bar{V}_K$ и $\bar{V}_{\infty K}$ соответственно, причем различие становится заметнее для планет с большим радиусом грависферы $\Delta_{\text{пл}}$.

Представляет также интерес и значение разностей

$$\Delta V_{\infty 0} = V_{\infty 0} - v_1, \quad \Delta V_{\infty K} = V_{\infty K} - v_2,$$

которые непосредственно влияют на различия в величинах основных проектных параметров КЛА μ_{Ki} и n_{0i} . С хорошим приближением можно принять $\bar{v}_1 \cdot \bar{r}_1 = v_1 \Delta_{\oplus}$ и $\bar{v}_2 \cdot \bar{r}_2 = v_2 \Delta_{\text{пл}}$. Тогда получим

$$\Delta V_{\infty 0} = V_{\infty 0} - \frac{(\bar{V}_1 - \bar{V}_{\oplus 0}) \cdot (\bar{R}_1 - \bar{R}_{\oplus 0})}{\Delta_{\oplus}}, \quad (7.3.3)$$

$$\Delta V_{\infty K} = V_{\infty K} - \frac{(\bar{V}_2 - \bar{V}_{\text{пл.к}}) \cdot (\bar{R}_2 - \bar{R}_{\text{пл.к}})}{\Delta_{\text{пл}}}. \quad (7.3.4)$$

Полученные соотношения показывают неизбежность существования разностей $\Delta V_{\infty 0}$ и $\Delta V_{\infty K}$, значения которых существенно растут для планет с большими радиусами грависферы.

Таблица 7.1

Планета	δV_{x0}	δV_{y0}	δV_{z0}	$\Delta V_{\infty 0}$	δV_{xK}	δV_{yK}	δV_{zK}	$\Delta V_{\infty K}$
Марс $r_1 = \Delta_{\text{лс}}$	0,0661	0,001	-0,1129	0,0246 (0,0261)	0,0526	0,1263	0,0615	0,0931 (0,943) км/с
Юпитер $r_1 = \Delta_{\text{лф}}$	-0,1393	-0,3059	0,8349	0,1667 (0,171)*	0,5601	-1,3214	-0,1664	1,3463 (1,363)* км/с
* Приближенные значения по формулам (7.3.3), (7.3.4).								

В табл. 7.1* приведены для полетов на Марс и на Юпитер точные значения $\Delta V_{\infty 0}$ и $\Delta V_{\infty K}$ и составляющих $\delta \bar{V}_0$ и $\delta \bar{V}_K$ и их приближенные значения, рассчитанные по приведенным приближенным формулам.

* Для полетов на Марс $t_1 = 2441903,5$, $t_2 = 2442093,5$; для полетов на Юпитер $t_1 = 2441375,5$, $t_2 = 2442005,5$.

Особенность постановки задачи при заданных t_1 и $\Delta t_{1,2}$

Переходя к задаче определения баллистических характеристик межпланетной траектории, гелиоцентрический участок которой рассчитывается с учетом размеров грависфер планет, рассмотрим ее особенности. Главная из них заключается в том, что задание гелиоцентрической даты старта и времени перелета или гелиоцентрической даты прибытия не дает возможности прямо решить задачу баллистического расчета гелиоцентрического участка, так как оно позволяет определять только $\bar{R}_{\odot 0}$ и $\bar{R}_{пл.к}$ и не позволяет найти гелиоцентрические векторы его начальной и конечной точек. Определение $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ связано с поиском значений $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, при которых возможно при заданном времени полета рассчитать гелиоцентрический участок от поверхности грависферы Земли до поверхности грависферы планеты назначения. Такой процесс требует решения краевой задачи. Для рационализации расчетов имеет смысл объединить процесс решения краевой задачи с проектной задачей — поиском оптимальных значений основных проектных параметров $\mu_{ки}$ и n_{0i} . Это становится возможным, если в качестве независимых переменных взять составляющие вектора $\bar{v}_1: v_1$ и его прямое восхождение α_1 и склонение δ_1 . В результате решения должны быть найдены такие значения v_1 , α_1 и δ_1 , при которых перелет КЛА от промежуточной орбиты около Земли на конечную орбиту около планеты назначения был бы совершен при максимальной относительной полезной нагрузке $\mu_{п.н}$ и при заданной гелиоцентрической дате старта и времени перелета $\Delta t_{1,2}$ на гелиоцентрическом участке, рассчитываемом с учетом размеров грависфер планет. При этом положение в пространстве промежуточной круговой и конечной эллиптической орбит должно быть определено.

Алгоритм решения проектной и краевой задачи

Построение алгоритма решения сформулированной задачи может быть основано на зависимостях, полученных в § 1 гл. IV и в § 1 и 2 гл. VII.

Геоцентрический участок разгона

Пусть известно нулевое решение: v_1 , α_1 и δ_1 . Тогда, определив значение $\tilde{v}_{\infty 1}^2$ по формуле

$$\tilde{v}_{\infty 1}^2 = \tilde{v}_1^2 - \frac{2}{\Delta_{\oplus}}, \quad (7.3.5)$$

с помощью соотношений (7.1.19), (7.1.20) и (7.1.11) найдем оптимальные значения $\mu_{ки}$ и n_{0i} . Теперь по формулам (7.1.4) — (7.1.6) можно рассчитать значения $\tilde{v}_a$, θ_a и $\tilde{r}_a$, что позволяет

найти траекторный угол θ_1 в точке выхода из грависферы в момент t_1 :

$$\theta_1 = \arccos \frac{\tilde{v}_a \tilde{r}_a \cos \theta_a}{\tilde{v}_1 \tilde{\Delta}_{\oplus}} \quad (7.3.6)$$

и согласно (7.1.22) элементы $\tilde{a}_{г.о.}$, $\tilde{p}_{г.о.}$ и $\tilde{e}_{г.о.}$ гиперболической орбиты отрыва. Обращение к условиям (7.1.39) и (7.1.40) да-

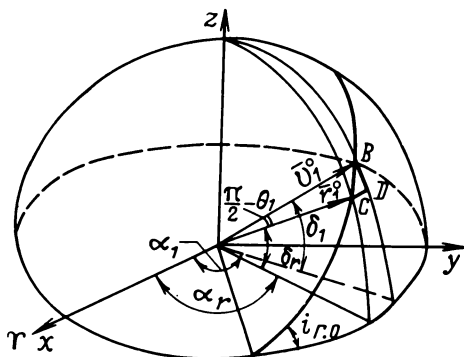


Рис. 7.3.4. Кинематика векторов в точке выхода КЛА на поверхности грависферы Земли

ет возможность определить угол наклона $i_{г.о.}$ плоскости орбиты отрыва и тем самым промежуточной орбиты:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \delta_1 \geq \varphi_{ст} \\ \text{при } \delta_1 < \varphi_{ст} \\ \text{при } \sin A_{пр} < \pm \frac{\cos i_{г.о.}}{\cos \varphi_{ст}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i_{г.о.} = |\delta_1| \quad \text{или} \quad i_{г.о.} = \pi - |\delta_1|, \\ i_{г.о.} = |\varphi_{ст}| \quad \text{или} \quad i_{г.о.} = \pi - |\varphi_{ст}|, \\ \cos (i_{г.о.})_{пр} = \pm \cos \varphi_{ст} \sin A_{пр}^* . \end{array} \quad (7.3.7)$$

Из сферического прямоугольного треугольника CDB (рис. 7.3.4) найдем прямое восхождение α_r и склонение δ_r ра-

* Следует отметить, что на практике угол наклона промежуточной орбиты, которому и равен $i_{г.о.}$, определяется существующей трассой.

диуса-вектора точки выхода КЛА на поверхности грависферы Земли $\bar{r}_1$:

$$\sin(\delta_1 - \delta_r) = \cos \theta_1 \sin i_{r.o.},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_r) = \operatorname{ctg} \theta_1 \cos i_{r.o.}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= \delta_1 - \arcsin(\cos \theta_1 \sin i_{r.o.}), \\ \alpha_r &= \alpha_1 - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \theta_1 \cos i_{r.o.}). \end{aligned} \right\} \quad (7.3.8)$$

Гелиоцентрический участок перелета

Исходные данные и полученные соотношения позволяют определить кинематические параметры начальной точки гелиоцентрического участка — составляющие вектора гелиоцентрической скорости V_{x1} , V_{y1} , V_{z1} и гелиоцентрического радиуса-вектора X_1 , Y_1 и Z_1 в эклиптической системе координат из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} V_{x1} &= V_{\oplus x} + v_1 \cos \alpha_1 \cos \delta_1, \\ V_{y1} &= V_{\oplus y} + v_1 (\sin \alpha_1 \cos \delta_1 \cos \varepsilon + \sin \delta_1 \sin \varepsilon), \\ V_{z1} &= v_1 (-\sin \alpha_1 \cos \delta_1 \sin \varepsilon + \sin \delta_1 \cos \varepsilon); \end{aligned} \right\} \quad (7.3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_{\oplus 0} + \Delta_{\oplus} \cos \alpha_r \cos \delta_r, \\ Y_1 &= Y_{\oplus 1} + \Delta_{\oplus} (\sin \alpha_r \cos \delta_r \cos \varepsilon + \sin \delta_r \sin \varepsilon), \\ Z_1 &= \Delta_{\oplus} (-\sin \alpha_r \cos \delta_r \sin \varepsilon + \sin \delta_r \cos \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (7.3.10)$$

где

$$V_{\oplus x} = -V_{\oplus 0} \sin(\tilde{u}_{\oplus 0} - \theta_{\oplus 0}), \quad V_{\oplus y} = V_{\oplus 0} \cos(\tilde{u}_{\oplus 0} - \theta_{\oplus 0}),$$

$$X_{\oplus 0} = R_{\oplus} \cos \tilde{u}_{\oplus 0}, \quad Y_{\oplus 0} = R_{\oplus} \sin \tilde{u}_{\oplus 0}.$$

Значения V_1 и R_1 выражаются формулами

$$V_1 = (V_{x1}^2 + V_{y1}^2 + V_{z1}^2)^{1/2} \quad (7.3.11)$$

$$R_1 = (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)^{1/2}. \quad (7.3.12)$$

В результате нахождения элементов орбиты гелиоцентрического участка из выражений

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{f m_{\odot}}{V_1^2 - \frac{2 f m_{\odot}}{R_1}}, \\ p &= \frac{(R_1 V_1)^2 - (\bar{R}_1 \cdot \bar{V}_1)^2}{f m_{\odot}}, \quad e = \left(1 - \frac{p}{a}\right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (7.3.13)$$

истинная аномалия начальной точки гелиоцентрического участка будет равна

$$\begin{aligned}\cos v_1 &= \left(\frac{p}{R_1} - 1 \right) \frac{1}{e}, \\ \sin v_1 &= \sqrt{\frac{p}{fm_\oplus}} \frac{(\bar{R}_1 \cdot \bar{V}_1)}{eR_1}.\end{aligned}\quad (7.3.14)$$

Определив при $e < 1$ значение эксцентрической аномалии E_2 из уравнения Кеплера [см. (1.3.35)]

$$\frac{\Delta t_{1,2}}{a^{3/2} \sqrt{fm_\oplus}} + E_1 - e \sin E_1 = E_2 - e \sin E_2 \quad (7.3.15a)$$

или при $e > 1$ значение H_2 из уравнения [см. (1.3.37)]

$$\frac{\Delta t_{1,2}}{a^{3/2} \sqrt{fm_\oplus}} + e \operatorname{sh} H_1 - H_1 = e \operatorname{sh} H_2 - H_2, \quad (7.3.15b)$$

где

$$E_1 = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \right), \quad (7.3.16a)$$

$$H_1 = 2 \operatorname{Arth} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{th} \frac{v_1}{2} \right), \quad (7.3.16b)$$

найдем

$$v_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E_2}{2} \right) \quad \text{или} \quad v_2 = 2 \operatorname{Arth} \left(\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H_2}{2} \right)$$

(при $E_2 > 2\pi$ к определенному значению v_2 надо прибавить 2π),

$$\Phi = v_2 - v_1, \quad R_2 = \frac{p}{1 + e \cos v_2},$$

$$V_2 = \left(\frac{2 fm_\oplus}{R_2} - \frac{fm_\oplus}{a} \right)^{1/2}.$$

В результате кинематические параметры конца гелиоцентрического участка можно определить из следующих векторных уравнений [см. (1.3.51) и (1.3.52)]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_2 &= \left[1 - \frac{R_2}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \bar{R}_1 + \frac{R_2 R_1}{\sqrt{fm_\oplus p}} \sin \Phi \cdot \bar{V}_1, \\ \bar{V}_2 &= \left[\frac{(\bar{R}_1 \cdot \bar{V}_1)}{p R_1} (1 - \cos \Phi) - \sqrt{\frac{fm_\oplus}{p}} \frac{\sin \Phi}{R_1} \right] \bar{R}_1 + \\ &\quad + \left[1 - \frac{R_1}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \bar{V}_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.17)$$

Планетоцентрический участок торможения

Решение поставленной задачи должно быть связано с удовлетворением равенства

$$F_{\Delta} = \Delta_{\text{пл}} - |\bar{R}_2 - \bar{R}_{\text{пл.к}}| = 0, \quad (7.3.18)$$

свидетельствующего о попадании КЛА на поверхность грависферы планеты назначения. После этого найдем значения кинематических параметров в точке входа на поверхности грависферы планеты назначения

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= \bar{V}_2 - \bar{V}_{\text{пл.к}}, \\ \bar{r}_2 &= \bar{R}_2 - \bar{R}_{\text{пл.к}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.19)$$

Элементы гиперболической орбиты прибытия выражаются следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} a_{\text{г.п}} &= \frac{f m_{\text{пл}}}{v_2^2 - \frac{2 f m_{\text{пл}}}{\Delta_{\text{пл}}}}, \\ p_{\text{г.п}} &= \frac{(\Delta_{\text{пл}} v_2)^2 - (\bar{r}_2 \bar{v}_2)^2}{f m_{\text{пл}}}, \quad e_{\text{г.п}} = \left(\frac{p_{\text{г.п}}}{a_{\text{г.п}}} - 1 \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.20)$$

Соблюдение равенств

$$\bar{v}_r^2 - \frac{2}{\tilde{r}_r} = \frac{1}{\tilde{a}_{\text{г.п}}}, \quad (7.3.21)$$

$$F_p = \tilde{p}_{\text{г.п}} - (\tilde{v}_r \tilde{r}_r \cos \theta_r)^2 = 0 \quad (7.3.22)$$

отвечает требованию выполнения условий выхода тормозного модуля на конечную орбиту заданной формы. Если она принимается свободно ориентированной, то условия конечного маневра соблюдены.

Первое условие (7.3.21) выполняется автоматически при оптимизации $\mu_{\text{к}2}$ и n_{02} , когда реализуются уравнения (7.1.50) с учетом (7.1.48), в которых вместо значения $\tilde{v}_{\infty}^2$ должно быть поставлено

$$\bar{v}_{\infty 2}^2 = \frac{1}{\tilde{a}_{\text{г.п}}}.$$

Выполнением второго условия (7.3.22) заканчивается решение поставленной задачи, т. е. подбор таких значений v_1 , α_1 и δ_1 , при которых выполняются условия оптимизации основных проектных параметров n_{0i} и $\mu_{\text{к}i}$ ($i=1, 2$) и условия перелета межпланетного аппарата с промежуточной орбиты Земли на конечную орбиту около планеты назначения при заданных date гелиоцентрического старта и времени полета на гелиоцентрическом участке.

Однако принципиально возможно удовлетворение краевых условий (7.3.18) и (7.3.22) при различных, хотя и близких, значениях $\bar{v}_1$. Поэтому выполнение краевых условий (7.3.18) и (7.3.22), достигаемое согласно изложенному алгоритму при одновременной оптимизации n_{0i} и μ_{ki} , может не привести к однозначному определению $\mu_{п.н}$. Следовательно, процесс удовлетворения условий (7.3.18) и (7.3.22) одновременно с оптимизацией n_{0i} и μ_{ki} должен быть организован так, чтобы в результате

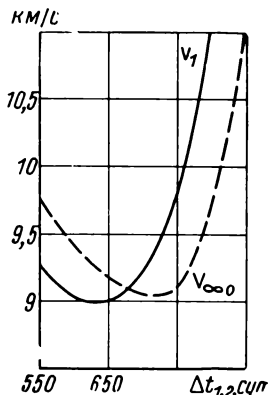


Рис. 7.3.5. Изменение гиперболического избытка скорости $V_{\infty 0}$ и скорости v_1 на поверхности сферы действия Земли $t_1 = 2441348,5$

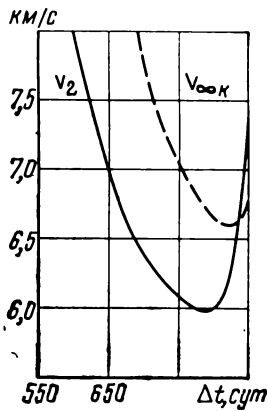


Рис. 7.3.6. Изменение гиперболического избытка скорости $V_{\infty k}$ и скорости v_2 на поверхности сферы действия Юпитера $t_1 = 2441348,5$

достигнутого решения путем соответствующего подбора $\bar{v}_1$ был получен действительный максимум $\mu_{п.н}$. Организация алгоритма решения краевой и проектной задачи с учетом указанного требования позволяет представить его в виде следующего выражения:

$$\mu_{п.н \max} = \inf_{\bar{v}_1 = (v_1, a_1, \bar{v}_1)} \{k_{\mu}(1 - \mu_{п.н}) + k_{\Delta} abs F_{\Delta} + k_p abs F_p : \forall \mu_{п.н} \in \max_{n_{0i}, \mu_{ki}} \mu_{п.н}\}^*_{\substack{t_1 = \text{const} \\ \Delta t_{1,2} = \text{const}}} \quad (7.3.23)$$

Здесь k_{μ} , k_{Δ} и k_p — постоянные весовые коэффициенты функционала, нижняя граница которого определяется.

Важным условием сходимости описанного процесса независимо от математического метода поиска $\inf$ является определение нулевого решения. Баллистические характеристики гелиоцентри-

* Символ $\forall$ раскрывает свойство, которым должен обладать $\mu_{п.н}$, символ $\forall$ означает «для всех».

ческих участков, определенные с учетом и без учета размеров грависфер планет, не являются существенно разными. Поэтому в качестве нулевого решения поставленной задачи следует брать баллистические характеристики, значения $\tilde{v}_{\infty 0}$, α_0 и δ_0 , определенные в результате решения баллистической и навигационной (внешней) задачи, изложенной в предыдущем параграфе (см. § 2, гл. VII), когда планеты принимались негравитирующими центрами. Алгоритм определения баллистических характеристик гелиоцентрического участка и значений $\tilde{v}_{\infty 0}$, α_0 и δ_0 при заданных t_0 и Δt без учета размеров грависфер планет весьма прост и быстро реализуется. Поэтому имеет смысл для поиска нулевого решения включить его в алгоритм расчета $\mu_{п.н \max}$ согласно выражению (7.3.23).

На рис. 7.3.5 и 7.3.6 представлены результаты расчета гелиоцентрических участков полета на Юпитер [$t_1=2441348,5$ (1 марта 1972 г.)], проведенного с учетом и без учета размеров грависфер планет, причем принимались сферы действия планет — грависферы Лапласа. Значения гиперболического избытка скорости $V_{\infty 0}$ и скорости v_1 в зависимости от времени полета даны на рис. 7.3.5, а $V_{\infty K}$ и v_2 — на рис. 7.3.6. Сдвиг изолиний $V_{\infty 0}$ и v_1 , $V_{\infty K}$ и v_2 существенный.

Оптимизация времени перелета $\Delta t_{1,2}$

До сих пор рассматривалась задача об определении проектно-баллистических характеристик межпланетного аппарата, когда гелиоцентрический участок перелета рассчитывается с учетом размеров грависфер планет при заданных гелиоцентрической дате старта и времени гелиоцентрического перелета. Однако время гелиоцентрического перелета $\Delta t_{1,2}$ заметно влияет на величину $\mu_{п.н}$, и поэтому его часто рассматривают в качестве оптимизируемого параметра. Вообще говоря, формально можно ранее сформулированную трехпараметрическую задачу v_1 , α_1 и δ_1 просто свести к четырехпараметрической: v_1 , α_1 , δ_1 и $\Delta t_{1,2}$, сохраняя используемый математический метод решения. Если же исходить из требования улучшения сходимости итерационного процесса, то более эффективным может оказаться алгоритм оптимизации $\mu_{п.н}$, составной частью которого является предыдущий алгоритм, выраженный формулой (7.3.23). Схема такого алгоритма может быть представлена следующим образом:

$$\mu_{п.н \max} = \max_{\Delta t_{1,2} \in \Delta T} \left\{ \mu_{п.н} : \forall \mu_{п.н} \in \inf_{\tilde{v}_1} \{ k_{\mu} (1 - \mu_{п.н}) + \right. \\ \left. + k_{\Delta} \text{abs } F_{\Delta} + k_p \text{abs } F_p : \forall \mu_{п.н} \in \max_{n_{0i}, \mu_{kl}} \left\{ \mu_{п.н} \right\}_{\Delta t_{1,2} = \text{const}} \}_{t_1 = \text{const}}^{t_1 = \text{const}} \right\}_{t_1 = \text{const}}, \quad (7.3.24)$$

где ΔT — ограниченное множество значений $\Delta t_{1,2}$.

Таким образом, поиск $\mu_{п.н \max}$ производится на кривой $\mu_{п.н} = \Phi(\Delta t_{1,2})$, в каждой из точек которой выполняется решение (7.3.23). Для сходимости данного итерационного процесса здесь, как и в предыдущем алгоритме, важно правильно определить нулевое решение. Оно может быть найдено на основе алгоритма оптимизации проектно-баллистических характеристик и времени перелета, рассмотренного в предыдущем параграфе, когда при расчете гелиоцентрического участка не учитывались размеры грависфер планет. Для ускорения серии расчетов этот алгоритм должен быть полностью включен в алгоритм, реализующий формулу (7.3.24). Он позволит в какой-то степени определить и область ΔT .

Оптимизация гелиоцентрической даты старта t_1

Возникает вопрос, изменятся ли оптимальные гелиоцентрические даты старта в синодические периоды планет, если гелиоцентрический участок определяется с учетом размеров грависфер планет. Ответ на него носит принципиальный характер. С ним также связаны возможные «окна» старта в оптимальные даты. Поэтому представляет интерес наряду с оптимизацией основных проектных параметров n_{0i} и μ_{ki} , времени гелиоцентрического перелета $\Delta t_{1,2}$ провести оптимизацию и гелиоцентрической даты старта t_1 . Таким образом, задача сводится к нахождению $\mu_{п.н \max}$ при ограничениях (7.3.18) и (7.3.22) по девяти переменным: n_{0i} , μ_{ki} ($i=1, 2$), v_1 , α_1 и δ_1 , $\Delta t_{1,2}$ и t_1 . Основываясь на решении проектной задачи об оптимизации n_{0i} и μ_{ki} при заданных значениях v_1 и v_2 (см. § 1 гл. VII), решение сформулированной задачи можно свести к поиску $\max \mu_{п.н}$ при указанных ограничениях по пяти переменным v_1 , α_1 , δ_1 , $\Delta t_{1,2}$ и t_1 . При построении алгоритма решения данной задачи, исходя из требований быстрой сходимости итерационного процесса, следует воспользоваться ранее изложенным алгоритмом оптимизации $\Delta t_{1,2}$, выраженным формулой (7.3.24). В связи с этим алгоритм оптимизации t_1 можно представить формулой

$$\mu_{п.н \max} = \max_{t_1 \in T_1} \{ \mu_{п.н} : \forall \mu_{п.н} \in \max_{\Delta t_{1,2} \in \Delta T} \{ \mu_{п.н} : \forall \mu_{п.н} \in \inf_{\bar{v}_1} \{ k_{\mu} (1 - \mu_{п.н}) + k_{\Delta} abs F_{\Delta} + k_p abs F_p : \forall \mu_{п.н} \in \max_{n_{0i} \mu_{ki}} \{ \mu_{п.н} \}_{t_1 = \text{const}} \}_{\Delta t_{1,2} = \text{const}} \}_{t_1 = \text{const}} \} \}, \quad (7.3.25)$$

где T_1 — ограниченное множество значений t_1 .

Нулевое решение, вблизи которого определяется действительное решение поставленной задачи, следует определять на основе алгоритма оптимизации $\mu_{п.н}$, выраженного формулой (7.2.21a). Он позволит также определить и T_1 .

Глава VIII. ● ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА К ОДНОЙ ПЛАНЕТЕ С ВОЗВРАЩЕНИЕМ К ЗЕМЛЕ

§ 1. ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ УЧАСТКОВ

Циклы оптимальных полетов к одной планете с возвращением к Земле чередуются так же, как и к планете без возвращения, т. е. через синодический период T_c . Приближенная повторяемость циклов полетов также происходит через период великих противостояний планеты $T_{в.п.}$. Методы оптимизации траекторий к одной планете с возвращением к Земле рассмотрим на примере траекторий полета к Марсу с возвращением к Земле.

Оптимизация траекторий полета экспедиции

Оптимизацию траекторий межпланетных участков полета экспедиции удобнее проводить на поле изолиний составляющих импульсов скорости V_1 , V_2 и т. д. в координатах дат старта и прилета на планеты. Поле изолиний для циклов полета к Марсу в 1975 г. для двухимпульсной схемы полета приведено на рис. 8.1.1 (аэродинамическое торможение на орбиту ИСМ).

По оси абсцисс отложены даты старта с Земли $t_1 = t_{ст}^{\oplus}$ и даты прилета на нее $t_4 = t_{пр}^{\oplus}$, по оси ординат—даты прилета на Марс $t_2 = t_{пр}^{\sigma}$ и старта с него $t_3 = t_{ст}^{\sigma}$.

Над биссектрисой системы координат (область полетов Земля—Марс) нанесены изолинии скорости старта $V_1 = V_{ст}^{\oplus}$ с орбиты ИСЗ, под биссектрисой (область полетов Марс—Земля) изолинии скорости старта $V_2 = V_{ст}^{\sigma}$ с эллиптической орбиты спутника Марса.

Расстояние от какой-либо точки на поле изолиний скоростей V_1 до биссектрисы (в направлении осей координат) определяет время перелета с Земли на Марс:

$$\Delta t_{\Pi}^{\oplus-\sigma} = t_2 - t_1,$$

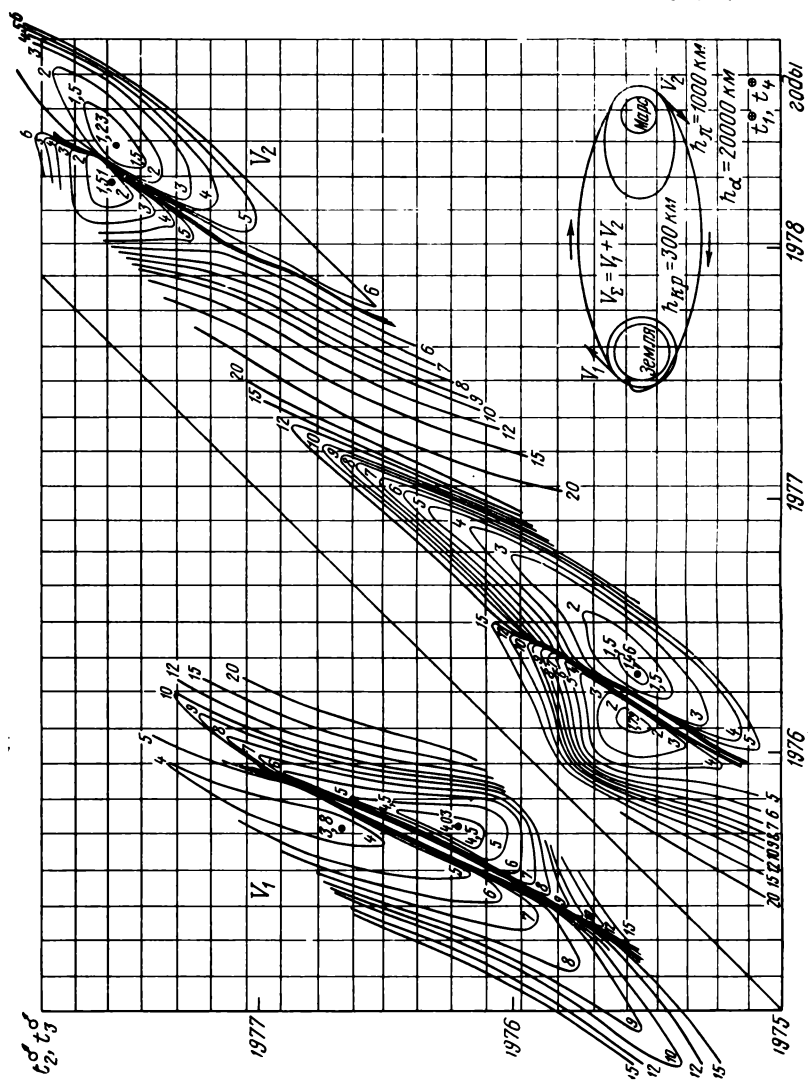


Рис. 8.1.1. Поле изолиний характеристикских скоростей для двухимпульсной схемы экспедиции к Марсу для цикла полетов в 1975 г.

а аналогичное расстояние от точки на поле изолиний V_2 — с Марса на Землю:

$$\Delta t_{\Pi}^{\sigma-\oplus} = t_4 - t_3.$$

Время ожидания на Марсе (или на орбите его спутника)

$$\Delta t_{ож} = t_3 - t_2.$$

Суммарное время полета корабля экспедиции

$$\Delta t_{\Sigma} = \Delta t_{\Pi}^{\oplus \rightarrow \sigma} + \Delta t_{ож} + \Delta t_{\Pi}^{\sigma \rightarrow \oplus} = t_4 - t_1.$$

На рис. 8.1.2 приведено поле изолиний для трехимпульсной схемы полетов к Марсу в 1975 г.

При фиксированных датах старта с Земли t_1 и прилета на Марс t_2 имеет место однозначное соответствие между скоростью V_1 (старт с орбиты ИСЗ) и скоростью V_2 (торможение на орбиту ИСМ). Поэтому в области полетов Земли — Марс (выше биссектрисы) построено поле изолиний суммарных скоростей:

$$V_{12} = V_1 + V_2.$$

В области полетов Марс — Земля (ниже биссектрисы) построено поле изолиний скорости старта V_3 с орбиты ИСМ.

Время полета $\Delta t_{\Pi}^{\oplus \rightarrow \sigma}$ и $\Delta t_{\Pi}^{\sigma \rightarrow \oplus}$, время ожидания $\Delta t_{ож}$ и суммарное время полета экспедиции Δt_{Σ} определяется так же, как это описано выше.

На рис. 8.1.3 приведено поле изолиний для четырехимпульсной схемы (ускоренные траектории) для случая подтормаживания скорости входа $V_{вх}^{\oplus}$ в атмосферу Земли до $V_{вх}^{\oplus} = 15,5$ км/с. В этом случае

$$V_{34} = V_3 + V_4,$$

где $V_4 = V_{вх}^{\oplus} - 15,5$.

Таким образом, для любой схемы полета на поле изолиний необходимо найти траектории, обеспечивающие минимум суммарной скорости, складывающейся из двух компонентов:

$$\begin{aligned} V_{x\Sigma} &= V_1 + V_2 \text{ — для двухимпульсной схемы;} \\ V_{x\Sigma} &= V_{12} + V_3 \text{ — для трехимпульсной схемы;} \\ V_{x\Sigma} &= V_{12} + V_{34} \text{ — для четырехимпульсной схемы.} \end{aligned}$$

На всех полях нанесены изолинии составляющих скоростей при полетах по траекториям как 1-го полувитка (области изолиний, близкие к биссектрисе), так и 2-го (области изолиний, более удаленные от биссектрисы). Эти области разделены между собой «энергетическим хребтом» — узкой зоной больших значений скоростей.

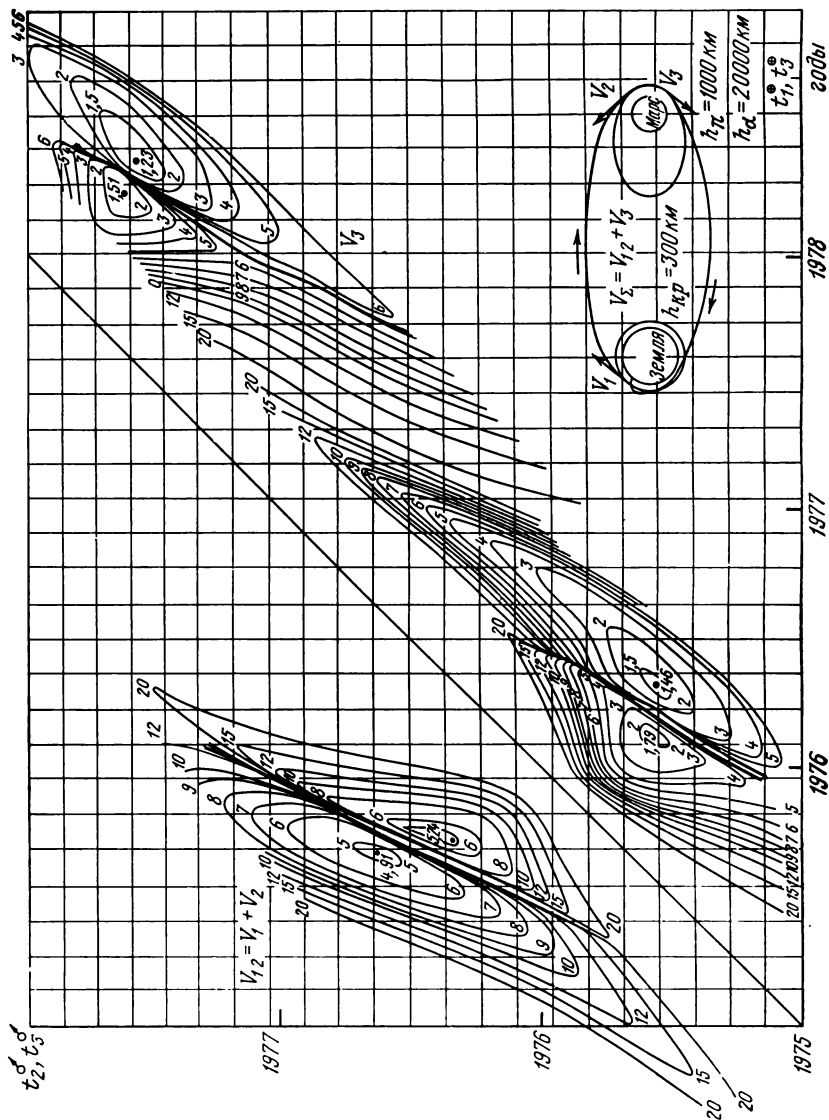


Рис. 8.1.2. Поле изолиний характеристик скоростей для трехимпульсной схемы экспедиции к Марсу для цикла годов в 1975 г.

Для того чтобы задача оптимизации $V_{\text{хз}}$ была однозначной, все возможные траектории полета экспедиции можно разбить на следующие четыре группы:

Группа	$\oplus \rightarrow \ominus$	$\ominus \rightarrow \oplus$
I—I	Траектория 1-го полувитка	Траектория 1-го полувитка
II—II	Траектория 2-го полувитка	Траектория 2-го полувитка
I—II	Траектория 1-го полувитка	Траектория 2-го полувитка
II—I	Траектория 2-го полувитка	Траектория 1-го полувитка

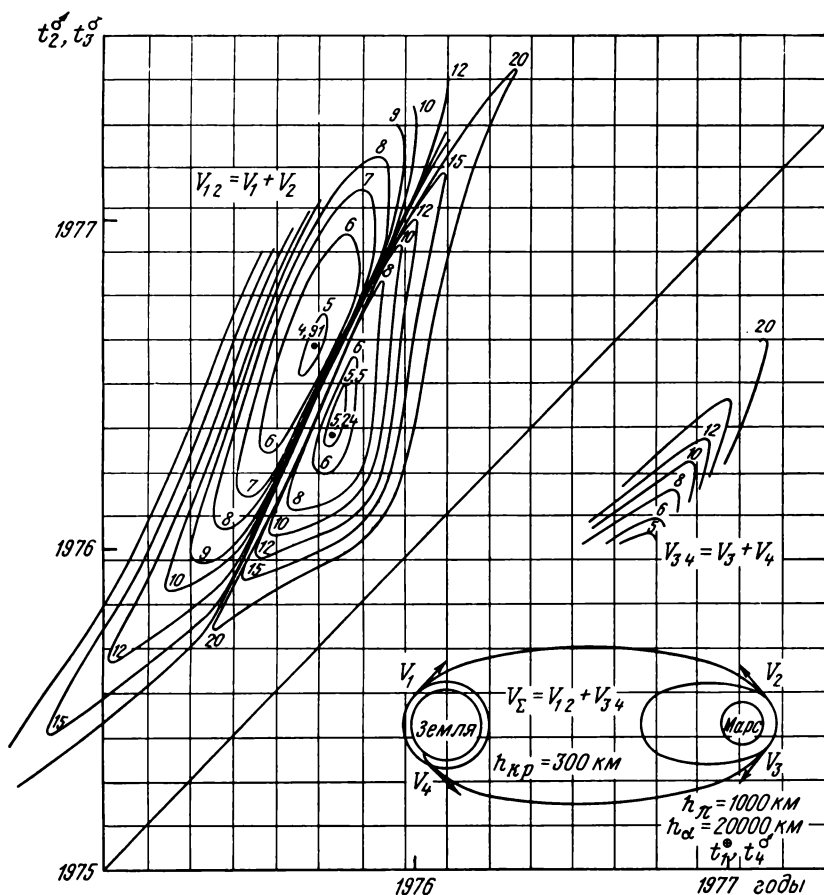


Рис. 8.1.3. Поле изолиний характеристических скоростей для четырех-импульсной схемы экспедиции к Марсу для цикла полетов в 1975 г. (торможение до $V_{\text{вх}}^{\oplus} = 15,5$ км/с)

Рассмотрим случай оптимизации траекторий полета, когда нет ограничений ни на суммарное время полета Δt_{Σ} , ни на время ожидания $\Delta t_{\text{ож}}$. В этом случае для каждой группы траекторий наименьшее значение V_{Σ} будет при полетах по траекториям с минимальными составляющими скоростей (V_1 и V_2 ; V_{12} и V_3 и т. д.). Дата старта с Земли t_1 и дата прилета на Марс t_2 определяется как координата, соответствующая минимуму скорости V_1 или V_{12} (дата старта с Марса t_3 и прилета на Землю по V_3 или V_{34}). Полученные значения скорости V_{Σ} будут наименьшими из всех возможных для выбранной группы траекторий.

Это первый энергетический минимум, соответствующий длительным полетам с $\Delta t_{\Sigma} \approx 3$ года и $\Delta t_{\text{ож}} \approx 1$ год.

Различные группы траекторий будут давать четыре различных значения V_{Σ} и Δt_{Σ} , из которых может быть выбрана наилучшая комбинация сочетания траекторий по полувиткам для заданного цикла полетов.

Рассмотрим случай, когда задано суммарное время Δt_{Σ} полета экспедиции. Найдем траекторию, обеспечивающую минимум V_{Σ} . Зафиксируем какую-либо дату старта с Земли t_1 , что в свою очередь определит дату возвращения на Землю:

$$t_4 = t_1 + \Delta t_{\Sigma}.$$

При фиксированных значениях t_1 и t_4 можно построить зависимости

$$V_1 = f_1(t_2) \text{ и } V_2 = f_2(t_3)$$

— для двухимпульсной схемы полета;

$$V_{12} = f_{12}(t_2) \text{ и } V_3 = f_3(t_2)$$

— для трехимпульсной схемы полета и

$$V_{12} = f_{22}(t_2) \text{ и } V_{34} = f_{34}(t_3)$$

— для четырехимпульсной.

По этим зависимостям определяются даты прилета на Марс t_2 и старта с Марса t_3 , обеспечивающие минимум V_{Σ} и время ожидания

$$\Delta t_{\text{ож}} = t_3 - t_2.$$

С уменьшением времени Δt_{Σ} оптимальное время $\Delta t_{\text{ож}}$ уменьшается и даже может стать отрицательным. В этом случае необходимо наложить дополнительное ограничение на

$$\Delta t_{\text{ож}} \geq \Delta t_{\text{ож. доп.}}$$

При $\Delta t_{\text{ож}} = \Delta t_{\text{ож. доп.}}$ схема оптимизации при фиксированных t_1 и t_4 остается той же, однако теперь

$$V_1 = f'_1(V_2), V_{12} = f'_{12}(V_3) \text{ и } V_{34} = f'_{34}(V_{34}),$$

так как $t_3 = t_2 + \Delta t_{\text{ож. доп.}}$.

Далее для обоих рассмотренных вариантов, изменяя дату старта с Земли t_1 , находим такую дату, которая обеспечивает минимум $V_{x\pi}$.

Для определения оптимальных характеристик траектории межпланетного полета корабля экспедиции была составлена программа для ЭЦВМ. Задача в описанных двух вариантах формулируется таким образом (для двухимпульсной схемы полета).

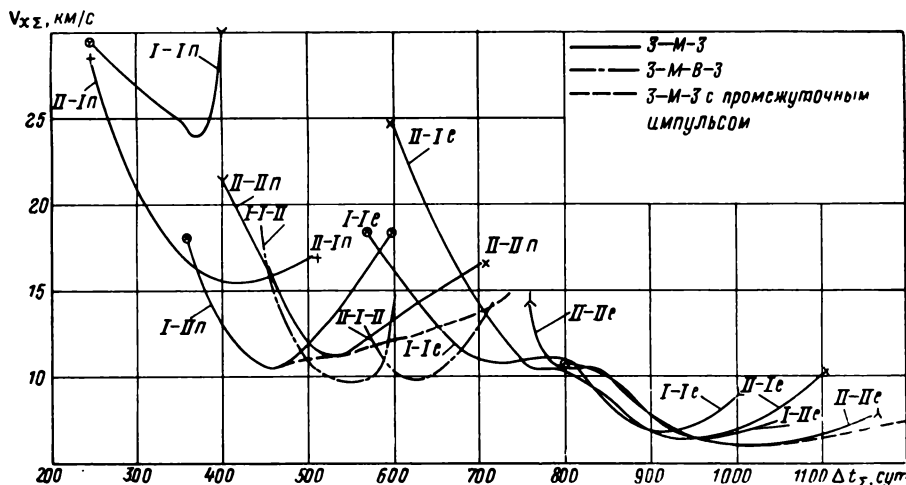


Рис. 8.1.4. Суммарная характеристическая скорость для трехимпульсных экспедиций к Марсу цикла 1975 г.
(e — естественный цикл, n — предыдущий)

В а р и а н т 1. Отыскать значения t_1 , t_2 и t_3 , обеспечивающие $\min V_{x\pi} = V_1 + V_2$ при заданном $\Delta t_{\Sigma} = t_4 - t_1$.

В а р и а н т 2. Отыскать значения t_1 и t_2 , обеспечивающие $\min V_{x\pi} = V_1 + V_2$ при заданных значениях:

$$\Delta t_{\Sigma} = t_4 - t_1;$$

$$\Delta t_{ож} = t_3 - t_2.$$

Поиск оптимальных значений t_1 , t_2 и t_3 производился методом координатного спуска. При уменьшении времени Δt_{Σ} , когда время $\Delta t_{ож}$ становилось $\Delta t_{ож} \leq \Delta t_{ож, доп}$, обеспечивается переход от варианта 1 к варианту 2.

Вариант сочетания полувитков траекторий полета (группа траекторий) задается. Из четырех возможных вариантов групп траекторий полета выбирается наилучшая.

На рис. 8.1.4 и 8.1.5 приведены зависимости минимальных значений $V_{x\pi} = f(\Delta t_{\Sigma})$ для траекторий полета экспедиции

цикла 1975 г. для различных групп траекторий. Видно, что для каждой группы траекторий имеют место два минимума:

- при $\Delta t_{\Sigma} = 900 \div 1000$ сут (длительные полеты);
- при $\Delta t_{\Sigma} = 350 \div 550$ сут (ускоренные полеты).

Минимум ускоренных полетов соответствует случаю с ограниченным временем ожидания ($\Delta t_{\text{ож}} = 30$ сут).

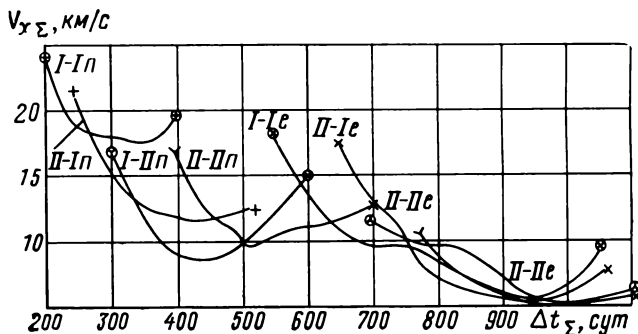


Рис. 8.1.5. Суммарная характеристическая скорость для двухимпульсных экспедиций к Марсу цикла 1975 г. (e — естественный цикл, п — предыдущий)

Минимумы $V_{х\pm}$ для различных групп траекторий длительных полетов мало отличаются. Наименьшее время Δt_{Σ} соответствует группе траекторий I—I (сочетание траекторий первых полувитков). Время ожидания не ограничено и составляет $\Delta t_{\text{ож}} \approx 1$ год.

Траектории такого типа назовем траекториями «естественного цикла». При уменьшении времени Δt_{Σ} для таких траекторий $V_{х\pm}$ увеличивается. Для некоторых групп траекторий в районе $\Delta t_{\Sigma} = 700 \div 800$ сут имеется «полочка» почти постоянных значений $V_{х\pm}$, после чего наступает интенсивный рост $V_{х\pm}$. Как правило, этот рост $V_{х\pm}$ происходит за счет составляющих скорости траектории полета с Марса на Землю. При этом при переходе от длительных траекторий к ускоренным происходит переход через «энергетический хребет», отделяющий область возвратных траекторий цикла 1975 г. («естественный цикл») в область возвратных траекторий цикла 1973 г. (назовем их траекториями «предыдущего цикла»).

Это объясняется тем, что области минимума составляющих скоростей полета Земля — Марс имеют более «крутые склоны», чем области минимума составляющих скоростей возвратных траекторий. При ускоренных полетах наименьшие $V_{х\pm}$ имеют место для группы траекторий I—IIп (Земля — Марс — траектории 1-го полувитка, обратный полет — траектории 2-го полувитка) при суммарном времени полета экспедиции $\Delta t_{\Sigma} \approx 430 \div$

460 сут (при времени ожидания $\Delta t_{\text{ож}} = 30$ сут). При этом получаются большие скорости входа в атмосферу Земли:

$$V_{\text{вх}}^{\oplus} = 20 \div 23 \text{ км/с.}$$

На рис. 8.1.6 показано влияние времени ожидания $\Delta t_{\text{ож}}$ на характеристики ускоренных траекторий полета. Видно, что с ростом $\Delta t_{\text{ож}}$ увеличиваются суммарные энергозатраты полета (V_{Σ} — суммарная характеристическая скорость, скорость входа в атмосферу Земли $V_{\text{вх}}^{\oplus} \approx V_{\pi}^{\oplus}$) и суммарное время полета Δt_{Σ} .

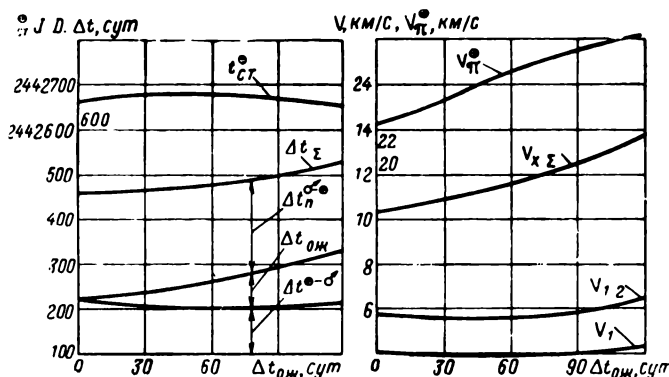


Рис. 8.1.6. Влияние времени ожидания на характеристики ускоренных траекторий. Трехимпульсная схема З—М—З (цикла 1975 г.), группа I—II (эллиптический ИСМ)

Рассмотрим, как изменятся характеристики траекторий полета экспедиций с использованием участков гелиоцентрических траекторий с подачей промежуточного импульса.

На рис. 8.1.7 приведено поле изолиний составляющих импульсов

$$V_{12} = V_1 + V_2 + \Delta V_{\text{пр}} \text{ и } V_3 + \Delta V_{\text{пр}}$$

($\Delta V_{\text{пр}}$ — промежуточный импульс на соответствующем гелиоцентрическом участке траектории) для трехимпульсной схемы полета к Марсу в 1975 г. Сопоставим это поле изолиний с полем изолиний для аналогичной схемы полета без промежуточного импульса на рис. 8.1.2. Видно, что существенно снизились энергозатраты в районе «энергетических хребтов», разделяющих траектории 1-го и 2-го полувитков, как для полетов Земля — Марс, так и Марс — Земля. Для двухимпульсового участка перелета Земля — Марс (при определении участков считаем только импульсы в планетосферах) поле изолиний стало одноэкстремальным. На одноимпульсном участке полета Марс — Земля

поле изолиний осталось двухэкстремальным, но с существенно выровненным энергетическим хребтом.

Заметно также снизились энергозатраты на обоих участках полета в области траекторий 2-го полувитка при больших временах полета, что существенно снизило энергозатраты в районе стыка траекторий Марс — Земля для «естественного» и «преды-

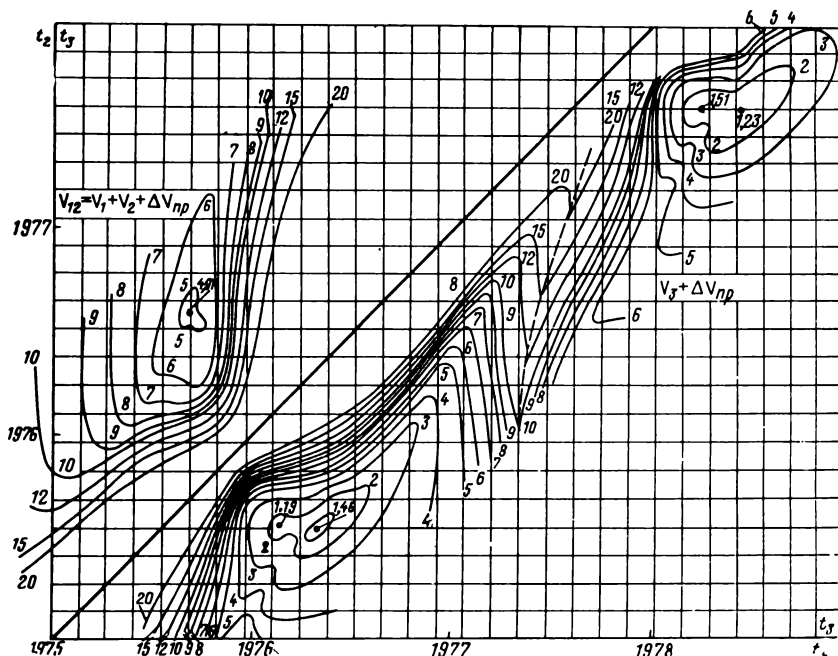


Рис. 8.1.7. Поле изолиний характеристических скоростей для трехимпульсных траекторий с промежуточным импульсом (цикл 1975 г.)

дущего» циклов. Все это привело к тому (см. рис. 8.1.4), что уменьшились энергозатраты для «ускоренных» траекторий левее минимумов для комбинации полувитков I—IIп и II—IIп. Для «длительных» траекторий полета снизились энергозатраты для комбинации полувитков II—IIе при больших значениях $\Delta t_{\Sigma} > 1000$ сут.

Таким образом, использование траекторий полета с промежуточным импульсом на гелиоцентрических участках позволяет снизить энергозатраты при значениях Δt_{Σ} между «ускоренными» и «длительными» перелетами.

На рис. 8.1.4 приведены также зависимости V_{Σ} для траекторий полета к Марсу с маневром в гравитационном поле Венеры, рассматриваемые в § 2 гл. IX. Видно, что использование схемы полета по маршруту Земля — Марс — Венера — Земля

позволяет еще более снизить энергозатраты при значениях Δt_{Σ} между «длительными» и «ускоренными» перелетами, в результате чего получить достаточно мало изменяющиеся энергетические характеристики с $\Delta t_{\Sigma} = 450 \div 800$ сут.

Оптимизация траекторий облета Марса с возвращением к Земле

В работе [5] рассмотрены траектории облета Марса одноимпульсной схемы (импульс старта с орбиты ИСЗ) с пассивным облетом планеты как вне сферы действия («дальний облет»), так и в сфере действия («ближний облет»).

Для такого класса траекторий оптимальные по стартовому импульсу траектории лежат в окрестности так называемых двухгодичных траекторий полета (суммарное время полета 730 сут). Траектории такого типа назовем траекториями «длительного облета» Марса. Однако, если перейти к двухимпульсной схеме облета Марса (второй импульс в сфере действия планеты), можно в большинстве случаев существенно улучшить характеристики траекторий «длительного облета» ($\Delta t_{\Sigma} \approx 2$ года) и получить новый класс траекторий «ускоренного облета» Марса с существенно меньшим временем полета $\Delta t_{\Sigma} \approx 450 \div 500$ сут. Критерием оптимизации траектории в этом случае будет суммарная характеристическая скорость

$$V_{\Sigma} = V_{\text{ст}}^{\oplus} + \Delta V_{\text{м}}^{\sigma},$$

где $V_{\text{ст}}^{\oplus}$ — характеристическая скорость старта с орбиты ИСЗ ($H_{\text{кр}} \approx 300$ км);

$\Delta V_{\text{м}}^{\sigma}$ — импульс маневра в сфере действия Марса для перехода с планетоцентрической гиперболы подлета на гиперболу ухода к Земле.

Параметрами оптимизации такой траектории облета будут:

- 1) дата старта с Земли — $t_{\text{ст}}^{\oplus}$;
- 2) дата прилета на Марс — $t_{\text{пр}}^{\sigma}$;
- 3) суммарное время полета — Δt_{Σ} .

Для выделения унимодальной области поиска траектории разделяются на четыре группы сочетаний полувитков на отдельных этапах полета: $I-II$, $I-I$, $II-II$ и $II-I$. Дополнительно траектории полета делятся на длительные с $\Delta t_{\Sigma} = 600 \div 800$ сут и ускоренные с $\Delta t_{\Sigma} = 400 \div 500$ сут. Это позволяет использовать для определения оптимальных траекторий градиентные методы поиска. Для получения оптимальных ускоренных траекторий облета Марса использовался метод конфигураций из работы [46].

§ 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КЛА С ВОЗВРАЩЕНИЕМ К ЗЕМЛЕ

Характеристики траекторий облета Марса с возвращением к Земле

Возможны два типа траекторий облета Марса — длительные (время полета ~ 2 года) и «ускоренные» (время полета ~ 450 —500 сут).

«Длительные» траектории облета происходят практически с нулевым импульсом маневра в сфере действия Марса. Энергозатраты этих траекторий для лучших комбинаций полувитков незначительно превышают затраты, потребные для полетов к Марсу без возвращения (см. на рис. 8.2.1 точки $\oplus$).

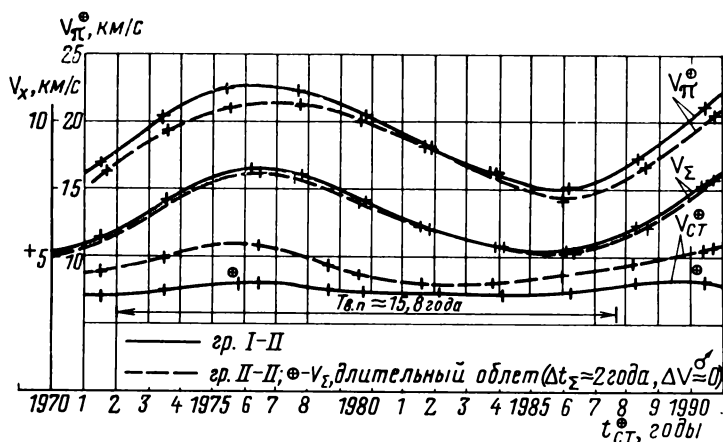


Рис. 8.2.1. Энергозатраты для ускоренных траекторий облета Марса

«Ускоренные» траектории облета Марса требуют приложения существенного импульса при облете Марса в сфере его действия ($\Delta V_M^\sigma \approx 1 \div 4$ км/с).

В цикле полетов 1975 г. сочетание полувитков I—I на траектории полета дает очень высокое значение оптимума $V_{хл}$ для ускоренных траекторий. Оптимальное значение $V_{хл}$ для «длительных» траекторий этого сочетания полувитков составляет $V_{хл} \approx 6$ км/с при суммарном времени полета $\Delta t_\Sigma = 620$ сут. Характеристики траекторий для сочетания I—II существенно лучше. Для ускоренных траекторий минимум $V_{хл} \approx 8$ км/с при $\Delta t_\Sigma = 450$ сут. Импульсы старта с Земли и маневра у Марса составляют ~ 4 км/с.

Для длительных траекторий облета минимум $V_{хл} = 4,4$ км/с при $\Delta t_\Sigma = 700 \div 750$ сут. Импульс маневра в сфере действия

Марса $\Delta V_M^\sigma < 100$ м/с, т. е. сводится к величине корректирующего импульса. Скорость входа в атмосферу Земли для ускоренных траекторий $V_\pi^\oplus = 22,5$ км/с, для длительных траекторий $V_\pi^\oplus = 12$ км/с.

Хорошими характеристиками для цикла 1975 г. обладают также ускоренные траектории группы II—II. Величина $V_{хз} = 8$ км/с при $V_{хз} = 520$ сут и скорости входа в атмосферу Земли $V_\pi^\oplus = 21$ км/с. Оптимум длительных траекторий для этой группы полувитков соответствует суммарному времени $\Delta t_z = 800$ сут.

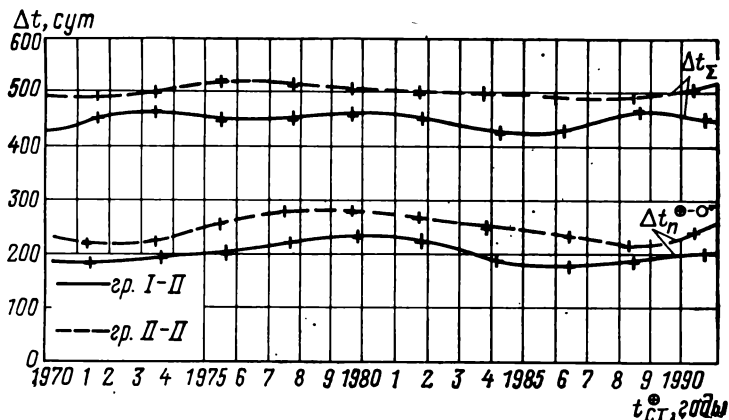


Рис. 8.2.2. Время полета для ускоренных траекторий облета Марса

Траектории полета для сочетания полувитков II—I имеют худшие характеристики как для ускоренных, так и для длительных траекторий полета.

Цикл полета к Марсу в 1975 г. является худшим. Для лучшего цикла полетов в 1986 г., как показали проверочные расчеты, качественная картина характеристик оптимальных ускоренных траекторий примерно та же. Наилучшими являются группы траекторий I—II и II—II. Для этих «лучших» комбинаций траекторий на рис. 8.2.1 и 8.2.2 приведены зависимости изменения характеристик для различных циклов полетов. Условные кривые, соединяющие точки характеристик различных циклов, имеют периодичность, примерно равную периоду великих противостояний Марса $T_{в.п} \approx 15,8$ года. Это позволяет экстраполировать характеристики на циклы, выходящие за пределы рассчитанных характеристик, с 1970 по 1990 гг. «Лучшим» был цикл полетов к Марсу в 1969 г. и будет в 1986 г. Циклы полетов 1975 и 1977 гг. являются наихудшими.

Для лучших циклов $V_{хз} = 5,1 \div 5,2$ км/с, $\Delta t_z = 425$ сут для группы I—II, $\Delta t_z = 490$ сут для группы II—II, $V_{\pi}^{\oplus} = 14,5$ и $15,1$ км/с.

Для худших циклов: $V_{хз} = 8,2 \div 8,3$ км/с, $\Delta t_z = 450$ сут для группы I—II, $\Delta t_z = 520$ сут для группы II—II, $V_{\pi}^{\oplus} = 21,5$ и 23 км/с.

Значительные энергозатраты и большие скорости входа в атмосферу Земли для худших циклов полетов могут явиться препятствием для использования ускоренных траекторий прямого облета Марса в эти циклы полетов.

Характеристики оптимальных траекторий для различных схем полета экспедиций на Марс

По изложенной выше методике были проведены расчеты оптимальных траекторий для различных схем экспедиций на Марс в 1970—1980 гг.

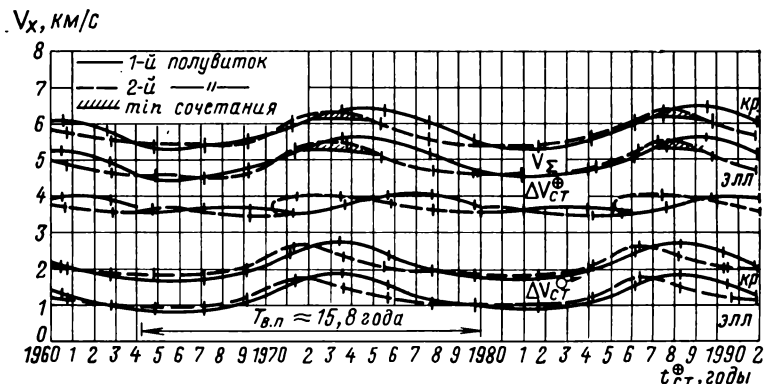


Рис. 8.2.3. Характеристики длительных двухимпульсных экспедиций к Марсу (круговой и эллиптический ИСМ)

На рис. 8.2.3 и 8.2.4 приведены зависимости изменения суммарной скорости $V_{хз}$ и ее составляющих для длительных двух- и трехимпульсных схем экспедиций на Марс. Точки, отмеченные рисками, соответствуют оптимальным датам старта, повторяющимся примерно через $T_c = 2,135$ года. Условно эти точки соединены кривыми. Изменение $V_{хз}$ и ее составляющих для всех схем полета носит периодический характер с периодом, равным примерно периоду великих противостояний Марса $T_{в.п.} = 15,8$ года. Диапазон $V_{хз}$ примерно $500—800$ м/с для лучших сочетаний полувитков траекторий. Для двухимпульсной схемы полетов приведены значения $V_{хз}$ и ее составляющих при выведении на круговую орбиту ИСМ с $h_{кр} = 1$ тыс. км и эллиптическую орбиту с $h_{\pi} = 1$ тыс. км и $h_{\alpha} = 20$ тыс. км. Значения $V_{хз}$ при выведении

на эллиптическую орбиту меньше примерно на 1 км/с по сравнению с выводением на круговую орбиту. Выбранная эллиптическая орбита обеспечивает энергозатраты, близкие к предельно минимальным (выход на параболу снижает $V_{хз}$ всего на 250 м/с). Для трехимпульсной схемы полета $V_{хз}$ при выведении на эллипс примерно на 2 км/с меньше, чем на круговую орбиту. Суммарное время полета длительных экспедиций лежит в пределах $\Delta t_{\Sigma} = 900 \div 1100$ сут. Скорость входа в атмосферу Земли $V_{\pi}^{\oplus} = 11,5 \div 12,3$ км/с. Время ожидания на Марсе $\Delta t_{ож} \approx 330 \div 450$ сут.

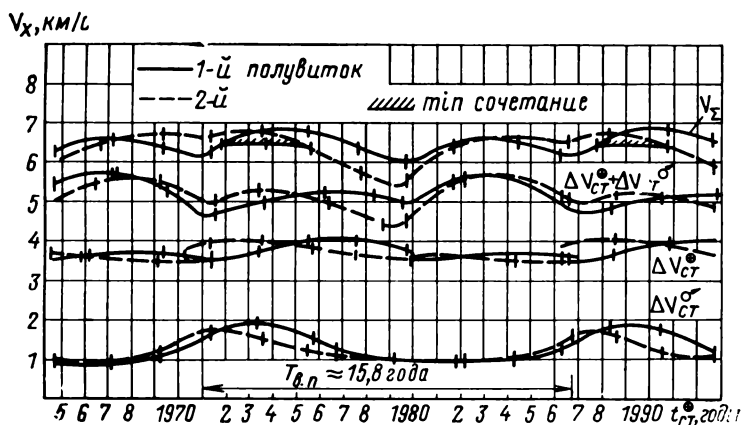


Рис. 8.2.4. Характеристики длительных трехимпульсных экспедиций к Марсу (эллиптический ИСМ)

Характеристики оптимальных траекторий двух- и трехимпульсных схем ускоренных экспедиций носят также периодический характер. Период этот примерно равен периоду великих противостояний Марса (рис. 8.2.5 и 8.2.6).

Суммарная характеристическая скорость $V_{хз}$ для ускоренных полетов существенно больше, чем для длительных. Диапазон изменения $V_{хз}$ по циклам полетов также существенно больше и равен 1,5—2 км/с. Особенно сильно изменяется скорость входа в атмосферу Земли $V_{\pi}^{\oplus}$ (от 14 до 23 км/с). Минимальное значение $V_{\pi}^{\oplus}$ примерно соответствует минимуму $V_{хз}$. Суммарное время полета, однако, достаточно стабильно и составляет $\Delta t_{\Sigma} = 430 \div 530$ сут с диапазоном изменения для траекторий одной комбинации полувитков не более 50 сут. Скорость входа в атмосферу Марса для двухимпульсной схемы полета примерно $V_{\pi} \approx 6,5\text{—}8,5$ км/с. Скорость старта с орбиты ИСЗ для траекто-

рий с комбинацией полувитков I—II достаточно стабильна и составляет $V_{\text{ст}}^{\oplus} = 3,5 \div 4$ км/с для трехимпульсной схемы и $V_{\text{ст}}^{\oplus} \approx 3,8 \div 4,3$ км/с для двухимпульсной.

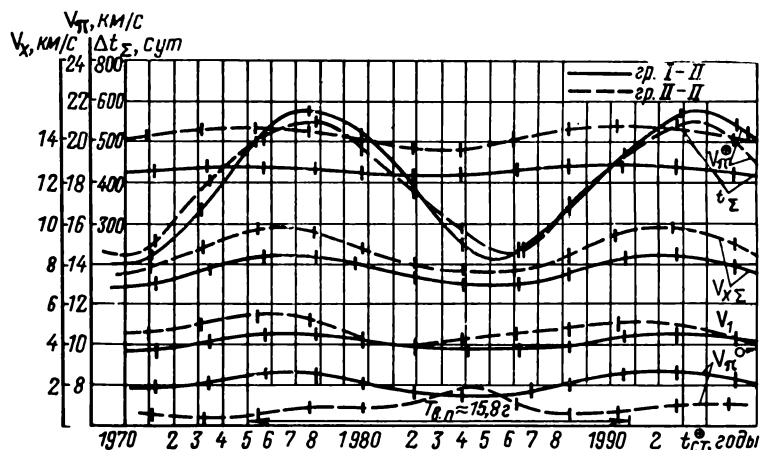


Рис. 8.2.5. Характеристики ускоренных двухимпульсных экспедиций к Марсу (эллиптический ИСМ, $h_{\pi}=1000$ км, $h_{\alpha}=20\,000$ км, $\Delta t_{\text{ож}}=30$ сут)

Существенное изменение характеристик траекторий полета к Марсу по циклам полетов приводит к тому, что имеют место «хорошие» циклы полетов (1984 и 1986 гг.) и плохие (1975, 1977 гг.). В «хорошие» циклы полетов энергозатраты (суммарная

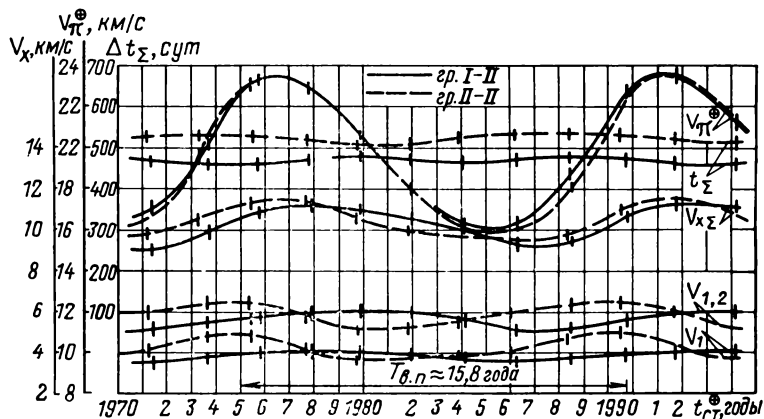


Рис. 8.2.6. Характеристики ускоренных трехимпульсных экспедиций к Марсу (условия те же, что в подписи рис. 8.2.5)

скорость $V_{хз}$) и скорость входа в атмосферу Земли $V_{\pi}^{\oplus}$ минимальны, что делает их благоприятными для реализации прямых полетов к Марсу.

Характеристики траекторий облета Венеры с возвращением к Земле

Такие траектории могут представлять интерес как для автоматического аппарата, возвращающегося на Землю, так и для пилотируемого при первых полетах к планете. Траектории дли-

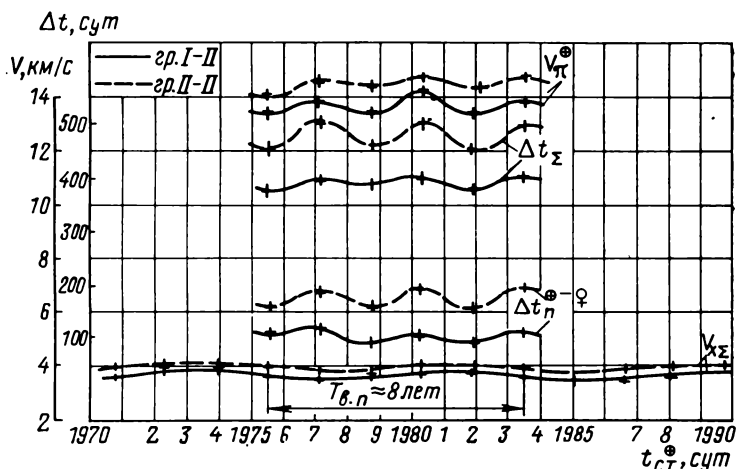


Рис. 8.2.7. Характеристики траектории ускоренного облета Венеры ($\Delta V_{м}^{\oplus} < 100$ м/с)

тельного облета Венеры с суммарным временем полета $\Delta t_{\Sigma} \approx 2$ года имеют энергетические характеристики, близкие к траекториям полета к Венере без возвращения. Импульс маневра в сфере действия Венеры равен нулю.

Возможны ускоренные траектории облета Венеры с возвращением к Земле с суммарным временем полета $\Delta t_{\Sigma} \approx 350 \div 500$ сут. Наилучшими характеристиками обладают траектории с сочетаниями полувитков I—II и II—II. Сочетания полувитков I—I и II—I дают значения суммарной характеристической скорости на 1—2 км/с больше.

Характеристики траекторий облета Венеры имеют небольшой диапазон изменения (рис. 8.2.7). Так, для $V_{хз}$ диапазон изменения по циклам полетов $\Delta V_{хз} = 300$ м/с. Оптимальные траектории соответствуют малым значениям импульса скорости в сфере действия Венеры ($\Delta V_{м}^{\oplus} \leq 100$ м/с). Суммарное время полета по траекториям облета Венеры также достаточно стабильно и составляет $\Delta t_{\Sigma} \approx 380 \div 400$ сут для траекторий с сочетанием

полувитков $I-II$ и $\Delta t_{\Sigma} = 450 \div 500$ сут для $II-II$. Следует отметить, что $V_{x\Sigma}$ облета Венеры ($V_{x\Sigma} = 3,6 \div 4$ км/с для сочетания полувитков $I-II$) незначительно превышает скорость 3,4—3,8 км/с, потребную для полетов к Венере без возвращения. Скорость входа корабля в атмосферу Земли $V_{\pi}^{(1)} = 14 \div 14,8$ км/с для сочетания полувитков $II-II$ и $V_{\pi}^{(2)} = 13 \div 14,2$ км/с для $I-II$. Циклы оптимальных облетов Венеры чередуются примерно через синодический период Венеры $T_c \approx 1,6$ года. Циклы оптимальных траекторий повторяются примерно через период великих соединений Венеры $T_{в.п} \approx 8$ лет. Учитывая это, можно приближенно экстраполировать характеристики оптимальных траекторий на другие циклы полетов.

§ 3. ВЫБОР СХЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ОРБИТЫ ОЖИДАНИЯ У ПЛАНЕТЫ

В большинстве опубликованных как отечественных, так и зарубежных работ при оптимизации траекторий полета корабля экспедиции к планете считается, что маневр торможения с подлетной гиперболы на орбиту ожидания у планеты и старт с нее на гиперболу отлета происходит в точках перицентра этих траекторий. В реальной ситуации такой случай практически неосуществим. Естественно возникает потребность найти реально осуществимый маневр формирования орбиты ожидания у планеты с минимальными энергозатратами. В данном параграфе сопоставлены три варианта маневров формирования орбиты, комбинируемых из маневра в плоскости эллиптической орбиты ожидания (поворот оси апсид эллиптической орбиты, непериферические переходы эллипс — гипербола) и маневра поворота плоскости эллиптической орбиты в ее апоцентре (см. § 2 гл. IV). Это сопоставление не претендует на строгую оптимизацию схемы маневра формирования орбиты ожидания. Однако полученный вариант схемы маневра с наименьшими затратами, базирующийся на непериферических переходах эллипс — гипербола, по-видимому, близок по энергозатратам к минимальному.

Рассмотрены случаи формирования орбиты ожидания как в плоскости вектора подлета к планете и упрежденного вектора старта с нее (базовая плоскость), так и в плоскости произвольного наклона к базовой плоскости.

Орбита в плоскости векторов подлета к планете и старта с нее

Пусть заданы направления векторов скорости на асимптотах подлетной и отлетной гипербол (V_1 и V_2 на рис. 8.3.1). Направление этих векторов характеризуется в экваториальной плането-

центрической системе координат углами α_1 и α_2 — прямого восхождения, δ_1 и δ_2 — углами склонения.

В этом случае естественно формировать орбиту ожидания в плоскости векторов V_1 и V_2 . Наклонение этой орбиты к экватору i , а долгота восходящего узла Ω . Угол φ между векторами V_1 и V_2 определится из сферического треугольника $\delta_2 a \delta_1$

$$\cos \varphi = \cos (\alpha_1 - \alpha_2) \cos (\delta_1 - \delta_2).$$

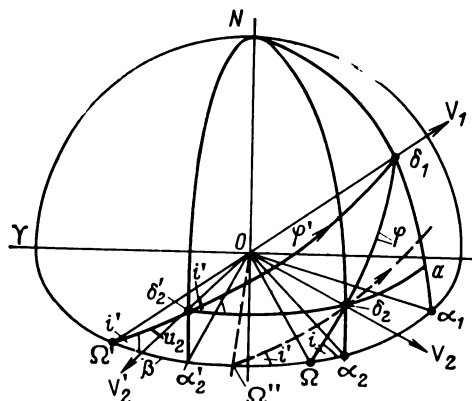


Рис. 8.3.1. Схема определения наклона i орбиты ожидания

За время ожидания у планеты $\Delta t_{ож}$ долгота узла орбиты ожидания изменится на величину *

$$\Delta \Omega = - \frac{2\pi \epsilon}{\mu_{пл} p^2} \cos i \frac{\Delta t_{ож}}{T},$$

а ось апсид повернется на угол

$$\Delta \omega = \frac{\pi \epsilon}{\mu_{пл} p^2} (5 \cos i - 1) \frac{\Delta t_{ож}}{T}.$$

Здесь ϵ — коэффициент, характеризующий сжатие планеты;

$\mu_{пл}$ — гравитационная постоянная планеты;

p — параметр орбиты ожидания;

$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_m}}$ — период обращения на орбите ожидания;

a — большая полуось орбиты ожидания.

В этом случае плоскость орбиты ожидания должна проходить через векторы $\bar{V}_1$ и упрежденный вектор $\bar{V}_2'$ (базовая плоскость). Направление вектора $\bar{V}_2'$ характеризуется углами

* См. § 1 гл. II.

$\alpha_2' = \alpha_2 + \Delta\Omega'$, $\delta_2' = \delta_2$. Наклонение орбиты ожидания в этом случае будет i_1' , а долгота узла Ω' . Угол между векторами V_1 и V_2' равен φ' (см. рис. 8.3.1). За время ожидания $\Delta t_{\text{ож}}$ наклонение орбиты i_1' не изменится, а долгота узла станет

$$\Omega'' = \Omega' + \Delta\Omega',$$

$$\text{где } \Delta\Omega' = -\frac{2\pi\epsilon}{\mu_{\text{пл}}P^2} \cos i' \frac{\Delta t_{\text{ож}}}{T}.$$

В этом случае в конце времени ожидания плоскость орбиты ожидания пройдет через вектор стартовой скорости V_2 . Из сферического треугольника $\delta_2'a\delta_1$ получим

$$\text{tg}(\delta_1 - \delta_2) = \sin(\alpha_1 - \alpha_2 - \Delta\Omega') \text{tg} i'.$$

После преобразования этого выражения будем иметь

$$\frac{\text{tg}(\delta_1 - \delta_2)}{\text{tg} i'} = \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \Delta\Omega' - \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \Delta\Omega'.$$

Это трансцендентное уравнение определяет угол i' . Угол φ' между векторами V_1 и V_2 (из сферического треугольника $\delta_2'a\delta_1$).

$$\cos \varphi' = \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \Delta\Omega') \cos(\delta_1 - \delta_2).$$

Угловое расстояние u_2 вектора V_2' от линии узлов Ω' определится из сферического треугольника $\Omega'a_2'\delta_2'$:

$$\sin u_2 = \frac{\sin \delta_2}{\sin i'}.$$

Из сферического треугольника $\Omega'a_2'\delta_2'$ получим

$$\sin \beta = \frac{\text{tg} \delta_2}{\text{tg} i'}.$$

Долгота узла Ω' будет

$$\Omega' = \alpha_2 + \Delta\Omega' - \beta = \alpha_2 + \Delta\Omega' - \arcsin \frac{\text{tg} \delta_2}{\text{tg} i'}.$$

При определении i на ЭЦВМ целесообразно, не решая трансцендентного уравнения, определить i' методом последовательных приближений из следующих рекуррентных соотношений:

$$\text{tg} i^{(k)} = \frac{\text{tg}(\delta_1 - \delta_2)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2^{(k)})},$$

$$\Delta\Omega^{(k)} = -\frac{2\pi\epsilon}{\mu_{\text{пл}}P^2} \cos i^{(k)} \frac{\Delta t_{\text{ож}}}{T},$$

$$\alpha_2^{(k+1)} = \alpha_2 + \Delta\Omega^{(k)}.$$

Учитывая поворот оси апсид от сжатия планеты, определим угол между асимптотами гипербола $\varphi'' = \varphi' - \Delta\omega$, необходимый для расчета маневра перехода в плоскости векторов V_1, V_2 .

Рассмотрим несколько вариантов маневра перехода между гиперболической орбитой прилета, эллиптической орбитой ожидания и гиперболой отлета. Радиусы перигентра r_π и апоцентра r_a орбиты ожидания заданы. Все эти варианты переходов базируются на ряде элементарных маневров, методика расчета которых описана в § 2 гл. IV.

Сопоставление различных вариантов маневров формирования орбит ожидания в базовой плоскости

Возможны следующие варианты маневра компланарного перехода на орбиту ожидания с подлетной гиперболой и старта с орбиты ожидания на гиперболу отлета от планеты.

1. Перицентральный переход между гиперболами и эллиптической орбитой с поворотом оси апсид эллипса:

а) с одноимпульсным поворотом оси апсид эллиптической орбиты;

б) с двухимпульсным поворотом оси апсид эллиптической орбиты.

2. Неперицентральный переход между гиперболическими и эллиптической орбитами.

Пусть угол между векторами скорости $\bar{V}_\infty^+$ и $\bar{V}_\infty^{ct}$ на асимптотах гипербола равен φ (рис. 8.3.2). Возможны два вида перехода и два положения орбит ожидания. Первый вид перехода (сплошные линии на рис. 8.3.2) дает больший разворот осей апсид гипербола Δv_Σ^* , чем второй (пунктирные линии). Угол между осями апсид гипербола (точки перехода)

$$\Delta v_\Sigma = \pi \pm \varphi - (\alpha_\tau + \alpha_{ct}).$$

Знак «+» — для первого вида перехода, «—» — для второго.

Для перицентральных переходов угол Δv_Σ равен потребному углу поворота оси апсид эллипса. Для неперицентрального перехода углы Δv равны аномалии точки торможения на эллипс или старта с него. В общем случае, когда модули скорости $\bar{V}_\infty$ подлетной и отлетной гипербола не равны, справедливо соотношение

$$\Delta v_\tau + \Delta v_{ct} = \pi \pm \varphi - (\alpha_\tau + \alpha_{ct}) \quad (\Delta v_\tau \neq \Delta v_{ct}).$$

* Отметим, что в варианте неперицентрального перехода точки перехода с гипербола на эллипс совпадают с перигентром гипербола.

Оптимальное перераспределение v_T и v_{CT} находится из условия минимума

$$\Delta \tilde{V}_{x\Sigma} = \Delta \tilde{V}_T + \Delta \tilde{V}_{CT},$$

где $\Delta V_{\text{т}}$ и $\Delta V_{\text{ст}}$ — импульсы скорости на торможение (или старт) с гиперболы на эллипс. На рис. 8.3.3 для $\bar{r}_a = 5$ приведены зависимости дополнительных энергозатрат на маневр перехода с не-

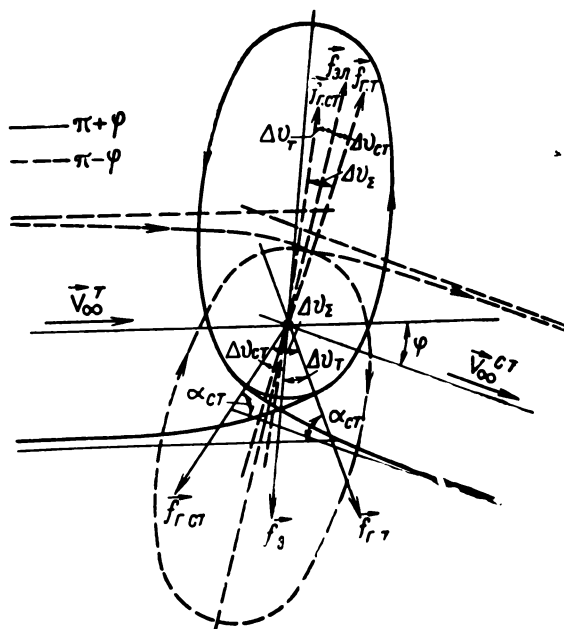


Рис. 8.3.2. Схема плоского перехода эллипс—гипербола—эллипс

совпадающими осями апсид тормозной и стартовой гипербол по сравнению с периферическими переходами при совпадающих осях апсид гипербол. Величина

$$\Delta \tilde{V} = \tilde{V}_{x\Sigma} - (\Delta \tilde{V}_{\pi}^T + \Delta \tilde{V}_{\pi}^{CT}),$$

где $\tilde{V}_{кп}$ — суммарные затраты на маневр перехода при несовпадающих осях апсид гипербол;

$\Delta \tilde{V}_{\pi}^{\tau}$; $\Delta \tilde{V}_{\pi}^{cr}$ — затраты на периферическое торможение (старт) с гиперболы на эллипс.

Видно, что маневр перехода с одноимпульсным поворотом оси апсид эллипса соответствует наибольшим энергозатратам. Маневр перехода с двухимпульсным поворотом оси апсид становится выгодным по сравнению с вариантом непериферического перехода лишь при больших углах $\Delta\omega$ разворота оси

апсид. Причем преимущества его проявляются при меньших значениях Δv_Σ с увеличением относительного радиуса $\tilde{r}_a$ эллиптической орбиты ожидания. Однако для реальных значений

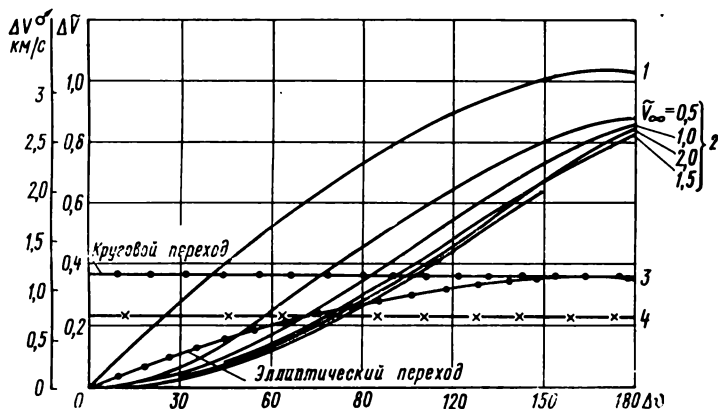


Рис. 8.3.3. Характеристики различных вариантов плоского перехода эллипс—гипербола—эллипс для $\tilde{r}_a = 5$:

1—одноимпульсный поворот оси апсид; 2—непериферический переход; 3—двухимпульсный поворот оси апсид; 4—двухимпульсный параболический переход

$\tilde{V}_\infty \approx 1 \div 2$ и $\Delta v_\Sigma < 60^\circ$ наиболее экономичным является вариант непериферического перехода между гиперболами и эллипсом. На рис. 8.3.4 приведена зависимость $\Delta \tilde{V}_{\Sigma} = f(\tilde{r}_a)$ для различных вариантов перехода. Видно, что в большинстве случаев энергозатраты перехода уменьшаются с увеличением $\tilde{r}_a$.

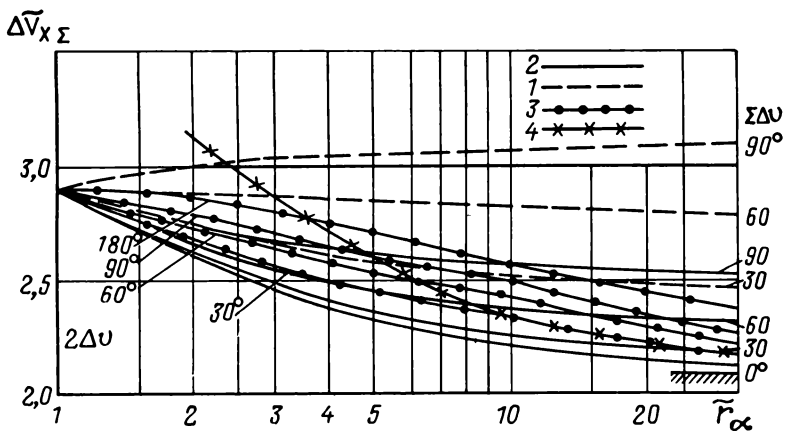


Рис. 8.3.4. Сопоставление различных вариантов плоского перехода эллипс—гипербола—эллипс при $\tilde{V}_\infty = 2$ (обозначения те же, что на рис. 8.3.3)

Орбита произвольного наклонения к базовой плоскости

За базовую примем плоскость, в которой лежат векторы скорости прилета $\vec{V}_{\text{т}\infty}$ и старта $\vec{V}_{\text{ст}\infty}$ (скорости на асимптотах пучка гипербола на входе в сферу действия планеты и на выходе из нее).

Считаем наклонение $i_{\text{т}}$ плоскости подлетной гиперболической орбиты к опорной плоскости заданным. Значения $r_{\text{ж}}$ и $r_{\text{а}}$ эллиптической орбиты ожидания также заданы. Рассмотрим следующие варианты маневра формирования орбиты ожидания и старта с нее:

- вариант I — маневр с двумя перицентральными переходами эллипс—гипербола и различных вариантов двухимпульсных поворотов оси апсид эллипса;

- вариант II — маневр с двумя перицентральными переходами эллипс — гипербола и двумя одноимпульсными поворотами оси апсид эллипса;

- вариант III — маневр с двумя непериферическими переходами эллипс — гипербола.

Во всех вариантах необходим этап поворота плоскости эллиптической орбиты.

Рассмотрим отдельные этапы и варианты маневров формирования орбиты ожидания произвольного наклонения к базовой плоскости.

Маневры с перицентральными переходами между эллипсом и гиперболой

В этом случае маневр формирования орбиты ожидания и старта с нее состоит из следующих этапов:

- два перицентральных перехода между эллипсом и гиперболами подлета и старта;

- поворот оси апсид эллипса;

- поворот плоскости эллиптической орбиты.

Как и ранее, возможны два варианта поворота оси апсид эллипса — одноимпульсный и двухимпульсный.

Маневр с двухимпульсным круговым поворотом оси апсид и поворотом плоскости эллиптической орбиты (вариант Iа). Наклонение плоскости подлетной гипербола $i_{\text{т}}$ к опорной плоскости задано (рис. 8.3.5). Вначале в точке 1 производится плоский перицентральный маневр перехода с подлетной гипербола на эллипс с заданными значениями $r_{\text{ж}}$ и $r_{\text{а}}$, затем в точке 2 — плоский маневр выхода на круговую промежуточную орбиту с радиусом $r_{\text{а}}$. Далее в точке 3 следует поворот плоскости этой круговой орбиты на угол χ , затем переход с круговой орбиты на стартовый эллипс. Последним этапом является перицентральный

маневр старта с эллипса на отлетную гиперболу*. Наклонение плоскости орбиты стартового эллипса $i_{ст}$ выбирается оптимальным из условия минимума энергозатрат на общий маневр. Пусть угол между векторами входа в сферу действия планеты $\vec{V}_\infty^T$ и выхода из нее $\vec{V}_\infty^{ст}$ равен φ . Угол поворота вектора скорости на

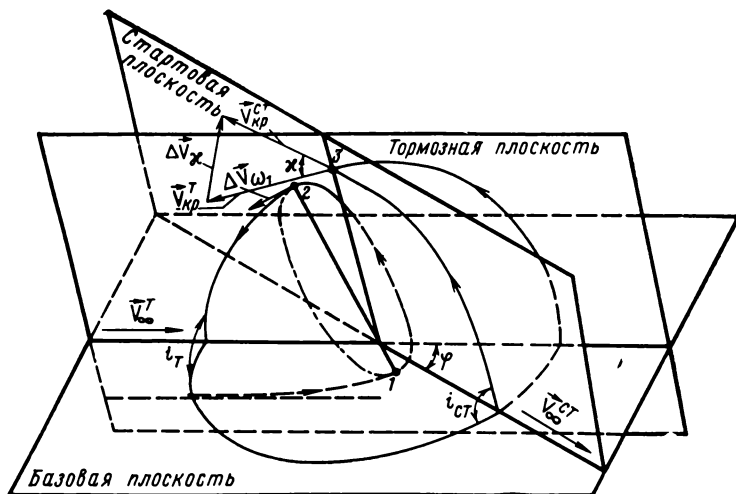


Рис. 8.3.5. Схема пространственного перехода эллипс—гипербола—эллипс с двухимпульсным поворотом оси апсид (вариант Ia)

круговой промежуточной орбите равен χ . Из сферического треугольника следует, что

$$\cos(\pi - \chi) = -\cos i_\tau \cos i_{ст} + \sin i_\tau \sin i_{ст} \cos(\pi - \varphi),$$

откуда

$$\cos \chi = \cos i_\tau \cos i_{ст} + \sin i_\tau \sin i_{ст} \cos \varphi.$$

При заданных r_π и r_a эллиптической орбиты ожидания минимум суммарного импульса будет при минимуме импульса ΔV_a поворота плоскости промежуточной орбиты. При заданных i_τ и φ это будет соответствовать максимуму $\cos \chi$. Следовательно,

$$\frac{\partial (\cos \chi)}{\partial i_{ст}} = -\cos i_\tau \sin i_{ст} + \sin i_\tau \cos i_{ст} \cos \varphi = 0$$

или

$$\sin^2 i_\tau \cos^2 \varphi (1 - \sin^2 i_{ст}) = \cos^2 i_\tau \sin^2 i_{ст}.$$

Оптимальное значение $i_{ст \text{ opt}}$ определится из выражения

$$\sin^2 i_{ст} = \frac{\sin^2 i_\tau \cos^2 \varphi}{\cos^2 i_\tau + \sin^2 i_\tau \cos^2 \varphi}.$$

* Два последних этапа на рис. 8.3.5 не показаны.

Суммарный относительный импульс на двухимпульсный поворот оси аписид (импульс $\Delta\tilde{V}_\omega$) и поворот плоскости на угол χ (импульс $\Delta\tilde{V}_\chi$)

$$\Delta\tilde{V}_{\chi\omega} = \Delta\tilde{V}_\omega + \Delta\tilde{V}_\chi.$$

Относительный суммарный импульс $\Delta\tilde{V}_{\chi\omega}$ в зависимости от угла φ для различных наклонений прилетной орбиты i_T и значений $\tilde{r}_a = 5$ приведен на рис. 8.3.6. Наибольшие значения $\Delta\tilde{V}_{\chi\omega}$ соответствуют наклонению тормозной плоскости $i_T = \pm 90^\circ$. Имеет

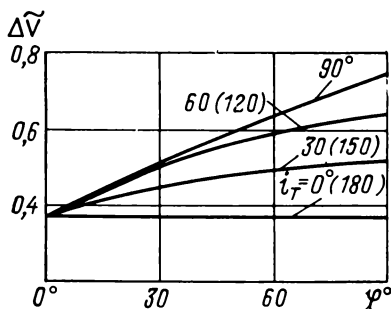


Рис. 8.3.6. Зависимость суммарного импульса $\Delta\tilde{V}_\Sigma$ от углов φ и i для варианта Ia ($\tilde{r}_a = 5$)

место симметрия маневров перехода относительно базовой плоскости. Энергозатраты этого варианта перехода (Ia) существенно зависят от радиуса апоцентра $\tilde{r}_a$ эллиптической орбиты ожидания.

Маневр с одноимпульсным поворотом оси аписид и поворотом плоскости эллиптической орбиты (вариант II). Маневр перехода на орбиту ожидания и ухода с нее происходит следующим образом (рис. 8.3.7). В точке 1 (перицентр подлетной гиперболы и эллипса) аппарат переходит на первую эллиптическую орбиту. В точке 2 радиальным импульсом $\Delta V_{\omega T}$ аппарат переводится на вторую эллиптическую орбиту, повернутую относительно первой на угол ω_T . Затем в точке 3 импульсом ΔV_χ производится поворот плоскости эллипса относительно оси аписид на угол χ . Этим маневром формируется стартовая плоскость. В этой плоскости ось аписид эллипса поворачивается на угол ω_{CT} и из перицентра этого повернутого эллипса происходит периферальный переход на стартовую гиперболу (последние этапы маневра на рис. 8.3.7 не показаны). Необходимые характеристики этого маневра перехода определяются из соотношений:

$$\begin{aligned}\cos \chi &= \cos i_T \cos i_{CT} + \sin i_T \sin i_{CT} \cos \varphi; \\ \cos \gamma_{CT} &= -\cos \gamma_T \cos \varphi + \sin \gamma_T \sin \varphi \cos i_T; \\ \sin i_{CT} &= \sin i_T \frac{\sin \gamma_T}{\sin \gamma_{CT}};\end{aligned}$$

$$\omega_{CT} = \gamma_{CT} - \alpha_{CT} \text{ и } \omega_T = \gamma_T - \alpha_T.$$

При заданных $\tilde{r}_a$ — относительной высоте апоцентра эллиптической орбиты ожидания, φ — угле между векторами $\vec{V}_\infty^T$ и $\vec{V}_{ст\infty}$ и i_T — наклонеии плоскости тормозной гиперболы расчет ведется следующим образом. Перебирая величины γ_T , находим

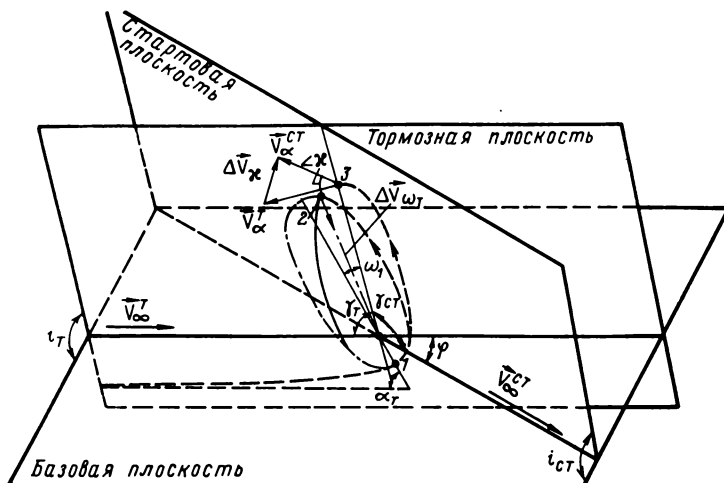


Рис. 8.3.7. Схема пространственного перехода гипербола — эллипс — гипербола с одноимпульсным поворотом оси аписид (вариант II)

его оптимальное значение, обеспечивающее минимум энергозатрат:

$$\Delta \tilde{V}_{x\omega} = \Delta \tilde{V}_{\omega T} + \Delta \tilde{V}_{\omega ст} + \Delta \tilde{V}_x,$$

где

$$\Delta \tilde{V}_\omega = \Delta \tilde{V} \sin \frac{\omega}{2};$$

$$\Delta \tilde{V}_x = 2\tilde{V}_a \sin \frac{x}{2}.$$

Значения $\Delta \tilde{V}_\omega = f(\tilde{r}_a)$ и $\Delta \tilde{V}_x = f(x, \tilde{r}_a)$ приведены на рис. 4.2.1 и 4.2.2. Оптимальному γ_T соответствует оптимальное наклонение $i_{ст}$ стартовой гиперболы. Оптимальное значение $\omega_T^{opt} = 0$. Интересным является вырожденный случай перехода, когда $\omega_T = \omega_{ст} = 0$. В этом случае

$$\cos i_T^* = \frac{\cos \alpha_{ст} + \cos \alpha_T + \cos \varphi}{\sin \alpha_T \sin \varphi};$$

$$\sin i_{ст}^* = \sin i_T \frac{\sin \alpha_T}{\sin \alpha_{ст}};$$

$$\cos^2 x^* = \cos^2 i_T \sqrt{1 - \sin^2 i_T \left(\frac{\sin \alpha_T}{\sin \alpha_{ст}} \right)^2} + \sin^2 i_T \frac{\sin \alpha_T}{\sin \alpha_{ст}}.$$

И если дополнительно $\tilde{V}_\infty^\tau = \tilde{V}_\infty^{\text{сг}} (a_\tau = a_{\text{сг}} = a)$,
то

$$\cos i_\tau = \frac{\cos \alpha (1 - \cos \varphi)}{\sin \alpha \sin \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$\cos \kappa = \cos^2 i_\tau + \sin^2 i_\tau \cos \varphi.$$

На рис. 8.3.8 приведена зависимость суммарного импульса $\Delta \tilde{V}_{\text{хз}}$ и его составляющих в зависимости от угла наклона стартовой орбиты i_τ для различных φ . Зависимость $\Delta \tilde{V}_{\text{хз}} = f(i_\tau)$ носит

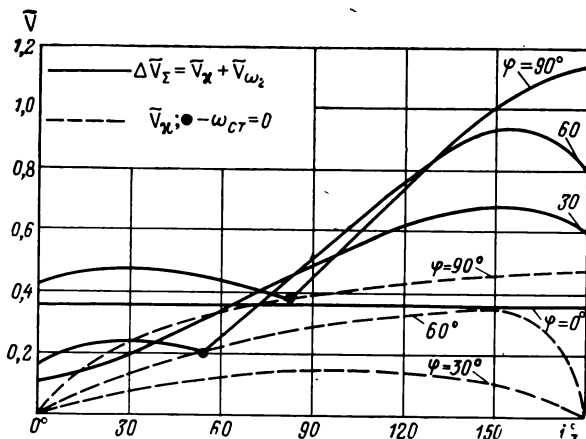


Рис. 8.3.8. Зависимость суммарного импульса ΔV_Σ от i_τ и φ (вариант II) при $\tilde{r}_a = 5$, $\tilde{V}_\infty^\tau = 1$, $\tilde{V}_\infty^{\text{сг}} = 2$ и $\omega_{\text{опт}} = 0$

довольно сложный характер. Видны точки (для $\varphi = 60$ и 90°), в которых $\omega_{\text{сг}} = 0$. Зависимость характеристик этого маневра перехода симметрична относительно базовой плоскости. Наибольшие значения $\Delta \tilde{V}_{\text{хз}}$ соответствуют наклонению i_τ , близкому к 180° .

Маневр с двухимпульсным эллиптическим поворотом оси апсид и поворотом плоскости переходного эллипса (вариант Iб). Маневр осуществляется следующим образом (рис. 8.3.9). С тормозной гиперболы в точке 1 осуществляется перичентральный переход на эллиптическую орбиту ожидания, в точке 2 — выход на переходной эллипс, обеспечивающий поворот оси апсид на угол ω . В точке 3 апоцентра переходного эллипса осуществляется поворот плоскости на угол κ . В этой (стартовой) плоскости совершается выход с переходного эллипса на орбиту ожидания и с этой орбиты — перичентральный старт на гиперболу отлета (второй этап маневра на рис. 8.3.9 не показан).

На рис. 8.3.10 приведены значения суммарного импульса $\Delta \tilde{V}_{\Sigma}$ от угла наклона тормозной орбиты i_{Σ} и для различных

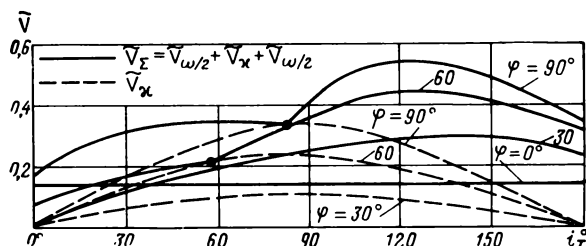


Рис. 8.3.10. Зависимость суммарного импульса ΔV_{Σ} от i_{τ} и φ для эллиптического перехода (вариант 16) при $\tilde{r}_a = 5$, $\tilde{V}_{\infty}^r = 1$, $\tilde{V}_{\infty}^{\Sigma} = 2$

значений угла φ при $\tilde{r}_a = 5$ и $\tilde{V}_{\infty}^r = 1$, $V_{\infty}^{\Sigma} = 2$. Наибольшие значения $\tilde{V}_{\Sigma}$ приходятся на $i_{\Sigma} = 120 \div 130^\circ$. Здесь также имеются

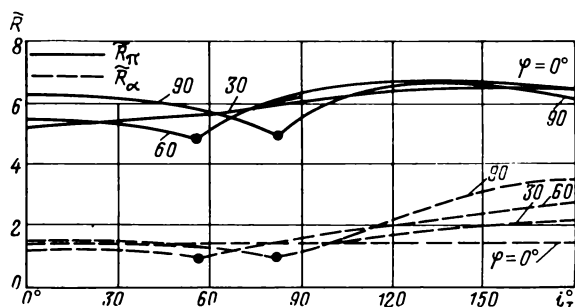


Рис. 8.3.11. Значения $\tilde{R}_a$ и $\tilde{R}_{\kappa}$ переходного эллипса (вариант 16)

точки, где $\Delta \tilde{V}_{\infty} = 0$. На рис. 8.3.11 приведены значения $\tilde{R}_a$ и $\tilde{R}_{\kappa}$ переходного эллипса. Для точек, где $\Delta \tilde{V}_{\infty} = 0$, $\tilde{R}_{\kappa} = 1$ и $\tilde{R}_a = 5$. В общем случае значения R_{κ} и R_a больше $\tilde{r}_{\kappa}$ и $\tilde{r}_a$ для орбиты ожидания.

Маневр с непериферическим переходом между эллипсом и гиперболой (вариант III)

Маневр формирования орбиты ожидания и старта с нее в этом случае состоит из двух непериферических переходов между гиперболой и эллипсом (точки 1 и 3 на рис. 8.3.12) и поворота плоскости эллипса на угол κ в точке 2. Схема расчета

характеристик здесь та же, как и в случае варианта II. При заданных $\tilde{r}_a, i_T$ и φ ищется оптимальное значение γ_T , обеспечивающее минимум

$$\Delta \tilde{V}_{x\Sigma} = \Delta \tilde{V}_T + \Delta \tilde{V}_{CT} + \Delta \tilde{V}_x,$$

где $\Delta \tilde{V}_T$ и $\Delta \tilde{V}_{CT}$ — разности импульсов скорости между непериферическими и периферическими маневрами перехода между эллипсом и гиперболой,

$$\Delta \tilde{V}_x = 2\tilde{V}_a \sin \frac{x}{2}.$$

Зависимость составляющих импульсов от наклона стартовой орбиты i_T и угла φ между векторами $\tilde{V}_\infty^T$ и V_∞^{CT} приведена

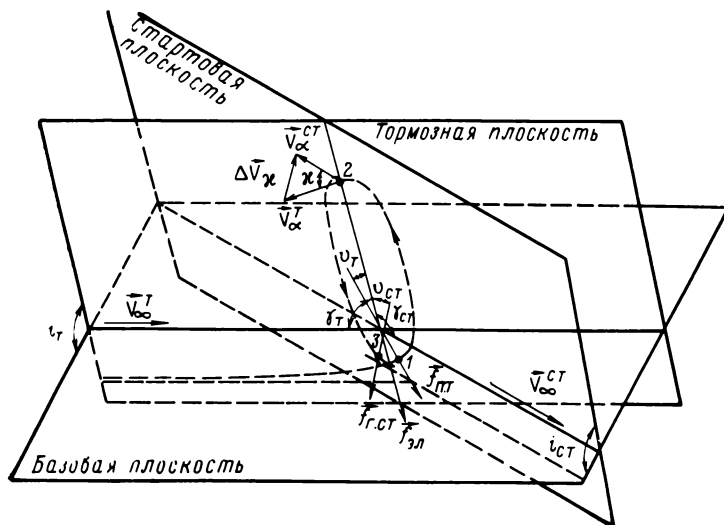


Рис. 8.3.12. Схема пространственного неперичентрального перехода гипербола—эллипс—гипербола (вариант III)

на рис. 8.3.13. Зависимости носят такой же характер, как и для случаев маневра с одноимпульсным поворотом оси апсид, однако ΔV_{Σ} существенно меньше. Зависимость $\Delta V_{\Sigma} = f(i_T)$ также симметрична относительно базовой плоскости. Однако в этом случае, как правило, $\omega_T^{\text{opt}} \neq 0$. На рис. 8.3.13 отмечены точки, соответствующие $\omega_T = \omega_{\text{сг}} = 0$.

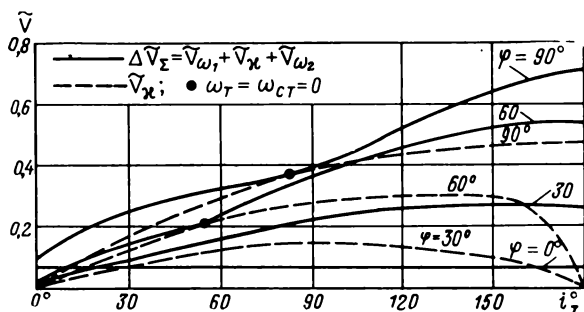


Рис. 8.3.13. Зависимость ΔV_{Σ} от i_{τ} и φ для непериферического перехода (вариант III) при $\tilde{r}_{\alpha}=5$, $\tilde{V}_{\infty}^{\tau}=1$, $\tilde{V}_{\infty}^{с\tau}=2$

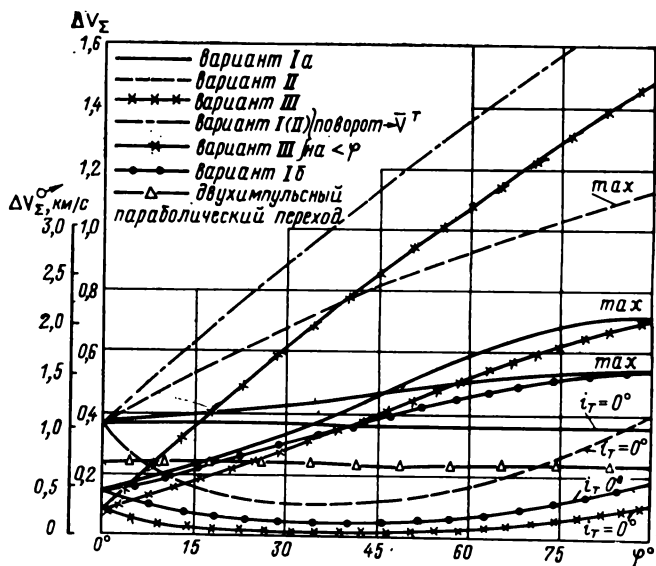


Рис. 8.3.14. Сопоставление различных вариантов пространственного перехода гипербола—эллипс—гипербола при $\tilde{r}_{\alpha}=5$, $\tilde{V}_{\infty}^{\tau}=1$, $\tilde{V}_{\infty}^{с\tau}=2$

Обеспечение выхода на орбиту произвольного наклонения для малых значений угла φ

Если угол φ между векторами скорости подлета $\bar{V}_{\infty}^r$ и скорости отлета $\bar{V}_{\infty}^{ct}$ равен нулю, то наклонение орбиты ожидания можно выбирать произвольным. Такое взаимное положение векторов $\bar{V}_{\infty}^r$ и $\bar{V}_{\infty}^{ct}$ в принципе можно обеспечить за счет изменения параметров гелиоцентрических участков траекторий, примыкающих к планете. Однако, как показали расчеты, при этом существенно возрастают энергозатраты по траектории полета. Объясняется это тем, что для совмещения векторов $\bar{V}_{\infty}^r$ и $\bar{V}_{\infty}^{ct}$ необходимо, кроме изменения конфигурации траектории в их плоскостях, совместить и плоскости орбит на участках, примыкающих к планете.

Векторы могут совмещаться также за счет поворота одного из векторов $\bar{V}_{\infty}^r$ или $\bar{V}_{\infty}^{ct}$ на угол φ . Естественно, что поворачивать нужно вектор с меньшим модулем. Оптимизация траектории в этом случае производится по суммарной скорости V_{Σ} с добавлением импульса поворота

$$\Delta \dot{V}_{\varphi} = 2V_{\infty}^{r(ct)} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Потребные энергозатраты для случая $\tilde{V}_{\infty}^r = 1$ и $\tilde{V}_{\infty}^{ct} = 2$ в зависимости от φ приведены на рис. 8.3.14. Видно, что при $\varphi > 0$ энергозатраты такого варианта маневра будут больше, чем для вариантов II и III. Однако при малых значениях φ его применение не вызывает существенного увеличения энергозатрат и позволяет выбирать орбиту произвольного наклонения i_T при неизменных энергозатратах.

Сопоставление различных вариантов маневров формирования орбиты ожидания произвольного наклонения

На рис. 8.3.14 приведены значения дополнительных по сравнению с периферическим маневром затрат характеристической скорости $\Delta \tilde{V}_{\Sigma}$ для различных вариантов маневра формирования орбиты ожидания в зависимости от угла φ между векторами подлета $\bar{V}_{\infty}^r$ и отлета $\bar{V}_{\infty}^{ct}$. Значения $\Delta \tilde{V}_{\Sigma}$ приведены для наклонения тормозной орбиты $i_T = 0$ и i_T при максимуме энергозатрат. Для варианта I маневра это соответствует $i_T = 90^\circ$, для варианта III $i_T = 180^\circ$. Расчеты проведены для типичного случая перехода при $\tilde{V}_{\infty}^r = 1$ и $\tilde{V}_{\infty}^{ct} = 2$, для относительной высоты апоцентра эллиптической орбиты $\tilde{r}_a = 5$. Для всех вариантов маневра формирования орбиты ожидания наименьшие энергоза-

траты соответствуют наклонению тормозной орбиты $i_t=0$. В этом случае наилучший вариант формирования — III.

Для выхода на орбиту произвольного наклонения (максимум энергозатрат) для $\varphi < 40^\circ$ наилучшим будет вариант III, а для $\varphi > 40^\circ$ — вариант I б. На рис. 8.3.14 приведены также энергозатраты, обеспечивающие выведение на орбиту произвольного наклонения путем предварительного поворота вектора $\bar{V}_\infty^T$ на угол φ . Как показано ранее, этот случай перехода дает большие энергозатраты для вариантов II и III по сравнению с рассмотренными случаями формирования орбиты ожидания. Вариант I б при произвольном наклонении (максимум энергозатрат) обеспечивает значения ΔV_z , близкие к варианту III.

Глава IX ● ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА МЕЖПЛАНЕТНЫХ АППАРАТОВ К НЕСКОЛЬКИМ ПЛАНЕТАМ

§ 1. ОЦЕНКА ЦИКЛИЧНОСТИ ПОЛЕТОВ К НЕСКОЛЬКИМ ПЛАНЕТАМ

Рассмотрим случай (рис. 9.1.1), когда орбиты планет круговые и лежат в одной плоскости. Планета 1 — планета старта, планета n — последняя планета в цепочке облета.

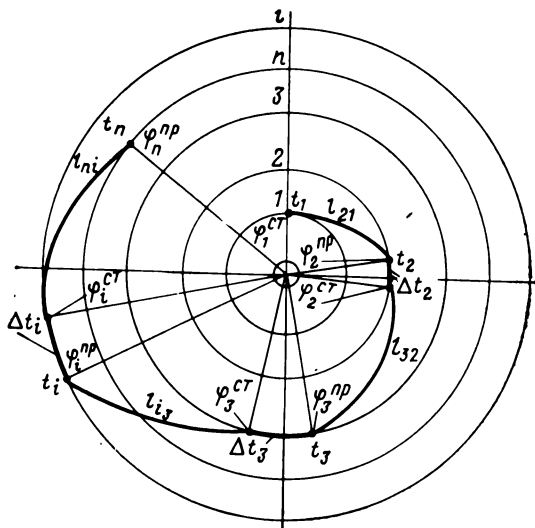


Рис. 9.1.1. Схема маршрута полета к нескольким планетам

В случае когда происходит облет нескольких планет с возвращением к Земле, планета n соответствует планете 1. Для общности рассмотрим случай полета с задержкой у каждой планеты на некоторое время Δt_i (время ожидания у планеты).

Гелиоцентрическая долгота планеты 1 в момент старта с нее

$$\varphi_1^{\text{сг}} = \varphi_1^0 + \omega_1 t_1,$$

где φ_1^0 — долгота планеты 1 в момент начала отсчета времени;

ω_1 — угловая скорость планеты 1;

t_1 — время старта с планеты 1.

Гелиоцентрическая долгота планеты 2 в момент прилета на нее

$$\varphi_2^{\text{пр}} = \varphi_2^0 + \omega_2 (t_1 + \Delta t_{12}),$$

где φ_2^0 и ω_2 — начальная долгота и угловая скорость планеты 2;

Δt_{12} — время перелета между планетами 1 и 2.

То же для планеты 3.

$$\varphi_3^{\text{пр}} = \varphi_3^0 + \omega_3 (t_1 + \Delta t_{12} + \Delta t_2 + \Delta t_{23}),$$

где Δt_2 — время ожидания у планеты 2, и т. д.

Рассмотрим участок перелета с планеты 1 к 2.

Разность гелиоцентрических долгот

$$\varphi_2^{\text{пр}} - \varphi_1^{\text{сг}} = l_{21} + k_{21} \cdot 2\pi$$

для k -го цикла полетов может отличаться от нулевого (угол перелета l_{21}) на целое число 2π . Подставив значения $\varphi_2^{\text{пр}}$ и $\varphi_1^{\text{сг}}$, получим

$$\Delta \varphi_{21}^0 + \omega_2 (t_1 + \Delta t_{12}) - \omega_1 t_1 = l_{21} + k_{21} \cdot 2\pi,$$

где $\Delta \varphi_{21}^0 = \varphi_2^0 - \varphi_1^0$.

Отсюда дата старта с планеты 1

$$t_1 = \frac{-\Delta \varphi_{21}^0 - \omega_2 \Delta t_{12} + l_{21}}{\omega_2 - \omega_1} + k_{21} \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = t_1^0 + T_c^{21} \cdot k_{21},$$

где T_c^{21} — синодический период планеты 2 относительно планеты 1;

t_1^0 — дата старта нулевого цикла полетов.

Аналогично для планет 1 и 3

$$t_1 = \frac{-\Delta \varphi_{31}^0 - \omega_3 (\Delta t_{12} + \Delta t_2 + \Delta t_{23}) + (l_{21} + \Delta \varphi_2 + l_{32})}{\omega_3 - \omega_1} + k_{31} \frac{2\pi}{\omega_3 - \omega_1} = t_1^0 + T_c^{31} k_{31},$$

где T_k — звездный период k -й планеты. Сопоставляя в системе (9.1.1) каждое последующее и предыдущее соотношения (например первое и второе), можно получить

$$(\varphi_2^{k_2} - \varphi_2^0) - (\varphi_1^{k_1} - \varphi_1^0) = (\varphi_2^{k_2} - \varphi_1^{k_1}) - (\varphi_2^0 - \varphi_1^0) = \\ = l_{21} + k_{21}2\pi - l_{21}$$

или

$$\omega_2 T_{в.п}^{\Sigma} - \omega_1 T_{в.п}^{\Sigma} = k_{21}2\pi.$$

Отсюда

$$T_{в.п}^{\Sigma} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} k_{21} = T_c k_{21}.$$

Повторив эту операцию для всех комбинаций других соотношений системы (9.1.1), получим

$$T_{в.п}^{\Sigma} = k_{21}T_c^{21} = k_{31}T_c^{31} = k_{32}T_c^{32} = \dots = k_{n1}T_c^{n1} = \dots = k_{n(n-1)}T_c^{n(n-1)}.$$

Таким образом, «абсолютное повторение» конфигурации положения планет будет происходить через суммарный период великих противостояний $T_{в.п}^{\Sigma}$, равный общему наименьшему кратному звездных и всех взаимных синодических T_c периодов планет. Периодичность повторения циклов через $T_{в.п}^{\Sigma}$ справедлива и для некомпланарных и эллиптических орбит планет.

Следует отметить, что кратность синодических и звездных периодов в общем случае может быть лишь приближенной. Поэтому в зависимости от степени приближения будут иметь место различные значения T_c^{Σ} и $T_{в.п}^{\Sigma}$ — грубые и более точные. Для схем полетов с возвращением к планете старта (Земле) участок возврата никак не влияет на периодичность циклов полета. Кроме того, на цикличность не влияет порядок облета планет (достаточно знать лишь перечень планет по маршруту).

Для определения цикличности полета к различным комбинациям планет необходимо знать синодические периоды обращения планет T_c . Из изложенного выше ясно, что T_c для двух планет есть период повторения относительной конфигурации их взаимного расположения, или период обращения планет относительно друг друга.

Синодический период планеты 1 относительно планеты 2 (или наоборот)

$$T_c = \left| \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \right|,$$

где T_1 и T_2 — звездные (сидерические) периоды обращения планет. Значения T_c для различных взаимных комбинаций двух планет приведены в таблице к приложению.

Период великих противостояний двух планет есть период повторения абсолютной конфигурации их взаимного расположения. В гл. V и VI назывались значения $T_{в.п}$ для Земли и раз-

личных планет, когда указывались приближенные периоды повторения характеристик оптимальных траекторий по циклам полетов.

Для случая полета с планеты 1 к планете 2 (полет с Земли к планете) период великих противостояний

$$T_{в.п} = k_1 T_1 = k_2 T_2 = k_{21} T_c.$$

Для приближенного определения $T_{в.п}$ необходимо найти k_1 , k_2 и k_{21} , обеспечивающие минимальную ошибку:

$$\Delta = |k_{21} T_c - k_1 T_1|$$

или

$$\Delta = |k_2 T_2 - k_1 T_1|.$$

При этом значения $T_{в.п}$ будут целыми периодами T_1 (период Земли $T \approx 1,00004 \approx 1$ год). Систему уравнений для определения $T_{в.п}$ удобно решать графически (рис. 9.1.2). Ошибка Δ изменяется в зависимости от k пульсирующим образом. Значения целых k , соответствующих минимальным ошибкам, легко определяются из графика. После этого величина Δ уточняется расчетным путем. Так, для полетов к Меркурию значения $T_{в.п}$ с минимальными ошибками будут (см. рис. 9.1.2):

для $T_{в.п}=1$ $\Delta=0,048$, $k_{\oplus}=1$, $k_{\tilde{\varphi}\oplus}=3$ и $k_{\tilde{\varphi}}=4$;

для $T_{в.п}=7$ $\Delta=0,02$, $k_{\oplus}=7$, $k_{\tilde{\varphi}\oplus}=22$ и $k_{\tilde{\varphi}}=29$ и т. д.

В табл. 9.1 приведены значения $T_{в.п}$ различного порядка точности кратности при полетах с Земли к планетам. Ошибку Δ лучше перевести в ошибку угла перелета $\Delta l = 2\pi\Delta$ при полете к внутренним планетам и $\Delta l = 2\pi \frac{\Delta}{T_{пл}}$ при полете к внешним планетам (т. е. при полетах к внутренним планетам Δl соответствует смещению Земли, а к внешним планетам — смещению планеты). В таком варианте разграничения Δl будет наименьшее изменение характеристик траекторий полета. Обычно наиболее характерен первый период $T_{в.п}$. Так, при полетах к Меркурию он равен 1 году. Казалось бы, что кратность, соответствующая $\Delta l = 17,3^\circ$, не очень точна. Однако, как показано в § 3 гл. V, повторяемость характеристик полета к Меркурию через один год

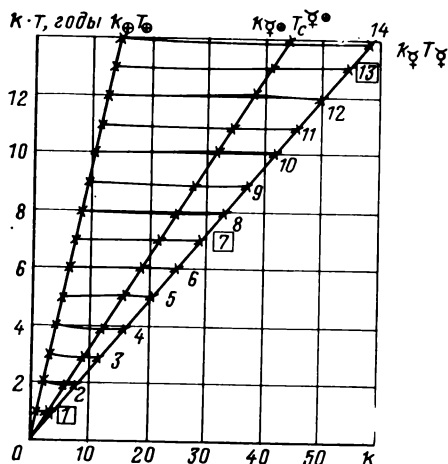


Рис. 9.1.2. Схема графического определения $T_{в.п}$ (полет к Меркурию)

достаточно точна. Это объясняется тем, что оптимум характеристической скорости $V_{\text{ст}}^{\oplus}$ по времени полета $\Delta t_{\text{п}}$ (или по углу перелета l) достаточно пологий. Поэтому нарастание ошибки Δl в течение первых 3—4 лет от исходного положения (см. рис. 9.1.2) не очень сильно сказывается на оптимальных характеристиках. Затем ошибка Δ падает, достигая второго минимума при $T_{\text{в.п}}=7$ лет. Далее она опять нарастает в течение 3—4 лет и достигает третьего минимума $T_{\text{в.п}}=13$ лет и т. д.

Таблица 9.1

Маршрут полета	$T_{\text{с}}$, годы	$T_{\text{в.п}}$, годы/ Δl°
Земля—Меркурий	0,317	$\frac{1}{17,3'}$, $\frac{7}{7,2'}$, $\frac{13}{28'}$, $\frac{19}{13'}$, $\frac{25}{23'}$, ...
Земля—Венера	1,599	$\frac{3}{4,5'}$, $\frac{5}{4,7'}$, $\frac{8}{1,35'}$, $\frac{11}{4,4'}$, $\frac{13}{5,4'}$, $\frac{16}{2,7'}$, ...
Земля—Марс	2,135	$\frac{17}{5,5'}$, $\frac{32}{14,6'}$, $\frac{47}{4,2'}$, $\frac{64}{12,8'}$, $\frac{79}{1,8'}$, ...
Земля—Юпитер	1,092	$\frac{12}{4,2'}$, $\frac{71}{5,1'}$, ...
Земля—Сатурн	1,035	$\frac{29}{5,6'}$, ...
Земля—Уран	1,012	$\frac{84}{0,07'}$, ...
Земля—Нептун	1,006	$\frac{165}{0,43'}$, ...
Земля—Плутон	1,004	$\frac{248}{0,29'}$, ...

При полетах к Марсу (табл. 9.1) первый период $T_{\text{в.п}} \approx 17$ лет с достаточно малой ошибкой Δl , второй $T_{\text{в.п}}=32$ года с еще меньшей величиной Δl и т. д. Третий период кратности $T_{\text{в.п}}=8$ лет при полетах к Венере очень точен и хорошо заметен на характеристиках полетов к Венере в § 3 гл. V.

При полетах к дальним внешним планетам период первой кратности равен округленному до одного года значению звездного периода T планеты. Периоды $T_{\text{в.п}}$ более высокой кратности чрезвычайно велики, чтобы иметь практическую ценность. Следует напомнить, что добавление ко всем маршрутам полета к планетам участка возврата на Землю не нарушает цикличности.

Можно определить период великих противостояний между двумя планетами и таким образом. Через один синодический период T_c разность в гелиоцентрических долготах планет будет

$$\Delta\varphi = |\omega_{пл} T_c - k2\pi|.$$

Для повторения абсолютного положения планет величина $\Delta\varphi$ должна уложиться n (n — в общем случае не целое) раз за оборот, т. е. $n = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$. Период великих противостояний в этом случае

$$T_{в.п}^{пл} = nT_c = \frac{2\pi T_c}{|\omega_{пл} T_c - k2\pi|} = \frac{T_c}{\left| \frac{T_c}{T_{пл}} - k \right|}.$$

При полетах к Меркурию

$$T_{в.п}^{\text{☿}} = 1,005 \text{ года при } k=1;$$

к Венере

$$T_{в.п}^{\text{♀}} = 2,667 \text{ года при } k=2;$$

к Марсу

$$T_{в.п}^{\text{♂}} = 15,83 \text{ года при } k=1.$$

Величина k равна округленному целому числу полных оборотов планеты за период T_c . При полетах к внешним дальним планетам, у которых $T_{пл} \gg T_c$, величина $k=0$. В этом случае $T_{в.п}^{пл} = T_{пл}$. Такие значения периода соответствуют периоду повторения характеристик траекторий полета на условных кривых изменения характеристик от даты старта с Земли (см. § 3 гл. V, § 3 гл. VI и § 2 гл. VIII) для маршрутов полета Земля — планета и Земля — планета — Земля. Для полетов к Венере повторяемость характеристик соответствует как $T_{в.п}^{\text{♀}} = 2,667$, так и для более сглаженных зависимостей с $T_{в.п} = 3T_{в.п}^{\text{♀}} \approx 8$ лет. Округленные до целого значения периодов $T_{в.п}^{пл}$ равны первым значениям $T_{в.п}$ из табл. 9.1.

При полетах к нескольким планетам суммарный синодический период T_c^{Σ} и суммарный период великих противостояний $T_{в.п}^{\Sigma}$ определяются графическим путем. В табл. 9.2 приведены значения T_c^{Σ} и $T_{в.п}^{\Sigma}$ первой кратности для ряда маршрутов полетов к нескольким планетам.

Наиболее интересными в настоящее время представляются следующие маршруты:

— полет к Меркурию через Венеру с маневром в ее гравитационном поле ($T_c^{\Sigma} = 1,6$);

— полет к Марсу через Венеру (маневр в ее гравитационном поле) с возвращением к Земле ($T_c^{\Sigma} = 6,4$ года);

— полеты к дальним планетам с маневром в гравитационном поле Юпитера.

Таблица 9.2

Маршрут полета	$\frac{T_c}{\Delta}$, годы	$\frac{T_{в.п}^2}{\Delta}$, годы
Земля—Венера—Меркурий	$\frac{1,6}{0,015}$	$\frac{3}{0,176'}$ $\frac{5}{0,136'}$ $\frac{8}{0,052'}$ $\frac{11}{0,079'}$ $\frac{13}{0,086'}$ $\frac{16}{0,104'}$ $\frac{19}{0,072'}$ $\frac{21}{0,072'}$ $\frac{24}{0,085'}$ $\frac{27}{0,041'}$ $\frac{32}{0,033'}$ $\frac{35}{0,077'}$ $\frac{38}{0,145'}$ $\frac{40}{0,019'}$...
Земля—Венера—Марс	$\frac{6,4}{0,01}$	$\frac{17}{0,225'}$ $\frac{32}{0,075'}$ $\frac{49}{0,217'}$ $\frac{64}{0,060'}$ $\frac{77}{0,116'}$...
Земля—Марс—Венера—Меркурий	$\frac{6,37}{0,053}$	$\frac{13}{0,18'}$ $\frac{19}{0,19'}$ $\frac{32}{0,033'}$...
Земля—Венера—Юпитер	$\frac{3,24}{0,076}$	$\frac{12}{0,3'}$...
Земля—Венера—Марс—Юпитер	$\frac{6,55}{0,3}$	$\frac{12}{0,42'}$...
Земля—Юпитер—Меркурий	$\frac{1,02}{0,14}$	$\frac{12}{0,14'}$...
Земля—Меркурий—Венера—Юпитер	$\frac{3,25}{0,1}$	$\frac{12}{0,3'}$...
Земля—Меркурий—Венера—Марс—Юпитер	$\frac{6,45}{0,3}$	$\frac{12}{0,42'}$...
Земля—Марс—Юпитер	$\frac{2,2}{0,14}$	$\frac{12}{0,42'}$...
Земля—Марс—Юпитер—Сатурн	$\frac{19,7}{0,3}$	$\frac{59}{0,6'}$...
Земля—Юпитер—Сатурн	$\frac{19,75}{0,11}$	$\frac{59}{0,2'}$...
Земля—Юпитер—Уран	$\frac{14}{0,2}$	$\frac{84}{1,0'}$...
Земля—Юпитер—Сатурн—Уран	$\frac{138}{1,9}$	
Земля—Юпитер—Нептун	$\frac{12,9}{0,15}$	$\frac{165}{1,0'}$...

Маршрут полета	$\frac{T_c}{\Delta}$, годы	$\frac{T_{в.п}}{\Delta}$, годы
Земля—Юпитер—Плутон	$\frac{12,8}{0,35}$	$\frac{249}{0,6}$, ...
Земля—Юпитер—Сатурн—Уран— Нептун	$\frac{177}{0,5}$	Варианты „Большого тура“
Земля—Юпитер—Сатурн—Плутон	$\frac{170}{0,6}$	
Земля—Юпитер—Уран—Нептун	$\frac{168}{3,4}$	
Земля—Юпитер—Сатурн—Нептун	$\frac{103}{4,8}$	
Земля—Юпитер—Сатурн—Уран— Нептун—Плутон	$\frac{500}{13}$	

К последней группе относятся и схемы полетов по трем вариантам программ «Большой тур». Однако полеты по такому маршруту являются уникальным явлением ($T_c \approx 170 \div 180$ лет). Более реальные полеты по маршрутам типа Земля — Юпитер — планета назначения. Так, полет к Сатурну через Юпитер имеет $T_c \approx 20$ лет, к Урану через Юпитер с $T_c \approx 14$ лет и к более дальним (Нептун, Плутон) — через $T_c \approx 13$ лет.

§ 2. ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА К МАРСУ С ВОЗВРАЩЕНИЕМ К ЗЕМЛЕ И С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ВЕНЕРЫ

Полеты космических аппаратов к Марсу с возвращением к Земле и пролетом около Венеры возможны по двум маршрутам:

- Земля — Марс — Венера — Земля (З—М—В—З);
- Земля — Венера — Марс — Земля (З—В—М—З).

Одной из основных трудностей в решении задачи оптимизации траекторий полета к нескольким планетам является выделение унимодальной области поиска экстремума (унимодальность, в терминологии [46] — однозначность экстремума). Первым мероприятием по выделению такой области по датам старта с Земли $t_{\text{ст}}^{\oplus}$ является определение цикличности оптимальных полетов к планетам.

Для прямых схем экспедиций к Марсу синодический период $T_c = 2,135$ года, а период великих противостояний $T_{в.п} = 17$ лет (то же, что и для полетов к Марсу без возвращения к Земле).

Для любых из вариантов маршрута полета к Марсу через Венеру (З—М—В—З или З—В—М—З) синодический период $T_c = 6,4$ года, а период великих противостояний $T_{в.п} \approx 32$ года.

Таким образом, отыскав какую-либо совокупность оптимальных маршрутов и схем для интервала времени T_c^{Σ} , можно найти всю последовательность дат старта для этих схем через период T_c^{Σ} .

Оптимизация траекторий полета «через Венеру»

Критерием оптимизации рассматриваемой задачи будет суммарная скорость V_{Σ}

$$V_{\Sigma} = V_{\text{ст}}^{\oplus} + V_{\text{т}}^{\sigma} + V_{\text{ст}}^{\sigma} + V_{\text{м}}^{\varphi}$$

(ст — старт, т — торможение, м — маневр) для случая трехимпульсной схемы или

$$V_{\Sigma} = V_{\text{ст}}^{\oplus} + V_{\text{ст}}^{\sigma} + \Delta V_{\text{м}}^{\varphi}$$

для двухимпульсной.

Функция V_{Σ} является функцией пяти параметров. Этими параметрами для маршрута З—М—В—З будут: $t_{\text{ст}}^{\oplus}$ — дата старта с Земли; $\Delta t_{\text{п}}^{\oplus-\sigma}$ — время полета с Земли на Марс; $\Delta t_{\text{ож}}$ — время ожидания на орбите ИСМ; $\Delta t_{\text{п}}^{\sigma-\varphi}$ — время полета с Марса на Венеру; Δt_{Σ} — суммарное время экспедиции.

Для маршрута З—В—М—З изменится лишь порядок для составляющих участков времени полета.

Для локализации области поиска экстремума разобьем траекторию полета на группы по сочетанию полувитков. Число групп в нашем случае облета трех планет $N = 2^n = 8$. Дополнительно разделим также траектории полета по суммарному времени полета на длительные и ускоренные. Это существенно сужает область поиска экстремума, однако для рассматриваемой задачи все же не обеспечивает выделения унимодальной области.

Невозможность априорного выделения унимодальной области поиска в задаче облета трех планет не позволяет сразу воспользоваться градиентными методами поиска экстремума. Поэтому поиск минимума функции V_{Σ} проводится последовательно, в два этапа:

— первый этап — поиск начального приближения минимального значения функции V_{Σ} для упрощенной задачи методом перебора с большим шагом;

— второй этап — окончательная оптимизация функции V_{Σ} градиентными методами (в нашем случае методом конфигурации, см. [46]).

Расчленим многопараметрическую задачу на две отдельные задачи (участки траектории) с меньшим числом параметров. Представим траекторию полета состоящей из двух участков:

первый участок — участок траектории, примыкающий к Венере (М—В—З или З—В—М), второй — участок З—М для маршрута З—М—В—З или М—З для маршрута З—В—М—З.

Как показали расчеты, оптимум $V_{хз}$ мало отличается от оптимумов составляющих $V_{хз}$ на каждом участке. Поэтому для этапа первого приближения можно оптимизировать каждый участок по его независимому критерию ($V'_{хз}$ — для первого участка и $V^*_{хз}$ — для второго).

Если облет Венеры происходит до встречи с Марсом (маршрут З—В—М—З) на участке траектории З—В—М, то $V'_{хз}$ имеет вид

$$V'_{хз} = V_{ст}^{\oplus} + \Delta V_m^{\ominus} + V_{т}^{\ominus} \text{ — для трехимпульсной схемы,}$$

$$V'_{хз} = V_{ст}^{\oplus} + V_m^{\ominus} \text{ — для двухимпульсной.}$$

Если облет Венеры происходит на траектории возвращения к Земле (маршрут З—М—В—З), то $V'_{з}$ имеет один и тот же вид как для двух, так и для трехимпульсной схем, а именно:

$$V'_{з} = V_{ст}^{\ominus} + \Delta V_m^{\ominus}.$$

Величина энергозатрат на этом участке весьма чувствительна ко времени пролета Венеры. В большинстве случаев отклонение времени пролета Венеры $t_{пр}^{\ominus}$ на 5—10 суток приводит к значительным потерям в суммарных энергозатратах. Как правило, минимум энергозатрат лежит в области малых импульсов маневра у Венеры ($\Delta V_m^{\ominus} \approx 0 \div 300$ м/с). Так как в рассматриваемых интервалах изменения параметров функция $V'_{хз}$ имеет несколько экстремальных точек, то минимум функции $V'_{хз}$ найдем перебором ее трех параметров — одна дата старта и два времени полета. Снижение числа параметров с 5 до 3 позволит применить метод перебора. Кроме того, приближенность первого этапа поиска позволяет проредить сетку перебора параметров. Возможно не менее четырех оптимумов $V'_{хз}$ (четыре группы сочетания полувитков). Из этих оптимумов выбирается тот, который дает наименьшее значение $V'_{хз}$. В случае близких значений оптимумов $V'_{хз}$ выбирается тот, который дает существенный выигрыш во времени полета $\Delta t^{\ominus-\ominus} + \Delta t_{п}^{\ominus-\oplus}$ (или $\Delta t^{\oplus-\ominus} + \Delta t_{п}^{\ominus-\oplus}$). Если же и времена полета близки, то все варианты идут в цикл оптимизации второго приближения.

Оптимизация второго участка по критерию $V'_{хз}$ сводится к однопараметрической задаче определения даты старта с Земли $t_{ст}^{\oplus}$ (для маршрута З—М—В—З) или даты прилета на Землю (маршрут З—В—М—З). Минимум $V'_{хз}$ для такой ограниченной задачи (фиксировано время пролета Марса) не соответствует точке минимума двухпараметрической задачи незави-

симой оптимизации этого участка (перелеты З—М или В—З), но близок к нему.

Предварительная оптимизация по описанной выше методике проводилась для класса траекторий «ускоренных полетов» в диапазоне суммарного времени полета $400 \leq \Delta t_{\Sigma} \leq 700$ сут при фиксированном минимальном времени ожидания у Марса $\Delta t_{\text{ож}} = 15$ сут.

В результате этих расчетов получена приближенная, но глобальная картина изменения характеристик оптимальных траекторий для одного цикла полета в диапазоне дат старта с Земли $\Delta t_{\text{ст}}^{\oplus} \approx 6,4$ года. Подобная конфигурация трех планет — Земли, Марса и Венеры — примерно повторится через суммарный синодический период $T_c^{\Sigma} = 6,4$ года.

На основе этого выявлены циклы оптимальных траекторий и соответствующие им группы полетов для интервалов времени с 1970 по 1992 гг. Для точек, соответствующих приближенным оптимумам, проведен уточненный поиск оптимальных траекторий методом конфигураций. Использование точек предварительной оптимизации обеспечивает унимодальность области поиска.

Характеристики траекторий экспедиций для циклов полетов в 1970—1990 гг.

Для того чтобы выявить циклы полетов корабля экспедиции на Марс, в которых можно использовать гравитационное поле Венеры, были проведены расчеты траекторий для полета с 1970 по 1992 гг. по маршрутам З—М—В—З и З—В—М—З. В процессе расчетов выяснилось, что для маршрутов З—М—В—З даты старта с Земли близки к таковым для полетов по маршруту З—М, а для маршрута З—В—М—З — к датам старта по маршруту З—В. Из всех локальных оптимумов по $V_{\text{хз}}$ отбирались лишь те, которые дают $V_{\text{хз}} < 30$ км/с. В итоге за 23 года, с 1970 по 1992 гг. из 14 возможных оптимумов по маршруту З—В—М—З (синодический период полетов З—В $T_c = 1,6$ года) и 11 оптимумов по маршруту З—М—В—З (синодический период полетов З—М $T_c = 2,135$ года) выявлены оптимальные циклы по обоим маршрутам.

Результаты расчетов для циклов с малыми энергозатратами приведены в табл. 9.3 и 9.4.

Как показали расчеты, имеются две группы сочетания полувитков для минимальных траекторий. Одна обеспечивает минимум $V_{\text{хз}}$ для траекторий маршрута З—М—В—З и соответствует полету с Земли на Марс по траекториям 1-го полувитка, вторая — минимум $V_{\text{хз}}$ при полете с Земли на Марс по траекториям 2-го полувитка. Траектории на участках, примыкающих к Венере, в разных циклах полетов имеют различные комбинации полувитков.

Таблица 9.3

Характеристики траекторий полета двухимпульсной схемы
Время ожидания у Марса 15 сут

Маршрут 3—М—В—3. Группа I—X—Y

Год	V_{Σ}	$V_{CT}^{\oplus}$	V_{CT}^{σ}	км/с			J. D.			$t_{CT}^{\oplus}$	t_{CT}^{σ}	$R_{T,II}$	t_{Σ}	Группа
				ΔV_M^{σ}	$V_{\pi}^{\oplus}$	V_{π}^{σ}	$t_{CT}^{\oplus}$	t_{CT}^{σ}	км					
1973	12,06	7,09	4,83	0,13	15,1	11,4	2441810	2441960	2442150	70901	560	I—II—I		
1975	6,95	4,24	2,68	0,028	13,7	7,6	...2673	...2848	...3048	609524	500	I—I—II		
1977	10,51	5,21	5,19	0,108	13,6	11,5	...3425	...3585	...3755	6393	460	I—I—II		
1984	6,60	3,68	2,82	0,091	12,3	8,5	...5740	...5915	...6080	14417	450	I—I—I		
1988	6,81	3,77	3,02	0,018	13,00	5,6	...7335	...7530	...7740	11368	540	I—I—II		
1990	9,27	4,74	4,17	0,35	13,00	9,2	...8130	...8275	...8490	239723	420	I—II—I		

Маршрут 3—М—В—3. Группа II—X—Y

1973	11,29	6,32	4,83	0,13	15,1	7,8	2441750	2441960	2442150	70901	620	II—I—I—I
1975	8,27	5,56	2,68	0,028	13,7	6,00	...2593	...2848	...3048	609524	580	II—I—I—II
1977	11,75	6,79	4,78	0,172	13,6	7,9	...3345	...3580	...3755	6941	540	II—I—I—I
1984	7,24	4,27	3,00	0,054	12,3	7,1	...5670	...5920	...6080	13822	520	II—I—I—I
1988	7,45	4,36	3,05	0,044	12,1	5,4	...7280	...7525	...7740	10605	640	II—I—I—I
1990	10,66	5,89	4,46	0,30	13,00	6,4	...8050	...8280	...8490	265270	500	II—I—II—I

Маршрут 3—В—М—3. Группа X—Y—I

Продолжение табл. 9.3

Год	V_{Σ}	$V_{CT}^{\oplus}$	V_{CT}^{σ}	км/с			$V_{\pi}^{\oplus}$	V_{π}^{σ}	J. D.		$t_{CT}^{\oplus}$	t_{CT}^{σ}	$R_{T, II}$	t_{Σ}		Группа
				ΔV_M^{σ}	$V_{\pi}^{\oplus}$	V_{π}^{σ}			км	сут						
1970	5,84	4,09	1,67	0,085	11,8	9,9	2440818	2440908	2441103	47065	I—I—I					
1972	5,77	4,05	1,65	0,068	11,5	7,5	...1470	...1640	...1835	949037	II—I—I					
1977	11,03	4,08	6,89	0,052	14,00	6,8	...3175	...3300	...3480	38656	I—I—I					
1978	5,21	4,09	1,11	0,009	12,00	13,8	...3811	...3981	...4096	45283	II—I—I					
1983	9,16	5,02	4,09	0,052	14,2	7,5	...5510	...5374	...5815	193698	I—II—II					
1985	4,96	3,89	1,01	0,048	14,6	12,9	...6141	...6311	...6456	106204	II—I—I					
1989	7,08	4,67	2,38	0,029	11,7	8,00	...7842	...7912	...8107	13623	I—II—I					
1991	6,05	4,15	1,87	0,023	13,2	8,1	...8500	...8667	...8817	12684	II—I—I					

Маршрут 3—В—М—3. Группа X—Y—II.

1970	5,75	3,91	1,80	0,039	12,5	9,2	2440828	2440913	2441113	359630	I—I—II
1972	5,958	4,05	1,83	0,068	11,6	7,5	...1470	...1640	...1835	94957	II—I—II
1977	6,42	4,08	2,18	0,052	16,3	6,8	...3175	...3300	...3480	38656	I—I—II
1978	5,27	4,13	1,13	0,001	11,7	13,2	...3824	...3984	...4099	43738	II—I—II
1983	7,07	5,02	1,99	0,05	14,5	7,5	...5510	...5574	...5815	193708	I—I—II
1985	4,99	3,86	1,06	0,057	11,9	13,5	...6131	...6306	...6451	24227	II—I—II
1989	6,47	4,67	1,78	0,029	12,1	8,00	...7842	...7912	...8107	13623	I—I—II
1991	5,57	4,14	1,35	0,081	11,3	8,00	...8505	...8667	...8817	12566	II—I—II

Таблица 9.4

Характеристики траекторий полета трехимпульсной схемы
Время ожидания у Марса 15 сут.

Маршрут 3—М—В—3. Группа I—X—Y

Год	км/с							J. D.		$R_{т.п}$ км	t_{Σ} сут	Группа
	V_{Σ}	$V_{CT}^{\oplus}$	$V_T^{\oplus}$	$V_{CT}^{\oplus}$	$\Delta V_M^{\oplus}$	$V_{\pi}^{\oplus}$	$t_{CT}^{\oplus}$	$t_{CT}^{\oplus}$	$t_{CT}^{\oplus}$			
1973	17,20	6,30	4,65	6,18	0,051	15,3	2441795	2441975	2442150	2446921	570	I—II—I
1975	9,30	6,04	2,12	3,12	0,012	12,7	...2668	...2878	...3050	566355	520	I—I—I
1977	16,91	5,60	5,58	5,64	0,082	13,5	...3395	...3590	...3755	457785	490	I—I—I
1984	10,05	3,60	3,09	3,31	0,029	13,3	...5740	...5935	...6090	13659	440	I—I—I
1988	8,24	3,80	1,40	3,02	0,018	12,9	...7330	...7530	...7740	11378	545	I—I—I
1990	13,07	4,96	3,54	4,46	0,099	12,8	...8092	...8280	...8490	503099	460	I—II—I

Маршрут 3—М—В—3. Группа II—X—Y

1973	14,08	6,14	2,65	5,24	0,046	15,2	2441725	2441965	2442150	608292	645	II—II—I
1975	9,62	5,15	1,33	3,12	0,012	12,6	...2598	...2878	...3053	566355	590	II—I—I
1977	14,80	6,96	2,11	5,64	0,082	13,5	...3315	...3590	...3755	457785	570	II—I—I
1982	8,63	3,63	1,34	3,57	0,086	12,3	...4938	...5238	...5388	11003	600	II—I—I
1984	9,76	4,21	2,20	3,31	0,029	13,4	...5660	...5935	...6090	13659	520	II—I—I
1988	8,57	4,30	1,23	3,02	0,018	13,6	...7285	...7530	...7740	11368	590	II—I—I
1990	12,38	5,74	1,87	4,46	0,20	13,0	...8040	...8280	...8490	265270	510	II—II—I

Маршрут 3—В—М—3. Группа X—Y—I Продолжение табл. 9.4

Год	км/с						J. D.			$R_{T,II}$	t_{Σ}		Группа
	V_{Σ}	$V_{CT}^{\oplus}$	$V_T^{\oplus}$	$\Delta V_{CT}^{\oplus}$	$V_M^{\ominus}$	$V_{\pi}^{\oplus}$	$t_{CT}^{\oplus}$	$t_{CT}^{\ominus}$	км		сут		
1970	10,26	3,75	3,58	2,90	0,029	12,2	2440818	2440918	2441138	25325,7	490	I—II—I	
1972	9,12	4,05	3,37	1,61	0,07	11,5	...1470	...1640	...1840	79570	570	II—I—I	
1977	13,85	4,18	2,72	6,89	0,05	13,9	...3175	...3300	...3480	38656	510	I—I—I	
1978	9,40	4,32	2,94	2,08	0,063	13,2	...3834	...3999	...4164	66947	515	II—I—I	
1983	12,47	5,02	3,30	4,08	0,052	14,2	...5510	...5574	...5815	19369,8	500	I—II—I	
1985	8,00	3,95	2,83	1,16	0,051	11,8	...6146	...6317	...6516	13426	600	II—I—I	
1990	11,04	4,67	3,97	2,37	0,029	11,7	...7842	...7912	...8107	13623	460	I—II—I	
1991	9,60	4,17	3,51	1,72	0,18	12,2	...8509	...8667	...8827	12404,9	545	II—I—I	

Маршрут 3—В—М—3. Группа X—Y—II

1970	9,04	3,69	3,15	2,16	0,037	12,8	2440830	2440925	2441152	53215	5735	I—II—II
1972	9,35	4,05	3,39	1,83	0,0688	11,6	...1470	...1640	...1835	94957	630	II—I—II
1977	9,69	4,52	2,72	2,35	0,09	15,5	...3192	...3307	...3482	616540	590	I—I—II
1977	9,49	4,66	2,30	2,41	0,12	17,0	...3196	...3308	...3518	168318	611	I—I—II
1978	8,65	4,35	2,86	1,40	0,043	12,8	...3841	...3999	...4166	122407	635	II—I—II
1983	10,37	5,02	3,31	1,99	0,052	14,8	...5510	...5574	...5815	193698	570	I—II—II
1985	8,13	3,95	2,83	1,29	0,05	12,1	...6146	...6317	...6516	134268	620	II—I—II
1990	10,45	4,67	3,97	1,78	0,029	12,0	...7842	...7912	...8107	13623	570	I—II—II
1991	9,21	4,21	3,61	1,32	0,061	11,4	...8512	...8667	...8822	124416	590	II—I—II

Если полет осуществляется по траектории маршрута 3—В—М—3, то первая комбинация, обеспечивающая минимум $V_{хз}$, соответствует полету с Марса на Землю по траектории 1-го полувитка, а вторая — по траектории 2-го полувитка.

В таблицах приведены значения радиуса точки подачи импульса при облете Венеры — $R_{т.п.}$

На рис. 9.2.1 и 9.2.2 представлены зависимости оптимальных значений $V_{хз}$ для двух- и трехимпульсных схем от даты старта с Земли для маршрутов 3—М—В—3 и 3—В—М—3. Зависимости носят периодический характер. Энергетические минимумы оптимальных траекторий полетов «через Венеру» наступают для каждого маршрута примерно через суммарный синодический период $T_c^s = 6,4$ года. Так как эти минимумы перекрывают друг друга, то примерно через каждые 3,2 года возможен полет по энергетически минимальной траектории одного из маршрутов. Скорость входа в атмосферу Земли $V_{*}^{\oplus}$ для всех оптимальных траекторий полета не превышает 16 км/с (рис. 9.2.3 и 9.2.4), а в атмосферу Марса — $V_{*}^{\opl�} = 9$ км/с.

Сравним энергетически оптимальные ускоренные траектории полетов «через Венеру» (для двух- и трехимпульсной схем) с оптимальными траекториями полета по маршруту 3—М—3.

Потребные энергозатраты для реализации траекторий прямых полетов на Марс больше, чем для минимальных значений при полетах «через Венеру». Нестабильны и составляющие характеристики скорости для этих вариантов на отдельных этапах полета. Наиболее стабильны энергозатраты для старта с орбиты ИСЗ $V_{ст}^{\oplus} \approx 4 \pm 0,5$ км/с.

При анализе траекторий полета корабля экспедиции к Марсу обычно рассматривают траектории с ограничением скорости входа в атмосферу Земли до $V_{*}^{\oplus} \leq 15,5$ км/с. В этом случае энергозатраты для реализации траекторий маршрута 3—М—3 существенно больше, чем для траекторий полета «через Венеру». Траектории прямого полета на Марс для большинства циклов имеют скорости входа в атмосферу Земли $V_{*}^{\oplus} \geq 15,5$ км/с. Для того чтобы погасить избыток скорости перед входом в атмосферу, прикладывается тормозной импульс (четыреимпульсная схема полета). Так, для четырехимпульсной схемы цикла полетов 1975 г. по траектории маршрута 3—М—3 (см. рис. 9.2.2) общие энергозатраты $V_{хз} = 17$ км/с, в то время как для оптимальной траектории маршрута 3—М—В—3, $V_{хз} = 9,3$ км/с. При этом разница в суммарном времени экспедиции этих маршрутов $\Delta t_s = 60$ сут. Цикл 1975 г. для прямых полетов к Марсу соответствует наибольшим энергозатратам и наибольшей скорости подхода к Земле.

В наилучших циклах прямых полетов к Марсу (циклы около 1985 г.) подтормаживания не требуются и энергозатраты

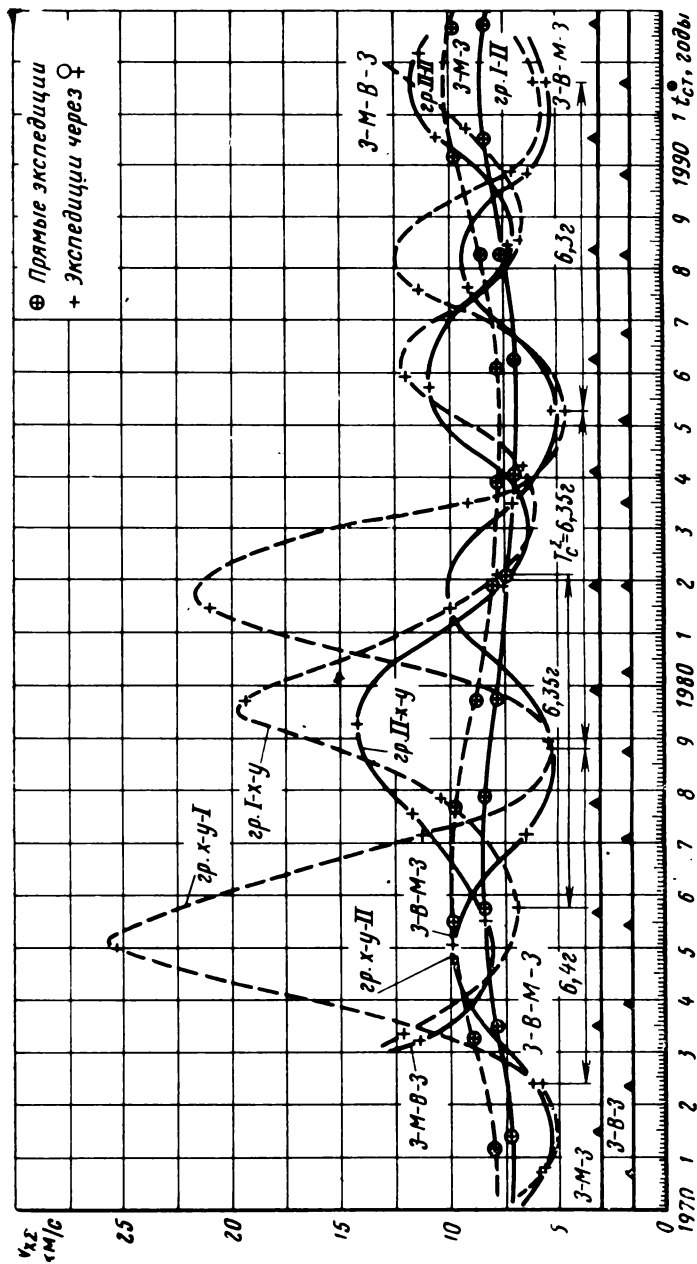


Рис. 9.2.1. Энергетические характеристики различных вариантов двухимпульсной схемы экспедиции к Марсу

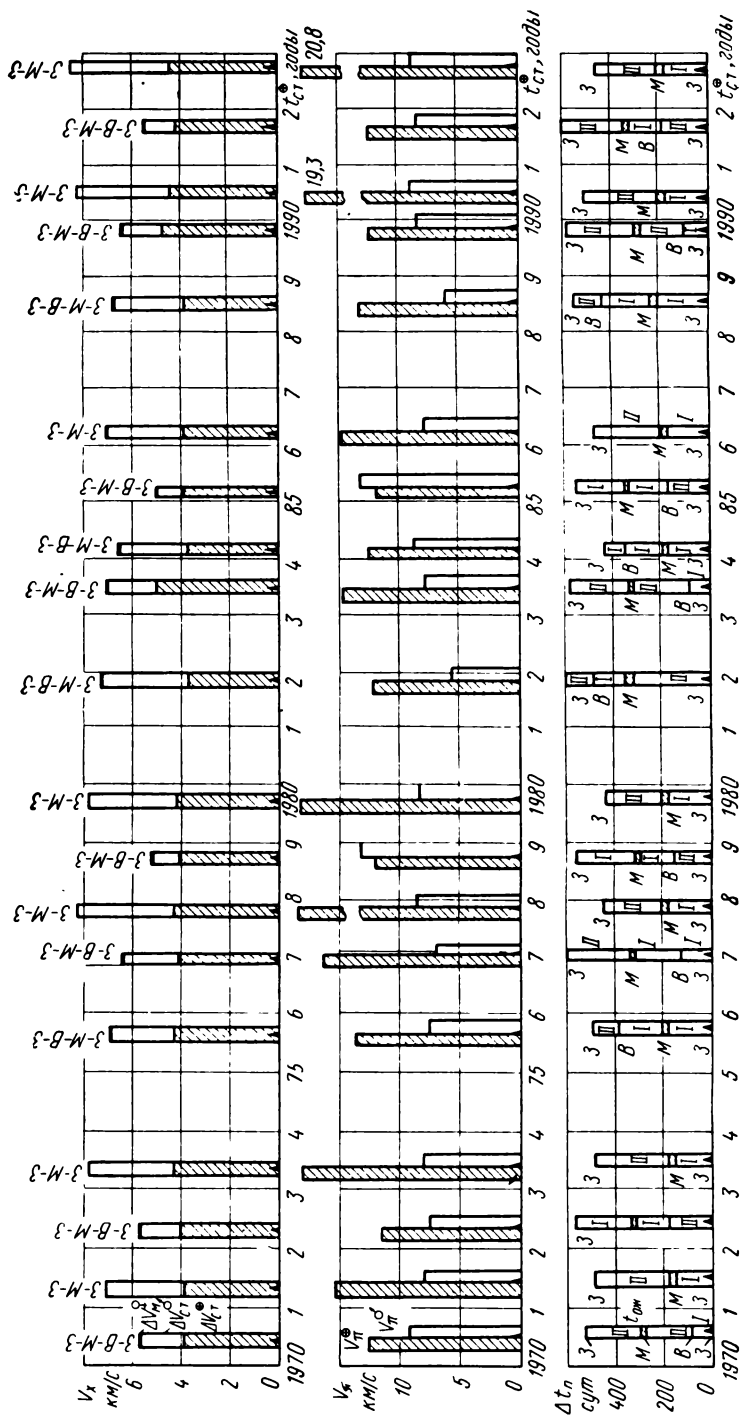


Рис. 9.2.3. Характеристики различных вариантов двухимпульсной схемы экспедиции к Марсу

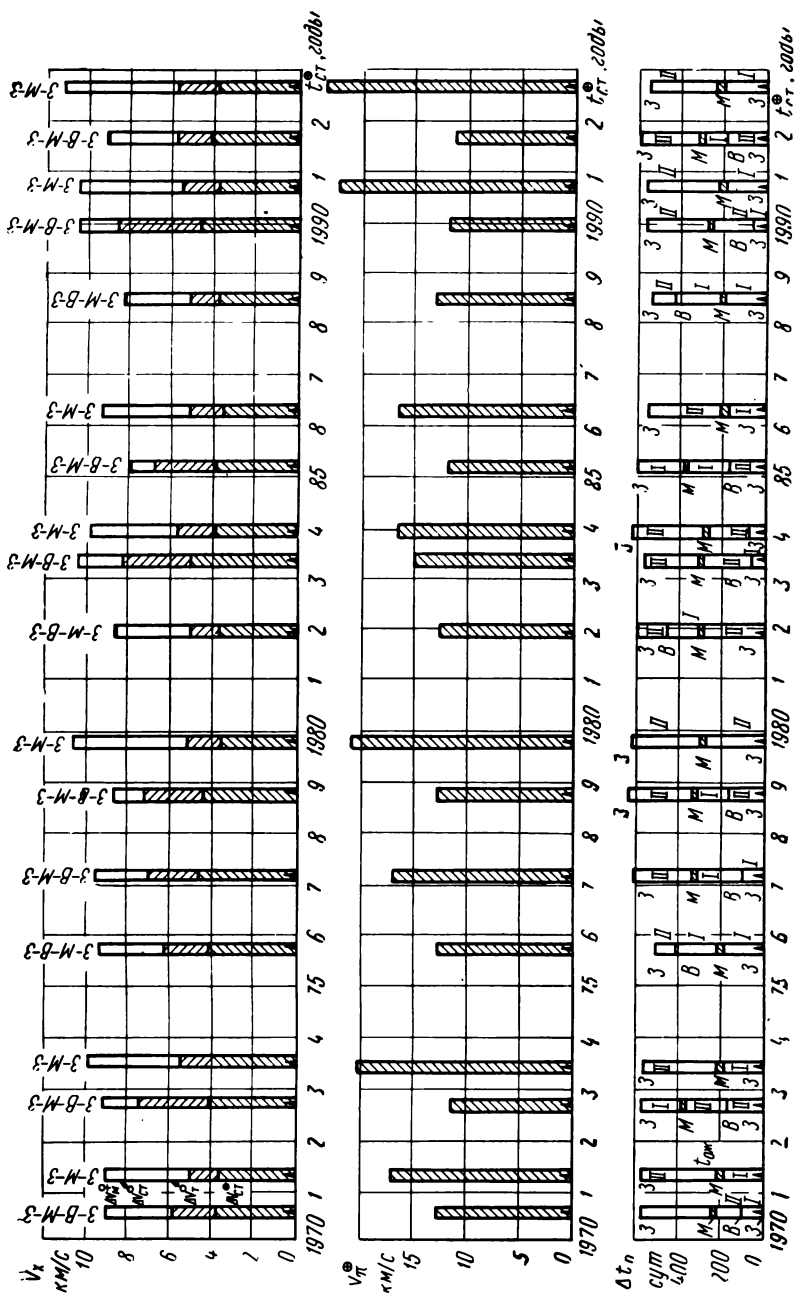


Рис. 9.2.4. Характеристики различных вариантов трехмпульсной схемы экспедиции к Марсу

четыреимпульсных полетов близки к таковым для трехимпульсной схемы.

Функция $V_{хз}$ достигает минимального значения, как правило, при $\Delta t_{ож}=0$, за исключением цикла полета 1982 г., где оптимальное время ожидания $\Delta t_{ож}=35$ сут. В связи с этим расчеты оптимальных траекторий, за исключением 1982 г., были проведены при фиксированном минимальном времени ожидания $\Delta t_{ож}=15$ сут.

Характеристики оптимальных траекторий облета Марса и Венеры для циклов полетов в 1970—1980 гг.

По геометрическим и кинематическим характеристикам траектории совместного облета Марса и Венеры весьма сходны с траекториями экспедиций к Марсу через Венеру.

В табл. 9.5 и на рис. 9.2.5 и 9.2.6 приведены характеристики оптимальных траекторий облета Марса и Венеры в циклах полетов с 1979 по 1992 гг.

Условные кривые, соединяющие точки $V_{хз}$ для оптимальных траекторий, носят характер, аналогичный таковым для экспедиции к Марсу через Венеру. Малые значения $V_{хз}$ по каждому из двух маршрутов полетов (З—В—М—З или З—М—В—З) чередуются через суммарный синодический период $T_c^{\Sigma}=6,4$ года. В циклы с большими $V_{хз}$ для одного из маршрутов имеются меньшие $V_{хз}$ по другому маршруту. Таким образом, циклы с малыми значениями $V_{хз}$ чередуются примерно через 3,2 года.

Оптимальные характеристики траекторий различных маршрутов также комбинируются по сочетанию полувитков траекторий, как и для траекторий экспедиций.

На рис. 9.2.5 приведены также характеристики траекторий облета Марса без пролета мимо Венеры (прямой облет). Видно, что траектории прямого облета, как правило, дают большие значения $V_{хз}$, чем траектории двойного облета. Кроме того, для таких траекторий скорости входа в атмосферу Земли существенно больше, как и в случае аналогичных траекторий для экспедиций к Марсу.

Использование траекторий двойного и прямого облетов позволяет осуществлять облеты Марса по тому или иному маршруту практически каждый год.

Из изложенного видно, что траектории полета к Марсу с использованием гравитационного поля Венеры представляют несомненный интерес и могут служить основными рабочими траекториями для будущих пилотируемых полетов к Марсу. В большинстве циклов они обеспечивают меньшие энергозатраты и скорости входа в атмосферу Земли менее 16 км/с.

Таблица 9.5

Характеристики траекторий облета
Маршрут 3—М—В—3. Группа I—X—Y

Год	V_{Σ}		$V_{CT}^{\oplus}$	$\Delta V_{\Sigma}^{\oplus}$		$R_{T,n}^{\oplus}$	$\Delta V_{\Sigma}^{\oplus}$	$R_{T,n}^{\oplus}$	$V_{\pi}^{\oplus}$	$t_{CT}^{\oplus}$	$t_{CT}^{\oplus}$	Группа
	км/с			км		км/с		км		J. D.		
										сут		
1975	7,97	4,10	3,85	56992	0,02	7108	14,2	2442659	2442866	2443048	510	I—I—I
1982	5,29	3,67	1,62	7058	0,002	8242	12,3	...4963	...5155	...5371	560	I—I—I
1984	0,04	3,88	2,88	513556	0,28	227496	18,00	...5710	...5900	...6125	455	I—I—I
1988	5,54	3,72	1,80	4403	0,018	11367	12,9	...7345	...7530	...7740	530	I—I—I

Маршрут 3—М—В—3. Группа II—X—Y

1973	8,30	6,86	0,17	4814	1,27	7486	12,9	2441660	2441904	2442080	II—I—I
1975	6,38	5,40	0,96	5847	0,02	6176	12,1	...2593	...2843	...3053	II—I—I
1982	6,07	4,58	1,42	4935	0,05	10770	12,2	...4963	...5238	...5388	II—I—I
1984	5,01	4,79	0,20	6396	0,028	6628	15,6	...5635	...5897	...6102	II—I—I
1985	8,98	7,8	1,02	65327	0,19	8524	12,7	...6310	...6580	...6750	II—I—I
1988	5,99	4,14	1,78	4515	0,065	10244	12,0	...7300	...7515	...7540	II—I—I
1990	9,56	5,98	3,28	5176	0,30	265270	13,0	...8020	...8280	...8499	II—I—I

Маршрут 3-В-М-3. Группа X-Y-II

Гол	V_{Σ}	$V_{\Sigma}^{\oplus}$	$\Delta V_M^{\ominus}$	$R_{T,\Pi}^{\ominus}$		$\Delta V_M^{\ominus}$	$R_{T,\Pi}^{\ominus}$	$V_{\pi}^{\oplus}$	$t_{\Sigma}^{\oplus}$	J. D.		$i_{\Sigma}^{\ominus}$	t_{Σ}	Группа
				км	км					км/с	км/с			
1970	3,90	3,65	0,23	16768	5195	0,017	5195	13,8	2440825	2440925	2441148	615	I-I-II	
1970	4,31	3,65	0,13	7953	544757	0,53	544757	12,7	...0808	...0908	...1158	570	I-I-II	
1972	5,69	4,20	0,074	16030	6447	1,41	6447	11,6	...1485	...1640	...1815	590	I-I-II	
1972	4,67	3,96	0,29	15030	4558	0,41	4558	12,6	...1465	...1635	...1800	670	I-I-II	
1975	7,16	5,84	0,032	616934	5099	1,28	5099	20,0	...2418	...2633	...2817	680	I-I-II	
1977	6,93	4,68	0,44	108304	159811	1,81	159811	15,5	...3200	...3310	...3500	580	I-I-II	
1977	4,71	4,60	0,079	7193	217980	0,028	217980	16,5	...3192	...3310	...3500	605	I-I-II	
1978	4,86	4,70	0,032	611584	428399	0,13	428399	15,11	...3840	...4014	...4260	570	I-I-II	
1982	8,01	5,08	1,96	81308	7568	0,96	7568	19,5	...4748	...4968	...5138	660	I-I-II	
1983	6,97	5,08	1,78	384732	9067	0,106	9067	14,5	...5520	...5579	...5835	530	I-I-II	
1983	5,59	5,13	0,330	11568	5927	0,13	5927	15,7	...5525	...5583	...5840	590	I-I-II	
1985	4,90	4,05	0,28	7359	5348	0,57	5348	12,5	...6167	...6317	...6547	610	I-I-II	
1985	4,54	4,19	0,043	618041	7609	0,31	7609	13,5	...6165	...6320	...6540	670	I-I-II	
1988	7,98	7,47	0,11	6681	5949	0,40	5949	17,7	...7083	...7273	...7538	700	I-I-II	
1990	6,97	5,75	0,006	16492	70794	0,26	70794	12,7	...7895	...7990	...8170	535	I-I-II	
1990	5,45	4,55	0,88	17194	9278	0,02	9278	14,5	...7880	...8000	...8215	590	I-I-II	
1991	5,31	4,18	0,62	8571	52777	0,51	52777	13,5	...8507	...8662	...8797	680	I-I-II	

Маршрут 3-В-М-3. Группа X-Y-I

Гол	6,88	3,91	0,11	12112	2,86	519473	13,3	2440823	2440913	2441158	510	I-II-I
1970	4,29	4,20	0,074	16033	0,02	59886	14,5	... 1485	... 1640	... 1815	485	I-II-I
1972	6,85	4,34	0,036	619937	2,48	395421	12,1	... 3839	... 4004	... 4199	580	I-II-I
1978	5,26	4,28	0,044	8238	0,93	174290	17,8	... 3839	... 3999	... 4154	470	I-II-I
1985	5,16	3,99	0,07	7647	1,10	5342	11,5	... 6152	... 6320	... 6547	565	I-II-I
1985	4,97	3,98	0,04	344498	0,95	381217	15,0	... 6150	... 6320	... 6540	490	I-II-I
1991	4,46	4,38	0,08	7354	0,005	593147	17,8	... 8527	... 8682	... 8887	475	I-II-I
1991	5,57	4,21	0,043	9057	1,32	8624	12,8	... 8512	... 8667	... 8807	550	I-II-I

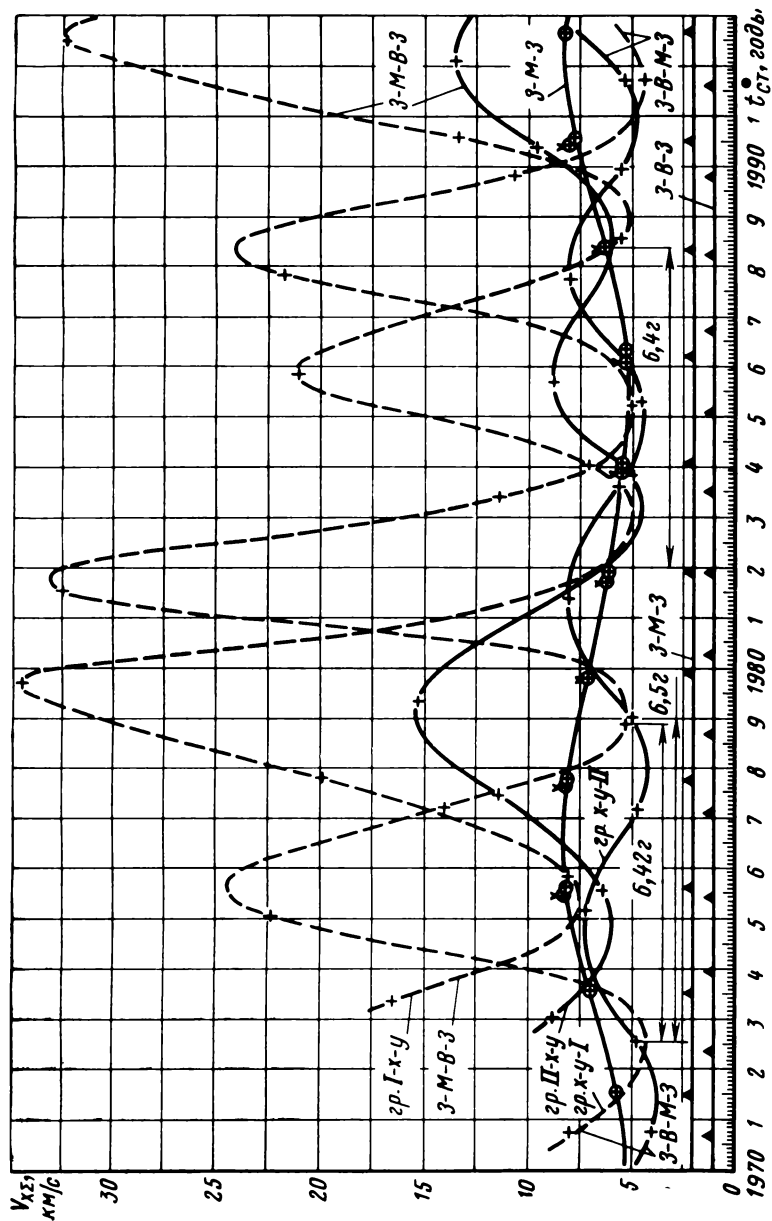


Рис. 9.2.5. Энергозатраты для различных вариантов траектории облета Марса

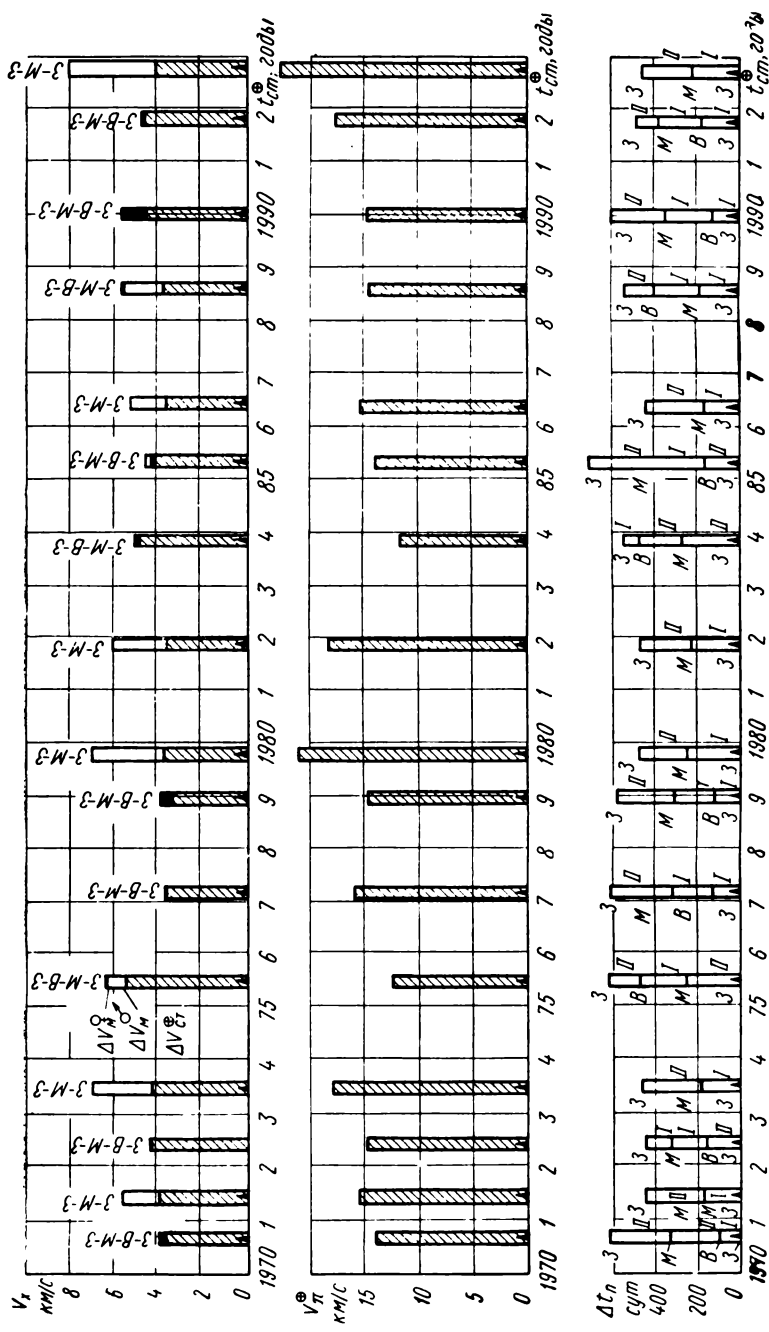


Рис. 9.2.6. Характеристики различных вариантов облета Марса

Использование для полета кораблей экспедиции к Марсу траекторий «прямых полетов» и траекторий полета «через Венеру» существенно увеличивает количество возможных вариантов полетов и сокращает время между оптимальными циклами полетов.

§ 3. ПОЛЕТ К МЕРКУРИЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ВЕНЕРЫ

Прямые межпланетные траектории полета к Меркурию — пролетные межпланетные траектории Земля — Меркурий и межпланетные траектории Земля — Меркурий с выходом на орбиту около планеты назначения — принципиально рассмотрены в гл. V и VI. Проведенный анализ показал, что прямые межпланетные полеты Земля—Меркурий требуют для своей реализации больших энергозатрат. Потребная стартовая характеристическая скорость для облета Меркурия в лучшем случае примерно на 25% выше аналогичной скорости для облета Марса. Вывод же КЛА на конечную орбиту около Меркурия требует гораздо больших энергозатрат по сравнению с такой же операцией около Марса. Кроме того, прямые пролетные траектории Земля—Меркурий характеризуются большими гиперболическими скоростями облета планеты, что не всегда приемлемо для нормального проведения экспериментальных исследований.

Повышение энергетической эффективности межпланетных полетов к Меркурию является важным фактором в планировании их на ближайшее будущее. Здесь решающую роль может сыграть особенность строения Солнечной системы, позволяющая использовать гравитационные поля Венеры или Юпитера.

Действительно, используя гравитационное поле Юпитера для изменения энергии и направления полета КЛА, можно получить много вариантов гелиоцентрических участков, проходящих вблизи Солнца и пересекающих орбиту Меркурия (рис. 9.3.1). Правда, таким полетам свойственна большая продолжительность (до 3 лет), но при наличии обычных двигательных установок (ЖРД) использование гравитационного поля Юпитера является практически единственной возможностью осуществить пролет КЛА вблизи Солнца на расстоянии не более 0,1 а. е. и пересечь орбиту Меркурия (рис. 9.3.2). Однако планирование полетов непосредственно к Меркурию с использованием планеты Юпитер вряд ли целесообразно из-за большой продолжительности и очень малого выигрыша в энергетике полета.

Довольно перспективным способом решения указанной проблемы является использование гравитационного поля Венеры. Принципиально существуют несколько схем перелета к Мерку-

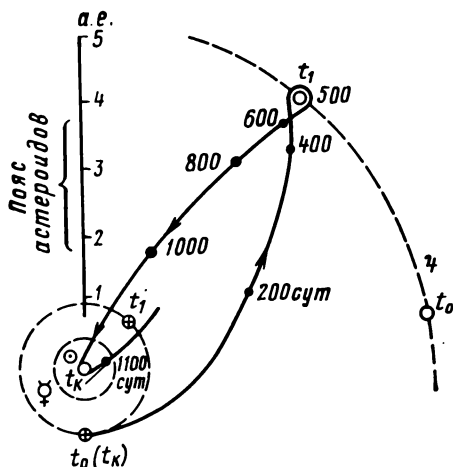


Рис. 9.3.1. Проекция траектории межпланетного аппарата Земля—Юпитер—Солнце на эклиптику (запуск принципиально возможен ежегодно):

$$V_{x1} = 16,5 \text{ км/с}; r_{\pi 1} = 5,3 R_{\pi}; R_{\pi \odot} = 0,02 \text{ а. е.}; V_{\pi \odot} = 298 \text{ км/с}$$

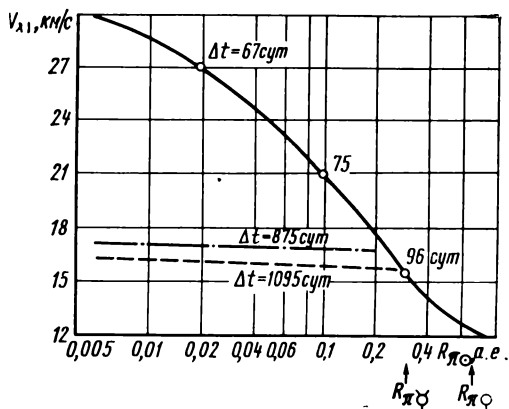


Рис. 9.3.2. Значения характеристической скорости старта при полетах к Солнцу в зависимости от перигелия переходной орбиты:

— прямой полет Земля—Солнце; полет с использованием гравитационного поля Юпитера

рию с облетом Венеры. Если баллистический облет Венеры при постоянном значении $V_{\infty 1}$ позволяет изменить направление и величину гелиоцентрической скорости КЛА за счет только ее гравитационного поля, то при активном облете изменяются как направление, так и гиперболические избытки скорости на выходе за счет коррекции.

Характеристики траектории облета Венеры в определенной

степени зависят от задач маневра КЛА вблизи Меркурия. Поэтому выбор схемы облета может в ряде случаев предопределяться типом межпланетной траектории полета.

Траектории пролета Меркурия

Энергозатраты межпланетных траекторий пролета Меркурия определяются стартовой характеристической скоростью. Значит, облет Венеры только тогда эффективен, когда он способствует уменьшению этой скорости. В этой связи следовало бы ожидать, что баллистический облет Венеры принципиально может привести к большим выигрышам по сравнению с другими схемами облета. Ограничением здесь является потребная высота перицентра планетоцентрической орбиты облета Венеры, поскольку она не может быть ниже высоты верхней атмосферы, приблизительно $200 \div 150$ км. Избежать этого затруднения можно с помощью маневра коррекции высоты перицентра планетоцентрической траектории облета. Коррекция, требующая обычно небольшого приращения скорости, позволяет получить высоту перицентра последующей траектории облета заданной минимальной величины. Хотя энергетические характеристики схем облета с коррекцией высоты перицентра не всегда лучше, чем при баллистическом облете, но окна запуска становятся шире.

Кинематика межпланетных полетов Земля — Меркурий с облетом Венеры такова, что они соответствуют каждому соединению Земля — Венера, наступающему приблизительно через 17 мес. Тем самым определяется календарный год возможного старта для полета КЛА к Меркурию с облетом Венеры. Теперь остается найти переходную орбиту к Меркурию с учетом активного и баллистического облета Венеры при минимальной характеристической скорости старта. Метод поиска таких переходных орбит аналогичен изложенному в § 2.

Потребные минимальные значения стартовой V_{x1} и суммарной V_{Σ} (в случае активного облета) характеристических скоростей, значения гиперболической скорости прибытия к Меркурию V_{∞} и времени перелета Δt в зависимости от календарного года соединения Земля — Венера приведены на рис. 9.3.3. Сравнение минимальных стартовых характеристических скоростей при прямом полете КЛА к Меркурию и при полете с учетом баллистического облета Венеры показано на рис. 9.3.4*. Анализ результатов расчета позволяет сделать ряд выводов. Полет межпланетного аппарата к Меркурию с баллистическим облетом Венеры и стартом в годы соединения Земля — Венера 1982, 83 и 85 энергетически эффективнее (см. рис. 9.3.4) по сравнению с

* На рис. 9.3.4 значение $\tilde{V}_x$ равно отношению характеристических скоростей старта при баллистическом облете Венеры и при прямом полете.

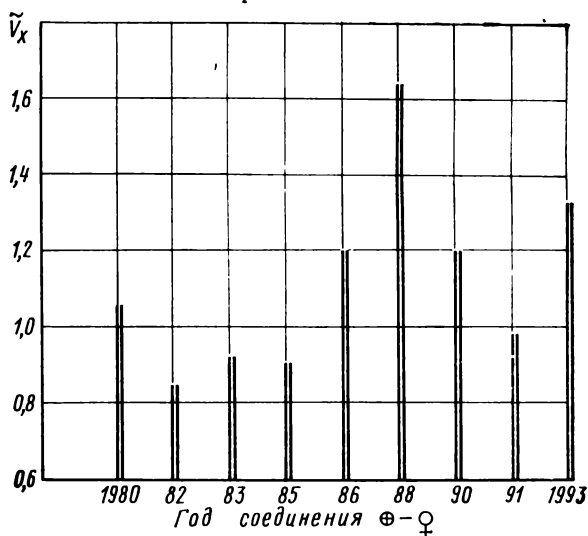
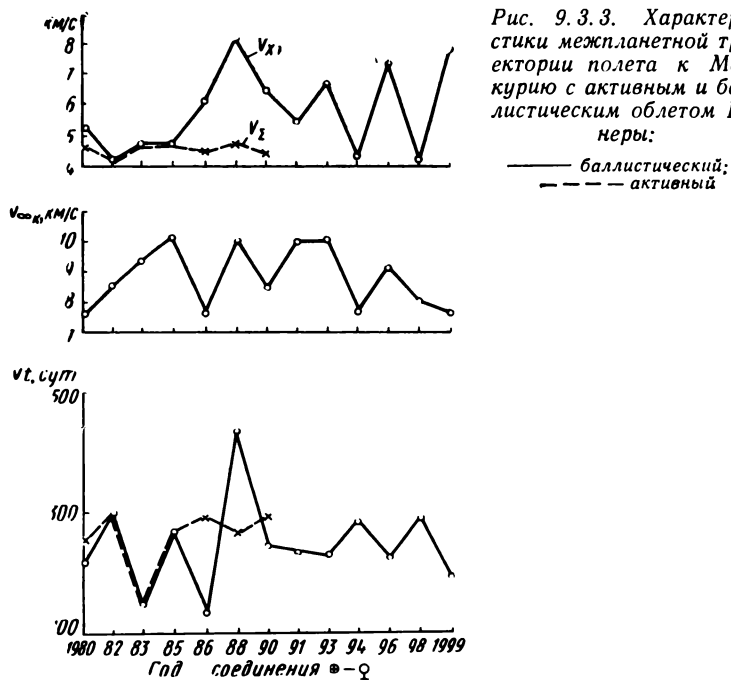


Рис. 9.3.4. Сравнение характеристических скоростей разгона при прямом полете к Меркурию и с учетом баллистического облета Венеры

прямым перелетом. В 1982 г. характеристическая скорость старта в десятилетии 1980—90 будет наименьшей и равной ~ 4 км/с и на 16% меньше, чем для сравнимого прямого перелета. Полет к Меркурию с активным облетом Венеры позволяет значительно снизить в 1988—1990 гг. энергозатраты по сравнению с баллистическим облетом. Такие полеты возможны и в 1975, 1977 и 1978 гг. с потребными значениями $V_{\Sigma}=4,08$ км/с, $\Delta t=172$ сут и $V_{\Sigma}=4,47$ км/с, $\Delta t=119$ сут, $V_{\Sigma}=4,44$ км/с соответственно. Время полета по сравнению с прямыми перелетами увеличивается во всех случаях более чем вдвое.

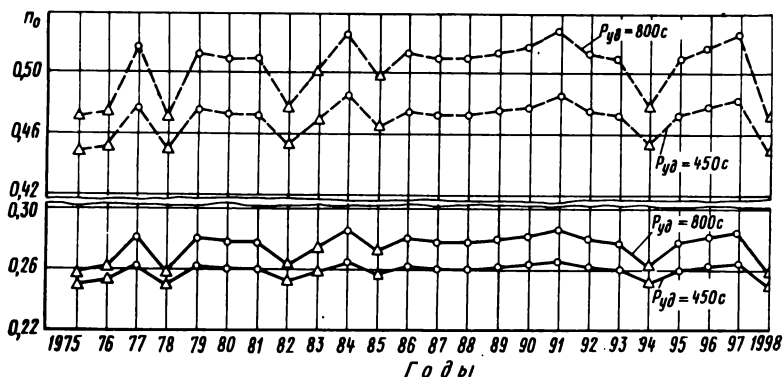


Рис. 9.3.5. Оптимальные значения тяговооруженности разгонного модуля межпланетного аппарата, пролетающего Меркурий:

○—прямой полет; △—полет с облетом Венеры; — $\gamma_{д,у}=0,1$; - - $\gamma_{д,у}=0,02$

Гиперболическая скорость прибытия к Меркурию в среднем равна 10 км/с и значительно меньше в случае прямого перелета. Для межпланетной траектории пролета Меркурия с баллистическим облетом Венеры проектная задача сводится к оптимизации основных проектных параметров разгонного модуля при заданном гиперболическом избытке скорости. На рис. 9.3.5 и 9.3.6 показаны оптимальные значения n_0 и μ_k модуля межпланетного аппарата, предназначенного для пролета Меркурия с баллистическим облетом Венеры и без него при старте в 1975—1998 гг. Здесь гиперболические избытки скорости отрыва (соответствующие V_{x1}) взяты по рис. 9.3.4.

Траектории полета с выходом КЛА на орбиту около Меркурия

При таком маневре вблизи Меркурия облет Венеры должен способствовать уменьшению суммарной характеристической скорости V_{Σ} , которая зависит от характеристической скорости как

старта, так и торможения. Таким образом, облет Венеры энергетически эффективен тогда, когда он приводит к такому изменению характеристической скорости старта и торможения, при котором V_{Σ} уменьшается. Уменьшение V_{Σ} не всегда связано с уменьшением характеристической скорости торможения. Скорее всего оно может быть вызвано уменьшением гиперболического избытка скорости отрыва (характеристической скорости старта). Дело в том, что выбор переходной орбиты Земля — Венера является более гибким. Однако выбор гиперболического избытка

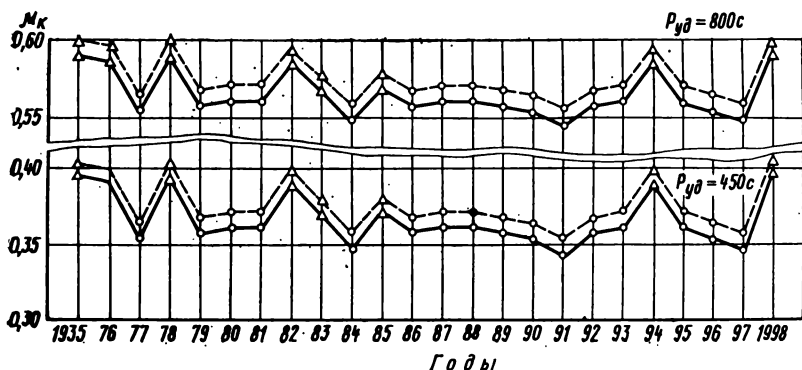


Рис. 9.3.6. Оптимальные значения относительного конечного веса разгонного модуля межпланетного аппарата, пролетающего Меркурий:

○ — прямой полет; △ — полет с облетом Венеры; — — — $\gamma_{д.у} = 0,1$; — — — $\gamma_{д.у} = 0,02$

скорости отрыва ограничен минимальным его значением, ниже которого скорость прибытия КЛА к Венере будет весьма мала, что не позволяет использовать гравитационное поле планеты для полета к Меркурию. В связи с этим ограничением не удастся воспользоваться для перелета Земля — Венера эллипсом минимальной характеристической скорости и в результате баллистического облета Венеры достигнуть Меркурия.

Расчеты показали, что переходные орбиты с баллистическим облетом Венеры и выходом на орбиту около Меркурия характеризуются такими же кинематическими параметрами, как и ранее рассмотренные переходные орбиты с пролетом. На рис. 9.3.7 показано изменение минимальных значений суммарной характеристической скорости по годам соединения Земля — Венера при баллистическом облете Венеры. Наименьшее значение $V_{\Sigma} = 11,8$ м/с [$t_0 = 2449650$ J. D. (24/X 1994 г.); $\Delta t = 290$ сут], что на 9% меньше минимальной суммарной характеристической скорости прямого полета [$t_0 = 2446562$ J. D. (11/V 1986 г.); $\Delta t = 95$ сут]. Сравнение минимальных значений суммарной характеристической скорости для прямых и не прямых (баллистический облет Венеры) межпланетных полетов с выходом на орбиту около

Меркурия дано на рис. 9.3.8*. Баллистический облет Венеры для выхода на орбиту около Меркурия энергетически эффективнее прямых полетов только в 1980, 1982, 1983 и 1994, 1998 гг.

Наименьших V_{Σ} можно достигнуть только в пределах 20 сут от даты соединения Земля — Венера. Отклонение от этих пределов приводит к резкому увеличению V_{Σ} .

Интересно отметить, что траектории с баллистическим облетом Венеры приводят к стрече с Меркурием вблизи области

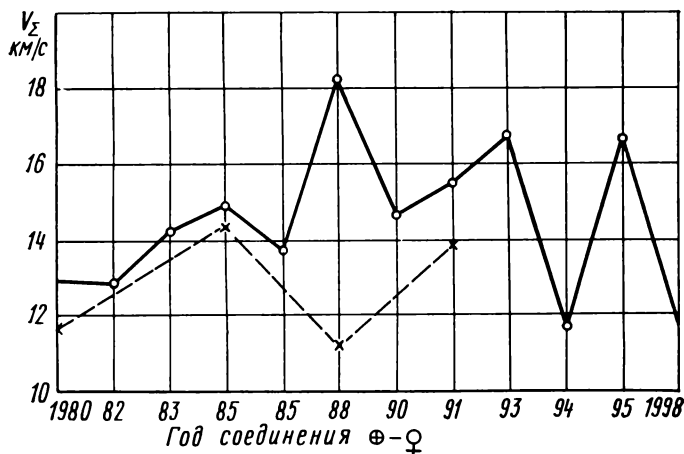


Рис. 9.3.7. Минимальные значения суммарной характеристической скорости межпланетного полета с выходом на орбиту около Меркурия в зависимости от года старта (годы соединения $\oplus - \text{♀}$). Конечная орбита — круговая, $H_k = 1000$ км; — — — схема с коррекцией высоты перигелия орбиты облета

нисходящий узел — афелий орбиты Меркурия. Поэтому характеристическая скорость торможения для переходных орбит с баллистическим облетом Венеры в основном выше ее значений при прямых полетах. В связи с этим эффективность баллистических облетов Венеры достигается только вследствие уменьшения характеристической скорости старта по сравнению с прямыми полетами. Данный результат позволяет искать резервы понижения V_{Σ} путем регулирования долготы точки встречи с Меркурием за счет активного облета Венеры. Если он будет приводить к встрече с Меркурием в области восходящий узел — перигелий орбиты Меркурия, то возможно предположить уменьшение V_{Σ} . Однако расчеты показывают, что это не достигается ввиду больших энергозатрат в окрестности Венеры, характеристическая скорость которых достигает 3 км/с. В этом смысле более пер-

* На рис. 9.3.8 значение $\tilde{V}_{\Sigma}$ равно отношению V_{Σ} при баллистическом облете к V_{Σ} при прямом полете.

спективной является схема облета Венеры с коррекцией высоты перигентра орбиты облета.

На рис. 9.3.7 пунктирной линией соединены точки с минимальным значением V_{Σ} при такой схеме облета Венеры. Видно, что V_{Σ} уменьшается до 11,2 км/с при дате старта $t_0=2447330$ J. D. (17/VI 1988 г.) и $\Delta t=300$ сут.

Если в качестве критерия оптимальности рассматривать суммарную характеристическую скорость, то решение проектной задачи, в которой учитывается баллистический облет Венеры,

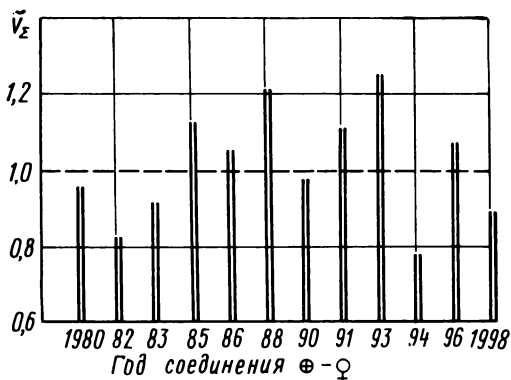


Рис. 9.3.8. Сравнение минимальных значений суммарной характеристической скорости для прямых и непрямых (баллистический облет Венеры) полетов с выходом на орбиту около Меркурия. Конечная орбита — круговая, $H_k=1000$ км

будет сводиться к оптимизации основных проектных параметров разгонного и тормозного модулей при известных гиперболических избытках скорости. Из двух типов межпланетных полетов — прямой и не прямой (баллистический облет Венеры) — были выбраны переходные орбиты с наименьшими V_{Σ} , на основе которых путем решения проектной задачи были определены оптимальные значения основных проектных параметров разгонного и тормозного модулей межпланетного аппарата, предназначенного для полета к Меркурию с выходом на конечную орбиту. Результаты решения изображены на рис. 9.3.9 и 9.3.10.

Влияние облета Венеры на энергетические характеристики межпланетных траекторий полета к Меркурию с возвратом к Земле может проявляться по-другому для траекторий возвращения. Результаты расчетов показывают, что для траекторий возвращения возможно лишь небольшое снижение V_{Σ} (менее 10%) за счет облета Венеры, но это связано с серьезным увеличением продолжительности операции (на 50—100%) [72]. По этой причине здесь не рассматриваются возвратные траектории Меркурий — Земля с облетом Венеры, хотя они в ряде случаев могут приводить к меньшим скоростям входа в атмосферу Земли.

Критерий использования схем облета Венеры для решения задач полета к Меркурию не должен быть связан только с уровнем энергозатрат. Важными характеристиками также являются

диапазон «окна» старта и чувствительность номинальной межпланетной траектории к величинам отклонений.

При баллистическом облете Венеры для переходных орбит с минимальной характеристической скоростью диапазон «окна»

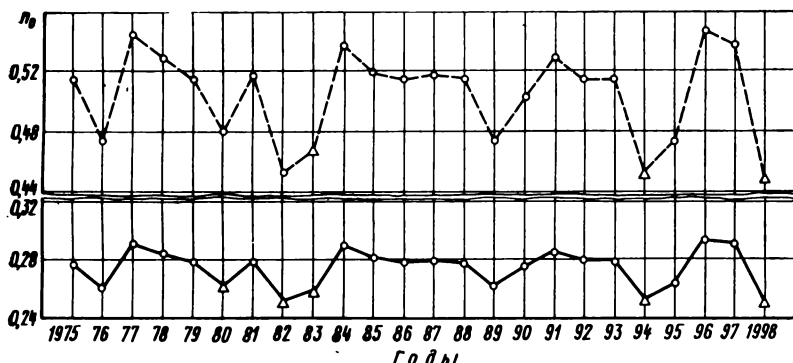


Рис. 9.3.9. Оптимальные значения тяговооруженности разгонного модуля (выход на орбиту около Меркурия):

○ — прямой полет; △ — полет с облетом Венеры; — — $\gamma_{д.у}=0,1$; - - - $\gamma_{д.у}=0,02$; $P_{у.д}=450$ с

старта зависит от ограничений на минимальную высоту перицентра. Так, например, для соединения 1980 г. «окно» старта уменьшается по сравнению с прямым полетом почти в 3 раза

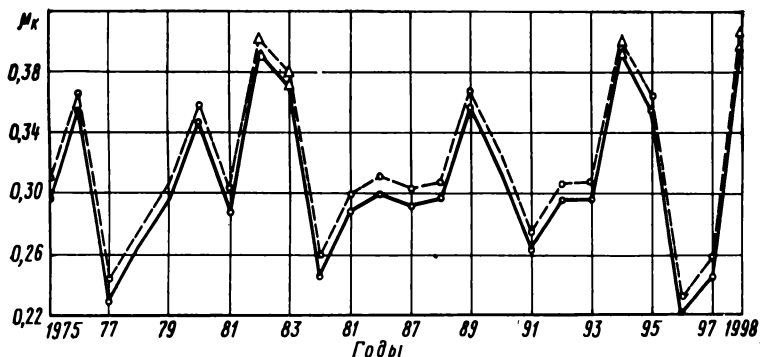


Рис. 9.3.10. Оптимальные значения относительного конечного веса разгонного модуля (выход на орбиту около Меркурия):

○ — прямой полет; △ — полет с облетом Венеры; — — $\gamma_{д.у}=0,1$; - - - $\gamma_{д.у}=0,02$; $P_{у.д}=450$ с

и составляет всего около 7 сут [72]. В случае низких высот перицентра при баллистическом облете Венеры переход к схеме облета с их коррекцией даст большие преимущества. Для того

же года соединения (1980 г.) переход к коррекции высоты перицентра орбиты облета при 5%-ном запасе V_{Σ} расширяет «окно» старта до 42 дней [72]. Если же высота перицентра орбиты облета достаточно большая, то баллистический облет также дает возможность значительно расширить «окно» старта. Например, для соединения 1982 г. баллистический облет Венеры (высота перицентра 1980 км) позволяет при 5%-ном запасе V_{Σ} расширить «окно» запуска до 50 дней [72]. Таким образом, в зависимости от высоты перицентра орбиты облета выбор правильной схемы облета Венеры позволяет значительно расширить «окно» запуска межпланетного аппарата к Меркурию. Поэтому, если даже рациональная схема облета Венеры и не дает ощутимого выигрыша в энергетике, то уже большим ее достоинством является расширение интервалов запуска.

Реализация межпланетной траектории полета к Меркурию с облетом Венеры во многом зависит от чувствительности номинальной траектории к отклонениям кинематических параметров от расчетных данных. Управление траекторией непрямого полета Земля — Венера — Меркурий представляет собой более трудную задачу, чем при прямом полете. Действительно, даже очень небольшие ошибки в реализации расчетной высоты перицентра могут вызвать заметные погрешности в направлении асимптоты измененной гиперболической орбиты облета. Судя по результатам приближенных расчетов и численного интегрирования, располагаемый запас топлива на коррекцию должен дополнять средний полный потребный запас топлива на $(2,3 \div 3,5)\sigma$ (σ — среднеквадратичное отклонение ошибки реализации коррекции), что для не прямых полетов с пролетом Меркурия в 1970 и 1973 гг. соединения Земля — Венера соответствует характеристической скорости около 250 м/с.

Таким образом, указанные результаты предварительного анализа траекторий не прямых полетов к Меркурию позволяют оптимистически смотреть на техническую реализацию межпланетных полетов к Меркурию с облетом Венеры.

§ 4. МАНЕВРЫ КЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЮПИТЕРА

Гравитационное поле Юпитера — самой большой планеты — является хорошим «помощником» в прокладывании космических трасс в труднодоступные и удаленные районы Солнечной системы. К ним относятся районы вблизи Солнца, районы над плоскостью эклиптики и ниже ее, внешние планеты от Сатурна до Плутона и районы глубокого космоса. Расположенности орбиты Юпитера и его масса таковы, что эти задачи можно успешно решить с меньшими энергозатратами благодаря использованию

гравитационного поля Юпитера, изменяя геометрию встречи КЛА и планеты.

Ранее было показано, что величины прицельной дальности $\bar{b}$ (или высоты перигенра) и угла ψ при неизменном $\bar{V}_{\infty 1}$ полностью определяют геометрию встречи КЛА и планеты и харак-

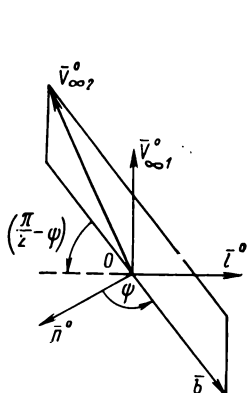


Рис. 9.4.1. Кинематика векторов орбиты облета:
 $\bar{n}^0 = \bar{r}^0 \times \bar{V}_{\infty 1}^0$; $\bar{r}^0 \cdot \bar{R}_4 = 0$;
 $\bar{n}^0$ положителен

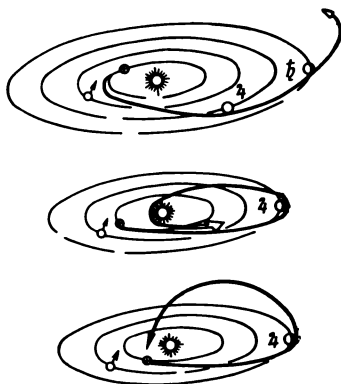


Рис. 9.4.2. Перспективные схемы космических маневров КЛА с облетом Юпитера

теризуют планетоцентрическую орбиту облета (рис. 9.4.1). Изменяя b и угол ψ , можно получить много вариантов полетов ввиду изменения после облета величины и направления гелиоцентрической скорости полета КЛА. Некоторые перспективные схемы полетов КЛА с облетом Юпитера показаны на рис. 9.4.2. Рассмотрим проектно-баллистические характеристики КЛА при таких схемах полета.

Траектории полета к Солнцу

Орбиты облета при значениях ψ , близких к нулю, могут быть использованы для полетов КЛА к Солнцу (солнечные зонды), поскольку гелиоцентрическая скорость КЛА после облета резко уменьшается, что приводит к почти прямолинейным гелиоцентрическим траекториям и в некоторых случаях даже к траекториям «попадания» в Солнце. Прямой полет Земля — окрестность около Солнца требует значительных энергозатрат (рис. 9.3.2). Из возможных схем полета к Солнцу ($R_{\pi\odot} \leq 0,2$) схема полета с использованием гравитационного поля Юпитера требует наименьших энергозатрат и поэтому наиболее перспективна. На рис. 9.4.3 приведены потребные времена полета Δt КЛА, совершающего полет к Солнцу с облетом Юпитера в зависимости от гиперболического избытка скорости $V_{\infty 0}$, радиуса периге-

лия переходной орбиты после облета Юпитера $R_{\pi\odot}$ и радиуса перигея планетоцентрической орбиты облета $r_{\pi 1}$, представлен-

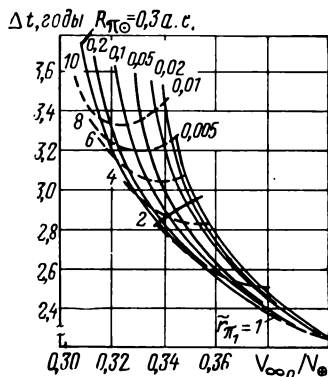


Рис. 9.4.3. Зависимость потребного времени полета к Солнцу от гиперболического избытка скорости орбиты отрыва

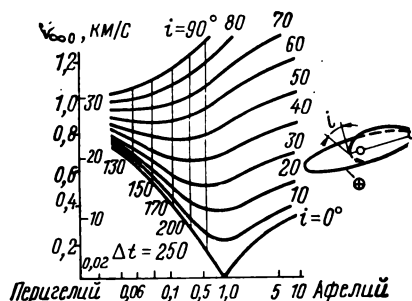


Рис. 9.4.4. Изменение гиперболического избытка скорости орбиты отрыва от перигелия переходной орбиты при прямых перелетах Земля — районы над плоскостью эклиптики

ного в единицах радиуса планеты Юпитер. Другие проектно-баллистические характеристики совпадают с данными прямого полета Земля — Юпитер.

Траектории полета за пределы эклиптики

Зондирование районов над и под плоскостью эклиптики представляет большой научный интерес, вызываемый возможностью исследования «сверху» (снизу) Солнца, характеристик межзвездной среды и возможной асимметрии условий в космосе (распределение метеорных тел, солнечных явлений и т. д.). Гелиоцентрические траектории полета КЛА в плоскостях с большими углами наклона (близкими к 90°) позволяют решить эту задачу.

Прямые полеты Земля — районы над эклиптикой — требуют больших энергозатрат. На рис. 9.4.4 показаны значения гиперболического избытка скорости орбиты отрыва в зависимости от угла наклона гелиоцентрической орбиты к плоскости эклиптики и радиуса перигелия [73]. Ввиду больших значений $V_{\infty 0}$ вряд ли можно предполагать реализацию таких схем полета к удаленным районам над плоскостью эклиптики.

Использование гравитационного поля Юпитера позволяет при ψ , близких к 90° (см. рис. 9.4.1), отклонять гелиоцентрическую орбиту КЛА для достижения больших эклиптических широт. В зависимости от постановки задачи возможны две схемы полета. Первая схема полета — поворот плоскости переходной орбиты после облета Юпитера до 90° к плоскости эклиптики —

позволяет КЛА пролететь над (под) Солнцем. Такая схема полета изображена на рис. 9.4.5.

Вторая схема полета отвечает требованию максимизации составляющей гелиоцентрической скорости КЛА после облета

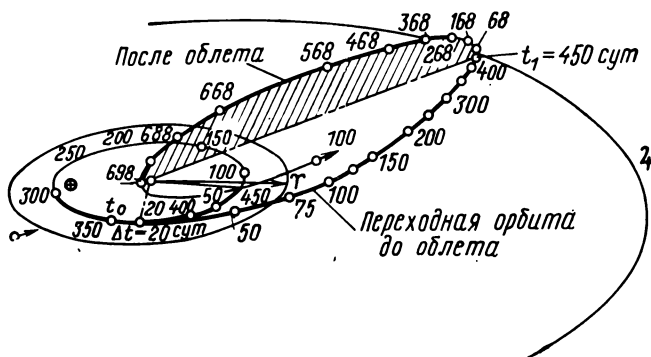


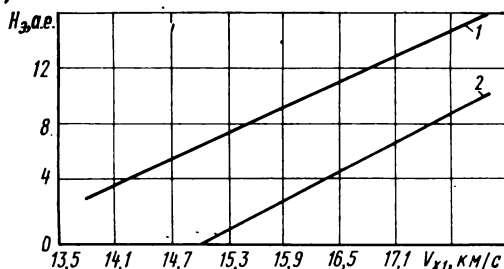
Рис. 9.4.5. Облет Юпитера с поворотом плоскости переходной орбиты до 90° к плоскости эклиптики (первая схема):

$$t_0 = 2442590,5 \text{ J. D.}; V_{\infty 0} = 0,37 V_{\odot}; i = 90^\circ; R_{\pi \odot} = 0,045 \text{ a. e.}; \tau_{\pi} = 7$$

Юпитера, нормальной к плоскости эклиптики. Эта схема позволяет достигнуть наибольшего удаления КЛА от плоскости эклиптики в точке его максимальной гелиоцентрической широты.

Рис. 9.4.6. Удаление КЛА от плоскости эклиптики в момент его прохождения над Солнцем для двух схем полета:

1—схема с максимизацией нормальной составляющей скорости; 2—схема с поворотом на 90° к плоскости эклиптики



На рис. 9.4.6 показано изменение максимального отклонения H_z от плоскости эклиптики в зависимости от характеристической скорости старта при двух схемах полета [40].

Межпланетные траектории полета к внешним планетам

После реализации полетов межпланетных аппаратов к Юпитеру неминуемо возникнет потребность в исследовании более дальних планет — Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона. Однако прямые полеты к этим планетам потребуют еще больших энергозатрат при чрезмерно большом потребном времени полета

(см. § 3 гл. V). Уменьшить время полета до приемлемых величин можно только за счет дальнейшего роста энергозатрат (рис. 9.4.7).

Решение проблемы полета к внешним планетам при приемлемых для КЛА с двигателями больших тяг (ЖРД, ЯРД) энергетических характеристиках и временах полета становится практически возможным при использовании гравитационного поля Юпитера. Если облет происходит при углах ψ , близких к 180°

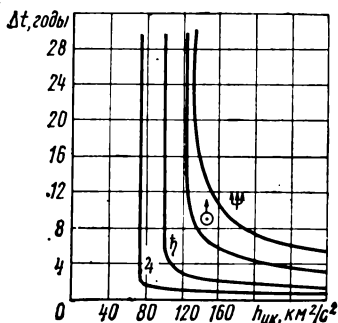


Рис. 9.4.7. Зависимость минимального времени прямых полетов к внешним планетам от энергии запуска

(см. рис. 9.4.1), то межпланетный аппарат может получить от Юпитера достаточное количество энергии, чтобы после облета двигаться даже по гиперболической орбите и тем самым преодолеть силу притяжения Солнечной системы. Такая схема полета при соответствующем расположении планет позволяет достаточно быстро долететь к следующей планете. Последовательно используя гравитационные поля внешних планет, можно обеспечить полет межпланетного аппарата ко многим планетам после Юпитера. В последние годы исследованию межпланетных полетов к внешним планетам с использованием грави-

тационного поля Юпитера или гравитационных полей нескольких планет был посвящен ряд работ*.

Интересно, что в настоящем десятилетии открываются возможности исследования внешних планет Солнечной системы (Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона) благодаря облету Юпитера. Возможны также межпланетные траектории с облетом двух, трех и даже четырех внешних планет при умеренных значениях стартовой характеристической скорости (от 14,5 до 16,5 км/с) и времен полета. Рассматриваются обычно следующие три принципиальные схемы пролетов планет:

1) двухпланетная схема пролета по маршрутам: Юпитер — Сатурн (Ю — С); Юпитер — Уран (Ю — У); Юпитер — Нептун (Ю — Н) и Юпитер — Плутон (Ю — П);

2) трехпланетная схема пролета по маршрутам: Юпитер — Сатурн — Плутон (Ю — С — П); Юпитер — Уран — Нептун (Ю — У — Н);

3) четырехпланетная схема пролета по маршруту Юпитер — Сатурн — Уран — Нептун.

Важная особенность рассмотренных схем пролета заключается в том, что на каждом маршруте первой планетой является

* Анализ некоторых таких работ в США дан в работе [40].

Юпитер. Поэтому минимальные энергозатраты будут определяться скорее всего условиями полета Земля — Юпитер.

Перейдем к рассмотрению каждой схемы полета.

Двухпланетная схема полета

(Земля) — Юпитер — Сатурн. Зависимость времени полета к Сатурну от гиперболического избытка скорости орбиты отрыва $V_{\infty 0}$ при различных датах старта и различных радиусах перигелия планетоцентрической орбиты облета (в радиусах Юпитера) $\tilde{r}_{\pi 1}$ приведена на рис. 9.4.8 [73]. Видно, что наилучшие возможности полета к Сатурну с облетом Юпитера возникают при старте в 1977—1978 гг., когда можно достигнуть наименьших $V_{\infty 0}$ при практически минимальных Δt и приемлемых $\tilde{r}_{\pi 1}$. Если выбрать дату старта в 1977 г., то $V_{\infty 0} = 0,32 V_{\oplus}$ при $\tilde{r}_{\pi 1} = 10$, в то время как при прямом полете ее минимальная величина равна $0,385 V_{\infty 0}$. Однако при полетах к внешним планетам уменьшение времени полета может оказаться более важным фактором, чем сни-

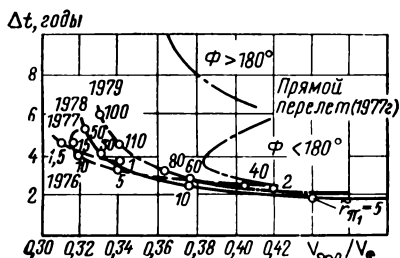


Рис. 9.4.8. Зависимость времени полета от гиперболического избытка скорости орбиты отрыва при маршруте Земля—Юпитер—Сатурн

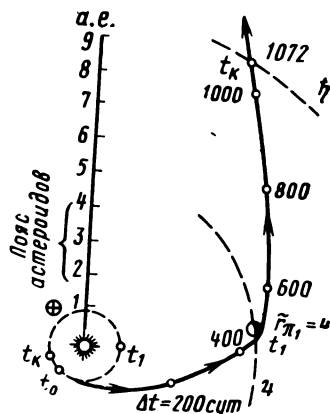


Рис. 9.4.9. Межпланетная траектория полета к Сатурну с облетом Юпитера: t_0 —сентябрь 1977 г.; $V_{\infty 0} = 0,35 V_{\oplus}$

жение $V_{\infty 0}$. В этом смысле характеристики полета к Сатурну с облетом Юпитера становятся еще лучше, время полета уменьшается с 4 лет до 2,75 года. Наименьшее же время полета при старте в 1977, 1978 и 1979 гг. равно 2 годам.

На рис. 9.4.9 [73] изображена проекция на плоскость эклиптики межпланетной траектории полета к Сатурну с облетом Юпитера при старте 6 сентября 1977 г. Близкая к ней межпланетная траектория возможна при старте в октябре 1978 г. Следующие оптимальные даты старта возможны только через суммарный синодический период (20 лет) в 1997—1998 гг. В табл. 9.6 для даты старта сентябрь 1977 г. даны оптимальные значения основных проектных параметров разгонного модуля n_0 и μ_K .

(Земля) — Юпитер — Уран. Баллистические характеристики межпланетной траектории полета к Урану с использованием гравитационного поля Юпитера показаны на рис. 9.4.10 [73]. Наиболее приемлемые характеристики полета имеют место при датах старта в 1978—1979 гг. Так, при $V_{\infty 0} = 0,34 V_{\oplus}$ время полета равно 6,5 года и $\tilde{r}_{\pi 1} = 2$ (1978 г.) или $\tilde{r}_{\pi 1} = 12$ (1979 г.), тогда как минимальная продолжительность полета — около 5 лет, но уже при $V_{\infty 0} = 0,38 \div 0,4 V_{\oplus}$.

Прямой полет при старте в 1979 г. будет продолжаться 12 лет при минимальном гиперболическом избытке скорости $V_{\infty 0}$, рав-

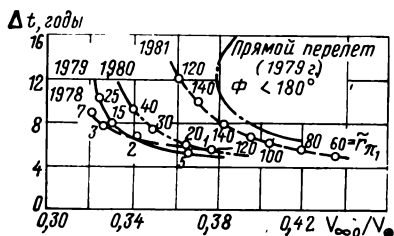


Рис. 9.4.10. Зависимость времени полета от гиперболического избытка скорости орбиты отрыва при маршруте Земля—Юпитер—Уран

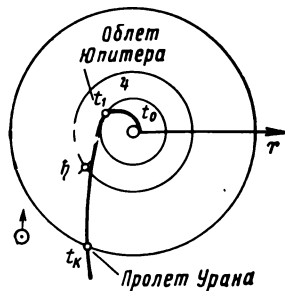


Рис. 9.4.11. Межпланетная траектория полета к Урану с облетом Юпитера:

t_0 —октябрь 1978 г.; $V_{\infty 0} = 0,35 V_{\oplus}$

ном $0,38 V_{\oplus}$. Если же при прямом полете продолжительность будет равна 6,5 года, то для этого надо достигнуть $V_{\infty 0} = 0,42 V_{\oplus}$. В первом случае облет Юпитера позволяет уменьшить время полета в 1,8 раза при некотором уменьшении $V_{\infty 0}$, во втором — при одинаковом времени полета — $V_{\infty 0}$ меньше на 2,4 км/с или почти на 30%.

На рис. 9.4.11 изображена проекция межпланетной траектории полета Земля—Юпитер—Уран на плоскость эклиптики при дате старта октябрь 1978 г. и $V_{\infty 0} = 0,35 V_{\oplus}$ [73]. В табл. 9.6 для даты старта в октябре 1979 г. даны оптимальные значения основных проектных параметров разгонного модуля n_0 и μ_K .

Следующие оптимальные даты старта возможны только в 1992—1993 гг.

(Земля) — Юпитер — Нептун. Из баллистических характеристик траекторий полета к Нептуну с использованием гравитационного поля Юпитера, изображенных на рис. 9.4.12, наиболее приемлемые—при датах старта в 1979—1980 гг. [73]. Так, при дате старта в ноябре 1979 г. межпланетный полет КЛА к Нептуну с облетом Юпитера может реализоваться при гиперболическом избытке скорости $V_{\infty 0} = 0,37 V_{\oplus}$ и $\Delta t = 8$ лет, близком к минимальному, причем $\tilde{r}_{\pi 1} = 3$. Близкие к ним характеристики

Таблица 9.6

**Оптимальные проектно-баллистические характеристики КЛА
при полетах к внешним планетам с облетом Юпитера**

Схема полета	Дата старта	$V_{\infty 0}$ км/с	$\Delta t_{\text{п}}$ сут	$\rho_{\text{о}}^{\text{opt}}$	$\rho_{\text{к}}^{\text{opt}}$	$\gamma_{\text{д.у}}$	$P_{\text{уд с}}$
Земля—Юпитер—Сатурн	Сентябрь 1977 г.	10,41	1072	0,38	0,174	0,05	450
				0,72	0,183	0,01	
				0,5	0,456	0,05	1000
				0,93	0,468	0,01	
Земля—Юпитер—Уран	Октябрь 1978 г.	10,41	2080	0,38	0,174	0,05	450
				0,72	0,183	0,01	
				0,5	0,456	0,05	1000
				0,93	0,468	0,01	
Земля—Юпитер—Нептун	Ноябрь 1979 г.	11,01	2920	0,38	0,162	0,05	450
				0,72	0,169	0,01	
				0,51	0,437	0,05	1000
				0,95	0,449	0,01	
Земля—Юпитер—Плутон	1977 г.	10,12	3650	0,38	0,185	0,05	450
				0,72	0,194	0,01	
				0,49	0,467	0,05	1000
				0,92	0,476	0,01	

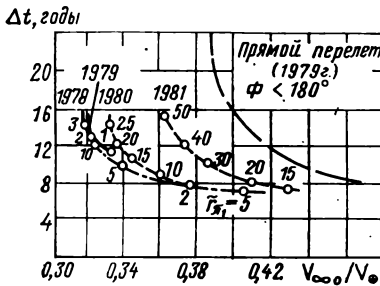


Рис. 9.4.12. Зависимость времени полета от гиперболического избытка скорости орбиты отрыва при маршруте Земля—Юпитер—Нептун

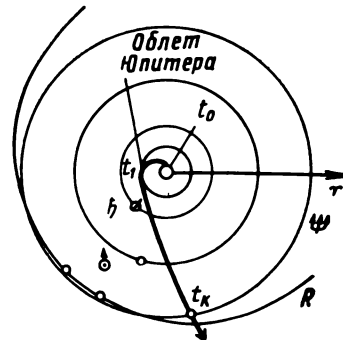


Рис. 9.4.13. Межпланетная траектория полета к Нептуну с облетом Юпитера:

t_0 —ноябрь 1979 г.; $V_{\infty 0} = 0,37 V_{\oplus}$

имеет межпланетная траектория полета при старте в 1980 г., когда $r_{\text{кл}} = 9$.

Межпланетные траектории полета к Нептуну с облетом Юпитера имеют качественно лучшие баллистические характе-

ристики по сравнению с прямым полетом (см. рис. 9.4.12). Так, при старте в 1979 г. и времени полета 8 лет $V_{\infty 0}=0,48 V_{\oplus}$, что на 3,3 км/с больше $V_{\infty 0}$ при полете с использованием гравитационного поля Юпитера. Если же прямой полет реализовать при минимальном $V_{\infty 0}=0,39 V_{\oplus}$ (близком к $V_{\infty 0}$ при полете с облетом Юпитера), то время полета увеличится почти на 17 лет.

На рис. 9.4.13 изображена проекция на плоскость эклиптики межпланетной траектории полета к Нептуну с облетом Юпитера при старте 10 ноября 1979 г. $V_{\infty 0}=0,37 V_{\oplus}$ и $\Delta t=8$ лет. В табл. 9.6 даны соответствующие этой траектории оптимальные значения

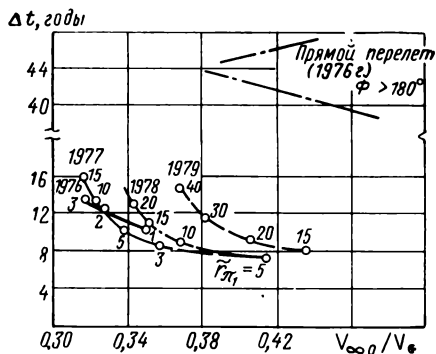


Рис. 9.4.14. Зависимость времени полета от гиперболического избытка скорости орбиты отрыва при маршруте Земля—Юпитер—Плутон

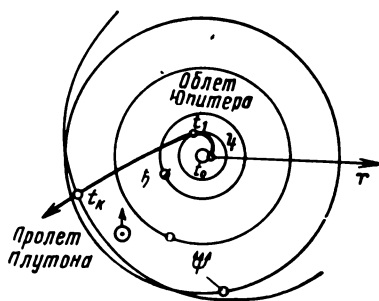


Рис. 9.4.15. Межпланетная траектория полета к Плутону с облетом Юпитера;

t_0 — январь 1977 г.; $V_{\infty 0}=0,34 V_{\oplus}$

основных проектных параметров разгонного модуля n_0 и μ_k . Следующие оптимальные даты старта возможны только в 1992—1993 гг.

(Земля) — Юпитер — Плутон. Баллистические характеристики межпланетной траектории полета к Плутону с использованием гравитационного поля Юпитера изображены на рис. 9.4.14 [73]. Видно, что 1977—1978 гг. — наиболее приемлемые для старта, когда можно добиться относительно малого времени полета при относительно низких значениях $V_{\infty 0}$ и удобных $\tilde{r}_{\pi 1}$. Так, в 1977 г. при $V_{\infty 0}=0,34 V_{\oplus}$ можно реализовать полет к Плутону с облетом Юпитера при $\tilde{r}_{\pi 1}=5$ и $\Delta t=10$ лет.

При прямом полете — оптимальная дата старта в 1976 г. — баллистические характеристики намного ухудшаются: в случае полета с минимальным значением $V_{\infty 0}=0,38 V_{\oplus}$ имеем $\Delta t=44$ года, а полет с минимальным временем $\Delta t=38$ лет возможен при $V_{\infty 0}=0,48 V_{\oplus}$.

На рис. 9.4.15 показана проекция на плоскость эклиптики межпланетной траектории полета к Плутону с облетом Юпи-

тера при старте в 1977 г. и $V_{\infty 0} = 0,34 V_{\odot}$. В момент пролета межпланетного аппарата Плутон будет находиться в перигелии своей орбиты, имеющей $R_{\pi} = 30$ а. е. В этом можно найти причину относительно низких энергозатрат для полета на Плутон.

В табл. 9.6 даны соответствующие этой траектории полета оптимальные значения основных проектных параметров разгонного модуля n_0 и μ_k . Следующие оптимальные даты старта возможны только в 1989—1990 гг.

Трехпланетная схема полета

Для выявления возможностей снижения энергозатрат и времени полета к самым дальним планетам Солнечной системы — Нептуну и Плутону — интересно рассмотреть трехпланетные схемы полета по маршрутам (Земля) — Юпитер — Сатурн — Плутон* и (Земля) — Юпитер — Уран — Нептун. На рис. 9.4.16

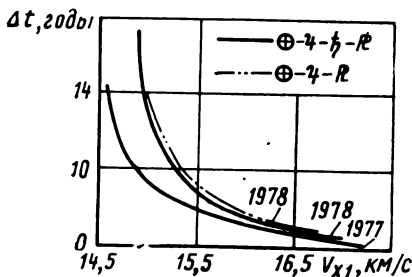


Рис. 9.4.16. Зависимость времени полета к Плутону от характеристической скорости старта при различных схемах полета

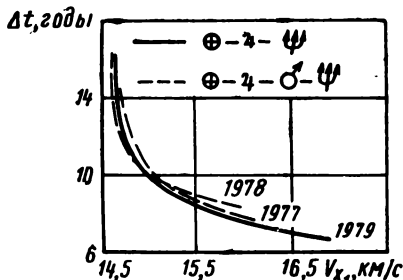


Рис. 9.4.17. Зависимость времени полета к Нептуну от характеристической скорости старта при различных схемах полета

и 9.4.17 приведены соотношения между минимальной характеристической скоростью старта и продолжительностью перелетов по указанным маршрутам [75]. Видно, что баллистические характеристики двух- и трехпланетных схем полета довольно близки. Близость энергозатрат объясняется тем, что первой планетой облета на каждом маршруте является Юпитер, а требования к энергетике определяются главным образом перелетом Земля — Юпитер. Близость значений времени полета означает, что главным фактором, определяющим время перелета, является гелиоцентрическое расстояние конечной планеты назначения, число же промежуточных планет облета не имеет существенного значения. Следует также заметить, что времена полета к Нептуну и Плутону довольно близки вследствие одинаковости их гелиоцентри-

* Вариант схемы полета по программе, которая получила название «Большой тур».

ческих расстояний в 1980 и 1990 гг., когда ожидается пролет КЛА*.

Благоприятный период запуска для маршрута Земля — Юпитер — Сатурн — Плутон приходится на 1977—1978 гг., а для маршрута Земля — Юпитер — Уран — Нептун — на 1978—1980 гг. Следующий благоприятный период будет приходиться только на 2076—2077 и на 2155—2156 гг. соответственно. В этом одна из опасностей в планировании трехпланетных схем пролета, а другая — в большей по сравнению с двухпланетной схемой пролета чувствительности номинальной траектории к отклонениям. Кроме того, при маршруте полета Земля — Юпитер — Сатурн — Плутон хотя КЛА и не пересекает кольцо Сатурна, создаются неблагоприятные условия для наблюдения Сатурна. Поэтому целесообразность планирования трехпланетных схем пролета пока сомнительна.

Четырехпланетная схема пролета

Межпланетная траектория полета с маршрутом Земля — Юпитер — Сатурн — Уран — Нептун** привлекает особое внимание возможностью с помощью небольшого числа межпланетных аппаратов решить некоторые фундаментальные научные проблемы по исследованию внешних планет и удаленных районов Солнечной системы. Ее уникальность (поскольку следующий благоприятный период наступит только через 180 лет) предъявляет особые требования к анализу проектно-баллистических характеристик межпланетного аппарата, предназначенного для такого ответственного полета. Все аспекты проекта из-за отсутствия достоверной информации о внешних планетах пока еще трудно представить. Ограничения на выбор межпланетной траектории, которые будут диктоваться условиями околопланетного пространства, могут заметно повлиять на энергетику и время перелета. Однако, основываясь на существующей информации о внешних планетах, уже можно выявить рациональные межпланетные траектории полета операции «Большой тур». Рассмотрим некоторые ее особенности.

Так как операция «Большой тур» может быть реализована только при строго определенном положении внешних планет относительно друг друга, то благоприятные периоды для запуска КЛА весьма редки. Периодичность благоприятных возможностей для запусков определяется главным образом синодическим периодом Урана и Нептуна (171,4 года) и следует с интервалом примерно 13 мес с 1976 по 1979 гг. При запусках после 1979 г. требования к энергетике становятся чрезмерно высокими, так как облет Юпитера вследствие его положения уже не дает долж-

* Это связано с тем, что во время пролета межпланетного аппарата Плутон будет находиться вблизи перигелия своей орбиты.

** Вариант схемы полета по программе «Большой тур».

ного эффекта. Для схем облета нескольких планет существует некоторая граница энергозатрат, превышение которой не приводит к дальнейшему сокращению времени. Это ограничение вызывается кинематикой схем облета планет. Для облета нескольких планет траектория должна «отражаться» под некоторым углом от каждой промежуточной планеты (рис. 9.4.18). Однако реализовать схему облета планет при больших углах отражения практически невозможно, поскольку для этого требуются слишком малые высоты перигентра планетоцентрической орбиты облета, достигнуть которых не позволяет атмосфера планет. Следовательно, потребные времена полета ограничены снизу минимально допустимыми высотами перигентра орбиты облета. Сказанное подтверждается результатами расчетов. На рис. 9.4.19 и 9.4.20 изображены зависимость времени полета от номинальной даты старта при различных значениях энергии запуска $h_{ук}$ и условной высоты перигентра H_{π} орбиты облета соответственно.

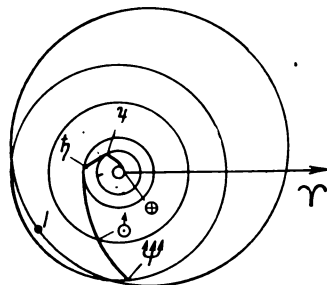


Рис. 9.4.18. Четырехпланетная схема облета

Для реализации операции «Большой тур» наиболее критической планетой является Сатурн. Во-первых, наименьшая продол-

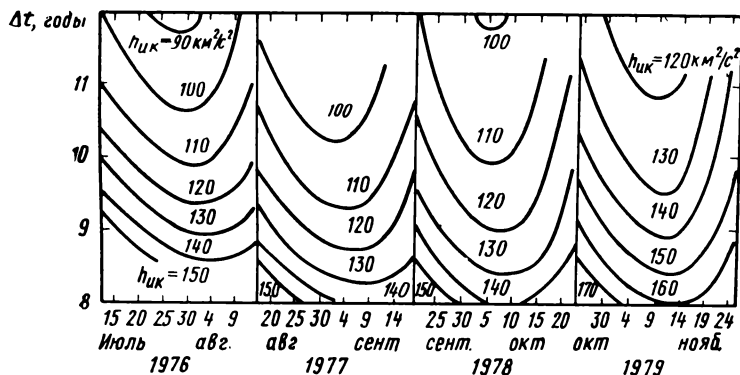


Рис. 9.4.19. Зависимость продолжительности операции «Большой тур» от даты старта (для 1976—1979 гг.) и энергии запуска

жительность операции прямо связана с наибольшим сближением КЛА с Сатурном. Во-вторых, возникают дополнительные ограничения на выбор радиуса орбиты облета из-за существования колец Сатурна, встречи с которым следует избегать. Ориентация Сатурна и его колец в предполагаемый период

облета (1979—1983 гг.) допускает его облет КЛА как с внешней стороны колец, так и между внутренней стороной колец и поверхностью планеты. Правда, продолжительность всей операции при облете с внешней стороны колец увеличивается на 2 года по сравнению с облетом по внутренней стороне колец Сатурна.

Баллистические характеристики межпланетной траектории полета операции «Большой тур» приведены на рис. 9.4.21 в за-

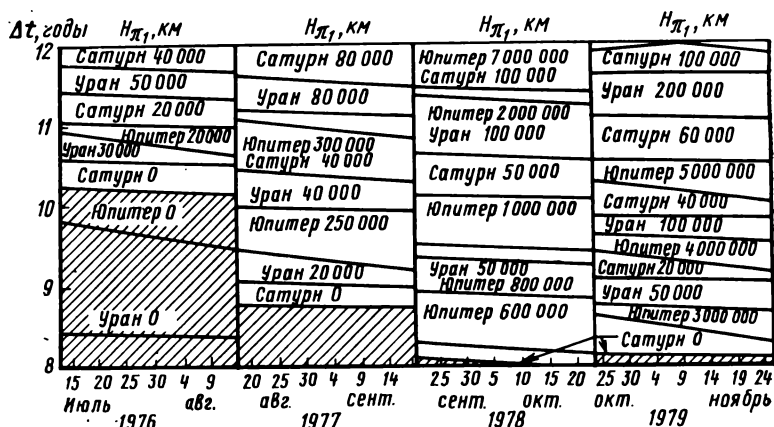


Рис. 9.4.20. Влияние условной высоты перицентра $H_{\pi 1}$ планетоцентрической орбиты облета на продолжительность операции «Большой тур» (нереализуемые траектории в заштрихованной области)

висимости от радиуса перицентра планетоцентрической орбиты облета Сатурна $\tilde{r}_{\pi \zeta}$. Анализ приведенных зависимостей позволяет выработать определенные рекомендации по выбору номинальной межпланетной траекторий полета операции «Большой тур». Во-первых, научная ценность операции будет во многом зависеть от близости прохождения КЛА около каждой планеты облета. Во-вторых, траектории, соответствующие расстояниям в перицентре орбит облета Сатурна, равным $\tilde{r}_{\pi \zeta} = 1,2 \div 2,4$ радиусов планеты, следует сразу исключить, поскольку это пространство занимает кольцо Сатурна. Учитывая эти замечания, к наиболее приемлемым межпланетным траекториям полета операции «Большой тур» можно отнести траектории со следующими датами запуска: 1976 ($\tilde{r}_{\pi \zeta} = 2,4$); 1977 ($\tilde{r}_{\pi \zeta} = 1,2$); 1977 ($\tilde{r}_{\pi \zeta} = 2,4$) и 1978 гг. ($\tilde{r}_{\pi \zeta} = 1,2$). Однако, принимая во внимание затраты топлива, время и определенный риск, связанный с облетом Сатурна по внутренней стороне колец, в качестве номинальной предпочтительнее межпланетная траектория, характеризующаяся запуском в 1977 г. и облетом Сатурна по внешней стороне

кольца. Проектно-баллистические характеристики соответствующего межпланетного аппарата представлены в табл. 9.7*.

Выполнение операции «Большой тур» предъявляет высокие требования к точности реализации межпланетной траектории. Ошибка по положению в несколько километров при облете одной

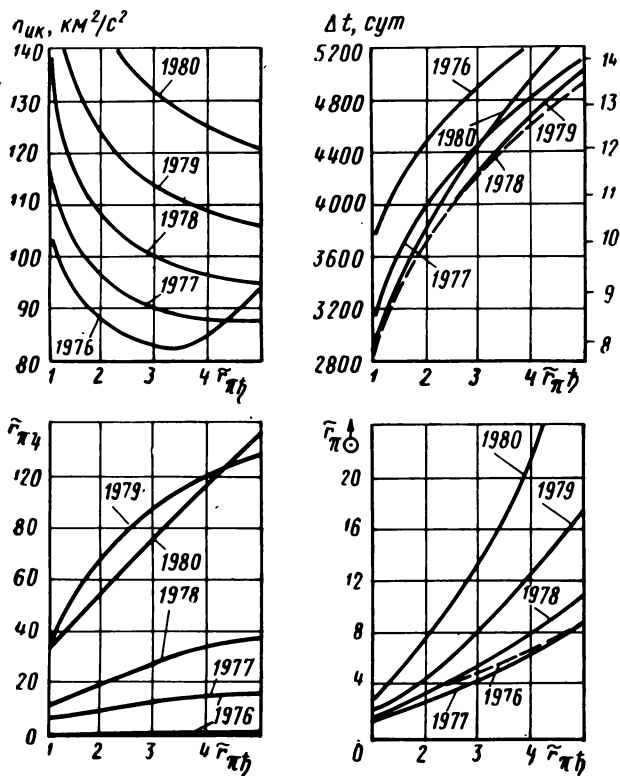


Рис. 9.4.21. Баллистические характеристики межпланетной траектории полета операции «Большой тур» в зависимости от относительного радиуса перигея орбиты облета Сатурна

планеты может привести к ошибкам в тысячи километров при достижении другой планеты. Успех операции «Большой тур» во многом будет определяться правильным определением точек приложения и величин корректирующих импульсов, которые зависят от чувствительности номинальной траектории к ошибкам в начальных условиях гелиоцентрических участков и планетоцентрических орбит облета планет. Главными источниками оши-

* См. «Проект беспилотного автоматического аппарата для операции Grand Tour», А. Р., 1970, № 14, реф. 187—188.

Таблица 9.7

Проектно-баллистические характеристики операции „Большой тур“

Характеристика	Участок перелета			
	Земля—Юпитер	Юпитер—Сатурн	Сатурн—Уран	Уран—Нептун
Дата старта	1 сентября 1977 г.	—	—	—
Тяговоруженность n_o^{opt} ($\gamma_{д.у}=0,05$, $P_{уд}=450$ с)	0,38	—	—	—
Относительный конечный вес μ_k^{opt}	0,206	—	—	—
Гиперболический избыток скорости при выходе из сферы действия планеты в км/с	$V_{\infty 0}=9,5$	$V_{\infty 2}^{\downarrow}=8,1$	$V_{\infty 2}^{\downarrow}=11,3$	$V_{\infty 2}^{\uparrow}=15,4$
Склонение цели при выходе из сферы действия планеты в град	$\delta_0=30$	$\delta_2^{\downarrow}=5,9$	$\delta_2^{\downarrow}=-28,4$	$\delta_2^{\uparrow}=-51,8$
Прямое восхождение при выходе из сферы действия планеты в град	$\alpha_0=64,9$	$\alpha_2^{\downarrow}=55,7$	$\alpha_2^{\downarrow}=288,9$	$\delta_2^{\uparrow}=4,5$
Гиперболический избыток скорости орбиты прибытия в км/с	$V_{\infty 1}^{\downarrow}=8,1$	$V_{\infty 1}^{\downarrow}=11,3$	$V_{\infty 1}^{\uparrow}=15,4$	$V_{\infty 1}^{\uparrow}=17,4$
Склонение цели при входе в сферу действия планеты в град	$\delta_1^{\downarrow}=-4,8$	$\delta_1^{\downarrow}=-9,6$	$\delta_1^{\uparrow}=-72,7$	$\delta_1^{\uparrow}=29,7$
Прямое восхождение при входе в сферу действия планеты в град	$\alpha_1^{\downarrow}=318,0$	$\alpha_1^{\downarrow}=200$	$\delta_1^{\uparrow}=31$	$\alpha_1^{\uparrow}=109$
Радиус перицентра орбиты облета в км	$r_{\pi 1}^{\downarrow}=63500$	$r_{\pi 1}^{\downarrow}=144000$	$r_{\pi 1}^{\uparrow}=98600$	—
Угол наклонения орбиты облета к плоскости экватора планеты в град	$i^{\downarrow}=17,2$	$i^{\downarrow}=29,3$	$i^{\uparrow}=101,8$	—
Параметр промаха b в км	$1,7 \cdot 10^6$	$3,3 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	—
Угловой параметр промаха ψ в град	5,2	-27,7	-133,5	—
Угол поворота вектора гиперболического избытка скорости при облете в град	98	84	24	—
Дата выхода из сферы действия планеты	2.IX 1977	28.VIII 1979	9.IX 1981	6.XII 1985

Характеристика	Участок перелета			
	Земля—Юпитер	Юпитер—Сатурн	Сатурн—Уран	Уран—Нептун
Дата входа в сферу действия планеты	4.V 1979	16.VI 1981	21.IX 1985	20.II 1989
Дата прохождения перицентра орбиты облета	I.VII 1979	29.VII 1981	30.X 1985	—
Угол наклонения плоскости орбиты перелета относительно плоскости эклиптики i_0 в град	2,1	2,6	2,7	2,5
Угловая дальность участка перелета Φ в град	158,1	54,4	66,8	22,8
Радиус перигелия орбиты перелета $R_{\pi\odot}$ в а. е.	1,01	5,0	9,6	14,6
Радиус афелия орбиты перелета $R_{a\odot}$ в а. е.	6,5	Гипербола		
Эксцентриситет орбиты участка перелета e	0,73	1,4	3,71	6,35
Время полета на участке Δt_{Π} в сут	668	759	1554	1210
Суммарное время полета до планеты Δt_{Σ} в сут	668	1427	2981	4191

бок являются неточность выведения КЛА на номинальную траекторию, неточность реализации корректирующих маневров и определения фактической траектории.

Для планетоцентрических участков облета планет ошибки в определении траектории могут привести к нарушению плана полета или к резкому возрастанию требований к коррекциям. Ошибки при определении траектории на участках сближения с планетами складываются из ошибок слежения и неточного знания эфемерид облетаемых планет. По оценке перспектив уточнения эфемерид планет к концу 1970-х гг. небесные долготы и широты внешних планет будут определяться с точностью до 0,2 с. На расстоянии Урана (около 19 а. е.) эта угловая неопределенность эквивалентна ошибке в расстоянии около 3000 км. Если не выявить и не скорректировать эту ошибку на участке сближения с Ураном, то такая ошибка приведет к промаху при облете Нептуна около миллиона километров. Выбирать оптимальную схему управления траекторией КЛА необходимо при тщательном исследовании возможностей доплеровской аппаратуры слежения, методов определения дальности, навигации по звездам и т. п. в их связи с проектно-баллистическими характеристиками КЛА. При рассмотрении вопросов проектирования КЛА следует

использовать улучшенные оценки параметров траектории, что позволяет принять потребную характеристическую скорость на реализацию маневров коррекции 250 м/с.

**Влияние галилеевых спутников
на гелиоцентрические участки
после пролета Юпитера**

Галилеевы спутники Юпитера: Ио ($\frac{m}{m_{\oplus}} = 0,012$ и $\frac{R}{R_{\oplus}} = 0,255$), Европа ($\frac{m}{m_{\oplus}} = 0,0079$ и $\frac{R}{R_{\oplus}} = 0,226$), Ганимед ($\frac{m}{m_{\oplus}} = 0,026$ и $\frac{R}{R_{\oplus}} = 0,394$) и Каллисто ($\frac{m}{m_{\oplus}} = 0,016$ и $\frac{R}{R_{\oplus}} = 0,35$) являются весьма значительными объектами Солнечной системы. Поэтому их влияние может проявиться на оценке результатов исследова-

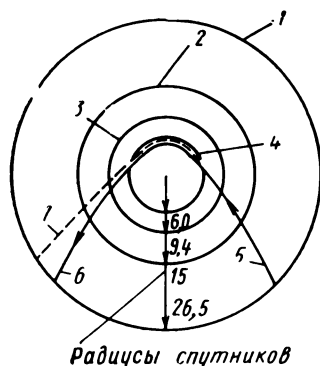


Рис. 9. 4. 22. Типичная схема сближения КЛА с Юпитером и расположение галилеевых спутников:

1—орбита Каллисто; 2—орбита Ганимеда; 3—орбита Европы; 4—орбита Ио; 5—траектория подхода к планете; 6—невозмущенная траектория; 7—возмущенная траектория

ния баллистических характеристик межпланетных полетов КЛА с использованием гравитационного поля Юпитера. На рис. 9. 4. 22 изображена типичная схема сближения КЛА с Юпитером и расположение орбит галилеевых спутников.

Анализ межпланетных траекторий полета, проведенный в работе [67], показал заметное влияние возмущающего действия галилеевых спутников на пролет КЛА около Юпитера, если требуется с помощью КЛА достигнуть определенной точки пространства. Поэтому гелиоцентрический участок полета к внешним планетам после пролета Юпитера может значительно отличаться от расчетного, если не учитывается возмущающее действие галилеевых спутников. Для любых других полетов, цель которых заключается лишь в преодолении определенных расстояний или достижении больших наклонений к плоскости эклиптики и т. д., возмущающим действием галилеевых спутников можно пренебречь.

Такой вывод хорошо иллюстрируется табл. 9. 8 [67]. Результаты влияния возмущающего действия галилеевых спутников на

Таблица 9.8

Влияние возмущающего действия галилеевых спутников Юпитера на элементы
гелиоцентрической орбиты

№ по пор.	Прицельная дальность	Время полета	ψ	Δe	Δa	Δi	$\Delta \Omega$	$\Delta \omega$	ΔR	ΔV	град		км/с	км	Суммарное отклонение положения на выходе из грависферы	км/с	Суммарное отклонение скорости на выходе из грависферы	сут		Разность времени нахождения в грависфере	Разность времени достижения расстояния в 10 а. е.	Листания полета вне плоскости эклиптики	а. е.	Расстояние ближайшего подхода к Солнцу
											град	км						км/с	км					
1	1,25 · 10 ⁶	450	0	0,0001	310000	0,01	0	0,560	0,52	100000	0,027	107000	0,0317	0,001	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	1,25 · 10 ⁶	450	90	0,0033	713000	0,086	0,135	0,081	0,20	50000	0,024	110000	0,0358	0,002	2,84	0,590 0,008	—	—	—	—	—	—	—	—
3	1,25 · 10 ⁶	450	180	0,0056	2510000	0,001	0,148	0,004	0,16	40000	0,020	122000	0,0375	0,006	0,18	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	1,25 · 10 ⁶	450	270	0,0036	10470000	0,089	0,141	0,040	0,12	40000	0,024	110000	0,0356	0,002	2,75	0,827 0,010	—	—	—	—	—	—	—	—
5	1,25 · 10 ⁶	500	0	0	540000	0,175	0	0,730	0,22	80000	0,189	76400	0,0194	0,004	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Попадание
6	1,25 · 10 ⁶	550	0	0,0013	1730000	0,046	0,021	0,155	0,33	370000	0,093	416800	0,0938	0,020	—	—	—	—	—	—	—	—	—	656000
7	1,0 · 10 ⁶	450	180	0,0081	2030000	0,001	0,182	0,0049	0,20	90000	0,026	176800	0,0546	0,004	0,06	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	1,5 · 10 ⁶	450	180	0,0040	2990000	0,001	0,127	0,0032	0,13	30000	0,016	92000	0,0276	0,005	0,21	—	—	—	—	—	—	—	—	—

элементы и параметры гелиоцентрического участка после пролета Юпитера в таблице представлены в виде разности между элементами и параметрами, рассчитанными с учетом возмущающего действия только Солнца и с учетом совместного возмущения от Солнца и галилеевых спутников. Интересно определить относительную величину приведенных изменений.

Во многих случаях Δa достигают больших величин. Однако размер a сам по себе является значительным. Поэтому относительная величина возмущений Δa не достигает более 4%. Возмущения остальных элементов гелиоцентрического участка не выходят из рамок обычных представлений.

Важным фактором является изменение величины радиуса-вектора. Поскольку КЛА в этой точке находится примерно на расстоянии 5 а. е. от Солнца, эти изменения в общем малы. Если же цель полета состоит в достижении какой-то определенной точки пространства, как, например, последующий полет к одной или нескольким полетам, то любые, даже малые отклонения должны быть тщательно учтены. В этой связи целесообразно рассмотреть общие отклонения скорости и положения КЛА в момент его выхода из грависферы Юпитера (планетоцентрическая система координат). Такие отклонения определены в табл. 9.8 (колонки 13 и 14) как корни квадратные из суммы квадратов изменения величин отдельных составляющих. Приведенные данные показывают, что в зависимости от типа рассматриваемого пролета могут быть наложены дополнительные требования на систему наведения на гелиоцентрическом участке траектории после контакта с Юпитером.

В табл. 9.8 также приведены данные о влиянии галилеевых спутников на параметры траекторий для схем полета, в которых точность наведения не играет существенной роли. В колонках 15 и 16 показана разность времени нахождения КЛА в грависфере Юпитера и разность времени достижения КЛА расстояния 10 а. е. от Солнца.

Для случаев 2 и 4 табл. 9.8 разность в расстояниях, которые КЛА может покрыть, двигаясь вне плоскости эклиптики, достигает заметных величин. Однако реально достижимые расстояния составляют по крайней мере 25 а. е. для обоих случаев, что говорит об относительно малом влиянии возмущений.

Влияние возмущающего действия галилеевых спутников на полет к Солнцу иллюстрируется случаями 5 и 6. В случае 5 траектория приводит к попаданию в Солнце независимо от того, учитывается влияние спутников или нет. В случае 6 влияние возмущений приводит к отклонению всего на $0,6 \cdot 10^6$ км. Поэтому в этой схеме полета, как и в предыдущих, влиянием возмущающего действия галилеевых спутников можно пренебречь, не внося существенной ошибки в параметры траектории полета к Солнцу.

§ 1. СПУСК С ОРБИТЫ ИСЗ

Схема полета по траектории спуска с орбиты показана на рис. 10.1.1. Траектории спуска с орбиты можно разбить на следующие участки:

1. Участок торможения — работа тормозной двигательной установки (ТДУ). На этом участке траектории скорость сни-

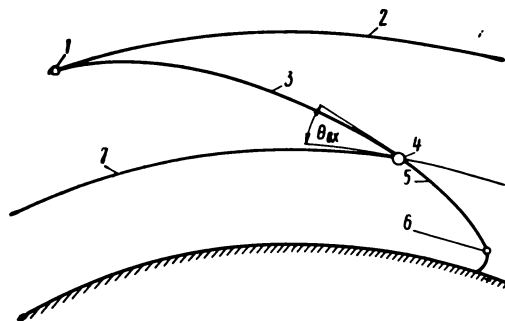


Рис. 10.1.1. Схема спуска с орбиты спутника;

1—торможение; 2—орбита спутника; 3—переходной эллипс; 4—вход в атмосферу; 5—траектория спуска в атмосфере; 6—участок траектории приземления; 7—граница атмосферы

жается со скорости полета по орбите спутника V_0 до V_1 , необходимой для перехода на эллипс, пересекающий плотные слои атмосферы.

2. Переходной эллипс — участок пассивного полета практически в безвоздушном пространстве от момента конца работы ТДУ до входа в плотные слои атмосферы (за границу плотных слоев атмосферы в данной работе принята высота $h_0 = 100$ км).

3. Траектория спуска аппарата в атмосфере — основная часть траектории спуска, во время которой аппарат снижает свою скорость от близкой к первой космической до скорости установившегося падения или планирования. На этом участке аппарат подвергается действию высоких температур и перегрузок.

4. Участок приземления — включает в себя установившееся вертикальное снижение или планирование и непосредственно посадку аппарата.

Обычно высота орбиты спутника ограничивается снизу необходимым временем его существования. Для стационарных объектов на орбите (спутник-станция, сборка космических кораблей и пр.) за нижнюю границу высоты орбиты можно принять $h_{кр} \approx 200 \div 300$ км. Верхняя граница высоты орбиты обитаемых спутников выбирается из условия нахождения ее под радиационными поясами Земли и равна $h_{кр} \approx 500 \div 600$ км.

Торможение аппарата и полет по переходному эллипсу

Для определения параметров переходного эллипса необходимо знать характеристики движения аппарата в конце участка торможения.

Время торможения

$$t = \frac{\Delta V}{g_0 n}, \quad (10.1.1)$$

где ΔV — потеря скорости при торможении;

$$g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2;$$

$n = \frac{P}{G}$ — перегрузка при торможении.

В общем случае, когда тормозной импульс дается под углом α к вектору скорости на орбите, скорость в конце участка торможения

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 + \Delta V^2 - 2V_0\Delta V \cos \alpha} \approx V_0 - \Delta V \cos \alpha, \quad (10.1.2)$$

а угол наклона траектории к горизонту

$$\theta_1 = \theta_0 + \arctg \frac{\Delta V \sin \alpha}{V_0 - \Delta V \cos \alpha} \approx \theta_0 + \frac{\Delta V}{V_0} \sin \alpha, \quad (10.1.3)$$

где V_0 — скорость полета по орбите;

θ_0 — угол наклона траектории (орбиты) в момент дачи тормозного импульса.

Зная начальные параметры переходного эллипса (V_1 и θ_1), можно по известным соотношениям теории эллиптического движения определить характеристики траектории аппарата при входе в атмосферу ($V_{вх}$, $\theta_{вх}$, $L_{вх}$, $t_{вх}$).

Для практически интересного случая — спуск с круговой орбиты ($\theta_0=0$) при даче тормозного импульса под углом $\alpha=0$ — можно получить простые приближенные формулы.

Скорость входа в атмосферу $V_{\text{вх}}$ определится из интеграла энергий

$$V_1^2 - \frac{2\mu}{r_1} = V_{\text{вх}}^2 - \frac{2\mu}{r_{\text{вх}}},$$

где r_1 — радиус орбиты в точке дачи тормозного импульса;

$r_{\text{вх}}$ — радиус границы атмосферы;

μ — гравитационная постоянная.

Введем относительные величины скорости и высоты:

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_0} \quad \text{и} \quad \tilde{h} = \frac{h}{r_{\text{вх}}}, \quad (10.1.4)$$

где

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}.$$

После преобразования получим

$$\tilde{V}_{\text{вх}} = \sqrt{(1 - \Delta\tilde{V})^2 + 2\tilde{h}_a} \approx \sqrt{1 - 2(\Delta\tilde{V} - \tilde{h}_a)}, \quad (10.1.5)$$

где

$$\Delta\tilde{V} = \frac{\Delta V}{V_0} \quad \text{и} \quad \tilde{h}_a = \frac{r_1 - r_{\text{вх}}}{r_{\text{вх}}}.$$

Угол входа в атмосферу определится из закона сохранения кинетического момента:

$$\cos \theta_1 r_1 V_1 = \cos \theta_{\text{вх}} r_{\text{вх}} V_{\text{вх}}$$

или для нашего случая $\theta_1=0$

$$\cos \theta_{\text{вх}} = \frac{r_1}{r_{\text{вх}}} \frac{V_1}{V_{\text{вх}}}.$$

Так как угол входа обычно мал, то удобнее рассчитывать не $\cos \theta_{\text{вх}}$, а $\sin \theta_{\text{вх}}$:

$$\sin^2 \theta_{\text{вх}} = 1 - \left(\frac{r_1}{r_{\text{вх}}} \frac{V_1}{V_{\text{вх}}} \right)^2.$$

После преобразований и введения относительных величин получим

$$\sin^2 \theta_{\text{вх}} = \frac{\tilde{h}_a (4\Delta\tilde{V} - \tilde{h}_a) - \Delta\tilde{V} \tilde{h}_a [\tilde{h}_a \Delta\tilde{V} + 2(\Delta\tilde{V} - \tilde{h}_a)]}{1 - 2(\Delta\tilde{V} - \tilde{h}_a) + \Delta\tilde{V}^2}$$

или

$$\theta_{\text{вх}} \approx \sqrt{\frac{\tilde{h}_a (4\Delta\tilde{V} - \tilde{h}_a)}{1 - 2(\Delta\tilde{V} - \tilde{h}_a)}} \approx \sqrt{\tilde{h}_a (4\Delta\tilde{V} - \tilde{h}_a)}. \quad (10.1.6)$$

Дальность полета по переходному эллипсу можно получить из уравнения эллиптической траектории

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

где $p = rk \cos \theta$ — параметр эллипса $\left(k = \frac{rV^2}{\mu}\right)$;

$e = 1 - k$ — эксцентриситет эллипса;

v — истинная аномалия (отсчитывается от перигея).

В нашем случае $\theta_1 = 0$ и $v_1 \approx 2\pi$ (тормозной импульс в апогее).
Дальность полета по переходному эллипсу

$$L = R\beta = R(2\pi - v_{\text{вх}}), \quad (10.1.7)$$

где β — угловая дальность; R — радиус планеты.

Истинная аномалия точки входа в атмосферу

$$\cos v_{\text{вх}} = \frac{\tilde{h}_a (1 - \Delta\tilde{V})^2}{\Delta\tilde{V} (2 - \Delta\tilde{V})} - 1. \quad (10.1.8)$$

Полученные формулы в относительных величинах скорости $\tilde{V}$ и высоты орбиты над границей атмосферы $\tilde{h}_a$ годны для любых планет.

Траектории полета в атмосфере

С высоты $h \approx 100$ км начинаются заметный нагрев и торможение аппарата в атмосфере. На аппарат, летящий в атмосфере

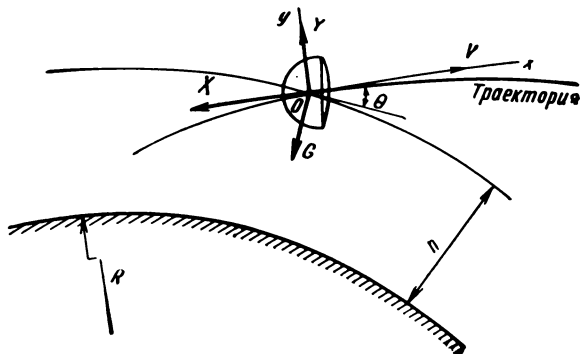


Рис. 10.1.2. Схема сил, действующих на спускаемый аппарат

на высоте со скоростью V , действуют следующие внешние силы (рис. 10.1.2): сила лобового сопротивления X , направленная по касательной к траектории в сторону, обратную направлению полета, подъемная сила Y по направлению, перпендикулярному

к траектории, и сила тяжести G по направлению местной вертикали. Эти силы уравниваются силами инерции. Спроектируем эти силы на скоростные оси x и y . Сумма проекций всех сил на ось x

$$-m \frac{dV}{dt} - X - G \sin \theta = 0,$$

где $m = \frac{G_0}{g_0}$ — масса аппарата (G_0 и g_0 — вес и ускорение силы тяжести при $h=0$);
 t — время полета;
 θ — угол наклона траектории к горизонту;
 G — вес аппарата.

Сумма проекций на ось y

$$-m \frac{V^2}{r_{кр}} - G \cos \theta + Y = 0,$$

где $r_{кр}$ — радиус кривизны траектории.

Заменим

$$\frac{V^2}{r_{кр}} = \frac{\omega r_{кр} V}{r_{кр}} = \omega V,$$

где $\omega = \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\beta}{dt}$ — угловая скорость вращения вектора скорости относительно Земли: $\frac{d\beta}{dt} = \frac{V \cos \theta}{R + h}$, а β — центральный угол, проходимый аппаратом от момента входа в атмосферу (угловая дальность полета).

После преобразований получим следующую систему уравнений, описывающую плоское движение аппарата при спуске в атмосфере:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -g_0 \frac{qV^2}{2p_x} - g \sin \theta; \\ V \frac{d\theta}{dt} = g_0 \frac{qV^2}{2p_y} - g \cos \theta + \frac{V^2}{R+h} \cos \theta; \\ \frac{dh}{dt} = V \sin \theta; \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{V \cos \theta}{R+h}, \end{cases} \quad (10.1.9)$$

где $p_x = \frac{m}{c_x S}$ — удельная нагрузка на „лоб“ в кг/м²; а $p_y = \frac{m}{c_y S}$;

S — характерная площадь, к которой относятся аэродинамические коэффициенты c_x и c_y ;

$g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$ — местное ускорение силы тяжести.

Система уравнений в общем виде нелинейна и решается численным интегрированием методом Рунге — Кутты на ЭЦВМ.

Рассмотрим довольно близкий к реальному случаю класс траекторий спуска при постоянных значениях нагрузки на лоб p_x и аэродинамического качества $K = \frac{p_x}{p_y}$, т. е. траектории с $p_x = \text{const}$ и $p_y = \text{const}$.

Основная часть траекторий спуска (т. е. та часть, где имеет место аэродинамический нагрев и действуют перегрузки) лежит в области гиперзвукового полета ($M > 3 \div 5$), где аэродинамические характеристики почти не зависят от числа M . Поэтому

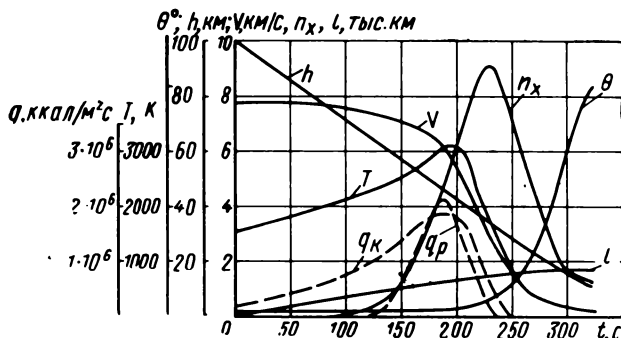


Рис. 10.1.3. Траектория баллистического спуска с орбиты ИСЗ при $K=0$; $p_x=650 \text{ кг/см}^2$; $V_{вх}=7,8 \text{ км/с}$; $\theta_{вх}=-2^\circ$

условиям $p_x = \text{const}$ и $p_y = \text{const}$ соответствует спуск аппарата с постоянным углом атаки, т. е. наиболее реальный с точки зрения управления аппаратом. В частности, эти режимы охватывают и баллистический спуск ($K=0$).

На рис. 10.1.3 приведены характеристики траектории баллистического спуска для аппарата, входящего в атмосферу Земли со скоростью $V_{вх}=7,8 \text{ км/с}$ под углом к горизонту $\theta_{вх}=-2^\circ$.

С высоты $h \approx 70 \text{ км}$ начинается интенсивное торможение аппарата. Максимальные осевые перегрузки достигают $n_x=9$ при $h \approx 35 \text{ км}$. Следует отметить, что зона наиболее интенсивного торможения аппарата лежит в относительно узком диапазоне высот $20 < h < 50 \text{ км}$. Пик перегрузок ($n_x \approx 9$) длится примерно 10 с, однако общее время действия больших перегрузок ($n_x > 4$) составляет относительно длительный период $\Delta t \approx 100 \text{ с}$.

Уже при входе в атмосферу ($h=100 \text{ км}$) температура (на рис. 10.1.3 и далее приведены расчетные значения температуры в критической точке сферы $R=1 \text{ м}$ для абсолютно теплоизолированной стенки) составляет $T=1500 \text{ К}$. «Пик» температур $T_{\max} \approx 3000 \text{ К}$ достигается на $h \approx 45 \text{ км}$. Характерно, что пик тем-

температур всегда опережает пик перегрузок. Область высоких температур $T > 1000$ К простирается до $h = 30$ км.

Нагрев аппарата при спуске в атмосферу происходит за счет как конвективных q_k , так и радиационных (лучистых) тепловых потоков q_p от раскаленного газа за ударной волной. В зоне максимума температур конвективные и радиационные потоки примерно одинаковы (напомним, что речь идет о критической точке сферы с $R = 1$ м).

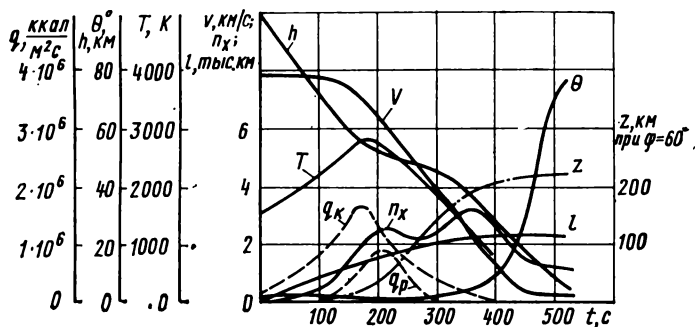


Рис. 10.1.4. Траектория планирующего спуска с орбиты ИСЗ при $\theta_{вх} = -2^\circ$, $K = 0,2$, $\rho_x = 650$ кг/м³, $V_{вх} = 7,8$ км/с

Угол наклона траектории длительное время почти постоянен, и лишь при $h < 40$ км начинается его резкое нарастание. Общая дальность полета в атмосфере $L = 1750$ км. Время полета до $h = 10$ км равно $t \approx 5,5$ мин.

Траектория планирующего спуска при аэродинамическом качестве аппарата $K = 0,2$ приведена на рис. 10.1.4. В отличие от траектории баллистического спуска существенно уменьшаются максимальные перегрузки, а также несколько снижается максимальная температура. Заметно снижаются «пиковые» значения радиационных потоков q_p . Характерным является рикошетирующий характер траектории с двумя максимумами перегрузок и увеличение дальности и времени полета.

Рассмотрим влияние различных параметров на характеристики траектории спуска. На рис. 10.1.5 показано влияние аэродинамического качества аппарата и угла входа в атмосферу на максимальные перегрузки и дальность полета.

Наличие подъемной силы, т. е. переход от аппарата баллистического спуска к аппаратам планирующего спуска, является одним из радикальных способов снижения перегрузок. Существенное снижение максимальных перегрузок до $n_{max} = 3 \div 4$, т. е. до таких, которые человек может выдерживать достаточно длительное время без каких-либо последствий, можно получить при сравнительно невысоком аэродинамическом качестве, $K \approx 0,2$.

Следует отметить, что перегрузки наиболее интенсивно падают при $K \leq 0,2 \div 0,3$.

Снижение перегрузок при наличии подъемных сил объясняется тем, что у планирующего аппарата траектория идет выше, чем у баллистического аппарата, и торможение его происходит слабее (растягивается на большее время). Это особенно заметно при сопоставлении траекторий рис. 10.1.3 и 10.1.4. С увеличением угла входа $\theta_{вх}$ максимальные перегрузки увеличиваются

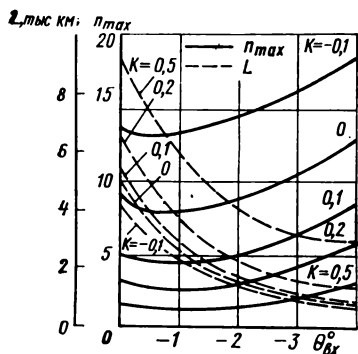


Рис. 10.1.5. Влияние угла входа $\theta_{вх}$ на перегрузки n_{max} и дальность полета в атмосфере L при $p_x = 650 \text{ кг/м}^2$, $V_{вх} = 7,8 \text{ км/с}$

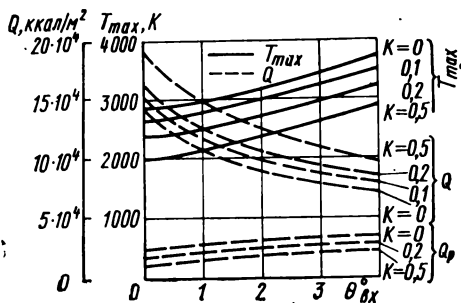


Рис. 10.1.6. Влияние угла входа $\theta_{вх}$ на температуру T_{max} и интегральные тепловые потоки Q при $p_x = 650 \text{ кг/м}^2$, $V_{вх} = 7,8 \text{ км/с}$

(см. рис. 10.1.5). Это объясняется тем, что при крутом входе аппарат по инерции «зарывается» в плотные слои атмосферы, где он интенсивно тормозится. Минимальным значениям перегрузок соответствует угол входа $\theta_{вх} = -0 \div -2^\circ$. Дальность полета, как этого и следовало ожидать, возрастает при увеличении аэродинамического качества аппарата. При увеличении угла входа в атмосферу существенно уменьшается дальность полета.

Влияние аэродинамического качества K и угла входа $\theta_{вх}$ на максимальную температуру T_{max} (в критической точке теплоизолированной сферы $R = 1 \text{ м}$) и на интегральные по времени тепловые потоки Q (в той же точке)* показано на рис. 10.1.6. При увеличении аэродинамического качества несколько снижается максимальная температура T_{max} , но увеличивается интегральный по времени тепловой поток Q . Снижение температуры объясняется торможением планирующего аппарата в более разреженных по сравнению с баллистическим аппаратом слоях атмосферы. Увеличение интегральных тепловых потоков объясняется

$$* Q = \int_0^{t_k} q dt, \text{ где } q \text{ — местные тепловые потоки в ккал/м}^2.$$

увеличением времени полета (за счет конвективных потоков). С увеличением аэродинамического качества заметно уменьшаются интегральные радиационные потоки Q_p . При увеличении угла входа $\theta_{вх}$ возрастает максимальная температура, но существенно снижаются интегральные теплотокки.

Знание максимальной температуры T_{max} позволяет оценить термостойкость материала теплозащиты (в случае теплозащиты без сублимации). Величина интегральных тепловых потоков Q определяет вес сублимирующей части теплозащиты. Поэтому эти величины могут служить в какой-то степени критериями оценки траекторий.

Анализируя приведенное выше, можно выбрать более или менее удовлетворительные значения угла входа $\theta_{вх}$ для аппарата баллистического спуска. Обеспечение минимальных перегрузок ограничивает величину $\theta_{вх} \leq -2^\circ \div 2,5^\circ$. Максимальная температура, по-видимому, не влияет на выбор траектории при сублимирующей теплозащите (температура при баллистическом спуске достаточно высока при реальных значениях $p_x = 300 \div 500 \text{ кг/м}^2$, чтобы говорить об теплозащите без уноса).

Однако для уменьшения веса теплозащиты желательно иметь меньшие интегральные тепловые потоки Q , т. е. переходить на большие углы входа, которые следует брать по верхнему пределу из условия перегрузок. Большие углы входа желательны также для уменьшения рассеивания точки приземления из-за возможных ошибок угла входа, так как с ростом угла входа уменьшаются дальность полета и производная $\frac{\partial L}{\partial \theta_{вх}}$ (см. рис. 10.1.5).

Считая уровень перегрузок $n = 3 \div 4$ приемлемым по условиям комфортабельности спуска, вряд ли имеет смысл увеличивать при планирующем спуске аэродинамическое качество более $K = 0,15 \div 0,25$, так как с ростом K увеличиваются интегральные потоки, а следовательно, и вес теплозащиты.

Рассмотрим влияние удельной нагрузки на лоб на основные характеристики траектории спуска (рис. 10.1.7 и 10.1.8).

Нагрузка на лоб p_x незначительно снижает максимальные перегрузки и дальность полета, но снижение p_x существенно уменьшает как максимальную температуру T , так и интеграль-

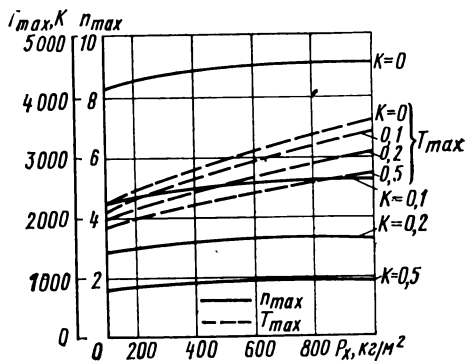


Рис. 10.1.7. Влияние нагрузки на лоб p_x на температуру T_{max} и перегрузки n_{max} при $\theta_{вх} = -2^\circ$; $V_{вх} = 7,8 \text{ км/с}$

ные тепловые потоки Q . Учитывая это, можно выявить требования к форме аппарата с минимальным весом теплозащиты.

Действительно, параметр $p_x = \frac{G}{c_x S}$. Обычно вес и размеры (а значит и мидель) аппарата заданы. Следовательно, аппарат

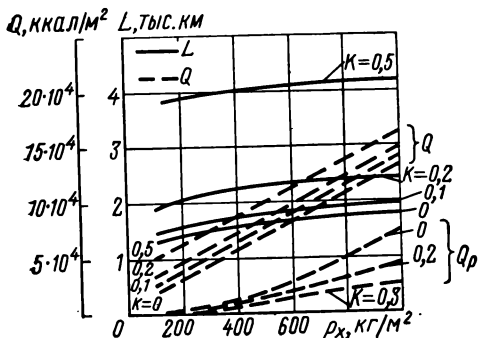


Рис. 10.1.8. Влияние нагрузки на лоб p_x на дальность полета L и интегральные тепловые потоки Q при $\theta_{вх} = -2$; $V_{вх} = 7,8$ км/с

с минимальным весом теплозащиты должен иметь такую форму, которая дает наибольший коэффициент лобового сопротивления c_x . В условиях гиперзвукового полета наибольшим c_x будет обладать тело с наиболее близкой к плоской лобовой частью (форма типа «фары» на рис. 10.1.2). Это справедливо для аппаратов как баллистического, так и планирующего спуска.

§ 2. СПУСК В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ

Траектории с большими углами входа в атмосферу

Рассмотрим вначале траектории при входе в атмосферу со второй космической скоростью при углах $\theta_{вх} = -15^\circ \div -90^\circ$. Характер изменения характеристик траектории такой же, как и при спуске с орбиты ИСЗ, однако процесс торможения протекает значительно быстрее. Характерным является почти постоянный угол наклона траектории к горизонту θ на основном участке траектории. Существенно больше, чем при спуске с орбиты, перегрузка n_x и минимальная температура T_{max} .

На рис. 10.2.1 показано влияние угла входа $\theta_{вх}$ и нагрузки на лоб p_x на максимальную перегрузку n_{max} и дальность полета L . Максимальные перегрузки существенно снижаются при уменьшении угла входа в атмосферу, что объясняется увеличением длины пути торможения (рост дальности полета L). Нагрузка на лоб p_x практически не влияет на дальность полета L и перегрузки n_{max} . Разброс величин n_{max} при угле $\theta_{вх} = -90^\circ$ объясняется тем, что при разных p_x зона максимальных перегрузок падает на различные участки атмосферы с разными значениями градиента плотности (в расчетах использовалась стандартная атмосфера Земли). Так же как и при спуске с орбиты, увеличение угла входа приводит к увеличению максимальной температуры и снижению

интегральных тепловых потоков (рис. 10.2.2). Уменьшение нагрузки на лоб p_x снижает как температуру $T_{\max}$, так и интегральные тепловые потоки Q . При спуске со второй космической скоростью существенно возрастают радиационные тепловые потоки, доля которых составляет примерно 50% от общих интегральных тепловых потоков.

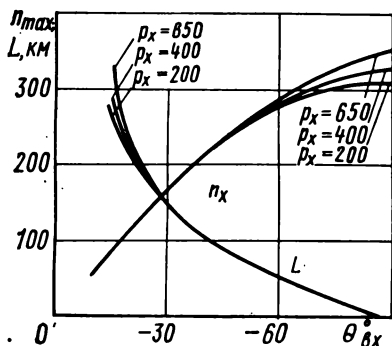


Рис. 10.2.1. Влияние угла входа $\theta_{вх}$ на перегрузки $n_{\max}$ и дальность полета L при $K=0$; $V_{вх}=11$ км/с

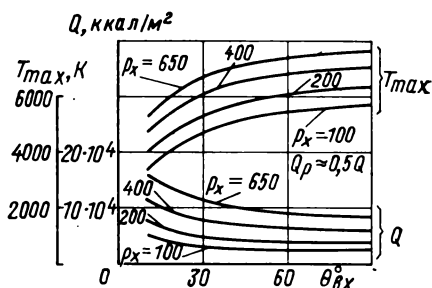


Рис. 10.2.2. Влияние угла входа $\theta_{вх}$ на температуру $T_{\max}$ и интегральные тепловые потоки Q при $K=0$ и $V_{вх}=11$ км/с

Пропорционально квадрату скорости возрастает перегрузка $n_{\max}$. Однако дальность полета L возрастает весьма незначительно (рис. 10.2.3). С увеличением скорости входа в атмосферу

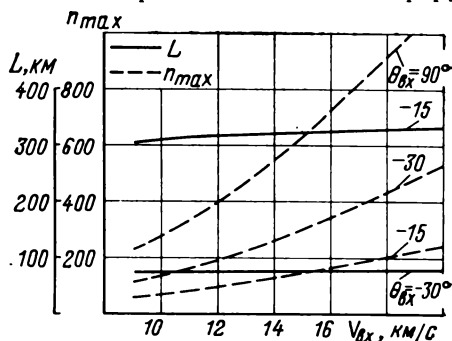


Рис. 10.2.3. Влияние скорости входа $V_{вх}$ на перегрузки $n_{\max}$ и дальность полета L при $K=0$; $\rho_x=400$ кг/м³

$V_{вх}$ существенно возрастают максимальная температура $T_{\max}$ и интегральные тепловые потоки Q (рис. 10.2.4). Из-за больших перегрузок $n_{\max}$ траектории с большими углами входа пригодны лишь для спуска автоматических аппаратов, возвращающихся с траекторий полета к планетам. Для случая баллистического спуска в атмосфере ($K=0$) при больших углах входа, когда на основной части траектории угол наклона $\theta \approx \theta_{вх} = \text{const}$, может быть получено аналитическое решение для основных характеристик траектории.

Для этого случая в первом уравнении системы (10.1.9) можно пренебречь членом $g \sin \theta$, так как он существенно меньше члена, определяемого сопротивлением. Таким образом, первое уравнение системы (10.1.9) можно записать в виде

$$\frac{dV}{dt} = -g_0 \frac{QV^2}{2\rho_x}. \quad (10.2.1)$$

Второе уравнение этой системы для этого случая ($\theta = \text{const}$, $K=0$) вообще теряет смысл.

Представим закон изменения плотности приближенной зависимостью (изотермическая атмосфера)

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta h}.$$

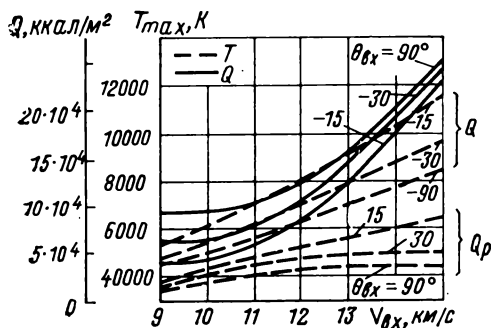


Рис. 10.2.4. Влияние скорости входа $V_{вх}$ на температуру T_{max} и интегральные тепловые потоки Q при $K=0$, $\rho_x=400$ кг/м³

Тогда уравнение (10.2.1) можно записать в виде

$$\frac{dV}{dt} = -kV^2\Delta, \quad (10.2.2)$$

где

$$k = \frac{g_0 \rho_0}{2\rho_x}; \quad \Delta = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\beta h};$$

$\beta = \frac{\mu g}{RT}$ — средний логарифмический градиент плотности атмосферы;

μ — молекулярный вес газа атмосферы;

g — ускорение силы тяжести;

T — средняя температура атмосферы;

R — универсальная газовая постоянная.

Воспользуемся еще одним уравнением системы (10.1.9), а именно уравнением для определения вертикальной составляющей скорости спуска:

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \theta. \quad (10.2.3)$$

Дифференцируя выражение $\Delta = e^{-\beta h}$ и используя (10.2.3), получим

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{d\Delta}{dh} \frac{dh}{dt} = -V \sin \theta \cdot \beta e^{-\beta h}. \quad (10.2.4)$$

Исключив время из (10.2.2) и (10.2.4) и разделив переменные, получим

$$\frac{dV}{V} = \frac{k}{\beta \sin \theta} d\Delta. \quad (10.2.5)$$

Интегрируя (10.2.5) от h_0 до h , получим зависимость скорости от высоты полета

$$V = V_0 e^{-\frac{k}{\beta \sin \theta} (\Delta - \Delta_0)}.$$

При $h_0 \rightarrow \infty$ (вход в атмосферу из бесконечности)

$$V = V_0 e^{-\frac{K}{\beta \sin \theta} \Delta}.$$

Подставляя в (10.2.2) выражение для скорости, получим

$$\frac{dV}{dt} = k V_0^2 e^{-\left[\beta h + \frac{2K}{\beta \sin \theta} (\Delta - \Delta_0)\right]}.$$

Осевая перегрузка, действующая на СА,

$$n_x = \frac{k}{g_0} V^2 e^{-\left(\beta h + \frac{2K}{\beta \sin \theta} \Delta\right)}.$$

Высоту, соответствующую $n_{x \max}$, получим из уравнения

$$\frac{dn_x}{dh} = n_x \left(-\beta + \frac{2k}{\sin \theta} \Delta \right) = 0.$$

Высота, соответствующая $n_{x \max}$,

$$h_{n_x \max} = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{\beta \sin \theta}{2k}.$$

Максимальная перегрузка

$$n_{x \max} = \frac{V_0^2 \beta}{2g_0 e} \sin \theta. \quad (10.2.6)$$

Дополнительно к этим решениям из (10.2.3) можно определить время полета от момента входа в атмосферу до высоты h :

$$t = - \int_{h_0}^h \frac{dh}{V \sin \theta} = - \int_{h_0}^h \frac{dh}{V_0 e^{\frac{k\Delta}{\beta \sin \theta} \sin \theta}}.$$

Подставив $dh = -\frac{d\Delta}{\beta \Delta}$, получим

$$t = \frac{1}{V_0 \beta \sin \theta} \int_{\Delta_0}^{\Delta} \frac{e^{-\frac{k}{\beta \sin \theta}}}{\Delta} d\Delta = \frac{1}{V_0 \beta \sin \theta} \left[\ln \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{k\Delta}{\beta \sin \theta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{k\Delta}{\beta \sin \theta} \right)^2 \frac{1}{3 \cdot 3!} + \dots \right] = \frac{1}{V_0 \beta \sin \theta} \left[\beta (h_0 - h) \frac{k\Delta}{\beta \sin \theta} + \dots \right].$$

Сопоставление данных расчета по приведенным выше формулам с численным интегрированием уравнений движения показывает, что для углов входа в атмосферу $\theta_{вх}$ от -90 до -15° приближенные формулы дают удовлетворительную точность на основной части траектории (до $h \approx 20 \div 25$ км).

Траектории с малыми углами входа на границе захвата аппарата атмосферой

На рис. 10.2.5 приведены характеристики траекторий баллистического спуска со второй космической скоростью при угле входа в атмосферу ($\theta_{вх} = -5^\circ$), близком к границе захвата аппарата атмосферой. Время спуска по такой траектории существенно больше, чем при больших углах входа, и примерно соответствует времени спуска с орбиты ИСЗ, а максимальная

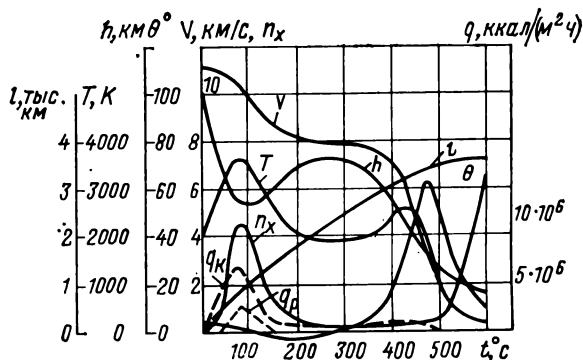


Рис. 10.2.5. Траектория планирующего спуска при $\theta_{вх} = -5^\circ$; $K=0,1$; $p_x=650$ кг/м²; $V_{вх}=11$ км/с

перегрузка ($n_{\max}=6,5$) даже несколько меньше, чем при баллистическом спуске с орбиты, где $n_{\max} \approx 8$. Характерным для траекторий на границе захвата является наличие элемента рикошетирувания, выраженное в виде двух «пиков» максимальной перегрузки.

Максимальная температура $T_{\max}$ при спуске со второй космической скоростью в случае как баллистического, так и планирующего спуска существенно выше, чем при спуске с орбиты ИСЗ. Основные характеристики режима спуска при углах входа

в атмосферу, близких к границе захвата*, для аппаратов с нагрузкой на лоб $p_x=400 \text{ кг/м}^2$ и при различных значениях аэродинамического качества K показаны на рис. 10.2.6 и 10.2.7. Уве-

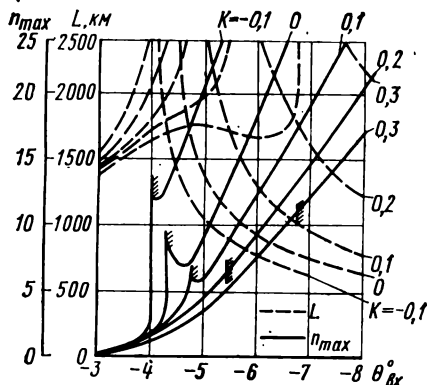


Рис. 10.2.6. Влияние $\theta_{вх}$ и качества K на перегрузки n_{max} и дальность полета L при $V_{вх}=11 \text{ км/с}$; $p_x=400 \text{ кг/м}^2$

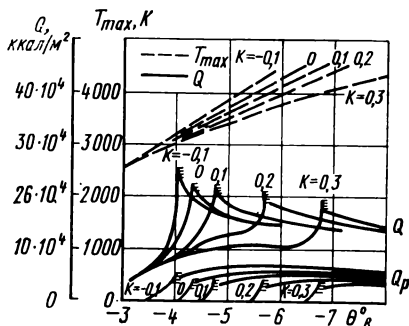


Рис. 10.2.7. Влияние угла входа $\theta_{вх}$ и качества K на тепловые потоки Q и температуру T_{max} при $V_{вх}=11 \text{ км/с}$; $p_x=400 \text{ кг/м}^2$

личение аэродинамического качества K приводит к уменьшению максимальных перегрузок n_{max} при фиксированном угле входа в атмосферу $\theta_{вх}$ и к некоторому уменьшению производной $\frac{\partial n_{max}}{\partial \theta_{вх}}$.

Характерным для режимов с $K \leq 0,2$ является минимум перегрузки n_{max} на углах входа $\theta_{вх}$, близких к границе захвата $\theta_{вх.гр}$, и резкий спад n_{max} при $\theta_{вх} < \theta_{вх.гр}$. При $K > 0,2$ переход через границу захвата не вызывает каких-либо изменений в кривой $n_{max}=f(\theta_{вх})$. Интересен также тот факт, что имеется минимум n_{max} в зависимости от качества K (при $K \approx 0,1$). Как видно из рис. 10.2.6, граница захвата аппарата атмосферой характеризуется резким возрастанием дальности полета L в атмосфере (L определяется от момента входа в атмосферу на $n_{вх}=100 \text{ км}$ до момента либо посадки аппарата, либо выхода из атмосферы). С увеличением угла входа $\theta_{вх}$ заметно возрастает максимальная температура T_{max} на траектории спуска (см. рис. 10.2.7). Следует отметить, что T_{max} на границе захвата возрастает при увеличении K . Характерным является наличие «пиков» интегральных тепловых потоков Q на границе захвата, а также то, что с увеличением K «пиковые» значения Q на границе захвата уменьшаются. Интегральные радиационные тепловые потоки Q_p на границе захвата практически не изменяются при изменении качества K .

* В данной работе «захваченными» считаются такие траектории спуска, при которых аппарат, войдя в атмосферу на $h_{вх}=100 \text{ км}$, больше не выходит на эту высоту.

На рис. 10.2.8 и 10.2.9 показано влияние нагрузки на лоб p_x на основные характеристики траекторий спуска при малых углах входа в атмосферу. Максимальные перегрузки в точке минимума $n_{\max}=f(\theta_{\text{вх}})$ или на границе захвата при $K<0,1$ мало зависят от p_x , а при $K>0,2$ несколько повышаются при малых

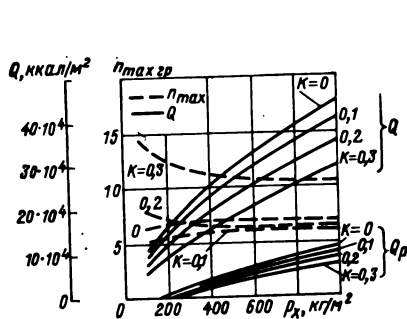


Рис. 10.2.8. Влияние нагрузки на лоб p_x на перегрузки $n_{\max}$ и тепловые потоки Q на границе захвата при $V_{\text{вх}}=11$ км/с

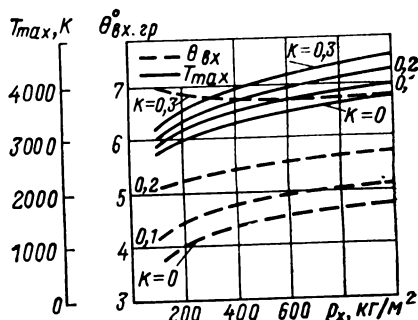


Рис. 10.2.9. Влияние нагрузки на лоб p_x на угол входа $\theta_{\text{вх}}$ и температуру $T_{\max}$ на границе захвата при $V_{\text{вх}}=11$ км/с

значениях p_x . Угол входа, соответствующий границе захвата атмосферой $\theta_{\text{вх,гр}}$, несколько повышается с ростом p_x при $K<0,3$. С увеличением p_x возрастают максимальная температура на гра-

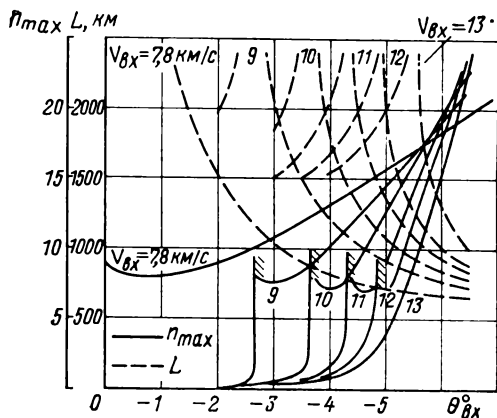


Рис. 10.2.10. Влияние угла $\theta_{\text{вх}}$ и скорости входа $V_{\text{вх}}$ на перегрузки $n_{\max}$ и дальность полета L при $K=0$, $p_x=400$ кг/м²

нице захвата $T_{\max,гр}$ и интегральные тепловые потоки $Q_{гр}$. Увеличение $T_{\max}$ и $Q_{гр}$ с ростом p_x объясняется тем, что при больших p_x торможение аппарата происходит в более плотных слоях атмосферы.

Влияние скорости входа в атмосферу на основные характеристики траектории баллистического спуска показано на рис. 10.2.10 и 10.2.11. С увеличением скорости входа естест-

венно возрастают граничный угол входа $\theta_{вх,гр}$, а также производная $\frac{\partial n_{max}}{\partial \theta_{вх}}$. Следует отметить, что при $V_{вх} > 12$ км/с исчезает минимум n_{max} около границы захвата.

С увеличением скорости входа в атмосферу существенно возрастают максимальная температура $T_{max,гр}$ и интегральные

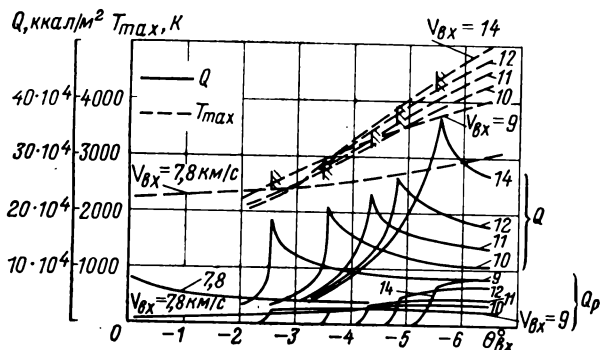


Рис. 10. 2. 11. Влияние угла $\theta_{вх}$ и скорости входа $V_{вх}$ на тепловые потоки Q и температуру T_{max} при $K=0$, $\rho_x=400$ кг/м³

тепловые потоки $Q_{гр}$ на границе захвата. Существенно возрастают и интегральные радиационные потоки Q_p .

Как видно из рис. 10. 2. 12, для каждой скорости входа в атмосферу существуют значения аэродинамического качества K , соответствующие минимуму перегрузок n_{max} . Если при спуске с орбиты ($V_{вх}=7,8$ км/с) это $K_{opt} \rightarrow \infty$, то уже при параболиче-

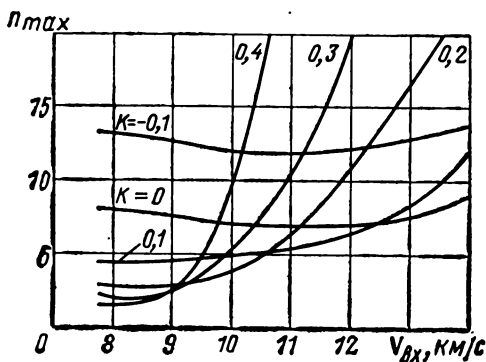


Рис. 10. 2. 12. Влияние скорости входа $V_{вх}$ на максимальные перегрузки n_{max} при $\rho_x=400$ кг/м³

ской скорости входа ($V_{вх}=11$ км/с) величина $K_{opt} \approx 0,1 \div 0,15$, а при $V_{вх}=14$ км/с $K_{opt}=0$. На рис. 10. 2. 13 показано влияние скорости входа в атмосферу $V_{вх}$ на интегральные тепловые потоки Q и максимальную температуру T_{max} на границе захвата. Интересными являются следующие факты. Во-первых, радиационные потоки Q_p на границе захвата почти не зависят от аэро-

динамического качества K и, во-вторых, при скорости входа, большей $V_{вх}=8,5$ км/с, увеличение качества приводит к уменьшению интегральных тепловых потоков Q и увеличению температуры T_{max} на границе захвата.

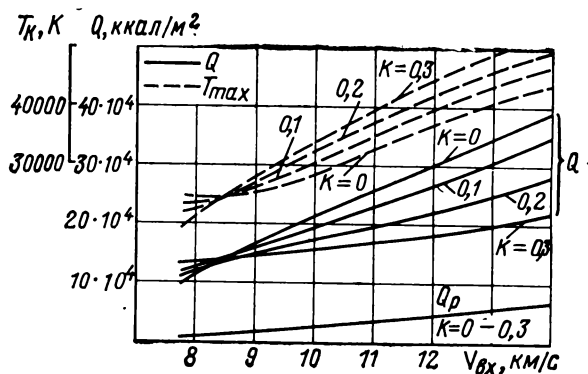


Рис. 10.2.13. Влияние скорости входа $V_{вх}$ на тепловые потоки Q и температуру T_{max} на границе захвата при $\rho_x=400$ кг/м²

Рассмотрим влияние различных параметров спускаемого аппарата и скорости входа его в атмосферу на границу захвата. Границу захвата аппарата атмосферой удобнее характеризовать



Рис. 10.2.14. Зависимость высоты условного перигея h_π от нагрузки ρ_x на лоб и перегрузки n_{max} при $\rho_x=400$ кг/м², $K=0$

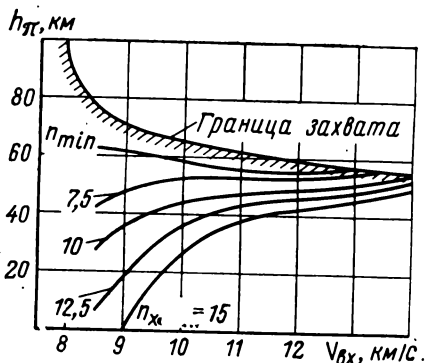


Рис. 10.2.15. Зависимость высоты h_π условного перигея от скорости входа $V_{вх}$ при $V_{вх}=11$ км/с; $K=0$

не углом входа, а высотой перигея h_π траектории аппарата, рассчитанной по условиям входа в атмосферу ($h_{вх}=100$ км; $\theta_{вх}$ и $V_{вх}$), считая, что полет происходит в безвоздушном пространстве. Такая условная высота перигея h - более удобна для оценки точности систем наведения СА при входе в атмосферу. Радиус условного перигея r_π можно определить, зная высоту входа

в атмосферу h_0 , скорость входа $V_{вх}$ и угол входа $\theta_{вх}$. Действительно, из уравнения конического сечения имеем

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

где $p = \frac{V_{вх}^2 \cos^2 \theta_{вх} r_{вх}}{\mu}$ — параметр траектории;
 v — истинная аномалия;

$$r = R + h;$$

R — радиус Земли;

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{\mu} \left(V_{вх}^2 - \frac{2\mu}{r} \right)}$$
 — эксцентриситет орбиты.

В условном перигее $v=0$, тогда

$$h_{\pi} = \frac{p}{1 + e}.$$

На рис. 10.2.14 показано влияние удельной нагрузки p_x на лоб на граничную высоту условного перигея $h_{\pi гр}$ для различных значений K . Видно, что при больших p_x спускаемый аппарат должен глубже проникать в атмосферу, чтобы быть захваченным. С увеличением скорости входа в атмосферу $V_{вх}$ высота перигея $h_{\pi гр}$ на границе захвата также уменьшается (рис. 10.2.13).

Для оценки точности системы выведения СА для входа в атмосферу пользуются понятием «коридора входа». Коридор входа ограничен с одной стороны границей захвата СА атмосферой, а с другой — уровнем допустимых перегрузок. Высоту коридора входа можно характеризовать разностью высот условного перигея. Высоту Δh_{π} коридора входа можно определить из рис. 10.2.14. Нагрузка p_x на лоб практически не влияет на высоту коридора входа, но смещает его границы. С увеличением скорости входа в атмосферу высота коридора входа Δh_{π} уменьшается. Так, для баллистических траекторий при $V_{вх}=14$ км/с и $n_{max}=10$ коридор входа сходит на нет (рис. 10.2.15).

Рикошетирующие траектории спуска. Выход КА на орбиту спутника при маневре в атмосфере

Если СА входит в атмосферу с углом входа $\theta_{вх}$, меньшим, чем угол, соответствующий границе захвата, то он, частично затормозившись в атмосфере, выйдет из нее. Пролетев некоторое время по эллиптической траектории, он снова войдет в атмосферу, но уже с меньшей скоростью. Совершив несколько таких рикошетов, СА, наконец, спустится на Землю (рис. 10.2.16). На рис. 10.2.17—10.2.18 приведены некоторые характеристики

рикошетирующих траекторий спуска на Землю со второй космической скоростью. Характерно, что наибольшие перегрузки имеют место при последнем погружении в атмосферу, и практически они постоянны в широком диапазоне углов входа. При баллистическом спуске эти перегрузки примерно соответствуют минимальным перегрузкам при спуске с орбиты ИСЗ. Рикоше-

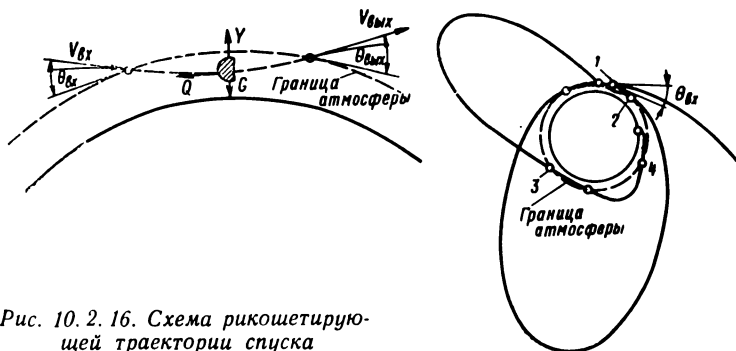


Рис. 10.2.16. Схема рикошетирующей траектории спуска

тирующие траектории характерны еще тем, что по мере увеличения числа входов в атмосферу N существенно возрастают интегральные тепловые потоки Q .

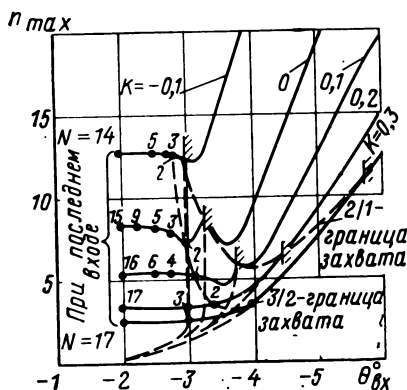


Рис. 10.2.17. Зависимость $n_{\max}$ от угла входа $\theta_{вх}$ для рикошетирующих траекторий при $V_{вх}=11$ км/с; $\rho_x=400$ кг/м²

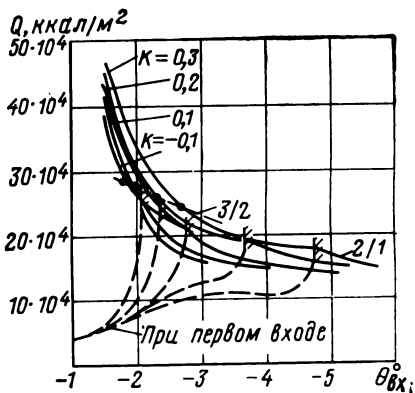


Рис. 10.2.18. Тепловые потоки Q на рикошетирующих траекториях при $V_{вх}=11$ км/с, $\rho_x=400$ кг/м²

В табл. 10.1 приведены основные характеристики рикошетирующей траектории баллистического спуска при $V_{вх}=11$ км/с, $\theta_{вх}=-3,8^{\circ}$ и нагрузке на лоб $\rho_x=400$ кг/м². Характерно, что температура $T_{\max}$ наблюдается при первом входе в атмосферу, а наибольший интегральный тепловой поток Q — при последнем. Полет по каждому переходному эллипсу составляет почти пол-

Таблица 10.1

Характеристики рикошетирующей траектории спуска при

$$V_{\text{вх}} = 11 \text{ км/с}, \theta_{\text{вх}} = -3,8^\circ \text{ и } \rho_x = 400 \text{ кг/м}^2$$

	$\theta_{\text{вх}}^\circ$	T_{max} К	Q ккал/м ²	$V_{\text{вх}}$ км/с	L км	r_a км	n_{max}	n оборо- тов
Первый полет в атмосфере	-3,8	2980	$8,7 \cdot 10^4$	11,0	1830		1,16	0,896
Переходной эллипс					38060	32740		
Второй полет в атмосфере	-2,9	2750	$8,5 \cdot 10^4$	10,0	4050		1,07	1,03
Переходной эллипс					37340	13730		
Третий полет в атмосфере	-2,55	2580	$14,3 \cdot 10^4$	9,1	7150		8,12	0,18
Σ			$31,5 \cdot 10^4$		88430			2,21

ный оборот около Земли. Аппарат спускается на Землю, совершив 2,2 оборота вокруг Земли.

Рикошетирующие траектории представляют интерес в том отношении, что при фиксированной широте точки входа в атмосферу (или широте точки прохождения условного перигея) они позволяют, регулируя дальность полета, обеспечить посадку в заданный район широт. Траектории такого типа были использованы для посадки на территорию Советского Союза СА, возвращаемых с траектории облета Луны, для которых точка условного перигея лежала в южных широтах. Однако следует отметить, что спуск по рикошетирующим траекториям даст существенно большие интегральные тепловые потоки, что связано с увеличением веса теплозащиты. Рикошетирующие траектории позволяют расширить коридор входа в атмосферу. Действительно, как видно из рис. 10.2.19, переход к траекториям с двумя входами в атмосферу существенно увеличивает коридор входа Δh_* . Так, если ограничить перегрузку величиной $h_{\text{max}} = 10$, то Δh_{max} для границы 3/2* увеличивается почти вдвое по срав-

$$* \quad 3/2 = \frac{N=3}{N=2} \quad \text{— граница «захвата» при двух входах в атмосферу,}$$

$$2/1 = \frac{N=2}{N=1} \quad \text{— при одном.}$$

нению с границей 2/1. Переход на траектории с границы 4/3 и выше такого существенного приращения Δh_{π} уже не даст. Предельное увеличение ширины коридора входа будет при выходе из атмосферы с параболической скоростью (число входов $N \rightarrow \infty$).

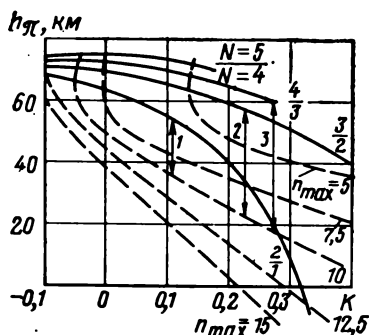


Рис. 10.2.19. Граница захвата на рикошетирующих траекториях при $V_{вх} = 11$ км/с; $\rho_x = 400$ кг/м²;

1— $\Delta h_{\pi \max}$ для границы 2/1; 2—для 3/2; 3—для 4/3

На рис. 10.2.20 для этого случая показана верхняя граница высоты коридора входа в зависимости от скорости входа СА в атмосферу $V_{вх}$ и аэродинамического качества K . Нижняя граница коридора входа ограничена траекториями входа с $n_{\max} = 10$.

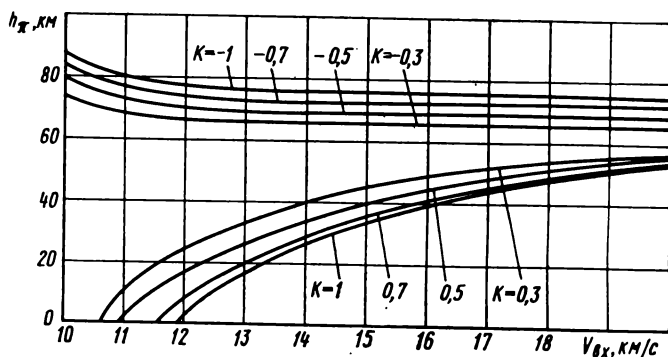


Рис. 10.2.20. Зависимость границ коридора входа от скорости входа $V_{вх}$ и качества K при $\rho_x = 500$ кг/м²; $n_{\max} = 10$

Полет по верхней границе коридора происходит при отрицательном значении аэродинамического качества СА (аппарат перевернут), а по нижней границе — при положительном. В этом случае СА входит в атмосферу при максимальном положительном значении качества K , а затем выходит на изоперегрузочную траекторию с заданным $n_{\max}$. Для полета по этой траектории необходимо изменение либо лобового сопротивления в случае баллистического спуска (регулируемые тормозные устройства), либо подъемной силы (изменение угла крена), или изменение того и другого (изменение угла атаки СА).

Рикошетирующие траектории спуска можно использовать для маневра выхода КА на орбиту спутника планеты при торможении в атмосфере. «Коридор входа» для таких траекторий будет лежать между границей захвата $2/1$ и границей выхода с параболической скоростью ($N \rightarrow \infty$). При входе по верхней границе коридора (скорость выхода из атмосферы близка к $V_{\text{пар}}$) КА при выходе из атмосферы даются корректирующие импульсы (один или два) для выхода на вытянутую эллиптическую орбиту.

При входе по нижней границе КА корректирующими импульсами переводится на низкую околокруговую орбиту. Посадка СА на поверхность планеты производится с этих промежуточных орбит. Как показано в § 2 гл. VIII, использование такого маневра позволяет существенно снизить энергозатраты в схемах полетов с выходом на орбиту ИСП. Кроме того, выход на орбиту ИСП существенно облегчает задачу посадки КА в заданный район поверхности планеты. Однако реализация этой схемы полета сужает коридор входа КА в атмосферу планеты, что может существенно повысить требования к точности систем навигации и управления КА на участке как межпланетного полета, так и в атмосфере.

§ 3. СПУСК КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В АТМОСФЕРАХ ПЛАНЕТ

Непосредственное исследование физических условий на поверхности планет требует посадки космических аппаратов. Первыми аппаратами, осуществившими торможение в атмосфере планеты, были СА советских межпланетных станций «Венера». Осуществлена первая посадка советского КА на поверхность Марса с торможением в его атмосфере. Разрабатываются проекты КА для зондирования атмосферы Юпитера.

Все планеты с точки зрения посадки КА можно разбить на два типа:

- планеты с плотной атмосферой, в которой космическая скорость может быть погашена полностью (КА тормозится до скорости равновесного падения или планирования);
- планеты с разреженной атмосферой, в которой можно лишь частично погасить космическую скорость.

К первому типу относятся Земля, Венера и планеты юпитеровой группы (Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун), ко второму — Меркурий и некоторые крупные спутники планет юпитеровой группы. Марс можно отнести к промежуточному типу планет. Его атмосфера достаточно разрежена, чтобы полностью погасить космическую скорость КА с умеренными значениями нагрузки на лоб $p_x = 400 \div 600 \text{ кг/м}^2$ при больших углах входа в атмосферу, но позволяет полностью затормозить СА с $p_x = 50 \div 100 \text{ кг/м}^2$ (тормозные устройства, большой экран и пр.).

Спуск космических аппаратов в атмосфере Марса

Рассмотрим спуск КА, входящих в атмосферу Марса непосредственно с траектории межпланетного полета. В этом случае аппарат может входить в атмосферу с гиперболической скоростью и углами входа от $\theta_{вх} = -90^\circ$ до малых на границе захвата аппарата атмосферой.

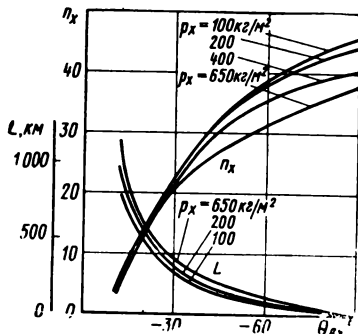


Рис. 10.3.1. Зависимость максимальных p_x и L от $\theta_{вх}$ при $V_{вх} = 6$ км/с, $K=0$

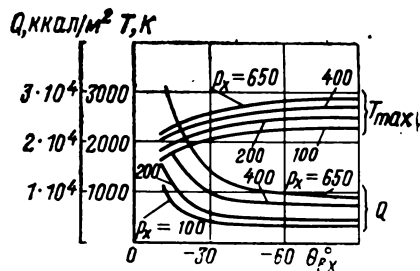


Рис. 10.3.2. Зависимость Q и T_{max} от угла входа $\theta_{вх}$, $K=0$

На рис. 10.3.1 и 10.3.2 приведены основные характеристики траекторий баллистического спуска в зависимости от угла входа в атмосферу $\theta_{вх}$ и удельной нагрузки на лоб p_x . Общий характер зависимостей такой же, как и при спуске в атмосфере Земли,

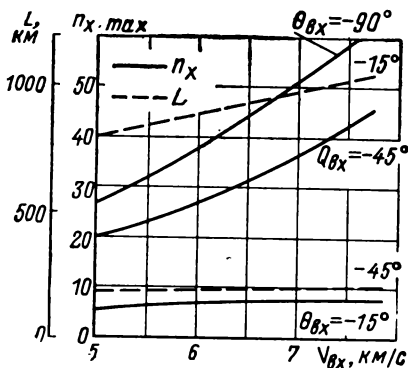


Рис. 10.3.3. Влияние $V_{вх}$ на $p_{x\max}$ и L при $p_x = 650$ кг/м², $K=0$

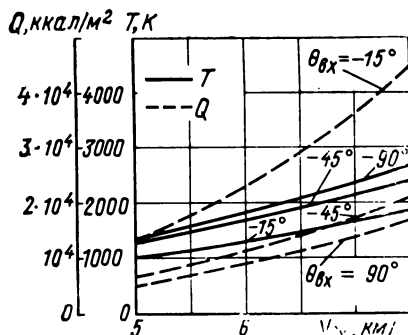
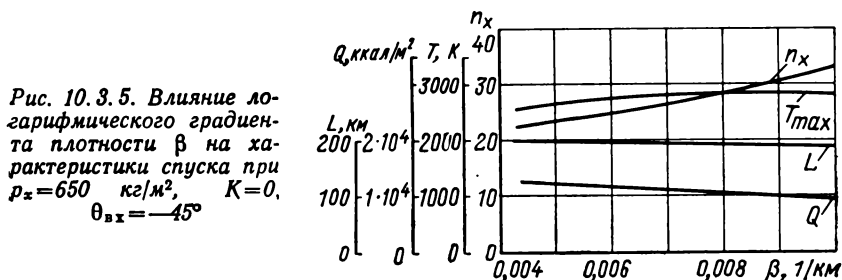


Рис. 10.3.4. Влияние $V_{вх}$ на Q и T при $p_x = 650$ кг/м², $K=0$

однако максимальные перегрузки n_x существенно меньше. Примерно на порядок меньше интегральные тепловые потоки Q . Влияние скорости входа в атмосферу Марса на характеристики

траекторий спуска показано на рис. 10.3.3 и 10.3.4. Общий характер зависимостей такой же, как при спуске в атмосфере Земли.

На рис. 10.3.5 показано влияние изменения логарифмического градиента плотности $\beta = \frac{g\mu}{RT}$ (экспоненциальная атмосфера $\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$) на характеристики траекторий спуска. Диапазон изменения β взят с учетом возможного разброса из-за неполного



знания физических характеристик атмосферы Марса. Наиболее существенно изменение β влияет на максимальные перегрузки $n_{\max}$. С увеличением β несколько уменьшаются интегральные тепловые потоки Q , дальность полета L и температура $T_{\max}$ изменяются незначительно. Неточное знание плотности на поверхности

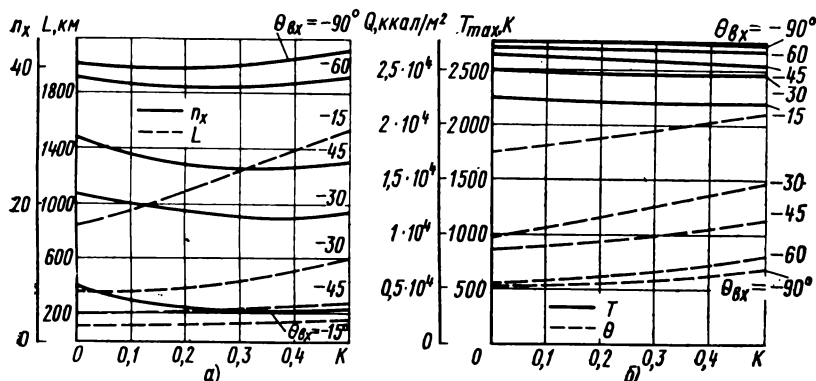


Рис. 10.3.6. Влияние аэродинамического качества K на характеристики спуска при $p_x = 400 \text{ кг/м}^2$, $V_{вх} = 6 \text{ км/с}$

сти планеты ρ_0 не сказывается на таких характеристиках, как $n_{\max}$, $T_{\max}$ и Q , а приводит лишь к изменению высоты зоны действия $n_{\max}$ и $T_{\max}$ *.

Из анализа характеристик траекторий спуска в атмосфере Марса при скорости входа $V_{вх}$, близкой ко второй космической ($V_{\text{пар}} \approx 5 \text{ км/с}$), видно, что условия спуска КА на Марс сущест-

* При полном торможении КА.

венно мягче, чем при спуске на Землю в аналогичных ситуациях. Однако по допустимому уровню перегрузок ($n_{\max}=10$) спуск аппаратов с экипажем возможен лишь при малых углах входа ($\theta_{\text{вх}}=15\div 17^\circ$). На рис. 10.3.6 показано влияние аэродинамического качества K на характеристики траектории спуска. Видно, что, как и для Земли, аэродинамическое качество K снижает максимальную перегрузку $n_{\max}$ при малых углах входа, но мало влияет на нее при больших углах входа. Изменение температуры $T_{\max}$ в зависимости от K незначительно. Таковы основные характеристики при спуске в атмосфере Марса с траекторией межпланетного полета.

Рассмотрим характеристики траекторий спуска с орбиты спутника Марса. Зависимость основных характеристик траекто-

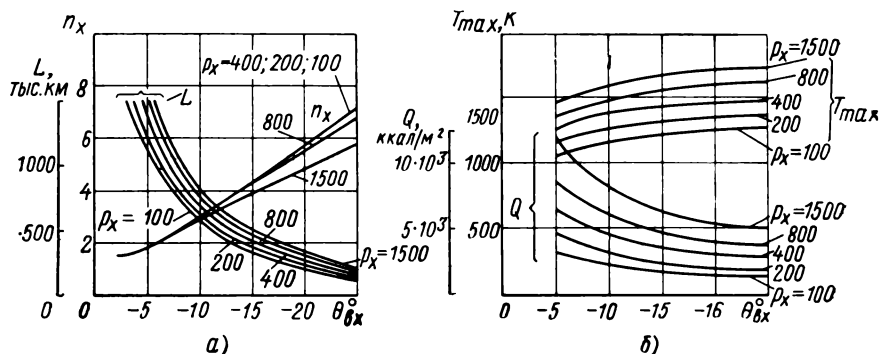


Рис. 10.3.7. Зависимость характеристик траекторий спуска от $\theta_{\text{вх}}$ и ρ_x при $V_{\text{вх}}=3,5$ м/с, $K=0$

рий спуска от угла входа в атмосферу Марса $\theta_{\text{вх}}$ и удельной нагрузки на лоб ρ_x приведена на рис. 10.3.7. Качественный характер зависимости такой же, как и при спуске с орбиты ИСЗ. Минимальное значение перегрузки $n_{\max}\approx 1,5$, в то время как для Земли $n_{\max}\approx 8$. Интегральные тепловые потоки Q при спуске с орбиты спутника Марса примерно в 20 раз меньше, чем с орбиты ИСЗ.

Спуск космических аппаратов в атмосфере Венеры

Скорость входа в атмосферу Венеры непосредственно с траектории межпланетного полета $V_{\text{вх}}=10,5\div 11,5$ км/с при полете с Земли по траектории минимальной энергии. Такие характеристики, как время спуска t и дальность полета L , мало отличаются от этих же характеристик для Земли. Не очень сильно отличаются также $T_{\max}$ и Q . На рис. 10.3.8 показано изменение баллистических и тепловых характеристик в зависимости от $\theta_{\text{вх}}$ и нагрузки на лоб ρ_x . На рис. 10.3.9 и 10.3.10 приведены основ-

ные характеристики траекторий баллистического и планирующего спуска при углах входа, близких к границе захвата. Видно, что при увеличении K граничный угол $\theta_{вх}$ возрастает, как и для

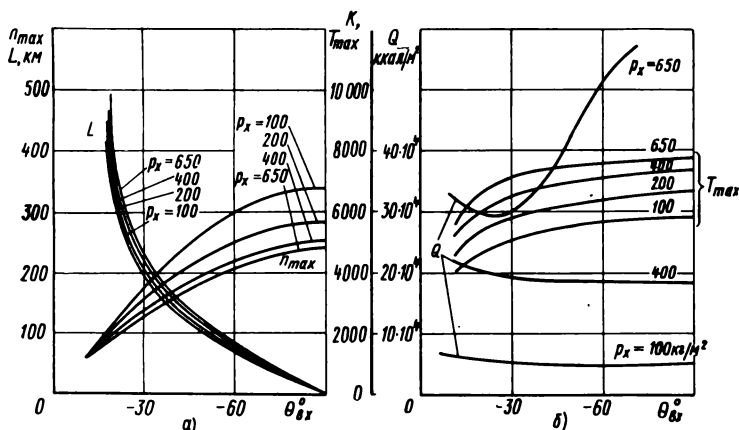


Рис. 10.3.8. Влияние угла входа $\theta_{вх}$ на характеристики баллистических траекторий при $V_{вх}=10,7$ км/с; $K=0$; $\beta=0,167$ 1/км

случая спуска в атмосфере Земли. Точно так же возрастает при $\theta_{вх.гр}$ значение Q при увеличении K . Влияние удельной нагрузки на лоб p_x на максимальные перегрузки n_{max} , температуру T_{max}

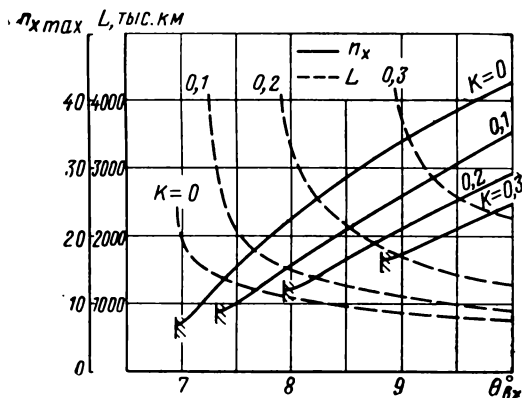


Рис. 10.3.9. Влияние угла входа $\theta_{вх}$ и качества K на перегрузки n_{max} и дальность полета L при $V_{вх}=10,7$ км/с; $p_x=400$ кг/м²; $\beta=0,167$ 1/км

и интегральные по времени тепловые потоки Q показано на рис. 10.3.11. Видно, что увеличение p_x мало влияет на n_{max} , но существенно увеличивает T_{max} и Q . На рис. 10.3.12 показано влия-

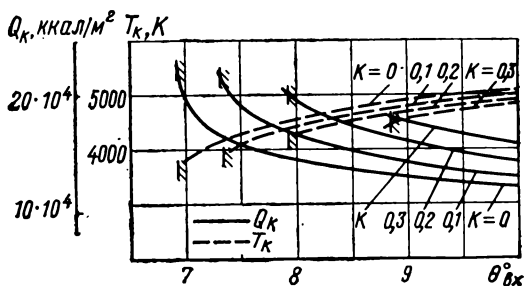


Рис. 10.3.10. Влияние угла входа $\theta_{вх}$ и качества K на Q и $T_{\max}$ при $V_{вх}=10,7$ км/с; $p_x=400$ кг/м²; $\beta=0,167$ 1/км

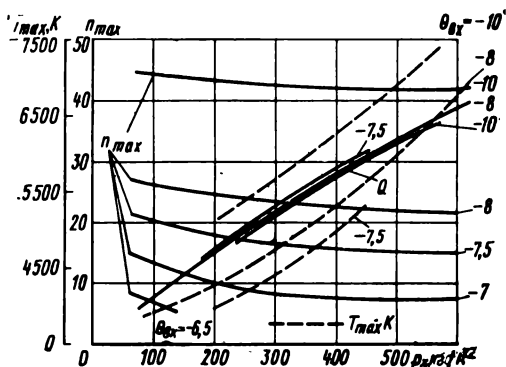


Рис. 10.3.11. Влияние удельной нагрузки на лоб p_x на $n_{\max}$ и $T_{\max}$ при $V_{вх}=10,7$ км/с; $K=0$; $\beta=0,167$ 1/км

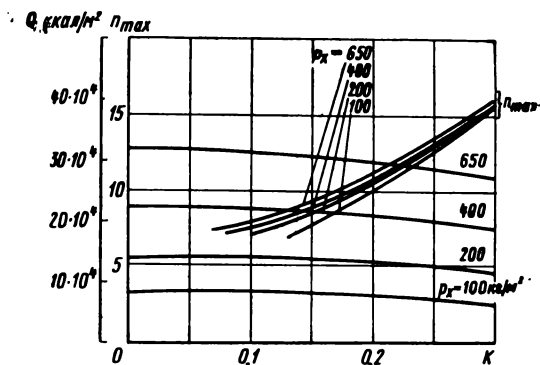


Рис. 10.3.12. Зависимость перегрузки $n_{\max}$ и теплоток Q от качества K и нагрузки на лоб p_x для траекторий на границе захвата при $V_{вх}=10,7$ км/с; $\beta=0,167$ 1/км

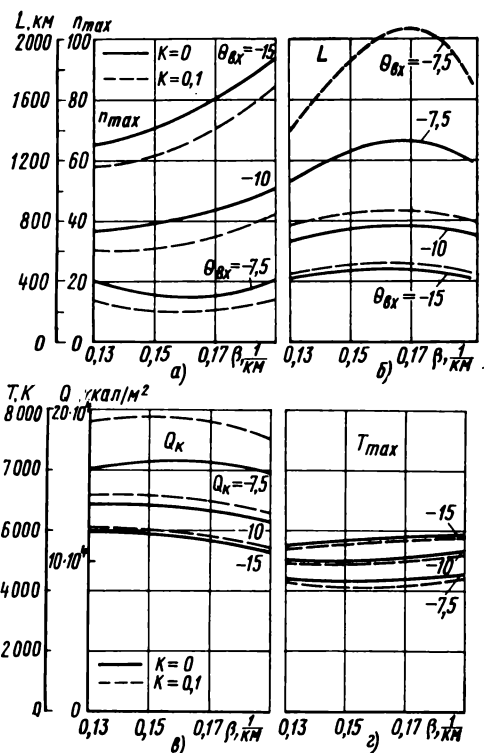
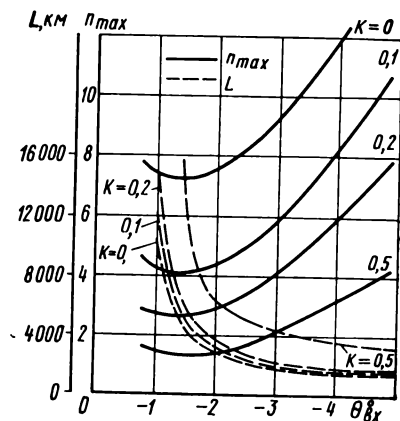


Рис. 10.3.13. Влияние β на характеристики траекторий спуска при $V_{вх}=10,7 \text{ км/с}$; $p_x=400 \text{ кг/м}^2$

Рис. 10.3.14. Зависимость перегрузки n_{max} и дальности L от угла входа $\theta_{вх}$ при $V_{вх}=7,13 \text{ км/с}$; $p_x=400 \text{ кг/м}^2$, $\beta=0,167 \text{ 1/км}$



яние K на $n_{\max}$ и Q на границе захвата. На рис. 10.3.13 показано влияние изменения параметра атмосферы β на характеристики траекторий спуска. Увеличение β мало влияет на Q , но заметно изменяет $n_{\max}$.

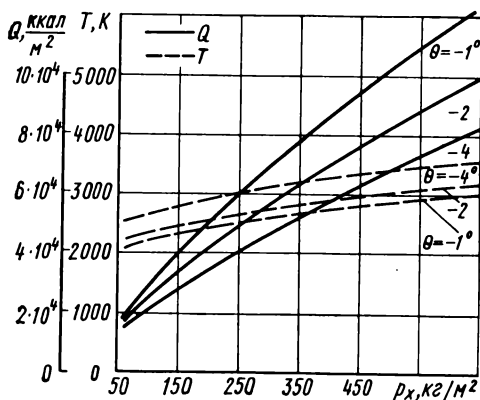


Рис. 10.3.15. Зависимость величины тепловых потоков Q и $T_{\max}$ от нагрузки на лоб p_x при $\beta=0,167$ 1/км; $V_{вх}=7,13$ км/с; $K=0$

Рассмотрим характеристики траекторий при спуске с орбиты спутника Венеры. Характер кривых и параметры траектории близки к таковым при спуске с орбиты ИСЗ. На рис. 10.3.14—10.3.15 приведены кривые изменения основных характеристик траекторий спуска в зависимости от угла входа в атмосферу $\theta_{вх}$ и удельной нагрузки на лоб p_x . Минимальные перегрузки $n_{\max}$ получаются почти такие же, как и для Земли. Несколько увеличены интегральные тепловые потоки.

§ 4. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ МЯГКОЙ ПОСАДКИ СА

Рассмотрим последний участок полета СА — участок контакта с поверхностью планеты. При спуске в атмосфере Земли, начиная с $h=15\div 20$ км, СА переходит на режим установившегося вертикального падения (баллистический спуск) или на режим планирования (планирующий или «скользящий» спуск). Система посадки (приземления) должна обеспечить безопасное приземление СА с допустимыми перегрузками. Желательна также возможность маневра для выбора посадочной площадки. Рассмотрим некоторые возможные варианты систем мягкой посадки СА.

Параютная система с амортизацией

Наиболее простой, по-видимому, является парашютная система. Для достижения допустимых перегрузок при контакте с поверхностью необходимо применение амортизирующих устройств (надувные мешки, колесное или лыжное шасси с аморти-

зацией и пр.). При спуске контейнеров с грузом или автоматических СА допустимые перегрузки могут быть достаточно высокими ($n \approx 50$), и можно использовать амортизацию контейнера с грузом или аппаратурой внутри СА. При спуске СА с экипажем (допустимая ударная перегрузка не более $n = 15 \div 20$) необходимо применение внешних амортизирующих устройств с большим ходом (шасси). Работа, приходящаяся на шасси,

$$A = \frac{GV_{\text{пр}}^2}{2g} + GS = nGS\eta, .$$

где G — вес СА в момент приземления;
 $V_{\text{пр}}$ — скорость приземления (скорость парашютирования);
 S — ход амортизации;
 η — коэффициент полноты диаграммы обжатия амортизации ($\eta = 0,5$ для пружинной и $\eta = 0,6 \div 0,8$ для пневмогидравлической амортизации).

Перегрузка при работе амортизации

$$n = \frac{V_{\text{пр}}^2 + 2gS}{2\eta gS} .$$

Относительную массу шасси можно подсчитать по формуле

$$\mu_{\text{ш}} = \frac{G_{\text{ш}}}{G} = a n S .$$

Коэффициент a можно приближенно принять $a = 0,05 \div 0,06$ при S в метрах. Относительный вес парашютной системы можно определить как

$$\mu_{\text{п.с}} = \frac{G_{\text{п.с}}}{G} = \frac{\gamma_{\text{пар}}}{p_{\text{пар}}} ,$$

где $p_{\text{пар}} = \frac{G}{S_{\text{пар}}}$ — удельная нагрузка на купол парашюта;

$\gamma_{\text{пар}} = \frac{G_{\text{п.с}}}{S_{\text{пар}}}$ — масса парашютной системы на 1 м^2 поверхности купола ($\gamma_{\text{пар}} = 0,18 \div 0,22 \text{ кг/м}^2$).

При выборе размеров отдельных куполов парашютной системы следует учитывать, что динамическая перегрузка при раскрытии куполов

$$n_d = \frac{(p_{\text{пар}} c_{x \text{ пар}})_{n-1}}{(p_{\text{пар}} c_{x \text{ пар}})_n} k ,$$

где $c_{x \text{ пар}}$ — коэффициент лобового сопротивления купола парашюта ($c_{x \text{ пар}} = 0,5 \div 0,8$), а k — динамический коэффициент ($k = 0,7 \div 1,0$), не должна превышать допустимой.

На рис. 10.4.1 приведены зависимости относительной массы парашютной системы $\mu_{\text{п.с}}$ и шасси $\mu_{\text{ш}}$ от нагрузки на парашют

$p_{\text{пар}}$. С увеличением $p_{\text{пар}}$ возрастает вес шасси (растет $V_{\text{пр}}$), но уменьшается вес парашютной системы. Общая масса парашютной системы приземления с амортизацией $\mu_{\text{п.с.а}} = \mu_{\text{п.с}} + \mu_{\text{ш}}$ имеет

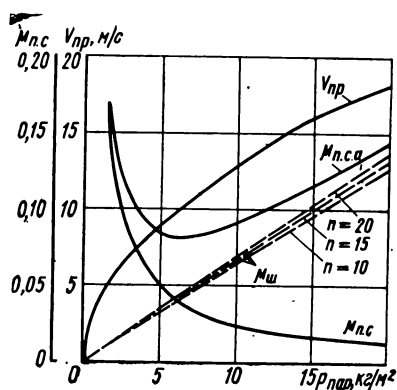


Рис. 10. 4. 1. Характеристики парашютной системы с амортизацией в зависимости от нагрузки на парашют $p_{\text{пар}}$

минимум при нагрузке на парашют $p_{\text{пар}} \approx 6 \text{ кг/м}^2$, чему соответствует скорость приземления $V_{\text{пр}} \approx 8 \div 10 \text{ м/с}$. При ходе амортизации шасси $S=0,75$ перегрузка не превышает $n=15$. Масса оптимальной парашютной системы с амортизацией составляет 8—9% от массы аппарата. Система приземления получается достаточно простой и легкой, однако при приемлемых значениях хода амортизации ударные перегрузки все-таки велики. Кроме того, следует отметить, что посадка на шасси (амортизаторы) при боковом сносе от ветра (простая амортизация в виде баллонов)

может привести к опрокидыванию СА. Применение же систем с амортизаторами самолетного типа (стойки и пяты-лыжа) приводит к усложнению системы.

Реактивная система

Посадка на парашютной системе с амортизацией сопровождается большими ударными перегрузками в момент контакта с поверхностью.

Обеспечить комфортабельные условия спуска, снизив перегрузки практически до нуля («мягкая» посадка), можно при использовании реактивной системы приземления. Для этой цели возможно использование жидкостных, пороховых и турбореактивных двигателей.

Уравнения движения СА с реактивной системой приземления могут быть записаны в следующем виде (вертикальная посадка):

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{g}{p_x} \frac{PV^2}{2} - g\Delta\tilde{P}; \quad (10. 4. 1)$$

$$\frac{dh}{dt} = V,$$

где $\Delta\tilde{P} = \frac{P-G}{G} = \tilde{P} - 1$; $\tilde{P} = \frac{P}{G}$,

P — тяга РД.

Достаточно простое аналитическое решение этих уравнений может быть получено при условиях:

- плотность атмосферы постоянна ($\rho = \text{const}$);
- тяга реактивного двигателя постоянна ($P = \text{const}$);
- масса аппарата не меняется ($G = \text{const}$).

Все эти условия практически выполняются на участке приземления при работе реактивных двигателей. Действительно, участок торможения не превышает нескольких сотен метров, т. е. $\rho = \text{const}$. Расход топлива также невелик, т. е. $G = \text{const}$. В этом случае

$$dh = \frac{-d\left(\frac{V^2}{2}\right)}{\frac{\rho g}{2p_x} V^2 + g\Delta\tilde{P}}.$$

Интегрируя в пределах от $V = V_{\text{пад}}$ до $V = 0$ и h от h_{τ} до нуля, получим

$$h_{\tau} = \frac{p_x}{\rho g} \ln \left(\frac{\Delta\tilde{P} + \frac{\rho}{2p_x} V_{\text{пад}}^2}{\Delta\tilde{P}} \right).$$

Так как торможение происходит на участке установившегося вертикального спуска (падения, где $V_{\text{пад}}^2 = \frac{2p_x}{\rho}$), то выражение для h_{τ} упрощается:

$$h_{\tau} = \frac{V_{\text{пад}}^2}{2g} \ln \left(\frac{\Delta\tilde{P} + 1}{\Delta\tilde{P}} \right) = \frac{V_{\text{пад}}^2}{2g} \ln \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{P} - 1} \right).$$

Время движения получим из уравнения

$$dt = \frac{-dV}{\frac{\rho g}{2p_x} V^2 + g\Delta\tilde{P}}.$$

Интегрируя от $t = 0$ до t и от $V_{\text{пад}}$ до $V = 0$, получим

$$t = \frac{V_{\text{пад}}}{g} \frac{1}{\sqrt{\Delta\tilde{P}}} \arctg \sqrt{\frac{1}{\Delta\tilde{P}}}.$$

Проверка этого решения по данным численных расчетов (без принятых выше допущений), проведенных на ЭЦВМ, показала удовлетворительную точность как для случая использования для посадочных ДУ ТРД (мало меняется G , несколько больше ρ), так и ЖРД (мало меняется ρ , больше меняется G). На рис. 10.4.2 показана зависимость времени работы двигателей t

в зависимости от тяговооруженности $\bar{P}$ и нагрузки на лоб p_x . Относительная масса топлива и баков, необходимая для торможения СА,

$$\mu_t = \frac{\bar{P}t}{P_{уд}}(1 + a_6).$$

Относительная масса РД определяется как

$$\mu_{дв} = \gamma_{дв} \bar{P},$$

где $\gamma_{дв}$ — удельная масса РД (кг/кг тяги).

Масса баков пропорциональна весу топлива (a_6 составляет 5—10% веса топлива). Общая масса системы $\mu_{р.с} = \mu_t + \mu_{дв}$. Оце-

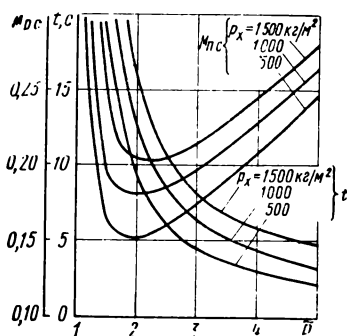


Рис. 10.4.2. Характеристики системы приземления с ЖРД:

$\gamma_{дв} = 0,04$; $P_{уд} = 250$ с

ним характеристики реактивной системы приземления с ЖРД. Для ЖРД с тягой $P = 3 \div 5$ тыс. кг можно принять $\gamma_{дв} = 0,04$. Характеристики реактивной системы с ЖРД приведены на рис. 10.4.2. С увеличением тяговооруженности реактивного двигателя $\bar{P}$ возрастает относительная масса $\mu_{дв}$, но уменьшается вес топлива μ_t из-за сокращения времени спуска (гравитационных потерь на торможение СА). Оптимальная тяговооруженность ЖРД $\bar{P} \approx 2$. При удельной нагрузке на лоб $p_x = 500$ кг/м² и удельной тяге $\bar{P}_{уд} \approx 250$ с относительной массой реактивной системы $\mu_{р.с}$ с ЖРД

равен 15—16%. Для реактивной системы приземления возможно применение пороховых ракетных двигателей (ПРД). Массовые характеристики такой системы приземления близки к таковым для системы с ЖРД. Недостатком реактивных систем приземления с ЖРД и ПРД является трудность обеспечения маневра в районе посадки, так как большой расход топлива ограничивает время работы двигателей (дополнительное время $\Delta t \approx 20 \div 30$ с работы ЖРД с тягой, равной весу СА, требует примерно 10% запаса топлива от веса СА). Кроме того, струя газов вызывает эрозию грунта при длительном висении СА у поверхности. Избежать этого можно при вынесении посадочной ДУ на подвижной штанге над СА или в стропях парашюта.

Рассмотрим характеристики систем реактивной посадки с применением турбореактивных двигателей (ТРД). Лучшими массовыми характеристиками обладают ТРД кратковременного действия, разрабатываемые для вертикально взлетающих само-

летов. Характеристики системы приземления с ТРД с удельной массой $\gamma_{дв}=0,15$ и удельным расходом топлива $C_R=1 \frac{\text{кг топлива}}{\text{кг тяги} \cdot \text{ч}}$

приведены на рис. 10.4.3. Из-за большой массы двигателя и меньшей массы топлива оптимальная тяговооруженность меньше, чем для ЖРД, и равна $\bar{P}=1,1 \div 1,2$. Система приземления получится несколько тяжелее, чем с ТРД. Однако из-за относительно малого расхода топлива возможно осуществление маневра в районе приземления при небольшом увеличении массы системы за счет дополнительного топлива. Так, при дополнительном запасе топлива порядка 5% от массы аппарата возможно его висение в течение 3 мин, что позволит осуществить маневр по дальности с $l=2 \div 3$ км. Увеличить дальность маневра еще до 1—2 км можно за счет бокового скольжения на участке торможения ($t \approx 50 \div 60$ с). Возможность микроманевра в районе приземления позволяет выбрать удобную для посадки площадку. Струя ТРД вызывает существенно меньшую эрозию грунта, и посадка таких аппаратов возможна на грунт с травяным покровом. В этом отношении еще более интересным представляется использование турбовентиляторного РД, у которого удельный расход топлива и скорость истечения реактивной струи меньше, чем у ТРД.

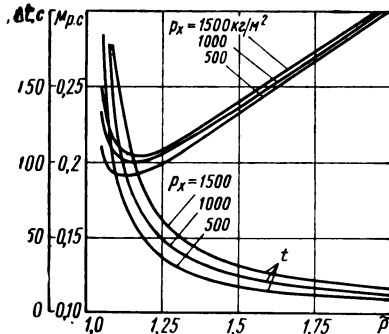


Рис. 10.4.3. Характеристики системы приземления с ТРД

$\gamma_{дв}=0,15, C_R=1 \text{ кг/кг} \cdot \text{ч}$

Парашютно-реактивная система

Рассмотрим комбинированную парашютно-реактивную систему приземления. Схема работы системы следующая. При введении парашютной системы существенно уменьшается скорость снижения СА, а затем в непосредственной близости от поверхности запускается РД, и аппарат в момент контакта с землей гасит скорость практически до нуля.

Основной составляющей массы реактивной системы с ЖРД и ПРД является масса топлива. Предварительное торможение СА парашютом позволяет существенно снизить вес системы приземления. Уравнения движения аппарата с такой системой аналогичны уравнениям движения аппарата с реактивной системой

при замене удельной нагрузки на лоб p_x СА приведенной нагрузкой

$$p_{x \text{ пр}} = \frac{G}{c_{xa} S_a + c_{x \text{ пар}} S_{\text{пар}}},$$

где c_{xa} ; $c_{x \text{ пар}}$ — коэффициент лобового сопротивления СА и парашюта соответственно;

S_a ; $S_{\text{пар}}$ — площадь миделя СА и парашюта.

Относительная масса такой системы приземления

$$\mu_{\text{пр.с}} = \mu_{\text{лв}} + \mu_{\text{т}} + \mu_{\text{п.с}},$$

где $\mu_{\text{лв}} = \gamma_{\text{лв}} \tilde{P}$ — масса РД;

$\mu_{\text{т}} = \tilde{P} / P_{\text{уд}} (1 + a_6)$ — масса топлива и баков;

$\mu_{\text{п.с}} = \gamma_{\text{п}} / p_{\text{пар}}$ — масса парашютной системы.

Масса парашютно-реактивной системы с ЖРД в зависимости от нагрузки на парашют $p_{\text{пар}}$ и тяговооруженности РД $\tilde{P}$ приведен на рис. 10.4.4. Видно, что

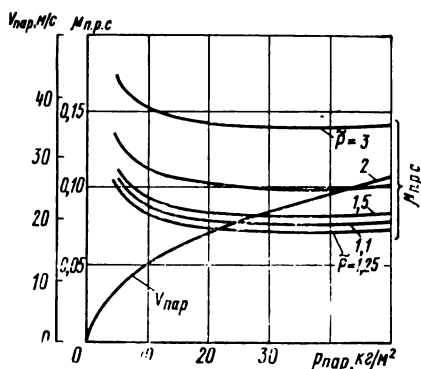


Рис. 10.4.4. Характеристики парашютно-реактивной системы приземления с ЖРД

в этом случае имеют место оптимальное значение как $p_{\text{пар}}$, так и $\tilde{P}$. Масса системы получается почти в 2 раза меньше чем масса реактивной системы с ЖРД. Оптимальная тяговооруженность существенно меньше, чем для реактивной системы, и близка к $\tilde{P} = 1,2 \div 1,3$. Скорость снижения при оптимальной нагрузке на парашют $p_{\text{пар}} = 20 \div 40 \text{ кг/м}^2$ равна $V_{\text{пар}} = 18 \div 25 \text{ м/с}$. По массе такая система почти не уступает парашютной системе с амортизацией, обеспечивая при этом

существенное преимущество — мягкую посадку.

Парашютно-реактивная система дает выигрыш в массе лишь для ЖРД и ПРД. В комбинации с ТРД выигрыш в массе получается небольшим. Парашютно-реактивная система с ПРД успешно применялась на СА кораблей «Восход» и «Союз», обеспечивая надежное и комфортабельное приземление экипажа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПЛАНЕТ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Астрономические знаки и обозначения

- ☉ Солнце (Гелиос)
☿ Меркурий (Гермес)
♀ Венера (Афродита)
♁ или (♁) Земля (Земля)
♂ Марс (Арес)
♃ Юпитер (Зевс)
♄ Сатурн (Кронос)
♅ Уран (Уран)
♆ Нептун (Посейдон)
♇ Плутон (Гадес)
☾ Луна (Селена)
♈ созвездие Овен, а также точка весеннего равноденствия планеты
♊ точка восходящего узла
В скобках даны греческие названия планет.

Средние элементы орбит планет

Средние элементы орбит планет меняются со временем. Существуют формулы для определения средних элементов орбит планет в функции времени, отсчитываемого в юлианских столетиях от некоторой выбранной эпохи. Для планет земной группы эти формулы имеются в Астрономическом ежегоднике *, для планеты Юпитер—в книге Мишо **. Наиболее полно эти формулы даны в [53]. На основании указанной литературы ниже приводятся формулы для расчета средних элементов больших планет, в которых аргументом является время:

$$T = \frac{(J.D.) - (J.D.)_0}{36525,0},$$

где $(J.D.)_0 = 2415020,0$ (январь 0,5, 1900) — начальная эпоха;

$J.D.$ — текущая юлианская дата;

36525,0 — число юлианских дней в юлианском столетии.

Средние элементы орбит больших планет выражаются зависимостями:

ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТ ПЛАНЕТ

Меркурий

$$\begin{aligned}\lambda &= 178^{\circ}10'44''.68 + 538106654''.80 T + 1''.084 T^2; \\ \pi &= 75^{\circ}53'58''.91 + 5599''.76 T + 1''.061 T^2; \\ \Omega &= 47^{\circ}8'45''.40 + 4266''.75 T + 0''.626 T^2; \\ i &= 7^{\circ}0'10''.37 + 6''.699 T - 0''.066 T^2; \\ e &= 0,20561421 + 0,00002046 T - 0,000000030 T^2; \\ a &= 0,3870984.\end{aligned}$$

* Астрономический ежегодник СССР на 1974 год. М., «Наука», 1972.

** Мишо Ш. Планета Юпитер. М., «Мир», 1970.

Венера

$$\begin{aligned}\lambda &= 342^{\circ}46'1'',39 + 210669162'',88 T + 1'',1148 T^2; \\ \pi &= 130^{\circ}9'49'',8 + 5068'',93 T - 3'',515 T^2; \\ \Omega &= 75^{\circ}46'46'',73 + 3239'',46 T + 1'',476 T^2; \\ i &= 3^{\circ}23'37'',07 + 3'',621 T - 0'',0035 T^2; \\ e &= 0,00682069 - 0,00004774 T + 0,000000091 T^2; \\ a &= 0,72333015.\end{aligned}$$

Земля

$$\begin{aligned}\lambda &= 99^{\circ}41'48'',04 + 129602768'',13 T + 1'',089 T^2; \\ \pi &= 101^{\circ}13'15'',0 + 6189'',03 T + 1'',63 T^2 + 0'',012 T^3; \\ \Omega &= 0^{\circ}; \\ i &= 0^{\circ}; \\ e &= 0,01675104 - 0,00004180 T - 0,000000126 T^2; \\ a &= 1,00000023.\end{aligned}$$

Марс

$$\begin{aligned}\lambda &= 293^{\circ}44'51'',46 + 68910117'',33 T + 1'',1184 T^2; \\ \pi &= 334^{\circ}13'5'',53 + 6626'',73 T + 0'',4675 T^2 - 0'',0043 T^3; \\ \Omega &= 48^{\circ}47'11'',19 + 2775'',57 T - 0'',005 T^2 - 0'',0192 T^3; \\ i &= 1^{\circ}51'1'',20 - 2'',430 T + 0'',0454 T^2; \\ e &= 0,09331290 + 0,000092064 T - 0,000000077 T^2; \\ a &= 1,52368839.\end{aligned}$$

Юпитер

$$\begin{aligned}\lambda &= 238^{\circ}2'57'',32 + 10930687'',148 T + 1'',20486 T^2 - 0'',005936 T^3; \\ \pi &= 12^{\circ}43'15'',34 + 5795'',862 T + 3'',80258 T^2 - 0'',01236 T^3; \\ \Omega &= 99^{\circ}26'36'',19 + 3637'',908 T + 1'',2680 T^2 - 0'',03064 T^3; \\ i &= 1^{\circ}18'31'',45 - 20'',506 T + 0'',014 T^2; \\ e &= 0,04833475 + 0,000164180 T - 0,0000004676 T^2 - 0,0000000017 T^3; \\ a &= 5,202561.\end{aligned}$$

Сатурн

$$\begin{aligned}\lambda &= 266^{\circ}33'51'',76 + 4404635'',5810 T + 1'',16835 T^2 - 0'',021 T^3; \\ \pi &= 91^{\circ}5'53'',38 + 7050'',297 T + 2'',9749 T^2 + 0'',0166 T^3; \\ \Omega &= 112^{\circ}47'25'',40 + 3143'',5025 T - 0'',54785 T^2 - 0'',0191 T^3; \\ i &= 2^{\circ}29'33'',07 - 14'',108 T - 0'',05576 T^2 + 0'',00016 T^3; \\ e &= 0,05589232 - 0,00034550 T - 0,000000728 T^2 + 0,0000000074 T^3; \\ a &= 9,554747.\end{aligned}$$

Уран

$$\begin{aligned}\lambda &= 244^{\circ}11'50'',89 + 1547508'',765 T + 1'',13774 T^2 - 0'',002176 T^3; \\ \pi &= 171^{\circ}32'55'',14 + 5343'',958 T + 0'',8539 T^2 - 0'',00218 T^3; \\ \Omega &= 73^{\circ}28'37'',55 + 1795'',204 T + 4'',722 T^2; \\ i &= 0^{\circ}46'20'',87 + 2'',251 T + 0'',1422 T^2; \\ e &= 0,0463444 - 0,00002658 T + 0,000000077 T^2; \\ a &= 19,21814.\end{aligned}$$

Нептун

$$\begin{aligned}\lambda &= 84^{\circ}27'28'',78 + 791589'',291 T + 1'',15374 T^2 - 0'',002176 T^3; \\ \pi &= 46^{\circ}43'38'',37 + 5128'',468 T + 1'',40694 T^2 - 0'',002176 T^3; \\ \Omega &= 130^{\circ}40'52'',89 + 3956'',166 T + 0'',89952 T^2 - 0'',016984 T^3; \\ i &= 1^{\circ}46'45'',27 - 34'',357 T - 0'',0328 T^2; \\ e &= 0,00899704 + 0,000006330 T - 0,000000002 T^2; \\ a &= 30,10957.\end{aligned}$$

Синодические периоды обращения планет

Планета	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Меркурий	∞	0,39580	0,31726	0,27622	0,24584	0,24284	0,24154	0,24120	0,24108
Венера	0,39580	∞	1059871	0,91424	0,64886	0,62833	0,61975	0,61752	0,61674
Земля	0,31726	1,59871	∞	2,1354	1,09211	1,03518	1,01209	1,00615	1,00408
Марс	0,27622	0,91424	2,1354	∞	2,23533	2,00918	1,92396	1,90261	1,89524
Юпитер	0,24584	0,64886	1,09211	2,23533	∞	19,85931	13,81242	12,78236	12,45704
Сатурн	0,24284	0,62833	1,03518	2,00918	19,85931	∞	45,36307	35,86985	33,42057
Уран	0,24154	0,61975	1,01209	1,92396	13,81242	45,36307	∞	171,403	126,94673
Нептун	0,24120	0,61752	1,00615	1,90261	12,78236	35,86985	171,403	∞	—489,4482
Плутон	0,24108	0,61674	1,00408	1,89524	12,45704	33,42058	126,94673	489,4482	∞

Плутон

$T = 1989$, октябрь 0,0344;

$\pi = 113^{\circ}31'17''.72$;

$\Omega = 108^{\circ}57'16''.18$;

$i = 17^{\circ}8'48''.40$;

$e = 0,2486438$;

$a = 39,517738$.

Здесь $\lambda = \Omega + \omega + M$ — средняя долгота, M — средняя аномалия.

После определения средних элементов орбиты планеты среднюю $M_{пл}$ и истинную $v_{пл}$ аномалии, а также аргумент широты $u_{пл}$ планеты можно вычислить по соотношениям:

$$M_{пл} = \lambda_{пл} - \pi_{пл},$$

$$v_{пл} = M_{пл} + \left(2e_{пл} - \frac{e_{пл}^2}{4} + \frac{5}{96} e_{пл}^5 \right) \sin M_{пл} + \left(-\frac{5}{4} e_{пл}^2 - \frac{11}{24} e_{пл}^4 \right) \sin 2M_{пл};$$

$$u_{пл} = \pi_{пл} + v_{пл} - \Omega_{пл};$$

для Земли

$$\tilde{u}_{\oplus} = \pi_{\oplus} + v_{\oplus}.$$

Синодические периоды обращения планет

Синодический период определяется как интервал времени между двумя последовательными совпадениями гелиоцентрических долгот одной планеты относительно другой. Значения синодических периодов обращения планет в тропических годах даны в таблице.

Средние экваториальные геоцентрические координаты северного полюса планеты

Экваториальными геоцентрическими координатами северного полюса планеты являются α_N и δ_N , средние значения которых с учетом прецессии определяются следующими формулами [1, стр. 53, 57, 58].

Марс

$$\alpha_N = 316,844^{\circ} + 0,6533^{\circ} T_e, \quad \delta_N = +53,009^{\circ} + 0,3542^{\circ} T_e.$$

Юпитер

$$\alpha_N = 17^h 52^m 10,72^s + 24,7^s T_e, \quad \delta_N = +64^{\circ} 33' 10'', 6 - 60'' T_e,$$

Сатурн

$$\alpha_N = 2^h 33^m 39^s, 93 + 1015^s, 20 T_e + 56^s 18 T_e^2 + 2^s, 55 T_e^3,$$

$$\delta_N = +83^{\circ} 18' 37,3'' + 1570'', 4 T_e - 46'', 3 T_e^2 - 3'', 1 T_e^3,$$

где

$$T_e = \frac{(\text{J. D.}) - 2433282,4234}{36524,22}$$

J. D. — текущая юлианская дата;

(J. D.)₀ = 2433282,4234 (январь 0,5, 1950) — начальная эпоха;

36524,22 — эфемеридные сутки тропического столетия.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Азимут запуска 105
- Аномалия
 - истинная 36
 - эксцентрическая 40
- Вектор
 - Лапласа
- баллистического движения 35
- управляемого невозмущенного движения 34
 - момента количества движения 32
 - цели 102, 225
- Дальность
 - угловая 356, 357
 - полета в атмосфере 359
- Движение
 - баллистическое 20, 39
- относительное 22
 - гиперболическое 40, 46
 - кеплерово 30
 - относительное возмущенное 22
 - невозмущенное 29
- управляемое 29
 - баллистическое 29
 - параболическое 42
 - управляемое 19
- относительное 21
 - эллиптическое 40, 45
- Дата
 - старта 141, 154, 174, 180, 265
 - прилета 265, 275
- Долгота
 - восходящего узла 199
 - ожидания 283
- Задача
 - баллистического расчета гелиоцентрического участка 235
 - запуска в правильный момент времени 107
 - навигационная 234
 - навигационно-баллистическая 215, 225, 233
 - проектная 234, 240
 - проектно-баллистическая 215, 216, 230
- Закон
 - всемирного тяготения Ньютона 12
 - тангенциального управления 68
- Зона
 - видимости с орбиты 201
- Изменение
 - вековое элемента 48
- Импульс
 - промежуточный 81
- Изолинии
 - поле 154, 156, 267, 274
 - гиперболического избытка скорости 154
 - склонения 155
 - характеристической скорости 153, 267, 274
- Интеграл
 - векторный Лапласа 34
 - момент количества движения 32
- управляемого 32
- баллистического 32
 - энергии движения 30
- управляемого 30
- баллистического 31
- Календарь
 - полетов 144, 145
- Маневр
 - активно-гравитационный 124
 - гравитационный (пертурбационный) 95, 121
 - поворота плоскости орбиты 116
- в грависфере планеты 111
- импульсного поворота оси апсид 118, 119
- Метод
 - достижимых областей 164
 - ипсилон-итерации 59
 - импульсной аппроксимации 87
 - конечных тяг 87
 - Ламберта 50
 - попадающих траекторий 60
- Модуль
 - разгонный 89, 215
 - тормозной 89, 215, 230
- Нагрузка на «лоб» 357
- Орбита
 - гиперболическая 239
- отрыва 86
- прибытия 86
 - конечная 77
 - мгновенная 35
 - наклонение 199

- ожидания 282
- параболическая 239
- промежуточная 86
- управление 36
- элементы 42, 43
- эллиптическая 239
- Параметр
 - фокальный 36, 57
- Перегрузка
 - осевая 358
- Переход
 - гипербола—гипербола 124
 - эллипс—гипербола 112
- перичентральный 112
- неперичентральный 113
- Период
 - великих противостояний 302, 305
 - драконический 49
 - обращения по орбите 198
 - синодический 142, 300
- суммарный 301
- Плоскость
 - базовая 268
 - мгновенная 32
 - уравнение 33
- Потенциал
 - гравитационный 17
- Притяжение
 - небесного тела 16
 - постоянная 12
- гауссово 12
- системы конечных точек 18
- Скорость
 - входа в атмосферу 357
 - встречи с планетой 207
 - старта 146, 205
 - торможения 206
- Сфера
 - гравитационная планеты 25
 - действия 23
- Схема
 - взлета с поверхности 131
 - межпланетного полета 90
 - спуска с орбиты 353
- Точка
 - материальная 11
- Тело
 - центральное 21
- Траектория
 - межпланетного полета 161, 162, 163
 - облета планеты 94
 - полувитка
 - 1-го 154
 - 2-го 154
 - ускоренная 149, 191
 - Хомана 138
 - эллиптическая 53
- граничная 53
- первого рода 53
- второго рода 53
- Уравнение
 - движения
 - в атмосфере 357
 - векторное дифференциальное 21
 - Ламберта 52
 - обобщенное 53
- Угол
 - наклона траектории 354
- асимптоты 107
- Участок
 - гелиоцентрический 259
 - разгона 20, 64
- непрерывный 101
- торможения 20, 77
- Функция
 - силовая
 - материальной точки 13
 - системы материальных точек 18
 - свойства 13, 15
 - тела 14
- Эксцентриситет
 - орбиты 39

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П. и др. Справочное руководство по небесной механике и аэродинамике. М., «Наука», 1971.
2. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г., Ярошевский В. А. Маневрирование космических аппаратов. М., «Машиностроение», 1970.
3. Андреевский В. В. Динамика спуска космических аппаратов на Землю. М., «Машиностроение», 1970.
4. Балк М. Б. Элементы динамики космического полета. М., «Наука», 1965.
5. Баузе В. Р. Э., Дашков А. А., Кубасов В. Н. Траектории облета планеты с возвращением к Земле. — «Космические исследования», 1968, т. VI, вып. 6.
6. Бачманов А. А., Соловьев Ц. В., Филимонов В. Н. Динамика изменения оптимальных характеристик одноимпульсных траекторий межпланетных полетов. — «Космические исследования», 1971, т. IX, вып. 4.
7. Бэттин Р. Наведение в космосе. М., «Машиностроение», 1966.
8. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. М., «Наука», 1966.
9. Дашков А. А., Ивашкин В. В. Об одном замечательном свойстве пучка гиперболических траекторий. — «Космические исследования», 1965, т. III, вып. 5.
10. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М., «Наука», 1968.
11. Дубовский С. В. Межорбитальные и межпланетные перелеты. — «Космические исследования», 1967, т. V, вып. 4.
12. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., Физматгиз, 1961.
13. Дубошин Г. Н. Небесная механика (Основные задачи и методы). М., Физматгиз, 1963.
14. Дубошин Г. Н., Охочимский Д. Е. Некоторые проблемы аэродинамики и небесной механики. — «Космические исследования», 1963, т. 1, вып. 2.
15. Егоров В. А. Некоторые вопросы оптимизации траекторий зондирования межпланетного пространства. — «Автоматика и телемеханика», 1970, № 5.
16. Егоров В. А. К вопросу о захвате в ограниченной круговой проблеме трех тел. — В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 3, 1959.
17. Евтушенко Ю. Г. и др. Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли. ВЦ АН СССР, 1967.
18. Жуковский Н. Е. Теория притяжения. Сборник сочинений, т. 5, Гостехиздат, 1949.
19. Иванов Н. М., Мартынов А. И. О максимальной допустимой нагрузке на лобовую поверхность аппарата, осуществляющего аэродинамический спуск в атмосфере Марса. — «Ученые записки ЦАГИ», 1971, т. II, вып. 3.
20. Ивашкин В. В., Скорыходов А. П. Оптимальный пространственный одноимпульсный переход с гиперболической орбиты на круговую. — «Космические исследования», 1971, т. IX, вып. 4.
21. Ильин В. А. Переход на орбиту ИСЗ за счет торможения в атмосфере. — «Инженерный журнал», 1963, т. III, вып. 2.

22. Ильин В. А. К расчету траекторий перелета КЛА между компланарными круговыми орбитами в ньютоновском гравитационном поле. — «Космические исследования», 1964, т. II, вып. 5.
23. Казаков Р. К., Киселев В. Г., Платонов А. К. Исследование свойств энергетически оптимальных орбит полета к Юпитеру. — «Космические исследования», 1968, т. VI, вып. 1.
24. Кислик М. Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. — В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 4, 1960.
25. Кислик М. Д. Анализ интегралов движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. — В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 13, 1962.
26. Кислик М. Д. Сферы влияния больших планет и Луны. — «Космические исследования», 1964, т. II, вып. 5.
27. Космические траектории. М., ИЛ, 1963.
28. Космическая эра. Прогнозы на 2001 годы. М., «Мир», 1970.
29. Космонавтика (Маленькая энциклопедия). М., «Советская энциклопедия», 1970.
30. Куликов К. А. Новая система астрономических единиц. М., «Наука», 1969.
31. Левантовский В. И. Механика космического полета (в элементарном изложении). М., «Наука», 1970.
32. Ливанов Л. Б. Об одном классе оптимальных импульсных перелетов Земля—планета—Земля. — «Космические исследования», 1971, т. IX, вып. 2.
33. Лоуден Д. Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М., «Мир», 1966.
34. Лох В. Динамика и термодинамика спуска в атмосфере планеты. М., «Мир», 1966.
35. Мартин Д. Вход в атмосферу. Введение в теорию и практику. М., «Мир», 1969.
36. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Лейтмана. М., «Наука», 1965.
37. Механика в СССР за 50 лет (Механика космического полета. Небесная механика), т. I. М., «Наука», 1968.
38. Основы теории полета космических аппаратов. М., «Машиностроение», 1972.
39. Пономарев В. М. Теория управления движением космических аппаратов. М., «Наука», 1965.
40. Современное состояние механики космического полета. Под ред. П. Б. Ричардса. М., «Наука», 1969.
41. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968.
42. Тарасов Е. В. Оптимальные режимы полета летательных аппаратов. М., Оборонгиз, 1963.
43. Тарасов Е. В. Алгоритм оптимального проектирования летательного аппарата. М., «Машиностроение», 1970.
44. Тарасов Е. В., Лабунский А. В. Оптимизация проектно-баллистических характеристик межпланетного аппарата для перелета на орбиту ИС планеты назначения. — «Труды VI чтений, посвященные разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского», 1972.
45. Тихонов М. К. О точном учете ускорений, вызываемых влиянием небесных тел, в формулах для возмущений элементов орбиты космического аппарата. — «Космические исследования», 1968, т. VI, вып. I.
46. Уайлд Н. Д. Методы поиска экстремума. М., «Наука», 1967.
47. Циолковский К. Э. Избранные труды. М., АН СССР, 1962.
48. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики. М., «Наука», 1965.
49. Штернфельд А. Я. Введение в космонавтику. М., ОНТИ, 1937.
50. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственного спутника Земли. М., «Наука», 1965.

51. Эрик К. Космический полет. т. I. М., Физматгиз, 1963; т. II, ч. I, «Наука», 1969; ч. 2, «Наука», 1970.
52. Эскобал П. Методы определения орбит. М., «Мир», 1970.
53. Эскобал П. Методы астродинамики. М., «Мир», 1971.
54. Battin R. H. A new solution for Lambert's problem (Новое решение задачи Ламберта). IAF Paper, No. AD 101, 1968.
55. De Bra D. B. Vectors and dysdics: the natural tools of space vehicle mechanics, Preprint. Amer. Astronaut. Soc., 1961, No. 76 (Применение векторно-тензорных методов при исследовании проблем механики космического полета, А. Р., 1962, № 4, реф. 17).
56. Bourke R. D., Beerer F. G. Mariner mission to Venus and Mercury in 1973, Astronaut. and Aeronaut., 1971, vol. 9, No. 1 (Проект запуска в 1973 г. космического аппарата для исследования Венеры и Меркурия, А. Р., 1971, № 30, реф. 425).
57. Breakwell J. V., Gillespie R. W., Ross S. Research in interplanetary transfer, Amer. Rocket. Soc. Preprints, No. 954—59 (Быстрый метод расчета траекторий межпланетных перелетов, А. Р., 1960, № 30, реф. 108).
58. Breakwell J. V., Trajectories launches normal to the ecliptic, XIV Congr. internat. astronaut., 1963 (Траектории космических аппаратов, запускаемых перпендикулярно к плоскости эклиптики, А. Р., 1964, № 27, реф. 130).
59. Deerwester J. M., D'Haem S. M. Систематизированное сравнение перелетов к Марсу с пролетом около Венеры с возвращением обычного типа. AIAA, J., 1967, vol. 5, No. 8.
60. Fimple W. R. Изменение плоскости межпланетных траекторий на среднем участке полета. А. Р., 1963, № 20, реф. 122.
61. Faust N. L., Murtagh T. B. Manned Mars lander launch-to-rendezvous analysis for a 1981 Venus-Swingby mission, AIAA Paper, 1970, No. 1075 (Анализ маневра старта с поверхности Марса пилотируемого космического корабля и встречи его с орбитальным кораблем для перелета Земля — Марс — Земля с облетом Венеры в 1980 г., А. Р., 1971, № 17, реф. 247).
62. Gillespie R. W., Ross S. Перелет к Марсу с пролетом мимо Венеры и его роль в исследовании с помощью пилотируемых аппаратов. AIAA J., 1967, vol. 5, No. 5.
63. Gobetz F. W. Оптимальные переходы между асимптотами гиперболических орбит. AIAA J., 1963, vol. 1, No. 9.
64. Gobetz F. W., Doll J. R. Импульсные траектории (обзор). AIAA J., 1969, vol. 7, No. 5.
65. Greenwood S. W. Orbits for solar exploration: a review (Орбиты для исследования Солнца. Обзор). Canad. Aeronaut and Space J., 1967, vol. 13, No. 10.
66. Hazerling G. A. Оптимальные межпланетные траектории для КЛА с ЖРД. А. Р., 1971, № 6, реф. 94.
67. Kaufman B. Влияние галилеевых спутников на траектории полета у Юпитера. AIAA J., 1970, vol. 8, No. 7.
68. Kellermeier H. E., Koelle D. E., Muller W. Bahnmechanische und technische Probleme einer Merkur Ely-by Mission. (Механико-баллистические проблемы, связанные с пролетом Меркурия). Baumfahrtforschung, 1970, Bd. 4, H. 1.
69. Klopp D. A., Niehoff J. C. Jupiter gravity-assisted trajectories (Траектории полета с использованием силы притяжения Юпитера). J. Spacecraft and Rockets, 1969, 6, No. 4.
70. Lascoy D. N., Thorson E. D. and oth. Анализ перелета Земля — Марс — Земля в период 1975—1985 гг. AIAA J., 1965, vol. 3, No. 10.
71. Lee V. A., Wilson S. W., Jr. Обзор работ по баллистическим перелетам к Марсу. AIAA J., 1967, vol. 5, No. 5.
72. Manning L. A. Trajectory modes for manned and unmanned missions to Mercury. J. Spacecraft and Rockets, 1967, vol. 4, No. 9 (Схемы перелетов пи-

лотируемых и беспилотных космических аппаратов к Меркурию в период 1980—2000 гг., А. Р., 1968, № 3, реф. 18).

73. Müller W. Bedeutung der Swingby-Technik am Planeten Jupiter für interplanetäre Missionen (Значение для межпланетных траекторий эффекта изменения энергии движения при близком прохождении Юпитера). *Raumfahrtforschung*, 1968, Bd. 12, Nr. 4.

74. Niehoff J. C. Gravity-assisted trajectories to solar-system targets. *J. Spacecraft and Rockets*, 1966, vol. 3, No. 9 (Траектории к планетам солнечной системы с пролетом промежуточных планет, А. Р., 1967, № 5, реф. 64).

75. Norman S. M. A comparison of passage conditions at the outer planets for several flyby trajectory modes, *AIAA Paper*, 1970, No. 1071 (Сравнение условий прохождения вблизи внешних планет для нескольких типов траекторий облета, А. Р., 1971, № 1, реф. 1).

76. Ragsac R. V., Titus R. R. Оптимизация траекторий межпланетных перелетов с «задержкой» около планет (полет на Марс), *AIAA, J.*, 1963, vol. 1, No. 8.

77. Silver R. W. Grand Tours of the Jovian planets («Большой тур» к планетам группы Юпитера). *J. Spacecraft and Rockets*, 1968, vol. 5, No. 6.

78. Sohn R. L. Mars — Venus flyby missions with manned Mars landers. *J. Spacecraft and Rockets*, 1967, vol. 4, No. 1 (Облет Марса и Венеры с посадкой на Марс пилотируемого отсека, А. Р., 1967, № 20, реф. 1167).

79. Titus R. R. Powered flybys of Mars. *Astronaut. Acta*, 1965, vol. 11, No. 5.

80. Tops: Outer-planet Spacecraft, *Astronaut. and Aeronaut.*, 1970, vol. 8, No. 9 (Космический аппарат: Tops для полета по программе Grand Tour (обзор), А. Р., 1971, № 25, реф. 374—384).

81. Vickery J. D., Horwood J. L. Mission window definition for Jupiter swingbys to the outer planets (Окна запуска при полетах к внешним планетам с гравитационным маневром у Юпитера). *J. Spacecraft and Rockets*, 1969, vol. 6, No. 5.

82. Willes E. A. Jr. New class of optimal interplanetary trajectories. with specified trip time. *AIAA Paper*, 65—36, 1965.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
От авторов	8
Условные обозначения	9
Глава I. Основы теории движения космических летательных аппаратов	11
§ 1. Элементы теории притяжения	11
§ 2. Относительное движение КЛА в поле тяготения Солнца и планетных систем. Грависферы планет	19
§ 3. Управляемое и баллистическое движение КЛА в поле тяготения одного небесного тела	28
Глава II. Методы расчета участков межпланетных траекторий . . .	50
§ 1. Определение орбит по двум положениям КЛА	50
§ 2. Метод «попадающих траекторий»	60
§ 3. Приближенный метод решения дифференциальных уравнений управляемого движения КЛА	63
§ 4. Расчет траекторий с промежуточным импульсом	80
Глава III. Схемы и траектории полета межпланетных аппаратов	85
§ 1. Характеристики траекторий межпланетного перелета	85
§ 2. Классификация схем полета межпланетных аппаратов . . .	90
Глава IV. Планетоцентрические участки полета	101
§ 1. Кинематические параметры участка выведения с промежуточной орбитой на гиперболу отрыва от Земли	101
§ 2. Импульсные маневры КЛА в гравитационной сфере планеты	111
§ 3. Выбор схемы выведения и параметров ракетной ступени взлета с поверхности Марса	130
Глава V. Пролетные и попадающие межпланетные траектории . .	138
§ 1. Календарь полетов к планетам	138
§ 2. Оптимизация гелиоцентрических участков межпланетных траекторий перелета на полях изолиний	153
§ 3. Изменение характеристик оптимальных траекторий по циклам полетов	163
Глава VI. Траектории полета межпланетных аппаратов с выходом на орбиту около планеты	193
§ 1. Особенности задачи оптимизации межпланетных траекторий с выходом на орбиту около планеты назначения	193
§ 2. Выбор параметров орбиты спутника планеты	197
§ 3. Характеристики оптимальных траекторий для различных циклов полетов	203
	399

	<i>Стр.</i>
Глава VII. Оптимизация проектно-баллистических характеристик межпланетных аппаратов с учетом протяженности активных участков полета	213
1. Оптимизация основных проектных параметров и планетоцентрических участков полета межпланетных аппаратов	213
§ 2. Метод расчета и оптимизация проектно-баллистических характеристик межпланетного аппарата с учетом стыковки гелиоцентрического участка с планетоцентрическими участками траектории	234
§ 3. Оптимизация проектных решений межпланетного аппарата с учетом размеров грависфер планет	254
Глава VIII. Траектории полета к одной планете с возвращением к Земле	265
§ 1. Оптимизация гелиоцентрических участков	265
§ 2. Характеристики межпланетных траекторий КЛА с возвращением к Земле	276
§ 3. Выбор схемы формирования орбиты ожидания у планеты	282
Глава IX. Траектории полета межпланетных аппаратов к нескольким планетам	299
§ 1. Оценка цикличности полетов к нескольким планетам	299
§ 2. Траектории полета к Марсу с возвращением к Земле и с использованием гравитационного поля Венеры	307
§ 3. Полет к Меркурию с использованием гравитационного поля Венеры	325
§ 4. Маневры КЛА с использованием гравитационного поля Юпитера	334
Глава X. Траектории спуска в атмосферах планет	353
§ 1. Спуск с орбиты ИСЗ	353
§ 2. Спуск в атмосфере Земли с гиперболической скоростью	362
§ 3. Спуск космических аппаратов в атмосферах планет	375
§ 4. Оптимизация параметров систем мягкой посадки СА	382
Приложение. Краткая характеристика Солнечной системы	389
Предметный указатель	393
Список литературы	395

Цезарь Васильевич *Соловьев*, Евгений Васильевич *Тарасов*

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПОЛЕТОВ

Редактор издательства *М. Ф. Богомолова*, Технический редактор *А. Ф. Уварова*
Переплет художника *В. Б. Торгашова*. Корректор *Е. В. Сабынич*

Сдано в набор 16/III 1973 г.	Подписано в печать 19/VII 1973 г.	Т—08272
Формат 60×90 ^{1/16}	Бумага № 2	Печ. л. 25,0 Уч.-изд. л. 23,30
Цена 2 р. 61 к.	Тираж 2000 экз.	Заказ № 3774

Издательство «Машиностроение». Москва, Б-78, 1-й Басманный пер., 3.

Московская типография № 8 «Союзполиграфпрома»
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Хохловский пер., 7. Тип. зак. 2779