

Проф М. Ф. СУББОТИН

**КУРС
НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
1933**

Замеченные опечатки.

<i>Стр.</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Должно быть</i>
69	22 св.	ρ'	ρ_0
201	5 св.	$1^{(0)}$	$f_1^{(0)}$
272	19 св.	Из соотношений (1) и (13)	Из соотношений (1) и (3)
273	1 св.	$x\left(t_0 + \frac{w}{2}\right) =$	$x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) =$
274	11—15 св.	$11: 720 = 1:0\,000\,107$ $191: 60\,480 = 1:0\,000\,004$ $2\,497: 362\,880 = 1:0\,000\,000$ $17: 5\,760 = 1:0\,000\,001$ $367: 967\,680 = 1:0\,000\,000$	$11: 720 = 1: 65 - 0.000\,107$ $191: 60\,480 = 1: 317 + 0.000\,004$ $2\,497: 3\,628\,800 = 1: 1453 - 0.000\,000$ $17: 5\,760 = 1: 339 + 0.000\,001$ $367: 967\,680 = 1: 2637 + 0.000\,000$
277	8 св.	(21)	(23)
282	7 св.	$\Delta^m =$	$\Delta_n^m =$
316	27 св.	F. Fisserand	F. Tisserand

Будботки

Проф. М. Ф. СУББОТИН

К У Р С

НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

ТОМ I



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1933 МОСКВА

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая книга посвящена основам Небесной механики, а именно теории невозмущенного движения планет и комет. По своему содержанию она соответствует, таким образом, первой половине университетского курса Небесной механики, называемой прежде Теоретической астрономией, а теперь носящей название Определения орбит. В основу изложения положены лекции, читанные мною с 1922 года по настоящее время сначала в Ташкентском, затем в Ленинградском университетах.

Нужно, однако, отметить, что я не ограничился рамками университетского курса и предпочел рассмотреть вопросы определения орбит со всей полнотой, необходимою для того, чтобы эта книга могла быть не только учебником, но и справочным пособием для астрономов, вычисляющих орбиты.

Хотя я и стремился к возможной сжатости изложения и избегал воспроизведения элементарных выкладок или лишних примеров, тем не менее удобопонятность никогда не приносилась в жертву сжатости. Я надеюсь поэтому, что выпускаемое руководство будет так же полезно и для любителей Астрономии, интересующихся вычислением орбит и обладающих хотя бы элементарными сведениями по высшей математике.

Сдвиг, произошедший за последние 20 лет во внешнем оформлении классических методов определения орбит (вызванный, главным образом, распространением арифмометров), уже нашел свое выражение в учебнике Stracke, *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, вышедшем в 1929 г. Изложение основных проблем вычисления орбит, которое читатель найдет ниже, конечно близко к изложению Stracke, ибо обе книги отражают одну и ту же эпоху в развитии науки. Но в то время как Stracke стремится научить читателя лишь технике вычисления орбит, я рассматриваю проблему определения орбит как часть Небесной механики и, сообразно с этим, уделяю больше внимания теории кеплерова движения (не пренебрегая, однако, и технической стороной дела).

Я ограничиваюсь подробным изучением классических методов Гаусса и Ольберса в их современном оформлении и не останавливаюсь ни на одном из многочисленных способов вычисления орбит, в таком изобилии предлагавшихся в течение последних 40—50 лет. Объясняется это тем, что проблему определения первоначальной орбиты я рассматриваю как практическую проблему Небесной механики, а не как самодовлеющую математическую задачу. По-

скольку указанная проблема с исчерпывающей полнотой и всей возможной простотой разрешается методами Гаусса и Ольберса, я не считал полезным загружать учебник другими вариантами ее решения, каков бы ни был математический интерес, представляемый этими вариантами. Тем более, что все позднейшие методы не получили широкого практического применения; во всяком случае их распространение никогда не выходило за пределы личного влияния автора.

Это не значит, что все многочисленные усилия улучшить классические методы вычисления орбит были бесплодны и что эти методы вышли из рук их творцов в столь совершенной форме, что последующие поколения уже не смогли ничего прибавить. Напротив, ценные идеи авторов новых методов часто удавалось использовать для внесения соответствующих улучшений в методы Гаусса и Ольберса. Так, например, когда работы Moulton'a, Charlier, Andoyer и других выяснили целесообразность применения прямолинейных координат и направляющих косинусов вместо сферических координат, то соответствующая замена была произведена и в классических методах; когда были созданы методы, основанные на замене дифференциальных уравнений движения приближенными соотношениями между координатами светила и интервалами времени (методы W. Gibbs'a, Р. Фогеля, Б. В. Нумерова и др.), то эти соотношения (формулы Джиббса) нашли свое естественное место и в способе Гаусса.

Вопросы численного интегрирования дифференциальных уравнений, столь важные для Небесной механики, выделены в особое приложение, помещенное в конце тома. Это приложение воспроизводит вкратце одну из глав курса численного интегрирования, читаемого мною студентам как астрономической, так и математической и механической специальностей.

Другое приложение к настоящему тому состоит из небольшого собрания таблиц, выбранных таким образом, чтобы избавить читателя от необходимости обращаться к специальным сборникам — по крайней мере во всех обычно встречающихся случаях.

В заключение замечу, что я придерживался, как общее правило, десятичного деления градуса, которое несомненно скоро вытеснит окончательно архаическое деление на минуты и секунды. Но так как таблицы с десятичным делением у нас только начинают издаваться, а заграничные мало кому доступны, то часть примеров была вычислена при помощи обычных тригонометрических таблиц.

М. Субботин.

Пулковская Обсерватория, февраль 1933 г.

Часть первая.

ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОЕ И ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ.

ГЛАВА I.

ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ.

Первая глава включает прежде всего краткий обзор основных этапов развития механики Космоса. Этот обзор предполагает, конечно, знакомство с историей Астрономии, а потому имеет своей целью лишь напомнить некоторые факты, главным образом математического характера.

Для изучения следующего вопроса—динамических следствий из эмпирических законов Кеплера, необходимо знание основ Динамики точки. Изучение этого вопроса подводит нас к закону Ньютона—основе всей Небесной механики. Фундаментальная важность этого закона заставляет подробно остановиться на его обосновании, тем более, что это обоснование является одним из поучительнейших примеров в истории науки.

Следующий далее обзор важнейших проблем, стоящих перед Небесной механикой, заканчивается двумя теоремами из теории притяжения, позволяющими свести изучение движения планет и комет к задаче о движении материальных точек. Доказательство первой из этих теорем (§ 7), для которого нужны некоторые основные понятия из Динамики твердого тела, при первоначальном изучении может быть опущено

§ 1. ЭМПИРИЧЕСКАЯ КИНЕМАТИКА СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ.

Одной из первых астрономических проблем, с которой встретилось человечество, было отыскание закономерностей в движениях Солнца, Луны и больших планет.

Первые теоретические представления, оставившие прочный след в науке, мы встречаем у философов пифагорейской школы. Ими была установлена шарообразность Земли и произведено разложение видимого движения Солнца (совершающегося, как известно, по спирали) на два равномерных круговых движения: по экватору с суточным периодом и по эклиптике с годовым периодом.

Блестящий успех, достигнутый таким образом в объяснении движения Солнца, побудил идти дальше по тому же пути: разлагать сложные движения светил на более простые. Эта задача была отчетливо сформулирована в общем виде Платоном, согласно которому целью „истинной астрономии“ (так он называл совокупность выводов из наблюдений) является представление

движений светил при помощи сочетаний равномерных круговых движений.

Первое решение поставленной Платоном задачи дал его ученик Эвдокс Книдский (409—356), представивший видимые движения Солнца, Луны и планет при помощи сочетания равномерного вращения 27 сфер с общим центром в центре Земли. Для воспроизведения видимого движения Луны он употребил три сферы (точно так же, как и для Солнца), а для получения всех особенностей видимого движения каждой планеты (стояния, прямого и обратного движения) он ввел четыре сферы. Наконец, еще одна сфера давала суточное движение неподвижных звезд. Калипп (370—300) довел число сфер до 34 для достижения лучшего согласия с наблюдениями.

Поскольку дошедшие до нас отрывочные сведения позволяют судить о работах Эвдокса и Калиппа, эти ученые рассматривали созданную ими теорию как чисто геометрический образ, достаточно точно воспроизводящий наблюдаемые явления. Первая попытка дать физическую картину мира была сделана современником Калиппа Аристотелем (384—322): Аристотель заменил геометрические построения Эвдокса и Калиппа хрустальными сферами.

Новые пути математического представления видимых движений светил были указаны Аполлонием Пергским (конец III века до нашей эры) и Гиппархом (II век до нашей эры). Гиппарх для объяснения открытой им неравномерности движения Солнца предложил поместить центр солнечной орбиты не в центре Земли, а на некотором расстоянии от него — иначе говоря, заставил Солнце двигаться по эксцентрику. Аполлоний дал новое решение задачи объяснения прямых и обратных движений планет: он ввел для этого эпициклы и деференты.

Идеи Гиппарха и Аполлония были широко использованы Птолемеем (II век нашей эры), создавшим весьма совершенную по тому времени теорию видимых движений светил.

Теория Птолемея давала возможность, надлежало выбирать эксцентриситеты деферентов, число эпициклов, наклоны деферентов и эпициклов к эклиптике и, наконец, скорости движения по различным деферентам и эпициклам, удовлетворительно представить наблюдения того времени. Однако по мере того как наблюдения становились более многочисленными и более точными, число эпициклов, нужных для воспроизведения движения во всех подробностях, становилось все больше и больше. Если бы теорию Птолемея рассматривали лишь как математическое представление наблюдаемых явлений (аналогично нашим эмпирическим формулам), то такое усложнение никого бы не удивило. Но очень рано на теорию Птолемея установился взгляд не как на математическую фикцию, лишь описывающую видимые явления, а как на „систему мира“, т. е. выражение действительного устройства вселенной. При такой точке зрения непрерывное усложнение теории должно было неизбежно привести к сомнениям в ее истинности.

Такие сомнения (встречающиеся еще в XIII веке) привели в конце концов к созданию новой, гелиоцентрической системы мира, что было, как известно, выполнено Коперником (1473—1543).

Однако при создании гелиоцентрической системы играли весьма важную роль и другие мотивы, а не только стремление к упрощению математического аппарата. С формальной стороны система Коперника была проще птоломеевой лишь в том отношении, что самый большой эпицикл у каждой планеты был уничтожен и заменен движением Земли, все же остальные эпициклы Копернику пришлось сохранить. Но система Коперника была неизмеримо проще системы Птолемея с точки зрения законов механики, еще не сформулированных, но уже более или менее сознаваемых. Гелиоцентрическая система мира потому произвела такой радикальный переворот в Астрономии и вызвала такую страстную борьбу, что в ней был заложен новый принцип чрезвычайной важности: „небо“ подчиняется тем же законам, что и „земля“.

Другое весьма важное отличие новой системы мира (также весьма созвучное Эпохе Возрождения) заключалось в том, что система Коперника была настоящей рабочей гипотезой, открывавшей возможность предсказывать и сличать предсказания с наблюдениями, тогда как система Птолемея была лишь „чистым описанием“ видимого и потому заводи́ла науку в тупик. Например, система Птолемея закрывала путь для нахождения расстояний между Землей и планетами. Система Коперника давала возможность сразу найти относительные расстояния планет от Солнца, а следовательно и от Земли.

Все возможности, заключающиеся в новой системе мира как рабочей гипотезе, были с исключительной мощью вскрыты Кеплером (1571—1630). Кеплер показал, каким образом, комбинируя видимые положения планеты в различные моменты, можно получить ее гелиоцентрические координаты. Этим была открыта возможность следующего этапа в деле создания Кинематики солнечной системы: Кеплер смог приступить к построению эмпирической Кинематики не видимых, а действительных движений планет.

Многолетняя упорная работа привела Кеплера прежде всего к следующим результатам (1609):

1. Гелиоцентрическое движение каждой планеты происходит в неподвижной плоскости, проходящей через центр Солнца и притом так, что площадь сектора, описываемого радиусом-вектором планеты, изменяется пропорционально времени.

2. Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Эти законы были открыты сначала для Марса и Земли, а затем уже проверены для остальных планет. Мы их приводим в том порядке, в каком они были даны Кеплером. Позднее (1619) Кеплер присоединил сюда еще один закон, связывающий планетную систему в одно целое:

3. Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Установление этих законов позволило Кеплеру представить движение планет с точностью, далеко превосходящей все то, что давали прежние теории при самом чудовищном нагромождении эпициклов и эксцентриков.

§ 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ ЗАКОНОВ КЕПЛЕРА.

Созданная Галилеем (1564—1642), Гюйгенсом (1629—1695) и Ньютоном (1642—1727) Динамика позволила вывести из законов Кеплера следствия чрезвычайной важности относительно сил, производящих движение планет.

Так как движение планет отличается от прямолинейного и равномерного движения, то отсюда следует, что планеты находятся в силовом поле. Каковы же свойства этого поля? Согласно первому закону Кеплера, всякая траектория в этом поле есть плоская кривая, находящаяся в плоскости, проходящей через центр Солнца. Отсюда легко вывести, что ускорение в каждой точке поля (напряжение поля) направлено к центру Солнца. В самом деле, обозначим через S и P положения Солнца и планеты и предположим, что планета имеет начальную скорость PA . Для того, чтобы движение происходило в плоскости, заключающей точку S , необходимо чтобы ускорение лежало в плоскости SPA . Так как направление PA может быть взято произвольно, то ясно, что ускорение должно быть направлено по прямой PA . Итак, сила, действующая на каждую планету, направлена к центру Солнца.

Вторая часть первого закона (так называемый закон площадей) ничего не прибавляет нового, ибо она является следствием первой части. Действительно, взяв в плоскости орбиты координатную систему Sxu с началом в точке S и обозначив через xu координаты точки P , получим:

$$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y}, \quad (1)$$

так как ускорение, имеющее компонентами (x'', y'') , направлено, как мы только-что видели, по прямой PS .

Интегрирование равенства

$$xy'' - x''y = 0$$

даёт

$$xy' - x'y = C,$$

и

$$\int \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt = Ct + C_1, \quad (2)$$

т. е. закон площадей.

Обратно, дифференцируя равенство (2), выражающее закон площадей, получим равенство (1), показывающее, что в каждой точке поля ускорение направлено к центру Солнца; отсюда уже непосредственно следует, что движение будет происходить в плоскости, заключающей центр Солнца.

Для получения величины ускорения обратимся ко второму закону Кеплера, согласно которому планета движется по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце. Расположим оси координат так, как это указано на чертеже (рис. 1). Обозначая через a и b

большую и малую полуоси, а через e —эксцентриситет эллипса, получим его уравнение в таком виде

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

так как $OS = ae$. Но этому уравнению можно удовлетворить, полагая

$$x + ae = a \cos E, \quad y = b \sin E,$$

где E остается произвольным, следовательно эллипс можно представить следующими параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= a (\cos E - e) \\ y &= b \sin E \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

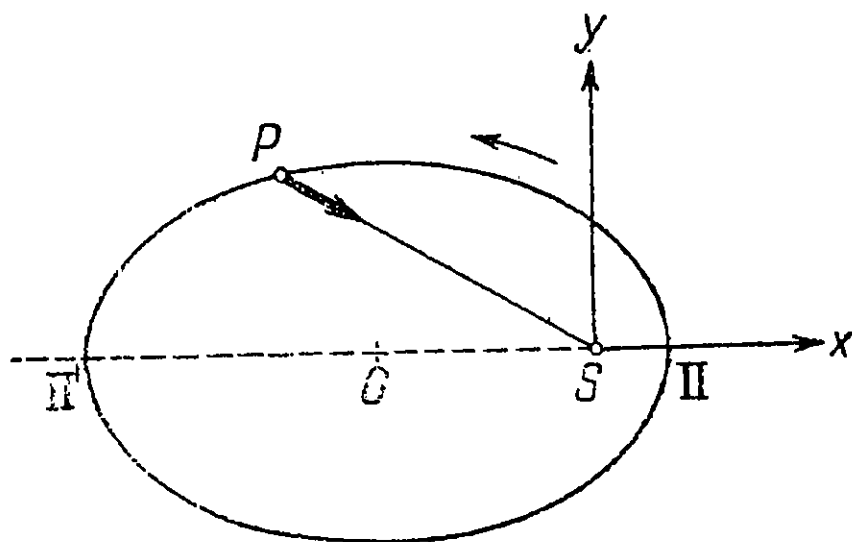


Рис. 1.

Вычислим компоненты ускорения, действующего на планету,

$$\left. \begin{aligned} x'' &= -a \sin EE'' - a \cos EE'^2 \\ y'' &= b \cos EE'' - b \sin EE'^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), после некоторых упрощений получим

$$\frac{E''}{E'} = \frac{-e \sin EE'}{1 - e \cos E}. \quad (5)$$

Интегрирование этого равенства дает

$$E' = n (1 - e \cos E)^{-1}, \quad (6)$$

де n — постоянная интегрирования. Снова разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$E - e \sin E = n (t - t_0), \quad (7)$$

где t_0 — новая постоянная.

Подставим выражение (6) в формулу (5)—это даст E'' . Внося затем полученные выражения для E' и E'' в равенство (4), будем иметь

$$x'' = an^2 \frac{e - \cos E}{(1 - e \cos E)^3}$$

$$y'' = -bn^2 \frac{\sin E}{(1 - e \cos E)^3}.$$

Следовательно величина ускорения равна

$$R = \sqrt{x''^2 + y''^2} = \frac{n^2 a}{(1 - e \cos E)^3}.$$

С другой стороны, уравнения (3) дают для радиуса-вектора планеты такое выражение

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 - e \cos E).$$

Поэтому, окончательно,

$$R = \frac{n^2 a^3}{r^2}. \quad (8)$$

Посмотрим теперь, что дает третий закон Кеплера. Чтобы его использовать надо ввести в рассмотрение время обращения планеты. Обозначим его через P .

Уравнения (3) показывают, что полному обороту планеты соответствует увеличение E на 2π . Как показывает равенство (7), для момента времени $t = t_0$ будет $E = 0$; следовательно для момента $t = t_0 + P$ должно быть $E = 2\pi$. Подставляя эти последние значения в равенство (7), получим

$$2\pi = nP,$$

откуда

$$n = \frac{2\pi}{P}.$$

Выражение (8) может быть теперь написано так

$$R = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2} \frac{1}{r^2}.$$

Согласно третьему закону Кеплера отношение $a^3 : P^2$ имеет одну и ту же величину для всех планет. Поэтому, вводя постоянную величину

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2}, \quad (9)$$

получим

$$R = \frac{\mu}{r^2}.$$

Итак, движение планет вызывается силовым полем, напряжение которого убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Солнца.

§ 3. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ.

Исходя из законов Кеплера, мы получили выражение той силы, с которой Солнце притягивает планеты. Посмотрим теперь, как от этого результата можно перейти к закону всемирного тяготения.

Наблюдения показывают, что движения спутников вокруг планет происходят по законам Кеплера. Отсюда следует, на основании рассуждений предыдущего параграфа, что планеты (по крайней мере имеющие более чем одного спутника) являются центрами силовых полей, напряжение которых убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра планеты. Так что, например, Юпитер является центром силового поля, в каждой точке ускорение которого равно

$$R_1 = \frac{\mu_1}{r^2},$$

где r — расстояние от центра Юпитера, а μ_1 — некоторая постоянная величина.

Обозначим через M и m_1 массы Солнца и Юпитера. В таком случае сила, с которой Солнце притягивает Юпитера, будет равна $m_1\mu r^{-2}$; сила, с которой Юпитер притягивает Солнце, будет $M\mu_1 r^{-2}$. Так как по закону равенства действия и противодействия эти две силы должны быть равны, то

$$M\mu_1 r^{-2} = m_1\mu r^{-2},$$

откуда

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\mu_1}{m_1}.$$

Обозначая через f это отношение, сохраняющее, как мы видим, одно и то же значение для всех полей притяжения, будем иметь

$$\mu = fM, \quad \mu_1 = fm_1.$$

Следовательно, для силы F , с которой Солнце притягивает планету, а планета Солнце, окончательно получаем такое выражение

$$F = f \frac{Mm_1}{r^2}.$$

Рассмотрим теперь поле притяжения Земли. Из факта наличия у Земли спутника, движение которого подчиняется первым двум законам Кеплера, следует, на основании предыдущего параграфа, что движение этого спутника вызывается силой, направленной к центру Земли и производящей ускорение равное

$$R = \frac{\mu'}{r^2}. \quad (10)$$

Стоящую здесь величину μ' легко вычислить по формуле (9). Как известно, сидерический месяц равен $P = 27^{\text{д}} 7^{\text{ч}} 43^{\text{м}} 11^{\text{с}} = 2\,360\,591^{\text{с}}$; большая полуось лунной орбиты равна $a = 3.844 \times 10^{10}$ см. Поэтому $\mu' = 4.020 \times 10^{20}$. Если принять во внимание, что наблюдаемое движение Луны есть результат не только притяжения Земли на Луну,

но и Луны на Землю, кроме того учесть притяжение Солнца (а также планет), то после введения соответствующих поправок для величины μ' , зависящей только от притяжения Земли, найдем

$$\mu' = 3.986 \times 10^{20}.$$

Поскольку Земля имеет только одного спутника, мы не можем убедиться в постоянстве μ' на различных расстояниях r при помощи третьего закона Кеплера—как мы это сделали в § 2 в отношении силового поля Солнца. Но для Земли Ньютон усмотрел другую возможность проверить постоянство μ' . Он задался вопросом, не есть ли сила, удерживающая Луну на ее орбите, та самая, которая заставляет все тела на земной поверхности падать по направлению к центру Земли. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно только вычислить μ' , соответствующее силе тяжести.

Так как ускорение силы тяжести на экваторе равно, согласно наблюдениям, 981.4 см/сек^2 , а поправка за центробежное ускорение, вызываемое вращением Земли, равна 3.4 см/сек^2 , то для ускорения, вызываемого притяжением Земли, имеем:

$$R = 978.0 \text{ см/сек}^2.$$

Принимая во внимание, что экваториальный радиус Земли равен $6.378 \times 10^8 \text{ см}$, из формулы (10) найдем

$$\mu' = 3.978 \times 10^{20}.$$

Если учесть поправку на сжатие Земли ¹⁾, то получим полное совпадение с предыдущей величиной, найденной из движения Луны.

Итак, центральная сила, производящая движение Луны, есть не что иное, как хорошо нам знакомая из повседневного опыта и доступная для лабораторного изучения сила тяжести.

Опыт показал, что ускорение силы тяжести не зависит ни от физического или химического состояния тела, ни от его размеров: все тела, большие и малые падают в пустоте с одинаковой скоростью. Отсюда (принимая во внимание тождественность силы тяжести с силой, действующей между светилами) можно заключить, что сила притяжения действует не на планету или спутника как целое, а на каждую малейшую их частицу, так что наблюдаемый нами эффект является следствием того, что каждая частица Солнца притягивает каждую частицу планеты и наоборот. Рассуждая подобным образом, Ньютон и пришел к закону всемирного тяготения, известному также под именем закона Ньютона:

каждые две материальные частицы взаимно притягиваются с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Пусть m и m' — массы двух материальных частиц, r — их взаимное расстояние. Каждая из них находится, согласно закону Ньютона, под действием силы, направленной к другой частице и равной

$$f \frac{mm'}{r^2}.$$

¹⁾ Для этого надо взять средний радиус Земли, равный $6.3712 \times 10^8 \text{ см}$, и соответствующее ускорение силы тяжести $g = 981.993 \text{ см/сек}^2$.

Стоящий здесь коэффициент пропорциональности f , называемый иногда *постоянной тяготения* (Gravitationskonstante), представляет абсолютную постоянную, численная величина которой зависит от выбора единиц. В системе CGS имеем, в среднем из новейших лабораторных определений,

$$f = 6.675 \times 10^{-8}.$$

В Астрономии очень часто пользуются другой системой единиц, а именно: за единицу длины принимают большую полуось земной орбиты, за единицу массы — массу Солнца, за единицу времени — средние солнечные сутки. Полагая

$$f = k^2,$$

в этой системе единиц будем иметь

$$k = 0.017\ 202\ 098\ 95.$$

Эта величина называется *гауссовой постоянной*.

Примечание. Для величины μ' , определяющей, согласно формуле (10), силовое поле Земли, мы нашли в системе CGS значение $\mu' = 3.986 \times 10^{20}$. Так как

$$\mu' = fm',$$

где m' — масса Земли в граммах, то, пользуясь только-что указанным f , найдем

$$m' = 5.97 \times 10^{27} \text{ г.}$$

Объем Земли равен $1.083 \times 10^{27} \text{ см}^3$, следовательно: средняя плотность Земли $= 5.52 \text{ г/см}^3$.

§ 4. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА.

Закон всемирного тяготения был опубликован Ньютоном в его знаменитом произведении „Математические начала натуральной философии“ (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) в 1687 г.

В истории открытия этого великого закона природы ясно различаются три момента.

Первым этапом явился вывод из законов Кеплера величины той силы, которая производит наблюдаемое движение планет. Существенную заслугу в этом отношении сам Ньютон приписывает Гюйгенсу. Гюйгенс незадолго перед тем (1675) получил известную формулу для центростремительного ускорения при круговом движении. Путем применения этой формулы, притяжение Солнца, обратно пропорциональное квадрату расстояния, было открыто независимо несколькими современниками Ньютона (Галлей, Гук, Врен, Борелли), но в *предположении кругового движения планет* Ньютон поставил и решил более общую и значительно более трудную задачу: „Тело обращается по эллипсу, требуется определить закон центростремительной силы, направленной к фокусу эллипса“. В § 2 мы изложили аналитическое решение этой задачи; решение Ньютона было чисто геометрическое.

Второй этап заключался в сопоставлении сил, действующих между светилами, с силой тяжести и привел к формулировке гипотезы всемирного тяготения. Здесь особенно ярко выступает мощь Ньютона как естествоиспытателя. Ведь закон всемирного тяготения не только не является следствием эмпирических законов Кеплера, но даже, строго говоря, противоречит им, так как взаимное притяжение планет неизбежно вызывает отклонения от этих законов.

Наконец, третий этап состоял в развитии следствий гипотезы всемирного тяготения и сопоставлении этих следствий с наблюдениями. Гений Ньютона успешно преодолел те огромные математические затруднения, которые тут встретились с самого начала. Когда было установлено, что все полученные следствия согласуются с наблюдениями, гипотеза всемирного тяготения перестала быть гипотезой и стала законом природы.

Ньютон только начал разработку следствий, вытекающих из закона всемирного тяготения. Эта грандиозная задача явилась предметом новой науки—„Небесной механики“. Лаплас (1749—1827), один из величайших преемников Ньютона, определил Небесную механику как „совокупность теорий, охватывающих все следствия закона всемирного тяготения в отношении движения и равновесия твердых и жидких масс, составляющих солнечную систему, а также аналогичные системы, наполняющие мировое пространство“.

Усилия величайших математиков и астрономов XVIII и XIX столетий (среди них особо следует отметить Клеро, Даламбера, Лагранжа, Эйлера, Лапласа, Лежандра, Гаусса, Бесселя, Ганзена, Коши, Якоби, Леверрье, Ньюкома, Хилла, Пуанкаре, Джорджа Дарвина) довели Небесную механику до известной степени законченности, по крайней мере в отношении наиболее актуальных проблем, касающихся солнечной системы.

При этом выяснилась чрезвычайная, беспримерная в истории науки точность, с которой закон Ньютона позволяет предвидеть малейшие особенности движений планет, спутников, комет, двойных и кратных звезд и т. д. Всякий раз, когда думали, что удалось констатировать расхождение между теорией движения, базирующейся на законе Ньютона, и наблюдениями, всегда более тщательная разработка теории или исправление вычислительной ошибки восстанавливали согласие с наблюдениями и доставляли новый триумф закону Ньютона. Только один случай несомненного расхождения был до сих пор установлен: для годового поступательного движения перигелия Меркурия наблюдения дают величину на $0''.42 \pm 0''.02$ большую, чем теория.

Дальнейшее развитие науки внесло постепенно целый ряд изменений в перечень проблем, подлежащих, согласно вышеприведенному определению Лапласа, ведению Небесной механики: учение о внутреннем строении Земли и о приливах отошло в область Геофизики; учение о внутреннем строении Солнца, о кометных формах, о происхождении планетных форм—перешли в круг ведения Астрофизики и Космогонии. С другой стороны стали более

доступны, а следовательно и более актуальны, вопросы о движениях в системах двойных и кратных звезд, в звездных скоплениях.

До известной степени в связи с этим изменением содержания стоит наметившееся в последние годы желание заменить несколько архаическое название Небесная механика другим, более созвучным с названиями новых отделов Астрономии. Так, например, в английской литературе все большее и большее распространение получает наименование Динамическая астрономия.

Конечно, граница между Небесной механикой и смежными науками (Геофизикой, Астрофизикой, Космогонией) во многих случаях может быть проведена лишь условно. Так, например, учение о вращательном движении Земли не может быть вполне отделено от учения о ее деформациях.

§ 5. ЗАКОН НЬЮТОНА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

В предыдущем параграфе было указано, что между теорией движения планет, построенной на основании закона Ньютона, и наблюдениями в одном случае было установлено наличие хотя и очень небольшого, но все же несомненного расхождения. Для устранения этого расхождения, заключающегося в движении перигелия Меркурия, большем чем то, которое производится возмущениями остальных планет, было предложено несколько гипотез. Но одни из этих гипотез приводили к следствиям, противоречащим наблюдениям (гипотеза интра-меркуриальной планеты, гипотеза неполной сферичности Солнца), другие — с трудом приводились в согласие с наблюдениями при помощи целого ряда допущений, придуманных специально для этого случая (гипотеза возмущающего влияния вещества зодиакального света). Ньюком (Newcomb, 1835—1909), в результате своей обширной многолетней работы над построением возможно более точных таблиц движения планет, остановился в конце концов на гипотезе Холла (Hall, 1829—1907), предложившего заменить закон Ньютона законом притяжения

$$fmm'r^{-N},$$

где N — отлично от 2.

Ньюком показал, что, принимая

$$N = 2\,000\,000\,161\,2,$$

можно полностью устранить указанную невязку в теории движения Меркурия и улучшить немного согласие теории с наблюдениями для Марса, не внося никаких других ощутимых изменений в движения планет. Более того, применив новый закон притяжения к Луне, Ньюком получил для ее перигея дополнительное движение, по сравнению с законом Ньютона, в $140''$ в столетие, что очень хорошо согласовалось с вековым движением перигея в $156''$ открытым Ганзеном (Hansen, 1795—1874). Для объяснения этого движения Ганзену пришлось допустить, что Луна имеет форму трехосного эллипсоида. Ньюком имел возможность, таким образом, отбросить указанное предположение Ганзена и свести движение

перигея Луны к той же причине, которая производит аномальное движение перигелия Меркурия.

Однако новая теория движения Луны, развитая Брауном (E. Brown), показала, что открытое Ганzenом движение перигея почти целиком объясняется несовершенством его теории. Браун показал, что гипотеза Холла может быть применена к Луне лишь при условии, что для Луны мы будем брать другие значения показателя N или коэффициента f , чем для планет.

Только теория относительности дала, наконец, объяснение поступательного движения перигелия Меркурия, не требующее ни придумывания специальных масс, нужных только для этого случая, ни других произвольных допущений.

Теория относительности не только устранила невязку в теории движения Меркурия, но она также впервые позволила глубоко заглянуть в природу силы тяготения, что не удалось сделать ни Ньютону, ни его преемникам, несмотря на все усилия.

Ньютон резюмировал свою работу в этом направлении следующим образом:

„До сих пор я изъяснял небесные явления и приливы наших морей на основании силы тяготения, но я не указывал причины самого тяготения. Эта сила происходит от некоторой причины, которая проникает до центра Солнца и планет, без уменьшения своей способности и которая действует не пропорционально величине поверхности частиц, на которые она действует (что обыкновенно имеет место для механических причин), но пропорционально количеству твердого вещества, действие которой распространяется повсюду, на огромное расстояние, убывая пропорционально квадратам расстояний.

„Тяготение к Солнцу составляется из тяготения к отдельным частицам его и при удалении от Солнца убывает в точности пропорционально квадратам расстояний даже до орбиты Сатурна, что следует из покоя афелиев планет, и даже до крайних афелиев комет, если только эти афелии находятся в покое.

„Причину же этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю. Все же, что не выводится из явлений, должно называться гипотезою, гипотезам же метафизическим, физическим, механическим, скрытым свойствам—не место в экспериментальной философии. В такой философии предложения выводятся из явлений и обобщаются помощью наведения. Так были изучены непроницаемость, подвижность и напор тел, законы движения и тяготение. Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря“.

Таким образом Ньютон, не будучи в состоянии найти в известных ему явлениях какую-либо точку опоры для выяснения природы силы тяготения, оставляет этот вопрос последующим поколениям.

Только спустя 200 лет недостававшая Ньютону точка опоры была найдена в знаменитом опыте Майкельсона, приведшем к созданию специальной теории относительности. Создав на базе этой

последней общую теорию относительности, Эйнштейн смог дать теорию тяготения, естественно вытекающую из наших основных представлений о пространстве и времени.

Движение по законам релятивистской теории тяготения тем меньше отличается от движения по закону Ньютона, чем меньше отношения скоростей движущихся тел к скорости света. Для планет, для которых эти отношения весьма малы, мы можем надеяться уловить (при помощи имеющихся сейчас в нашем распоряжении наблюдений) различие в движениях согласно старой и новой теорий тяготения только в одном случае. Именно, в релятивистской теории тяготения доказывается, что перигелии планетных орбит должны при каждом обороте планеты передвигаться (сверх передвижений, вызываемых взаимным притяжением) на долю оборота равную $3 \frac{v^2}{C^2}$, где v — скорость планеты, а C — скорость света. Эти дополнительные годовые перемещения перигелия для Меркурия, Венеры, Земли и Марса равны соответственно

0".43, 0".086, 0".039, 0".014..

Для Меркурия мы имеем таким образом как-раз ту величину, которая была получена из наблюдений и оставалась необъяснимой на основании закона Ньютона. Для Венеры и Земли указанные перемещения перигелия не могут быть обнаружены наблюдениями, так как вследствие очень малых эксцентриситетов положение перигелия для этих планет не является достаточно определенным. Наконец для Марса невязка между наблюдениями и теорией, основанной на законе Ньютона, равная $0".05 \pm 0".02$, несколько уменьшается.

Итак, при изучении движений светил мы можем базироваться на законе Ньютона. Только в некоторых, крайне редких случаях нам придется вычислять небольшие поправки, обусловленные тем, что закон Ньютона является лишь приближенным выражением точного закона тяготения.

§ 6. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ.

Как уже было сказано, предметом Небесной механики является изучение движений светил. Движение всякого тела разлагается на движение центра тяжести, вращение вокруг центра тяжести и деформации. Оставляя в стороне деформации светил, мы будем рассматривать две основные проблемы: изучение поступательных движений центров тяжести светил и изучение вращательного движения светил, рассматриваемых как твердые тела.

Вторая проблема сводится к изучению вращательного движения Земли и Луны, так как в отношении остальных светил наблюдательный материал слишком недостаточен.

Обратимся к первой проблеме, составляющей главное содержание Небесной механики. В следующих параграфах будет показано, что вследствие незначительности размеров светил по сравнению с разделяющими их расстояниями, взаимное притяжение их

таково, как если бы масса каждого была сосредоточена в его центре тяжести. Таким образом изучение поступательных движений светил приводится к так называемой задаче *n* тел: определить движение *n* материальных точек притягивающих друг друга по закону Ньютона.

Движение *n* материальных точек под действием заданных сил определяется (как известно из Механики) системой дифференциальных уравнений порядка $6n$.

Общие теоремы Механики дают нам 10 интегралов этой системы, так что для полного решения надо найти еще $6n - 10$ первых интегралов. Если $n = 2$, то недостающие два интеграла находятся без труда, так что задача двух тел решается до конца (что было выполнено еще Ньютоном).

Но уже для задачи трех тел подобное простое решение невозможно. Усилия величайших математиков, неустанно занимавшихся этой задачей в течение XVIII и XIX столетий, очень мало приблизили нас к ее полному решению. В 1912 году Зундману (Sundman) удалось, продолжая работы Пуанкаре (Poincaré, 1854 — 1912) и Леви-Чивита (Levi-Civita) выразить координаты трех тел бесконечными рядами, сходящимися для любого момента времени. Но эти выражения столь сложны, что из них нельзя ничего извлечь ни для вычисления координат, ни для изучения свойств движения.

К счастью Астрономия может обойтись в настоящее время без полного решения задачи трех тел. Это обусловливается тем, что во всех наиболее важных случаях, встречающихся в солнечной системе, притяжение одного тела на много превосходит притяжение всех остальных. Например для каждой планеты притяжение Солнца во много раз больше притяжения всех остальных планет; для Луны доминирующим является притяжение Земли и т. д. Вследствие этого, приняв во внимание только притяжение доминирующего тела, т. е. решив задачу двух тел, мы уже получим приближенно изучаемое движение. Это первое приближение к действительности носит название невозмущенного или кеплерова (т. е. происходящего по законам Кеплера) движения.

Таким образом первая задача, стоящая перед нами, заключается во всестороннем изучении невозмущенного движения, — это основная проблема Небесной механики. Невозмущенное движение планеты или кометы относительно Солнца определяется шестью постоянными, входящими в общее решение дифференциальных уравнений движения и носящими название элементов орбиты. Определение элементов орбит планет и комет (а также спутников, двойных звезд, метеоров и т. п.) при помощи полученных из наблюдений координат светил составляет содержание первого раздела Небесной механики — определения орбит.

Невозмущенное движение является только первым приближением к действительному движению светил. Чтобы получить действительное движение, надо учесть те изменения в кеплеровом движении, которые производятся телами, не принятыми во внимание в первом приближении. Эти изменения получили название возмущений, а соответствующий раздел Небесной механики называется

теорией возмущений. В этой теории даются, с одной стороны, способы для вычисления возмущений, с другой — изучаются общие свойства возмущений; особенно те свойства, которые имеют отношение к вопросу об устойчивости движения.

В теории возмущений отдельно изучаются:

теория больших планет, в которой рассматриваются взаимные возмущения, производимые большими планетами нашей солнечной системы, и выводятся такие значения элементов и масс этих планет, которые наилучше удовлетворяют всей совокупности наблюдений;

возмущения малых планет и комет, при определении которых движение возмущающих тел (больших планет) предполагается уже точно известным. Упрощение, которое отсюда проистекает, далеко не компенсируется теми затруднениями, которые создаются большими эксцентриситетами и наклонностями орбит малых планет (не говоря уже об орбитах комет). Эти затруднения настолько значительны, что весьма часто приходится отказываться от определения возмущений аналитическими методами (при помощи разложений в ряды) и довольствоваться вычислением возмущений методами численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Наконец особо приходится рассматривать *теорию движения Луны и теории спутников больших планет*. Во всех этих случаях приходится прежде всего считаться с теми возмущениями, которые в движении спутника производятся Солнцем: тут масса возмущающего тела во много раз больше массы главного, так что возмущения приходится трактовать иначе. Кроме того, вследствие близости спутников к планете приходится учитывать отклонения планеты от строго сферической формы. Для Луны приходится принимать во внимание даже деформации Земли: приливные волны чувствительно влияют на ее движение.

§ 7. ПРИТЯЖЕНИЕ ДВУХ ТЕЛ, РАЗМЕРЫ КОТОРЫХ ОЧЕНЬ МАЛЫ ПО СРАВНЕНИЮ С РАЗДЕЛЯЮЩИМ ИХ РАССТОЯНИЕМ.

Пусть требуется определить притяжение, производимое телом S на материальную точку P с массой μ (черт. 2). Каждая частица тела, имеющая массу dm и находящаяся на расстоянии r от точки P , притягивает эту точку с силой равной

$$f \mu \frac{dm}{r^2} \quad (11)$$

и направленной по соединяющей их прямой. Нужно найти равнодействующую таких сил, соответствующих всем возможным положениям элемента dm в теле S .

Возьмем прямоугольные оси координат, причем начало O поместим в центр тяжести тела S . Через (x, y, z) обозначим координаты точки P , а через (ξ, η, ζ) — координаты элемента dm . Компоненты силы (11) по осям координат будут очевидно равны

$$f \mu \frac{dm}{r^2} \frac{\xi - x}{r}, \quad f \mu \frac{dm}{r^2} \frac{\eta - y}{r}, \quad f \mu \frac{dm}{r^2} \frac{\zeta - z}{r}.$$

Поэтому, обозначая через X, Y, Z компоненты искомой равнодействующей, будем иметь

$$X = f_{\mu} \int \frac{\xi - x}{r^3} dm, \quad Y = f_{\mu} \int \frac{\eta - y}{r^3} dm, \quad Z = f_{\mu} \int \frac{\zeta - z}{r^3} dm,$$

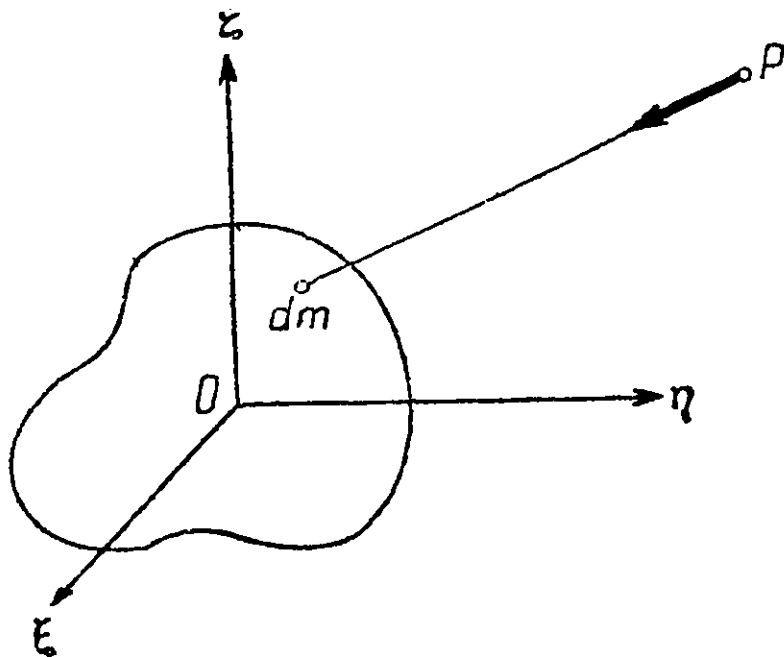
где

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

причем интегрирования производятся по всему объему S .

Как известно можно вычисление X, Y, Z свести к нахождению только одного тройного интеграла: для этого надо ввести *потенциал*

$$V = \int \frac{dm}{r}. \quad (12)$$



Черт. 2.

Тогда

$$X = f_{\mu} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = f_{\mu} \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = f_{\mu} \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Вычислив вторые производные потенциала по x, y, z , легко проверить, что он удовлетворяет (при условии, что точка P лежит вне тела S) *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Предположим теперь, что точка P находится очень далеко от тела S . Положим

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

На основании только-что сделанного предположения отношения $\xi/R, \eta/R, \zeta/R$ будут малые величины; сообразно с этим вели-

чину $\frac{1}{r}$, стоящую в выражении потенциала, преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left[R^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{R} \left[1 + \frac{\rho^2 - (x\xi + y\eta + z\zeta)}{R^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{R^2} - \frac{\rho^2}{2R^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{x^2\xi^2 + y^2\eta^2 + z^2\zeta^2 + 2xy\xi\eta + 2xz\xi\zeta + 2yz\eta\zeta}{R^4} + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Подставив это разложение в формулу (12), получим

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{R} \int dm + \frac{x}{R^3} \int \xi dm + \frac{y}{R^3} \int \eta dm + \frac{z}{R^3} \int \zeta dm - \\ &\quad - \frac{1}{2R^3} \int \rho^2 dm + \frac{3}{2} \frac{x^2}{R^5} \int \xi^2 dm + \frac{3}{2} \frac{y^2}{R^5} \int \eta^2 dm + \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{z^2}{R^5} \int \zeta^2 dm + \frac{3xy}{R^5} \int \xi \eta dm + \frac{3xz}{R^5} \int \xi \zeta dm + \\ &\quad + \frac{3yz}{R^5} \int \eta \zeta dm + \dots\end{aligned}$$

Так как начало координат по условию находится в центре тяжести тела, то

$$\int \xi dm = \int \eta dm = \int \zeta dm = 0.$$

Обозначим через M массу тела и введем в рассмотрение моменты и произведения инерции относительно нашей системы координат, а именно

$$\begin{aligned}A &= \int (\eta^2 + \zeta^2) dm, \quad B = \int (\zeta^2 + \xi^2) dm, \quad C = \int (\xi^2 + \eta^2) dm, \\ F &= \int \eta \zeta dm, \quad G = \int \zeta \xi dm, \quad H = \int \xi \eta dm.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int dm &= M, \quad \int \rho^2 dm = \frac{1}{2} (A + B + C), \\ \int \xi^2 dm &= \frac{1}{2} (B + C - A), \dots\end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned}V &= \frac{M}{R} - \frac{1}{4R^3} (A + B + C) + \frac{3x^2}{4R^5} (B + C - A) + \\ &\quad + \frac{3y^2}{4R^5} (C + A - B) + \frac{3z^2}{4R^5} (A + B - C) + \\ &\quad + \frac{3xy}{R^5} H + \frac{3xz}{R^5} G + \frac{3yz}{R^5} F + \dots\end{aligned}$$

Это выражение можно переписать в такой форме:

$$V = \frac{M}{R} - \frac{1}{2R^3} (A + B + C) - \frac{3}{2R^5} \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fyz - 2Gxz - 2Hxy}{R^3} + \dots$$

Но отношения x/R , y/R , z/R , суть направляющие косинусы прямой, соединяющей начало координат с точкой P (x , y , z). Поэтому, на основании известных свойств моментов инерции, получим

$$I = \frac{1}{R^3} (Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fyz - 2Gxz - 2Hxy),$$

где I — есть момент инерции тела S относительно только-что упомянутой прямой.

Итак окончательно, ограничиваясь членами третьей степени относительно $1/R$, будем иметь

$$V = \frac{M}{R} - \frac{A + B + C - 3I}{2R^3} + \dots \quad (13)$$

Если бы вся масса тела S была сосредоточена в его центре тяжести, то потенциал полученной таким образом материальной точки был бы равен

$$V = \frac{M}{R}.$$

Действительный потенциал (13) отличается от потенциала этой материальной точки на величину, которая мала не только вследствие малости $1/R^3$, $1/R^5$, ..., но и вследствие малости коэффициентов при этих выражениях. Действительно, если бы тело S имело сферическую структуру (состояло бы из однородных сферических слоев), то было бы

$$A = B = C = I,$$

так что первый из упомянутых коэффициентов был бы равен нулю. В следующем параграфе то же самое будет показано и в отношении всех остальных коэффициентов. Но действительная структура Солнца и планет весьма мало отличается от сферической.

Более того, если мы будем рассматривать планету вместе с ее спутниками, как одно притягивающее тело, то и в этом случае отклонение от сферической структуры будет (вследствие малости масс спутников) практически неощутимо. Таким образом при изучении движения планет мы можем заменить каждую планету вместе с ее спутниками материальной точкой, помещенной в соответствующий центр тяжести. Солнечная система станет при этом системой некоторого числа материальных точек, взаимно притягивающих друг друга по закону Ньютона.

Когда движение каждой такой материальной точки будет изучено, а также будет определено движение спутников относительно планеты, то отсюда можно уже окончательно вывести движение планеты относительно Солнца.

В теории движения спутников приходится считаться с уклонением структуры планеты от строго сферической и при вычислении силы притяжения брать в формуле (13) также и второй член.

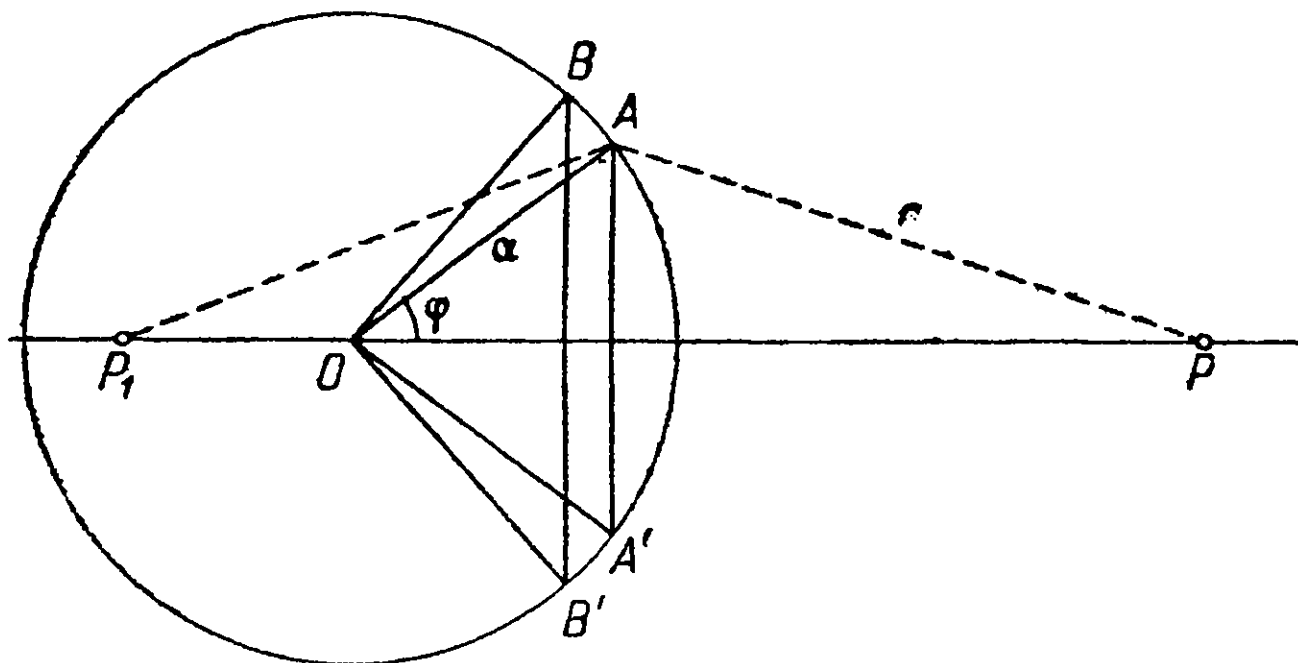
§ 8. ПРИТЯЖЕНИЕ ТЕЛ СФЕРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ.

Рассмотрим шар радиуса a , у которого плотность во всех точках, равноудаленных от центра, одна и та же. Обозначая через α расстояние произвольной точки от центра шара, а через ρ —плотность в этой точке, будем следовательно иметь.

$$\rho = \rho(\alpha).$$

Такое тело можно кратко охарактеризовать, сказав, что оно имеет сферическую структуру.

Из центра шара O (черт. 3) опишем радиусом α сферическую поверхность.



Черт. 3.

Далее, приняв прямую OP , соединяющую центр с притягиваемой точкой P , за ось, опишем две конические поверхности OAA' и OBV' с общей вершиной O и с углами раствора, соответственно равными 2φ и $2(\varphi + d\varphi)$. Поверхность сферического пояса $ABV'A'$, вырезаемого этими конусами, будет равна

$$2\pi\alpha \sin \varphi \cdot \alpha d\varphi.$$

Рассмотрим, далее, аналогичную сферическую поверхность радиуса $\alpha + d\alpha$. Масса тела, заключенного между двумя сферами и двумя конусами, будет очевидно

$$dm = \rho \cdot 2\pi\alpha^2 \sin \varphi d\varphi d\alpha.$$

Поэтому, обозначив через r расстояние AP произвольной точки этого тела от притягиваемой точки P получим

$$V = \int \frac{dm}{r} = 2\pi \int_0^a \rho \alpha^2 d\alpha \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{r}. \quad (14)$$

Пусть $OP = R$, тогда

$$r^2 = \alpha^2 + R^2 - 2\alpha R \cos \varphi;$$

откуда

$$rdr = \alpha R \sin \varphi d\varphi$$

Вместо переменного интегрирования φ введем переменное r , изменяющееся очевидно в пределах от $R - \alpha$ до $R + \alpha$. Получим

$$V = \frac{2\pi}{R} \int_0^a \rho \alpha d\alpha \int_{R-\alpha}^{R+\alpha} dr$$

Откуда

$$V = \frac{M}{R}, \quad (15)$$

где

$$M = 4\pi \int_0^a \rho \alpha^2 d\alpha$$

есть очевидно масса шара.

Формула (15) показывает, что шар, имеющий сферическое распределение плотности, притягивает внешнюю точку так, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре.

Рассмотрим еще случай когда притягиваемая точка P_1 находится внутри шара, так что $R < a$. Интеграл (14) разобьем на два

$$V = 2\pi \int_0^R \rho \alpha^2 d\alpha \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{r} + 2\pi \int_R^a \rho \alpha^2 d\alpha \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{r}.$$

К первому из этих интегралов применим только-что полученный результат. Поэтому он равен M_1/R , где

$$M_1 = 4\pi \int_0^R \rho \alpha^2 d\alpha$$

Что касается до второго интеграла, то для него

$$r^2 = \alpha^2 + R^2 + 2\alpha R \cos \varphi;$$

следовательно

$$rdr = -\alpha R \sin \varphi d\varphi,$$

причем переменное r меняется в пределах от $\alpha + R$ до $\alpha - R$, ибо в рассматриваемой случае $R = OP_1$. Таким образом этот интеграл равняется

$$-2\pi \int_R^a \rho \alpha^2 d\alpha \int_{\alpha+R}^{\alpha-R} \frac{dr}{R\alpha} = 4\pi \int_R^a \rho \alpha d\alpha$$

Итак для внутренней точки потенциал выражается формулой

$$V = \frac{M_1}{R} + 4\pi \int_R^a \rho \alpha d\alpha.$$

Если мы имеем дело с полым шаром, внутренний радиус которого равен b , а внешний по прежнему a , то

$$\rho(\alpha) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq \alpha < b.$$

Следовательно для точки P_1 , лежащей внутри этого полого шара ($R < b$), получим

$$M_1 = 0, \quad V = 4\pi \int_0^R \rho a da = \text{const.} \quad (16)$$

Раз потенциал постоянен, то компоненты силы притяжения равны нулю. Итак притяжение шарового слоя сферической структуры на точку, лежащую внутри его полости, равно нулю.

Дополнение к главе I.

ДВИЖЕНИЕ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД.

Для того чтобы закон Ньютона мог быть назван по справедливости законом *всемирного* тяготения, надо убедиться в его приложимости к звездам. Единственная возможность для этого, имеющаяся сейчас в нашем распоряжении,—это изучение движений двойных и кратных звезд. Посмотрим, что оно может дать.

Наблюдения Вильяма Гершеля (1738—1822) над тесными парами, начатые около 1780 г. в надежде определить параллакс дифференциальным методом, привели (1803) к открытию для нескольких пар орбитального движения одной звезды относительно другой. Накопленный с тех пор материал позволил достаточно хорошо изучить орбитальное движение более чем для сотни двойных звезд. Конечно при этом изучается не действительная орбита, а лишь *видимая*, т. е. проекция действительной орбиты на плоскость, перпендикулярную к лучу зрения.

Для всех изученных двойных звезд видимое движение спутника подчиняется следующим двум законам:

1. Радиус-вектор видимой орбиты описывает площади, пропорциональные времени.

2. Видимая орбита есть эллипс, внутри которого находится главная звезда. Ни для одной известной пары главная звезда не находится в центре эллипса.

Дальнейшие выводы из этих законов можно сделать лишь при помощи допущения, что спутник движется в плоскости, проходящей через главную звезду. Всякое иное предположение является совершенно несовместимым с наблюдаемыми лучевыми скоростями, не говоря уже о том, что оно было бы совсем неправдоподобно. Из этого допущения сейчас же следует, что и для действительного движения одной звезды относительно другой должны иметь место те же законы, т. е. оно должно происходить по эллипсу согласно закону площадей. Отличие от движения планет заключается в том, что мы не можем утверждать, на основании

данных наблюдений, что главная звезда находится в фокусе эллипса описываемого спутником: все что мы можем сказать—это то, что она не находится в центре эллипса, ибо это свойство сохранилось бы и в проекции.

Закон площадей показывает (§ 2), что движение спутника происходит под действием силы, направленной к главной звезде. Нужно, следовательно, найти закон действия этой силы, основываясь на том, что траектория движения есть эллипс. В этом заключается так называемая *проблема Бертрана* (J. Bertrand, 1822—1900), предложенная им в 1877 г. и тогда же решенная Дарбу (Darboux) и Альфаном (Halphen). Решение Дарбу заключается в следующем.

Возьмем оси координат в плоскости орбиты спутника, причем главную звезду примем за начало координат. Уравнение траектории возьмем в самом общем виде

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy = 1. \quad (17)$$

Перейдем к полярным координатам, полагая

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u,$$

Уравнение траектории напишется так

$$\frac{1}{r} = g \cos u + f \sin u \pm \sqrt{A \cos 2u + B \sin 2u + H}, \quad (18)$$

где

$$A = \frac{1}{2} (g^2 + a - f^2 - b), \quad B = gf + h,$$

$$H = \frac{1}{2} (g^2 + a + f^2 + b).$$

Обозначим через R силу, производящую движение спутника относительно главной звезды.

Уравнения движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R \frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R \frac{y}{r}$$

при переходе к полярным координатам приводятся к такому виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{du}{dt} \right)^2 &= -R \\ r \frac{d^2u}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{du}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Интегрирование второго из этих уравнений дает закон площадей:

$$r^2 \cdot \frac{du}{dt} = C.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{C}{r^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{du} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{C}{r^2} \frac{dr}{du} \right) \frac{du}{dt} = -\frac{C^2}{r^3} \frac{d^2}{du^2} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, подставляя эти выражения в первое из уравнений (19), будем иметь

$$R = \frac{C^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{du^2} \right]. \quad (20)$$

Пользуясь уравнением траектории (18) получим после некоторых упрощений

$$R = \pm \frac{C^2}{r^2} \frac{H^2 - A^2 - B^2}{(A \cos 2u + B \sin 2u + H)^{\frac{3}{2}}}. \quad (21)$$

Эту формулу можно представить в другом виде, если исключить стоящий в знаменателе радикал при помощи уравнения (18). Получим

$$R = \pm \frac{C^2}{r^2} \frac{H^2 - A^2 - B^2}{\left(\frac{1}{r} - g \cos u - f \sin u \right)^2}. \quad (22)$$

Легко проверить, что каждая из сил (21) и (22) при любых начальных условиях производит движение по коническому сечению. Действительно, прежде всего ясно, что траектория, определяемая уравнением (18), удовлетворяет уравнениям движения (19). Остается показать, что число произвольных постоянных в уравнении (18) достаточно для удовлетворения любым начальным условиям. Но начальные условия требуют выполнения трех уравнений: траектория должна проходить через заданную точку (u_0, r_0); производные $\frac{dr}{dt}, \frac{du}{dt}$ должны иметь в этой точке наперед заданные значения. Таким образом остается показать, что для каждого из двух полученных законов действия силы, (21) и (22), в уравнении траектории остаются три произвольные постоянные.

Для (22) это очевидно, ибо этот закон фиксирует g и f , тогда как a, h и b остаются произвольными.

Что же касается до закона (21), то тут необходимо иметь в виду, что он (принимая во внимание произвольность C) фиксирует лишь отношения $A:B:H$; так что и в этом случае в нашем распоряжении остается в уравнении траектории три параметра.

Приходим к следующему заключению:

Единственные центральные силы, производящие движение по коническому сечению при любых начальных условиях, даются формулами (21) и (22).

С астрономической точки зрения интерес представляют конечно лишь те силы, величина которых зависит только от расстояния между взаимодействующими телами, а не от направления соединяющей их прямой. Поэтому, делая в формуле (21) $A=B=0$, а в формуле (22) $g=f=0$, получим

$$R = \frac{\mu}{r^2} \text{ и } R = \gamma r. \quad (23)$$

Вторая из этих сил не может иметь место в системах двойных звезд, ибо при $g=f=0$ уравнение (17) дает коническое сечение,

центр которого находится в начале координат. Итак остается закон Ньютона, как единственно возможная сила, производящая наблюдаемые нами в системах двойных звезд движения ¹⁾).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Если бы Земля имела спутника, движущегося у самой ее поверхности, то каков был бы период обращения этого спутника? Та же задача для Солила и для Сатурна.

2. Вычисление коэффициента μ' состоящего в формуле (10) при помощи соотношения (9) дало нам $\mu' = 4.020 \times 10^{20}$. Показать, что для получения значения μ' , зависящего только от притяжения Земли на Луну, но не зависящего от притяжения Луны на Землю, надо указанную величину умножить на $m/(m + m_1)$, где m — масса Земли, а m_1 — масса Луны. Сделать вычисление, принимая $m/m_1 = 81.56$.

3. Доказать что притяжение, производимое однородным шаром на точку, лежащую на его поверхности, пропорционально радиусу.

4. Можно ли указать такой закон изменения плотности с расстоянием от центра, при котором притяжение шара на точку, лежащую на его поверхности, не зависит от радиуса?

5. Показать, при помощи формулы (13), что притяжение, производимое однородным сплюснутым сфероидом с экваториальной и полярной полуосями, равными соответственно a и b , имеет потенциал

$$V = \frac{M}{R} + \frac{\alpha}{5} \frac{M a^2}{R^3} (1 - 3 \cos^2 \gamma) + \dots,$$

где $\alpha = \frac{a-b}{a}$ есть сжатие сфероида, а γ — угол, образуемый полярной осью и прямой, соединяющей центр сфероида с притягиваемой точкой.

Указание: Главные моменты инерции для сжатого сфероида равны

$$A = B = M \frac{a^2 + b^2}{5}, \quad C = M \frac{2a^2}{5}.$$

6. Получить формулы (15) и (16) при помощи уравнения Лапласа.

ГЛАВА II.

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ.

Основной и в то же время простейшей проблемой Небесной механики является задача двух тел: изучить движение двух материальных точек под влиянием их взаимного притяжения по закону Ньютона. Эта задача встречается в Астрономии в двух видах — чаще всего нужно бывает определить движение одной точки относительно другой; в других случаях приходится определять движение двух точек по отношению к их общему центру тяжести. Решение в обоих случаях получается при помощи интегрирования одной и той же системы дифференциальных уравнений. Поэтому, рассмотрев подробно пер-

¹⁾ Д. Д. Мордухай-Болтовской поставил и решил следующую задачу: Каковы те силы, зависящие только от расстояния между двумя материальными точками, которые производят движение по коническому сечению для любого начального положения этих точек и некоторой фиксированной начальной скорости? Единственными решениями этой более общей задачи являются те же две силы (23). См. Зап. Фіз.-Мат. Віддлу Всеукр. Акад. Наук, 1928 г.

вую проблему (§§ 9—17), мы можем легко исчерпать (§ 18) проблему движения относительно центра тяжести.

В результате изучения этой главы должно быть получено отчетливое представление о законах движения и о роли каждой из постоянных, введенных интегрированием. Эти постоянные (элементы орбиты) определяют все обстоятельства движения.

§ 9. УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.

Рассмотрим две материальные точки S и P , имеющие массы, равные соответственно m_0 и m . Согласно закону всемирного тяготения, каждая из этих точек притягивает другую с силою, равной $k^2 m_0 m r^{-2}$, где через r обозначено расстояние SP . Таким образом точка P будет иметь ускорение $k^2 m_0 r^{-2}$ по направлению к точке S , а эта последняя будет иметь ускорение, равное $k^2 m r^{-2}$ и направленное к точке P .

Для нас важно изучить движение одной точки относительно другой, ибо этот случай имеет наиболее частое применение в Астрономии: движения планет и комет определяются по отношению к Солнцу; движение спутника относится к планете; при изучении движения двойных звезд положение одной звезды определяется относительно другой.

Будем изучать движение точки P относительно S . Этому относительному движению будет соответствовать относительное ускорение, направленное по прежнему от P к S , но равное уже

$$k^2 m_0 r^{-2} + k^2 m r^{-2},$$

ибо для получения движения относительно S мы должны приложить ко всем точкам нашей системы ускорения, равные, но прямо противоположные ускорению точки S .

Поместим начало координат в точку S и обозначим через x, y, z координаты точки P . Косинусы углов, образуемых вектором PS с осями, будут очевидно равны

$$-\frac{x}{r}, \quad -\frac{y}{r}, \quad -\frac{z}{r}.$$

Поэтому компоненты только-что указанного относительного ускорения будут

$$-k^2 (m_0 + m) x r^{-3}, \quad -k^2 (m_0 + m) y r^{-3}, \quad -k^2 (m_0 + m) z r^{-3}.$$

Следовательно уравнения движения точки P напишутся так

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m) x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m) y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m) z}{r^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Решение задачи двух тел сводится таким образом к интегрированию этой системы трех совокупных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Как известно, общее решение такой системы даст искомые координаты x, y, z в виде функций времени t и шести произвольных постоянных. Произвольные постоянные интегрирования могут быть выбраны различно. Например за эти постоянные можно принять координаты x_0, y_0, z_0 и компоненты скорости x'_0, y'_0, z'_0 точки P в какой-либо момент времени $t = t_0$. В дальнейшем увидим, что может быть сделан другой, для нашей цели более удобный, выбор этих произвольных постоянных.

Перейдем теперь к нахождению интегралов системы (1).

§ 10. ИНТЕГРАЛЫ ПЛОЩАДЕЙ.

Умножим первое из уравнений (1) на $-y$, второе на $+x$ и сложим их почленно, получим

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \text{ или } \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0.$$

Откуда

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C_3, \quad (2)$$

где C_3 — постоянная введенная интегрированием.

Аналогично получаем два другие первые интеграла

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = C_1, \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = C_2. \quad (3)$$

Эти три первые интеграла системы (1) и носят название *интегралов площадей*.

Умножая равенства (2) и (3) соответственно на z, x и y и складывая их почленно найдем

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0.$$

Это соотношение показывает, что движение точки P происходит в плоскости, проходящей через начало координат, т. е. через точку S . Положение этой плоскости определяется начальными условиями движения, дающими возможность найти, при помощи уравнений (2) и (3), коэффициенты C_1, C_2, C_3 .

Для получения механической интерпретации соотношений (2) и (3), рассмотрим три положения P_0, P и P' (черт. 4) движущейся точки, соответствующие моменты t_0, t и $t + dt$. Эти три положения будут находиться в плоскости, проходящей через S . Обозначим через A площадь сектора, заключенного между радиусами-векторами SP_0 и SP и траекторией точки P , а через dA — площадь сектора SPP' .

Площадь сектора dA отличается от площади треугольника SPP' на бесконечно-малую величину второго порядка. Следовательно, замечая, что площадь треугольника SQQ' , являющегося проекцией треугольника SPP' , равна $\frac{1}{2}(x dy - y dx)$, а проекция сектора SPP' , т. е. сектор SQQ' , имеет площадь, равную $dA \cos \gamma$, получим

$$\frac{1}{2}(x dy - y dx) = dA \cos \gamma.$$

Через α , β , γ мы будем обозначать углы между нормалью SN к плоскости, в которой совершается движение, и осями координат.

Проектируя сектор SPP' на две другие координатные плоскости, мы получим еще два аналогичных соотношения. Сопоставляя эти соотношения с интегралами площадей (2), (3), мы можем этим последним придать такой вид

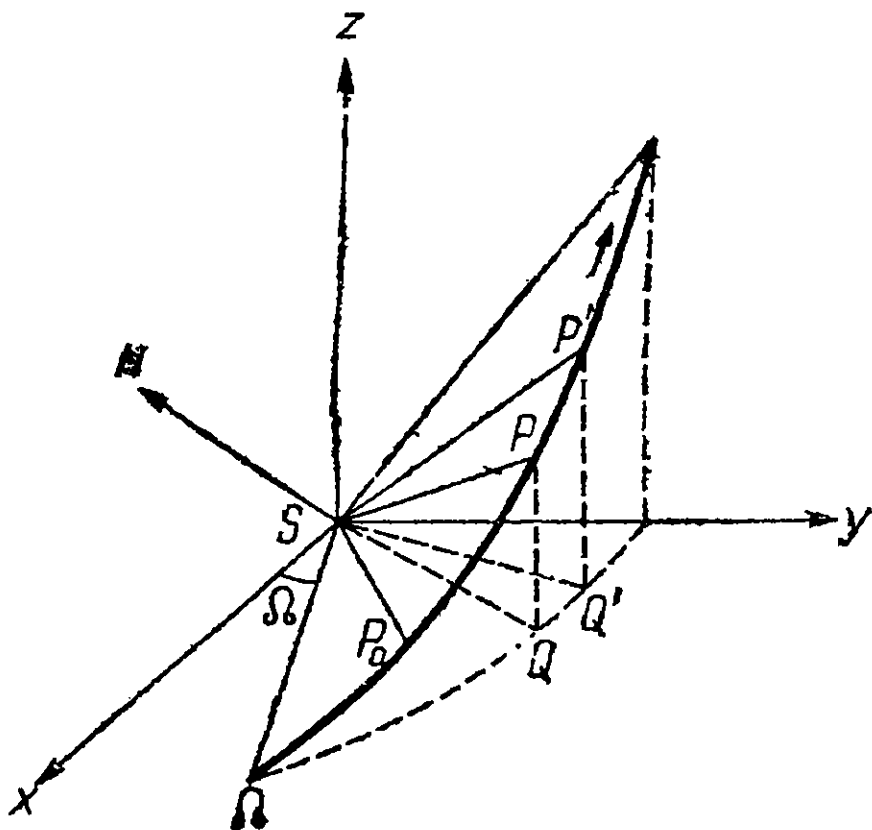
$$2 \cos \alpha \frac{dA}{dt} = C_1, \quad 2 \cos \beta \frac{dA}{dt} = C_2, \quad 2 \cos \gamma \frac{dA}{dt} = C_3. \quad (4)$$

Возведем эти равенства в квадрат и почленно сложим. Получим

$$2 \frac{dA}{dt} = C,$$

где

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}.$$



Черт. 4.

Интегрирование последнего равенства дает

$$A = \frac{1}{2} C (t - t_0). \quad (5)$$

Итак, интегралы площадей показывают, что: *относительное движение точки P происходит в плоскости, проходящей через точку S и притом так, что площадь сектора, описываемого радиусом-вектором SP, изменяется пропорционально времени.*

Равенства (4) дают

$$C \cos \alpha = C_1, \quad C \cos \beta = C_2, \quad C \cos \gamma = C_3.$$

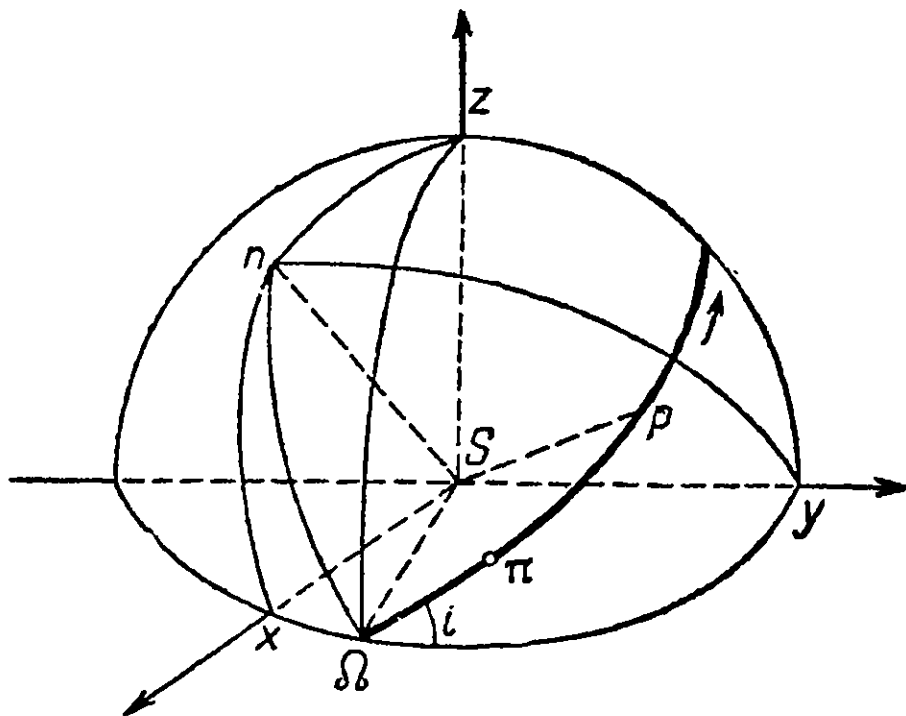
Условимся считать величину C , которая есть не что иное как удвоенная секториальная скорость, всегда положительной. Этим однозначно определятся знаки $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$, а следовательно и направление нормали SN к плоскости орбиты.

§ 11. ВЫБОР ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ИНТЕГРАЛАХ ПЛОЩАДЕЙ

Соотношения (5) выражают C_1, C_2, C_3 через постоянные C, α, β, γ . Эти новые постоянные имеют то преимущество, что они непосредственно связаны с только что выясненными обстоятельствами движения. Но введение их было бы неудобно потому, что вместо трех независимых постоянных мы здесь имеем четыре, связанные соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Чтобы освободиться от указанного неудобства определим положение плоскости орбиты двумя углами. Это делается следующим образом.



Черт. 5.

Возьмем сферу (черт. 5) с центром в точке S . Пусть плоскость орбиты пересекается с этой сферой по большому кругу πp , а нормаль к плоскости орбиты встречает ее в точке n (направление нормали установлено в конце предыдущего параграфа).

Каждая из двух точек, в которых орбита пересекает основную плоскость xSy , называется *узлом* орбиты. Тот из узлов, при прохождении через который координата z переходит от отрицательных значений к положительным, называется *восходящим узлом*, другой — *нисходящим*. Восходящий узел обозначаем знаком $\oslash$ (черт. 4). Те же самые названия сохраним и за проекциями узлов на сферу (черт. 5).

Условившись в такой терминологии, мы можем определить положение плоскости орбиты двумя углами: углом $xS\oslash$, который называется *долготой восходящего узла* (отсчитывается от оси Sx по направлению к оси Sy), и углом nSz , измеряющим наклон плоскости $\oslash \pi p$ к плоскости $x\oslash y$, и называемым *наклонностью орбиты*. Очевидно эти два угла вполне однозначно определяют положение плоскости орбиты. Долгота восходящего узла, которую мы будем обозначать через $\oslash$, может иметь любое значение от 0° до

360°. Наклонность орбиты будем обозначать через i . Если $0^\circ \leq i < 90^\circ$, то говорят, что движение точки P *прямое* (совершается в том же направлении, в котором увеличиваются долготы); в случае $90^\circ < i \leq 180^\circ$ движение называется *обратным*.

Итак наиболее удобными для нас постоянными являются, наряду с C , углы $\varnothing$ и i . Остается выразить C_1, C_2, C_3 через эти новые постоянные.

Из сферических треугольников $xn\varnothing$ и $yn\varnothing$, в которых $xn = \alpha$, $yn = \beta$, находим $\cos \alpha = \sin \varnothing \sin i$, $\cos \beta = -\cos \varnothing \sin i$.

А так как кроме того $\gamma = zn = i$, то окончательно получим интегралы площадей с новыми постоянными в таком виде

$$\left. \begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= C \sin i \sin \varnothing \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= -C \sin i \cos \varnothing \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= C \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

§ 12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ.

Вернемся к интегрированию уравнений (1). Уже найденные в § 10 интегралы привели нас к заключению, что движение точки P совершается в плоскости, проходящей через точку S . Естественно поэтому, для упрощения дальнейшего изучения движения точки P , изменить систему координат—принять за основную плоскость xOy плоскость орбиты.

Предполагая такое изменение координатной системы уже выполненным и обозначая новые координаты через $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, мы будем иметь $\bar{z} = 0$, вследствие чего уравнения (1) сведутся только к двум

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -\frac{K^2 \bar{x}}{r^3}, \quad \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = -\frac{K^2 \bar{y}}{r^3}. \quad (7)$$

Для сокращения письма положено

$$K^2 = k^2 (m_0 + m). \quad (7a)$$

Интегралы площадей (6) сведутся очевидно к одному

$$\bar{x} \frac{d\bar{y}}{dt} - \bar{y} \frac{d\bar{x}}{dt} = C. \quad (8)$$

Как известно из Механики, уравнения (7), точно так же как и уравнения (1), имеют интеграл живой силы. Действительно, умножая первое из уравнений (7) на $2 \frac{d\bar{x}}{dt}$, второе на $2 \frac{d\bar{y}}{dt}$, и складывая, получим

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 \right] = 2K^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right),$$

ибо

$$-r^3 \left(\bar{x} \frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{dt} \right) = -r^{-2} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Итак, после интегрирования,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2K^2}{r} + h, \quad (9)$$

где h — новая произвольная постоянная.

Если бы мы исходили не из уравнений (7), а из уравнений (1), то получили бы интеграл живой силы в таком виде

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2K^2}{r} + h. \quad (10)$$

Решение системы (7) приводится, таким образом, к интегрированию двух уравнений (8) и (9) первого порядка. Этим мы сейчас и займемся.

Прежде всего введем полярные координаты, полагая

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u.$$

Чтобы легче было вернуться к координатам x, y, z , условимся полярный угол u отсчитывать от линии узлов $S \oslash$. По причине, которая будет ясна из дальнейшего, отсчитываемый таким образом угол $\oslash S P$ (черт. 4), измеряемый на сфере (черт. 5) дугой $\oslash p$, называется *аргументом широты*.

Уравнения (8) и (9) примут, как легко видеть, такой вид

$$r^2 \frac{du}{dt} = C, \quad (11)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2K^2}{r} + h. \quad (12)$$

Исключим из этих уравнений время. На основании (11) имеем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{du},$$

что позволяет переписать уравнение (12) следующим образом

$$\frac{C^2}{r^4} \left(\frac{dr}{du}\right)^2 = h + \frac{2K^2}{r} - \frac{C^2}{r^2},$$

или

$$\left[\frac{d\left(\frac{C}{r}\right)}{du}\right]^2 = h + \frac{K^4}{C^2} - \left(\frac{C}{r} - \frac{K^2}{C}\right)^2.$$

Делая, для краткости,

$$s = \frac{C}{r} - \frac{K^2}{C}, \quad A^2 = h + \frac{K^4}{C^2},$$

получим

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = A^2 - s^2.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$u - \omega = \pm \arccos \frac{s}{A},$$

или

$$s = A \cos(u - \omega),$$

где через ω — обозначена постоянная, введенная интегрированием

Определяя отсюда r , получаем

$$r = \frac{C}{\frac{K^2}{C} + \sqrt{h + \frac{K^4}{C^2} \cos(u - \omega)}}$$

или, окончательно,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (13)$$

где введены следующие обозначения

$$p = \frac{C^2}{K^2}, \quad (14)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{K^4}} \quad (15)$$

и наконец

$$v = u - \omega.$$

Как известно, уравнение (13) представляет коническое сечение, фокус которого находится в точке S , причем p есть параметр этого конического сечения, а e —его эксцентриситет. Заметим, что в уравнении (13) мы можем считать e положительным: в самом деле изменение знака e равносильно изменению постоянной интегрирования ω на 180° .

Когда речь идет о движении планет и комет, следовательно за точку S принимается Солнце, вершина конического сечения, ближайшая к S , носит название *перигелия*. В других случаях применяются аналогичные названия: *перигей*—для орбиты Луны по отношению к Земле, *перисатурний*—для спутников Сатурна, *периастрон*—для двойных звезд и т. д.

Угол v , отсчитываемый от перигелия в направлении движения точки P , называется *истинной аномалией*.

Вид конического сечения, описываемого точкой P , определяется величиной эксцентриситета e . Рассмотрим случаи, какие могут здесь представиться.

Если $e < 1$, что будет иметь место, когда $h < 0$, то траектория будет *эллипс*. В этом случае истинная аномалия изменяется от 0° до 360° . Точка орбиты, для которой $v = 180^\circ$, называется *афелием*. Обозначим через a большую полуось эллипса; тогда, как известно,

$$p = a(1 - e^2).$$

Если $e = 1$, т. е. $h = 0$, то точка P будет двигаться по *параболе* (черт. 6). Истинная аномалия считается в этом случае от -180° до $+180^\circ$. Уравнение орбиты (13) для параболы напишется так

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}, \quad (16)$$

где

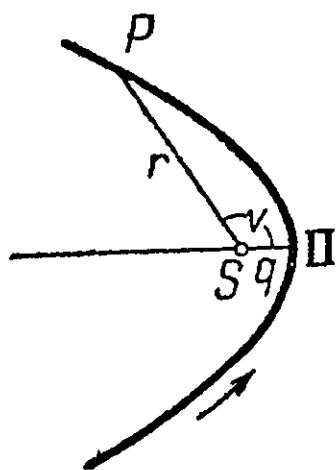
$$q = \frac{1}{2} p$$

есть не что иное, как *перигельное расстояние* SP , ибо $r = q$, если $v = 0$.

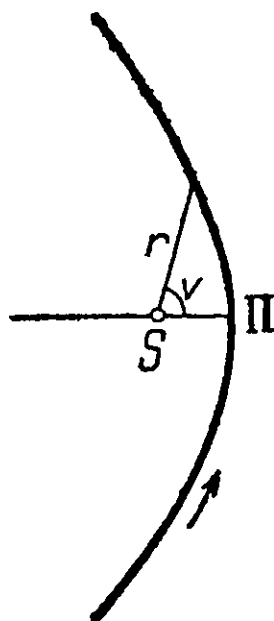
В случае $e > 1$, т. е. при $h > 0$, уравнение (13) представляет ветвь гиперболы, вогнутую по отношению к точке S (черт. 7). Обозначим через ψ наименьший положительный угол, удовлетворяющий уравнению

$$1 + e \cos \psi = 0;$$

в таком случае истинная аномалия в уравнении (13) может изменяться лишь в пределах от $-(180^\circ - \psi)$ до $+(180^\circ - \psi)$ ибо, только при таких значениях v мы будем получать для r положительные значения.



Черт. 6.



Черт. 7.

Большую полуось a условимся считать для гиперболы отрицательной—при таком условии равенства

$$p = a (1 - e^2),$$

$$r = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad (17)$$

будут одинаково применимы как для эллипса, так и для гиперболы.

Соотношения (14) и (15) позволяют выразить первоначальные постоянные интегрирования C и h через новые введенные нами постоянные a и e , характеризующие форму орбиты. Имеем

$$h = -\frac{K^2}{a}, \quad C = K\sqrt{p} = K\sqrt{a(1 - e^2)}.$$

Заметим, что интеграл живой силы (10) может теперь быть написан так

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = K^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \quad (18)$$

или, обозначая через V —скорость точки P ,

$$V^2 = K^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \quad (19)$$

Отсюда заключаем:

величина скорости в какой-либо точке орбиты зависит только от большой полуоси орбиты и от радиуса-вектора.

Обратно:

радиус-вектор и абсолютная величина скорости точки P в какой-либо момент времени вполне определяют большую полуось орбиты. В частности, если

$$V^2 < \frac{2K^2}{r},$$

то движение происходит по эллипсу; если

$$V^2 > \frac{2K^2}{r},$$

то движение происходит по гиперболе; наконец в случае

$$V = K\sqrt{\frac{2}{r}} \quad (20)$$

движение происходит по параболе.

Критическая величина скорости (20), отделяющая замкнутые орбиты от орбит, уходящих на бесконечность, называется *параболической скоростью*.

Как известно кометы в большинстве случаев движутся по орбитам мало отличающимся от парабол, тогда как орбиты планет мало отличаются от окружностей. Так как для кругового движения ($r = a$)

$$V = K\sqrt{\frac{1}{r}},$$

то отсюда следует, что скорость кометы в тот момент, когда она пересекает орбиту планеты, в $\sqrt{2} = 1.41...$ раз больше скорости планеты.

Итак, мы довели интегрирование системы (1) до определения траектории. Остается только заполнить один пробел: надо еще показать, каким образом координаты x, y, z выражаются через координаты r, φ , фигурирующие в уравнении траектории.

Обратимся к черт. 5, где через p и π обозначены проекции точки P и перигелия Π на сферу. Так как

$$x = r \cos(px), \quad y = r \cos(py), \quad z = r \cos(pz),$$

то остается найти косинусы дуг px, py, pz . Из сферического треугольника $x \oslash p$, в котором $xp = \oslash$, $\oslash p = u$, а угол между этими сторонами равен $180^\circ - i$, получим

$$\cos(px) = \cos u \cos \oslash - \sin u \sin \oslash \cos i.$$

Точно так же, из треугольников $y \oslash p$ и $z \oslash p$,

$$\cos(py) = \cos u \sin \oslash + \sin u \cos \oslash \cos i$$

$$\cos(pz) = \sin u \sin i.$$

Следовательно

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \varnothing - \sin u \sin \varnothing \cos i) \\ y &= r(\cos u \sin \varnothing + \sin u \cos \varnothing \cos i) \\ z &= r \sin u \sin i \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Эти соотношения, совместно с равенствами

$$u = v + \omega, \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v},$$

дают искомые координаты точки P в функции истинной аномалии v и пяти постоянных $\varnothing$, i , ω , a и e , введенных интегрированием. Геометрический смысл $\varnothing$, i , a и e был нами своевременно указан; так как

$$\omega = u - v = \varnothing p - \pi p = \varnothing \pi,$$

то ω — есть *угловое расстояние перигелия от узла*.

Чтобы получить полное решение задачи двух тел, остается выразить истинную аномалию в функции времени. Это выполняется различно в зависимости от формы орбиты, поэтому в дальнейшем мы рассмотрим отдельно движение по эллипсу, параболе и гиперболе.

§ 13. ДВИЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПСУ.

Интеграл площадей (11) мы можем написать так:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = K \sqrt{a(1 - e^2)}, \quad (22)$$

ибо $du = dv$. Подставляя сюда значение радиуса-вектора, даваемое уравнением орбиты (17), получим искомую зависимость между v и t .

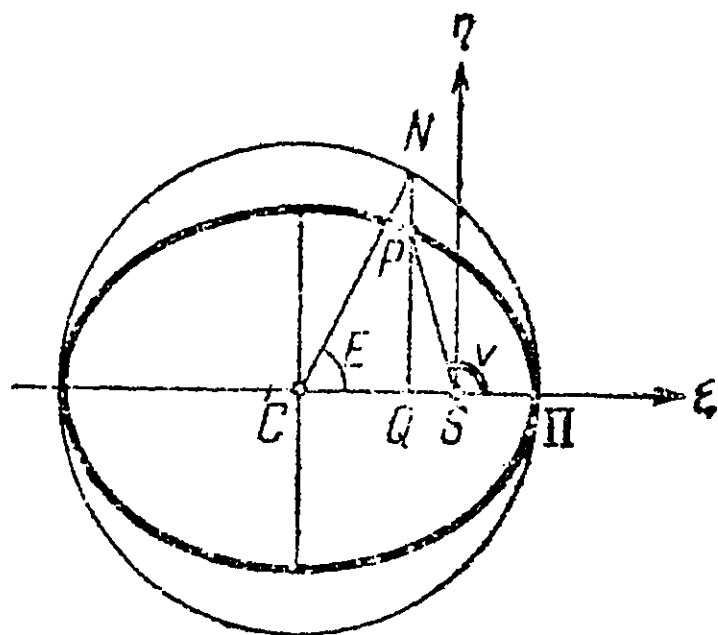
Удобнее однако воспользоваться параметрическим представлением эллипса.

Возьмем в плоскости орбиты прямоугольные координатные оси $S\xi$ и $S\eta$, расположенные так, как это указано на черт. 8. Обозначив через (ξ, η) координаты точки P в этой системе, получим

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v.$$

Уравнения (3) на стр. 9 дают

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e), \\ \eta &= b \sin E, \end{aligned} \quad (23)$$



Черт. 8.

где $b = a\sqrt{1-e^2}$ есть малая полуось эллипса. Следовательно

$$\left. \begin{aligned} r \sin v &= a \sqrt{1-e^2} \sin E \\ r \cos v &= a (\cos E - e) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Нетрудно выяснить геометрическое значение параметра E . Проведем из центра эллипса C окружность радиусом, равным a . Продолжим ординату PQ точки P до пересечения с этой окружностью в точке N , и рассмотрим треугольник CQN . Так как

$$CQ = CS + SQ = ae + \xi = a \cos E$$

$$NQ = \sqrt{CN^2 - CQ^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 E} = a \sin E,$$

то ясно, что угол QCN этого треугольника как раз равен E .

Угол E в Астрономии называется *эксцентрической аномалией*.

Соотношения (24) позволяют выразить r и v через эксцентрическую аномалию. Возводя их в квадрат и складывая, получим

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (25)$$

Подставляя это значение r в равенства (24), найдем

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

Продифференцируем первое из этих равенств и воспользуемся вторым для исключения $\cos v$. Это даст

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2} dE}{1 - e \cos E}. \quad (26)$$

Подставим теперь найденные выражения (25) и (26) в интеграл площадей (22). Получим

$$(1 - e \cos E) dE = Ka^{-\frac{3}{2}} dt,$$

откуда, после интегрирования,

$$E - e \sin E = Ka^{-\frac{3}{2}} (t - T),$$

где T — постоянная интегрирования.

Это уравнение называется *уравнением Кеплера*.

Полагая

$$n = Ka^{-\frac{3}{2}}, \quad (27)$$

$$M = n(t - T), \quad (28)$$

напишем его так

$$E - e \sin E = M. \quad (29)$$

Уравнение Кеплера служит для определения E для данного момента времени t . Когда уравнение Кеплера решено, то уравнения (24) дадут r и v , после чего по формулам (21) можно вычислить x , y , z .

Легко видеть, что уравнение Кеплера для любого значения M имеет одно и только одно решение. В самом деле, так как при всех значениях E

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E > 0,$$

(ибо $e < 1$), то при возрастании E величина $M = E - e \sin E$ непрерывно возрастает. С другой стороны, $M \rightarrow +\infty$, когда $E \rightarrow +\infty$ и $M \rightarrow -\infty$, когда $E \rightarrow -\infty$. Отсюда ясно, что каждому значению M отвечает одно вполне определенное значение E .

Вопросом о фактическом решении уравнения Кеплера мы займемся впоследствии, а сейчас отметим лишь два частных случая. Пусть $t = T$, тогда $M = 0$ и следовательно $E = 0$, $v = 0$, т. е. движущаяся точка находится в перигелии. Итак, *постоянная T в уравнении Кеплера есть один из моментов прохождения движущейся точки через перигелий.*

Пусть теперь $t = T + P$, где через P обозначено время полного оборота движущейся точки. Так как за время полного оборота эксцентрисическая аномалия возрастает от 0° до 360° , то для рассматриваемого момента из (29) получим

$$360^\circ = nP,$$

откуда

$$n = \frac{360^\circ}{P}.$$

Это выражение дало повод назвать n *средним суточным движением* (время оборота предполагается выраженным в средних сутках). Величина $M = n(t - T)$ называется *средней аномалией*.

Конечно, в уравнении (29) все члены должны быть выражены в одинаковой мере. Если например E и M выражаются в градусах, то и эксцентриситет e должен быть выражен в градусах при помощи равенства

$$e^\circ = 57^\circ \cdot 29578 e.$$

Обратно, если E и e выражены в радианах, то и M должно быть выражено в радианах, для чего надо взять

$$n = \frac{2\pi}{P}. \quad (30)$$

Задача интегрирования уравнений (1) в случае эллиптического движения полностью решена: уравнение Кеплера (29) и формулы (24) и (21) дают координаты движущейся точки в функции времени и шести постоянных $\Omega, i, \omega, a, e, T$. Эти постоянные, вполне определяющие все обстоятельства движения, называются *элементами орбиты*.

Вместо T часто пользуются другим элементом, более удобным в особенности для планет. Обозначим через t_0 какой-либо определенный момент времени и перепишем равенство (28) так

$$M = n(t - t_0) + M_0$$

где

$$M_0 = n(t_0 - T).$$

Равенство (31) показывает, что M_0 есть нечто иное как средняя аномалия для момента t_0 , или, как принято говорить, *средняя аномалия эпохи*.

Примечание. Для вычисления радиуса-вектора и истинной аномалии можно пользоваться, вместо формулы (24), другими соотношениями.

Комбинируя путем сложения и вычитания равенство (25) со вторым из соотношений (24) получим

$$r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos E)$$

$$r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos E)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{v}{2} &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2} \\ \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Двойственность знака при извлечении корня устраняется тем соображением, что углы $\frac{1}{2} v$ и $\frac{1}{2} E$ находятся всегда в одном и том же квадранте (ибо когда $E = 180^\circ$, то и $v = 180^\circ$).

Из (32) вытекает следующая часто употребляемая формула

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (32a)$$

Введем угол эксцентриситета φ , определяемый равенством

$$\sin \varphi = e.$$

Тогда

$$\sqrt{1+e} = \sqrt{2} \cos \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right),$$

$$\sqrt{1-e} = \sqrt{2} \sin \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right),$$

а потому

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \cotg \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (33)$$

Умножая первое из равенств (32) на $\cos \frac{E}{2}$, второе на $-\sin \frac{E}{2}$, и складывая, получим

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} (v - E) = \sqrt{a} (\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}) \sin \frac{E}{2} \cos \frac{E}{2}.$$

Или, вводя угол эксцентриситета,

$$\sin \frac{1}{2} (v - E) = \sqrt{\frac{a}{r}} \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E. \quad (34)$$

Пользуясь формулами (24) и (25), можно придать этому соотношению такой вид

$$\sin \frac{1}{2} (v - E) = \sqrt{\frac{r}{p}} \sin \frac{1}{2} \varphi \sin v. \quad (35)$$

Совершенно таким же путем выводятся следующие две формулы

$$\sin \frac{1}{2} (\varphi + E) = \sqrt{\frac{a}{r}} \cos \frac{1}{2} \varphi \sin E,$$

$$\sin \frac{1}{2} (\varphi + E) = \sqrt{\frac{r}{p}} \cos \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi.$$

§ 14. ДВИЖЕНИЕ ПО ПАРАБОЛЕ.

Перейдем теперь к определению положения движущейся точки на орбите в том случае, когда движение происходит по параболе. В этом случае уравнение орбиты (16) дает

$$r = q \sec^2 \frac{v}{2}. \quad (36)$$

Подставляя это выражение в интеграл площадей

$$r^2 \frac{dv}{dt} = K \sqrt{p},$$

получим

$$\frac{dv}{\cos^4 \frac{v}{2}} = \sqrt{2} K q^{-\frac{3}{2}} dt.$$

Это равенство можно переписать так

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) \cdot d\left(\operatorname{tg} \frac{v}{2}\right) = \frac{K dt}{\sqrt{2} q^{\frac{3}{2}}}.$$

Откуда

$$\frac{\sqrt{2}}{K} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right) = \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}}. \quad (37)$$

Легко видеть, что это уравнение для каждого значения t дает одно и только одно значение истинной аномалии в пределах от -180° до $+180^\circ$. В самом деле, когда v убывая стремится к -180° , то t стремится к $-\infty$; при v стремящемся к $+180^\circ$, время t стремится к $+\infty$. С другой стороны при возрастании одной из этих переменных другая также всегда возрастает, ибо

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K \sqrt{p}}{r^2} > 0;$$

откуда следует, что каждому значению t соответствует только одно значение v .

В Астрономии с параболическими орбитами приходится встречаться при изучении движения комет относительно Солнца. За единицу масс принимается масса Солнца, по сравнению с которой массы всех комет практически равны нулю. Таким образом в равенстве (7а)

$$K = k \sqrt{m_0 + m}$$

мы можем положить $m_0 = 1$, $m = 0$, что дает $K = k$.

Принимая это во внимание и полагая

$$P = q^{-\frac{3}{2}}(t - T)$$

получим

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right) = P. \quad (38)$$

Специальные таблицы, дающие либо P по аргументу v , либо v по аргументу P , позволяют очень просто находить истинную аномалию, соответствующую данному моменту времени, когда известны q и T .

Так как при $v = 0$, из (37) следует $t = T$, то T есть момент прохождения через перигелий.

Итак, параболическое движение определяется следующими пятью элементами: Ω , i , ω , q , T .

Чтобы получить координаты кометы для какого-либо момента времени t , надо найти, при помощи уравнения (38), истинную аномалию v ; после чего уравнение орбиты (36) даст радиус-вектор r , наконец формулы (21) дадут координаты кометы x , y , z .

§ 15. ДВИЖЕНИЕ ПО ГИПЕРБОЛЕ.

Этот случай отличается от случая эллиптического движения, рассмотренного в § 13, только тем, что в уравнениях

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad r^2 \frac{dv}{dt} = K \sqrt{a(1 - e^2)},$$

подлежащих разрешению относительно r и v , надо считать $e > 1$, $a < 0$.

Сделанная нами подстановка (24)

$$\begin{aligned} r \sin v &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ r \cos v &= a (\cos E - e) \end{aligned}$$

одинаково применима и для гиперболы, ибо эти выражения, точно так же как и вытекающее из них равенство

$$r = a(1 - e \cos E),$$

тождественно (т. е. при всяких значениях E , как действительных, так и комплексных) удовлетворяют уравнению орбиты, независимо от того, каковы будут a и e .

Отличие заключается только в том, что в случае гиперболического движения $\sin E$ будет мнимым числом, тогда как $\cos E$ остается действительным. В виду этого здесь удобнее вместо эксцентрической аномалии E пользоваться величиной

$$H = -iE.$$

Отсюда, по самому определению гиперболических функций,

$$i \sin E = -\operatorname{sh} H, \quad \cos E = \operatorname{ch} H;$$

так что для параметрического представления точек гиперболы получаем следующие формулы с действительным параметром H

$$\begin{aligned} r \sin v &= -a \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \\ r \cos v &= -a (e - \operatorname{ch} H), \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\left. \begin{aligned} r \sin v &= |a| \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \\ r \cos v &= |a| (e - \operatorname{ch} H) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Для получения параметра H в функции времени можно было бы проделать вычисления, аналогичные тем, которые привели нас в § 13 к уравнению Кеплера. Но проще прямо заменить в этом уравнении E через $+iH$. Это даст

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - T), \quad (40)$$

где

$$n = K |a|^{-\frac{3}{2}}.$$

Отметим еще следующие формулы легко получаемые из соответствующих формул § 24 при помощи той же подстановки

$$r = |a| (e \operatorname{ch} H - 1), \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tgh} \frac{H}{2} \quad (41)$$

$$\sqrt{r} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{|a| (e+1)} \operatorname{sh} \frac{H}{2}$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{v}{2} = \sqrt{|a| (e-1)} \operatorname{ch} \frac{H}{2}$$

В прежнее время, когда подробные таблицы гиперболических функций отсутствовали, пользование этими формулами было затруднительно. ¹⁾ Поэтому их заменяли другими, содержащими только тригонометрические функции. Этой цели можно достичь подстановкой

$$H = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} F \right),$$

где через $\ln$ обозначен натуральный логарифм. Тогда, как легко проверить,

$$\operatorname{sh} H = \operatorname{tg} F, \quad \operatorname{ch} H = \sec F, \quad \operatorname{tgh} \frac{H}{2} = \operatorname{tg} \frac{F}{2}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (40), (39) и (41) и переходя от натуральных логарифмов к обыкновенным, получим

$$Me \operatorname{tg} F - \lg \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} F \right) = Mn(t - T) \quad (42)$$

¹⁾ Из имеющихся в настоящее время таблиц гиперболических функций укажем: Таблицы логарифмов гиперболических функций и натуральных величин гиперболических и тригонометрических функций д-ра Лиговского (издание Военно-топографического Управления, Москва, 1929).

$$M = 0.434\,2945$$

$$r \sin v = |a| \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F$$

$$r \cos v = |a| (e - \sec F)$$

$$r = |a| (e \sec F - 1), \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2}.$$

Решение уравнения (40) относительно H , или уравнения (42) относительно F производится обычными методами численного решения уравнений. Можно, например, найти приближенное значение неизвестной графически и затем исправлять его по способу Ньютона ¹⁾.

§ 16 ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА.

Полученные результаты позволяют осветить связь существующую между законом всемирного тяготения и законами Кеплера, сыгравшими такую большую роль в открытии закона всемирного тяготения.

В первом приближении мы можем пренебречь силами, с которыми планеты действуют друг на друга, и рассматривать движение каждой планеты как результат взаимодействия этой планеты и Солнца.

При таком предположении результаты § 10 и 12 сразу дают нам первый и второй законы Кеплера: планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, и притом так, что площадь сектора, описываемого радиусом-вектором, изменяется пропорционально времени (стр. 31); траектория движения есть эллипс, в фокусе которого находится Солнце (среди найденных в § 12 возможных траекторий движения, для планет может иметь место только эллипс).

Третий закон Кеплера связывает большую полуось орбиты a и период обращения планеты вокруг Солнца P . Для получения такой зависимости сравним выражения (27) и (30), полученные в § 13 для среднего суточного движения. Вспоминая, что

$$K = k \sqrt{m_0 + m},$$

получим

$$P = \frac{2\pi}{k \sqrt{m_0 + m}} a^{\frac{3}{2}}. \quad (43)$$

Для другой планеты с массой m_1 , периодом обращения P_1 и большой полуосью a_1 , точно так же будем иметь

$$P_1 = \frac{2\pi}{k \sqrt{m_0 + m_1}} a_1^{\frac{3}{2}}.$$

¹⁾ Как отметил Н. Н. Матусевич (Изв стия Гл. Астр. Обсерватории в Пулкове № 103 (1929), стр. 242), при решении уравнения (42) очень полезны мореходные таблицы, дающие

$$D = \frac{1}{\operatorname{arc} 1'} \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} F \right)$$

по аргументу F .

Откуда заключаем, что

$$\frac{P^2}{P_1^2} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m} \frac{a^3}{a_1^3}.$$

Это и есть третий закон Кеплера, но только в исправленном, уточненном виде. Отличие от приближенного закона, открытого Кеплером, невелико вследствие малости планетных масс: массы планет настолько малы по сравнению с массой Солнца, что дробь $(m_0 + m_1) : (m_0 + m)$ во всех случаях отличается от единицы меньше чем на одну тысячную.

§ 17. ВЫБОР ЕДИНИЦ. ГАУССОВА ПОСТОЯННАЯ.

При изучении движений тел солнечной системы наиболее удобной системой единиц является следующая: за единицу длины принимается большая полуось земной орбиты ¹, за единицу времени — средние солнечные сутки, за единицу массы — масса Солнца. Этой системой единиц мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Важно вычислить постоянную притяжения, соответствующую принятой системе единиц. Для этого воспользуемся формулой (43), которая дает

$$k = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{P \sqrt{m_0 + m}}.$$

Гаусс применил эту формулу к Земле, причем длину сидерического года он принял равной $P = 365.256\ 3835$ средних солнечных суток; для массы Земли (+ масса Луны) он принял величину $m = 1:354\ 710$. Так как кроме того, по условию, $a = 1$, $m_0 = 1$, то получается следующее значение k

$$\begin{aligned} k &= 0.017\ 202\ 098\ 95 \\ \lg k &= 8.235\ 581\ 441\ 4 - 10, \\ \lg k'' &= 3.550\ 006\ 574\ 6 \end{aligned}$$

где через k'' обозначена величина k выраженная в секундах, т. е. положено

$$k'' = \frac{k}{\text{arc } 1''}.$$

Это значение k известно под именем *гауссовой постоянной*. Имеющиеся в настоящее время более точные значения P и m дали бы несколько иное значение для k . Но так как изменять k неудобно, то предпочли оставить без изменения гауссову величину этой постоянной: а для того чтобы в равенстве (43) не получилось противоречия условились единицу длины выбирать так, чтобы это равенство строго удовлетворялось. При таком условии большая полуось земной орбиты не будет уже равняться единице, а будет определяться формулой

$$a = \left(\frac{kP \sqrt{1+m}}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

¹) Точнее говоря, большая полуось орбиты, описываемой вокруг Солнца центром тяжести системы Земля—Луна.

Взяв значения, положенные Ньютоном в основу его таблиц больших планет, а именно:

$$m = 1:329\,390,$$

$$P \text{ (для 1900)} = 365.256\,360\,42,$$

получим $\lg a = 0.000\,000\,013$.

§ 18. ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ.

Обозначим через (ξ_0, η_0, ζ_0) и (ξ, η, ζ) координаты точек S и P относительно произвольной неподвижной системы осей координат. Через m_0 и m будем попрежнему обозначать массы этих точек. Напишем дифференциальные уравнения движения. На точку S действует сила, направленная по прямой SP и равная $k^2 m_0 m r^{-2}$, где r — расстояние между S и P . Компоненты этой силы по осям координат равны

$$\frac{k^2 m_0 m}{r^2} \frac{\xi - \xi_0}{r}, \quad \frac{k^2 m_0 m}{r^2} \frac{\eta - \eta_0}{r}, \quad \frac{k^2 m_0 m}{r^2} \frac{\zeta - \zeta_0}{r}.$$

Компоненты силы, действующей на точку P , будут такие же, но с обратными знаками. Сообразно с этим, уравнения движения напишутся так

$$\left. \begin{aligned} m_0 \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{\xi - \xi_0}{r^3} \\ m_0 \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{\eta - \eta_0}{r^3} \\ m_0 \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= k m_0 m \frac{\xi_0 - \xi}{r^3} \\ m \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{\eta_0 - \eta}{r^3} \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{\zeta_0 - \zeta}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Складывая попарно полученные уравнения, получим

$$m_0 \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} + m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0$$

$$m_0 \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} + m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0$$

$$m_0 \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} + m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 0.$$

Проинтегрировав дважды эти равенства получим

$$m_0 \xi_0 + m \xi = A_1 t + B_1$$

$$m_0 \eta_0 + m \eta = A_2 t + B_2$$

$$m_0 \zeta_0 + m \zeta = A_3 t + B_3,$$

где $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ — постоянные введенные интегрированием.

Обозначим через $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ координаты центра тяжести точек S и P . Тогда

$$\left. \begin{aligned} (m_0 + m) \bar{\xi} &= m_0 \xi_0 + m \xi \\ (m_0 + m) \bar{\eta} &= m_0 \eta_0 + m \eta \\ (m_0 + m) \bar{\zeta} &= m_0 \zeta_0 + m \zeta \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Следовательно

$$\begin{aligned}(m_0 + m) \bar{\xi} &= A_1 t + B_1 \\(m_0 + m) \bar{\eta} &= A_2 t + B_2 \\(m_0 + m) \bar{\zeta} &= A_3 t + B_3.\end{aligned}$$

Эти равенства показывают, что центр тяжести движется прямолинейно и равномерно.

Перенесем начало координат в центр тяжести $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, причем новые координаты S и P обозначим через (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) , так что

$$\left. \begin{aligned}\xi_0 &= \bar{\xi} + x_0 & \xi &= \bar{\xi} + x \\ \eta_0 &= \bar{\eta} + y_0 & \eta &= \bar{\eta} + y \\ \zeta_0 &= \bar{\zeta} + z_0 & \zeta &= \bar{\zeta} + z\end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (44) и замечая, что

$$\frac{d^2 \bar{\xi}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\eta}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\zeta}}{dt^2} = 0,$$

получим следующие уравнения, определяющие движение относительно центра тяжести

$$\left. \begin{aligned}m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{x - x_0}{r^3} \\ m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{y - y_0}{r^3} \\ m_0 \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{z - z_0}{r^3}\end{aligned} \right\} (47') \quad \left. \begin{aligned}m \frac{d^2 x}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{x_0 - x}{r^3} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{y_0 - y}{r^3} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= k^2 m_0 m \frac{z_0 - z}{r^3}\end{aligned} \right\} (47'')$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Подстановка выражений (46) в равенстве (45) дает

$$m_0 x_0 + m x = 0, \quad m_0 y_0 + m y = 0, \quad m_0 z_0 + m z = 0.$$

Эти соотношения дают возможность исключить из уравнений (47') x, y, z , а из уравнений (47'') x_0, y_0, z_0 . Получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m) x_0}{r^3} &= 0, & \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m) x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m) y_0}{r^3} &= 0, & \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m) y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m) z_0}{r^3} &= 0, & \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m) z}{r^3} &= 0.\end{aligned}$$

Так как, кроме того,

$$r = \frac{m_0 + m}{m} R_0,$$

$$r = \frac{m_0 + m}{m_0} R,$$

где

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то, полагая ради краткости

$$M_0 = \frac{m^3}{(m_0 + m)^2},$$

$$M = \frac{m_0^3}{(m_0 + m)^2},$$

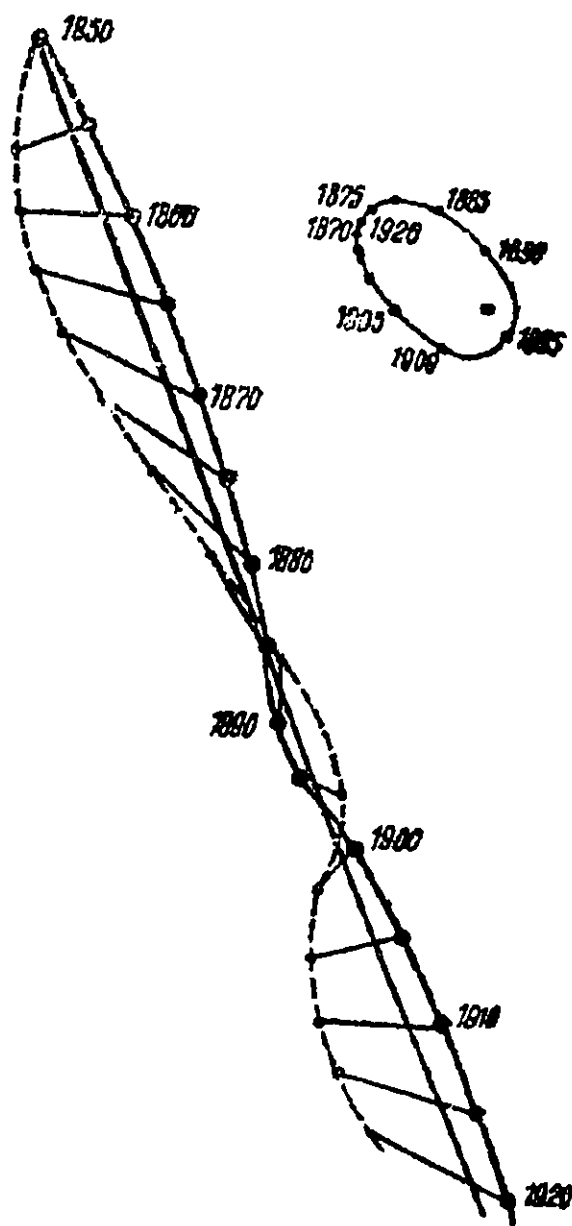
окончательно получим уравнения движения точек S и P в таком виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{k^2 M_0 x_0}{R_0^3} &= 0, & \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 M x}{R^3} &= 0, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{k^2 M_0 y_0}{R_0^3} &= 0, & \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 M y}{R^3} &= 0, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} + \frac{k^2 M_0 z_0}{R_0^3} &= 0, & \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 M z}{R^3} &= 0. \end{aligned}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (1), определяющими движение P относительно S , мы видим, что они отличаются лишь заменой постоянной $m_0 + m$ через M_0 или M . Таким образом все результаты, полученные для движения, определяемого уравнениями (1), остаются в силе и для движения каждой из точек S и P относительно их общего центра тяжести.

На черт. 9 дан пример прямолинейного и равномерного движения центра тяжести двух тел. С левой стороны на этом чертеже изображено движение Сириуса и его спутника с 1850 г. по 1920 г. в проекции на небесную сферу.

С правой стороны представлено движение спутника относительно Сириуса.



Черт. 9.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Найти уравнение траектории при помощи формулы (20) на стр. 27.
2. Показать что справедливо следующее предложение, частным случаем которого является третий закон Кеплера. Если имеем какое-либо решение задачи двух тел, то мы можем получить из него другое решение, умножив все линейные размеры на A , а все интервалы времени на $A^{3/2}$, где A любое постоянное число.
Это предложение справедливо и для задачи n тел.
3. Изучить движение двух материальных точек, между которыми действует отталкивательная сила прямо пропорциональная массам и обратно пропорциональная квадрату расстояния. Показать, что в этом случае движение одного тела относительно другого происходит по ветви гиперболы выпуклой по отношению к этому последнему телу.
4. Если бы масса Земли стала исчезающе малой по сравнению с массой Солнца, то как это отразилось бы на движении Земли?
(Отв. Длина года увеличилась бы на $47'' \cdot 8$)
5. Определить время, в течение которого комета, имеющая перигельное расстояние, проходит часть своей орбиты от $\varpi = 0^\circ$ до $\varpi = 90^\circ$
(Отв. $109 \cdot 61 \text{ q}^{2/3}$ суток).
6. Вычислить параболическую скорость для материальной частицы, движущейся у поверхности Земли.
(Отв. $11,180 \text{ м/сек}$).

7. Вилькенс (A. Wilkens) указал на следующее обобщение третьего закона Кеплера: Если два светила с исчезающе малыми массами движутся по орбитам с равными эксцентриситетами, то квадраты времен прохождения одинаковых и одинаково расположенных относительно линии апсид дуг относятся как кубы перигельных расстояний (для эллиптических орбит отношение перигельных расстояний можно заменить отношением больших полуосей).

Доказать эту теорему.

8. Изучить движение материальной точки, притягиваемой неподвижным центром с силой равной $F = \mu r^{-2} + \nu r^{-3}$. Показать, что при малых значениях ν орбиту можно рассматривать как коническое сечение, линия апсид которого поворачивается с постоянной угловой скоростью.

9. Из уравнений (1), (2) и (3) вывести интегралы Лапласа:

$$c_3 \frac{dy}{dt} - c_2 \frac{dz}{dt} - k^2 (m_0 + m) \frac{x}{r} = f_1,$$

$$c_1 \frac{dz}{dt} - c_3 \frac{dx}{dt} - k^2 (m_0 + m) \frac{y}{r} = f_2,$$

$$c_2 \frac{dx}{dt} - c_1 \frac{dy}{dt} - k^2 (m_0 + m) \frac{z}{r} = f_3,$$

где f_1, f_2, f_3 — новые постоянные.

ГЛАВА III.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИД ПЛАНЕТ И КОМЕТ.

В предыдущей главе мы проинтегрировали уравнения движения задачи двух тел. С математической точки зрения эта задача таким образом вполне решена; но она еще не решена нами до конца с астрономической точки зрения. Действительно, мы получили общие выражения координат светила в функции времени и шести постоянных интегрирования, но для того чтобы вопрос мог считаться исчерпанным, надо уметь определять эти постоянные интегрирования (элементы орбиты) из наблюдений; надо, также, дать практически удобные способы для вычисления координат светила для любого момента времени. Первая из этих проблем — определение элементов орбиты из наблюдений — будет подробно изучена в следующей части. Настоящая глава посвящена второй проблеме — вычислению координат светила, когда элементы его орбиты уже известны. Таким образом эта глава является естественным продолжением предыдущей (поскольку в ней обрабатываются с точки зрения вычислительной техники формулы предыдущей главы) и подготовкой к изучению более сложной проблемы — нахождения элементов орбиты из наблюдений.

Мы рассмотрим прежде всего вычисление прямоугольных гелиоцентрических координат x, y, z для данного момента времени t . Данными при этом являются элементы орбиты: — $a, e, \varnothing, i, \omega, M_0$, — если орбита эллиптическая, и $q, \varnothing, i, \omega, T$ — если орбита параболическая. Случай, когда эксцентриситет мало отличается от единицы, с точки зрения вычислительной техники требует специальных методов (§ 22 и Дополнение в конце главы).

После того как получены гелиоцентрические координаты, мы можем вычислить соответствующие геоцентрические координаты ξ, η, ζ , воспользовавшись формулами переноса начала координат

$$\xi = x + X, \eta = y + Y, \zeta = z + Z,$$

где через X, Y, Z обозначены координаты Солнца (известные из теории движения Земли). Затем остается только от прямоугольных геоцентрических координат перейти к сферическим, для чего служат известные соотношения

$$\xi = \rho \cos \delta \cos \alpha, \quad \eta = \rho \cos \delta \sin \alpha, \quad \zeta = \rho \sin \delta.$$

§ 19. ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ В ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ.

Положение светила в плоскости орбиты может определяться либо полярными координатами—радиусом-вектором r и истинной аномалией v , либо прямоугольными координатами ξ и η , причем

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v.$$

Для получения этих координат надо выполнить нижеследующие операции (см. § 13).

1. *Вычисление средней аномалии.* Для этого служит формула

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

где n —среднее суточное движение, а M_0 —средняя аномалия для эпох t_0 .

2. *Вычисление эксцентрической аномалии* определяемой уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = M. \quad (1)$$

Решение уравнения Кеплера относительно E состоит из двух частей—нахождения приближенного значения корня и улучшения этого предварительного значения для получения E с нужной степенью точности.

Приближенное значение E удобнее всего находится при помощи специальных таблиц. Таблица IV, помещенная в конце книги, дает разность $E - M$ с точностью до $0^\circ.01$ для значений e , не превышающих 0.50. При пользовании этой таблицей надо помнить, что

$$E - M > 0, \text{ если } 0^\circ < M < 180^\circ,$$

и

$$E - M < 0, \text{ если } 180^\circ < M < 360^\circ.$$

Таблицы Астранда ¹⁾ дают E с точностью до $0^\circ.001$ по аргументу M (изменяющемуся от 0° до 180° сначала через $0^\circ.5$, затем через 1°) и аргументу e (который изменяется от 0.00 до 1.00 через 0.01). Если M превышает 180° , то для M и E берутся дополнения до 360° .

¹⁾ J. J. Astrand, Hülfsstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Keplerschen Problems. Leipzig, 1890.

Если таблицы отсутствуют, или пользоваться ими неудобно (для больших значений эксцентриситета), то приближенное значение E может быть получено при помощи несложного вычисления. Из многих способов, предложенных для этой цели, укажем следующий.

Полагая

$$E - M = x$$

перепишем уравнение (1) так

$$x = e \sin (M + x),$$

или

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin M}{x/(e \sin x) - \cos M}. \quad (2)$$

Так как функция $x/\sin x$ при не очень больших значениях x изменяется, при изменении x , весьма медленно, то достаточно подставить в правую часть уравнения (2) грубо приближенное значение x для того, чтобы найти, по $\operatorname{tg} x$, значительно более точную величину x . Для первого приближения можно например взять $x/\sin x = 1$, что дает

$$\operatorname{tg} x_0 = \frac{\sin M}{1/e - \cos M}.$$

Для получения более точного значения $\operatorname{tg} x$, нужно взять, в правой части уравнения (2), более точное значение $x/\sin x$, например $x_0/\sin x_0$. Значения функции $x/\sin x$ не очень удобно находить при помощи обыкновенных тригонометрических таблиц, поэтому они либо берутся из специальных таблиц ¹⁾, либо находятся при помощи приближенной формулы

$$\frac{x}{\sin x} = \sqrt[3]{\sec x},$$

которая дает логарифм этой функции с пятью верными знаками для $x < 9^\circ$, и с четырьмя знаками, если $x < 15^\circ$.

Обратимся теперь к вычислению *точного значения* E , для чего применяется либо метод итерации, либо метод Ньютона. Рассмотрим сначала метод итерации.

Пусть E_0 приближенное значение эксцентрисической аномалии. Если уравнение (1) написать так

$$E = M + e \sin E,$$

¹⁾ Из таких таблиц можно указать следующие:

М. Ф. Субботин, Формулы и таблицы для вычисления орбит и эфемерид. Ташкент, 1929. Таблица XI дает $\lg \frac{x}{\sin x}$ по аргументу $\operatorname{tg} x$.

Marth (Monthly Notices of the R. Astr. Soc., 1890, Vol. 50) дает значения этой же функции по аргументу $\lg x$ до $\lg x = 9.880$.

Аналогичную таблицу, но идущую лишь до $\lg x = 9.700$ опубликовал Harzer (Astr. Nachr. Bd. 195, 1913).

Наконец Oppolzer, предложивший преобразование уравнения Кеплера к виду (2), дал обширную таблицу значений $\lg \frac{x}{\sin x}$ по аргументу $\lg \operatorname{tg} x$ (Wien. Denkschr. d. K. Akad. 1885, Bd. 50). Однако вследствие неудачно выбранного аргумента эта таблица несмотря на свои размеры, не охватывает всех случаев, обслуживаемых только что упомянутыми таблицами.

то легко проверить, что условие применимости метода итерации¹⁾ будет выполнено при любом значении E . Действительно

$$\left| \frac{d}{dE} (M + e \sin E) \right| \leq e < 1.$$

Таким образом, вычисляя последовательно

$$E_1 = M + e \sin E_0$$

$$E_2 = M + e \sin E_1$$

$$E_3 = M + e \sin E_2$$

$$\dots, \dots$$

мы можем быть уверены, что E_n будет стремиться к искомому значению E , когда n — возрастает.

Можно несколько сократить вычисления при помощи следующего приема. Пусть

$$\Delta_0 = E_1 - E_0, \quad \Delta_1 = E_2 - E_1, \quad \dots;$$

тогда

$$E = \lim E_n = E_0 + \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots \quad (3)$$

Так как

$$\Delta_1 = E_2 - E_1 = e (\sin E_1 - \sin E_0) = 2e \sin \frac{E_1 - E_0}{2} \cos \frac{E_1 + E_0}{2},$$

то приближенно можно положить

$$\Delta_1 = (e \cos \varepsilon) \Delta_0, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(E_1 + E_0). \text{ Точно так же}$$

$$\Delta_2 = (e \cos \varepsilon) \Delta_1 = (e \cos \varepsilon)^2 \Delta_0,$$

и вообще

$$\Delta_n = (e \cos \varepsilon)^n \Delta_0.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3) и суммируя получившуюся геометрическую прогрессию, будем иметь

$$E = E_0 + \frac{\Delta_0}{1 - e \cos \varepsilon},$$

или, пользуясь (4),

$$E = E_0 + \frac{\Delta_0^2}{\Delta_0 - \Delta_1}.$$

Заметив, что

$$E_2 = E_1 + \Delta_1 = E_0 + \Delta_0 + \Delta_1,$$

последнее равенство можно представить в следующей окончательной форме²⁾

$$E = E_2 + \frac{\Delta_1^2}{\Delta_0 - \Delta_1}. \quad (5)$$

¹⁾ Как известно это условие заключается в следующем: корень α уравнения $x = \varphi(x)$ может быть найден при помощи итерации, если $|\varphi'(x)| < 1$.

²⁾ Этой формулой пользовался еще Гаусс (к. Ф. Гаусс, Теоретическая астрономия, Лекции читанные в Геттингене в 1820—1821 г., записанные Купфером. Перевод А. Н. Крылова. Петроград, 1919, стр. 168). Позднее на нее обратил внимание Петерс (Astr. Nachr. Bd. 126, 1891 г.).

Применение метода итерации к уравнению Кеплера, представленному в форме (2), приводит к цели еще скорее, но является удобоприменимым лишь при наличии специальных таблиц.

При логарифмических вычислениях вместо метода итерации нередко пользуются методом Ньютона. Этот метод заключается, как известно, в следующем. Взяв какое-либо приближенное значение E_0 , разложим правую часть уравнения (1) в ряд Тэйлора по степеням $E - E_0$. Получим

$$M = E_0 - e \sin E_0 + (1 - e \cos E_0) \frac{E - E_0}{1} + e \sin E_0 \frac{(E - E_0)^2}{2} \dots$$

Откуда, пренебрегая членами порядка выше первого и полагая

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0,$$

будем иметь

$$E - E_0 = \frac{M - M_0}{1 - e \cos E_0}.$$

Повторное применение этой формулы очень скоро приводит к цели.

3. *Вычисление полярных координат* производится по одной из трех следующих групп формул

$$\left. \begin{aligned} r \sin v &= a \cos \varphi \sin E \\ r \cos v &= a (\cos E - \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v &= \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \\ r &= a (1 - e \cos E) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E \\ \sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Когда нужно вычислять r и v для целого ряда моментов, то последние формулы наиболее удобны, но они дают, при том же числе знаков, точность слегка меньшую. Наиболее точные при определенном числе знаков, результаты получаются при вычислении по формулам (25) и (34) § 13, т. е.

$$\left. \begin{aligned} r &= a (1 - e \cos E) \\ \sin \frac{1}{2} (v - E) &= \sqrt{\frac{a}{r}} \sin \frac{\varphi}{2} \sin E \end{aligned} \right\}$$

Существуют таблицы, дающие радиус-вектор и истинную аномалию по средней аномалии, минуя нахождение эксцентрической аномалии. Укажем следующие таблицы этого рода.

Таблицы Титъена ¹⁾ дают $v - M$ с точностью до $0^\circ.01$ по аргументам M (изменяется через 1°) и φ (изменяется от 0° до $20^\circ 20'$ через $20'$). Радиус-вектор вычисляется по формуле

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}.$$

¹⁾ F. Tietjen, Tafel zur Berechnung der wahren Anomalie für Exzentrizitätswinkel von 0° bis $20^\circ 20'$. Veröff. d. Astr. Recheninstituts № 1. Berlin 1892.

При четырехзначном вычислении для малых планет употребляются таблицы Петерса ¹⁾ дающие $v - M$ и $\lg(r/a)$ по аргументам M (через 1°) и φ (через $20'$ до 24°). Разность $v - M$ дается до $0^\circ.01$.

Таблицы Шлезингера и Удик ²⁾ дают v с точностью до $0^\circ.01$ по аргументам M (через 1°) и e (меняется от 0.00 до 0.77 через 0.01). При построении этих таблиц имелись в виду главным образом орбиты двойных звезд.

4. Вычисление прямоугольных координат производится по формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e) = a(\cos E - \sin \varphi) \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2} \sin E = a \cos \varphi \sin E. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Когда вычисления ведутся с небольшим числом знаков, то эти координаты могут быть найдены и без предварительного вычисления эксцентрической аномалии при помощи специальных таблиц, дающих

$$\begin{aligned} X &= \cos E - e = \frac{r}{a} \cos v \\ Y &= \sqrt{1-e^2} \sin E = \frac{r}{a} \sin v \end{aligned}$$

по аргументам M и e .

Таблицы Иннеса ³⁾ дают X и Y с пятью знаками для всех значений M через 1° и для всех значений e от 0.00 до 0.99 через 0.01 .

Таблицы Штраке ⁴⁾ дают эти величины (он их обозначает соответственно через C и S) с четырьмя знаками для значений M через 1° и для значений φ через $10'$ от $\varphi = 0^\circ$ до $\varphi = 25^\circ$.

§ 20. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТ.

Пусть дано: $a \dots 0.422\ 4389$, $e \dots 0.339\ 7262$, $M = 332^\circ 28' 54''$, 77 ; требуется найти r и v .

Так как в настоящем случае $e = 0.2453$, $M = 332^\circ.482$, то приближенное значение E , определенное при помощи таблицы IV, будет

$$E_0 = 324^\circ.26 = 324^\circ 15' 36''$$

Уточним это значение при помощи итерации. Прежде всего выражаем e в секундах дуги; так как вообще

$$e'' = [5.314\ 4251] e,$$

то $e'' \dots 4.704\ 1513$.

¹⁾ J. Peters, Tafeln zur Berechnung der Mittelpunktsgleichung und des Radiusvektors in elliptischen Bahnen für Exzentrizitätswinkel von 0° bis 24° . Veröff. d. Astr. Recheninstituts № 41. Berlin 1912.

²⁾ F. Schlesinger and S. Udick, Tables for the true anomaly in elliptic orbits. Publ. of the Allegheny Obs. № 17.

³⁾ R. T. A. Innes, Tables of X and Y . Elliptic rectangular coordinates. App. to Union Obs. Circ. № 71. 1927.

⁴⁾ G. Stracke, Tafeln der elliptischen Koordinaten $C = \frac{r}{a} \cos v$ und $S = \frac{r}{a} \sin v$ für Exzentrizitätswinkel von 0° bis 25° . Veröff. d. Astr. Recheninstituts. № 46. Berlin 1928.

$$\begin{aligned}
\sin E_0 & \dots 9.766 \ 4932 \ n \\
e'' \sin E_0 & \dots 4.470 \ 6445 \ n \\
e'' \sin E_0 & = -8^\circ \ 12' \ 35''.92 \\
E_1 & = 324^\circ \ 16' \ 18''.85 \\
\Delta_0 & = +42''.85 \\
\Delta_1 & = +8.53 \\
\Delta_0 - \Delta_1 & = +34''.32' \\
\Delta_1^2 & \dots 1.8618 \\
\Delta_0 - \Delta_1 & \dots 1.5356 \\
\text{Corr} & \dots 0.3262
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin E_1 & \dots 9.766 \ 3678 \ n \\
e'' \sin E_1 & \dots 4.470 \ 5191 \ n \\
e'' \sin E_1 & = -8^\circ \ 12' \ 27''.39 \\
E_2 & = 324^\circ \ 16' \ 27''.38 \\
\text{Corr.} & = +2''.12 \\
E & = 324 \ 16 \ 29.50 \\
\sin E & \dots 9.766 \ 3366 \ n \\
e'' \sin E & \dots 4.470 \ 4879 \ n \\
e'' \sin E & = -8^\circ \ 12' \ 25''.27 \\
E & = 324 \ 16 \ 29.50
\end{aligned}$$

Для вычисления r и v возьмем формулы (7). Вычисление располагаем так

$$\begin{aligned}
\varphi & = 14^\circ \ 12' \ 1''.88 & \cos E & \dots 9.909 \ 4637 \\
45^\circ + \frac{1}{2} \varphi & = 52^\circ \ 6' \ 0''.94 & e \cos E & \dots 9.299 \ 1899 \\
\frac{1}{2} E & = 162^\circ \ 8' \ 14''.75 & 1 - e \cos E & \dots 9.903 \ 5488 \\
\text{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) & \dots 0.108 \ 7573 & r & \dots 0.325 \ 9877 \\
\text{tg} \frac{1}{2} E & \dots 9.508 \ 2198 \ n \\
\text{tg} \frac{1}{2} v & \dots 9.616 \ 9791 \ n \\
\frac{1}{2} v & = 157^\circ \ 30' \ 41''.50 \\
v & = 315 \quad 1 \quad 23.00
\end{aligned}$$

§ 21. ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ В ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ.

При логарифмическом вычислении положение кометы в орбите определяют координатами r и v . Истинная аномалия v находится для заданного момента времени t из уравнения

$$\text{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \left(\text{tg} \frac{1}{2} v \right)^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} P, \quad (10)$$

где

$$P = q^{-\frac{3}{2}} (t - T).$$

После чего радиус-вектор вычисляется по формуле

$$r = q \sec^2 \frac{v}{2} = q \left(1 + \text{tg}^2 \frac{v}{2} \right).$$

Полагая для краткости

$$\sigma = \text{tg} \frac{v}{2},$$

напишем две последние формулы в таком виде

$$\begin{aligned}
\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 & = \frac{k}{\sqrt{2}} P \\
r & = q (1 + \sigma^2).
\end{aligned} \quad (11)$$

При арифмометрическом вычислении положение кометы определяется прямоугольными координатами

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v,$$

которые выражаются через σ следующим образом

$$\xi = q(1 - \sigma^2), \quad \eta = 2q\sigma.$$

Решение уравнения (10) относительно v , или решение уравнения (11) относительно σ , производится проще всего при помощи специальных таблиц. Таблицы, известные под именем таблиц Баркера (Th. Barker опубликовал первые таблицы этого рода в 1757 г.), дают $\lg P$ или $\lg M$, где

$$M = \frac{75}{\sqrt{2}} k P = \frac{75}{\sqrt{2}} k q^{-\frac{3}{2}} (t - T),$$

по аргументу v . В наиболее подробных таблицах аргумент v меняется через $10''$.

Леверрье построил таблицу, дающую v по аргументу P . Баушингер (J. Bauschinger) значительно расширил эту таблицу: он дает v до $0'' \cdot 01$ для значений $\lg P$, меняющихся от 1.300 до 4.100 через 0.001; для меньших значений P аргументом служит не $\lg P$, а P .

Существуют таблицы, дающие по аргументу P (или $\lg P$) величины σ и σ^2 .¹⁾

Таблица Va, помещенная в конце книги, дает σ и σ^2 для значений P от 0 до 200; от $P = 200$ до $P = 300$ дается σ . При еще больших значениях P эта таблица дает P по аргументу σ . Таблица Vb дает v по аргументу P (от 0 до 20) и $\lg P$ (от 1.30 до 3.70).

Если таблицы²⁾ отсутствуют, то уравнение (11) можно решить обычным приемом решения кубических уравнений, основанном на тождестве

$$(\cotg \gamma - \tg \gamma) + \frac{1}{3} (\cotg \gamma - \tg \gamma)^3 = \frac{1}{3} (\cotg^3 \gamma - \tg^3 \gamma).$$

¹⁾ Bengt Strömgren, Tables giving $\tg \frac{v}{2}$ and $\tg^2 \frac{v}{2}$ in Parabolic Motion, with Argument $M = (t - T) q^{-\frac{3}{2}}$ to facilitate the Computation of Ephemerides from Parabolic Elements (Publ. og mindre Medd. fra Kobenhavns Obs., № 58, 1926). Значения указанных величин даются с пятью знаками от $M = 0.0$ до $M = 300.0$.

М. Ф. Субботин, Формулы и таблицы. Таблица XII дает v по аргументу P (от 0.0 до 20.0) и по аргументу $\lg P$ (от 1.300 до 4.60). Эта же таблица дает σ (с пятью знаками) для значений $\lg P$ от 1.300 до 2.500. Таблица XIII дает σ и σ^2 с семью знаками по аргументу P от 0.0 до 144.0 (через 0.1) и от 144 до 300.

В тех случаях, когда пределы этих таблиц оказываются недостаточными, можно воспользоваться таблицами: Jens P. Moeller, Table giving $\tg \frac{1}{2} v$ in parabolic motion with argument $M = (t - T) q^{-\frac{3}{2}}$ from $M = 275$ to $M = 4515$ (Publ. og mindre Medd. fra Kobenhavns Obs., № 82, 1932).

²⁾ Следует отметить, что все эти таблицы могут применяться для решения любого кубического уравнения вида $x^3 + px + q = 0$, где $p > 0$. Подстановкой вида $x = \frac{m}{p}$ это уравнение легко приводится к виду (11).

Полагая
получим

$$\sigma = \cotg \gamma - \tg \gamma = 2 \cotg 2\gamma$$

$$\frac{1}{3} (\cotg^3 \gamma - \tg^3 \gamma) = \sqrt{\frac{k}{2}} P.$$

Чтобы найти из этого соотношения угол γ , положим еще

$$\tg \gamma = \sqrt[3]{\tg \frac{1}{2} \beta},$$

тогда

$$\sqrt{\frac{k}{2}} P = \frac{1}{3} \left(\cotg \frac{1}{2} \beta - \tg \frac{1}{2} \beta \right) = \frac{2}{3} \cotg \beta.$$

Итак, окончательно имеем следующие формулы

$$\left. \begin{aligned} \cotg \beta &= \frac{3k}{2\sqrt{2}} P \\ \tg \gamma &= \sqrt[3]{\tg \frac{1}{2} \beta} \\ \sigma &= \tg \frac{\nu}{2} = 2 \cotg 2\gamma \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

§ 22. ДВИЖЕНИЕ ПО ОРБИТЕ, ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ КОТОРОЙ БЛИЗОК К ЕДИНИЦЕ.

Очень часто орбиту кометы мы можем принимать, в пределах точности наблюдений, за параболу. Но нередко встречаются и такие кометы, которые движутся по орбитам с эксцентриситетами хотя и мало, но все же заметно отличающимися от единицы.

Легко убедиться, что обычные формулы эллиптического движения

$$E - e \sin E = ka^{-\frac{3}{2}} (t - T), \quad (14)$$

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (15)$$

становятся в этом случае, когда e близко к единице и следовательно a весьма велико, мало пригодными для вычисления координат ξ и η (а следовательно и r и ν).

Действительно, если при определенном перигельном расстоянии

$$q = a(1 - e),$$

заставим e стремиться к единице, то E будет стремиться к нулю, — как показывает уравнение (14), — а выражения (15) станут неопределенными.

Чтобы получить формулы, пригодные для рассматриваемых кометных орбит, преобразуем уравнение (14) так, чтобы при e стремящемся к единице оно переходило в пределе в уравнение

$$\sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma_0^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} P, \quad P = q^{-\frac{3}{2}} (t - T) \quad (17)$$

определяющее параболическое движение.

С этой целью перепишем уравнение (14) следующим образом

$$\frac{(1 - e) \sin E + E - \sin E}{(1 - e)^{3/2}} = kP,$$

или, полагая

$$e = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon), \quad (18)$$

$$\frac{2\varepsilon \sin E + E - \sin E}{4\varepsilon^{3/2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} P.$$

Это равенство можно написать так

$$\sigma \cos g + \sigma^3 G(g) = \frac{k}{\sqrt{2}} P, \quad (19)$$

где $E = 2g$ и

$$\sigma = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sin g, \quad (20)$$

$$G(g) = \frac{2g - \sin 2g}{4 \sin^3 g}.$$

Когда $e \rightarrow 1$, то $g \rightarrow 0$, поэтому

$$\cos g \rightarrow 0, \quad G(g) \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Таким образом уравнение (19) действительно в пределе обратится в (17). Отсюда следует, что

$$\lim \sigma = \lim \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sin g \right) = \sigma_0.$$

Выразим координаты (15) через σ . Принимая во внимание (20), получим

$$\xi = q(1 - \sigma^2), \quad \eta = 2q\sqrt{1 - \varepsilon} \sigma \cos g. \quad (21)$$

Уравнения (19) и (20) должны быть решены относительно σ и g . Вместо g удобно ввести другую вспомогательную неизвестную. Положим

$$z = \sin^2 g. \quad (22)$$

Тогда эти уравнения примут следующий вид

$$\left. \begin{aligned} z &= \varepsilon \sigma^2 \\ \sigma U(z) + \sigma^3 V(z) &= P \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где

$$U(z) = \frac{\sqrt{2}}{k} \sqrt{1 - z}, \quad V(z) = \frac{\sqrt{2}}{k} G(g),$$

а формулы (21) напишутся так

$$\xi = q(1 - \sigma^2), \quad \eta = \sqrt{2} k q \sqrt{1 - \varepsilon} \sigma U(z) = k^2 q U(\varepsilon) \cdot \sigma U(z). \quad (24)$$

Решение уравнений (23) относительно σ и z выполняется весьма просто последовательными приближениями, так как z очень мало, а функции $U(z)$ и $V(z)$ при малых z изменяются медленно. Для

первого приближения можно взять $z=0$, тогда уравнения (23) обратятся в (17), так что будем иметь $\sigma = \sigma_0$. Для получения более точного значения σ вычислим P_0 по формулам

$$z_0 = \epsilon z_0^2, \quad \sigma_0 U(z_0) + \sigma_0^3 V(z_0) = P_0.$$

Тогда равенство

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{k^2}{2} \frac{U(z_0)}{1 + \epsilon \sigma_0^2} (P - P_0) \quad (25)$$

даст новое значение σ . Это равенство является следствием следующей легко проверяемой формулы

$$\frac{d\sigma}{dP} = \frac{k^2}{2} \frac{U(z)}{1 + \epsilon \sigma^2}.$$

Все выведенные для эллиптического движения формулы применяются и к гиперболическому движению (см. § 15). Только в этом последнем случае величины E и g будут чисто мнимые, а потому будет $z < 0$.

Функция $U(z)$ настолько проста, что ее можно вычислять без всяких таблиц. Таблица VI дает $\lg U(z)$ и $\lg V(z)$ для значений z от -0.20 до $+0.20$ с шестью знаками. Более подробные семизначные таблицы можно найти в сборнике „Формулы и таблицы“. (Таблицы XV и XVI).

Если вместо прямоугольных координат ξ и η нужны полярные координаты r и v , то их проще всего вычислить по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \frac{\sqrt{1-\epsilon}}{\sqrt{1-z}} \quad \sigma = \frac{U(\epsilon)}{U(z)} \sigma \\ r &= q(1 + \epsilon z^2) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

легко получаемым из формул (II, 25) и (II, 32a) при помощи соотношений (16), (18), (20) и (22).

§ 23. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ. ПЕРВЫЙ СПОСОБ.

Рассмотрим эклиптическую гелиоцентрическую систему координат $Sx_e y_e z_e$, в которой за основную плоскость $Sx_e y_e$ принята плоскость средней эклиптики для какого-либо определенного момента, а ось Sx_e направлена в точку весеннего равноденствия для того же момента. Элементы Ω , i и ω , определяющие положение орбиты в пространстве, мы будем считать отнесенными именно к этой системе координат.

Координаты светила в рассматриваемой системе координат даются формулами (II, 21) на стр. 38, а именно

$$\left. \begin{aligned} x_e &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y_e &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z_e &= r \sin u \sin i \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где

$$u = v + \omega.$$

Рассмотрим, далее, экваториальную систему координат $Sxyz$, у которой за начало принят центр солнца S , за ось Sx — то же направление, что и для только что рассмотренной системы, а за плоскость Sxy — плоскость среднего экватора для того же момента.

Так как эклиптическая система получается из экваториальной путем поворота на угол ϵ (наклон эклиптики к экватору) вокруг оси x -ов, то

$$\begin{aligned}x &= x_e \\y &= y_e \cos \epsilon - z_e \sin \epsilon \\z &= y_e \sin \epsilon + z_e \cos \epsilon.\end{aligned}$$

Подставив сюда выражения (27), получим

$$\begin{aligned}x &= r \cos u \cos \varrho - r \sin u \cos i \sin \varrho \\y &= r \cos u \sin \varrho \cos \epsilon + r \sin u (\cos i \cos \varrho \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon) \\z &= r \cos u \sin \varrho \sin \epsilon + r \sin u (\cos i \cos \varrho \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon).\end{aligned}$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned}\sin a \sin A &= \cos \varrho \\ \sin a \cos A &= -\cos i \sin \varrho \\ \sin b \sin B &= \sin \varrho \cos \epsilon \\ \sin b \cos B &= \cos i \cos \varrho \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon \\ \sin c \sin C &= \sin \varrho \sin \epsilon \\ \sin c \cos C &= \cos i \cos \varrho \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon\end{aligned} \right\} \quad (28)$$

получим окончательно

$$\left. \begin{aligned}x &= r \sin a \sin (A + u) \\ y &= r \sin b \sin (B + u) \\ z &= r \sin c \sin (C + u)\end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Вспомогательные величины a, A, b, B, c, C носят название *постоянных Гаусса*.

Чтобы проконтролировать вычисление постоянных Гаусса можно воспользоваться следующей формулой. Умножим 4-е из равенств (28) на $-\sin \epsilon$, а 6-е — на $\cos \epsilon$ и сложим; это даст

$$\sin i = \sin c \cos C \cos \epsilon - \sin b \cos B \sin \epsilon.$$

Деля почленно это равенство на равенство второе из числа (28), получим

$$-\operatorname{tg} i = \frac{\sin \varrho (\sin c \cos C \cos \epsilon - \sin b \cos B \sin \epsilon)}{\sin a \cos A}$$

Наконец, определяя $\cos \epsilon$ и $\sin \epsilon$ из третьего и пятого из равенств (28) и подставляя сюда, получим окончательно

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}.$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned}n \sin N &= \sin i \\ n \cos N &= \cos \varrho \cos i,\end{aligned} \right\} \quad (30)$$

можно формулы (28) представить в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega \\ \sin a \cos A &= \cos i \sin \Omega \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega \cos \varepsilon \\ \sin b \cos B &= n \cos (N + \varepsilon) \\ \sin c \sin C &= \sin \Omega \sin \varepsilon \\ \sin c \cos C &= n \sin (N + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

§ 24. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ. ВТОРОЙ СПОСОБ.

Если вычисления ведутся при помощи арифмометра, то формулы (29) заменяются другими. Формулы (29) можно написать так

$$\begin{aligned} x &= \sin a \sin (A + \omega) \cdot r \cos v + \sin a \cos (A + \omega) \cdot r \sin v \\ y &= \sin b \sin (B + \omega) \cdot r \cos v + \sin b \cos (B + \omega) \cdot r \sin v \\ z &= \sin c \sin (C + \omega) \cdot r \cos v + \sin c \cos (C + \omega) \cdot r \sin v \end{aligned}$$

Пользуясь прежними обозначениями для прямоугольных координат в плоскости орбиты

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v,$$

и полагая

$$\begin{aligned} P_x &= \sin a \sin (A + \omega) & Q_x &= \sin a \cos (A + \omega) \\ P_y &= \sin b \sin (B + \omega) & Q_y &= \sin b \cos (B + \omega) \\ P_z &= \sin c \sin (C + \omega) & Q_z &= \sin c \cos (C + \omega) \end{aligned} \quad (32)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} x &= P_x \xi + Q_x \eta \\ y &= P_y \xi + Q_y \eta \\ z &= P_z \xi + Q_z \eta \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Эти соотношения суть очевидно не что иное как формулы преобразования координат $(\xi, \eta, 0)$, для которых за основную плоскость $S\xi\eta$ принята плоскость орбиты, ось $S\xi$ направлена в точку перигелия, а ось $S\eta$ в точку орбиты $v = 90^\circ$, в экваториальные координаты. Поэтому P_x, P_y, P_z суть направляющие косинусы прямой $S\xi$, а Q_x, Q_y, Q_z — направляющие косинусы $S\eta$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 &= 1, \\ Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 &= 1, \\ P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z &= 0. \end{aligned}$$

Направляющие косинусы P и Q вполне определяют положение орбиты в пространстве, так что или можно пользоваться для этой цели вместо элементов Ω, i, ω . Формулы (32) и (28) позволяют выразить P и Q через эти элементы:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ P_y &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \cos \varepsilon - \sin \omega \sin i \sin \varepsilon \\ P_z &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \sin \varepsilon + \sin \omega \sin i \cos \varepsilon \\ Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ Q_y &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \cos \varepsilon - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon \\ Q_z &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \sin \varepsilon + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (32a)$$

Для вычисления элементов ω , i , Ω по направляющим косинусам могут служить следующие легко проверяемые формулы

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \omega &= P_x \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon \\ \sin i \cos \omega &= Q_x \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon \\ \sin \Omega &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon \\ \cos \Omega &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega = -\cos i \sin \Omega. \quad (35)$$

Рассмотрим сначала случай эллиптического движения. Пользуясь выражениями (9), получим

$$\left. \begin{aligned} x &= a P_x (\cos E - e) + a \cos \varphi Q_x \sin E \\ y &= a P_y (\cos E - e) + a \cos \varphi Q_y \sin E \\ z &= a P_z (\cos E - e) + a \cos \varphi Q_z \sin E \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Таким образом достаточно вычислить $a P_x$, $a P_y$, ..., $a \cos \varphi Q_x$, ..., чтобы иметь возможность находить x , y , z непосредственно по эксцентрической аномалии, минуя вычисление радиуса-вектора и истинной аномалии. В этом заключается главное преимущество употребления направляющих косинусов P и Q , носящих название *векторных элементов*, вместо постоянных Гаусса.

Формулы (36) имеют известные преимущества перед формулами (29) и при логарифмическом вычислении.

Для параболического движения, как было найдено в § 21,

$$\xi = q (1 - \sigma^2), \quad \eta = 2 q \sigma,$$

следовательно

$$\left. \begin{aligned} x &= q P_x (1 - \sigma^2) + 2q Q_x \sigma \\ y &= q P_y (1 - \sigma^2) + 2q Q_y \sigma \\ z &= q P_z (1 - \sigma^2) + 2q Q_z \sigma \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

При употреблении этих формул нет надобности вычислять радиус-вектор.

Формулы (36) в применении к вычислению эклиптических координат ($\varepsilon = 0$) встречаются впервые ¹⁾ у Леверрье (1855), затем их предложил Джиббс (J. W. Gibbs) в 1888 г., но в употребление они вошли лишь после того, как Адамс (С. Е. Adams) и Комри (L. J. Comrie) вновь обратили, в 1922 году, на них внимание. На этот раз, вследствие широкого распространения арифмометров, формулы (36), (37) стали быстро входить в обиход, все более и более вытесняя формулы (29).

Примечание. Формулы (32а), служащие для вычисления направляющих косинусов P, Q по эклиптическим элементам, удобно представить в таком виде: полагая

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos \Omega & A_2 &= -\cos i \sin \Omega \\ B_1 &= \sin \Omega \cos \varepsilon & B_2 &= \cos i \cos \Omega \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \\ C_1 &= \sin \Omega \sin \varepsilon & C_2 &= \cos i \cos \Omega \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon \end{aligned}$$

¹⁾ Эти формулы находятся также в посмертных бумагах Гаусса, относящихся к 1814—1816 гг. и опубликованных в 1906 г. (Werke, Bd. VII, стр. 444). Гаусс получает их как естественное следствие особого способа интегрирования уравнений задачи двух тел — способа весьма изящного и поучительного (стр. 440—4а).

получим

$$\left. \begin{aligned} P_x &= A_1 \cos \omega + A_2 \sin \omega & Q_x &= A_2 \cos \omega - A_1 \sin \omega \\ P_y &= B_1 \cos \omega + B_2 \sin \omega & Q_y &= B_2 \cos \omega - B_1 \sin \omega \\ P_z &= C_1 \cos \omega + C_2 \sin \omega & Q_z &= C_2 \cos \omega - C_1 \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (32b)$$

§ 25. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИДЫ.

Эфемеридой называется совокупность геоцентрических положений светила для ряда равноотстоящих моментов. Эфемериды вычисляются прежде всего для того, чтобы можно было найти и наблюдать малую планету или комету. Этого рода эфемериды (Aufsuchungsephemeride) обычно вычисляются с четырьмя или пятью знаками, ибо точность до $1'$, самое большое до $0'.1$ является здесь вполне достаточной. Эфемерида вычисляется также в тех случаях, когда надо сравнить большое количество наблюдений с вычисленными положениями светила. Тут точность, с которой вычисляется эфемерида, зависит от точности наблюдений. Если наблюдаемые положения даны до $0''.01$ по прямому восхождению и до $0''.01$ по склонению, то вычисления ведутся с шестью или (сравнительно редко) семью знаками.

При вычислении эфемериды важно, прежде всего, целесообразно выбрать величину интервала между соседними моментами. Этот интервал выбирается, в зависимости от величины геоцентрического движения и точности эфемериды, таким образом, чтобы при интерполировании четвертая разность была нечувствительна или почти нечувствительна.

Опыт показывает, что для малых планет обычно можно брать интервал в 8 суток, и лишь в исключительных случаях заменять его интервалом в 4 суток.

Для комет обычно берут интервал в 2 суток, но иногда приходится брать значительно более короткий промежуток времени.

Отличие вычисления эфемериды от вычисления изолированных положений светил заключается прежде всего в том, что при вычислении эфемериды весь вычислительный процесс удобно и надежно контролируется при помощи разностей. Кроме того, решение уравнения Кеплера весьма облегчается тем, что почти точные значения эксцентрической аномалии могут быть получены при помощи экстраполирования, исходя из ее значений для предыдущих моментов.

Сопоставим формулы, служащие для вычисления как отдельных геоцентрических положений светила, так и эфемериды.

а) Движение по эллиптической орбите.

Прежде всего вычисляем для всех моментов среднюю аномалию. Если эфемерида вычисляется для моментов $t_1, t_2 = t_1 + \omega, t_3 = t_1 + 2\omega, \dots, t_m = t_1 + (m-1)\omega$, то вычислив

$$M_1 = M_0 + n(t_1 - t_0),$$

находим последовательным сложением

$$M_k = M_1 + (k-1)n\omega \quad (k = 2, \dots, m). \quad (I)$$

Для контроля вычисляем непосредственно

$$M_m = M_0 + n (t_m - t_0).$$

Затем для каждого значения M находим соответствующую эксцентрическую аномалию решая уравнение Кеплера

$$E = M + e \sin E. \quad (II)$$

При этом эксцентриситет e выражается либо в долях градуса, либо в секундах при помощи равенств

$$e^\circ = 57^\circ.295\ 78 \quad e = [1.758\ 1226] e$$

$$e'' = [5.314\ 4251] e.$$

Уравнение Кеплера решается для первых двух моментов; после чего экстраполирование даст приближенное значение эксцентрической аномалии для третьего момента; уточнив это приближенное значение, снова экстраполируем (уже со вторыми разностями) и получаем уже почти точное значение для четвертого момента, и т. д.

Экстраполирование выполняется проще, если его применять не к эксцентрической аномалии, а к значениям разности $E - M$.

Если вычисления производятся на арифмометре, то третья операция заключается в нахождении для каждого момента геоцентрических координат α и δ по формулам

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= aP_x (\cos E - e) + bQ_x \sin E + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= aP_y (\cos E - e) + bQ_y \sin E + Y \\ \rho \sin \delta &= aP_z (\cos E - e) + bQ_z \sin E + Z \end{aligned} \right\} \quad (IIIa)$$

$$b = a \cos \varphi.$$

Если направляющие косинусы P и Q неизвестны, то они могут быть вычислены по формулам (32a) или (32b). Координаты Солнца X , Y , Z должны быть взяты относительно того же экватора и эклиптики, к которым отнесены P и Q .

При логарифмическом вычислении (а также в том случае, когда нет готовых направляющих косинусов P и Q) предпочитают пользоваться постоянными Гаусса. В этом случае третья операция заключается в вычислении истинной аномалии и радиуса-вектора по формулам

$$\left. \begin{aligned} r \sin v &= a \cos \varphi \sin E \\ r \cos v &= a (\cos E - e) \end{aligned} \right\} \quad (IIIb)$$

Полученные значения r и v полезно проверить при помощи разностей.

Следующая операция заключается в вычислении постоянных Гаусса, для чего служат формулы

$$\left. \begin{aligned} n \sin N &= \sin i \\ n \cos N &= \cos \Omega \cos i \\ \sin a \sin A &= \cos \Omega \\ \sin a \cos A &= -\cos i \sin \Omega \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega \cos \varepsilon \\ \sin b \cos B &= n \cos (N + \varepsilon) \\ \sin c \sin C &= \sin \Omega \sin \varepsilon \\ \sin c \cos C &= n \sin (N + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (IVb)$$

Наклон эклиптики к экватору ε берется для той же эпохи, к которой относятся элементы Ω , i , ω (таблица III). Надо иметь в виду, что

$$\sin a > 0, \quad \sin b > 0, \quad \sin c > 0.$$

Для контроля служит формула

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}.$$

Кроме того следует иметь в виду, что для орбиты мало наклоненной к эклиптике имеют место следующие приближенные равенства

$$B \approx \Omega \approx C, \quad A \approx \Omega + 90^\circ,$$

делающиеся точными для $i = 0$.

Весьма глубокий, но несколько громоздкий контроль вычисления постоянных Гаусса дают формулы

$$\begin{aligned} \sin^2 a \sin^2 (A + \omega) + \sin^2 b \sin^2 (B + \omega) + \sin^2 c \sin^2 (C + \omega) &= 1 \\ \sin^2 a \cos^2 (A + \omega) + \sin^2 b \cos^2 (B + \omega) + \sin^2 c \cos^2 (C + \omega) &= 1 \\ \sin^2 a \sin (2A + 2\omega) + \sin^2 b \sin (2B + 2\omega) + \sin^2 c \sin (2C + 2\omega) &= 0, \end{aligned}$$

где углу ω — можно придать любое значение. Эти соотношения являются следствием равенств (32).

Наконец искомые геоцентрические координаты находятся при помощи уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= r \sin a \sin (A' + v) + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= r \sin b \sin (B' + v) + Y \\ \rho \sin \delta &= r \sin c \sin (C' + v) + Z \end{aligned} \right\} \quad (Vb)$$

где

$$A' = A + \omega, \quad B' = B + \omega, \quad C' = C + \omega.$$

б) Движение по параболической орбите.

Для каждого момента вычисляем

$$P = q^{-\frac{3}{2}} (t - T) \quad (I)$$

При вычислении эфемериды эта величина находится для первого момента t_1 ; затем, путем прибавления $q^{-\frac{3}{2}}\omega$, где ω —интервал между датами эфемериды, находится для всех остальных моментов; и, наконец, для контроля P вычисляется независимо для последнего момента.

Если вычисление производится с арифмометром, то при помощи таблиц (см. § 21) находится, для каждого значения P , соответствующий корень уравнения

$$\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} P; \quad (\text{IIa})$$

после чего вычисляются искомые геоцентрические координаты по формулам

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= m_x (1 - \sigma^2) + n_x \sigma + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= m_y (1 - \sigma^2) + n_y \sigma + Y \\ \rho \sin \delta &= m_z (1 - \sigma^2) + n_z \sigma + Z \end{aligned} \right\} \quad (\text{IIIa})$$

где

$$\begin{aligned} m_x &= qP_x, & m_y &= qP_y, & m_z &= qP_z, \\ n_x &= 2qQ_x, & n_y &= 2qQ_y, & n_z &= 2qQ_z. \end{aligned}$$

При логарифмическом вычислении решаем (см. § 21) уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{k}{\sqrt{2}} P \quad (\text{IIb})$$

относительно истинной аномалии; затем определяем радиус-вектор

$$r = q \sec^2 \frac{v}{2}. \quad (\text{IIIb})$$

Наконец

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= r \sin a \sin (A' + v) + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= r \sin a \sin (B' + v) + Y \\ \rho \sin \delta &= r \sin c \sin (C' + v) + Z \end{aligned} \right\} \quad (\text{IVb})$$

где

$$A' = A + \omega, \quad B' = B + \omega, \quad C' = C + \omega.$$

Относительно вычисления постоянных Гаусса см. формулы (IVb) для эллиптического движения.

с) Движение по орбите, эксцентриситет которой близок к единице.

Для каждого момента t так же как и в предыдущем случае вычисляем величину

$$P = q^{-\frac{3}{2}} (t - T). \quad (\text{I})$$

По формулам параболического движения находим σ_0 , удовлетворяющее уравнению

$$\sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma_0^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} P.$$

Пользуясь σ_0 как приближенным значением, вычисляем сначала

$$z_0 = \varepsilon \sigma_0^2,$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - e),$$

и

$$P_0 = \sigma_0 U(z_0) + \sigma_0^3 V(z_0),$$

причем значения функций

$$U(z) = \frac{\sqrt{2}}{k} \sqrt{1-z}, \quad V(z) = \frac{\sqrt{2}}{k} G(\arcsin \sqrt{z})$$

берутся из таблицы VI; затем находим поправку

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{k^2}{2} \frac{U(z_0)}{1 + \varepsilon \sigma_0^2} (P - P_0)$$

$$\frac{k^2}{2} = 0.00014796, \quad \lg \frac{k^2}{2} = .617013_{-10}.$$

С новым, более точным значением σ повторяем вычисление, пока уравнения

$$\left. \begin{aligned} z &= \varepsilon \sigma^2 \\ \sigma U(z) + \sigma^3 V(z) &= P \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

не будут точно удовлетворяться. С окончательными значениями σ , z и $U(z)$ найдем, если вычисление производится при помощи арифмометра,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= q(1 - \sigma^2) \\ \eta &= \sqrt{2} k q \sqrt{1-z} \sigma U(z) = k^2 q U(\varepsilon) \sigma U(z), \end{aligned} \right\} \quad (\text{IIIa})$$

$$\sqrt{2} k = 0.02432744, \quad \lg \sqrt{2} k = 8.3860964_{-10}$$

$$k^2 = 0.0002959122, \quad \lg k^2 = 6.4711629_{-10}$$

После чего остается найти геоцентрические координаты

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= P_x \xi + Q_x \eta + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= P_y \xi + Q_y \eta + Y \\ \rho \sin \delta &= P_z \xi + Q_z \eta + Z \end{aligned} \right\} \quad (\text{IVa})$$

При логарифмическом вычислении находим истинную аномалию и радиус-вектор по формулам

$$\left. \begin{aligned} \lg \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1-z}} \sigma = \frac{U(\varepsilon)}{U(z)} \sigma \\ r &= q(1 + \varepsilon \sigma^2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IIIb})$$

Геоцентрические координаты определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= r \sin a \sin (A' + v) + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= r \sin b \sin (B' + v) + Y \\ \rho \sin \delta &= r \sin c \sin (C' + v) + Z \end{aligned} \right\} \quad (\text{IVb})$$

где

$$A' = A + \omega, \quad B' = B + \omega, \quad C' = C + \omega.$$

Относительно вычисления постоянных $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, A , B , C см. формулы (IVb) для случая эллиптического движения (стр. 66).

Примечание. При вычислении эфемериды величина σ находится по вышеуказанным формулам лишь для первых 2—3 моментов; для последующих моментов экстраполирование даст почти точные значения σ , нуждающиеся лишь в незначительном исправлении.

§ 26. СРАВНЕНИЕ ЭФЕМЕРИДЫ С НАБЛЮДЕНИЯМИ.

Полученные из наблюдений координаты дают *топоцентрические* положения светила. Чтобы сделать их сравнимыми с эфемеридой, дающей геоцентрические положения, нужно ввести поправки за *параллакс*.

Пусть α' , δ' наблюденные топоцентрические координаты; α , δ соответствующие геоцентрические координаты. Разности

$$p_\alpha = \alpha - \alpha', \quad p_\delta = \delta - \delta'$$

даются известными формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \varphi' \sec (\Theta - \alpha), \quad \gamma < 180^\circ, \\ pp_\alpha &= C \sin (\Theta - \alpha) \sec \delta \\ pp_\delta &= S \sin (\gamma - \delta) \operatorname{cosec} \gamma, \end{aligned}$$

где Θ — местное звездное время наблюдения, а φ' — геоцентрическая широта места наблюдения. Логарифмы величин $\operatorname{tg} \varphi'$,

$$C = \frac{1}{15} p_0 \rho' \cos \varphi', \quad S = p_0 \rho' \sin \varphi'$$

приведены, для ряда обсерваторий, в таблице II.

Так как C и S выражены соответственно во времени и в дуге, то p_α получается в секундах времени, а p_δ — в секундах дуги.

Величины pp_α и pp_δ или их логарифмы обычно публикуются вместе с наблюдениями под именем „параллактических множителей“.

В настоящее время (с 1925 г.) наблюдатели дают всегда средние координаты планет и комет, отнесенные к началу того года, в котором были произведены наблюдения (ср. § 42). Для того, чтобы сделать эти средние координаты сравнимыми с эфемеридой (вычисленной, конечно, для того же экватора и равноденствия), нужно еще принять во внимание *планетную аберрацию*.

Астрономическую единицу расстояния свет проходит в $498^s.5$. Следовательно расстояние от светила до Земли, равное p , свет пройдет в промежуток времени равный Ap , где

$$A = 498^s.5 = 0^d.005770.$$

Таким образом, наблюдая светило в момент t , мы регистрируем направление луча света, оставившего светило в момент $t^0 = t - Ap$. Промежуток времени $t - t^0 = Ap$ настолько мал, что соответствующее передвижение Земли мы можем считать прямолинейным и равномерным.

Пусть (черт. 10) P_0 положение светила в момент t^0 , когда луч света оставил светило; T_0 соответствующее положение объективного конца трубы. В момент t' , когда рассматриваемый луч дошел до объектива, пусть этот последний занимает положение T' , а окулярный конец находится в точке S' . В течение времени $t - t'$, употребляемым светом на прохождение длины трубы, труба переместится, и в момент t , когда луч достигнет окуляра, будет занимать положение TS .

Точки P_0 , T' и S лежат очевидно на одной прямой, причем $P_0T' : T'S = (t' - t^0) : (t - t')$. С другой стороны, вследствие прямолинейности и равномерности — согласно нашему предположению — движения объективного конца трубы, точки T_0 , T' и T также лежат на одной прямой и $T_0T' : T'T = (t' - t^0) : (t - t')$. Отсюда заключаем, что треугольники P_0T_0T' и $TT'S$ подобны, а потому прямые P_0T_0 и TS параллельны.

Но TS есть видимое направление на светило в момент t , а T_0P_0 — истинное направление на светило в момент t^0 , так что имеем следующее правило:

I. Видимое направление на светило в момент t совпадает с истинным направлением в момент $t^0 = t - \Delta p$.

Если видимое направление на светило ST исправить за звездную

аберрацию (*aberratio fixarum*), то получим направление SP_0 . Таким образом:

II. Истинное направление на светило в момент t есть направление, в котором из положения Земли в момент t видно положение светила в момент $t^0 = t - \Delta p$.

При сравнении эфемериды с наблюдениями применяется всегда первое правило. Делается это следующим образом:

1. К полученным из наблюдений средним координатам светила придается звездная абберация, т. е. величины

$$\alpha_{\text{app}} - \alpha_{\text{vera}} = \frac{1}{15} h \sin (H + \alpha) \sec \delta$$

$$\delta_{\text{app}} - \delta_{\text{vera}} = h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta,$$

2. Найденные таким образом видимые координаты светила сравниваются с координатами, взятыми из эфемериды для момента $t^0 = t - \Delta p$.

Для того, чтобы можно было вычислять величину Δp , носящую название *абберационного времени*, эфемерида должна давать не только α и δ , но и p .

Если наблюдатель дает не средние для начала года, а видимые координаты светила $\alpha_{\text{app}}, \delta_{\text{app}}$, т. е. неосвобожденные от звездной аберрации и отнесенные к мгновенному экватору и равноденствию момента наблюдения, то их нужно привести к тому экватору и равноденствию, для которых вычислена эфемерида; после чего эти координаты для момента наблюдения t будут соответствовать координатам, взятым из эфемериды для момента $t^0 = t - A_p$.

§ 27. ПРЕДВЫЧИСЛЕНИЕ ОППОЗИЦИИ МАЛОЙ ПЛАНЕТЫ.

Малые планеты за немногими исключениями доступны для наблюдения лишь около времени оппозиции. Поэтому эфемериды предназначенные для поисков и наблюдений малых планет вычисляются обычно на период времени охватывающий приблизительно 24 дня до оппозиции и столько же после оппозиции. Интервал берется, как общее правило, 8-дневный.

Вычисления ведутся по формулам сопоставленным в § 25 с четырьмя знаками. Сообразно с этим, вычисления могут быть весьма сокращены употреблением указанных в § 19 таблиц, позволяющих находить гелиоцентрические координаты, не решая уравнение Кеплера.

Чтобы начать вычисление эфемериды нужно хотя бы приблизительно найти время оппозиции. Для планет, которые наблюдались уже в нескольких оппозициях, это не представляет никакого труда: достаточно сопоставить моменты последовательных оппозиций, чтобы предсказать будущую оппозицию с точностью до нескольких дней.

Если речь идет о вновь открытой планете, то нужно найти момент оппозиции для того года, когда планета была открыта, и синодический оборот планеты.

Для определения момента оппозиции по прямому восхождению сопоставляем наблюденные прямые восхождения планеты α и прямые восхождения Солнца A . Составляем разности $\alpha - A - 12^h$ и выбираем два наблюдения, для которых эта величина по возможности мала и имеет противоположный знак. Линейное интерполирование даст тот момент, когда эта разность равна нулю — это и будет время оппозиции по прямому восхождению.

Синодическое обращение планеты S вычисляется по формуле

$$S = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{n_0 - n},$$

где n — среднее суточное движение планеты выраженное в секундах, а $n_0 = 3548''$ — среднее суточное движение Земли. Вместо этой формулы можно пользоваться следующей табличкой

$n = 200''$	$S = 12.7$ месяцев	$n = 900''$	$S = 16.1$ месяцев
300	13.1 "	1000	16.8 "
400	13.6 "	1100	17.5 "
500	14.0 "	1200	18.2 "
600	14.5 "	1300	19.0 "
700	15.0 "	1400	19.9 "
800	15.5 "	1500	20.9 "

Если эксцентриситет невелик, то момент оппозиции, вычисленный при помощи синодического обращения, достаточно точен для того, чтобы начинать вычисление эфемериды. Если же эксцентриситет значителен, то бывает полезно найти время оппозиции точнее. Делается это следующим образом. Для двух моментов t_1 и t_2 , охватывающих предполагаемый момент оппозиции, и отстоящих примерно на 40—60 дней, вычисляются гелиоцентрические долготы планеты l_1 и l_2 . Вычисление ведется с точностью до 1° . Сначала находятся средние аномалии M_1 и M_2 , затем истинные аномалии v_1 и v_2 (проще всего при помощи таблиц Титьена или Петерса), и наконец искомые долготы по формулам

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(l_1 - \Omega) &= \cos i \operatorname{tg}(v_1 + \omega) \\ \operatorname{tg}(l_2 - \Omega) &= \cos i \operatorname{tg}(v_2 + \omega).\end{aligned}$$

Обозначим через L_1 и L_2 взятые из эфемерид для тех же моментов долготы Земли. В таком случае момент оппозиции по долготе получится по формуле

$$T = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)(l_1 - L_1)}{(l_1 - L_1) - (l_2 - L_2)} = t_2 + \frac{(t_2 - t_1)(l_2 - L_2)}{(l_1 - L_1) - (l_2 - L_2)}.$$

Около этого момента и располагается середина эфемериды.

В том случае, когда эфемерида базируется на мало надежных элементах, полезно давать, для облегчения поисков и идентификации планеты, *вариацию*. Вариацией называется отношение тех изменений склонения и прямого восхождения, которые получаются при изменении положения светила в орбите. Так как из всех элементов наиболее ненадежным является обычно среднее суточное движение, то отклонения вычисленных положений от действительных оказываются обычно зависящими главным образом от неправильности принятой величины средней аномалии. Вариация и дает как раз возможность судить, насколько изменение средней аномалии может привести эфемериду в согласие с наблюдениями.

Вычисляется вариация следующим образом. Пусть при вычислении эфемериды мы нашли для двух моментов t_i и t_{i+1} гелиоцентрические координаты (x_i, y_i, z_i) и $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$. Обозначая соответствующие координаты Солнца через $X_i, Y_i, Z_i, \dots$, получим для определения прямых восхождений уравнения

$$\begin{aligned}\rho_i \cos \delta_i \cos \alpha_i &= x_i + X_i \\ \rho_i \cos \delta_i \sin \alpha_i &= y_i + Y_i \\ \rho_i \sin \delta_i &= z_i + Z_i\end{aligned}$$

и аналогичные уравнения для момента t_{i+1} .

Сдвинув планету в орбите из положения (x_i, y_i, z_i) в положение $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ мы получим, для того же момента t_i новые прямые восхождения и склонения α_v, δ_v при помощи уравнений

$$\begin{aligned}\rho_v \cos \delta_v \cos \alpha_v &= x_{i+1} + X_i \\ \rho_v \cos \delta_v \sin \alpha_v &= y_{i+1} + Y_i \\ \rho_v \sin \delta_v &= z_{i+1} + Z_i.\end{aligned}$$

Вариация склонения отнесенная к изменению прямого восхождения на $+1^m.0$ будет равна

$$v = \frac{\delta_p - \delta_i}{\alpha_p - \alpha_i},$$

причем $\delta_p - \delta_i$ выражается в минутах дуги, а $\alpha_p - \alpha_i$ в минутах времени.

Для малых планет вариация изменяется обычно настолько медленно, что достаточно ее вычислить только для начала и конца эфемериды.

Эфемерида малой планеты должна сопровождаться указанием ее яркости. Так как малая планета светит отраженным светом, то ее видимая яркость I будет обратно пропорциональна квадрату расстояния от Солнца и квадрату расстояния от Земли, т. е.

$$I = \frac{K}{r^2 p^2},$$

где K — коэффициент пропорциональности.

Для перечисления этой яркости в звездные величины обратимся к закону Погсона

$$\lg(I_n/I_m) = 0.4(m - n),$$

где I_n и I_m — яркости, соответствующие звездным величинам n и m . Делая $n = 0$, перепишем это равенство так:

$$m = 2.5 \lg I_0 - 2.5 \lg I_m.$$

Подставив сюда яркость малой планеты, получим соответствующую звездную величину

$$m = g + 5 \lg(rp), \quad (38)$$

где через g — обозначена постоянная величина

$$g = 2.5 \lg I_0 - 2.5 \lg K.$$

Чтобы определить g и иметь возможность вычислять величину по формуле (38), надо иметь хотя бы одну оценку яркости планеты.

Средние условия видимости планеты часто характеризуются величиной

$$m_0 = g + 5 \lg(a^2 - a),$$

которая представляет звездную величину планеты для того момента, когда $r = a$, $p = a - 1$, где a — большая полуось орбиты этой планеты.

§ 28. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИДЫ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ.

Пусть требуется вычислить эфемериду для моментов

$$t_n = t_0 + n\omega,$$

где n — целое число.

Обозначим через x_n , y_n , z_n гелиоцентрические координаты, соответствующие моменту t_n . Предположим, что по формулам §§ 19, 21 или 22 мы вычислили

$$(x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}), \quad (x_0, y_0, z_0). \quad (39)$$

Эти шесть величин могут быть приняты за произвольные постоянные, определяющие то частное решение уравнений движения (уравнения II, 1, в которых делаем $m_0 = 1, m = 0$)

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{k^2x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{k^2y}{r^3} = 0, \quad \frac{d^3z}{dt^3} + \frac{k^2z}{r^3} = 0, \quad (40)$$

которое представляет движение рассматриваемого светила.

Определенное таким образом частное решение может быть получено при помощи численного интегрирования уравнений (40). Посмотрим, каким образом могут быть применены в данном случае наиболее распространенные методы численного интегрирования — метод Коуэлла и метод квадратур (см. Приложение „О численном интегрировании уравнений“, помещенное в конце книги).

Метод Коуэлла. По данным значениям координат (39) вычисляем прежде всего радиусы-векторы

$$r_{-1}^2 = x_{-1}^2 + y_{-1}^2 + z_{-1}^2, \\ r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Затем находим соответствующие значения функций.

$$f = -\omega^2 k^2 r^{-3} x, \quad -\omega^2 k^2 r^{-3} y, \quad -\omega^2 k^2 r^{-3} z$$

а именно

$$f_{-1} = -\frac{\omega^2 k^2 x_{-1}}{r_{-1}^3}, \quad f_0 = -\frac{\omega^2 k^2 x_0}{r_0^3}$$

и аналогично для двух других координат.

При этом

$$\begin{aligned} \text{если } \omega = 2^d, \quad 10^7 \omega^2 k^2 &= 11\,836.49 \\ \text{„ } \omega = 4^d, \quad 10^7 \omega^2 k^2 &= 47\,345.95 \\ \text{„ } \omega = 8^d, \quad 10^7 \omega^2 k^2 &= 189\,383.81. \end{aligned}$$

После этого переходим к нахождению x_1, y_1, z_1 . В первом приближении имеем

$$x_1 = 2x_0 - x_{-1} + f_0, \dots r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Далее находим

$$f_1 = -\omega^2 k^2 r_1^{-3} x_1 \dots$$

и составляем разности значений f . Имея f_0^2 можно уже вычислить x_1, y_1, z_1 по более точной формуле

$$x_1 = 2x_0 - x_{-1} + \Delta_0^2, \dots$$

$$\Delta_0^2 = f_0 + \frac{1}{12} f_0^2.$$

Уточнив x_1, y_1, z_1 , переходим к вычислению x_2, y_2, z_2 . Дальнейшие вычисления ведутся по формулам

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 2x_k - x_{k-1} + \Delta_k^2, \dots \\ \Delta_k^2 &= f_k + \frac{1}{12} f_k^2 - \frac{1}{240} f_k^4 + \dots \end{aligned}$$

которые могут быть заменены такими

$$\Delta_k^2 = f_k + \frac{1}{12} f_k^2 - \frac{1}{240} f_k^4 + \dots$$

$$\Delta'_{k+1/2} = \Delta'_{k-1/2} + \Delta_k^2$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta'_{k+1/2}$$

Таблица VII, дающая $\omega^2 k^2 r^{-3}$ по аргументу r^2 (для $\omega = 8^d$), значительно облегчает вычисление значений функции f^1).

Заметим, что начальный момент t_0 , от которого ведется численное интегрирование, следует помещать не в начале, а в *середине* эфемериды и интегрировать от него в обе стороны.

Метод квадратур. Даны значения координат (39) для двух моментов t_{-1} , t_0 . Находим

$$r_{-1}^2 = x_{-1}^2 + y_{-1}^2 + z_{-1}^2,$$

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

$$f_{-1} = -\omega^2 k^3 r_{-1}^{-3} x_{-1}, \dots$$

$$f_0 = -\omega^2 k^2 r_0^{-3} x_0, \dots$$

причем пользуемся таблицей VII. Эта таблица составлена для $\omega = 8^d$; если эфемерида вычисляется для $\omega = 4^d$, то все числа, даваемые таблицей надо уменьшить в 4 раза.

Затем составляем разности

$$f_0 - f_{-1} = f_{-1/2}$$

и вычисляем начальные члены столбцов сумм по формулам (см. Приложение, стр. 277)

$$f_{-1/2}^{-1} = x_0 - x_{-1} - \frac{1}{12} f_{-1/2}^1, \quad f_0^{-2} = x_0 - \frac{1}{12} f_0^1.$$

После этого можно уже начать суммирование:

$$f_{-1/2}^{-1} + f_0 = f_{1/2}^{-1}, \quad f_0^{-2} + f_{1/2}^{-1} = f_1^{-2}$$

(см. схему разностей на стр. 267). Для вычисления x_1 по основной формуле метода квадратур

$$x_k = f_k^{-2} + \frac{1}{12} f_k^1 - \frac{1}{240} f_k^2 + \dots$$

нужно еще знать f_1 . В первом приближении эта величина находится экстраполированием; затем, когда найдены

$$x_1 = f_1^{-2} + \frac{1}{12} f_1^1, \dots$$

¹) Штраке опубликовал (Astronomische Nachrichten, Bd. 236 (1929), 97—114) таблицу, дающую $10^7 \omega^2 k^2 r^{-3}$ с восемью знаками для значений r^2 от 1.50 до 35.0.

то вычисление f_1 производится по обычным формулам

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$f_1 = -w^2 k^2 r_1^{-3} x_1, \dots$$

Аналогично вычисляются (x_2, y_2, z_2) и (x_{-2}, y_{-2}, z_{-2}) и т. д. Когда несколько строк вычислительной схемы уже заполнено, то экстраполирование дает обычно настолько точные значения $f_k, f_k^2, \dots$, что вычисление x_k, y_k, z_k не приходится повторять.

Пример. Даны следующие координаты планеты 931 Whittemora:

	1920	x	y	z
Апрель	3 5 Т. У.	− 3.162 896	+ 0.255 837	+ 0.700 030
"	11.5	− 3.190 262	+ 0.188 287	+ 0.682 100

Требуется вычислить ее эфемериду с 8-дневным ннтервалом.

Воспользуемся мтодом квадратур. Все вычисления относящиеся к функциям f будем вести с семью знаками. Вычисления ведутся параллельно по четырем схемам:— для x -ов, для y -ов, для z -ов и одна вспомогательная для нахождения функций f .

А р г у м е н т		r^2	$-10^7 w^2 k^2 r^{-3}$	Разности
	1920			
$n = -3$	Март 18			
− 2	" 26	10.440 00	− 561 5	+ 9 5
− 1	Апрель 3	10.559 41	− 552 0	+ 9 3
0	" 11	10.678 48	− 542 7	+ 8 9
+ 1	" 19	10.797 18	− 533 8	
+ 2	" 27			

n	f^{-2}	f^{-1}	$10^7 \cdot f$	f^1	x	Разности
− 3	− 3.103 060 5		(+ 1 772 1)		− 3.102 913	
− 2	− 3.133 930 8	− 30 870 3	+ 1 759 6	(− 125)	− 3.133 784	− 30 871
− 1	− 3.163 041 5	− 29 110 7	+ 1 745 9	− 137	− 3.162 896	− 29 112
0	− 3.190 406 3	− 27 364 8	+ 1 731 4	− 145	− 3.190 262	− 27 366
+ 1	− 3.216 039 7	− 25 633 4	+ 1 716 6	− 148	− 3.215 897	− 25 635
+ 2	− 3.239 956 5	− 23 916 8	(+ 1 701 8)	(− 148)	− 3.239 815	− 23 918

n	f^{-2}	f^{-1}	$10^7 \cdot f$	f^1	y	Разности
-3	+ 0.390 491 2		(- 223 2)		+ 0.390 473	+ 67 227
-2	+ 0.323 260 7	- 67 230 5	- 181 5	(+ 41 7)	+ 0.323 246	+ 67 409
-1	+ 0.255 848 7	- 67 412 0	- 141 2	+ 403	+ 0.255 837	+ 67 550
0	+ 0.188 295 5	- 67 553 2	- 102 2	+ 39 0	+ 0.188 287	+ 67 652
+1	+ 0.120 640 1	- 67 655 4	- 64 4	+ 37 8	+ 0.120 635	+ 67 717
+2	+ 0.052 920 3	- 67 719 8	(- 27 7)	(+ 36 7)	+ 0.052 918	

n	f^{-2}	f^{-1}	$10^7 \cdot f$	f^1	z	Разности
-3	+ 0.734 749 4		(- 419 7)		+ 0.734 714	- 17 140
-2	+ 0.717 607 3	- 17 142 1	- 402 9	(+ 168)	+ 0.717 574	- 17 544
-1	+ 0.700 062 3	- 17 545 0	- 386 4	+ 165	+ 0.700 030	- 17 930
0	+ 0.682 130 9	- 17 931 4	- 370 2	+ 162	+ 0.682 100	- 18 300
+1	+ 0.663 829 3	- 18 301 6	- 354 3	+ 159	+ 0.663 800	- 18 655
+2	+ 0.645 173 4	- 18 655 9	(- 338 7)	(+ 156)	+ 0.645 145	

В скобки заключены значения найденные экстраполированием и неисправленные вторым приближением. В этом примере второе приближение нигде не изменяло цифры полученные экстраполированием.

Разности, стоящие с правой стороны в каждой схеме, вычисляются для контроля полученных значений. При этом вычисляются не только первые разности, но и вторые, третьи, ... (у нас они опущены ради экономии места).

§ 29. ВЛИЯНИЕ ПРЕЦЕССИИ НА ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ.

Если элементы Ω , i , ω , определяющие положение орбиты, отнесены к эклиптике и экватору одной эпохи, а эфемерида должна давать координаты светила относительно эклиптики и экватора другой эпохи, то необходимо прежде всего отнести элементы к основным плоскостям этой последней эпохи. Соответствующие формулы выводятся в Сферической астрономии. Здесь мы ограничимся тем, что приведем приближенные формулы, дающие достаточную точность во всех случаях, когда разность эпох не превышает нескольких десятков лет.

Обозначим через Ω_0 , i_0 , ω_0 элементы отнесенные к основным плоскостям эпохи t_0 , а через Ω , i , ω и Ω_1 , i_1 , ω_1 элементы, считае-
мые относительно основных плоскостей эпохи t и эпохи $\frac{1}{2}(t_0+t)$.

В таком случае будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + [p - \pi \cotg i_1 \sin (\Pi - \Omega_1)] (t - t_0) \\ i &= i_0 - \pi \cos (\Pi - \Omega_1) (t - t_0) \\ \omega &= \omega_0 + \pi \operatorname{cosec} i_1 \sin (\Pi - \Omega_1) (t - t_0) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Промежуток времени $t - t_0$ предполагается выраженным в годах. Через p — обозначена общая прецессия по долготе, π — обозначает годовое изменение наклона эклиптики относительно основной эклиптики 1850.0, наконец Π — есть долгота восходящего узла эклиптики по отношению к той же эклиптике 1850.0. Величины p , π и Π должны быть взяты для момента $\frac{1}{2} (t_0 + t)$. Их значения могут быть найдены из следующей таблички:

Г о д	p	π	Π
1890.0	50".254	0".471	173°.86
1900.0	50 .256	0 .471	173 .95
1910.0	50 .259	0 .471	174 .04
1920.0	50 .261	0 .471	174 .13
1930.0	50 .263	0 .471	174 .22
1940.0	50 .265	0 .471	174 .32
1950.0	50 .267	0 .471	174 .41

В первом приближении в правых частях равенств (41) надо взять $\Omega_1 = \Omega_0$, $i_1 = i_0$, $\omega_1 = \omega_0$; затем вычисление повторяем принимая $\Omega_1 = \frac{1}{2} (\Omega_0 + \Omega)$, $i_1 = \frac{1}{2} (i_0 + i)$, $\omega_1 = \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega)$.

Если наклонность орбиты близка к нулю, то изменения элементов $\mathcal{U}$ и ω могут быть весьма значительны. В этом случае положение узла по сути дела является менее определенным. Что же касается до перигелия, то его положение в рассматриваемом случае лучше определять величиной

$$\pi = \Omega + \omega,$$

носящей название *долготы перигелия*.

Для прецессионного изменения долготы перигелия формулы (41) дают такое выражение

$$\pi = \pi_0 + \left[p + \pi \operatorname{tg} \frac{i_1}{2} \sin (\Pi - \Omega_1) \right] (t - t_0).$$

Рассмотрим случай, когда элементы орбиты считаются относительно плоскости экватора как основной плоскости. Обозначая их в этом случае через $\mathcal{U}'$, i' , ω' и сохраняя прежние обозначения для элементов относящихся к разным эпохам, будем иметь такие формулы

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + (m - n \cotg i_1' \cos \Omega_1') (t - t_0) \\ i' &= i_0' - n \sin \Omega_1' (t - t_0) \\ \omega' &= \omega_0' + n \operatorname{cosec} i_1' \cos \Omega_1' (t - t_0), \end{aligned}$$

где m и n — обозначают годичную прецессию по прямому восхождению и годичную прецессию по склонению. Общепринятые в настоящее время значения этих величин, данные Ньюкомом, таковы

$$m = 45''.0851 + 0''.0279T$$

$$n = 20.0468 - 0.0085T,$$

где T обозначает время, считаемое в столетиях от 1900.0.

Нам остается еще рассмотреть вопрос о влиянии прецессии на направляющие косинусы

$$P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z. \quad (42)$$

Обозначим через

$$P_x^\circ, P_y^\circ, P_z^\circ, Q_x^\circ, Q_y^\circ, Q_z^\circ$$

направляющие косинусы отнесенные к экваториальной системе некоторой начальной эпохи. За такую начальную эпоху мы примем 1950.0. Направляющие косинусы (42) мы будем считать отнесенными к экваториальной системе момента T , где через T — будем обозначать время считаемое в столетиях от 1950.0

Косинусы углов между осями координат экваториальных систем (x, y, z) и $(x^\circ, y^\circ, z^\circ)$, соответствующих моментам T и 1950.0, обозначим следующим образом

	x°	y°	z°
x	X_x	Y_x	Z_x
y	X_y	Y_y	Z_y
z	X_z	Y_z	Z_z

Теория прецессии дает следующие выражения для этих величин:

$$X_x = 1.0000\,0000 - 0.0002\,9696T^2 - 0.0000\,0014T^3$$

$$Y_x = -X_y = -0.0223\,4941T - 0.0000\,0376T^2 + 0.0000\,0221T^3$$

$$Z_x = -X_z = -0.0097\,1691T + 0.0000\,0206T^2 + 0.0000\,0098T^3$$

$$Y_y = 1.0000\,0000 - 0.0002\,4975T^2 - 0.0000\,0015T^3$$

$$Y_z = Z_y = -0.0001\,0858T^2$$

$$Z_z = 1.0000\,0000 - 0.0000\,4721T^2 + 0.0000\,0002T^3.$$

По известной теореме о косинусе угла между двумя направлениями имеем

$$P_x = X_x P_x^\circ + Y_x P_y^\circ + Z_x P_z^\circ$$

$$P_y = X_y P_x^\circ + Y_y P_y^\circ + Z_y P_z^\circ$$

$$P_z = X_z P_x^\circ + Y_z P_y^\circ + Z_z P_z^\circ.$$

Эти соотношения можно записать несколько короче в следующей символической форме ¹⁾

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x^\circ \\ P_y^\circ \\ P_z^\circ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{Bmatrix}$$

причем подразумевается что справа умножается столбец на столбец.

Для Q_x, Q_y, Q_z имеют место совершенно такие же формулы преобразования. Их можно записать одновременно с предыдущими следующим образом

$$\begin{Bmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x^\circ & Q_x^\circ \\ P_y^\circ & Q_y^\circ \\ P_z^\circ & Q_z^\circ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Обратное преобразование совершается, как легко видеть, по формулам

$$\begin{Bmatrix} P_x^\circ & Q_x^\circ \\ P_y^\circ & Q_y^\circ \\ P_z^\circ & Q_z^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Для того, чтобы перейти от эпохи T_1 к эпохе T_2 , нужно по формулам (44) перейти к нормальной эпохе 1950.0, а затем по формулам (43) к эпохе T_2 .

Так как при вычислении орбит и эфемерид до настоящего времени еще употребляется прежняя нормальная эпоха 1925.0 то приводим формулы для перехода от одной эпохи к другой: ²⁾

$$\begin{Bmatrix} P_x(1950.0) \\ P_y(1950.0) \\ P_z(1950.0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x(1925.0) \\ P_y(1925.0) \\ P_z(1925.0) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +0.9999\ 8144 + 0.0055\ 8690 + 0.0024\ 2934 \\ -0.0055\ 8690 + 0.9999\ 8439 - 0.0000\ 0679 \\ -0.0024\ 2934 - 0.0000\ 0679 + 0.9999\ 9705 \end{Bmatrix}$$

Примечание. Те же самые формулы (43) и (44) служат для перевода экваториальных прямоугольных координат с одной эпохи на другую. Например, для преобразования координат Солнца X, Y, Z , отнесенных к экватору и равноденствию эпохи T , в координаты X_0, Y_0, Z_0 , отнесенные к экватору и равноденствию эпохи 1950.0, имеем

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{Bmatrix}$$

¹⁾ Эти обозначения предложены Т. Банаховичем (Th. Banachiewicz), и уже получили некоторое распространение.

²⁾ Значения коэффициентов для перехода на нормальную эпоху 1925.0 и обратно можно найти в „Формулах и таблицах“ — Таблица VII, и в № 13 Бюллетеня Астрономического Института (B. Numer. v, Hilfstafeln zur Bahnbestimmung und gestörten Ephemeridenrechnung nach der Extrapolationsmethode).

ОТРЫВКИ ИЗ THEORIA MOTUS ГАУССА, ТРАКТУЮЩИЕ О ТОЧНОСТИ
ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ¹⁾.

Art. 30.

„Так как все числа, которые мы извлекаем из логарифмических и тригонометрических таблиц, не абсолютно точны, а лишь приближены, то результаты получаемые при вычислениях с помощью этих таблиц, могут быть только приближенными. В большинстве случаев, однако, обычные таблицы, точные до седьмого знака (т. е. не уклоняющиеся никогда от истины больше чем на пол-единицы седьмого порядка), дают точность более чем достаточную для того, чтобы неизбежные ошибки не имели никакого значения. Тем не менее, несомненно может случиться, что в некоторых частных случаях ошибки таблиц производят столь значительный эффект, что мы можем быть вынуждены совершенно отказаться от известного метода (вообще превосходного) и заменить его другим. Подобный случай может также представиться и в тех вычислениях, которыми мы только что занимались; поэтому не будет неуместно привести здесь некоторые исследования, касающиеся той степени точности, которую можно получить в этих вычислениях при помощи обычных таблиц. Но так как здесь не место исчерпывать этот столь важный для вычислителя вопрос, то мы его изучим лишь настолько, чтобы это было достаточно для нашей цели и позволило тому, кого он интересует, улучшить метод и распространить его на все другие операции“.

Art. 31.

„Всякий логарифм, синус, тангенс и т. д. (и вообще всякая иррациональная величина извлекаемая из таблиц) подвержен ошибке, которая может достигать до половины единицы последнего десятичного знака; мы обозначим этот предел ошибки через ω , — в обычных таблицах этот предел равен 0.000 0000 5. Если логарифм не находится непосредственно в таблицах, но должен быть определен интерполированием, ошибка может по двум причинам оказаться несколько более значительной. Во-первых, что касается до пропорциональной части разности, то во всех случаях, когда она не есть целое число (принимая последний десятичный знак за единицу), следует округлять ее до ближайшего целого числа; легко усмотреть, что вследствие этой причины ошибка не может удвоиться. Но мы не будем считать с этим увеличением ошибки, ибо ничто нам не мешает прибавить в пропорциональной части один лишней десятичный знак, а без труда можно усмотреть что, если пропорциональная часть совершенно точна, ошибка интерполированного логарифма не больше ошибки логарифма, непосредственно взятого из таблиц, поскольку конечно можно считать изменение логарифмов равномерным. Вторая причина увеличения ошибки заключается как раз в том, что это последнее предположение не абсолютно точно; но мы пренебрежем этой причиной, как потому, что влияние вторых и высших разностей почти во всех случаях нечувствительно, так и потому, что это влияние легко учесть, если оно станет более заметным. Поэтому во всех случаях мы положим наибольшую неизбежную ошибку таблиц $= \omega$, если однако аргумент (т. е. число, когда ищем логарифм, или угол, для которого ищется синус и т. п.) известен с абсолютной точностью. Но если сам аргумент известен только приближенно, причем максимальной возможной в нем ошибке отвечает вариация логарифма ω' (которая может быть определена при помощи отношения дифференциалов), то максимальная ошибка логарифма, вычисленного при помощи таблиц, может возрасти до $\omega + \omega'$.

Обратно, если при помощи таблиц вычисляется аргумент, соответствующий заданному логарифму, то его максимальная ошибка будет равняться той вариации, которую он испытывает при вариации логарифма равной ω — если этот последний

¹⁾ В дальнейшем будет подробно указана роль Гаусса (C. F. Gauss, 1777—1855) в создании современных методов вычисления орбит. Его основное сочинение „Теория движения небесных тел, вокруг Солнца по коническим сечениям обращающихся“ (Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, 1809) содержит весьма подробное изложение свойств невозмущенного движения. Нижеследующий отрывок может дать представление о той обстоятельности, с которой Гаусс изучает каждый способ с точным зрением вычислительной техники.

известен точно, или равной $\omega + \omega'$ — если логарифм может быть ошибочен на ω' . Едва ли нужно прибавлять, что ω и ω' должны быть взяты с одинаковыми знаками.

Если несколько величин точных лишь в известных пределах складываются, то максимальная ошибка результата будет равна сумме отдельных максимальных ошибок, взятых с одинаковыми знаками; по той же причине при вычитании величин приближенно точных максимальная ошибка разности будет также равна сумме отдельных ошибок. При умножении или при делении приближенной в лич. ны максимальная ошибка увеличивается или уменьшается в том же отношении как и сама величина“.

Art. 32.

Приступим теперь к применению этих принципов к наиболее полезным из числа вышеизложенных операций.

I. Если при употреблении формулы

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right)$$

для вычисления истинной аномалии φ и помощи эксцентрисической, φ и E предполагаются точно известными, то ошибка ω может быть допущена в $\lg \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right)$

и в $\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} E$, следовательно ошибка разности $= \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$ будет 2ω ; максимальная ошибка в определении угла $\frac{1}{2} v$ будет поэтому

$$\frac{3\omega d \left(\frac{1}{2} v \right)}{d \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} v} = \frac{3\omega \sin v}{2\lambda},$$

где λ — модуль употребляемых логарифмов. Таким образом ошибка, которой подвержена истинная аномалия, становится, после выражения в секундах,

$$\frac{3\omega \sin v}{\lambda} 206\,265 = 0'' \cdot 0712 \sin v,$$

если употребляются Бригговы логарифмы с семью знаками; таким образом мы всегда можем быть уверены в величине v в пределах $0'' \cdot 07$; если употребляются маленькие таблицы логарифмов только с пятью знаками, то ошибка может достигнуть $7'' \cdot 12$.

II. Если $e \cos E$ вычисляется при помощи логарифмов, то может быть допущена ошибка доходящая до $\frac{3\omega \cos E}{\lambda}$; величина $1 - e \cos E$ или $\frac{r}{a}$ будет подвержена такой же ошибке. Следовательно, при вычислении логарифма этой величины ошибка может достичь $(1 + \delta) \omega$, обозначая через δ величину $\frac{3e \cos E}{1 - e \cos E}$, взятую с положительным знаком; возможная ошибка $\lg r$ доходит до того же предела $(1 + \delta) \omega$, если только предполагать $\lg a$ заданным точно. Если эксцентриситет мал, то величина δ заключается в тесных пределах; но кгда e мало отличается от единицы, $1 - e \cos E$ остается весьма малым, если E мало; поэтому δ может тогда достичь величины, которой уже нельзя пренебрегать; вот почему формула

$$r = a(1 - e \cos E)$$

становится в этом случае менее пригодной. Величина δ может быть также выражена следующим образом

$$\frac{3(a - r)}{r} = \frac{3e(\cos v + e)}{1 - e^2}$$

каковая формула показывает еще более ясно, в каких случаях ошибкой $(1 + \delta) \omega$ можно пренебречь.

III. При употреблении формулы

$$\sin \frac{1}{2} (v - E) = \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$$

для вычисления истинной аномалии по эксцентрической, величина $\lg \sqrt{\frac{a}{r}}$ будет подвержена ошибке $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta\right) \omega$, а следовательно $\lg \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$ ошибке $\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \delta\right) \omega$; отсюда находим, что максимум возможной ошибки в определении угла $v - E$ или v равняется

$$\frac{\omega}{\lambda} (7 + \delta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - E),$$

или выражая в секундах, при условии употребления семи десятичных знаков,

$$= (0''.166 + 0''.024 \delta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - E).$$

Если эксцентриситет невелик, то δ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - E)$ будут малы; вот почему этот метод допускает большую точность, нежели рассмотренный в параграфе I. Но этот последний метод должен быть напротив предпочтен, когда эксцентриситет очень велик и приближается к единице, ибо тогда δ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - E)$ могут стать весьма значительными. При помощи наших формул всегда можно решить какой из этих двух способов должен быть предпочтен.

IV. При определении средней аномалии по эксцентрической при помощи формулы

$$M = E - e \sin E,$$

ошибка величины $e \sin E$, вычисляемой при помощи логарифмов, а следовательно и ошибка средней аномалии M , может достигь

$$\frac{3\omega e \sin E}{\lambda},$$

каковой предел должен быть умножен на 206 265'', если желательно выразить его в секундах. Отсюда можно легко заключить, что в обратной задаче, когда E должно быть получено пробами по заданному M , величина E может быть ошибочна на

$$\frac{3\omega e \sin E}{\lambda} \frac{dE}{dM} 206\,265'' = \frac{3\omega e a \sin E}{\lambda r} 206\,265'',$$

хотя она и будет удовлетворять уравнению $E - e \sin E = M$ со всею точностью, которую допускают таблицы.

Таким образом истинная аномалия вычисленная по средней может быть ошибочна по двум причинам, если мы рассматриваем среднюю аномалию как заданную точно; во-первых по причине ошибки, допущенной при вычислении v по E , каковая, как мы видели не имеет большого значения; во-вторых потому, что значение самой эксцентрической аномалии может быть ошибочно. Влияние последней причины получим, умножив ошибку E на $\frac{dv}{dE}$, произведение будет ¹⁾

$$\frac{3\omega e \sin E}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dM} 206\,265'' = \frac{3\omega e a \sin v}{\lambda r} 206\,265'' = \left(\frac{e \sin v + \frac{1}{2} e^2 \sin 2v}{1 - e^2} \right) 0''.0712,$$

¹⁾ Для получения $\frac{dv}{dM}$ надо воспользоваться формулами (22), (27) и (28). Для выражения r через v служит уравнение орбиты (M. C.).

если вычисления производятся с семью знаками. Эта ошибка, всегда небольшая для малых значений e , может стать весьма большой, когда e мало отличается от единицы, как это видно из следующей таблицы, которая показывает наибольшее значение предыдущего выражения для некоторых значений e .

e	Наибольшая ошибка	e	Наибольшая ошибка	e	Наибольшая ошибка
0.90	0".42	0.94	0." 73	0.98	2".28
0.91	0 .48	0.95	0 .89	0.99	4 .59
0.92	0 .54	0.96	1 .12	0.999	46 .23
0.93	0 .62	0.97	1 .50		

[Далее Гаусс совершенно таким же образом изучает точность, с которой вычисляются координаты для гиперболической орбиты].

Art. 33.

„Таким образом для тех конических сечений, эксцентриситет которых мало отличается от единицы, иначе говоря для эллипсов и гипербол приближающихся по форме к параболе, вышеизложенные методы, как для определения истинной аномалии для заданного момента; так и для определения времени по истинной аномалии ¹⁾, не дают всей желательной точности: неизбежные ошибки, возрастая по мере приближения формы орбиты к параболической, превзойдут в конце концов всякий предел. Конечно большие таблицы, дающие больше семи десятичных знаков, уменьшат эту неопределенность, но они ее не уничтожат и не помешают тому, что она превзойдет всякий предел, если орбита приблизится достаточно к параболе. Кроме того вышеизложенные методы становятся в этом случае достаточно неудобными, потому что часть из них требует многократно повторенных проб, тягостность которых увеличивается от употребления больших таблиц. Несомненно, поэтому, не будет лишним дать специальный метод, при помощи которого можно избежать, в этом случае, указанной неопределенности и получить достаточную точность при помощи одних только обыкновенных таблиц“.

Далее Гаусс развивает способ вычисления истинной аномалии в случае орбиты, эксцентриситет которой мало отличается от единицы. Способ, указанный для этого в § 22, основывается на той же идее, что и способ Гаусса, но требует меньше вспомогательных таблиц: единственная необходимая для него таблица значений функции $V(z)$ понадобится нам в дальнейшем для других целей (см. § 40); между тем как способ Гаусса требует специальных и притом гораздо более обширных таблиц.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТ В СЛУЧАЕ, КОГДА ИСТИННАЯ АНОМАЛИЯ БЛИЗКА К 180°.

В § 21 было показано, каким образом истинная аномалия в параболическом движении, или заменяющая ее величина

$$\sigma = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v,$$

может быть найдена по аргументу

$$P = q^{-\frac{3}{2}} (t - T)$$

при помощи специальных таблиц. Но подобные таблицы могут быть доведены лишь до некоторого определенного значения P ; таким образом для вычисления v или σ при очень больших значениях P (следовательно, когда v близко к 180°, а σ очень велико) приходится прибегать к другим способам. Формулы (13) остаются, конечно, применимыми, но делаются мало удобными при логарифмическом вычислении.

¹⁾ Так как время имеет множителем $a^{3/2}$, то ошибка в M возрастает тем больше, чем больше становится $a = p : (1 - e^2)$.

Существует, поэтому, потребность в методах для вычисления v (или σ) по P — а также для решения обратной задачи — специально приспособленных для того случая, когда P имеет очень большую величину.

Первый способ, предложенный Бесселем (W. Bessel, 1784—1846), заключается в следующем.

Возьмем тождество

$$\frac{1}{3} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \operatorname{cotg} \frac{v}{2} \right)^3 = \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} + \operatorname{cotg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 \frac{v}{2}.$$

Так как

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{k}{\sqrt{2}} P$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \operatorname{cotg} \frac{v}{2} = \frac{2}{\sin v},$$

то получим для определения v такое уравнение

$$\frac{1}{\sin^3 v} = \frac{3k}{8\sqrt{2}} P + \frac{3}{8} \left(\operatorname{cotg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 \frac{v}{2} \right). \quad (45)$$

В том случае, который нас здесь интересует, v близко к 180° , следовательно $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} v$ есть очень малая величина, поэтому написанное уравнение удобно разрешается способом последовательных приближений. Для первого приближения берем значение $v = w$, где w определяется равенством

$$\sin^3 w = \frac{8\sqrt{2}}{3k} P^{-1}.$$

С этим значением вычисляем правую часть уравнения (45) и находим новое более точное значение v .

Бессель полагает

$$v = w + \delta$$

и дает таблицу значений δ по аргументу v .

Второй способ. Определяемая уравнением

$$\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} P \quad (46)$$

величина σ возрастает до бесконечности вместе с P — именно поэтому ее нельзя табулировать для всех значений P . Введем вместо σ новую неизвестную β , полагая

$$\sigma = \left(\frac{3k}{\sqrt{2}} P \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \beta.$$

Получим вместо уравнения (46) такое

$$3x\beta + \beta^3 = 1,$$

где

$$x = \left(\frac{3k}{\sqrt{2}} P \right)^{-\frac{2}{3}},$$

или $x = \alpha^{-2}$, если положить

$$\alpha = \left(\frac{3k}{\sqrt{2}} P \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Когда P стремится к бесконечности, то x стремится к нулю, а β стремится к единице. Поэтому легко дать таблицу значений β по аргументу x для всех нужных нам значений x .

Формулы, служащие для вычисления, окончательно представим так:

$$\lg \alpha = 9.520\ 7292_{-10} + \frac{1}{3} \lg P,$$

$$x = \alpha^{-2},$$

$$\lg \sigma = \lg \alpha + \lg \beta,$$

причем $\lg \beta$ может быть взят по аргументу x из специальной таблицы (таблица XIV в сборнике „Формулы и таблицы“).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Показать, что постоянные Гаусса связаны соотношением

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2.$$

Почему это соотношение не может считаться хорошей контрольной формулой?

2. Показать, что постоянные f_1, f_2, f_3 в интегралах Лапласа (Глава II, задача № 9) следующим образом выражаются через элементы

$$f_1 = k^2 (m_0 + m) e (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i)$$

$$f_2 = k^2 (m_0 + m) e (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i)$$

$$f_3 = k^2 (m_0 + m) e \sin \omega \sin i.$$

3. Выразить постоянные f_1, f_2, f_3 через векторные элементы P и Q .
4. Вывести приближенное равенство

$$\lg E = \frac{\sin M}{\cos M - e}$$

и определить до каких степеней e оно справедливо.

5. Представить интеграл площадей в таком виде

$$\frac{k \sqrt{1+e}}{2q^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{(1+\sigma^2)}{(1+\lambda\sigma^2)^2} d\sigma,$$

где

$$\sigma = \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad \lambda = \frac{1-e}{1+e}.$$

Вывести отсюда разложение σ по степеням λ .

6. Сопоставить формулы нужные для вычисления эфемериды планеты, движущейся по кривой орбите.

7. Показать что для эллиптического движения координаты в плоскости орбиты разлагаются в ряды по степеням e такого вида

$$\xi = a \left[\cos M + \frac{1}{2} e (\cos 2M - 3) + \dots \right]$$

$$\eta = a \left[\sin M + \frac{1}{2} e \sin 2M + \dots \right].$$

Часть вторая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ОРБИТЫ.

ГЛАВА IV.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ПО ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ СВЕТИЛА.

В главе II мы определили движение одной материальной точки P относительно другой — S , исходя из предположения, что эти две точки притягивают одна другую по закону Ньютона. Произведенное нами интегрирование уравнений движения дало координаты x, y, z точки P в виде функций времени t и шести произвольных постоянных. Мы видели, далее, что за эти произвольные постоянные выгодно принять *шесть элементов орбиты*, а именно $i, \Omega, \omega, a, e, T$. Итак

$$\left. \begin{aligned} x &= f(t, i, \Omega, \omega, a, e, T) \\ z &= \varphi(t, i, \Omega, \omega, a, e, T) \\ y &= \psi(t, i, \Omega, \omega, a, e, T). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Задание элементов вполне определяет движение. Но с другой стороны для определения движения точки P можно задать координаты x_0, y_0, z_0 и компоненты скорости x'_0, y'_0, z'_0 этой точки для какого-либо момента времени t_0 . Отсюда ясно, что эти шесть величин однозначно определяют элементы орбиты; и, конечно, обратно—зная элементы, мы можем найти

$$x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0; \quad (2)$$

для этого нужно только в уравнениях (1) и в тех, которые получаются из них после дифференцирования по t , положить $t = t_0$. Оставляя пока в стороне вторую задачу, мы займемся в этой главе решением следующей проблемы:

Зная величины (2), определяющие положение и скорость светила в какой-либо момент времени t_0 , определить элементы орбиты.

С этой проблемой приходится встречаться в разнообразных вопросах Небесной механики, между прочим и при вычислении орбит из наблюдений.

Вторая проблема, которой мы здесь займемся (также имеющая фундаментальное значение при вычислении орбит), заключается в следующем:

Даны координаты светила (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) для двух моментов времени t_1 и t_2 . Определить элементы орбиты.

Заметим, что эта проблема может рассматриваться как обобщение предыдущей, так как при бесконечно малом промежутке времени $t_2 - t_1$ она совпадает с предыдущей проблемой. Отсюда можно, между прочим, заключить, что при малых интервалах времени $t_2 - t_1$ вторая проблема также имеет одно и только одно решение.

Решение первой проблемы не представляет никаких трудностей и было получено одновременно с решением задачи двух тел. Что же касается до второй проблемы, которая решается, вообще говоря, лишь путем последовательных приближений, то впервые законченное решение этой проблемы мы находим в *Theoria motus* Гаусса.

Конец главы посвящен изучению теоремы Эйлера-Ламберта, имеющей применение при определении кометных орбит.

§ 30. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ПО ПОЛОЖЕНИЮ И СКОРОСТИ СВЕТИЛА.

Даны координаты светила (x_0, y_0, z_0) и компоненты его скорости (x'_0, y'_0, z'_0) для некоторого момента времени t_0 . Ради большей определенности будем считать эти величины отнесенными к экваториальной системе координат.

Интегралы площадей (II, 6) дают три уравнения

$$\left. \begin{aligned} k \sqrt{p} \sin i' \sin \Omega' &= y_0 z'_0 - z_0 y'_0 \\ k \sqrt{p} \sin i' \cos \Omega' &= x_0 z'_0 - z_0 x'_0 \\ k \sqrt{p} \cos i' &= x_0 y'_0 - y_0 x'_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

вполне определяющие параметр p , и элементы i' , Ω' , фиксирующие положение плоскости орбиты относительно экваториальной системы координат.

Интеграл живой силы (II, 18), дающий равенство

$$x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 = k^2 \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right), \quad (4)$$

где

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

позволяет определить большую полуось a .

Далее, продифференцировав уравнение орбиты, представленное в форме

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

получим

$$e \sin v \frac{dv}{dt} = \frac{p}{r^2} \frac{dr}{dt};$$

или, ввиду того что (см. II, 22)

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{p},$$

будем иметь

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k} \frac{dr}{dt}$$

Для определения производной радиуса-вектора продифференцируем равенство $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; это даст

$$rr' = xx' + yy' + zz'.$$

Полагая в двух последних равенствах и в уравнении орбиты $t = t_0$, получим

$$\left. \begin{aligned} r_0 r_0' &= x_0 x_0' + y_0 y_0' + z_0 z_0' \\ e \sin v_0 &= k^{-1} \sqrt{p} r_0' \\ e \cos v_0 &= p r_0^{-1} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Эти равенства дают возможность найти эксцентриситет e и значение истинной аномалии, соответствующее моменту $t = t_0$.

Для контроля проделанной работы следует воспользоваться соотношением

$$p = a(1 - e^2).$$

Если эксцентриситет близок к единице, то вычисляем перигельное расстояние

$$q = \frac{p}{1 + e}.$$

Теперь обратимся к формулам (II, 21), которые для момента $t = t_0$ дают

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 (\cos u_0 \cos \Omega' - \sin u_0 \sin \Omega' \cos i') \\ y_0 &= r_0 (\cos u_0 \sin \Omega' + \sin u_0 \cos \Omega' \cos i') \\ z_0 &= r_0 \sin u_0 \sin i' \end{aligned}$$

где

$$u_0 = v_0 + \omega'.$$

Чтобы найти аргумент широты u_0 и получить, таким образом, элемент ω можно воспользоваться любой комбинацией этих формул. Например, можно умножить первую формулу на $\cos \Omega'$, вторую на $\sin \Omega'$ и сложить результаты. Окончательно получим для определения ω такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} r_0 \sin(v_0 + \omega') &= z_0 \operatorname{cosec} i' \\ r_0 \cos(v_0 + \omega') &= x_0 \cos \Omega' + y_0 \sin \Omega' \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Остается определить последний элемент—время прохождения через перигелий T (или среднюю аномалию M_0). Этот элемент определяется различно для различных родов конических сечений.

Для эллиптической орбиты с не очень большим эксцентриситетом по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2}$$

находим эксцентрическую аномалию E_0 . Уравнение Кеплера

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0$$

дает, затем, искомую среднюю аномалию M_0 .

Среднее суточное движение n и время прохождения через перигелий T находим по формулам

$$n = k a^{-\frac{3}{2}},$$

$$T = t_0 - \frac{1}{n} M_0$$

Параболическую орбиту будем иметь в том случае, когда уравнение (4) даст $a = \infty$. Так как в этом случае $e = 1$, то последние два уравнения (5) можно заменить таким

$$\operatorname{tg} \frac{v_0}{2} = \frac{r_0 r'_0}{k \sqrt{p}}.$$

Время прохождения через перигелий определяется равенством

$$T = t_0 - q^{\frac{3}{2}} P, \quad q = \frac{1}{2} p,$$

где

$$P = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma_0^3 \right), \quad \sigma_0 = \operatorname{tg} \frac{v_0}{2}.$$

Для орбиты, эксцентриситет которой мало отличается от единицы, время прохождения через перигелий вычисляется по формулам § 22.

Примечание I. Если положение светила определено экваториальными координатами, то предыдущие формулы дадут элементы Ω' , i' , ω' относительно экваториальной системы. Для того, чтобы вычислить эклиптические элементы Ω , i , ω , рассмотрим сферический треугольник, образованный экватором, эклипикой и орбитой светила. Углы этого треугольника равны $180^\circ - i'$, i и ε , причем стороны противолежащие двум первым углам равны соответственно Ω и Ω' ; сторону противолежащую углу ε обозначим через d . Основные формулы Сферической тригонометрии дают

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= \sin i' \sin \Omega' \\ \sin i \cos \Omega &= -\cos i' \sin \varepsilon + \sin i' \cos \varepsilon \cos \Omega \\ \cos i &= \cos i' \cos \varepsilon + \sin i' \sin \varepsilon \cos \Omega \\ \sin i \sin d &= \sin \varepsilon \sin \Omega' \\ \sin i \cos d &= \sin i' \cos \varepsilon - \cos i' \sin \varepsilon \cos \Omega' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Отсюда определим i , Ω и d , затем

$$\omega = \omega' - d.$$

Вместо предыдущей группы формул можно взять следующие, получающиеся из того же треугольника при помощи формул Деламбра,

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\Omega + d) &= \sin \frac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega' \\ \sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\Omega + d) &= \sin \frac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega' \\ \cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\Omega - d) &= \cos \frac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega' \\ \cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\Omega - d) &= \cos \frac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Примечание II. Вместо элементов Ω' , i' , ω' часто предпочитают определять постоянные Гаусса, так как с одной стороны они удобны для вычисления эфемериды, а с другой—от них легко перейти к эклиптическим элементам Ω , i , ω (см. § 23).

Обратимся к формулам (III, 29). Первая из них,

$$x = r \sin a \sin (A' + v), \quad (A' = A + \omega),$$

после дифференцирования дает

$$x' = r' \sin a \sin (A' + v) + r \sin a \cos (A' + v) v'$$

или

$$x' - \frac{xr'}{r} = \frac{k\sqrt{p}}{r} \sin a \cos (A' + v),$$

так как, согласно интеграла площадей,

$$r^2 v' = k\sqrt{p}.$$

Итак

$$\sin a \cos (A' + v) = \frac{rx' - xr'}{k\sqrt{p}}.$$

Применяя эти соотношения (и им аналогичные для двух других координат) к моменту $t = t_0$, получим окончательно

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin (A' + v_0) &= \frac{x_0}{r_0} \\ \sin a \cos (A' + v_0) &= \frac{r_0 x_0' - x_0 r_0'}{k\sqrt{p}} \\ \sin b \sin (B' + v_0) &= \frac{y_0}{r_0} \\ \sin b \cos (B' + v_0) &= \frac{r_0 y_0' - y_0 r_0'}{k\sqrt{p}} \\ \sin c \sin (C' + v_0) &= \frac{z_0}{r_0} \\ \sin c \cos (C' + v_0) &= \frac{r_0 z_0' - z_0 r_0'}{k\sqrt{p}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

§ 31. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ПО ДВУМ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИМ ПОЛОЖЕНИЯМ СВЕТИЛА.

Даны положения светила $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, соответствующие моментам t_1 и t_2 . Требуется определить шесть элементов его орбиты.

Найдем прежде всего элементы Ω' и i' , определяющие положение плоскости орбиты. Для этого рассмотрим треугольник SP_1P_2 (черт. 11), образованный Солнцем и двумя данными положениями светила. Удвоенная площадь этого треугольника равна

$$[r_1 r_2] = r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1),$$

где через r_1 и r_2 — обозначены радиусы-векторы SP_1 , SP_2 , а через v_1 и v_2 — обозначены соответствующие истинные аномалии.

Проектируя треугольник SP_1P_2 на плоскость xSy , получим треугольник SC_1C_2 с вершинами $S(0, 0, 0)$, $C_1(x_1, y_1, 0)$, $C_2(x_2, y_2, 0)$. Удвоенная площадь этого треугольника равна

$$x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Следовательно

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = [r_1 r_2] \cos i'.$$

Совершенно так же, проектируя треугольник SP_1P_2 на две другие координатные плоскости и замечая, что косинусы углов, образуемых нормалью SN

Рис. 11.

к плоскости орбиты с осями Sx и Sy равны соответственно (см. § 11)

$$\sin i' \sin \Omega', \quad -\sin i' \cos \Omega',$$

получим две аналогичные формулы. Итак

$$\left. \begin{aligned} [r_1 r_2] \sin i' \sin \Omega' &= y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ [r_1 r_2] \sin i' \cos \Omega' &= x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ [r_1 r_2] \cos i' &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эти уравнения дают возможность вычислить элементы i' , Ω' и разность истинных аномалий

$$2f = v_2 - v_1. \quad (11)$$

Предположим теперь, что нам известен параметр орбиты p . Покажем, каким образом при этом условии могут быть определены все остальные элементы.

Прежде всего уравнение орбиты дает два соотношения

$$e \cos v_1 = q_1, \quad e \cos v_2 = q_2,$$

где для краткости положено

$$q_1 = pr_1^{-1} - 1, \quad q_2 = pr_2^{-1} - 1.$$

Второе соотношение напомним так

$$e \cos(v_1 + 2f) = q_2,$$

откуда

$$e \cos v \cos 2f - e \sin v_1 \sin 2f = q_2, \text{ или } e \sin v_1 \sin 2f = q_1 \cos 2f - q_2.$$

Таким образом получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} e \sin v_1 &= q_1 \cotg 2f - q_2 \operatorname{cosec} 2f \\ e \cos v_1 &= q_1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

позволяющие найти e и v_1 . Равенство (11) даст v_2 .

Для *эллиптической орбиты* дальнейшие вычисления ведутся так. Находим большую полуось a и среднее суточное движение n :

$$a = p \sec^2 \varphi, \quad \sin \varphi = e, \quad n = ka^{-\frac{3}{2}}.$$

Затем вычисляем эксцентрические аномалии E_1 и E_2 :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2;$$

и средние аномалии:

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1, \quad M_2 = E_2 - e \sin E_2.$$

Для контроля можно снова определить n :

$$n = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}.$$

Формула

$$M = M_1 + n(t - t_1)$$

дает возможность вычислить среднюю аномалию M_0 , соответствующую любому моменту $t = t_0$. Эта же формула позволяет найти время прохождения через перигелий T ; так как в момент прохождения через перигелий $M = 0$, то

$$T = t_1 - \frac{1}{n} M_1 = t_2 - \frac{1}{n} M_2.$$

Остается определить последний элемент — расстояние перигелия от узла ω' . Для этого обратимся к уравнениям (6). Применив их к моменту t_1 , получим

$$\left. \begin{aligned} r_1 \sin(v_1 + \omega') &= z_1 \operatorname{cosec} i' \\ r_1 \cos(v_1 + \omega') + x_1 \cos \Omega' + y_1 \sin \Omega' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Формулы (7) или (8) позволяют перейти от экваториальных элементов Ω' , i' , ω' к эклиптическим Ω , i , ω .

Для *параболической орбиты*, определив по соотношениям (12) и (11) истинные аномалии v_1 и v_2 , находим время прохождения через перигелий при помощи формул ($q = \frac{1}{2} p$):

$$T = t_1 - q^{3/2} P_1 = t_2 - q^{3/2} P_2, \quad (14)$$

где

$$P_1 = \frac{V\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_1 + \frac{1}{3} \sigma_1^3 \right), \quad \sigma_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1,$$

$$P_2 = \frac{V\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_2 + \frac{1}{3} \sigma_2^3 \right), \quad \sigma_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2.$$

Для орбит, эксцентриситет которых мало отличается от единицы, применяем формулы, данные в § 22.

Примечание. Если заранее известно, что орбита параболическая, то вычисление элементов ведется иначе, причем нет необходимости в предварительном определении p .

После того как из уравнений (10) найдены ϖ' , i' и $v_2 - v_1$, обращаемся к уравнению параболы, которое даст

$$r_1 = \frac{q}{\cos^2 \frac{v_1}{2}}, \quad r_2 = \frac{q}{\cos^2 \frac{v_2}{2}},$$

где через $q = \frac{1}{2} p$ обозначено перигельное расстояние. Из этих равенств находим

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{v_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \left(\frac{v_1}{2} + f \right) = \frac{1}{\sqrt{r_2}},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{v_1}{2} &= \frac{\cotg f}{\sqrt{r_1}} - \frac{\operatorname{cosec} f}{\sqrt{r_2}} \\ \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{v_1}{2} &= \frac{1}{\sqrt{r_1}} \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Эти уравнения дают возможность определять q , v_1 , а следовательно и v_2 . Вычисление элементов заканчивается по формулам (13) и (14), дающим ω' и T .

Чтобы задачу вычисления элементов по двум гелиоцентрическим положениям светила можно было считать вполне решенной, нужно еще рассмотреть вопрос о нахождении p для случая эллиптической орбиты (случай гиперболической орбиты не представляет никаких принципиальных отличий). Раньше чем перейти к этому вопросу, остановимся на вычислении постоянных Гаусса $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, A , B , C и векторных элементов P_x , P_y , P_z , Q_x , Q_y , Q_z .

§ 32. ПРОДОЛЖЕНИЕ: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ГАУССА.

При определении элементов орбиты по двум гелиоцентрическим положениям (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) обычно приходится иметь дело с координатами, отнесенными к экваториальной системе. Экваториальные элементы i' , ϖ' , ω' , которые при этом вычисляются по формулам (10) и (13), не представляют непосредственного интереса, ибо положение орбиты принято определять при помощи эллиптических элементов i , ϖ , ω . Но экваториальные элементы представляют то преимущество, что дают возможность очень просто

найти постоянные Гаусса. В самом деле, полагая в формулах (III, 28) $\varepsilon = 0$, получим

$$\begin{aligned}\sin a \sin A &= \cos \Omega' & \sin b \sin B &= \sin \Omega' \\ \sin a \cos A &= -\cos i' \sin \Omega' & \sin b \cos B &= \cos i' \cos \Omega' \\ c &= i', & C &= 0.\end{aligned}$$

Определив отсюда $\sin a$, $\sin b$, A и B будем иметь для вычисления гелиоцентрических координат формулы

$$\left. \begin{aligned}x &= r \sin a \sin (A + \omega' + v) \\ y &= r \sin b \sin (B + \omega' + v) \\ z &= r \sin i' \sin (\omega' + v).\end{aligned} \right\} \quad (15)$$

§ 33. ПРОДОЛЖЕНИЕ: ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Покажем теперь, каким образом направляющие косинусы P_x , P_y , P_z , Q_x , Q_y , Q_z могут быть вычислены непосредственно, минуя вычисление элементов Ω , i' , ω' .

Согласно формулам (III, 33) имеем

$$\begin{aligned}x_1 &= P_x r_1 \cos v_1 + Q_x r_1 \sin v_1 \\ x_2 &= P_x r_2 \cos v_2 + Q_x r_2 \sin v_2.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$P_x = x_1 \frac{\sin v_2}{r_1 \sin 2f} - x_2 \frac{\sin v_1}{r_2 \sin 2f}, \quad Q_x = x_2 \frac{\cos v_1}{r_2 \sin 2f} - x_1 \frac{\cos v_2}{r_1 \sin 2f}$$

или

$$P_x = x_1 \frac{r_2 \sin v_2}{r_1 r_2 \sin 2f} - x_2 \frac{r_2 \sin v_1}{r_1 r_2 \sin 2f}, \quad Q_x = x_2 \frac{r_1 \cos v_1}{r_1 r_2 \sin 2f} - x_1 \frac{r_2 \cos v_2}{r_1 r_2 \sin 2f}.$$

Эти формулы решают поставленную задачу, но они имеют то неудобство, что P_x и Q_x оказываются выраженными в виде разностей двух приблизительно одинаковых величин, что влечет при вычислении потерю точности.

Положим

$$r_1 r_2 \sin 2f = r_1 r_0; \quad (16)$$

замечая, что

$$\begin{aligned}r_2 \sin v_2 &= r_2 \sin (v_2 - v_1) \cos v_1 + r_2 \cos (v_2 - v_1) \sin v_1 \\ r_2 \cos v_2 &= r_2 \cos (v_2 - v_1) \cos v_1 - r_2 \sin (v_2 - v_1) \sin v_1,\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}P_x &= x_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - \left(x_2 - \frac{r_1 r_2 \cos 2f}{r_1^2} x_1 \right) \frac{\sin v_1}{r_0}, \\ Q_x &= x_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + \left(x_2 - \frac{r_1 r_2 \cos 2f}{r_1^2} x_1 \right) \frac{\cos v_1}{r_0}.\end{aligned}$$

Полагая

$$\sigma = \frac{r_1 r_2 \cos 2f}{r_1^2}$$

$$x_0 = x_2 - \sigma x_1, \quad y_0 = y_2 - \sigma y_1, \quad z_0 = z_2 - \sigma z_1, \quad (17)$$

окончательно будем иметь для вычисления направляющих косинусов следующие формулы

$$\left. \begin{aligned} P_x &= x_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - x_0 \frac{\sin v_1}{r_0} \\ P_y &= y_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - y_0 \frac{\sin v_1}{r_0} \\ P_z &= z_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - z_0 \frac{\sin v_1}{r_0} \\ Q_x &= x_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + x_0 \frac{\cos v_1}{r_0} \\ Q_y &= y_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + y_0 \frac{\cos v_1}{r_0} \\ Q_z &= z_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + z_0 \frac{\cos v_1}{r_0} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

В рассматриваемом случае находить величину

$$r_1 r_2 \sin 2f = [r_1 r_2] = r_1 r_0$$

из уравнений (10) нецелесообразно, ибо Ω' и i' нам не нужны. Мы можем, возводя уравнения (10) в квадрат и складывая, исключить эти элементы и получить формулу

$$(r_1 r_0)^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2,$$

дающую r_0 (а следовательно и $2f = v_2 - v_1$) непосредственно, — но эта формула довольно громоздка. Укажем другой способ вычисления r_0 и $2f$.

Так как

$$\cos 2f = \frac{x_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1} \frac{z_2}{r_2},$$

то

$$\sigma = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^2}. \quad (19)$$

Далее, на основании равенств (17),

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2 \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2}{r_1^2} + \\ &+ \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2}{r_1^4} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2), \end{aligned}$$

или

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2}{r_1^2},$$

или

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 - r_1^2 r_2^2 \cos^2 2f}{r_1^2}.$$

Откуда, принимая во внимание равенство (16), получим окончательно

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2. \quad (20)$$

Итак, вычисления нужно производить в следующем порядке: сначала по формуле (19) находим σ , затем равенства (17) дадут x_0, y_0, z_0 , а равенство (20) r^0 ; после этого по формуле (16) определяем $2f$, что открывает возможность найти, из уравнений (12) или (12a), истинные аномалии; наконец по формулам (18) вычисляем искомые направляющие косинусы $P_x, Q_x, \dots$

§ 34. ПРОДОЛЖЕНИЕ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА ОРБИТЫ ПО СПОСОБУ ГАУССА.

В предыдущих параграфах мы видели, что решение задачи о нахождении элементов орбиты по двум гелиоцентрическим положениям светила сводится к определению параметра p . Если параметр известен, то вычисление остальных элементов не представляет никаких затруднений.

Параметр определяется трансцендентным уравнением, так что его можно вычислить лишь путем последовательных приближений. Чтобы сделать проведение этих последовательных приближений возможно более удобным, Гаусс ввел вспомогательную неизвестную η , равную отношению площади сектора SP_1P_2 к площади треугольника SP_1P_2 .

Обозначая по-прежнему через $[r_1r_2]$ удвоенную площадь треугольника SP_1P_2 , а через (r_1r_2) — удвоенную площадь сектора SP_1P_2 , будем иметь

$$[r_1r_2] = r_1r_2 \sin 2f$$

$$(r_1r_2) = k \sqrt{p} (t_2 - t_1),$$

следовательно

$$\eta = \frac{k \sqrt{p} (t_2 - t_1)}{r_1r_2 \sin 2f}. \quad (21)$$

Отсюда ясно, что, определив η , мы тем самым будем знать p , так что задача приводится к нахождению отношения η .

Формулы (II, 32) в применении к рассматриваемым положениям светила дают

$$\sqrt{r_1} \sin \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_1,$$

$$\sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_1,$$

$$\sqrt{r_2} \sin \frac{1}{2} v_2 = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_2,$$

$$\sqrt{r_2} \cos \frac{1}{2} v_2 = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_2.$$

Перемножая эти равенства попарно, а затем складывая и вычитая результаты, получим

$$\sqrt{r_1r_2} \sin \frac{1}{2} (v_2 - v_1) = a \sqrt{1-e^2} \sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1)$$

$$\sqrt{r_1r_2} \cos \frac{1}{2} (v_2 - v_1) = a \cos \frac{1}{2} (E_2 - E_1) - ae \cos \frac{1}{2} (E_2 + E_1).$$

Вспоминая что $v_2 - v_1 = 2f$ и полагая

$$E_2 - E_1 = 2g \quad (22)$$

$$e \cos \frac{1}{2} (E_2 + E_1) = \cos h, \quad (0 < h < 180^\circ), \quad (23)$$

напишем последние равенства так

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin f = a \sqrt{1 - e^2} \sin g \quad (24)$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos f = a (\cos g - \cos h). \quad (25)$$

При помощи (24) выражение (21) можно представить в следующем виде

$$\eta = \frac{k \sqrt{p} (t_2 - t_1)}{2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f \cdot a \sqrt{1 - e^2} \sin g},$$

или

$$\eta = \frac{k (t_2 - t_1)}{2 \sqrt{a r_1 r_2} \cos f \sin g}. \quad (26)$$

Полагая для краткости

$$\tau = k (t_2 - t_1),$$

напишем последнее равенство следующим образом:

$$2 a \sin^2 g = \frac{\tau^2}{2 \eta^2 r_1 r_2 \cos^2 f}. \quad (27)$$

Чтобы исключить из этого соотношения неизвестную величину a , обратимся к равенствам

$$r_1 = a (1 - e \cos E_1), \quad r_2 = a (1 - e \cos E_2).$$

Учитывая (22) и (23), получим

$$r_1 + r_2 = 2a (1 - \cos g \cos h), \quad (28)$$

или, подставляя сюда $\cos h$, найденный из (25),

$$r_1 + r_2 = 2a \sin^2 g + 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos g \cos f.$$

Это равенство, совместно с (27), дает

$$r_1 + r_2 = \frac{\tau^2}{2 \eta^2 r_1 r_2 \cos^2 f} + 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos g \cos f$$

или

$$\frac{r_1 + r_2}{4 \sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\eta^2} \frac{\tau^2}{8 r_1 r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos^2 f} + \frac{\cos g - 1}{2}.$$

Положим

$$m = \frac{\tau^2}{(2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3}, \quad (29)$$

$$l = \frac{r_1 + r_2}{4 \sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2}, \quad (30)$$

$$x = \sin^2 \frac{1}{2} g; \quad (31)$$

последнее равенство напишется так

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l. \quad (32)$$

Это весьма важное уравнение содержит кроме η еще неизвестную величину x . Поэтому нам надо найти еще одно уравнение, связывающее x и η .

Уравнение Кеплера дает

$$k a^{-\frac{3}{2}} (t_1 - T) = E_1 - e \sin E_1,$$

$$k a^{-\frac{3}{2}} (t_2 - T) = E_2 - e \sin E_2,$$

откуда

$$k a^{-\frac{3}{2}} (t_2 - t_1) = E_2 - E_1 - e (\sin E_2 - \sin E_1).$$

Или, учитывая введенные обозначения,

$$\tau a^{-\frac{3}{2}} = 2g - 2 \sin g \cos h.$$

Подставив сюда значение $\cos h$, найденное из (25), получим

$$\tau a^{-\frac{3}{2}} = 2g - \sin 2g + \frac{2\sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g}{a}.$$

Так как, на основании (26),

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2\eta \sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g}{\tau}, \quad (33)$$

то окончательно получим

$$\eta^3 - \eta^2 = mX(x), \quad (34)$$

где через $X(x)$ обозначено выражение

$$X(x) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}, \quad (35)$$

являющееся очевидно функцией $x = \sin^2 \frac{1}{2} g$.

Итак задача сводится к решению системы следующих двух уравнений, найденных Гауссом:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m}{\eta^2} - l \\ \eta^3 - \eta^2 &= mX(x) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Эта система решается очень просто методом итерации, так как при малых значениях x (а только такие значения и встречаются на практике) функция $X(x)$ медленно меняется с изменением x .

Можно, например, взять в первом приближении $\eta = 1$ и соответствующую величину $x = m - l$ подставить во второе уравнение. Решая это последнее, найдем более точное значение η , после чего первое уравнение даст новое более точное значение x , и т. д. ¹⁾.

¹⁾ Вместо указанного значения x можно для первого приближения взять $x = \sin^2 \frac{1}{2} f$. Можно, наконец, взять среднее из этого значения и указанного в тексте $x = m - l$.

Работа весьма существенно облегчается, если имеются две следующие таблицы:

- 1) таблица значений функции $X(x)$ по аргументу x ;
- 2) таблица, дающая положительный корень уравнения

$$y^3 - y^2 = z$$

по аргументу z (для положительных значений z).

Так как при $y > 1$

$$\frac{dz}{dy} = y(3y - 2) > 0,$$

то при возрастании y от 1 до $+\infty$ функция z непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$. Вследствие этого каждому положительному значению z отвечает одно и только одно значение y большее единицы.

В „Формулах и таблицах“ таблица XXII дает шестизначные значения функции $X(x)$ для значений аргумента от $x = 0.000$ до $x = 0.300$. Таблица XXIII дает семизначные логарифмы y^2 по аргументу z , изменяющемуся от $z = 0.000$ до $z = 0.300$.

Таблицы Гаусса. Гаусс, вместо только что указанных таблиц, непосредственное всего ведущих к цели, дал другие, учитывающие некоторые особенности разложения функции $X(x)$ по степеням x .

Нетрудно прежде всего убедиться в том, что эта функция действительно разлагается по целым степеням x . Из равенства (31) следует, что

$$g = 2 \arcsin \sqrt{x}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2g - \sin 2g &= 2g - 2 \sin g \cos g = \\ &= 2g - 4 \sin \frac{1}{2} g \cos \frac{1}{2} g \left(1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} g \right) = \\ &= 4 \arcsin \sqrt{x} - 4 \sqrt{x} \sqrt{1-x} (1-2x), \end{aligned}$$

откуда

$$2g - \sin 2g = \frac{32}{3} (\sqrt{x})^3 - \frac{16}{5} (\sqrt{x})^5 - \frac{4}{7} (\sqrt{x})^7 - \dots$$

С другой стороны

$$\sin^3 g = (2\sqrt{x} \sqrt{1-x})^3 = 8 (\sqrt{x})^3 - 12 (\sqrt{x})^5 + 3 (\sqrt{x})^7 + \dots$$

Следовательно, на основании выражения (35),

$$X(x) = \frac{4}{3} + \frac{8}{5} x + \frac{64}{35} x^2 + \dots$$

Таким образом мы убедились в существовании разложения функции $X(x)$ по целым положительным степеням x , сходящегося при $|x| < 1$. Для того, чтобы найти закон составления коэффициентов этого разложения, Гаусс обращается к дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет функция $X(x)$. Выведем это дифференциальное уравнение.

Дифференцируя равенство

$$X \sin^3 g = 2g - \sin 2g,$$

получим

$$\frac{dX}{dg} \sin^3 g + 3X \sin^2 g \cos g = 2 - 2 \cos 2g = 4 \sin^2 g.$$

Так как

$$\frac{dx}{dg} = \sin \frac{1}{2} g \cos \frac{1}{2} g = \frac{1}{2} \sin g,$$

то

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dg} \frac{dg}{dx} = \frac{8 - 6X \cos g}{\sin^2 g} = \frac{4 - 3X(1 - 2x)}{2x(1 - x)}.$$

Итак, функция $X(x)$ удовлетворяет уравнению

$$2(x - x^2) \frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x)X.$$

Подставим в это уравнение разложение

$$X = \frac{4}{3} (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \dots).$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} [\alpha_1 x + (2\alpha_2 - \alpha_1) x^2 + \dots + (n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}) x^n + \dots] = \\ = (8 - 4\alpha_1)x + (8\alpha_1 - 4\alpha_2)x^2 + \dots + (8\alpha_{n-1} - 4\alpha_n)x^n + \dots \end{aligned}$$

Следовательно

$$8\alpha_1 = 3(8 - 4\alpha_1),$$

$$8(2\alpha_2 - \alpha_1) = 3(8\alpha_1 - 4\alpha_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$8(n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}) = 3(8\alpha_{n-1} - 4\alpha_n),$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{6}{5}, \quad \alpha_2 = \frac{8}{7} \alpha_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_n = \frac{2n+4}{2n+3} \alpha_{n-1},$$

а потому

$$\alpha_n = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10 \dots (2n+4)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3)}.$$

Итак окончательно

$$X(x) = \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} x + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} x^3 + \dots$$

Имея в виду значения коэффициентов двух первых членов, Гаусс полагает

$$X(x) = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)}. \quad (37)$$

Отсюда

$$1 - \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}\xi = \left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}x^2 + \dots\right)^{-1} = \\ = 1 - \frac{6}{5}x + \frac{12}{165}x^2 + \frac{312}{7875}x^3 + \dots$$

Следовательно

$$\xi = \frac{2}{35}x^2 + \frac{52}{1575}x^3 + \dots$$

Вместо таблицы значений функции $X(x)$ Гаусс дает таблицу значений этой величины ξ для значений x от 0.000 до 0.300.

Табулирование ξ вместо X имеет то преимущество, что при обычной точности и обычной величине интервала, интерполирование величины ξ производится при помощи одних только разностей первого порядка, тогда как при интерполировании X нужно учитывать и разности второго порядка.

Подставляя выражение (37) в уравнения (36), получим

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{\frac{4}{3}m}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)} = \frac{\frac{10}{9}m}{\frac{5}{6} - x + \xi} = \frac{\frac{10}{9}m}{\frac{5}{6} + l + \xi - \frac{m}{\eta^2}}$$

Разделим числитель и знаменатель последней дроби на $\frac{5}{6} + l + \xi$ и положим

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi};$$

это даст

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{\frac{10}{9}h}{1 - \frac{h}{\eta^2}},$$

или

$$\eta^3 - \eta^2 - h\eta - \frac{1}{9}h = 0. \quad (38)$$

Итак, после введения вместо $X(x)$ функции ξ , уравнения (36) заменяются окончательно такими

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \\ \eta^3 - \eta^2 - h\eta - \frac{1}{9}h &= 0 \\ x &= \frac{m}{\eta^2} - l \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Кроме уже упомянутой таблицы значений $\xi(x)$, Гаусс дает еще таблицу значений $\lg \eta^2$ по аргументу h , чем облегчается решение уравнения (38) относительно η . При наличии этих двух таблиц ¹⁾

¹⁾ Таблицы Гаусса полностью воспроизведены, кроме сборника Баушингера, в курсах Оппольцера, Уотсона и Клинкерфюса (издание 1912 года, дополненное Бухгольцом). В сокращенном виде (с шестью знаками) их можно найти в курсе А. Я. Орлова. (См. указатель литературы, помещенный в конце этого тома).

решение системы (39) выполняется путем последовательных приближений совершенно так же, как и решение системы (36). Для первого приближения можно взять $\xi = 0$.

§ 35. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ СЕКТОРА И ТРЕУГОЛЬНИКА. СПОСОБ ГАНЗЕНА И СПОСОБ ТИТЬЕНА.

Так как вычислять отношение площади сектора к площади соответствующего треугольника приходится весьма часто, то было потрачено не мало усилий на возможное упрощение определения этой величины.

Недостатком изложенного в предыдущем параграфе способа Гаусса является, прежде всего, то, что он требует довольно обширных вспомогательных таблиц. Ганзен (P. A. Hansen, 1795—1874) показал, каким образом уравнение (38) может быть весьма просто разрешено без помощи таблиц: этим была устранена необходимость в таблице Гаусса, дающей $\lg \eta^2$ по аргументу h .

Положим

$$\eta = 1 + s,$$

тогда уравнение (38) заменится таким

$$s (1 + s)^2 - \left(\frac{10}{9} + s \right) h = 0,$$

или

$$\frac{10}{9} h = \frac{s (1 + s)^2}{1 + \frac{9}{10} s}.$$

Пользуясь тождеством

$$(1 + s)^2 = \left(1 + \frac{9}{10} s \right) \left(1 + \frac{11}{10} s \right) + \frac{1}{100} s^2,$$

получим

$$\frac{10}{9} h = s \left(1 + \frac{11}{10} s \right) + \frac{1}{100} \frac{s^2}{1 + \frac{9}{10} s},$$

или,

$$\frac{11}{9} h = \frac{11}{10} s \left(1 + \frac{11}{10} s \right) + \frac{11}{1000} \frac{s^2}{1 + \frac{9}{10} s}. \quad (40)$$

Вследствие малости s последний член этого уравнения весьма мал, поэтому Ганзен его отбрасывает и получает следующее приближенное уравнение

$$\frac{11}{10} s \left(1 + \frac{11}{10} s \right) = \frac{11}{9} h. \quad (41)$$

Полагая для краткости

$$b = \frac{11}{9} h,$$

напишем это равенство так:

$$\frac{11}{10} s = \frac{b}{1 + \frac{11}{10} s},$$

или

$$\frac{11}{10} s = \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{11}{10} s}}$$

или

$$\frac{11}{10} s = \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{11}{10} s}}}$$

и т. д. Таким образом искомое отношение получаем в виде следующей непрерывной дроби, найденной Ганzenом:

$$\eta = 1 + \frac{10}{11} \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{b}{\dots}}}}} \quad (42)$$

Решение уравнения (41) обычным способом дает

$$\frac{11}{10} s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{11}{9} h}, \quad (43)$$

откуда

$$\eta = \frac{1}{11} \left[6 + 5 \sqrt{1 + \frac{44}{9} h} \right].$$

Чтобы привести формулу (43) к виду, удобному для логарифмического вычисления, Титъен положил

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2 \sqrt{\frac{11}{9} h},$$

что дает

$$\frac{11}{10} s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos 2\psi} = \frac{\sin^2 \psi}{\cos 2\psi},$$

или

$$s = \frac{10}{11} \sqrt{\frac{11}{9} h} \operatorname{tg} \psi.$$

Таково приближенное значение s , удовлетворяющее уравнению (41). Точное значение s , определяемое уравнением (40), Титъен представляет в форме

$$s = \alpha \sqrt{h} \operatorname{tg} \psi,$$

где α —некоторая функция h , значения которой весьма мало отличаются от $\sqrt{100/99}$.

Сопоставим теперь полученные формулы в том порядке, в каком они употребляются при вычислении.

Способ Ганзена. Первый случай: определяются все элементы орбиты. В этом случае мы можем считать за исходные данные радиусы-векторы r_1, r_2 , угол между ними $2f$ и соответствующий промежуток времени $t_2 - t_1$.

Прежде всего вычисляем

$$\frac{11}{9} m = \frac{\frac{11}{9} k^2 (t_2 - t_1)^2}{(2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3}, \quad (44)$$

$$l = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f} - 1 \right). \quad (45)$$

$$\frac{11}{9} k^2 = 0.000\ 361\ 6705 \quad \lg \frac{11}{9} k^2 = 6.558\ 3131_{-10}.$$

$$\lg \frac{11}{9} = 0.087\ 1502$$

Затем

$$b = \frac{\frac{11}{9} m}{\frac{5}{6} + l}, \quad (46)$$

$$\eta = 1 + \frac{10}{11} \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{b}{\dots}}} \quad (47)$$

$$\frac{5}{6} = 0.833\ 3333 \quad \frac{10}{11} = 0.909\ 0909$$

$$\lg \frac{5}{6} = 9.920\ 8188_{-10} \quad \lg \frac{10}{11} = 9.958\ 6073_{-10}$$

Непрерывная дробь одинаково удобно вычисляется при помощи арифмометра и при помощи логарифмов сложения.

Второй случай: ищется только отношение η . Здесь за исходные данные мы будем считать координаты (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , соответствующие моментам t_1 и t_2 .

Так как

$$r_1 r_2 \cos 2f = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

и следовательно

$$2r_1 r_2 \cos^2 f = r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

то полагая

$$x^2 = r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (48)$$

легко приведем выражение для b , даваемое формулами (44), (45), (46), к такому виду:

$$b = \frac{\frac{11}{9} k^2 (t_2 - t_1)^2}{x^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x + r_1 + r_2 \right)} \quad (49)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.942\ 80905$$

$$\lg \frac{2\sqrt{2}}{3} = 9.974\ 4237_{-10}.$$

Итак, вычислив радиусы-векторы r_1, r_2 по формулам (48) и (49), сразу находим b , после чего остается только вычислить непрерывную дробь (47).

Указанные приближенные формулы позволяют находить η с весьма значительной точностью, в большинстве встречающихся случаев совершенно достаточной. По определению Оппольцера погрешность значения η , даваемого формулами (46) и (47), не превосходит

$$\begin{array}{llll} \text{единицы 5-го знака для } 2f < 39.^\circ 7 \\ \text{„} & 6\text{-го} & \text{„} & \text{„} & 2f < 27.0 \\ \text{„} & 7\text{-го} & \text{„} & \text{„} & 2f < 18.4. \end{array}$$

В тех случаях, когда погрешностью формул Ганзена пренебречь нельзя, можно вычислить второе приближение, взяв

$$b = \frac{\frac{11}{9} m}{\frac{5}{6} + l + \xi} - \frac{11}{1000} \frac{(\eta - 1)^3}{1 + \frac{9}{10} (\eta - 1)}, \quad (50)$$

причем

$$\xi = \frac{2}{35} x^2 + \frac{52}{1575} x^3 + \dots$$

находится по аргументу

$$x = \frac{m}{r^2} - l$$

при помощи приводимой ниже таблички, дающей функцию c , определяемую равенством

$$\xi = cx^2.$$

Способ Титъена. Вычисляем m, l и h либо по формулам (если угол $2f$ известен):

$$m = \frac{k^2(t_2 - t_1)^2}{(2\sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3}, \quad l = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1 r_2} \cos f} - 1 \right)$$

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l}$$

$$k^2 = 0.000\,295\,9122$$

$$\lg k^2 = 6.471\,1629_{-10}$$

$$\frac{5}{6} = 0.833\,3333$$

$$\lg \frac{5}{6} = 9.920\,8188_{-10}$$

либо по формулам (если угол $2f$ неизвестен):

$$x^2 = r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$m = \frac{k^2}{2\sqrt{2}} \frac{(t_2 - t_1)^2}{x^3}, \quad l = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{\sqrt{2}x} - 1 \right)$$

$$\frac{k^2}{2\sqrt{2}} = 0.000\,104\,620\,76$$

$$\lg \frac{k^2}{2\sqrt{2}} = 6.019\,6179_{-10}$$

$$\sqrt{2} = 1.414\,2136$$

Затем определяем угол ψ :

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2\sqrt{\frac{11}{9}}\sqrt{h} = [0.344\ 6051]\sqrt{h}$$

и наконец

$$\eta = 1 + \alpha\sqrt{h}\operatorname{tg}\psi,$$

$\lg \alpha$ берется из приводимой ниже таблицы.

С найденным значением η вычисляем

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l,$$

$$\xi = cx^2 \quad (\lg c \text{ из таблицы}),$$

после чего с новым значением

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}$$

повторяем вычисление ψ и η .

x	c		$\lg c$		h	$\lg \alpha$	
0.00	0.057 143	335	8.756 96	254	0.00	0.002 1824	5
.01	.057 478	337	8.759 50	254	.01	.002 1819	14
.02	.057 815	340	8.762 04	255	.02	.002 1805	22
.03	.058 155	346	8.764 59	257	.03	.002 1783	28
.04	.058 501	348	8.767 16	258	.04	.002 1755	34
0.05	0.058 849	353	8.769 74	260	0.05	0.002 1721	38
.06	.059 202	357	8.772 34	261	.06	.002 1683	42
.07	.059 559	362	8.774 95	263	.07	.002 1641	45
.08	.059 921	368	8.777 58	266	.08	.002 1596	48
.09	.060 289	375	8.780 24	268	.09	.002 1548	51
0.10	0.060 664	377	8.782 92	270	0.10	0.002 1497	53
.11	.061 041	383	8.785 62	272	.11	.002 1444	54
.12	.061 424	389	8.788 34	274	.12	.002 1390	55
.13	.061 813	394	8.791 08	276	.13	.002 1335	57
.14	.062 207	400	8.793 84	278	.14	.002 1278	58
0.15	0.062 607	405	8.796 62	280	0.15	0.002 1220	59
.16	.063 012	410	8.799 42	282	.16	.002 1161	59
.17	.063 422	418	8.802 24	285	.17	.002 1102	60
.18	.063 840	423	8.805 09	287	.18	.002 1042	61
.19	.064 263	429	8.807 96	289	.19	.002 0981	60
0.20	0.064 692	435	8.810 85	291	0.20	0.002 0921	60
.21	.065 127	442	8.813 76	294	.21	.002 0861	61
.22	.065 569	449	8.816 70	296	.22	.002 0800	61
.23	.066 018	456	8.819 66	299	.23	.002 0739	61
.24	.066 474	462	8.822 65	301	.24	.002 0678	61
0.25	0.066 936		8.825 66		0.25	0.002 0617	

В тех случаях, когда интервал времени $t_2 - t_1$ таков, что заранее можно быть уверенным в достаточной точности первого приближения, можно обойтись без вычисления m и l , а ограничиться вычислением h по формуле (48) и следующей

$$h = \frac{k^2(t_2 - t_1)^2}{x^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x + r_1 + r_2 \right)},$$

$\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.942\,80905$

$\lg \frac{2\sqrt{2}}{3} = 9.974\,4237 - 10.$

Пример. Дано

$t_2 - t_1 = 100^d,$
 $r_1 \dots 0.221\,605$

$2f = 44^\circ 25' 48'',$
 $r_2 \dots 0.209\,905.$

Применим способ Ганзена. Так как здесь несомненно нужны два приближения, то вычисляем по формуле (44) величину m сначала без множителя $\frac{11}{9}$.

$t_2 - t_1$	2.000 000	r_1	0.221 605
$k(t_2 - t_1)$	0.235 581 ₄	Add	0.295 219
$f =$	22°12'54''	r_2	0.209 905
$\sqrt{r_1 r_2}$	0.215 755	$\frac{r_1 + r_2}{2}$	0.516 824
$\cos f$	9.966 504	$2\sqrt{r_1 r_2} \cos f$	0.483 289
$2\sqrt{r_1 r_2} \cos f$	0.483 289	$2l$	8.904 588
$\frac{k^2(t_2 - t_1)^2}{(2\sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3}$	0.471 163	l	8.603 558
	1.449 867	Add.	0.020 430
m	9.021 296	$\frac{5}{6}$	9.920 819
$\frac{1}{9} m$	9.108 446	$\frac{5}{6} + l$	9.941 249
$\frac{5}{6} + l$	9.941 249		
b	9.167 197		

Вычисление непрерывной дроби

$$\beta = \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{b}{\dots}}},$$

эквивалентное решению уравнения

$$\beta = \frac{b}{1 + \beta}$$

методом итерации, выполняется при помощи логарифмов сложения (дающих $B = \lg(\Gamma + x)$ по аргументу $A = \lg x$) следующим образом:

$\lg b = 9.167\,197$	—	—	—	—
$B = \lg(1 + \beta) = 0.059\,548$	0.052 359	0.053 182	0.053 087	0.053 097 (6)
$A = \lg \beta = 9.107\,649$	9.114 838	9.114 015	9.114 110	9.114 100 (1)

Так как это только первое приближение, то можно было бы и не продолжать вычисление до получения совершенно точного значения $\lg \beta = 9.114\,101$, а остановиться на одном из предыдущих значений и с ним найти по формуле (50) более точное значение b . Формулу (50) напомним так

$$(b) = \frac{\frac{11}{9} m}{\frac{5}{6} + l + \xi}, \quad \Delta b = -0.011 \frac{(\eta - 1)^3}{1 + 0.9(\eta - 1)}$$

$$b = (b) + \Delta b$$

β	9.114 101	x^3	7.2840	$\frac{5}{6}$	= 0.833 3333
$\frac{10}{11}$	9.958 607	c	8.7682	l	= 0.040 1382
$\eta - 1$	9.072 708	ξ	6.0522	ξ	= 0.000 1128
η	0.048 529	$0.9(\eta - 1)$	9.027	знам.	= 0.873 584
m	9.021 296	$(\eta - 1)^3$	7.218	$\frac{11}{9} m$	9.108 446
η^2	0.097 058	$1 + 0.9(\eta - 1)$	0.044	знам.	9.941 302
$m\eta^{-2}$	8.924 238		7.174	(b)	9.167 144
Add.	0.038 450	0.011	8.041	Add.	9.999 951
$-l$	8.603 558 _n	Δb	5.215 _n	Δb	5.215 _n
x	8.642 008			b	9.167 095

$$x = 0.04\,385$$

С новым значением b вычисляем непрерывную дробь, причем за первое приближение величины $\lg(1 + \beta)$ можно взять ранее полученное значение (с некоторым округлением):

$$\begin{array}{r|l} \lg b = 9.167\,095 & - \\ B = \lg(1 + \beta) = 0.053\,095 & 0.053\,085\,(86) \\ A = \lg \beta = 9.114\,000 & 9.114\,010\,(09) \end{array}$$

Остается вычислить окончательное значение η :

$$\begin{array}{r} \beta \quad 9.114\,009 \\ \eta - 1 \quad 9.072\,616 \\ \eta \quad 0.048\,520 \end{array}$$

Точная величина 0.048 5191. Таким образом даже в этом, исключительно неблагоприятном случае ($t_2 - t_1 = 100$ дней, $2f = 44^\circ$) приближенная формула Ганзена дала $\lg \eta$ с ошибкой, не превосходящей единицы пятого знака.

§ 36. СПОСОБ ЭНКЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОТНОШЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ СЕКТОРА И ТРЕУГОЛЬНИКА.

Энке (J. F. Encke, 1791—1865) дал способ для нахождения отношения η , очень удобный для логарифмического вычисления и очень быстро приводящий к цели во всех обычно встречающихся случаях.

Искомая величина η определяется как функция двух величин m и l уравнениями (36), которые дают

$$\eta = 1 + \frac{m}{\eta^2} X(x),$$

где

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l.$$

Пользуясь разложением функции $X(x)$ в степенной ряд, найденном в § 34, это уравнение напомним так:

$$\eta = 1 + \frac{m}{\eta^2} \left[\frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \left(\frac{m}{\eta^2} - l \right) + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{m}{\eta^2} - l \right)^2 + \dots \right]. \tag{51}$$

Вместо величин m и l введем две другие γ — и σ , полагая

$$\frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1 r_2} \cos f} = \sec \gamma, \qquad \frac{(t_2 - t_1)^2}{(r_1 + r_2)^3} = \sigma,$$

так что

$$l = \frac{1}{2} (\sec \gamma - 1) = \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \sec \gamma$$

$$m = \frac{\tau^2}{(r_1 + r_2)^3} \left(\frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1 r_2} \cos f} \right)^3 = k^2 \sigma \sec^3 \gamma.$$

Подставив эти значения l и m в равенство (51), получим следующее уравнение для определения η :

$$\eta = 1 + \frac{k^2 \sigma \sec^3 \gamma}{\eta^2} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \left(\frac{k^2 \sigma \sec^3 \gamma}{\eta^2} - \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \sec \gamma \right) + \dots \right\} \tag{52}$$

Это уравнение показывает, что η может быть разложено по степеням σ в ряд вида

$$\eta = 1 + a_1 \sigma + a_2 \sigma^2 + \dots,$$

причем коэффициенты этого ряда являются функциями γ (или, что все равно, функциями $\sin^2 \frac{1}{2} \gamma$).

Имея в виду удобство логарифмического вычисления, Энке определяет коэффициенты не этого ряда, а такого

$$\ln \eta = a \sigma + b \sigma^2 + c \sigma^3 + \dots,$$

дающего натуральный логарифм искомой величины.

Из последнего равенства следует

$$\eta = e^{a\sigma + b\sigma^2 + \dots} = 1 + (a\sigma + b\sigma^2 + \dots) + \frac{1}{1 \cdot 2} (a\sigma + b\sigma^2 + \dots)^2 + \dots$$

$$\eta^{-2} = e^{-2(a\sigma + b\sigma^2 + \dots)} = 1 - 2(a\sigma + b\sigma^2 + \dots) + 2(a\sigma + b\sigma^2 + \dots)^2 + \dots$$

$$\eta^{-4} = \dots$$

Подставляя эти разложения в уравнения (52) и приравнивая коэффициенты, стоящие справа и слева у одинаковых степеней σ , определим последовательно $a, b, c, \dots$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \ln \eta = & \frac{4}{3} k^2 \sigma + \frac{32}{5} \left(\sin^2 \frac{1}{2} \gamma - \frac{4}{9} k^2 \sigma \right) k^2 \sigma + \\ & + \frac{736}{35} \left(\sin^4 \frac{1}{2} \gamma - \frac{89}{69} \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \cdot k^2 \sigma + \right. \\ & \left. + \frac{799}{1863} k^4 \sigma^2 \right) k^2 \sigma + \dots \end{aligned}$$

Умножив обе части на модуль $M = 0.434\ 2945$ для перехода от натуральных логарифмов к десятичным, будем иметь такую формулу,

$$\begin{aligned} \lg \eta = & a' \sigma + \\ & + a'' \sigma - b'' \sigma^2 + \\ & + a''' \sigma - b''' \sigma^2 + c''' \sigma^3 + \dots, \end{aligned}$$

где одним штрихом отмечены коэффициенты 2-го порядка, двумя — 4-го порядка, тремя — 6-го порядка и т. д., причем порядок считается относительно малых величин $\sin \frac{1}{2} \gamma$ и k .

Сопоставление формул для вычисления по способу Энке. Если даны радиусы-векторы и угол между ними $2f$, то вычисляем по формулам

$$\cos \gamma = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2} \cos f, \quad \Gamma = \lg \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma} = \lg \frac{1}{1 - \cos \gamma},$$

причем величина Γ находится непосредственно по таблицам логарифмов вычитания по аргументу $\lg \cos \gamma$ (таблицы логарифмов вычитания Бремикера дают $B = \lg \frac{1}{1-x}$ по аргументу $C = \lg x$).

Если даны прямоугольные координаты (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , то вычисляем сначала радиусы-векторы, затем

$$x^2 = r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

и наконец

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{2x}}{r_1 + r_2}, \quad \lg 2 = 0.150\ 515,$$

после чего Γ определяется так же, как и в предыдущем случае.

Найдя Γ , вычисляем

$$\sigma = \frac{(t_2 - t_1)^2}{(r_1 + r_2)^3},$$

после чего

$$\lg \eta = a' \sigma + (a'' \sigma - b'' \sigma^2), \quad (53)$$

где, в единицах шестого десятичного знака,

$$\begin{aligned} \lg a' &= 2.233\ 8859 \\ \lg a'' &= 2.614\ 097 - \Gamma \\ \lg b'' &= 9.034\ 108_{-10} \end{aligned}$$

Опыт показывает, что для малых планет при промежутках времени между наблюдениями не больше 30 дней и шестизначном вычислении достаточно взять

$$\lg \eta = a' \sigma,$$

так что вычисление $\cos \gamma$, а следовательно и угла $2f$, становится излишним. При том же числе знаков формула (53) дает достаточную точность для промежутков времени до 60 дней. При больших промежутках времени формулу (53) следует дополнить членами 6-го порядка

$$+ a''' \sigma - b''' \sigma^2 + c''' \sigma^3,$$

где коэффициенты, также выраженные в шестом десятичном знаке, имеют следующие логарифмы

$$\begin{aligned} \lg a''' &= 2.82970 - 2\Gamma \\ \lg b''' &= 9.71243 -_{10} - \Gamma \\ \lg c''' &= 6.00642 -_{10} \end{aligned}$$

§ 37. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ СЕКТОРА И ТРЕУГОЛЬНИКА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОРБИТ.

В § 34, при выводе уравнений, определяющих рассматриваемое отношение η , мы исходили из формул эллиптического движения. Но уравнения гиперболического движения совершенно тождественны с формулами движения эллиптического — разница заключается только в том, что для гиперболического движения $a < 0$, $e > 1$ и, согласно с этим, эксцентриская аномалия имеет мнимое значение (см. § 15). Отсюда следует, что все формулы § 34 целиком применимы и к гиперболическому движению: отличие будет только в том, что в этом последнем случае величина

$$x = \sin^2 \frac{1}{2} g = \sin^2 \frac{1}{4} (E_2 - E_1)$$

будет отрицательна.

По этой причине таблицы функций $X(x)$ и $\xi(x)$, указанные в § 34, дают значения этих функций и для отрицательного аргумента.

Чтобы получить формулы, дающие η для параболической орбиты, заставим a стремиться к бесконечности. При этом, как показывает уравнение Кеплера, эксцентриская аномалия будет стремиться к нулю. Поэтому при $a = \infty$ будем иметь $x = 0$. Отсюда следует, что для параболической орбиты уравнения (36) обращаются в такие

$$\frac{m}{\eta^2} - l = 0, \quad \eta^3 - \eta^2 = \frac{4}{3} m, \quad (54)$$

ибо $X(0) = \frac{4}{3}$, как это видно из разложения этой функции в степенной ряд.

Поэтому

$$\eta = \frac{4}{3}l + 1,$$

или, пользуясь выражением (30),

$$r_1 = \frac{r_1 + r_2}{3\sqrt{r_1 r_2} \cos f} + \frac{1}{3}. \quad (55)$$

Обозначим через s хорду, соединяющую концы рассматриваемых радиусов-векторов, тогда

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2f.$$

Написав это равенство следующим образом:

$$s^2 = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 \cos^2 f, \quad (56)$$

или

$$\left(\frac{s}{r_1 + r_2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{2\sqrt{r_1 r_2} \cos f}{r_1 + r_2}\right)^2$$

и полагая, как и в предыдущем параграфе,

$$\sec \gamma = \frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1 r_2} \cos f},$$

окончательно получим для вычисления η , вместо формулы (55), такие выражения

$$\sin \gamma = \frac{s}{r_1 + r_2}, \quad \eta = \frac{1}{3}(1 + 2 \sec \gamma). \quad (57)$$

Как было показано в § 31, определение элементов параболической орбиты производится без предварительного нахождения η . Поэтому вычислять это отношение для параболы приходится сравнительно редко.

Если исключить из уравнений (54) η , то получим некоторую зависимость между r_1 , r_2 , $\cos f$ и $\tau = k(t_2 - t_1)$ [см. выражения (29) и (30) для m и l]. При помощи равенства (56), позволяющего выразить $\cos f$ через s , окончательно будем иметь зависимость между r_1 , r_2 , s и τ . Как будет показано в дальнейшем (см. § 40), этой зависимости может быть придана следующая форма

$$(r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}} = 6\tau,$$

или

$$(1 + \sin \gamma)^{\frac{3}{2}} - (1 - \sin \gamma)^{\frac{3}{2}} = \frac{6\tau}{(r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда ясно что γ , а следовательно, на основании (57), и η суть функции величины

$$\mu = \frac{(2\tau)^2}{(r_1 + r_2)^3}.$$

Поэтому могут быть построены таблицы, дающие η по аргументу μ : таким образом для определения η нет надобности вычислять $\cos f$ или s .

В сборнике „Формулы и таблицы“ таблица XXIV дает $\lg \eta$ с семью знаками по аргументу μ от $\mu = 0.000$ до $\mu = 0.200$. В других из упомянутых ранее сборниках можно найти таблицы, дающие $\lg \eta$ по аргументу $\sqrt{\mu}$ (в наших обозначениях). Однако употребление аргумента $\sqrt{\mu}$ менее выгодно, ибо влечет увеличение вторых разностей табличных значений.

Примечание. Полезно отметить, что род конического сечения определяется еще до того, как по формулам (12) будет вычислен эксцентриситет: уже при вычислении отношения η , нужного для определения параметра орбиты, знак величины x решает вопрос. Мы имеем:

эллипс, если $x > 0$,
параболу, если $x = 0$,
гиперболу, если $x < 0$.

§ 38. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ФОКАЛЬНОГО СЕКТОРА КОНИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ.

В предыдущих параграфах мы подробно рассмотрели вычисление отношения площади фокального сектора конического сечения к площади треугольника, заключенного между теми же радиусами-векторами. При определении этого отношения — величины чисто геометрической — мы для площади сектора взяли выражение

$$\frac{1}{2} \sqrt{p} k (t_2 - t_1),$$

даваемое интегралом площадей, и таким образом избежали выражения площади сектора через геометрические данные задачи. Но вывод геометрического выражения для фокального сектора конического сечения все же представляет для нас интерес, ибо это выражение, в связи с законом площадей, дает нам теорему Эйлера-Ламберта, которой приходится пользоваться при определении орбит.

Обозначим, как и раньше, через r_1 и r_2 радиусы-векторы, ограничивающие сектор, через v_1 и v_2 — соответствующие истинные аномалии. Удвоенная площадь всякого сектора выражается в полярных координатах формулой

$$(r_1 r_2) = \int_{v_1}^{v_2} r^2 dv.$$

Остается вычислить этот интеграл для конического сечения. Для выполнения интегрирования удобнее всего выразить r и v через эксцентрическую аномалию, для чего служат, как известно, формулы (II, 25 и 26):

$$r = a(1 - e \cos E),$$

$$dv = \frac{\sqrt{1 - e^2} dE}{1 - e \cos E}.$$

Итак

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} \int_{E_1}^{E_2} (1 - e \cos E) dE,$$

где через E_1 и E_2 обозначены значения эксцентрической аномалии, соответствующие границам сектора. Следовательно

$$\begin{aligned} (r_1 r_2) &= a^2 \sqrt{1 - e^2} [E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)] = \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \left[E_2 - E_1 - 2e \sin \frac{E_2 - E_1}{2} \cos \frac{E_2 + E_1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Полагая опять, как и в § 34,

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= 2g, \\ e \cos \frac{E_2 + E_1}{2} &= \cos h, \quad (0 < h < 180^\circ), \end{aligned}$$

получим

$$(r_1 r_2) = 2a^2 \sqrt{1 - e^2} (g - \sin g \cos h). \quad (58)$$

Эта формула решает вопрос о вычислении площади фокального сектора, но она представляет то неудобство, что выражает эту площадь через значения вспомогательной переменной — эксцентрической аномалии. Для исключения этой последней (или, что все равно, углов g и h) воспользуемся прежде всего соотношениями

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1), \quad r_2 = a(1 - e \cos E_2),$$

которые дают

$$r_1 + r_2 = 2a - 2a \cos g \cos h. \quad (59)$$

Хорду s , соединяющую концы радиусов-векторов r_1 и r_2 , можно выразить через те же углы g и h . В самом деле, прежде всего имеем

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1),$$

или

$$s^2 = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 \cos^2 f, \quad (60)$$

где

$$f = \frac{1}{2}(v_2 - v_1).$$

Формулы (II, 32) дают

$$\sqrt{r_1} \sin \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_1$$

$$\sqrt{r_2} \sin \frac{1}{2} v_2 = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_2,$$

$$\sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_1,$$

$$\sqrt{r_2} \cos \frac{1}{2} v_2 = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_2,$$

откуда

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1 r_2} \cos f &= a(1 - e) \cos \frac{1}{2} E_1 \cos \frac{1}{2} E_2 + \\ &+ a(1 + e) \sin \frac{1}{2} E_1 \sin \frac{1}{2} E_2 = a \cos \frac{1}{2} (E_2 - E_1) - ae \cos \frac{1}{2} (E_2 + E_1). \end{aligned}$$

Итак

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos f = a (\cos g - \cos h). \quad (61)$$

Подставляя выражения (59) и (61) в формулу (60), после некоторых упрощений получим

$$s = 2a \sin g \sin h. \quad (62)$$

Теперь нам остается только, воспользовавшись формулами (59) и (62), исключить углы g и h из найденного ранее выражения площади сектора.

Равенства (59) и (62) дают

$$r_1 + r_2 + s = 2a [1 - \cos (g + h)]$$

$$r_1 + r_2 - s = 2a [1 - \cos (g - h)]$$

Полагая

$$h + g = \epsilon, \quad h - g = \delta,$$

следовательно

$$h = \frac{1}{2} (\epsilon + \delta), \quad g = \frac{1}{2} (\epsilon - \delta),$$

можно последние равенства написать так:

$$\sin^2 \frac{\epsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}, \quad \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}. \quad (63)$$

Введем теперь углы ϵ и δ в формулу (58); окончательно получим для удвоенной площади сектора такое выражение

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\epsilon - \sin \epsilon - (\delta - \sin \delta)], \quad (64)$$

причем ϵ и δ определяются равенствами (63).

Формула (64) одинаково применима как для эллипса, так и для гиперболы. Разница будет заключаться только в том, что для гиперболы $a < 0$, $e > 1$ и углы ϵ и δ будут мнимые. Чтобы избежать употребления мнимых величин, можно было бы ввести новые переменные, полагая $\epsilon = i\epsilon_1$, $\delta = i\delta_1$, но мы не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим подробнее вычисление площади эллиптического сектора по формуле (64). Самый вывод этой формулы показывает, что она обладает полной общностью и потому одинаково применима к секторам всех возможных видов (см. черт. 12). Нужно только в каждом случае суметь выбрать надлежащим образом углы ϵ и δ , неоднозначно определяемые формулами (63).

Ограничимся случаем, когда угол растворения сектора $2f = v_2 - v_1$ меньше 2π . В таком случае очевидно будем иметь

$$2g = E_2 - E_1 < 2\pi$$

и потому

$$0 < g < \pi.$$

С другой стороны, поскольку угол h мы определили только одним условием

$$\cos h = e \cos \frac{1}{2} (E_2 + E_1),$$

мы можем считать

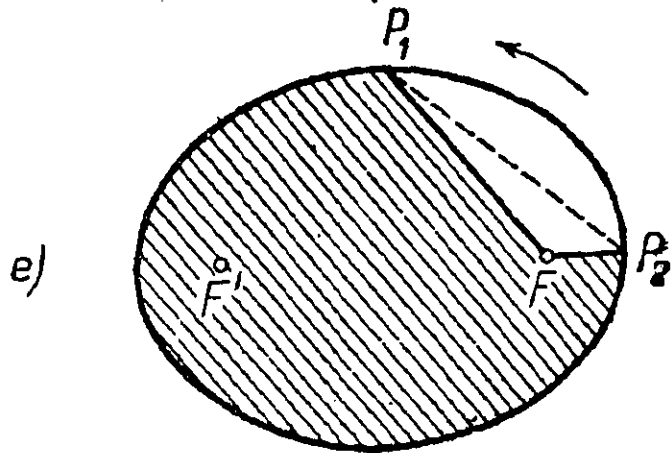
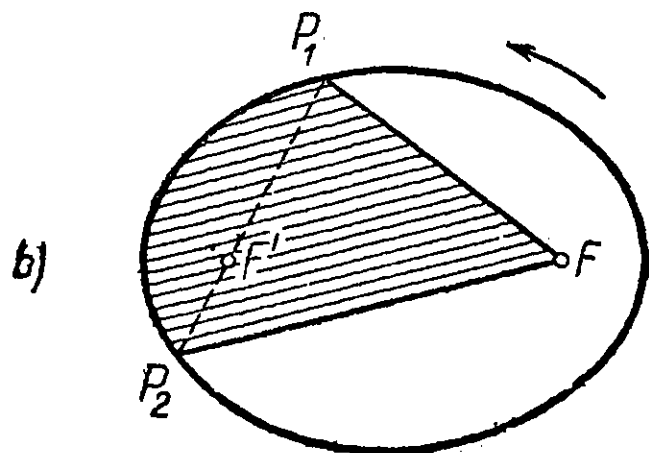
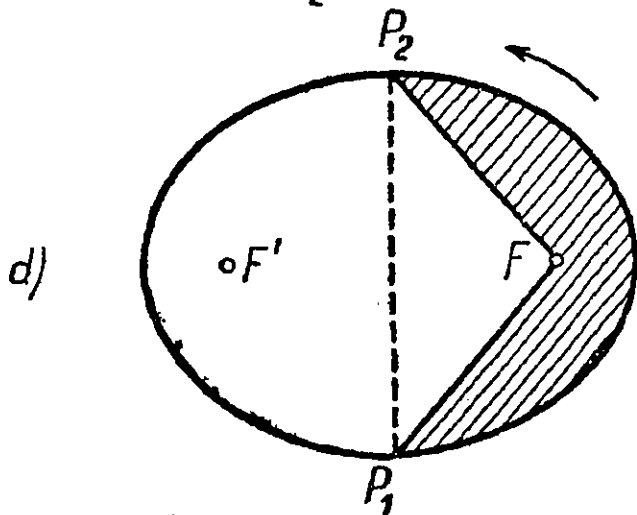
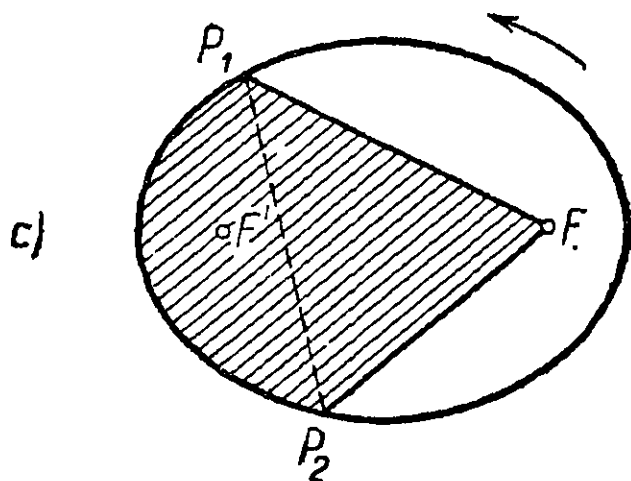
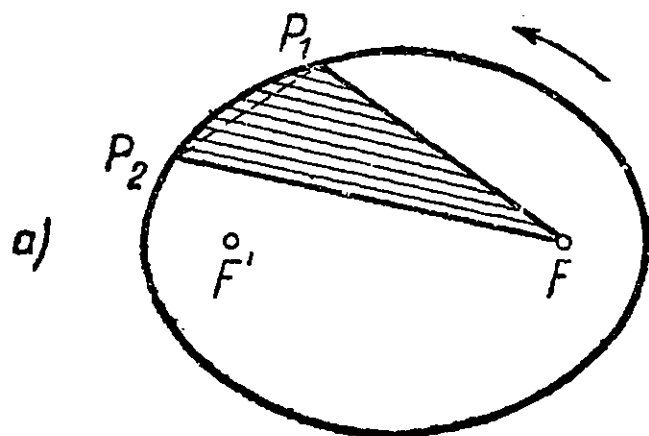
$$0 < h < \pi.$$

Итак

$$\varepsilon = g + h < 2\pi,$$

откуда следует, что всегда

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$



Черт. 12.

Для определения знака $\sin \frac{\delta}{2}$ обратимся к формуле (61), которую можно написать так:

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos f = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\delta}{2}.$$

Это соотношение показывает, что

$$\sin \frac{\delta}{2} > 0, \text{ если } 0 < 2f < \pi,$$

$$\sin \frac{\delta}{2} < 0, \text{ если } \pi < 2f < 2\pi.$$

Для окончательного определения квадрантов, в которых должны находиться углы $\frac{1}{2}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}\delta$, остается найти знаки $\cos \frac{1}{2}\varepsilon$ и $\cos \frac{1}{2}\delta$.

Для предельного случая бесконечно узкого сектора, когда $2g = E_2 - E_1 = 0$, имеем $\varepsilon = \delta = h$, следовательно

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2},$$

а потому

$$\cos \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0.$$

Когда $\cos \frac{\varepsilon}{2}$ обратится в нуль? В этом случае должно быть

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = 1,$$

следовательно

$$r_1 + r_2 + s = 4a,$$

т. е.

$$s = (2a - r_1) + (2a - r_2).$$

Таким образом $\cos \frac{\varepsilon}{2}$ обращается в нуль тогда, когда хорда P_1P_2 проходит через второй фокус F' (черт. 12b).

Легко видеть, что всегда

$$\cos \frac{\delta}{2} > 0,$$

ибо обращение этой величины в нуль повлекло бы за собой невозможное равенство

$$r_1 + r_2 - s = 4a.$$

Введем теперь углы ε_0 , δ_0 однозначно определяемые равенствами

$$\sin \frac{\varepsilon_0}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}} \quad (65)$$

и условиями

$$0 < \varepsilon_0 < \pi, \quad 0 \leq \delta_0 < \pi.$$

В таком случае произведенное исследование позволяет формулировать следующие выводы:

1) если сегмент рассматриваемого сектора не заключает ни одного фокуса (черт. 12a), то

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \delta = \delta_0,$$

следовательно

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 - (\delta_0 - \sin \delta_0)]; \quad (66')$$

2) если сегмент включает второй фокус F' , но не содержит первого фокуса F , служащего вершиной сектора (черт. 12с), то

$$\begin{aligned}\sin \frac{\varepsilon}{2} &> 0, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} < 0 \\ \sin \frac{\delta}{2} &> 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0,\end{aligned}$$

следовательно

$$\frac{1}{2} \varepsilon = \pi - \frac{1}{2} \varepsilon_0, \quad \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} \delta_0,$$

а потому

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [2\pi - \varepsilon_0 + \sin \varepsilon_0 - (\delta_0 - \sin \delta_0)]; \quad (66'')$$

3) если сегмент включает только фокус F , находящийся в вершине сектора (черт. 12d), то

$$\begin{aligned}\sin \frac{\varepsilon}{2} &> 0, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} > 0, \\ \sin \frac{\delta}{2} &< 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0,\end{aligned}$$

и сообразно с этим

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \delta = -\delta_0.$$

Следовательно в этом случае

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 + (\delta_0 - \sin \delta_0)]; \quad (66''')$$

4) наконец, если сегмент включает оба фокуса (черт. 12e), то

$$\begin{aligned}\sin \frac{\varepsilon}{2} &> 0, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} < 0, \\ \sin \frac{\delta}{2} &< 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0,\end{aligned}$$

а потому

$$\frac{1}{2} \varepsilon = \pi - \frac{1}{2} \varepsilon_0, \quad \frac{1}{2} \delta = -\frac{1}{2} \delta_0.$$

Следовательно

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [2\pi - \varepsilon_0 + \sin \varepsilon_0 + (\delta_0 - \sin \delta_0)]. \quad (66''')$$

Формулы (65) и (66) дают исчерпывающее решение задачи о вычислении площади фокального эллиптического сектора.

§ 39. ПРОДОЛЖЕНИЕ. ПЛОЩАДЬ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО СЕКТОРА.

В Астрономии приходится встречаться только с такими эллиптическими секторами, у которых сегмент не включает „пустого“ фокуса, а может включать лишь тот фокус, в котором находится Солнце и который является вершиной сектора. Таким образом мы будем иметь дело исключительно со случаями 1 и 3 из числа перечисленных в конце предыдущего параграфа.

Соответствующие формулы (66') и (66'') можно объединить в одну:

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\epsilon_0 - \sin \epsilon_0 \mp (\delta_0 - \sin \delta_0)], \quad (67)$$

причем верхний знак берется в том случае, когда угол раствора сектора $v_2 - v_1$ меньше 180° , а нижний, когда этот угол больше 180° .

Положив для краткости

$$m = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}},$$

следовательно

$$\sin \frac{\epsilon_0}{2} = m,$$

будем иметь

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 = \arcsin m = m + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{5} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^5 + \frac{1}{7} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^7 + \dots$$

$$\frac{1}{2} \sin \epsilon_0 = m \sqrt{1 - m^2} = m - \frac{1}{2} m^3 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} m^5 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^7 - \dots;$$

следовательно

$$\epsilon_0 - \sin \epsilon_0 = 4 \left(\frac{1}{3} m^3 + \frac{1}{5} \frac{1}{2} m^5 + \frac{1}{7} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^7 + \dots \right)$$

Подставляя это разложение и аналогичное разложение для $\delta_0 - \sin \delta_0$ в формулу (67), получим

$$\begin{aligned} (r_1 r_2) = \sqrt{p} \left\{ \frac{1}{6} \left[(r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}} \right] + \right. \\ + \frac{1}{80} \frac{1}{a} \left[(r_1 + r_2 + s)^{\frac{5}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{5}{2}} \right] + \\ + \frac{3}{1792} \frac{1}{a^2} \left[(r_1 + r_2 + s)^{\frac{7}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{7}{2}} \right] + \\ \left. + \frac{5}{18432} \frac{1}{a^3} \left[(r_1 + r_2 + s)^{\frac{9}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{9}{2}} \right] + \dots \right\} \quad (68) \end{aligned}$$

Эта формула одинаково справедлива и для эллиптических и для гиперболических секторов, как в этом нетрудно убедиться при помощи исследования, аналогичного проведенному в предыдущем параграфе для случая эллипса.

Полагая $a = \infty$, получим следующую формулу для удвоенной площади параболического сектора:

$$(r_1 r_2) = \frac{1}{6} \sqrt{p} \left[(r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (69)$$

Равенство

$$r^2 dv = k \sqrt{a(1-e^2)} dt,$$

даваемое интегралом площадей (II, 22), проинтегрируем в пределах от $t = t_1$ до $t = t_2$. Это даст

$$(r_1 r_2) = \tau \sqrt{a(1-e^2)},$$

где

$$\tau = k(t_2 - t_1),$$

так как слева получится удвоенная площадь сектора, описанного радиусом-вектором светила за указанный промежуток времени.

Подставив в полученное равенство выражение (67), будем иметь *теорему Ламберта* (J. Lambert, 1728 — 1777):

$$\tau a^{-\frac{3}{2}} = \varepsilon - \sin \varepsilon \mp (\delta - \sin \delta), \quad (70)$$

причем

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}}, \quad (71)$$

$$(0 < \frac{\varepsilon}{2} < 90^\circ, \quad 0 < \frac{\delta}{2} < 90^\circ).$$

Эта теорема показывает, что время, в течение которого светило переходит из одного положения в другое, зависит только от суммы радиусов-векторов этих положений, от хорды, их соединяющей, и от большой полуоси орбиты.

Если движение совершается по параболе, то формула (69) дает *теорему Эйлера*¹⁾ (L. Euler, 1707 — 1783):

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}}.$$

Полезно напомнить, что верхний знак надо брать тогда, когда дуга $\nu_2 - \nu_1$, проходимая светилом, $< 180^\circ$, а нижний, когда эта дуга $> 180^\circ$.

Эйлер опубликовал эту теорему в 1743 г. Обобщающая ее теорема Ламберта была найдена в 1761 г.

Если воспользоваться формулой (68), то получим выражение этих теорем одинаково удобно применимое к эллиптическим, параболическим и гиперболическим орбитам, а именно:

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{3}{40} \frac{1}{a} \left[(r_1 + r_2 + s)^{\frac{5}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{5}{2}} \right] +$$

$$+ \frac{9}{896} \frac{1}{a^2} \left[(r_1 + r_2 + s)^{\frac{7}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{7}{2}} \right] + \dots$$

¹⁾ Геометрическая формулировка теоремы Эйлера была известна Ньютону, что было отмечено еще Лагранжем, но затем забыто. Вновь обратил на это внимание А. Н. Крылов, показавший, что лемма X из III книги *Principia* — эквивалентна теореме Эйлера.

Еще одна форма теоремы Эйлера-Ламберта, полезная при вычислении орбит, получается, если ввести функцию

$$V(z) = \frac{\sqrt{2}}{4k} \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \quad (72)$$

$$z = \sin^2 g,$$

которой мы уже пользовались в § 22.

Делая

$$\frac{\varepsilon}{2} = g, \quad \frac{\delta}{2} = g',$$

из равенств (71) получим

$$z = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}, \quad z' = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}.$$

Причем формула (72) даст

$$\begin{aligned} \varepsilon - \sin \varepsilon &= \frac{4k}{\sqrt{2}} \left(\frac{r_1 + r_2 + s}{4a} \right)^{\frac{3}{2}} V(z), \\ \delta - \sin \delta &= \frac{4k}{\sqrt{2}} \left(\frac{r_1 + r_2 - s}{4a} \right)^{\frac{3}{2}} V(z'). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в равенство (70), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{8} (t_2 - t_1) &= (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} V(z) \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}} V(z') \\ z &= \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}, \quad z' = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Таблица VI дает $\lg V(z)$ для интервала

$$-0.20 \leq z \leq +0.20.$$

Положительные значения z соответствуют эллиптической орбите, отрицательные — гиперболической.

§ 41. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА.

Формула Эйлера

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}}, \quad (74)$$

выражающая промежуток времени $t_2 - t_1$ через сумму радиусов-векторов и хорду, играет весьма важную роль при вычислении параболических орбит комет, ибо именно этим уравнением выражается условие, что искомая орбита есть парабола.

При вычислении первоначальной орбиты гелиоцентрическое движение не превосходит 180° , так что в равенстве (74) надо брать верхний знак. Так как, с другой стороны, в этом случае хорда s обычно мала, то правая часть равенства (74) вычисляется как разность двух мало отличающихся по величине чисел, с большой по-

терей точности. Покажем, каким образом, путем надлежащего преобразования формулы (74), этот недостаток может быть устранен.

Ограничиваясь случаем, когда гелиоцентрическое движение кометы меньше 180° , напомним уравнение (74) так:

$$6\tau = (r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}} \left[\left(1 + \frac{s}{r_1 + r_2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{s}{r_1 + r_2}\right)^{\frac{3}{2}} \right],$$

или

$$2\tau = (r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{s}{r_1 + r_2} - \frac{1}{4 \cdot 6} \left(\frac{s}{r_1 + r_2}\right)^3 + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{s}{r_1 + r_2}\right)^5 - \dots \right]. \quad (75)$$

Возводя обе части в квадрат и полагая

$$c = \frac{s^2}{(r_1 + r_2)^2},$$

получим

$$(2\tau)^2 = s^2 (r_1 + r_2) \left(1 - \frac{1}{24}c - \frac{2}{128}c^2 - \dots\right)^2.$$

Представим это уравнение в таком виде:

$$\theta_0 (2\tau)^2 = s^2 (r_1 + r_2), \quad (76)$$

где

$$\theta_0 = \left(1 - \frac{1}{24}c - \frac{1}{128}c^2 - \dots\right)^{-2} = \\ = 1 + \frac{1}{12}c + \frac{1}{48}c^2 + \frac{7}{864}c^3 + \frac{83}{20736}c^4 + \\ + \frac{95}{41472}c^5 + \frac{1363}{746496}c^6 + \dots$$

Конечное выражение этой величины таково:

$$\theta_0 = \left(\frac{3\sqrt{c}}{(1 + \sqrt{c})^{\frac{3}{2}} - (1 - \sqrt{c})^{\frac{3}{2}}} \right)^2.$$

В форме (76) уравнение Эйлера свободно от вышеуказанного недостатка.

Таблица X дает шестизначные значения $\lg \theta_0$ по аргументу c от $c = 0.00$ до $c = 0.50$.

Дополнения к главе IV.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ОТНОСИТЕЛЬНО ХОРДЫ.

Ограничиваясь случаем, когда гелиоцентрическое движение кометы не превосходит 180° , возьмем уравнение Эйлера в форме (75):

$$\sqrt{\mu} = \frac{s}{r_1 + r_2} - \frac{1}{4 \cdot 6} \left(\frac{s}{r_1 + r_2}\right)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{s}{r_1 + r_2}\right)^5 - \dots, \quad (77)$$

где (как и в § 37) положено

$$\mu = \frac{(2\tau)^2}{(r_1 + r_2)^3}.$$

Обращение ряда (77) дает

$$\frac{s}{r_1 + r_2} = \sqrt{\mu} + \frac{1}{24} \left(\sqrt{\mu} \right)^3 + \frac{5}{384} \left(\sqrt{\mu} \right)^5 + \dots,$$

откуда

$$s = \frac{2\tau}{\sqrt{r_1 + r_2}} \left(1 + \frac{1}{24} \mu + \frac{5}{384} \mu^2 + \dots \right).$$

Полагая

$$\zeta = 1 + \frac{1}{24} \mu + \frac{5}{384} \mu^2 + \dots,$$

получим окончательно

$$s = \frac{2\tau\zeta}{\sqrt{r_1 + r_2}} = \zeta \sqrt{\mu} (r_1 + r_2). \quad (78)$$

Энке вычислил таблицу, дающую $\lg \zeta$ по аргументу $\sqrt{\mu}$. Эта таблица эквивалентна вышеуказанной таблице X, ибо, как легко видеть, сравнив (78) и (76),

$$\zeta = \sqrt{\theta_0}.$$

Таблицу Энке можно найти почти во всех сборниках таблиц для вычисления орбит. Употребление аргумента μ , вместо общепринятого $\sqrt{\mu}$, способствовало бы некоторому сокращению таблицы Энке, ибо при табулировании по аргументу μ вторые разности значительно меньше (при том же табличном интервале).

Уравнение Эйлера может быть весьма просто решено относительно хорды без помощи специальной таблицы. Положим

$$\sin \gamma = \frac{s}{r_1 + r_2}, \quad (0 < \gamma < 90^\circ),$$

и напомним уравнение (74) так:

$$\frac{6\tau}{(r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}}} = (1 + \sin \gamma)^{\frac{3}{2}} \mp (1 - \sin \gamma)^{\frac{3}{2}}.$$

или

$$\frac{6\tau}{(r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\cos \frac{1}{2} \gamma + \sin \frac{1}{2} \gamma \right)^3 \mp \left(\cos \frac{1}{2} \gamma - \sin \frac{1}{2} \gamma \right)^3, \quad (79)$$

ибо

$$\left(\cos \frac{1}{2} \gamma \pm \sin \frac{1}{2} \gamma \right)^2 = 1 \pm \sin \gamma.$$

В случае верхнего знака равенство (79) дает

$$\begin{aligned} \frac{6\tau}{(r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}}} &= 6 \sin \frac{1}{2} \gamma \cos^2 \frac{1}{2} \gamma + 2 \sin^3 \frac{1}{2} \gamma = \\ &= 6 \sin \frac{1}{2} \gamma - 4 \sin^3 \frac{1}{2} \gamma, \end{aligned}$$

что может быть переписано следующим образом:

$$\frac{6\tau}{2^{\frac{3}{2}}(r_1+r_2)^{\frac{3}{2}}} = 3 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\sqrt{2}} \right) - 4 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\sqrt{2}} \right)^3.$$

Поэтому, принимая во внимание формулу для синуса тройного угла

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta,$$

положим

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{2} \gamma.$$

Так как по условию $0 < \gamma < 90^\circ$, то мы можем угол θ выбрать всегда в интервале

$$0 < \theta < 30^\circ$$

Тогда

$$\frac{6\tau}{\sqrt{8}(r_1+r_2)^{\frac{3}{2}}} = \sin 3\theta,$$

причем, определяя отсюда угол 3θ , мы должны взять

$$0 < 3\theta < 90^\circ.$$

Если гелиоцентрическое движение кометы превышает 180° , то беря в уравнении (79) нижний знак, будем иметь

$$\frac{6\tau}{\sqrt{8}(r_1+r_2)^{\frac{3}{2}}} = 3 \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \gamma}{\sqrt{2}} \right) - 4 \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \gamma}{\sqrt{2}} \right)^3$$

Полагая

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{2} \gamma,$$

мы и в этом случае получим

$$\frac{6\tau}{\sqrt{8}(r_1+r_2)^{\frac{3}{2}}} = \sin 3\theta,$$

но угол 3θ нужно уже будет брать во второй четверти, ибо

$$\frac{1}{2} < \sin \theta < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 30^\circ < \theta < 45^\circ,$$

следовательно

$$90^\circ < 3\theta < 135^\circ.$$

Итак, для решения уравнения Эйлера относительно хорды прежде всего вычисляем угол θ по формуле

$$\sin 3\theta = \frac{6k(t_2-t_1)}{\sqrt{8}(r_1+r_2)^{\frac{3}{2}}}$$

причем если $3\Theta < 45^\circ$, то можно утверждать, что гелиоцентрическое движение меньше 180° . В этом случае хорда s определяется однозначно по формулам

$$\sin \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{2} \sin \Theta_0, \quad s = (r_1 + r_2) \sin \gamma.$$

Если $\sin 3\Theta > 1/\sqrt{2}$, то для угла 3Θ надо взять два значения: одно $3\Theta_0$ в первом квадранте, другое, равное $180^\circ - 3\Theta_0$ во втором квадранте. Первое значение даст хорду, соответствующую предположению, что гелиоцентрическое движение меньше 180° , —

$$\sin \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{2} \sin \Theta_0, \quad s = (r_1 + r_2) \sin \gamma.$$

Второе значение даст хорду, соответствующую предположению, что дуга, описанная кометой, больше 180° , —

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{2} \sin (60^\circ - \Theta_0), \quad s = (r_1 + r_2) \sin \gamma.$$

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ЛАМБЕРТА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ.

Как было показано в § 31, определение элементов орбиты по двум гелиоцентрическим положениям распадается на две части: элементы i , Ω , разность истинных аномалий $v_2 - v_1$ и аргумент широты $v_1 + \omega$ определяются весьма просто из чисто геометрических соотношений; определение всех остальных элементов было нами поставлено в зависимость от нахождения параметра p . Трансцендентное уравнение, определяющее p , мы, следуя Гауссу, преобразовали, введя новую неизвестную η — отношение площади сектора к площади треугольника. Для новой неизвестной, через которую p выражается очень просто, было получено уравнение (36)

$$\eta^3 - \eta^2 = mX (m\eta^{-2} - l).$$

Другой путь для определения элементов второй группы открывает уравнение Эйлера-Ламберта, позволяющее вычислить большую полуось орбиты a , после чего нахождение остальных элементов уже не представляет никаких затруднений.

По данным координатам (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , соответствующим моментам t_1 и t_2 , находим прежде всего радиусы-векторы и хорду,

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},$$

$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Затем решаем уравнение Эйлера-Ламберта

$$\tau a^{-\frac{3}{2}} = \epsilon - \sin \epsilon \mp (\delta - \sin \delta), \quad (80)$$

$$\tau = \kappa (t_2 - t_1)$$

$$\sin \frac{\epsilon}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}} \quad (81)$$

$$(0 < \frac{1}{2} \epsilon < 90^\circ, \quad 0 < \frac{1}{2} \delta < 90^\circ),$$

относительно a . При этом попутно находим углы ϵ и δ . Но, как мы видели на стр. 116,

$$\frac{1}{2}(\epsilon - \delta) = g = \frac{1}{2}(E_2 - E_1),$$

так что это нам даст полуразность эксцентрических аномалий.

Почленное сложение и вычитание равенств

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1), \quad r_2 = a(1 - e \cos E_2)$$

дает

$$\left. \begin{aligned} e \sin \frac{1}{2}(E_2 + E_1) &= \frac{r_2 - r_1}{2a} \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \\ e \cos \frac{1}{2}(E_2 + E_1) &= (1 - 2R) \sec \frac{1}{2}(E_2 - E_1), \end{aligned} \right\}$$

где

$$R = \frac{r_1 + r_2}{4a}.$$

Отсюда найдем эксцентриситет e и эксцентрические аномалии E_1 и E_2 . После чего известные формулы

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 = \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1,$$

$$\sin \varphi = e$$

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1$$

дадут истинную аномалию (нужную для определения элемента ω) и среднюю аномалию.

Рассмотрим теперь вопрос о решении уравнения (80) относительно a . Трудности, с которыми здесь приходится встречаться, заключаются, помимо некоторой сложности уравнения, в том, что в случае, часто встречающемся на практике, когда хорда s мала, правая часть уравнения (80) есть разность двух мало отличающихся величин, что влечет потерю точности; кроме того уравнение Эйлера-Ламберта в форме (80) не дает никаких указаний относительно приближенной величины a , с которой надо начинать пробы. Покажем, каким образом можно избежать указанных неудобств.

*Первый способ.*¹⁾ По формулам (81) находим $\frac{1}{2}\epsilon$ и $\frac{1}{2}\delta$. Так как

$$\text{или} \quad \sin^2 \frac{1}{2}\epsilon - \sin^2 \frac{1}{2}\delta = \frac{s}{2a},$$

$$\sin \frac{1}{2}(\epsilon - \delta) \sin \frac{1}{2}(\epsilon + \delta) = \frac{s}{2a},$$

то отсюда мы можем найти $\frac{1}{2}(\epsilon - \delta)$ без всякой потери точности как бы мало ни было s .

¹⁾ Н. С. Plummer, On some points connected with the determination of orbits, Monthly Notices, Vol. 66, 471.

Далее, так как

$$2 \sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta) = 2 \sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) \left[1 - \cos \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta) \right] = \\ = \frac{s}{a} \operatorname{tg} \frac{1}{4} (\varepsilon + \delta),$$

то уравнение (80) можно представить следующим образом

$$\tau = a^{\frac{1}{2}} s \operatorname{tg} \frac{1}{4} (\varepsilon + \delta) + 2 a^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) - \sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) \right].$$

Или, возвращаясь к обозначениям § 38:

$$h = \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta), \quad g = \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta),$$

и полагая

$$\frac{g - \sin g}{\sin^3 \frac{1}{2} g} = G(g),$$

будем иметь

$$\tau = a^{\frac{1}{2}} s \operatorname{tg} \frac{1}{2} h + 2 a^{\frac{3}{2}} G(g) \sin^3 \frac{1}{2} g.$$

Для вычисления функции G можно воспользоваться формулой Титъена

$$G(g) = \frac{4}{3} B \left(\cos \frac{1}{4} g \right)^{-\frac{12}{5}},$$

где множитель B , весьма мало отличающийся от единицы, берется из прилагаемой таблички, дающей $\lg B$ по аргументу g .

g	$10^7 \cdot \lg B$	g	$10^7 \cdot \lg B$
0°	0	15°	4
1	0	16	5
2	0	17	7
3	0	18	9
4	0	19	11
5	0	20	13
6	0	21	16
7	0	22	19
8	0	23	23
9	1	24	27
10	1	25	32
11	1	26	37
12	2	27	43
13	2	28	50
14	3	29	57
15	4	30	66

Итак, при решении уравнения (80) относительно a , значение τ , соответствующее каждому пробуемому значению a , вычисляется по следующим формулам: прежде всего по формулам (81) вычисляем $\frac{1}{2}\epsilon$ и $\frac{1}{2}\delta$; затем формула

$$\sin g = \frac{s}{2a} \operatorname{cosec} h, \quad h = \frac{1}{2}(\epsilon + \delta)$$

даст $g = \frac{1}{2}(\epsilon - \delta)$; наконец

$$\tau = a^{\frac{1}{2}} \operatorname{stg} \frac{1}{2} h + \frac{8}{3} B a^{\frac{3}{2}} \sin^3 \frac{1}{2} g \left(\cos \frac{1}{4} g \right)^{-2.4}.$$

Недостатком этого способа является то, что он не дает никаких указаний на то, с какого значения a начинать пробы.

Второй способ ¹⁾. Если интервал времени $t_2 - t_1$ становится бесконечно малой величиной dt , то хорда s станет элементом дуги ds и уравнение (80) в пределе обратится, как нетрудно проверить, в такое:

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

т. е. в интеграл живых сил.

Сообразно с этим придадим уравнению Эйлера-Ламберта следующую форму

$$\frac{1}{4a} = \frac{\theta}{r_1 + r_2} - \frac{s^2}{4\tau^2}, \quad (82)$$

где величина θ определяется как раз из условия, что это уравнение должно быть тождественно с (80). Подставляя сюда значение τ , даваемое равенством (80) и полагая

$$R = \frac{r_1 + r_2}{4a}, \quad c = \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^2,$$

получим

$$\theta = R + \frac{16 R^3 c}{(\epsilon - \sin \epsilon - \delta + \sin \delta)^2};$$

при этом формулы (81) напишутся так:

$$\sin \frac{1}{2} \epsilon = \sqrt{R(1 + \sqrt{c})}, \quad \sin \frac{1}{2} \delta = \sqrt{R(1 - \sqrt{c})}.$$

Величина θ , являющаяся функцией R и c , находится при помощи специальных таблиц. Для малых планет, для которых в обычно встречающихся случаях

$$0.4 \leq R \leq 0.7, \quad 0 \leq c \leq 0.1,$$

¹⁾ М. Ф. Субботин, Новая форма уравнения Эйлера-Ламберта и ее применение при вычислении орбит, Русский Астрономический Журнал, т. I (1923), стр. 1.

эти таблицы вычисляются при помощи разложения θ по степеням c имеющего следующий вид (loc. cit.):

$$\theta = 1 + \frac{1-4R}{12(1-R)}c + \frac{5-28R+56R^2-48R^3}{240(1-R)^3}c^2 + \dots$$

Для большинства кометных орбит R очень близко к нулю (ибо a очень велико), а c может принимать значительно большие, нежели для планет, значения. Сообразно с этим удобнее θ разложить по степеням R . Положим

$$\theta = \theta_0 \mu,$$

где, как и в § 41,

$$\theta_0 = \left(\frac{3\sqrt{c}}{(1+\sqrt{c})^{\frac{3}{2}} - (1-\sqrt{c})^{\frac{3}{2}}} \right)^2 = 1 + \frac{1}{12}c + \frac{1}{48}c^2 + \dots,$$

тогда

$$\begin{aligned} \mu = & 1 + R \left(-\frac{1}{4}c - \frac{1}{30}c^2 - \frac{97}{8640}c^3 - \frac{137}{25920}c^4 - \dots \right) + \\ & + R^2 \left(-\frac{1}{4}c + \frac{7}{240}c^2 + \frac{5}{672}c^3 + \dots \right) + \\ & + R^3 \left(-\frac{1}{4}c + \frac{7}{240}c^2 + \frac{13}{6048}c^3 + \dots \right) + \\ & + R^4 \left(-\frac{1}{4}c - \frac{1}{30}c^2 - \dots \right) + \\ & + R^5 \left(-\frac{1}{4}c - \frac{19}{120}c^2 - \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

В „Формулах и таблицах“ даны таблицы, позволяющие легко находить θ во всех встречающихся на практике случаях.

Познакомившись с вычислением θ , вернемся теперь к решению уравнения Эйлера-Ламберта, представленного в форме (82), относительно a . Это уравнение напомним так:

$$R = \theta - \frac{s^2}{4\tau^2}(r_1 + r_2) \quad (83)$$

и будем решать относительно R . Для первого приближения в правой части можно взять $R=0$, $\theta=\theta_0$ — если речь идет о комете, и $R=0.5$ — если имеем дело с планетой. Новое значение R , получившееся в левой части, используем для более точного вычисления θ и т. д. Двух-трех приближений, даже в наиболее неблагоприятных случаях, будет достаточно для получения R , точно удовлетворяющего уравнению (83), после чего

$$a = \frac{r_1 + r_2}{4R}.$$

В обычно встречающихся на практике случаях определение элементов орбиты при помощи решения уравнения Эйлера-Ламберта не представляет преимуществ перед способом Гаусса, основанным на употреблении отношения η (§ 34), тем более, что при опре-

делении орбиты из наблюдений отношение η все равно должно быть вычислено. Только при определении кометных орбит с эксцентриситетами близкими к единице уравнение Эйлера-Ламберта применяется довольно часто.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Получить формулы (6) при помощи проектирования замкнутой ломаной линии, образованной радиусом-вектором r_0 и координатами x_0, y_0, z_0 , на линию узлов и на ось z -ов.
2. Вывести формулы (см. § 31)

$$e \sin \frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_2} \right) \operatorname{cosec} f$$

$$e \cos \frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_2} - 2 \right) \sec f.$$

Этими формулами можно пользоваться вместо формул (12) для определения эксцентриситета и истинных аномалий.

3. Для кометы, движущейся по параболе, известны r и v , соответствующие моменту t . Показать, что время прохождения через перигелий T может быть вычислено по формулам

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{2} v, \quad t - T = \frac{2}{3k} r^{\frac{3}{2}} \sin 3x.$$

4. Когда при определении орбита по двум гелиоцентрическим положениям (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) вычислены радиусы-векторы r_1, r_2 и истинные аномалии v_1, v_2 , то определение постоянных Гаусса может быть произведено без помощи элементов i', Ω, ω' (см. § 32) по формулам:

$$\begin{aligned} \sin a \sin (A' + v_1) &= x_1 r_1^{-1} \\ \sin a \cos (A' + v_1) &= x_2 r_2^{-1} \operatorname{cosec} 2f - x_1 r_1^{-1} \cotg 2f, \\ \sin b \sin (B' + v_1) &= y_1 r_1^{-1} \\ \sin b \cos (B' + v_1) &= y_2 r_2^{-1} \operatorname{cosec} 2f - y_1 r_1^{-1} \cotg 2f \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

где

$$2f = v_2 - v_1, \quad A' = A + \omega, \quad B' = B + \omega, \quad C' = C + \omega.$$

Доказать эти формулы, исходя из равенств (III, 29).

5. Доказать следующие формулы, которые могут быть применены для той же цели, что и формулы предыдущей задачи:

$$\sin a \sin \left[A' + \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{r_2} + \frac{x_1}{r_1} \right) \sec \frac{1}{2} (v_2 - v_1)$$

$$\sin a \cos \left[A' + \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{r_2} - \frac{x_1}{r_1} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (v_2 - v_1).$$

6. Исходя из формул (III, 28), выразить эклиптические элементы i, Ω через постоянные Гаусса.

7. На странице 128 была указана формула Титьена

$$G(g) = \frac{g - \sin g}{\sin^3 \frac{1}{2} g} = \frac{4}{3} B \left(\cos \frac{1}{4} g \right)^{-2.4}.$$

Показать, что

$$B = 1 + \frac{9}{175} \sin^4 \frac{1}{4} g + \frac{142}{2625} \sin^6 \frac{1}{4} g + \dots$$

8. Вывести формулу

$$X(x) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} = \beta (\sec g)^{\frac{1}{5}},$$

где

$$\beta = \frac{4}{3} - \frac{8}{175} \operatorname{tg}^4 g + \frac{352}{7875} \operatorname{tg}^6 g + \frac{40244}{1010625} \operatorname{tg}^8 g - \dots$$

При малых значениях g эта формула позволяет довольно удобно находить функцию X без всяких таблиц (см. § 34).

9. Показать что поправка, которую надо придать к правой части следующей приближенной формулы (Plummer, Monthly Notices, Vol. 66, стр. 493):

$$\lg X(x) = \lg \frac{4}{3} + \frac{24576}{7000} \lg \sec \frac{1}{2} g - \frac{17496}{7000} \lg \sec \frac{1}{3} g,$$

равна

$$\text{Согг.} = -\frac{59 M}{18191250} g^8 - \dots,$$

где $M = 0.434 \dots$ модуль десятичных логарифмов.

Таким образом ошибка этой приближенной формулы достигает одной единицы седьмого знака только для $g = 41^\circ$.

10. Гаусс нашел такую приближенную формулу (Werke, Bd. VII, стр. 299):

$$\lg X(x) = \lg \frac{4}{3} + \lg \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{35} \right) - \lg \left(\frac{1}{x} - \frac{8}{7} \right)$$

$$x = \sin^2 \frac{1}{2} g.$$

Поправка, которую надо придать к правой части для получения точной величины, в единицах седьмого знака равна

$$\begin{aligned} \text{Согг.} &= 0, \text{ если } 0 \leq g < 13^\circ 27' \\ &= -1., \text{ " } 13^\circ 27' \leq g < 16^\circ 9' \\ &= -2, \text{ " } 16^\circ 9' \leq g < 17^\circ 34' \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

11. Исследовать уравнение (38). Определить число корней больших единицы.

12. Пусть задано положение Солнца S и два положения светила P_1, P_2 , соответствующие моментам t_1 и t_2 . Зная r_1, r_2 , хорду s и промежуток времени $t_2 - t_1$, мы можем найти большую полуось. Показать, что существует вообще говоря два конических сечения, имеющих данный фокус S , данную большую полуось a , и проходящих через две заданные точки P_1, P_2 . Почему при определении орбиты не может возникнуть сомнение, какое из этих конических сечений надо взять?

13. Показать, что уравнение Эйлера может быть представлено в такой форме (Plummer, Monthly Notices, Vol. 66, стр. 497):

$$k(t_2 - t_1) = \frac{1}{4} s R + \frac{1}{3} s^3 R^{-3},$$

где

$$R = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{1}{2}} + (r_1 + r_2 - s)^{\frac{1}{2}}.$$

Каковы преимущества этой формы для малых значений s ?

14. Вывести уравнение Эйлера (которое было нами получено как предельный случай уравнения Эйлера-Ламберта при $a = \infty$) непосредственно из формул параболического движения.

15. Показать, что для параболического движения имеет место следующее соотношение между двумя радиусами-векторами r_1, r_2 , углом между ними $2f$ и соответствующим промежутком времени $t_2 - t_1$:

$$k(t_2 - t_1) = \frac{\sqrt{2}}{3} (r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2} \cos f) \sqrt{r_1 + r_2 - \sqrt{r_1 r_2} \cos f}.$$

16. Если сегмент фокального сектора конического сечения не включает фокуса, то отношение площади этого сектора к площади соответствующего треугольника η выражается формулой

$$\eta = \frac{\varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta)}{\sin(\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta)},$$

где ε и δ имеют то же значение, как и в § 40.

17. Уравнение Эйлера-Ламберта (70) в том случае, когда гелиоцентрическое движение меньше 180° , может быть представлено в таком виде:

$$k(t_2 - t_1) = \int_z^{z'} \frac{x dx}{\sqrt{x - x^2}},$$

где

$$z = \frac{1}{4a}(r_1 + r_2 + s), \quad z' = \frac{1}{4a}(r_1 + r_2 - s).$$

ГЛАВА V.

ПОДГОТОВКА НАБЛЮДЕНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРБИТЫ.

Каждое наблюдение планеты или кометы дает нам прямое восхождение α и склонение δ для определенного момента t .

Связь между этими величинами и элементами орбиты устанавливается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y + Y \\ \rho \sin \delta &= z + Z \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где x, y, z — гелиоцентрические координаты светила, выражение которых через элементы орбиты было нами подробно изучено в главах II и III, а X, Y, Z — координаты Солнца. Через ρ обозначено как всегда расстояние до светила в момент наблюдения.

Уравнения (1), являющиеся не чем иным, как формулами переноса начала координат, можно написать только в том случае, если координаты Солнца X, Y, Z и координаты светила

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \rho \cos \delta \cos \alpha \\ \eta &= \rho \cos \delta \sin \alpha \\ \zeta &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

отнесены к одной и той же системе, т. е. являются либо одновременно геоцентрическими, либо одновременно топоцентрическими, и отсчитываются относительно одного и того же экватора и равноденствия.

Таким образом нужно либо полученные из наблюдений топоцентрические координаты α, δ исправить за параллакс и сделать геоцентрическими — тогда координаты (2) будут отнесены к тому же началу координат, что и взятые из эфемерид координаты Солнца; либо оставить α и δ их топоцентрические значения, но тогда в уравнения (1) должны быть поставлены топоцентрические

координаты Солнца. Затем нужно, учтя прецессию и нутацию, позаботиться о том, чтобы (ξ, η, ζ) и (X, Y, Z) были отнесены к одному и тому же экватору и равноденствию.

Далее следует иметь в виду, что в уравнениях (1) координаты α, δ должны относиться к геометрическому направлению на светило, следовательно полученные из наблюдений значения этих координат должны быть исправлены за аберрацию.

Наконец уравнения (1) связывают между собою одновременные положения светила, Солнца и Земли. Поэтому надо позаботиться об учете того времени, в течение которого свет доходит от светила до Земли.

Уравнения (1), являющиеся основой всех методов определения орбит, можно взять в эклиптической системе координат. В этом случае они напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \beta \cos \lambda &= x_c - R \cos B \cos L \\ \rho \cos \beta \sin \lambda &= y_c - R \cos B \sin L \\ \rho \sin \beta &= z_c - R \sin B \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Здесь через λ и β обозначены долгота и широта светила, через x_c, y_c, z_c его эклиптические координаты, а через R, L и B — радиус-вектор, долгота и широта Земли.

Все, что было только-что сказано относительно уравнений (1) целиком применимо и к уравнениям (3).

Особенностью уравнений (3) является то обстоятельство, что широта Земли B величина весьма малая. Поэтому можно либо совсем ею пренебречь, либо ввести в β небольшую поправку, позволяющую совершенно точно считать $B = 0$ (это соответствует переносу начала координат из центра Земли в точку, являющуюся проекцией этого центра на плоскость эклиптики). В том и другом случае уравнения (3) принимают следующую форму

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \beta \cos \lambda &= x_c - R \cos L \\ \rho \cos \beta \sin \lambda &= y_c - R \sin L \\ \rho \sin \beta &= z_c \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Более простой вид последнего уравнения, по сравнению с (1), несколько сокращает, при определении орбиты, вычислительную работу. Особенно, если вычисления ведутся при помощи логарифмов, а не при помощи арифмометра.

В настоящей главе изучаются наиболее употребительные методы вычисления всех указанных редукций. При этом те формулы, вывод которых можно найти в каждом курсе Сферической астрономии, даются без вывода.

§ 42. ФОРМА, В КОТОРОЙ ПУБЛИКУЮТСЯ НАБЛЮДЕНИЯ.

Визуальные наблюдения планет и комет заключаются в измерении помощью окулярного микрометра разностей прямых восхождений и склонений наблюдаемого объекта и близлежащей звезды, координаты которой известны. Учитывая постановления 2-го съезда

Международного Астрономического Союза (Кембридж, 1925 г.), в настоящее время, публикуя наблюдения, обычно приводят следующие данные:

1) мировое время наблюдения, выраженное либо в десятичных долях суток, либо в часах, минутах и секундах;

2) полученные из наблюдений разности $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ в смысле „планета (или комета) — звезда“. Эти разности наблюдатель должен исправить не только за дифференциальную рефракцию, но и за дифференциальную прецессию, нутацию и аберрацию — так, чтобы эти разности были разностями средних координат для начала того года, когда производилось наблюдение;

3) средние координаты светила, полученные путем прибавления только-что указанных разностей к средним координатам звезд сравнения, отнесенным к экватору и равноденствию начала того года, когда производилось наблюдение;

4) логарифмы параллактических множителей (с тремя десятичными знаками);

5) средние координат звезд сравнения для начала года наблюдения;

6) указания относительно каталогов, из которых взяты положения звезд сравнения.

Раньше момент наблюдения указывался в местном среднем (астрономическом) времени. Разности $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ исправлялись только за дифференциальную рефракцию и прибавлялись наблюдателем к видимым координатам звезды сравнения, так что наблюдатель давал не средние координаты планеты или кометы, как теперь, а видимые координаты α_{app} , δ_{app} .

Публикуемые фотографические наблюдения содержат:

1') мировое время середины экспозиции;

2') прямое восхождение и склонение светила, полученные путем редукции пластинки при помощи средних координат опорных звезд. Эти средние координаты берутся либо для начала года наблюдений, либо для какой-либо нормальной эпохи, например 1925.0, или 1950.0;

3') логарифмы параллактических множителей;

4') указание источников, откуда взяты положения опорных звезд;

5') пропорциональные множители (dependences) опорных звезд. Наличие этих множителей позволяет очень просто исправлять положения светила в соответствии с той или иной поправкой положений опорных звезд: если в каталожное положение звезды нужно ввести поправки $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, а пропорциональный множитель для этой звезды D , то соответственные поправки в координатах светила будут $D \cdot \Delta\alpha$ и $D \cdot \Delta\delta$.

Момент наблюдения дается с точностью до $0^{\text{d}}.00001$ или до 1^{s} , но часто довольствуются меньшей точностью и дают его либо до $0^{\text{d}}.0001$, либо до $0^{\text{m}}.1$.

Разности $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, так же, как и координаты светила, даются до $0^{\circ}.01$ и $0''.1$, хотя средняя ошибка этих величин обычно значительно выше: для координат планет ее можно считать порядка $1''$,

а для комет она может быть в несколько раз больше. Если публикуются результаты предварительной редукции наблюдений, или если наблюдения имеют по той или иной причине точность меньшую обычной, то координаты даются до $0^{\circ}.1$ по прямому восхождению и до $1''$ по склонению. Наконец для малых планет публикуют приближенные результаты фотографических наблюдений с точностью до $0^{\text{m}}.1$ и $1'$ — это делают для того, чтобы своевременно дать поправку к эфемериде и тем облегчить дальнейшие наблюдения планеты.

Примечание I. Средние положения планет и комет, отнесенные к началу года, впервые начали публиковаться как результат фотографических наблюдений, вследствие чего они стали называться *астрографическими положениями* светил. Когда астрономы, наблюдающие визуально, стали постепенно отказываться от традиции давать видимые координаты и заменили их также средними для начала года, то одно время была тенденция и в этом случае (визуальных наблюдений) сохранить то же название „астрографические положения“. Это объяснялось боязнью некоторой двусмысленности термина „среднее положение для начала года“ — под этим термином можно разумеать как то, что было выше указано в пунктах 3 и 2', так и средние координаты планеты для момента наблюдения, уже исправленные за планетную аберрацию. Постановлением Кэмбриджского съезда Международного Астрономического Союза значение термина „среднее положение планеты (или кометы) для начала года“ было фиксировано окончательно в первом смысле, а для средних положений исправленных и за планетную аберрацию было решено не вводить никакого особого наименования.

Примечание II. Мировое время, в котором теперь всегда даются моменты наблюдений, есть Гриничское гражданское время (G. C. T.). Введено оно в употребление с 1 января 1925 года, так что 12^{h} Гриничского среднего (астрономического) времени 31 декабря 1924 г. $= 0^{\text{h}}$ мирового времени 1 января 1925 г.

Для мирового времени до сих пор нет общепринятого обозначения. Французы и итальянцы обозначают его через T. U. (temps universel), немцы — через W. Z. (Weltzeit), у англичан и американцев в эфемеридах употребляется обозначение G. C. T., а в журналах — U. T. (Universal Time). Мы будем обозначать мировое время через T. U. (tempus universale).

§ 43. РЕДУКЦИЯ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА ПАРАЛЛАКС

(Экваториальные координаты).

Редукция наблюдений за параллакс имеет своей задачей привести координаты светила (2) и координаты Солнца X, Y, Z к одному общему началу, т. е. сделать их либо одновременно геоцентрическими, либо одновременно топоцентрическими. Сообразно с этим учесть параллакс можно двояко.

1. *Вычисление топоцентрических координат Солнца.* Геоцентрические координаты Солнца X, Y, Z отнесены к экваториальной системе, в которой за основную плоскость xOy принята плоскость экватора, ось x -ов направлена в точку весеннего равноденствия, ось y -ов — в точку с прямым восхождением 90° , ось z -ов — к северному полюсу экватора.

Вычислим координаты места наблюдения (a, b, c) относительно этой системы. Положение места наблюдения определим: расстоянием от центра Земли ρ_0 (выраженным в частях экваториального радиуса), геоцентрической широтой φ' и звездным временем Θ , определяющим положение меридиана места наблюдения относительно точки весеннего равноденствия.

Очевидно

$$\begin{aligned} a &= \rho_0 \cos \varphi' \cos \Theta \\ b &= \rho_0 \cos \varphi' \sin \Theta \\ c &= \rho_0 \sin \varphi'. \end{aligned}$$

Чтобы выразить эти величины в астрономической единице длины, их надо умножить на

$$\sin p_0 \approx p_0 \sin 1'',$$

где $p_0 = 8''.80$ экваториальный горизонтальный параллакс Солнца. Обозначая $-a, -b, -c$, после выражения в астрономической единице длины, через $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \Delta X &= A \cos \Theta \\ \Delta Y &= A \sin \Theta \\ \Delta Z &= -p_0 \sin 1'' \cdot \rho_0 \sin \varphi', \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$A = -p_0 \sin 1'' \cdot \rho_0 \cos \varphi'.$$

По известным формулам переноса начала координат для топоцентрических координат Солнца X', Y', Z' получаем такие выражения:

$$\begin{aligned} X' &= X + \Delta X \\ Y' &= Y + \Delta Y \\ Z' &= Z + \Delta Z \end{aligned} \tag{6}$$

2. *Вычисление геоцентрических координат светила.* Чтобы перейти от топоцентрических прямоугольных координат

$$\begin{aligned} \xi' &= \rho' \cos \delta' \cos \alpha' \\ \eta' &= \rho' \cos \delta' \sin \alpha' \\ \zeta' &= \rho' \sin \delta' \end{aligned} \tag{7}$$

к геоцентрическим координатам

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \delta \cos \alpha \\ \eta &= \rho \cos \delta \sin \alpha \\ \zeta &= \rho \sin \delta \end{aligned} \tag{8}$$

можно воспользоваться теми же формулами, что и в предыдущем случае:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \xi + \Delta X \\ \eta' &= \eta + \Delta Y \\ \zeta' &= \zeta + \Delta Z. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Обычно вводят соответственные поправки в сферические координаты α и δ . Рассматривая разности $\xi - \xi'$, $\rho - \rho'$, $\alpha - \alpha'$, $\delta - \delta'$ как дифференциалы и полагая

$$\alpha - \alpha' = p_\alpha, \quad \delta - \delta' = p_\delta,$$

из равенств (7) и (8) получим

$$\begin{aligned} (\rho - \rho') \cos \delta' \cos \alpha' - p_\delta \rho' \sin \delta' \cos \alpha' - p_\alpha \rho' \cos \delta' \sin \alpha' &= \xi - \xi' \\ (\rho - \rho') \cos \delta' \sin \alpha' - p_\delta \rho' \sin \delta' \sin \alpha' + p_\alpha \rho' \cos \delta' \cos \alpha' &= \eta - \eta' \\ (\rho - \rho') \sin \delta' + p_\delta \rho' \cos \delta' &= \zeta - \zeta' \end{aligned}$$

Отсюда найдем, принимая во внимание равенства (9) и (5),

$$\begin{aligned} p_\alpha \rho' \cos \delta' &= -A \sin(\Theta - \alpha) \\ p_\delta \rho' &= +A \cos(\Theta - \alpha) \sin \delta' - \Delta Z \cos \delta'. \end{aligned}$$

Окончательно, после выражения p_α в секундах времени, а p_δ в секундах дуги, будем иметь следующие известные формулы (см. § 26)

$$\left. \begin{aligned} \rho p_\alpha &= C \sin(\Theta - \alpha') \sec \delta' \\ \rho p_\delta &= S \cos \delta' - 15 C \cos(\Theta - \alpha') \sin \delta' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Логарифмы величин

$$C = \frac{1}{15} p_0 \rho_0 \cos \varphi', \quad S = p_0 \rho_0 \sin \varphi'$$

для некоторых обсерваторий можно найти в таблице II.

В тех случаях, когда геоцентрическое расстояние ρ известно хотя бы грубо приближенно (если светило не слишком близко к Земле, то 2—3 значущие цифры достаточны), предпочитают исправлять за параллакс, при помощи формул (10), прямое восхождение и склонение. В тех же случаях, когда ρ совсем неизвестно (как это имеет место при первоначальном определении орбиты), прибегают к формулам (6) для вычисления топоцентрических координат Солнца, а топоцентрические координаты светила оставляют без изменения. Этот же путь следует предпочесть и в тех случаях, когда нет уверенности, что ρ известно достаточно точно.

§ 44. РЕДУКЦИЯ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА ПАРАЛЛАКС И ШИРОТУ СОЛНЦА:

(Эклиптические координаты)

Рассмотрим теперь, каким образом учитывается влияние параллакса в том случае, когда вычисление орбиты ведется в эклиптических координатах. В этом случае надо еще позаботиться о приведении основной системы (3) к виду (4).

1. Если геоцентрическое расстояние в момент наблюдения приближенно известно, то наблюдаемые прямое восхождение и склонение приводим, при помощи формул (10), к центру Земли. Таким образом, разумея под ρ, β, λ —геоцентрические координаты светила, а под R, B, L —гелиоцентрические координаты центра Земли, будем иметь, согласно (3),

$$\begin{aligned}\rho \cos \beta \cos \lambda &= x_c - R \cos B \cos L \\ \rho \cos \beta \sin \lambda &= y_c - R \cos B \sin L \\ \rho \sin \beta &= z_c - R \sin B.\end{aligned}$$

Так как широта Земли B очень мала, то, пренебрегая второй и высшими степенями этой малой величины, можем считать, что $\cos B = 1$. Посмотрим, нельзя ли придать ρ и β такие поправки $d\rho$ и $d\beta$, чтобы эти уравнения приняли следующую форму

$$\left. \begin{aligned}(\rho + d\rho) \cos (\beta + d\beta) \cos \lambda &= x_c - R \cos L \\ (\rho + d\rho) \cos (\beta + d\beta) \sin \lambda &= y_c - R \sin L \\ (\rho + d\rho) \sin (\beta + d\beta) &= z_c\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ограничиваясь первыми степенями малых величин $d\rho$ и $d\beta$, имеем

$$\begin{aligned}\cos \beta \cos \lambda \cdot d\rho - \rho \sin \beta \cos \lambda \cdot d\beta &= 0 \\ \cos \beta \sin \lambda \cdot d\rho - \rho \sin \beta \sin \lambda \cdot d\beta &= 0 \\ \sin \beta \cdot d\rho + \rho \cos \beta \cdot d\beta &= R \sin B\end{aligned}$$

Откуда

$$d\rho = R \sin \beta \sin B, \quad d\beta = \frac{\cos \beta}{\rho} R \sin B.$$

Поправкой $d\rho$ можно пренебречь, ибо она всегда находится за пределами той точности, с которой можно определить ρ при первоначальном вычислении орбиты. Что же касается до $d\beta$, то, выражая эту поправку в секундах дуги, напишем ее так:

$$(d\beta)'' = -\frac{\cos \beta}{\rho} B_0, \quad (12)$$

где $B_0 = -B$ есть широта Солнца (астрономические ежегодники дают именно широту Солнца, а не широту Земли). Радиус-вектор Земли R здесь заменен единицей.

Итак, полагая

$$d\rho = 0, \quad \beta' = \beta + d\beta,$$

где $d\beta$ определяется формулой (12), мы получим уравнения (11) в таком виде:

$$\begin{aligned}\rho \cos \beta' \cos \lambda &= x_c - R \cos L \\ \rho \cos \beta' \sin \lambda &= y_c - R \sin L \\ \rho \sin \beta' &= z_c\end{aligned}$$

2. Если геоцентрическое расстояние в момент наблюдения совершенно неизвестно, то точный учет влияния параллакса в эклиптической системе координат значительно сложнее нежели в экваториальной (что составляет одно из преимуществ употребления

этой последней при вычислении орбит). При вычислении первоначальной орбиты кометы в эклиптической системе координат влиянием параллакса попросту пренебрегают, что имеет известное оправдание в малой точности кометных наблюдений, а также в том, что первоначальная орбита вычисляется обычно на основании приближенных наблюдений. Для малых планет нередко сначала определяется круговая орбита, при вычислении которой параллаксом также можно пренебречь.

В прежнее время, когда определение орбит производилось исключительно в эклиптической системе координат, точный учет влияния параллакса производился путем указанного Гауссом приема, заключающегося в переходе к так называемому *locus fictus*.

Прямую, соединяющую светило P с местом наблюдения M , продолжим до пересечения с плоскостью эклиптики в некоторой точке F . Эта точка F была названа Гауссом *locus fictus observationis*, т. е. фиктивным местом наблюдения: очевидно наблюденные координаты светила не изменятся, если мы переместим наблюдателя из точки M в точку F .

Вычислим прежде всего эклиптические координаты M относительно центра Земли T . Так как экваториальные координаты места наблюдения относительно T равны

$$\rho_0 \cos \varphi' \cos \Theta, \quad \rho_0 \cos \varphi' \sin \Theta, \quad \rho_0 \sin \varphi,$$

то, повернув координатную систему вокруг оси x -ов на угол ϵ , получим такие выражения для эклиптических координат

$$\left. \begin{aligned} &\rho_0 \cos \varphi' \cos \Theta \\ &\rho_0 \cos \varphi' \sin \Theta \cos \epsilon + \rho_0 \sin \varphi' \sin \epsilon \\ &-\rho_0 \cos \varphi' \sin \Theta \sin \epsilon + \rho_0 \sin \varphi' \cos \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Если через λ_0, β_0 обозначим геоцентрические долготу и широту M , то для определения этих величин будем иметь очевидно такие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_0 \cos \lambda_0 &= \cos \varphi' \cos \Theta \\ \cos \beta_0 \sin \lambda_0 &= \cos \varphi' \sin \Theta \cos \epsilon + \sin \varphi' \sin \epsilon \\ \sin \beta_0 &= -\cos \varphi' \sin \Theta \sin \epsilon + \sin \varphi' \cos \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Обратимся теперь снова к уравнениям (3). Считая в этих уравнениях ρ, β, λ , за топоцентрические координаты светила, мы должны в правых частях вместо гелиоцентрических координат центра Земли

$$\begin{aligned} R \cos B \cos L \\ R \cos B \sin L \\ R \sin B \end{aligned}$$

поставить гелиоцентрические координаты места наблюдения, т. е.

$$\begin{aligned} R \cos B \cos L + \sin p_0 \cdot \rho_0 \cos \beta_0 \cos \lambda_0 \\ R \cos B \sin L + \sin p_0 \cdot \rho_0 \cos \beta_0 \sin \lambda_0 \\ R \sin B + \sin p_0 \cdot \rho_0 \sin \beta_0. \end{aligned}$$

Координаты места наблюдения относительно центра Земли, даваемые формулами (13), мы выразили через β_0 и λ_0 при помощи

(14) и умножили на $\sin p_0$ для выражения их в астрономической единице длины.

Итак уравнения (3) принимают в настоящем случае такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \beta \cos \lambda &= x_c - R \cos B \cos L - \rho_0 \sin p_0 \cos \beta_0 \cos \lambda_0 \\ \rho \cos \beta \sin \lambda &= y_c - R \cos B \sin L - \rho_0 \sin p_0 \cos \beta_0 \sin \lambda_0 \\ \rho \sin \beta &= z_c - R \sin B - \rho_0 \sin p_0 \sin \beta_0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Обозначим теперь через $R + dR$, O , $L + dL$ гелиоцентрические координаты точки F , в которой прямая PM пересекает эклиптику, а через $\rho + d\rho$ расстояние PF , так что $MF = d\rho$. Уравнения (3), будучи применены к наблюдениям светила P , произведенным из фиктивного места F , дают

$$\left. \begin{aligned} (\rho + d\rho) \cos \beta \cos \lambda &= x_c - (R + dR) \cos (L + dL) \\ (\rho + d\rho) \cos \beta \sin \lambda &= y_c - (R + dR) \sin (L + dL) \\ (\rho + d\rho) \sin \beta &= z_c \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В равенствах (15) и (16) мы можем все долготы уменьшить на L , что равносильно счету долгот не от точки весеннего равноденствия, а от точки эклиптики, долгота которой равна L . После этого вычтем почленно равенства (15) из равенств (16). Полагая $\cos B = 1$, получим

$$\left. \begin{aligned} d\rho \cos \beta \cos (\lambda - L) &= -(R + dR) \cos (dL) + R \cos L + \\ &\quad + \rho_0 \sin p_0 \cos \beta_0 \cos (\lambda_0 - L) \\ d\rho \cos \beta \sin (\lambda - L) &= -(R + dR) \sin (dL) + \\ &\quad + \rho_0 \sin p_0 \cos \beta_0 \sin (\lambda_0 - L) \\ d\rho \sin \beta &= R \sin B + \rho_0 \sin p_0 \sin \beta_0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Из этих трех уравнений мы можем определить $d\rho$, $R + dR$ и dL .

Точными формулами (17) никогда не приходится пользоваться—это могло бы стать необходимым лишь в том случае, когда широта светила β была бы весьма близка к нулю, но при таких осложнениях нет надобности употреблять эклиптические координаты, и будет особенно целесообразно вести вычисление орбиты в экваториальных координатах. Во всех остальных случаях формулы (17) можно заменить следующими приближенными {которые получаются из (17), если пренебречь вторыми и высшими степенями величин dR и dL }:

$$\begin{aligned} (d\rho)'' &= (BR + \rho_0 \rho_0 \sin \beta_0) \operatorname{cosec} \beta \\ R(dL)'' &= \rho_0 \rho_0 \cos \beta_0 \sin (\lambda_0 - L) - (d\rho)'' \cos \beta \sin (\lambda - L) \\ dR &= \rho_0 \rho_0 \cos \beta_0 \cos (\lambda_0 - L) - (d\rho)'' \cos \beta \cos (\lambda - L) \end{aligned}$$

Здесь $d\rho$ и dL выражены в секундах дуги, так же, как B и ρ_0 .

Придав к координатам центра Земли R , B и L указанные поправки, получим координаты $R + dR$, O и $L + dL$ фиктивного места наблюдения F . Наблюдение из точки F должно быть отнесено к моменту более позднему, чем действительное наблюдение из

точки M , на промежуток времени, в течение которого свет проходит расстояние $MF = d\rho$. Этот промежуток времени равен

$$dt = A (d\rho)'' \sin 1'',$$

где

$$A = 498^s.5 = 0^s.005\ 770.$$

§ 45. РЕДУКЦИЯ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА ПРЕЦЕССИЮ, НУТАЦИЮ И АБЕРРАЦИЮ.

Если наблюдатель дает видимые координаты α_{app} и δ_{app} , то прежде всего необходимо обратить их в средние координаты для начала года. Для этого служат хорошо известные формулы:

$$(\alpha_{\text{med}} - \alpha_{\text{app}})^s = -f - \frac{1}{15} g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta - \frac{1}{15} h \sin(H + \alpha) \sec \delta$$

$$(\delta_{\text{med}} - \delta_{\text{app}})'' = -g \cos(G + \alpha) - h \cos(H + \alpha) \sin \delta - i \cos \delta.$$

Если при вычислении орбиты приходится пользоваться наблюдениями, произведенными в различные годы, а потому дающими (после только что указанного приведения — если в этом была надобность) средние положения для начала различных лет, то все их надо привести к одной общей эпохе. Для этого служат формулы:

$$\alpha = \alpha_0 + (m + n \operatorname{tg} \delta_1 \sin \alpha_1) (t - t_0)$$

$$\delta = \delta_0 + n \cos \alpha_1 (t - t_0),$$

где (α, δ) , (α_0, δ_0) и (α_1, δ_1) — координаты, соответствующие эпохам t , t_0 и $\frac{1}{2}(t_0 + t)$. Значения m и n таковы:

$$m = 3^s.07234 + 0^s.00186\ T$$

$$n = 20.''0468 - 0.0085\ T,$$

где T — обозначает время, считаемое в столетиях, от 1900.0. Эти величины должны быть взяты для эпохи $\frac{1}{2}(t_0 + t)$.

Конечно, в уравнениях (1) координаты Солнца X , Y , Z должны быть приведены к той же эпохе, как и α , δ . Нужные для этого формулы были указаны в § 29.

Переходим наконец к учету влияния планетной абберрации. При определении первоначальной орбиты всегда применяется второе из двух правил, указанных в § 26: истинное направление на светило в момент t совпадает с направлением, в котором из положения Земли в момент t видно положение светила в момент $t^0 = t - A\rho$. Это правило удобно потому, что, пользуясь им, мы вычисляем X , Y , Z (или R , L), входящие в уравнения (1) (или (4), для момента t , совершенно независимого от неизвестного расстояния ρ . Таким образом эти величины вычисляются раз навсегда и не меняются по мере получения все более и более точных значений ρ . Меняется лишь тот момент $t^0 = t - A\rho$, к которому должно быть отнесено положение светила.

Когда геоцентрическое расстояние p уже приближенно известно из предшествовавших определений орбиты, то можно воспользоваться и первым правилом § 26: видимое направление на светило в момент t совпадает с истинным направлением для момента $t^0 = t - Ap$. Чтобы получить видимое направление, нужно к среднему положению для начала года прибавить звездную аберрацию, т. е. к α и δ прибавить соответственно

$$+ \frac{1}{15} h \sin (H + \alpha) \sec \delta \\ + h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta.$$

После этого положения как Земли, так и светила будут относиться к одному и тому же моменту $t^0 = t - Ap$. Следует, однако, заметить, что никаких выгод по сравнению с предыдущим методом учета планетной аберрации мы здесь не имеем. Напротив, если окажется, что взятое значение p недостаточно точно, так что значения X, Y, Z (или R, L), вычисленные для момента $t^0 = t - Ap$, нуждаются в исправлении, то это обстоятельство может повлечь много лишней работы.

§ 46. ПЕРЕХОД ОТ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ КООРДИНАТ К ЭКЛИПТИЧЕСКИМ.

В том случае, когда вычисление орбиты желают вести в эклиптической системе координат, нужно полученные из каждого наблюдения экваториальные координаты α, δ обратить в эклиптические координаты λ, β .

Из сферического треугольника, вершинами которого являются полюс экватора, полюс эклиптики и положение светила, получаются следующие известные из Сферической астрономии формулы:

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda &= \cos \delta \sin \alpha \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon \\ \sin \beta &= -\cos \delta \sin \alpha \sin \epsilon + \sin \delta \cos \epsilon. \end{aligned} \quad (18)$$

Через ϵ обозначена наклонность эклиптики к экватору. Ее можно взять из таблицы III.

Если нет логарифмов сложения и вычитания (переход к эклиптической системе координат может встретиться лишь при логарифмическом вычислении орбиты), то формулы (18) можно привести к логарифмическому виду, полагая

$$\begin{aligned} m \sin M &= \sin \delta \\ m \cos M &= \cos \delta \sin \alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

Это даст

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda &= m \cos (M - \epsilon) \\ \sin \beta &= m \sin (M - \epsilon). \end{aligned} \quad (20)$$

Вычисление эклиптических координат всегда должно быть тщательно проконтролировано. Прекрасный контроль дают формулы

$$\sin \frac{1}{2} (\lambda - \alpha) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} (\lambda + \alpha) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta + \beta)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta - \beta) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} (\lambda + \alpha) \sec \frac{1}{2} (\lambda - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\lambda + \alpha) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\lambda - \alpha) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta + \beta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta - \beta),$$

получающиеся применением к вышеуказанному треугольнику формул Деламбра и аналогий Непера.

Если вычисление производится по формулам (19) и (20), то можно для контроля взять формулы

$$\sin (\lambda - \alpha) = 2 \cos \alpha \sec \beta m \sin \frac{1}{2} \varepsilon \sin (M - \frac{1}{2} \varepsilon)$$

$$\sin \frac{1}{2} (\delta - \beta) = \sec \frac{1}{2} (\delta + \beta) m \sin \frac{1}{2} \varepsilon \cos (M - \frac{1}{2} \varepsilon).$$

ГЛАВА VI.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ.

Для вновь открытых малых планет очень часто вычисляют сначала круговую орбиту. Хотя строго по круговой орбите не движется ни одна планета, тем не менее в огромном большинстве встречающихся на практике случаев круговая орбита представляет движение планеты в течение 1—2 месяцев с точностью, достаточной для дальнейших наблюдений (в особенности для наблюдений фотографических, требующих значительно менее точной эфемериды). Это объясняется как тем, что эксцентриситеты орбит малых планет обычно не очень велики (для первых 1100 малых планет средняя величина эксцентриситета равна 0.15), так и тем, что малые планеты, вследствие их слабости, открываются преимущественно вблизи перигелия, т. е. в такой части орбиты, которая с большой точностью может быть заменена окружностью.

Таким образом, круговая орбита обычно вполне обеспечивает дальнейшее продолжение наблюдений, а на первых порах после открытия только это и требуется. Пока не будут получены наблюдения, охватывающие значительный промежуток времени, все равно надежная эллиптическая орбита не может быть вычислена.

Для получения круговой орбиты, определяемой всего четырьмя элементами, — а именно Ω , i , a и u_0 (аргумент широты для определенного момента t_0), — достаточно иметь только два наблюдения; тогда как для вычисления эллиптической орбиты требуются три (иногда четыре) наблюдения и притом разделенные не слишком различными интервалами времени.

Можно еще отметить, что качество круговой орбиты менее зависит от точности наблюдений, нежели качество эллиптической

орбиты, вследствие чего для вычисления такой орбиты могут быть использованы приближенные наблюдения, совершенно не пригодные (особенно при малых интервалах времени) для вычисления эллиптической орбиты. По той же причине при вычислении круговой орбиты можно пренебречь исправлением наблюдений за параллакс.

Задача о вычислении круговой орбиты выделяется своей простотой среди других проблем определения орбит планет и комет по их наблюденным положениям. Поэтому естественно начинать изучение определения орбит именно с этой задачи.

Общепринятый метод определения круговой орбиты состоит в нахождении путем нескольких проб радиуса орбиты a , после чего вычисление остальных элементов производится весьма просто. Этот метод может быть представлен в различных формах. Мы приведем два варианта: один — основанный на употреблении экваториальных координат, другой — использующий эклиптические координаты. Определение круговой орбиты в эклиптических координатах может быть весьма хорошо приспособлено к логарифмическим вычислениям, но это достигается ценою дополнительных преобразований и некоторого усложнения формул.

Вычисление круговой орбиты производится обычно с пятью знаками.

§ 47. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ В ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ.

Пусть имеем два наблюдения планеты t_1, α_1, δ_1 и t_2, α_2, δ_2 . Вместо прямых восхождений и склонений введем направляющие косинусы

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \cos \delta_i \cos \alpha_i \\ \mu_i &= \cos \delta_i \sin \alpha_i \\ \nu_i &= \sin \delta_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2).$$

Обозначим через ρ_i геоцентрическое расстояние светила в момент наблюдения t_i , а через X_i, Y_i, Z_i — прямоугольные экваториальные координаты Солнца в тот же момент.

Применив уравнения (V, 1) к каждому из наблюдений, получим следующие выражения для гелиоцентрических координат планеты

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \rho_i \mu_i - X_i \\ y_i &= \rho_i \lambda_i - Y_i \\ z_i &= \rho_i \nu_i - Z_i \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2). \quad (1)$$

Пусть, далее, a есть радиус круговой орбиты рассматриваемой планеты; так что

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = a^2, \quad (i = 1, 2).$$

Возводя равенства (1) в квадрат и складывая их почленно, получим два уравнения.

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \rho_1^2 + 2\rho_1 R_1 \cos \psi_1 + R_1^2 \\ a^2 &= \rho_2^2 + 2\rho_2 R_2 \cos \psi_2 + R_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

связывающие три неизвестные величины a, ρ_1, ρ_2 . В этих уравнениях мы положили

$$R_i \cos \psi_i = -(\lambda_i X_i + \mu_i Y_i + \nu_i Z_i)$$

$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2,$$

так что R_i есть радиус-вектор Солнца в момент t_i , а угол ψ_i — это угол между направлением на планету (направляющие косинусы λ_i, μ_i, ν_i) и направлением, обратным направлению на Солнце (имеющим направляющие косинусы $-X_i/R_i, -Y_i/R_i, -Z_i/R_i$).

Положение планеты в орбите мы будем определять углом v , отсчитываемым от некоторой точки орбиты, которую мы пока не фиксируем. Обозначим значения этого угла в моменты наблюдений через v_1 и v_2 . Дуга $v_2 - v_1$, измеряющая угол между направлениями из центра Солнца на точки $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$, дается формулой

$$a^2 \cos(v_2 - v_1) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

В случаях, обычно встречающихся на практике, дуга $v_2 - v_1 = 2f$ мала, поэтому последнему соотношению целесообразно придать такую форму:

$$\sin^2 f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2). \quad (3)$$

Итак, взяв любое значение a , мы можем найти, при помощи уравнений (2), соответствующие ρ_1, ρ_2 , после чего формулы (1) дадут гелиоцентрические координаты; наконец по формуле (3) вычислим соответствующее значение f . Это значение f , полученное из чисто геометрических соотношений, мы назовем геометрическим и обозначим через f_g . Очевидно f_g есть функция a .

С другой стороны формулы эллиптического движения показывают (см. § 13), что движение по кругу совершается равномерно со скоростью, равной $ka^{-\frac{3}{2}}$. Следовательно

$$v_2 - v_1 = ka^{-\frac{3}{2}} (t_2 - t_1),$$

откуда

$$f = \frac{1}{2} ka^{-\frac{3}{2}} (t_2 - t_1). \quad (4)$$

Это значение f , полученное из динамических условий движения по кругу, мы назовем динамическим и обозначим через f_d .

Круговая орбита, удовлетворяющая взятым наблюдениям, получится при том значении a , для которого $f_g = f_d$.

Уравнение

$$f_g - f_d = 0, \quad (5)$$

левую часть которого мы можем вычислить для любого значения a , решается обычными приемами численного решения уравнений. Применение простейшего из этих приемов — способа пропорциональных частей (*regula falsi*) — после 3—5 проб приводит к цели.

Чтобы покончить с определением a , остается лишь заметить, что решение уравнений (2) относительно геоцентрических расстояний производится по формуле

$$\rho_i = -R_i \cos \psi_i + \sqrt{a^2 - (R_i \sin \psi_i)^2}. \quad (6)$$

Перейдем теперь к вычислению остальных элементов. Так как круговая орбита вычисляется прежде всего для того, чтобы возможно скорее дать эфемериду, то естественно начать с вычисления направляющих косинусов P и Q . Поскольку у круговой орбиты нет перигелия, мы будем под P_x, P_y, P_z разумеать направляющие косинусы радиуса-вектора той точки орбиты, от которой отсчитываются углы v . Сообразно с этим Q_x, Q_y, Q_z будут направляющие косинусы радиуса-вектора той точки орбиты, для которой $v = 90^\circ$.

Формулы (III, 33) в настоящем случае дают

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= P_x a \cos v_1 + Q_x a \sin v_1 \\ x_2 &= P_x a \cos v_2 + Q_x a \sin v_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и аналогичные равенства для двух других координат.

Так как начало счета углов v еще не фиксировано, то этим произволом можно воспользоваться, как заметил Штраке, для упрощения вычисления P и Q . Почленно складывая и вычитая равенства (7), получим

$$\frac{1}{2}(x_2 + x_1) = P_x a \cos \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \cos f + Q_x a \sin \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \cos f$$

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = -P_x a \sin \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \sin f + Q_x a \cos \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \sin f.$$

Условимся выбрать начало счета углов v так, чтобы было $\frac{1}{2}(v_2 + v_1) = 0$, т. е., иначе говоря, будем считать этот угол от радиуса-вектора, соответствующего моменту $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$.

При этом условии, получим

$$P_x = \frac{x_2 + x_1}{2a} \sec f, \quad Q_x = \frac{x_2 - x_1}{2a} \operatorname{cosec} f,$$

и аналогичные формулы для двух других пар направляющих косинусов.

Примечание. При решении уравнения (5) нужно для различных значений a вычислять, по формуле (3), соответствующие значения f_g . Эту величину можно выразить непосредственно через ρ_1, ρ_2 , так что не придется при каждой гипотезе относительно a находить гелиоцентрические координаты x_i, y_i, z_i .

Действительно, подставляя выражения (1) в формулу (3), получим

$$\sin^2 f = \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2} (A \rho_1 + B \rho_2 + C \rho_1 \rho_2 + D), \quad (8)$$

где,

$$2A = -(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2)$$

$$2B = \lambda_1 X_2 + \mu_1 Y_2 + \nu_1 Z_2$$

$$2C = \lambda_2 X_1 + \mu_2 Y_1 + \nu_2 Z_1$$

$$2D = -(X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2).$$

Вычисление по формуле (8) конечно короче, нежели по формулам (1), (3). Но надо принять во внимание: необходимость вычисления коэффициентов A, B, C, D ; необходимость контроля этих коэффициентов [такой контроль получим, сравнив, для первого взятого значения a , величину f_g , вычисленную по формуле (8) — с одной стороны, и вычисленную по формулам (1), (3) — с другой]; и, наконец, необходимость вычисления x, y, z для последнего значения a . Учитывая все это, а также то, что вычислять f_g обычно приходится всего для 3 — 4 значений a , приходится признать, что употребление формулы (8) особых преимуществ не представляет.

§ 48. СОПОСТАВЛЕНИЕ ФОРМУЛ И ПРИМЕР.

Исходными данными являются следующие величины (все координаты отнесены к экватору и равнодействию либо начала года, либо нормальной эпохи, напр. 1925.0 или 1950.0):

Моменты наблюдений	Прямые восхождения и склонения планеты		Прямоугольные координаты Солнца		
t_1	α_1	δ_1	X_1	Y_1	Z_1
t_2	α_2	δ_2	X_2	Y_2	Z_2

Прежде всего находим

$$R_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \quad R_2^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2.$$

Полезно сравнить эти величины с непосредственно взятыми из эфемерид R_1 и R_2 — это дает хороший контроль координат Солнца. Далее вычисляем направляющие косинусы

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \delta_1 \cos \alpha_1 & \lambda_2 &= \cos \delta_2 \cos \alpha_2 \\ \mu_1 &= \cos \delta_1 \sin \alpha_1 & \mu_2 &= \cos \delta_2 \sin \alpha_2 \\ \nu_1 &= \sin \delta_1 & \nu_2 &= \sin \delta_2 \end{aligned}$$

и вспомогательные величины

$$\begin{aligned} C_1 &= R_1 \cos \psi_1 = -(\lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1) \\ C_2 &= R_2 \cos \psi_2 = -(\lambda_2 X_2 + \mu_2 Y_2 + \nu_2 Z_2) \\ S_1^2 &= (R_1 \sin \psi_1)^2 = R_1^2 - (R_1 \cos \psi_1)^2 \\ S_2^2 &= (R_2 \sin \psi_2)^2 = R_2^2 - (R_2 \cos \psi_2)^2. \end{aligned}$$

После этого переходим к гипотезам относительно a . Для каждой величины a вычисляем

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{a^2 - S_1^2} - C_1 & \rho_2 &= \sqrt{a^2 - S_2^2} - C_2 \\ x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1 & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2 \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1 & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2 \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1 & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2 \end{aligned}$$

Контроль: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2, \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = a^2$

$$\sin^2 f_g = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)$$

$$f_d = \frac{\frac{1}{2} k (t_2 - t_1)}{a \sqrt{a}}, \quad \frac{1}{2} k^\circ = 0^\circ.49280.$$

Величину a варьируем до тех пор, пока не будет удовлетворено уравнение

$$f_g - f_d = 0.$$

За исходные значения можно взять следующие:

$$\begin{array}{lll} a = 2.5 & a^2 = 6.25 & a \sqrt{a} = 3.95285 \\ = 2.7 & = 7.29 & = 4.43656 \end{array}$$

Когда найдено окончательное значение a , то исправляем моменты наблюдений за абберационное время. Исправленные моменты будут ¹⁾

$$t_1^\circ = t_1 - A\rho_1, \quad t_2^\circ = t_2 - A\rho_2,$$

где

$$A = 0^\circ.000577.$$

Затем определяем среднее суточное движение n и момент t_0 от которого ведется счет углов v :

$$n = \frac{2f}{t_2^\circ - t_1^\circ}, \quad t_0 = \frac{1}{2} (t_1^\circ + t_2^\circ).$$

Контроль:

$$n = \frac{k}{a \sqrt{a}}, \quad k^\circ = 0^\circ.98561.$$

Переходим к вычислению величин P и Q , определяющих положение орбиты. Для этого берем значения координат $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, полученные в последней гипотезе. Имеем

$$aP_x = \frac{1}{2} \sec f \cdot (x_2 + x_1) \quad aQ_x = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} f \cdot (x_2 - x_1)$$

$$aP_y = \frac{1}{2} \sec f \cdot (y_2 + y_1) \quad aQ_y = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} f \cdot (y_2 - y_1)$$

$$aP_z = \frac{1}{2} \sec f \cdot (z_2 + z_1) \quad aQ_z = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} f \cdot (z_2 - z_1).$$

Контроль:

$$a^2 (P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z) = 0,$$

$$(aP_x)^2 + (aP_y)^2 + (aP_z)^2 = a^2, \quad (aQ_x)^2 + (aQ_y)^2 + (aQ_z)^2 = a^2.$$

¹⁾ Строго говоря это исправление следовало сделать раньше, с тем, чтобы для вычисления f_d употреблялись уже исправленные моменты.

Представление наблюдений. Для того, чтобы вычислить α и δ , соответствующие наблюденному моменту t , служат формулы

$$t^0 = t - Ap, \quad A = 0^d.00577$$

$$v = n(t^0 - t_0)$$

$$\rho \cos \delta \cos \alpha = aP_x \cos v + aQ_x \sin v + X$$

$$\rho \cos \delta \sin \alpha = aP_y \cos v + aQ_y \sin v + Y$$

$$\rho \sin \delta = aP_z \cos v + aQ_z \sin v + Z.$$

Координаты Солнца X, Y, Z берутся из эфемерид для момента t . При нахождении t^0 достаточно иметь грубо приближенное значение ρ .

Вычисление эклиптических элементов. С точки зрения возможного отождествления вновь открытой планеты с уже известными представляет интерес вычисление элементов i, Ω , определяющих положение плоскости орбиты относительно эклиптики. Для этого служат формулы (III, 34), которые можно написать так:

$$a \sin i \sin \omega = aP_x \cos \varepsilon - aP_y \sin \varepsilon$$

$$a \sin i \cos \omega = aQ_x \cos \varepsilon - aQ_y \sin \varepsilon$$

$$a \sin \Omega = (aP_y \cos \omega - aQ_y \sin \omega) \sec \varepsilon$$

$$a \cos \Omega = aP_x \cos \omega - aQ_x \sin \omega.$$

Здесь ω — расстояние от узла до той точки орбиты, от которой отсчитываются углы v . Таким образом ω есть не что иное, как аргумент широты u_0 в момент t_0 .

Пример. Для открытой в Симеизе планеты ¹⁾ 1931 TP были получены следующие наблюдения:

1931	<i>T. U.</i>	1931.0 ^a	1931.0 ^b
Октябрь 11	23 ^h 32 ^m .6	27° 2' 1"	+ 10° 13' 46"
Ноябрь 10	19 8.3	20 15 0	+ 7 31 56

¹⁾ Вновь открытая малая планета получает порядковый номер лишь тогда, когда ее орбита может считаться достаточно надежно определенной. До этого она получает предварительное обозначение. В настоящее время (с 1925 года) принята система предварительных обозначений, предложенная Боуэром (Bower, *Astr. Nachr.*, Bd. 223, стр. 149), которая заключается в следующем. Малая планета обозначается годом открытия и двумя буквами: первая указывает время открытия (A — для планет, открытых 1 — 15 января, B — для планет, открытых 16 — 31 января, и т. д.); вторая буква указывает порядок регистрации открытия в Берлинском Вычислительном Институте (A — для первой планеты, открытой в соответствующий двухнедельный промежуток времени, B — для второй, ..., Z — для 25-й, A_1 — для 26-й и т. д.).

Подготовительные вычисления ведем в два столбца, соответственно каждому моменту наблюдения:

	(t_1)	(t_2)	
Октябрь	11 ^d .9810	41 ^d .7974	$t_2 - t_1 = 29^d.8164$
α	27 ^o .034	20 ^o .250	$\frac{1}{2} k(t_2 - t_1) = 14^o.6935$
δ	+ 10 ^o .229	+ 7 ^o .532	
$\cos \alpha$	+ 0.890 74	+ 0.938 19	
$\sin \alpha$	+ 0.454 52	+ 0.346 12	
$\cos \delta$	+ 0.984 11	+ 0.991 37	
λ	+ 0.876 59	+ 0.930 09	
μ	+ 0.447 30	+ 0.343 13	
ν	+ 0.177 58	+ 0.131 08	
$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 =$	1.000 02	0.999 99	
X	— 0.950 91	— 0.669 90	
Y	— 0.278 04	— 0.668 86	
Z	— 0.120 60	— 0.290 12	
R^2	0.996 08	0.980 31	
C	+ 0.979 34	+ 0.890 60	
S^2	0.036 97	0.187 14	

Переходим к определению a

a	2.5	2.7	2.270	2.277 37
a^2	6.250 00	7.290 00	5.152 90	5.186 41
$a^2 - S_1^2$	6.213 03	7.253 03	5.115 93	5.149 44
$\sqrt{a^2 - S_1^2}$	2.492 60	2.693 14	2.261 84	2.269 24
$a^2 - S_2^2$	6.062 86	7.102 96	4.965 76	4.999 27
$\sqrt{a^2 - S_2^2}$	2.462 29	2.665 14	2.228 40	2.235 90
ρ_1	1.513 26	1.713 80	1.282 50	1.289 90
ρ_2	1.571 69	1.774 54	1.337 80	1.345 30
x_1	+ 2.277 42	+ 2.453 21	+ 2.075 14	+ 2.081 62
y_1	+ 0.954 92	+ 1.044 62	+ 0.851 70	+ 0.855 01
z_1	+ 0.389 32	+ 0.424 94	+ 0.348 35	+ 0.349 66
x_2	+ 2.131 71	+ 2.320 38	+ 1.914 17	+ 1.921 15
y_2	+ 1.208 15	+ 1.277 76	+ 1.127 90	+ 1.130 47
z_2	+ 0.496 14	+ 0.522 73	+ 0.465 48	+ 0.466 46
$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	+ 6.201 64	+ 7.249 28	+ 5.094 95	+ 5.128 77
$\frac{1}{2} a^{-2} (\quad)$	+ 0.496 131	+ 0.497 207	+ 0.494 377	+ 0.494 443
$\sin^2 f_g$	0.003 869	0.002 793	0.005 623	0.005 557
$\sin f_g$	0.062 20	0.052 85	0.074 99	0.074 545
$f_g =$	3 ^o .566	3 ^o .030	4 ^o .301	4 ^o .275
$a\sqrt{a}$	3.952 85	4.436 56	3.420 10	3.436 77
$f_a =$	3 ^o .717	3 ^o .312	4 ^o .296	4 ^o .275
$f_g - f_a =$	— 0 ^o .151	— 0 ^o .282	+ 0 ^o .005	0 ^o .000

После того как вычислены две первые гипотезы, следующее значение $a = 2.5 + x$ находим при помощи пропорции

$$\frac{x}{0.2} = \frac{-0.151}{-0.282 + 0.151},$$

дающей $x = -0.2305$. Округляя до четырех значущих цифр, берем $a = -2.270$. После третьей гипотезы, вычисленной с этим значением, полагая опять $a = 2.270 + x$, будем иметь

$$\frac{x}{0.23} = \frac{0.005}{0.005 + 0.151},$$

откуда

$$a = 2.277\ 37.$$

Вычисление элементов располагаем так:

$$\begin{array}{ll} Ap_1 = 0^d.0074 & Ap_2 = 0^d.0078 \\ t_1^0 = 11.9736 & t_2^0 = 41.7896 \\ t_2^0 - t_1^0 = 29.8160 & n = 0^0.286\ 76 \\ t_0 = 26.8816 & \text{октября 1931 г.} \end{array}$$

Контроль:

$$n = ka^{-\frac{3}{2}} = 0^0.286\ 78.$$

$\frac{1}{2} \sec f$	0.501 395	$\frac{1}{2} \operatorname{cosec} f$	6.707 36
$x_2 + x_1$	+ 4.002 77	$x_2 - x_1$	— 0.160 47
$y_2 + y_1$	+ 1.985 48	$y_2 - y_1$	+ 0.275 46
$z_2 + z_1$	+ 0.816 12	$z_2 - z_1$	+ 0.116 80
aP_x	+ 2.006 97	aQ_x	— 1.076 33
aP_y	+ 0.995 51	aQ_y	+ 1.847 61
aP_z	+ 0.409 20	aQ_z	+ 0.783 42

Контроль:

$$a^2 (P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z) = -0.000\ 02.$$

Переходим к представлению исходных наблюдений, что дает полный контроль всей проделанной работы (остаются непроконтролированными лишь координаты Солнца).

t^0	11 ^d .9736	41 ^d .7896
$t^0 - t_0$	— 14.9080	+ 14.9080
v	— 4 ^o .275	+ 4 ^o .275
$\cos v$	+ 0.997 22	+
$\sin v$	— 0.074 54	+
$\rho \cos \delta \cos \alpha$	+ 1.130 71	+ 1.251 26
$\rho \cos \delta \sin \alpha$	+ 0.576 98	+ 0.461 60
$\rho \sin \delta$	+ 0.229 07	+ 0.176 34
$\operatorname{tg} \alpha$	+ 0.510 28	+ 0.368 91
$\rho \cos \delta$	+ 1.269 41	+ 1.333 70
$\operatorname{tg} \delta$	+ 0.180 45	+ 0.132 22
$\alpha =$	27 ^o .034	20 ^o .2495
$\delta =$	+ 10.229	+ 7.532

Представление наблюдений (всегда дается в смысле Н.-В.)

$$\Delta z = 0^{\circ}.000 + 0^{\circ}.0005$$

$$\Delta \delta = 0.000 \quad 0.000$$

указывает на отсутствие вычислительных ошибок.

Остается определить i и Ω . Так как для тех целей, для которых эти элементы определяются, их достаточно знать лишь грубо приближенно, то достаточно вычисление вести с 3—4 знаками.

$\cos \epsilon$	0.9174	$\omega =$	231 $^{\circ}.6$
$\sin \epsilon$	0.3979	$a \sin \Omega$	+ 0.905
$a \sin i \sin \omega$	— 0.0207	$a \cos \Omega$	— 2.090
$a \sin i \cos \omega$	— 0.0164	$\operatorname{tg} \Omega$	— 0.433
$\operatorname{tg} \omega$	+ 1.26	$\Omega =$	156 $^{\circ}.6$
$\cos \omega$	— 0.621	$i =$	0 $^{\circ}.66$
$a \sin i$	+ 0.0264		
$\sin i$	+ 0.0116		

В заключение сопоставляем полученные результаты:

$$t_0 = 1931 \text{ октябрь } 26$$

$$n = 0^{\circ}.28677 = 1032''.4$$

$$\Omega = 156^{\circ}.6$$

$$i = 0^{\circ}.66$$

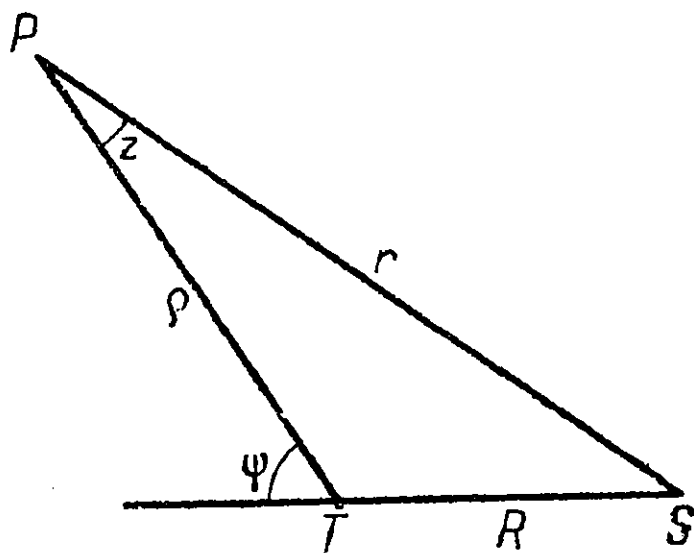
$$\omega = 231^{\circ}.6.$$

§ 49. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ В ЭКЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ (Способ Гаусса).

Если вычисление производится при помощи логарифмов, то зачастую предпочитают вычислять круговую орбиту исходя не из экваториальных, а из эклиптических координат планеты. Пусть λ_1, β_1 , и λ_2, β_2 — долготы и широты планеты, соответствующие моментам наблюдений t_1 и t_2 . Обозначим через L_1, R_1 и L_2, R_2 долготы и радиус-векторы Земли в те же моменты.

Метод определения круговой орбиты остается тот же, как и в предыдущем случае — изменяются лишь формулы, служащие для вычисления гелиоцентрической дуги $2f = v_2 - v_1$

геометрическим путем. При употреблении эклиптических координат эти формулы могут быть приведены, как показал Гаусс¹⁾, к весьма удобному для логарифмических вычислений виду.



Черт. 13.

¹⁾ Гаусс сообщил свой способ Клинкерфюсу, которым он и был опубликован в 1871 г.

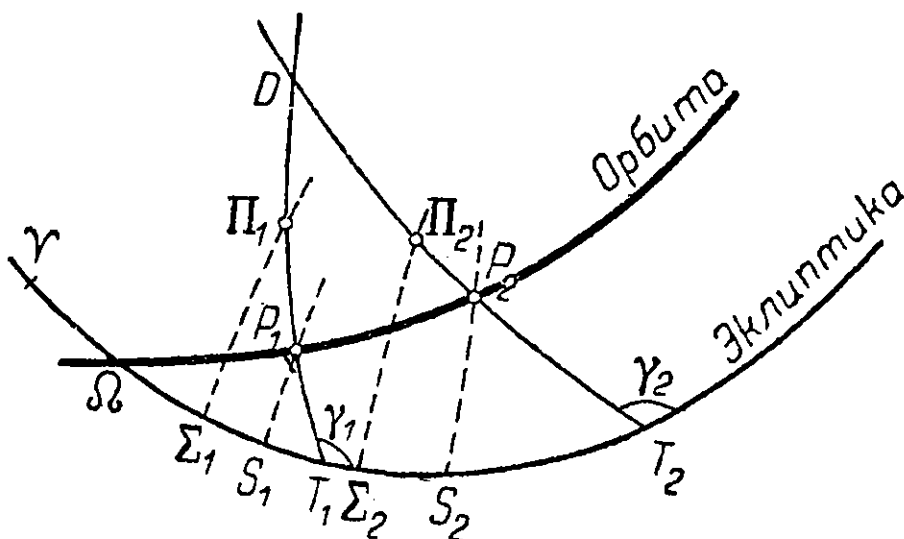
Обратимся прежде всего к треугольнику (черт. 13), образованному Землей (T), Солнцем (S) и планетой (P). Обозначим через z и $180^\circ - \psi$ углы этого треугольника, противолежащие радиусам-векторам Земли и планеты. Рассматривая такой треугольник для каждого наблюдения и замечая, что радиусы-векторы планеты равны, в разбираемом случае, a , получим

$$\frac{R_i}{\sin z_i} = \frac{a}{\sin \psi_i} = \frac{\rho_i}{\sin (\psi_i - z_i)}.$$

Следовательно для вычисления ρ_i мы можем взять, вместо формул (6), такие:

$$\sin z_i = \frac{R_i \sin \psi_i}{a}, \quad \rho_i = \frac{R_i \sin (\psi_i - z_i)}{\sin z_i}. \quad (9)$$

Гаусс показал, что искомая дуга f_g может быть достаточно удобно выражена непосредственно через углы z_i , так что вычисление ρ_1 и ρ_2 в каждой гипотезе становится излишним.



Черт. 14.

Обратимся к черт. 14, изображающему гелиоцентрическую небесную сферу. Положения Земли в моменты наблюдений пусть проектируются в точки эклиптики T_1 и T_2 . Через P_1 и P_2 обозначим соответствующие гелиоцентрические положения планеты. На этой же сфере отметим и геоцентрические положения планеты Π и Π_2 ; т. е. точки пересечения сферы с прямыми, проведенными из центра Солнца параллельно прямой Земля—планета. Очевидно три точки— T_1 , P_1 и Π_1 —лежат на большом круге сферы, точно так же, как и точки T_2 , P_2 , Π_2 .

Проведем через положения планеты Π_1 , Π_2 круги широт и заметим, что $\Sigma_1 \Pi_1 = \beta_1$, $T_1 \Sigma_1 = L_1 - \lambda_1$, а дуга $T_1 \Pi_1$ измеряет внешний угол треугольника Земля—Солнце—планета, который мы уже обозначили через ψ_1 . Из сферического треугольника $\Sigma_1 T_1 \Pi_1$, обозначая угол наклона $T_1 D$ к эклиптике через γ_1 , получим

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi_1 &= \cos \beta_1 \cos (\lambda_1 - L_1) \\ \sin \psi_1 \cos \gamma_1 &= \cos \beta_1 \sin (\lambda_1 - L_1) \\ \sin \psi_1 \sin \gamma_1 &= \sin \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi_2 &= \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - L_2) \\ \sin \psi_2 \cos \gamma_2 &= \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_2) \\ \sin \psi_2 \sin \gamma_2 &= \sin \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

Эти формулы позволяют вычислить не только ψ_1 , ψ_2 , входящие в соотношения (9), но и углы γ_1 , γ_2 , которые сейчас нам понадобятся.

Наша задача, заключающаяся в вычислении дуги $P_1P_2 = 2f_g$, будет решена, если мы найдем в треугольнике DP_1P_2 стороны $P_1D = d_1$, $P_2D = d_2$ и угол между ними η . В самом деле

$$\cos 2f_g = \cos d_1 \cos d_2 + \sin d_1 \sin d_2 \cos \eta. \quad (11)$$

Обозначим дуги T_1D и T_2D соответственно через φ_1 и φ_2 и заметим что $T_1P_1 = \psi_1 - z_1$, $T_2P_2 = \psi_2 - z_2$, ибо эти последние дуги измеряют углы между гелиоцентрическими направлениями на планету и на Землю. Таким образом

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= DP_1 = T_1D - T_1P_1 = \varphi_1 - \psi_1 + z_1, \\ d_2 &= DP_2 = T_2D - T_2P_2 = \varphi_2 - \psi_2 + z_2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Теперь нам остается только определить φ_1 , φ_2 и η . Для этого применим уравнения Делабра к треугольнику T_1DT_2 , в котором известны сторона $T_1T_2 = L_2 - L_1$ и два прилежащие угла $180^\circ - \gamma_2$ и γ_1 . Получим

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin \frac{1}{2} (L_2 - L_1) \sin \frac{1}{2} (\gamma_2 + \gamma_1) \\ \sin \frac{1}{2} \eta \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos \frac{1}{2} (L_2 - L_1) \sin \frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1) \\ \cos \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) &= \sin \frac{1}{2} (L_2 - L_1) \cos \frac{1}{2} (\gamma_2 + \gamma_1) \\ \cos \frac{1}{2} \eta \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) &= \cos \frac{1}{2} (L_2 - L_1) \cos \frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Уравнения (10 и 10a), (13), (9), (12) и (11) полностью решают задачу о вычислении дуги f_g , соответствующей взятому значению a . Радиус орбиты a должен варьироваться до тех пор, пока получаемая таким путем дуга f_g не станет равной своему динамическому значению

$$f_d = \frac{\frac{1}{2} k (t_2 - t_1)}{a \sqrt{a}}.$$

В заключение заметим, что формулу (11) можно заменить другой, более удобной для нахождения малого угла f_g . Так как

$$\cos d_1 \cos d_2 = \frac{1}{2} \cos (d_1 - d_2) + \frac{1}{2} \cos (d_1 + d_2)$$

$$\sin d_1 \sin d_2 = \frac{1}{2} \cos (d_1 - d_2) - \frac{1}{2} \cos (d_1 + d_2),$$

то после некоторых легко усматриваемых преобразований получим

$$\sin^2 f_g = \left(\sin \frac{\eta}{2} \sin \frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 + \left(\cos \frac{\eta}{2} \sin \frac{d_1 - d_2}{2} \right)^2.$$

Вычисление элементов. Прежде всего находим гелиоцентрические долготы l_1, l_2 и широты b_1, b_2 планеты. Для этого берем следующие соотношения между элементами треугольников $T_1P_1S_1$ и $T_2P_2S_2$:

$$\left. \begin{aligned} \cos b_i \cos (l_i - L_i) &= \cos (\psi_i - z_i) \\ \cos b_i \sin (l_i - L_i) &= \sin (\psi_i - z_i) \cos \gamma_i \\ \sin b_i &= \sin (\psi_i - z_i) \sin \gamma_i \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$(i = 1, 2)$$

Затем из треугольников $\Omega P_1 S_1$ и $\Omega P_2 S_2$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin (l_1 - \Omega) &= \operatorname{tg} b_1 \\ \operatorname{tg} i \sin (l_2 - \Omega) &= \operatorname{tg} b_2, \end{aligned}$$

так как угол этих треугольников при точке Ω есть нечто иное, как наклон орбиты i .

Второе равенство напомним так:

$$\operatorname{tg} i [\sin (l_2 - l_1) \cos (l_1 - \Omega) + \cos (l_2 - l_1) \sin (l_1 - \Omega)] = \operatorname{tg} b_2,$$

откуда окончательно будем иметь для определения наклонности орбиты i и долготы восходящего узла Ω такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin (l_1 - \Omega) &= \operatorname{tg} b_1 \\ \operatorname{tg} i \cos (l_1 - \Omega) &= \operatorname{tg} b_2 \operatorname{cosec} (l_2 - l_1) - \\ &\quad - \operatorname{tg} b_1 \cotg (l_2 - l_1). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Наконец для вычисления аргументов широты $\Omega P_1 = u_1$, $\Omega P_2 = u_2$ из тех же треугольников находим

$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg} (l_1 - \Omega) \sec i, \quad \operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg} (l_2 - \Omega) \sec i.$$

Этим и заканчивается вычисление элементов, ибо зная аргумент широты для какого-либо момента и суточное движение

$$n = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1} = k a^{-\frac{3}{2}},$$

мы можем вычислить положение планеты в орбите в любой момент.

Для вычисления эфемериды естественнее всего определить постоянные Гаусса.

§ 50. СОПОСТАВЛЕНИЕ ФОРМУЛ И ПРИМЕР.

Полученные из наблюдений прямые восхождения и склонения обращаем в долготы и широты. Из ежегодника находим логарифмы радиуса-вектора и долготы Солнца. Долготы Солнца $L_\odot$ перечисляем в долготы Земли по формуле $L = L_\odot \pm 180^\circ$. Конечно координаты Земли и планеты должны быть отнесены к одной и

той же эклиптике и равноденствию. Исходные данные получаем в таком виде:

Моменты* наблюдений	Долготы и широты планеты		Координаты Земли	
t_1	λ_1	β_1	L_1	$\lg R_1$
t_2	λ_2	β_2	L_2	$\lg R_2$

Вычисление вспомогательных величин. Находим $\psi_1, \gamma_1, \psi_2, \gamma_2$ по формулам (10) или же таким, легко из них выводимым:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \gamma_1 &= \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{cosec} (\lambda_1 - L_1) \\ \operatorname{tg} \psi_1 &= \operatorname{tg} (\lambda_1 - L_1) \sec \gamma_1 \\ \operatorname{tg} \gamma_2 &= \operatorname{tg} \beta_2 \operatorname{cosec} (\lambda_2 - L_2) \\ \operatorname{tg} \psi_2 &= \operatorname{tg} (\lambda_2 - L_2) \sec \gamma_2,\end{aligned}$$

причем надо иметь в виду, что каждый из углов $\gamma_1, \gamma_2, \psi_1, \psi_2$ заключается в пределах от 0° до 180° .

Контроль:

$$\cos \psi_1 = \cos \beta_1 \cos (\lambda_1 - L_1), \quad \cos \psi_2 = \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - L_2).$$

Далее находим, при помощи уравнений (13),

$$\varphi_1, \varphi_2, \sin \frac{1}{2} \eta, \cos \frac{1}{2} \eta.$$

Наконец вычисляем

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= \varphi_1 - \psi_1, & \vartheta_2 &= \varphi_2 - \psi_2, \\ \frac{1}{2} k (t_2 - t_1), & & \lg \frac{1}{2} k^0 &= 9.692\,67_{-10}.\end{aligned}$$

Определение a . Для каждого значения $\lg a$ вычисляем

$$\begin{aligned}\sin z_1 &= \frac{R_1 \sin \psi_1}{a}, & \sin z_2 &= \frac{R_2 \sin \psi_2}{a}, \\ d_1 &= \vartheta_1 + z_1, & d_2 &= \vartheta_2 + z_2 \\ \sin^2 f_g &= \left(\sin \frac{\eta}{2} \sin \frac{d_2 + d_1}{2} \right)^2 + \left(\cos \frac{\eta}{2} \sin \frac{d_2 - d_1}{2} \right)^2 \\ f_d &= \frac{\frac{1}{2} k (t_2 - t_1)}{a^{1/2}}.\end{aligned}$$

Значения $\lg a$ изменяем до тех пор, пока не получится

$$f_g = f_d.$$

Начинать можно например с $\lg a = 0.40$ и 0.44 .

Вычисление элементов. По формулам (14) вычисляем гелиоцентрические координаты (l_1, b_1) и (l_2, b_2) . Затем по формулам (15) находим элементы i и Ω ; после чего формулы

$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg} (l_1 - \Omega) \sec i, \quad \operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg} (l_2 - \Omega) \sec i$$

дадут аргументы широты. Надо иметь в виду, что u_1 и u_2 должны всегда браться в тех же квадрантах, в каких находятся $l_1 - \Omega$ и $l_2 - \Omega$.

Контроль:

$$u_2 - u_1 = 2f_g = 2f_a.$$

Далее можно исправить моменты наблюдения за абберационное время:

$$\rho_1 = \frac{R_1 \sin(\psi_1 - z_1)}{\sin z_1}, \quad \rho_2 = \frac{R_2 \sin(\psi_2 - z_2)}{\sin z_2}$$

$$t_1^{\circ} = t_1 - A\rho_1, \quad t_2^{\circ} = t_2 - A\rho_2.$$

Наконец определяем среднее суточное движение и аргумент широты для эпохи t_0 :

$$n = \frac{u_2 - u_1}{t_2^{\circ} - t_1^{\circ}}.$$

Контроль:

$$n = ka^{-\frac{3}{2}}, \quad \lg k^{\circ} = 9.99370_{-10}.$$

$$u_0 = u_1 + n(t_0 - t_1^{\circ}) = u_2 + n(t_0 - t_2^{\circ}).$$

Представление наблюдений. Вычисляем постоянные Гаусса (они будут нужны и для вычисления эфемериды). Из формул § 23 берем например такие:

$$\sin a \sin A = \cos \Omega$$

$$\sin a \cos A = -\cos i \sin i$$

$$\sin b \sin B = \sin \Omega \cos \epsilon$$

$$\sin b \cos B = \cos i \cos \Omega \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon$$

$$\sin c \sin C = \sin \Omega \sin \epsilon$$

$$\sin c \cos C = \cos i \cos \Omega \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon.$$

Затем, исправив момент наблюдения t за абберационное время (для чего достаточно грубо прикинуть величину ρ), находим аргумент широты

$$t^{\circ} = t - A\rho,$$

$$u = u_0 + n(t^{\circ} - t_0).$$

Наконец формулы ($r = a$):

$$\rho \cos \delta \cos \alpha = r \sin a \sin (A + u) + X$$

$$\rho \cos \delta \sin \alpha = r \sin b \sin (B + u) + Y$$

$$\rho \sin \delta = r \sin c \sin (C + u) + Z$$

дадут прямое восхождение и склонение планеты для момента наблюдения t . Координаты Солнца должны быть взяты для момента t . Конечно, они должны относиться к тому же экватору и равноденствию, как и исходные данные.

Пример. Даны следующие наблюдения планеты 1931 LB:

Место	1931	T.U.	$\alpha_{1931.0}$	$\delta_{1931.0}$
Симеиз	Июнь 6	21 ^h 13 ^m .6	256° 14' 47"	— 13° 39' 13"
"	" 21	21 25.3	253 4 7	— 14 16 16

К указанным топоцентрическим координатам были приданы грубо прикинутые поправки за параллакс $p_a = -1''$ и $+1''$, $p_\delta = +5''$ и $+5''$ (этого можно было бы и не делать), после чего они были обращены в долготы и широты. Исходные данные и вычисление постоянных располагаем следующим образом:

$t_1 =$	6 ^d .8844	$t_2 =$	21 ^d .8926
$\lambda_1 =$	256° 28' 0"	$\lambda_2 =$	253° 25' 54"
$L_1 =$	255 10 53	$L_2 =$	269 31 15
$\lambda_1 - L_1 =$	+ 1 17 7	$\lambda_2 - L_2 =$	- 16 5 21
$\beta_1 =$	+ 9 9 7	$\beta_2 =$	+ 8 12 35
R_1	0.006 42	R_2	0.007 04
$\operatorname{tg} \beta_1$	9.207 11		9.159 19
$\operatorname{cosec} (\lambda_1 - L_1)$	1.649 16		0.557 32 _n
$\operatorname{tg} \gamma_1$	0.856 27		9.716 51 _n
$\gamma_1 =$	82° 4' 26"	$\gamma_2 =$	152° 29' 54"
$\sec \gamma_1$	0.860 45		0.052 08 _n
$\operatorname{tg} (\lambda_1 - L_1)$	8.350 95		9.460 04 _n
$\operatorname{tg} \psi_1$	9.2.1 40		9.512 12
$\psi_1 =$	9° 14' 28"	$\psi_2 =$	18° 0' 47"
$\cos \psi_1$	9.994 33	$\cos \psi_2$	9.978 18
$\sin \psi_1$	9.205 71		9.490 29
$R_1 \sin \psi_1$	9.212 13	$R_2 \sin \psi_2$	9.497 33
$\cos \beta_1$	9.994 44		9.995 53
$\cos (\lambda_1 - L_1)$	9.999 89		9.982 65
$(\cos \psi_1)$	9.994 33	$(\cos \psi_2)$	9.978 18
$\gamma_2 + \gamma_1 =$	234° 34' 20"	$\gamma_2 - \gamma_1 =$	70° 25' 28"
$\frac{1}{2} (\gamma_2 + \gamma_1) =$	117 17 10	$\frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1) =$	35 12 44
$L_2 - L_1 =$	14 20 22	$\frac{1}{2} (L_2 - L_1) =$	7 10 11
$\sin \frac{1}{2} (\gamma_2 + \gamma_1)$	9.948 77	$\sin \frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1)$	9.760 88
$\sin \frac{1}{2} (L_2 - L_1)$	9.096 24	$\cos \frac{1}{2} (L_2 - L_1)$	9.996 59
$\cos \frac{1}{2} (\gamma_2 + \gamma_1)$	9.661 28 _n	$\cos \frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1)$	9.912 23
$\sin \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$	9.045 01	$\cos \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)$	8.757 52 _m
$\sin \frac{1}{2} \eta \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$	9.757 47	$\cos \frac{1}{2} \eta \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)$	9.908 82
$\sec \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$	0.008 01	$\sec \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)$	0.001 08
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$	9.287 54	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)$	8.848 70 _n
$\frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) =$	10° 58' 21"	$\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) =$	- 4° 2' 15"
$\varphi_1 =$	6 56 6"	$\varphi_2 =$	15 0 36
$\vartheta_2 =$	- 2 18 22	$\vartheta_2 =$	- 3 0 11
$\sin \frac{1}{2} \eta$	9.765 48	$\cos \frac{1}{2} \eta$	9.909 90

$t_2 - t_1 =$	15 ^d .0082
$t_2 - t_1$	1.176 33
$\frac{1}{2} k(t_2 - t_1)$	0.869 00

Вычисление радиуса орбиты:

a	0.430 00	0.460 00	0.480 00
$\sin z_1$	8.782 13	8.752 13	8.732 13
$\sin z_2$	9.067 33	9 037 33	9.017 33
$z_1 =$	$3^\circ 28' 17''.5$	$3^\circ 14' 22''$	$3^\circ 5' 37''$
$z_2 =$	6 42 21.5	6 15 22	5 58 25
$d_1 =$	1 9 55.5	0 56 0	0 47 15
$d_2 =$	3 42 10.5	3 15 11	2 58 14
$d_2 + d_1 =$	4 52 6	4 11 11	3 45 29
$d_2 - d_1 =$	2 32 15	2 19 11	2 10 59
$\frac{1}{2} (d_2 + d_1) =$	2 26 3	2 5 35.5	1 52 44.5
$\frac{1}{2} (d_2 - d_1) =$	1 16 7	1 9 35.5	1 5 29.5
$\sin \dots$	8.628 10	8.562 59	8.515 73
$\sin \dots$	8.345 17	8.306 25	8.279 89
$\sin \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} (d_2 + d_1)$	8.393 58	8.328 07	8.281 21
$\cos \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} (d_2 - d_1)$	8.255 07	8.216 15	8.189 79
$(\dots)^2$	6.787 16	6.656 14	6.562 42
$Add.$	0.184 24	0.203 37	0.219 16
$(\dots)^2$	6.510 14	6.432 30	6.379 58
$\sin^2 f_g$	6.971 40	6.859 51	6.781 58
	8.485 70	8.429 75	8.390 79
$f_g = \{$	$1^\circ 45' 12''.4$ $1^\circ 75' 34$	$1^\circ 2' 29''$ $1^\circ 54' 14$	$1^\circ 24' 33''$ $1^\circ 40' 92$

a^3	1.290 00	1.380 00	1.440 00
$a^{3/2}$	0.645 00	0.690 00	0.720 00
f_a	0.224 00	0.179 00	0.149 00
$f_a =$	$1^\circ 67' 50$	$1^\circ 51' 01$	$1^\circ 40' 93$
$f_g - f_a =$	$+0^\circ 07' 84$	$+0^\circ 03' 13$	$-0^\circ 00' 01$

После того, как сделаны две первые пробы, полагаем $\lg a = 0.46 + x$ и определяем x из пропорции

$$\frac{x}{313} = \frac{0.03}{471}.$$

Так как $x = 0.01994$, то с некоторым округлением берем $x = 0.02$.
Переходим к вычислению элементов.

$\psi_1 =$	$9^\circ 14' 28''$	$\psi_2 =$	$18^\circ 0' 47''$
$z_1 =$	3 5 37	$z_2 =$	5 58 25
$\psi_1 - z_1 =$	6 8 51	$\psi_2 - z_2 =$	12 2 22
$\cos \gamma_1$	9.139 55	$\cos \gamma_2$	9.947 92 _n
$\sin (\psi_1 - z_1)$	9.029 74	$\sin (\psi_2 - z_2)$	9.319 29
$\sin \gamma_1$	9.995 83	$\sin \gamma_2$	9.664 43
$\cos b_1 \sin (l_1 - L_1)$	8.169 29	$\cos b_2 \sin (l_2 - L_2)$	9.267 21 _n
$\cos b_1 \cos (l_1 - L_1)$	9.997 49	$\cos b_2 \cos (l_2 - L_2)$	9.990 34
$\sec (. . .)$	5	$\sec (. . .)$	7 64

$\text{tg} (. . .)$	8.171 80	$\text{tg} (. . .)$	9.276 87 _n
$l_1 - L_1 =$	$+ 0^\circ 51' 3''$	$l_2 - L_2 =$	$- 10^\circ 42' 45''$
$\sin b_1$	9.025 57	$\sin b_2$	8.983 72
$\cos b_1$	9.997 54	$\cos b_2$	9.997 98
$\text{tg } b_1$	9.028 03	$\text{tg } b_2$	8.985 74
$\text{cotg} (l_2 - l_1)$	1.314 35	$l_2 =$	$258^\circ 48' 30''$
$-\text{tg } b_1 \text{cotg} (l_2 - l_1)$	0.342 38 _n	$l_0 =$	256 1 56
Add.	9.004 22	$\Omega =$	103 53 52
$\text{tg } b_2 \text{cosec} (l_2 - l_1)$	0.300 60	$i =$	12 51 27
$\text{tg } i \sin (l_1 - \Omega)$	9.028 03	$l_2 - l_1 =$	$2^\circ 46' 34''$
$\text{tg } i \cos (l_1 - \Omega)$	9.304 82 _n	$\text{cosec} (l_2 - l_1)$	1.314 86
$\sec (. . .)$	0.053 53 _n	$\text{tg } b_2 \text{cosec} (. . .)$	0.300 60
$\text{tg} (l_1 - \Omega)$	9.723 21 _n	$l_2 - \Omega =$	$154^\circ 54' 38''$
$l_1 - \Omega =$	$152^\circ 8' 4''$	$\sec i$	0.011 02
$\text{tg } i$	9.358 35	$\text{tg} (l_1 - \Omega)$	9.723 21 _n
$u^2 =$	$154^\circ 20' 52''$	$\text{tg} (l_2 - \Omega)$	9.670 44 _n
$u_2 =$	$151 31 46''$	$\text{tg } u_1$	9.734 23 _n
$u_2 - u_1 =$	2 49 6	$\text{tg } u_2$	9.681 46 _n
$(f) =$	1 24 33	$u_2 =$	$154.^\circ 3478$
		$u_1 =$	151.5294

$\sin (\psi_1 - z_1)$	9.029 74		9.319 29
$\text{cosec } z_1$	1.267 87		0.982 67
R_1	0.006 42		0.007 04
ρ_1	0.304 03	ρ_2	0.309 00
$A\rho_1$	8.065 21	$A\rho_2$	8.070 18
$A\rho_1 =$	0.0116	$A\rho_2 =$	0.0118
$t_1^\circ =$	6.8728	$t_2^\circ =$	21.8808
$u_2 - u_1 =$	$2.^\circ 8183$	$t_2^\circ - t_1^\circ =$	15.0080
$u_2 - u_1$	0.449 99	$n'' =$	676.73
$t_2^\circ - t_1^\circ$	1.176 32	$t_0 =$	Июль 1.0
n°	9.273 67	$t_0 - t_2^\circ =$	$+ 9.^\circ 1192$
3600	8.556 30	$t_0 - t_1^\circ =$	$+ 24.1272$
n''	2.829 97	$n(t_0 - t_2^\circ) =$	$+ 1.^\circ 7125$
$t_0 - t_2^\circ$	0.959 96	$n(t_0 - t_1^\circ) =$	$+ 4.5309$
$t_0 - t_1^\circ$	1.382 51	$u_0 =$	$156.^\circ 0603$
$n(t_0 - t_2^\circ)$	0.233 63		
$n(t_0 - t_1^\circ)$	0.656 18		

Сопоставляем полученные результаты:

эпоха $t_0 = 1931$ июль 1.0 T.U.

$$u = 156.^\circ 0603 + [9.273 67] (t^\circ - t_0)$$

$$\lg a = 0.4800$$

$$n = 676.73$$

$$\Omega = 103^\circ 53' 9''$$

$$i = 12^\circ 51' 5''$$

Эклиптика и равноденствие
1931.0.

Вычисление постоянных Гаусса можно расположить следующим образом:

$\sin \varepsilon$	9.599 80	$\sin a \sin A$	9.380 55 _n	$\sin c \sin C$	9.586 89
$\cos \varepsilon$	9.962 57	$\sin a \cos A$	9.976 06 _n	$\sin c \cos C$	9.045 21
$\sin i$	9.347 38	$\sec A$	0.013 55 _n	$\operatorname{cosec} C$	0.017 22
$\cos \Omega$	9.380 55 _n	$\operatorname{tg} A$	9.404 49	$\operatorname{tg} C$	0.541 68
$\cos i$	9.988 97				
$\sin \Omega$	9.987 09	$\sin a$	9.989 61	$\sin c$	9.604 11
$\cos i \cos \Omega \cos \varepsilon$	9.332 09 _n	$\sin b \sin B$	9.949 66	$A =$	194° 14' 27"
Add	0.149 89	$\sin b \cos B$	9.481 98 _n	$B =$	108 48 43
$-\sin i \sin \varepsilon$	8.947 18 _n	$\operatorname{cosec} B$	0.023 84	$C =$	73 58 16
				$C - B =$	- 34 50.27
$\cos i \cos \Omega \sin \varepsilon$	8.989 32 _n	$\operatorname{tg} B$	0.467 68 _n	$\sin (C - B)$	9.756 85 _n
Add	0.075 89			$\sin b \sin c \sin (C - B)$	9.334 46 _n
$\sin i \cos \varepsilon$	9.309 95	$\sin b$	9.973 50	$\operatorname{cosec} a \sec A$	0.023 94 _n
				$(\lg i)$	9.358 40

Итак, для представления наблюдений и вычисления эфемериды окончательно имеем такие формулы:

$$\begin{aligned} p \cos \delta \cos \alpha &= [0.469 61] \sin (A + u) + X \\ p \cos \delta \sin \alpha &= [0.453 50] \sin (B + u) + Y \\ p \sin \delta &= [0.084 11] \sin (C + u) + Z. \end{aligned}$$

Представление исходных наблюдений дает не только полный контроль полученных элементов орбиты, но и окончательный контроль вычисления постоянных Гаусса, ибо употребленная нами контрольная формула (см. § 23)

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}$$

дает лишь частичный контроль.

Дополнение к главе VI.

О НЕВОЗМОЖНОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ.

Основой определения круговой орбиты является, как было показано в § 47, решение уравнения (5) относительно a . В 1894 г., при попытке определить круговую орбиту для одной малой планеты, было обнаружено, что это уравнение не всегда имеет действительные положительные корни, отличные от очевидного корня, приблизительно равного единице и соответствующего орбите Земли. Это обстоятельство побудило Тиссерана (F. Tisserand, 1845—1896) заняться исследованием уравнения (5).

Ограничившись случаем, когда наблюдения близки к оппозиции, интервал времени между ними мал, и широты планеты не велики, Тиссеран заменил сложное трансцендентное уравнение (5) приближенным алгебраическим уравнением. Исследуя это последнее, он пришел к такому заключению ¹⁾:

Пусть (сохраняем обозначения § 49)

$$l = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{L_2 - L_1}, \quad b = \frac{\beta_2 - \beta_1}{L_2 - L_1};$$

круговая орбита невозможна, если

$$b^2 > 2 - 2l - l^2 - 2\sqrt{1 - 2l}.$$

¹⁾ Sur la détermination des orbites circulaires (Bulletin astronomique, t. XII, 53—59).

Вывод этого критерия (в несколько измененной форме) можно найти в курсе А. Я. Орлова ¹⁾. Там между прочим показывается, что если среднее суточное движение Земли принять равным $59''.1$, то неравенство Тиссерана может быть заменено такой таблицей:

$$\Delta\lambda = 6', 8', 10', 12', 14', 16', 18', 20', 22', 24'$$

$$\Delta\beta = 3', 4', 5', 7', 8', 11', 13', 16', 19', 23'.$$

Эта табличка для каждого значения суточного движения по долготу $\Delta\lambda$ дает предельное суточное движение по широте $\Delta\beta$ — если наблюдаемое суточное движение по широте превосходит указанное предельное значение, то круговая орбита невозможна.

Случай, когда критерий Тиссерана невозможности круговой орбиты выполняется, встречаются на практике весьма редко. Следует также иметь в виду, что выполнение неравенства Тиссерана, еще не позволяет утверждать с полной категоричностью несуществование круговой орбиты: вопрос окончательно выясняется лишь при действительном разрешении уравнения, определяющего a .

УПРАЖНЕНИЯ.

1. В примере § 50 вычислить представление полученной орбитой исходных наблюдений, а также следующего:

1931	T. U.	$\alpha_{1931.0}$	$\delta_{1931.0}$
Июнь 17	20 ^h 30 ^m .1	253° 53' 28"	— 14° 4' 39"

Координаты Солнца имеют такие значения:

		X	Y	Z
Июнь	6.8844	+ 0.25958	+ 0.90012	+ 0.39041
"	17.8542	+ 0.07679	+ 0.92950	+ 0.40316
"	21.8926	+ 0.00850	+ 0.93238	+ 0.40441.

2. В примерах, данных в §§ 48 и 50, найти корень уравнения (5) близкий к единице (соответствующий орбите Земли).

3. Сколько независимых параметров входит в уравнение (5)?

4. Чем отличается определение круговой орбиты планеты, движущейся в плоскости эклиптики, от общего случая вычисления круговой орбиты?

5. Хилл подробно разобрал решение следующей задачи: даны три равноотстоящие наблюдения планеты, движущейся по круговой орбите в плоскости эклиптики; определить орбиту и массу этой планеты. (Hill, The Collected Mathematical Works, vol. I).

ГЛАВА VII.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРБИТЫ ПО ТРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ. МЕТОД ГАУССА В ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ.

Основной проблемой учения о вычислении орбит является определение орбиты по трем наблюдениям в самом общем случае, т. е. без всяких априорных предположений относительно характера орбиты.

Движение светила определяется шестью элементами: a , e , M_0 , Ω , i , ω . Так как каждое наблюдение, дающее для

¹⁾ А. Я. Орлов, Теоретическая астрономия, Одесса, 1921.

определенного момента времени t координаты светила α, δ , позволяет написать два уравнения вида

$$\alpha = f_1(t, a, e, M_0, \Omega, i, \omega), \quad \delta = f_2(t, a, e, M_0, \Omega, i, \omega), \quad (1)$$

то *три* наблюдения необходимы и, вообще говоря, достаточны для определения элементов орбиты.

Однако уравнения (1) настолько сложны что непосредственное решение их представляется невозможным. Попытки Эйлера (1744 г.) и Ламберта (1761 г.) дать способы для вычисления кометных орбит выяснили необходимость расчленения задачи путем введения надлежащим образом выбранных *промежуточных неизвестных*. Эта идея получила различное осуществление в методах Лагранжа (1778 г.), Лапласа (1780 г.) и Гаусса (1809 г.).

До конца задача была решена лишь методом Гаусса. Лагранж и Лаплас дали решение задачи только в первом приближении, причем очень мало сделали в отношении приспособления своих методов к практическому применению. Поэтому их методы долго представляли только теоретический интерес, и лишь в XX веке, будучи основательно переработаны и дополнены, получили некоторое распространение.

Если во времена Лагранжа и Лапласа рассматриваемая задача представляла лишь теоретический интерес (поскольку для вычисления параболических орбит комет употреблялись специальные методы), то метод Гаусса создавался уже на почве реальной потребности, созданной открытием малых планет. Он был дан в столь законченном виде, что без всяких изменений по существу (если не считать некоторого улучшения, внесенного Энке в первое приближение, — см. § 55) дошел до наших дней — изменилась лишь, под влиянием успехов вычислительной техники, его внешняя форма.

До недавнего времени метод Гаусса был единственным методом, действительно применявшимся для вычисления орбит по трем наблюдениям. Но и в настоящее время, несмотря на многочисленные попытки ввести в практику другие методы, он остается основным, наиболее распространенным методом.

При изучении метода Гаусса, которому посвящена настоящая глава, необходимо иметь в виду следующие характерные особенности этого метода:

1) За неизвестные принимаются геоцентрические расстояния светила в моменты наблюдений ρ, ρ_1, ρ_2 . После определения ρ, ρ_1, ρ_2 , уже нетрудно вычислить гелиоцентрические координаты светила и определить элементы орбиты (глава IV).

2) Так как задача может быть решена лишь последовательными приближениями, то важно иметь для неизвестных достаточно хорошие приближенные значения, с которыми можно было бы начать процесс постепенного уточнения. Для ρ, ρ_1, ρ_2 такие исходные значения не могут быть указаны. Поэтому Гаусс выражает их через две новые неизвестные (в наших обозначениях s_1, s_2), для которых сразу могут быть даны достаточно близкие к действительности приближенные значения.

3) Гаусс указал простой путь для получения, исходя из приближенных значений c_1, c_2 , более точных значений тех же величин. Повторное применение этого процесса очень быстро приводит к точным (в пределах употребляемого числа знаков) значениям c_1, c_2 , причем одновременно получают точные значения ρ, ρ_1, ρ_2 .

Как уже было отмечено, форма, в которой метод Гаусса в настоящее время обычно применяется, отличается от первоначальной. Еще в 1871 г. Клинкерфюс, учитывая расширение астрономических ежегодников (которые стали давать прямоугольные экваториальные координаты Солнца), рекомендовал вести вычисление орбит не в эклиптических координатах, как это делал Гаусс, а в экваториальных, и дал соответствующие формулы. Более глубоким изменением была замена сферических координат направляющими косинусами. Этим достигалось упрощение изложения и вместе с тем облегчалось выяснение реальной точности отдельных этапов вычислительной работы. Вместе с тем такая замена давала формулы наиболее удобные для вычисления на арифмометре.

§ 51. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Обозначим через t_1, t, t_2 , момент трех наблюдений, выбранных для определения орбиты. Мы предполагаем, что

$$t_1 < t < t_2. \quad (1)$$

Такой способ обозначения является удобным потому, что среднее наблюдение входит в формулы иначе, нежели крайние.

Обозначим через $(\alpha_1, \delta_1), (\alpha, \delta), (\alpha_2, \delta_2)$, прямые восхождения и склонения светила для моментов наблюдений, а через $(X_1, Y_1, Z_1), (X, Y, Z), (X_2, Y_2, Z_2)$ прямоугольные экваториальные координаты Солнца для тех же моментов.

Конечно, координаты светила и Солнца должны быть отнесены к одному и тому же началу координат, т. е. быть одновременно либо геоцентрическими, либо топоцентрическими (см. § 43); кроме того они должны быть отнесены к одному и тому же экватору и равноденствию.

Обозначая, как и раньше, через ρ_1, ρ, ρ_2 геоцентрические расстояния светила, а через $(x_1, y_1, z_1), (x, y, z), (x_2, y_2, z_2)$ гелиоцентрические координаты светила, отнесенные к тому же экватору и равноденствию, что и все предыдущие координаты, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1 & x &= \lambda \rho - X & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2 \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1 & y &= \mu \rho - Y & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2 \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1 & z &= \nu \rho - Z & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Величины

$$\lambda_1 = \cos \delta_1 \cos \alpha_1, \quad \mu_1 = \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \quad \nu_1 = \sin \delta_1$$

.....

суть направляющие косинусы тех направлений, в которых наблюдалось светило.

Условившись в этих обозначениях, перейдем к выводу основных уравнений. Как уже было указано, наша ближайшая задача заключается в определении геоцентрических расстояний. Для вывода уравнений, связывающих ρ_1 , ρ и ρ_2 , воспользуемся прежде всего тем, что светило движется в плоскости, проходящей через центр Солнца.

Параметрические уравнения плоскости, проходящей через точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и $S(0, 0, 0)$, можно написать так:

$$\xi = ux_1 + vx_2, \quad \eta = uy_1 + vy_2, \quad \zeta = uz_1 + vz_2,$$

где ξ, η, ζ — текущие координаты, а u и v — параметры.

Пусть $u = n_1$, $v = n_2$ будут значения параметров, соответствующие точке $P(x, y, z)$, которая по условию лежит в рассматриваемой плоскости. Тогда

$$\left. \begin{aligned} n_1 x_1 - x + n_2 x_2 &= 0 \\ n_1 y_1 - y + n_2 y_2 &= 0 \\ n_1 z_1 - z + n_2 z_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Сосуществование этих равенств является, таким образом, условием необходимым и достаточным для нахождения четырех точек: P_1 , P_2 , S и P в одной плоскости.

Интересно выяснить геометрическое значение величин n_1 и n_2 . Первые два из уравнений (3) дают

$$n_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad n_2 = \frac{x_1 y - x y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}. \quad (4)$$

Обозначим через $[r_1 r]$, $[r_1 r_2]$, $[r r_2]$ площади треугольников $P_1 S P$, $P_1 S P_2$, $P S P_2$. Так как выражения, стоящие в числителях и знаменателях только что написанных выражений, представляют площади проекций этих треугольников на плоскость xSy , то

$$\frac{x_1 y - x y_1}{[r_1 r]} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{[r_1 r_2]} = \frac{x y_2 - x_2 y}{[r r_2]}.$$

Следовательно

$$n_1 = \frac{[r r_2]}{[r_1 r_2]}, \quad n_2 = \frac{[r_1 r]}{[r_1 r_2]}.$$

Подставляя выражения (2) в равенства (3), получим следующие уравнения, являющиеся основными для определения геоцентрических расстояний:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 n_1 \lambda_1 - \rho \lambda + \rho_2 n_2 \lambda_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2 \\ \rho_1 n_1 \mu_1 - \rho \mu + \rho_2 n_2 \mu_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2 \\ \rho_1 n_1 \nu_1 - \rho \nu + \rho_2 n_2 \nu_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если бы мы могли выразить отношения площадей треугольников n_1 и n_2 через данные наблюдений, то эти уравнения решали бы поставленную задачу. Но так как это невозможно, то приходится искать пути для наиболее простого выражения n_1 и n_2 через геоцентрические расстояния.

Мы уже использовали полностью одно из свойств движения — именно то обстоятельство, что движение совершается в плоскости, проходящей через центр Солнца. Поэтому для определения n_1 и n_2 нам необходимо обратиться к другим свойствам движения светила. Удобнее всего исходить при этом непосредственно из дифференциальных уравнений движения, являющихся первоисточником всех таких свойств.

Итак обратимся к уравнениям (II, 1). Так как мы условились буквами без индексов x, y, z, r, t обозначать величины, относящиеся к среднему наблюдению, то для большей ясности текущие значения тех же величин будем обозначать большими буквами.

Уравнения движения напишутся так:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -k^2 X R^{-3}, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = -k^2 Y R^{-3}, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = -k^2 Z R^{-3}$$

Массу Солнца мы приняли при этом за единицу, а массой светила пренебрегли.

Удобно ввести обозначения

$$\theta = k(T - t), \quad U = R^{-3};$$

так что θ будет время, считаемое от момента среднего наблюдения и измеряемое в единицах, равных $\frac{1}{k} = 58.132\ 44 \dots$ суток.

В этих обозначениях уравнения движения напишутся так:

$$\frac{d^2 X}{d\theta^2} = -XU, \quad \frac{d^2 Y}{d\theta^2} = -YU, \quad \frac{d^2 Z}{d\theta^2} = -ZU. \quad (6)$$

В Анализе доказывается, что функции X, Y, Z , определяемые этими уравнениями, могут быть разложены в ряды по степеням θ , сходящиеся для достаточно малых значений θ . Коэффициенты этих разложений

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + X_0' \theta + X_0'' \frac{\theta^2}{2!} + \dots \\ Y &= Y_0 + Y_0' \theta + Y_0'' \frac{\theta^2}{2!} + \dots \\ Z &= Z_0 + Z_0' \theta + Z_0'' \frac{\theta^2}{2!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

представляют собою значения производных X, Y, Z для момента $\theta = 0$. Для получения этих коэффициентов нужно почленно дифференцировать уравнения (6) и затем положить $\theta = 0$. Так, например, для первого ряда получим

$$X_0'' = -X_0 U_0 = -xu$$

$$X_0''' = -X_0 U_0' - X_0' U_0 = -xu' - x'u$$

$$X_0^{IV} = X_0 (U_0^2 - U_0'') - 2X_0' U_0' = \dot{x}(u^2 - u'') - 2x'u,$$

где через $x, u, u', \dots$ обозначены значения соответствующих функций для момента среднего наблюдения.

Подставляя полученные коэффициенты в ряды (7) и собирая вместе с одной стороны члены, имеющие множителем x (или y, z), а с другой — имеющие множителем x' (или y', z'), найдем

$$\left. \begin{aligned} X &= x F(\theta) + x' G(\theta) \\ Y &= y F(\theta) + y' G(\theta) \\ Z &= z F(\theta) + z' G(\theta) \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где

$$F(\theta) = 1 - \frac{1}{2} u \theta^2 - \frac{1}{6} u' \theta^3 - \frac{1}{24} (u'' - u^2) \theta^4 - \dots$$

$$G(\theta) = \theta - \frac{1}{6} u \theta^3 - \frac{1}{12} u' \theta^4 - \dots$$

Применим эти формулы к вычислению гелиоцентрических координат для моментов крайних наблюдений. Полагая

$$\tau_1 = k(t_2 - t), \quad \tau_2 = k(t - t_1)$$

и вводя для краткости обозначения

$$\begin{aligned} F(-\tau_2) &= F_1, & F(\tau_1) &= F_2, \\ G(-\tau_2) &= G_1, & G(\tau_1) &= G_2, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} x_1 &= x F_1 + x' G_1, & x_2 &= x F_2 + x' G_2, \\ y_1 &= y F_1 + y' G_1, & y_2 &= y F_2 + y' G_2, \end{aligned}$$

Этими выражениями мы и воспользуемся для вычисления отношений

$$n_1 = \frac{x y_2 - x_2 y}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad n_2 = \frac{x_1 y - x y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

Так как

$$\begin{aligned} x y_2 - x_2 y &= G_2 (x y' - x' y), & x_1 y - x y_1 &= G_1 (x' y - x y'), \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 &= (F_1 G_2 - F_2 G_1) (x y' - x' y), \end{aligned}$$

то

$$n_1 = \frac{G_2}{F_1 G_2 - F_2 G_1}, \quad n_2 = \frac{-G_1}{F_1 G_2 - F_2 G_1}.$$

Но

$$F_1 = 1 - \frac{1}{2} u \tau_2^2 + \frac{1}{6} u' \tau_2^3 - \dots$$

$$G_1 = -\tau_2 + \frac{1}{6} u \tau_2^3 - \frac{1}{12} u' \tau_2^4 + \dots$$

$$F_2 = 1 - \frac{1}{2} u \tau_1^2 - \frac{1}{6} u' \tau_1^3 - \dots$$

$$G_2 = \tau_1 - \frac{1}{6} u \tau_1^3 - \frac{1}{12} u' \tau_1^4 - \dots$$

Следовательно

$$F_1 G_2 - F_2 G_1 = \tau - \frac{u}{6} \tau^3 + \frac{u'}{12} (\tau_2 - \tau_1) \tau^3 + \dots$$

где для краткости положено

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = k(t_2 - t_1).$$

Итак

$$n_1 = \frac{\tau_1 - \frac{u}{6} \tau_1^3 - \frac{u''}{12} \tau_1^4 - \dots}{\tau_1 - \frac{u}{6} \tau^3 + \frac{u'}{12} (\tau_2 - \tau_1) \tau^3 + \dots} =$$

$$= \frac{\tau_1}{\tau} \left\{ 1 + \frac{u}{6} (\tau^2 - \tau_1^2) - \frac{u'}{12} (\tau_1^3 + \tau_2 \tau^2 - \tau_1 \tau^2) + \dots \right\}$$

$$n_2 = \frac{\tau_2}{\tau} \left\{ 1 + \frac{u}{6} (\tau^2 - \tau_2^2) + \frac{u'}{12} (\tau_2^3 - \tau_2 \tau^2 + \tau_1 \tau^2) + \dots \right\}.$$

Учитывая, что

$$u = r^{-3} \quad u' = -3r^{-4} r' \dots,$$

представим эти формулы в следующей форме:

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3} \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3} \quad (9)$$

где

$$n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad n_2^0 = \frac{\tau_2}{\tau},$$

$$c_1 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_1^0) + \frac{r'}{4r} \frac{\tau_1^4 + \tau_2^2 \tau_1 \tau_2 - \tau^2 \tau_1^2}{\tau} + \dots$$

$$c_2 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_2^0) - \frac{r'}{4r} \frac{\tau_2^4 - \tau^2 \tau_2^2 + \tau_1 \tau_2 \tau^2}{\tau} + \dots \quad (10)$$

Формулы (9) дают n_1 и n_2 в виде бесконечных рядов. Беря в этих рядах то или иное число членов, будем получать n_1 и n_2 с различной точностью.

Ограничиваясь членами первого порядка относительно величин τ_1 , τ_2 , τ , получим

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau}.$$

Эти простые формулы не настолько точны, чтобы ими можно было воспользоваться для нашей цели. Присоединяя члены 2-го порядка, мы тем самым введем в n_1 , n_2 неизвестную величину r . Выражения n_1 , n_2 , точные до членов 3-го порядка, заключают не только r , но и r' .

Примечание. Необходимость пользоваться приближенными выражениями n_1 и n_2 заставляет выбирать наблюдения так, чтобы пренебрегаемые члены были действительно достаточно малы. Таким образом приходится выбирать наблюдения, разделенные небольшими промежутками времени.

Необходимо однако отметить, что понятие малости промежутка времени между наблюдениями является весьма относительным. Дело в том, что величина различных членов в рядах (10) зависит не только от τ_1 , τ_2 , τ , но еще и от r и r' . Таким образом для малых планет (для которых r заметно больше единицы, а производная r' , вследствие малости эксцентриситета, мала) интервал в 1—2 месяца, как показывает

опыт, можно еще считать малым. Напротив, для комет, наблюдаемых вблизи Солнца (r мало) и движущихся по сильно эксцентричным орбитам (r' велико), малыми приходится считать лишь интервалы, не превосходящие нескольких дней.

§ 53. ФОРМУЛЫ ОППОЛЬЦЕРА, ДАЮЩИЕ n_1 И n_2 С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЛЕНОВ 3-го ПОРЯДКА.

Разложения предыдущего параграфа, будучи продолжены до членов 3-го порядка, дают формулы, заключающие r и r' , а потому неудобные для употребления при определении геоцентрических расстояний. Можно преобразовать эти формулы так, что, оставаясь столь же точными, они будут вместо r и r' заключать r_1 и r_2 .

Разлагая в ряд Тэйлора радиусы-векторы, соответствующие крайним наблюдениям, получим

$$r_1 = r - \tau_2 r' + \dots$$

$$r_2 = r + \tau_1 r' + \dots$$

Откуда

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = r + \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2)r' + \dots,$$

$$r_2 - r_1 = \tau r' + \dots$$

Вычисляя при помощи этих равенств r^{-3} с точностью до членов 1-го порядка, а $r^{-4} r'$ до членов нулевого порядка, получим

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1)r' + \dots =$$

$$= \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2} \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau} (r_2 - r_1) + \dots,$$

$$r' = \frac{r_2 - r_1}{\tau} + \dots,$$

и наконец

$$r^{-3} = \frac{8}{(r_1 + r_2)^3} + 24 \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau} \frac{r_2 - r_1}{(r_1 + r_2)^4} + \dots,$$

$$r^{-4} r' = -\frac{16}{\tau} \frac{r_2 - r_1}{(r_1 + r_2)^4} + \dots$$

Подставляя эти выражения в формулы (9), (10), найдем

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau} \left[1 + \frac{4}{3}(\tau^2 - \tau_1^2) \frac{1}{(r_1 + r_2)^3} + 4 \frac{\tau_1^2 \tau_2}{\tau} \frac{r_2 - r_1}{(r_1 + r_2)^4} + \dots \right] \\ n_2 &= \frac{\tau_2}{\tau} \left[1 + \frac{4}{3}(\tau^2 - \tau_2^2) \frac{1}{(r_1 + r_2)^3} - 4 \frac{\tau_1 \tau_2^2}{\tau} \frac{r_2 - r_1}{(r_1 + r_2)^4} + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эти формулы нам понадобятся при вычислении орбит по четырем наблюдениям. Они были даны (1870 г.) Оппольцером.

§ 54. ФОРМУЛЫ ДЖИББСА, ДАЮЩИЕ n_1 И n_2 С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЛЕНОВ 4-ГО ПОРЯДКА.

Вернемся к уравнениям (6), определяющим движение светила. Разложение (7) функции X , удовлетворяющей этим уравнениям, напомним так:

$$X = A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2 + A_3\theta^3 + A_4\theta^4 + \dots$$

Подстановка этого выражения в первое из выражений (6) дает

$$-XR^{-3} = 2A_2 + 6A_3\theta + 12A_4\theta^2 + \dots$$

Применяя эти соотношения к моментам $0 = -\tau_2$, 0 и $+\tau_1$, получим (членами порядка выше четвертого пренебрегаем)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_0 - A_1\tau_2 + A_2\tau_2^2 - A_3\tau_2^3 + A_4\tau_2^4 \\ x &= A_0 \\ x_2 &= A_0 + A_1\tau_1 + A_2\tau_1^2 + A_3\tau_1^3 + A_4\tau_1^4 \\ -x_1r_1^{-3} &= 2A_2 - 6A_3\tau_2 + 12A_4\tau_2^2 \\ -xr^{-3} &= 2A_2 \\ -x_2r_2^{-3} &= 2A_2 + 6A_3\tau_1 + 12A_4\tau_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Исключение из этих шести уравнений коэффициентов $A_0, A_1, \dots, A_4$ дает следующее соотношение между координатами светила для рассматриваемых моментов времени

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & -\tau_2 & \tau_2^2 & -\tau_2^3 & \tau_2^4 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 & \tau_1^4 \\ -x_1r_1^{-3} & 0 & 0 & 2 & -6\tau_2 & 12\tau_2^2 \\ -xr^{-3} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -x_2r_2^{-3} & 0 & 0 & 1 & 6\tau_1 & 12\tau_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисление этого определителя не представляет затруднений. В результате получим

$$\begin{aligned} &12x_1\tau_1 - x_1r_1^{-3}\tau(\tau_1^2 - \tau_1\tau_2 - \tau_2^2) - \\ &- 12x\tau + xr^{-3}\tau(\tau^3 + 3\tau_1\tau_2 + \tau_2^3) + \\ &+ 12x_2\tau_2 - x_2r_2^{-3}\tau_2(\tau_2^2 - \tau_1\tau_2 - \tau_1^2) = 0 \end{aligned}$$

Замечая, что аналогичные рассуждения целиком применимы к двум другим координатам, окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} x_1\tau_1(1 + B_1r_1^{-3}) - x\tau(1 - Br^{-3}) + x_2\tau_2(1 + B_2r_2^{-3}) &= 0 \\ y_1\tau_1(1 + B_1r_1^{-3}) - y\tau(1 - Br^{-3}) + y_2\tau_2(1 + B_2r_2^{-3}) &= 0 \\ z_1\tau_1(1 + B_1r_1^{-3}) - z\tau(1 - Br^{-3}) + z_2\tau_2(1 + B_2r_2^{-3}) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где

$$B_1 = \frac{1}{12}(\tau\tau_2 - \tau_1^2), \quad B = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_2 + \tau^2), \quad B_2 = \frac{1}{12}(\tau\tau_1 - \tau_2^2).$$

Сравнение этих равенств с равенствами (3) дает формулы Джиббса (1888 г.):

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau} \frac{1 + B_1 r_1^{-3}}{1 - B r^{-3}} \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau} \frac{1 + B_2 r_2^{-3}}{1 - B r^{-3}}. \quad (14)$$

Легко видеть, что погрешность этих формул не ниже 5-го порядка. Действительно, выражения координат (12), точные до величин 4-го порядка включительно, обращают равенства (13) в тождества, откуда следует, что ошибка каждого из этих равенств не ниже 6-го порядка. Умножая первое из этих равенств на $+y_2$ (соотв. $+y_1$), второе на $-x_2$ (соотв. $-x_1$) и складывая, получим, на основании (4), n_1 и n_2 с ошибками не ниже 5-го порядка. Но полученные выражения будут тождественны с (14).

§ 55. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ.

Теперь мы можем вернуться к разрешению уравнений (5) относительно геоцентрических расстояний. Для отношений n_1 и n_2 возьмем, на основании (9) и (10), такие выражения:

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}, \quad (15)$$

$$\left(n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad n_2^0 = \frac{\tau_2}{\tau} \right).$$

Причем в первом приближении мы положим, ограничиваясь членами 2-го порядка,

$$c_1 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_1^0), \quad c_2 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_2^0). \quad (16)$$

Таким образом n_1 и n_2 будут зависеть лишь от одной неизвестной величины r , которая легко выражается через ρ . В самом деле, возводя уравнения (2) в квадрат и складывая уравнения, относящиеся к каждому наблюдению, получим радиусы-векторы светила. Для среднего радиуса-вектора получим

$$r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2,$$

где

$$C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z), \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Имея это в виду, исключим из уравнений (5) ρ_1 и ρ_2 . В результате получим

$$\rho \begin{vmatrix} \lambda_1, -\lambda, \lambda_2 \\ \mu_1, -\mu, \mu_2 \\ \nu_1, -\nu, \nu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1, n_1 X_1 - X + n_2 X_2, \lambda_2 \\ \mu_1, n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, \mu_2 \\ \nu_1, n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2, \nu_2 \end{vmatrix}$$

Раскрывая стоящие здесь определители и вводя обозначения

$$\lambda_{12} = \mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1, \quad \mu_{12} = \nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1, \quad \nu_{12} = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \quad (17)$$

$$\Delta = \lambda \lambda_{12} + \mu \mu_{12} + \nu \nu_{12} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= X_1 \lambda_{12} + Y_1 \mu_{12} + Z_1 \nu_{12} \\ U &= X \lambda_{12} + Y \mu_{12} + Z \nu_{12} \\ U_2 &= X_2 \lambda_{12} + Y_2 \mu_{12} + Z_2 \nu_{12} \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

перепишем последнее уравнение так:

$$\Delta \rho = -n_1 U_1 + U - n_2 U_2. \quad (20)$$

Подставляя сюда значения n_1 и n_2 , окончательно получим для определения ρ такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= P - Qr^{-3} \\ r^2 &= \rho^2 + 2C\rho + R^2 \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

где

$$P = \Delta^{-1}(U - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2), \quad Q = \Delta^{-1}(c_1 U_1 + c_2 U_2). \quad (22)$$

Вместо того чтобы исключать из уравнений (21) r , что дало бы уравнение 8-й степени для ρ , обычно предпочитают разрешать уравнения (21) совместно. Как увидим дальше, эта операция не представляет никаких неудобств и выполняется очень быстро.

В конечном счете геоцентрическое расстояние ρ оказывается выраженным через две неизвестные величины c_1, c_2 , входящие в коэффициенты (22). Особенностью этих неизвестных является то, что для них сразу можно указать весьма точные приближенные значения, а именно значения (16).

Уравнения (21), впервые полученные Лагранжем в его мемуаре 1778 года, будем называть *уравнениями Лагранжа*.

После того, как найдено ρ , а следовательно стали известны r, n_1, n_2 , определение остальных геоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2 не представляет затруднений. Предположим, что из миноров (17) самым большим по абсолютной величине является λ_{12} . В таком случае для определения ρ_1 целесообразно взять два последние из уравнений (5). Исключение из них ρ_2 даст для вычисления ρ_1 такое уравнение:

$$n_1 \lambda_{12} \rho_1 = (\mu \nu_2 - \nu \mu_2) \rho - (\nu_2 Y - \mu_2 Z) + n_1 (\nu_2 Y_1 - \mu_2 Z_1) + n_2 (\nu_2 Y_2 - \mu_2 Z_2).$$

Когда ρ и ρ_1 вычислены, любое из уравнений (5) даст ρ_2 . И здесь, для получения результата с наибольшей точностью, следует взять то уравнение, в котором коэффициент при ρ_2 наибольший по абсолютной величине.

§ 56. ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ρ .

Нам нужно еще убедиться в том, что точность приближенных значений c_1, c_2 , даваемых формулами (16), достаточна для получения значения ρ , близкого к действительности.

Поставим вопрос общее: допустим, что ошибка n_1, n_2 (или, что все равно, c_1, c_2) m -го порядка относительно промежутков времени; какого порядка будет соответствующая ошибка в ρ ?

Удерживая прежние обозначения:

$$\tau_1 = k(t_2 - t), \quad \tau_2 = k(t - t_1), \quad \tau = k(t_2 - t_1)$$

и пользуясь рядом Тэйлора, получим

$$\lambda_1 = \lambda - \tau_2 \lambda' + \tau_2^2 \frac{\lambda''}{2} - \tau_2^3 \frac{\lambda'''}{6} + \dots$$

$$\lambda_2 = \lambda + \tau_1 \lambda' + \tau_1^2 \frac{\lambda''}{2} + \tau_1^3 \frac{\lambda'''}{6} + \dots$$

$$X_1 = X - \tau_2 X' + \tau_2^2 \frac{X''}{2} + \dots$$

$$X_2 = X + \tau_1 X' + \tau_1^2 \frac{X''}{2} + \dots$$

и аналогичные разложения для двух других направляющих косинусов и двух других координат.

Подставляя эти ряды в выражения миноров (17), получим разложения такого вида

$$\begin{aligned} \lambda_{12} = \mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1 = & \tau (\mu \nu' - \mu' \nu) - \frac{1}{2} (\tau_1^2 - \tau_2^2) (\mu \nu'' - \mu'' \nu) + \\ & + \frac{1}{6} (\tau_1^3 + \tau_2^3) (\mu \nu''' - \mu''' \nu) - \frac{1}{2} \tau_1 \tau_2 (\mu' \nu'' - \mu'' \nu') + \dots \end{aligned}$$

После чего по формулам (18) и (19) найдем

$$\Delta = -\frac{1}{2} \tau_1 \tau_2 D + \text{члены 4-го порядка} \quad (23)$$

$$U_1 = M\tau + N_1, \quad U = M\tau + N, \quad U_2 = M\tau + N_2, \quad (24)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} X & \lambda & \lambda' \\ Y & \mu & \mu' \\ Z & \nu & \nu' \end{vmatrix},$$

а через N_1, N, N_2 — обозначены совокупности членов порядка выше первого.

Итак, в общем случае, когда определители D и M не равны нулю, Δ есть величина 3-го порядка, а U_1, U, U_2 — первого порядка. Поэтому, решив уравнение (20) относительно ρ

$$\rho = U\Delta^{-1} - n_1 U_1 \Delta^{-1} - n_2 U_2 \Delta^{-1}, \quad (25)$$

мы будем иметь у n_1 и n_2 коэффициенты (-2) -го порядка. Отсюда ясна справедливость следующего положения:

Если для отношений n_1 и n_2 взять значения, имеющие ошибку m -го порядка, то ρ получим с ошибкой порядка $m-2$. С такой же ошибкой получатся ρ_1 и ρ_2 .

Рассмотрим теперь случай, когда промежутки времени между наблюдениями равны, т. е. когда

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \tau.$$

Подставим в уравнение (25) выражения (24). Получим

$$\rho = (1 - n_1 - n_2) M \tau \Delta^{-1} + N \Delta^{-1} - n_1 N_1 \Delta^{-1} - n_2 N_2 \Delta^{-1}. \quad (26)$$

С другой стороны формулы (9) и (10) дают

$$1 - n_1 - n_2 = - \frac{\tau_1 \tau_2}{2} r^{-3} - \frac{\tau_1 \tau_2 (\tau_2^2 - \tau_1^2)}{2\tau} r^{-4} r' + \dots$$

В рассматриваемом случае это равенство обращается в такое

$$1 - n_1 - n_2 = - \frac{\tau^2}{8} r^{-3} + (4) + (6) + \dots,$$

где через (4), (6), ... обозначены члены 4-го, 6-го, ... порядков. В самом деле, поскольку n_1 получается из n_2 заменой τ_1, τ_2 на $-\tau_2, -\tau_1$, все члены нечетных порядков должны сократиться.

Предположим теперь, что n_1, n_2 известны нам с ошибкой порядка $2l+1$. Сумма $1 - n_1 - n_2$ будет известна с ошибкой порядка $2l+2$. Что же касается коэффициентов в формуле (26), то порядок $M\Delta^{-1}$ равен -2 , а порядок $N_1\Delta^{-1}$ и $N_2\Delta^{-1}$ равен -1 . Следовательно ρ определится с ошибкой порядка $2l$. Итак,

если в случае равноотстоящих наблюдений n_1 и n_2 известны с ошибкой порядка $2l+1$, то ρ определяется с ошибкой порядка $2l$.

Применение полученных теорем к тому случаю, когда в уравнениях Лагранжа (21) для c_1, c_2 берутся значения (16) ошибочные на величины 3-го порядка, показывает, что в первом приближении мы получим ρ (а следовательно и ρ_1, ρ_2) с ошибкой 1-го порядка, если наблюдения какие угодно, и с ошибкой 2-го порядка, если наблюдения равноотстоящие.

§ 57. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ.

Одной из важнейших заслуг Гаусса является разработка весьма совершенного метода для перехода от приближенных значений геоцентрических расстояний, получаемых по формулам § 55, к точным значениям. Лагранж имел в виду возможность уточнения величины ρ , найденной в первом приближении, путем последующего вычисления членов 3-го и высших порядков в рядах (10). Однако этот путь не получил никакого распространения и был основательно забыт. Только в недавнее время (1911 г.) Шарлье была сделана попытка облечь метод Лагранжа в удобоприменимую форму. Однако дальнейшее улучшение этого метода, произведенное Андуйе, привело в сущности к отказу от идеи Лагранжа использовать разложение (10) и к переходу на путь, указанный Гауссом.

Основная идея Гаусса весьма проста. После того как решение уравнений (21) даст нам ρ , мы можем вычислить ρ_1, ρ_2 и, наконец, гелиоцентрические координаты светила для моментов наблюдений. Это даст нам возможность вычислить по совершенно точным формулам (см. §§ 34—36) отношения площадей сектора и треугольника для каждой пары наблюдений, а именно:

$$\eta = \frac{(r_1 r_2)}{[r_1 r_2]}, \quad \eta_1 = \frac{(r r_2)}{[r r_2]}, \quad \eta_2 = \frac{(r_1 r)}{[r_1 r]}.$$

Так как, согласно закону площадей,

$$(r_1 r_2) = \tau \sqrt{p}, \quad (rr_2) = \tau_1 \sqrt{p}, \quad (r_1 r) = \tau_2 \sqrt{p},$$

то для отношений n_1 и n_2 получим новые значения

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}_1 &= \frac{[rr_2]}{[r_1 r_2]} = \frac{(rr_2)}{(r_1 r_2)} \frac{\eta}{\eta_1} = n_1^0 \frac{\eta}{\eta_1} \\ \bar{n}_2 &= \frac{[r_1 r]}{[r_1 r_2]} = \frac{(r_1 r)}{(r_1 r_2)} \frac{\eta}{\eta_2} = n_2^0 \frac{\eta}{\eta_2} \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Эти новые значения n_1 , n_2 мы можем представить в прежней форме (15):

$$\bar{n}_1 = n_1^0 + \bar{c}_1 r^{-3}, \quad \bar{n}_2 = n_2^0 + \bar{c}_2 r^{-3},$$

что даст для c_1 и c_2 новые значения

$$\bar{c}_1 = r^3(\bar{n}_1 - n_1^0), \quad \bar{c}_2 = r^3(\bar{n}_2 - n_2^0). \quad (28)$$

Таким образом мы избегаем употребления разложений (10) для величин c_1 и c_2 и находим их по совершенно точным формулам.

Если бы значения геоцентрических расстояний, полученные в первом приближении, были бы точны, то новые значения n_1 и n_2 должны были бы совпасть с исходными, т. е. были бы удовлетворены уравнения

$$\bar{n}_1 = n_1, \quad \bar{n}_2 = n_2. \quad (29)$$

За неизвестные, подлежащие определению из этих уравнений, можно считать c_1 и c_2 , ибо в силу соотношений (21), (15) и (5) геоцентрические расстояния ρ , ρ_1 , ρ_2 являются вполне определенными функциями c_1 , c_2 .

Уравнения (29) могут быть разрешены относительно c_1 , c_2 любым методом, применяемым для численного решения уравнений. Так как приближенные значения корней этой системы, даваемые формулами (16), обычно мало отличаются от точных значений, то уточнение этих значений всегда может быть легко выполнено по способу пропорциональных частей (*regula falsi*).

Но для случая небольших промежутков времени (каковой только и встречается на практике) наиболее удобным и быстрым является метод итерации, предложенный Гауссом. Этот метод основывается на том обстоятельстве, что значения отношений площадей треугольников, даваемые формулами (27), оказываются гораздо более точными, чем исходные значения n_1 , n_2 . Таким образом, принимая эти новые значения $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ за исходные, вычисляя по формулам (28) соответствующие $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ и подставляя их в уравнение Лагранжа, мы получим новые, более точные значения ρ , ρ_1 , ρ_2 и т. д., до тех пор, пока заключительные значения n_1 , n_2 не совпадут с исходными.

Как показывает весь огромный опыт вычисления орбит, накопившийся со времен Гаусса, такие приближения сходятся обычно весьма быстро, так что 1—2 приближения почти всегда оказываются достаточными. Таким образом эмпирически законность при-

менения в данном случае метода итерации является хорошо обоснованной.

Попытку обосновать указанный итеративный процесс теоретически мы встречаем (1906) у Герглотца (G. Herglotz), который указывает на существование такой теоремы ¹⁾:

Если при вычислении отношений n_1 и n_2 по формулам (27) взять значения геоцентрических расстояний (а следовательно и гелиоцентрических координат), имеющие ошибку порядка m , то полученные значения n_1 и n_2 будут иметь ошибку порядка $m + 4$.

Сопоставляя эту теорему с результатами предыдущего параграфа, приходим к таким заключениям:

Если наблюдения неравноотстоящие, то порядок ошибок в различных приближениях дается таблицей:

	Приближение		
	1-е	2-е	3-е
Ошибки в n_1 и n_2 : . . .	3	5	7
Ошибки в p_1, p, p_2 : . . .	1	3	5

Для равноотстоящих наблюдений эта таблица заменяется такой:

	Приближение		
	1-е	2-е	3-е
Ошибки в n_1 и n_2 : . . .	3	6	8
Ошибки в p_1, p, p_2 : . . .	2	4	6

Так как формулы Джиббса дают отношения n_1 и n_2 с ошибкой 5-го порядка, то отсюда ясно, что ими всегда можно пользоваться для второго приближения вместо точных, но гораздо более сложных формул (27). В самом деле ошибки 5-го или 6-го порядка в n_1, n_2 дают, в случае равноотстоящих наблюдений, в геоцентрических расстояниях ошибки одного и того же порядка (четвертого).

В заключение отметим, что:

При определении орбиты по трем наблюдениям важно выбирать наблюдения по возможности равноотстоящие.

Такой выбор наблюдений важен не только с точки зрения сделанных нами подсчетов точности различных приближений, но еще и по следующей причине. Формула (20) показывает, что определение p будет тем точнее, чем больше определитель Δ . Но величина Δ зависит прежде всего от члена $\frac{1}{2} \tau_1 \tau_2 D$, как это вытекает из формулы (23), и потому будет тем больше, чем больше произведение $\tau_1 \tau_2$. А так как эти сомножители связаны соотношением $\tau_1 + \tau_2 = \tau$, то произведение $\tau_1 \tau_2$ будет иметь наибольшее значение тогда, когда $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \tau$.

§ 58. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА.

Нам остается рассмотреть вопрос о разрешении уравнений

$$\left. \begin{aligned} \rho &= P - Qr^{-3} \\ r^2 &= \rho^2 + 2C\rho + R^2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

¹⁾ Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd VI₂, стр. 407—408.

относительно ρ и r . Как мы видели, эту систему придется решать в каждом приближении, постепенно уточняя значение коэффициента Q .

Отметим прежде всего некоторые свойства коэффициентов этих уравнений.

Из треугольника TPS (черт. 13), образованного Солнцем S , местом наблюдения T и светилом P , находим

$$r^2 = \rho^2 + 2\rho R \cos \psi + R^2.$$

Следовательно

$$C = R \cos \psi,$$

где ψ — угол между направлением на светило и продолжением радиуса-вектора Земли.

Докажем, далее, что коэффициенты уравнений (30) должны довольно точно удовлетворять соотношению

$$P = QR^{-3}. \quad (31)$$

В самом деле, легко видеть, что значения

$$\rho = 0, \quad r = R \quad (32)$$

почти точно удовлетворяют уравнениям (30), — что и дает равенство (31). Действительно, при выводе уравнений (30) мы исходили только из двух предположений: 1) что светило движется вокруг Солнца по законам Кеплера; 2) что это светило в моменты наблюдений пересекает три заданные в пространстве прямые (каждое наблюдение фиксирует прямую). Так как место наблюдения в моменты наблюдений находится как-раз на этих прямых, и так как оно движется вокруг Солнца приблизительно по законам Кеплера, то ясно, что значения (32) должны почти точно удовлетворять уравнениям (30).

Исключив из уравнений (30) радиус-вектор r , получим

$$\rho = P - Q(\rho^2 + 2R\rho \cos \psi + R^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (33)$$

Пользуясь соотношением (31), мы можем заменить это уравнение другим, правда приближенным, но зато заключающим только два параметра. Делая $Q = PR^3$ и вводя обозначения

$$x = \rho R^{-1}, \quad p = PR^{-1},$$

легко приведем последнее уравнение к такому виду:

$$px = 1 - (x^2 + 2x \cos \psi + 1)^{-\frac{3}{2}}. \quad (34)$$

Наличие только двух параметров позволяет легко дать таблицу корней этого уравнения для различных значений p и $\cos \psi$.

Таблица VIII, данная в конце книги, содержит значения p , расположенные по аргументам x и $\cos \psi$. Эта таблица, давая возможность находить приближенные значения положительных корней уравнения (34), содержит вместе с тем практически полное решение вопроса о числе положительных корней этого уравнения.

Рассматривая эту таблицу, мы видим, что уравнение (34) имеет либо один, либо два положительных корня. Так как каждому из этих корней соответствует действительное положительное значение $r = \sqrt{x^2 + 2x \cos \psi + 1}$, то приходим к такому заключению: *уравнения Лагранжа имеют, не считая паразитного решения, соответствующего земной орбите, одно или два решения.*

Сообразно с этим, задача определения орбиты, по трем данным наблюдениям может иногда иметь два решения. В этом случае для выяснения вопроса, какая орбита является действительной, необходимо привлечение новых наблюдений.

Когда, при помощи таблицы VIII, получено приближенное значение x , а следовательно и $\rho = x R$, можно перейти к вычислению соответствующего корня уравнения (33) с нужной точностью. Если желаем применить при этом метод Ньютона, то переписав уравнение (33) в следующем виде:

$$f(\rho) = \rho - P + Q r^{-3} = 0,$$

будем иметь

$$f'(\rho) = 1 - 3Q (\rho + C) r^{-5}.$$

Переход от приближенного значения ρ_1 к следующему более точному ρ_2 будет совершаться по формуле

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{f(\rho_1)}{f'(\rho_1)}.$$

Очень часто весьма быстро приводит к цели метод итерации. В этом случае вычисление нового более точного значения ρ_2 совершается по формулам

$$r_1^2 = (\rho_1 + C)^2 + S^2$$

$$\rho_2 = P - Q r_1^{-3},$$

где

$$S^2 = R^2 - C^2 = R^2 \sin^2 \psi.$$

Для облегчения вычисления r^{-3} по r^2 можно воспользоваться таблицей VII, которая по аргументу r^2 дает

$$10^7 \cdot w^2 k^2 r^{-3}, \quad (w = 8^2).$$

С этой целью первое из уравнений (30) напомним так:

$$\rho = P - (h^{-1} Q) \cdot h r^{-3},$$

где

$$h = 10^7 \cdot 64 k^2,$$

$$h^{-1} = 0.000\,005\,280\,28, \quad \lg(h^{-1}) = 4.722\,657_{-10}$$

Пример. Требуется решить систему

$$\rho = 1.9328 - 1.9653 r^{-3}$$

$$r^2 = (\rho + 0.966\,552)^2 + 0.098\,758$$

Так как здесь

$$R = 1.016, \quad \rho = 0.526, \quad \cos \psi = 0.95,$$

то из таблицы VIII находим $x = 1.80$, что дает $\rho = 1.83$. Чтобы вести дальнейшие вычисления при помощи таблицы VIII, первое из данных уравнений напомним так:

$$\rho = 1.9328 - 0.000\ 010\ 377\ (hr^{-3})$$

Последовательные приближения дают

$\rho = 1.83$	1.8446	1.8460	1.8461
$\rho + c = 2.796\ 552$	2.811\ 152	2.812\ 552	2.812\ 652
$r^2 = 7.919\ 46$	8.006\ 33	8.009\ 21	8.009\ 769
$hr^{-3} = 8498$	8368	8356	
$\rho = 1.8446$	1.8460	1.8461	

Итак

$$\rho = 1.8461, \quad r^2 = 8.009\ 769$$

Примечание. Соотношение (31) позволяет представить первое из уравнений (30) следующим образом:

$$\rho = Q (R^{-3} - r^{-3}).$$

Так как ρ величина существенно положительная, то заключаем, что

$$r > R, \text{ если } Q > 0,$$

$$r < R, \text{ если } Q < 0.$$

Можно показать (мы на этом останавливаться не будем), что $Q > 0$ в том случае, когда видимый путь светила обращен выпуклостью в сторону Солнца, и $Q < 0$, когда он обращен к Солнцу вогнутостью. В этом заключается *теорема Ламберта о кривизне видимого пути*: светило находится от Солнца дальше или ближе чем Земля смотря по тому, обращен ли видимый путь к Солнцу выпуклостью или вогнутостью.

§ 59. УРАВНЕНИЕ ГАУССА.

Гаусс указал следующий способ решения системы (30). Обозначим через z угол треугольника STP (черт. 13) при точке P . Так как

$$\frac{\rho}{\sin(\psi - z)} = \frac{r}{\sin \psi} = \frac{R}{\sin z},$$

то

$$\rho = R \frac{\sin(\psi - z)}{\sin z}, \quad r = R \frac{\sin \psi}{\sin z}. \quad (35)$$

Подставляя эти выражения в первое из уравнений (30), получим для определения z такое соотношение:

$$-R \sin \psi \cos z + (R \cos \psi + P) \sin z = Q (R \sin \psi)^{-3} \sin^4 z.$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \mu \sin q &= R \sin \psi \\ \mu \cos q &= R \cos \psi + P \\ m &= Q \mu^{-1} (R \sin \psi)^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

приведем это соотношение к виду

$$\sin(z - q) = m \sin^4 z. \quad (37)$$

Это и есть уравнение Гаусса. Решив его, получим z , после чего формулы (35) дадут p и r .

Такой путь решения основной системы (30) может представлять известные преимущества при логарифмическом вычислении.

Условимся в уравнениях (36) квадрант q выбирать всегда так, чтобы p имело тот же знак, что и Q , иначе говоря чтобы было $m > 0$. В таком случае наша задача будет заключаться в нахождении положительных корней уравнения (37), удовлетворяющих условиям

$$q < z < \psi,$$

так как $\sin(\psi - z)$ и $\sin(z - q)$ должны быть, по смыслу задачи, положительны.

Для малых планет, наблюдаемых вблизи оппозиции, z мало отличается от q , ибо угол ψ невелик, в силу чего $\sin z$ есть малая величина, а потому, на основании уравнения Гаусса, $\sin(z - q)$ также должен быть малой величиной. Таким образом для малых планет в первом приближении можно взять $z = q$.

Для решения уравнения Гаусса было предложено много различных способов. Из способов, основанных на употреблении вспомогательных таблиц, наиболее разработанным является способ Банахевича¹⁾. Мы ограничимся изложением способа Титъена, не требующего никаких вспомогательных таблиц и быстро приводящего к цели.

Для получения первого приближения Титъен полагает $z = q + \Delta z$, так что уравнение (37) обращается в такое:

$$\sin \Delta z = m \sin^4 (q + \Delta z),$$

или, ограничиваясь членами первого порядка,

$$\Delta z = m \sin^4 q + 4m \sin^3 q \cos q \Delta z,$$

или

$$\Delta z = \frac{m \sin^4 q}{1 - 4m \sin^4 q \cotg q};$$

откуда, с тою же точностью, для определения $z_1 = q + \Delta z$ имеем

$$\sin(z_1 - q) = \frac{m \sin^4 q}{1 - 4m \sin^4 q \cotg q}.$$

Уточнить полученное значение z лучше всего следующим приемом. Прежде всего вычислим z_2 при помощи равенства

$$\sin(z_2 - q) = m \sin^4 z_1. \quad (38)$$

Затем переписав уравнение Гаусса следующим образом:

$$f(z) = \lg m + 4 \lg \sin z - \lg \sin(z - q) = 0,$$

¹⁾ Th. Banachiewicz, Tables auxiliares pour la résolution de l'équation de Gauss dans la détermination d'une orbite planétaire. Paris, 1916.

подставим в него точное значение $z = z_2 + \Delta z_2$. Пусть d и D будут табличные разности для $\lg \sin z_2$ и $\lg \sin(z_2 - q)$, соответствующие изменению аргумента на некоторую определенную величину (напр. $0^\circ.001$, или $10''$). В таком случае результат подстановки можно, ограничиваясь членами первого порядка, написать так:

$$f(z_2) + (4d - D)\Delta z_2 = 0.$$

С другой стороны, пользуясь равенством (38), находим

$$\begin{aligned} f(z_2) &= \lg m + 4 \lg \sin z_2 - \lg \sin(z_2 - q) = \\ &= \lg m + 4 \lg \sin z_2 - \lg m - 4 \lg \sin z_1 = 4d(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\Delta z_2 = \frac{4d}{D - 4d} (z_2 - z_1),$$

или, полагая $z_2 + \Delta z_2 = z_3$, будем иметь окончательно

$$z_3 = z_2 + \frac{4d}{D - 4d} (z_2 - z_1).$$

Конечно этот прием может быть повторен; но на практике в этом обычно не встречается надобности.

Пример. Нужно решить уравнение

$$\sin(z - 8^\circ.09711) = [1.283\,608] \sin^4 z$$

Вычисления можно расположить так:

$\sin q$	9.148 761	$\sin z_1$	9.177 113	$d = 50$
m	1.283 608	$\sin^4 z_1$	6.708 452	
$\sin^4 q$	6.595 044	$\sin(z_2 - q)$	7.992 060	$D = 772$
$\cotg q$	0.846 888	$z_2 - q =$	$0^\circ.562\,59$	
4	0.602 060	$z_2 =$	$8.659\,70$	
$4m \sin^4 q \cotg q$	9.327 600	$z_2 - z_1 =$	$0^\circ.012\,29$	$\frac{4d}{D - 4d} = 0.350$
$m \sin^4 q$	7.878 652	$z_3 - z_2 =$	$0.004\,30$	
$1 - 4m \sin^4 q \cotg q$	9.896 185	z_3	$8^\circ.664\,00$	
$\sin(z_1 - q)$	7.982 467	$\sin z_3$	9.177 939	
$z_1 - q =$	$0^\circ.550\,30$		6.711 756	
$z_1 =$	$8^\circ.647\,41$	$\sin(z_4 - q)$	7.995 364	
		$z_4 - q =$	$0^\circ.566\,88$	
		$z_4 =$	$8^\circ.663\,99$	

Вычисленное для контроля z_4 в пределах точности шестизначного вычисления совпадает с z_3 .

(Экваториальные координаты).

Исходными данными являются: моменты трех выбранных наблюдений t_1, t, t_2 ($t_1 < t < t_2$), выраженные в средних солнечных сутках; наблюдаемые координаты светила $(\alpha_1, \delta_1), (\alpha, \delta), (\alpha_2, \delta_2)$; координаты Солнца в моменты наблюдений $(X_1, Y_1, Z_1), (X, Y, Z), (X_2, Y_2, Z_2)$. Координаты светила и координаты Солнца должны быть выражены в одной и той же системе, т. е. должны быть одновременно либо геоцентрическими, либо топоцентрическими, и должны быть отнесены к одному и тому же экватору и равноденствию.

Ради полной определенности мы будем предполагать, что наблюдения исправлены за аберрацию неподвижных звезд, но не исправлены за планетную аберрацию.

Сферические координаты светила перечисляем в направляющие косинусы:

$$\lambda_1 = \cos \delta_1 \cos \alpha_1, \quad \mu_1 = \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \quad \nu_1 = \sin \delta_1$$

.

Контроль:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \dots$$

Примечание I. Вычисление орбиты ведется как правило с шестью знаками. В случае наблюдений исключительно большой точности (напр. по нормальным местам — см. § 77) может быть целесообразно частичное применение семизначного вычисления. Если вычисляется предварительная орбита по мало точным наблюдениям (напр. данным с точностью до 1"), то можно ограничиться пятью знаками (самое большее — вычислить с шестью знаками основные постоянные, а все остальное вычислять с пятью).

Примечание II. Так как всякая ошибка в исходных данных сведет на-нет всю последующую работу, то не следует жалеть времени на самую тщательную проверку всех этих величин. Для контроля координат Солнца можно образовать величины $X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \dots$ и сравнить их с квадратами радиусов-векторов Земли, найденными из эфемерид. При этом берутся, конечно, геоцентрические координаты Солнца.

Вычисление постоянных.

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= \mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1, & \mu_{12} &= \nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1, & \nu_{12} &= \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \\ \Delta &= \lambda \lambda_{12} + \mu \mu_{12} + \nu \nu_{12} \\ U &= X \lambda_{12} + Y \mu_{12} + Z \nu_{12} \\ U_1 &= X_1 \lambda_{12} + Y_1 \mu_{12} + Z_1 \nu_{12} \\ U_2 &= X_2 \lambda_{12} + Y_2 \mu_{12} + Z_2 \nu_{12} \end{aligned}$$

Контроль:

$$\begin{aligned} L &= \lambda_1 + \lambda + \lambda_2 + X_1 + X + X_2 \\ M &= \mu_1 + \mu + \mu_2 + Y_1 + Y + Y_2 \end{aligned}$$

$$N = v_1 + v + v_2 + Z_1 + Z + Z_2$$

$$L\lambda_{12} + M\mu_{12} + N\nu_{12} = \Delta + U + U_1 + U_2.$$

Далее находим

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z)$$

$$S^2 = R^2 - C^2.$$

Первое приближение.

$$\tau_1 = k(t_2 - t), \quad \tau = k(t_2 - t_1), \quad \tau_2 = k(t - t_1)$$

$$k = 0.017 \, 2021,$$

$$n_1^0 = \tau_1 : \tau, \quad n_2^0 = \tau_2 : \tau$$

$$c_1 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_1^0), \quad c_2 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_2^0)$$

Контроль:

$$\frac{1}{3} (c_1 + c_2) = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2.$$

При логарифмическом вычислении можно не вычислять τ_1 , τ_2 , τ и заменить эти формулы такими:

$$n_1^0 = (t_2 - t) : (t_2 - t_1), \quad n_2^0 = (t - t_1) : (t_2 - t_1)$$

$$c_1 = \frac{k^2}{6} (t_2 - t) (t - t_1) (1 + n_1^0); \quad c_2 = \frac{k^2}{6} (t_2 - t) (t - t_1) (1 + n_2^0)$$

$$\lg \frac{k^2}{6} = 5.693 \, 012_{-10}$$

Далее находим

$$P = \Delta^{-1} (U - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2), \quad Q = \Delta^{-1} (c_1 U_1 + c_2 U_2) \quad (A)$$

и составляем основную систему

$$\rho = P - Qr^{-3}, \quad r^2 = (\rho + C)^2 + S^2. \quad (B)$$

Относительно решения этой системы см. § 58.

Если вычисление ведется с логарифмами, то можно перейти к уравнению Гаусса:

$$\left. \begin{aligned} \mu \sin q &= S \\ \mu \cos q &= C + P \end{aligned} \right\} (S = R \sin \psi > 0)$$

Определив отсюда μ и q (для μ берем знак одинаковый со знаком Q), находим

$$m = Q \mu^{-1} S^{-3} \quad (m > 0).$$

Решив уравнение Гаусса (см. § 59)

$$\sin(z - q) = m \sin^4 z,$$

вычисляем ρ и r :

$$\sin \psi = \frac{S}{R}, \quad \rho = R \frac{\sin(\psi - z)}{\sin z}, \quad r = R \frac{\sin \psi}{\sin z}.$$

После того, как тем или иным способом вычислены ρ и r , переходим к определению геоцентрических расстояний и радиусов-векторов для моментов двух крайних наблюдений.

Прежде всего находим

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}.$$

Затем вычисляем ρ_1 по одному из уравнений

$$\left. \begin{aligned} n_1 \lambda_{12} \rho_1 &= (\mu \nu_2 - \nu \mu_2) \rho - (\nu_2 Y - \mu_2 Z) + \\ &+ n_1 (\nu_2 Y_1 - \mu_2 Z_1) + n_2 (\nu_2 Y_2 - \mu_2 Z_2) \\ n_1 \mu_{12} \rho_1 &= (\nu \lambda_2 - \lambda \nu_2) \rho - (\lambda_2 Z - \nu_2 X) + \\ &+ n_1 (\lambda_2 Z_1 - \nu_2 X_1) + n_2 (\lambda_2 Z_2 - \nu_2 X_2) \\ n_1 \nu_{12} \rho_1 &= (\lambda \mu_2 - \mu \lambda_2) \rho - (\mu_2 X - \lambda_2 Y) + \\ &+ n_1 (\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1) + n_2 (\mu_2 X_2 - \lambda_2 Y_2) \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

Выбираем то уравнение, в котором коэффициент при ρ_1 наибольший.

Точно также для определения ρ_2 берем то из уравнений

$$\left. \begin{aligned} n_2 \lambda_2 \rho_2 &= \lambda \rho - n_1 \lambda_1 \rho_1 - X + n_1 X_1 + n_2 X_2 \\ n_2 \mu_2 \rho_2 &= \mu \rho - n_1 \mu_1 \rho_1 - Y + n_1 Y_1 + n_2 Y_2 \\ n_2 \nu_2 \rho_2 &= \nu \rho - n_1 \nu_1 \rho_1 - Z + n_1 Z_1 + n_2 Z_2 \end{aligned} \right\}, \quad (D)$$

в котором коэффициент при ρ_2 наибольший.

Наконец переходим к определению гелиоцентрических координат, для чего служат формулы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1, & x &= \lambda \rho - X, & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2 \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1, & y &= \mu \rho - Y, & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2 \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1, & z &= \nu \rho - Z, & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2 \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

и радиусов-векторов светила:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Контроль: полученная величина r должна совпадать с найденной раньше. Кроме того должны выполняться соотношения

$$x = n_1 x_1 + n_2 x_2, \quad y = n_1 y_1 + n_2 y_2, \quad z = n_1 z_1 + n_2 z_2.$$

Первое приближение заканчиваем учетом планетной аберрации: полученные нами координаты светила (x_1, y_1, z_1) , (x, y, z) , (x_2, y_2, z_2) относятся соответственно к моментам

$$t_1 - A\rho_1, \quad t - A\rho, \quad t_2 - A\rho_2,$$

где

$$A = 0^d.005770, \quad \lg A = 7.76118_{-10}$$

Для малых планет очень часто можно ограничиться тою точностью, которую дает первое приближение, и перейти сразу к определению элементов.

Второе приближение.

Второе приближение начинаем с вычисления более точных значений n_1 и n_2 . Для этого проще всего взять формулы Джиббса.

$$n_1 = n_1^0 \frac{1 + B_1 r_1^{-3}}{1 - B r^{-3}}, \quad n_2 = n_2^0 \frac{1 + B_2 r_2^{-3}}{1 - B r^{-3}},$$

где

$$B = \frac{1}{12}(\tau_1 \tau_2 + \tau^2), \quad B_1 = \frac{1}{12}(\tau \tau_2 - \tau_1^2), \quad B_2 = \frac{1}{12}(\tau \tau_1 - \tau_2^2).$$

Не следует забывать, что $\tau, \tau_1, \tau_2, n_1^0, n_2^0$ должны быть перевычислены с моментами наблюдений, исправленными за планетную aberrацию.

Вычисление коэффициентов B, B_1, B_2 облегчается таблицей IX, которая дает β, β_1, β_2 по аргументу n_1^0 , после чего

$$B = \beta \tau^2, \quad B_1 = \beta_1 \tau^2, \quad B_2 = \beta_2 \tau^2.$$

В третьем и дальнейших приближениях вместо формул Джиббса следует взять точные формулы

$$n_1 = n_1^0 \frac{\eta}{\eta_1}, \quad n_2 = n_2^0 \frac{\eta}{\eta_2}.$$

Этими же формулами можно пользоваться и во втором приближении в более трудных случаях (напр. для кометы вблизи перигелия, или в случае весьма значительных промежутков времени между наблюдениями).

Вычисление отношений площадей секторов и треугольников η, η_1, η_2 обычно выполняется при помощи Гаизеновской непрерывной дроби (которая при шестизначном вычислении дает точный результат, если гелиоцентрическая дуга, описанная светилом, не превосходит примерно 30°).

Сначала находим

$$x^2 = r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$x_1^2 = r r_2 + x x_2 + y y_2 + z z_2$$

$$x_2^2 = r_1 r + x_1 x + y_1 y + z_1 z,$$

затем

$$b = \frac{\frac{11}{9} \tau^2}{x^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x_2 + r_1 + r_2 \right)}, \quad b_1 = \frac{\frac{11}{9} \tau_1^2}{x_2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x_1 + r + r_2 \right)},$$

$$b_2 = \frac{\frac{11}{9} \tau_2^2}{x_2^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x_2 + r_1 + r \right)}, \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.942809$$

$$\frac{11}{9} = 1.222222$$

и наконец

$$\eta = 1 + \frac{10}{11} \cdot \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{b}{\dots}}}$$

$$\eta_1 = 1 + \frac{10}{10} \cdot \frac{b_1}{1 + \frac{b_1}{1 + \frac{b_1}{\dots}}}$$

$$\eta_2 = 1 + \frac{10}{11} \cdot \frac{b_2}{1 + \frac{b_2}{1 + \frac{b_2}{\dots}}}$$

$$\frac{10}{11} = 0.909\,091$$

$$\lg \frac{10}{11} = 9.958\,607_{-10}$$

При логарифмическом вычислении величины b , b_1 , b_2 находим по формулам,

$$b = \frac{\frac{11}{9} k^2 (t_2 - t_1)^2}{x^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x + r_1 + r_2 \right)}, \quad b_1 = \frac{\frac{11}{9} k^2 (t_2 - t)^2}{x_1^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x_1 + r + r_2 \right)},$$

$$b_2 = \frac{\frac{11}{9} k^2 (t - t_1)^2}{x_2^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x_2 + r_1 + r \right)}, \quad \lg \frac{2\sqrt{2}}{3} = 9.974\,424_{-10}$$

$$\lg \frac{11}{9} k^2 = 9.558\,313_{-10}.$$

Непрерывные дроби одинаково удобно вычисляются на арифмометре и при помощи логарифмов сложения.

В тех весьма редких случаях, когда возникнет сомнение в достаточной точности Ганзеновских формул, вычисление можно выполнить по формулам Гаусса (см. §§ 34 и 35).

После того, как тем или иным способом получены новые значения n_1 и n_2 (обозначения для них сохраняем прежние), вычисляем соответствующие c_1 и c_2 :

$$n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}, \quad n_2^0 = \frac{\tau_2}{\tau} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

$$c_1 = (n_1 - n_1^0) r^3, \quad c_2 = (n_2 - n_2^0) r^3.$$

Затем по формулам (А) и (В) (или, если угодно, при помощи уравнения Гаусса), находим новые значения ρ и r . Подставляя новые значения n_1 , n_2 и ρ в те из уравнений (С) и (D), которые употреблялись в первом приближении, получим новые значения ρ_1 и ρ_2 .

Наконец уравнения (Е) дадут новые значения гелиоцентрических координат.

Если новые значения ρ , ρ_1 , ρ_2 отличаются от полученных ранее больше чем на 0.001, то следует перевычислить поправки за планетную аберрацию.

Последовательные приближения продолжают до тех пор, пока новые значения n_1 и n_2 не будут совпадать с теми, которые мы имели в предыдущем приближении, в пределах точности вычисления.

Элементы вычисляются при помощи гелиоцентрических положений светила $t_1 (x_1, y_1, z_1)$, $t_2 (x_2, y_2, z_2)$, полученных в последнем приближении. Моменты t_1 и t_2 , которым соответствуют эти положения, получаются из моментов наблюдений исправлением их за планетную аберрацию.

Прежде всего вычисляем вспомогательные величины

$$\sigma = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^2} \quad \begin{aligned} x_0 &= x_2 - \sigma x_1 \\ y_0 &= y_2 - \sigma y_1 \\ z_0 &= z_2 - \sigma z_1 \\ r_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \end{aligned}$$

После чего находим разность истинных аномалий

$$\begin{aligned} \sin(v_2 - v_1) &= \frac{r_0}{r_2} \\ \cos(v_2 - v_1) &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2} \end{aligned}$$

Согласие этих величин является контролем только что выполненных вычислений. При малых значениях $v_2 - v_1$ этот контроль мало чувствителен, — его лучше тогда заменить таким:

$$(r_1 r_0)^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Затем вычисляем параметр орбиты

$$\tau = k(t_2 - t_1), \quad \sqrt{p} = \frac{r_1 r_0}{\tau} \eta.$$

Входящее сюда η либо берется из последнего приближения либо вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} x^2 &= r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ b &= \frac{\frac{11}{9} \tau^2}{x^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x + r_1 + r_2 \right)} & \frac{11}{9} &= 1.222\ 222 \\ & & \frac{2\sqrt{2}}{3} &= 0.942\ 809 \\ \eta &= 1 + \frac{10}{11} \frac{b}{1 + \frac{b}{1 + \frac{b}{\dots}}} & \frac{10}{11} &= 0.909\ 091 \end{aligned}$$

Формулы

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{p}{r_1} - 1, & q_2 &= \frac{p}{r_2} - 1 \\ \begin{cases} e \cos v_1 &= q_1 \\ e \sin v_1 &= \frac{q_1 \cos(v_2 - v_1) - q_2}{\sin(v_2 - v_1)} \end{cases} \\ v_2 &= v_1 + (v_2 - v_1) \end{aligned}$$

дают истинные аномалии и эксцентриситет. Контроль:

$$p = r_2 (1 + e \cos v_2).$$

Далее находим большую полуось орбиты и эксцентрисические аномалии

$$e = \sin \varphi, \quad a = \frac{p}{(1-e)(1+e)} = \frac{p}{\cos^2 \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1 = \operatorname{cotg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2 = \operatorname{cotg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2$$

Контроль:

$$b \sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1) = \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{1}{2} (v_2 - v_1),$$

где

$$b = a \cos \varphi.$$

Затем идет вычисление средних аномалий:

$$\begin{aligned} e^\circ &= 57^\circ.295\,78 \, e = \\ &= [1.758\,123] \, e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= E_1 - e^\circ \sin E_1 \\ M_2 &= E_2 - e^\circ \sin E_2. \end{aligned}$$

Если употребляются таблицы со старым подразделением градуса, то эксцентриситет можно выразить в секундах дуги:

$$e'' = 206\,264''.8 \, e.$$

Среднее суточное движение и средняя аномалия выбранной эпохи t_0 вычисляются по формулам

$$n = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}, \quad M_0 = M_1 + n(t_0 - t_1).$$

Контроль:

$$n = \frac{k^\circ}{a \sqrt{a}},$$

где

$$k^\circ = 0^\circ.985\,608 = [9.993\,704_{-10}],$$

или

$$n = \frac{k''}{a \sqrt{a}},$$

где

$$k'' = 3548''.19 = [3.550\,007].$$

Наконец переходим к определению элементов, фиксирующих положение орбиты в пространстве. Прежде всего вычисляем направляющие косинусы

$$P_x = x_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - x_0 \frac{\sin v_1}{r_0}$$

$$Q_x = x_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + x_0 \frac{\cos v_1}{r_0}$$

$$P_y = y_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - y_0 \frac{\sin v_1}{r_0}$$

$$Q_y = y_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + y_0 \frac{\cos v_1}{r_0}$$

$$P_z = z_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - z_0 \frac{\sin v_1}{r_0}$$

$$Q_z = z_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + z_0 \frac{\cos v_1}{r_0}.$$

Заодно полезно вычислить $aP_x, aP_y, aP_z, bQ_x, bQ_y, bQ_z$, где $b = a \cos \varphi$, и сразу проконтролировать все эти вычисления при помощи соотношений

$$\begin{aligned}(aP_x)^2 + (aP_y)^2 + (aP_z)^2 &= a^2 \\ (bQ_x)^2 + (bQ_y)^2 + (bQ_z)^2 &= b^2 \\ (aP_x)(bQ_x) + (aP_y)(bQ_y) + (aP_z)(bQ_z) &= 0.\end{aligned}$$

Вычисление i, ω и Ω производится по формулам

$$\begin{aligned}\sin i \sin \omega &= P_x \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon \\ \sin i \cos \omega &= Q_x \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon \\ \sin \Omega &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon \\ \cos \Omega &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega\end{aligned}$$

причем $\sin \varepsilon$ и $\cos \varepsilon$ можно взять из таблицы III.

Контроль: $\sin \Omega$ и $\cos \Omega$ должны принадлежать одному и тому же углу; кроме того должно быть

$$P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega = -\cos i \sin \Omega.$$

Представление наблюдений.

Наиболее полным контролем полученной орбиты является представление исходных наблюдений при помощи найденных элементов. Практически достаточным является контроль, заключающийся в представлении среднего наблюдения, непосредственно не участвовавшего в определении элементов. Вычисленные координаты светила должны совпадать с исходными данными в пределах точности вычисления.

Представление исходных наблюдений позволяет судить лишь о правильности вычислений, но не о качестве полученной орбиты. Пригодность найденной орбиты может быть оценена лишь после представления ею других наблюдений. Дурное представление этих последних может иногда с определенностью указать на наличие ошибок в исходных наблюдениях и на необходимость повторить вычисление орбиты с другими данными.

Чтобы вычислить координаты, соответствующие наблюденному моменту t , пользуемся формулами

$$\begin{aligned}t^\circ &= t - Ap, & A &= 0^{\text{d}}.005\,770 \\ M &= M_0 + n(t^\circ - t_0) \\ E - e^\circ \sin E &= M. \\ \rho \cos \delta \cos \alpha &= aP_x (\cos E - e) + bQ_x \sin E + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= aP_y (\cos E - e) + bQ_y \sin E + Y \\ \rho \sin \delta &= aP_z (\cos E - e) + bQ_z \sin E + Z.\end{aligned}$$

Координаты Солнца берутся для момента t . Абберрационное время Ap получается путем интерполирования или экстраполирования из данных имеющихся для трех исходных наблюдений. После определения ρ правильность принятой величины Ap проверяется и, в случае надобности, вычисление повторяется. Сравниваемое наблюдение исправляется за параллакс.

§ 61. ПЕРВЫЙ ПРИМЕР. (Вычисление с арифмометром).

Даны следующие топоцентрические положения планеты 1931 LB, полученные в Симеизе:

1931	T. U.	$\alpha(1931.0)$	$\delta(1931.0)$
Июнь 6	21 ^h 13 ^m .6	17 ^h 4 ^m 59 ^s .13	— 13 39' 13".2
„ 21	21 25 .3	16 52 16 .49	— 14 16 16 .9
Июль 7	20 33 .9	16 41 35 .77	— 15 11 40 .0

Вычисление направляющих косинусов располагаем следующим образом:

t	6 ^d .884 45	21 ^d .892 57	37 ^d .856 88
α	256°.246 38	253°.068 71	250.399 04
δ	— 13.653 67	— 14.271 36	— 15.194 44
$\cos \alpha$	— 0.237 747	— 0.291 225	— 0.335 467
$\sin \alpha$	— 0.971 327	— 0.956 655	— 0.942 052
$\cos \delta$	+ 0.971 740	+ 0.969 139	+ 0.965 042
λ	— 0.231 028	— 0.282 238	— 0.323 740
μ	— 0.943 877	— 0.927 132	— 0.909 120
ν	— 0.236 052	— 0.246 515	— 0.262 096
X	+ 0.259 587	+ 0.008 504	— 0.258 673
Y	+ 0.900 143	+ 0.932 409	+ 0.902 079
Z	+ 0.390 383	+ 0.404 379	+ 0.391 223
$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$	0.999 998	1.000 002	1.000 001
C		+ 0.966 552	— 0.827 588 = L
R^2		1.032 981	— 0.045 498 = M
S^2		0.098 758	+ 0.441 322 = N

Координаты Солнца вписываем сюда уже исправленные за параллакс, т. е. топоцентрические.

Вычисление постоянных.

λ_{12}	+ 0.032 7868	Δ	— 0.000 4137
μ_{12}	+ 0.015 8680	U	— 0.023 5595
ν_{12}	— 0.095 5386	U_1	— 0.014 5021
		U_2	— 0.031 5438
$L\lambda_{12} + \dots$	— 0.070 0192	Сумма	— 0.070 0191

$$-0.095\ 5386\ n_1\rho_1 = -0.043\ 5615\ \rho - 0.294\ 1269 \\ + 0.055\ 4166\ n_1 \\ + 0.527\ 2039\ n_2$$

$$-0.262\ 096\ n_2\rho_2 = -0.246\ 515\ \rho - 0.404\ 379 \\ + 0.236\ 052\ n_1\rho_1 + 0.390\ 383\ n_1 \\ + 0.391\ 223\ n_2$$

Первое приближение.

$t_2 - t$	15.964 31	τ_1	0.274 6197	c_1	0.017 9071
$t - t_1$	15.008 12	τ_2	0.258 1712	c_2	0.017 5423
$t_2 - t_1$	30.972 43	τ	0.532 7908		
n_1°	0.515 4363	$\frac{1}{6} \tau_1 \tau_2$	0.011 8165	$c_1 + c_2$	0.035 4494
n_2°	0.484 5639			$\frac{1}{3} (c_1 + c_2)$	0.011 8165
$U - n_1^\circ U_1 - n_2^\circ U_2$	— 0.000 7996	P	1.9328		
$c_1 U_1 + c_2 U_2$	— 0.000 81304	Q	1.9653		

Следовательно уравнения Лагранжа имеют в настоящем случае такой вид:

$$\rho = 1.9328 - 1.9653 r^{-3}, \quad r^3 = (\rho + 0.966 552)^2 + 0.098 758.$$

Решение этой системы (см. § 58) дает

$$\rho = 1.8461, \quad r^2 = 8.009 769, \quad r^{-3} = 0.04411.$$

Контроль и вычисление отношений n_1, n_2 :

x	— 0.529 544	$c_1 r^{-3}$	0.000 7897
y	— 2.643 987	$c_2 r^{-3}$	0.000 7736
z	— 0.859 470	n_1	0.516 226
r^2	8.009 773	n_2	0.485 337

После этого обращаемся к уравнениям, дающим ρ_1 и ρ_2 , и заканчиваем приближение вычислением абберационного времени и гелиоцентрических координат:

$v_1 n_1 \rho_1$	— 0.090 0667	ρ_1	1.826 189	$A \rho_1$	0.010 54
$n_1 \rho_1$	0.942 726			$A \rho$	0.010 65
		ρ_2	1.930 246	$A \rho_2$	0.011 14
$v_2 n_2 \rho_2$	— 0.245 537				
$v_2 n_2$	— 0.127 205				

x_1	— 0.681 488	x_2	— 0.366 225	$n_1 x_1 + n_2 x_2$	— 0.529 544
y_1	— 2.623 841	y_2	— 2.656 904	$n_1 y_1 + n_2 y_2$	— 2.643 989
z_1	— 0.821 459	z_2	— 0.897 133	$n_1 z_1 + n_2 z_2$	— 0.859 470
r_1^3	8.023 76	r_2^3	7.998 11		
r_1^{-3}	0.04400	r_2^{-3}	0.04421		

Второе приближение.

Пользуемся формулами Джиббса:

t_2	37.845 74	B_1	0.005 178	n_1	0.516 2207
t	21.881 92	B_2	0.006 637	n_1°	0.515 4303
t_1	6.873 91	B	0.029 561	$n_1 - n_1^\circ$	0.000 7904

$t_2 - t$	15.963 82	$1 + B_1 r_1^{-2}$	1.000 2278	n_2	0.485 3449
$t - t_1$	15.008 01	$1 + B_2 r_2^{-2}$	1.000 2934	n_2^0	0.484 5697
$t_2 - t_1$	30.971 83	$1 - Br^{-3}$	0.998 6963	$n_1 - n_2^0$	0.000 7752
τ	0.532 7805	$n_1 : n_1^0$	1.001 5335	c_1	0.017 9175
τ^2	0.283 8550	$n_2 : n_2^0$	1.001 5998	c_2	0.017 5729
β_1	+ 0.018 24	r^3	22.668 9		
β_2	+ 0.023 38				
β	+ 0.104 14				
$U - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2$	- 0.000 7995	P	1.9326	r^{-3}	0.0441
$c_1 U_1 + c_2 U_2$	- 0.000 81416	Q	1.9680	ρ	1.8458
$v_{12} n_1 \rho_1$	- 0.090 0498	ρ_1	1.825 864	r^2	8.008 082
$n_1 \rho_1$	- 0.942 549	ρ_2	1.929 956	r^{-3}	0.0441
$v_2 n_2 \rho_2$	0.245 504			x	- 0.529 459
$v_2 n_2$	- 0.127 207			y	- 2.643 709
				z	- 0.859 396
				r_2	8.008 086
x_1	- 0.681 413	x_2	- 0.366 131	$n_1 x_1 + n_2 x_2$	- 0.529 459
y_1	- 2.613 534	y_2	- 2.656 641	$n_1 y_1 + n_2 y_2$	- 2.643 710
z_1	- 0.821 382	z_2	- 0.897 057	$n_1 z_1 + n_2 z_2$	- 0.859 396
r_1^2	8.021 923	r_2^2	7.996 505		
r_1	2.832 300	r_2	2.827 809	$r_1 r_2$	8.009 203

Определение элементов.

$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$	+ 7.956 101	x_0	+ 0.309 691	$\sin(v_2 - v_1)$	+ 0.114 9629
σ	+ 0.991 795	y_0	- 0.054 633	$\cos(v_2 - v_1)$	+ 0.993 370
x^2	15.965 304	z_0	- 0.082 414	q_2	+ 0.060 624
x	3.995 661	r_0^3	0.105 6853	q_1	+ 0.058 942
$\frac{2\sqrt{2}}{3} x + \dots$	9.427 254	r_0	0.325 093	$e \sin v_1$	- 0.018 032
$x^2(\dots)$	150.5090	$r_1 r_0$	0.920 761	$\operatorname{tg} v_1$	- 0.305 928
$\frac{11}{9} \tau^2$	0.346 9339	$r_1 r_0 : \tau$	1.728 219	$\cos v_1$	+ 0.956 252
b	0.002 3051	$\sqrt{p}$	1.731 832	$\sin v_1$	- 0.292 544
непр. дробь	0.002 2998	p	2.999 242	$v_2 - v_1$	6°.601 49
η	1.002 0907	e	0.011 639	v_1	342.989 66
$\cotg\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right)$	0.940 149	φ	3°.533 90	v_2	349.591 15
$\operatorname{tg} \frac{v}{2}$	- 0.149 544	$\cos \varphi$	0.998 098		
$\operatorname{tg} \frac{v_2}{2}$	- 0.091 085	e°	3° 531 655	$\frac{1}{2} v_1$	171.494 83
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1$	- 0.140 594	$1 - e^2$	0.996 201	$\frac{1}{2} v_2$	174.795 58
				$\frac{1}{2}(v_2 - v_1)$	3.300 75

$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2$	-0.085 634	a	3.010 680	$\cos v_2$	+ 0.983 544
$\frac{1}{2} E_2$	175°.105 50	$45^\circ + \frac{\varphi}{2}$	46°.766 95	$r_2(1+e \cos v_2)$	2.999 244
$\frac{1}{2} E_1$	171.997 01				
$\frac{1}{2} (E_2 - E_1)$	3.108 49				

E_1	343°.994 02	E_2	350°.211 00	b	3.004 954
$\sin E_1$	- 0.275 738	$\sin E_2$	- 0.170 020	$\sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1)$	0.054 227
$\sqrt{a}$	1.735 131	M_2	350.811 45	$\sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1)$	0.162 950
$a^{3/2}$	5.223 924	M_1	344.967 83	$\sqrt{r_1 r_2}$	2.830 054
$k^0 a^{-3/2}$	0.188 672	$M_2 - M_1$	5.843 62	$\sin \frac{1}{2} (v_2 - v_1)$	0.057 577
$t_0 =$	37 ^d .000 00	n	0.188 675	$\sqrt{r_1 r_2} \dots$	0.162 946
$t_1 - t_0 =$	-30.126 09	$n(t_1 - t_0)$	- 5.684 04		
		M_0	350.651 87		

Остается вычислить направляющие косинусы:

P_x	+ 0.048 623	Q_x	+ 0.981 330	$\cos v_1 : r_1$	+ 0.337 624
P_y	- 0.934 931	Q_y	+ 0.110 279	$\sin v_1 : r_0$	+ 0.899 878
P_z	- 0.351 481	Q_z	- 0.157 579	$\sin v_1 : r_1$	- 0.103 289
aP_x	+ 0.146 388	bQ_x	+ 2.948 851	$\cos v_1 : r_0$	+ 2.941 472
aP_y	- 2.814 778	bQ_y	+ 0.331 383		
aP_z	- 1.058 197	bQ_z	- 0.473 518		
$\Sigma (aP^2)$	9.064 186	$\Sigma (bQ)^2$	9.029 756	$\Sigma (aPbQ)$	-0.000 018
a^2	9.064 194	b^2	9.029 749		
$P_x \cos \epsilon$	- 0.322 4556	$P_y \cos \omega$	+ 0.904 1699	$- P_x \sin \omega$	- 0.012 3698
$- P_y \sin \epsilon$	+ 0.372 0285	$- Q_y \sin \omega$	- 0.028 0553	$- Q_x \cos \omega$	+ 0.949 0423
$Q_x \cos \epsilon$	- 0.144 5661	()	+ 0.876 1146	Сумма	+ 0.936 672
$- Q_y \sin \epsilon$	- 0.043 8823	$P_x \cos \omega$	- 0.047 0232	$\cos i$	+ 0.980 831
$\sin i \sin \omega$	+ 0.049 5729	$- Q_x \sin \omega$	- 0.249 6533	$\cos i \sin \Omega$	+ 0.936 671
$\sin i \cos \omega$	- 0.188 4484	$\sin \Omega$	+ 0.954 977		
$\operatorname{tg} \omega$	- 0.263 058	$\cos \Omega$	- 0.296 676		
$\sin \omega$	+ 0.254 403	ω	165°.261 79		
$\cos \omega$	- 0.967 098	i	11°.2' 6 54		
$\sin i$	0.194 860	Ω	107.258 10		

Сопоставляем полученные результаты:

Эпоха $t_0 = 1931$ июль 7.0 Т. У.

M_0	350°.6519	ω	165°.2618	} Эклиптика и равноденствие 1931.0
φ	3°.5339	i	11°.2365	
n	0°.188 675	Ω	107°.2581	

В заключение приводим представление одного из наблюдений, не употреблявшихся при вычислении орбиты.

t	$17^a 854\ 24$	X	$+ 0.076\ 786$
α	$16^h 55^m 33^s.85$	Y	$+ 0.929\ 502$
δ	$- 14^\circ 4' 41''.5$	Z	$+ 0.403\ 163$

Наблюденные координаты исправлены за параллакс, поэтому координаты Солнца взяты геоцентрические.

Ap	$0.010\ 59$	$\rho \cos \delta \cos \alpha$	$- 0.493\ 733$
t°	$17.843\ 65$	$\rho \cos \delta \sin \alpha$	$- 1.709\ 540$
		$\operatorname{tg} \alpha$	$3.462\ 479$
M	$347^\circ.037\ 59$	$\alpha =$	$253^\circ.890\ 73$
E	$346.194\ 87$	$\rho \sin \delta$	$- 0.446\ 249$
$\sin E$	$- 0.238\ 620$	$\rho \cos \delta$	$+ 1.779\ 410$
$\cos E$	$+ 0.971\ 113$	$\operatorname{tg} \delta$	$- 0.250\ 785$
$\cos E - e$	$+ 0.909\ 474$	$\delta =$	$- 14^\circ.078\ 06$
		$\alpha =$	$16^h 55^m 33^s.78$
		$\delta =$	$- 14^\circ 4' 41''.0$

Итак:

$$H. - B. \qquad \Delta \alpha = + 0^\circ.07, \qquad \Delta \delta = - 0''.5.$$

Отсюда заключаем, что вычисление не содержит значительных ошибок. Так как взятое наблюдение довольно близко к одному из наблюдений, употребленных при определении орбит, то полученный результат еще не может гарантировать безошибочности употребленных наблюдений: только представление наблюдения, далеко отстоящего от этих последних, могло бы дать такую гарантию.

§ 62. ВТОРОЙ П ИМЕР. (Вычисление с логарифмами).

Даны следующие топоцентрические наблюдения планеты 1930 SE:

Место	1930	T. U.	α 1930.0	δ 1930.0
Симеиз	сентября 17	20 ^h 0 ^m .5	23 ^h 14 ^m 22 ^s .28	$+ 7^\circ 26' 2''.4$
"	" 27	21 19.9	23 7 26.48	$+ 6 40 39.1$
"	октябрь 18	20 3.7	23 0 40.52	$+ 5 3 32.2$

Вычисления ведем при помощи шестизначных логарифмических таблиц с десятичным делением градуса. Прежде всего находим направляющие косинусы, при чем вычисления располагаем в три столбца. ¹⁾

$\alpha_1 =$	$348^\circ.592\ 83$	$\alpha =$	$346^\circ.860\ 33$	$\alpha_2 =$	$345^\circ.166\ 83$
$\delta_1 =$	$+ 7.34\ 00$	$\delta =$	$+ 6.677\ 53$	$\delta_2 =$	$+ 5.058\ 84$
$\cos \alpha_1$	$9.991\ 336$		$9.988\ 478$		$9.985\ 285$
$\cos \delta_1$	$9.996\ 334$		$9.997\ 043$		$9.998\ 305$
$\sin \alpha_1$	$9\ 296\ 182_n$		$9.356\ 648_n$		$9.408\ 192_n$
λ_1	$9.987\ 670$	λ	$9.985\ 521$	λ_2	$9.983\ 590$
μ_1	$9.292\ 516_n$	μ	$9.353\ 691_n$	μ_2	$9.406\ 497_n$
ν_1	$9.111\ 881$	ν	$9\ 065\ 509$	ν_2	$8.945\ 373$
$\mu_1 \nu_2$	$8.237\ 889_n$	$\nu_1 \lambda_2$	$9.095\ 471$	$\lambda_1 \mu_2$	$9.394\ 167_n$
Add	$9\ 957\ 898$	Add	$9.656\ 619$	Add	$9.494\ 688$
$-\mu_2 \nu_1$	$8.518\ 378$	$-\nu_2 \lambda_1$	$8.933\ 043_n$	$-\lambda_2 \mu_1$	$9.276\ 106$
λ_{12}	$8.195\ 787$	μ_{12}	$8.589\ 662$	ν_{12}	$8.770\ 794_n$
$\lambda \lambda_{12}$	$8.181\ 308$	$\mu \mu_{12}$	$7.943\ 353_n$	$\nu \nu_{12}$	$7.836\ 303_n$

¹⁾ Для сбережения места некоторые простейшие контрольные вычисления (напр. составление суммы квадратов направляющих косинусов) не включены в вычислительную схему.

Далее переводим моменты наблюдений в доли суток; находим соответствующие геоцентрические координаты Солища и пересчитываем их (λ , μ , ν) в топоцентрические координаты. Логарифмы этих топоцентрических координат помещены в вычислительной схеме.

$t_1 =$	17 ^d .833 68	$t =$	27 ^d .888 82	$t_2 =$	48 ^d .835 90
X_1	9.999 852 _n	X	9.999 798 _n	X_2	9.956 559 _n
Y_1	8.970 294 _n	Y	8.810 442 _n	Y_2	9.582 108 _n
Z_1	8 607 155	Z	8.448 184 _n	Z_2	9.219 412 _n
$X_1 \lambda_{12}$	8.195 639 _n	$X \lambda_{12}$	8.195 585 _n	$X_2 \lambda_{12}$	8.152 346 _n
$Y_1 \mu_{12}$	7.559 956	$Y \mu_{12}$	7.410 104 _n	$Y_2 \mu_{12}$	8.171 770 _n
$Z_1 \nu_{12}$	7.377 949 _n	$Z \nu_{12}$	7.218 978	$Z_2 \nu_{12}$	7.990 206
$X_1 \lambda_{12} =$	-0.015 690 57	$=$	-0.015 688 63	$=$	-0.014 201 87
$Y_1 \mu_{12} =$	+0.003 630 42	$=$	-0.002 512 49	$=$	-0.014 851 48
$Z_1 \nu_{12} =$	-0.002 387 53	$=$	+0.001 655 69	$=$	+0.009 777 00
$U_1 =$	-0.014 447 68	$U =$	-0.016 543 43	$U_2 =$	-0.019 276 35
λ_{12}	+0.015 181 28	L	7.271 609 _n	$L_{12} =$	-0.000 029 34
μ_{12}	-0.008 777 14	M	0.012 904 _n	$M_{12} =$	-0.040 046 64
ν_{12}	-0.006 859 67	N	9.256 519	$N_{12} =$	-0.010 649 10
$\Delta =$	-0.000 455 53	L_{12}	5.467 396 _n	Сумма =	-0.050 725 08
		M_{12}	8.602 568 _n	$\Delta + \dots =$	-0.050 724 99
		N_{12}	8.027 313 _n		
$X^2 =$	0.999 070	λX	9.985 319 _n	$=$	-0.986 760
$Y^2 =$	0.004 177	μY	8.164 133	$=$	+0.014 592
$Z^2 =$	0.000 788	νZ	7.513 693 _n	$=$	-0.003 263
$R^2 =$	1.004 035	S	9.479 962	$C =$	+0.955 431
$C^2 =$	0.912 850	R	0.000 874		
$S^2 =$	0.091 185	$\sin \psi$	9.479 088		

Первое приближение.

$t_2 - t =$	20 ^d .947 08	$n_1^0 U_1$	7.989 529 _n	$P =$	1.167 08
$t - t_1 =$	10.055 14	$n_2^0 U_2$	7.796 020 _n	$C + P =$	2.122 51
$t_2 - t_1 =$	31.002 22	$-n_1^0 U_1$	+0.009 761 78	$\mu \sin q$	9.479 962
		$-n_2^0 U_2$	+0.006 252 01	$\mu \cos q$	0.326 850
$\frac{1}{6} k^2$	5.693 012	$U - n_1^0 U_1 - \dots$	-0.000 531 64	$\cos q$	9.995 649
$t_2 - t$	1.321 124			$\operatorname{tg} q$	9.153 112
$t - t_1$	1.002 388			$q =$	8° 097 11
$t_2 - t_1$	1.491 393	Δ	6.725 618 _n	Q	0.054 694
n_1^0	9.829 731	P	6.658 517 _n	μ	0.331 201
n_2^0	9.510 995		0.067 101		

$1+n_1^0$	0.224 187	$c_1 U_1$	6.400 509 _n	$Q^{\mu-1}$	9.723 493
$\frac{1}{6} \tau_1 \tau_2$	8.016 524	Add	0.289 664	S^3	8.439 885
$1+n_2^0$	0.121 998	$c_2 U_2$	6.423 547 _n		
c_1	8.240 711	$c_1 U_1 + c_2 U_2$	6.713 211 _n	m	1.283 608
U_1	8.159 798 _n	Δ	6.658 517 _n		
c_2	8.138 522	Q	0.054 694		
U_2	8.285 025 _n				

Решение уравнения Гаусса

$$\sin(z - 8^\circ.09711) = [1.283\ 608] \sin^4 z$$

приведено во всех подробностях в § 59. Вычисление ρ , r , n_1 , n_2 , ρ_1 и ρ_2 располагаем так:

$\psi =$	17° 539 42	Q	0.054 694	$\lambda \rho =$	+ 0.992 625
$z =$	8.663 99	c_1	8.240 711		
$\psi - z =$	8.875 43	c_2	8.138 522	$-n_1 \lambda_1 \rho_1 =$	- 0.660 433
$\sin(\psi - z)$	9.188 329	r^3	0.906 069	$-X =$	+ 0.999 534
$R \sin \psi$	9.479 962	$c_1 r^{-3}$	7.334 642	$+n_1 X_1 =$	- 0.677 595
$\sin z$	9.177 939	Add	0.001 387	$+n_2 X_2 =$	- 0.295 009
$\sin(\psi - z) : \sin z$	0.010 390	n_1^0	9.829 731	$n_2 \lambda_2 \rho_2 =$	+ 0.359 122
ρ	0.011 264	$c_2 r^{-3}$	7.232 453	$n_2 \lambda_2 \rho_2$	9.555 242
r	0.302 023	Add	0.002 281	$\lambda_2 \rho_2$	0.041 966
P	0.067 101	n_2^0	9.510 995	ρ_2	0.058 376
Add	9.944 163	n_1	9.831 118		
$-Qr^{-3}$	9.148 625 _n	n_2	9.513 276		
Контроль: ρ	0.011 264	$n_1 X_1$	9.830 970 _n		
$\lambda \rho$	9.996 785	$n_2 X_2$	9.469 835 _n		

$\lambda \mu_2$	9.392 018 _n	$\mu_2 X_2$	9.363 056	$n_1 \nu_{12} \rho_1$	8.602 953 _n
Add	9.128 150	Add	0.414 065	ν_{12}	8.770 794 _n
$-\lambda_2 \mu$	9.337 281	$-\lambda_2 Y_2$	9.565 698	$n_1 \rho_1$	9.832 159
$\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu$	8.465 431	$\mu_2 X_2 - \lambda_2 Y_2$	9.777 121	ρ_1	0.001 041
$\rho(\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu)$	8.476 695 _n	$n_2(\mu_2 X_2 - \lambda_2 Y_2)$	9.290 397	$n_1 \lambda_1 \rho_1$	9.819 829
$\mu_2 X$	9.406 295	$\rho(\dots) =$	- 0.029 9706	$\Delta \rho_1$	7.762 22
Add	0.094 888	$-(\dots) =$	- 0.317 0900	$\Delta \rho$	7.772 44
$-\lambda_2 Y$	8.794 032	$+n_1(\dots) =$	+ 0.111 8155	$\Delta \rho_2$	7.819 56
$\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1$	9.501 183				

$\mu_2 X_1$	9.406 349	$+ n_2(\dots) =$	$+ 0.195 1627$	$- \Delta \rho_1 =$	$- 0^d.005 78$
Add	9.811 035			$- \Delta \rho =$	$- 0.005 92$
$-\lambda_2 Y_1$	8.953 884 _n			$- \Delta \rho_2 =$	$- 0.006 60$
$\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1$	9.217 384	$n_1 \nu_{12} \rho_1 =$	$- 0.040 0824$	$t_1 =$	$17^d.827 90$
$n_1(\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1)$	9.048 502			$t =$	$27.882 90$
				$t_2 =$	$48.829 30$

Вычисление геоцентрических расстояний мы закончили определением аберрационного времени и исправленных моментов наблюдений. Далее находим гелиоцентрические координаты и радиусы-векторы.

$\rho_1 \lambda_1$	9.988 711		9.996 785		0.041 966
Add	0.295 465		0.299 526		0.345 830
$-x_1$	9.999 852		9.999 798		9.956 559
$\rho_1 \mu_1$	9.293 557 _n		9.364 955 _n		9.464 873 _n
Add	0.168 806		9.857 981		9.491 208
$-Y_1$	8.970 294 _n		8.810 442		9.582 108
$\rho_1 \nu_1$	9.112 922		9.076 773		9.003 749
Add	9.837 553		0.091 732		0.206 450
$-z_1$	8.607 155 _n		8.448 184		9.219 412
x_1	0.295 347	x	0.299 324	x_2	0.302 389
y_1	9.462 363 _n	y	9.222 936 _n	y_2	8.956 081
z_1	8.950 475	z	9.168 505	z_2	9.425 862
$x_1^2 =$	3.896 673		3.968 709		4.025 110
$y_1^2 =$	0.084 086 3		0.027 917 2		0.008 169
$z_1^2 =$	0.007 960 7		0.021 727 5		0.071 076
$r_1^2 =$	3.988 720		4.018 354		4.104 355
r_1^2	0.600 833	r^2	0.604 048	r_2^2	0.613 245
r_1	0.300 417	r	0.302 024	r_2	0.306 623

Переходим к вычислению новых значений n_1 и n_2 . Применим формулы Джиббса, которые, имея в виду удобства логарифмического вычисления, представим так:

$$n_1 = n_1^0 \frac{1 + B_1 r_1^{-2}}{1 - B r^{-2}}, \quad n_2 = n_2^0 \frac{1 + B_2 r_2^{-2}}{1 - B r^{-2}},$$

$$B = \frac{1}{12} \tau^2 (1 + n_1^0 n_2^0), \quad B_1 = \frac{1}{12} \tau^2 [n_1^0 - (n_1^0)^2],$$

$$B_2 = \frac{1}{12} \tau^2 [n_2^0 - (n_2^0)^2], \quad \frac{1}{12} \tau^2 = [5.391 9816 - 10] (t_2 - t_1)^3.$$

$t_2 - t =$	20.946 40	n_1^0	9.829 728	n_2^0	9.511 000
$t - t_1 =$	10.055 00	Add	9.926 500	Add	9.610 154 _n
$t_2 - t_1 =$	31.001 40	$-(n_2^0)^2$	9.022 001 _n	$-(n_1^0)^2$	9.659 456 _n
		$n_1^0 - (n_2^0)^2$	9.756 228	$n_2^0 - (n_1^0)^2$	9.121 154
$t_2 - t$	1.321 109 4	$\frac{1}{12} \tau^2$	8.374 745	$\frac{1}{12} \tau^2$	8.374 745
$t - t_1$	1.002 382	B_2	8.130 973	B_1	7.495 899 _n
$t_2 - t_1$	1.491 381 6	r_2^3	0.919 869	r_1^3	0.901 251
n_1^0	9.829 728	$B_2 r_2^{-3}$	7.211 104	$(B_1 r_1^{-3})^{-1}$	3.405 352
n_2^0	9.511 000	$1 + B_2 r_2^{-3}$	0.000 705	$1 + B_1 r_1^{-3}$	9.999 829
$n_1^0 n_2^0$	9.340 728	n_2^0	0.001 561	n_1^0	0.001 561
$1 + n_1^0 n_2^0$	0.086 055	n_2	9.511 000	n_1	9.829 728
$(t_2 - t_1)^3$	2.982 763		9.513 266		9.831 118
$\frac{1}{12} k^2$	5.391 982	k^2	6.471 162 8		
B	8.460 800	τ^2	9.453 926		
r^3	0.906 069				
$(Br^{-3})^{-1}$	2.445 269				
$1 - Br^{-3}$	9.998 439				

Логарифмы n_1 и n_2 отличаются от значений, принятых нами в первом приближении, на 0 и — 10 единиц шестого знака. При таких разностях нередко проводят второе приближение. Чтобы посмотреть, как эти разности отражаются на представлении наблюдений, мы не будем делать второе приближение и прямо приступим к вычислению элементов при помощи координат, найденных в первом приближении.

$x_1 x_2$	0.597 736	$x_1 x_2 =$	+ 3.960 373	$\Sigma x_1 x_2$	0.597 471
$y_1 y_2$	8.418 444 _n	$y_1 y_2 =$	— 0.026 208 6		
$z_1 z_2$	8.376 337	$z_1 z_2 =$	+ 0.023 786 8	$r_1 r_2$	0.607 040
		$\Sigma x_1 x_2 =$	+ 3.957 951	r_1^2	0.600 834
				σ	9.996 637
x_2	0.302 389	y_2	8.956 081	z_2	9.425 862
Add	8.384 667	Add	0.118 631	Add	9.824 721
$-\sigma x_1$	0.291 984 _n	$-\sigma y_1$	9.459 000	$-\sigma z_1$	8.947 112 _n
x_0	8.676 651	y_0	9.577 631	z_0	9.250 583
x_0^2	7.353 302	y_0^2	9.155 262	z_0^2	8.501 166
$x_0^2 =$	0.002 2558	$r_1 r_2 =$	4.046 130	r_1^3	0.600 839
$y_0^2 =$	0.142 9757	$x^2 =$	8.004 081	r_0^3	9.247 824
$z_0^2 =$	0.031 7078	x^3	0.903 312	τ^2	0.005 078
$r_0^2 =$	0.176 9393	x	0.451 656	$(r_1 r_0 \tau)^2$	9.853 735
$r_0^3 =$	9.247 824	$\frac{1}{3} \sqrt{8}$	9.974 424		9.453 926
r_0	9.623 912		0.426 080	p	0.399 809
r_2	0.306 623				

		$\frac{1}{3}\sqrt{8}x =$	2.667 350		
$\sin(v_2 - v_1)$	9.317 289	$r_1 =$	1.997 178	$p:r_1$	0.099 392
$\cos(v_2 - v_1)$	9.990 431	$r_2 =$	2.025 924	$p:r_2$	0.093 186
q_1	9.410 215	$(\dots) =$	6.690 452	e	9.421 325
$q_1 \cos(v_2 - v_1)$	9.400 646	$(\dots)$	0.825 456	$\cos v_2$	9.957 671
Add	8.708 560	$(t_2 - t_1)^2$	2.982 763	$e \cos v_2$	9.378 996
$-q_2$	9.378 995	$\frac{11}{9}k^2$	6.558 313	$1 + e \cos v_2$	0.093 187
Числит.	8.087 555	$x^{-2}(\dots)^{-1}$	8.271 232	r_2	0.306 623
$e \sin v_1$	8.770 266	b	7.812 308	(λ)	0.399 810
$e \cos v_1$	9.410 215	$1 + b$	0.002 810	k^0	9.993 704
$\cos v_1$	9.988 890	$b:(1 + b)$	7.809 498	$a^{3/2}$	0.646 716
$\operatorname{tg} v_1$	9.111 051	$1 + \dots$	0.002 792	n^0	9.346 988
$v_1 =$	12°.904 51	$b:(1 + \dots)$	7.809 516	3600''	3.556 303
$v_2 - v_1 =$	11.983 47	$\frac{10}{11}$	9.958 607	n''	2.903 291
$v_2 =$	24.887 98	$\frac{10}{11}b:(1 + \dots)$	7.768 123	$n'' =$	800''.370
e	9.421 325	η	0.002 539	e^0	1.179 448
$\varphi =$	15°.297 46	$\frac{1}{2}v_1$	6°.452 255	$\frac{1}{2}v_2$	12°.443 99
$\cos \varphi$	9.984 333	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v_1$	9.053 430	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v_2$	9.343 742
$\cos^2 \varphi$	9.968 666	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}E_1$	8.936 074	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}E_2$	9.226 386
a	0.431 144	$\frac{1}{2}E_1 =$	4°.933 124	$\frac{1}{2}E_2 =$	9°.559 87
$\sqrt{a}$	0.215 572	$\sin E_1$	9.233 881	$\sin E_2$	9.515 269
$M_2 - M_1 =$	6°.892 39	$e^0 \sin E_1$	0.413 329	$e^0 \sin E_2$	0.694 717
$M_2 - M_1$	0.838 369	$E_1 =$	9°.866 25	$E_2 =$	19°.119 74
$t_2 - t_1$	1.491 382	$e^0 \sin E_1 =$	2.590 18	$e^0 \sin E_2 =$	4.951 28
(n^0)	9.346 987	$M_1 =$	7°.276 07	$M_2 =$	14°.168 46
$t_0 =$	1.0 октября	$n(t_0 - t_1) =$	+ 2.928 48	$n(t_0 - t_2) =$	- 3.963 88
$t_0 - t_1 =$	+ 13.172 10	$M_0 =$	10°.204 55	$M_0 =$	10.204 58
$t_0 - t_2 =$	- 17.829 30				
$t_0 - t_1$	1.119 655				
$t_0 - t_2$	1.251 134 _n				
$n(t_0 - t_1)$	0.466 642				
$n(t_0 - t_2)$	0.598 121 _n				

Переходим к вычислению направляющих косинусов.

$\cos v_1$	9.988 890	$\cos v_1 : r_1$	9 688 473	$\sin v_1 : r_1$	9.048 524
$\sin v_1$	9.348 941	$\sin v_1 : r_0$	9.725 029	$\cos v_1 : r_0$	0.364 978
r_0	9.623 912				
r_1	0.300 417	b	0.415 477		
$x_1 \cos v_1 : r_1$	9.983 820		9.150 836 _n		8.638 948
Add	9 988 482		0.231 719		0.068 565
$-(x_0 \sin v_0 : r_1)$	8.401 680 _n		9.302 660 _n		8.975 612 _n
P_x	9.972 302	P_y	9.534 379 _n	P_z	8.707 513 _n
aP_x	0.403 446	aP_y	9 965 523 _n	aP_z	9.138 657 _n
$x_1 \sin v_1 : r_1$	9.343 871		8.510 887 _n		7.998 999
Add	0.175 688		9.983 623		0.010 378
$x_0 \cos v_1 : r_0$	9.041 629		9.942 609		9.615 561
Q_x	9.519 559	Q_y	9.926 232	Q_z	9.625 937
bQ_x	9.935 036	bQ_y	0.341 709	bQ_z	0.041 414

Контроль вычисления направляющих косинусов, так же, как и определение эклиптических элементов ради краткости не приводим. Окончательный результат:

Эпоха $t_0 = 1930$ октябрь 1.0 T. U.

$$\begin{array}{ll}
 M_0 = 10^\circ 2046 & \omega = 57^\circ.8458 \\
 \varphi = 15 2975 & \Omega_0 = 280.6764 \\
 \lg n'' = 9.346 988 & i = 5.9357
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} M_0 \\ \varphi \\ \lg n'' \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Эклиптика и равноденствие} \\ 1930.0 \end{array}$$

$n'' = 800''.370$
 $\lg a = 0.431 144$

Эти элементы следующим образом представляют исходные наблюдения (H—B):

17 сент.	27 сент.	18 окт.
$\Delta\alpha = 0^s .00$	$+ 0^s .05$	$0^s .00$
$\Delta\delta = + 0'' .1$	$+ 0'' .3$	$0'' .0$

Для среднего наблюдения полученные разности несомненно не выходят за пределы ошибок наблюдений, так что вычисление второго приближения могло бы дать лишь формальное, но не реальное улучшение орбиты.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Доказать, что при условии $Q = PR^{-3}$ и $3P \cos \psi > R$ уравнение (33) имеет один и только один положительный корень.

Указание. Написать уравнение (33) в таком виде:

$$f(\rho) \equiv (\rho - P)^2 (\rho^3 + 2R\rho \cos \psi + R^2)^3 - P^2 R^3 = 0,$$

положить $f_1(\rho) \equiv \rho^{-1} f(\rho)$ и рассмотреть знаки выражений $f_1(P)$ и $f_1(0)$.

2. В примере вычисления орбиты, данном в § 61, определить элементы по гелиоцентрическим координатам, полученным в первом приближении. Посмотреть, как эти элементы представляют среднее место и оценить реальную пользу второго приближения.

3. Доказать формулы

$$\begin{aligned} r \sin v &= xQ_x + yQ_y + zQ_z \\ r \cos v &= xP_x + yP_y + zP_z. \end{aligned}$$

4. При малых промежутках времени параметр орбиты можно вычислить по следующей приближенной формуле:

$$\tau \sqrt{p} = f(r_1^2 + r_2^2),$$

где

$$\tau = k(t_2 - t_1), \quad f = \frac{1}{2}(v_2 - v_1).$$

Получить эту формулу из интеграла площадей, применив способ трапеций для приближенного вычисления интегралов. Посмотреть, насколько точный результат дает эта формула в примерах §§ 61 и 62.

5. Эйлер пользовался следующей, более точной нежели только что указанная, формулой

$$\tau \sqrt{p} = \frac{1}{8} f(r_1^2 + r_2^2 + 4r_0^2),$$

где r_0 — определяется равенством

$$\frac{\cos f}{r_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \frac{2\tau^2}{f^2(r_1^2 + r_2^2)} \sin^2 \frac{1}{2} f.$$

Доказать эту формулу и посмотреть, что она дает в примерах §§ 61 и 62.

6. Принимая x за абсциссу, а p за ординату, построить кривую (34) для различных значений $\cos \psi$. Когда задача о вычислении орбиты по трем наблюдениям имеет два решения?

7. В формулах Джиббса (14) положить $r_1 = r_2 = r$, что будет особенно близко к истине для орбит с малыми эксцентриситетами. Полученные формулы для n_1 и n_2 положить в основу метода определения геоцентрических расстояний вместо формул (15). Развить этот метод и применить его к примерам, данным в §§ 61 и 62.

Примечание. Метод, основанный на аналогичных, но менее удобных (и несколько менее точных) формулах, дал Эберт (W. Ebert, Eine einfache Methode zur Bestimmung elliptischer Bahnen aus drei Beobachtungen, Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 78, Math.-phys. Klasse).

8. При выводе формул Джиббса (§ 54) мы представили каждую координату в виде полинома четвертой степени относительно времени. Исходя из представления каждой координаты в виде тригонометрического полинома

$$x = a_0 + a_1 \sin nt + b_1 \cos nt + a_2 \sin 2nt + b_2 \cos 2nt$$

и применяя совершенно такой же способ рассуждения, получим, что $[rr_2]$, $[r_1r_2]$, $[r_1r]$ соответственно пропорциональны таким выражениям:

$$(M_1 + N_1 r_1^{-3}) \sin n\theta_1, \quad (M - N r^{-3}) \sin n\theta, \quad (M_2 + N_2 r_2^{-3}) \sin n\theta_2,$$

где

$$\theta_1 = t_2 - t, \quad \theta = t_2 - t_1, \quad \theta_2 = t - t_1.$$

$$S = \cos \frac{n\theta_1}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \cos \frac{n\theta_2}{2},$$

$$M_1 = 4S - \cos n\theta_1 = 1 + \cos n\theta + \cos n\theta_2$$

$$M = 4S - \cos n\theta = 1 + \cos n\theta_1 + \cos n\theta_2$$

$$M_2 = 4S - \cos n\theta_2 = 1 + \cos n\theta_1 + \cos n\theta$$

$$N_1 = \cos n\theta_1 - S = 3S - M_1$$

$$N = \cos n\theta - S = -3S + M$$

$$N_2 = \cos n\theta_2 - S = 3S - M_2$$

Наиболее точные результаты эти выражения дают в том случае, когда за n принято среднее суточное движение светила. Если $M_1, N_1, \dots$, разложить по степеням промежутков времени и ограничиться низшими степенями, то получим формулы Джиббса (Ship Hirayama, Monthly Notices of the R. A. S. Vol. 66, 1906).

МЕТОД ГАУССА В ЭКЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ.

Метод Гаусса был нами подробно изучен в предыдущей главе. Теперь мы посмотрим, какую форму он принимает при употреблении эклиптической системы координат. В этом случае при помощи некоторых дальнейших преобразований формулам может быть придан вид особенно удобный для логарифмического вычисления. Употребление только двух координат (долготы и радиуса-вектора) для определения положения Земли в момент наблюдения вместо трех координат Солнца (X, Y, Z), служивших для этой цели в предыдущем случае, также представляет известные удобства.

При вычислении с арифмометром указанные положительные стороны употребления эклиптических координат теряют свое значение, между тем как отрицательные стороны — необходимость перечисления (α, δ) в (λ, β) и трудность точного учета влияния параллакса (см. § 46 и § 44) — остаются в силе. Этим объясняется, что по мере распространения арифмометров, эклиптические координаты при вычислении орбит вытесняются экваториальными.

Если вычисления ведутся с логарифмами, то излагаемая ниже форма метода Гаусса вполне может конкурировать с той формой, которая была дана в предыдущей главе.

§ 63. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Удерживая прежние обозначения t_1, t, t_2 ($t_1 < t < t_2$) для моментов наблюдений, обозначим соответствующие геоцентрические координаты светила через (λ_1, β_1) , (λ, β) и (λ_2, β_2) . Положение Земли для тех же моментов будем определять долготами L_1, L, L_2 и радиусами-векторами R_1, R, R_2 .

Что касается широты Земли, то мы будем либо ею пренебрегать, либо будем считать, что широты светила уже исправлены за широту Земли; либо, наконец, будем предполагать, что каждое наблюдение приведено к соответствующему *locus fictus* (см. § 44).

Наряду с геоцентрическими расстояниями ρ_1, ρ, ρ_2 введем, для упрощения формул, еще их проекции на плоскость эклиптики

$$\bar{\rho}_1 = \rho_1 \cos \beta_1, \quad \bar{\rho} = \rho \cos \beta, \quad \bar{\rho}_2 = \rho_2 \cos \beta_2,$$

носящие название *сокращенных расстояний*.

При таких обозначениях основные уравнения (VII, 2) напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \bar{\rho}_1 \cos \lambda_1 + R_1 \cos L_1 & x &= \bar{\rho} \cos \lambda + R \cos L \\ y_1 &= \bar{\rho}_1 \sin \lambda_1 + R_1 \sin L_1 & y &= \bar{\rho} \sin \lambda + R \sin L \\ z_1 &= \bar{\rho}_1 \operatorname{tg} \beta_1 & z &= \bar{\rho} \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \bar{\rho}_2 \cos \lambda_2 + R_2 \cos L_2 \\ y_2 &= \bar{\rho}_2 \sin \lambda_2 + R_2 \sin L_2 \\ z_2 &= \bar{\rho}_2 \operatorname{tg} \beta_2 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (VII, 3), выражающие условие нахождения трех гелиоцентрических положений светила в одной плоскости с центром Солнца, получим:

$$\left. \begin{aligned} n_1 \bar{\rho}_1 \cos \lambda_1 - \bar{\rho} \cos \lambda + n_2 \bar{\rho}_2 \cos \lambda_2 &= \\ = -n_1 R_1 \cos L_1 + R \cos L - n_2 R_2 \cos L_2 \\ n_1 \bar{\rho}_1 \sin \lambda_1 - \bar{\rho} \sin \lambda + n_2 \bar{\rho}_2 \sin \lambda_2 &= \\ = -n_1 R_1 \sin L_1 + R \sin L - n_2 R_2 \sin L_2 \\ n_1 \bar{\rho}_1 \operatorname{tg} \beta_1 - \bar{\rho} \operatorname{tg} \beta + n_2 \bar{\rho}_2 \operatorname{tg} \beta_2 &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Таким образом для всех значений ρ_1, ρ, ρ_2 , таких, что три точки $\rho_1, \lambda_1, \beta_1, \rho, \lambda, \beta$, и $\rho_2, \lambda_2, \beta_2$ лежат в плоскости, проходящей через центр Солнца, существуют величины n_1, n_2 , удовлетворяющие этим трем уравнениям.

В частности для $\rho_1 = \rho = \rho_2 = 0$ мы, очевидно, получим три точки, лежащие в такой плоскости. Следовательно, обозначая через N_1 и N_2 соответствующие значения параметров n_1 и n_2 , получим

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -N_1 R_1 \cos L_1 + R \cos L - N_2 R_2 \cos L_2 \\ 0 &= -N_1 R_1 \sin L_1 + R \sin L - N_2 R_2 \sin L_2 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Откуда

$$N_1 = \frac{R R_2 \sin(L_2 - L)}{R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1)}, \quad N_2 = \frac{R_1 R \sin(L - L_1)}{R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1)}. \quad (4)$$

Вычтем почленно равенства (3) из (2). Это даст

$$\left. \begin{aligned} n_1 \bar{\rho}_1 \cos \lambda_1 - \bar{\rho} \cos \lambda + n_2 \bar{\rho}_2 \cos \lambda_2 &= \\ = \bar{n}_1 R_1 \cos L_1 + \bar{n}_2 R_2 \cos L_2 \\ n_1 \bar{\rho}_1 \sin \lambda_1 - \bar{\rho} \sin \lambda + n_2 \bar{\rho}_2 \sin \lambda_2 &= \\ = \bar{n}_1 R_1 \sin L_1 + \bar{n}_2 R_2 \sin L_2 \\ n_1 \bar{\rho}_1 \operatorname{tg} \beta_1 - \bar{\rho} \operatorname{tg} \beta + n_2 \bar{\rho}_2 \operatorname{tg} \beta_2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где для краткости положено

$$\bar{n}_1 = N_1 - n_1, \quad \bar{n}_2 = N_2 - n_2. \quad (6)$$

Решение уравнений (5) относительно $\bar{\rho}$ дает

$$\Delta \bar{\rho} = D, \quad (7)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \lambda_1 & \cos \lambda & \cos \lambda_2 \\ \sin \lambda_1 & \sin \lambda & \sin \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \beta_1 & \operatorname{tg} \beta & \operatorname{tg} \beta_2 \end{vmatrix}$$

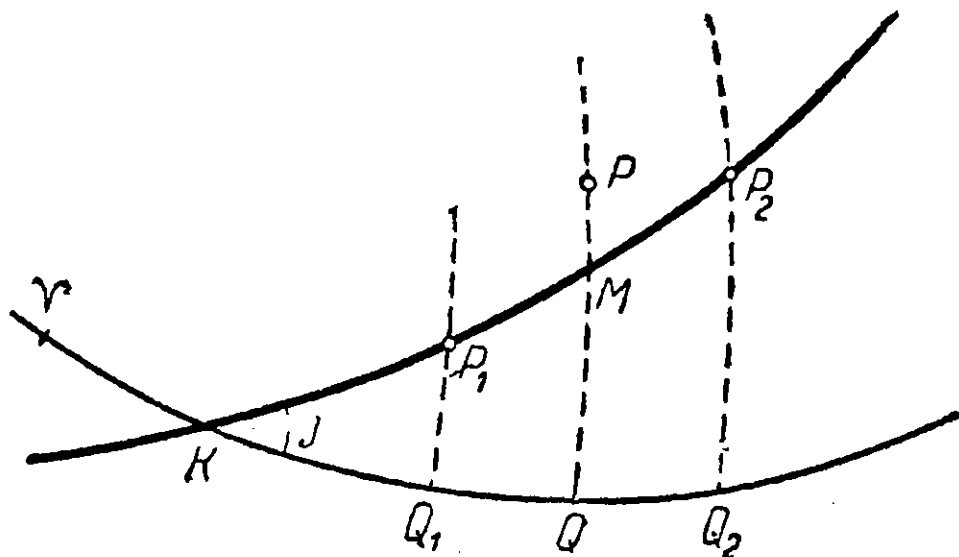
$$D = - \begin{vmatrix} \cos \lambda_1 & \bar{n}_1 R_1 \cos L_1 + \bar{n}_2 R_2 \cos L_2 & \cos \lambda_2 \\ \sin \lambda_1 & \bar{n}_1 R_1 \sin L_1 + \bar{n}_2 R_2 \sin L_2 & \sin \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \beta_1 & 0 & \operatorname{tg} \beta_2 \end{vmatrix}$$

Займемся приведением этих определителей к виду, удобному для вычислений. Прежде всего имеем

$$\Delta = \operatorname{tg} \beta_1 \sin (\lambda_2 - \lambda) + \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda_1 - \lambda_2) + \operatorname{tg} \beta_2 \sin (\lambda - \lambda_1). \quad (8)$$

На геоцентрической небесной сфере (черт. 15) отметим положения светила P_1, P, P_2 соответствующие моментам наблюдений. Проведем большой круг $P_1 P_2$ через крайние положения и обозначим через K долготу восходящего узла, а через I — наклонность этого круга по отношению к эклиптике. Прямоугольные треугольники KP_1Q_1 и KP_2Q_2 дают

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} I \sin (\lambda_1 - K), \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \operatorname{tg} I \sin (\lambda_2 - K). \quad (9)$$



Черт. 15.

Эти соотношения позволяют легко вычислить I и K . Перепишем второе из них следующим образом:

$$\operatorname{tg} I \sin (\lambda_1 - K) \cos (\lambda_2 - \lambda_1) + \operatorname{tg} I \cos (\lambda_1 - K) \sin (\lambda_2 - \lambda_1) = \operatorname{tg} \beta_2$$

и пользуясь первым, окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} I \sin (\lambda_1 - K) &= \operatorname{tg} \beta_1 \\ \operatorname{tg} I \cos (\lambda_1 - K) &= \operatorname{tg} \beta_2 \operatorname{cosec} (\lambda_2 - \lambda_1) - \operatorname{tg} \beta_1 \cotg (\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

При помощи равенств (9) мы можем определитель (8) написать так:

$$\begin{aligned} \Delta &= \operatorname{tg} I [\sin (\lambda_2 - \lambda) \sin (\lambda_1 - K) + \\ &+ \sin (\lambda - \lambda_1) \sin (\lambda_2 - K)] - \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda_2 - \lambda_1) = \\ &= [\operatorname{tg} I \sin (\lambda - K) - \operatorname{tg} \beta] \sin (\lambda_2 - \lambda_1), \end{aligned}$$

— нужно только воспользоваться следующим легко проверяемым тождеством:

$$\left. \begin{aligned} \sin (B - A) \sin (D - C) + \sin (C - A) \sin (B - D) + \\ + \sin (D - A) \sin (C - B) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Это тождество дает

$$\sin(\lambda_2 - \lambda) \sin(\lambda_1 - K) + \sin(\lambda - \lambda_1) \sin(\lambda_2 - K) + \\ + \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda - K) = 0.$$

Наконец, полагая

$$\operatorname{tg} I \sin(\lambda - K) = \operatorname{tg} \beta_0,$$

окончательно получим

$$\Delta = (\operatorname{tg} \beta_0 - \operatorname{tg} \beta) \sin(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Из чертежа 15 ясно, что введенная нами величина β_0 есть не что иное, как широта точки M , в которой круг широт для среднего наблюдения пересекается с дугою $P_1 P_2$.

Обратимся теперь к определителю D . Прежде всего имеем

$$D = \bar{n}_1 R_1 [\operatorname{tg} \beta_1 \sin(L_1 - \lambda_2) - \operatorname{tg} \beta_2 \sin(L_1 - \lambda_1)] + \\ + \bar{n}_2 R_2 [\operatorname{tg} \beta_1 \sin(L_2 - \lambda_2) - \operatorname{tg} \beta_2 \sin(L_2 - \lambda_1)],$$

или, пользуясь равенствами (9),

$$D = \operatorname{tg} I \{ \bar{n}_1 R_1 [\sin(\lambda_1 - K) \sin(L_1 - \lambda_2) - \sin(\lambda_2 - K) \sin(L_1 - \lambda_1)] + \\ + \bar{n}_2 R_2 [\sin(\lambda_1 - K) \sin(L_2 - \lambda_2) - \sin(\lambda_2 - K) \sin(L_2 - \lambda_1)] \}.$$

Тождество (11) дает

$$\sin(\lambda_1 - K) \sin(L_1 - \lambda_2) - \sin(\lambda_2 - K) \sin(L_1 - \lambda_1) = \\ = -\sin(L_1 - K) \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \sin(\lambda_1 - K) \sin(L_2 - \lambda_2) - \sin(\lambda_2 - K) \sin(L_2 - \lambda_1) = \\ = -\sin(L_2 - K) \sin(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Поэтому

$$D = -\operatorname{tg} I [\bar{n}_1 R_1 \sin(L_1 - K) + \bar{n}_2 R_2 \sin(L_2 - K)].$$

Подставляя найденные выражения Δ и D в уравнение (7), получим

$$\rho (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta_0) \cos \beta = \operatorname{tg} I [\bar{n}_1 R_1 \sin(L_2 - K) + \bar{n}_2 R_2 \sin(L_2 - K)].$$

В общем случае, когда разность $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta_0$ существенно отличается от нуля, мы представим это уравнение в такой форме

$$\rho = d_1 (N_1 - n_1) + d_2 (N_2 - n_2), \quad (12)$$

где

$$a_0 = \frac{\operatorname{tg} I \sec \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta_0}$$

$$d_1 = a_0 R_1 \sin(L_1 - K), \quad d_2 = a_0 R_2 \sin(L_2 - K).$$

§ 64. ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ.

Определение ρ при помощи уравнения (12) основывается в методе Гаусса на употреблении следующих выражений для n_1 и n_2 (см. § 52):

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}, \quad (13)$$

где

$$n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad n_2^0 = \frac{\tau_2}{\tau};$$

что же касается до c_1 и c_2 , то в первом приближении берем

$$C_1 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_1^0), \quad C_2 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_2^0). \quad (14)$$

Здесь, как и раньше, мы пользуемся обозначениями

$$\tau = k(t_2 - t_1), \quad \tau_1 = k(t_2 - t), \quad \tau_2 = k(t - t_1).$$

Подставив выражения (13) в уравнение (12), получим

$$\rho = P - Qr^{-3}, \quad (15)$$

где

$$P = d_1(N_1 - n_1^0) + d_2(N_2 - n_2^0),$$

$$Q = d_1 c_1 + d_2 c_2.$$

Второе уравнение, связывающее ρ и r , получим возведя в квадрат и сложив уравнения (1), относящиеся к среднему наблюдению. Это даст

$$r^2 = \rho^2 + 2R\rho \cos \psi + R^2, \quad (16)$$

где

$$\cos \psi = \cos \beta \cos (\lambda - L) \quad (16a)$$

Совместное решение уравнений (15), (16) было подробно изучено в §§ 58 и 59.

После того, как найдены ρ и r , соответствующие принятым значениям c_1 , c_2 , переходим к определению ρ_1 и ρ_2 . Для этого, значения n_1 и n_2 , вычисленные по формулам (13), подставляем в уравнения (5). Одно из уравнений, получающихся из (5) путем исключения ρ_2 , например уравнение

$$\left. \begin{aligned} n_1 \bar{\rho}_1 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) - \bar{\rho} \sin (\lambda_2 - \lambda) = \\ = \bar{n}_1 R_1 \sin (\lambda_2 - L_1) + \bar{n}_2 R_2 \sin (\lambda_2 - L_2) \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

даст нам ρ_1 . После чего, имея уже ρ_1 и ρ , мы из любого из уравнений (5) найдем ρ_2 .

Примечание I. Следуя Гауссу, обычно представляют уравнение (17) в следующем виде:

$$\rho_1 = \frac{\rho}{n_1} U_1 + \left(\frac{N_1}{n_1} - 1 \right) U_1'.$$

Для ρ_2 выводят, исключая из (5) ρ_1 , аналогичное уравнение

$$\rho_2 = \frac{\rho}{n_2} U_2 + \left(\frac{N_2}{n_2} - 1 \right) U_2'.$$

Здесь положено

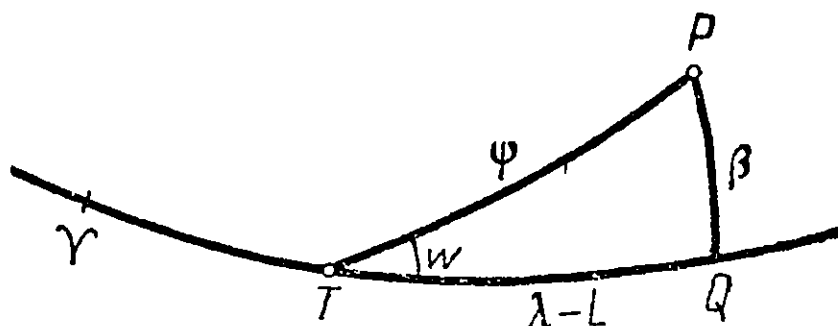
$$f = \cos \beta \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \quad h = \frac{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}{a_0 R_1 R_2 \sin (L_2 - L_1)}$$

$$g_1 = \frac{R_2 \sin (\lambda_2 - L_2)}{f d_2} \quad g_2 = \frac{R_1 \sin (\lambda_1 - L_1)}{f d_1}$$

$$U_1 = \frac{\sin (\lambda_2 - \lambda)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)} + g_1 \quad U_2 = \frac{\sin (\lambda - \lambda_1)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)} - g_2$$

$$U_1' = \frac{\sin (\lambda_2 - K)}{h d_2} \quad U_2' = \frac{\sin (\lambda_1 - K)}{h d_1}.$$

Конечно, вычислив коэффициенты U_1, U_1', U_2, U_2' , мы несколько упростим нахождение ρ_1 и ρ_2 в каждом из приближений. Если бы пришлось делать много приближений, то такой прием мог бы быть выгодным. Но так как в практике вычисления орбит почти никогда не приходится делать более двух приближений, то работа, затрачиваемая на вычисление и контроль указанных коэффициентов, едва ли окупится.



Черт. 16.

Примечание II. В том случае, когда решение уравнений (15), (16) сводят к решению уравнения Гаусса, приходится избегать определения угла ψ по формуле (16a).

Отметим на гелиоцентрической небесной сфере (черт. 16) положение Земли T и геоцентрическое положение светила P , соответствующие моменту среднего наблюдения. Из прямоугольного треугольника TPQ имеем, обозначая через ω угол при вершине T ,

$$\sin \omega \sin \psi = \sin \beta$$

$$\cos \omega \sin \psi = \cos \beta \sin (\lambda - L)$$

$$\cos \psi = \cos \beta \cos (\lambda - L).$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \beta \operatorname{cosec} (\lambda - L)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} (\lambda - L) \sec \omega$$

§ 65. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ.

Найденные в первом приближении геоцентрические расстояния позволяют найти более точные значения n_1 , n_2 , нежели значения (13), (14), употребленные для первого приближения. В обычно встречающихся случаях для этого достаточно употребить формулы Джиббса, выведенные в § 54. Чтобы воспользоваться этими формулами нужно кроме r знать еще радиусы-векторы r_1 и r_2 . Аналогично равенству (16) имеем

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \rho_1^2 + 2R_1\rho_1 \cos \psi_1 + R_1^2 \\ r_2^2 &= \rho_2^2 + 2R_2\rho_2 \cos \psi_2 + R_2^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \cos \psi_1 &= \cos \beta_1 \cos (\lambda_1 - L_1) \\ \cos \psi_2 &= \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - L_2) \end{aligned}$$

Имея новые более точные значения n_1 и n_2 , из равенств (13) определяем новые значения c_1 и c_2 , именно

$$c_1 = (n_1 - n_1^0) r^3, \quad c_2 = (n_2 - n_2^0) r^3.$$

С этими значениями заново решаем уравнения (15), (16), что дает более точные значения ρ и r .

В тех весьма редких случаях, когда может понадобиться третье приближение, для которого формулы Джиббса уже не достаточно точны, новые значения n_1 и n_2 находим по формулам (см. § 57)

$$n_1 = n_1^0 \frac{\eta}{\eta_1}, \quad n_2 = n_2^0 \frac{\eta}{\eta_2}.$$

Для того, чтобы вычислить отношения η , η_1 , η_2 площадей секторов и соответственных треугольников, надо найти не только радиусы-векторы, но и углы между ними.

Это делается следующим образом. Обозначая через l_1 , l , l_2 и b_1 , b , b_2 гелиоцентрические долготы и широты трех рассматриваемых положений светила, мы можем уравнения (1) написать так:

$$\begin{aligned} r_1 \cos b_1 \cos l_1 &= \bar{\rho}_1 \cos \lambda_1 + R_1 \cos L_1 \\ r_1 \cos b_1 \sin l_1 &= \bar{\rho}_1 \sin \lambda_1 + R_1 \sin L_1 \\ r_1 \sin b_1 &= \bar{\rho}_1 \operatorname{tg} \beta_1. \end{aligned}$$

и аналогично для двух других положений светила. Уменьшив все долготы на L_1 , мы можем переписать эти уравнения в несколько более удобной форме

$$\left. \begin{aligned} r_1 \cos b_1 \cos (l_1 - L_1) &= \bar{\rho}_1 \cos (\lambda_1 - L_1) + R_1 \\ r_1 \cos b_1 \sin (l_1 - L_1) &= \bar{\rho}_1 \sin (\lambda_1 - L_1) \\ r_1 \sin b_1 &= \bar{\rho}_1 \operatorname{tg} \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Определив отсюда гелиоцентрические координаты (r'_1, l_1, b_1) , (r, l, b) , (r_2, l_2, b_2) , находим, при помощи формул (VI, 15) наклонность орбиты i и долготу восходящего угла Ω ; после чего формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u_1 &= \operatorname{tg} (l_1 - \Omega) \sec i \\ \operatorname{tg} u &= \operatorname{tg} (l - \Omega) \sec i \\ \operatorname{tg} u_2 &= \operatorname{tg} (l_2 - \Omega) \sec i \end{aligned}$$

дадут аргументы широты u_1, u, u_2 , позволяющие найти углы между радиусами-векторами.

Зная радиусы-векторы и углы между ними, найдем η, η_1 и η_2 по одному из способов, указанных в §§ 34—37.

§ 66. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ.

Когда найдены окончательные значения геоцентрических расстояний, то переходим к определению элементов. Прежде всего по формулам (18) и им аналогичным находим (r_1, l_1, b_1) и (r_2, l_2, b_2) . После этого по формулам, указанным в предыдущем параграфе, находим i, Ω и аргументы широты u_1, u_2 .

Зная радиусы-векторы r_1, r_2 и угол между ними

$$u_2 - u_1 = 2f,$$

находим (см. §§ 35—37) отношение η , которое дает возможность вычислить параметр орбиты, ибо (§ 34)

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_2 \sin 2f}{\tau \eta_i}$$

Остальные элементы находятся по формулам, данным в § 31. Отличие будет лишь в том, что после определения истинной аномалий v_1 мы сразу определим расстояние перигелия от узла, ибо

$$\omega = u_1 - v_1.$$

§ 67. СОПОСТАВЛЕНИЕ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРБИТЫ ПО МЕТОДУ ГАУССА.

(Эклиптические координаты)

Подготовка наблюдений.

Моменты выбранных наблюдений t_1, t, t_2 ($t_1 < t < t_2$) выражаются в десятичных долях суток. Если геоцентрические расстояния светила приближенно известны, то наблюденные прямые восхождения и склонения исправляем за параллакс и обращаем в эклиптические координаты $(\lambda_1, \beta_1), (\lambda, \beta), (\lambda_2, \beta_2)$; полученные широты исправляются за широту Солнца. Если геоцентрические расстояния совершенно неизвестны, то можно привести каждое наблюдение к соответствующему *locus fictus* (§ 44).

Приближенные геоцентрические расстояния могут быть использованы для исправления моментов наблюдений за абберационное время:

$$t_1^\circ = t_1 - \Delta\rho_1, \quad t^\circ = t - \Delta\rho, \quad t_2^\circ = t_2 - \Delta\rho_2.$$

Координаты Земли берутся из эфемерид для неисправленных моментов t_1, t, t_2 . Долгота Земли = долготе Солнца $\pm 180^\circ$.

Определяем $\operatorname{tg} I$ и K из уравнений ($\operatorname{tg} I > 0$):

$$\operatorname{tg} I \sin (\lambda_1 - K) = \operatorname{tg} \beta_1$$

$$\operatorname{tg} I \cos (\lambda_1 - K) = \frac{\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)},$$

Контроль: $\operatorname{tg} I \sin (\lambda_2 - K) = \operatorname{tg} \beta_2$

Далее вычисляем a_0 , d_1 , d_2 , N_1 и N_2 . Для контроля вычисляется еще d :

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} I \sin (\lambda - K)$$

$$a_0 = \frac{\operatorname{tg} I \sec \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta_0}$$

$$d_1 = a_0 R_1 \sin (L_1 - K), \quad d = a_0 R \sin (L - K), \quad d_2 = a_0 R_2 \sin (L_2 - K)$$

$$N_1 = \frac{R \sin (L_2 - L)}{R_1 \sin (L_2 - L_1)}, \quad N_2 = \frac{R \sin (L - L_1)}{R_2 \sin (L_2 - L_1)}$$

Контроль: $N_1 d_1 + N_2 d_2 = d$.

Вычисление угла ψ :

$$\operatorname{tg} w = \operatorname{tg} \beta \operatorname{cosec} (\lambda - L)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} (\lambda - L) \sec w$$

$$(0^\circ < \psi < 180^\circ).$$

Контроль: $\cos \psi = \cos \beta \cos (\lambda - L)$.

Наконец, находим коэффициенты уравнения (17), служащего для определения ρ_1 :

$$A = \frac{\sin (\lambda_2 - \lambda)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$B_1 = \frac{R_1 \sin (\lambda_2 - L_1)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad B_2 = \frac{R_2 \sin (\lambda_2 - L_2)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Первое приближение.

$$n_1^0 = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}, \quad n_2^0 = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 = \frac{1}{6} k^2 (t_2 - t) (t - t_1)$$

$$\lg \frac{1}{6} k^2 = 5.693 \, 012_{-10}$$

Если была возможность исправить моменты наблюдений за абберационное время, то в этих формулах вместо t_1 , t , t_2 , берем t_1^0 , t^0 , t_2^0 . Далее вычисляем

$$c_1 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_1^0), \quad c_2 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_2^0)$$

$$P = d_1 (N_1 - n_1^0) + d_2 (N_2 - n_2^0)$$

$$Q = d_1 c_1 + d_2 c_2$$

и либо решаем уравнения Лагранжа (§ 58).

$$\rho = P - Qr^{-3}$$

$$r^2 = (\rho + R \cos \psi)^2 + R^2 \sin^2 \psi,$$

либо заменяем их уравнением Гаусса. В этом последнем случае находим q и m :

$$\mu \sin q = R \sin \psi$$

$$\mu \cos q = R \cos \psi + P$$

$$m = \frac{Q}{\mu (R \sin \psi)^3}$$

Знак μ выбираем так, чтобы величина m была положительна. Решение уравнения Гаусса (§ 59)

$$\sin(z - q) = m \sin^4 z$$

даст z , после чего находим

$$\rho = \frac{R \sin(\psi - z)}{\sin z}, \quad \bar{\rho} = \rho \cos \beta$$

$$r = \frac{R \sin \psi}{\sin z}.$$

Контроль: $\rho = P - Qr^{-3}$.

Для вычисления ρ_1 и ρ_2 служат формулы:

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}$$

$$n_1 \rho_1 = A \bar{\rho} + B_1(N_1 - n_1) + B_2(N_2 - n_2)$$

$$n_2 \bar{\rho}_2 \cos \lambda_2 = -n_1 \bar{\rho}_1 \cos \lambda_1 + \bar{\rho} \cos \lambda + R_1 \cos L_1 (N_1 - n_1) + \\ + R_2 \cos L_2 (N_2 - n_2)$$

$$\rho_1 = \bar{\rho}_1 \sec \beta_1, \quad \rho_2 = \bar{\rho}_2 \sec \beta_2$$

Если $\cos \lambda_2$ близок к нулю, то для определения ρ_2 можно взять другое уравнение из числа (5).

В тех случаях, когда заранее можно быть уверенным, что гелиоцентрическая дуга, описанная светилом, не велика, находим радиусы-векторы r_1 , r_2 и при помощи формул Джиббса вычисляем новые значения n_1 и n_2 . При этом моменты наблюдений исправляем за абберационное время при помощи найденных значений ρ_1, ρ, ρ_2 :

$$t_1^0 = t_1 - A\rho, \quad t^0 = t - A\rho, \quad t_2^0 = t_2 - A\rho_2$$

$$\lg A = 7.76118_{-10}.$$

$$\cos \psi_1 = \cos \beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1), \quad \cos \psi_2 = \cos \beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2).$$

$$r_1^2 = (\rho_1 + R_1 \cos \psi_1)^2 + R_1^2 \sin^2 \psi_1, \quad r_2^2 = (\rho_2 + R_2 \cos \psi_2)^2 + R_2^2 \sin^2 \psi_2$$

$$n_1 = n_1^0 \eta \eta_1^{-1}, \quad n_2 = n_2^0 \eta \eta_2^{-1}$$

$$\eta\eta_1^{-1} = \frac{1+B_1r_1^{-3}}{1-Br^{-3}}, \quad \eta\eta_2^{-1} = \frac{1+B_2r_2^{-3}}{1-Br^{-3}}$$

$$B = \beta\tau^2, \quad B_1 = \beta_1\tau^2, \quad B_2 = \beta_2\tau^2$$

$$\tau^2 = k^2(t_2^0 - t_1^0)^2$$

β, β_1, β_2 берутся из таблицы IX.

Если гелиоцентрическая дуга, описанная светилом за время между крайними наблюдениями, велика, особенно же, когда имеем дело с кометой, близкой к Солнцу, отношения η, η_1, η_2 лучше вычислять по формулам §§ 34 и 35.

Для этого сначала вычисляем гелиоцентрические координаты при помощи формул

$$r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - L_1) = \bar{p}_1 \cos(\lambda_1 - L_1) + R_1$$

$$r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) = \bar{p}_1 \sin(\lambda_1 - L_1)$$

$$r_1 \sin b_1 = \bar{p}_1 \operatorname{tg} \beta_1$$

и аналогичных для двух других моментов.

Затем вычисляем i, Ω и аргументы широты u_1, u, u_2 :

$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$

$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_2 - l_1)}{\sin(l_2 - l_1)}$$

Контроль:

$$\operatorname{tg} i \sin(l_2 - \Omega) = \operatorname{tg} b_2$$

$$\operatorname{tg} i \sin(l - \Omega) = \operatorname{tg} b$$

$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1 - \Omega) \sec i$$

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(l - \Omega) \sec i$$

$$\operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg}(l_2 - \Omega) \sec i$$

Каждый из углов u_1, u, u_2 находится в том же квадранте, как и соответствующая разность $l_1 - \Omega, l - \Omega, l_2 - \Omega$.

Когда вычислены не только радиусы-векторы, но и аргументы широты, то довольно глубокий контроль проделанной работы дается соотношениями

$$n_1 = \frac{rr_2 \sin(u_2 - u)}{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}, \quad n_2 = \frac{r_1 r \sin(u - u_1)}{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}.$$

Нужно только заметить, что при очень малых значениях углов $u_2 - u_1, u_2 - u, u - u_1$, правые и левые части могут заметно отличаться и при отсутствии вычислительных ошибок. В этом случае надо посмотреть, не могут ли быть уничтожены обнаруженные разности между правыми и левыми частями последних равенств при помощи замены u_1, u, u_2 через $u_1 + \delta u, u - \delta u, u_2 + \delta u$. Поправка δu при шестизначном вычислении не должна превосходить $0''.2 - 0''.3$.

Второе приближение.

Если значения

$$n_1 = n_1^0 \eta \eta_1^{-1}, \quad n_2 = n_2^0 \eta \eta_2^{-1},$$

полученные в конце первого приближения, заметно отличаются от исходных значений

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3},$$

то вычисляем второе приближение. Для второго приближения берем новые значения n_1, n_2 и полагаем

$$c_1 = (n_1 - n_1^0) r^3, \quad c_2 = (n_2 - n_2^0) r^3.$$

С этими значениями по тем же формулам, что и в первом приближении, последовательно находим ρ, r, ρ_1, ρ_2 , и наконец гелиоцентрические координаты $(r_1, l_1, b_1), (r_2, l_2, b_2)$, нужные для определения элементов. Если предполагается третье приближение, то вычисляются также и (r, l, b) .

Наконец снова вычисляем i, Ω и аргументы широты u_1, u_2 .

Вычисление элементов.

Прежде всего находим отношение η . Для малых планет обычно наиболее удобным является способ Энке (§ 36):

$$\cos \gamma = \frac{2 \sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2} \cos \frac{1}{2} (u_2 - u_1); \quad \Gamma = \lg \frac{1}{1 - \cos \gamma}$$

$$\sigma = \frac{(t_2^{\circ} - t_1^{\circ})^2}{(r_1 + r_2)^3}$$

$$\lg \eta = a' \sigma + (a'' \sigma - b'' \sigma^2),$$

где коэффициенты, выраженные в единице шестого знака, таковы:

$$\lg a' = 2.233\,886$$

$$\lg a'' = 2.614\,10 - \Gamma$$

$$\lg b'' = 9.034\,11_{-10}$$

В особо трудных случаях (когда гелиоцентрическое движение превосходит 30°) применяются способы, указанные в §§ 34 и 35.

Далее

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{k(t_2^{\circ} - t_1^{\circ})} \eta$$

$$q_1 = \frac{p}{r_1} - 1, \quad q_2 = \frac{p}{r_2} - 1$$

$$e \sin v_1 = \frac{q_1 \cos(u_2 - u_1) - q_2}{\sin(u_2 - u_1)}$$

$$e \cos v_1 = q_1$$

$$\omega = u_1 - v_1$$

$$v_2 = u_2 - \omega = v_1 + (u_2 - u_1)$$

Контроль: $e \cos v_2 = q_2$.

Если в последнем приближении и для среднего наблюдения был вычислен аргумент широты, то хороший контроль получим еще при помощи равенств.

$$v = u - \omega, \quad r(1 + e \cos v) = p.$$

Вычисление остальных элементов:

$$\sin \varphi = e, \quad a = p \sec^2 \varphi$$

$$\sin \frac{1}{2} (v_1 - E_1) = \sin \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{r_1}{p}} \sin v_1$$

$$\sin \frac{1}{2} (v_2 - E_2) = \sin \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{r_2}{p}} \sin v_2$$

Контроль: $a \cos \varphi \sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1) = \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{1}{2} (v_2 - v_1)$

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1 \quad \lg e'' = \lg e + 5.314\,425$$

$$M_2 = E_2 - e \sin E_2 \quad \lg e^{\circ} = \lg e + 1.758\,123$$

$$n = \frac{M_2 - M_1}{t_2^{\circ} - t_1^{\circ}}$$

Контроль: $n = k'' a^{-\frac{3}{2}}, \quad \lg k'' = 3.550\,007.$

$$M_0 = M_1 + n(t_0 - t_1^{\circ}) = M_2 + n(t_0 - t_2^{\circ})$$

Представление наблюдений.

Для того чтобы проверить полученные элементы орбиты при помощи представления исходных наблюдений (еще важнее посмотреть, как эти элементы представляют другие наблюдения), а также для вычисления эфемериды, обычно находят постоянные Гаусса (§ 23).

Затем для каждого представляемого наблюдения вычисляют

$$M = M_0 + n(t^{\circ} - t_0)$$

$$E - e \sin E = M$$

$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E$$

$$r \cos v = a(\cos E - e)$$

$$p \cos \delta \cos \alpha = r \sin a \sin (A + \omega + v) + X$$

$$p \cos \delta \sin \alpha = r \sin b \sin (B + \omega + v) + Y$$

$$p \sin \delta = r \sin c \sin (C + \omega + v) + Z$$

Через $t^{\circ} = t - \Delta p$ обозначен момент наблюдения, исправленный за абберационное время. Координаты Солнца X, Y, Z берутся из эфемерид для неисправленного момента t . Наблюдаемые положения должны быть исправлены за параллакс.

§ 68. ПРИМЕР.

Даны следующие топоцентрические наблюдения планеты 1931 TN:

	1931		T. U.	α (1931.0)	δ (1931.0)
Место Симеиз	Октябрь	14	23 ^h 24 ^m .2	2 ^h 5 ^m 25 ^s .60	+ 1° 5' 16".4
"	Ноябрь	6	20 6.0	1 48 33 30	+ 0 21 5.2
"	Декабрь	9	19 32.3	1 35 49.48	+ 0 26 55 8

При помощи ранее вычисленной предварительной орбиты исправляем эти наблюдения за параллакс и планетную абберацию. Находим следующие поправки:

	T. U.	$\lg \rho$	ρ_α	ρ_δ	Аберр. вр.
Октябрь	14 ^d .975 14	0.245	+ 0 ^s .07	+ 3".4	— 0 ^d .010 15
"	37.837 50	0.252	— 0.03	+ 3.4	— 0.010 31
"	70.814 10	0.312	+ 0.07	+ 3.0	— 0.011 83

Придав эти поправки; обратив экваториальные координаты в эклиптические; найдя из эфемерид (для неисправленных моментов) долготы Земли L ($= L_\odot \pm 180^\circ$), логарифмы радиусов-векторов и широты; исправив, наконец, широты планеты за широту Земли (эти поправки в данном случае равны + 0".38, — 0".01 и + 0".15), получим исходные данные, стоящие в начале вычислительной схемы:

$t_1^\circ =$	14 964 99	$\beta_1 =$	— 10°.147 10
$t^\circ =$	37.827 19	$\beta =$	— 10.128 95
$t_2^\circ =$	70.802 27	$\beta_2 =$	— 8.880 10
$t_2^\circ - t^\circ =$	32.975 08	$t_2^\circ - t_1^\circ =$	1.518 186
$t^\circ - t_1^\circ =$	22.862 20		1.359 118
$t_2^\circ - t_1^\circ =$	55.837 28		1.746 924

$\lambda_1 =$	29°.885 50	$L_1 =$	20°.643 72	R_1	9.998 774
$\lambda =$	25.314 05	$L =$	43.443 47	R	9.996 094
$\lambda_2 =$	22.344 81	$L_2 =$	76.765 69	R_2	9.993 357
$K =$	161.939 30	$K =$	161.939 30	a_0	1.271 269,,
$\lambda_2 - \lambda =$	— 2°.969 24	$L_2 - L =$	33°.322 22	$\sin(L_2 - L)$	9.739 847
$\lambda - \lambda_1 =$	— 4.571 45	$L - L_1 =$	22.799 75	$\sin(L - L_1)$	9.588 284
$\lambda_2 - \lambda_1 =$	— 7.540 69	$L_2 - L_1 =$	56.121 97	$\sin(L_2 - L_1)$	9.919 197
$\lambda_1 - K =$	227°.946 20	$L_1 - K =$	218°.704 42	$\lambda_2 - L_1 +$	1°.701 09
$\lambda - K =$	223.374 75	$L - K =$	241.504 17	$\lambda_2 - L_2$	— 54.420 88
$\lambda_2 - K =$	220.405 51	$L_2 - K =$	274.826 39		
$\lg \beta_1$	9.252 793,,			$a_0 R_1$	1.270 043,,
$\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$	9.996 228			$\sin(L_1 - K)$	9.796 090,,
$-\lg \beta_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$	9.249 021			$a_0 R$	1.267 363,,
Add.	9.132 292			$\sin(L_2 - K)$	9.943 916,,
$\lg \beta_2$	9.193 792,,	$\sin(\lambda_2 - L_1)$	8.472 541	$a_0 R_2$	1.264 626,,
	0.055 229	$\sin(\lambda_2 - L_2)$	9.910 257,,	$\sin(L_2 - K)$	9.998 458,,
Числитель	8.326 084	$R_1 \sin(\lambda_2 - L_1)$	8.471 315	$R \sin(L_2 - L)$	9.735 941
$\sin(\lambda_2 - \lambda_1)$	9.118 034,,	$R_2 \sin(\lambda_2 - L_2)$	9.903 614,,	$R_1 \sin(L_2 - L_1)$	9.917 971
$\lg I \cos(\lambda - K)$	9.208 050,,	$\sin(\lambda_2 - \lambda)$	8.714 328,,	$R \sin(L - L_1)$	9.584 378
$\cos(\lambda - K)$	9.825 963,,	$\sin(\lambda_2 - \lambda_1)$	9.118 034,,	$R_2 \sin(L_2 - L_1)$	9.912 554
$\lg(\lambda_1 - K)$	0.044 743	A	9.596 294	N_1	9.817 970
$\lg I$	9.382 087	B_1	9.353 281,,		
$\cos \beta$	9.993 178	B_2	0.785 580	d_1	1.066 133
				d	1.211 279
				d_2	1.263 084

$\sin(\lambda_2 - K)$	9.811 705 _n	$\operatorname{tg} \beta$	9.252 000 _n		
$\sin(\lambda - K)$	9.836 810 _n	$\sin(\lambda - L)$	9.492 990 _n	N_2	9.671 824
$(\operatorname{tg} \beta_2)$	9.193 792 _n	$\operatorname{tg} w$	9.759 010		
$-\operatorname{tg} \beta_0$	9.218 897	$\operatorname{tg}(\lambda - L)$	9.515 103 _n	$N_1 d_1$	0.884 103
Add.	8.898 743	$\cos w$	9.938 135 _n	$N_2 d_2$	0.934 908
$\operatorname{tg} \beta$	9.252 100 _n	$\operatorname{tg} \psi$	9.576 968	$N_1 d_1 =$	7.657 78
	0.033 103			$N_2 d_2 =$	8.608 12
$\operatorname{tg} I \sec \beta$	9.388 909	$\cos \psi$	9.971 065	$(d) =$	16.265 90
$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta_0$	8.117 640 _n	$\cos(\lambda - L)$	9.977 886	$d =$	16.265 93
		$\cos \beta$	9.993 178		
		$(\cos \psi)$	9.971 064		

Покончив с вычислением постоянных переходим к первому приближению. Находим ρ и r .

n_1^0	9.771 262	N_1	9.817 970	$\sin \psi$	9.548 032
n_2^0	9.612 194	Add.	9.055 170	R	9.996 094
$1 + n_1^0$	0.201 549	n_1^0	9.771 262	$\cos \psi$	9.971 064
$1 + n_2^0$	0.149 047		0.046 708	$\cos \psi$	9.967 158
$\frac{1}{6} \tau_1 \tau_2$	8.570 316	N_2	9.671 824		
c_1	8.771 865	Add.	9.167 838	$\mu \sin q$	9.544 126
d_1	1.066 133	n_2^0	9.612 194	$\mu \cos q$	0.449 075
c_2	8.719 363		0.059 630	$\cos q$	9.996 662
d_2	1.263 084	$N_1 - n_1^0$	8.826 432	$\operatorname{tg} q$	9.095 051
$d_1 c_1$	9.837 998	d_1	1.066 133	$q =$	7° 094 89
	0.234 783	$d_2 (N_1 - n_1^0)$	9.892 565		
$d_2 c_2$	9.982 447	$N_2 - n_2^0$	8.780 032	μ	0.452 413
	9.855 551	d_2	1.263 084	$(R \sin \psi)^3$	8.632 378
Q	0.217 230	$d_3 (N_2 - n_2^0)$	0.043 116	$\psi =$	20° 683 74
$\mu (R \sin \psi)^3$	9.084 791	$d_1 (N_1 - n_1^0) =$	0.780 845	$z =$	7.297 19
m	1.132 439	$d_2 (N_2 - n_2^0) =$	1.104 374	$\psi n - z =$	13.386 55
		$R \cos \psi =$	0.927 168	$\sin(\psi - z)$	9.364 588
r^3	1.320 804	$\mu \cos q =$	2.812 387	R	9.996 094
Qr^{-3}	8.896 426			$R \sin(\psi - z)$	9.360 682
$P =$	1.885 219	$\sin q$	9.091 712	$R \sin \psi$	9.544 126
$-Qr^{-3} =$	-0.078 782	m	1.132 439	$\sin z$	9.103 858
$\rho =$	1.806 437	$\sin^4 q$	6.366 848		
(ρ)	0.256 823	$\cotg q$	0.904 949	ρ	0.256 824
			0.602 060	r	0.440 268
		$m \sin^4 q$	7.499 287		
		$1 - 4 m \dots$	9.953 337	$\cos \beta$	9.993 178
				ρ	0.250 002

Вычисление крайних геоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2 располагаем так:

$n_1^0 =$	0.590 557	$n_1 \rho_1$	0.017 018	c_1	8.771 865
$N_1 - n_1^0 =$	0.067 0551	$\cos \lambda_1$	9.938 030	r^{-3}	8.679 196
$a_1 r^{-3} =$	0.002 8253	α	9.955 048	c_2	8.719 363

$N_1 - n_1 =$	0.064 2298	$\bar{\rho}$	0.250 002	$c_1 r^{-3}$	7.451 061
$n_1 =$	0.593 382	$\cos \lambda$	9.956 158	$c_2 r^{-3}$	7.398 559
$n_2^0 =$	0.409 444	b	0.206 160		
$N_2 - n_2^0 =$	0.060 2604	$\cos L_1$	9.971 179	n_2	9.614 843
$c_2 r^{-3} =$	0.002 5036	R_1	9.998 774	$\cos \lambda_2$	9.966 101
$N_2 - n_2^0 =$	0.057 7568	$N_1 - n_1$	8.807 738	$n_1 \bar{\rho}_1 \operatorname{tg} \beta_1$	6.269 811 _n
$n_2 =$	0.411 948	c	8.777 691		
$N_1 - n_1$	8.807 738	$\cos L_2$	9.359 710	n_2	9.614 843
$B_1(N_1 - n_1)$	8.161 019 _n	R_2	9.993 357	$\bar{\rho}_2$	0.310 494
$N_2 - n_2$	8.761 603	$N_2 - n_2$	8 761 603	$\operatorname{tg} \beta_2$	9.193 792 _n
$B_2(N_2 - n_2)$	9.547 183	d	8.114 670		9.119 129 _n
$A \bar{\rho}$	9.846 296	$-a =$	- 0.901 670	(ρ)	0.256 824
$B_1(N_1 - n_1) =$	- 0.014 483	$b =$	+ 1.607 533	$\sin \beta$	9.245 177 _n
$B_2(N_2 - n_2) =$	+ 0.352 519	$c =$	+ 0.059 936		9.502 001 _n
$A \rho =$	+ 0.701 933	$d =$	+ 0.013 022	$\rho \sin \beta =$	- 0.317 687
$n_1 \bar{\rho}_1 =$	+ 1.039 964	$n_2(\bar{\rho}_2) \cos \lambda =$	+ 0.778 821	$n_1 \bar{\rho}_1 \operatorname{tg} \beta_1 =$	- 0.186 128
n_1^0	0.017 018		9.891 438	$n_2 \dots =$	- 0.131 562
$\bar{n}_1$	9.773 335	$n_2 \cos \lambda_2$	9.580 944		
$\bar{\rho}_1$	0.243 683	$(\bar{\rho}_2)$	0.310 494	$(\rho \sin \beta) =$	- 0.317 690
		$\cos \beta_2$	9.994 763	$A \rho_1$	8.011 71
		ρ_2	0.315 731	$A \rho$	8.018 00
				$A \rho_2$	8.076 91

Далее находим гелиоцентрические координаты для всех трех моментов:

$\lambda - L =$	9°.241 78	- 18°.129 42	- 54°.420 88
$\sin(\lambda - L)$	9.205 748	9.492 990 _n	9.910 257 _n
$\cos(\lambda - L)$	0.243 683	0.250 002	0.310 494
$\bar{\rho} \cos(\lambda - L)$	9.994 325	9.977 886	9.764 793
Add.	0.238 008	0.227 888	0.075 287
R	0.197 682	0.200 417	0.261 994
	9.998 774	9.996 094	9.993 357
	9.760 766	9.768 206	9.918 070
$r \cos b \sin(l - L)$	9.449 431	9.742 992 _n	0.220 751 _n
$r \cos b \cos(l - L)$	0.435 690	0.428 305	0.337 281
$\cos(\dots)$	9.997 699	9.990 942	9.900 025
$\operatorname{tg}(\dots)$	9.013 741	9.314 637 _n	9.883 470 _n
$l - L =$	5°.892 89	- 11°.661 50	- 37°.403 81
$r \sin b$	9.496 476 _n	9.502 002 _n	9.504 286 _n
$r \cos b$	0.437 991	0.437 363	0.347 256
$\cos b$	9.997 176	9.997 096	9.997 063
$\operatorname{tg} b$	9.058 485 _n	9.064 639 _n	9.067 030 _n
r	0.440 815	0.440 267	0.440 193

Новые, более точные значения n_1 и n_2 найдем по формулам Джибса. Так как геоцентрическое движение планеты не превышает 13° , то можно быть уверенным, что они дадут всю нужную точность.

$A\rho_1 =$	0.010 27	$t_1 =$		$t_2 - t =$	остаются
$A\rho =$	0.010 42	$t =$		$t - t_1 =$	без
$A\rho_2 =$	0.011 94	$t_2 =$		$t_2 - t_1 =$	изменения
$\beta_1 =$	+ 0.005 06	B_1	7.669 16	$n_1^0 =$	0.590 557
$\beta_2 =$	+ 0.035 24	r_1^2	1.322 44	$1 + B_1 r_1^{-3}$	0.000 096
$\beta =$	+ 0.103 48	B_2	8.512 05	$1 + B_2 r_2^{-3}$	0.000 674
β_1	7.704 15	r_2^3	1.320 80	$1 - Br^{-3}$	9.998 014
β_2	8.547 04	B	8.979 87	$\eta : \eta_1$	0.002 082
β	9.014 86	r^3	1.320 58	n_1	9.771 262
$k^2 (t_2 - t_1)^2$	9.965 01				
n_1	9.773 344	n_2	9.614 854	$\eta : \eta_2$	0.002 660
Diff.	+9		+11	n_2	9.612 194

Разность между новыми и первоначальными значениями n_1 и n_2 (эти разности показаны в последней строчке) таковы, что следует провести второе приближение. Интервалы между исправленными за аберрацию моментами времени остались такими же, как и раньше (ибо разностью в 0.000 01 можно пренебречь), поэтому n_1^0 , n_2^0 , P , μ , q берем из первого приближения.

n^0	9.771 262	n_2^0	9.612 194
Add.	7.682 2	Add.	7.788 500
$n_1 - n_1^0$	7.453 462	$n_2 - n_2^0$	7.400 694
r_1^3	1.322 44	r_2^3	1.320 80
c_1	8.775 902	c_2	8.721 494
d_1	1.066 133	d_2	1.263 084
$c_1 d_1$	9.842 035		
	0.235 581	$\psi =$	20.683 74
$c_2 d_2$	9.944 578	$z =$	7.298 73
	9.857 457	$\psi - z =$	13.385 01
Q	0.220 159	$\sin(\psi - z)$	9.364 528
$\mu (R \sin \psi)^2$	9.084 791	R	9.996 094
m	1.135 368	$R \sin(\psi - z)$	9.360 632
r^3	1.320 531	$R \sin \psi$	9.544 126
Qr^{-3}	8.899 628	$\sin z$	9.103 949
$P =$	1.885 219		0.256 683
$-Qr^{-3} =$	-0.079 365		0.440 177
$\rho =$	1.805 854	$\cos \beta$	9.993 178
(ρ)	0.256 683	p	0.249 861

Вычисление геоцентрических расстояний для крайних моментов мало отличается по своей схеме от первого приближения:

N_1	9.817 970	$n_1 p_1$	0.016 893
Add.	9.034 310	$\cos \lambda_1$	9.938 020
n_1	9.773 344	a	9.954 923
	0.044 626		

$N_1 - n_1$	8.807 654	$\bar{\rho}$	0.249 861
$B_1 (N_1 - n_1)$	8.160 935 _n	$\cos \lambda$	9.956 158
N_2	9.671 824	b	0.206 019
Add.	9.146 658	$R_1 \cos I_1$	9.969 953
n_2	9.614 854	$N_1 - n_1$	8.807 654
	0.056 970	c	8.777 607
$N_2 - n_2$	8.761 512	$R_2 \cos L_2$	9.353 067
$B_2 (N_2 - n_2)$	9.547 092	$N_2 - n_2$	8.761 512
$A \bar{\rho}$	9.846 155	d	8.114 579
$B_1 (N_1 - n_1) =$	-0.014 486	$-a =$	-0.901 412
$B_2 (N_2 - n_2) =$	+0.352 445	$b =$	+1.607 011
$A \bar{\rho} =$	+0.701 706	$c =$	+0.59 925
		$d =$	+0.013 019
$n_1 \bar{\rho}_1 =$	+1.039 685	$n_2 \bar{\rho}_2 \cos \lambda_2 =$	+0.778 543
$n_1 \bar{\rho}_1$	0.016 893	$n_2 \cos \lambda_2$	9.891 283
$\bar{\rho}_1$	0.243 549		9.580 955
		$\bar{\rho}_2$	0.310 328

Снова вычисляем гелиоцентрические координаты для всех трех наблюдений. Координаты для среднего наблюдения вычисляются только ради контроля, так как при определении элементов они не нужны.

$\bar{\rho} \cos (\lambda - L)$	0.237 874	0.227 747	0.075 121
Add.	0.197 731	0.200 469	0.262 069
R	9.998 774	9.996 094	9.993 357
$r \cos b \sin (l - L)$	9.449 297	9.742 851 _n	0.220 585 _n
$r \cos b \cos (l - L)$	0.435 605	0.428 216	0.337 190
$\cos (...)$	9.997 700	9.990 944	9.900 053
$l - L =$	5°.892 23	-11°.660 13	-37.399 00
$r \sin b$	9.496 342 _n	9.501 861 _n	9.504 120 _n
$r \cos b$	0.437 905	0.437 272	0.437 137
$\cos b$	9.997 177	9.997 096	9.997 064
$\operatorname{tg} b$	9.068 437 _n	9.064 589 _n	9.066 983 _n
r	0.440 728	0.440 176	0.440 073

Вычисление элементов начинаем с определения аргументов широты. Это вычисление сопровождается основательным контролем проделанной работы.

$l_1 =$	26°.535 95	$\cos (l_2 - l_1)$	9.989 018
$l =$	31.783 34	$-\operatorname{tg} b_1 \cos (...)$	9.047 455
$l_2 =$	39.366 69	Add.	8.662 682
		$\operatorname{tg} b_2$	9.066 983 _n
$\Omega =$	127°.952 33		0.019 528
$l_2 - l_1 =$	12°.830 74	Числитель	7.710 137 _n
		$\sin (l_2 - l_1)$	9.346 493

$l_1 - \Omega =$	258° 583 62	$\operatorname{tg} i \sin (l_1 - \Omega)$	9.058 437 _n
$l - \Omega =$	263.831 01	$\sin (\dots)$	9.991 321 _n
$l_2 - \Omega =$	271.414 36	$\operatorname{tg} i \cos (\dots)$	8.363 644 _n
$u_2 =$	271° 404 83	$\operatorname{tg}' (\dots)$	0.694 793
$u =$	263.872 29		
$u_1 =$	258.658 59	$\operatorname{tg} i$	9.067 116
$u_2 - u$	7° 532 54	$\sin (l - \Omega)$	9.997 478 _n
$u - u_1$	5.213 70	$\sin (l_2 - \Omega)$	9.999 868 _n
$u_2 - u_1$	12.746 24	$(\operatorname{tg} b_2)$	9.066 984 _n
$\sin (u_2 - u) =$	9.117 567	$(\operatorname{tg} b)$	9.064 594 _n
$\sin (u - u_1) =$	8.958 424		
$\sin (u_2 - u_1) =$	9.343 671	$\sec i$	0.002 938
$r \sin (u_2 - u)$	9.557 743	$\operatorname{tg} (l - \Omega)$	0.966 226
$r_1 \sin (u_2 - u_1)$	9.784 399	$\operatorname{tg} (l_2 - \Omega)$	1.607 474 _n
$r \sin (u - u_1)$	9.398 600	$\operatorname{tg} u_1$	0.697 731
$r_2 \sin (u_2 - u_1)$	9.783 744	$\operatorname{tg} u$	0.969 164
n_1	9.773 344	$\operatorname{tg} u_2$	1.610 412 _n
n_2	9.614 856		

Контрольное значение $\operatorname{tg} b$ отличается от первоначального на 5 единиц шестого знака. Эта разность больше того, что обычно бывает, но все же вполне объяснима накоплением погрешностей вычисления. Соответствующие значения b отличаются на $0^\circ.000\,08 = 0''.3$.

Отношение η вычисляем по формуле Энке

$\frac{1}{2} (u_2 - u_1) =$	6° 373 12	p	0.490 328
$\sqrt{r_1 r_2}$	0.440 400	$p : r_1$	0.049 600
$2 \sqrt{r_1 r_2}$	0.741 430	q_1	9.082 736
$r_1 + r_2$	0.741 430	$\cos (u_2 - u_1)$	9.989 164
$2 \sqrt{r_1 r_2} : (r_1 + r_2)$	0.000 000	$q_1 \cos (u_2 - u_1)$	9.071 900
$\cos \frac{1}{2} (u_2 - u_1)$	9.997 308	Add.	8.597 632
$\sec \gamma$	0.002 692	$-q_2$	9.088 764 _n
Γ	2.209 02	Числитель	0.016 864
$(l_2 - l)^2$	3.493 848	$\sin (u_2 - u_1)$	7.669 532 _n
$(r_1 + r_2)^2$	2.224 290		9.343 671
σ	1.269 558	$p : r_2$	0.050 255
a''	0.405 08	q_2	9.088 764
σ^2	2.539 116		
$a' \sigma$	3.503 444	$e \sin v_1$	8.325 861 _n
$a'' \sigma$	1.674 64	$e \cos v_1$	9.082 736
$-b'' \sigma^2$	1.573 23 _n	$\cos v_1$	9.993 447
$a' \sigma =$	+ 31 87.5	$\operatorname{tg} v_1$	9.243 125 _n
$a'' \sigma =$	+ 47.3	$v_1 =$	350° 071 80
$-b'' \sigma^2 =$	- 37.4	$v =$	355.285 50
η	0.003 197	$v_2 =$	2.818 04

$\eta r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)$	0.227 669	$\omega =$	268°.586 79
$k(t_2 - t_1)$	9.982 505		
$\sqrt{p}$	0.245 164		
$\varphi =$	7°.055 21	e	9.089 289
$\frac{1}{2} \varphi =$	3.527 60	$\cos v_2$	9.999 475
$\cos \varphi$	9.996 699	$\cos v$	9.998 528
$\cos' \varphi$	9.993 398	(q_2)	9.088 764
a	0.496 930	$e \cos v$	9.087 817
a^3	1.490 790	$1 + e \cos v$	0.050 152
k^0	9.993 704		
$a^{3/2}$	0.745 395	(r)	0.440 176
n	9.248 309		
$\sqrt{r_1 : p}$	9.975 200	$\sqrt{r_2 : p}$	9.974 872
$\sin \frac{1}{2} \varphi$	8.789 083	$\sin \frac{1}{2} \varphi$	8.789 083
$\sin v_1$	9.236 573 _n	$\sin v_2$	8.691 649
$\sin \frac{1}{2} (v_1 - E_1)$	8.000 856 _n	$\sin \frac{1}{2} (v_2 - E_2)$	7.455 604
$\frac{1}{3} (v_1 - E_1) =$	-0°.574 10	$\frac{1}{2} (v_2 - E_2) =$	+0°.163 58
$v_1 - E_1 =$	- 1.148 20	$v_2 - E_2 =$	+ 0.327 16
$E_1 =$	351°.220 00	$E_2 =$	2.490 88
$v_2 - v_1 =$	12.746 24	$E_2 - E_1$	11.270 88
$\frac{1}{2} (v_2 - v_1) =$	6.373 12	$\frac{1}{2} (\dots) =$	5.635 44
$\sin \frac{1}{2} (v_2 - v_1)$	9.045 333	$\sin \frac{1}{2} (\dots) =$	8.992 105
$\sqrt{r_1 r_2}$	0.440 400	$a \cos \varphi$	0.493 629
Контроль	9.485 732	Контроль	9.485 734
e^0	0.847 412	e^0	0.847 412
$\sin E_1$	9.183 671 _n	$\sin E_2$	8.638 093
	0.031 083 _n		9.485 505
$-e^0 \sin E_1 =$	+ 1.074 19	$-e^0 \sin E_2 =$	- 0.305 85
$M_1 =$	352.294 19	$M_2 =$	2.185 03
$-A_{\rho_1} =$	- 0.010 27	$M_2 - M_1 =$	9.890 84
$-A_{\rho_2} =$	- 0.011 93	$M_2 - M_1$	0.995 233
$t_2 =$	70.802 17	$t_2 - t_1$	1.746 924
$t_1 =$	14.964 87	n^0	9.248 309
$t_2 - t_1 =$	55.837 30	n''	2.804 611
$t_0 =$	32 ^d .000 00		
$t_0 - t_1 =$	17.035 13	$t_0 - t_2$	-23.837 30

$$\begin{array}{l|l}
 t_0 - t_1 & 1.231\,345 \\
 n & 9.248\,309 \\
 & 0.479\,654 \\
 n(t_0 - t_1) = & +3^\circ.017\,55 \\
 M_0 = & 355^\circ.311\,74
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l|l}
 t_0 - t_2 & 1.377\,257 \\
 n & 9.248\,309 \\
 & 0.625\,566 \\
 n(t_0 - t_2) = & -4^\circ.222\,46 \\
 M_0 = & 355^\circ.311\,73
 \end{array}$$

В заключение сопоставляем полученные элементы:

$$\begin{array}{ll}
 t_0 = 1931 \text{ ноябрь } 1.0 \text{ Т. У.} & \\
 M_0 = 355^\circ.3117 & \omega = 268^\circ.5868 \\
 \varphi = 7.0552 & \Omega = 127.9523 \\
 & i = 6.6570 \\
 n = 637''.692 & \left. \begin{array}{l} \text{Эклиптика и сред-} \\ \text{нее равноденствие} \\ \text{1931.0} \end{array} \right\} \\
 \lg n^\circ = 9.248\,309 & \\
 \lg a = 0.496\,930 &
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. В примере, приведенном в § 68, вычислить элементы орбиты при помощи гелиоцентрических координат, полученных в первом приближении.

2. В этом же примере вычислить представление исходных наблюдений как при помощи элементов, полученных во втором приближении, так и при помощи элементов, полученных при решении предыдущей задачи. Геоцентрические координаты Солнца таковы:

$$\begin{array}{lll}
 & X & Y & Z \\
 t_1: & -0.933\,153, & -0.322\,528, & -0.139\,897. \\
 t: & -0.719\,553, & -0.625\,206, & -0.271\,176. \\
 t_2: & -0.225\,459, & -0.879\,498, & -0.381\,474.
 \end{array}$$

3. Исходя из формул (III, 27) показать, что эклиптические геоцентрические координаты светила могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned}
 \rho \cos \beta \cos (\lambda - \Omega) &= r \cos u - R \cos (L - \Omega) \\
 \rho \cos \beta \sin (\lambda - \Omega) &= r \sin u \cos i - R \sin (L - \Omega) \\
 \rho \sin \beta &= r \sin u \sin i.
 \end{aligned}$$

4. Приняв z за абсциссу, а y за ординату построить кривые

$$y = \sin^4 z$$

$$y = M \sin (z - q).$$

Изучая различные случаи пересечения этих кривых, определить число корней уравнения Гаусса

$$\sin (z - q) = m \sin^4 z,$$

удовлетворяющих условию $0^\circ < z < 180^\circ$.

5. Полагая

$$x = \cotg z,$$

привести уравнение Гаусса к виду

$$\alpha x + \beta = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Графический метод решения уравнения Гаусса, основанный на построении точек пересечения кривой

$$y = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

с прямой $y = \alpha x + \beta$, был предложен Waterstone'ом и подробно разработан Р. Форелем (Определение элементов орбит по трем наблюдениям, Киев, 1891).

6. Даны радиусы-векторы r_1, r, r_2 и аргументы широты u_1, u, u_2 , соответствующие трем моментам t_1, t, t_2 . Вывести следующую приближенную формулу для определения параметра орбиты:

$$k(t_2 - t_1) \sqrt{p} = \frac{f(2f_2 - f_1)}{3f_2} r_1^2 + \frac{f^3}{f_1 f_2} r^2 + \frac{f(2f_1 - f_2)}{3f_1} r_2^2,$$

где

$$2f = u_2 - u_1, \quad 2f_1 = u_2 - u, \quad 2f_2 = u - u_1.$$

Исследования Moulton'а [Astron. Journ. Vol. 22 (1902), p. 45], давшего эту формулу, показывают, что для малых планет в наиболее неблагоприятных случаях получаемая величина p точна до 6-го знака, если $t_2 - t_1$ не превышает 40 дней.

Указание. Применить формулу Симпсона.

7. Если известны радиусы-векторы r, r', r'' и аргументы широты u, u', u'' трех положений светила, то параметр может быть вычислен по формуле

$$p = \frac{\sin(u'' - u') - \sin(u'' - u) + \sin(u' - u)}{\frac{1}{r} \sin(u'' - u') - \frac{1}{r'} \sin(u'' - u) + \frac{1}{r''} \sin(u' - u)}.$$

Доказать эту формулу и объяснить, почему ею не пользуются при вычислении элементов орбиты.

Указание. Воспользоваться уравнением орбиты и тождеством (11).

8. Привести предыдущую формулу к виду (в наших обычных обозначениях)

$$p = \frac{n_1 r_1 + n_2 r_2 - r}{n_1 + n_2 - 1}$$

и посмотреть, что она дает в примерах, вычисленных в §§ 61, 62 или 68.

ГЛАВА IX.

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОРБИТЫ ПО ТРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ ПО ЧЕТЫРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ.

В двух предыдущих главах мы подробно изучили определение орбиты по трем наблюдениям. При этом мы все время имели в виду наиболее общий случай и не останавливались на тех осложнениях, которые могут встретиться, когда наблюдения удовлетворяют некоторым специальным условиям. Теперь нам нужно остановиться на тех случаях, когда общий путь определения геоцентрических расстояний оказывается непригодным.

Прежде всего легко видеть, что возможны такие случаи, когда орбита по трем наблюдениям вообще не может быть определена. В самом деле, если светило движется в плоскости эклиптики, то его движение определяется четырьмя элементами (a, e, M_0 и долготой перигелия $\tilde{\omega}$), между тем как три наблюдения дадут лишь три долготы, и следовательно позволят написать только три уравнения. Таким образом в этом случае необходимы четыре наблюдения для того, чтобы можно было найти элементы орбиты.

Конечно ни одна планета или комета не движется совершенно точно в плоскости эклиптики. Но в тех, довольно часто встречающихся на практике случаях, когда наклон орбиты малой планеты не превышает нескольких градусов, коэффициенты P и Q в уравне-

ниях Лагранжа (стр. 173) становятся столь мало точными (в предельном случае, когда светило движется в плоскости эклиптики, они принимают неопределенный вид $\frac{0}{0}$), что для определения геоцентрических расстояний приходится брать не три, а четыре наблюдения.

Следует отметить, что употребление четырех наблюдений вместо трех позволяет заметно точнее определить коэффициенты уравнений, с помощью которых находятся геоцентрические расстояния. Поэтому иногда может оказаться выгодным воспользоваться четырьмя наблюдениями в таких случаях, когда можно было бы вычислить орбиту и по трем наблюдениям. Более широкому распространению излагаемого ниже способа вычисления орбиты по четырем наблюдениям препятствует то, что он требует больше вычислительной работы, нежели обычный способ.

Метод для вычисления орбиты по четырем наблюдениям впервые был дан Гауссом (*Theoria motus*, Art. 164—171). Берберих (Berberich) и Баушингер улучшили метод Гаусса, введя для вычисления отношений n_1 и n_2 формулы Оппольцера (§ 53).

§ 69. СЛУЧАЙ, КОГДА НАБЛЮДЕННЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СВЕТИЛА НАХОДЯТСЯ НА БОЛЬШОМ КРУГЕ.

В § 55, рассматривая вопрос об определении геоцентрических расстояний по трем наблюдениям светила, мы получили для определения ρ —геоцентрического расстояния в момент среднего наблюдения—такое уравнение:

$$\Delta \rho = -n_1 U_1 + U - n_2 U_2, \quad (1)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix},$$

а U_1 , U , U_2 —выражаются определителями вида

$$U_1 = \begin{vmatrix} X_1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_1 & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_1 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad U = \begin{vmatrix} X & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y & \mu_1 & \mu_2 \\ Z & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad U_2 = \begin{vmatrix} X_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_2 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Уравнение (1) должно быть решено совместно с уравнением

$$r^2 = \rho^2 + 2 C \rho + R^2 \quad (3)$$

относительно ρ и r .

Затруднения при этом могут возникнуть лишь в том случае, когда $\Delta = 0$.

Напишем это соотношение следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \rho\lambda, \rho_1\lambda_1, \rho_2\lambda_2 \\ \rho\mu, \rho_1\mu_1, \rho_2\mu_2 \\ \rho\nu, \rho_1\nu_1, \rho_2\nu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $(\rho\lambda, \rho\mu, \rho\nu)$, $(\rho_1\lambda_1, \rho_1\mu_1, \rho_1\nu_1), \dots$ суть не что иное как прямоугольные геоцентрические координаты, то это равенство выражает, что три рассматриваемые положения светила находятся в плоскости, проходящей через центр Земли, а потому видимые положения светила, определяемые направляющими косинусами $(\lambda, \mu, \nu), \dots$, находятся на большом круге.

Итак, *определитель Δ равен нулю тогда и только тогда, когда три видимые положения светила лежат на одном большом круге.*

Рассмотрим решение уравнений (1) и (3) при условии $\Delta = 0$. Здесь могут представиться следующие случаи.

Первый случай. Определители (2) не все равны нулю. Если бы две из величин U_1, U, U_2 были равны нулю, то третья также была бы равна нулю в силу (1). Таким образом по крайней мере одна из величин U_1, U_2 не равна нулю.

Поэтому подставляя в уравнение (1) выражения (VII, 15)

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3},$$

получим уравнение

$$0 = -n_1^0 U_1 + U - n_2^0 U_2 - (c_1 U_1 + c_2 U_2) r^{-3}, \quad (1bis)$$

позволяющее определить r .

Уравнение (3) даст ρ .

Второй случай. $U_1 = U = U_2 = 0$.

В этом случае уравнение (1) обращается в тождество, и определение ρ при помощи трех взятых наблюдений становится невозможным. Посмотрим, когда этот случай может встретиться.

Предположим сначала, что не все миноры

$$\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1, \quad \nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1, \quad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \quad (4)$$

определителя (2) равны нулю. В таком случае равенство $U_1 = 0$, написанное в форме

$$\begin{vmatrix} X_1, \rho_1 \lambda_1, \rho_2 \lambda_2 \\ Y_1, \rho_1 \mu_1, \rho_2 \mu_2 \\ Z_1, \rho_1 \nu_1, \rho_2 \nu_2 \end{vmatrix} = 0,$$

будет означать, что геоцентрическое положение Солнца в первый момент находится в той, проходящий через центр Земли плоскости, в которой лежат все три положения светила. Аналогично интерпретируются равенства $U = 0$ и $U_2 = 0$. Таким образом, в этом случае большой круг небесной сферы, на котором лежат видимые положения светила, включает соответствующие положения Солнца, т. е. совпадает с эклипстикой.

Если миноры (4) равны нулю, то это дает

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2},$$

а потому $\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2, \nu_1 = \nu_2$ (случай $\lambda_1 = -\lambda_2, \mu_1 = -\mu_2, \nu_1 = -\nu_2$, как не представляющий практического интереса, отбра-

сываем), т. е. видимые положения светила для крайних моментов совпадают. В этом случае можно, если не все миноры

$$\mu_1\nu - \mu\nu_1, \nu_1\lambda - \nu\lambda_1, \lambda_1\mu - \lambda\mu_1$$

равны нулю, составить уравнение, аналогичное (1 bis), и определить r_1 и ρ_1 ; после чего из основных уравнений найдем ρ_2 . Наконец, если и эти миноры равны нулю, то все три геоцентрические положения светила совпадают (случай диаметрально противоположных положений опять исключаем) и мы бессильны определить орбиту при помощи таких наблюдений.

Приходим к следующему выводу:

Определение орбиты по трем наблюдениям невозможно в двух случаях:

1—когда все три наблюденные положения светила совпадают;

2—когда три наблюденные положения светила лежат на эклиптике.

Конечно, с практической точки зрения приходится отказаться от вычисления орбиты по трем наблюдениям не только тогда, когда эти случаи точно осуществляются, но и тогда, когда мы достаточно близки к ним.

§ 70. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ ПО ЧЕТЫРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ: ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ.

Обозначим через t_1, t, t', t_2 , ($t_1 < t < t' < t_2$) моменты наблюдений, и такими же индексами будем отмечать соответствующие этим моментам величины,

Исходным пунктом являются, как и во всех методах определения орбит, соотношения между геоцентрическими и гелиоцентрическими координатами светила:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1 & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2 \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1 & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2 \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1 & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x &= \lambda \rho - X & x' &= \lambda' \rho' - X' \\ y &= \mu \rho - Y & y' &= \mu' \rho' - Y' \\ z &= \nu \rho - Z & z' &= \nu' \rho' - Z' \end{aligned} \quad (6)$$

Условие нахождения трех точек (x_1, y_1, z_1) , (x, y, z) , (x_2, y_2, z_2) в плоскости, проходящей через начало координат, выражающееся равенствами (VII, 3), дает

$$\begin{aligned} \rho_1 n_1 \lambda_1 - \rho \lambda + \rho_2 n_2 \lambda_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2 \\ \rho_1 n_1 \mu_1 - \rho \mu + \rho_2 n_2 \mu_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2 \\ \rho_1 n_1 \nu_1 - \rho \nu + \rho_2 n_2 \nu_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2 \end{aligned}$$

Исключая отсюда ρ , получим три зависимости между ρ_1 и ρ_2 . Выберем одно из этих соотношений и представим его так:

$$\rho_2 = M \rho_1 + m, \quad (7)$$

где

$$M = K \frac{n_1}{n_2}$$

$$m = L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3.$$

Совершенно также, условие нахождения трех точек (x_1, y_1, z_1) , (x', y', z') , (x_2, y_2, z_2) в плоскости, проходящей через начало координат, даст нам аналогичное соотношение

$$\rho_2 = M' \rho_1 + m', \quad (8)$$

где

$$M' = K' \frac{n_1'}{n_2'}$$

$$m' = L_1' \frac{n_1'}{n_2'} + L_2' \frac{1}{n_2'} + L_3'.$$

Все коэффициенты $K, L_1, L_2, L_3, K', L_1', L_2', L_3'$, выражаются непосредственно через данные направляющие косинусы и координаты Солнца. Что же касается отношений площадей треугольников n_1, n_2, n_1', n_2' , то для выражения их через радиусы-векторы r_1 и r_2 воспользуемся формулами Оппольцера (VII, 11)

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau} \left[1 + \frac{4}{3} (\tau^2 - \tau_1^2) \xi + 4 \frac{\tau_1^2 \tau_2}{\tau} \xi \eta + \dots \right]$$

$$n_2 = \frac{\tau_2}{\tau} \left[1 + \frac{4}{3} (\tau^2 - \tau_2^2) \xi - 4 \frac{\tau_1 \tau_2^2}{\tau} \xi \eta + \dots \right],$$

где

$$\tau_1 = k(t_2 - t), \quad \tau_2 = k(t - t_1), \quad \tau = k(t_2 - t_1).$$

$$\xi = \frac{1}{(r_1 + r_2)^2}, \quad \eta = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}. \quad (9)$$

Эти формулы дают

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{4}{3} \frac{\tau \tau_1}{\tau_2} (\tau_2 - \tau_1) \xi + 4 \tau_1^2 \xi \eta$$

$$\frac{1}{n_2} = \frac{\tau}{\tau_2} - \frac{4}{3} \frac{\tau \tau_1}{\tau_2} (\tau + \tau_2) \xi + 4 \tau_1 \tau_2 \xi \eta.$$

Для n_1'/n_2' и $1/n_2'$ получим совершенно такие же выражения, только τ_1, τ_2 будут заменены через

$$\tau_1' = k(t_2 - t'), \quad \tau_2' = k(t' - t).$$

Подставляя все эти выражения в уравнения (7) и (8), окончательно получим коэффициенты этих уравнений в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} M &= G + G_1 \xi + G_2 \xi \eta \\ m &= H + H_1 \xi + H_2 \xi \eta \\ M' &= G' + G'_1 \xi + G'_2 \xi \eta \\ m' &= H' + H'_1 \xi + H'_2 \xi \eta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Вернемся теперь к соотношениям (5). Возводя их в квадрат и складывая почленно, получим

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= \rho_1^2 + 2C_1\rho_1 + R_1^2 \\ r_2^2 &= \rho_2^2 + 2C_2\rho_2 + R_2^2 \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где

$$C_i = -(\lambda_i X_i + \mu_i Y_i + \nu_i Z_i), \quad R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 \\ (i = 1, 2).$$

Остается решить систему уравнений (7), (8), (9), (11) относительно неизвестных ρ_1 , ρ_2 , r_1 , r_2 , ξ , η . Некоторые особенности рассматриваемой системы делают это решение весьма легким.

Для малой планеты мы можем в первом приближении взять $r_1 = r_2 = 2.7$, что дает

$$\xi = 0.0060, \quad \eta = 0.$$

С этими значениями вычисляем по формулам (10) коэффициенты уравнений (7) и (8). Определив из этих уравнений геоцентрические расстояния

$$\rho_1 = \frac{m' - m}{M - M'}, \quad \rho_2 = \frac{Mm' - M'm}{M - M'},$$

найдем, по формулам (11), новые значения r_1 , r_2 . Затем вычисляем более точные значения ξ и η и повторяем определение ρ_1 , ρ_2 и r_1 , r_2 , и т. д. — пока не получим окончательные значения всех неизвестных.

После того, как ρ_1 , ρ_2 вычислены, по формулам (5) находим гелиоцентрические координаты для двух крайних положений планеты, затем обычным путем вычисляем элементы орбиты.

§ 71. СОПОСТАВЛЕНИЕ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРБИТЫ ПО ЧЕТЫРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ.

Исходными данными являются моменты t_1, t, t', t_2 ($t_1 < t < t' < t_2$) четырех выбранных наблюдений, соответствующие им координаты светила $\alpha_1, \delta_1, \dots$ и координаты Солнца $(X_1, Y_1, Z_1), \dots$ (см. начало § 60 на стр. 183).

Вычисляем направляющие косинусы

$$\lambda = \cos \delta_1 \cos \alpha_1, \quad \mu_1 = \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \quad \nu_1 = \sin \delta_1$$

$$\dots \dots \dots$$

и радиусы-векторы Земли (только для двух крайних положений)

$$R_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \quad R_2^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2.$$

Вычисление коэффициентов основных уравнений.

Из уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\lambda\mu_2 - \lambda_2\mu)n_2\rho_2 &= -(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu)n_1\rho_1 - (\lambda Y - \mu X) + (\lambda Y_1 - \mu X_1)n_1 + \\ &\quad + (\lambda Y_2 - \mu X_2)n_2 \\ (\lambda\nu_2 - \lambda_2\nu)n_2\rho_2 &= -(\lambda\nu_1 - \lambda_1\nu)n_1\rho_1 - (\lambda Z - \nu X) + (\lambda Z_1 - \nu X_1)n_1 + \\ &\quad + (\lambda Z_2 - \nu X_2)n_2 \\ (\mu\nu_2 - \mu_2\nu)n_2\rho_2 &= -(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)n_1\rho_1 - (\mu Z - \nu Y) + (\mu Z_1 - \nu Y_1)n_1 + \\ &\quad + (\mu Z_2 - \nu Y_2)n_2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

выбираем то, в котором коэффициент левой части наибольший, и представляем это уравнение в форме

$$\rho_2 = M\rho_1 + m,$$

где

$$M = K \frac{n_1}{n_2}, \quad m = L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3. \quad (b)$$

Из уравнений, получающихся из (a) путем замены λ, μ, ν и X, Y, Z на λ', μ', ν' и X', Y', Z' , выбираем одно, и также представляем его в форме

$$\rho_2 = M'\rho_1 + m',$$

где

$$M' = K' \frac{n_1'}{n_2'}, \quad m' = L_1' \frac{n_1'}{n_2'} + L_2' \frac{1}{n_2'} + L_3'. \quad (b')$$

Затем приготавливаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= (\rho_1 + C_1)^2 + S_1^2 \\ r_2^2 &= (\rho_2 + C_2)^2 + S_2^2 \end{aligned} \right\}, \quad (c)$$

определяющие радиусы-векторы:

$$\begin{aligned} C_1 &= -(\lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1) & C_2 &= -(\lambda_2 X_2 + \mu_2 Y_2 + \nu_2 Z_2) \\ R_1^2 &= X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 & R_2^2 &= X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 \\ S_1^2 &= R_1^2 - C_1^2 & S_2^2 &= R_2^2 - C_2^2 \end{aligned}$$

Исправление моментов наблюдений за планетную аберрацию.

Если моменты взятых наблюдений не были с самого начала исправлены за планетную аберрацию (например при помощи ранее вычисленной круговой орбиты), то находим сначала приближенные значения геоцентрических расстояний. Для этого вычисляем

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{t_2 - t}{t - t_1} \left\{ 1 + \frac{4k^2}{3} \xi (t_2 - t_1) [(t - t_1) - (t_2 - t)] \right\} \\ \frac{1}{n_2} &= \frac{t_2 - t_1}{t - t_1} \left\{ 1 - \frac{4k^2}{3} \xi (t_2 - t) [(t_2 - t_1) + (t - t_1)] \right\} \\ \frac{n_1'}{n_2'} &= \frac{t_2 - t'}{t' - t_1} \left\{ 1 + \frac{4k^2}{3} \xi (t_2 - t_1) [(t' - t_1) - (t_2 - t')] \right\} \\ \frac{1}{n_2'} &= \frac{t_2 - t'}{t' - t_1} \left\{ 1 + \frac{4k^2}{3} \xi (t_2 - t') [(t_2 - t_1) + (t' - t_1)] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

$$\frac{4k^2}{3} = 0.0003945496, \quad \lg \frac{4k^2}{3} = 6.5961016 - 10,$$

причем для малой планеты принимаем $\xi = 0.006$.

С этими значениями по формулам (b) и (b') находим M, m, M', m' , после чего

$$\rho_1 = \frac{m' - m}{M - M'}, \quad \rho_2 = \frac{Mm' - M'm}{M - M'}.$$

Чтобы убедиться, что взятое нами среднее значение $\xi = 0.006$ достаточно близко к истине, по формулам (с) находим r_1, r_2 . Если новое значение

$$\xi = \frac{1}{(r_1 + r_2)^2} \quad (e)$$

значительно отличается от принятого, то можно повторить вычисление ρ_1, ρ_2 .

Все вычисление надо вести с таким расчетом, чтобы получить ρ_1 и ρ_2 с 2—3 верными десятичными знаками.

Вычисляем абберационное время

$$A\rho_1, \quad A\rho_2, \quad A = 0^d.005\,770$$

$$A\rho = A\rho_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} (A\rho_2 - A\rho_1)$$

$$A\rho' = A\rho_1 + \frac{t' - t_1}{t_2 - t_1} (A\rho_2 - A\rho_1)$$

и находим исправленные моменты

$$t_1^\circ = t_1 - A\rho_1, \quad t^\circ = t - A\rho, \quad t'^\circ = t' - A\rho', \quad t_2^\circ = t_2 - A\rho_2.$$

Определение геоцентрических расстояний.

Находим

$$\tau_1 = k(t_2^\circ - t^\circ), \quad \tau_1' = k(t_2^\circ - t'^\circ), \quad \tau = k(t_2^\circ - t_1^\circ),$$

$$\tau_2 = k(t^\circ - t_1^\circ), \quad \tau_2' = k(t'^\circ - t_1^\circ), \quad \frac{4}{3}\tau = \frac{4k}{3}(t_2^\circ - t_1^\circ),$$

$$k = 0.017\,20210, \quad \frac{4k}{3} = 0.022\,93613.$$

и вычисляем коэффициенты формул

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{4}{3} \frac{\tau\tau_1}{\tau_2} (\tau_2 - \tau_1)\xi + 4\tau_1^2\xi\eta \\ \frac{1}{n_2} &= \frac{\tau}{\tau_2} - \frac{4}{3} \frac{\tau\tau_1}{\tau_2} (\tau + \tau_2)\xi + 4\tau_1\tau_2\xi\eta \\ \frac{n_1'}{n_2'} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{4}{3} \frac{\tau\tau_1}{\tau_2} (\tau_2' - \tau_1')\xi + 4\tau_1'^2\xi\eta \\ \frac{1}{n_2'} &= \frac{\tau}{\tau_2'} - \frac{4}{3} \frac{\tau\tau_1}{\tau_2'} (\tau + \tau_2')\xi + 4\tau_1'\tau_2'\xi\eta \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Подстановка этих выражений в формулы (b) и (b') дает окончательные выражения для коэффициентов основных уравнений:

$$M = G + G_1\xi + G_2\xi\eta$$

$$m = H + H_1\xi + H_2\xi\eta$$

$$M' = G' + G_1'\xi + G_2'\xi\eta$$

$$m' = H' + H_1'\xi + H_2'\xi\eta$$

Сначала даем ξ значение (ϵ) и полагаем $\eta = 0$. С найденными таким образом

$$\rho_1 = \frac{m' - m}{M - M'}, \quad \rho_2 = \frac{Mm' - M'm}{M - M'}$$

вычисляем r_1, r_2 и находим более точные значения

$$\xi = \frac{1}{(r_1 + r_2)^2}, \quad \eta = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}.$$

Процесс повторяется до тех пор, пока исходные и конечные значения ξ и η не будут тождественны.

В тех случаях, когда была ранее вычислена приближенная орбита, исходные значения ξ и η определяются при помощи этой орбиты.

Вычисление элементов. После того как с окончательными значениями ρ_1 и ρ_2 вычислены гелиоцентрические координаты

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1 & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2 \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1 & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2 \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1 & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2, \end{aligned}$$

находим элементы орбиты по формулам, данным в § 60 (стр. 188 и следующие).

Представление наблюдений. Применяются те же формулы, что и в § 60. Отличие заключается в том, что представление двух средних наблюдений может и не быть совершенно точным, несмотря на безошибочность вычислений. Это объясняется тем, что каждое из средних наблюдений используется не полностью, а участвует лишь в вычислении коэффициентов

$$K, L_1, L_2, L_3,$$

или соответственно

$$K', L'_1, L'_2, L'_3,$$

Таким образом, чтобы убедиться в том, что разности между наблюдаемыми и вычисленными координатами происходят не от ошибок вычислений, нужно с вычисленными значениями координат определить указанные коэффициенты: их новые значения должны совпадать с прежними в пределах точности вычислений.

§ 72. ПРИМЕР.

Даны следующие наблюдения планеты 1931 TU (координаты толюцентрические):

Место	1931	T. U.	α (1931.0)	δ (1931.0)
Симеиз	Октябрь 10	1 ^h 4 ^m 5	2 ^h 8 ^m 49 ^s .07	+ 2° 1' 5'' .3
"	" 14	23 24.2	2 5 25 .60	+ 1 55 16.4
"	Ноябрь 6	20 6.0	1 48 33 .30	+ 0 21 5.2
"	" 12	20 23.5	1 44 41 .62	+ 0 8 1.3

В этом случае планета находится далеко от эклиптики (чтобы убедиться в этом, достаточно сопоставить ее склонения со склонениями Солнца для тех же прямых восхождений), тем не менее, вследствие неудачного распределения наблюдений, ожи-

дать хороших результатов от орбиты, вычисленной по первым трем (или последним трем) наблюдениям, не приходится. Поэтому будем вычислять орбиту по всем четырём наблюдениям.

Направляющие косинусы и координаты Солнца (топоцентрические) таковы:

	t_1	t	t'	t_2
λ	+ 0.845 440	+ 0.853 465	+ 0.889 888	+ 0.897 460
μ	+ 0.532 494	+ 0.520 072	+ 0.456 133	+ 0.441 089
ν	+ 0.041 029	+ 0.033 525	+ 0.006 134	+ 0.002 333
X	— 0.961 058	— 0.933 173	— 0.719 582	— 0.642 907
Y	— 0.248 893	— 0.322 551	— 0.625 216	— 0.690 256
Z	— 0.107 973	— 0.139 926	— 0.271 206	— 0.299 417

Из числа уравнений (а) в данном случае для обоих средних наблюдения оказывается наиболее выгодным первое. Получаем следующие основные уравнения ¹⁾

$$\rho_2 = 0.163\,64 \frac{n_1}{n_2} \rho_1 - 3.183\,05 \frac{n_1}{n_2} + 2.326\,18 \frac{1}{n_2} + 2.821\,48$$

$$\rho_2 = 5.237\,03 \frac{n_1'}{n_2'} \rho_1 - 12.874\,75 \frac{n_1'}{n_2'} - 13.542\,92 \frac{1}{n_2'} + 19.054\,73$$

$$r_1^2 = (\rho_1 + 0.949\,481)^2 + 0.095\,724$$

$$r_2^2 = (\rho_2 + 0.882\,146)^2 + 0.201\,251.$$

Переходим к вычислению приближенных значений ρ_1 , ρ_2 . Принимая $\xi = 0.006$, при помощи формул (d), (b) и (b') находим

$$M = + 0.9565$$

$$m = + 0.1229$$

$$M' = + 1.1349$$

$$m' = - 0.1933$$

Откуда

$$\rho_1 = 1.772$$

$$\rho_2 = 1.818$$

Соответствующие значения

$$r_1 = 2.739$$

$$r_2 = 2.737$$

дают

$$\xi = (r_1 + r_2)^{-3} = 0\,006\,090$$

Так как это значение весьма близко к исходному, то нет надобности перевычислять ρ_1 , ρ_2 . Находим абберационное время и исправленные моменты

$$A\rho_1 = 0.010\,22$$

$$t_1^{\circ} = 10.034\,57$$

$$t_2^{\circ} - t^{\circ} = 28.874\,28$$

$$A\rho = 0.010\,26$$

$$t^{\circ} = 14.964\,88$$

$$t_2^{\circ} - t_1^{\circ} = 4.930\,31$$

$$A\rho = 0.010\,44$$

$$t''^{\circ} = 37.827\,06$$

$$t_2^{\circ} - t''^{\circ} = 6.012\,10$$

$$A\rho_2 = 0.010\,49$$

$$t_2^{\circ} = 43.839\,16$$

$$t_2^{\circ} - t_1^{\circ} = 27.792\,49$$

$$t_2^{\circ} - t_1^{\circ} = 33.804\,59$$

Вычисляем коэффициенты формул (f)

$$\tau = 0.581\,5099$$

$$\frac{4}{3} \tau = 0.775\,3465$$

$$\tau_1 = 0.496\,6933$$

$$\tau_1' = 0.103\,4207$$

$$\tau_2 = 0.084\,8117$$

$$\tau_2' = 0.478\,0892$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 5.856\,483$$

$$\frac{\tau_1'}{\tau_2'} = 0.216\,3209$$

$$\frac{4}{3} \tau \frac{\tau_1}{\tau_2} = 4.540\,804$$

$$\frac{4}{3} \tau \frac{\tau_1'}{\tau_2'} = 0.167\,7237$$

$$\tau_2 - \tau_1 = 0.411\,8866$$

$$\tau_2' - \tau_1' = 0.374\,6685$$

$$- 1\,870\,296$$

$$+ 0.062\,841$$

$$4\tau_1^2 = 0.986\,837$$

$$4\tau_1'^2 = 0.042\,783$$

¹⁾ В некоторых случаях ради однообразия удерживаются заведомо нереальные цифры.

$\frac{\tau}{\tau_2}$	6.856 482	$\frac{\tau}{\tau_2'}$	1.216 321
$\tau + \tau_2$	0.666 3216	$\tau + \tau_2'$	1.059 5991
$-\frac{4}{3} \frac{\tau \tau_1}{\tau_2} (\tau + \tau_2)$	- 3.025 636	$-\frac{4}{3} \frac{\tau \tau_1'}{\tau_2'} (\tau + \tau_2')$	- 0.177 7199
$4\tau_1\tau_2$	0.168 503	$4\tau_1'\tau_2'$	0.197 777

Итак

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= 5.856 483 - 1.870 296 \xi + 0.986 837 \xi \eta \\ \frac{1}{n_2} &= 6.856 482 - 3.025 636 \xi + 0.168 503 \xi \eta \\ \frac{n_1'}{n_2'} &= 0.216 3209 + 0.062 841 \xi + 0.042 783 \xi \eta \\ \frac{1}{n_2'} &= 1.216 3209 - 0.177 720 \xi + 0.197 777 \xi \eta \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} M &= +0.958 355 - 0.306 06 \xi + 0.161 \xi \eta \\ m &= +0.129 413 - 1.084 93 \xi - 2.749 \xi \eta \\ M' &= +1.132 879 + 0.329 10 \xi + 0.224 \xi \eta \\ m' &= -0.202 884 + 1.597 83 \xi - 3.229 \xi \eta \end{aligned}$$

Подготовив таким образом все необходимые формулы, переходим к вычислению геоцентрических расстояний. На основании предыдущего для первого приближения берем $\xi = 0.006 090$, $\eta = -0.002 : 5.5 = -0.000 36$

ξ	0.006 090	0.006 096
η	- 0.000 36	- 0.000 382
$\xi \eta$	- 0.000 002	- 0.000 002
M	0.956 491	0.956 489
M'	1.134 883	1.134 885
m	0.122 811	0.122 805
m'	- 0.193 147	- 0.193 137
$M - M'$	- 0.178 392	- 0.178 396
$m' - m$	- 0.315 958	- 0.315 942
ρ_1	1.771 144	1.771 015
ρ_2	1.816 895	1.816 761
r_1^2	7.497 524	
r_2^2	7.486 073	
r_1	2.738 160	
r_2	2.736 069	
$r_1 + r_2$	= 5.474 229	
$r_2 - r_1$	= - 0.002 091	
$(r_1 + r_2)^{-1}$	= 0.182 674	

С окончательными значениями геоцентрических расстояний $\rho_1 = 1.77102$, $\rho_2 = 1.816 76$ находим элементы орбиты совершенно так же, как в примерах, приведенных в §§ 61 и 62.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ.

При определении первоначальной орбиты кометы всегда исходят из предположения, что комета движется по параболе. Только в том случае, когда дальнейшие наблюдения укажут на несостоятельность этого предположения, вычисляют эллиптическую орбиту. Такой образ действия оправдывается следующими соображениями.

Во-первых, огромное большинство комет движется по орбитам, которые в части, доступной нашему наблюдению, либо совпадают (в пределах точности наблюдений) с параболой, либо так мало отличаются от параболы, что отличие может быть обнаружено лишь при помощи наблюдений, охватывающих большой промежуток времени.

Во-вторых, для комет, вследствие их быстрого движения, изменчивого вида и нередко затруднительных условий наблюдения (связанных с близостью к Солнцу), особенно важно дать возможно скорее хотя бы грубо приближенную эфемериду. Между тем для вычисления параболической орбиты можно воспользоваться такими близкими наблюдениями (например разделенными промежутками времени в один день), которые для вычисления орбиты по общему методу (без предположения, что $e = 1$) совершенно непригодны. Кроме того вычисление параболической орбиты требует меньше времени, нежели вычисление эллиптической.

В-третьих, в тех сравнительно редких случаях, когда скоро выясняется необходимость вычисления эллиптической орбиты, ранее вычисленная параболическая орбита оказывается весьма полезной: прежде всего она позволяет выбрать благонадежные наблюдения или даже составить нормальные места (см. § 77), затем она дает возможность вычислить исходные значения n_1, n_2 точнее, нежели это позволяют формулы (VII, 15 и 16), и тем сократить число последовательных приближений.

Параболическая орбита определяется (§ 14) пятью элементами: i, Ω, ω, q и T . Между тем три наблюдения дают шесть уравнений: таким образом при определении параболической орбиты мы неполностью используем данные взятых трех наблюдений. Этим именно и объясняется, что параболическая орбита может быть получена из таких наблюдений, которые непригодны для вычисления эллиптической орбиты.

Среди различных возможных путей для определения параболической орбиты доминирующее положение занимает *метод Ольберса* (W. Olbers, 1758—1840), отличающийся как аналитическою простотою, так и практическою удобоприменимостью. ¹⁾

¹⁾ W. Olbers, Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Kometen zu bestimmen, Weimar, 1797.

Тожественный по существу метод был еще раньше (1779) предложен дю Сежуром (A. P. D. du Séjour, 1734—1794). Основные идеи этого метода

Гаусс внес в способ Ольберса некоторые улучшения как теоретического, так и практического характера. Наконец, Гюльден (H. Gyldeu, 1841—1896) и Клинкерфюс заменили эклиптические координаты экваториальными.

Основная идея метода Ольберса весьма проста. Условие, что орбита есть парабола, выражается уравнением Эйлера (§ 40), которое устанавливает зависимость между радиусами-векторами r_1 , r_2 двух крайних положений кометы и соединяющей эти положения хордой s . Так как указанные величины r_1 , r_2 , s очень просто выражаются через геоцентрические расстояния ρ_1 и ρ_2 , то таким образом получаем одно уравнение, связывающее ρ_1 и ρ_2 . Другое уравнение Ольберс получает из основных уравнений (VII, 5) путем исключения ρ . Так как это второе уравнение линейно относительно ρ_1 и ρ_2 , то очень легко выполняется исключение ρ_2 . В результате получаем уравнение с одной неизвестной ρ_1 , весьма быстро разрешаемое обычными приемами численного решения уравнений.

Мы ограничиваемся изложением метода Ольберса в экваториальных координатах, так как употребление эклиптических координат не дает никаких заметных преимуществ даже при логарифмическом вычислении, не говоря уже о вычислении при помощи арифмометра.

§ 73. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ.

Как и раньше, обозначим через (α_1, δ_1) , (α, δ) и (α_2, δ_2) прямые восхождения и склонения кометы, соответствующие моментам наблюдений t_1 , t и t_2 ($t_1 < t < t_2$), и положим

$$\lambda_1 = \cos \delta_1 \cos \alpha_1, \quad \mu_1 = \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \quad \nu_1 = \sin \delta_1, \\ \dots \dots \dots$$

Через (X_1, Y_1, Z_1) , (X, Y, Z) , (X_2, Y_2, Z_2) обозначим координаты Солнца в моменты наблюдений.

Условие нахождения трех гелиоцентрических положений кометы в плоскости, проходящей через центр Солнца, приводит, как мы уже знаем (§ 51), к таким уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 n_1 \lambda_1 - \rho \lambda + \rho_2 n_2 \lambda_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2 \\ \rho_1 n_1 \mu_1 - \rho \mu + \rho_2 n_2 \mu_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2 \\ \rho_1 n_1 \nu_1 - \rho \nu + \rho_2 n_2 \nu_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где ρ_1 , ρ , ρ_2 — геоцентрические (или топоцентрические) расстояния кометы, а n_1 и n_2 — отношения площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами:

$$n_1 = \frac{[r r_2]}{[r_1 r_2]}, \quad n_2 = \frac{[r_1 r]}{[r_1 r_2]}.$$

можно найти в работе Ламберта 1771 года. А. Н. Крылов обратил внимание на то, что графический метод определения параболических орбит, предложенный Ньютоном в *Principia*, эквивалентен методу Ольберса и дает вполне удовлетворительные — и с современной точки зрения — результаты (Monthly Notices of the R. A. S. Vol. 85, 1925).

Исключение ρ из уравнений (1) дает три отношения между ρ_1 и ρ_2 . Например, исключая ρ между первым и вторым уравнением, получим

$$(\lambda\mu_2 - \lambda_2\mu) n_2 \rho_2 + (\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu) n_1 \rho_1 = -(\lambda Y - \mu X) + (\lambda Y_1 - \mu X_1) n_1 + (\lambda Y_2 - \mu X_2) n_2.$$

В дальнейшем нам будет нужно только одно из этих уравнений. Выбранное уравнение мы представим в таком виде:

$$\rho_2 = M\rho_1 + m. \quad (2)$$

В коэффициенты M и m входят неизвестные величины n_1, n_2 вместо которых приходится подставлять приближенные выражения. С какою точностью должны быть взяты эти приближенные выражения?

Если взять выражения (§ 52)

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau}, \quad (3)$$

где

$$\tau = k(t_2 - t_1), \quad \tau_1 = k(t_2 - t), \quad \tau_2 = k(t - t_1),$$

ошибки которых 2-го порядка малости относительно τ, τ_1, τ_2 , то это произведет ошибку 2-го порядка в коэффициенте M , который имеет вид

$$M = K \frac{n_1}{n_2},$$

где, например,

$$K = -\frac{\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu}{\lambda\mu_2 - \lambda_2\mu};$$

и ошибку 1-го порядка в

$$m = L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3,$$

так как каждый из коэффициентов

$$L_1 = \frac{\lambda Y_1 - \mu X_1}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}, \quad L_2 = -\frac{\lambda Y - \mu X}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}, \quad L_3 = \frac{\lambda Y_2 - \mu X_2}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}$$

имеет в знаменателе малую величину 1-го порядка, тогда как в числителе стоит величина нулевого порядка.

Таким образом, уже весьма простые выражения (3) дают точность, вполне достаточную для первого приближения.

Раз коэффициенты уравнения (2) можно считать известными, то для каждого значения ρ_1 мы можем вычислить ρ_2 и гелиоцентрические координаты кометы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1 & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2 \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1 & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2 \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1 & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Затем по известным формулам

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, & r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \\ s^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

вычисляем радиусы-векторы и хорду.

Задача заключается в отыскании такого значения ρ_1 , чтобы соответствующие r_1 , r_2 и s удовлетворяли уравнению Эйлера

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}}. \quad (6)$$

По причинам, указанным в § 41, это уравнение представим в следующем виде:

$$\theta_0 (2\tau)^2 - s^2 (r_1 + r_2) = 0,$$

где коэффициент θ_0 берется из таблицы X по аргументу

$$c = \frac{s^2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Решение уравнения (6), левая часть которого определяется в функции ρ_1 равенствами (5), (4) и (2), даст нам геоцентрические расстояния с ошибками первого порядка малости.

После этого можно перейти ко второму приближению. При помощи найденных в первом приближении величин вычисляем более точные значения n_1 и n_2 , нежели (3). Для этого можно воспользоваться формулами Оппольцера, которые, с ошибками 4-го порядка, дают (§ 70)

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{4}{3} \frac{\tau\tau_1}{\tau_2} (\tau_2 - \tau_1) \xi + 4 \tau_1^2 \xi \eta$$

$$\frac{1}{n_2} = \frac{\tau}{\tau_2} - \frac{4}{3} \frac{\tau\tau_1}{\tau_2} (\tau + \tau_1) \xi + 4 \tau_1 \tau_2 \xi \eta,$$

где

$$\xi = \frac{1}{(r_1 + r_2)^3}, \quad \eta = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}.$$

Можно также прибегнуть к точным формулам

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau} \frac{\eta}{\eta_1}, \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau} \frac{\eta}{\eta_2}, \quad (7)$$

причем вычисление отношений площадей секторов и треугольников — η , η_1 , η_2 производится как было указано в § 37.

С новыми значениями n_1 и n_2 находим коэффициенты M и m уравнения (2) и снова решаем уравнение (6).

В тех крайне редких случаях, когда может понадобиться третье и следующие приближения, нужно пользоваться точными формулами (7). Впрочем в этих случаях обычно предпочитают идти другим путем (см. § 80).

§ 74. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ.

Прежде всего определяем угол

$$2f = v_2 - v_1,$$

заключенный между радиусами-векторами r_1 и r_2 . Так как хорда s нам известна, то для вычисления этого угла можно воспользоваться любой тригонометрической формулой, служащей для вычисления угла треугольника по трем сторонам, например:

$$\sin f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s + r_1 - r_2)(s - r_1 + r_2)}{r_1 r_2}}.$$

Затем формулы (IV, 12a)

$$\sqrt{\frac{r_1}{q}} \sin \frac{1}{2} v_1 = \cotgf - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \operatorname{cosec} f$$

$$\sqrt{\frac{r_1}{q}} \cos \frac{1}{2} v_1 = 1,$$

дающие

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 = \cotgf - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \operatorname{cosec} f,$$

позволят найти v_1 и $v_2 = v_1 + 2f$.

Для определения q проще всего воспользоваться уравнением орбиты:

$$q = r_1 \cos^2 \frac{1}{2} v_1 = r_2 \cos^2 \frac{1}{2} v_2.$$

Формулы (IV, 14), приведенные на стр. 93, дадут время прохождения через перигелий T .

Если вычисление эфемериды предполагается вести при помощи векторных элементов, то для определения угла f можно взять формулу

$$\operatorname{tg} 2f = \frac{r_1 r_0}{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}, \quad (8)$$

легко выводимую из (IV, 16) и (IV, 19).

Остальные элементы находятся как обычно (см. §§ 31—33).

§ 75. СОПОСТАВЛЕНИЕ ФОРМУЛ.

Даны геоцентрические (или топоцентрические) положения кометы

$$(\alpha_1, \delta_1), (\alpha, \delta), (\alpha_2, \delta_2).$$

и Солнца

$$(X_1, Y_1, Z_1), (X, Y, Z), (X_2, Y_2, Z_2),$$

соответствующие моментам наблюдений t_1, t, t_2 . Все эти координаты отнесены к среднему экватору и равноденствию начала года.

Вычисляем направляющие косинусы:

$$\lambda_1 = \cos \delta_1 \cos \alpha_1, \quad \mu_1 = \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \quad \nu_1 = \sin \delta_1$$

и аналогично для (λ, μ, ν) , $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

Контроль:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1.$$

Из уравнений

$$(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2) n_2 \rho_2 = -(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1) n_1 \rho_1 - (\lambda Y - \mu X) + \\ + (\lambda Y_1 - \mu X_1) n_1 + (\lambda Y_2 - \mu X_2) n_2$$

$$(\lambda\nu_2 - \mu\lambda_2) n_2 \rho_2 = -(\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1) n_1 \rho_1 - (\lambda Z - \nu X) + \\ + (\lambda Z_1 - \nu X_1) n_1 + (\lambda Z_2 - \nu X_2) n_2$$

$$(\mu\nu_2 - \nu\mu_2) n_2 \rho_2 = -(\mu\nu_1 - \nu\mu_1) n_1 \rho_1 - (\mu Z - \nu Y) + \\ + (\mu Z_1 - \nu Y_1) n_1 + (\mu Z_2 - \nu Y_2) n_2$$

выбираем то, у которого коэффициент ρ_2 наибольший по абсолютной величине. Избранное уравнение представляем в форме

$$\rho_2 = M\rho_1 + m,$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= K \frac{n_1}{n_2} \\ m &= L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Первое приближение.

Принимаем

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{t_2 - t}{t - t_1}, \quad \frac{1}{n_2} = \frac{t_2 - t_1}{t - t_1}$$

и вычисляем соответствующие M и m .

Для каждого значения ρ_1 находим ρ_2 и гелиоцентрические координаты

$$x_1 = \lambda_1 \rho_1 - X_1 \quad x_2 = \lambda_2 \rho_2 - X_2$$

$$y_1 = \mu_1 \rho_1 - Y_1 \quad y_2 = \mu_2 \rho_2 - Y_2$$

$$z_1 = \nu_1 \rho_1 - Z_1 \quad z_2 = \nu_2 \rho_2 - Z_2$$

Затем вычисляем радиусы-векторы и хорду

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

и найденные значения подставляем в

$$f(\rho_1) = \theta_0 (2\tau)^2 - s^2 (r_1 + r_2),$$

где

$$2\tau = 2k(t_2 - t_1),$$

$$2k = 0.034\,40420, \quad \lg 2k = 8.536\,6114_{-10}.$$

θ_0 берется из таблицы X по аргументу

$$c = \frac{s^2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

При логарифмическом вычислении полагаем

$$f(\rho_1) = \lg[\theta_0(2\tau)^2] - \lg[s^2(r_1 + r_2)].$$

Варилируем ρ_1 до тех пор, пока не получится

$$f(\rho_1) = 0.$$

Кроме обычного способа пропорциональных частей для достижения этой цели можно применить интерполяционную формулу Ньютона. По мере того, как будем получать значения функции $f(\rho_1)$ для различных значений ρ_1 , будем составлять таблицу разделенных разностей:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho_1 = \rho' & f(\rho_1) = f_1 & & & & & \\ = \rho'' & = f_2 & [f_1 f_2] & [f_1 f_2 f_3] & & & \\ = \rho''' & = f_3 & [f_2 f_3] & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \end{array}$$

где

$$[f_1 f_2] = \frac{f_2 - f_1}{\rho'' - \rho'}, \quad [f_2 f_3] = \frac{f_3 - f_2}{\rho''' - \rho''}, \dots$$

$$[f_1 f_2 f_3] = \frac{[f_2 f_3] - [f_1 f_2]}{\rho''' - \rho'}, \dots$$

После того как вычислены f_1 и f_2 для двух каких-либо значений $\rho_1 = \rho'$ и ρ'' , следующее значение ρ_1 находим по способу пропорциональных частей, который дает

$$\rho''' = \rho'' - \frac{f_2}{[f_1 f_2]}.$$

После трех проб полагаем $\rho_1 = \rho''' + x$ и применяем интерполяционную формулу Ньютона ¹⁾

$$f(\rho_1) = f_3 + (\rho_1 - \rho''')[f_2 f_3] + (\rho_1 - \rho''')(\rho_1 - \rho'')[f_1 f_2 f_3]$$

Полагая $f(\rho_1) = 0$, для определения x будем иметь такое уравнение:

$$0 = f_3 + x\{[f_2 f_3] + (\rho''' - \rho'')[f_1 f_2 f_3]\} + x^2[f_1 f_2 f_3].$$

Этот процесс можно было бы продолжить и дальше, но больше четырех проб делать обычно не приходится.

Примечание. Вместо того, чтобы при каждой пробе вычислять гелиоцентрические координаты, можно выразить r_1, r_2 и s непосредственно через ρ_1 и ρ_2 .

¹⁾ См. напр. Я. Безикович, Приближенные вычисления, 1931, стр. 110.

Подставляя выражения (4) в формулы (5) получим

$$r_1^2 = (\rho_1 + C_1)^2 + S_1^2$$

$$r_2^2 = (\rho_2 + C_2)^2 + S_2^2$$

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 + D_1\rho_1 + D_2\rho_2 - E\rho_1\rho_2 - G,$$

где

$$C_1 = -(\lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1),$$

$$S_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - C_1^2 = R_1^2 - C_1^2,$$

$$C_2 = -(\lambda_2 X_2 + \mu_2 Y_2 + \nu_2 Z_2),$$

$$S_2^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - C_2^2 = R_2^2 - C_2^2,$$

$$D_1 = 2(\lambda_1 X_2 + \mu_1 Y_2 + \nu_1 Z_2),$$

$$D_2 = 2(\lambda_2 X_1 + \mu_2 Y_1 + \nu_2 Z_1),$$

$$E = 2(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2)$$

$$G = 2(X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2).$$

Второе приближение.

При помощи значений ρ_1, ρ_2 , полученных в первом приближении, и значения ρ , найденного линейным интерполированием:

$$\rho = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \rho_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \rho_2,$$

исправляем моменты наблюдений за абберационное время (если, конечно, они не были исправлены раньше — в этом случае только проверяем ранее принятые поправки):

$$t_1^\circ = t_1 - A\rho, \quad t^\circ = t - A\rho, \quad t_2^\circ = t_2 - A\rho_2$$

$$A = 0^d.005770, \quad \lg A = 7.76118 - 10.$$

Затем вычисляем

$$\tau = k(t_2^\circ - t_1^\circ), \quad \tau_1 = k(t_2^\circ - t^\circ), \quad \tau_2 = k(t^\circ - t_1^\circ),$$

$$k = 0.0172021 \quad \lg k = 8.2355814 - 10$$

$$\xi = \frac{1}{(r_1 + r_2)^3}, \quad \eta = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{4}{3} \frac{\tau_1}{\tau_2} (\tau_2 - \tau_1) \xi + 4\tau^2 \xi \eta \\ \frac{1}{n_2} &= \frac{\tau}{\tau_2} - \frac{4}{3} \frac{\tau_1}{\tau_2} (\tau + \tau_1) \xi + 4\tau_1 \tau_2 \xi \eta \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Эти значения подставляем в формулы (а) и с новыми M и m повторяем определение ρ_1 и ρ_2 .

При третьем и следующих приближениях (если бы таковые понадобились) можно пользоваться точными формулами (7). При этом кроме r_1 и r_2 нужно еще будет знать r . С достаточной точ-

ностью r можно определить из следующего приближенного уравнения (даем его без доказательства)

$$r^2 = \frac{\tau_1}{\tau} r_1^2 + \frac{\tau_2}{\tau} r_2^2 + \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau}.$$

На практике вместо третьего приближения обычно прибегают к способу вариирования M (см. § 80). Вариирование M применяется нередко и вместо второго приближения.

Представление среднего наблюдения.

Чтобы убедиться в том, что полученные геоцентрические расстояния достаточно точны, и что взятые наблюдения действительно могут быть представлены параболической орбитой — вычисляем гелиоцентрические координаты кометы для момента среднего наблюдения

$$x = n_1 x_1 + n_2 x_2$$

$$y = n_1 y_1 + n_2 y_2$$

$$z = n_1 z_1 + n_2 z_2.$$

Эти формулы можно представить и в таком виде:

$$x = n_2 \left(\frac{n_1}{n_2} x_1 + x_2 \right)$$

и т. д.

Затем из уравнений

$$\rho \cos \delta \cos \alpha = x + X$$

$$\rho \cos \delta \sin \alpha = y + Y$$

$$\rho \sin \delta = z + Z$$

определяем α и δ .

Если получатся значительные разности α (набл.) — α (выч.) и δ (набл.) — δ (выч.), то нужно еще убедиться, что эти разности не являются следствием вычислительных ошибок. Для этого, с вычисленными значениями α и δ находим коэффициенты K, L_1, L_2, L_3 формул (а) — если вычисления верны, то должны получиться исходные значения этих коэффициентов.

Вычисление элементов.

Используя гелиоцентрические координаты, полученные в последнем приближении, находим

$$\sigma = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^2}$$

Контроль:

$$2\sigma = 1 + \frac{r_2^2 - s^2}{r_1^2}$$

$$x_0 = x_2 - \sigma x_1, \quad y_0 = y_2 - \sigma y_1, \quad z_0 = z_2 - \sigma z_1,$$

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

$$\operatorname{tg} 2f = \frac{r_1 r_0}{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}.$$

Контроль:

$$\sin f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s+r_1-r_2)(s-r_1+r_2)}{r_1 r_2}}.$$

Затем

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 = \cotg f - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \operatorname{cosec} f$$

$$v_2 = v_1 + 2f$$

$$q = r_1 \cos^2 \frac{1}{2} v_1 = r_2 \cos^2 \frac{1}{2} v_2.$$

$$P_1 = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_1 + \frac{1}{3} \sigma_1^3 \right), \quad \sigma_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_2 + \frac{1}{3} \sigma_2^3 \right), \quad \sigma_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2.$$

P_1 и P_2 могут быть найдены по таблице V.

$$T = t_1^\circ - q^{\frac{3}{2}} P_1 = t_2^\circ - q^{\frac{3}{2}} P_2.$$

Наконец определяем векторные элементы

$$P_x = x_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - x_0 \frac{\sin v_1}{r_0}$$

$$Q_x = x_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + x_0 \frac{\cos v_1}{r_0}$$

$$P_y = y_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - y_0 \frac{\sin v_1}{r_0}$$

$$Q_y = y_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + y_0 \frac{\cos v_1}{r_0}$$

$$P_z = z_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - z_0 \frac{\sin v_1}{r_0}$$

$$Q_z = z_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + z_0 \frac{\cos v_1}{r_0}$$

и величины

$$m_x = qP_x,$$

$$m_y = qP_y,$$

$$m_z = qP_z,$$

$$n_x = 2qQ_x,$$

$$n_y = 2qQ_y,$$

$$n_z = 2qQ_z.$$

Контроль:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = q^2,$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 4q^2$$

$$m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z = 0.$$

Относительно вычисления эклиптических элементов Ω , i , ω см. § 60 (стр. 190).

Представление наблюдений.

Момент наблюдения t исправляем за планетную аберрацию

$$t^p = t - A\rho.$$

По аргументу

$$P = q^{-\frac{2}{3}} (t^p - T)$$

находим σ (таблица V). Геоцентрические координаты кометы вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= m_x (1 - \sigma^2) + n_x \sigma + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= m_y (1 - \sigma^2) + n_y \sigma + Y \\ \rho \sin \delta &= m_z (1 - \sigma^2) + n_z \sigma + Z \end{aligned}$$

Координаты Солнца X , Y , Z берутся из эфемерид для момента t .

§ 76. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ.

Возьмем следующие наблюдения кометы 1909a (Daniel)¹⁾:

Место	1909	Gr. M. T.	$\alpha(1909.0)$	$\delta(1909.0)$
Nice	Июнь	16.5306	25°28'38''	+ 29°58'25''
Lick	"	18.9809	27 12 29	+ 33 26 22
Lick	"	21.9659	29 27 51	+ 37 25 17

Местное звездное время каждого наблюдения и приведения координат Солнца к месту наблюдения (§ 43), выраженные в единице 6-го знака таковы:

Июнь	Местное зв. вр.	ΔX	ΔY	ΔZ
16	18 ^h 51 ^m .8	— 7	+ 30	— 29
18	21 14 .1	— 25	+ 23	— 26
21	21 4 .3	— 24	+ 24	— 26

Придав эти поправки к взятым из эфемерид геоцентрическим координатам Солнца и вычислив направляющие косинусы будем иметь исходные данные вычисления орбиты:

	t_1	t	t_2
λ	+ 0.782 03	+ 0.742 15	+ 0.691 46
μ	+ 0.372 62	+ 0.381 54	+ 0.390 64
ν	+ 0.499 60	+ 0.551 06	+ 0.607 67
X	+ 0.085 427	+ 0.044 017	— 0.006 496
Y	+ 0.928 905	+ 0.931 489	+ 0.932 506
Z	+ 0.402 916	+ 0.404 045	+ 0.404 487

Так как в настоящем случае

$$\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2 = +0.026094, \quad \lambda\nu_2 - \nu\lambda_2 = +0.069946, \quad \mu\nu_2 - \nu\mu_2 = +0.01658,$$

то берем второе уравнение из числа указанных на стр. 240 и представляем его в таком виде

$$\rho_2 = 0.86019 \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + 3.6021 \frac{n_1}{n_2} - 3.9403 \frac{1}{n_2} + 4.3429. \quad (*)$$

Приготовим формулы для вычисления r_1 , r_2 и s (см. Примечание на стр. 241)

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (\rho_1 - 0.61423)^2 + 0.65522 \\ r_2^2 &= (\rho_2 - 0.60558)^2 + 0.66650 \\ s^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 1.08894\rho_1 + 1.33355\rho_2 - \\ &\quad - 1.97979\rho_1\rho_2 - 2.05726. \end{aligned}$$

¹⁾ Этими наблюдениями пользуется Лейшнер (A. O. Leuschner) для иллюстрации своего метода вычисления орбит [Publications of the Lick Observatory, Vol. VII: (1913), стр. 389].

Первое приближение.

$$\begin{aligned} t_2 - t &= 2^d.9850 \\ t - t_1 &= 2.4503 \\ t_2 - t_1 &= 5.4353 \end{aligned}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = 1.2182,$$

$$\frac{1}{n_2} = 2.2182$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 1.0479\rho_1 - 0.0094 \\ (2\tau)^2 &= 0.034970 \end{aligned}$$

$\rho_1 =$	1	0.8	1.02
$\rho_2 =$	1.0385	0.8289	1.0595
$\rho_1 + C_1 =$	0.38577	0.18577	0.40577
$\rho_2 + C_2 =$	0.43292	0.22332	0.45392
$r_1^2 =$	0.80404	0.68973	0.81987
$r_2^2 =$	0.85392	0.71637	0.87254
$s^2 =$	0.01852	0.01253	0.01923
$r_1 =$	0.89668	0.83050	0.90547
$r_2 =$	0.92468	0.84639	0.93410
$r_1 + r_2 =$	1.82076	1.67689	1.83957
$(r_1 + r_2)^2 =$	3.31517	2.81196	3.38402
$c =$	0.005587	0.004456	0.005683
$\theta_0 =$	1.00047	1.00037	1.00047
$\theta_0 2\tau^2 =$	0.03499	0.03498	0.03499
$s^2(r_1 + r_2) =$	0.03372	0.02101	0.03537
$f =$	+0.00127	+0.01397	-0.00038

Два первые значения ρ_1 взяты наудачу. Третье вычислено так:

$$\rho_1 = 1 + 0.2 \frac{0.00127}{0.01270} = 1.02$$

Дальнейшее уточнение ρ_1 нецелесообразно — лучше перейти ко второму приближению.

Второе приближение.

$$\begin{aligned} -A\rho_1 &= -0^d.0059 & t_1^{\circ} &= 16.5247 & \tau_1 &= 0.051347 \\ -A\rho &= -0.0060 & t^{\circ} &= 18.9749 & \tau_2 &= 0.042149 \\ -A\rho_2 &= -0.0061 & t_2^{\circ} &= 21.9598 & \tau &= 0.093495 \\ & & & & (2\tau) &= 0.034965 \end{aligned}$$

Формулы (b) на стр. 242 дают

$$\frac{n_1}{n_2} = 1.21803, \quad \frac{1}{n_2} = 2.21469.$$

Сообразно с этим во втором приближении ρ_2 через ρ_1 выражается так:

$$\rho_2 = 1.0477\rho_1 + 0.0038.$$

Повторяем вычисление геоцентрических расстояний (схема вычисления та же, что и в первом приближении, поэтому приводим ее ниже в сокращенном виде).

После того, как сделана первая проба $\rho = 1.02$, новое значение ρ_1 определяем, исходя из предположения, что отношение изменений ρ_1 и f имеет ту же величину, что и в первом приближении, т. е.

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta f} = \frac{1.02 - 1.00}{-0.00038 - 0.00127} = 12.1.$$

Это дает

$$p_1 = 1.02 - 0.00615 \times 12.1 = 0.9453.$$

Для третьей пробы берем

$$p_1 = 0.9453 + 0.00003 \times 12.1 = 0.9457.$$

Третья проба (которую можно было бы и не делать, ибо 3 единицы последнего знака лежат в пределах вероятного накопления ошибок вычисления) наглядно показывает, что геоцентрические расстояния определяются только с тремя надежными десятичными знаками. Несмотря на это, дальнейшие вычисления надо продолжать с пятью знаками, раз мы хотим, чтобы полученные элементы представляли наблюдения с точностью до 1".

$p_1 =$	1.02	0.9453	0.9457
$p_2 =$	1.0725	0.9942	0.9946
$r_1^3 =$	0.81987	0.76483	0.76509
$r_1^2 =$	0.88451	0.81753	0.81784
$s^3 =$	0.02228	0.01965	0.01965
$r_1 =$	0.90547	0.87455	0.87469
$r_2 =$	0.94048	0.90417	0.90435
$c =$	0.006539	0.006211	0.006209
$\theta_0 =$	1.00055	1.00052	1.00052
$\theta_0(2\tau)^2 =$	0.03498	0.03498	0.03498
$s^2(r_1 + r_2) =$	0.04113	0.03495	0.03496
$f =$	-0.00615	+0.00003	+0.00002

Представление среднего места. Прежде всего находим гелиоцентрические координаты

$x_3 = +0.65414$	$x_2 = +0.69422$	$x = +0.67322$
$y_1 = -0.57652$	$y_2 = -0.54398$	$y = -0.56270$
$z_1 = +0.06956$	$z_2 = +0.19990$	$z = +0.12852$
$r_1^2 = 0.76511$	$r_2^2 = 0.81782$	

Посмотрим, как эти координаты представляют среднее наблюдение:

$\rho \cos \delta \cos \alpha = +0.71724$	$\alpha = 27^\circ.2113$	$\rho = 0.96646$
$\rho \cos \delta \sin \alpha = +0.36879$	$\delta = +33.4384$	$\lambda = +0.74213$
$\rho \sin \delta = +0.53256$	$\alpha = 27^\circ.12'41''$	$\mu = +0.38159$
$\operatorname{tg} \alpha = +0.51418$	$\delta = +33^\circ.26'18''$	$\nu = +0.55104$
$\cos \alpha = +0.88933$	Набл. — Выч.:	
$\rho \cos \delta = +0.8649$	$\Delta \alpha = -12''$	
$\operatorname{tg} \delta = +0.66034$	$\Delta \delta = +4''$	
$\cos \delta = +0.83448$		

Для того, чтобы убедиться что полученные разности $\Delta \alpha$, $\Delta \delta$ не являются результатом ошибок в вычислениях, с полученными значениями λ , μ , ν определим коэффициенты уравнения (2). Получим

$$\rho_2 = 0.86010 \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + 3.6019 \frac{n_1}{n_2} - 3.9401 \frac{1}{n_2} + 4.3427.$$

Коэффициенты этого уравнения вполне совпадают с коэффициентами нашего исходного уравнения (*) в пределах точности пятизначного вычисления, ибо

$$K = \frac{0.06016}{0.06995} = 0.8600$$

имеет только четыре реальных знака ¹⁾. Пятый знак мы писали только ради одного образа.

Вычисление элементов.

$\Sigma x_1 x_2 = + 0.781\ 64$	$(r_1 r_0)^2 = 0.014\ 764$	$s = 0.140\ 18$
$\sigma = + 1.021\ 60$	$r_1 r_0 = 0.121\ 51$	$r_1 = 0.874\ 69$
$x_0 = + 0.025\ 95$	$\operatorname{tg} 2f = 0.155\ 46$	$r_2 = 0.904\ 35$
$y_0 = + 0.044\ 99$	$2f = 8^\circ.8365$	$s + r_1 - r_2 = 0.110\ 52$
$z_0 = + 0.128\ 84$	$f = 4.4182$	$s - r_1 + r_2 = 0.169\ 84$
$r_0^2 = 0.019\ 297$	$r_0 = 0.138\ 91$	Числ. = 0.018\ 771
		Знам. = 0.791\ 03
		= 0.023\ 730
		$2 \sin f = 0.154\ 045$
		$\sin f = 0.077\ 02$
		$(f) = 4^\circ.4173$

$r_1 : r_2$	0.967 20	$\cos \frac{1}{2} v_1$	0.984 84
$\sqrt{r_1 : r_2}$	0.983 46	$\cos \frac{1}{2} v_2$	0.968 55
$\cos f$	0.997 03	$\cos^2 \frac{1}{2} v_1$	0.969 91
$\cos f - \sqrt{r_1 : r_2}$	0.013 57	$\cos^2 \frac{1}{2} v_2$	0.938 09
$\sin f$	0.077 04	$q =$	0.848 37
$\sigma_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1$	+ 0.176 15	$(q) =$	0.848 36
$\frac{1}{2} v_1 =$	$9^\circ.990$	$\sqrt{q} =$	0.921 06
$v_1 = + 19.980$		$q \sqrt{q} =$	0.781 39
$v_2 = + 28.816$		$2q =$	1.696 74
$\frac{1}{2} v_2 =$	14.408	$-P_1 q \sqrt{q} =$	- 11.4328
$\sigma_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 = + 0.256\ 91$		$-P_2 q \sqrt{q} =$	- 16.8671
$P_1 =$	14.6314	$T =$	5.0919
$P_2 =$	21.5860	$(T) =$	5.0927

$\sin v_1$	0.341 69	$\cos v_1$	0.939 81
$+ \cos v_1 : r_1$	+ 1.074 45	$+ \sin v_1 : r_1$	+ 0.390 64
$- \sin v_1 : r_0$	- 2.459 79	$+ \cos v_1 : r_0$	+ 6.765 61

¹⁾ Отличие от предыдущего значения на 0.0001 объясняется тем, что при промежуточных операциях сохранялся „запасной“ знак.

$$P_x = + 0.639\ 01$$

$$Q_x = + 0.431\ 10$$

$$P_y = - 0.730\ 11$$

$$Q_y = + 0.079\ 17$$

$$P_z = - 0.242\ 18$$

$$Q_z = + 0.898\ 85$$

$$\sin s \quad 0.397\ 97$$

$$\cos s \quad 0.917\ 40$$

$$\sin i \sin \omega \quad + 0.063\ 39$$

$$\sin i \cos \omega \quad + 0.793\ 10$$

$$\sin \Omega \quad - 0.800\ 32$$

$$\cos \Omega \quad + 0.599\ 81$$

$$\operatorname{tg} \omega \quad 0.086\ 23$$

$$\omega = 4^\circ.9284$$

$$\Omega = 306^\circ.842$$

$$\cos \omega \quad 0.996\ 30$$

$$\cos i \quad 0.605\ 23$$

$$\sin \omega \quad 0.085\ 90$$

$$\sin i \quad 0.796\ 05$$

Сопоставление полученных результатов. Элементы:

$$T = 1909 \text{ июнь } 5.0923 \text{ Gr. M. T.}$$

$$q = 0.848\ 37$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 4^\circ.928 \\ \Omega = 306.842 \\ i = 52.753 \end{array} \right\} 1909.0$$

Формулы для вычисления эфемериды:

$$\left. \begin{array}{l} x = + 0.542\ 12 (1 - \sigma^2) + 0.731\ 46 \cdot \sigma \\ y = - 0.619\ 40 (1 - \sigma^2) + 0.134\ 33 \cdot \sigma \\ z = - 0.205\ 46 (1 - \sigma^2) + 1.525\ 11 \cdot \sigma \end{array} \right\} 1909.0$$

В заключение следует вычислить по этим формулам гелиоцентрические координаты для момента среднего наблюдения.

Дополнения к главе X.

УРАВНЕНИЕ ОЛЬБЕРСА.

Исключение ρ из уравнений (1) дает два независимые уравнения вида

$$\left. \begin{array}{l} \rho_2 = K \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_1} + L_3 \\ \rho_2 = K' \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L_1' \frac{n_1}{n_2} + L_2' \frac{1}{n_2} + L_3' \end{array} \right\}. \quad (9)$$

Мы употребляли, для определения геоцентрических расстояний, только одно из этих уравнений. Естественно возникает вопрос, какую пользу можно извлечь из второго уравнения.

Исключим из уравнений (9) $\frac{1}{n_2}$. Это даст соотношение вида

$$\rho_2 = K'' \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L_1'' \frac{n_1}{n_2} + L_3''.$$

Такое соотношение имеет место не только для кометы, но и для всяких трех точек, лежащих в плоскости, проходящей через центр Солнца, и на прямых, представляющих геоцентрические направления на комету. В частности это соотношение справедливо

и для Земли. Поэтому, обозначая через N_1 и N_2 отношения площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами Земли, получим

$$O = L_1'' \frac{N_1}{N_2} + L_3'',$$

ибо для Земли $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

Вычитая это равенство из предыдущего, получим

$$\rho_2 = K'' \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L_1'' \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2} \right).$$

Но мы знаем (§ 52), что

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[1 + \frac{\tau(\tau_2 - \tau_1)}{6r^3} + \dots \right],$$

и аналогично

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[1 + \frac{\tau(\tau_2 - \tau_1)}{6R^3} + \dots \right].$$

Таким образом, делая ошибку 2-го порядка относительно промежутков времени между наблюдениями, мы можем положить

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad \frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2} = 0,$$

а потому (с ошибкой 1-го порядка, поскольку порядок L_1'' равен -1),

$$\rho_2 = K'' \frac{\tau_1}{\tau_2} \rho_1.$$

Это и есть уравнение Ольберса. Так как оно имеет форму

$$\rho_2 = M \rho_1, \quad (10)$$

то оно проще уравнения (2). В частности это уравнение позволяет легко выразить s^2 через ρ_1 : подставляя найденное выражение τ_2 в формулу, полученную на стр. 242, получим s^2 в такой форме:

$$s^2 = h^2 \rho_1^2 + 2hg \cos \chi \rho_1 + g^2, \quad (11)$$

где

$$h^2 = 1 + M^2 - EM$$

$$2hg \cos \chi = 2C_1 + 2C_2 M + D_1 + D_2 M$$

$$g^2 = R_1^2 + R_2^2 - G.$$

Следует особо отметить высокую точность уравнения Ольберса. Полагая в уравнении (2) в первом приближении

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad \frac{1}{n_2} = \frac{\tau}{\tau_2},$$

мы имели в коэффициенте m ошибку 1-го порядка, ибо L_2 есть величина (-1) -го порядка. В уравнении Ольберса отбрасываемая величина 1-го порядка имеет вид

$$L_1'' \frac{\tau_1 \tau (\tau_2 - \tau_1)}{6 \tau_2} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right)$$

и потому обращается в нуль, когда $\tau_1 = \tau_2$, т. е. когда промежутки времени между наблюдениями равны. Этому условию почти всегда можно удовлетворить, ибо кометы наблюдаются обычно весьма усердно, особенно в первые дни после открытия, так что имеется возможность выбирать наиболее благоприятные комбинации наблюдений.

Но употребление уравнения (10) вместо указанного ранее уравнения (2) имеет и свои неудобства. Прежде всего коэффициент K'' не только сложнее коэффициента K , но и вычисляется с несколько меньшей точностью, даже в наиболее благоприятных случаях. Иногда K'' становится практически неопределенным, будучи слишком близко к форме $\frac{0}{0}$, тогда как для K мы всегда можем выбрать наиболее подходящее из выражений

$$-\frac{\lambda \mu_1 - \lambda_1 \mu}{\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu}, \quad -\frac{\lambda v_1 - \lambda_1 v}{\lambda v_2 - \lambda_2 v}, \quad -\frac{\mu v_1 - \mu_1 v}{\mu v_2 - \mu_2 v}$$

Если бы знаменатели этих трех дробей оказались очень близки к нулю, мы могли бы представить уравнение (2) в таком виде:

$$\rho_1 = N \rho_2 + n,$$

где N равняется одному из выражений

$$-\frac{\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu}{\lambda v_1 - \lambda_1 \mu}, \quad -\frac{\lambda v_2 - \lambda_2 v}{\lambda v_1 - \lambda_1 v}, \quad -\frac{\mu v_2 - \mu_2 v}{\mu v_1 - \mu_1 v}.$$

Только когда все числители и все знаменатели этих дробей были бы равны нулю, применение способа, изложенного в § 73, стало бы действительно невозможно. Но в этом случае все три наблюдаемые положения кометы совпадали бы (см. § 69): по таким наблюдениям вычислять орбиту никогда не придется.

О РЕШЕНИИ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ.

Основным моментом при определении параболической орбиты является решение системы уравнений (2), (4), (5) и (6) относительно ρ_1 . Решение этой системы представляет два неудобства: во-первых исходное значение ρ_1 приходится брать наудачу; во-вторых — в некоторых, правда чрезвычайно редко встречающихся, случаях рассматриваемая система может иметь три решения. Такой случай трех решений задачи об определении параболической орбиты встретился при вычислении орбит комет 1882 II и 1910 а. Т. Банашевич указал еще следующий пример: если за исходные данные взять (эклиптические координаты):

t	X	Y	λ	β
-10^d	0.985 2408	$-0.171\ 173\ 9$	$+0^\circ 45'$	$-0^\circ 16'$
0	1.000 0000	0.000 0000	0 0	0 0
$+10$	0.985 2408	$+0.171\ 173\ 9$	$-0\ 45$	$+0\ 16$

то получим три параболические орбиты, одинаково хорошо представляющие эти фиктивные наблюдения, именно:

$\lg q$	i	Ω	ω	T
0.421 0461	$2^{\circ} 56' 16''$	0	0	0
0.900 8249	22 6 34	0	0	0
1.164 0094	96 13 15	0	0	0

Определение числа корней рассматриваемой системы и разделение этих корней явилось предметом работ Оппольцера, С. Д. Черного, Т. Банахевича, Вилькенса и других. В основе этих работ лежит замена уравнения (6)

$$(r_1 + r_2)s^2 = 4\theta_0 \tau^2$$

другим, более простым.

Прежде всего в этом уравнении (12) можно положить $\theta_0 = 1$ и

$$r_1 + r_2 = 2r,$$

что даст

$$rs^2 = 2\tau^2. \quad (12)$$

Далее, с тою же точностью можно положить

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\rho,$$

что, при употреблении уравнения Ольберса (10), дает

$$\rho_1 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 + M} = \frac{2\rho}{1 + M}.$$

Подставив это выражение в формулу (11), получим

$$s^2 = \frac{1}{(1 + M)^2} [4h^2 \rho^2 + 4hg(1 + M) \cos \chi \cdot \rho + g^2(1 + M)^2].$$

С другой стороны r можно выразить через ρ обычной формулой

$$r^2 = \rho^2 + 2R \cos \psi \cdot \rho + R^2,$$

где

$$R \cos \psi = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z), \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Подставляя эти выражения в равенство (12), получим следующее уравнение для определения ρ

$$(\rho^2 + 2b \cos \chi \cdot \rho + b^2) \sqrt{\rho^2 + 2R \cos \psi \cdot \rho + R^2} = c, \quad (13)$$

где

$$b = \frac{g(1 + M)}{2h}, \quad c = \frac{(1 + M)^2 \tau^2}{2h^2}.$$

Дискуссия этого уравнения 6-й степени уже не представляет особых затруднений, но останавливаться на ней, в виду громоздкости окончательных результатов, не будем. Ограничимся лишь указанием графического приема, данного Т. Банахевичем, для приближенного определения действительных корней уравнения (13).

Это уравнение можно представить так:

$$d_1^2 \cdot d_2 = c,$$

где

$$d_1 = \sqrt{(\rho + b \cos \chi)^2 + b^2 \sin^2 \chi}$$

$$d_2 = \sqrt{(\rho + R \cos \psi)^2 + R^2 \sin^2 \psi}.$$

Взяв прямоугольную систему координат xOy , построим точки $A(-b \cos \chi, b \sin \chi)$ и $B(-R \cos \psi, R \sin \psi)$. Задача сводится к определению на оси абсцисс такой точки $P(\rho, 0)$, для которой расстояния $d_1 = AP$ и $d_2 = BP$ удовлетворяют соотношению $d_1^2 d_2 = c$. При помощи нескольких проб легко получить все точки P , удовлетворяющие этому условию. Исследуя кривую, определяемую уравнением (13), можно показать, что таких точек P будет либо одна, либо три.

Определив приближенную величину ρ , вычисляем соответствующее значение

$$\rho_1 = \frac{2\rho}{1+M},$$

которое затем улучшаем при помощи точных уравнений (4), (5), (6).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. В примере, рассмотренном в § 76, вычислить положение кометы для момента среднего наблюдения при помощи геоцентрических расстояний, полученных в первом приближении.

2. Из тех же самых наблюдений, которыми мы воспользовались в § 76, Лейшнер получил (loc. cit.) следующие элементы орбиты

$$\begin{aligned} T &= 1909 \text{ Июнь } 5.1677, \text{ Г. М. Т.} \\ \omega &= 4^\circ.9867 \\ \Omega &= 306.3220 \\ i &= 52.4340 \\ \lg q &= 9.92747 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} T \\ \omega \\ \Omega \\ i \\ \lg q \end{aligned}} \right\} 1909.0$$

Показать, что эти элементы дают такое представление исходных наблюдений:

$$H - B \begin{cases} \Delta \alpha = +4'', 0, +2'' \\ \Delta \delta = -3, 0, +8 \end{cases}$$

3. Доказать формулу

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (v_2 + v_1) = \frac{(r_2 - r_1) \sin f}{2 \sqrt{r_1 r_2 - (r_1 + r_2) \cos f}},$$

где $\frac{1}{2} (v_2 + v_1)$ имеет тот же знак, что и $r_2 - r_1$. Это соотношение (данное Т. Бава-хевичем) может служить, совместно с (8), для определения истинных аномалий.

4. Вывести приближенную формулу (указанную В. Strömberg'ом)

$$s^2 = 0.0008370 \frac{(t_2 - t_1)^2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

В случае небольшой гелиоцентрической дуги эта формула может служить вместо (6) для определения ρ_1 : надо варьировать ρ_1 до тех пор, пока значение s , даваемое этой формулой („динамическое“ значение хорды), не совпадет со значением s , получаемым по формуле (5) („геометрическое“ значение хорды).

5. Приближенную формулу (12) получить исходя из формулы, дающей скорость движения по параболе (§ 12).

ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ.

После того, как вычислена первоначальная орбита вновь открытой планеты или кометы, следующая задача Небесной механики заключается в уточнении этой орбиты при помощи дальнейших наблюдений.

Причины, вследствие которых предварительная орбита нуждается в исправлении, двоякого рода: во-первых, при выборе наблюдений для первоначальной орбиты обычно отсутствует всякая возможность судить о точности наблюдений, так что есть много шансов взять наблюдения, отягощенные значительными ошибками (такие ошибки — как в наблюдениях, так и в редукциях — особенно часты среди первых публикуемых наблюдений); во-вторых, неизбежные ошибки даже лучших наблюдений оказывают тем большее влияние на элементы орбиты, чем меньше гелиоцентрическая дуга, пройденная светилом за промежуток времени между этими наблюдениями. Между тем дуга, охватываемая наблюдениями, употребляемыми для определения первоначальной орбиты, по необходимости весьма мала и даже для комет редко превышает $20—30^\circ$, а для планеты обычно составляет всего несколько градусов. Таким образом, хотя предварительная орбита вычисляется с 5—6 знаками, и элементы даются с соответствующей точностью, однако число реальных знаков в элементах значительно меньше. Это обстоятельство сказывается в том, что по прошествии некоторого времени полученные элементы представляют наблюдения уже с ошибками, нередко достигающими нескольких минут или даже нескольких десятков минут дуги.

Остановимся подробнее на причине, заставляющей давать предварительные элементы с шестизначной (для комет — пятизначной) точностью в то время, как число реальных знаков в этих элементах обычно не больше 2—3. Причина заключается в том, что все элементы связаны между собою: конечно мы можем изменять как угодно нереальные знаки какого-либо элемента (например отбросить их), но при этом мы должны, — для того чтобы исходные наблюдения были точно удовлетворены, — произвести соответственное изменение в остальных элементах.

Чтобы лучше уяснить механизм этого явления, возьмем следующий простой пример: нужно найти x и y , удовлетворяющие системе уравнений

$$0.84852x + 0.36444y - 0.16559 = 0$$

$$0.87816x + 0.37732y - 0.17232 = 0$$

с точностью до единицы пятого знака.

Решая эти уравнения относительно x , получим (сохраняем один запасный знак)

$$x = \frac{-0.000\ 320}{0.000\ 127} = -2.52$$

Соответствующее значение y находим из второго уравнения:

$$y = 6.32165.$$

Конечно, реальных значущих цифр в x , а потому и в y , только две; но если бы мы взяли, ограничиваясь лишь реальными знаками,

$$x = -2.5, y = 6.3,$$

то левые части наших уравнений обратились бы в

$$+ 0.00908, + 0.00940,$$

т. е. уравнения были бы удовлетворены лишь с точностью до 0.01.

Легко видеть, что x можно дать любое значение в пределах от -2.50 до -2.54 . Если соответствующее значение y вычислим с пятью десятичными знаками, то эта пара значений неизвестных будет удовлетворять заданным уравнениям с точностью до 0.00001.

Совершенно такое же явление имеет место при определении элементов орбиты из наблюдений: в этом случае все неизвестные задачи выражаются через одну (ρ в способе Гаусса, ρ_1 — в способе Ольберса), на которой и отражается неопределенность решения; но коль скоро значение этой неизвестной фиксировано (в пределах тех 3—4 знаков, которые имеют реальное значение), все остальные неизвестные должны вычисляться с той точностью, с которой мы желаем удовлетворить исходным наблюдениям, т. е. с 5—6 знаками.

Улучшение предварительной орбиты производится, как общее правило, в два приема: сначала выбирают несколько надежных и достаточно удаленных друг от друга наблюдений, и элементы орбиты исправляют таким образом, чтобы эти наблюдения были удовлетворительно представлены; затем ищут, исходя из всей совокупности имеющихся наблюдений, наиболее вероятную систему элементов. В настоящей главе мы рассмотрим важнейшие способы, предложенные для достижения первой цели — иначе говоря, способы предварительного улучшения орбиты. Способы окончательного уточнения орбиты при помощи всей совокупности наблюдений будут рассмотрены во втором томе.

§ 77. ПРОВЕРКА НАБЛЮДЕНИЙ. СОСТАВЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ МЕСТ.

Прежде всего надо посмотреть, как подлежащая улучшению орбита представляет имеющиеся наблюдения. Составив разности $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ между наблюденными и вычисленными значениями координат, мы получим возможность судить о качестве наблюдений. Всякий резкий скачок в этих разностях по отношению к соседним наблюдениям укажет на ошибочное наблюдение. Такое наблюдение должно быть отброшено.¹⁾

Если имеется ряд изолированных наблюдений, разделенных значительными промежутками времени, так что трудно решить, является ли изменение $\Delta\alpha$ или (или $\Delta\delta$) следствием ошибки наблюдения или

¹⁾ Весьма нередко ошибка бывает не в самом наблюдении, а в его редукции со стороны наблюдателя. При определении окончательных орбит комет оказывалось до одной пятой всех опубликованных наблюдений с ошибками в редукциях.

же производится естественным изменением этой величины с течением времени, то можно составить разделенные разности первого порядка

$$\frac{\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1}{t_2 - t_1}, \frac{\Delta\alpha_3 - \Delta\alpha_2}{t_3 - t_2}, \dots$$

где через $\Delta\alpha_i$ обозначена разность, соответствующая моменту t_i . При безошибочных наблюдениях эти отдельные разности (изменяющиеся с течением времени значительно медленнее нежели первоначальные разности $\Delta\alpha_i$) не должны обнаруживать скачков.

Составление разностей $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ между наблюденными и вычисленными значениями координат позволяет не только удалить подозрительные наблюдения и выбрать более благонадежные, но и составить так называемые *нормальные места*.

Разность $\Delta\alpha$ между действительным прямым восхождением светила и вычисленным является аналитической функцией времени t , а потому может быть разложена в степенной ряд

$$\Delta\alpha = a + b(t - \tau) + C(t - \tau)^2 + \dots$$

Пусть наблюдения, для ряда близких моментов $t_1, t_2, \dots, t_n$, дали нам значения этой разности $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \dots, \Delta\alpha_n$. Если эти величины не обнаруживают систематического хода, или если их систематическое изменение может считаться пропорциональным времени,¹⁾ то, отбрасывая члены второго и высших порядков, мы можем положить

$$\Delta\alpha_i = a + b(t_i - \tau), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Складывая почленно эти равенства, получим

$$\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \dots + \Delta\alpha_n = na + b(t_1 + t_2 + \dots + t_n - n\tau).$$

Момент τ , который до сих пор оставался произвольным, положим равным

$$\tau = \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + \dots + t_n).$$

Это даст

$$a = \frac{1}{n}(\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \dots + \Delta\alpha_n).$$

Но a есть не что иное, как разность между действительным и вычисленным прямым восхождением для момента τ . Поэтому, вычислив для момента τ прямое восхождение при помощи исходной системы элементов и придав к нему a , получим то прямое восхождение, которое должны были бы давать для этого момента наблюдения. Все сказанное одинаково применимо и к склонениям. Таким образом приходим к следующему правилу:

Если n наблюдений, произведенных в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$, дают разности $\Delta\alpha_i, \Delta\delta_i$, не обнаруживающие систематического хода или же имеющие ход, пропорциональный времени, то эти n наблюдений можно

¹⁾ В чем можно убедиться составив разделенные разности.

заменить одним фиктивным наблюдением (нормальным местом). Для этого вычисляем для момента

$$\tau = \frac{1}{n} (t_1 + t_2 + \dots + t_n)$$

прямое восхождение и склонение светила и прибавляем к ним поправки.

$$\frac{1}{n} \Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \dots + \Delta \alpha_n,$$

$$\frac{1}{n} (\Delta \delta_1 + \Delta \delta_2 + \dots + \Delta \delta_n).$$

Как известно из Теории ошибок, мы можем рассчитывать, что случайная ошибка полученного этим путем фиктивного наблюдения в $\sqrt{n}$ раз меньше случайной ошибки каждого из n взятых наблюдений.

§ 78. МЕТОД ВАРИАЦИИ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ.

Одним из наиболее употребительных методов улучшения элементов орбиты при помощи небольшого числа наблюдений является метод вариации геоцентрических расстояний, заключающийся в следующем.

Выберем два надежные наблюдения (или два нормальные места) (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) , достаточно далеко отстоящие одно от другого. При помощи исходной системы элементов E^I вычислим соответствующие геоцентрические расстояния ρ_1 и ρ_2 . Затем, взяв некоторые небольшие величины $\Delta \rho_1$ и $\Delta \rho_2$, вычислим при помощи геоцентрических положений

$$\rho_1 + \Delta \rho_1, \alpha_1, \delta_1 \quad \text{и} \quad \rho_2, \alpha_2, \delta_2 \quad (1)$$

систему элементов E^{II} , а при помощи положений

$$\rho_1, \alpha_1, \delta_1 \quad \text{и} \quad \rho_2 + \Delta \rho_2, \alpha_2, \delta_2 \quad (2)$$

— систему элементов E^{III} .

Выберем, далее, еще несколько наблюдений t_i, α_i, δ_i , и для моментов t_i вычислим прямые восхождения и склонения при помощи всех трех систем элементов E^I, E^{II}, E^{III} ; получим соответственно $\alpha_i^I, \delta_i^I, \alpha_i^{II}, \delta_i^{II}$ и $\alpha_i^{III}, \delta_i^{III}$.

Обозначая через $\rho_1 + x \cdot \Delta \rho_1$ и $\rho_2 + y \cdot \Delta \rho_2$ те значения геоцентрических расстояний, для которых получаются как раз наблюденные значения α_i, δ_i координат светила, будем иметь

$$\alpha_i = f(\rho_1 + x \Delta \rho_1, \rho_2 + y \Delta \rho_2)$$

$$\delta_i = \varphi(\rho_1 + x \Delta \rho_1, \rho_2 + y \Delta \rho_2),$$

ибо α_i, δ_i являются функциями геоцентрических расстояний, взятых для двух основных наблюдений α_1, δ_1 и α_2, δ_2 .

Принимая во внимание малость вариаций $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$, мы можем написать:

$$\alpha_i = f(\rho_1, \rho_2) + \frac{\partial f}{\partial \rho_1} \Delta\rho_1 x + \frac{\partial f}{\partial \rho_2} \Delta\rho_2 y,$$

и аналогично

$$\alpha_i^I = f(\rho_1, \rho_2)$$

$$\alpha_i^{II} = f(\rho_1 + \Delta\rho_1, \rho_2) = \alpha_i^I + \frac{\partial f}{\partial \rho_1} \Delta\rho_1$$

$$\alpha_i^{III} = f(\rho_1, \rho_2 + \Delta\rho_2) = \alpha_i^I + \frac{\partial f}{\partial \rho_2} \Delta\rho_2.$$

При помощи этих равенств и аналогичных для δ окончательно получим такие уравнения для определения x и y :

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_i^{II} - \alpha_i^I) x + (\alpha_i^{III} - \alpha_i^I) y &= \alpha_i - \alpha_i^I \\ (\delta_i^{II} - \delta_i^I) x + (\delta_i^{III} - \delta_i^I) y &= \delta_i - \delta_i^I \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решение этих уравнений по способу наименьших квадратов даст наивероятнейшие значения x и y . После этого, при помощи геоцентрических положений

$$\rho_1 + x\Delta\rho_1, \alpha_1, \delta_1 \quad \text{и} \quad \rho_2 + y\Delta\rho_2, \alpha_2, \delta_2 \quad (4)$$

определяем улучшенную систему элементов E .

Таким образом, для каждой пары геоцентрических положений (1), (2) и (4) мы должны вычислить соответствующие гелиоцентрические координаты, и затем вычислить элементы орбиты (§§ 31—34).

Сопоставление употребляемых для этого формул было сделано в §§ 60 и 67, повторять их мы не будем. Для представления наблюдений при помощи полученных систем элементов E^I, E^{II}, E^{III} служат методы, указанные в §§ 19—24.

Заметим, что применяя метод вариации геоцентрических расстояний, можно комбинировать употребление экваториальных и эклиптических координат: два основных положения можно взять в эклиптических координатах

$$\begin{aligned} \lg \rho_1, \lambda_1, \beta_1, L_1, \lg R_1, \\ \lg \rho_2, \lambda_2, \beta_2, L_2, \lg R_2, \end{aligned}$$

а при помощи полученных элементов вычислять для моментов t экваториальные координаты (при помощи постоянных Гаусса).

Что касается размеров вариаций $\Delta\rho_1, \Delta\rho_2$ (или, при логарифмическом вычислении, $\Delta \lg \rho_1, \Delta \lg \rho_2$), то обычно берут их равными 0.001.

Примечание. При употреблении метода вариации геоцентрических расстояний прибегают к следующему весьма удобному и весьма надежному способу контролирования производимой вычислительной работы. Берут еще одну пару геоцентрических положений, а именно:

$$\rho_1 + \Delta\rho_1, \alpha_1, \delta_1 \quad \text{и} \quad \rho_2 + \Delta\rho_2, \alpha_2, \delta_2 \quad (5)$$

и ведут для них вычисление элементов и представление наблюдений параллельно с соответственными вычислениями для положений (1) и (2), а также для исходной пары положений $\rho_1, \alpha_1, \delta_1$ и $\rho_2, \alpha_2, \delta_2$.

Обозначая через E^{IV} и $\alpha_i^{\text{IV}}, \delta_i^{\text{IV}}$ элементы и координаты, соответствующие гипотезе (5), мы должны очевидно иметь для каждого элемента равенство

$$E^{\text{IV}} - E^{\text{III}} = E^{\text{II}} - E^{\text{I}},$$

и точно также для координат

$$\alpha_i^{\text{IV}} - \alpha_i^{\text{III}} = \alpha_i^{\text{II}} - \alpha_i^{\text{I}}$$

$$\delta_i^{\text{IV}} - \delta_i^{\text{III}} = \delta_i^{\text{II}} - \delta_i^{\text{I}}.$$

Выполнение этих равенств (справедливых и для всех промежуточных величин) будет свидетельствовать не только о верности вычислений, но и о справедливости основного предположения, на котором построен весь метод: именно, что изменения координат α, δ пропорциональны изменениям геоцентрических расстояний.

§ 79. УЛУЧШЕНИЕ ОРБИТ МАЛЫХ ПЛАНЕТ.

В настоящее время вновь открытая малая планета не привлекает к себе особого внимания наблюдателей, так что в первую оппозицию редко набирается больше 5—6 наблюдений. При таких условиях не только нет возможности составить нормальные места, но и контроль наблюдений способом, указанным в § 77, может быть не всегда осуществим. С другой стороны промежуток времени, охватываемый наблюдениями, редко превышает 2—2½ месяца, так что не приходится рассчитывать на получение особенно точной орбиты.

Принимая все это во внимание, обычно довольствуются вычислением орбиты по трем наблюдениям (если наклонность мала—то по четырем), но выбирают наиболее надежные и далеко отстоящие друг от друга наблюдения. Только в редких случаях прибегают к вариации геоцентрических расстояний.

После того, как планета была пронаблюдена в 2—3 соседних оппозициях, применяют метод вариации геоцентрических расстояний. При этом все наблюдения одной оппозиции соединяются в одно или два нормальные места. Поскольку при таком улучшении орбиты пренебрегают возмущениями, нельзя рассчитывать на представление наблюдений с большой точностью. Дальнейшее улучшение орбиты производится уже с учетом возмущений от Юпитера, причем употребляется, главным образом, метод вариации элементов, который будет изложен во втором томе.

В тех случаях, когда имеется в виду лишь обеспечить наблюдение малой планеты в ближайшие оппозиции, нередко прибегают к эмпирическому исправлению средней аномалии. Опыт показывает, что из всех элементов, получаемых из наблюдений, охватывающих

небольшую часть орбиты, наименее надежным является среднее суточное движение. Таким образом, когда мы констатируем разницу между наблюдаемым и вычисленным положением планеты, то эта разница зависит, главным образом, от неверно определенной величины средней аномалии. Принимая это во внимание, поступаем следующим образом.

Пусть для соседней оппозиции наблюдения дали положение планеты α , δ , тогда как наши исходные элементы дают для этого же момента α° , δ° . Оставляя все элементы без изменения, дадим M приращение ΔM (например $\Delta M = 1^\circ$) и снова вычислим координаты планеты — получим α' , δ' .

Обозначим через $x \Delta M$ то приращение, которое надо придать M , чтобы получить наблюдаемые координаты. Так как α и δ для рассматриваемого момента являются функциями M , то будем иметь:

$$\begin{aligned}\alpha &= f(M + x \Delta M), & \delta &= \varphi(M + x \Delta M) \\ \alpha^\circ &= f(M), & \delta^\circ &= \varphi(M) \\ \alpha' &= f(M + \Delta M), & \delta' &= \varphi(M + \Delta M).\end{aligned}$$

Разлагая эти функции по степеням малых приращений и отбрасывая члены выше первой степени, получим для определения x два уравнения

$$\alpha - \alpha^\circ = x(\alpha' - \alpha^\circ), \quad \delta - \delta^\circ = x(\delta' - \delta^\circ).$$

Если эти уравнения дают достаточно согласные значения для x , то это показывает допустимость сделанных нами гипотез. Разделив полученную поправку $x \Delta M$ на соответствующий промежуток времени, получим эмпирическую поправку среднего суточного движения.

Пример. Орбита планеты 1931 LB (см. § 61) оказалась очень похожей на круговую орбиту планеты 1927 SK, так что возник вопрос о тождественности этих двух планет.

Для 1927 SK было получено только два наблюдения:

Место	1927	T. U.	α (1925.0)	δ (1925.0)
Симеиз	сент. 26	23 ^h 32 ^m .5	1 ^h 11 ^m .7	— 10° 15'
„	„ 29	22 15.0	1 9.5	— 10 32

Для момента первого из этих наблюдений орбита 1931 LB (стр. 194) дает

$$M = 90^\circ.467, \quad \alpha = 1^h 14^m.8, \quad \delta = -9^\circ 56';$$

следовательно

$$H - B: \quad \Delta \alpha = -3^m.1 \quad \Delta \delta = -19'.$$

Взяв $M = 89^\circ.467$ и оставив без изменения все элементы, получим

$$\Delta \alpha = +2^m.3, \quad \Delta \delta = +14'.$$

Таким образом для искомой поправки имеем два значения

$$x \Delta M = -1^\circ \frac{3.1}{3.1 + 2.3} = -0^\circ.58$$

$$x \Delta M = -1^\circ \frac{19}{19 + 14} = -0^\circ.58$$

С этой поправкой получаем следующее представление вышеуказанных наблюдений:

Сент. 26	$\Delta \alpha = 0^m.0$	$\Delta \delta = 0'$
„ 29	$= 0.0$	$= 0'$

§ 80. УЛУЧШЕНИЕ КОМЕТНЫХ ОРБИТ.

Кометные орбиты бывают тройкого рода: орбиты, не отличающиеся, в пределах точности наших наблюдений, от параболы; орбиты с небольшими эксцентриситетами, по которым движутся короткопериодические кометы; и наконец эллиптические и гиперболические орбиты с эксцентриситетами, мало отличающимися от единицы. Посмотрим, как улучшается первоначальная параболическая орбита в каждом из этих случаев.

Для короткопериодических комет, для которых очень скоро обнаруживаются значительные отступления от параболического движения, орбита уточняется при помощи метода вариации геоцентрических расстояний. Отличие от случая орбиты малой планеты заключается лишь в том, что для кометы в большинстве случаев имеется много наблюдений, так что есть возможность составить нормальные места.

В том случае, когда нет оснований подозревать наличие уклонения формы орбиты от параболической, применяется *метод вариации отношения двух геоцентрических расстояний*. Выберем два надежные наблюдения (или два нормальные места)

$$t_1, \alpha_1, \delta_1 \text{ и } t_2, \alpha_2, \delta_2,$$

по возможности далеко отстоящие одно от другого. При помощи предварительной орбиты вычислим геоцентрические расстояния ρ_1, ρ_2 для моментов t_1, t_2 , и найдем отношение

$$M^0 = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Пусть для моментов других наблюдений $(t_i, \alpha_i, \delta_i)$ предварительная орбита дает координаты α_i^0, δ_i^0 .

Обратимся к уравнениям, которыми мы пользовались в § 73 для определения геоцентрических расстояний кометы, а именно (мы полагаем $m = 0$)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1 & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2 \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1 & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2 \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1 & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2 \\ r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} & r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \\ s^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ 4\theta_0^2 \tau^2 &= s^2 (r_1 + r_2) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти уравнения определяют ρ_1, ρ_2 как функции принятого значения M . Следовательно и элементы орбиты и вычисленные по ним координаты α, δ суть функции M . Итак можно написать

$$\alpha_i^0 = f_i(M^0), \quad \delta_i^0 = \varphi_i(M^0) \quad (7)$$

Дадим M^0 некоторое приращение ΔM и вычислим соответствующие координаты

$$\alpha_i' = f_i(M^0 + \Delta M), \quad \delta_i' = \varphi_i(M^0 + \Delta M) \quad (8)$$

Посмотрим теперь, нельзя ли найти такое приращение $x \Delta M$, чтобы соответствующее отношение геоцентрических расстояний $M^\circ + x \Delta M$ давало бы как-раз наблюдаемые значения координат, т. е. чтобы было

$$\alpha_i = f_i(M^\circ + x \Delta M), \quad \delta_i = \varphi_i(M^\circ + x \Delta M). \quad (9)$$

Если ограничиться первыми степенями малых приращений, то равенства (7), (8) и (9) дадут

$$\alpha_i - \alpha_i^\circ = x(\alpha_i' - \alpha_i^\circ), \quad \delta_i - \delta_i^\circ = x(\delta_i' - \delta_i^\circ). \quad (10)$$

Определив из этих уравнений вероятнейшую величину x , найдем при помощи уравнений (6), в которых полагаем

$$M = M^\circ + x \Delta M,$$

геоцентрические расстояния, и наконец (см. § 75)—окончательные параболические элементы.

Важно убедиться в законности применения линейного интерполирования. Обозначим через E° , E' и E значения какого-либо элемента (или какой-нибудь промежуточной величины), соответствующие значениям M° , $M^\circ + \Delta M$ и $M^\circ + x \Delta M$ отношения M . Критерием законности применения линейного интерполирования является выполнение равенства

$$E - E^\circ = x(E' - E^\circ).$$

Если окажется, что вариация ΔM или $x \Delta M$ слишком велика для возможности строгого применения линейного интерполирования, то указанный прием повторяем еще раз.

Обратимся, наконец, к последнему возможному случаю, когда орбита хотя и очень близка к параболе, но все же заметно от нее отличается. Наличие этого обстоятельства обнаруживается невозможностью достаточно хорошо удовлетворить уравнениям (10). Применение метода вариации геоцентрических расстояний в этом случае дает мало удовлетворительные результаты, ибо эксцентриситет и большая полуось определяются недостаточно хорошо. Поэтому предпочитают вариировать,—положив опять в основу два наблюдения $(t_1, \alpha_1, \delta_1)$ и $(t_2, \alpha_2, \delta_2)$,—одно геоцентрическое расстояние, например ρ_1 , и большую полуось (точнее говоря $\frac{1}{a}$, так как это удобнее в вычислительном отношении). Делается это следующим образом.

Пусть предварительная параболическая орбита (которой соответствует значение $\frac{1}{a} = 0$) дает для основных наблюдений геоцентрические расстояния ρ_1° и ρ_2° , а для моментов остальных наблюдений t_i, α_i, δ_i дает координаты $\alpha_i^\circ, \delta_i^\circ$. Элементы этой орбиты обозначим через E° .

Вычислим вторую параболическую орбиту, взяв для первого наблюдения геоцентрическое расстояние $\rho_1^1 = \rho_1^\circ + \Delta \rho_1$. Геоцентрическое расстояние ρ_2^1 для второго основного наблюдения определим из уравнения Эйлера

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}}, \quad (11)$$

правая часть которого может рассматриваться как функция ρ_2 в силу равенств

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1 & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2 \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1 & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2 \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1 & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2 \\ r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} & r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \\ s^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Элементы этой второй параболической орбиты обозначим через E' , а через α'_i, δ'_i обозначим координаты, которые дает эта орбита для моментов t_i .

Наконец вычислим третью орбиту, оставив на этот раз ρ_1 первоначальное значение ρ_1° , но взяв для $\frac{1}{a}$ некоторое отличное от нуля значение $\Delta \frac{1}{a}$. Соответствующая величина ρ_2 определится из уравнения Ламберта, которое удобно взять в форме (IV, 73)

$$\sqrt{8} (t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} V(z) \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}} V(z'), \quad (13)$$

где

$$z = \frac{1}{4a} (r_1 + r_2 + s), \quad z' = \frac{1}{4a} (r_1 + r_2 - s).$$

Полученные элементы орбиты обозначим через E'' ; через α_i'', δ_i'' обозначим соответствующие значения координат для моментов t_i .

Далее поступаем так же, как и в способе вариации геоцентрических расстояний. Вычисленные прямые восхождения и склонения для моментов t_i суть некоторые функции ρ_1 и $\frac{1}{a}$; обозначим эти функции через $f_i(\rho_1, \frac{1}{a})$ и $\varphi_i(\rho_1, \frac{1}{a})$. В таком случае

$$\begin{aligned} \alpha_i^\circ &= f_i(\rho_1^\circ, 0), & \delta_i^\circ &= \varphi_i(\rho_1^\circ, 0), \\ \alpha_i' &= f_i(\rho_1^\circ + \Delta\rho, 0) & \delta_i' &= \varphi_i(\rho_1^\circ + \Delta\rho, 0), \\ \alpha_i'' &= f_i(\rho_1^\circ, \Delta \frac{1}{a}), & \delta_i'' &= \varphi_i(\rho_1^\circ, \Delta \frac{1}{a}). \end{aligned}$$

Обозначим через $\rho_1^\circ = x \Delta\rho$ и $y \Delta \frac{1}{a}$ те значения неизвестных ρ_1 и $\frac{1}{a}$, для которых вычисленные значения координат совпадают с наблюдаемыми, так что

$$\alpha_i = f_i(\rho_1^\circ + x \Delta\rho_1, y \Delta \frac{1}{a}), \quad \delta_i = \varphi_i(\rho_1^\circ + x \Delta\rho_1, y \Delta \frac{1}{a}).$$

Применяя формулу Тэйлора и ограничиваясь лишь членами первого порядка относительно малых приращений $\Delta\rho_1$ и $\Delta \frac{1}{a}$, получим для определения x и y следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha_i - \alpha_i^\circ &= x(\alpha_i' - \alpha_i^\circ) + y(\alpha_i'' - \alpha_i^\circ) \\ \delta_i - \delta_i^\circ &= x(\delta_i' - \delta_i^\circ) + y(\delta_i'' - \delta_i^\circ). \end{aligned}$$

Для контроля производимой работы очень полезно, параллельно с вычислением элементов E° , E' , E'' , вести вычисление еще четвертой системы элементов E''' , взяв значения $\rho_1 = \rho_1^\circ + \Delta\rho_1$, $\frac{1}{a} = \Delta\frac{1}{a}$. При этом для элементов, точно так же, как и для различных вспомогательных величин, должны выполняться равенства

$$E''' - E'' = E' - E^\circ. \quad (14)$$

Выполнение этих равенств свидетельствует также и о законности применения, при взятых значениях $\Delta\rho_1$ и $\Delta\frac{1}{a}$ линейного интерполирования¹⁾.

Решение уравнений (11) или (13) относительно ρ_2 производится, как обычно, интерполированием (срав. § 47 и § 75).

§ 81. ПРИВЕДЕНИЕ ФОРМУЛ К ЛОГАРИФИЧЕСКОМУ ВИДУ.

Если вычисления производятся при помощи логарифмов, то можно основные наблюдения взять в эклиптических координатах, а именно

$$\begin{array}{ll} t_1, \lambda_1, \beta_1, & L_1, \lg R_1 \\ \text{и} & \\ t_2, \lambda_2, \beta_2, & L_2, \lg R_2 \end{array}$$

В этом случае уравнения (6) и (12) заменяют другими, более удобными для вычисления с логарифмами. Так как

$$\begin{array}{ll} x_1 = \rho_1 \cos \beta_1 \cos \lambda_1 + R_1 \cos L_1 & x_2 = \rho_2 \cos \beta_2 \cos \lambda_2 + R_2 \cos L_2 \\ y_1 = \rho_1 \cos \beta_1 \sin \lambda_1 + R_1 \sin L_1 & y_2 = \rho_2 \cos \beta_2 \sin \lambda_2 + R_2 \sin L_2 \\ z_1 = \rho_1 \sin \beta_1 & z_2 = \rho_2 \sin \beta_2, \end{array}$$

то для радиусов-векторов имеем следующие формулы

$$r_1^2 = \rho_1^2 + 2\rho_1 R_1 \cos \psi_1 + R_1^2, \quad r_2^2 = \rho_2^2 + 2\rho_2 R_2 \cos \psi_2 + R_2^2,$$

где

$$\cos \psi_1 = \cos \beta_1 (\cos \lambda_1 - L_1), \quad \cos \psi_2 = \cos \beta_2 (\cos \lambda_2 - L_2),$$

причем, как и раньше, считаем

$$0 < \psi_1 < 180^\circ, \quad 0 < \psi_2 < 180^\circ.$$

Полагая

$$R_1 \cos \psi_1 = f_1, \quad R_1 \sin \psi_1 = l_1, \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\rho_1 + f_1}{l_1},$$

¹⁾ Если окажется, что равенства (14) выполняются лишь приближенно, т. е. что вторыми степенями приращений $\Delta\rho_1$, $\Delta\frac{1}{a}$ пренебрегать нельзя, то изложенный прием применяем еще раз, взяв за исходное значение $\frac{1}{a}$ не нуль, а ту величину $y\Delta\frac{1}{a}$, которая получилась первый раз.

получим

$$r_1^2 = (\rho_1 + f_1)^2 + l_1^2 = l_1^2 [1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_1],$$

откуда

$$r_1 = l_1 \sec \Theta_1.$$

Совершенно аналогично, для вычисления r_2 служат формулы

$$R_2 \cos \psi_2 = f_2, \quad R_2 \sin \psi_2 = l_2, \quad \operatorname{tg} \Theta_2 = \frac{\rho_2 + f_2}{l_2},$$
$$r_2 = l_2 \sec \Theta_2.$$

Если речь идет об уравнениях (6), то несколько более удобными являются формулы

$$\frac{R_2 \cos \psi_2}{M} = f_2', \quad \frac{R_2 \sin \psi_2}{M} = l_2', \quad \operatorname{tg} \Theta_2 = \frac{\rho_2 + f_2'}{l_2'},$$
$$r_2 = M l_2' \sec \Theta_2.$$

Что касается вычисления хорды s , то в случае уравнений (6) ее удобно выразить через ρ_1 . Для этого полагаем

$$\left. \begin{aligned} g \cos G &= R_2 \cos L_2 - R_1 \cos L_1 \\ g \sin G &= R_2 \sin L_2 - R_1 \sin L_1 \\ h \cos \zeta \cos H &= M \cos \beta_2 \cos \lambda_2 - \cos \beta_1 \cos \lambda_1 \\ h \cos \zeta \sin H &= M \cos \beta_2 \sin \lambda_2 - \cos \beta_1 \sin \lambda_1 \\ h \sin \zeta &= M \sin \beta_2 - \sin \beta_1, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

тогда

$$s^2 = \rho_1^2 h^2 + 2\rho_1 hg \cos \varphi + g^2,$$

где

$$\cos \varphi = \cos \zeta \cos (H - G).$$

Делая опять

$$\frac{g \cos \varphi}{h} = f, \quad \frac{g \sin \varphi}{h} = l, \quad \operatorname{tg} \Theta = \frac{\rho_1 + f}{l}.$$

получим окончательно

$$s = hl \sec \Theta.$$

Заметим, что формулы (15), служащие для вычисления вспомогательных величин g , h , ζ , G и H , выгодно заменить такими:

$$\begin{aligned} g \cos (G - L_1) &= R_2 \cos (L_2 - L_1) - R_1 \\ g \sin (G - L_1) &= R_2 \sin (L_2 - L_1) \\ h \cos \zeta \cos (H - \lambda_1) &= M \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) - \cos \beta_1 \\ h \cos \zeta \sin (H - \lambda_1) &= M \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \\ h \sin \zeta &= M \sin \beta_2 - \sin \beta_1 \end{aligned}$$

Рассмотрим наконец определение хорды s по формулам (12). В этом случае s нужно выразить непосредственно через искомую величину ρ_2 , тогда как ρ_1 , а следовательно и x_1 , y_1 , z_1 , имеют некоторые заданные значения.

Так как

$$x_2 - x_1 = \rho_2 \cos \beta_2 \cos \lambda_2 - x_1 + R_2 \cos L_2$$

$$y_2 - y_1 = \rho_2 \cos \beta_2 \sin \lambda_2 - y_1 + R_2 \sin L_2$$

$$z_2 - z_1 = \rho_2 \sin \beta_2 - z_1,$$

то, полагая

$$\sigma \cos \nu \cos K = -x_1 + R_2 \cos L_2$$

$$\sigma \cos \nu \sin K = -y_1 + R_2 \sin L_2$$

$$\sigma \sin \nu = -z_1,$$

получим

$$s^2 = \rho_2^2 + 2\rho_2 \sigma \cos \Phi + \sigma^2,$$

где

$$\cos \Phi = \sin \beta_2 \sin \nu + \cos \beta_2 \cos \nu \cos (K - \lambda_2).$$

Причем угол Φ мы, как всегда, подчиняем условию $0 < \Phi < 180^\circ$.

Применив обычный прием, будем иметь следующие окончательные формулы для вычисления s при каждом испытуемом значении ρ_2

$$\sigma \cos \Phi = f, \quad \sigma \sin \Phi = l$$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\rho_2 + f}{l}, \quad s = l \sec \Theta.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ.

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

При решении различных проблем Небесной механики широко применяются методы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Так как эти методы либо совсем не излагаются в курсах Математики, либо излагаются не в той форме, в какой они употребляются в Астрономии, то здесь мы даем необходимые сведения по этому вопросу.

1. Выражение производных через разности. Значения каждой функции мы будем рассматривать для значений независимого переменного t , образующих арифметическую прогрессию

$$\dots, t_0 - 2w, t_0 - w, t_0, t_0 + w, t_0 + 2w, \dots;$$

причем значения например функции $f(t)$ будем обозначать через

$$f_k = f(t_k), \text{ где } t_k = t_0 + kw.$$

Следующая схема наглядно показывает ту систему обозначений разностей, которой мы будем пользоваться в дальнейшем:

n	Суммы 2-го порядка	Суммы 1-го порядка	Значения функции	Разности 1-го порядка	Разности 2-го порядка	Разности 3-го порядка	...
-2	f_{-2}^{-2}		f_{-2}		...		...
$-\frac{3}{2}$		$f_{-3/2}^{-1}$		$f_{-3/2}^1$		...	
-1	f_{-1}^{-2}		f_{-1}		f_{-1}^2		...
$-\frac{1}{2}$		$f_{-1/2}^{-1}$		$f_{-1/2}^1$		$f_{-1/2}^3$	
0	f_0^{-2}		f_0		f_0^2		...
$\frac{1}{2}$		$f_{1/2}^{-1}$		$f_{1/2}^1$		$f_{1/2}^3$	
1	f_1^{-2}		f_1		f_1^2		...
$\frac{3}{2}$		$f_{3/2}^{-1}$		$f_{3/2}^1$		...	
2	f_2^{-2}		f_2		...		

Таким образом

$$\begin{aligned} f_{\kappa}^1 + \frac{1}{2} &= f_{\kappa+1} - f_{\kappa} \\ f_{\kappa}^2 &= f_{\kappa+\frac{1}{2}}^1 - f_{\kappa-\frac{1}{2}}^1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

при любом целом значении k .

Одно из значений столбца сумм 1-го порядка может быть взято произвольно. Остальные вычисляются по формуле

$$f_{\kappa+\frac{1}{2}}^{-1} = f_{\kappa-\frac{1}{2}}^{-1} + f_{\kappa} \tag{1}$$

Точно так же, взяв произвольно одно из значений вторых сумм, например f_0^{-2} , мы получим все остальные числа этого столбца по формуле

$$f_{\kappa+1}^{-2} = f_{\kappa}^{-2} + f_{\kappa+\frac{1}{2}}^{-1}, \tag{2}$$

делая $k = 0, 1, 2, \dots$ и $k = -1, -2, -3, \dots$

Вышеуказанная разностная схема часто пополняется еще полусуммами двух соседних величин одного и того же столбца. Для этих полусумм применяются следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f_{\kappa+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(f_{\kappa} + f_{\kappa+1}), f_{\kappa}^1 = \frac{1}{2}(f_{\kappa+\frac{1}{2}}^1 + f_{\kappa+\frac{1}{2}}^1) \dots \\ f_{\kappa}^{-1} &= \frac{1}{2}(f_{\kappa+\frac{1}{2}}^{-1} + f_{\kappa-\frac{1}{2}}^{-1}), f_{\kappa+\frac{1}{2}}^{-2} = \frac{1}{2}(f_{\kappa}^{-2} + f_{\kappa+1}^{-2}), \dots \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Обратимся теперь к выражению производных через разности. Возьмем сначала интерполяционную формулу Стирлинга

$$f(t_{\kappa} + zw) = f_{\kappa} + zf_{\kappa}^1 + \frac{z^2}{2!} f_{\kappa}^2 + \frac{z(z^2-1^2)}{3!} f_{\kappa}^3 + \frac{z^2(z^2-1^2)}{4!} f_{\kappa}^4 + \dots$$

Дифференцируя это равенство по z и делая затем $z = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} w \left(\frac{df}{dt} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa}^1 - \frac{1}{6} f_{\kappa}^3 + \frac{1}{30} f_{\kappa}^5 - \frac{1}{140} f_{\kappa}^7 + \dots \\ w^2 \left(\frac{d^2f}{dt^2} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa}^2 - \frac{1}{12} f_{\kappa}^4 + \frac{1}{90} f_{\kappa}^6 - \frac{1}{560} f_{\kappa}^8 + \dots \\ w^3 \left(\frac{d^3f}{dt^3} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa}^3 - \frac{1}{4} f_{\kappa}^5 + \frac{7}{120} f_{\kappa}^7 - \dots \\ w^4 \left(\frac{d^4f}{dt^4} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa}^4 - \frac{1}{6} f_{\kappa}^6 + \frac{7}{240} f_{\kappa}^8 - \dots \\ w^5 \left(\frac{d^5f}{dt^5} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa}^5 - \frac{1}{3} f_{\kappa}^7 + \dots \\ w^6 \left(\frac{d^6f}{dt^6} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa}^6 - \frac{1}{4} f_{\kappa}^8 + \dots \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Совершенно так же формула Бесселя

$$f(t_{\kappa} + z\omega) = f_{\kappa} + zf_{\kappa + \frac{1}{2}}^1 + \frac{z(z-1)}{2!} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^2 + \frac{z(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)}{3!} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^3 + \\ + \frac{(z+1)z(z-1)(z-2)}{4!} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^4 + \frac{(z+1)z(z-1)(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)}{5!} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^5 + \dots$$

позволяет выразить значения производных $f(t)$ при $t = t_{\kappa}$ через разности строки $n = k + \frac{1}{2}$. Получим

$$\left. \begin{aligned} w_1 \left(\frac{df}{dt} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa + \frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{12} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^3 - \frac{1}{12} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^4 + \frac{1}{120} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^5 - \dots \\ w_2 \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa + \frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{2} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^3 - \frac{1}{12} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^4 + \frac{1}{24} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^5 + \dots \\ w_3 \left(\frac{d^3 f}{dt^3} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa + \frac{1}{2}}^3 - \frac{1}{2} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^4 + * + \dots \\ w_4 \left(\frac{d^4 f}{dt^4} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa + \frac{1}{2}}^4 - \frac{1}{2} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^5 - \dots \end{aligned} \right\} (5)$$

В способах численного интегрирования уравнений, предложенных Адамсом и Штермером, находят применение еще следующие формулы, выражающие те же производные через разности, расположенные по восходящей диагонали,

$$\left. \begin{aligned} w \left(\frac{df}{dt} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa - \frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{2} f_{\kappa - 1}^2 + \frac{1}{3} f_{\kappa - \frac{3}{2}}^3 + \frac{1}{4} f_{\kappa - 2}^4 + \frac{1}{5} f_{\kappa - \frac{5}{2}}^5 + \dots \\ w^2 \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa - 1}^2 + f_{\kappa - \frac{3}{2}}^3 + \frac{11}{12} f_{\kappa - 2}^4 + \frac{5}{6} f_{\kappa - \frac{5}{2}}^5 + \dots \\ w^3 \left(\frac{d^3 f}{dt^3} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa - \frac{3}{2}}^3 + \frac{3}{2} f_{\kappa - 2}^4 + \frac{7}{4} f_{\kappa - \frac{5}{2}}^5 + \dots \\ w^4 \left(\frac{d^4 f}{dt^4} \right)_{\kappa} &= f_{\kappa - 2}^4 + \frac{11}{5} f_{\kappa - \frac{5}{2}}^5 + \dots \end{aligned} \right\} (6)$$

Эти соотношения получаются тем же приемом из интерполяционной формулы Ньютона

$$f(t_{\kappa} + z\omega) = f_{\kappa} + zf_{\kappa - \frac{1}{2}}^1 + \frac{z(z+1)}{2!} f_{\kappa - 1}^2 + \frac{z(z+1)(z+2)}{3!} f_{\kappa - \frac{3}{2}}^3 + \dots$$

Примечание. Для обозначения разностей кроме вышеуказанных употребляются еще и другие символы. Величину f_{κ}^i , где i — целое число, а κ — половина целого числа (четного или нечетного), обозначают через $f^i(n)$ или $f_i(\kappa)$ или, наконец, через $f^i(t_0 + \kappa\omega)$.

2. Интегрирование уравнений первого порядка. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t). \quad (7)$$

Требуется вычислить таблицу значений функции $x(t)$, удовлетворяющей этому уравнению и начальному условию

$$x(t_0) = x_0,$$

где t_0 и x_0 — заданные числа.

Полагая как всегда $x(t_0 + kw) = x_k$, займемся вычислением $x_1, x_2, x_3, \dots$. Наша задача будет решена, если мы дадим средство для вычисления разностей

$$x_{k+1} - x_k = \Delta_{k+\frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Так как

$$x_{k+1} = x(t_k + w) = x_k + \frac{w}{1!} \left(\frac{dx}{dt} \right)_k + \frac{w^2}{2!} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_k + \dots,$$

то

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = \frac{w}{1!} \left(\frac{dx}{dt} \right)_k + \frac{w^2}{2!} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_k + \dots \quad (8)$$

Полагая

$$wF(x, t) = f(t), \quad wF(x_k, t_k) = f_k$$

и принимая во внимание уравнение (7), получим

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = f_k + \frac{w}{2} \left(\frac{df}{dt} \right)_k + \frac{w^2}{6} \left(\frac{d^2f}{dt^2} \right)_k + \frac{w^3}{24} \left(\frac{d^3f}{dt^3} \right)_k + \dots$$

Выразим теперь стоящие здесь производные через разности. Пользуясь соотношениями (6), получим формулу

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = f_k + \frac{1}{2} f_{k-\frac{1}{2}}^1 + \frac{5}{12} f_{k-1}^2 + \frac{3}{8} f_{k-\frac{3}{2}}^3 + \frac{251}{720} f_{k-2}^4 + \frac{95}{288} f_{k-\frac{5}{2}}^5 + \dots, \quad (9)$$

представляющую *метод Адамса*. Соотношения (5) дают формулу

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = f_k + \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{12} f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{11}{720} f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \dots,$$

которую можно написать так:

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = f_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{11}{720} f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \frac{191}{60480} f_{k+\frac{1}{2}}^6 + \frac{2497}{3628800} f_{k+\frac{1}{2}}^8 - \dots \quad (10)$$

ибо

$$f_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_k + f_{k+1}) = \frac{1}{2} \left(f_k + f_k + f_{k+\frac{1}{2}}^1 \right) = f_k + \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^1. \quad (10 \text{ bis})$$

Эта формула дает метод интегрирования, который мы назовем *методом Коуэлла* (так как аналогичный метод для уравнений второго порядка был предложен Коуэллом).

Когда $x_1, x_2, \dots, x_k$ уже вычислены, то формула (9) сразу дает x_{k+1} . Что же касается формулы Коуэлла (10), то она выражает искомую разность $x_{k+1} - x_k$ через такие разности $f^2, f^4, \dots$, которые зависят от $f_{k+1}, f_{k+2}, \dots$, а следовательно и от $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$. Эти разности $f_{k+1}^2 + \frac{1}{2}, f_{k+2}^4 + \frac{1}{2}, \dots$ в первом приближении находят экстраполированием, затем, после того как найдены соответствующие $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$, их вычисляют обычным порядком и, если нужно, повторяют вычисление $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$. Благодаря быстрой, с которой убывают коэффициенты в формуле (10), этот процесс сходится настолько быстро, что второе приближение оказывается излишним, если только интервал w взят не слишком большой.

В тех случаях, которые встречаются в Небесной механике, — а именно при вычислении возмущений элементов орбиты, — правая часть уравнения (7) может считаться независимой от x . При этом условии применение формулы (10) особенно упрощается, ибо все значения функции f и все разности этой функции могут быть вычислены наперед.

В заключение рассмотрим еще вопрос о вычислении $x(t)$ для значений аргумента вида $t = t_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right)w$.

Определим разность

$$\delta_k = x\left[t_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right)w\right] - x\left[t_0 + \left(k - \frac{1}{2}\right)w\right].$$

Применяя опять разложение в ряд Тэйлора, найдем

$$\delta_k = x\left(t_k + \frac{w}{2}\right) - x\left(t_k - \frac{w}{2}\right) = w\left(\frac{dx}{dt}\right)_k + \frac{w^3}{24}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_k + \frac{w^5}{1920}\left(\frac{d^5x}{dt^5}\right)_k + \dots$$

Воспользуемся уравнением (7) и применим формулы (4). Это даст

$$\delta_k = f_k + \frac{1}{24}f_k^2 - \frac{17}{5760}f_k^4 + \frac{367}{967680}f_k^6 - \dots \quad (11)$$

Полученная формула удобнее формулы (10) в том отношении, что содержит только разности, тогда как формула (10) требует вычисления полусумм разностей.

Начальные значения определяемой функции, например

$$x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right), x\left(t_0 + \frac{w}{2}\right), x\left(t_0 + \frac{3w}{2}\right), \dots$$

находят или при помощи разложения $x(t)$ в ряд, или способом последовательных приближений.

3. Метод квадратур для уравнений первого порядка. Недостатком метода Коуэлла является неизбежное накопление ошибок

при последовательном вычислении $x_1, x_2, \dots$. Действительно, для определения x_n мы имеем равенства

$$x_1 - x_0 = \Delta_{\frac{1}{2}}, \quad x_2 - x_1 = \Delta_{\frac{3}{2}}, \quad \dots, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta_{n-\frac{1}{2}}.$$

Складывая их почленно, получим.

$$x_n - x_0 = \sum_0^{n-1} \Delta_{\kappa + \frac{1}{2}} \quad (12)$$

Если погрешность каждой из разностей Δ заключена в пределах от $-\epsilon$ до $+\epsilon$, то наибольшая возможная погрешность x_n будет $\pm \epsilon n$. Как известно, достижение погрешностью этой предельной величины чрезвычайно мало вероятно: лучшее представление о действительной погрешности дает вероятная погрешность, растущая пропорционально $\sqrt{n}$.

Таким образом, при применении метода Коуэлла (а также методов, основанных на употреблении формул (9), (11) и им аналогичных), мы должны считаться с тем, что погрешность x_n растет пропорционально $\sqrt{n}$. Это неудобство может быть устранено следующим образом.

Формулы (12) и (10) дают

$$x_n - x_0 = \sum_0^{n-1} f_{\kappa + \frac{1}{2}} - \frac{1}{12} \sum_0^{n-1} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^2 + \frac{11}{720} \sum_0^{n-1} f_{\kappa + \frac{1}{2}}^4 - \dots \quad (13)$$

Из соотношений (1) и (13) получаем

$$\begin{aligned} f_{\kappa + \frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left[\left(f_{\kappa + \frac{1}{2}}^{-1} - f_{\kappa - \frac{1}{2}}^{-1} \right) + \left(f_{\kappa + \frac{3}{2}}^{-1} - f_{\kappa + \frac{1}{2}}^{-1} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(f_{\kappa + \frac{3}{2}}^{-1} - f_{\kappa - \frac{1}{2}}^{-1} \right). \end{aligned}$$

Но, на основании (3),

$$f_{\kappa+1}^{-1} = \frac{1}{2} \left(f_{\kappa + \frac{3}{2}}^{-1} + f_{\kappa + \frac{1}{2}}^{-1} \right), \quad f_{\kappa}^{-1} = \frac{1}{2} \left(f_{\kappa + \frac{1}{2}}^{-1} + f_{\kappa - \frac{1}{2}}^{-1} \right)$$

поэтому

$$f_{\kappa + \frac{1}{2}} = f_{\kappa+1}^{-1} - f_{\kappa}^{-1}.$$

Аналогично

$$f_{\kappa + \frac{1}{2}}^2 = f_{\kappa+1}^1 - f_{\kappa}^1, \quad f_{\kappa + \frac{1}{2}}^4 = f_{\kappa+1}^3 - f_{\kappa}^3, \dots$$

Пользуясь этими равенствами и замечая, что

$$\sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}} = f_n^{-1} - f_0^{-1}, \dots,$$

придадим формуле (13) такой вид:

$$\begin{aligned} x_n = & f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \frac{191}{60480} f_n^5 + \dots \\ & + x_0 - f_0^{-1} + \frac{1}{12} f_0^1 - \frac{11}{720} f_0^3 + \frac{191}{60480} f_0^5 - \dots \end{aligned}$$

Так как один член столбца первых сумм может быть выбран произвольно, то обычно определяют f_0^{-1} из условия

$$x_0 = f_0^{-1} - \frac{1}{12} f_0^1 + \frac{11}{720} f_0^3 - \dots, \quad (14)$$

тогда

$$x_n = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \dots \quad (15)$$

Вычисление по этой формуле свободно от указанного выше недостатка накопления ошибок, ибо ошибка x_n при надлежащем выборе интервала w не отражается на величине $f_n = w F(x_n, t_n)$, а потому не влияет на последующие значения x .

Метод интегрирования уравнения (7), основанный на употреблении формулы (15), мы назовем *методом квадратур*. В самом деле, в том случае, когда правая часть уравнения (7) не содержит x , рассматриваемая формула дает известную формулу квадратур

$$x_0 + \int_{t_0}^{t_0 + nw} F(t) dt = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \dots,$$

причем f_0^{-1} попрежнему определяется равенством (14).

Другой, также часто употребляемый, вариант метода квадратур получим, просуммировав равенство (11) от $k=0$ до $k=n$. Это даст

$$\begin{aligned} x \left[t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) w \right] = & f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n+\frac{1}{2}}^3 + \dots \\ & + x \left(t_0 - \frac{w}{2} \right) - f_{-\frac{1}{2}}^{-1} - \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Если $f_{-\frac{1}{2}}^{-1}$ определить условием

$$x \left(t_0 + \frac{w}{2} \right) = f_{-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots, \quad (16)$$

то будем иметь более простую формулу

$$x \left[t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) w \right] = f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n+\frac{1}{2}}^3 + \dots \quad (17)$$

Примечание I. Изложенные способы численного интегрирования уравнения (7) без изменения распространяются на системы уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = H(x, y, z, t).$$

В этом случае интегрирование ведется параллельно на трех отдельных листах.

Примечание II. При употреблении указанных формул выгодно пользоваться следующими приближенными равенствами:

$$\begin{aligned} 11: 720 &= 1:0\,000\,107 \\ 191: 60480 &= 1:0\,000\,004 \\ 2497: 362880 &= 1:0\,000\,000 \\ 17: 5760 &= 1:0\,000\,001 \\ 367: 967680 &= 1:0\,000\,000 \end{aligned}$$

4. Интегрирование уравнений второго порядка. Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t). \quad (18)$$

В астрономических проблемах искомое решение $x(t)$ этого уравнения определяется обычно не начальными величинами x_0 , $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ функции и ее производной для $t=t_0$, а заданием двух значений x_{-1} и x_0 , соответствующих двум моментам $t_{-1}=t_0-w$ и t_0 . По этим данным требуется вычислять остальные значения $x_1, x_2, \dots$ искомой функции.

Наряду с первыми разностями

$$\Delta_{\kappa-\frac{1}{2}} = x_{\kappa} - x_{\kappa-1}, \quad \Delta_{\kappa+\frac{1}{2}} = x_{\kappa+1} - x_{\kappa}$$

введем в рассмотрение вторую разность

$$\Delta_{\kappa}^2 = \Delta_{\kappa+\frac{1}{2}} - \Delta_{\kappa-\frac{1}{2}} = x_{\kappa+1} - 2x_{\kappa} + x_{\kappa-1}.$$

Разлагая $x_{\kappa+1} = x(t_{\kappa} + w)$ и $x_{\kappa-1} = x(t_{\kappa} - w)$ по степеням w , получим

$$\Delta_{\kappa}^2 = \frac{2}{2!} w^2 \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_{\kappa} + \frac{2}{4!} w^4 \left(\frac{d^4x}{dt^4} \right)_{\kappa} + \dots$$

Положим

$$w^2 F(x, t) = f(t), \quad w^2 F(x_{\kappa}, t_{\kappa}) = f_{\kappa},$$

тогда

$$\Delta_{\kappa}^2 = f_{\kappa} + \frac{1}{12} w^2 \left(\frac{d^2f}{dt^2} \right)_{\kappa} + \frac{1}{360} w^4 \left(\frac{d^4f}{dt^4} \right)_{\kappa} + \dots$$

Подставив сюда выражения производных через разности даваемые равенствами (4), получим формулу

$$\Delta_{\kappa}^2 = f_{\kappa} + \frac{1}{12} f_{\kappa}^2 - \frac{1}{240} f_{\kappa}^4 + \frac{31}{60480} f_{\kappa}^6 - \frac{289}{3628800} f_{\kappa}^8 + \dots, (19)$$

представляющую *метод Коуэлла*.

Применение соотношений (6) дает основную формулу *метода Штёрмера* (аналогичного методу Адамса):

$$\Delta_{\kappa}^2 = f_{\kappa} + \frac{1}{12} f_{\kappa-1}^2 + \frac{1}{12} f_{\kappa-\frac{3}{2}}^3 + \frac{19}{240} f_{\kappa-2}^4 + \frac{3}{40} f_{\kappa-\frac{5}{2}}^5 + \left\{ \right. \\ \left. + \frac{863}{12096} f_{\kappa-3}^6 + \dots \right. \quad (20)$$

Сравнение коэффициентов двух последних формул сразу показывает преимущество метода Коуэлла: если значения f_{κ} вычисляются с ошибкой $\pm \varepsilon$, то разности $f^1, f^2, f^3, \dots$ имеют ошибки, заключающиеся в границах $\pm 2\varepsilon, \pm 4\varepsilon, \pm 8\varepsilon, \dots$; поэтому в формуле (20), в которой все коэффициенты близки к $\frac{1}{12}$, ошибки разностей высших порядков будут чувствительно искажать значение Δ_{κ}^2 . Формула (19) благодаря быстрому убыванию коэффициентов свободна от этого недостатка.

Вычисление по методу Коуэлла ведется следующим образом. Зная x_{-1} и x_0 , мы можем вычислить

$$\Delta_{-\frac{1}{2}} = x_0 - x_{-1};$$

после чего, отбрасывая пока в формуле (19) все неизвестные члены, находим приближенную величину

$$\Delta_0^2 = f_0,$$

Это дает

$$\Delta_{\frac{1}{2}} = \Delta_{-\frac{1}{2}} + \Delta_0^2,$$

$$x_1 = x_0 + \Delta_{\frac{1}{2}}.$$

Имея теперь f_{-1}, f_0, f_1 , мы можем определить f_0^2 , а следовательно и более точную величину

$$\Delta_0^2 = f_0 + \frac{1}{12} f_0^2,$$

которой повторяем вычисление x_1 . Точно так же находится $x_{\frac{3}{2}}$. После этого мы можем уже найти f_0^4 и взять еще более точное значение

$$\Delta_0^2 = f_0 + \frac{1}{12} f_0^2 - \frac{1}{240} f_0^4,$$

и т. д. — пока не получим окончательное значение этой величины, а следовательно и x_1 .

Когда таким образом найдено несколько значений $x_1, x_2, \dots$ то для вычисления Δ_{κ}^2 неизвестные разности $f_{\kappa}^2, f_{\kappa}^4, \dots$ определяются при помощи экстраполирования. Если интервал w не чересчур велик, то это делается настолько хорошо, что почти никогда не приходится подправлять найденное таким путем Δ_{κ}^2 .

Вместо того, чтобы находить $x_{\kappa+1}$ по Δ_{κ}^2 при помощи двойного суммирования:

$$\Delta_{\kappa+\frac{1}{2}} = \Delta_{\kappa-\frac{1}{2}} + \Delta_{\kappa}^2, \quad x_{\kappa+1} = x_{\kappa} + \Delta_{\kappa+\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

можно вести вычисление по формуле

$$x_{\kappa+1} = 2x_{\kappa} - x_{\kappa-1} + \Delta_{\kappa}^2. \quad (22)$$

Но такое избегание выписывания разностей, не давая заметной экономии, в то же время лишает вычислителя одной из возможностей контроля.

Двойное суммирование, производимое явно по формулам (21), или фигурирующее неявно в формуле (22), влечет еще большее накопление погрешности, нежели однократное суммирование при применении метода Коуэлла к уравнениям первого порядка. В настоящем случае средняя квадратичная ошибка x_n будет уже пропорциональна не $\sqrt{n}$, а n . Отсюда ясно, что для уравнений второго порядка еще более важно (в особенности при скольконибудь продолжительном вычислении) заменить метод Коуэлла соответствующим *методом квадратур*.

Суммируя равенства (21) от $k=0$ до $k=n-1$, получим:

$$\Delta_{n-\frac{1}{2}} = \Delta_{-\frac{1}{2}} + \sum_0^{n-1} \Delta_{\kappa}^2, \quad x = x_0 + \sum_0^{n-1} \Delta_{\kappa+\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Формула (19) дает

$$\sum_0^{n-1} \Delta_{\kappa}^2 = \sum_0^{n-1} f_{\kappa} + \frac{1}{12} \sum_0^{n-1} f_{\kappa}^2 - \frac{1}{240} \sum_0^{n-1} f_{\kappa}^4 + \dots$$

Так как, согласно нашим обозначениям,

$$f_0^m = f_{\frac{1}{2}}^{m-1} - f_{-\frac{1}{2}}^{m-1}$$

$$f_1^m = f_{\frac{3}{2}}^{m-1} - f_{\frac{1}{2}}^{m-1} \quad (m=0, 2, 4, \dots)$$

.....

$$f_{n-1}^m = f_{n-\frac{1}{2}}^{m-1} - f_{n-\frac{3}{2}}^{m-1}$$

то, сложив эти равенства, получим

$$\sum_0^{n-1} f_n^m = f_{n-\frac{1}{2}}^{m-1} - f_{-\frac{1}{2}}^{m-1}.$$

Принимая все это во внимание, первое из равенств (21) напишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{n-\frac{1}{2}} &= f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{12} f_{n-\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{240} f_{n-\frac{1}{2}}^3 + \dots \\ &+ \Delta_{-\frac{1}{2}} - f_{-\frac{1}{2}}^{-1} - \frac{1}{12} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{240} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \dots \end{aligned}$$

Произвольный начальный член столбца первых сумм выберем так, чтобы вторая строка этого равенства была равна нулю, т. е. положим

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = \Delta_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{240} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \frac{31}{60480} f_{-\frac{1}{2}}^5 + \dots \quad (24)$$

Окончательно будем иметь

$$\Delta_{n-\frac{1}{2}} = f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{12} f_{n-\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{240} f_{n-\frac{1}{2}}^3 + \dots$$

Заменим здесь n через $k+1$ и просуммируем от $k=0$ до $k=n-1$. Тогда второе из равенств (23) можно написать так:

$$x_n = x_0 + \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{12} \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{240} \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^3 + \dots$$

Но

$$\sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^{m-1} = f_n^{m-2} - f_0^{m-2}, \quad (m=0, 2, 4, \dots);$$

следовательно

$$\begin{aligned} x_n &= f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots \\ &+ x_0 - f_0^{-2} - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^4 + \dots \end{aligned}$$

Начальный член столбца вторых сумм положим равным

$$f_0^{-2} = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^4 + \frac{289}{3628800} f_0^6 + \dots, \quad (25)$$

тогда последняя формула напишется так:

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \frac{289}{3628800} f_n^6 + \dots \quad (26)$$

При употреблении этих формул следует иметь в виду, что

$$\frac{31}{60\,480} = \frac{1}{1\,951} + 0.000\,0000$$

$$\frac{289}{3\,628\,800} = \frac{1}{12\,557} + 0.000\,0000$$

Формула (26), дополняемая равенствами (24) и (25), и представляет собою метод квадратур — наиболее совершенный способ численного интегрирования уравнения (18). Вычисление по ней ведется так же, как и по способу Коуэлла: сначала последовательными приближениями находят (исходя из заданных x_0 и $\Delta_{-\frac{1}{2}} = x_0 - x_{-1}$) несколько значений $x_1, x_{-2}, x_2, \dots$ искомой функции; затем нужные для формулы (26) разности $f_n^2, f_n^4, \dots$ определяют экстраполированием и подправляют, если это нужно, вторым приближением.

Примечание I. Для уравнений второго порядка, так же как и для уравнений первого порядка, метод квадратур может быть представлен в двух формах — смотря по тому, желаем ли мы вычислять значения $x_n = x(t_0 - n\omega)$, или же значения этой функции для середин интервалов, т. е. $x(t_0 + (n + \frac{1}{2})\omega)$. Выведем необходимые формулы для этого второго случая. Положим

$$\delta_k = x \left[t_0 + \left(k + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - x \left[t_0 + \left(k - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}^2 = \delta_{k+1} - \delta_k.$$

Формула Тэйлора дает

$$\begin{aligned} \delta_{k+\frac{1}{2}}^2 &= x \left(t_k + \frac{3\omega}{2} \right) - 2x \left(t_k + \frac{\omega}{2} \right) + x \left(t_k - \frac{\omega}{2} \right) = \omega^2 \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_k + \\ &+ \frac{1}{2} \omega^3 \left(\frac{d^3x}{dt^3} \right)_k + \frac{5}{24} \omega^4 \left(\frac{d^4x}{dt^4} \right)_k + \frac{1}{16} \omega^5 \left(\frac{d^5x}{dt^5} \right)_k + \dots \end{aligned}$$

Следовательно

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}^2 = f_k + \frac{1}{2} \omega \left(\frac{df}{dt} \right)_k + \frac{5}{24} \omega^2 \left(\frac{d^2f}{dt^2} \right)_k + \frac{1}{16} \omega^3 \left(\frac{d^3f}{dt^3} \right)_k + \dots,$$

или, пользуясь (5),

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}^2 = f_k + \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{24} f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{17}{1920} f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \dots$$

или наконец, учитывая (10 bis),

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}^2 = f_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{17}{1920} f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \frac{367}{193\,536} f_{k+\frac{1}{2}}^6 + \dots$$

Эта формула дает метод интегрирования, аналогичный методу Коуэлла. Просуммировав ее в пределах от $k=0$ до $k=n-1$, получим

$$\begin{aligned}\delta_n - \delta_0 &= f_n^{-1} - \frac{1}{24} f_n^1 + \frac{17}{1920} f_n^3 - \dots \\ &- f_0^{-1} + \frac{1}{24} f_0^1 - \frac{17}{1920} f_0^3 + \dots\end{aligned}$$

Положим

$$f_0^{-1} = \delta_0 + \frac{1}{24} f_0^1 - \frac{17}{1920} f_0^3 + \dots, \quad (27)$$

тогда

$$\delta_n = f_n^{-1} - \frac{1}{24} f_n^1 + \frac{17}{1920} f_n^3 - \dots$$

Заменим в этом равенстве n через k и просуммируем его от $k=0$ до $k=n$. Это даст

$$\begin{aligned}x \left[t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) w \right] - x \left(t_0 - \frac{w}{2} \right) &= f_{n+\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^1 + \\ &+ \frac{17}{1920} f_{n+\frac{1}{2}}^2 - \dots - f_{-\frac{1}{2}}^{-2} + \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{1920} f_{-\frac{1}{2}}^2 + \dots\end{aligned}$$

Полагая

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-2} = x \left(t_0 - \frac{w}{2} \right) + \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{1920} f_{-\frac{1}{2}}^2 + \dots, \quad (28)$$

получим окончательно

$$\left. \begin{aligned}x \left[t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) w \right] &= f_{n+\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^1 + \\ &+ \frac{17}{1920} f_{n+\frac{1}{2}}^2 - \dots\end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Когда заданы начальные значения $x \left(t_0 - \frac{w}{2} \right)$ и $x \left(t_0 + \frac{w}{2} \right)$, определяющие рассматриваемый интеграл уравнения (18), то формула (29), совместно с (27) и (28), позволяет последовательно найти значения $x(t)$ для $t = t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) w$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

Примечание II. Вернемся к формуле Коуэлла

$$\Delta_k^2 = f_k + \frac{1}{12} f_k^2 - \frac{1}{240} f_k^4 + \frac{31}{60480} f_k^6 - \dots, \quad (19)$$

которая совместно с равенством

$$x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1} + \Delta_k^2$$

позволяет последовательно находить $x_1, x_2, \dots$

Введем новую переменную $\bar{x}$, полагая

$$x = \bar{x} - \frac{1}{12} f; \quad (30)$$

так что при $t = t_k$ будем иметь

$$\bar{x}_k = x_k - \frac{1}{12} f_k.$$

Обозначая через $\bar{\Delta}, \bar{\Delta}^2, \dots$ разности $\bar{x}$, получим

$$\bar{\Delta}_k^2 = \dot{\Delta}_k^2 - \frac{1}{12} f_k^2;$$

Таким образом для новой переменной имеем

$$\bar{\Delta}_k^2 = f_k - \frac{1}{240} f_k^4 + \frac{31}{60480} f_k^6 - \dots$$

и, как нетрудно видеть,

$$x_{k+1} = 2\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1} + \bar{\Delta}_k^2.$$

Предположим, что интервал w выбран так, что членами

$$-\frac{1}{240} f_k^4 + \frac{31}{60480} f_k^6 + \dots = -\frac{1}{240} w^6 \left(\frac{d^6 F}{dl^6} \right)_k + \dots \quad (31)$$

можно пренебречь. В этом случае для последовательного вычисления „специальной координаты“ $\bar{x}$ получаем весьма простую формулу

$$\bar{x}_{k+1} = 2\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1} + f_k. \quad (32)$$

В применении этой формулы заключается способ Нумерова, называемый также иногда *способом экстраполирования*.

Для вычисления $f_k = w^2 F(x_k, t_k)$ требуется знать x_k . Поэтому от каждой найденной „специальной координаты“ $\bar{x}_k$ надо перейти к обыкновенной координате x_k . Для этого надо решить уравнение (30), которое мы можем написать так:

$$\bar{x}_k = x_k - \frac{w^2}{12} F(x_k, t_k). \quad (33)$$

Таким образом рассматриваемая модификация метода Коуэлла может с пользой применяться при соблюдении двух условий: 1° можно заранее гарантировать нечувствительность членов (31) во время всего процесса интегрирования (в методе Коуэлла и в методе квадратур по ходу разностей всегда видно, какими членами можно и какими нельзя пренебречь); 2° решение уравнения (33) относительно x_k выполняется достаточно просто.

В способе Нумерова разности величин f_k не составляются (ибо, если бы они были составлены, то было бы проще вычислять по формуле (19), нежели переходить к „специальной координате“), поэтому работа лишается обычного контроля, и необходимая гарантия от ошибок может быть получена лишь при помощи тех или иных специально-контрольных вычислений.

Если идти дальше по пути уничтожения членов формулы (19) и взять, наконец, за новую переменную

$$z = x - \frac{1}{12} f + \frac{1}{240} f^2 - \frac{31}{60480} f^4 + \dots,$$

то мы будем иметь совершенно точные равенства

$$\Delta^2 z_k = f_k,$$

$$z_{k+1} = 2z_k - z_{k-1} + f_k,$$

но в этом случае максимального усовершенствования метода Коуэлла мы получим, как показывает равенство (26),

$$z_k = f_k^{-2},$$

т. е., иначе говоря, метод квадратур.

Примечание III. Все изложенные методы численного интегрирования уравнения (18) без всяких изменений применяются к системам вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, y, z, t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = G(x, y, z, t), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = H(x, y, z, t).$$

Интегрирование уравнений, связанных в систему, производится конечно, параллельно.

5. Вычисление интеграла, определенного начальной точкой и начальной скоростью. До сих пор мы рассматривали вычисление интеграла уравнения (18), определенного своими значениями для двух значений независимой переменной; например, задавали $x(t)$ для $t = t_0$ и $t = t_0 - w$, или для $t = t_0 + \frac{w}{2}$ и $t = t_0 - \frac{w}{2}$.

Пусть теперь искомый интеграл $x(t)$ будет задан начальными значениями

$$x(t_0) = x_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = x'_0. \quad (34)$$

Посмотрим, каким образом могут быть найдены значения $x_1, x_2, \dots$. При этом, ради краткости, мы ограничимся лишь методом квадратур.

Обратимся к формулам (26), (24) и (25), лежащим в основе метода квадратур и посмотрим, нельзя ли распорядиться произвольными постоянными $f_{-\frac{1}{2}}$ и f_0^{-2} так, чтобы формула (26) давала функцию, удовлетворяющую начальным условиям (34).

Ясно прежде всего, что f_0^{-2} следует оставить таким, каким его дает равенство (25) — первое из условий (34) будет удовлетворено. Далее, обозначая через $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots$ последовательные разности функции x , будем иметь, на основании (4),

$$\omega \left(\frac{dx}{dt} \right)_n = \Delta_n^1 - \frac{1}{6} \Delta_n^3 + \frac{1}{30} \Delta_n^5 - \frac{1}{140} \Delta_n^7 + \dots$$

Формула (26) дает

$$\Delta^m = f_n^{m-2} + \frac{1}{12} f_n^m - \frac{1}{240} f_n^{m+2} + \dots$$

следовательно

$$\omega \left(\frac{dx}{dt} \right)_n = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \frac{191}{60480} f_n^5 - \dots$$

Замечая, что

$$f_n^{-1} = \frac{1}{2} \left(f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} \right) = f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{2} f_n$$

и полагая $n=0$, окончательно получим

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = \omega x'_0 - \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f_0^1 - \frac{11}{720} f_0^3 + \frac{191}{60480} f_0^5 - \dots \quad (35)$$

Таким образом, достаточно вычислить начальные значения столбцов сумм по формулам (35) и (25) для того, чтобы формула (26) давала значения интеграла, удовлетворяющего начальным условиям (34).

Рассмотрим еще случай, когда интеграл задан начальными условиями

$$x \left(t_0 - \frac{\omega}{2} \right) = X_0, \quad x' \left(t_0 - \frac{\omega}{2} \right) = X'_0; \quad (36)$$

требуется вычислить $x \left[t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right]$ для $n=0, 1, 2, \dots$

Для решения этой задачи можно было бы применить только что употребленный прием к формуле (29). Ради разнообразия покажем другой путь, столь же быстро ведущий к цели.

Заменим уравнение (18) системой

$$\frac{dx'}{dt} = F(x, t), \quad \frac{dx}{dt} = x', \quad (37)$$

и будем интегрировать первое из этих уравнений при помощи формулы (17). Так как, в наших теперешних обозначениях,

$$\omega(Fx, t) = \frac{1}{\omega} f(t),$$

то получим

$$\omega x' \left[t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] = f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n+\frac{1}{2}}^3 + \dots, \quad (38)$$

причем первые суммы f^{-1} определяются условием (16):

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = \omega X_0' - \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \dots \quad (39)$$

Обратимся теперь ко второму из уравнений (37). Полагая

$$\omega x'(t) = h(t),$$

при помощи той же формулы (17) найдем

$$\left. \begin{aligned} x \left[t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] = \\ = h_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} h_{n+\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} h_{n+\frac{1}{2}}^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Чтобы вычислить стоящее справа выражение, нам надо знать величины

$$h_n = h(t_0 + n\omega) = \omega x'(t_0 + n\omega),$$

тогда как формула (38) дает нам значения $x'(t)$ для точек $t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega$, лежащих в серединах наших интервалов. Поэтому обратимся к хорошо известной формуле интегрирования в середину

$$\varphi \left(\tau_n + \frac{1}{2} \omega \right) = \varphi_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \varphi_{n+\frac{1}{2}}^2 + \frac{3}{128} \varphi_{n+\frac{1}{2}}^4 - \frac{5}{1024} \varphi_{n+\frac{1}{2}}^6 + \dots,$$

которая получается из формулы Бесселя (приведенной на стр. 269) при $z = \frac{1}{2}$.

Делая в этой формуле

$$\tau_n = t_0 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega = t_n - \frac{1}{2} \omega$$

$$\varphi(\tau_n) = \varphi_n = h \left[t_0 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

и учитывая, что, на основании (38),

$$\begin{aligned} \varphi_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{8} (\varphi_n + \varphi_{n+1}) = \frac{\omega}{2} \left\{ x' \left[t_0 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right] + x' \left[t_0 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] \right\} = \\ &= f_n^{-1} + \frac{1}{24} f_n^1 - \frac{17}{5760} f_n^3 + \dots \end{aligned}$$

и следовательно

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}}^2 = f_n^1 + \frac{1}{24} f_n^3 - \frac{17}{5760} f_n^5 + \dots,$$

окончательно получим

$$h_n = \varphi\left(\tau_n + \frac{1}{2} \omega\right) = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \frac{191}{60480} f_n^5 + \dots$$

Найденное значение h_n подставим в формулу (40). Это даст

$$x\left[t_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega\right] = f_{n+\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{1920} f_{n+\frac{1}{2}}^2 - \frac{367}{193536} f_{n+\frac{1}{2}}^4 - \dots \quad (41)$$

Делая $n = -1$, получим формулу

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-2} = X_0 + \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{1920} f_{-\frac{1}{2}}^2 + \dots, \quad (42)$$

определяющую начальный член столбца вторых сумм.

Совокупность формул (41), (39) и (42) вполне решает поставленную задачу. Формулу (42) можно заменить другой, дающей f_0^{-2} , что несколько удобнее.

Так как

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-2} = \frac{1}{2} \left(f_0^{-2} + f_{-1}^{-2} \right) = f_0^{-2} - \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^{-1}$$

$$f_{-\frac{1}{2}}^1 = f_0^1 - \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^0 \dots,$$

то равенство (42) может быть представлено следующим образом

$$f_0^{-2} = X_0 + \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_0^1 - \frac{1}{48} f_{-\frac{1}{2}}^2 - \frac{17}{1920} f_0^2 + \frac{17}{3840} f_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots$$

Складывая почленно это равенство с равенством (39), умноженным на $\frac{1}{2}$, получим

$$f_0^{-2} = X_0 + \frac{\omega}{2} X_0' + \frac{1}{24} \left(f_0 - f_{-\frac{1}{2}}^1 \right) - \frac{17}{5760} \left(3f_0^2 - 2f_{-\frac{1}{2}}^2 \right) + \dots,$$

или окончательно:

$$\begin{aligned} f_0^{-2} = & X_0 + \frac{\omega}{2} X_0' + \frac{1}{24} f_{-1} - \frac{17}{5760} \left(2f_{-1}^2 + f_0^2 \right) + \\ & + \frac{367}{967680} \left(3f_{-1}^4 + 2f_0^4 \right) - \dots \end{aligned} \quad (43)$$

6. О коэффициентах формул численного интегрирования.

Покажем теперь еще один путь для вычисления коэффициентов в формулах, служащих для численного интегрирования уравнений. После того, как *вид* такой формулы установлен, ее коэффициенты могут быть получены путем применения этой формулы к частному случаю, выбранному надлежащим образом.

Возьмем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = e^t,$$

и к решению этого уравнения $x = e^t$ применим например формулу (10).

Составим разности функции $\varphi = e^t$ приняв $t_0 = 0$. Получим

$$\varphi_{k+\frac{1}{2}} = e^{(k+1)w} - e^{kw} = e^{kw} (e^w - 1)$$

$$\varphi_k^2 = [e^{kw} - e^{(k-1)w}] (e^w - 1) = e^{(k-1)w} (e^w - 1)^2$$

$$\varphi_{k+\frac{1}{2}}^3 = e^{(k-1)w} (e^w - 1)^3$$

.....

или полагая

$$u = e^{\frac{w}{2}} - e^{-\frac{w}{2}},$$

$$\varphi_{k+\frac{1}{2}} = e^{(k+\frac{1}{2})w} u, \quad \varphi_k^2 = e^{kw} u^2, \quad \varphi_{k+\frac{1}{2}}^3 = e^{(k+\frac{1}{2})w} u^3, \dots$$

Следовательно для функции $f = we^t$ будем иметь

$$f_{k+\frac{1}{2}} = \frac{w}{2} \left(e^{(k+1)w} + e^{kw} \right) = we^{(k+\frac{1}{2})w} chw$$

$$f_{k+\frac{1}{2}}^2 = wu^2 e^{(k+\frac{1}{2})w} chw$$

$$f_{k+\frac{1}{2}}^4 = wu^4 e^{(k+\frac{1}{2})w} chw,$$

.....

где

$$chw = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{w}{2}} + e^{-\frac{w}{2}} \right) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} u^2}.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (10), окончательно получим такое тождество:

$$\frac{u}{w \cdot chw} = 1 - \frac{1}{12} u^2 + \frac{11}{720} u^4 - \frac{191}{60480} u^6 + \dots,$$

Так как

$$w = 2 \ln \left(\frac{1}{2} u + \sqrt{1 + \frac{1}{4} u^2} \right),$$

то это тождество можно написать следующим образом

$$\frac{u}{2 \sqrt{1 + \frac{1}{4} u^2} \cdot \ln \left(\frac{1}{2} u + \sqrt{1 + \frac{1}{4} u^2} \right)} = 1 - \frac{1}{12} u^2 + \frac{11}{720} u^4 - \dots$$

Итак, для получения коэффициентов формулы (10) достаточно стоящую слева функцию разложить в степенной ряд.

Аналогичным образом, коэффициенты формул (11), (19) и (29) найдутся при помощи тождеств.

$$\frac{u}{w} = 1 + \frac{1}{24} u^2 - \frac{17}{5760} u^4 + \frac{367}{967680} u^6 - \dots$$

$$\frac{u^2}{w^2} = 1 + \frac{1}{12} u^2 - \frac{1}{240} u^4 + \frac{31}{60480} u^6 - \dots$$

$$\frac{u^3}{w^2 \operatorname{ch} w} = 1 - \frac{1}{24} u^2 + \frac{17}{1920} u^4 - \frac{367}{193536} u^6 + \dots$$

7. Исторические замечания. Численное интегрирование дифференциальных уравнений впервые было применено Клеро в 1760—1762 гг. при вычислении возмущений кометы Галлея. Весма важную роль в деле усовершенствования способов численного интегрирования сыграло открытие малых планет. Работая над вычислением возмущений Паллады, Гаусс пришел к тем формулам „механических квадратур“, которые получаются из наших формул (15), (17), (26) и (41), когда правая часть уравнения, т. е. функция $F(x, t)$, зависит только от времени. Эти формулы были в 1835 г. опубликованы Энке (Berliner Astr. Jahrbuch für 1837), так как сам Гаусс, сообщивший их Энке в 1812 г., потерял надежду найти время для соответствующего мемуара. С тех пор формулы Гаусса получили самое широкое распространение при вычислении возмущений малых планет и комет по способу „механических (правильнее было бы сказать—численных) квадратур“.

Постепенно за этим способом установилась репутация метода, пригодного лишь для вычисления возмущений, т. е., иначе говоря, лишь для введения небольших поправок в уже известное приближенное решение дифференциальных уравнений. В астрономических вопросах такое исходное приближенное решение дается невозмущенным движением по законам Кеплера. Возможность построения, на тех же самых формулах Гаусса, метода с несравненно более широким кругом применения очень долго оставалась незамеченной.

Этим объясняется то, что в 1903 году, когда был открыт 8-й спутник Юпитера, движение которого даже отдаленно не напоминает движения по законам Кеплера, и когда, таким образом, пришлось встретиться с динамической задачей общего характера, Коуэлл не обратился к „механическим квадратурам“, а создал особый метод численного интегрирования уравнений, основанный на формуле (19)¹⁾. Таково происхождение метода Коуэлла, привлечшего к себе внимание в особенности после блестящего применения к предвычислению возвращения кометы Галлея в 1910 году²⁾. С 1921 г. в Астрономическом институте этот метод широко применяется (в той форме, которую ему придал Б. В. Нумеров)³⁾ к вычислению возмущенного движения малых планет.

Заканчивая работу о движении кометы Галлея, Коуэлл сделал весьма важный вывод из своего обширного опыта применения численного интегрирования⁴⁾; вывод, который долго не обращал на себя внимания⁵⁾, хотя теоретически он почти очевиден. Этот вывод заключается в том, что вместо формулы (19) несравненно выгоднее пользоваться формулой (26), так как тогда не происходит накопление погрешностей.

Таким образом мы снова возвращаемся к старому методу квадратур, но теперь, после попыток заменить его другими методами, он представляется нам гораздо могущественнее, чем это предполагали еще недавно⁶⁾.

1) P. H. Cowell and A. D. Crommelin, The Orbit of Jupiter's Eighth Satellite (Monthly Notices, Vol. 68, 577—581).

2) P. H. Cowell and A. D. Crommelin, Essay on the return of Halley's Comet (Publikation der Astronomischen Gesellschaft, XXI, 1910).

3) Б. Нумеров, Méthode nouvelle de la détermination des orbites et le calcul des éphémérides en tenant compte des perturbations (Труды Гл. Росс. Астроф. Обсерватории, т. II, 1923).

4) Appendix to the Volume of Greenwich Observations for the Year 1909, 1910, стр. 84.

5) На него указал J. Jakson (Monthly Notices, Vol. 84, 602).

6) Относительно применения метода квадратур к общей задаче трех тел см. E. Strömberg, Ueber mekanische Integration und deren Verwendung für numerische Rechnungen auf dem Gebiete des Drei-Körper-Problemes. (Medd. från Lunds Ast. Observ., № 13, 1900).

ТАБЛИЦЫ.

I.—Обращение часов, минут, секунд в доли суток и обратно.

Части суток	Часы, минуты и секунды	Части суток	Минуты и секунды	Части суток	Минуты и секунды
d	h m s	d	m s		m s
0.01	0 14 24	0.0001	0 8.64	0.0051	7 20.64
.02	0 28 48	.02	0 17.28	52	7 29.28
.03	0 43 12	.03	0 25.92	53	7 37.92
.04	0 57 36	.04	0 34.56	54	7 46.56
.05	1 12 0	.05	0 43.20	55	7 55.20
.06	1 26 24	.06	0 51.84	56	8 3.84
.07	1 40 48	.07	1 0.48	57	8 12.48
.08	1 55 12	.08	1 9.12	58	8 21.12
.09	2 9 36	.09	1 17.76	59	8 29.76
0.10	2 24 0	0.0010	1 26.40	0.0060	8 38.40
.11	2 38 24	.11	1 35.04	61	8 47.04
.12	2 52 48	.12	1 43.68	62	8 55.68
.13	3 7 12	.13	1 52.32	63	9 4.32
.14	3 21 36	.14	2 0.96	64	9 12.96
.15	3 36 0	.15	2 9.60	65	9 21.60
.16	3 50 24	.16	2 18.24	66	9 30.24
.17	4 4 48	.17	2 26.88	67	9 38.88
.18	4 19 12	.18	2 35.52	68	9 47.52
.19	4 33 36	.19	2 44.16	69	9 56.16
0.20	4 48 0	0.0020	2 52.80	0.0070	10 4.80
.21	5 2 24	.21	3 1.44	71	10 13.44
.22	5 16 48	.22	3 10.08	72	10 22.08
.23	5 31 12	.23	3 18.72	73	10 30.72
.24	5 45 36	.24	3 27.36	74	10 39.36
.25	6 0 0	.25	3 36.00	75	10 48.00
.26	6 14 24	.26	3 44.64	76	10 56.64
.27	6 28 48	.27	3 53.28	77	11 5.28
.28	6 43 12	.28	4 1.92	78	11 13.92
.29	6 57 36	.29	4 10.56	79	11 22.56
0.30	7 12 0	0.0030	4 19.20	0.0080	11 31.20
.31	7 26 24	.31	4 27.84	81	11 39.84
.32	7 40 48	.32	4 36.48	82	11 48.48
.33	7 55 12	.33	4 45.12	83	11 57.12
.34	8 9 36	.34	4 53.76	84	12 5.76
.35	8 24 0	.35	5 2.40	85	12 14.40
.36	8 38 24	.36	5 11.04	86	12 23.04
.37	8 52 48	.37	5 19.68	87	12 31.68
.38	9 7 12	.38	5 28.32	88	12 40.32
.39	9 21 36	.39	5 36.96	89	12 48.96
0.40	9 36 0	0.0040	5 45.60	0.0090	12 57.60
.41	9 50 24	.41	5 54.24	91	13 6.24
.42	10 4 48	.42	6 2.88	92	13 14.88
.43	10 19 12	.43	6 11.52	93	13 23.52
.44	10 33 36	.44	6 20.16	94	13 32.16
.45	10 48 0	.45	6 28.80	95	13 40.80
.46	11 2 24	.46	6 37.44	96	13 49.44
.47	11 16 48	.47	6 46.08	97	13 58.08
.48	11 31 12	.48	6 54.72	98	14 6.72
.49	11 45 36	.49	7 3.36	99	14 15.36
0.50	12 0 0	0.0050	7 12.00	0.0100	14 24.00

II. — Постоянные величины для вычисления паралакса

(см. стр. 137).

$$A = -p_0 \sin l'' \cdot \rho_0 \cos \varphi'$$

$$C = \frac{1}{15} p_0 \rho_0 \cos \varphi'$$

$$\Delta Z = -p_0 \sin l'' \cdot \rho_0 \sin \varphi'$$

$$S = p_0 \rho_0 \sin \varphi'.$$

Обсерватория	Долгота			Поправка звездного времени	10 ⁷ .A	10 ⁷ .ΔZ	lg tg φ	lg C	lg S
	h	m	s	m					
Alger (новая обсерватория)	— 0	12	8	0.0	— 342	— 254	9.871	9.672	0.720
Arcetri	— 0	45	1	— 0.1	— 309	— 294	9.978	9.628	0.782
Athènes	— 1	34	52	— 0.3	— 337	— 261	9.889	9.666	0.731
Arequipa	+ 4	46	12	+ 0.8	— 410	+ 120	9.465 _n	9.751	0.392 _n
Bamberg (Reineis-Stw.)	— 0	43	34	— 0.1	— 275	— 325	0.071	9.578	0.826 _n
Barcelona (Fabra Obs.)	— 0	8	30	0.0	— 320	— 281	9.943	9.644	0.763
Bergedorf (Hamburg)	— 0	40	58	— 0.1	— 254	— 341	0.128	9.544	0.848
Berlin — Babelsberg	— 0	52	25	— 0.1	— 261	— 337	0.111	9.555	0.841
Besançon	— 0	23	57	— 0.1	— 290	— 312	0.031	9.601	0.808
Bonn	— 0	28	23	— 0.1	— 271	— 329	0.085	9.571	0.831
Bordeaux	+ 0	2	7	0.0	— 303	— 299	9.995 _n	9.620	0.791
Cape of Good Hope	— 1	13	55	— 0.2	— 354	+ 237	9.825 _n	9.688	0.689 _n
Düsseldorf (Bilk)	— 0	27	3	— 0.1	— 268	— 331	0.092	9.566	0.834 _n
Frankfurt a. M.	— 0	34	36	— 0.1	— 274	— 326	0.075	9.576	0.827
Greenwich	0	0	0	0.0	— 266	— 332	0.096	9.564	0.836
Harvard Coll. Obs. (Cambridge)	+ 4	44	31	+ 0.6	— 316	— 286	9.957	9.638	0.771
Heidelberg (Königstuhl)	— 0	34	53	— 0.1	— 278	— 322	0.064	9.583	0.823
Jena (Univ. Stw.)	— 0	46	20	— 0.1	— 269	— 330	0.088	9.569	0.832
Johannesburg (Union Obs.)	— 1	52	18	— 0.3	— 383	+ 187	9.689 _n	9.722	0.587 _n
Казань (Унив. Обсерв.)	— 3	16	19	— 0.5	— 240	— 351	0.165	9.519	0.860
Казань (Энгельг. Обсерв.)	— 3	15	16	— 0.5	— 240	— 351	0.165	9.519	0.860
Киев	— 2	2	0	— 0.3	— 272	— 327	0.080	9.573	0.830
Königsberg	— 1	21	59	— 0.2	— 247	— 347	0.147	9.531	0.854
Kopenhagen (Univ. Obs.)	— 0	50	19	— 0.1	— 241	— 351	0.163	9.520	0.860
Kraków	— 1	19	50	— 0.2	— 275	— 326	0.074	9.577	0.827
La Plata	+ 3	51	44	+ 0.6	— 350	+ 243	9.841 _n	9.683	0.700 _n
Lick (Mt. Hamilton)	+ 8	6	35	+ 1.3	— 340	— 257	9.880	9.669	0.725
Lissabon (Tapada)	+ 0	36	45	+ 0.1	— 333	— 265	9.901	9.661	0.738
Marseille	— 0	21	35	— 0.1	— 311	— 291	9.971	9.631	0.778
Milan, Brera	— 0	36	46	— 0.1	— 300	— 303	0.004	9.615	0.795
Minneapolis	+ 6	12	57	+ 1.0	— 302	— 300	9.997	9.619	0.792
Москва (Пресня)	— 2	30	17	— 0.4	— 241	— 351	0.164	9.520	0.860
München	— 0	46	26	— 0.1	— 285	— 316	0.045	9.594	0.814
Nice	— 0	29	12	— 0.1	— 309	— 293	9.978	9.628	0.782
Northfield (Minn.)	+ 6	12	36	+ 1.0	— 305	— 297	9.989	9.623	0.788
Paris	— 0	9	21	0.0	— 281	— 320	0.055	9.588	0.819
Пулково	— 2	1	19	— 0.3	— 215	— 367	0.232	0.471	0.879
Roma (Royal Obs.)	— 0	49	56	— 0.1	— 318	— 283	9.950	9.641	0.767
San Fernando	+ 0	24	49	+ 0.1	— 344	— 252	9.866	9.674	0.716
Santiago	+ 4	42	45	+ 0.3	— 356	+ 235	9.819 _n	9.690	0.685 _n
Симеиз	— 2	15	58	— 0.4	— 305	— 297	9.988	9.623	0.787
Sonneberg	— 0	44	46	— 0.1	— 273	— 327	0.079	9.574	0.829
Stockholm	— 1	12	14	— 0.2	— 218	— 365	0.224	9.477	0.877

Обсерватории	Долгота	Поправка звездного времени	$10^{\circ}.A$	$10^{\circ}.AZ$	$\lg \operatorname{tg} \varphi$	$\lg C$	$\lg S$
Strasbourg	$-0^{\text{h}}31^{\text{m}}4^{\text{s}}$	$-0^{\text{m}}.1$	-283	-318	0.052	9.590	0.817
Ташкент	$-4\ 37\ 11$	-0.8	-321	-280	9.941	9.645	0.762
Tokyo	$-9\ 18\ 10$	-1.5	-347	-247	9.853	9.679	0.708
Torino	$-0\ 31\ 6$	-0.1	-302	-300	9.998	9.618	0.792
Uccle	$-0\ 17\ 26$	0.0	-270	-329	0.086	9.570	0.832
Washington (Naval Obs.)	$+5\ 8\ 16$	$+0.8$	-332	-267	9.904	9.660	0.740
Wien (Univ. Stw.)	$-1\ 5\ 21$	-0.2	-285	-317	0.046	9.593	0.815
Yerkes Obs., Williams Bay	$+5\ 54\ 13$	$+1.0$	-315	-287	9.960	9.636	0.773

III.—Наклонность эклиптики к экватору.

Год	ε	ε	$\sin \varepsilon$	$\cos \varepsilon$
1870.0	$+23^{\circ}27'22''.31$	$+23^{\circ}.45620$	0.398 0479	0.917 3646
1880.0	27 17 .63	.45490	.398 0270	.917 3737
1890.0	27 12 .94	.45360	.398 0062	.917 3827
1900.0	27 8 .26	.45229	.397 9854	.917 3918
1910.0	27 3 .58	.45099	.397 9645	.917 4008
1920.0	26 58 .89	.44969	* .397 9437	.917 4098
1930.0	26 54 .21	.44839	.397 9229	.917 4189
1940.0	26 49 .52	.44709	.397 9 20	.917 4279
1950.0	$+23\ 26\ 44.84$	.44579	0.397 8812	0.917 4370
1921.0	$+23^{\circ}26'58''.42$	$+23^{\circ}.44956$	0.397 9416	0.917 4107
1922.0	57 .95	.44943	9395	4116
1923.0	57 .48	.44930	9374	4125
1924.0	57 .02	.44917	9354	4135
1925.0	56 .55	.44904	9333	4144
1926.0	$+23\ 26\ 56.08$	$+23.44891$	0.397 9312	0.917 4153
1927.0	55 .61	.44878	9291	4162
1928.0	55 .14	.44865	9270	4171
1929.0	54 .67	.44852	9249	4180
1930.0	54 .21	.44839	9229	4189
1931.0	$+23\ 26\ 53.74$	$+23.44826$	0.397 9208	0.917 4198
1932.0	53 .27	.44813	9187	4207
1933.0	52 .80	.44800	9166	4216
1934.0	52 .33	.44787	9145	4225
1935.0	51 .86	.44774	9124	4234
1936.0	$+23\ 26\ 51.40$	$+23.44761$	0.397 9104	0.917 4248
1937.0	50 .93	.44748	9083	4252
1938.0	50 .46	.44735	9062	4261
1939.0	49 .99	.44722	9041	4270
1940.0	49 .52	.44709	9020	4279

IV.—Разность между экцентрической и средней аномалиями. ($E - M \geq 0$ для $M \leq 180^\circ$).

$M \backslash e$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	$e \backslash M$
0°		0° 00	0° 00	0° 00	0° 00	0° 00	0° 00	0° 00	0° 00	0° 00	0° 00	360°
1		0.05	0.11	0.18	0.25	0.33	0.43	0.54	0.67	0.82	1.00	359
2		0.11	0.22	0.35	0.50	0.67	0.86	1.08	1.33	1.63	2.00	358
3		0.16	0.33	0.53	0.75	1.00	1.28	1.61	2.00	2.45	2.99	357
4		0.21	0.44	0.70	1.00	1.33	1.71	2.15	2.66	3.26	3.97	356
5		0.26	0.55	0.88	1.25	1.66	2.14	2.68	3.31	4.06	4.95	355
6		0.32	0.66	1.05	1.49	1.99	2.56	3.21	3.97	4.86	5.91	354
7		0.37	0.77	1.23	1.74	2.32	2.98	3.73	4.61	5.64	6.86	353
8		0.42	0.88	1.40	1.99	2.65	3.40	4.26	5.26	6.42	7.80	352
9		0.47	0.99	1.58	2.23	2.97	3.81	4.77	5.89	7.19	8.72	351
10		0.52	1.10	1.75	2.47	3.29	4.22	5.29	6.52	7.94	9.62	350
11		0.57	1.21	1.92	2.72	3.62	4.63	5.79	7.13	8.69	10.50	349
12		0.63	1.32	2.09	2.96	3.93	5.04	6.30	7.74	9.41	11.36	348
13		0.68	1.43	2.26	3.20	4.25	5.44	6.79	8.34	10.13	12.20	347
14		0.73	1.53	2.43	3.43	4.56	5.83	7.28	8.93	10.82	13.01	346
15		0.78	1.64	2.60	3.67	4.87	6.22	7.76	9.51	11.51	13.80	345
16		0.83	1.75	2.76	3.90	5.17	6.61	8.23	10.07	12.17	14.57	344
17		0.88	1.85	2.93	4.13	5.48	6.99	8.69	10.63	12.82	15.31	343
18		0.93	1.95	3.09	4.36	5.77	7.36	9.15	11.17	13.45	16.03	342
19		0.98	2.06	3.25	4.58	6.07	7.73	9.60	11.70	14.07	16.73	341
20		1.03	2.16	3.42	4.81	6.36	8.10	10.04	12.22	14.66	17.40	340
21		1.08	2.26	3.57	5.03	6.65	8.45	10.47	12.72	15.24	18.05	339
22		1.13	2.36	3.73	5.25	6.93	8.80	10.89	13.22	15.80	18.67	338
23		1.17	2.46	3.89	5.46	7.21	9.15	11.30	13.69	16.35	19.27	337
24		1.22	2.56	4.04	5.67	7.48	9.48	11.70	14.16	16.87	19.84	336
25		1.27	2.66	4.19	5.88	7.75	9.81	12.09	14.61	17.38	20.40	335
26		1.31	2.76	4.34	6.09	8.02	10.14	12.48	15.05	17.87	20.93	334
27		1.36	2.85	4.49	6.29	8.27	10.45	12.85	15.48	18.34	21.43	333
28		1.41	2.95	4.64	6.49	8.53	10.76	13.21	15.89	18.79	21.92	332
29		1.45	3.04	4.78	6.68	8.77	11.06	13.56	16.29	19.23	22.38	331
30		1.50	3.13	4.92	6.88	9.02	11.36	13.91	16.67	19.65	22.83	330

M	e					e					M				
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50					
30°	1° 50	3° 13	4° 92	6° 88	9° 02	11° 36	13° 91	16° 67	19° 65	22° 83	330°				
31	1 54	3 22	5 06	7 06	9 25	11 64	14 23	17 04	20 05	23 25	329				
32	1 58	3 31	5 20	7 25	9 49	11 92	14 56	17 40	20 44	23 65	328				
33	1 62	3 40	5 33	7 43	9 72	12 20	14 87	17 75	20 81	24 04	327				
34	1 67	3 49	5 47	7 61	9 94	12 46	15 17	18 08	21 16	24 40	326				
35	1 71	3 57	5 59	7 78	10 16	12 72	15 47	18 40	21 50	24 75	325				
36	1 76	3 66	5 72	7 95	10 37	12 97	15 75	18 71	21 82	25 07	324				
37	1 80	3 74	5 84	8 12	10 57	13 21	16 02	19 00	22 13	25 38	323				
38	1 84	3 82	5 97	8 28	10 77	13 44	16 28	19 28	22 42	25 68	322				
39	1 87	3 90	6 09	8 44	10 97	13 67	16 53	19 55	22 70	25 95	321				
40	1 91	3 98	6 20	8 60	11 16	13 89	16 78	19 81	22 97	26 22	320				
41	1 95	4 06	6 32	8 75	11 34	14 10	17 01	20 06	23 22	26 46	319				
42	1 99	4 13	6 43	8 89	11 52	14 30	17 23	20 29	23 45	26 69	318				
43	2 03	4 20	6 54	9 03	11 69	14 50	17 44	20 51	23 68	26 90	317				
44	2 06	4 28	6 65	9 17	11 85	14 69	17 65	20 72	23 89	27 10	316				
45	2 10	4 35	6 75	9 31	12 02	14 87	17 84	20 92	24 08	27 29	315				
46	2 13	4 42	6 85	9 44	12 17	15 04	18 03	21 11	24 27	27 46	314				
47	2 17	4 48	6 94	9 56	12 32	15 21	18 20	21 29	24 44	27 62	313				
48	2 20	4 55	7 04	9 68	12 46	15 37	18 37	21 46	24 60	27 77	312				
49	2 23	4 61	7 14	9 80	12 60	15 52	18 53	21 62	24 75	27 90	311				
50	2 27	4 68	7 23	9 91	12 73	15 66	18 68	21 77	24 89	28 02	310				
51	2 30	4 74	7 31	10 02	12 86	15 80	18 82	21 91	25 02	28 13	309				
52	2 33	4 79	7 40	10 13	12 98	15 93	18 96	22 03	25 14	28 23	308				
53	2 36	4 85	7 48	10 23	12 10	16 05	19 08	22 15	25 24	28 32	307				
54	2 39	4 91	7 56	10 33	13 21	16 17	19 20	22 26	25 34	28 40	306				
55	2 41	4 96	7 63	10 42	13 31	16 28	19 31	22 36	25 42	28 46	305				
56	2 44	5 01	7 71	10 51	13 41	16 38	19 41	22 45	25 50	28 52	304				
57	2 47	5 06	7 77	10 59	13 50	16 48	19 50	22 54	25 57	28 56	303				
58	2 49	5 11	7 84	10 67	13 59	16 57	19 59	22 61	25 62	28 60	302				
59	2 52	5 16	7 91	10 75	13 67	16 65	19 67	22 68	25 67	28 62	301				
60	2 54	5 20	7 97	10 82	13 75	16 73	19 73	22 73	25 71	28 64	300				

$\frac{e}{M}$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	$\frac{e}{M}$
60°		2° 54	5° 20	7° 97	10° 82	13° 75	16° 73	19° 73	22° 73	25° 71	28° 64	300°
61		2° 57	5° 24	8° 02	10° 89	13° 82	16° 80	19° 80	22° 78	25° 74	28° 65	299
62		2° 59	5° 28	8° 08	10° 95	13° 89	16° 87	19° 85	22° 83	25° 76	28° 65	298
63		2° 61	5° 32	8° 13	11° 02	13° 95	16° 92	19° 90	22° 86	25° 78	28° 64	297
64		2° 63	5° 36	8° 18	11° 07	14° 01	16° 98	19° 95	22° 88	25° 78	28° 62	296
65		2° 65	5° 40	8° 23	11° 12	14° 06	17° 02	19° 98	22° 90	25° 78	28° 59	295
66		2° 67	5° 43	8° 27	11° 17	14° 11	17° 06	20° 01	22° 91	25° 77	28° 56	294
67		2° 69	5° 46	8° 31	11° 22	14° 15	17° 10	20° 03	22° 92	25° 75	28° 51	293
68		2° 70	5° 49	8° 35	11° 26	14° 19	17° 13	20° 04	22° 91	25° 73	28° 47	292
69		2° 72	5° 52	8° 39	11° 29	14° 22	17° 15	20° 05	22° 90	25° 70	28° 41	291
70		2° 74	5° 55	8° 42	11° 33	14° 25	17° 17	20° 05	22° 89	25° 66	28° 34	290
71		2° 75	5° 57	8° 45	11° 36	14° 28	17° 18	20° 05	22° 87	25° 61	28° 27	289
72		2° 76	5° 60	8° 48	11° 38	14° 29	17° 19	20° 04	22° 84	25° 56	28° 20	288
73		2° 78	5° 62	8° 50	11° 40	14° 31	17° 19	20° 03	22° 80	25° 50	28° 11	287
74		2° 79	5° 64	8° 52	11° 42	14° 32	17° 19	20° 00	22° 76	25° 43	28° 02	286
75		2° 80	5° 65	8° 54	11° 44	14° 32	17° 18	19° 98	22° 71	25° 36	27° 92	285
76		2° 81	5° 67	8° 56	11° 45	14° 32	17° 16	19° 95	22° 66	25° 28	27° 82	284
77		2° 82	5° 68	8° 57	11° 45	14° 32	17° 14	19° 91	22° 60	25° 20	27° 71	283
78		2° 83	5° 69	8° 58	11° 46	14° 31	17° 12	19° 86	22° 53	25° 11	27° 59	282
79		2° 84	5° 70	8° 59	11° 46	14° 30	17° 09	19° 82	22° 46	25° 02	27° 47	281
80		2° 84	5° 71	8° 59	11° 46	14° 28	17° 06	19° 76	22° 39	24° 91	27° 34	280
81		2° 85	5° 72	8° 59	11° 45	14° 26	17° 02	19° 70	22° 30	24° 81	27° 21	279
82		2° 85	5° 72	8° 59	11° 44	14° 4	16° 98	19° 64	22° 22	24° 70	27° 07	278
83		2° 86	5° 73	8° 59	11° 42	14° 21	16° 93	19° 57	22° 12	24° 58	26° 93	277
84		2° 86	5° 73	8° 59	11° 41	14° 18	16° 88	19° 50	22° 03	24° 46	26° 78	276
85		2° 86	5° 73	8° 58	11° 39	14° 14	16° 82	19° 42	21° 93	24° 33	26° 63	275
86		2° 86	5° 73	8° 57	11° 36	14° 10	16° 76	19° 34	21° 82	24° 20	26° 47	274
87		2° 86	5° 72	8° 55	11° 34	14° 06	16° 70	19° 5	21° 71	24° 06	26° 31	273
88		2° 86	5° 72	8° 54	11° 31	14° 01	16° 63	19° 16	21° 59	23° 92	26° 14	272
89		2° 86	5° 71	8° 52	11° 27	13° 96	16° 56	19° 06	21° 47	23° 77	25° 97	271
90		2° 86	5° 70	8° 50	11° 24	13° 90	16° 48	18° 96	21° 35	23° 62	25° 79	270

$\begin{matrix} e \\ M \end{matrix}$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	$\begin{matrix} e \\ M \end{matrix}$
90°		2° 86	5° 70	8° 50	11° 24	13° 90	16° 48	18° 96	21° 35	23° 62	25° 79	270°
91		2 86	5 69	8 48	11 20	13 85	16 40	18 86	21 22	23 47	25 61	269
92		2 85	5 68	8 45	11 16	13 78	16 32	18 75	21 08	23 31	25 43	268
93		2 85	5 66	8 42	11 11	13 72	16 23	18 64	20 95	23 14	25 24	267
94		2 84	5 65	8 39	11 06	13 65	16 14	18 52	20 80	22 98	25 05	266
95		2 84	5 63	8 36	11 01	13 58	16 04	18 40	20 66	22 81	24 85	265
96		2 83	5 61	8 33	10 96	13 50	15 94	18 28	20 51	22 63	24 65	264
97		2 82	5 59	8 29	10 90	13 42	15 84	18 15	20 35	22 45	24 44	263
98		2 81	5 57	8 25	10 84	13 34	15 73	18 02	20 20	22 27	24 23	262
99		2 80	5 55	8 21	10 78	13 26	15 63	17 89	20 04	22 08	24 02	261
100		2 79	5 52	8 17	10 72	13 17	15 51	17 75	19 87	21 89	23 80	260
101		2 78	5 49	8 12	10 65	13 08	15 40	17 61	19 70	21 70	23 59	259
102		2 77	5 46	8 07	10 58	12 98	15 28	17 46	19 53	21 50	23 36	258
103		2 76	5 43	8 02	10 51	12 89	15 15	17 31	19 36	21 30	23 14	257
104		2 74	5 40	7 97	10 43	12 79	15 03	17 16	19 18	21 10	22 91	256
105		2 73	5 37	7 92	10 36	12 68	14 90	17 01	19 00	20 89	22 67	255
106		2 71	5 34	7 86	10 28	12 58	14 77	16 85	18 82	20 68	22 44	254
107		2 70	5 30	7 80	10 19	12 47	14 63	16 69	18 63	20 46	22 20	253
108		2 64	5 26	7 74	10 11	12 36	14 50	16 52	18 44	20 25	21 96	252
109		2 66	5 23	7 68	10 02	12 25	14 36	16 36	18 24	20 03	21 71	251
110		2 64	5 19	7 62	9 93	12 13	14 21	16 19	18 05	19 81	21 47	250
111		2 62	5 14	7 55	9 84	12 01	14 07	16 01	17 85	19 58	21 22	249
112		2 60	5 10	7 48	9 74	11 89	13 92	15 84	17 65	19 35	20 96	248
113		2 58	5 06	7 41	9 65	11 77	13 77	15 66	17 44	19 12	20 71	247
114		2 56	5 01	7 34	9 55	11 64	13 61	15 48	17 23	18 89	20 45	246
115		2 54	4 96	7 27	9 45	11 51	13 46	15 30	17 02	18 65	20 19	245
116		2 52	4 92	7 19	9 35	11 38	13 30	15 11	16 81	18 42	19 93	244
117		2 49	4 87	7 12	9 24	11 25	13 14	14 92	16 60	18 18	19 66	243
118		2 47	4 81	7 04	9 13	11 11	12 98	14 73	16 38	17 93	19 39	242
119		2 44	4 76	6 96	9 03	10 98	12 81	14 54	16 16	17 69	19 12	241
120		2 42	4 71	6 88	8 92	10 84	12 64	14 34	15 94	17 44	18 85	240

M	e										e									
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
120°	2° 42	4° 71	6° 88	8° 92	10° 84	12° 64	14° 34	15° 94	17° 44	18° 55	240°									
121	2 39	4 66	6 79	8 80	10 70	12 47	14 14	15 71	17 19	18 58	239									
122	2 36	4 60	6 71	8 69	10 55	12 30	13 94	15 49	16 94	18 30	238									
123	2 34	4 54	6 62	8 57	10 41	12 13	13 74	15 26	16 68	18 02	237									
124	2 31	4 49	6 53	8 45	10 26	11 95	13 54	15 03	16 43	17 74	236									
125	2 28	4 43	6 44	8 33	10 11	11 77	13 33	14 79	16 17	17 46	235									
126	2 25	4 37	6 35	8 21	9 96	11 59	13 12	14 56	15 91	17 17	234									
127	2 22	4 30	6 26	8 09	9 80	11 41	13 91	14 32	15 64	16 88	233									
128	2 19	4 24	6 16	7 97	9 65	11 28	12 70	14 08	15 38	16 60	232									
129	2 16	4 18	6 07	7 84	9 49	11 04	12 49	13 84	15 11	16 31	231									
130	2 12	4 11	5 97	7 71	9 33	10 85	12 27	13 60	14 85	16 01	230									
131	2 09	4 05	5 88	7 58	9 17	10 66	12 05	13 35	14 58	15 72	229									
132	2 06	3 98	5 78	7 45	9 01	10 47	11 83	13 11	14 30	15 42	228									
133	2 02	3 91	5 68	7 32	8 85	10 28	11 61	12 86	14 03	15 13	227									
134	1 99	3 84	5 57	7 18	8 68	10 08	11 39	12 61	13 76	14 83	226									
135	1 96	3 77	5 47	7 05	8 52	9 89	11 17	12 36	13 48	14 53	225									
136	1 92	3 70	5 37	6 91	8 35	9 69	10 94	12 11	13 20	14 23	224									
137	1 88	3 63	5 26	6 77	8 18	9 49	10 71	11 85	12 92	13 92	223									
138	1 85	3 56	5 15	6 63	8 61	9 29	10 48	11 60	12 64	13 62	222									
139	1 81	3 49	5 05	6 49	7 84	9 09	10 25	11 34	12 36	13 31	221									
140	1 77	3 42	4 94	6 35	7 66	8 88	10 02	11 08	12 07	13 00	220									
141	1 73	3 34	4 83	6 21	7 49	8 68	9 79	10 82	11 79	12 69	219									
142	1 70	3 27	4 72	6 06	7 31	8 47	9 55	10 56	11 50	12 38	218									
143	1 66	3 19	4 60	5 92	7 13	8 26	9 32	10 30	11 22	12 07	217									
144	1 62	3 11	4 49	5 77	6 95	8 05	9 08	10 03	11 93	11 76	216									
145	1 58	3 03	4 38	5 62	6 77	7 85	8 84	9 77	10 64	11 45	215									
146	1 54	2 96	4 26	5 47	6 59	7 63	8 60	9 50	10 34	11 13	214									
147	1 50	2 88	4 15	5 32	6 41	7 42	8 36	9 24	10 05	10 82	213									
148	1 46	2 80	4 03	5 17	6 23	7 21	8 12	8 97	9 76	10 50	212									
149	1 41	2 72	3 91	5 02	6 04	6 99	7 88	8 70	9 46	10 18	211									
150	1 37	2 64	3 80	4 87	5 86	6 78	7 63	8 43	9 17	9 86	210									

M	e										e									
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
150°	1° 37	2° 04	3° 00	4° 07	5° 06	6° 07	7° 03	8° 03	9° 07	9° 86	150°	1° 37	2° 04	3° 00	4° 07	5° 06	6° 07	7° 03	8° 03	9° 07
151	1° 33	2° 05	3° 06	4° 11	5° 07	6° 08	7° 04	8° 04	9° 08	9° 54	151	1° 33	2° 05	3° 06	4° 11	5° 07	6° 08	7° 04	8° 04	9° 08
152	1° 29	2° 07	3° 08	4° 13	5° 09	6° 10	7° 06	8° 06	9° 10	9° 22	152	1° 29	2° 07	3° 08	4° 13	5° 09	6° 10	7° 06	8° 06	9° 10
153	1° 24	2° 09	3° 10	4° 15	5° 11	6° 12	7° 08	8° 08	9° 12	8° 90	153	1° 24	2° 09	3° 10	4° 15	5° 11	6° 12	7° 08	8° 08	9° 12
154	1° 20	2° 10	3° 11	4° 16	5° 12	6° 13	7° 09	8° 09	9° 13	8° 58	154	1° 20	2° 10	3° 11	4° 16	5° 12	6° 13	7° 09	8° 09	9° 13
155	1° 16	2° 12	3° 13	4° 18	5° 14	6° 15	7° 11	8° 11	9° 15	8° 25	155	1° 16	2° 12	3° 13	4° 18	5° 14	6° 15	7° 11	8° 11	9° 15
156	1° 11	2° 13	3° 14	4° 19	5° 15	6° 16	7° 12	8° 12	9° 16	7° 93	156	1° 11	2° 13	3° 14	4° 19	5° 15	6° 16	7° 12	8° 12	9° 16
157	1° 07	2° 15	3° 16	4° 21	5° 17	6° 18	7° 14	8° 14	9° 18	7° 61	157	1° 07	2° 15	3° 16	4° 21	5° 17	6° 18	7° 14	8° 14	9° 18
158	1° 03	2° 16	3° 17	4° 22	5° 18	6° 19	7° 15	8° 15	9° 19	7° 28	158	1° 03	2° 16	3° 17	4° 22	5° 18	6° 19	7° 15	8° 15	9° 19
159	0° 98	2° 18	3° 19	4° 24	5° 20	6° 21	7° 17	8° 17	9° 21	6° 95	159	0° 98	2° 18	3° 19	4° 24	5° 20	6° 21	7° 17	8° 17	9° 21
160	0° 94	2° 19	3° 20	4° 25	5° 21	6° 22	7° 18	8° 18	9° 22	6° 63	160	0° 94	2° 19	3° 20	4° 25	5° 21	6° 22	7° 18	8° 18	9° 22
161	0° 89	2° 20	3° 21	4° 26	5° 22	6° 23	7° 19	8° 19	9° 23	6° 30	161	0° 89	2° 20	3° 21	4° 26	5° 22	6° 23	7° 19	8° 19	9° 23
162	0° 84	2° 21	3° 22	4° 27	5° 23	6° 24	7° 20	8° 20	9° 24	5° 97	162	0° 84	2° 21	3° 22	4° 27	5° 23	6° 24	7° 20	8° 20	9° 24
163	0° 80	2° 22	3° 23	4° 28	5° 24	6° 25	7° 21	8° 21	9° 25	5° 64	163	0° 80	2° 22	3° 23	4° 28	5° 24	6° 25	7° 21	8° 21	9° 25
164	0° 75	2° 23	3° 24	4° 29	5° 25	6° 26	7° 22	8° 22	9° 26	5° 31	164	0° 75	2° 23	3° 24	4° 29	5° 25	6° 26	7° 22	8° 22	9° 26
165	0° 71	2° 24	3° 25	4° 30	5° 26	6° 27	7° 23	8° 23	9° 27	4° 98	165	0° 71	2° 24	3° 25	4° 30	5° 26	6° 27	7° 23	8° 23	9° 27
166	0° 66	2° 25	3° 26	4° 31	5° 27	6° 28	7° 24	8° 24	9° 28	4° 65	166	0° 66	2° 25	3° 26	4° 31	5° 27	6° 28	7° 24	8° 24	9° 28
167	0° 61	2° 26	3° 27	4° 32	5° 28	6° 29	7° 25	8° 25	9° 29	4° 32	167	0° 61	2° 26	3° 27	4° 32	5° 28	6° 29	7° 25	8° 25	9° 29
168	0° 57	2° 27	3° 28	4° 33	5° 29	6° 30	7° 26	8° 26	9° 30	3° 99	168	0° 57	2° 27	3° 28	4° 33	5° 29	6° 30	7° 26	8° 26	9° 30
169	0° 52	2° 28	3° 29	4° 34	5° 30	6° 31	7° 27	8° 27	9° 31	3° 66	169	0° 52	2° 28	3° 29	4° 34	5° 30	6° 31	7° 27	8° 27	9° 31
170	0° 47	2° 29	3° 30	4° 35	5° 31	6° 32	7° 28	8° 28	9° 32	3° 33	170	0° 47	2° 29	3° 30	4° 35	5° 31	6° 32	7° 28	8° 28	9° 32
171	0° 43	2° 30	3° 31	4° 36	5° 32	6° 33	7° 29	8° 29	9° 33	3° 00	171	0° 43	2° 30	3° 31	4° 36	5° 32	6° 33	7° 29	8° 29	9° 33
172	0° 38	2° 31	3° 32	4° 37	5° 33	6° 34	7° 30	8° 30	9° 34	2° 66	172	0° 38	2° 31	3° 32	4° 37	5° 33	6° 34	7° 30	8° 30	9° 34
173	0° 33	2° 32	3° 33	4° 38	5° 34	6° 35	7° 31	8° 31	9° 35	2° 33	173	0° 33	2° 32	3° 33	4° 38	5° 34	6° 35	7° 31	8° 31	9° 35
174	0° 29	2° 33	3° 34	4° 39	5° 35	6° 36	7° 32	8° 32	9° 36	2° 00	174	0° 29	2° 33	3° 34	4° 39	5° 35	6° 36	7° 32	8° 32	9° 36
175	0° 24	2° 34	3° 35	4° 40	5° 36	6° 37	7° 33	8° 33	9° 37	1° 67	175	0° 24	2° 34	3° 35	4° 40	5° 36	6° 37	7° 33	8° 33	9° 37
176	0° 19	2° 35	3° 36	4° 41	5° 37	6° 38	7° 34	8° 34	9° 38	1° 33	176	0° 19	2° 35	3° 36	4° 41	5° 37	6° 38	7° 34	8° 34	9° 38
177	0° 14	2° 36	3° 37	4° 42	5° 38	6° 39	7° 35	8° 35	9° 39	1° 00	177	0° 14	2° 36	3° 37	4° 42	5° 38	6° 39	7° 35	8° 35	9° 39
178	0° 10	2° 37	3° 38	4° 43	5° 39	6° 40	7° 36	8° 36	9° 40	0° 67	178	0° 10	2° 37	3° 38	4° 43	5° 39	6° 40	7° 36	8° 36	9° 40
179	0° 05	2° 38	3° 39	4° 44	5° 40	6° 41	7° 37	8° 37	9° 41	0° 33	179	0° 05	2° 38	3° 39	4° 44	5° 40	6° 41	7° 37	8° 37	9° 41
180	0° 00	2° 39	3° 40	4° 45	5° 41	6° 42	7° 38	8° 38	9° 42	0° 00	180	0° 00	2° 39	3° 40	4° 45	5° 41	6° 42	7° 38	8° 38	9° 42

Va. — Параболическое движение: значения σ и σ^2 .

P	σ	σ^2	P	σ	σ^2
0	0.000 00	0.000 00	50	0.552 09	0.304 81
1	.012 16	.000 15	51	.561 38	.315 15
2	.024 32	.000 59	52	.570 59	.325 57
3	.036 47	.001 33	53	.579 73	.336 09
4	.048 62	.002 36	54	.588 80	.346 68
5	.060 74	.003 69	55	.597 80	.357 36
6	.072 85	.005 31	56	.606 72	.368 11
7	.084 94	.007 22	57	.615 58	.378 94
8	.097 01	.009 41	58	.624 36	.389 83
9	.109 04	.011 89	59	.633 08	.400 79
10	0.121 05	0.014 65	60	0.641 73	0.411 82
11	.133 02	.017 69	61	.650 31	.422 91
12	.144 95	.021 01	62	.658 83	.434 05
13	.156 84	.024 60	63	.667 28	.445 26
14	.168 69	.028 46	64	.675 66	.456 52
15	.180 50	.032 58	65	.683 98	.467 83
16	.192 25	.036 96	66	.692 24	.479 19
17	.203 96	.041 60	67	.700 43	.490 60
18	.215 61	.046 49	68	.708 56	.502 05
19	.227 20	.051 62	69	.716 62	.513 55
20	0.238 74	0.057 00	70	0.724 63	0.525 09
21	.250 22	.062 61	71	.732 57	.536 67
22	.261 63	.068 45	72	.740 46	.548 28
23	.272 98	.074 52	73	.748 29	.559 93
24	.284 27	.080 81	74	.756 06	.571 62
25	.295 49	.087 32	75	.763 77	.583 34
26	.306 65	.094 03	76	.771 42	.595 09
27	.317 73	.100 95	77	.779 02	.606 87
28	.328 74	.108 07	78	.786 56	.618 68
29	.339 68	.115 38	79	.794 05	.630 51
30	0.350 55	0.122 89	80	0.801 48	0.642 37
31	.361 35	.130 57	81	.808 86	.654 26
32	.372 07	.138 44	82	.816 19	.666 16
33	.382 72	.146 47	83	.823 46	.678 09
34	.393 29	.154 68	84	.830 68	.690 04
35	.403 79	.163 04	85	.837 86	.702 00
36	.414 21	.171 57	86	.844 98	.713 99
37	.424 55	.180 24	87	.852 05	.725 99
38	.434 82	.189 07	88	.859 07	.738 01
39	.445 01	.198 03	89	.866 05	.750 04
40	0.455 12	0.207 14	90	0.872 97	0.762 08
41	.465 16	.216 38	91	.879 85	.774 14
42	.475 12	.225 74	92	.886 69	.786 21
43	.485 01	.235 23	93	.893 47	.798 30
44	.494 82	.244 85	94	.900 22	.810 39
45	.504 55	.254 57	95	.906 91	.822 49
46	.514 21	.264 41	96	.913 56	.834 60
47	.523 79	.274 36	97	.920 17	.846 72
48	.533 30	.284 41	98	.926 74	.858 84
49	.542 73	.294 56	99	.933 26	.870 97
50	0.552 09	0.304 81	100	0.939 74	0.883 11

P			σ			σ^2			P			σ			σ^2		
100	0.939 74		644	0.883 11	1214	150	1.219 71		488	1.487 69	1192						
101	.946 18		640	.895 25	1215	151	.224 59		485	.499 61	1192						
102	.952 58		635	.907 40	1215	152	.229 44		483	.511 53	1190						
103	.958 93		633	.919 55	1216	153	.234 27		481	.523 43	1189						
104	.965 25		628	.931 71	1216	154	.239 08		479	.535 32	1189						
105	.971 53		624	.943 87	1215	155	.243 87		476	.547 21	1187						
106	.977 77		619	.956 02	1217	156	.248 63		474	.559 08	1187						
107	.983 96		617	.968 19	1216	157	.253 37		473	.570 95	1185						
108	.990 13		612	.980 35	1216	158	.258 10		469	.582 80	1185						
109	0.996 25		609	0.992 51	1217	159	.262 79		468	.594 65	1183						
110	1.002 34		604	1.004 68	1216	160	1.267 47		466	1.606 48	1183						
111	.008 38		602	.016 84	1216	161	.272 13		463	.618 31	1181						
112	.014 40		597	.029 00	1216	162	.276 76		462	.630 12	1181						
113	.020 37		595	.041 16	1216	163	.281 38		459	.641 93	1179						
114	.026 32		590	.053 32	1216	164	.285 97		457	.653 72	1178						
115	.032 22		587	.065 48	1216	165	.290 54		456	.665 50	1178						
116	.038 09		584	.077 64	1215	166	.295 10		453	.677 28	1176						
117	.043 93		581	.089 79	1215	167	.299 63		451	.689 04	1175						
118	.049 74		577	.101 94	1215	168	.304 14		450	.700 79	1174						
119	.055 51		573	.114 09	1215	169	.308 64		447	.712 53	1174						
120	1.061 24		571	1.126 24	1214	170	1.313 11		446	1.724 27	1172						
121	.066 95		567	.138 38	1213	171	.317 57		444	.735 99	1171						
122	.072 62		564	.150 51	1213	172	.322 01		441	.747 70	1170						
123	.078 26		561	.162 64	1213	173	.326 42		440	.759 40	1168						
124	.083 87		558	.174 77	1212	174	.330 82		438	.771 08	1168						
125	.089 45		554	.186 89	1212	175	.335 20		436	.782 76	1167						
126	.094 99		552	.199 01	1211	176	.339 56		435	.794 43	1166						
127	.100 51		549	.211 12	1211	177	.343 91		432	.806 09	1164						
128	.106 00		545	.223 23	1210	178	.348 23		431	.817 73	1164						
129	.111 45		543	.235 33	1209	179	.352 54		429	.829 37	1162						
130	1.116 88		540	1.247 42	1208	180	1.356 83		427	1.840 99	1161						
131	.122 28		537	.259 50	1208	181	.361 10		426	.852 60	1161						
132	.127 65		534	.271 58	1208	182	.365 36		424	.864 21	1159						
133	.132 99		531	.283 66	1208	183	.369 60		422	.875 80	1158						
134	.138 30		528	.295 72	1208	184	.373 22		420	.887 38	1157						
135	.143 58		526	.307 78	1205	185	.378 82		419	.898 95	1156						
136	.148 84		523	.319 83	1205	186	.382 01		417	.910 51	1154						
137	.154 07		520	.331 88	1203	187	.386 38		416	.922 05	1154						
138	.159 27		518	.343 91	1203	188	.390 54		413	.933 59	1153						
139	.164 45		515	.355 94	1202	189	.394 67		413	.945 12	1151						
140	1.169 60		512	1.367 96	1201	190	1.398 80		410	1.956 63	1151						
141	.174 72		510	.379 97	1201	191	.402 90		409	.968 14	1149						
142	.179 82		507	.391 98	1199	192	.406 99		408	.979 63	1148						
143	.184 89		505	.403 97	1199	193	.411 07		406	1.991 11	1147						
144	.189 94		502	.415 96	1198	194	.415 13		404	2.002 58	1146						
145	.194 96		500	.427 94	1196	195	.419 17		403	.014 04	1145						
146	.199 96		497	.439 90	1196	196	.423 20		401	.025 49	1144						
147	.204 93		495	.451 86	1196	197	.427 21		400	.036 93	1143						
148	.209 88		493	.463 82	1194	198	.431 21		398	.048 36	1141						
149	.214 81		490	.475 76	1193	199	.435 19		397	.059 77	1141						
150	1.219 71			1.487 69		200	1.439 16			2.071 18							

P	σ	P	σ	P	σ	P	σ		
200	1.439 16	395	250	1.621 04	334	300.89	1.78	538.19	2.33
201	.443 11	394	251	.624 38	334	304.33	1.79	543.50	.34
202	.447 05	393	252	.627 72	333	307.80	1.80	548.84	2.35
203	.450 98	391	253	.631 05	332	311.30	.81	554.22	.36
204	.454 89	389	254	.634 37	331	314.83	.82	559.64	.37
205	.458 78	388	255	.637 68	329	318.39	.83	565.10	.38
206	.462 66	387	256	.640 97	329	321.98	.84	570.60	.39
207	.466 53	385	257	.644 26	328	325.60	1.85	576.14	2.40
208	.470 38	384	258	.647 54	327	329.25	.86	581.72	.41
209	.474 22	383	259	.650 81	326	332.94	.87	587.33	.42
						336.65	.88	592.99	.43
210	1.478 05	381	260	1.654 07	326	340.39	.89	598.69	.44
211	.481 86	380	261	.657 33	324	344.17	1.90	604.42	2.45
212	.485 66	379	262	.660 57	323	347.97	.91	610.20	.46
213	.589 45	377	263	.663 80	322	351.81	.92	616.02	.47
214	.493 22	376	264	.667 02	322	355.68	.93	621.88	.48
215	.496 98	375	265	.670 24	320	359.58	.94	627.78	.49
216	.500 73	373	266	.673 44	320	363.57	1.95	633.72	2.50
217	.504 46	372	267	.676 64	319	367.47	.96	639.70	.51
218	.508 18	371	268	.679 83	317	371.47	.97	645.72	.52
219	.511 89	370	269	.683 00	317	375.50	.98	651.78	.53
						379.56	.99	657.89	.54
220	1.515 59	368	270	1.686 17	316	383.65	2.00	664.03	2.55
221	.519 27	367	271	.689 33	316	387.78	.01	670.22	.56
222	.522 94	366	272	.692 49	314	391.94	.02	676.45	.57
223	.526 60	364	273	.695 63	313	396.14	.03	682.73	.58
224	.530 24	364	274	.698 76	313	400.36	.04	689.04	.59
225	.533 88	362	275	.701 89	312	404.62	2.05	695.40	2.60
226	.537 50	361	276	.705 01	311	408.92	.06	701.80	.61
227	.541 11	360	277	.708 12	310	413.24	.07	708.25	.62
228	.544 71	358	278	.711 22	309	417.61	.08	714.73	.63
229	.548 29	358	279	.714 31	308	422.00	.09	721.26	.64
						426.43	2.10	727.84	2.65
230	1.551 87	356	280	1.717 39	308	430.90	.11	734.45	.66
231	.555 43	355	281	.720 47	307	435.40	.12	741.12	.67
232	.558 98	354	282	.723 54	306	439.93	.13	747.82	.68
233	.562 52	353	283	.726 60	305	444.50	.14	754.57	.69
234	.566 05	352	284	.729 65	304	449.17	2.15	761.36	2.70
235	.569 57	351	285	.732 69	304	453.75	.16	768.20	.71
236	.573 08	349	286	.735 73	302	458.42	.17	775.08	.72
237	.576 57	349	287	.738 75	302	463.13	.18	782.01	.73
238	.580 06	347	288	.741 77	301	467.88	.19	788.98	.74
239	.583 53	346	289	.744 78	301	472.66	2.20	796.00	2.75
						477.48	.21	803.06	.76
240	1.586 99	345	290	1.747 79	299	482.34	.22	810.17	.77
241	.590 44	344	291	.750 78	299	487.23	.23	817.32	.78
242	.593 88	343	292	.753 77	298	492.16	.24	824.52	.79
243	.597 31	342	293	.756 75	298	497.12	2.25	831.76	2.80
244	.600 73	341	294	.759 73	296	502.13	.26	839.05	.81
245	.604 14	340	295	.762 69	296	507.17	.27	846.39	.82
246	.607 54	339	296	.765 65	295	512.24	.28	853.77	.83
247	.610 93	338	297	.768 60	294	517.36	.29	861.20	.84
248	.614 31	337	298	.771 54	294	522.57	2.30	868.68	2.85
249	.617 68	336	299	.774 48	293	527.70	.31		
						532.93	.32		
250	1.621 04		300	1.777 41		538.19	.33		

Vb. — Параболическое движение: значения истинной аномалии

P			v			$\lg P$			v			$\lg P$			v		
0	0°	0000	1.3937	1.45	36°	.6041	7403	1.90	77°	.1287	9513						
1	1	.3937	1.3929	.46	37	.3444	7509	.91	78	.0800	9475						
2	2	.7866	1.3913	.47	38	.0953	7614	.92	79	.0275	9436						
3	4	.1779	1.3888	.48	38	.8567	7718	.93	79	.9711	9393						
4	5	.5667	1.3855	.49	39	.6285	7822	.94	80	.9104	9348						
5	6	.9522	1.3815	1.50	40	.4107	7923	1.95	81	.8452	9299						
6	8	.3337	1.3766	.51	41	.2030	8023	.96	82	.7751	9248						
7	9	.7103	1.3710	.52	42	.0053	8121	.97	83	.6999	9194						
8	11	.0813	1.3647	.53	42	.8174	8218	.98	84	.6193	9139						
9	12	.4460	1.3577	.54	43	.6392	8313	.99	85	.5332	9081						
10	13	.8037	1.3499	1.55	44	.4705	8406	2.00	86	.4413	9020						
11	15	.1536	1.3415	.56	45	.3111	8497	.01	87	.3433	8958						
12	16	.4951	1.3325	.57	46	.1608	8584	.02	88	.2391	8893						
13	17	.8276	1.3228	.58	47	.0192	8670	.03	89	.1284	8828						
14	19	.1504	1.3126	.59	47	.8862	8753	.04	90	.0112	8761						
15	20	.4630	1.3018	1.60	48	.7615	8834	2.05	90	.8873	8691						
16	21	.7648	1.2905	.61	49	.6449	8910	.06	91	.7564	8621						
17	23	.0553	1.2788	.62	50	.5359	8985	.07	92	.6185	8549						
18	24	.3341	1.2666	.63	51	.4344	9055	.08	93	.4734	8477						
19	25	.6007	1.2541	.64	52	.3399	9123	.09	94	.3211	8403						
20	26	.8548	1.65	.65	53	.2522	9187	2.10	95	.1614	8328						
			.66	.66	54	.1709	9248	.11	95	.9942	8252						
			.67	.67	55	.0957	9305	.12	96	.8194	8176						
			.68	.68	56	.0262	9357	.13	97	.6370	8100						
			.69	.69	56	.9619	9407	.14	98	.4470	8022						
			1.70	1.70	57	.9026	9452	2.15	99	.2492	7944						
			.71	.71	58	.8478	9494	.16	100	.0436	7866						
			.72	.72	59	.7972	9532	.17	100	.8302	7788						
			.73	.73	60	.7504	9564	.18	101	.6090	7709						
			.74	.74	61	.7068	9594	.19	102	.3799	7631						
			1.75	1.75	62	.6662	9619	2.20	103	.1430	7552						
			.76	.76	63	.6281	9640	.21	103	.8982	7478						
			.77	.77	64	.5921	9656	.22	104	.6455	7394						
			.78	.78	65	.5577	9670	.23	105	.3849	7316						
			.79	.79	66	.5247	9677	.24	106	.1165	7238						
			1.80	1.80	67	.4924	9682	2.25	106	.8403	7159						
			.81	.81	68	.4606	9682	.26	107	.5562	7082						
			.82	.82	69	.4288	9679	.27	108	.2644	7005						
			.83	.83	70	.3967	9671	.28	108	.9649	6928						
			.84	.84	71	.3638	9659	.29	109	.6577	6852						
			1.85	1.85	72	.3297	9644	2.30	110	.3429	6773						
			.86	.86	73	.2941	9624	.31	111	.0204	6699						
			.87	.87	74	.2565	9602	.32	111	.6903	6625						
			.88	.88	75	.2167	9575	.33	112	.3528	6551						
			.89	.89	76	.1742	9545	.34	113	.0079	6476						
			1.90	1.90	77	.1287		2.35	113	.6555							

lg P	v		lg P	v		lg P	v	
2.35	113°.6555	6404	2.80	136°.3238	3857	3.25	150°.2884	2454
.36	114 .2959	6331	.81	136 .7095	3815	.26	150 .5338	5432
.37	114 .9290	6259	.82	137 .0910	3775	.27	150 .7770	2409
.38	115 .5549	6188	.83	137 .4685	3735	.28	151 .0179	2386
.39	116 .1737	6117	.84	137 .8420	3696	.29	151 .2565	2365
2.40	116 .7854	6048	2.85	138 .2116	3656	3.30	151 .4930	2342
.41	117 .3902	5978	.86	138 .5772	3618	.31	151 .7272	2321
.42	117 .9880	5910	.87	138 .9390	3581	.32	151 .9593	2299
.43	118 .5790	5843	.88	139 .2971	3543	.33	152 .1892	2278
.44	119 .1633	5776	.89	139 .6514	3506	.34	152 .4170	2257
2.45	119 .7409	5709	2.90	140 .0020	3470	3.35	152 .6427	2237
.46	120 .3118	5645	.91	140 .3490	3434	.36	152 .8664	2216
.47	120 .8763	5579	.92	140 .6924	3398	.37	153 .0880	2196
.48	121 .4342	5516	.93	141 .0322	3364	.38	153 .3076	2176
.49	121 .9858	5453	.94	141 .3686	3329	.39	153 .5252	2156
2.50	122 .5311	5390	2.95	141 .7015	3295	3.40	153 .7408	2137
.51	123 .0701	5329	.96	142 .0310	3261	.41	153 .9545	2118
.52	123 .6030	5268	.97	142 .3571	3229	.42	154 .1663	2098
.53	124 .1298	5208	.98	142 .6800	3196	.43	154 .3761	2079
.54	124 .6506	5149	.89	142 .9996	3163	.44	154 .5840	2061
2.55	125 .1655	5090	3.00	143 .3159	3131	3.45	154 .7901	2042
.56	125 .6745	5033	.01	143 .6290	3101	.46	154 .9943	2024
.57	126 .1778	4976	.02	143 .9391	3069	.47	155 .1967	2006
.58	126 .6754	4919	.03	144 .2460	3039	.48	155 .3973	1989
.59	127 .1673	4864	.04	144 .5499	3008	.49	155 .5962	1970
2.60	127 .6537	4810	3.05	144 .8507	2979	3.50	155 .7932	1953
.61	128 .1347	4755	.06	145 .1486	2949	.51	155 .9885	1936
.62	128 .6102	4701	.07	145 .4435	2920	.52	156 .1821	1918
.63	129 .0803	4649	.08	145 .7355	2891	.53	156 .3739	1902
.64	129 .5452	4598	.09	146 .0246	2863	.54	156 .5641	1885
2.65	130 .0050	4546	3.10	146 .3109	2835	3.55	156 .7526	1868
.66	130 .4596	4496	.11	146 .5944	2807	.56	156 .9394	1852
.67	130 .9092	4446	.12	146 .8751	2780	.57	157 .1246	1836
.68	131 .3538	4396	.13	147 .1531	2753	.58	157 .3082	1820
.69	131 .7934	4348	.14	147 .4284	2727	.59	157 .4902	1804
2.70	132 .2282	4300	3.15	147 .7011	2701	3.60	157 .6706	1788
.71	132 .6582	4253	.16	147 .9712	2674	.61	157 .8494	1773
.72	133 .0835	4207	.17	148 .2386	2648	.62	158 .0267	1758
.73	133 .5042	4161	.18	148 .5034	2624	.63	158 .2025	1742
.74	133 .9203	4115	.19	148 .7658	2598	.64	158 .3767	1727
2.75	134 .3318	4071	3.20	149 .0256	2574	3.65	158 .5494	1712
.76	134 .7389	4027	.21	149 .2830	2549	.66	158 .7206	1697
.77	135 .1416	3983	.22	149 .5379	2526	.67	158 .8903	1683
.78	135 .5399	3941	.23	149 .7905	2501	.68	159 .0586	1668
.79	135 .9340	3898	.24	150 .0406	2478	.69	159 .2254	1655
2.80	136 .3238		3.25	150 .2884		3.70	159 .3909	

VI. — Значения функций $\lg U(z)$ и $\lg V(z)$

z	$\lg U(z)$		$\lg V(z)$	
+ 0.00	1.914 934	— 2183	1.437 812	1308
.01	.912 751	2204	.439 120	1318
.02	.910 547	2228	.440 438	1329
.03	.908 319	2250	.441 767	1339
.04	.906 069	— 2274	.443 106	1350
+ 0.05	1.903 795	2297	1.444 456	1361
.06	.901 498	2323	.445 817	1372
.07	.899 175	2347	.447 189	1383
.08	.896 828	2374	.448 572	1395
.09	.894 454	— 2399	.449 967	1407
+ 0.10	1.892 055	2426	1.451 374	1419
.11	.889 629	2454	.452 793	1431
.12	.887 175	2482	.454 224	1443
.13	.884 693	2511	.455 667	1456
.14	.882 182	— 2539	.457 123	1469
+ 0.15	1.879 643	2570	1.458 592	1482
.16	.877 073	2600	.460 074	1496
.17	.877 473	2633	.461 570	1509
.18	.871 840	2664	.463 079	1524
.19	.869 176	— 2698	.464 603	1538
+ 0.20	1.866 478		1.466 141	
— 0.00	1.914 934	2160	1.437 812	— 1298
.01	.917 094	2140	.436 514	1288
.02	.919 234	2118	.435 226	1278
.03	.921 352	2098	.433 948	1269
.04	.923 450	— 2078	.432 679	— 1259
— 0.05	1.925 528	2058	1.431 420	1250
.06	.927 586	209	.430 170	1241
.07	.929 625	2020	.428 929	1232
.08	.931 645	2002	.427 697	1223
.09	.933 647	1983	.426 474	— 1214
— 0.10	1.935 630	1965	1.425 260	1206
.11	.937 595	1948	.424 054	1198
.12	.939 543	1930	.422 856	1189
.13	.941 473	1913	.421 667	1181
.14	.943 386	1896	.420 486	— 1173
— 0.15	1.945 282	1881	1.419 313	1165
.16	.947 163	1863	.418 148	1157
.17	.949 026	1849	.416 991	1150
.18	.950 875	182	.415 841	1141
.19	.952 707	1817	.414 700	— 1135
— 0.20	1.954 524		1.413 565	

VII. Таблица значений $\omega^2 k^2 : r^3$ для $\omega = 8^d$

r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$		r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$	
1.50	103 088	— 1023	2.00	66 957	— 499
.51	102 065	1005	.01	66 458	493
.52	101 060	990	.02	65 965	487
.53	100 070	973	.03	65 478	480
.54	99 097	957	.04	64 998	475
.55	98 140	942	.05	64 523	470
.56	97 198	927	.06	64 053	463
.57	96 271	913	.07	63 590	458
.58	95 358	898	.08	63 132	453
.59	94 460	— 884	.09	62 679	— 447
1.60	93 576	871	2.10	62 232	442
.61	92 705	852	.11	61 790	436
.62	91 848	844	.12	61 354	432
.63	91 004	831	.13	60 922	427
.64	90 173	818	.14	60 495	421
.65	89 355	807	.15	60 074	417
.66	88 548	794	.16	59 657	412
.67	77 754	782	.17	59 245	407
.68	86 972	771	.18	58 838	402
.69	86 201	— 759	.19	58 436	— 398
1.70	85 442	749	2.20	58 038	394
.71	84 693	737	.21	57 644	389
.72	83 956	727	.22	57 255	385
.73	83 229	717	.23	56 870	380
.74	82 512	706	.24	56 490	376
.75	81 806	696	.25	56 114	372
.76	81 110	686	.26	55 742	368
.77	80 424	677	.27	55 374	364
.78	79 747	668	.28	55 010	360
.79	79 079	— 658	.29	54 650	— 356
1.80	78 421	649	2.30	54 294	352
.81	77 772	640	.31	53 942	349
.82	77 132	631	.32	53 593	344
.83	76 501	623	.33	53 249	341
.84	75 878	614	.34	52 908	338
.85	75 264	606	.35	52 570	333
.86	74 658	599	.36	52 237	3 1
.87	74 059	590	.37	51 906	326
.88	73 469	582	.38	51 580	324
.89	72 887	— 575	.39	51 256	— 320
1.90	72 312	567	2.40	50 936	317
.91	71 745	560	.41	50 619	313
.92	71 185	552	.42	50 306	310
.93	70 633	546	.43	49 996	307
.94	70 087	538	.44	49 689	304
.95	69 549	532	.45	49 385	301
.96	69 017	524	.46	49 084	298
.97	68 493	519	.47	48 786	295
.98	67 974	511	.48	48 491	291
.99	67 463	— 506	.49	48 200	— 289
2.00	66 957		2.50	47 911	

r^2	$10^7 w^2 k^2 : r^3$		r^2	$10^7 w^2 k^2 : r^3$	
2.50	47 911		3.00	36 447	
.51	47 625	— 286	.01	36 288	— 181
.52	47 341	284	.02	36 086	180
.53	47 061	280	.03	35 907	179
.54	46 783	278	.04	35 730	177
.55	46 508	275	.05	35 554	176
.56	46 236	272	.06	35 380	174
.57	45 967	269	.07	35 208	172
.58	45 700	267	.08	35 036	172
.59	45 435	265	.09	34 866	170
		— 262			— 168
2.60	45 173	259	3.10	34 698	168
.61	44 914	257	.11	34 530	168
.62	44 657	254	.12	34 365	165
.63	44 403	252	.13	34 200	165
.64	44 151	250	.14	34 037	163
.65	43 901	247	.15	33 875	162
.66	43 654	245	.16	33 714	161
.67	43 409	243	.17	33 555	159
.68	43 166	240	.18	33 397	158
.69	42 926	— 239	.19	33 240	157
		236			— 156
2.70	42 687	234	3.20	33 084	154
.71	42 451	231	.21	32 930	154
.72	42 217	230	.22	32 776	152
.73	41 986	228	.23	32 624	151
.74	41 756	225	.24	32 473	150
.75	41 528	224	.25	32 323	148
.76	41 303	221	.26	32 175	148
.77	41 079	220	.27	32 027	146
.78	40 858	— 217	.28	31 881	145
.79	40 638	216	.29	31 736	— 144
		213			143
2.80	40 421	212	3.30	31 592	142
.81	40 205	210	.31	31 449	142
.82	39 992	208	.32	31 307	141
.83	39 780	206	.33	31 166	140
.84	39 570	205	.34	31 026	139
.85	39 362	203	.35	30 887	138
.86	39 156	200	.36	30 749	137
.87	38 951	— 200	.37	30 612	135
.88	38 748	197	.38	30 477	135
.89	38 548	196	.39	30 342	— 134
		194			133
2.90	38 348	193	3.40	30 208	131
.91	38 151	190	.41	30 075	131
.92	37 955	187	.42	29 944	130
.93	37 761	184	.43	29 813	129
.94	37 568	— 183	.44	29 683	128
.95	37 378	183	.45	29 554	127
.96	37 188	184	.46	29 426	127
.97	37 001		.47	29 299	125
.98	36 814		.48	29 172	— 124
.99	36 630		.49	29 047	
3.00	36 447		3.50	28 923	

r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$		r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$	
3.50	28 923	— 124	4.00	23 673	— 89
.51	28 799	122	.01	23 584	88
.52	28 677	122	.02	23 496	87
.53	28 555	121	.03	23 409	87
.54	28 434	120	.04	23 322	86
.55	28 314	119	.05	23 236	86
.56	28 195	119	.06	23 150	85
.57	28 076	117	.07	23 065	85
.58	27 959	117	.08	22 980	84
.59	27 842	— 116	.09	22 896	— 84
3.60	27 726	115	4.10	22 812	83
.61	27 611	114	.11	22 729	83
.62	27 497	114	.12	22 646	82
.63	27 383	113	.13	22 564	82
.64	27 270	112	.14	22 482	81
.65	27 158	111	.15	22 401	81
.66	27 047	110	.16	22 320	80
.67	26 937	110	.17	22 240	80
.68	26 827	109	.18	22 160	79
.69	26 718	— 108	.19	22 081	— 79
3.70	26 610	108	4.20	22 002	78
.71	26 502	107	.21	21 924	78
.72	26 395	106	.22	21 846	77
.73	26 289	105	.23	21 769	77
.74	26 184	105	.24	21 692	77
.75	26 079	104	.25	21 615	76
.76	25 975	103	.26	21 539	75
.77	25 872	103	.27	21 464	76
.78	25 769	101	.28	21 388	74
.79	25 668	— 102	.29	21 314	— 75
3.80	25 566	100	4.30	21 239	73
.81	25 466	100	.31	21 166	74
.82	25 366	100	.32	21 092	73
.83	25 266	98	.33	21 019	73
.84	25 168	98	.34	20 946	72
.85	25 070	98	.35	20 874	72
.86	24 972	96	.36	20 802	71
.87	24 876	96	.37	20 731	71
.88	24 780	96	.38	20 660	70
.89	24 684	— 95	.39	20 590	— 71
3.90	24 589	94	4.40	20 519	69
.91	24 495	94	.41	20 450	70
.92	24 401	93	.42	20 380	69
.93	24 308	92	.43	20 311	68
.94	24 216	92	.44	20 243	69
.95	24 124	91	.45	20 174	67
.96	24 033	91	.46	20 107	68
.97	23 942	90	.47	20 039	67
.98	23 852	90	.48	19 972	66
.99	23 762	— 89	.49	19 906	— 67
4.00	23 673		4.50	19 839	

r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$		r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$	
4.50	19 839	— 66	5.00	16 939	— 51
.51	19 773	65	01	16 888	50
.52	19 708	66	02	16 838	50
.53	19 642	64	03	16 788	50
.54	19 578	65	04	16 738	50
.55	19 513	64	05	16 688	49
.56	19 449	64	06	16 639	50
.57	19 385	63	07	16 589	49
.58	19 322	63	08	16 540	48
.59	19 259	— 63	09	16 492	— 49
4.60	19 196	63	5.10	16 443	48
.61	19 133	62	11	16 395	48
.62	19 071	61	12	16 347	48
.63	19 010	62	13	16 299	47
.64	18 948	61	14	16 252	48
.65	18 887	61	15	16 204	47
.66	18 826	60	16	16 157	47
.67	18 766	60	17	16 110	46
.68	18 706	60	18	16 064	47
.69	18 646	— 60	19	16 017	— 46
4.70	18 586	59	5.20	15 971	46
.71	18 527	59	21	15 925	45
.72	18 468	58	22	15 880	46
.73	18 410	58	23	15 834	45
.74	18 352	58	24	15 789	45
.75	18 294	58	25	15 744	45
.76	18 236	57	26	15 699	45
.77	18 179	57	27	15 654	44
.78	18 122	57	28	15 610	45
.79	18 065	— 56	29	15 565	— 44
4.80	18 009	57	5.30	15 521	43
.81	17 952	55	31	15 478	44
.82	17 897	56	32	15 434	44
.83	17 841	55	33	15 390	43
.84	17 786	55	34	15 347	43
.85	17 731	55	35	15 304	43
.86	17 676	54	36	15 261	42
.87	17 622	54	37	15 219	43
.88	17 568	54	38	15 176	42
.89	17 514	— 54	39	15 134	— 42
4.90	17 460	53	5.40	15 092	42
.91	17 407	53	41	15 050	41
.92	17 354	53	42	15 009	42
.93	17 301	53	43	14 967	41
.94	17 248	52	44	14 926	41
.95	17 196	52	45	14 885	41
.96	17 144	51	46	14 844	40
.97	17 093	52	47	14 804	41
.98	17 041	51	48	14 763	40
.99	16 990	— 51	49	14 723	— 41
5.00	16 939		5.50	14 682	

r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$		r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$	
5.50	14 682	— 40	6.00	12 886	
.51	14 642	39	.01	12 854	— 32
.52	14 603	40	.02	12 822	32
.53	14 563	39	.03	12 890	32
.54	14 524	40	.04	12 758	32
.55	14 484	39	.05	12 727	31
.56	14 445	39	.06	12 695	32
.57	14 406	38	.07	12 664	31
.58	14 368	39	.08	12 632	32
.59	14 329	— 38	.09	12 601	31
5.60	14 291	38	6.10	12 570	— 31
.61	14 253	38	.11	12 540	30
.62	14 215	38	.12	12 509	31
.63	14 177	38	.13	12 478	31
.64	14 139	37	.14	12 448	30
.65	14 102	38	.15	12 417	31
.66	14 064	37	.16	12 387	30
.67	14 027	37	.17	12 357	30
.68	13 990	37	.18	12 327	30
.69	13 953	— 37	.19	12 297	30
5.70	13 916	36	6.20	12 267	— 30
.71	13 880	36	.21	12 238	29
.72	13 844	37	.22	12 208	30
.73	13 807	36	.23	12 179	29
.74	13 771	36	.24	12 150	29
.75	13 735	35	.25	12 121	29
.76	13 700	36	.26	12 092	29
.77	13 664	35	.27	12 063	29
.78	13 629	36	.28	12 034	29
.79	13 593	— 35	.29	12 005	29
5.80	13 558	35	6.30	11 977	— 28
.81	13 523	35	.31	11 948	29
.82	13 488	34	.32	11 920	28
.83	13 454	35	.33	11 892	28
.84	13 419	34	.34	11 863	29
.85	13 385	35	.35	11 835	28
.86	13 350	34	.36	11 807	28
.87	13 316	34	.37	11 780	27
.88	13 282	33	.38	11 752	28
.89	13 249	— 34	.39	11 724	28
5.90	13 215	34	6.40	11 697	— 27
.91	13 181	33	.41	11 670	27
.92	13 148	33	.42	11 642	28
.93	13 115	33	.43	11 615	27
.94	13 082	33	.44	11 588	27
.95	13 049	33	.45	11 561	27
.96	13 016	33	.46	11 534	27
.97	12 983	32	.47	11 508	26
.98	12 951	33	.48	11 481	27
.99	12 918	— 32	.49	11 454	27
6.00	12 886		6.50	11 428	— 26

r^2	$10^7 w^2 k^2 : r^3$		r^2	$10^7 w^2 k^2 : r^3$	
6.50	11 428		7.0	10 226	
.51	11 402	— 26	.1	10 010	— 216
.52	11 376	26	.2	9 803	207
.53	11 349	27	.3	9 602	201
.54	11 323	26	.4	9 408	194
.55	11 297	26	.5	9 220	188
.56	11 272	25	.6	9 039	181
.57	11 246	26	.7	8 864	175
.58	11 220	26	.8	8 694	170
.59	11 195	25	.9	8 529	165
		— 26			— 159
6.60	11 169		8.0	8 370	
.61	11 144	25	.1	8 215	155
.62	11 119	25	.2	8 065	150
.63	11 094	25	.3	7 920	145
.64	11 069	25	.4	7 779	141
.65	11 044	25	.5	7 642	137
.66	11 019	25	.6	7 509	133
.67	10 994	25	.7	7 380	129
.68	10 969	25	.8	7 255	125
.69	10 945	24	.9	7 133	122
		— 25			— 119
6.70	10 920		9.0	7 014	
.71	10 896	24	.1	6 899	115
.72	10 871	25	.2	6 787	112
.73	10 847	24	.3	6 678	109
.74	10 823	24	.4	6 571	107
.75	10 799	24	.5	6 468	103
.76	10 775	24	.6	6 367	101
.77	10 751	24	.7	6 269	98
.78	10 727	24	.8	6 173	96
.79	10 704	23	.9	6 080	93
		— 24			— 91
6.80	10 680		10.0	5 989	
.81	10 657	23	.1	5 900	89
.82	10 633	24	.2	5 814	86
.83	10 610	23	.3	5 729	85
.84	10 587	23	.4	5 647	82
.85	10 563	24	.5	5 566	81
.86	10 540	23	.6	5 488	78
.87	10 517	23	.7	5 411	77
.88	10 494	23	.8	5 336	75
.89	10 472	22	.9	5 263	73
		— 23			— 72
6.90	10 449		11.0	5 191	
.91	10 426	23	.1	5 121	70
.92	10 404	22	.2	5 053	68
.93	10 381	23	.3	4 986	67
.94	10 359	22	.4	4 920	66
.95	10 336	23	.5	4 856	64
.96	10 314	22	.6	4 794	62
.97	10 292	22	.7	4 732	62
.98	10 270	22	.8	4 672	60
.99	10 248	22	.9	4 614	58
		— 22			— 58
7.00	10 226		12.0	4 556	

r^2	$10^7 w^2 k^2 : r^3$		r^2	$10^7 w^3 k^2 : r^3$	
12.0	4 556	— 56	17.0	2 702	— 24
.1	4 500	56	.1	2 678	23
.2	4 444	54	.2	2 655	23
.3	4 390	53	.3	2 632	23
.4	4 337	52	.4	2 609	22
.5	4 285	51	.5	2 587	22
.6	4 234	50	.6	2 565	22
.7	4 184	48	.7	2 543	21
.8	4 136	48	.8	2 522	21
.9	4 088	— 48	.9	2 501	— 21
13.0	4 040	46	18.0	2 480	21
.1	3 994	45	.1	2 459	20
.2	3 949	44	.2	2 439	20
.3	3 905	44	.3	2 419	20
.4	3 861	43	.4	2 399	19
.5	3 818	42	.5	2 380	19
.6	3 776	41	.6	2 361	19
.7	3 735	41	.7	2 342	19
.8	3 694	40	.8	2 323	18
.9	3 654	— 39	.9	2 305	— 18
14.0	3 615	38	19.0	2 287	18
.1	3 577	38	.1	2 269	18
.2	3 539	37	.2	2 251	17
.3	3 502	36	.3	2 234	18
.4	3 466	36	.4	2 216	17
.5	3 430	35	.5	2 199	17
.6	3 395	35	.6	2 182	16
.7	3 360	34	.7	2 166	16
.8	3 326	33	.8	2 150	17
.9	3 293	— 33	.9	2 133	— 16
15.0	3 260	32	20.0	2 117	15
.1	3 228	32	.1	2 102	16
.2	3 196	32	.2	2 086	15
.3	3 164	30	.3	2 071	16
.4	3 134	30	.4	2 055	15
.5	3 104	30	.5	2 040	14
.6	3 074	30	.6	2 026	15
.7	3 044	28	.7	2 011	15
.8	3 016	29	.8	1 996	14
.9	2 987	— 28	.9	1 982	— 14
16.0	2 959	27	21.0	1 968	14
.1	2 932	28	.1	1 954	14
.2	2 904	26	.2	1 940	14
.3	2 878	26	.3	1 926	13
.4	2 852	26	.4	1 913	13
.5	2 826	26	.5	1 900	14
.6	2 800	25	.6	1 886	12
.7	2 775	25	.7	1 874	13
.8	2 750	24	.8	1 861	13
.9	2 726	— 24	.9	1 848	— 13
17.0	2 702		22.0	1 835	

r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$		r^2	$10^7 \omega^2 k^2 : r^3$	
22.0	1 835		27.0	1 350	
.1	1 823	— 12	.1	1 342	— 8
.2	1 811	12	.2	1 335	7
.3	1 798	12	.3	1 328	7
.4	1 786	12	.4	1 320	8
.5	1 774	12	.5	1 313	7
.6	1 763	11	.6	1 306	7
.7	1 751	12	.7	1 299	7
.8	1 740	11	.8	1 292	7
.9	1 728	12	.9	1 285	7
		— 11			— 7
23.0	1 717		28.0	1 278	
.1	1 706	11	.1	1 271	7
.2	1 695	11	.2	1 265	6
.3	1 684	11	.3	1 258	7
.4	1 673	11	.4	1 251	7
.5	1 662	11	.5	1 245	6
.6	1 652	10	.6	1 238	7
.7	1 641	11	.7	1 232	6
.8	1 631	10	.8	1 225	7
.9	1 621	10	.9	1 219	6
		— 10			— 6
24.0	1 611		29.0	1 213	
.1	1 601	10	.1	1 206	7
.2	1 591	10	.2	1 200	6
.3	1 581	10	.3	1 194	6
.4	1 571	10	.4	1 188	6
.5	1 562	9	.5	1 182	6
.6	1 552	10	.6	1 176	6
.7	1 543	9	.7	1 170	6
.8	1 533	10	.8	1 164	6
.9	1 524	9	.9	1 158	6
		— 9			— 5
25.0	1 515		30.0	1 153	
.1	1 507	9	.1	1 147	6
.2	1 497	9	.2	1 141	6
.3	1 488	9	.3	1 136	5
.4	1 479	9	.4	1 130	6
.5	1 471	8	.5	1 124	6
.6	1 462	9	.6	1 119	5
.7	1 454	8	.7	1 113	6
.8	1 445	9	.8	1 108	5
.9	1 437	8	.9	1 102	6
		— 8			— 5
26.0	1 429		31.0	1 097	
.1	1 420	9	.1	1 092	5
.2	1 412	8	.2	1 087	5
.3	1 404	8	.3	1 082	5
.4	1 396	8	.4	1 076	6
.5	1 388	8	.5	1 071	5
.6	1 380	8	.6	1 066	5
.7	1 373	7	.7	1 061	5
.8	1 365	8	.8	1 056	5
.9	1 357	8	.9	1 051	5
		— 7			— 5
27.0	1 350		32.0	1 046	

VIII.—Приближенное решение уравнений Лагранжа

χ	$\cos \psi = -1.00$	- 0.95	- 0.90	- 0.85	- 0.80	- 0.75	- 0.70	- 0.65	- 0.60	- 0.55	- 0.50
0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.1	3.00	2.85	2.70	2.55	2.40	2.25	2.100	1.950	1.800	1.650	1.500
0.2	3.72	3.47	3.22	2.99	2.76	2.54	2.323	2.114	1.910	1.712	1.520
0.3	4.77	4.32	3.92	3.54	3.18	2.85	2.547	2.259	1.988	1.734	1.495
0.4	6.38	5.56	4.84	4.21	3.66	3.18	2.745	2.358	2.011	1.698	1.414
0.5	9.07	7.38	6.07	5.02	4.17	3.46	2.879	2.383	1.958	1.592	1.273
0.6	14.0	10.17	7.66	5.91	4.63	3.66	2.903	2.303	1.816	1.415	1.079
0.7	24.4	14.48	9.58	6.74	4.92	3.68	2.778	2.106	1.589	1.179	0.849
0.8	51.5	20.89	11.52	7.27	4.91	3.47	2.494	1.805	1.197	0.910	0.66
0.9	155.0	28.82	12.72	7.19	4.54	3.03	2.084	1.440	0.971	0.637	0.374
1.0	1110.0	34.03	12.30	6.39	3.83	2.45	1.613	1.059	0.670	0.385	0.169
1.1	∞	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1.2	103.3	30.62	10.18	5.09	2.95	1.86	1.152	0.707	0.398	0.171	0.00
1.3	—	12.13	4.79	2.46	1.39	0.794	0.424	0.176	0.00	0.130	0.230
1.4	10.4	3.633	1.733	0.903	0.455	0.181	0.000	0.127	0.221	0.292	0.348
1.5	2.27	1.042	0.490	0.187	0.000	0.125	0.213	0.157	0.327	0.366	0.397
1.6	0.530	0.193	0.000	0.122	0.205	0.265	0.309	0.343	0.370	0.392	0.410
1.7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1.9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2.0	0.000	0.120	0.198	0.253	0.293	0.323	0.347	0.366	0.381	0.393	0.404
2.1	0.191	0.242	0.278	0.305	0.326	0.342	0.355	0.368	0.375	0.383	0.389
2.2	0.265	0.289	0.307	0.322	0.333	0.342	0.350	0.357	0.362	0.367	0.371
2.3	0.291	0.303	0.313	0.322	0.328	0.334	0.339	0.343	0.346	0.349	0.352
2.4	0.296	0.303	0.309	0.314	0.318	0.321	0.324	0.327	0.329	0.331	0.333
2.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2.7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2.9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3.0	0.292	0.296	0.300	0.303	0.305	0.307	0.309	0.311	0.313	0.314	0.315
3.1	0.283	0.285	0.288	0.290	0.292	0.293	0.295	0.296	0.297	0.299	0.299
3.2	0.273	0.275	0.276	0.277	0.279	0.280	0.281	0.281	0.282	0.283	0.284
3.3	0.262	0.263	0.261	0.265	0.266	0.267	0.267	0.268	0.268	0.269	0.269
3.4	0.251	0.252	0.253	0.253	0.254	0.254	0.255	0.255	0.256	0.256	0.257
3.5	0.241	0.241	0.242	0.242	0.243	0.243	0.244	0.244	0.244	0.244	0.245

x	$\cos \phi = -0.50$	-0.45	-0.40	-0.35	-0.30	-0.25	-0.20	-0.15	-0.10	-0.05	0.00
0.0	-1.500	-1.350	-1.200	-0.050	-0.9 0	-0.750	-0.600	-0.450	-0.300	-0.150	0.000
0.1	-1.520	-1.332	-1.150	-0.973	-0.800	-0.631	-0.468	-0.307	-0.152	0.000	+0.148
0.2	-1.495	-1.269	-1.057	-0.856	-0.666	-0.486	-0.316	-0.154	0.000	+0.146	+0.286
0.3	-1.414	-1.156	-0.920	-0.705	-0.507	-0.324	-0.156	0.0 0	+0.145	0.279	0.404
0.4	-1.273	-0.994	-0.747	-0.528	-0.333	-0.158	0.000	+0.143	0.2 3	0.391	0.499
0.5	-1.079	-0.795	-0.552	-0.342	-0.160	0.000	+0.141	+0.266	+0.378	+0.479	+0.569
0.6	-0.849	-0.578	-0.352	-0.162	0.000	+0.140	0.261	0.366	0.460	0.542	0.616
0.7	-0.6 6	-0.363	-0.164	0.000	+0.138	0.255	0.355	0.442	0.518	0.584	0.643
0.8	-0.374	-0.166	0.000	+0.136	0.250	0.345	0.426	0.495	0.556	0.608	0.655
0.9	-0.169	0.000	+0.135	0.244	0.335	0.411	0.475	0.530	0.577	0.619	0.655
1.0	0.000	0.133	+0.239	+0.325	+0.396	+0.456	+0.506	+0.549	+2.586	+0.618	+0.646
1.2	+0.230	0.308	0.370	0.422	0.464	0.499	0.530	0.556	6.578	0.598	0.615
1.4	0.348	0.392	0.428	0.458	0.483	0.504	0.522	0.538	0.551	0.563	0.574
1.6	0.397	0.423	0.443	0.461	0.476	0.489	0.500	0.509	0.518	0.525	0.532
1.8	0.410	0.425	0.437	0.448	0.457	0.465	0.471	0.477	0.483	0.488	0.492
2.0	+0.404	+0.413	+0.420	+0.427	+0.432	+0.438	+0.442	+0.446	+0.449	+0.452	+0.455
2.2	0.389	0.395	0.399	0.404	0.407	0.410	0.413	0.416	0.418	0.420	0.422
2.4	0.371	0.374	0.378	0.380	0.383	0.385	0.387	0.389	0.390	0.392	0.393
2.6	0.352	0.354	0.356	0.358	0.360	0.361	0.363	0.364	0.366	0.366	0.367
2.8	0.333	0.335	0.336	0.337	0.338	0.340	0.340	0.341	0.342	0.343	0.344
3.0	+0.315	+0.316	+0.317	+0.318	+0.319	+0.320	+0.321	+0.321	+0.322	+0.322	+0.323
3.2	0.299	0.300	0.300	0.301	0.302	0.302	0.303	0.303	0.303	0.304	0.304
3.4	0.284	0.284	0.285	0.285	0.286	0.286	0.286	0.287	0.287	0.287	0.288
3.6	0.269	0.270	0.270	0.271	0.271	0.271	0.272	0.272	0.272	0.272	0.272
3.8	0.257	0.257	0.257	0.257	0.258	0.258	0.258	0.258	0.258	0.259	0.259
4.0	+0.245	+0.245	+0.245	+0.245	+0.246	+0.246	+0.246	+0.246	+0.246	+0.246	+0.246

x	$\cos \psi = 0.00$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0.0	0.000	0.150	0.300	0.450	0.600	0.750	0.900	1.050	1.200	1.350	1.500
0.1	0.148	0.293	0.434	0.572	0.706	0.837	0.965	1.090	1.213	1.332	1.449
0.2	0.286	0.419	0.545	0.666	0.782	0.892	0.998	1.099	1.196	1.289	1.379
0.3	0.404	0.521	0.630	0.733	0.829	0.919	1.004	1.084	1.160	1.232	1.299
0.4	0.499	0.598	0.689	0.774	0.851	0.924	0.991	1.053	1.111	1.166	1.217
0.5	0.569	0.651	0.725	0.793	0.855	0.911	0.964	1.012	1.056	1.098	1.136
0.6	0.616	0.682	0.741	0.795	0.843	0.887	0.928	0.965	0.999	1.030	1.059
0.7	0.643	0.695	0.742	0.784	0.822	0.856	0.887	0.916	0.942	0.966	0.988
0.8	0.655	0.696	0.732	0.765	0.794	0.821	0.845	0.867	0.887	0.905	0.922
0.9	0.655	0.687	0.715	0.741	0.764	0.784	0.803	0.820	0.835	0.849	0.862
1.0	0.646	0.671	0.694	0.713	0.731	0.747	0.761	0.775	0.787	0.798	0.808
1.2	0.615	0.630	0.643	0.655	0.666	0.676	0.685	0.693	0.700	0.707	0.713
1.4	0.574	0.583	0.592	0.599	0.606	0.612	0.618	0.623	0.628	0.632	0.636
1.6	0.532	0.533	0.543	0.548	0.552	0.556	0.560	0.563	0.566	0.569	0.572
1.8	0.492	0.496	0.499	0.502	0.505	0.508	0.510	0.512	0.515	0.516	0.518
2.0	0.455	0.458	0.460	0.462	0.464	0.466	0.468	0.469	0.471	0.472	0.473
2.2	0.422	0.424	0.426	0.427	0.428	0.430	0.431	0.432	0.433	0.434	0.435
2.4	0.393	0.394	0.395	0.396	0.397	0.398	0.399	0.400	0.400	0.401	0.402
2.6	0.367	0.368	0.368	0.369	0.370	0.371	0.371	0.372	0.372	0.373	0.373
2.8	0.344	0.344	0.345	0.345	0.346	0.346	0.347	0.347	0.347	0.348	0.348
3.0	0.323	0.323	0.324	0.324	0.324	0.325	0.325	0.325	0.326	0.326	0.326
3.2	0.304	0.305	0.305	0.305	0.305	0.306	0.306	0.306	0.306	0.307	0.307
3.4	0.288	0.288	0.288	0.288	0.288	0.289	0.289	0.289	0.289	0.289	0.290
3.6	0.272	0.273	0.273	0.273	0.273	0.273	0.273	0.274	0.274	0.274	0.274
3.8	0.259	0.259	0.259	0.259	0.259	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
3.0	0.246	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247

χ	$\cos \psi = 0.50$	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.0	1.500	1.650	1.800	1.950	2.100	2.250	2.400	2.550	2.700	2.850	3.000
0.1	1.449	1.563	1.675	1.784	1.891	1.996	2.099	2.198	2.297	2.393	2.487
0.2	1.379	1.465	1.547	1.627	1.703	1.777	1.848	1.916	1.981	2.045	2.106
0.3	1.299	1.363	1.424	1.482	1.537	1.589	1.639	1.686	1.732	1.775	1.816
0.4	1.217	1.265	1.310	1.352	1.392	1.429	1.465	1.498	1.530	1.560	1.589
0.5	1.136	1.172	1.205	1.236	1.266	1.293	1.319	1.343	1.366	1.387	1.407
0.6	1.059	1.086	1.111	1.134	1.156	1.176	1.195	1.213	1.229	1.245	1.260
0.7	0.988	1.008	1.027	1.044	1.061	1.076	1.090	1.103	1.115	1.127	1.138
0.8	0.922	0.938	0.952	0.965	0.977	0.989	0.999	1.009	1.019	1.027	1.036
0.9	0.862	0.874	0.885	0.895	0.905	0.913	0.921	0.929	0.936	0.943	0.949
1.0	0.808	0.817	0.825	0.833	0.840	0.847	0.854	0.859	0.865	0.870	0.875
1.2	0.713	0.719	0.724	0.729	0.734	0.738	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
1.4	0.636	0.639	0.643	0.646	0.649	0.652	0.654	0.656	0.659	0.661	0.663
1.6	0.572	0.574	0.576	0.578	0.580	0.582	0.584	0.585	0.587	0.588	0.589
1.8	0.518	0.520	0.521	0.523	0.524	0.525	0.526	0.527	0.528	0.529	0.530
2.0	0.473	0.474	0.475	0.476	0.477	0.478	0.479	0.479	0.480	0.481	0.481
2.2	0.435	0.435	0.436	0.437	0.437	0.438	0.439	0.439	0.440	0.440	0.441
2.4	0.402	0.402	0.403	0.403	0.404	0.404	0.405	0.405	0.405	0.406	0.406
2.6	0.373	0.373	0.374	0.374	0.375	0.375	0.375	0.376	0.376	0.376	0.376
2.8	0.348	0.348	0.349	0.349	0.349	0.350	0.350	0.350	0.350	0.350	0.351
3.0	0.326	0.326	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.328	0.328	0.328	0.328
3.2	0.307	0.307	0.307	0.307	0.307	0.308	0.308	0.308	0.308	0.308	0.308
3.4	0.290	0.290	0.290	0.290	0.290	0.290	0.290	0.290	0.290	0.291	0.291
3.6	0.274	0.274	0.274	0.274	0.274	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275
3.8	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.261	0.261	0.261	0.261	0.261
4.0	0.247	0.247	0.248	0.248	0.248	0.248	0.248	0.248	0.248	0.248	0.248

IX. — Коэффициенты в формулах Джиббса

(см. стр. 186)

n_1°	β		β_1		β_2		n_2°
0.20	+ 0.09667	49	+ 0.06333	— 117	— 0.03667	216	0.80
.21	.09716	47	.06216	119	.03451	214	.79
.22	.09763	46	.06097	121	.03237	213	.78
.23	.09809	44	.05976	123	.03024	211	.77
.24	.09853	43	.05853	— 124	.02813	209	.76
0.25	+ 0.09896	41	+ 0.05729	126	— 0.02604	207	0.75
.26	.09937	39	.05603	127	.02397	206	.74
.27	.09976	37	.05476	129	.02191	204	.73
.28	.10013	36	.05347	131	.01987	203	.72
.29	.10049	34	.05216	— 133	.01784	201	.71
0.30	+ 0.10083	33	+ 0.05083	134	— 0.01583	199	0.70
.31	.10116	31	.04949	136	.01384	197	.69
.32	.10147	29	.04813	137	.01187	196	.68
.33	.10176	27	.04676	139	.00991	194	.67
.34	.10203	26	.04537	— 141	.00797	193	.66
0.35	+ 0.10229	24	+ 0.04396	143	— 0.00604	191	0.65
.36	.10253	23	.04253	144	.00413	189	.64
.37	.10276	21	.04109	146	.00224	187	.63
.38	.10297	19	.03963	147	— 0.00037	186	.62
.39	.10316	17	.03816	— 149	+ 0.00149	184	.61
0.40	+ 0.10333	16	+ 0.03667	151	+ 0.00333	183	0.60
.41	.10349	14	.03516	153	.00516	181	.59
.42	.10363	13	.03363	154	.00697	179	.58
.43	.10376	11	.03209	156	.00876	177	.57
.44	.10387	9	.03053	— 157	.01053	176	.56
0.45	+ 0.10396	7	+ 0.02896	159	+ 0.01229	174	0.55
.46	.10403	6	.02737	161	.01403	173	.54
.47	.10409	4	.02576	163	.01576	171	.53
.48	.10413	3	.02413	164	.01747	169	.52
.49	.10416	1	.02249	— 166	.01916	167	.51
0.50	+ 0.10417		+ 0.02083		+ 0.02083		0.50
n_2°	β		β_1		β_2		n_1°

Х. — Таблица, облегчающая решение уравнения Эйлера
(см. стр. 122)

с	θ_0		$\lg \theta_0$	
0.00	1.000 000	.	0.000 000	
.01	.000 835	835	.000 363	363
.02	.001 675	840	.000 727	364
.03	.002 519	844	.001 093	366
.04	.003 367	848	.001 460	367
		853		369
0.05	1.004 220		0.001 829	
.06	.005 077	857	.002 199	370
.07	.005 938	861	.002 571	372
.08	.006 804	866	.002 945	374
.09	.007 675	871	.003 320	375
		875		378
0.10	1.008 550		0.003 698	
.11	.009 430	880	.004 076	378
.12	.010 315	885	.004 457	381
.13	.011 204	889	.004 839	382
.14	.012 099	895	.005 223	384
		899		386
0.15	1.012 998		0.005 609	
.16	.013 903	905	.005 996	387
.17	.014 812	909	.006 386	360
.18	.015 727	915	.006 777	391
.19	.016 647	920	.007 170	393
		925		395
0.20	1.017 572		0.007 565	
.21	.018 503	931	.007 962	397
.22	.019 439	936	.008 361	399
.23	.020 380	941	.008 762	401
.24	.021 327	947	.009 165	403
		953		405
0.25	1.022 280		0.009 570	
.26	.023 239	959	.009 977	407
.27	.024 204	965	.010 386	409
.28	.025 174	970	.010 798	412
.29	.026 150	976	.011 211	413
		983		416
0.30	1.027 133		0.011 627	
.31	.028 122	989	.012 045	418
.32	.029 117	995	.012 465	420
.33	.030 119	1002	.012 887	422
.34	.031 127	1008	.013 312	425
		1015		427
0.35	1.032 142		0.013 739	
.36	.033 163	1021	.014 169	430
.37	.034 192	1029	.014 601	432
.38	.035 227	1035	.015 036	435
.39	.036 270	1043	.015 473	437
		1049		439
0.40	1.037 319		0.015 912	
.41	.038 376	1057	.016 355	443
.42	.039 441	1065	.016 800	445
.43	.040 513	1072	.017 248	448
.44	.041 593	1080	.017 698	450
		1088		453
0.45	1.042 681		0.018 151	

ЛИТЕРАТУРА

Литература по определению орбит планет и комет весьма обширна. Работы, появившиеся до 1900 года, довольно полно указаны в статье.

R. Radau, *Bibliographie relative au calcul des orbites*, Bulletin astr., t. XVI (1899), 427—445.

Литература с 1900 по 1928 год (264 названия) приведена—также в хронологическом порядке—в указываемой ниже книге Stracke. Систематизированные литературные указания можно найти в статье

G. Herglotz, *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften, Bd. V, (1906), 379—426.

Наиболее обширными сочинениями по определению орбит являются:

J. C. Watson, *Theoretical astronomy*, Philadelphia 1868; 2 ed. 1877; 3 ed. 1881.

Th. von Oppolzer, *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, Bd. I, Leipzig 1870; 2. Aufl. Leipzig 1882 (имеется французский перевод Pasquier, Paris 1886), Bd. II, Leipzig 1880.

J. Bauschinger, *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, Leipzig 1906, 2 Aufl. Leipzig 1928.

W. Klinkerfues, *Theoretische Astronomie*, Braunschweig 1871, 2. Aufl. bearb. von H. Buchholz, 1899. 3. Aufl. 1912.

Из учебников, не претендующих на исчерпывающую полноту, укажем следующие:

А. Савич, *Теоретическая астрономия*, СПб. 1884.

М. Хандриков, *Очерк теоретической астрономии*, Киев 1883.

М. Хандриков, *Теория движения планет и комет около Солнца по коническим сечениям*, Киев 1890.

А. Я. Орлов, *Теоретическая астрономия*, Одесса 1921.

А. А. Иванов, *Основной курс теоретической астрономии*, Берлин 1923.

F. Fisserand, *Leçons sur la détermination des orbites*, red. par J. Perchot, avec une préface de H. Poincaré, Paris 1899.

Современную форму методов для определения орбит можно найти в книге

G. Stracke, *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, Berlin 1921.

В деле выработки и распространения современной формы способа Гаусса большую роль сыграла статья G. Merton'a: *A modification of Gauss's method for the determination of orbits*, Monthly Notices, Vol. 85 (1925), 693—731. Эта статья полностью воспроизведена в книге (содержащей также подробное изложение метода Leuschner'a):

R. T. Crawford, *Determination of orbits of comets and asteroids*, New-York 1930.

Сущность проблемы определения орбит как с теоретической стороны, так и со стороны чисто практической с большою ясностью обрисована в статье.

F. Cohn, *Neue Methoden der Bahnbestimmung*, Vierteljahresschrift der Astr. Gesellschaft, 53. Jahrgang (1919), 27—146.

Эта статья представляет исключительный интерес для каждого интересующегося методами определения орбит. В ней не только разбирается ряд новых методов (метод Лагранжа в обработке Charlier и Andoyer, метод Лапласа в обработке Harzer'a, Poincaré и Leuschner'a и некоторые другие) и выясняется их практическая значимость, но и резюмируется богатый опыт вычисления орбит, накопленный в Astronomisches Rechen-Institut.

Много интересного материала можно найти в обширной монографии.

O. Callandreaux, *Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites des comètes et des planètes*, Paris 1902.

Особо отметим работу:

А. Н. Крылов, *Беседы о способах определения орбит планет и комет по малому числу наблюдений*, СПб 1911, дающую геометрическое освещение методов Гаусса и Ольберса и выясняющую связь, существующую между этими методами и графическим способом определения орбит, данным Ньютоном.

В заключение укажем курсы Небесной механики, в которых подробно рассматриваются вопросы определения орбит:

H. Andoyer, *Cours de mécanique céleste*, Tome I, II, Paris 1923, 1926.

H. C. Plummer, *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*, Cambridge, 1918.

Почти все перечисленные трактаты по определению орбит содержат более или менее полные собрания вспомогательных таблиц. Укажем еще следующие специальные сборники таких таблиц:

J. Bauschinger, *Tafeln zur theoretischen Astronomie*, Leipzig 1901.

G. Wirtz, *Tafeln und Formeln aus Astronomie und G. odäsie*, Berlin 1918.

М. Ф. Субботин, *Формулы и таблицы для вычисления орбит и эфемерид*. Ташкент 1929. (Издание Ташкентской астрономической обсерватории.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Часть первая	
Гелиоцентрическое и геоцентрическое движение.	
Глава I. Основные проблемы Небесной механики	5
§ 1. Эмпирическая кинематика солнечной системы	5
§ 2. Динамические следствия законов Кеплера	8
§ 3. Закон всемирного тяготения	11
§ 4. Небесная механика	13
§ 5. Закон Ньютона и теория относительности	15
§ 6. Основные проблемы Небесной механики	17
§ 7. Притяжение двух тел, размеры которых очень малы по сравнению с разделяющим их расстоянием	19
§ 8. Притяжение тел сферической структуры	23
Дополнение к главе I: Движение двойных звезд	25
Упражнения	28
Глава II. Задача двух тел	28
§ 9. Уравнения относительного движения	29
§ 10. Интегралы площадей	30
§ 11. Выбор постоянных интегрирования в интегралах площадей	32
§ 12. Определение траектории	33
§ 13. Движение по эллипсу	38
§ 14. Движение по параболе	42
§ 15. Движение по гиперболе	43
§ 16. Законы Кеплера	45
§ 17. Выбор единиц. Гауссова постоянная	46
§ 18. Движение двух тел относительно центра тяжести	47
Упражнения	49
Глава III. Вычисление эфемерид планет и комет	50
§ 19. Вычисление координат в плоскости орбиты для эллиптического движения	51
§ 20. Пример вычисления эллиптических координат	55
§ 21. Вычисление координат в плоскости орбиты для параболического движения	56
§ 22. Движение по орбите, эксцентриситет которой близок к единице	58
§ 23. Вычисление экваториальных гелиоцентрических координат. Первый способ	60
§ 24. Вычисление экваториальных гелиоцентрических координат. Вторым способом	62
§ 25. Вычисление эфемериды	64
§ 26. Сравнение эфемериды с наблюдениями	69
§ 27. Предвычисление оппозиции малой планеты	71

§ 28. Вычисление эфемериды при помощи численного интегрирования уравнений движения	73
§ 29. Влияние прецессии на элементы орбиты	77

Дополнения к главе III.

Отрывки из Theoria motus Гаусса, трактующие о точности вычисления эллиптических координат	81
О вычислении параболических координат в случае, когда истинная аномалия близка к 180°	84

Упражнения	86

Часть вторая

Определение первоначальной орбиты

Глава IV. Вычисление элементов орбиты по гелиоцентрическим координатам светила	87
§ 30. Определение элементов орбиты по положению и скорости светила	88
§ 31. Определение элементов орбиты по двум гелиоцентрическим положениям светила	92
§ 32. Продолжение: Вычисление постоянных Гаусса	94
§ 33. Продолжение: Вычисление векторных элементов	95
§ 34. Продолжение: Определение параметра орбиты по способу Гаусса	97
§ 35. Вычисление отношения площадей сектора и треугольника. Способ Ганзена и способ Титьена	103
§ 36. Способ Энке для вычисления отношения площадей сектора и треугольника	109
§ 37. Вычисление отношения площадей сектора и треугольника для гиперболических и параболических орбит	112
§ 38. Вычисление площади фокального сектора конического сечения	114
§ 39. Продолжение: площадь параболического сектора	119
§ 40. Теорема Эйлера-Ламберта	121
§ 41. Преобразование формулы Эйлера	122

Дополнения к главе IV.

Решение уравнения Эйлера относительно хорды	123
Применение уравнения Эйлера-Ламберта к вычислению элементов орбиты	126

Упражнения.	131

Глава V. Подготовка наблюдений для вычисления орбиты

§ 42. Форма, в которой публикуются наблюдения	134
§ 43. Редукция наблюдений за параллакс (экваториальные координаты)	136
§ 44. Редукция наблюдений за параллакс (эклиптические координаты)	138
§ 45. Редукция наблюдений за прецессию, нутацию и аберрацию	142
§ 46. Переход от экваториальных координат к эклиптическим	143

Глава VI. Вычисление круговой орбиты

§ 47. Вычисление круговой орбиты в экваториальных координатах	145
§ 48. Сопоставление формул и пример	148
§ 49. Вычисление круговой орбиты в эклиптических координатах (способ Гаусса)	153
§ 50. Сопоставление формул и пример	156

Дополнение к главе VI. О невозможности круговой орбиты	162

Упражнения.	163

Глава VII. Вычисление орбиты по трем наблюдениям. Метод Гаусса в экваториальных координатах	163
§ 51. Основные уравнения	165
§ 52. Вычисление отношений n_1 и n_2	167
§ 53. Формулы Оппольцера, дающие n_1 и n_2 с точностью до членов 3-го порядка	170
§ 54. Формулы Джиббса, дающие n_1 и n_2 с точностью до членов 4-го порядка	171
§ 55. Определение геоцентрических расстояний	172
§ 56. Точность определения ρ	173
§ 57. Определение точных значений геоцентрических расстояний	175
§ 58. Решение уравнений Лагранжа	177
§ 59. Уравнение Гаусса	180
§ 60. Сопоставление формул для вычисления орбиты по методу Гаусса (экваториальные координаты)	183
§ 61. Первый пример. (Вычисление с арифмометром)	191
§ 62. Второй пример. (Вычисление с логарифмами)	193
Упражнения	201
Глава VIII. Метод Гаусса в эклиптической системе координат	203
§ 63. Основные уравнения	208
§ 64. Первое приближение	207
§ 65. Дальнейшие приближения	209
§ 66. Вычисление элементов	210
§ 67. Сопоставление формул для вычисления орбиты по методу Гаусса (эклиптические координаты)	210
§ 68. Пример	216
Упражнения к главе VIII	223
Глава IX. Особые случаи при вычислении орбиты по трем наблюдениям. Определение орбиты по четырем наблюдениям	224
§ 69. Случай, когда наблюденные положения светила находятся на большом круге	225
§ 70. Определение орбиты по четырем наблюдениям: вычисление геоцентрических расстояний	227
§ 71. Сопоставление формул для вычисления орбиты по четырем наблюдениям	229
§ 72. Пример	232
Глава X. Определение параболической орбиты	235
§ 73. Вычисление геоцентрических расстояний	236
§ 74. Вычисление элементов	239
§ 75. Сопоставление формул	239
§ 76. Пример	245
Дополнения к главе X:	
Уравнение Ольберса	249
О решении основной системы уравнений при определении параболической орбиты	251
Упражнения к главе X	253
Глава XI. Истинные методы улучшения предварительной орбиты	254
§ 77. Проверка наблюдений. Составление нормальных мест	255
§ 78. Метод вариации геоцентрических расстояний	257
§ 79. Улучшение орбиты малых планет	259
§ 80. Улучшение кометных орбит	261
§ 81. Приведение формул к логарифмическому виду	264
	319

	Стр.
О численном интегрировании дифференциальных уравнений	267
1. Выражение производных через разности	267
2. Интегрирование уравнений первого порядка	270
3. Метод квадратур для уравнений первого порядка	271
4. Интегрирование уравнений второго порядка	274
5. Вычисление интеграла, определенного начальной точкой и начальной скоростью	281
6. О коэффициентах формул численного интегрирования	284
7. Исторические замечания	286

Таблицы.

I. Перевод времени в десятичные доли суток	287
II. Вычисление поправки за параллакс	288
III. Средняя наклонность эклиптики к экватору	289
IV. Разность между эксцентрической и средней аномалиями	290
Va. Таблица параболического движения	296
Vb. Истинная аномалия в параболическом движении	299
VI. Таблица функций $\lg U(z)$ и $\lg V(z)$	301
VII. Таблица значений $10^7 \omega^2 k^2 r^{-3}$ для $\omega = 8^d$	302
VIII. Приближенное решение уравнений Лагранжа	310
IX. Коэффициенты формул Джиббса	314
X. Таблица, облегчающая решение уравнения Эйлера	315

Литература	316

Сдано в набор 1 ноября 1932 г.
 Поступило в печать 11 марта 1933 г.
 Формат бумаги 62×94 .
 Количество печатных листов 20.
 Количество печатных знаков в листе 50752.

Ответственный редактор  Мохнач.
 Технический редактор В.  жинт.

ГТТИ № 511.