

М.Ф. СУББОТИН

КУРС  
НЕБЕСНОЙ  
МЕХАНИКИ

ТОМ  
III

ГОСХИМИЗДАТ · 1949

М. Ф. СУББОТИН

КУРС  
НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

ТОМ ТРЕТИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ЛЕНИНГРАД 1949 МОСКВА

14-5-4

Редактор *А. И. Чекмарев*

Техн. редактор *К. М. Волчок*

---

Подписано к печати 22 IV 1949 г.      Тираж 6000 экз.      Печ. л. 17,5      Уч.-изд. л. 20,87.  
47708 тип. зн. в печ. л.      М-09420      Цена 7 р. 30 к., переплет 1 р.      Заказ № 4622.

---

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР  
Ленинград, Измайловский пр., 29.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
-----------------------	---

### Часть первая

## ПРЯЖЕНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ МАСС

Глава I. Основные свойства потенциала . . . . .	9
---	---

§ 1. Введение. Некоторые свойства векторного поля (9). § 2. Притяжение точечных масс (13). § 3. Притяжение непрерывно распределенных масс. Объемные массы (17). § 4. Потенциал простого и двойного слоя (19). § 5. Потенциал в бесконечно удаленных точках (23). § 6. Потенциал и компоненты притяжения внутри притягивающих масс (24). § 7. Вторые производные потенциала. Уравнение Пуассона (28). § 8. Теорема Гаусса о потоке силы притяжения через замкнутую поверхность (32). § 9. Характеристические свойства потенциала (33). § 10. Потенциал и притяжение однородного тела (36). § 11. Энергия распределения масс. Однородный шар и эллипсоид (39).

Глава II. Притяжение эллипсоидальных тел . . . . .	43
--	----

§ 12. Введение (43). § 13. Притяжение однородного эллипсоидального слоя. Теорема Лапласа (45). § 14. Притяжение однородного эллипсоида во внутренней точке (50). § 15. Потенциал однородного эллипсоида во внутренней точке (52). § 16. Притяжение однородного эллипсоида во внешней точке. Теорема Айвори (54). § 17. Потенциал однородного эллипсоида во внешней точке (56). § 18. Выражение притяжения эллипсоида через эксцентриситеты главных сечений. Случай эллипсоида вращения (60). § 19. Притяжение, производимое сфероидом на точку, находящуюся на его поверхности (62). § 20. Притяжение неоднородного эллипсоидального тела (64). § 21. Теорема Сэже (67).

Глава III. Гармонические функции . . . . .	70
--	----

§ 22. Определение и некоторые свойства гармонических функций (70). § 23. Теорема о потоке градиента гармонической функции и вытекающие из нее следствия (73). § 24. Теоремы единственности (75). § 25. О некоторых условиях, однозначно определяющих потенциал (77). § 26. Вторая формула Грина (79). § 27. Теорема Гаусса об арифметическом среднем значений гармонической функций (81). § 28. Краевые задачи теории потенциала (82). § 29. Первая функция Грина (85). § 30. Первая функция Грина для сферы (86). § 31. Решение проблемы Дирихле для сферы (89). § 32. Теорема Пикара (91). § 33. Вторая крайняя задача (92).

## Глава IV. Сферические функции. . . . . 94

- § 34. Сферические полиномы и сферические функции (94).  
 § 35. Полиномы Лежандра (97). § 36. Ассоциированные функции. Сферические гармоники (100). § 37. Формула Максвелла (102).  
 § 38. Свойства полиномов Лежандра (104). § 39. Ортогональность полиномов Лежандра, ассоциированных функций и сферических функций (108). § 40. Теорема сложения для сферических функций (111).  
 § 41. Разложение функции, заданной на поверхности сферы, в ряд по сферическим функциям (113). § 42. Решение проблем Дирихле и Неймана для сферы (117). § 43. Применение сферических функций к разложению потенциала в ряд (119). § 44. О разложении потенциала вблизи притягивающих масс (123).

## Часть вторая

## ТЕОРИЯ ФИГУР НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

## Глава V. Общие свойства фигур равновесия жидкой массы . . . 126

- § 45. Предварительные замечания (126). § 46. Движение изолированной жидкой массы, сохраняющей неизменную форму (128).  
 § 47. Относительное равновесие равномерно вращающейся жидкости (130). § 48. Относительное равновесие однородной сжимаемой жидкости (133). § 49. Равновесие покоящейся жидкости (135).  
 § 50. Теорема Лихтенштейна о существовании экваториальной плоскости (136). § 51. Теорема Пуанкаре о верхней границе угловой скорости вращения (138). § 52. Предел Крудели для угловой скорости вращения жидкости (141). § 53. Теорема Стокса (143).  
 § 54. Модель Роша (147). § 55. Атмосферы светил. Туманность Лапласа (150). § 56. Предел сжатия планет, даваемый моделью Роша (153). § 57. Формула Брунса (156).

## Глава VI. Фигуры равновесия однородной несжимаемой жидкости 159

- § 58. Основные этапы развития теории фигур равновесия однородной жидкости (159). § 59. Эллипсоидальные фигуры равновесия (164).  
 § 60. Эллипсоиды Маклорена при заданной угловой скорости и плотности (168). § 61. Эллипсоиды Маклорена в случае, когда заданы момент вращения, плотность и масса жидкости (170). § 62. Некоторые числовые данные для эллипсоидов Маклорена (172). § 63. Сила тяжести на поверхности эллипсоида Маклорена (174). § 64. Некоторые приложения полученных формул к телам солнечной системы (176). § 65. Эллипсоиды Якоби при заданной угловой скорости и плотности (178). § 66. Эллипсоиды Якоби при заданном моменте вращения, плотности и массе жидкости (181). § 67. Числовые данные для эллипсоидов Якоби (183). § 68. Устойчивость линейных серий фигур равновесия (186). § 69. Относительное равновесие равномерно вращающейся системы (191). § 70. Относительное равновесие свободно вращающейся системы (194). § 71. Фигуры равновесия, близкие к эллипсоидальным (195).

## Глава VII. Фигуры равновесия, деформированные притяжением внешнего тела. . . . . 199

- § 72. Простейшие проблемы этого рода (199). § 73. Приливная деформация неподвижной жидкой массы (200). § 74. Существование и устойчивость бесконечно малых приливных эллипсоидов (203).  
 § 75. Фигура спутника бесконечно малой массы (проблема Роша) (205). § 76. Фигура спутника конечной массы (209). § 77. Фигура Луны (212).

## Глава VIII. Основы механической теории фигур планет. . . . . 214

§ 78. Постановка задачи (214). § 79. Некоторые свойства сфероидов (216). § 80. Сфероид Клэро (221). § 81. Теоремы Клэро о сжатии уровенных поверхностей (223). § 82. Дополнения, вносимые теорией прецессии в учение о фигуре Земли (228). § 83. Границы плотности, вытекающие из предположения, что плотность монотонно возрастает к центру (232). § 84. Внутреннее строение Земли (236). § 85. Преобразование Радо. Некоторые свойства параметра сжатия (238). § 86. Уравнение Радо. Сжатие Земли, даваемое теорией Клэро (242). § 87. Дальнейшее развитие теории Клэро. Сжатие Земли, даваемое теорией гидростатического равновесия (245). § 88. Проблема Стокса для сжатого эллипсоида вращения (251). § 89. Сила тяжести на поверхности уровенного эллипсоида. Формула Соммильяна (253). § 90. Продолжение. Формула Клэро (255). § 91. Фигура Земли (258). § 92. Нормальный сфероид (262). § 93. Сила тяжести на поверхности нормального сфероида (265). § 94. Сжатие Земли. Астрономические методы определения сжатия (270). § 95. Проблема Стокса для трехосного эллипсоида, близкого к сфере (275).

Предметный указатель . . . . . 279

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Третий том заканчивает большую, давно начатую работу над „Курсом Небесной механики“.

План этой работы подвергся в процессе ее выполнения существенным изменениям вследствие значительного сокращения первоначально намеченного объема. Однако основная задача курса осталась прежней: он должен не только давать общее знакомство с Небесной механикой, но и подводить вплотную к конкретным проблемам, требующим дальнейшей разработки, и облегчать такую разработку. Но чтобы сохранить прежнюю направленность, несмотря на сокращение объема, пришлось некоторые разделы Небесной механики, удобно выделяемые в особые монографии, исключить вовсе, — сюда относится, например, теория вращения Земли или теория движения спутников Юпитера. Именно благодаря этому третий том, целиком посвященный теории фигур небесных тел, стал очень однородным по своему содержанию.

Конечно, в Небесной механике, т. е. в динамике солнечной системы, под теорией фигур небесных тел понимается лишь учение о строении планет и их спутников, поскольку строение всех прочих небесных тел рассматривается в астрофизике.

Этот том состоит из двух частей. В первой части, посвященной теории притяжения неподвижных масс, излагаются основные свойства потенциала и сферических функций; особенно же подробно рассматривается притяжение эллипсоидальных тел.

Уже после того как этот том был написан, появилась прекрасная книга Л. Н. Сретенского „Теория ньютоновского потенциала“, содержащая среди прочего обширного материала и те вопросы этой теории, которые нужны для астрономии. Тем не менее, я полагаю, что включение только что указанной первой части, дающей законченное изложение теории потенциала именно в тех границах, в каких она здесь нужна, является вполне оправданным, и не только потому, что читатель избавляется от постоянных ссылок и мелких доделок, но, прежде всего, потому, что рассматриваемая в этих границах теория потенциала выросла из потребностей Небесной механики и остается органически с ней связанной.

Вторая часть начинается рассмотрением общих свойств фигур равновесия жидких тел, после чего излагаются основы теории фигур

равновесия однородной несжимаемой жидкости. Эта теория, столь блестяще развитая Ляпуновым, по всей справедливости принадлежит теоретической механике, где она и излагается (Аппелль, Лямб). В астрономии же эта теория используется лишь как первое, очень грубое приближение. В соответствующих этому границах она и должна здесь излагаться.

В Небесной механике особенно велика опасность подмены естественно-научных проблем чисто формальными математическими задачами, примеры чему мы имеем и в прошлом и в настоящем. Математические орудия должны быть здесь подчинены тем целям, которым они служат. С этой точки зрения изложение вопросов, касающихся трехосных эллипсоидов общего вида (а не близких к сфере), является оправданным лишь там, где оно не вызывает дополнительных трудностей (глава II). Но рассмотрение с такой же общностью других вопросов является излишним. Ведь в природе мы встречаем лишь следы трехосности, если можно так выразиться. А в этих случаях все задачи очень просто разрешаются при помощи разложения в ряды. Таким образом, нет никакой надобности прибегать к функциям Ламе.

Много внимания уделено фигурам равновесия, деформированным притяжением внешних тел. Эта теория, дающая в первом приближении форму Луны и спутников, несомненно заслуживает дальнейшего развития.

Но, конечно, больше всего места уделено фигурам равновесия неоднородных жидких тел, иначе говоря — теории фигур планет. Эта теория развита в двух существенно различных формах: с одной стороны — основываясь на принципе гидростатического равновесия, с другой — опираясь на теорему Стокса. Распределение силы тяжести на уровнях поверхностях рассмотрено подробно, но я не считал целесообразным включать так называемую геодезическую проблему Стокса, т. е. задачу определения уровня поверхности по наблюдениям силы тяжести. Эта задача, для решения которой советские ученые так много сделали, является основой физической геодезии, где она и рассматривается со всеми необходимыми подробностями.

Завершением этого раздела могла бы быть глава, излагающая теорию фигур планет, созданную Ляпуновым и так далеко продвинувшую решение проблемы Клэро. Но эту главу, весьма обширную и несколько иного характера, было признано целесообразным дать в форме особой монографии.

*М. Субботин*

---





ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. Введение. Некоторые свойства векторного поля

Для решения многих вопросов астрономии и геофизики, в частности для построения теории фигур космических тел, нужно знать свойства силового поля, создаваемого данными притягивающими массами. Такое силовое поле определяется своим *напряжением* в каждой точке пространства, т. е. силой, действующей на единичную массу, помещенную в эту точку.

Силовое поле притягивающих масс есть частный случай векторного поля, так как напряжение поля есть вектор, являющийся функцией той точки, в которой это напряжение рассматривается. Напомним, поэтому, некоторые применяемые в дальнейшем свойства векторных полей.

Чтобы задать поле вектора  $\mathbf{F}$  в некоторой области пространства, можно задать три скалярные функции  $F_x(x, y, z)$ ,  $F_y(x, y, z)$ ,  $F_z(x, y, z)$ , дающие компоненты этого вектора по осям координат для каждой точки  $P(x, y, z)$  рассматриваемой области.

Если функции  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  непрерывны, так же как и их частные производные первого порядка, в области  $(S)$ , ограниченной поверхностью  $S$  (которая может состоять и из нескольких не связанных между собой замкнутых поверхностей), то имеет место *формула Остроградского*:

$$\int_{(S)} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) d\tau = \int_S (\alpha F_x + \beta F_y + \gamma F_z) d\sigma, \quad (1)$$

где через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  обозначены косинусы углов, образуемых внешней нормалью к поверхности  $S$  с осями координат.

Элемент объема в тройном интеграле условимся обозначать всегда через  $d\tau$ , а элемент поверхности в двойном — через  $d\sigma$ . Это позволит избежать повторения знака интеграла при написании кратных интегралов.

Выражение

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2)$$

носит название дивергенции вектора  $F$ . Заметим, что, вводя символический вектор-оператор

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad (3)$$

это выражение можно представить в форме скалярного произведения

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F. \quad (4)$$

Так как, с другой стороны, выражение

$$F_n = \alpha F_x + \beta F_y + \gamma F_z \quad (5)$$

есть не что иное, как проекция вектора  $F$  на внешнюю нормаль, то формулу Остроградского можно написать следующим образом

$$\int_{(S)} \operatorname{div} F d\tau = \int_S F_n d\sigma. \quad (6)$$

Двойной интеграл, стоящий в правой части этого равенства, носит название потока вектора  $F$  сквозь поверхность  $S$ . Очевидно, это есть величина, совершенно не зависящая от употребляемой системы координат. Формула (6) выражает поток вектора сквозь замкнутую поверхность через значения дивергенции этого вектора в точках, лежащих внутри поверхности.

Чтобы найти величину дивергенции в определенной точке, можно формулу (6) применить к бесконечно малому объему  $d\tau$ , заключающему эту точку. Получим

$$\operatorname{div} F = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{1}{d\tau} \int F_n d\sigma,$$

где двойной интеграл берется по поверхности, ограничивающей элемент объема  $d\tau$ .

Таким образом, дивергенция в каждой точке зависит только от свойств вектора, но не от употребляемой системы координат.

Введем вместо прямоугольных координат  $x, y, z$  криволинейную систему координат  $q_1, q_2, q_3$  при помощи уравнений

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3).$$

Предполагая эту систему ортогональной для линейного элемента  $ds$ , определяемого равенством

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

будем иметь такое выражение

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (7)$$

причем коэффициенты Ламе  $H_1, H_2, H_3$  даются формулами

$$H_k^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial q_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_k} \right)^2, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (8)$$

В этом случае дивергенция вектора в новых координатах выражается следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 F_3) \right\}, \quad (9)$$

где  $F_1, F_2, F_3$  — проекции вектора  $\mathbf{F}$  на касательные к координатным линиям  $q_1, q_2, q_3$ .

**Потенциальное векторное поле.** Если существует такая скалярная функция  $\varphi(x, y, z)$ , что в каждой точке пространства имеют место равенства

$$F_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (10)$$

то скаляр  $\varphi$  называется *потенциалом* вектора  $\mathbf{F}$ , а этот вектор — *градиентом* скаляра  $\varphi$ . Это записывается следующим образом:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \varphi,$$

или, пользуясь оператором (3),

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi.$$

Подставляя выражения (10) в равенство (2), получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Это выражение носит название *лапласиана* функции  $\varphi$ .

Так как в рассматриваемом случае равенство (5) дает

$$F_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

где через  $\partial n$  обозначена длина элемента нормали, заключенного между точками  $(x, y, z)$  и  $(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z)$ , то формула Остроградского (6) принимает следующий вид:

$$\int_{(\bar{S})} \nabla^2 \varphi \, d\tau = \int_{\bar{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma. \quad (11)$$

В дальнейшем нам понадобится выражение лапласиана в ортогональной криволинейной системе координат. В формуле (9) в рассматриваемом случае надо положить

$$F_k = \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} \quad (k = 1, 2, 3),$$

где  $\partial s_k$  обозначает элемент дуги координатной линии  $q_k$ .

Так как, на основании (7),

$$\partial s_k = H_k \partial q_k,$$

то окончательно получим

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right\}. \quad (12)$$

Поверхности

$$\varphi(x, y, z) = c = \text{const} \quad (13)$$

называются эквипотенциальными (или изопотенциальными). При перемещении  $(dx, dy, dz)$  вдоль такой поверхности имеет место равенство

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

или, на основании (10),

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0.$$

Таким образом, в каждой точке пространства вектор  $\mathbf{F}$  перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку, и потому величина вектора равна  $F_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ . Поэтому, если провести смежную с (13) изопотенциальную поверхность

$$\varphi(x, y, z) = c + \delta c,$$

то величина вектора, равная  $\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , будет обратно пропорциональна расстоянию  $dn$  между этими поверхностями.

**Первая формула Грина.** Естественным обобщением потенциального векторного поля является такое поле, в котором компоненты вектора выражаются через две скалярные функции  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\psi(x, y, z)$  следующим образом:

$$F_x = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad F_y = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad F_z = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

так что

$$\mathbf{F} = \psi \nabla \varphi, \quad F_n = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \psi \nabla \varphi = \psi \nabla^2 \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi.$$

Подставляя эти выражения в равенство (6), получим так называемую *предварительную формулу Грина*:

$$\int_{(S)} (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) d\tau = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \quad (14)$$

Вычтем из этого равенства то, которое получается, если  $\varphi$  и  $\psi$  поменять местами; это даст нам *первую формулу Грина*:

$$\int_{(S)} (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) d\tau = \int_S \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (15)$$

Напомним, что эти равенства имеют место для функций непрерывных, так же как и их производные первого и второго порядка, в области  $(S)$ , ограниченной поверхностью  $S$ . Стоящие справа производные берутся по направлению внешней нормали к поверхности  $S$ .

**Формула Пуанкаре.** Предположим, что функции  $\varphi$  и  $\psi$  таковы, что формула (14) имеет место для любой поверхности  $S$ . Для этого достаточно, чтобы эти функции и их частные производные первого порядка были непрерывны, а частные производные второго порядка были кусочно непрерывны во всем пространстве. Предположим, далее, что каждая из этих функций регулярна на бесконечности. Мы будем говорить, что функция  $\varphi(x, y, z)$  *регулярна* на бесконечности, если для достаточно больших значений  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$  имеют место неравенства

$$|\varphi| < A\rho^{-1}; \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| < A\rho^{-2}, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| < A\rho^{-2}, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| < A\rho^{-2}, \quad (16)$$

где  $A = \text{const}$ .

В формуле (14) примем за поверхность  $S$  сферу радиуса  $\rho$  с центром в начале координат. В силу неравенств (16) и аналогичных для функции  $\psi$  имеем

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{x}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{y}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{z}{\rho} \right| < 3A\rho^{-2}; \quad |\psi| < A\rho^{-1},$$

а потому

$$\left| \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \right| < A\rho^{-1} \cdot 3A\rho^{-2} \cdot 4\pi\rho^2 = 12\pi A^2\rho^{-1}.$$

Отсюда ясно, что при  $\rho \rightarrow \infty$  формула (14) обращается в такую:

$$\int_E (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) d\tau = 0, \quad (17)$$

где интеграл берется по всему пространству.

Делая перестановку функций  $\varphi$  и  $\psi$  и вычитая полученное равенство из (17), получим

$$\int_E (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) d\tau = 0. \quad (18)$$

Соотношения (17) и (18) были использованы Пуанкаре в теории потенциала. Сообразно с этим формула (17) носит название *формулы Пуанкаре*.

## § 2. Притяжение точечных масс

Пусть неподвижные материальные точки  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  притягивают точку  $P$ , имеющую координаты  $(x, y, z)$  и массу  $m$ . Обозначим через  $m_i$  и  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  массу и координаты точки  $Q_i$ , а через  $r_i$  — расстояние  $PQ_i$ , так что

$$r_i^2 = (x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2 + (z - \zeta_i)^2. \quad (1)$$

Сила, с которой точка  $Q_i$  притягивает точку  $P$ , равная по абсолютной величине

$$f \frac{mm_i}{r_i^2},$$

имеет компоненты по осям, соответственно равные

$$fm \frac{m_i(\xi_i - x)}{r_i^3}, \quad fm \frac{m_i(\eta_i - y)}{r_i^3}, \quad fm \frac{m_i(\zeta_i - z)}{r_i^3},$$

где через  $f$  обозначается, как обычно, постоянная притяжения.

Поэтому компоненты результирующей силы, действующей на  $P$ , равны

$$X = fm \sum_1^k m_i (\xi_i - x) r_i^{-3}; \quad Y = fm \sum_1^k m_i (\eta_i - y) r_i^{-3};$$

$$Z = fm \sum_1^k m_i (\zeta_i - z) r_i^{-3}.$$

Изучая свойства силового поля, создаваемого заданными массами  $m_i$ , мы можем массу  $m$  притягиваемой точки считать равной единице. Постоянную притяжения  $f$  мы тоже заменим в наших рассуждениях единицей: чтобы восстановить этот коэффициент в окончательных результатах, нужно только все притягивающие массы (или соответствующие плотности) умножить на  $f$ .

При этих условиях компоненты силы притяжения (или, точнее, компоненты напряжения поля) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_1^k m_i (\xi_i - x) r_i^{-3}; & Y &= \sum_1^k m_i (\eta_i - y) r_i^{-3}; \\ Z &= \sum_1^k m_i (\zeta_i - z) r_i^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Лагранж заметил, что эти величины являются частными производными функции

$$V = \sum_1^k m_i r_i^{-1}, \quad (3)$$

ибо, как легко проверить при помощи (1),

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (4)$$

Таким образом, изучение рассматриваемого силового поля, характеризуемого вектором  $F\{X, Y, Z\}$ , представляющим его напряжение, было приведено к изучению только одной скалярной функции (3). Эта функция была названа Грином (1828) потенциальной функцией, или потенциалом.

В точках  $Q_i$  потенциал обращается в бесконечность. Во всех остальных точках он является непрерывной функцией  $x, y, z$ , так же как и его частные производные любого порядка.

Если точка  $P$  удаляется на бесконечность, так что ее расстояние

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

от начала координат, а следовательно и от притягивающих масс, неограниченно возрастает, то потенциал стремится к нулю. Легко видеть, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho V = M,$$

где  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_k$  есть сумма всех притягивающих масс.

Производные потенциала также стремятся к нулю. Точнее, поведение первых производных (4) на бесконечности характеризуется тем, что при  $\rho \rightarrow \infty$  выражения

$$\left| \rho^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right|, \quad \left| \rho^2 \frac{\partial V}{\partial y} \right|, \quad \left| \rho^2 \frac{\partial V}{\partial z} \right|$$

имеют конечную верхнюю границу; это непосредственно вытекает из формул (2) и очевидных неравенств

$$\left| \frac{\xi_i - x}{r_i} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\eta_i - y}{r_i} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\zeta_i - z}{r_i} \right| \leq 1.$$

Все это показывает, что потенциал есть функция регулярная на бесконечности.

**Уравнение Лапласа.** Дифференцирование равенств (2) дает

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 3 \sum_1^k m_i (\xi_i - x)^2 r_i^{-5} - \sum_1^k m_i r_i^{-3};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 3 \sum_1^k m_i (\eta_i - y)^2 r_i^{-5} - \sum_1^k m_i r_i^{-3};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 3 \sum_1^k m_i (\zeta_i - z)^2 r_i^{-5} - \sum_1^k m_i r_i^{-3}.$$

Складывая почленно эти равенства, получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Итак, в каждой точке, отличной от притягивающих масс, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 V = 0. \quad (5)$$



**Теорема Гаусса.** Пусть замкнутая поверхность  $S$  не проходит ни через одну из точек  $Q_i$ . Если внутри  $S$  нет ни одной из этих точек, то, применив к потенциалу  $V$  формулу Остроградского § 1 (11) и учитывая уравнение Лапласа (5), получим

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0. \quad (6)$$

Предположим теперь, что внутри поверхности  $S$  находятся притягивающие массы  $m_1, m_2, \dots, m_p$ . Опишем из этих точек как центров сферы  $s_1, s_2, \dots, s_p$  с радиусами настолько малыми, что эти сферы не пересекаются ни друг с другом, ни с поверхностью  $S$ . К объему, ограниченному поверхностями  $S, s_1, s_2, \dots, s_p$  формула Остроградского применима; поэтому

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma + \int_{s_1} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma + \dots + \int_{s_p} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0, \quad (7)$$

так как во всем этом объеме  $\nabla^2 V = 0$ .

Чтобы вычислить интеграл

$$J_1 = \int_{s_1} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma,$$

положим

$$V = \frac{m_1}{r_1} + V_1,$$

где  $V_1$  есть, очевидно, потенциал масс  $m_2, m_3, \dots, m_k$ , лежащих вне сферы  $s_1$ . Следовательно, на основании равенства (6)

$$\int_{s_1} \frac{\partial V_1}{\partial n} d\sigma = 0,$$

а потому

$$J_1 = \int_{s_1} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{m_1}{r_1} \right) d\sigma.$$

Заметим, что производная берется здесь по направлению внешней нормали относительно объема, заключенного между поверхностью  $S$  и сферами  $s_1, \dots, s_p$ , т. е. по направлению внутренней нормали к поверхности сферы  $s_1$ . Поэтому  $\partial n = -\partial r_1$ , следовательно

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{m_1}{r_1} \right) = -m_1 \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial r_1} = \frac{m_1}{r_1^2}.$$

Но на поверхности сферы  $r_1 = \text{const}$ , значит,

$$J_1 = \int_{s_1} \frac{m_1}{r_1^2} d\sigma = \frac{m_1}{r_1^2} \cdot 4\pi r_1^2 = 4\pi m_1.$$

Таким образом, равенство (7) принимает вид

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\tau = -4\pi (m_1 + m_2 + \dots + m_p). \quad (8)$$

Сопоставляя его с (6), получим теорему Гаусса: поток градиента потенциала через замкнутую поверхность равен произведению  $-4\pi$  на сумму масс, находящихся внутри этой поверхности.

### § 3. Притяжение непрерывно распределенных масс. Объемные массы

Закон всемирного тяготения, в той форме, как его обычно выражают, устанавливает закон взаимодействия двух материальных точек. Чтобы иметь возможность изучать взаимодействие тел конечных размеров, этот закон нужно дополнить еще следующим положением.

*При вычислении сил, с которыми два тела действуют друг на друга, можно каждое из этих тел разделить на небольшие частицы и вычислить результирующие силы взаимодействия этих частиц, заменяя каждую из них материальной точкой, помещенной в произвольном месте этой частицы и имеющей массу, равную массе частицы. Если затем перейти к пределу, заставив стремиться к нулю наибольшую хорду каждой частицы, то получим силы взаимодействия рассматриваемых тел.*

Справедливость этого положения (обобщающего закон Ньютона в его обычной формулировке) устанавливается совпадением всех вытекающих из него следствий с результатами наблюдений.

Изучение взаимного притяжения двух тел приводится к изучению притяжения телом материальной точки или, что то же самое, к изучению силового поля тела. Этой задачей мы теперь и займемся.

Обозначим через  $\kappa = \kappa(\xi, \eta, \zeta)$  плотность в точке  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  рассматриваемого тела. Мы будем предполагать, что тело можно разделить на конечное число частей таким образом, что во всех точках каждой части плотность существует и является непрерывной функцией координат.

Масса частицы тела, заключающей точку  $Q$ , может быть принята равной  $\kappa d\tau$ , где  $d\tau$  — объем этой частицы. Таким образом, компоненты притяжения, производимого рассматриваемой частицей на единичную массу, помещенную в точке  $P(x, y, z)$ , будут ( $f=1$ )

$$\frac{\kappa d\tau}{r^2} \frac{\xi - x}{r}, \quad \frac{\kappa d\tau}{r^2} \frac{\eta - y}{r}, \quad \frac{\kappa d\tau}{r^2} \frac{\zeta - z}{r},$$

где через

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

обозначено расстояние между точками  $P$  и  $Q$ .

Компоненты притяжения, производимого всем телом, будут поэтому равны

$$X = \int_{\dot{T}} \frac{\xi - x}{r^3} x d\tau, \quad Y = \int_{\dot{T}} \frac{\eta - y}{r^3} x d\tau, \quad Z = \int_{\dot{T}} \frac{\zeta - z}{r^3} x d\tau, \quad (1)$$

где интегралы берутся по всему объему  $T$ , занятому притягивающими массами.

По аналогии с § 2 (3) положим

$$V = \int_{\dot{T}} \frac{x d\tau}{r} \quad (2)$$

и найдем производные этой функции  $V(x, y, z)$  по координатам. Покажем, что эти производные могут быть вычислены по правилу дифференцирования под знаком интеграла, так что, например,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_{\dot{T}} \frac{\partial(r^{-1})}{\partial x} x d\tau = \int_{\dot{T}} \frac{\xi - x}{r^3} x d\tau.$$

Полагая

$$r^{-1} = f(x, y, z),$$

мы можем написать

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\dot{T}} [f(x + h, y, z) - f(x, y, z)] x d\tau,$$

или, пользуясь формулой Тэйлора,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\dot{T}} [f'_x(x, y, z) + \frac{h}{2} f''_{xx}(x + \theta h, y, z)] x d\tau, \quad (3)$$

где  $0 < \theta < 1$ .

Так как

$$\frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial x^2} = \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \quad (4)$$

то

$$\left| \frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial x^2} \right| < \frac{3r^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} = 4r^{-3},$$

вследствие чего интеграл

$$\int_{\dot{T}} f'_{xx}(x + \theta h, y, z) x d\tau$$

имеет конечную верхнюю границу. Таким образом, равенство (3) дает

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_T f'_x(x, y, z) \kappa d\tau,$$

что и доказывает наше утверждение.

Итак, для всякой точки  $P(x, y, z)$ , лежащей вне притягивающего тела, имеют место равенства

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (5)$$

Совершенно таким же способом можно показать, что частные производные любого порядка получают путем дифференцирования выражения (2) под знаком интеграла. Отсюда, между прочим, следует, что потенциал и все его частные производные являются непрерывными функциями  $x, y, z$  во всякой точке, лежащей вне притягивающих масс.

Вычисление вторых производных потенциала при помощи равенств вида (4) дает

$$\nabla^2 V = \int_T \left\{ \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2} \right\} \kappa d\tau = 0.$$

Итак, потенциал объемных масс удовлетворяет уравнению Лапласа во всякой точке, находящейся вне этих масс.

#### § 4. Потенциал простого и двойного слоя

Рассмотрим объем, заключенный между поверхностью  $S$  и бесконечно близкой к ней параллельной поверхностью, находящейся от нее на расстоянии  $\varepsilon$ . Элемент этого объема мы можем взять в форме  $d\tau = \varepsilon d\sigma$ , где  $d\sigma$  — элемент поверхности  $S$ . Если рассматриваемый объем заполнен материей с плотностью  $\kappa$ , то соответствующий потенциал можно представить поверхностным интегралом

$$V = \int_S \frac{\kappa \varepsilon}{r} d\sigma.$$

Предположим, что расстояние  $\varepsilon$  между поверхностями стремится к нулю, а плотность  $\kappa$  одновременно бесконечно возрастает и притом так, что в каждой точке  $(\xi, \eta, \zeta)$  поверхности  $S$  существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \kappa \varepsilon = \mu(\xi, \eta, \zeta).$$

Получающийся в пределе интеграл

$$V = \int_S \frac{\mu}{r} d\sigma \quad (1)$$

носит название потенциала простого слоя;  $\mu$  называется поверхностной плотностью этого слоя. Плотность  $\mu$  мы будем предполагать непрерывной функцией точки поверхности.

Во всякой точке  $(x, y, z)$ , не лежащей на поверхности  $S$ , выражение (1) представляет конечную непрерывную функцию, имеющую непрерывные частные производные любого порядка. Эти частные производные могут быть получены путем дифференцирования выражения (1) под знаком интеграла, что доказывается такими же рассуждениями, как в предыдущем параграфе. В частности, компоненты притяжения в точке  $(x, y, z)$ , не лежащей на поверхности  $S$ , выражаются формулами

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \int_S \frac{\xi - x}{r^3} \mu \, d\sigma, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y} = \int_S \frac{\eta - y}{r^3} \mu \, d\sigma,$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z} = \int_S \frac{\zeta - z}{r^3} \mu \, d\sigma,$$

а вторые производные удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 V = 0.$$

Функция  $V(x, y, z)$ , определяемая равенством (1), сохраняет смысл и остается непрерывной и в том случае, если точка  $(x, y, z)$  совпадает с обыкновенной точкой поверхности  $S$ , т. е. такой точкой, в которой поверхность имеет непрерывно изменяющуюся касательную плоскость. Действительно, легко убедиться, что интеграл (1), становящийся в этом случае несобственным, абсолютно сходится. Однако первые производные функции  $V(x, y, z)$  при прохождении точки  $(x, y, z)$  сквозь поверхность  $S$  претерпевают, вообще говоря, разрыв непрерывности. Характер этого разрыва определяется следующими формулами:

$$\frac{\partial V}{\partial n_+} = -2\pi\mu_0 + \int_S \mu \frac{\partial r^{-1}}{\partial n_+} \, d\sigma,$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_-} = +2\pi\mu_0 + \int_S \mu \frac{\partial r^{-1}}{\partial n_+} \, d\sigma,$$

где  $\mu_0$  есть значение  $\mu$  в рассматриваемой точке поверхности, а знаками  $+$  и  $-$  отмечены два противоположные направления нормали.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> На доказательстве этих формул не останавливаемся; заметим только, что общий случай приводится к рассмотрению частного: к нахождению нормальных производных в центре кругового диска с постоянной поверхностной плотностью. Так как в этом случае потенциал в точках оси диска (принимаемой за ось  $z$ ) равен

$$V = 2\pi\mu_0 (|\sqrt{R^2 + z^2}| - |z|),$$

то

$$\frac{\partial V}{\partial z_+} = -2\pi\mu_0; \quad \frac{\partial V}{\partial z_-} = +2\pi\mu_0.$$

Таким образом, пределы, к которым стремится производная  $\frac{\partial V}{\partial n}$  при приближении к поверхности  $S$  с двух разных сторон, отличаются на  $4\pi\mu_0$ .

Покажем, что потенциал простого слоя (1) является аналитической функцией в каждой точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , не лежащей на поверхности  $S$ .

Приняв, для упрощения письма, точку  $(x_0, y_0, z_0)$  за начало координат, мы должны показать, что функцию  $V$  можно разложить в ряд

$$V(x, y, z) = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k \quad (2)$$

(где индексы  $i, j, k$  принимают значения  $0, 1, 2, \dots$ ), сходящийся при

$$|x| \leq d, \quad |y| \leq d, \quad |z| \leq d, \quad (3)$$

если через  $d$  обозначить достаточно малую положительную величину.

Возьмем  $d$  настолько малым, чтобы для всех точек поверхности  $S$  величина

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

удовлетворила бы неравенству

$$r^2 \geq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2d(|\xi| + |\eta| + |\zeta|) - 3d^2 > 0.$$

В таком случае величина  $r^{-1}$ , рассматриваемая как функция комплексных переменных  $x, y, z$ , будет голоморфной функцией в области (3), а поэтому может быть разложена в этой области в ряд

$$r^{-1} = \sum b_{ijk} x^i y^j z^k. \quad (4)$$

Коэффициенты этого ряда будут по абсолютной величине меньше соответственных коэффициентов ряда

$$M \left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-1} \left(1 - \frac{y}{d}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{d}\right)^{-1},$$

где через  $M$  обозначено наибольшее значение модуля  $r^{-1}$  в области (3). Поэтому ряд (4) будет равномерно сходящимся для всех значений  $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$ , соответствующих точкам поверхности  $S$ . Умножая его на  $\mu(\xi, \eta, \zeta)$  и интегрируя по поверхности  $S$ , получим сходящийся ряд вида (2).

**Потенциал двойного слоя.** Этим именем обозначается интеграл вида

$$W = \int_S \gamma \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} d\tau, \quad (5)$$

где  $\gamma$  — непрерывная функция, заданная в точках поверхности  $S$ ,

Так как

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \\ &= \cos(r, x) \cos(x, n) + \cos(r, y) \cos(y, n) + \cos(r, z) \cos(z, n) = \\ &= \cos(r, n),\end{aligned}\quad (6)$$

то

$$W = - \int_S v \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma.$$

Если через  $d\omega$  обозначить телесный угол, под которым из точки  $P(x, y, z)$  виден элемент  $d\sigma$  поверхности  $S$ , то, как легко видеть,

$$W = - \int_S v d\omega.$$

Рассмотрим частный случай, когда поверхность  $S$  замкнута и  $v = \text{const}$ . Очевидно, здесь мы имеем

$$W(x, y, z) = \begin{cases} -4\pi v, & \text{если точка } P \text{ внутри } S; \\ -2\pi v, & \text{если точка } P \text{ на } S; \\ 0, & \text{если точка } P \text{ вне } S. \end{cases}$$

Таким образом, потенциал двойного слоя может претерпевать разрыв непрерывности при переходе точки  $P(x, y, z)$  сквозь поверхность  $S$ .

Покажем, что потенциал двойного слоя во всякой точке, не лежащей на поверхности  $S$ , является аналитической функцией.

Так как

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\xi - x}{r} = - \frac{\partial r}{\partial x},$$

то равенство (6) дает

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial n} = - \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \cos(x, n) - \frac{\partial r^{-1}}{\partial y} \cos(y, n) - \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \cos(z, n).$$

Следовательно,

$$W(x, y, z) = - \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_3}{\partial z}, \quad (7)$$

где

$$V_1 = \int_S \frac{v \cos(x, n)}{r} d\sigma, \quad V_2 = \int_S \frac{v \cos(y, n)}{r} d\sigma, \quad V_3 = \int_S \frac{v \cos(z, n)}{r} d\sigma$$

суть не что иное, как потенциал простых слоев, имеющих плотность, равную соответственно  $v \cos(x, n)$ ,  $v \cos(y, n)$ ,  $v \cos(z, n)$ .

Поскольку потенциал каждого простого слоя (а следовательно и его частные производные) является аналитической функцией, равенство (7) доказывает наше утверждение.

Интеграл (5) был назван потенциалом двойного слоя в связи со следующей задачей, встретившейся Гельмгольцу в теории магнетизма.

Пусть имеем поверхность  $S$ , на которую наложен слой положительной плотности  $\mu$ . На параллельную поверхность  $S'$ , находящуюся на бесконечно малом расстоянии  $\epsilon$  от  $S$ , наложим слой отрицательной плотности  $-\mu'$ , выбрав эту плотность так, чтобы удовлетворялось условие

$$\mu d\sigma = \mu' d\sigma',$$

где  $d\sigma'$  есть элемент поверхности  $S'$ , соответствующий элементу  $d\sigma$  поверхности  $S$ , т. е. ограниченный нормальными, проведенными к  $S$  в точках контура  $d\sigma$ .

Потенциал, соответствующий такому двойному слою, равняется

$$\int_S \frac{\mu d\sigma}{r} - \int_{S'} \frac{\mu' d\sigma'}{r'},$$

если через  $r$  и  $r'$  обозначить расстояние от рассматриваемой точки  $P(x, y, z)$  до элементов  $d\sigma$  и  $d\sigma'$ .

Полагая

$$\mu = \frac{\nu}{\epsilon},$$

где  $\nu$  некоторая кусочно-непрерывная функция точки поверхности, не зависящая от  $\epsilon$ , этот потенциал можно написать так:

$$\int_S \nu \frac{r^{-1} - r'^{-1}}{\epsilon} d\sigma.$$

Условившись считать положительным направление отрезка нормали  $\epsilon = \delta n$  от отрицательного слоя к положительному и переходя к пределу при  $\epsilon \rightarrow 0$ , для рассматриваемого потенциала получим выражение (5).

## § 5. Потенциал в бесконечно удаленных точках

Если притягиваемая точка  $P(x, y, z)$  неограниченно удаляется так что ее расстояние от начала координат  $O$ , равное

$$\overline{OP} = \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

стремится к бесконечности, то потенциал объемных масс, определяемый равенством § 3 (2), стремится к нулю и при том так, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho V = M, \quad (1)$$

где  $M$  обозначает массу притягивающего тела.

Пусть  $Q$  есть какая-нибудь точка элемента  $d\tau$  объема  $T$ , заполненного притягивающими массами. Из треугольника  $OPQ$ , в котором  $OP = \rho$ ,  $PQ = r$ , имеем

$$\rho - OQ < r < \rho + OQ.$$

Поэтому можно положить

$$r = \rho + a,$$



где  $a$  по абсолютной величине не превосходит наибольшего расстояния точек тела  $T$  от начала координат. Следовательно,

$$\rho V = \int_T \frac{\rho}{\rho+a} x d\tau = \int_T x d\tau - \int_T \frac{a}{\rho+a} x d\tau.$$

Так как

$$\int_T x d\tau = M,$$

а второй интеграл, очевидно, стремится к нулю, то отсюда ясна справедливость равенства (1).

Поведение частных производных первого порядка характеризуется тем, что произведения

$$\rho^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \rho^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \rho^2 \frac{\partial V}{\partial z}$$

остаются, при  $\rho \rightarrow \infty$ , ограниченными по абсолютной величине, т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = O(\rho^{-2}), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = O(\rho^{-2}), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = O(\rho^{-2}).$$

В самом деле, мы можем написать

$$\rho^2 \frac{\partial V}{\partial x} = \rho^2 \int_T \frac{\xi - x}{r^3} x d\tau = \int_T \frac{\xi - x}{r} \left( \frac{\rho}{\rho+a} \right)^2 x d\tau,$$

а так как

$$\left| \frac{\xi - x}{r} \right| \leq 1, \quad \left( \frac{\rho}{\rho+a} \right)^2 < A$$

(где  $A$  может быть взято сколь угодно близким к единице), то отсюда ясна ограниченность абсолютной величины этого выражения.

## § 6. Потенциал и компоненты притяжения внутри притягивающих масс

Если точка  $P(x, y, z)$ , в которой вычисляются потенциал  $V$  и компоненты притяжения  $X, Y, Z$ , находится внутри притягивающих масс, то интегралы

$$V = \int_T \frac{x d\tau}{r}, \tag{1}$$

$$X = \int_T \frac{\xi - x}{r^3} x d\tau, \quad Y = \int_T \frac{\eta - y}{r^3} y d\tau, \quad Z = \int_T \frac{\zeta - z}{r^3} z d\tau, \tag{2}$$

выражающие эти величины, становятся несобственными, так как точка  $P$ , в которой величина

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

обращается в нуль, лежит в области интегрирования. Поэтому нам нужно прежде всего установить, что интегралы (1) и (2) сходятся, ибо только при этом условии они имеют смысл.

Здесь можно воспользоваться следующим хорошо известным критерием: интеграл

$$\int_T F(\xi, \eta, \zeta) d\tau,$$

подинтегральная функция которого кусочно непрерывна во всей области  $T$ , за исключением точки  $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$ , сходится (при этом абсолютно и равномерно), если

$$|F(\xi, \eta, \zeta)| < Ar^{-\alpha},$$

где  $A = \text{const}$ ,  $0 < \alpha < 3$ .

Условия этой теоремы очевидно выполняются для интеграла (1), так как плотность  $\chi(\xi, \eta, \zeta)$  мы считаем кусочно-непрерывной в области  $T$ .

Выполнение условий теоремы для интегралов (2) вытекает из неравенств

$$|\xi - x| \leq r, \quad |\eta - y| \leq r, \quad |\zeta - z| \leq r.$$

В сходимости интегралов (1) и (2) можно убедиться непосредственно, если перейти к полярным координатам с началом в точке  $P$ . Полагая

$$\xi = x + r \sin \theta \cos \psi, \quad \eta = y + r \sin \theta \sin \psi, \quad \zeta = z + r \cos \theta, \\ d\tau = r^2 \sin \theta d\theta d\psi dr,$$

получим интегралы

$$V = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \chi(x + r \sin \theta \cos \psi, \dots) r \sin \theta d\theta d\psi dr, \quad (1')$$

$$X = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \chi(x + r \sin \theta \cos \psi, \dots) \sin \theta d\theta d\psi dr, \dots \quad (2')$$

у которых подинтегральная функция не обращается в бесконечность. Через  $r_0 = r_0(\theta, \psi)$  обозначено значение  $r$ , соответствующее границе области интегрирования.

Выражения (1') и (2') показывают, что  $V, X, Y, Z$  являются непрерывными функциями  $x, y, z$  во всякой области, в которой плотность  $\chi$  кусочно непрерывна.

Покажем теперь, что и в рассматриваемом случае величины (2) равны частным производным потенциала, так что

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3)$$

и аналогично для двух других координат.

Убедиться в справедливости равенства (3) можно следующим образом. Проведем сферу  $s$  с центром в точке  $P(x, y, z)$  радиусом  $r_1$ , настолько малым, чтобы эта сфера целиком находилась внутри  $T$ . Обозначив через  $T_1$  и  $T_2$  части объема  $T$ , лежащие соответственно внутри и вне сферы  $s$ , положим

$$V_1 = \int_{T_1} \frac{x d\tau}{r}, \quad V_2 = \int_{T_2} \frac{x d\tau}{r},$$

и аналогично для  $X_1$  и  $X_2$ . Тогда  $V = V_1 + V_2$ ,  $X = X_1 + X_2$ .

Внутри сферы  $s$  возьмем точку  $P'(x+h, y, z)$ . Так как

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V' - V}{h}; \quad V' = V(x+h, y, z),$$

то наша задача приводится к доказательству равенства

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{V' - V}{h} - X \right) = 0.$$

Итак, покажем, что разность

$$\frac{V' - V}{h} - X = \left( \frac{V'_1 - V_1}{h} - X_1 \right) + \left( \frac{V'_2 - V_2}{h} - X_2 \right) \quad (4)$$

(величина которой, очевидно, не зависит от  $r_1$ ) стремится к нулю вместе с  $h$ .

Так как точка  $P$  лежит вне объема  $T_2$ , то (§ 3)

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = X_2.$$

Следовательно, разность

$$\left| \frac{V'_2 - V_2}{h} - X_2 \right| = \varphi(r_1, h)$$

стремится к нулю вместе с  $h$  при всяком значении  $r_1$ , которое больше  $h$ .

Обращаясь теперь к первому слагаемому выражения (4), заметим, прежде всего, что

$$\left| \frac{V'_1 - V_1}{h} - X_1 \right| \leq \left| \frac{V'_1 - V_1}{h} \right| + |X_1|. \quad (5)$$

Если через  $K$  обозначить верхнюю границу  $x$  в объеме  $T$ , то

$$|X_1| < K \int_{T_1} \frac{d\tau}{r^2}.$$

Чтобы найти стоящий справа интеграл, перейдем к полярной системе координат с началом в точке  $P(x, y, z)$ . Полагая

$$\xi = x + r \sin \theta \cos \psi, \quad \eta = y + r \sin \theta \sin \psi, \quad \zeta = z + r \cos \theta, \\ d\tau = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\psi \, dr,$$

получим

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{r^2} = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_1} dr = 4\pi r_1. \quad (6)$$

Итак,

$$|X_1| < 4\pi K r_1.$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое правой части неравенства (5). Так как

$$V'_1 - V_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \kappa \, d\tau,$$

где через  $r'$  обозначено расстояние от точки  $P'(x+h, y, z)$  до точки  $Q(\xi, \eta, \zeta)$ , в которой находится элемент  $d\tau$ , то, в силу очевидных неравенств

$$|r' - r| < h; \quad \frac{1}{rr'} < \frac{2}{rr'} \leq \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}$$

получим

$$\left| \frac{V'_1 - V_1}{h} \right| < \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \frac{r' - r}{hrr'} \right| \kappa \, d\tau < K \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{r^2} + K \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{r'^2}.$$

Первый из стоящих справа интегралов уже найден. Чтобы оценить величину второго интеграла, опишем радиусом  $r_1 + |h|$  из точки  $P'$  как центра сферу  $s'$ , заключающую внутри себя сферу  $s$ . Тогда на основании (6),

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{r'^2} < \int_{(s')} \frac{d\tau}{r'^2} = 4\pi (r_1 + |h|),$$

а потому

$$\left| \frac{V'_1 - V_1}{h} \right| < 4\pi K (2r_1 + |h|).$$

Следовательно, учитывая что  $|h| < r_1$ , неравенство (5) можно заменить таким

$$\left| \frac{V'_1 - V_1}{h} - X_1 \right| < 16\pi K r_1.$$

Возвращаясь теперь к выражению (4), мы можем написать

$$\left| \frac{V' - V}{h} - X \right| < 16\pi K r_1 + \varphi(r_1, h).$$

Чтобы сделать правую часть меньше любого положительного числа  $\varepsilon$ , достаточно взять для  $r_1$  значение, удовлетворяющее неравенству

$$16\pi Kr_1 < \frac{\varepsilon}{2},$$

после чего, при фиксированном уже  $r_1$ , дать  $|h|$  настолько малое значение, чтобы было

$$\varphi(r_1, h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Равенство (3) полностью доказано.

Мы приходим, таким образом, к следующему заключению:

*потенциал объемных масс имеет в каждой точке как вне притягивающих масс, так и внутри их, частные производные первого порядка, равные соответственным компонентам притяжения. Эти производные непрерывны во всякой области, в которой плотность конечна и кусочно непрерывна.*

## § 7. Вторые производные потенциала.

### Уравнение Пуассона

В точке, находящейся вне притягивающих масс, вторые производные потенциала существуют; их можно получить, дважды дифференцируя подинтегральную функцию в выражении потенциала, что приводит к формулам вида (§ 3)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int_T \left[ \frac{3(\xi - x)^2}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right] \kappa \, d\tau.$$

Но, если рассматриваемая точка  $(x, y, z)$  находится внутри притягивающих масс, то такого рода интегралы, полученные при помощи двукратного дифференцирования подинтегральной функции, уже не будут абсолютно сходящимися. Это делает их мало пригодными для изучения вторых производных, даже если бы удалось доказать допустимость вторичного дифференцирования под знаком интеграла.

Чтобы получить возможность вычислить вторые производные, подвергнем предварительно первые производные особому преобразованию. При этом мы ограничимся рассмотрением того случая, когда плотность  $\kappa(\xi, \eta, \zeta)$  имеет частные производные первого порядка, кусочно непрерывные внутри области  $T$ , и будем предполагать, что в рассматриваемой точке  $P(x, y, z)$  эти частные производные непрерывны.

В силу сделанного предположения мы можем разделить объем  $T$  на два объема  $T_1$  и  $T_2$  таким образом, что точка  $P$  будет лежать внутри объема  $T_1$ , что этот объем не будет иметь общих точек с границей  $T$  и что, наконец, внутри и на границе  $T_1$  частные производные  $\frac{\partial \kappa}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \kappa}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial \kappa}{\partial \zeta}$  будут непрерывны,

Обозначив через  $V_1(x, y, z)$  и  $V_2(x, y, z)$  потенциалы в точке  $P$ , соответствующие массам, находящимся в  $T_1$  и  $T_2$ , получим

$$V = V_1 + V_2. \quad (1)$$

Так как точка  $P$  лежит вне объема  $T_2$ , то потенциал  $V_2$  имеет в этой точке частные производные любого порядка; причем эти производные могут быть найдены при помощи дифференцирования под знаком интеграла (§ 3).

Что касается до потенциала  $V_1$ , то он имеет в точке  $P$  производные первого порядка, выражаемые формулами вида

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int_{T_1} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \kappa \, d\tau.$$

Согласно сделанному нами предположению производная  $\frac{\partial \kappa}{\partial x}$  существует и непрерывна как внутри  $T_1$ , так и на границе этой области. Это обстоятельство позволяет выполнить следующее преобразование только что написанной формулы.

Заметим, прежде всего, что

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = - \frac{\partial r^{-1}}{\partial \xi}, \quad (2)$$

а потому

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \kappa = - \frac{\partial r^{-1}}{\partial \xi} \kappa = - \frac{\partial (\kappa r^{-1})}{\partial \xi} + r^{-1} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi}.$$

Это дает

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = - \int_{T_1} \frac{\partial (\kappa r^{-1})}{\partial \xi} d\tau + \int_{T_1} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\tau,$$

или, если первый из стоящих справа тройных интегралов преобразовать в двойной (§ 1),

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int_{S_1} \frac{\alpha \kappa}{r} d\sigma + \int_{T_1} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\tau, \quad (3)$$

где  $S_1$  есть поверхность, ограничивающая объем  $T_1$ , а через  $\alpha$  обозначен косинус угла, образуемого внутренней нормалью к этой поверхности с осью  $x$ .

Формула (3) показывает, что частная производная потенциала по любому направлению является при сделанных нами предположениях суммой двух потенциалов: объемного потенциала (с плотностью, равной производной  $\kappa$  по рассматриваемому направлению) и потенциала простого слоя (соответствующего плотности  $\alpha \kappa$ , где  $\alpha$  — косинус угла между рассматриваемым направлением и внутренней нормалью к поверхности).

Таким образом, вычисление вторых производных потенциала (1) во внутренней точке приводится к нахождению первых производных двух потенциалов, фигурирующих в формуле (3), и к вычислению вторых производных потенциала  $V_2$  во внешней точке.

Воспользуемся полученными результатами для вычисления лапласиана потенциала во внутренней точке. Так как

$$\nabla^2 V_2 = 0,$$

то

$$\nabla^2 V = \nabla^2 V_1.$$

Формула (3) дает

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = - \int_{\dot{S}_1} \alpha x \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} d\sigma + \int_{\dot{T}_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} d\tau,$$

что можно написать следующим образом, если воспользоваться соотношением (2),

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = - \int_{\dot{S}_1} \alpha x \frac{\partial r^{-1}}{\partial \xi} d\sigma - \int_{\dot{T}_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial r^{-1}}{\partial \xi} d\tau.$$

Итак,

$$\nabla^2 V = -J_1 - J_2, \quad (4)$$

где

$$J_1 = \int_{\dot{S}_1} \left( \alpha \frac{\partial r^{-1}}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial r^{-1}}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial r^{-1}}{\partial \zeta} \right) x d\sigma = \int_{\dot{S}_1} \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} x d\sigma,$$

$$J_2 = \int_{\dot{T}_1} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial r^{-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial r^{-1}}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial r^{-1}}{\partial \zeta} \right) d\tau.$$

Чтобы вычислить эти интегралы, примем за поверхность  $S_1$  поверхность сферы, описанной достаточно малым радиусом  $\epsilon$  из точки  $P$  как центра. Величина лапласиана (4) не зависит, очевидно, от  $\epsilon$ , поэтому достаточно вычислить значения рассматриваемых интегралов при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Согласно сделанному нами предположению мы можем плотность  $x$  и ее частные производные считать непрерывными внутри и на поверхности сферы  $S_1$ . Следовательно, в интеграле  $J_2$

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| < A, \quad \left| \frac{\partial x}{\partial \eta} \right| < A, \quad \left| \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right| < A,$$

где  $A$  надлежащим образом выбранное постоянное число. Поэтому

$$|J_2| < A \int_{\dot{T}_1} \left( \left| \frac{\xi - x}{r^3} \right| + \left| \frac{\eta - y}{r^3} \right| + \left| \frac{\zeta - z}{r^3} \right| \right) d\tau,$$

или

$$|J_2| < 3A \int_{\dot{T}_1} \frac{d\tau}{r^2},$$

т. е.

$$|J_2| < 12\pi A\epsilon.$$

Таким образом, интеграл  $J_2$  стремится к нулю вместе с  $\epsilon$ .

Обратимся теперь к вычислению  $J_1$ . Обозначая через  $x$  значение плотности в точке  $P(x, y, z)$ , а через  $x'$  — ее значение на поверхности сферы  $S_1$ , имеем

$$J_1 = \int_{S_1} \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} x' d\sigma = - \int_{S_1} \frac{\partial r^{-1}}{\partial r} [x - (x - x')] d\sigma,$$

так как  $\partial n = -\partial r$ . Поэтому

$$J_1 = x \int_{S_1} r^{-2} d\sigma - \int_{S_1} r^{-2} (x - x') d\sigma$$

или, замечая, что на поверхности сферы  $r = \epsilon$ ,

$$J_1 = 4\pi x - \int_{S_1} \epsilon^{-2} (x - x') d\sigma.$$

Последний интеграл стремится к нулю. В самом деле, вследствие наличия в точке  $P$  производной по любому направлению, отношение

$$\left| \frac{x - x'}{\epsilon} \right|$$

ограничено. Обозначая его верхнюю границу через  $B$ , получим

$$\left| \int_{S_1} \epsilon^{-2} (x - x') d\sigma \right| < \epsilon^{-2} \cdot B\epsilon \cdot 4\pi\epsilon^2 = 4\pi B\epsilon.$$

Итак, подставляя найденные значения  $J_1$  и  $J_2$  в равенство (4), окончательно найдем

$$\nabla^2 V = -4\pi x. \quad (5)$$

Это соотношение, найденное Пуассоном (1813) и носящее название уравнения Пуассона, позволяет находить плотность  $x$ , когда потенциал  $V$  известен внутри притягивающих масс.

Уравнение Лапласа можно рассматривать как частный случай уравнения (5).

Вторые производные потенциала были нами вычислены в предположении, что плотность  $x$  внутри притягивающих масс имеет частные производные первого порядка и что эти частные производные непрерывны. При этих же предположениях доказано уравнение Пуассона. Но существование вторых производных потенциала и уравнение Пуассона, связывающее их, могут быть доказаны и при значительно более широких предположениях. Так, Гольдер доказал (1882) следующую теорему.



Если рассматриваемую точку  $P(x, y, z)$ , лежащую внутри притягивающих масс, можно заключить в такой объем  $T_1$ , что для каждой двух точек  $(\xi', \eta', \zeta')$ ,  $(\xi'', \eta'', \zeta'')$  этого объема плотность  $\kappa$  удовлетворяет неравенству

$$|\kappa(\xi', \eta', \zeta') - \kappa(\xi'', \eta'', \zeta'')| < A\rho^\alpha,$$

где

$$\rho = \sqrt{(\xi' - \xi'')^2 + (\eta' - \eta'')^2 + (\zeta' - \zeta'')^2},$$

а через  $A$  и  $\alpha$  обозначены постоянные, причем  $0 < \alpha < 1$ , то вторые производные потенциала  $V$  в точке  $P$  существуют и удовлетворяют уравнению Пуассона.

### § 8. Теорема Гаусса о потоке силы притяжения через замкнутую поверхность

Уравнение Пуассона позволяет распространить теорему Гаусса, доказанную нами (§ 2) для точечных масс, на случай объемных масс.

Рассмотрим сначала поверхность  $S$ , лежащую целиком внутри объема, заполненного веществом. Так как вторые производные потенциала существуют и непрерывны как на поверхности  $S$ , так и внутри ее, то формула Остроградского § 1 (11) дает

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_{(S)} \nabla^2 V d\tau.$$

Заменив лапласиан потенциала его значением § 7 (5), получим

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi M, \quad (1)$$

где через

$$M = \int_{(S)} \kappa d\tau$$

обозначена масса вещества, находящегося внутри  $S$ .

Чтобы показать, что формула (1), выражающая теорему Гаусса, имеет место для всякой поверхности  $S$ , рассмотрим, прежде всего, случай, когда эта поверхность, находясь внутри области, занятой веществом, частично совпадает с поверхностью, ограничивающей эту область. Заменив части  $S$ , совпадающие с границей вещества, бесконечно близкой внутренней поверхностью и перейдя к пределу, убедимся, что формула (1) справедлива и в этом случае.

Если, наконец, поверхность  $S$  частично или полностью проходит вне притягивающих масс, то объем, ограниченный  $S$ , разделим на части так, чтобы одни из этих частей подходили под только что рассмотренный случай, а другие заключали только пустое пространство. Так как поток силы через поверхность  $S$  равен сумме потоков через поверхности, ограничивающие все эти части, то формула (1) имеет место для какой угодно поверхности  $S$ .

Приведенное доказательство теоремы Гаусса предполагает, конечно, что плотность вещества обладает всеми свойствами, использованными нами при выводе уравнения Пуассона, и что поверхность  $S$  такова, что возможны указанные переходы к пределу при аппроксимировании этой поверхности изнутри.

## § 9. Характеристические свойства потенциала

В предыдущих параграфах были изучены свойства функции  $V(x, y, z)$ , представляющей потенциал объемных масс, имеющих плотность  $\kappa(x, y, z)$ . Мы видели, что функция  $V(x, y, z)$  существует и непрерывна во всем пространстве и что этими же свойствами обладают ее первые производные; вторые производные существуют и непрерывны в каждой точке, в которой непрерывна плотность  $\kappa$ . Вне притягивающих масс эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 V = 0, \quad (1)$$

а внутри этих масс — уравнению Пуассона

$$\nabla^2 V = -4\pi\kappa. \quad (2)$$

Наконец, при удалении точки  $(x, y, z)$  на бесконечность потенциал  $V$  ведет себя как регулярная функция, причем

$$\lim_{\rho} \rho V = \int_T \kappa d\tau, \quad (3)$$

когда  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ ; интеграл берется по всему объему  $T$ , заполненному массами.

Покажем теперь, что эти свойства вполне определяют потенциал, а потому могут быть использованы для его нахождения. Это вытекает из следующей теоремы.

**Теорема Дирихле.** Пусть плотность  $\kappa(x, y, z)$  масс, заполняющих некоторый объем  $D$ , такова, что соответствующий потенциал  $V$  удовлетворяет уравнению Пуассона. Если найдена функция  $U(x, y, z)$ , регулярная на бесконечности и удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 U = \begin{cases} 0 & \text{вне области } D; \\ -4\pi\kappa & \text{внутри области } D, \end{cases}$$

то можно утверждать, что она совпадает с потенциалом  $V$ .

Для доказательства обозначим через  $V$  потенциал масс, имеющих заданную плотность  $\kappa$ , и положим

$$\varphi = U - V.$$

Функция  $\varphi$  будет непрерывна, так же как ее первые производные во всем пространстве, и регулярна на бесконечности. Непрерывность

ее вторых частных производных может нарушаться лишь вдоль тех поверхностей, где нарушается непрерывность функции  $\chi(x, y, z)$ . Таким образом, к этой функции применима формула Пуанкаре § 1 (17), которая в случае  $\psi = \varphi$  дает

$$\int (\varphi \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi) d\tau = 0, \quad (4)$$

где интеграл берется по всему пространству.

Так как в настоящем случае во всем пространстве (за исключением самое большее точек, лежащих на поверхностях разрыва функции  $\chi$ ) имеет место равенство  $\nabla^2 \varphi = 0$ , то равенство (4) дает

$$\int \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0.$$

Отсюда, учитывая непрерывность первых производных функции  $\varphi$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Так как функция  $\varphi$  непрерывна и регулярна на бесконечности, то эти равенства показывают, что она тождественно равна нулю. Итак, функция  $U$  действительно совпадает с потенциалом  $V$ .

В качестве примера применения этой теоремы найдем потенциал однородного сферического слоя.

Обозначим через  $a$  и  $A$  внутренний и внешний радиусы слоя. Начало координат поместим в центре слоя и положим

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

На основании доказанной теоремы определение потенциала приводится к нахождению такого решения  $V(x, y, z)$  уравнения

$$\nabla^2 V = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq R < a, \\ -4\pi\chi, & \text{если } a < R < A, \\ 0, & \text{если } A < R < +\infty, \end{cases} \quad (5)$$

которое имело бы частные производные второго порядка, непрерывные везде, за исключением только точек, лежащих на сферах  $R = a$  и  $R = A$ , и было бы регулярно на бесконечности.

Так как искомый потенциал обладает, очевидно, сферической симметрией, то можно положить

$$V(x, y, z) = f(R). \quad (6)$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f''(R) \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + f'(R) \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = f''(R) \frac{x^2}{R^3} + f'(R) \left( \frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} \right)$$

и, следовательно,

$$\nabla^2 V = f''(R) + \frac{2}{R} f'(R).$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $R > A$ . Уравнение (5) дает

$$f''(R) + \frac{2}{R} f'(R) = 0,$$

откуда

$$f(R) = C + C_1 R^{-1}.$$

Поскольку функция (6) регулярна на бесконечности и удовлетворяет условию (3), имеем

$$C = 0, \quad C_1 = M,$$

где через  $M = \frac{4}{3} \pi \kappa (A^3 - a^3)$  обозначена масса рассматриваемого слоя. Следовательно

$$V = MR^{-1}, \quad (7)$$

если  $R > A$ .

Перейдем теперь к случаю  $a < R < A$ , когда уравнение (5) обращается в

$$f''(R) + \frac{2}{R} f'(R) = -4\pi\kappa,$$

так что общее решение имеет вид

$$f(R) = C + C_1 R^{-1} - \frac{2}{3} \pi \kappa R^2. \quad (8)$$

Для определения постоянных  $C$  и  $C_1$  надо воспользоваться тем обстоятельством, что функции (7) и (8) должны быть равны, так же как и их первые производные, при  $R = A$ . Получим

$$V = 2\pi\kappa A^2 - \frac{4}{3} \pi \kappa a^3 r^{-1} - \frac{2}{3} \pi \kappa r^2, \quad (9)$$

если  $a < R < A$ .

Наконец, если  $0 \leq R < a$ , то уравнение (5) дает

$$f''(R) + \frac{2}{R} f'(R) = 0,$$

откуда

$$f(R) = C + C_1 R^{-1}.$$

Постоянные интегрирования найдем, приравняв значение этой функции и ее производной при  $R = a$  соответствующим величинам для функции (9). Это даст:

$$V = 2\pi\kappa (A^2 - a^2), \quad (10)$$

если  $0 \leq R < a$ .

Итак, искомый потенциал выражается формулами (7), (9) и (10).

Делая  $a = 0$ , получим следующее выражение для потенциала однородного шара, имеющего радиус  $A$  и плотность  $\kappa$ :

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 2\pi\kappa A^2 - \frac{2}{3}\pi\kappa R^2, & \text{если } 0 \leq R \leq A \\ \frac{4}{3}\pi\kappa A^3 R^{-1}, & \text{если } A \leq R. \end{cases} \quad (11)$$

В заключение отметим, что притяжение, производимое однородным сферическим слоем на точку, находящуюся во внутренней полости, равно нулю. Действительно, в этой полости  $V = \text{const}$ , как это видно из формулы (10).

## § 10. Потенциал и притяжение однородного тела

Для однородного тела потенциал и компоненты притяжения можно представить в более простом виде, нежели в общем случае, так как тройные интегралы могут быть заменены двойными.

Представим себе бесконечно узкий конус с вершиной в притягиваемой точке  $P$ . Если через  $d\omega$  обозначить площадь, вырезаемую этим конусом на поверхности сферы единичного радиуса, имеющей центр в точке  $P$ , то в выражении потенциала

$$V = \int \frac{\kappa d\tau}{r} = \kappa \int \frac{d\tau}{r}$$

можно положить  $d\tau = r^2 d\omega dr$ .

Таким образом, для потенциала тех притягивающих масс, которые находятся внутри проведенного нами конуса, получим следующее выражение

$$\kappa d\omega \int r dr = \frac{1}{2} \kappa d\omega (r_2^2 - r_1^2 + r_4^2 - r_3^2 + \dots). \quad (1)$$

Здесь через  $r_1, r_2, \dots$  обозначены расстояния  $PQ_1, PQ_2, \dots$  притягиваемой точки  $P$  от точек  $Q_1, Q_2, \dots$ , в которых конус пересекает поверхность  $S$  рассматриваемого тела; причем мы предполагаем, что в точке  $Q_1$  конус входит в тело, в точке  $Q_2$  — выходит, в точке  $Q_3$  — снова входит и т. д.

Обозначим, далее, через  $(n_1, r), (n_2, r), \dots$  углы между радиусом-вектором  $r$  и внешней нормалью к поверхности  $S$  в точках  $Q_1, Q_2, \dots$ . Тогда, как легко видеть,

$$r_1^2 d\omega = -d\sigma_1 \cos(n_1, r); \quad r_2^2 d\omega = +d\sigma_2 \cos(n_2, r), \dots$$

если через  $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots$  обозначить части поверхности  $S$ , вырезаемые конусом в точках  $Q_1, Q_2, \dots$ .

Таким образом, выражение (1) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \times [\cos(n_1, r) d\sigma_1 + \cos(n_2, r) d\sigma_2 + \dots],$$

а потенциал всего притягивающего тела можно написать так:

$$V = \frac{1}{2} \times \int_S \cos(n, r) d\sigma. \quad (2)$$

Это выражение для потенциала однородного тела может быть также получено при помощи формулы Остроградского § 1 (1). Если в этой формуле положить (переменными интегрирования являются  $\xi, \eta, \zeta$ ):

$$F_\xi = \frac{\xi - x}{r}, \quad F_\eta = \frac{\eta - y}{r}, \quad F_\zeta = \frac{\zeta - z}{r},$$

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

и заметить, что

$$\frac{\partial F_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial F_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial F_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{2}{r},$$

то получим:

$$\int_T \frac{d\tau}{r} = \frac{1}{2} \int_S \frac{\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z)}{r} d\sigma. \quad (3)$$

Так как

$$\cos(n, r) = \alpha \frac{\xi - x}{r} + \beta \frac{\eta - y}{r} + \gamma \frac{\zeta - z}{r},$$

то это и дает формулу (2). Однако случай, когда точка  $P(x, y, z)$  находится внутри притягивающего тела, требует здесь особого рассмотрения, поскольку формула Остроградского перестает быть непосредственно применимой.

Аналогичное преобразование применимо и к компонентам притяжения.

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\xi - x}{r^3} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right),$$

то

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = - \times \int_T \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau.$$

Делая  $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$  и выполняя подобно предыдущему интегрирование по  $\xi$ , получим первую из формул<sup>1</sup>

$$X = - \times \int_S \frac{\alpha}{r} d\sigma, \quad Y = - \times \int_S \frac{\beta}{r} d\sigma, \quad Z = - \times \int_S \frac{\gamma}{r} d\sigma. \quad (4)$$

<sup>1</sup> Конечно, интегрирование по одной из переменных можно выполнить и при помощи формулы Остроградского, но с некоторым осложнением для случая внутренней точки.

Иногда бывает удобно представить эти формулы в несколько ином виде.

Введем в рассмотрение величину

$$p = \alpha (\xi - x) + \beta (\eta - y) + \gamma (\zeta - z),$$

представляющую расстояние точки  $P(x, y, z)$  от касательной плоскости, проведенной в точке  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  элемента  $d\sigma$ .

Соотношение (3) дает:

$$V = \frac{\gamma}{2} \int_S \frac{p}{r} d\sigma, \quad (5)$$

откуда

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\gamma}{2} \int_S \left[ -\frac{\alpha}{r} + p \frac{\xi - x}{r^3} \right] d\sigma,$$

или, учитывая (4),

$$X = \gamma \int_S \frac{p (\xi - x)}{r^3} d\sigma. \quad (6)$$

Аналогичные выражения могут быть написаны для  $Y$  и  $Z$ .

Формулы (6) показывают, что притяжение однородного тела можно заменить притяжением простого слоя, распространенного на поверхность этого тела с поверхностной плотностью  $\gamma p$ .

Заметим, что в выражении (5) для потенциала поверхностную плотность приходится брать равной  $\frac{1}{2} \gamma p$ . Отличие этой величины от предыдущей объясняется тем, что здесь плотность зависит от положения той точки  $P$ , в которой рассматривается притяжение.

Выведенные в этом параграфе формулы были даны Гауссом (1813).

## § 11. Энергия распределения масс. Однородный шар и эллипсоид

Рассмотрим систему, состоящую из материальных точек  $m_1, m_2, \dots, m_k$ . Чтобы выразить числом потенциальную энергию, которой обладает эта система, условимся считать потенциальную энергию равной нулю для той конфигурации системы, когда расстояния между каждыми двумя точками бесконечно велики. Пусть при переходе от этой начальной конфигурации к такой, при которой расстояние между точками  $m_i$  и  $m_j$  равно  $r_{ij}$ , силами тяготения совершается работа  $W$ . Потенциальная энергия  $U$  рассматриваемой конфигурации определится тогда равенством

$$U = -W.$$

Чтобы вычислить величину  $W$ , которую будем называть энергией данного распределения масс, поступим следующим образом. Переместим сначала точку  $m_1$  из ее начального положения в ее конечное

положение, оставляя пока все остальные точки на бесконечности. При этом никакой работы совершенно не будет, так как отсутствует силовое поле.

Будем теперь перемещать точку  $m_2$  из ее начального положения на бесконечности в ее окончательное положение. Так как потенциал силового поля равен  $f \frac{m_1}{r}$ , то совершенная при этом работа будет равна  $f \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$ .

При перемещении третьей точки с бесконечности в ее окончательное положение будет совершена работа, равная

$$f \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + f \frac{m_2 m_3}{r_{23}},$$

и т. д. Отсюда ясно, что

$$W = \frac{1}{2} \sum_1^k \sum_1^k f \frac{m_i m_j}{r_{ij}}; \quad (i \neq j). \quad (1)$$

Это выражение можно представить в следующей форме:

$$W = \frac{1}{2} \sum_1^k m_i V_i, \quad (2)$$

где

$$V_i = f \sum_1^k \frac{m_j}{r_{ij}}; \quad (j \neq i)$$

есть не что иное, как потенциал рассматриваемой системы масс в точке  $m_i$ .

Формула (2) позволяет вычислить энергию  $W$  и для случая непрерывного распределения масс. Пусть имеем тело, занимающее объем  $T$  и имеющее плотность  $\chi$ . Обозначая через  $V$  потенциал этого тела во внутренних точках и заменяя суммирование интегрированием, по формуле (2) получим

$$W = \frac{1}{2} \int_T V \chi d\tau. \quad (3)$$

**Энергия однородного шара.** Применим эту формулу к вычислению энергии  $W$  для однородного шара, имеющего радиус  $a$  и плотность  $\chi$ .

Так как в этом случае, согласно § 9 (11),

$$V = 2\pi f \chi a^2 - \frac{2}{3} \pi f \chi R^2,$$



где  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , то перейдя к полярным координатам и выполнив интегрирование по двум сферическим координатам, будем иметь

$$W = 2\pi \int_0^a V_k R^2 dR = \frac{16}{15} \pi^2 f k^2 a^5.$$

Так как масса шара равна

$$M = \frac{4}{3} \pi a^3 k,$$

то полученное выражение можно еще представить в таком виде:

$$W = \frac{16}{15} \left(\frac{3}{4}\right)^{5/3} \pi^{1/3} \cdot f M^{5/3} k^{1/3} = 0.9674 f M^{5/3} k^{1/3}. \quad (4)$$

**Энергия однородного эллипсоида.** Для потенциала однородного эллипсоида во внутренних точках в следующей главе будет дано такое выражение (§ 17):

$$V = \pi f k a b c \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{\Delta},$$

где

$$\Delta^2 = (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s).$$

Подставив это выражение в формулу (3), получим

$$W = \frac{2}{15} \pi^2 f k^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^\infty \left(2 + \frac{s}{a^2 + s} + \frac{s}{b^2 + s} + \frac{s}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{\Delta}, \quad (5)$$

так как интегралы

$$\int x^2 d\tau, \quad \int y^2 d\tau, \quad \int z^2 d\tau,$$

взятые по объему эллипсоида и представляющие не что иное, как моменты инерции относительно координатных плоскостей, равны соответственно

$$\frac{4}{15} \pi a^3 b c, \quad \frac{4}{15} \pi a b^3 c, \quad \frac{4}{15} \pi a b c^3,$$

а объем эллипсоида равен

$$\int d\tau = \frac{4}{3} \pi a b c.$$

Выражение (5) можно значительно упростить, если заметить, что

$$\left(\frac{1}{a^2 + s} + \frac{1}{b^2 + s} + \frac{1}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{\Delta} = -2d\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

а потому

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( 2 + \frac{s}{a^2 + s} + \frac{s}{b^2 + s} + \frac{s}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta} = \\ = 2 \int_0^{\infty} \left[ \frac{ds}{\Delta} - s d \left( \frac{1}{\Delta} \right) \right] = 4 \int_0^{\infty} \frac{ds}{\Delta}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$W = \frac{8}{15} \pi^2 f \chi^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{\Delta}. \quad (6)$$

Чтобы стоящий здесь эллиптический интеграл можно было вычислять при помощи таблиц, приведем его к нормальной форме Лежандра, делая

$$\begin{aligned} (a^2 + s) \sin^2 \theta &= a^2 - c^2; \\ a^2 &= c^2 (1 + l^2); \quad b^2 = c^2 (1 + l_1^2). \end{aligned}$$

Это дает:

$$W = \frac{8}{15} \pi^2 f \chi^2 a^2 b^2 c l^{-1} F(\varphi; k),$$

где

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = \frac{l^2 - l_1^2}{l^2};$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + l^2}}.$$

Введем сюда массу эллипсоида  $M$ , пользуясь соотношениями

$$M = \frac{4}{3} \pi \chi a b c = \frac{4}{3} \pi \chi c^3 \sqrt{(1 + l^2)(1 + l_1^2)}.$$

Окончательно получим

$$W = H f M^{5/3} \chi^{1/3}, \quad (7)$$

где числовой коэффициент, равный

$$H = \frac{3}{5} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} l^{-1} (1 + l^2)^{1/6} (1 + l_1^2)^{1/6} F(\varphi; k),$$

зависит лишь от формы эллипсоида

Можно показать, что

$$H \leq \frac{16}{15} \left( \frac{3}{4} \right)^{5/3} \pi^{1/3} = 0,9674;$$

причем равенство имеет место только при  $a = b = c$ , когда выражение (7) совпадает с выражением (4) для шара.

Этот результат является частным случаем следующей замечательной теоремы, открытой Ляпуновым:<sup>1</sup>

*из всех однородных тел, имеющих одинаковую массу и плотность, шар имеет наибольшую энергию  $W$  и, следовательно, наименьшую потенциальную энергию  $U$ .*

---

<sup>1</sup> О теле наибольшего потенциала (Сообщения Харьковского математического общества, 1886).

---

## ГЛАВА II

### ПРИТЯЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ТЕЛ

#### § 12. Введение

Потенциал эллипсоида, а следовательно и силу производимого эллипсоидом притяжения, можно выразить бесконечным рядом, который сходится тем быстрее, чем меньше распределение масс в эллипсоиде отличается от сферической структуры (т. I, § 7). Но для решения многих астрономических и космогонических вопросов; в которых приходится рассматривать силу притяжения эллипсоида общего вида, важно иметь более удобные выражения для этой силы.

В наиболее простом случае *однородного эллипсоида* эта задача, так много занимавшая ученых в течение всего XVIII и начала XIX века, была полностью решена. Основание здесь было положено Ньютоном, который в своих „Математических началах натуральной философии“ (1686) подробно изучил притяжение тел сферической структуры. В частности, им было доказано, что материальная точка, помещенная во внутренней полости однородного сферического слоя, притяжения со стороны этого последнего не испытывает. Эту теорему Ньютон без труда обобщил на случай однородного эллипсоидального слоя (§ 13). Он дал, далее, метод для получения притяжения телом вращения точки, лежащей на его оси, что позволило ему определить притяжение однородного эллипсоида вращения в точках, лежащих на оси.

Дальнейшее развитие геометрического метода, которым Ньютон получил все эти результаты, позволило Маклорену (1742) определить притяжение, производимое эллипсоидом вращения на точку, лежащую на его поверхности. Так как Ньютоном уже было показано, что в случае нахождения притягиваемой точки внутри эллипсоида вращения притяжение пропорционально расстоянию ее от центра, то этим полностью решался, для эллипсоидов вращения, вопрос о нахождении силы тяжести во внутренних точках. Что же касается до внешних точек, то Маклорену удалось решить задачу, даже в этом частном случае, лишь для точек, лежащих в плоскости экватора.

Лагранж, усовершенствовав методы вычисления кратных интегралов, смог аналитически получить все, что Маклорен нашел

геометрическими приемами, и тем подготовил путь для дальнейших успехов (1773). Идя по его стопам, Лежандр, вскоре решил труднейшую часть задачи: нашел притяжение, производимое эллипсоидом вращения на внешнюю точку, в общем случае, когда эта точка не лежит ни на оси, ни в экваториальной плоскости эллипсоида.

Притяжение трехосного эллипсоида рассматривал уже Маклорен, ограничиваясь, впрочем, только точками, лежащими на осях. Во всей своей общности эта проблема была поставлена и решена Лапласом (1782). Обобщая полученные Маклореном и Лежандром результаты, Лаплас показал, что каждая из трех компонент силы притяжения эллипсоидом внешней точки может быть представлена как произведение массы эллипсоида на выражение, зависящее только от эксцентриситетов главных сечений. Отсюда непосредственно вытекает основная теорема: *силы притяжения внешней точки двумя однородными софокусными эллипсоидами одинаково направлены и пропорциональны их массам.* Эта теорема имеет место и в том предельном случае, когда один из эллипсоидов проходит через притягиваемую точку и, следовательно, сила притяжения может быть вычислена по формулам, полученным для внутренних точек. Таким образом, теорема Лапласа<sup>1</sup> приводит задачу о притяжении внешней точки к задаче о притяжении внутренней точки.

Доказательство этой основной теоремы, данное Лапласом, весьма сложно и несколько искусственно; кроме того, оно основано на употреблении рядов, которые не всегда сходятся. Теорема, открытая Джемсом Айвори (1809), дала возможность весьма просто и вполне строго доказать теорему Лапласа (§ 16). Наконец, Шалю удалось не только существенно упростить рассуждения Айвори, но и показать с предельной ясностью, каковы те геометрические свойства эллипсоидов, которые являются первоисточником всех этих теорем (1840). Таким образом, Шаль завершил решение задачи об определении силового поля однородного эллипсоида, связанное с именами Маклорена, Лагранжа, Лежандра, Лапласа и Айвори. Это решение, хорошо освещающее сущность вопроса, подробно излагается в настоящей главе.

Чисто аналитическое решение рассматриваемой задачи, столь же быстро приводящее к цели (т. е. к представлению потенциала, а следовательно и компонент притяжения, однократными интегралами), было дано Гауссом (1813). Оно основано на выражении потенциала однородного тела двойным интегралом, распространенным на поверхность этого тела (§ 10). Переход к параметрическим уравнениям эллипсоида позволяет выполнить одно интегрирование и выразить, таким образом, искомые величины однократными интегралами.

В 1839 г. Лежен-Дирихле указал еще один путь аналитического решения этой задачи, основанный на употреблении предложенного им метода

<sup>1</sup> Эту теорему называют также теоремой Маклорена, который доказал ее в частных случаях и убедился, что она приблизительно справедлива для эллипсоидов, мало отличающихся от шара.

прерывных множителей. Введение такого множителя существенно облегчает преобразование тройного интеграла, распространенного на объем эллипсоида, в однократный интеграл.<sup>1</sup>

Наконец, развитие теории алгебраических форм позволило Мертенсу выполнить непосредственно, хотя и довольно сложным путем, нужные интегрирования.<sup>2</sup>

### § 13. Притяжение однородного эллипсоидального слоя. Теорема Лапласа

Эллипсоидальным слоем называется тело, ограниченное двумя гомотетическими, т. е. подобными и подобно расположенными эллипсоидами. Таким образом, если

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

есть уравнение эллипсоида, ограничивающего слой извне, то уравнение эллипсоида, ограничивающего слой изнутри, будет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2, \quad (2)$$

где  $0 < k < 1$ .

Если прямая пересекает поверхность эллипсоидального слоя в четырех точках, то отрезки этой прямой, лежащие внутри слоя, равны между собой. В самом деле, диаметральной плоскость, сопряженная с прямой

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu},$$

определяется для эллипсоидов (1) и (2) одним и тем же уравнением

$$\frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\mu y}{b^2} + \frac{\nu z}{c^2} = 0;$$

поэтому середина хорды, отсекаемой на прямой эллипсоидом (1), совпадает с серединой хорды, отсекаемой эллипсоидом (2), что и доказывает наше утверждение.

<sup>1</sup> Метод Гаусса можно найти в книге: Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала (Гостехиздат, 1946).

Он подробно излагается также в трактате Тиссерана, указанном в § 58.

Книга Хопфнера (также цитируемая в § 58) содержит весьма подробное изложение метода Дирихле.

Оригинальные мемуары указанных авторов можно найти в сборнике: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 19; Über die Anziehung homogener Ellipsoide (Abhandlungen von Laplace, Ivory, Gauss, Chasles, Lejeune-Dirichlet). 1890.

<sup>2</sup> F. Mertens (Journal für die reine und angew. Math., 70, 1869).

Еще один способ решения рассматриваемой задачи, основанный на использовании круговых сечений эллипсоида, был дан Н. Зüge (Mathem. Ann., 10, 1876).

**Теорема Ньютона.** *Притяжение, производимое эллипсоидальным слоем на точку, находящуюся в его внутренней полости, равно нулю.*

Возьмем бесконечно тонкий конус с вершиной в притягиваемой точке  $P$ . Он вырежет из рассматриваемого слоя два тела, которые можно принять за усеченные конусы, имеющие, на основании только что сказанного, одинаковые высоты. Обозначим высоту каждого из них через  $h$ .

Сферы, описанные из точки  $P$  как центра радиусами  $r$  и  $r + dr$ , вырежут из каждого усеченного конуса элементарный объем, равный  $r^2 d\omega dr$ , где через  $d\omega$  обозначен телесный угол раствора нашего конуса. Притяжение, производимое массой, заключенной в таком объеме, на точку  $P$ , равно

$$\frac{\kappa r^2 d\omega dr}{r^2} = \kappa d\omega dr.$$

Интегрирование этого выражения по длине усеченного конуса дает притяжение, производимое этим последним.

Отсюда следует, что каждый из усеченных конусов притягивает точку  $P$  с силой, равной  $\kappa h d\omega$ . Так как эти силы равны по величине и направлены прямо противоположно, то они взаимно уничтожаются. Таким образом, равнодействующая всех сил, с которыми элементы слоя притягивают точку  $P$ , действительно равна нулю.

Из этой теоремы следует, что потенциал однородного эллипсоидального слоя во внутренней полости сохраняет постоянное значение, аналогично тому, что имеет место для однородного сферического слоя (§ 9).

**Первая теорема Шалля.** *Для бесконечно тонкого однородного эллипсоидального слоя эквипотенциальными поверхностями во внешнем пространстве служат софокусные с ним эллипсоиды.*

Раньше чем начинать доказательство этой теоремы, отметим некоторые свойства софокусных эллипсоидов.

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1 \quad (3)$$

называется софокусным с (1), если фокусы главных сечений этих эллипсоидов совпадают, т. е. если

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2; \quad a^2 - c^2 = a_1^2 - c_1^2.$$

Полагая

$$a_1^2 - a^2 = b_1^2 - b^2 = c_1^2 - c^2 = u,$$

уравнение (3) можно написать так:

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1. \quad (3')$$

Для всякой точки  $(x, y, z)$ , не совпадающей с началом координат, это уравнение имеет один и только один корень, лежащий в интервале  $-c^2 < u < +\infty$ , если условиться обозначать полуоси так, чтобы имели место неравенства

$$a \geq b \geq c.$$

Таким образом, через каждую точку пространства проходит один и только один эллипсоид, софокусный с данным.

Точку  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  эллипсоида (3) будем называть *соответственной* точке  $P(x, y, z)$  эллипсоида (1), если координаты этих точек таковы, что

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x}{a}, \quad \frac{y_1}{b_1} = \frac{y}{b}, \quad \frac{z_1}{c_1} = \frac{z}{c}. \quad (4)$$

Если взять еще одну пару соответственных точек  $Q(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $Q_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ , то расстояния  $PQ_1$  и  $P_1Q$  будут равны, иначе говоря: *расстояние между точкой эллипсоида и произвольной точкой, лежащей на софокусном с ним эллипсоиде, равно расстоянию между соответственными им точками этих эллипсоидов.*

Чтобы убедиться в справедливости этого, достаточно вычислить разность квадратов этих расстояний. В самом деле, пользуясь соотношениями (4), имеем

$$\begin{aligned} \overline{PQ_1^2} - \overline{P_1Q^2} &= (x - \xi_1)^2 - (x_1 - \xi)^2 + \dots = \\ &= \left(x - \frac{a_1}{a} \xi\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a} x - \xi\right)^2 + \dots = \\ &= (a_1^2 - a^2) \left(\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) + \dots = \\ &= (a_1^2 - a^2) \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

После этих предварительных замечаний обратимся к доказательству теоремы Шаля. Пусть данный слой, имеющий плотность  $\kappa$ , ограничен с внешней стороны эллипсоидом (1), а с внутренней — эллипсоидом (2), где  $k \rightarrow 1$ . Во внешнем пространстве возьмем произвольную точку  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  и проведем через нее эллипсоид (3), софокусный с (1). Этот эллипсоид, совместно с эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2. \quad (5)$$

даст нам эллипсоидальный слой, который мы заполним однородной материей, имеющей плотность  $\kappa_1$ .

Сравним потенциал  $V_1(P)$  этого слоя в точке  $P$ , соответственной точке  $P_1$ , с потенциалом  $V(P_1)$  данного слоя в точке  $P_1$ .



Обозначая через  $Q$  произвольную точку данного слоя, через  $d\tau$  — элемент объема в этой точке, через  $r$  — расстояние  $QP_1$ , получим

$$V(P_1) = \int_{(1)} \frac{x d\tau}{r},$$

где интеграл берется по слою, построенному на эллипсоиде (1).

С другой стороны,

$$V_1(P) = \int_{(3)} \frac{x_1 d\tau_1}{r_1},$$

где интеграл распространен на слой, построенный на эллипсоиде (3). Через  $d\tau_1$  обозначен элемент объема этого слоя в точке  $Q_1$ , соответствующей с точкой  $Q$ , а через  $r_1$  — расстояние  $PQ_1$ .

Сохраняя предыдущие обозначения координат точек  $Q$  и  $Q_1$ , имеем

$$d\tau = d\xi d\eta d\zeta, \quad d\tau_1 = d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 = \frac{a_1 b_1 c_1}{abc} d\tau,$$

а так как  $r = r_1$ , то

$$V(P_1) = \frac{xabc}{x_1 a_1 b_1 c_1} V_1(P). \quad (6)$$

Если точка  $P_1$  будет перемещаться по поверхности (3), то вследствие постоянства  $V_1(P)$ , мы будем иметь

$$V(P_1) = \text{const.}$$

Таким образом, все эллипсоиды (3), софокусные с (1), действительно являются эквипотенциальными поверхностями рассматриваемого однородного слоя.

**Вторая теорема Шаля.** *Бесконечно тонкие однородные софокусные эллипсоидальные слои притягивают внешнюю точку с силами, имеющими одинаковое направление, а по величине пропорциональными массам этих слоев.*

Пусть кроме слоя, ограниченного эллипсоидами (1) и (2), имеющего плотность  $x$ , мы имеем еще эллипсоидальный слой с плотностью  $x'$ , ограниченный эллипсоидами

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = k^2, \quad (7)$$

которые софокусны соответственно эллипсоидам (1) и (2).

Через точку  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , лежащую вне этих эллипсоидальных слоев, проведем софокусный эллипсоид (3). На основании предыдущей теоремы он будет являться эквипотенциальной поверхностью для обоих слоев; следовательно, сила притяжения  $F$  первого слоя и сила притяжения  $F'$  второго слоя, будучи направлены по нормали к (3), будут иметь одинаковое направление.

Вводя опять в рассмотрение вспомогательный слой, ограниченный эллипсоидами (3) и (5), при помощи соотношения (6) получим

$$V(P_1) = \frac{\kappa abc}{\kappa_1 a_1 b_1 c_1} V_1(P); \quad V'(P_1) = \frac{\kappa' a' b' c'}{\kappa_1 a_1 b_1 c_1} V_1(P'),$$

где через  $V$  и  $V'$  обозначены потенциалы, соответствующие первому и второму слоям, а через  $P$  и  $P'$  — точки эллипсоидов (1) и (7), соответственные точке  $P_1$ .

Так как точки  $P$  и  $P'$  лежат внутри вспомогательного слоя, то по теореме Ньютона

$$V_1(P) = V_1(P');$$

поэтому

$$V(P_1) = \frac{\kappa abc}{\kappa' a' b' c'} V'(P_1),$$

т. е. потенциалы рассматриваемых слоев относятся как их массы, ибо массы этих слоев, очевидно, пропорциональны произведениям  $\kappa abc$  и  $\kappa' a' b' c'$ .

Дифференцируя последнее равенство по координатам точки  $P_1$ , убедимся, что компоненты сил  $F$  и  $F'$  по любому направлению, а следовательно и эти силы, относятся как массы слоев.

**Теорема Лапласа.** *Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, одинаково направленными, а по величине пропорциональными их массам.*

Полуоси двух однородных софокусных эллипсоидов обозначим через  $(a, b, c)$  и  $(a', b', c')$ ; их плотности — через  $\kappa$  и  $\kappa'$ .

Разобьем первый эллипсоид на бесконечно тонкие слои, проведя нужное число подобных эллипсоидов с полуосями  $(qa, qb, qc)$ , где  $0 < q < 1$ . Софокусные эллипсоиды  $(qa', qb', qc')$  разобьют второй эллипсоид на соответственные слои.

Притяжения, производимые двумя соответственными слоями на внешнюю точку, будут одинаково направлены (по нормали к софокусному эллипсоиду, проходящему через эту точку), а отношение их величин будет равно

$$\frac{\kappa \cdot qa \cdot qb \cdot qc}{\kappa' \cdot qa' \cdot qb' \cdot qc'} = \frac{\kappa abc}{\kappa' a' b' c'} = \frac{M}{M'},$$

где через  $M = \frac{4}{3} \pi \kappa abc$  и  $M' = \frac{4}{3} \pi \kappa' a' b' c'$  обозначены массы эллипсоидов. В том же отношении будут, очевидно, находиться и силы притяжения эллипсоидов, слагающиеся из притяжений отдельных слоев.

Таково доказательство, данное Шалем для этой знаменитой теоремы, позволившей задачу о притяжении эллипсоидом внешней точки привести к более простой задаче о притяжении внутренней точки (§ 16).

### § 14. Притяжение однородного эллипсоида во внутренней точке

Обозначим через  $X, Y, Z$  компоненты притяжения, производимого эллипсоидом

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

в точке  $P(x, y, z)$ , которую будем предполагать внутри эллипсоида, так что

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

Эти величины определяются формулами

$$X = f\kappa \int \frac{\xi - x}{r^3} d\tau; \quad Y = f\kappa \int \frac{\eta - y}{r^3} d\tau; \quad Z = f\kappa \int \frac{\zeta - z}{r^3} d\tau,$$

где

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

а интегралы берутся по объему, ограниченному поверхностью (1).

Достаточно вычислить только одну из компонент притяжения, так как две другие можно получить при помощи перестановки букв. Вычислим компоненту  $Z$ .

Примем точку  $P$  за начало полярной системы координат, так что

$$\xi = x + r \sin \theta \cos \psi; \quad \eta = y + r \sin \theta \sin \psi;$$

$$\zeta = z + r \cos \theta,$$

причем

$$d\tau = r^2 \sin \theta d\theta d\psi dr.$$

Тогда

$$Z = f\kappa \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_1} dr$$

или

$$Z = f\kappa \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_1 \sin \theta \cos \theta d\theta d\psi. \quad (2)$$

Через  $r_1$  обозначен радиус-вектор той точки поверхности эллипсоида, которая лежит в направлении  $(\theta, \psi)$  от точки  $P$ . Эта величина определяется уравнением

$$\frac{(x + r_1 \sin \theta \cos \psi)^2}{a^2} + \frac{(y + r_1 \sin \theta \sin \psi)^2}{b^2} + \frac{(z + r_1 \cos \theta)^2}{c^2} = 1,$$

или

$$Ar_1^2 + 2Br_1 + C = 0, \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= a^{-2} \sin^2 \theta \cos^2 \psi + b^{-2} \sin^2 \theta \sin^2 \psi + c^{-2} \cos^2 \theta, \\ B &= x a^{-2} \sin \theta \cos \psi + y b^{-2} \sin \theta \sin \psi + z c^{-2} \cos \theta, \\ C &= x^2 a^{-2} + y^2 b^{-2} + z^2 c^{-2} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как  $A > 0$  и  $C < 0$ , то это уравнение имеет только один положительный корень

$$r_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Подставив это значение  $r_1$  в равенство (2), получим

$$Z = -f_k \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{B}{A} \sin \theta \cos \theta d\theta d\psi, \quad (5)$$

поскольку интеграл

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A} \sin \theta \cos \theta d\theta d\psi$$

равен нулю. В самом деле, замена  $\theta$  и  $\psi$  через  $\pi - \theta$  и  $\pi + \psi$  показывает, что этот интеграл является суммой четырех интегралов, которые попарно равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

В формулу (5) подставим значение  $B$ , даваемое равенствами (4). Получим

$$Z = -f_k z c^{-2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{A} d\theta d\psi,$$

так как каждый из двух других интегралов равен нулю. В этом легко убеждаемся, деля область интегрирования по  $\psi$  пополам и делая замену  $\psi$  через  $\pi + \psi$ .

Точно так же, деля пополам область интегрирования по  $\theta$  и заменяя  $\theta$  через  $\pi - \theta$  в одной из этих областей, последней формуле можно придать такой вид:

$$Z = -2f_k z c^{-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{A}.$$

Остается подставить сюда вместо  $A$  его значение (4). Представим предварительно эту величину в следующей форме:

$$A = M \cos^2 \psi + N \sin^2 \psi,$$

где

$$M = a^{-2} \sin^2 \theta + c^{-2} \cos^2 \theta; \quad N = b^{-2} \sin^2 \theta + c^{-2} \cos^2 \theta.$$

Пользуясь легко проверяемой формулой ( $M > 0$ ,  $N > 0$ ):

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{M \cos^2 \psi + N \sin^2 \psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{MN}}, \quad (6)$$

получим окончательное выражение  $Z$ . Перестановка букв даст  $X$  и  $Y$ . Эти выражения мы запишем в следующем виде:

$$X = -2Px; \quad Y = -2Qy; \quad Z = -2Rz, \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P &= 2\pi f \chi b c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{V(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)(a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta)} \\ Q &= 2\pi f \chi a c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{V(b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)(b^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta)} \\ R &= 2\pi f \chi a b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{V(c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)(c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Легко видеть, что  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  зависят только от отношений полуосей эллипсоида, но не от его размеров. Так как притяжение однородного эллипсоидального слоя можно рассматривать как разность притяжений двух однородных подобных эллипсоидов, то формулы (7) показывают, что притяжение такого слоя на точку, лежащую в его внутренней полости, равно нулю.

Таким образом, теорема Ньютона (§ 13) есть непосредственное следствие этих формул.

Так как компоненты притяжения являются непрерывными функциями координат, то полученные формулы справедливы для точек, лежащих не только внутри, но и на поверхности эллипсоида.

### § 15. Потенциал однородного эллипсоида во внутренней точке

Полученные в предыдущем параграфе выражения (7) для компонент силы притяжения показывают, что потенциал внутри однородного эллипсоида дается формулой

$$V = V_0 - Px^2 - Qy^2 - Rz^2, \quad (1)$$

где  $V_0$  есть, очевидно, не что иное, как значение потенциала в центре эллипсоида.

Таким образом,

$$V_0 = f\kappa \int \frac{d\tau}{r} = f\kappa \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} r \sin \theta \, d\theta \, d\psi \, dr,$$

где  $r_1$  определяется уравнением § 14 (3) при  $x = y = z = 0$ .  
Следовательно,

$$V_0 = \frac{1}{2} f\kappa \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_1^2 \sin \theta \, d\theta \, d\psi = \frac{1}{2} f\kappa \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta \, d\psi}{A}.$$

Пользуясь опять формулой § 14 (6) для выполнения интегрирования по  $\psi$  и замечая, что интегралы по  $\theta$  в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  и от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi$  равны между собой, получим

$$V_0 = 2\pi f\kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{abc^2 \sin \theta \, d\theta}{V(c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)(c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}.$$

Чтобы представить этот интеграл в более удобном виде, сделаем подстановку

$$\cos \theta = c(c^2 + s)^{-\frac{1}{2}}.$$

Это даст  $V_0$  в следующей, симметричной относительно  $a, b, c$  форме:

$$V_0 = \pi f\kappa abc \int_0^\infty \frac{ds}{V(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}.$$

Та же самая подстановка, будучи применена к выражению § 14 (8) для  $R$ , дает

$$R = \pi f\kappa abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) V(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}. \quad (2)$$

Соответствующие выражения для  $P$  и  $Q$  можно получить, делая аналогичные подстановки, но можно написать и сразу, выполнив надлежащую перестановку букв. Окончательно выражение (1) потенциала во внутренней точке  $(x, y, z)$  представится так:

$$V = \pi f\kappa abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{\Delta}, \quad (3)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)};$$

иногда вместо  $\Delta$  мы будем писать  $\Delta(s)$ .

Примечание. Коэффициенты выражения (1) удовлетворяют соотношению

$$P + Q + R = 2\pi f\kappa. \quad (4)$$

Чтобы в этом убедиться, надо выражение (1) подставить в уравнение Пуассона.

## § 16. Притяжение однородного эллипсоида во внешней точке. Теорема Айвори

Чтобы определить притяжение, производимое однородным эллипсоидом

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

во внешней точке  $P(x, y, z)$ , воспользуемся теоремой Лапласа. Через точку  $P$  проведем софокусный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1 \quad (2)$$

и представим себе, что он заполнен веществом той же плотности  $\kappa$ , что и данный эллипсоид (1). Согласно теореме Лапласа, силы, с которыми эллипсоиды (1) и (2) притягивают точку  $P$ , одинаково направлены и относятся как массы этих эллипсоидов. Поэтому, обозначая через  $(X, Y, Z)$  и  $(X', Y', Z')$  компоненты этих сил, а через  $M$  и  $M'$  — массы эллипсоидов, будем иметь

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{M}{M'}. \quad (3)$$

Так как точка  $P$  находится на поверхности эллипсоида (2), то компоненты притяжения  $(X', Y', Z')$  могут быть вычислены по формулам предыдущего параграфа. Заменяя в формуле § 15 (2) и в аналогичных формулах для  $P$  и  $Q$  полуоси  $a, b, c$  через  $\sqrt{a^2 + u}, \sqrt{b^2 + u}, \sqrt{c^2 + u}$  и замечая, что

$$\frac{M}{M'} = \frac{abc}{\sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}},$$

окончательно получим

$$X = -2Px, \quad Y = -2Qy, \quad Z = -2Rz, \quad (4)$$

где

$$P = \pi f \kappa abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + u + s) \Delta(u + s)}, \quad Q = \dots$$

или, заменяя  $u + s$  через  $s$ ,

$$\left. \begin{aligned} P &= \pi f \kappa abc \int_u^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s) \Delta}, \\ Q &= \pi f \kappa abc \int_u^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s) \Delta}, \\ R &= \pi f \kappa abc = \int_u^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s) \Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Формулы (4) и (5), совместно с уравнением (2), определяющим функцию  $u = u(x, y, z)$ , полностью решают задачу о притяжении эллипсоида (1) во внешней точке  $(x, y, z)$ .

Если в этих формулах положить  $u = 0$ , то они обращаются в формулы предыдущего параграфа, дающие притяжение эллипсоида во внутренней точке. Для точек, лежащих на поверхности эллипсоида, уравнение (2) дает  $u = 0$ , так что для этих точек обе группы формул совпадают, как это и должно быть (§ 6).

Полученные нами результаты позволяют очень просто доказать *теорему Айвори*:

*компоненты, параллельные осям, притяжения, производимого двумя однородными софокусными эллипсоидами (имеющими одинаковую плотность) на соответственные точки, лежащие на их поверхностях, относятся как произведения двух полуосей, перпендикулярных к соответствующей компоненте.*

Обозначим для краткости через  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  полуоси эллипсоида (2), проходящего через точку  $P$ . Обозначим, далее, через  $(\xi, \eta, \zeta)$  координаты точки  $Q$ , лежащей на эллипсоиде (1) и соответственной точке  $P$ , так что

$$\frac{\xi}{x} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{\eta}{y} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{\zeta}{z} = \frac{c}{c'}. \quad (6)$$

Притяжение, производимое эллипсоидом  $(a, b, c)$  в точке  $Q$ , будет равно, по теореме Ньютона, притяжению в этой точке эллипсоида  $(a', b', c')$ . Поэтому, обозначая компоненты этого притяжения через  $E$ ,  $H$ ,  $Z$ , на основании формул § 14 (7) будем иметь:

$$\frac{X'}{E} = \frac{x}{\xi}, \quad \frac{Y'}{H} = \frac{y}{\eta}, \quad \frac{Z'}{Z} = \frac{z}{\zeta};$$



или, учитывая (6),

$$\frac{X'}{E} = \frac{a'}{a}, \quad \frac{Y'}{H} = \frac{b'}{b}, \quad \frac{Z'}{Z} = \frac{c'}{c}.$$

Так как, на основании (3),

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{abc}{a'b'c'},$$

то окончательно имеем

$$\frac{X}{E} = \frac{bc}{b'c'}, \quad \frac{Y}{H} = \frac{ac}{a'c'}, \quad \frac{Z}{Z} = \frac{ab}{a'b'},$$

что и доказывает теорему.

В заключение отметим, что теорему Айвори можно легко доказать непосредственно. Для этого нужно, пользуясь свойствами софокусных эллипсоидов, преобразовать интегралы, выражающие компоненты  $(X, Y, Z)$ , так, чтобы получить компоненты  $(E, H, Z)$ . Таким образом, задачу о притяжении во внешней точке можно свести к задаче о притяжении во внутренней точке и без помощи теоремы Маклорена — Лапласа.

## § 17. Потенциал однородного эллипсоида во внешней точке

Чтобы найти потенциал во внешней точке, можно было бы интегрировать выражения § 16 (4), являющиеся частными производными этого потенциала. Вместо этого воспользуемся теоремой Шаля о том, что эквипотенциальными поверхностями однородного бесконечно тонкого эллипсоидального слоя являются софокусные с ним эллипсоиды (§ 11).

Пусть уравнение внешней поверхности рассматриваемого эллипсоидального тела есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Проведя достаточное число подобных эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2; \quad (0 \leq k \leq 1),$$

разобьем это тело на бесконечно тонкие слои и определим потенциал слоя, заключенного между двумя эллипсоидами, соответствующими значениям  $k$  и  $k + dk$ .

Положив для краткости

$$ak = \alpha, \quad bk = \beta, \quad ck = \gamma,$$

уравнение семейства эквипотенциальных поверхностей этого слоя можно написать так:

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + u_1} + \frac{y^2}{\beta^2 + u_1} + \frac{z^2}{\gamma^2 + u_1} = 1, \quad (1)$$

где  $u_1$  меняется от 0 до  $+\infty$ .

Таким образом, потенциал  $V_k$  рассматриваемого слоя во внешнем пространстве является функцией одного только  $u_1$ , так что

$$V_k = U(u_1),$$

где  $u_1$  определяется уравнением (1) и условием  $u_1 > 0$ . Поэтому

$$\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} = U''(u_1) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + U'(u_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \dots$$

и, следовательно, уравнение Лапласа  $\nabla^2 V_k = 0$  принимает такой вид:

$$U''(u_1) (\nabla u_1)^2 + U'(u_1) \nabla^2 u_1 = 0.$$

Дифференцирование соотношения (1) дает

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{2x}{(\alpha^2 + u_1)N}; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{2}{(\alpha^2 + u_1)N} - \frac{2x}{(\alpha^2 + u_1)^2 N} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2x}{(\alpha^2 + u_1)N^2} \frac{\partial N}{\partial x},$$

где

$$N = \frac{x^2}{(\alpha^2 + u_1)^2} + \frac{y^2}{(\beta^2 + u_1)^2} + \frac{z^2}{(\gamma^2 + u_1)^2}.$$

Поэтому

$$(\nabla u_1)^2 = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 = \frac{4}{N},$$

$$\nabla^2 u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \frac{2}{N} \frac{\psi'(u_1)}{\psi(u_1)},$$

если положить

$$\psi(u_1) = (\alpha^2 + u_1)(\beta^2 + u_1)(\gamma^2 + u_1).$$

Подставив эти выражения в уравнение Лапласа, можем представить его так:

$$\frac{U''(u_1)}{U'(u_1)} = -\frac{1}{2} \frac{\psi'(u_1)}{\psi(u_1)}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$U(u_1) = C \int_{u_1}^{\infty} \frac{ds_1}{\sqrt{\psi(s_1)}} + C'.$$

Так как потенциал на бесконечности обращается в нуль, то  $C' = 0$ . Чтобы определить другую постоянную интегрирования, заметим, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho V_k = m_k,$$

если положить

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

и заставить  $\rho$  увеличиваться до бесконечности. Через  $m_k$  обозначена масса рассматриваемого слоя, равная, очевидно,

$$m_k = \frac{4}{3} \pi \kappa abc [k^3 - (k - dk)^3] = 4\pi \kappa abc k^2 dk.$$

Если считать, что  $a \geq b \geq c$ , то

$$(\alpha^2 + s_1)^{-\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\psi(s_1)}} \leq (\gamma^2 + s_1)^{-\frac{3}{2}},$$

а следовательно,

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha^2 + u_1}} \leq \int_{u_1}^{\infty} \frac{ds_1}{\sqrt{\psi(s_1)}} \leq \frac{2}{\sqrt{\gamma^2 + u_1}}$$

и потому

$$\lim_{u_1} \rho \int_{u_1}^{\infty} \frac{ds_1}{\sqrt{\psi(s_1)}} = \lim_{u_1} \frac{2\rho}{\sqrt{u_1}} = 2.$$

Итак,  $C = \frac{1}{2} m_k$ , а искомый потенциал бесконечно тонкого слоя равен

$$V_k = 2\pi \kappa abc k^2 dk \int_{u_1}^{\infty} \frac{ds_1}{\sqrt{\psi(s_1)}}.$$

Сделав подстановку

$$s_1 = k^2 s, \quad u_1 = k^2 u(k),$$

получим

$$V_k = 2\pi \kappa abc k^3 dk \int_{u(k)}^{\infty} \frac{ds}{\Delta}, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)},$$

а  $u(k)$  определяется следующим, получаемым из (1), уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2 + u(k)} + \frac{y^2}{b^2 + u(k)} + \frac{z^2}{c^2 + u(k)} = k^2. \quad (3)$$

Чтобы получить потенциал всего эллипсоидального тела, нужно проинтегрировать выражение (2) в пределах от  $k = 0$  до  $k = 1$ . Это дает:

$$V = \int_0^1 V_k dk = 2\pi \kappa abc \int_0^1 k dk \int_{u(k)}^{\infty} \frac{ds}{\Delta}.$$

Для упрощения полученного выражения применим интегрирование по частям:

$$\int_0^1 k dk \int_{u(k)}^{\infty} \frac{ds}{\Delta(s)} = \frac{1}{2} \int_{u(1)}^{\infty} \frac{ds}{\Delta(s)} + \frac{1}{2} \int_0^1 k^2 \frac{1}{\Delta(u(k))} \frac{du(k)}{dk} dk.$$

Заменим в последнем интеграле  $k^2$  его выражением (3) и примем за независимую переменную  $s = u(k)$ . Замечая, что  $u(0) = \infty$  и  $u(1) = u$ , где через  $u$  обозначен положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1,$$

окончательно получим

$$V = \pi \kappa a b c \int_u^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta}. \quad (4)$$

Если в этой формуле положить  $u = 0$ , то она даст потенциал однородного эллипсоида во внутренних точках (§ 15).

Преобразуем формулу (4), положив  $s = s' - \lambda$ , где  $s'$  — новая переменная интегрирования, а  $\lambda$  удовлетворяет условию  $0 < \lambda < c^2$ . Это даст:

$$V = \pi \kappa a b c \int_{u'}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a'^2 + s'} - \frac{y^2}{b'^2 + s'} - \frac{z^2}{c'^2 + s'} \right) \frac{ds'}{\Delta'},$$

где

$$u' = u + \lambda; \quad a'^2 = a^2 - \lambda; \quad b'^2 = b^2 - \lambda; \quad c'^2 = c^2 - \lambda;$$

$$\Delta' = \sqrt{(a'^2 + s')(b'^2 + s')(c'^2 + s')},$$

причем  $u'$  определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a'^2 + u'} + \frac{y^2}{b'^2 + u'} + \frac{z^2}{c'^2 + u'} = 1. \quad (5)$$

Заполним эллипсоид  $(a', b', c')$ , софокусный с рассматриваемым  $(a, b, c)$ , однородным веществом с плотностью  $\kappa'$ . Потенциал этого эллипсоида  $V'$  будет выражаться формулой

$$V' = \pi \kappa' a' b' c' \int_{u'}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a'^2 + s'} - \frac{y^2}{b'^2 + s'} - \frac{z^2}{c'^2 + s'} \right) \frac{ds'}{\Delta'},$$

где  $u'$  определяется равенством (5). Это дает равенство

$$\frac{V}{V'} = \frac{\kappa a b c}{\kappa' a' b' c'},$$

позволяющее следующим образом дополнить теорему Лапласа (§ 13):  
*потенциалы двух однородных софокусных эллипсоидов во внешней точке относятся как массы этих эллипсоидов.*

## § 18. Выражение притяжения эллипсоида через эксцентриситеты главных сечений. Случай эллипсоида вращения

Формулы, полученные в § 16 для компонент притяжения эллипсоида, можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} X &= -2Px, & Y &= -2Qy, & Z &= -2Rz; \\ P &= \frac{3}{4}fM \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta}; \\ Q &= \frac{3}{4}fM \int_u^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\Delta}; \\ R &= \frac{3}{4}fM \int_u^\infty \frac{ds}{(c^2+s)\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

если через

$$M = \frac{4}{3} \pi abc \kappa$$

обозначить массу эллипсоида.

В этих формулах надо положить  $u=0$ , если точка  $(x, y, z)$  лежит внутри эллипсоида; если же эта точка находится вне эллипсоида, то  $u$  равняется положительному корню уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1.$$

Чтобы определить форму эллипсоида, достаточно задать эксцентриситеты двух его главных сечений. Мы воспользуемся для этой цели так называемыми вторыми эксцентриситетами, определяемыми равенствами

$$a^2 = c^2 (1 + l^2), \quad b^2 = c^2 (1 + l_1^2). \quad (2)$$

Если, как мы всегда предполагаем,

$$a \geq b \geq c,$$

то  $l$  и  $l_1$  будут вещественны.

Полагая в формулах (1)

$$t = \frac{c}{\sqrt{c^2+s}}$$

и учитывая равенства (2), получим

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{3}{2} f M c^{-3} \int_0^U \frac{t^2 dt}{V(1+l^2 t^2)^3 (1+l_1^2 t^2)}; \\ Q &= \frac{3}{2} f M c^{-3} \int_0^U \frac{t^2 dt}{V(1+l^2 t^2) (1+l_1^2 t^2)^3}; \\ R &= \frac{3}{2} f M c^{-3} \int_0^U \frac{t^2 dt}{V(1+l^2 t^2) (1+l_1^2 t^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$U = \frac{c}{\sqrt{c^2 + u}}; \quad M c^{-3} = \frac{4}{3} \pi \kappa \sqrt{(1+l^2)(1+l_1^2)}.$$

Применим эти формулы к вычислению притяжения, производимого эллипсоидом вращения. Так как в рассматриваемом случае  $l_1 = l$ , то формулы (3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} P &= Q = 2\pi f \kappa (1+l^2) \int_0^U \frac{t^2 dt}{(1+l^2 t^2)^3}; \\ R &= 2\pi f \kappa (1+l^2) \int_0^U \frac{t^2 dt}{1+l^2 t^2}. \end{aligned}$$

Второй из этих интегралов находится сразу; чтобы получить первый, достаточно продифференцировать по  $l$  очевидное равенство

$$\int_0^U \frac{dt}{1+l^2 t^2} = \frac{1}{l} \operatorname{arc} \operatorname{tg} lU.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} P &= Q = \pi f \kappa \frac{1+l^2}{l^3} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} lU - \frac{lU}{1+l^2 U^2} \right); \\ R &= 2\pi f \kappa \frac{1+l^2}{l^3} (lU - \operatorname{arc} \operatorname{tg} lU), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$lU = \frac{cl}{\sqrt{c^2 + u}} = \frac{l}{\sqrt{1+u_1}}, \quad (5)$$

если через  $u_1$  обозначить положительный корень уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{1+l^2 + u_1} + \frac{z^2}{1+u_1} = c^2.$$

В таком виде эти формулы удобны для случая сжатого эллипсоида вращения, для которого  $a = b > c$ . Для вытянутого эллипсоида, когда  $a = b < c$ , эксцентриситет  $l$  становится мнимым.

Ограничиваясь первым случаем, когда  $l$  вещественно, рассмотрим эллипсоид, сжатие которого настолько мало, что  $l < 1$ . Для точек  $(x, y, z)$ , лежащих вне эллипсоида, притяжение которого изучается,  $u_1 > 0$ .

Поэтому, как показывает равенство (5), в рассматриваемом случае  $lU < 1$ , что позволяет заменить выражения (4) такими:

$$\left. \begin{aligned} P = Q &= \frac{2}{3} \pi f_k U^3 \left[ 1 + l^2 \left( 1 - \frac{6}{5} U^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{5} l^4 U^2 \left( 1 - \frac{15}{14} U^2 \right) + \dots \right] \\ R &= \frac{2}{3} \pi f_k U^3 \left[ 1 + l^2 \left( 1 - \frac{3}{5} U^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{5} l^4 U^2 \left( 1 - \frac{5}{7} U^2 \right) + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для точки, лежащей на поверхности и внутри эллипсоида,  $U = 1$ , так что полученные формулы принимают вид

$$\left. \begin{aligned} P = Q &= \pi f_k \frac{1+l^2}{l^3} \left( \arctg l - \frac{l}{1+l^2} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \pi f_k \left( 1 - \frac{1}{5} l^2 + \frac{3}{35} l^4 - \frac{1}{21} l^6 + \dots \right) \\ R &= 2\pi f_k \frac{1+l^2}{l^3} (l - \arctg l) = \\ &= \frac{2}{3} \pi f_k \left( 1 + \frac{2}{5} l^2 - \frac{6}{35} l^4 + \frac{2}{21} l^6 - \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

### § 19. Притяжение, производимое сфероидом на точку, находящуюся на его поверхности

Сжатый эллипсоид вращения, квадратом сжатия которого можно пренебречь, будем называть *эллипсоидальным сфероидом*, или просто — *сфероидом*.

Так как сжатие равно

$$\alpha = \frac{a-c}{a},$$

а первый и второй эксцентриситеты меридианного сечения определяются формулами

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad l = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c},$$

то сжатие выражается через эксцентриситеты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \dots \\ \alpha &= 1 - (1 + l^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} l^2 - \frac{3}{8} l^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Таким образом, имея дело со сфероидом, мы можем пренебрегать четвертыми степенями эксцентриситета.

Вычислим силу  $F$ , с которой сфероид притягивает единичную массу, находящуюся в точке  $(x, y, z)$ , лежащей на его поверхности. Так как

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

то формулы § 18 (7) дают

$$F = \frac{4}{3} \pi f \kappa \left[ (x^2 + y^2) \left( 1 - \frac{2}{5} l^2 + \dots \right) + z^2 \left( 1 + \frac{4}{5} l^2 - \dots \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Выразим координаты  $x, y, z$  через широту  $\varphi$ , т. е. угол между нормалью к эллипсоиду в рассматриваемой точке и плоскостью экватора. Этот угол определяется равенством

$$\sin \varphi = \frac{z}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1 + l^2)^2} + z^2}}, \quad (2)$$

легко выводимым из уравнения эллипсоида

$$\frac{x^2 + y^2}{1 + l^2} + z^2 = c^2. \quad (3)$$

Совместное решение уравнений (2) и (3) дает

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2 (1 + l^2)^2 \cos^2 \varphi}{1 + l^2 \cos^2 \varphi}; \quad z^2 = \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{1 + l^2 \cos^2 \varphi} \quad (4)$$

или

$$x^2 + y^2 = c^2 \cos^2 \varphi [1 + l^2 (1 + \sin^2 \varphi) + \dots],$$

$$z^2 = c^2 \sin^2 \varphi [1 - l^2 \cos^2 \varphi + \dots].$$

Следовательно,

$$F = \frac{4}{3} \pi f \kappa c \left( 1 + \frac{3 + \sin^2 \varphi}{10} l^2 + \dots \right). \quad (5)$$

Вместо полярной полуоси  $c$  введем радиус-вектор  $r$  рассматриваемой на поверхности точки. Так как

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 (1 + l^2 \cos^2 \varphi + \dots), \quad (6)$$

то

$$F = \frac{4}{3} \pi f \kappa r \left( 1 - \frac{1}{2} l^2 \cos^2 \varphi + \dots \right) \left( 1 + \frac{3 + \sin^2 \varphi}{10} l^2 + \dots \right)$$



или

$$F = \frac{4}{3} \pi f \chi r \left( 1 + \frac{3 \sin^2 \varphi - 1}{5} l^2 + \dots \right). \quad (7)$$

Если через  $F_e$  и  $F_p$  обозначить силу притяжения на экваторе и на полюсе, то, как показывает формула (5),

$$\frac{F_p - F_e}{F_e} = \frac{l^2}{10} + \dots$$

или, учитывая (1),

$$\frac{F_p - F_e}{F_e} = \frac{\alpha}{5}.$$

Это приближенное соотношение было получено еще Ньютоном, который использовал его для первого теоретического определения сжатия Земли.

Формула (7) показывает, что при

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{3}; \quad \varphi = \pm 35^\circ 15' 52''$$

сила притяжения выражается равенством

$$F = \frac{4}{3} \pi f \chi r,$$

т. е. равняется силе притяжения шара радиуса  $r$ , имеющего ту же плотность, что и рассматриваемый сфероид.

Интересно отметить, что объем, а следовательно, и масса этого шара будут такие же, как и у сфероида. Действительно, формула (6) дает

$$r = c \left( 1 + \frac{1}{3} l^2 + \dots \right),$$

так что для объема шара получаем

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi c^3 (1 + l^2 + \dots) = \frac{4}{3} \pi a^2 c + \dots$$

Иначе говоря, притяжение однородного сфероида на указанных параллелях такое же, как если бы вся его масса было сосредоточена в центре.

## § 20. Притяжение неоднородного эллипсоидального тела

Эллипсоидальным телом назовем, для краткости, тело, у которого каждая поверхность равной плотности (в том числе и внешняя поверхность тела) имеет уравнение вида

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Будем, далее, предполагать, что поверхности равной плотности не пересекаются, так что через каждую точку  $(\xi, \eta, \zeta)$ , лежащую внутри тела, проходит одна и только одна поверхность (1).

В таком случае полуоси  $a, b, c$  и плотность  $\chi$ , соответствующую поверхности (1), можно считать однозначными функциями некоторого параметра  $p$ . При изменении этого параметра от  $p = p_0$  (в начале координат, которое мы предполагаем совпадающим с центром инерции) до  $p = p_1$  (на внешней поверхности) поверхность (1) проходит один и только один раз через каждую точку тела. За такой параметр можно принять, например, одну из полуосей  $a, b, c$ .

Вычислим притяжение, производимое рассматриваемым телом в точке  $(x, y, z)$ .

Обозначим компоненты притяжения, производимого эллипсоидом  $(a, b, c)$ , заполненным веществом плотности, равной единице, в точке  $(x, y, z)$ , через  $X_i, Y_i, Z_i$ , если эта точка находится внутри эллипсоида, и через  $X_e, Y_e, Z_e$ , если она находится снаружи.

Рассмотрим, далее, слой вещества с плотностью  $\chi = \chi(p)$ , заключенный между эллипсоидами  $(a, b, c)$  и  $(a + da, b + db, c + dc)$ , соответствующими значениям параметра  $p$  и  $p + dp$ . Компоненты притяжения, производимого этим слоем, равны

$$\chi \frac{dX_i}{dp} dp, \quad \chi \frac{dY_i}{dp} dp, \quad \chi \frac{dZ_i}{dp} dp$$

— для внутренней точки, и

$$\chi \frac{dX_e}{dp} dp, \quad \chi \frac{dY_e}{dp} dp, \quad \chi \frac{dZ_e}{dp} dp$$

— для внешней точки.

Суммируя притяжение всех таких бесконечно тонких слоев, для притяжения всего эллипсоидального тела во внутренней точке  $(x, y, z)$  будем иметь

$$X = \int_{p_0}^{\bar{p}} \chi \frac{dX_e}{dp} dp + \int_{\bar{p}}^{p_1} \chi \frac{dX_i}{dp} dp \tag{2}$$

и соответствующие выражения для  $Y$  и  $Z$ . Здесь через  $\bar{p}$  обозначено значение параметра для эллипсоида (1), проходящего через рассматриваемую точку. Иначе говоря,  $\bar{p}$  определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3}$$

Если точка  $(x, y, z)$  находится вне тела, то компоненты притяжения выражаются более простыми формулами

$$X = \int_{p_0}^{p_1} \chi \frac{dX_e}{dp} dp; \quad Y = \int_{p_0}^{p_1} \chi \frac{dY_e}{dp} dp; \quad \dots \tag{4}$$

Входящие в формулы (2) и (4) функции  $X_i$ ,  $X_e$ , ... были найдены в § 16.

В заключение применим полученные формулы к случаю, представляющему наибольший интерес, а именно к вычислению притяжения, производимого *эллипсоидальным сфероидом*, т. е. эллипсоидальным телом, у которого все поверхности равной плотности (1) суть эллипсоиды вращения с очень малыми сжатиями (так что квадратами этих сжатий можно пренебречь).

Обращаясь к § 18, мы для этого случая имеем

$$\frac{1}{x} X_e = \frac{1}{y} Y_e = -\frac{4}{3} \pi f \left( U^3 + l^2 U^3 - \frac{6}{5} l^2 U^5 + \dots \right); \quad (5)$$

$$\frac{1}{z} Z_e = -\frac{4}{3} \pi f \left( U^3 + l^2 U^3 - \frac{3}{5} l^2 U^5 + \dots \right). \quad (6)$$

Так как сжатие  $\alpha$  выражается через эксцентриситет формулой (§ 19)

$$\alpha = \frac{1}{2} l^2 - \frac{3}{8} l^4 + \dots, \quad (7)$$

то члены, содержащие  $l^4$ , мы отбрасываем.

Величина  $U$  определяется равенством

$$U = \frac{c}{\sqrt{c^2 + u}},$$

где  $u$  есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2(1 + l^2) + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1. \quad (8)$$

Чтобы получить  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$ , надо в формулах (5) и (6) положить  $U = 1$ .

За параметр  $p$  возьмем полярную полуось  $c$ . Тогда  $\bar{p} = \bar{c}$  определится уравнением (3), дающим

$$\frac{x^2 + y^2}{\bar{c}^2(1 + l^2)} + \frac{z^2}{\bar{c}^2} = 1.$$

Сопоставляя это соотношение с (8), мы видим, что<sup>1</sup>

$$u = \bar{c}^2 - c^2, \quad U = \frac{c}{\bar{c}}.$$

<sup>1</sup> В рассматриваемом случае эллипсоиды равных плотностей являются, с точностью до величин второго порядка относительно сжатия, софокусными.

Таким образом, окончательно будем иметь для компонентов притяжения сфероида во внутренней точке такие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} X = \frac{1}{y} Y = -\frac{4}{3} \pi f \left[ \frac{1}{c^3} \int_0^{\bar{c}} x d(c^3) + \frac{2}{c^3} \int_0^{\bar{c}} x d(\alpha c^3) - \right. \\ \left. - \frac{12}{5c^5} \int_0^{\bar{c}} x d(\alpha c^5) - \frac{2}{5} \int_{\bar{c}}^{c_1} x \frac{d\alpha}{dc} dc \right], \\ \frac{1}{z} Z = -\frac{4}{3} \pi f \left[ \frac{1}{c^3} \int_0^{\bar{c}} x d(c^3) + \frac{2}{c^3} \int_0^{\bar{c}} x d(\alpha c^3) - \right. \\ \left. - \frac{6}{5c^5} \int_0^{\bar{c}} x d(\alpha c^5) + \frac{4}{5} \int_{\bar{c}}^{c_1} x \frac{d\alpha}{dc} dc \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Полагая в этих формулах  $\bar{c} = c_1$ , получим компоненты притяжения сфероидом внешней точки.

### § 21. Теорема Сэже

Заканчивая главу о притяжении эллипсоидальных тел, рассмотрим еще вопрос об изменении силы тяжести внутри такого тела. Этот вопрос мог бы быть разрешен с точностью до первых степеней сжатия при помощи формул предыдущего параграфа. Учитывая, однако, что этот вопрос имеет практическое значение только для изучения изменения силы тяжести с глубиной в шахтах, мы можем совсем пренебречь сжатием, а также и центробежной силой.

Итак, рассмотрим земной шар, как состоящий из концентрических слоев равной плотности. Слой радиуса  $r$  пусть имеет плотность  $x = x(r)$ .

Ускорение силы тяжести на расстоянии  $r$  от центра определяется равенством

$$g = \frac{4\pi f}{r^2} \int_0^r x r^2 dr. \quad (1)$$

Если бы Земля была однородна, так что  $x$  было бы равно ее средней плотности  $D_m = 5,52$ , то мы имели бы

$$g = \frac{4}{3} \pi f D_m r.$$

Таким образом, в этом случае, при изменении  $r$  от  $r = r_1$  (на поверхности Земли) до  $r = 0$  (в центре), сила тяжести монотонно убывает.

Если мы возьмем другой крайний случай, а именно представим себе, что вся масса Земли  $M$  сосредоточена в ее центре, то для ускорения силы тяжести получим выражение:

$$g = \frac{fM}{r^2}.$$

Здесь, следовательно, сила тяжести монотонно возрастает с глубиной.

Посмотрим теперь, как будет меняться  $g$  в случае, когда плотность  $\chi(r)$  монотонно возрастает от поверхности к центру, т. е. в случае, который находится между только что рассмотренными крайними предположениями.

Дифференцирование равенства (1) дает

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi f \left( \chi - 2r^{-3} \int_0^r \chi r^2 dr \right).$$

Введем среднюю плотность вещества, заключенного внутри сферы радиуса  $r$ , определяемую равенством

$$D = 4\pi \int_0^r \chi r^2 dr : \frac{4}{3} \pi r^3 = 3r^{-3} \int_0^r \chi r^2 dr.$$

Тогда

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi f \left( \chi - \frac{2}{3} D \right).$$

Следовательно, в центре, где  $D(0) = \chi_0$ , имеем

$$\left( \frac{dg}{dr} \right)_{r=0} = \frac{4}{3} \pi f \chi_0 > 0, \quad (2)$$

тогда как на внешней поверхности

$$\left( \frac{dg}{dr} \right)_{r=r_1} = 4\pi f \left( \chi_1 - \frac{2}{3} D_m \right). \quad (3)$$

Если поверхностная плотность  $\chi_1$  удовлетворяет неравенству

$$\chi_1 < \frac{2}{3} D_m, \quad (4)$$

то значения (2) и (3) производной будут разных знаков. Будет, поэтому, существовать такое значение  $r = r'$ , для которого производная обращается в нуль, а сила тяжести имеет максимум.

Для Земли можно принять  $\kappa_1 = 2,7$ , тогда как  $\frac{2}{3} D_m = 3,68$ ; так что условие (4) выполняется. Чтобы найти соответствующее значение  $r'$ , надо знать закон плотностей  $\kappa(r)$ . Если принять<sup>1</sup>

$$\kappa(r) = \kappa_0 \left[ 1 - 1,04 \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 + 0,275 \left( \frac{r}{r_1} \right)^4 \right],$$

то формула (1) даст

$$g = 4\pi f \kappa_0 r \left[ \frac{1}{3} - \frac{1,04}{5} \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 + \frac{0,275}{7} \left( \frac{r}{r_1} \right)^4 \right], \quad (5)$$

откуда

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi f \kappa_0 \left[ \frac{1}{3} - 0,624 \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 + 0,1964 \left( \frac{r}{r_1} \right)^4 \right].$$

Приравнивая это выражение нулю, получим

$$r' = 0,82r_1.$$

Итак, до глубины, равной приблизительно 0,18 земного радиуса, сила тяжести возрастает, а затем убывает до центра Земли.

Равенство (5) показывает, что максимальное значение силы тяжести равно приблизительно 1,05 ее величины на поверхности.

Полученный результат называют иногда *теоремой Сэже*.

---

<sup>1</sup> F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, II Teil, 1884, стр. 492.

## ГЛАВА III

### ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

#### § 22. Определение и некоторые свойства гармонических функций

В двух предыдущих главах рассматривалось нахождение силового поля, обусловленного заданным распределением материи, или, что то же самое, вычисление соответствующего потенциала. Но не всегда задача ставится таким образом. Например, при определении силового поля Земли приходится исходить не из распределения масс внутри Земли, которое нам неизвестно, а из напряжения силы тяжести в точках земной поверхности; здесь приходится, следовательно, находить потенциал во внешнем пространстве, зная его нормальную производную в точках поверхности, ограничивающей притягивающее тело. Решение подобного рода задач требует более детального знакомства со свойствами потенциальной функции в окружающем притягивающие массы пространстве. В этой главе мы увидим, что все такие свойства получаются из одного общего источника: из уравнения Лапласа. Поэтому мы и перейдем сейчас к изучению функций, удовлетворяющих этому уравнению, или так называемых гармонических функций. Начнем с точных определений.

Функцию  $U(x, y, z)$  будем называть *гармонической* в точке  $P(x, y, z)$ , если в окрестности этой точки она непрерывна, имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Функцию  $U$  будем называть *гармонической в конечной замкнутой области  $D$* , если она непрерывна в этой области и является гармонической в каждой внутренней точке.

Если область не замкнута (т. е. ограничивающая ее поверхность к ней не причисляется), то функция называется гармонической в этой области, если она гармоническая в каждой ее точке.

Если область  $D$  бесконечна, то функция  $U$  для того, чтобы быть гармонической, должна еще быть регулярной на бесконечности. Иначе говоря, при  $\rho \rightarrow \infty$ , где

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

выражения

$$\left| \rho U \right|, \quad \left| \rho^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right|, \quad \left| \rho^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \quad \left| \rho^2 \frac{\partial U}{\partial z} \right|$$

должны иметь конечную верхнюю границу.

Отметим некоторые свойства гармонических функций, непосредственно вытекающие из свойств уравнения Лапласа.

**ТЕОРЕМА I.** Если  $U_1$  и  $U_2$  две гармонические в области  $D$  функции, то функция  $c_1 U_1 + c_2 U_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные, будет также гармонической в этой области.

Эта теорема вытекает из того, что уравнение Лапласа

$$\nabla^2 U = 0 \quad (1)$$

линейно и однородно.

**ТЕОРЕМА II.** Если  $U$  есть гармоническая функция в конечной области  $D$ , то все ее частные производные суть также гармонические функции в этой области.

Справедливость этой теоремы является очевидным следствием того, что коэффициенты уравнения (1) постоянны. Существование и непрерывность производных гармонической функции будут доказаны дальше.

Рассмотрим следующий пример применения этих теорем, представляющий самостоятельный интерес.

Функция  $U = r^{-1}$ , где

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

представляет потенциал единичной массы, находящейся в точке  $M(a, b, c)$ . Следовательно, она имеет вторые производные, непрерывные во всякой области, не заключающей этой точки, и удовлетворяющие уравнению (1). Так как она, кроме того, регулярна на бесконечности, то эта функция является гармонической в любой области (конечной или бесконечной), не содержащей точки  $M$ .

Все частные производные этой функции являются также гармоническими функциями везде, за исключением точки  $M$ .

Вычислим лапласиан функции  $r^m$ . Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^m}{\partial x} &= m r^{m-1} \frac{\partial r}{\partial x} = m r^{m-2} (x-a), \\ \frac{\partial^2 r^m}{\partial x^2} &= m r^{m-2} + m(m-2) r^{m-4} (x-a)^2, \end{aligned}$$

то

$$\nabla^2 (r^m) = m(m+1) r^{m-2}. \quad (2)$$

Легко видеть, что лапласиан произведения двух функций выражается формулой

$$\nabla^2 (UU') = U \nabla^2 U' + 2 \nabla U \cdot \nabla U' + U' \nabla^2 U. \quad (3)$$



Применим формулу (3) к вычислению лапласиана выражения  $f(\rho) U_n$ , где через  $U_n$  обозначена гармоническая функция, однородная степени  $n$ , т. е. удовлетворяющая уравнению Эйлера

$$x \frac{\partial U_n}{\partial x} + y \frac{\partial U_n}{\partial y} + z \frac{\partial U_n}{\partial z} = n U_n,$$

а через  $\rho$  обозначен радиус-вектор  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .  
Так как

$$\nabla^2 [f(\rho)] = f''(\rho) + \frac{2}{\rho} f'(\rho),$$

$$\nabla f(\rho) \cdot \nabla U_n = f'(\rho) \left[ \frac{x}{\rho} \frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{y}{\rho} \frac{\partial U_n}{\partial y} + \frac{z}{\rho} \frac{\partial U_n}{\partial z} \right],$$

то окончательно получим

$$\nabla^2 [f(\rho) U_n] = U_n \left[ f''(\rho) + \frac{2n+2}{\rho} f'(\rho) \right]. \quad (4)$$

Если  $f(\rho) = \rho^m$ , то эта формула дает

$$\nabla^2 (\rho^m U_n) = m(m+2n+1) \rho^{m-2} U_n.$$

Отсюда ясно, что  $\rho^{-2n-1} U_n$  есть также гармоническая функция

**ТЕОРЕМА III.** Гармоническая функция  $U(x, y, z)$  переходит в гармоническую функцию новых переменных при следующих преобразованиях:

1) переносе начала координат:

$$x = x' + a; \quad y = y' + b; \quad z = z' + c;$$

2) повороте осей координат, т. е. при ортогональной подстановке

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z',$$

$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',$$

$$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z';$$

3) при преобразовании вида

$$x = kx'; \quad y = ky'; \quad z = kz'.$$

Эта теорема легко доказывается непосредственной проверкой

**ТЕОРЕМА IV.** Если  $U(x, y, z)$  гармоническая функция, то выражение

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z}$$

есть также гармоническая функция.

В самом деле,

$$\nabla^2 \left( x \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 U; \dots$$

поэтому лапласиан указанного выражения равен

$$2\nabla^2 U + \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla^2 U,$$

откуда и вытекает справедливость теоремы.

Эту теорему можно выразить иначе. Если  $U$  — гармоническая функция, то

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \rho},$$

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , есть также гармоническая функция.

Действительно, производная по направлению радиуса-вектора  $\rho$  равна

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{x}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{y}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{z}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

**ТЕОРЕМА V.** Если  $U(x, y, z)$  гармоническая функция, то выражение

$$\frac{1}{\rho} U\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right)$$

есть также гармоническая функция.

Эта теорема, представляющая так называемое преобразование В. Томсона (1845), легко проверяется прямым вычислением.

### § 23. Теорема о потоке градиента гармонической функции и вытекающие из нее следствия

Рассмотрим функцию  $U(x, y, z)$ , гармоническую в области  $D$ . Так как

$$\nabla^2 U = 0,$$

то для произвольной поверхности  $S$ , лежащей внутри  $D$ , теорема Остроградского (§ 1) дает:

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0. \quad (1)$$

Это равенство доказывает следующую теорему.

**ТЕОРЕМА I.** Поток градиента гармонической функции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Отсюда вытекает ряд важных свойств гармонических функций.

**ТЕОРЕМА II.** Функция, гармоническая в некоторой области, не может иметь во внутренней точке этой области ни максимума, ни минимума.

Допустим, вопреки теореме, что функция  $U$  имеет во внутренней точке  $P$  максимум. Из точки  $P$ , как центра, опишем сферу  $S$ . Радиус этой сферы мы можем взять настолько малым, что сфера

будет целиком находиться внутри области  $D$ , а производная  $\partial U/\partial n$ , взятая по направлению внешней нормали, будет отрицательна во всех точках, лежащих на поверхности сферы. Но в таком случае все элементы интеграла, стоящего в левой части равенства (1), будут отрицательны и этот интеграл не будет равен нулю. Итак, предположение, что функция имеет максимум, приводит к противоречию с равенством (1). Совершенно таким же образом убеждаемся в невозможности минимума.

**ТЕОРЕМА III.** *Вне притягивающих масс потенциал не может иметь ни максимума, ни минимума. Внутри притягивающих масс он может иметь максимум, но не может иметь минимума.*

Первая часть этой теоремы есть прямое следствие предыдущей, поскольку вне притягивающих масс потенциал есть гармоническая функция. Что потенциал внутри масс может иметь максимум, показывает пример однородного шара (§ 9) или однородного эллипсоида (§ 15): и в том и в другом случае потенциал имеет максимум в центре.

Чтобы убедиться в невозможности минимума, допустим, что во внутренней точке  $P$  потенциал  $V$  имеет минимум. В таком случае, во всех точках сферы  $S$ , описанной из точки  $P$  как центра, достаточно малым радиусом, производная  $\partial V/\partial n$  по направлению внешней нормали будет положительна. Поэтому должно иметь место неравенство

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma > 0.$$

С другой стороны, пользуясь уравнением Пуассона

$$\nabla^2 V = -4\pi f z,$$

имеем

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_{(S)} \nabla^2 V d\tau = -4\pi f \int_{(S)} z d\tau < 0.$$

Полученное противоречие доказывает недопустимость сделанного нами предположения.

**С л е д с т в и е.** Притягиваемая точка не может находиться в устойчивом равновесии вне притягивающих масс. Действительно, устойчивое равновесие может иметь место лишь там, где потенциал имеет изолированный максимум, т. е. где потенциальная энергия имеет изолированный минимум.

Например, в силовом поле двух неподвижных притягивающих центров существует положение равновесия на прямой, соединяющей эти центры, т. е. такая точка, в которой

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Но равновесие в этом случае очевидно неустойчиво.

**ТЕОРЕМА IV.** *Гармоническая функция не может иметь во всех точках некоторой линии, или поверхности, или объема постоянное значение, большее (или меньшее), нежели во всех соседних точках.*

Эта теорема, являющаяся обобщением второй, доказывается совершенно таким же образом. Допустим, например, что существует поверхность  $s$  (замкнутая или незамкнутая), во всех точках которой функция  $U$  имеет постоянное значение, превосходящее значение этой функции во всех смежных точках. Окружив  $s$  достаточно близкой поверхностью  $S$ , мы найдем, что во всех точках  $S$  будет  $\frac{\partial U}{\partial n} < 0$ , если производная берется по внешней нормали. Но это несовместимо с равенством (1).

В заключение отметим, что свойство гармонических функций, выражаемое теоремой I, вполне эти функции характеризует, как это видно из следующей обратной теоремы, на доказательстве которой не останавливаемся:

*если функция  $U$  непрерывна в области  $D$ , имеет непрерывные частные производные внутри этой области и если интеграл*

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

*равен нулю для каждой сферы  $S$ , лежащей внутри  $D$ , то  $U$  есть гармоническая функция внутри  $D$ .*

## § 24. Теоремы единственности

Из теорем, доказанных в предыдущем параграфе, вытекает, что функция, гармоническая в некоторой замкнутой области, свое наибольшее и наименьшее значение в этой области принимает на ее границе. Таким образом, если гармоническая функция равна нулю на границе области, то она тождественно равна нулю, ибо в противном случае она имела бы максимум или минимум внутри этой области. Это позволяет доказать следующую весьма важную теорему.

**ТЕОРЕМА I.** *Функция, гармоническая в замкнутой области, ограниченной поверхностью  $S$ , однозначно определяется теми значениями, которые она принимает на поверхности  $S$ .*

В самом деле, допустим, что существуют две функции  $U$  и  $U'$ , гармонические в замкнутой области ( $S$ ), ограниченной поверхностью  $S$ , и принимающие одинаковое значение на этой поверхности. В таком случае их разность  $U - U'$  была бы гармонической функцией, равной нулю на поверхности  $S$ , а такая функция, как мы только что видели, должна тождественно равняться нулю.

Эту теорему можно доказать иначе. Если  $\varphi$  и  $\psi$  — две функции, имеющие непрерывные частные производные второго порядка

в области  $(S)$ , то предварительная формула Грина позволяет написать (§ 1):

$$\int_{(S)} \psi \nabla^2 \varphi \, d\tau + \int_{(S)} \nabla \psi \cdot \nabla \varphi \, d\tau = - \int_{\dot{S}} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma,$$

— если считать, что производная  $\partial \varphi / \partial n$  берется по направлению внутренней нормали.

Полагая в этом равенстве  $\varphi = \psi = U$ , где  $U$  гармоническая в  $(S)$  функция, получим

$$\int_{(S)} (\nabla U)^2 \, d\tau + \int_{\dot{S}} U \frac{\partial U}{\partial n} \, d\sigma = 0. \quad (1)$$

Таким образом, если гармоническая в  $(S)$  функция  $U$  равна нулю на поверхности  $S$ , ограничивающей эту область, то

$$\int_{(S)} (\nabla U)^2 \, d\tau = \int_{(S)} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = 0.$$

Отсюда следует, благодаря непрерывности частных производных первого порядка, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

т. е.  $U = \text{const}$ ; а так как эта функция непрерывна и равна нулю на поверхности  $S$ , то она должна быть тождественно равна нулю.

Формула (1) позволяет доказать также следующую теорему.

**ТЕОРЕМА II.** *Если однозначная функция  $U$  является гармонической в замкнутой области  $(S)$  и имеет в ней непрерывные частные производные первого порядка, то она вполне определяется значениями своей нормальной производной  $\partial U / \partial n$  на поверхности  $S$ , — конечно, не считая произвольной аддитивной постоянной.*

Действительно, допустив, что существуют две гармонические функции, для которых нормальные производные на  $S$  одинаковы, мы найдем, что для разности этих функций нормальная производная на поверхности  $S$  равна нулю. Отсюда, на основании (1), заключаем, что частные производные первого порядка этой разности равны нулю в области  $(S)$ , а потому эта разность равна постоянной величине.

Для справедливости этой теоремы существенно важно условие однозначности функции  $U$ , так как для многозначных функций она может и не иметь места.

Перейдем теперь к рассмотрению бесконечных областей. При помощи рассуждений, аналогичных только что употребленным, легко могут быть доказаны две следующие теоремы.

**ТЕОРЕМА III.** *Функция, гармоническая в области  $[S]$ , состоящей из всех точек как внешних по отношению к замкнутой*

поверхности  $S$ , так и лежащих на этой поверхности, однозначно определяется теми значениями, которые она принимает на поверхности  $S$ .

**ТЕОРЕМА IV.** *Функция, гармоническая в области  $[S]$ , указанной в предыдущей теореме, однозначно определяется значениями своей производной по внутренней нормали в точках поверхности  $S$ .*

Заметим, что во всех этих теоремах под поверхностью  $S$  можно понимать совокупность нескольких отдельных замкнутых поверхностей, не имеющих общих точек. Иначе говоря, области  $(S)$  и  $[S]$  можно считать многосвязными.

Формула (1) позволяет доказать теоремы единственности, заключающие граничные условия более общего вида. Укажем, как пример, следующую теорему.

**ТЕОРЕМА V.** *Если гармоническая в замкнутой области  $(S)$  функция  $U$  имеет непрерывные в  $(S)$  частные производные первого порядка, то она однозначно определяется теми значениями, которые выражение*

$$U + h \frac{\partial U}{\partial n},$$

где  $h$  — неотрицательная непрерывная функция, принимает на поверхности  $S$ , ограничивающей эту область.

## § 25. О некоторых условиях, однозначно определяющих потенциал

Обозначим через  $V(x, y, z)$  значение потенциальной функции в точках, свободных от притягивающих масс:

Пусть нам известна эквипотенциальная поверхность  $S$ , заключающая все притягивающие массы. Сумму этих масс обозначим через  $M$ . Тогда, на основании теоремы Гаусса (§ 8),

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi fM. \quad (1)$$

Предположим, что притягивающие массы можно перераспределить так, что поверхность  $S$  попрежнему будет эквипотенциальной поверхностью. Обозначим через  $V'(x, y, z)$  потенциальную функцию во внешнем пространстве, соответствующую новому распределению масс. Уравнение поверхности  $S$  мы можем тогда написать в двух видах:  $V = C$  и  $V' = C$ , где  $C$  и  $C'$  — некоторые постоянные.

Рассмотрим функцию

$$U = V - V'. \quad (2)$$

Эта функция, являющаяся, очевидно, гармонической в  $[S]$ , т. е. во внешнем по отношению к  $S$  пространстве, на поверхности  $S$  имеет постоянное значение

$$U_S = C - C', \quad (3)$$

как это вытекает из равенства (2).

С другой стороны, равенство (2) и аналогичное для потенциала  $V'$  дают

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0. \quad (4)$$

Покажем, что гармоническая в  $[S]$  функция  $U$ , удовлетворяющая условиям (3) и (4), может существовать лишь в том случае, когда  $U_S = 0$ ; причем, в этом случае она necessarily равна нулю по теореме III предыдущего параграфа.

С этой целью применим к функции  $U$  в области  $T$ , ограниченной поверхностью  $S$  и сферой  $\Sigma$  очень большого радиуса  $R$ , формулу § 24 (1). Это даст:

$$\int_T (\nabla U)^2 d\tau + \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma + \int_\Sigma U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Второй интеграл равен нулю согласно (4). Легко видеть, что третий интеграл стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . В самом деле, в силу регулярности функции  $U$  на бесконечности, можно указать такие постоянные числа  $A$  и  $B$ , что

$$|U| < \frac{A}{R^2}; \quad \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right| < \frac{B}{R^2}$$

при  $R \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$\left| \int_\Sigma U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma \right| < \frac{AB}{R^3} \int_\Sigma d\sigma = \frac{4\pi AB}{R}.$$

Итак, переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$\int_{[S]} (\nabla U)^2 d\tau = 0,$$

откуда, учитывая непрерывность производных гармонической функции:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Функция  $U$ , будучи постоянной и равной нулю на бесконечности, должна быть тождественно равна нулю как на поверхности  $S$ , что дает  $C - C' = 0$ , так и во всем внешнем пространстве. Полученный результат можно формулировать так:<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Некоторые авторы рассматривают эту теорему как доказательство бесконечной многозначности обратной задачи теории потенциала. Но обратной задачей теории потенциала гораздо естественнее называть проблему нахождения распределения масс по заданному во всем пространстве потенциалу. Эта проблема, которую мы здесь не рассматриваем, решается, по существу, однозначно (по крайней мере в простейших случаях) уравнением Пуассона, выражающим плотность через потенциал.

Если эквипотенциальная поверхность  $S$  заключает все притягивающие массы, то при всяком перераспределении этих масс, при котором  $S$  остается эквипотенциальной поверхностью, а сумма масс остается без изменения, потенциал во внешнем пространстве  $[S]$  не меняется.

Иллюстрацией этой теоремы может служить потенциал однородного шара или шара со сферическим распределением плотности. В этом случае потенциал вне любой эквипотенциальной поверхности, заключающей шар, таков, как если бы вся масса была сосредоточена в центре.

## § 26. Вторая формула Грина

Рассмотрим две функции  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  и  $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ , непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области  $(S)$ , ограниченной поверхностью  $S$ ; и имеющие непрерывные частные производные второго порядка во всех внутренних точках этой области. Так как эти функции удовлетворяют условиям применимости первой формулы Грина (§ 1), то мы можем написать

$$\int_{(S)} (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) d\tau = \int_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (1)$$

если считать, что производные в правой части берутся по нормали, направленной *внутрь* области  $(S)$ .

Возьмем, далее, функцию

$$\psi = r^{-1} = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

представляющую обратную величину расстояния от постоянной точки  $P(x, y, z)$  до точек  $Q(\xi, \eta, \zeta)$ , где  $\xi, \eta, \zeta$  — переменные интегрирования.

Если точка  $P$  находится внутри  $(S)$ , то формула (1) не может быть применена к функции (2). Но мы можем применить эту формулу, если вместо области  $(S)$  возьмем область  $T$ , заключенную между поверхностью  $S$  и сферой  $s$ , описанной из точки  $P$  как центра радиусом  $\epsilon$ , настолько малым, что  $s$  и  $S$  не имеют общих точек. Это даст, учитывая, что  $\nabla^2 \psi = 0$ ,

$$\int_T \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi d\tau = \int_S \left( \varphi \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma + \int_s \left( \varphi \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (3)$$

Во втором из стоящих справа интегралов

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial n} = \frac{\partial r^{-1}}{\partial r} = -r^{-2} = -\epsilon^{-2}; \quad r = \epsilon;$$

кроме того,

$$d\sigma = \epsilon^2 d\omega,$$



где  $d\omega$  — элемент поверхности сферы единичного радиуса, которую мы обозначим через  $s_0$ . Поэтому

$$\int_s \left( \varphi \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma = - \int_{s_0} \varphi d\omega - \varepsilon \int_{s_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega.$$

Теорема о среднем показывает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{s_0} \varphi d\omega = 4\pi \varphi(x, y, z).$$

Таким образом, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равенство (3) дает

$$\varphi(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\nabla^2 \varphi}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \varphi \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (4)$$

Это весьма важное соотношение, носящее наименование *второй формулы Грина*, позволяет высказать следующую теорему:

*каждая функция  $\varphi(x, y, z)$ , имеющая в замкнутой области непрерывные производные первого порядка, а во всех внутренних точках этой области непрерывные производные второго порядка, может быть представлена как сумма трех потенциалов: объемного, соответствующего плотности  $-\frac{\nabla^2 \varphi}{4\pi}$ , потенциала простого слоя с плотностью  $-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  и потенциала двойного слоя с плотностью  $\frac{\varphi}{4\pi}$ .*

Применив формулу (4) к гармонической функции  $U$ , получим

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( U \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (5)$$

Эта формула дает выражение гармонической функции внутри области через значения, принимаемые этой функцией и ее нормальной производной на границе области.

Формулы (4) и (5) выведены для конечных областей, но они могут быть распространены и на бесконечные области. Покажем это для формулы (5).

Применим формулу (5) к конечной области, заключенной между поверхностью  $S$  и сферой  $\Sigma$ , радиус которой  $R$  неограниченно возрастает. Считая, что производные берутся по внутренним нормальям по отношению к этой области, т. е. по внешней нормали к  $S$  и по внутренней к  $\Sigma$ , получим

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( U \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left( U \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Но, вследствие регулярности гармонической функции на бесконечности, второй интеграл стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Таким образом, формула (5) справедлива и для внешнего по отношению к поверхности  $S$  пространства, но в этом случае производные в ней надо брать по внешней нормали к этой поверхности.

Из формулы (5) вытекает следующее свойство гармонических функций:

*функция, гармоническая в замкнутой области, является аналитической в каждой внутренней точке этой области.*

Действительно, формула (5) дает гармоническую функцию в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, распространенных по поверхности  $S$ , причем эту поверхность можно взять так, чтобы любая точка, в которой функция гармоническая, была внутренней. Но мы видели (§ 4), что потенциал как простого, так и двойного слоя есть аналитическая функция во всякой точке, не лежащей на поверхности  $S$ .

Это свойство гармонических функций можно рассматривать как частный случай следующей теоремы, на доказательстве которой не останавливаемся:

*во всякой области, в которой плотность есть аналитическая функция, потенциал также является аналитической функцией.*

## § 27. Теорема Гаусса об арифметическом среднем значений гармонической функции

Вторую формулу Грина для гармонической функции

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( U \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma$$

применим к тому случаю, когда за поверхность  $S$  взята сфера с центром в точке  $P(x, y, z)$ .

Обозначая радиус этой сферы через  $R$  и учитывая, что на ее поверхности

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial n} = -\frac{\partial r^{-1}}{\partial r} = r^{-2} = R^{-2}; \quad r = R,$$

получим

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U d\sigma, \quad (1)$$

так как второй интеграл равен нулю (§ 23).

Это равенство выражает теорему Гаусса:

*значение гармонической функции в центре сферы есть среднее арифметическое из ее значений на поверхности сферы.*

Отсюда легко получить, что значение гармонической функции в центре шара есть среднее арифметическое из ее значений в объеме этого шара.

В самом деле, применив формулу (1) к сфере радиуса  $r$ , где  $r < R$ , получим

$$r^2 U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} U r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\psi.$$

Умножим обе части на  $dr$  и проинтегрируем от 0 до  $R$ . Это даст

$$U(x, y, z) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{(S)} U \, d\tau, \quad (2)$$

что и доказывает наше утверждение.

Из теоремы Гаусса непосредственно вытекает невозможность для гармонической функции иметь максимум или минимум во внутренней точке, что уже было доказано другим путем (§ 23).

Теорема Гаусса позволяет также легко доказать следующее свойство:

*если функция является гармонической во всем пространстве, то она тождественно равна нулю.*

В самом деле, значение рассматриваемой функции  $U(x, y, z)$  в любой точке пространства является, согласно формуле (1), средним арифметическим из ее значений на поверхности сферы произвольно большого радиуса  $R$ . Но, вследствие регулярности функции  $U$ , ее значения на поверхности такой сферы стремятся к нулю, когда  $R$  неограниченно возрастает. Таким образом, значение функции  $U(x, y, z)$  произвольно мало отличается от нуля, т. е. (поскольку оно не зависит от  $R$ ) в точности равно нулю.

Можно показать, что теорема Гаусса эквивалентна теореме о потоке градиента через замкнутую поверхность (§ 23), откуда следует, что эта теорема выражает характеристическое свойство гармонических функций. Иначе говоря, если для каждой сферы внутри некоторой области имеет место равенство (1) или равенство (2), то функция  $U$  является гармонической в этой области.

## § 28. Краевые задачи теории потенциала

Теоремы, доказанные в § 24, устанавливают единственность гармонической функции, удовлетворяющей определенным условиям на границе области. Каждой такой теореме соответствует проблема нахождения гармонической функции (если она действительно существует), удовлетворяющей этим граничным условиям. Такие проблемы получили общее наименование *краевых задач теории потенциала*.

*Первая краевая задача*, или так называемая *проблема Дирихле*: в точках замкнутой поверхности  $S$  задана функция  $\bar{U}$ ; требуется найти функцию  $U(x, y, z)$ , гармоническую в замкнутой области, ограниченной поверхностью  $S$ , и принимающую заданные значения  $\bar{U}$  на этой поверхности.

Различают *внутреннюю задачу*, когда гармоническая функция ищется в конечной области  $(S)$ , ограниченной поверхностью  $S$ , и *внешнюю задачу*, когда речь идет о бесконечной области  $[S]$ , внешней по отношению к ограничивающей ее поверхности  $S$ .

*Вторая краевая задача (проблема Нейманна)*: на поверхности  $S$  заданы значения нормальной производной  $\partial \bar{U} / \partial n$  искомой гармонической функции  $U(x, y, z)$ ; требуется найти эту функцию в области, ограниченной  $S$ . Здесь также различают внутреннюю или внешнюю проблему Нейманна, смотря по тому, о какой из областей,  $(S)$  или  $[S]$ , идет речь.

*Третья краевая задача* (называемая также *смешанной задачей*, или *проблемой теплопроводности*) заключается в определении гармонической функции по значениям, принимаемым выражением  $U + h \partial U / \partial n$ , где  $h$  — заданная функция, на замкнутой поверхности.

Рассмотрим несколько подробнее первую задачу. Конечно, раньше чем искать функцию  $U$ , удовлетворяющую условиям этой задачи, следует убедиться, что такая функция действительно существует. В том случае, когда рассматриваемая поверхность  $S$  есть сфера, такое доказательство, а вместе с тем и полное решение проблемы Дирихле было дано Пуассоном (1823). Попытка дать доказательство для случая произвольной поверхности была сделана Гауссом и В. Томсоном в 1847 г. Рассуждение В. Томсона, получившее впоследствии наименование *принципа Томсона*, или *принципа Дирихле*, заключается в следующем. Рассмотрим интеграл

$$J = \int_{(S)} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

распространенный на объем  $(S)$ , ограниченный поверхностью  $S$ , для всех функций  $V(x, y, z)$ , непрерывных вместе со своими производными первого и второго порядка и принимающих заданные значения  $\bar{U}$  на поверхности  $S$ . Так как этот интеграл не может быть отрицателен, то *должна быть функция  $V = U$ , обращающая его в минимум*. Пользуясь обычным методом вариационного исчисления, легко показать, что эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической функцией, решающей проблему Дирихле.

Слова, набранные курсивом, представляют слабое место этого рассуждения, ибо совсем не очевидно, что свое минимальное значение интеграл  $J$  принимает для одной из функций рассматриваемого вида. Только в 1899 г. Гильберту удалось, наложив надлежащие ограничения на поверхность  $S$  и граничные значения  $\bar{U}$ , доказать, что

функция  $U$ , обращающая  $J$  в минимум, действительно существует и удовлетворяет всем поставленным условиям.

Но раньше, чем Гильберту удалось поставить „принцип Дирихле“ вне сомнения, Карл Нейманн (1870), Робэн (1887) и Пуанкаре (1887) дали методы, позволяющие не только доказать существование решения, но и найти это решение при весьма широких предположениях относительно поверхности  $S$  и граничных значений  $\bar{U}$ . Так, например, метод Пуанкаре доказывает существование решения и дает возможность его вычислить в случае, когда функция  $\bar{U}$  непрерывна, а поверхность  $S$  имеет везде определенную касательную плоскость, исключая лишь конечное число конических точек.

С другой стороны, Заремба (1909) и Лебег (1913) дали примеры таких случаев, когда проблема Дирихле не имеет решения. Но эти случаи очень далеки от того, что может встретиться в астрономии и геофизике, где приходится иметь дело лишь с поверхностями и функциями, имеющими произвольную степень гладкости.

Таким образом, во всех представляющих интерес для астрономии случаях, существование решения проблемы Дирихле строго доказано и даны эффективные методы для нахождения этого решения. Единственность решения была нами уже установлена (§ 24).

Точно так же, во всех случаях, когда поверхность  $S$  достаточно гладкая, а заданные на ней значения непрерывны, доказано существование решений второй и третьей краевых задач и даны методы для эффективного нахождения этих решений.

Заметим, что в случае внутренней проблемы Нейманна заданные на поверхности значения  $\partial \bar{U} / \partial n$  должны подчиняться очевидному условию

$$\int_S \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Решение, в этом случае, определяется лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Напротив, в случае внешней проблемы Нейманна значения нормальной производной на граничной поверхности могут быть заданы произвольно, а искомая гармоническая функция определяется вполне однозначно.

Теория интегральных уравнений по-новому осветила все вопросы, связанные с краевыми задачами теории потенциала, и дала эффективные методы для их решения. Эти методы являются часто наиболее удобными.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Укажем следующие книги, содержащие подробное изложение относящихся сюда вопросов и дальнейшую литературу.

В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1941.

Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1945.

Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Москва, Гостехиздат, 1946.

## § 29. Первая функция Грина

Рассмотрим функцию  $U$ , гармоническую в замкнутой области  $(S)$ , ограниченной поверхностью  $S$ . Обозначая через  $\bar{U}$  и  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial n}$  значения, принимаемые этой функцией и ее внутренней нормальной производной на  $S$ , будем иметь, на основании второй формулы Грина (§ 26),

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \bar{U} \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (1)$$

Возьмем, далее, функцию

$$V(P; Q) = V(x, y, z; \xi, \eta, \zeta),$$

зависящую от координат как рассматриваемой точки  $P(x, y, z)$ , так и точки  $Q(\xi, \eta, \zeta)$ , пробегающей область  $(S)$ , и определяемую следующими двумя условиями:

1) во всех точках  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  замкнутой области  $(S)$  эта функция должна быть гармонической;

2) для точек  $Q(\xi, \eta, \zeta)$ , лежащих на поверхности  $S$ , ее значения определяются равенством

$$V(P; Q) = r^{-1}, \quad (2)$$

где

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Доказательство существования и фактическое нахождение функции, удовлетворяющей этим условиям, представляет частный случай проблемы Дирихле, соответствующий граничным условиям (2).

Допустим, что функция  $V(P; Q)$  существует и имеет на поверхности  $S$  нормальную производную. Применим к функциям  $U$  и  $V$ , гармоническим в  $(S)$ , первую формулу Грина. Это даст

$$\int_S \left( \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} - \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

При помощи этого равенства и учитывая (2), исключим из формулы (1) производную  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial n}$ . Полученная таким образом формула

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \bar{U} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} - V \right) d\sigma$$

выражает значения гармонической функции  $U$  во внутренних точках области  $(S)$  через ее значения  $\bar{U}$  в точках поверхности  $S$ , ограничивающей эту область.

Полагая

$$G(P; Q) = \frac{1}{r} - V(P; Q),$$

напишем последнюю формулу так:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \bar{U} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (3)$$

Функция  $G(P; Q)$  носит название первой функции Грина. Можно доказать (мы на этом останавливаться не будем), что она симметрична относительно точек  $P$  и  $Q$ , так что

$$G(P; Q) = G(Q; P).$$

Отсюда следует, что она гармоническая и относительно переменных  $x, y, z$ .

Ляпунов показал (1898), что формулой (3) можно воспользоваться для решения проблемы Дирихле для достаточно широкого класса поверхностей  $S$ , если соответствующая такой поверхности функция Грина известна. Для этого ему пришлось доказать, что какова бы ни была непрерывная функция  $\bar{U} = U(Q)$ , заданная на поверхности  $S$ , формула (3) представляет функцию, гармоническую в области  $(S)$  и притом такую, что

$$\lim_{P \rightarrow Q} U(P) = U(Q).$$

Мы применим формулу (3) к решению проблемы Дирихле только в самом простом случае, когда рассматриваемая область ограничена сферической поверхностью.

В заключение заметим, что формула (3) имеет место и в том случае, когда точка  $P$  находится в области  $[S]$ , внешней по отношению к замкнутой поверхности  $S$ . В этом случае нормаль, по которой берется производная, также должна быть внутренней по отношению к рассматриваемой области; иначе говоря, это будет внешняя нормаль относительно поверхности  $S$ .

### § 30. Первая функция Грина для сферы

Для сферы функция Грина может быть найдена при помощи следующих соображений. Пусть точка  $P(x, y, z)$  находится внутри сферы на расстоянии  $OP = r$  от ее центра (рис. 1). Обозначим через  $P_1$  точку, сопряженную с  $P$ , т. е. лежащую на полупрямой  $OP$  на расстоянии  $OP_1 = r_1$ , определяемом равенством

$$rr_1 = R^2,$$

где  $R$  — радиус сферы.

Если  $Q$  есть произвольная точка нашей сферы, то треугольники  $POQ$  и  $QOP_1$  будут подобны, ибо предыдущее равенство можно написать так:

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{OP_1}.$$

Поэтому, полагая  $PQ = r$ ,  $P_1Q = r_1$ , будем иметь:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{R}{\rho}; \quad \frac{1}{r} = \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1}. \quad (1)$$

Итак, функция

$$V(P, Q) = \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1},$$

очевидно, гармоническая внутри сферы  $S$ , на поверхности этой сферы принимает значения, равные  $r^{-1}$ . Следовательно, в этом случае функция Грина равна

$$G = \frac{1}{r} - \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1}.$$

Непосредственно ясно, что эта функция имеет нормальную производную во всех точках поверхности сферы. Поэтому, какова бы ни

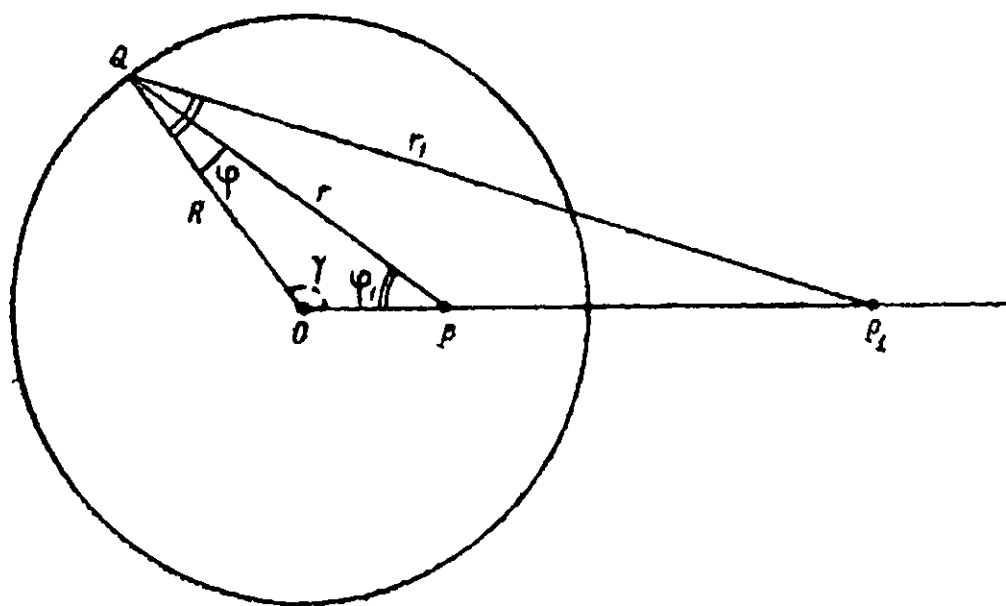


Рис. 1.

была непрерывная функция  $\ddot{U}$ , заданная на поверхности сферы, функция, выражаемая интегралом

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \ddot{U} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} - \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1} \right) d\sigma, \quad (2)$$

существует в области  $(S)$ .

Так как производная берется по внутренней нормали, то, обозначая через  $\varphi$  и  $\varphi_1$  углы  $OQP$  и  $OQP_1 = OPQ$ , получим

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial n} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\cos \varphi}{r^2}$$

и аналогично

$$\frac{\partial r_1^{-1}}{\partial n} = \frac{\cos \varphi_1}{r_1^2}.$$



В самом деле, равенство

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

дает

$$r \frac{\partial r}{\partial n} = (\xi - x) \frac{\partial \xi}{\partial n} + (\eta - y) \frac{\partial \eta}{\partial n} + (\zeta - z) \frac{\partial \zeta}{\partial n},$$

откуда

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(r, n) = -\cos \varphi,$$

так как направляющие косинусы вектора  $\overline{PQ}$  равны соответственно  $\frac{\xi - x}{r}$ ,  $\frac{\eta - y}{r}$ ,  $\frac{\zeta - z}{r}$ .

Таким образом, ядро интеграла (2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial n} G(P; Q) = \frac{\cos \varphi}{r^2} - \frac{R}{\rho} \frac{\cos \varphi_1}{r_1^2}.$$

Но треугольник  $OPQ$  дает

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi; \quad R^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \varphi_1,$$

откуда, путем почленного вычитания,

$$R^2 - \rho^2 = \rho^2 - R^2 - 2r(\rho \cos \varphi_1 - R \cos \varphi)$$

или

$$R^2 - \rho^2 = Rr \left( \cos \varphi - \frac{\rho}{R} \cos \varphi_1 \right) = Rr^3 \left( \frac{\cos \varphi}{r^2} - \frac{\rho}{Rr^2} \cos \varphi_1 \right).$$

Учитывая (1), окончательно получим

$$\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^3} = \frac{\cos \varphi}{r^2} - \frac{R}{\rho} \frac{\cos \varphi_1}{r_1^2}.$$

Итак, интегралу (2), называемому *интегралом Пуассона*, можно окончательно придать вид:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \bar{U} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} d\sigma. \quad (3)$$

Если ввести угол  $POQ = \gamma$ , то интеграл Пуассона можно написать следующим образом:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{(R^2 - \rho^2) \bar{U} d\sigma}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Мы рассматривали случай, когда точка  $P(x, y, z)$  находится внутри сферы  $S$ ; если она находится вне сферы  $S$ , то, как легко убедиться, в формулах (3) и (4) множитель  $(R^2 - \rho^2)$  надо заменить через  $(\rho^2 - R^2)$ .

Таким образом, для внешнего по отношению к сфере  $S$  пространства формула (3) заменяется такой:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \bar{U} \frac{r^2 - R^2}{r^3} d\sigma. \quad (5)$$

### § 31. Решение проблемы Дирихле для сферы

Покажем, что интеграл Пуассона полностью решает проблему Дирихле для сферы.

Легко, прежде всего, убедиться, что функция, представляемая формулами (3) или (5) предыдущего параграфа, является гармонической. Для этого достаточно показать, что ядро интеграла, т. е. выражение

$$\frac{R^2 - \rho^2}{r^3}$$

является гармонической функцией относительно  $x, y, z$ . Это можно сделать непосредственной проверкой, но вычисления будут проще, если прибегнуть к следующему, указанному Шварцем, преобразованию.

Треугольник  $POQ$  (рис. 1) дает

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma,$$

откуда, после дифференцирования,

$$r \frac{\partial r}{\partial \rho} = \rho - R \cos \gamma.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} &= \frac{r^2 - 2\rho^2 + 2R\rho \cos \gamma}{r^3} = \frac{1}{r} - \frac{2\rho}{r^3} (\rho - R \cos \gamma) = \\ &= \frac{1}{r} - 2 \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{1}{r} + 2\rho \frac{\partial (r^{-1})}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (1)$$

А так как  $r^{-1}$  есть гармоническая функция, то, по доказанной выше теореме (§ 22), все это выражение есть также гармоническая функция.

Остается показать, что функция

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{(R^2 - \rho^2) U(Q) d\sigma}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

стремится к  $U(Q_0)$ , когда точка  $P$  стремится к любой точке  $Q_0$ , лежащей на сфере.

Из точки  $Q_0$  как центра проведем на поверхности сферы малый круг, радиус которого равен дуге  $\delta$ . Вследствие непрерывности функции  $\bar{U} = U(Q)$  эту дугу  $\delta$  можно взять настолько малой, что на всей

поверхности сферического сегмента  $c$ , вырезаемого этим малым кругом, будет иметь место неравенство

$$|U(Q) - U(Q_0)| < \varepsilon, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — произвольно малая положительная величина.

Формулу (2) напомним так:

$$U(P) = \frac{U(Q_0)}{4\pi R} \int_S \frac{(R^2 - \rho^2) d\sigma}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}} + \\ + \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{(R^2 - \rho^2) [U(Q) - U(Q_0)]}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}} d\sigma.$$

Первый член этого выражения можно существенно упростить. В самом деле, если мы возьмем на поверхности сферы  $U(Q) = 1$ , то соответствующая гармоническая функция, даваемая формулой (2), будет также равна единице, ибо, согласно теореме единственности (§ 24), такая гармоническая функция может быть только одна. Таким образом, формула (2) дает:

$$1 = \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{(R^2 - \rho^2) d\sigma}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}} \quad (4)$$

и потому окончательно будем иметь:

$$U(P) = U(Q_0) + \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{(R^2 - \rho^2) [U(P) - U(Q_0)]}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}} d\sigma. \quad (5)$$

Стоящий здесь интеграл разобьем на два: на интеграл, взятый по поверхности сферического сегмента  $c$ , и на интеграл, взятый по остальной поверхности  $S - c$ . Первый интеграл по абсолютной величине меньше в силу (3), чем интеграл

$$\frac{\varepsilon}{4\pi R} \int \frac{(R^2 - \rho^2) d\sigma}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}}, \quad (6)$$

взятый по поверхности  $c$ , и тем более он меньше, чем интеграл (6), распространенный на всю поверхность  $S$ . Но, как показывает формула (4), в этом случае выражение (6) равно  $\varepsilon$ . Итак, первый интеграл, взятый по  $c$ , по абсолютной величине меньше  $\varepsilon$ .

Обратимся теперь к интегралу, взятому по поверхности  $S - c$ . Для точек  $Q$ , расположенных на этой поверхности,  $\gamma > \delta$  и, следовательно,  $\cos \gamma < \cos \delta$ . Поэтому

$$R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2 \geq 2R\rho - 2R\rho \cos \gamma > 2R\rho (1 - \cos \delta),$$

и рассматриваемый интеграл будет по абсолютной величине меньше чем

$$\frac{2M}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho^2}{[2R\rho(1 - \cos \delta)]^{3/2}} \int_{S-c} d\sigma,$$

где через  $M$  обозначено наибольшее значение  $|U(Q)|$  на поверхности сферы.

Мы еще увеличим эту верхнюю границу, если распространим интеграл на всю поверхность сферы.

Таким образом, равенство (5) окончательно дает:

$$|U(P) - U(Q_0)| < \varepsilon + \frac{2MR(R^2 - \rho^2)}{[2R\rho(1 - \cos \delta)]^{3/2}}.$$

Чтобы стоящее справа выражение сделать меньше любой наперед заданной величины, достаточно взять  $\varepsilon$  меньше этой величины и, фиксируя соответственно  $\delta$ , приближать точку  $P$  к точке  $Q_0$ . При этом  $\rho \rightarrow R$  и потому второй член правой части может быть сделан сколь угодно малым.

Во всех этих рассуждениях мы имели в виду случай внутренней проблемы Дирихле, но они применимы, без всяких изменений, и к случаю внешней проблемы.

### § 32. Теорема Пикара.

При помощи интеграла Пуассона Пикар доказал следующую довольно часто применяемую теорему:

*если функция  $U(x, y, z)$  непрерывна, удовлетворяет уравнению Лапласа при всех значениях переменных и, кроме того, ограничена по своему абсолютному значению, то она равна нулю.*

Покажем, что значения такой функции в двух произвольно взятых точках  $O$  и  $P$  должны быть равны.

Из точки  $O$  как центра опишем сферу  $S$  радиусом  $R$  настолько большим, чтобы точка  $P$  была внутри этой сферы. Интеграл Пуассона § 30 (3) дает:

$$U(O) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S \bar{U} d\sigma,$$

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \bar{U} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} d\sigma.$$

Таким образом:

$$U(P) - U(O) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S \bar{U} \left( \frac{R^2 - R\rho^2}{r^3} - 1 \right) d\sigma. \quad (1)$$

Если радиус  $R$  стремится к бесконечности, то

$$\lim \frac{R}{r} = 1; \quad \lim \frac{\rho}{r} = 0$$

и, следовательно, величина

$$\left| \frac{R^3 - R\rho^2}{r^3} - 1 \right|$$

стремится к нулю. Выбрав  $R$  достаточно большим, мы можем сделать эту величину меньше произвольно малого положительного числа  $\epsilon$ .

Поэтому, обозначая через  $M$  верхнюю границу  $|U|$ , из равенства (1) найдем:

$$|U(P) - U(O)| < M\epsilon,$$

что возможно, ввиду произвольности  $\epsilon$ , только в случае, когда

$$U(P) = U(O).$$

Этим доказывается, что функция равна постоянной величине. Но эта постоянная величина не может отличаться от значения функции в бесконечности, т. е. от нуля.

### § 33. Вторая краевая задача

При решении второй краевой задачи, так называемой проблемы Нейманна, можно следовать тому же пути, который был указан выше для первой краевой задачи. Рассмотрим, например, внешнюю задачу.

Пусть на замкнутой поверхности  $S$  задана непрерывная функция  $\partial \bar{U} / \partial n$ . Требуется найти функцию  $U(x, y, z)$ , гармоническую во внешнем по отношению к  $S$  пространстве  $[S]$  и удовлетворяющую условию

$$\lim \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_P = \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \right)_{Q_0},$$

когда точка  $P$  стремится к любой точке  $Q_0$  поверхности  $S$ .

Допустим, что искомая функция действительно существует и обозначим через  $\bar{U} = U(Q)$  значения, которые она принимает в точках  $Q$  поверхности  $S$ . Для вычисления значений этой функции в точке  $P(x, y, z)$  области  $[S]$  может служить формула (§ 26):

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \bar{U} \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (1)$$

Допустим, далее, что нам известна функция  $V(P; Q) = V(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ , гармоническая во всех точках  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  области  $[S]$ , а на поверхности  $S$ , ограничивающей эту область, имеющая нормальную производную, определяемую равенством

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial n} = \frac{\partial r^{-1}}{\partial n}. \quad (2)$$

Равенство

$$\int_S \left( \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} - \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \right) d\sigma = 0,$$

даваемое первой формулой Грина, позволяет исключить из выражения (1) неизвестные нам значения  $\bar{U}$  определяемой функции на поверхности  $S$ . Это дает

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \bar{H} d\sigma, \quad (3)$$

где

$$H(P; Q) = V(P; Q) - \frac{1}{r}.$$

Функция  $H(P; Q)$  называется *второй функцией Грина*, или *функцией Нейманна*. Определение этой функции, сводящееся к решению проблемы Нейманна для частного случая, когда граничные условия заданы равенством (2), выполняется сравнительно просто для случая сферической поверхности. Можно показать, что для сферы радиуса  $R$  значения этой функции на поверхности таковы:

$$\bar{H} = -\frac{2}{r} + \frac{1}{R} \ln \frac{R - \rho \cos \gamma + r}{\rho - \rho \cos \gamma}, \quad (4)$$

где через  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  обозначено расстояние точки  $P$  от центра сферы  $O$ , а через  $\gamma$  — угол  $QOP$  между радиусами-векторами точек  $P$  и  $Q$ .

Так же как и для проблемы Дирихле, можно показать, что формула (3), где  $\bar{H}$  определяется равенством (4), полностью решает внешнюю проблему Нейманна для случая сферической поверхности.

Можно воспользоваться этой формулой и для вычисления значений определяемой функции на поверхности сферы. В этом случае  $\rho = R$ ,  $r = 2R \sin \frac{\gamma}{2}$ , и потому формула (3) принимает вид:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} N(\gamma) d\sigma,$$

где

$$N(\gamma) = -\operatorname{cosec} \frac{\gamma}{2} + \ln \left( 1 + \operatorname{cosec} \frac{\gamma}{2} \right).$$

Чтобы убедиться, что интеграл существует, достаточно взять полярную систему координат, приняв угол  $\gamma$ , отсчитываемый от точки  $P$ , за дополнение широты, так что

$$d\sigma = R^2 \sin \gamma d\gamma d\psi.$$

Функция  $N(\gamma) \sin \gamma$  монотонно меняется, при изменении  $\gamma$  от 0 до  $\pi$ , в пределах от  $-2$  до 0.

## ГЛАВА IV

### СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

#### § 84. Сферические полиномы и сферические функции

При решении многих задач теории потенциала приходится пользоваться разложением гармонических функций в ряды. Поскольку функция  $U(x, y, z)$ , гармоническая в некоторой области, есть функция аналитическая, ее можно в окрестности каждой точки  $(x_0, y_0, z_0)$  этой области разложить в ряд вида:

$$U(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad (1)$$

где  $U_n(x, y, z)$  обозначает однородный полином степени  $n$ .

Для того чтобы выражение (1) тождественно удовлетворяло уравнению Лапласа, необходимо, чтобы каждый полином

$$U_n(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

удовлетворял этому уравнению.

Однородный полином  $U_n(x, y, z)$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа, называется *сферическим полиномом*.

Самый общий сферический полином степени  $n$ :

$$U_n(x, y, z) = \sum a_{pqr} x^p y^q z^r; \quad (p + q + r = n) \quad (2)$$

содержит  $2n + 1$  произвольных коэффициентов; иначе говоря, он является суммой  $2n + 1$  определенных, различных между собой сферических полиномов, умноженных на произвольные коэффициенты. В самом деле, коэффициенты полинома (2) могут быть выражены через начальные значения его производных:

$$a_{pqr} = \frac{1}{p!q!r!} \left( \frac{\partial^n U_n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \right)_0.$$

Но уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

позволяет выразить все производные  $U_n$  через те, в которых либо нет дифференцирования по  $x$ , либо дифференцирование по  $x$  производится только один раз. Поэтому уравнение (3) оставляет произвольными только коэффициенты  $a_{0qr}$ , число которых равно  $n+1$ , и коэффициенты  $a_{1qr}$ , число которых равно  $n$ . Все остальные коэффициенты полинома  $U_n$  являются линейными однородными функциями этих  $2n+1$  произвольных коэффициентов, что и доказывает наше утверждение.

Обозначая буквой  $C$  с различными индексами произвольные постоянные, легко найдем, что

$$\begin{aligned} U_0 &= C_0, \\ U_1 &= C_1^{(1)}x + C_1^{(2)}y + C_1^{(3)}z, \\ U_2 &= C_2^{(1)}(y^2 - z^2) + C_2^{(2)}(x^2 - z^2) + C_2^{(3)}yz + C_2^{(4)}xz + C_2^{(5)}xy. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Конечно, выбор элементарных сферических полиномов, линейной комбинацией которых является общий полином рассматриваемой степени, может быть сделан различно.

Переход к полярным координатам, осуществляемый формулами:

$$x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta, \tag{4}$$

дает

$$U_n = r^n Y_n(\theta, \psi). \tag{5}$$

Определяемую этим равенством функцию  $Y_n(\theta, \psi)$  сферических координат  $\theta$  и  $\psi$  будем называть *сферической функцией  $n$ -го порядка*.

Самая общая сферическая функция  $n$ -го порядка включает, как мы только что видели,  $2n+1$  произвольных коэффициентов. Легко указать дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет. Для этого напишем уравнение (3) в полярных координатах, воспользовавшись выражением § 1 (12) лапласиана в любой ортогональной системе координат.

Полярные координаты, определяемые равенством (4), представляют, очевидно, ортогональную систему, а коэффициенты Ламе здесь таковы:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta.$$

Поэтому уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \psi^2} = 0. \tag{6}$$

Подставляя сюда (5), получим:

$$n(n+1) Y_n + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \psi^2} = 0. \tag{7}$$



Введем вместо  $\theta$  новую переменную  $\mu$ , полагая

$$\mu = \cos \theta.$$

Это дает:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu},$$

так что уравнение (5) принимает вид:

$$n(n+1)Y_n + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{\partial Y_n}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \psi^2} = 0. \quad (8)$$

Чтобы использовать это уравнение для нахождения сферической функции  $Y_n(\theta, \psi)$ , заметим, что по самому своему определению равенством (5) функция  $Y_n(\theta, \psi)$  является линейной комбинацией выражений вида:

$$M(\mu) \Psi(\psi). \quad (9)$$

Поэтому, поставим себе прежде всего целью найти частные решения уравнения (8) вида (9), т. е. такие частные решения, которые были бы произведениями функции одного  $\mu$  на функцию одного  $\psi$ .

Подставляя выражение (9) в уравнение (8), получим:

$$(1-\mu^2) \left\{ n(n+1) + \frac{1}{M} \frac{d}{d\mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right] \right\} + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} = 0.$$

Так как переменные  $\mu$  и  $\psi$  между собой независимы, то последнее равенство возможно лишь при условии:

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} = \text{const.}$$

Обозначив эту постоянную величину через  $-k^2$ , получим:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + k^2 \Psi = 0 \quad (10)$$

и

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-\mu^2} \right] M = 0. \quad (11)$$

Общее решение уравнения (10) дается равенством:

$$\Psi = A \cos k\psi + B \sin k\psi,$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Поскольку  $Y_n(\theta, \psi)$  состоит из членов вида:

$$Q \cos^h \theta \sin^{l+m} \theta \cos^l \psi \sin^m \psi = Q \mu^h (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}(l+m)} \cos^l \psi \sin^m \psi,$$

где  $Q$  — постоянный множитель, а все показатели целые положительные числа, то полученное нами общее решение уравнения (10) только в том случае может годиться для представления  $Y_n(\theta, \psi)$  в виде

линейной комбинации выражений (9), когда  $k$  есть целое положительное число, не превосходящее  $n$ .

С другой стороны, для каждого из значений  $k = 0, 1, 2, \dots$ , достаточно найти только одно частное решение  $M_k(\mu)$  уравнения (11), причем это частное решение должно быть или полиномом от  $\mu$ , или произведением такого полинома на  $\sqrt{1-\mu^2}$ . Пользуясь классическими результатами теории линейных дифференциальных уравнений, легко показать, что этим последним условием частное решение уравнения (11) вполне однозначно определяется (не считая, конечно, произвольного постоянного множителя).

Найдя такие частные решения и обозначая их через  $P_n^k(\mu)$ , мы сможем общую сферическую функцию  $n$ -го порядка представить в виде суммы:

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_0^n P_n^k(\mu) (A_{nk} \cos k\psi + B_{nk} \sin k\psi), \quad (12)$$

где через  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$  обозначены произвольные постоянные, число которых равно, очевидно,  $2n+1$ .

Задача изучения сферических функций приводится, таким образом, к изучению частных решений уравнения (11), имеющих указанную форму. Мы рассмотрим сначала частный случай этого уравнения при  $k=0$ .

В заключение этого параграфа отметим, что при любом повороте осей координат сферический полином  $U_n(x, y, z)$  переходит в сферический же полином  $U_n(x', y', z')$  от новых переменных  $x', y', z'$ . Действительно, при любом ортогональном преобразовании:

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z',$$

$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',$$

$$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z',$$

уравнение Лапласа (3) остается неизменным, а однородный полином переходит в однородный той же степени.

Отсюда следует, что сферическая функция  $Y_n(\theta, \psi)$  после любого вращения координатной системы переходит в сферическую же функцию  $Y_n(\theta', \psi')$  от новых переменных. Но, конечно, коэффициенты, входящие в эти функции, будут, вообще говоря, различны.

### § 35. Полиномы Лежандра

Уравнение (11) предыдущего параграфа при  $k=0$  напомним, слегка изменяя обозначения, так:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0. \quad (1)$$

Нам надо найти частное решение  $P_n^0(x) = P_n(x)$  этого уравнения, являющееся полиномом от  $x$ .

Положив

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad (2)$$

подставим это выражение в уравнение (1) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ . Это даст следующие соотношения между коэффициентами  $a_k$ :

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 a_2 &= -n(n+1) a_0, \\ 2 \cdot 3 a_3 &= [1 \cdot 2 - n(n+1)] a_1, \\ 3 \cdot 4 a_4 &= [2 \cdot 3 - n(n+1)] a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ (k+1)(k+2) a_{k+2} &= [k(k+1) - n(n+1)] a_k. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что решение вида (2) будет полиномом степени  $n$  тогда и только тогда, если взять

$$a_n \neq 0, \quad a_{n+1} = 0.$$

В самом деле, в этом случае мы будем иметь с одной стороны:

$$a_{n+2} = 0, \quad a_{n+4} = 0, \dots,$$

а с другой:

$$a_{n+1} = 0, \quad a_{n+3} = 0, \dots,$$

так что  $y$  будет полиномом степени  $n$ .

Чтобы окончательно определить этот полином, положим (в связи с соображениями, которые будут ясны из дальнейшего):

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!}.$$

Вычисляя  $a_{n-2}, a_{n-4}, \dots$  при помощи соотношения:

$$a_k = - \frac{(k+1)(k+2)}{(n-k)(n+k+1)} a_{k+2},$$

окончательно получим:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти полиномы носят название *полиномов Лежандра*. Первые из них таковы:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_5(x) = \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_6(x) = \frac{231}{16} x^6 - \frac{315}{16} x^4 + \frac{105}{16} x^2 - \frac{5}{16}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

$$P_7(x) = \frac{429}{16} x^7 - \frac{693}{16} x^5 + \frac{315}{16} x^3 - \frac{35}{16} x.$$

Очевидно, полином Лежандра является четной или нечетной функцией, смотря по тому, четна или нечетна его степень; так что

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (4)$$

Для изучения свойств этих полиномов формула (3) мало подходяща. Полиномы Лежандра можно представить в гораздо более удобном для дальнейшего виде при помощи следующих соображений.

Положим, обозначая через  $c$  постоянный коэффициент, остающийся пока неопределенным,

$$z = c(x^2 - 1)^n,$$

тогда

$$\frac{z'}{z} = \frac{2nx}{x^2 - 1},$$

или

$$(1 - x^2) \frac{dz}{dx} + 2nxz = 0.$$

Возьмем от обеих частей этого равенства производную порядка  $n + 1$ . Это даст

$$(1 - x^2) \frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}} - 2x \frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + n(n+1) \frac{d^nz}{dx^n} = 0.$$

Сравнение этого уравнения с (1) показывает, что полином:

$$y = \frac{d^nz}{dx^n} = c \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

является решением уравнения (1). Чтобы этот полином совпал с (3), нужно взять  $c = \frac{1}{2^n \cdot n!}$ .

Итак, полиномы Лежандра могут быть представлены формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad (5)$$

которая носит название формулы Родрига.

Эта формула показывает, что полином Лежандра степени  $n$  имеет  $n$  вещественных простых корней, лежащих в интервале  $(-1, +1)$ .

В самом деле, применение теоремы Ролля к функции  $(x^2 - 1)^n$  показывает, что ее производная  $\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^n$  имеет в указанном интервале один простой корень; применяя теорему Ролля к этой производной, найдем, что вторая производная  $\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 1)^n$  имеет внутри интервала два простых корня и т. д.; производная порядка  $n$  будет иметь  $n$  простых корней, лежащих внутри интервала  $(-1, +1)$ .

### § 36. Ассоциированные функции. Сферические гармоники

Обратимся теперь к нахождению частного решения уравнения § 34 (11) при  $k$ , отличном от нуля. В измененных обозначениях это уравнение напишется так:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] y = 0, \quad (1)$$

а интересующее нас решение должно быть многочленом от  $x$ , умноженным на четную или нечетную степень  $\sqrt{1-x^2}$ .

Покажем, что уравнению (1) удовлетворяет выражение:

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}, \quad (2)$$

которое мы назовем *ассоциированной функцией порядка  $n$  и индекса  $k$* .

С этой целью продифференцируем  $k$  раз уравнение

$$(1-x^2) y'' - 2x y' + n(n+1) y = 0,$$

которому удовлетворяет полином  $P_n$ . Получим:

$$(1-x^2) y^{(k+2)} - 2x(k+1) y^{(k+1)} + [n(n+1) - k(k+1)] y^{(k)} = 0,$$

так что производная  $z = P_n^{(k)}(x)$  удовлетворяет уравнению:

$$(1-x^2) z'' - 2x(k+1) z' + [n(n+1) - k(k+1)] z = 0.$$

Подставляя сюда

$$z = (1-x^2)^{-\frac{k}{2}} P_n^k(x),$$

получим, после надлежащих упрощений, для  $P_n^k(x)$  уравнение, тождественное с (1).

Легко убедиться, что уравнение (1) не имеет других, существенно (т. е. не только на постоянный множитель) отличных от  $P_n^k(x)$ , решений нужного нам вида. В самом деле, покажем, что всякое другое, существенно отличное, решение обращается в бесконечность при  $x=1$ . Для этого заметим, что из равенств:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy_1}{dx} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] y_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy_2}{dx} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] y_2 = 0,$$

выражающих, что  $y_1$  и  $y_2$  являются решениями уравнения (1), следует

$$y_1 \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy_2}{dx} \right] - y_2 \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy_1}{dx} \right] = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \left( y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right) \right] = 0,$$

откуда

$$(1-x^2) \left( y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right) = \text{const.}$$

Если решения  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы, то постоянная интегрирования отлична от нуля. Отсюда ясно, что всякое решение  $y_2$ , существенно отличающееся от  $y_1 = P_n^k(x)$ , не может оставаться конечным при  $x=1$ .

Возвращаясь к переменным  $\mu$  и  $\theta$ , употреблявшимся в § 34, мы можем ассоциированную функцию представить так:

$$P_n^k(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k} = \sin^k \theta \frac{d^k P_n(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^k}. \quad (3)$$

Для получения окончательного выражения сферической функции остается подставить это выражение в формулу § 34 (12), что дает:

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_0^n (A_{nk} \cos k\psi + B_{nk} \sin k\psi) \sin^k \theta \frac{d^k P_n(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^k}.$$

Таким образом, сферическая функция  $n$ -го порядка является линейной комбинацией выражений:

$$\sin^k \theta \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k} \cos k\psi; \quad \sin^k \theta \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k} \sin k\psi,$$

которые мы будем называть *элементарными сферическими функциями* или *сферическими гармониками*.

Посмотрим, как меняется знак сферической гармоники при перемещении точки  $(\theta, \psi)$  по поверхности сферы. Рассмотрим отдельно три случая.

Пусть  $k=0$ . Здесь мы имеем только одну гармонику, равную  $P_n(\cos \theta)$ . Обозначив через  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  корни полинома  $P_n(\mu)$ , которые, как мы знаем, вещественны, различны и по абсолютной величине меньше единицы, и определив соответствующие значения  $\theta_h = \arccos \mu_h$ , ( $h=1, 2, \dots, n$ ), найдем, что  $P_n(\cos \theta)$  обращается в нуль, меняя знак, на  $n$  параллелях  $\theta = \theta_h$ . Это дает распределение положительных и отрицательных значений рассматриваемой гармоники, указанное на рис. 2, где (для  $n=7$ ) области отрицательных значений отмечены черным цветом. Такая гармоника носит название *зональной*.

Если  $0 < k < n$ , то соответствующая гармоника будет обращаться в нуль на  $2k$  меридианах, определяемых уравнением:

$$\cos k\psi = 0 \quad \text{или} \quad \sin k\psi = 0,$$

и на  $n - k$  параллелях, соответствующих корням уравнения:

$$\frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k} = 0,$$

или

$$\frac{d^{n+k}(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^{n+k}} = 0,$$

лежащим между  $-1$  и  $+1$ . Соответствующее распределение положительных и отрицательных областей указано на рис. 3 для случая  $n = 7, k = 4$ . Эти гармоники называются *тессеральными*.

Наконец, в случае  $k = n$  обращение гармоники в нуль и перемена ее знака происходит на  $2n$  меридианах, как это изображено на рис. 4 для случая  $k = n = 6$ . Такие гармоники называются *секториальными*.

Колебательный характер изменения сферических гармоник лежит в основе возможности разложения произвольной функции в ряд по этим гармоникам. Чем большие значения имеют  $n$  и  $k$ , тем больше колебаний испытывает гармоника и тем меньше (за немногими исключениями) амплитуда этих колебаний.

Прежде чем рассматривать разложения по сферическим функциям, нам еще необходимо остановиться на некоторых свойствах полиномов Лежандра и ассоциированных функций.

### § 37. Формула Максвелла

Нами было уже отмечено (§ 22), что функция  $r^{-1} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$  и все ее производные

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \left( \frac{1}{r} \right)$$

являются гармоническими функциями в любой области, не заключающей начала координат.

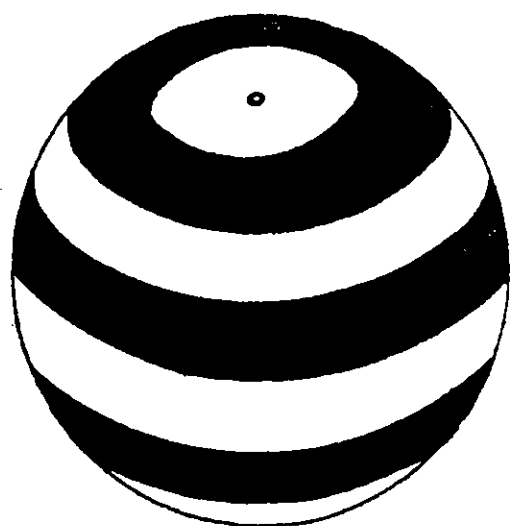


Рис. 2.

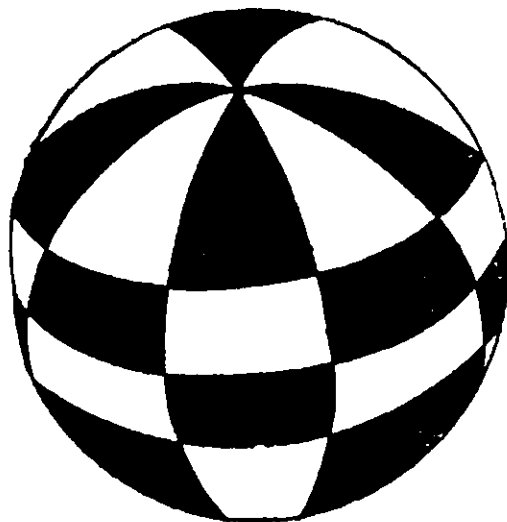


Рис. 3.

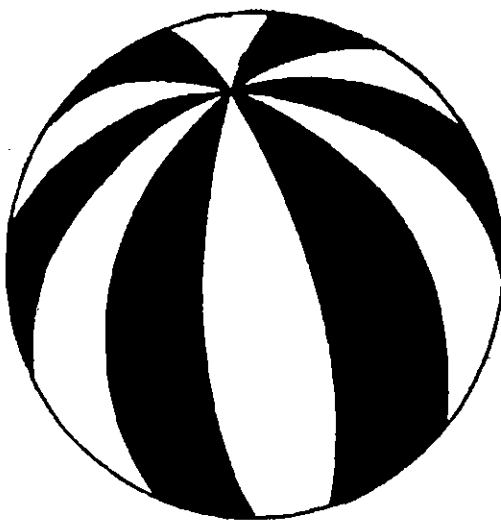


Рис. 4.

Обозначим через  $h_i$  направление с направляющими косинусами  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\nu_i$ , так что

$$\frac{\partial}{\partial h_i} = \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} + \mu_i \frac{\partial}{\partial y} + \nu_i \frac{\partial}{\partial z}.$$

Выражение

$$\frac{\partial}{\partial h_n} \frac{\partial}{\partial h_{n-1}} \cdots \frac{\partial}{\partial h_2} \frac{\partial}{\partial h_1} \left( \frac{1}{r} \right)$$

представляет, очевидно, гармоническую функцию, заключающую  $2n$  произвольных параметров. Эта функция является, как легко видеть, однородным многочленом степени  $n$ , деленным на  $r^{2n+1}$ . Умножив ее на  $Ar^{2n+1}$ , где  $A$  — произвольное постоянное, мы получим, следовательно, однородный многочлен

$$Ar^{2n+1} \frac{\partial}{\partial h_n} \cdots \frac{\partial}{\partial h_2} \frac{\partial}{\partial h_1} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (1)$$

степени  $n$ , содержащий  $2n+1$  произвольных постоянных и являющийся (§ 22) гармонической функцией.

Таким образом, для сферического полинома степени  $n$  мы получаем выражение (1), носящее название *формулы Максвелла*.

В частном случае, когда все направления  $h_1, h_2, \dots, h_n$  совпадают с осью  $z$ , мы имеем сферический полином степени  $n$ :

$$U_n = Ar^{2n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r} \right),$$

зависящий только от  $z$  и  $r$ .

Соответствующая ему сферическая функция

$$U_n r^{-n} = Ar^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r} \right)$$

будет зависеть только от  $z/r = \cos \theta = \mu$ .

При надлежащем выборе множителя  $A$  эта сферическая функция должна, следовательно, совпадать с  $P_n(\mu)$ .

Можно показать, что

$$P_n(\mu) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (2)$$

В самом деле, рассмотрим следующую функцию:

$$d^{-1} = [x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2]^{-\frac{1}{2}} = (r^2 - 2\zeta z + \zeta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ее можно разложить в ряд по степеням  $\zeta$  двумя различными способами.



С одной стороны, на основании формулы (5) следующего параграфа, имеем:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{\xi}{r} \frac{z}{r} + \frac{\xi^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \sum_0^{\infty} \left( \frac{\xi}{r} \right)^n P_n \left( \frac{z}{r} \right);$$

с другой стороны, формула Тэйлора дает:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} - \xi \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} + \frac{\xi^2}{2!} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2} - \dots = \sum_0^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Сравнение этих разложений доказывает справедливость формулы (2).

### § 38. Свойства полиномов Лежандра

За исходный пункт при изучении полиномов Лежандра можно взять формулу:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}. \quad (1)$$

Так как производная порядка  $n$  аналитической функции может быть представлена интегралом Коши:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - x)^{n+1}}, \quad (2)$$

то соотношение (1) дает:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz, \quad (3)$$

где интегрирование может производиться по любому контуру  $C$ , внутри которого находится точка  $z = x$ .

**Интеграл Лапласа.** За контур  $C$  примем окружность радиуса  $|\sqrt{x^2 - 1}|$  с центром в точке  $z = x$ . Так как уравнение этой окружности может быть представлено в форме:

$$z = x + \sqrt{x^2 - 1} e^{i\varphi}; \quad -\pi \leq \varphi < +\pi$$

(где безразлично, какое из двух значений корня взять), то

$$dz = i\sqrt{x^2 - 1} e^{i\varphi} d\varphi = i(z - x) d\varphi;$$

$$\frac{z^2 - 1}{z - x} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi;$$

и формула (3) дает:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi.$$

Пользуясь тем, что подинтегральная функция четная, окончательно получим формулу Лапласа:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi. \quad (4)$$

Наш вывод предполагает, что  $x$  отлично от  $\pm 1$ ; однако формула остается справедливой, как сейчас увидим, и в этих случаях.

**Производящая функция полиномов Лежандра.** В интеграл (3) введем вместо  $z$  новую переменную  $\alpha$ , положив:

$$\frac{z^2 - 1}{z - x} = \frac{2}{\alpha}.$$

Считая, что точке  $\alpha = 0$  соответствует точка  $z = x$ , получим:

$$z = \frac{1}{\alpha} (1 - \sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2})$$

и потому

$$dz = \frac{z - x}{\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2}} d\alpha.$$

Это даст:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2}} \frac{d\alpha}{\alpha^{n+1}},$$

где за  $C$  можно взять любой контур, огибающий точку  $\alpha = 0$  в положительном направлении.

Сопоставив это выражение с формулой (2), получим:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2}} \right)_{\alpha=0}.$$

Это равенство показывает, что  $P_n(x)$  есть коэффициент при  $\alpha^n$  в ряде Тэйлора:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2}} = \sum_0^\infty \alpha^n P_n(x). \quad (5)$$

Стоящая слева функция носит название *производящей функции полиномов*  $P_n(x)$ .

Из (5) при  $x = \pm 1$  получаем:

$$\frac{1}{1 \mp \alpha} = \sum_0^\infty \alpha^n P_n(\pm 1).$$

Следовательно:

$$P_n(1) = 1; \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (6)$$

Интеграл Лапласа (4) дает:

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi|^n d\varphi.$$

Если  $-1 < x < +1$ , то это неравенство можно написать так:

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [1 - (1-x^2) \sin^2 \varphi]^{\frac{n}{2}} d\varphi. \quad (7)$$

Отсюда ясно, что

$$|P_n(x)| < 1$$

при  $n > 0$  и при всяком  $x$ , находящемся внутри интервала  $(-1, +1)$ .

Легко получить гораздо более точную границу для  $|P_n(x)|$ , показывающую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = 0, \quad (8)$$

если  $x$  находится внутри интервала  $(-1, +1)$ .

В самом деле, так как  $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$ , то стоящий в неравенстве (7) интеграл можно заменить удвоенным интегралом, взятым от 0 до  $\pi/2$ . Учтывая, что в этом последнем интервале

$$\sin \varphi / \varphi \geq 2/\pi$$

и, следовательно:

$$1 - (1-x^2) \sin^2 \varphi \leq 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 (1-x^2) \varphi^2,$$

получим:

$$|P_n(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - z^2 \varphi^2)^{\frac{n}{2}} d\varphi,$$

где для краткости положено:

$$z = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}.$$

Но

$$1 - z^2 \varphi^2 \leq e^{-z^2 \varphi^2};$$

поэтому, полагая  $t = z\varphi \sqrt{\frac{n}{2}}$ ,  $T = \frac{z\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{2}}$ , будем иметь:

$$|P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{n(1-x^2)}} \int_0^T e^{-t^2} dt.$$

Поскольку

$$\int_0^T e^{-t^2} dt < \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

это дает

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{\pi}{2n(1-x^2)}}.$$

Отсюда вытекает не только справедливость равенства (8), но и следующее более сильное утверждение: *во всяком интервале  $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$  (где  $\varepsilon > 0$ ) функция  $P_n(\cos \theta)$  равномерно стремится к нулю как  $1/\sqrt{n}$ .*

Заметим, что в только что указанном интервале имеет место (и притом равномерно) следующая формула:

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \theta}} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Эту формулу можно получить, например, путем применения к разложению (5) общего метода Дарбу для нахождения асимптотических выражений коэффициентов степенных рядов.

**Рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра.** Дифференцирование равенства (5) по  $\alpha$  дает:

$$(x - \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_1^{\infty} n\alpha^{n-1}P_n(x),$$

или

$$(x - \alpha) \sum_0^{\infty} \alpha^n P_n(x) = (1 - 2\alpha x + \alpha^2) \sum_1^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(x).$$

Приравняв коэффициенты при  $\alpha^n$  в левой и правой частях этого равенства, получим соотношение:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (9)$$

связывающее три последовательные полинома.

Дифференцируя равенство (5) по  $x$ , получим:

$$\alpha(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} \sum_0^{\infty} \alpha^n P'_n(x),$$

или

$$\alpha \sum_0^{\infty} \alpha^n P'_n(x) = (1 - 2\alpha x + \alpha^2) \sum_0^{\infty} \alpha^n P'_n(x).$$

Приравнивание коэффициентов при  $\alpha^{n+1}$  дает такое соотношение:

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - 2xP'_n(x). \quad (10)$$

Чтобы исключить отсюда  $P'_n(x)$ , воспользуемся равенством:

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)[P_n(x) + xP'_n(x)] + nP'_{n-1}(x) = 0,$$

которое получается из (9) путем дифференцирования. Это даст:

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x). \quad (11)$$

Если в этом соотношении дать  $n$  значения  $1, 2, \dots, n-1, n$  и почленно сложить полученные равенства, то докажем следующую формулу:

$$1 + 3P_1(x) + 5P_2(x) + \dots + (2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) + P'_n(x), \quad (12)$$

которая нам понадобится в дальнейшем.

Можно отметить еще следующие легко доказываемые зависимости между полиномами Лежандра и их производными:

$$\begin{aligned} nP_n(x) &= xP'_n(x) - P'_{n-1}(x), \\ (x^2-1)P'_n(x) &= nxP_n(x) - nP_{n-1}(x). \end{aligned}$$

### § 39. Ортогональность полиномов Лежандра, ассоциированных функций и сферических функций

Покажем, что полиномы  $P_n(x)$  образуют ортогональную в интервале  $-1 < x < +1$  систему функций.

Формула (5) предыдущего параграфа дает ряды:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2}} = \sum_0^{\infty} \alpha^n P_n(x); \quad \frac{1}{\sqrt{1-2\beta x + \beta^2}} = \sum_0^{\infty} \beta^m P_m(x),$$

абсолютно сходящиеся, если  $|\alpha| < 1$  и  $|\beta| < 1$ .

Почленно перемножив эти ряды, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2} \sqrt{1-2\beta x + \beta^2}} = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \alpha^n \beta^m P_n(x) P_m(x),$$

откуда, после интегрирования по  $x$  в пределах от  $-1$  до  $+1$ ,

$$T = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \alpha^n \beta^m \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx, \quad (1)$$

где

$$T = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2} \sqrt{1-2\beta x + \beta^2}}.$$

Так как неопределенный интеграл равен

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln [\sqrt{\beta(1-2\alpha x + \alpha^2)} + \sqrt{\alpha(1-2\beta x + \beta^2)}],$$

то

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{(1+\alpha) \sqrt{\beta} + (1+\beta) \sqrt{\alpha}}{(1-\alpha) \sqrt{\beta} + (1-\beta) \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta}}{1 - \sqrt{\alpha\beta}}.$$

Поэтому, на основании известной формулы для разложения логарифма,

$$T = \sum_0^{\infty} \frac{2}{2n+1} (\alpha\beta)^n.$$

Сравнение этого ряда с (1) показывает, что

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad \text{если } m \neq n \quad (2)$$

и

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (3)$$

Равенства (2) доказывают ортогональность полиномов Лежандра. Чтобы убедиться, что ассоциированные функции обладают аналогичным свойством, рассмотрим интеграл

$$J_{nm}^k = \int_{-1}^{+1} P_n^k(x) P_m^k(x) dx.$$

Подставив сюда выражения ассоциированных функций, даваемые формулой § 36 (2), и интегрируя по частям, будем иметь:

$$\begin{aligned} J_{nm}^k &= \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^k \frac{d^k P_n}{dx^k} \frac{d^k P_m}{dx^k} dx = \\ &= - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{k-1} P_m}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^k \frac{d^k P_n}{dx^k} \right] dx. \end{aligned} \quad (4)$$

С другой стороны, дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет полином  $P_n$ , дает:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1) P_n = 0.$$

Если это неравенство продифференцировать  $k-1$  раз, то получим:

$$\frac{d^k}{dx^k} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1) \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} = 0,$$

или

$$(1-x^2) \frac{d^{k+1}P_n}{dx^{k+1}} - 2kx \frac{d^k P_n}{dx^k} - [k(k-1) - n(n+1)] \frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}} = 0,$$

что после умножения на  $(1-x^2)^{k-1}$  дает:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^k \frac{d^k P_n}{dx^k} \right] = [k(k-1) - n(n+1)] \frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}}.$$

Воспользовавшись этим соотношением, равенство (4) можно написать так:

$$J_{nm}^k = (n+k)(n+1-k) J_{nm}^{k-1}.$$

Заменив здесь  $k$  через  $k=1, k=2, \dots, 2, 1$  и перемножив полученные таким образом равенства, после очевидных сокращений найдем, что

$$J_{nm}^k = [(n+k)(n+k-1) \dots (n+2)(n+1)] \times \\ \times [(n+1-k) \dots (n-1)n] J_{nm}^0$$

или

$$J_{nm}^k = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} J_{nm}^0.$$

Значения  $J_{nm}^0$  даются формулами (2) и (3). Поэтому окончательный результат будет такой:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^k(x) P_m^k(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, & \text{если } m = n. \end{cases} \quad (5)$$

Выведенные формулы позволяют легко найти интеграл по поверхности сферы от произведения двух элементарных сферических функций. Очевидно, прежде всего, что

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n^k(\cos \theta) P_m^{k'}(\cos \theta) \cos k\psi \sin k'\psi \sin \theta d\theta d\psi = 0 \quad (6)$$

во всех случаях, кроме того случая, когда  $m=n$  и  $k=k'$ .

Остается, следовательно, найти лишь интеграл от квадрата элементарной сферической функции. Пользуясь формулой (5), имеем:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_n^k(\cos \theta) \cos k\psi]^2 \sin \theta d\theta d\psi = \frac{2\pi \delta_k}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \quad (7)$$

если через  $\delta_k$  обозначить величину, определяемую равенствами:

$$\delta_0 = 2, \quad \delta_k = 1, \quad \text{если } k > 0.$$

Аналогично

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_n^k(\cos \theta) \sin k\psi]^2 \sin \theta d\theta d\psi = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \quad (8)$$

В заключение отметим, как следствие формул (6), что всегда

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n Y_m \sin \theta d\theta d\psi = 0,$$

если порядки сферических функций  $Y_n$  и  $Y_m$  различны. Формулы (7) и (8) позволяют найти стоящий слева интеграл в случае, когда  $m = n$ .

### § 40. Теорема сложения для сферических функций

Все элементарные сферические функции порядка  $n$  могут быть выражены, как было показано в § 36, через зональную гармонику  $P_n(\cos \theta)$ .

Зональная гармоника  $P_n(\cos \theta)$ , играющая, таким образом, совершенно особую роль, является функцией угла  $\theta$  между осью  $OZ$  и радиусом-вектором точки  $(\theta, \psi)$ . Сделаем такой поворот осей координат, чтобы новая ось  $OZ'$  проходила через точку  $(\theta', \psi')$ , и обозначим через  $\gamma$  угол между новой осью  $OZ'$  и радиусом-вектором точки  $(\theta, \psi)$ . Очевидно:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\psi - \psi'). \quad (1)$$

Соответствующая новой координатной системе сферическая гармоника  $P_n(\cos \gamma)$  должна быть сферической функцией и в старой координатной системе (§ 34). Поэтому

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_0^n P_n^k(\cos \theta) (A_{nk} \cos k\psi + B_{nk} \sin k\psi), \quad (2)$$

причем  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$ , будучи постоянными относительно  $\theta$  и  $\psi$ , являются функциями  $\theta'$  и  $\psi'$ .

Займемся определением этих функций.

Если в полином  $P_n(\cos \gamma)$  подставить вместо  $\cos \gamma$  выражение (1) и во всех членах этого полинома заменить степени  $\cos (\psi - \psi')$  их выражениями через косинусы кратных  $\psi - \psi'$ , то увидим, что равенство (2), будучи симметричным относительно  $\theta$  и  $\theta'$ , должно иметь вид:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_0^n h_k P_n^k(\cos \theta) P_n^k(\cos \theta') \cos k(\psi - \psi'), \quad (3)$$

где  $h_k$  — числовые коэффициенты.



Чтобы найти коэффициенты  $h_k$ , рассмотрим частный случай равенства (3) при  $\theta = \theta'$ . Полагая для краткости:

$$\cos \theta = \cos \theta' = \mu; \quad \psi - \psi' = \omega,$$

напишем это равенство так:

$$P_n(\mu^2 + (1 - \mu^2) \cos \omega) = \sum_0^n h_k [P_n^k(\mu)]^2 \cos k\omega. \quad (4)$$

С другой стороны, для определения величин

$$P_n = P_n(\mu^2 + (1 - \mu^2) \cos \omega)$$

мы можем воспользоваться формулой (§ 36):

$$\{1 - 2\alpha [\mu^2 + (1 - \mu^2) \cos \omega] + \alpha^2\}^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \alpha^n P_n.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по  $\mu$  от  $-1$  до  $+1$ . Это даст:

$$\frac{2}{\sqrt{2\alpha(1 - \cos \omega)}} \arcsin \sqrt{\frac{2\alpha(1 - \cos \omega)}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}} = \sum_0^\infty \alpha^n \int_{-1}^{+1} P_n d\mu$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{1 - \cos \omega}} \arcsin \sqrt{\frac{2\alpha(1 - \cos \omega)}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}} = \sum_0^\infty \alpha^{n+\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} P_n d\mu.$$

Откуда, после дифференцирования по  $\alpha$  и некоторых упрощений,

$$\frac{1 + \alpha}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2} = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} \alpha^n \int_{-1}^{+1} P_n d\mu. \quad (5)$$

Чтобы разложить левую часть по степеням  $\alpha$ , заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2} &= \frac{1}{1 - \alpha e^{i\omega}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{-i\omega}} = \\ &= 1 + 2\alpha \cos \omega + 2\alpha^2 \cos 2\omega + \dots, \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} \frac{1 + \alpha}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2} &= (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) (1 + 2\alpha \cos \omega + \\ &+ 2\alpha^2 \cos 2\omega + \dots) = \sum_0^\infty \alpha^n (1 + 2 \cos \omega + 2 \cos 2\omega + \dots + 2 \cos n\omega). \end{aligned}$$

Равенство (5) показывает таким образом, что

$$\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n d\mu = 1 + 2 \cos \omega + 2 \cos 2\omega + \dots + 2 \cos n\omega. \quad (6)$$

Вернемся теперь к соотношению (4). Оно дает:

$$\int_{-1}^{+1} P_n d\mu = \int_{-1}^{+1} \sum_0^n h_k [P_n^k(\mu)]^2 \cos k\omega d\mu$$

или, учитывая § 39 (5):

$$\int_{-1}^{+1} P_n d\mu = \sum h_k \frac{2}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \cos k\omega.$$

Отождествление этого выражения с (6) показывает, что

$$h_k = \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{2}{\delta_k},$$

где, как и раньше,  $\delta_0 = 2$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = 1$ .

Таким образом, равенство (3) окончательно обращается в следующее весьма важное соотношение:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega) &= \\ &= \sum_0^n \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\cos \theta) P_n^k(\cos \theta') \cos k\omega, \end{aligned} \quad (7)$$

носящее название *теоремы сложения для сферических функций*.

## § 41. Разложение функции, заданной на поверхности сферы, в ряд по сферическим функциям

Рассмотрим функцию двух переменных  $f(\theta, \psi)$ , заданную на поверхности сферы. Будем предполагать, что в каждой точке поверхности сферы эта функция однозначна, конечна и непрерывна. Покажем, что ее можно разложить в ряд вида:

$$f(\theta, \psi) = \sum_0^\infty Y_n(\theta, \psi), \quad (1)$$

члены которого суть сферические функции:

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_0^n P_n^k(\cos \theta) (A_{nk} \cos k\psi + B_{nk} \sin k\psi),$$

равномерно сходящийся на всей поверхности сферы.

Покажем, прежде всего, что если такое разложение возможно, то оно может быть произведено только единственным образом, так что коэффициенты  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$  имеют вполне определенные значения.

В самом деле, если имеет место равномерно сходящееся разложение (1), то его коэффициенты можно найти, пользуясь ортогональ-

ностью сферических функций. Для определения коэффициента  $A_{nk}$  умножим обе части равенства (1), написанного в форме:

$$f(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_n^k(\cos \theta) (A_{nk} \cos k\psi + B_{nk} \sin k\psi), \quad (2)$$

на элементарную сферическую функцию:

$$P_n^k(\cos \theta) \cos k\psi$$

и проинтегрируем по поверхности сферы. Учитывая сказанное в § 39, получим:

$$A_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \psi) P_n^k(\cos \theta) \cos k\psi \sin \theta d\theta d\psi, \quad (3)$$

где  $\delta_0 = 2$ ;  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = 1$ .

Совершенно так же найдем:

$$B_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \psi) P_n^k(\cos \theta) \sin k\psi \sin \theta d\theta d\psi. \quad (4)$$

Эти формулы, вполне определяющие коэффициенты  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$ , показывают, что равномерно сходящееся разложение (2) может быть только одно.

Переходя теперь к доказательству того, что такое разложение действительно существует, заметим, прежде всего, что для всякой непрерывной функции  $f(\theta, \psi)$  мы можем вычислить по формулам (3) и (4) соответствующие ей величины  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$ .

Заменим в выражениях (3) и (4) переменные  $\theta$  и  $\psi$ , по которым производится интегрирование, через  $\theta'$  и  $\psi'$  и подставим эти выражения в правую часть равенства (2).

Получаемый этим путем ряд, который мы обозначим через  $S$ , можно написать следующим образом:

$$S = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \psi') P_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\psi', \quad (5)$$

так как, на основании доказанной в предыдущем параграфе теоремы, имеет место равенство:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_0^n \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\cos \theta) P_n^k(\cos \theta') \cos k(\psi - \psi'),$$

где

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi - \psi'). \quad (6)$$

Чтобы исследовать сходимость ряда (5), рассмотрим сумму  $m+1$  первых его членов.

Эту сумму напомним так:

$$S_m(\theta, \psi) = \sum_0^m \frac{2n+1}{4\pi} \int_s f(M') P_n(\cos \gamma) d\sigma'. \quad (7)$$

Здесь через  $f(M')$  обозначено значение функции  $f(\theta', \psi')$  в точке  $M'$  с координатами  $\theta', \psi'$ ; через

$$d\sigma' = \sin \theta' d\theta' d\psi'$$

обозначен элемент поверхности сферы  $s$  (радиус которой может быть принят за единицу).

В силу равенства (6)  $\gamma$  есть не что иное, как угловое расстояние между точками  $M'(\theta', \psi')$  и  $M(\theta, \psi)$  сферы. Поэтому для вычисления  $S_m(\theta, \psi)$  удобно взять такую систему координат, в которой прямая  $OM$ , соединяющая центр сферы  $O$  с точкой  $M$ , служила бы осью  $OZ$ . Обозначив через  $\varphi$  долготу точки  $M'$  в этой системе, получим для точки  $M'$ , вместо старых координат  $\theta', \psi'$ , новые координаты  $\gamma, \varphi$ . Это дает:

$$d\sigma' = \sin \gamma d\gamma d\varphi,$$

так что выражение (7) можно написать в форме:

$$S_m(\theta, \psi) = \sum_0^m \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi P_n(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma \int_0^{2\pi} f(M') d\varphi$$

или

$$S_m(\theta, \psi) = \sum_0^m \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi P_n(\cos \gamma) \Phi(\gamma) \sin \gamma d\gamma, \quad (8)$$

если через

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(M') d\varphi$$

обозначить среднее значение функции  $f(M')$  на параллели  $\gamma$ , т. е. на окружности, описанной из точки  $M$  как центра радиусом  $\gamma$ .

В интеграл (8) введем новую переменную  $x = \cos \gamma$ . Это даст

$$S_m(\theta, \psi) = \sum_0^m \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(x) \Psi(x) dx,$$

если для краткости положить  $\Psi(x) = \Phi(\gamma)$ ; или иначе:

$$S_m(\theta, \psi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [1 + 3P_1(x) + \dots + (2m+1)P_m(x)] \Psi(x) dx.$$

Пользуясь формулой § 38 (12), имеем:

$$S_m(\theta, \psi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [P'_m(x) + P'_{m+1}(x)] \Psi(x) dx.$$

В силу сделанного нами предположения относительно непрерывности функции  $f(M')$ , функция  $\Psi(x)$  имеет в интервале  $-1 \leq x \leq +1$  непрерывную производную. Поэтому мы можем интегрировать по частям. Замечая, что (§ 38):

$$P_m(1) = P_{m+1}(1) = 1, \\ P_m(-1) = (-1)^m, \quad P_{m+1}(-1) = -(-1)^m,$$

получим:

$$S_m(\theta, \psi) = \Psi(1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [P_m(x) + P_{m+1}(x)] \Psi'(x) dx. \quad (9)$$

Покажем, что стоящий справа интеграл стремится к нулю, когда  $m$  неограниченно возрастает. Для этого разобьем область интегрирования на три части:  $(-1, -1+\delta)$ ,  $(-1+\delta, +1-\delta)$ ,  $(+1-\delta, +1)$ , где  $\delta$  — положительная правильная дробь, и рассмотрим интегралы, взятые в каждом из этих интегралов.

Интегралы для первого и третьего интервалов, очевидно, меньше по абсолютной величине, чем  $A\delta$ , где  $A$  — верхняя граница значений  $|\Psi'(x)|$  для поверхности сферы. Это следует из того, что

$$|P_m(x)| < 1,$$

если  $-1 < x < +1$ . Выберем  $\delta$  настолько малым, чтобы иметь  $A\delta < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная положительная величина.

Что касается до интеграла, взятого по среднему интервалу  $(-1+\delta, +1-\delta)$ , то его абсолютная величина меньше, чем

$$A(1-\delta) \{ \max |P_m(x)| + \max |P_{m+1}(x)| \}. \quad (10)$$

Но как было показано в § 38, при всяком сколь угодно малом  $\delta$  можно найти такое  $N$ , что для всех  $m > N$  величина

$$\max |P_m(x)|$$

в интервале  $-1+\delta \leq x \leq +1-\delta$  будет меньше любого положительного числа. Следовательно, можно взять такое  $N$ , что при  $m > N$  величина (10) будет меньше  $\varepsilon$ .

Итак, для  $m > N$  абсолютная величина интеграла, стоящего в равенстве (9), будет меньше чем  $3\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — произвольное положительное число.

Равенство (9) показывает, таким образом, что  $S_m(\theta, \psi)$  стремится (и притом равномерно на всей поверхности сферы) к пределу

$$\Psi(1) = \Phi(0) = f(\theta, \psi).$$

Этим доказывается равномерная сходимость ряда (5), а следовательно, и существование разложения (2).

Изложенное доказательство этой весьма важной теоремы (впервые доказанной Пуассоном (1831) для функций  $f(\theta, \psi)$ , имеющих непрерывные частные производные), было дано Дарбу (1874). Оно может быть обобщено на кусочно-непрерывные функции.

## § 42. Решение проблем Дирихле и Нейманна для сферы

Рассмотрим сначала внутреннюю проблему Дирихле. Пусть на сфере  $S$ , центр которой  $O$  принят за начало координат, а радиус равен  $R$ , задана непрерывная функция  $f(\theta, \psi)$ . Требуется найти функцию  $U(r, \theta, \psi)$ , гармоническую внутри сферы и удовлетворяющую условию:

$$\lim_{r \rightarrow R-0} U(r, \theta, \psi) = f(\theta, \psi). \quad (1)$$

Теорема, доказанная в предыдущем параграфе, позволяет разложить данную функцию  $f(\theta, \psi)$  в ряд:

$$f(\theta, \psi) = \sum_0^{\infty} Y_n(\theta, \psi), \quad (2)$$

равномерно сходящийся на всей поверхности сферы.

Покажем, что функция

$$U_i(r, \theta, \psi) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta, \psi) \quad (3)$$

удовлетворяет всем условиям проблемы Дирихле.

Прежде всего эта функция существует внутри сферы, ибо сходимость ряда (2) влечет сходимость ряда (3), если  $r < R$ . Далее, ряд (3) можно почленно дифференцировать, а так как каждый член этого ряда является гармонической функцией (§ 34), то тем самым доказывается гармоничность функции  $U_i$ . Наконец, чтобы убедиться в выполнении условия (1), достаточно применить к ряду (3), рассматриваемому как степенной ряд, теорему Абеля.

Итак, формула (3) дает решение внутренней проблемы Дирихле для сферы.

Обратимся теперь к внешней проблеме Дирихле. Она заключается в нахождении функции  $U_e(r, \theta, \psi)$ , гармонической в бесконечной

области, определяемой неравенством  $r \geq R$ , и удовлетворяющей условию

$$\lim_{r \rightarrow R+0} U_e(r, \theta, \psi) = f(\theta, \psi). \quad (4)$$

Легко видеть, что функция, определяемая рядом

$$U_e(r, \theta, \psi) = \sum_0^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \psi), \quad (5)$$

удовлетворяет всем условиям задачи. Действительно, этот ряд сходится, и притом равномерно, в области  $r \geq R$ . Каждый член ряда (5), согласно сказанному в § 22, есть гармоническая функция, следовательно,  $U_e$  есть также гармоническая функция. Что она удовлетворяет граничному условию (4), это непосредственно вытекает из теоремы Абеля.

Аналогично решаются для сферы внутренняя и внешняя проблемы Нейманна.

Если нужно определить, в области  $r \leq R$ , гармоническую функцию  $V_i$ , удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = -\frac{\partial V_i}{\partial r} = -f(\theta, \psi),$$

где  $f(\theta, \psi)$  — заданная непрерывная функция, то опять исходим из разложения (2). Так как в рассматриваемом случае

$$\int_{\bar{S}} \frac{\partial V_i}{\partial n} d\sigma = - \int_{\bar{S}} f(\theta, \psi) d\sigma = 0,$$

то  $Y_0(\theta, \psi) = 0$ . Сообразно с этим, образуем ряд:

$$V_i(r, \theta, \psi) = \sum_1^{\infty} \frac{r^n}{n R^{n-1}} Y_n(\theta, \psi) + C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Легко видеть, что функция, определяемая этим рядом, существует и решает внутреннюю проблему Нейманна.

Решение внешней проблемы Нейманна для граничного условия

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial r} = f(\theta, \psi)$$

и области  $r \geq R$  дается рядом:

$$V_e(r, \theta, \psi) = - \sum_0^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \psi),$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Примером применения формулы (5) может служить нахождение потенциала неоднородного шара во внешнем пространстве. Если потенциал известен на поверхности шара, то, разложив его по сферическим функциям, найдем потенциал во внешнем пространстве при помощи формулы (5).

### § 43. Применение сферических функций к разложению потенциала в ряд

Рассмотрим потенциал масс, имеющих плотность  $\kappa$  и заполняющих объем  $T$ . Величина этого потенциала в точке  $P$  с координатами  $(x, y, z)$  дается формулой:

$$V = \int_T \frac{\kappa' d\tau'}{\Delta}, \quad (1)$$

где  $\kappa' = \kappa(x', y', z')$ , а

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

есть расстояние точки  $P$  от точки  $P'$   $(x', y', z')$ , в которой находится элемент  $d\tau'$ .

Переходя к полярным координатам:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \psi; & y &= r \sin \theta \sin \psi; & z &= r \cos \theta \\ x' &= r' \sin \theta' \cos \psi'; & y' &= r' \sin \theta' \sin \psi'; & z' &= r' \cos \theta \end{aligned}$$

и полагая

$$\cos \gamma = \frac{1}{rr'} (xx' + yy' + zz') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\psi - \psi'), \quad (2)$$

получим:

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}.$$

Следовательно, если  $r' < r$ , то

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \gamma \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma); \quad (3)$$

если же  $r < r'$ , то

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \frac{r}{r'} \cos \gamma \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos \gamma). \quad (4)$$

Для каждого из этих рядов легко указать область, в которой ряд равномерно сходится, и оценить величину остаточного члена. В самом деле, если

$$\frac{r'}{r} < q < 1, \quad (3')$$



то ряд (3) сходится равномерно, а его остаточный член

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma)$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_m| < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q^n}{r} = \frac{q^m}{r(1-q)}, \quad (3'')$$

ибо  $|P_n(\cos \gamma)| \leq 1$ , как было показано в § 38.

Точно так же, если

$$\frac{r}{r'} < q < 1, \quad (4')$$

то ряд (4) равномерно сходится, а для его остаточного члена  $R'_m$  имеем неравенство

$$|R'_m| < \frac{q^m}{r'(1-q)}. \quad (4'')$$

Пусть имеет место первый случай, т. е. пусть выполняется условие (3'). Подставляя разложение (3) в формулу (1), получим:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\mathcal{T}} r'^n P_n(\cos \gamma) x' d\tau'.$$

Так как по теореме сложения (§ 40):

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^n \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\cos \theta) P_n^k(\cos \theta') \cos k(\psi - \psi'),$$

то выражение  $P_n(\cos \gamma)$ , рассматриваемое как функция  $\theta$  и  $\psi$ , является сферической функцией порядка  $n$ ; следовательно, и после интегрирования  $r'^n P_n(\cos \gamma) x'$  по переменным  $r', \theta', \psi'$  мы будем иметь сферическую функцию того же порядка.

Итак:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} Y_n(\theta, \psi), \quad (5)$$

где сферические функции  $Y_n(\theta, \psi)$  определяются равенством

$$Y_n(\theta, \psi) = \int_{\mathcal{T}} r'^n P_n(\cos \gamma) x' d\tau'. \quad (6)$$

Так как  $P_n(\cos \gamma) = 1$ , то  $Y_0(\theta, \psi) = M$ , если через  $M$  обозначить массу притягивающего тела.

Для вычисления следующих членов разложения (5) удобнее вернуться к прямоугольным координатам. Будем при этом считать, что начало координат находится в центре инерции тела, а за оси координат приняты его главные оси инерции; тогда

$$\left. \begin{aligned} \int_T x'x' d\tau' &= \int_T y'x' d\tau' = \int_T z'x' d\tau' = 0, \\ \int_T y'z'x' d\tau' &= \int_T x'z'x' d\tau' = \int_T x'y'x' d\tau' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Равенство

$$rr'P_1(\cos\gamma) = rr' \cos\gamma = xx' + yy' + zz',$$

после умножения на  $x' d\tau'$  и интегрирования по объему  $T$ , даст, в силу соотношений (7):

$$Y_1(\theta, \psi) = 0.$$

Переходя к вычислению следующего члена ряда (5), прежде всего находим:

$$\begin{aligned} (rr')^2 P_2(\cos\gamma) &= (rr')^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2\gamma - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{3}{2} (xx' + yy' + zz')^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \\ &= \frac{x^2}{2} (2x'^2 - y'^2 - z'^2) + \frac{y^2}{2} (2y'^2 - x'^2 - z'^2) + \\ &+ \frac{z^2}{2} (2z'^2 - x'^2 - y'^2) + 3yz \cdot y'z' + 3xz \cdot x'z' + 3xy \cdot x'y'. \end{aligned}$$

Поэтому, подставив это выражение в формулу (6) и учтя (7), будем иметь:

$$r^2 Y_2(\theta, \psi) = \frac{x^2}{2} (B + C - 2A) + \frac{y^2}{2} (A + C - 2B) + \frac{z^2}{2} (A + B - 2C),$$

—если моменты инерции относительно главных осей обозначить как обычно:

$$\begin{aligned} A &= \int_T (y'^2 + z'^2) x' d\tau'; & B &= \int_T (x'^2 + z'^2) y' d\tau'; \\ C &= \int_T (x'^2 + y'^2) z' d\tau'. \end{aligned}$$

Таким образом, первые три члена формулы (5) дают для потенциала следующее выражение:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{1}{2r^3} [x^2(B + C - 2A) + y^2(A + C - 2B) + z^2(A + B - 2C)] + R_8. \quad (8)$$

Ошибка, происходящая от отбрасывания остаточного члена  $R_3$ , может быть оценена при помощи неравенства (3'').

Перейдем в формуле (8) от прямоугольных координат к полярным. Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно

$$(A + B - 2C) \left( z^2 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right) + \frac{3}{2} (B - A) (x^2 - y^2),$$

а так как

$$z^2 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 = r^2 \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) = r^2 P_2(\cos \theta),$$

$$x^2 - y^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos 2\psi,$$

то окончательно будем иметь:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{A + B - 2C}{2r^3} P_2(\cos \theta) + \frac{3(B - A)}{4r^3} \sin^2 \theta \cos 2\psi + R_3. \quad (9)$$

В заключение отметим, что формула (8) легко может быть представлена в таком виде:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{A + B + C - 3J}{2r^3} + R_3,$$

где через

$$J = A \left( \frac{x}{r} \right)^2 + B \left( \frac{y}{r} \right)^2 + C \left( \frac{z}{r} \right)^2$$

обозначен момент инерции относительно прямой  $OP$ . Эта формула уже была найдена (т. I, § 7), но без оценки остаточного члена.

**Потенциал сферического слоя.** Разложения (3) и (4) позволяют представить потенциал сферического слоя в форме рядов, расположенных по сферическим функциям.

Если  $\mu' = \mu(\theta', \psi')$  есть поверхностная плотность, то рассматриваемый потенциал дается интегралом:

$$V(r, \theta, \psi) = \int_S \frac{\mu' d\sigma'}{\Delta}, \quad (10)$$

взятым по поверхности сферы.

Обозначая через  $R$  радиус сферы, для внутреннего пространства (когда  $r < r' = R$ ) воспользуемся разложением (4). Это даст:

$$V_i(r, \theta, \psi) = \sum_0^\infty \frac{r^n}{R^{n+1}} \int_S P_n(\cos \gamma) \mu' d\sigma'. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь разложение функции  $\mu(\theta, \psi)$ , которую мы считаем непрерывной, по сферическим функциям. Оно имеет вид:

$$\mu(\theta, \psi) = \sum_0^\infty Y_n(\theta, \psi), \quad (12)$$

где (§ 41):

$$Y_n(\theta, \psi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mu' P_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\psi'.$$

Поэтому, учитывая, что  $d\sigma' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\psi'$ , мы можем ряд (11) написать следующим образом:

$$V_i(r, \theta, \psi) = 4\pi \sum_0^\infty \frac{r^n}{(2n+1)R^{n-1}} Y_n(\theta, \psi). \quad (13)$$

Эта формула дает представление потенциала (10) для области  $r < R$ .

Пользуясь тем же разложением (12) и формулой (3), легко убедиться, что в области  $r > R$  потенциал (10) выражается рядом:

$$V_e(r, \theta, \psi) = 4\pi \sum_0^\infty \frac{R^{n+2}}{(2n+1)r^{n+1}} Y_n(\theta, \psi). \quad (14)$$

Так как разложения (13) и (14) остаются сходящимися и при  $r = R$ , а потенциал простого слоя непрерывен (§ 4), то

$$V(R, \theta, \psi) = 4\pi R \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} Y_n(\theta, \psi). \quad (15)$$

Таково выражение потенциала рассматриваемого простого слоя на поверхности сферы.

#### § 44. О разложении потенциала вблизи притягивающих масс

Поместим начало координат в центр инерции притягивающего тела. Пусть  $R_0$  есть расстояние от начала координат  $O$  до ближайшей к нему точки, поверхности  $S$ , ограничивающей тело;  $R_1$  — расстояние от  $O$  до наиболее удаленной точки поверхности тела.

Проведем из точки  $O$  как центра сферы радиусами  $R_0$  и  $R_1$  (рис. 5). Пространство  $T$ , заключенное между этими сферами, будет только отчасти заполнено притягивающими массами. Поэтому потенциал в точках этого пространства будет выражаться двумя различными аналитическими функциями:  $V_i(r, \theta, \psi)$  — внутри притягивающих масс и  $V_e(r, \theta, \psi)$  — вне этих масс.

Формула (5) предыдущего параграфа показывает, что в области  $r > R_1$ :

$$V_e(r, \theta, \psi) = \sum_0^\infty r^{-n-1} Y_n(\theta, \psi), \quad (1)$$

причем этот ряд абсолютно и равномерно сходится.

Ряд (1) может остаться сходящимся и при переходе в область  $R_0 < r \leq R_1$ , хотя в этом случае ряд § 43 (3), из которого он получен почленным интегрированием, становится расходящимся. Покажем это на следующем примере.

Рассмотрим потенциал  $V_e$  однородного эллипсоида с полуосями  $a, b, c$  во внешней точке  $M$ , находящейся в области  $T$ . Проведем со-

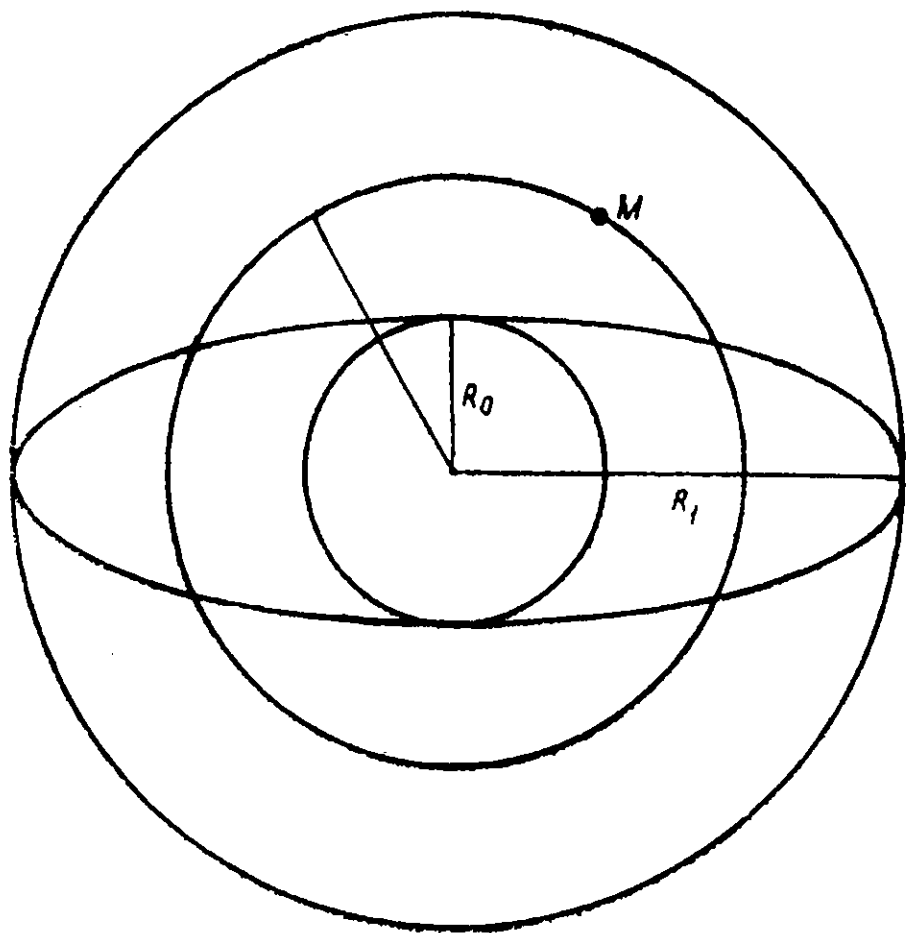


Рис. 5.

фокусный эллипсоид с полуосями  $a', b', c'$  и заполним его веществом той же плотности. Пусть соответствующий этому эллипсоиду потенциал будет  $V'_e$ . Согласно теореме Лапласа (§ 13) имеем:

$$V_e = \frac{abc}{a'b'c'} V'_e, \quad (2)$$

если только точка  $M$  является внешней и по отношению к новому эллипсоиду.

Предположим, что софокусный эллипсоид можно выбрать так, что  $a' \leq R_0$ , т. е.  $a' \leq c$ , если как всегда,  $a \geq b \geq c$ .

В таком случае для вычисления  $V'_e$  можно применить формулу (1), какова бы ни была точка  $M$ , взятая в области  $T$ . Поэтому, в силу соотношения (2), формула (1) будет представлять  $V_e$  и в области  $T$ .

В частности, ее можно использовать и для вычисления потенциала в точках, лежащих на поверхности рассматриваемого эллипсоида  $(a, b, c)$ .

Посмотрим, при каких условиях может быть построен такой софокусный эллипсоид  $(a', b', c')$ , для которого  $a' \leq c$ . Так как

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2,$$

то, полагая  $a' = c$ , получим:

$$b'^2 = b^2 + c^2 - a^2; \quad c'^2 = 2c^2 - a^2.$$

Чтобы эти величины были положительны, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$a < c\sqrt{2};$$

иначе говоря, рядом (1) можно пользоваться в области  $T$  для эллипсоидов, у которых сжатие главных сечений не превосходит 0,29289...

То же самое будет, очевидно, иметь место и для однородных эллипсоидальных слоев, заключенных между двумя софокусными эллипсоидами. А отсюда вытекает, что рядом (1) можно пользоваться в области  $T$  и для неоднородного эллипсоида, состоящего из однородных эллипсоидальных, софокусных с ним, слоев. Слои эти могут быть как конечной, так и бесконечно малой толщины.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Вопрос о сходимости разложения (1) во внешних точках, лежащих в области  $T$ , остался неразрешенным в общем виде, несмотря на многочисленные попытки.

Лаплас в своей теории фигуры Земли (§ 78) исходил из допущения, что эта сходимость имеет место. Так же поступил Ф. А. Слудский в предложенной им теории. См.: Ф. А. Слудский, Общая теория фигуры Земли. Москва, 1888. (Напечатано также в журнале Математический Сборник, т. 13.)

---

# Часть вторая

## ТЕОРИЯ ФИГУР НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

---

### ГЛАВА V

#### ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФИГУР РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОЙ МАССЫ

##### § 45. Предварительные замечания

Основой теоретического изучения фигур небесных тел является проблема определения формы, принимаемой свободной от всякого внешнего воздействия жидкостью при условии, что ее частицы взаимно притягиваются по закону Ньютона. Эта проблема была поставлена Ньютоном тотчас же по открытии закона всемирного тяготения и сразу привлекла к себе внимание крупнейших ученых как своей важностью для естествознания, так и своей трудностью. Помимо Ньютона и Маклорена, сделавших первые шаги, здесь особо могут быть отмечены работы Клэро, Лежандра, Лапласа, Пуанкаре и Ляпунова. Общее решение этой проблемы не найдено до сих пор даже для случая несжимаемой однородной жидкости, однако частные решения, близкие к тем случаям, которые встречаются в природе, исследованы достаточно обстоятельно.

Первое упрощение, которое вносят в рассматриваемую проблему, заключается в том, что предполагая жидкость идеальной, рассматривают лишь такое движение, при котором взаимное расположение частиц жидкости не меняется; иначе говоря, считают, что идеальная жидкость движется как твердое тело.

Заметим, что в действительности такое движение может быть присуще только жидкости вязкой, т. е. обладающей внутренним трением. Именно вследствие вязкости все взаимные перемещения частиц жидкости должны с течением времени прекратиться, и она, в конце концов, будет двигаться как твердое тело.

Это окончательно установившееся движение, при котором вся масса жидкости перемещается как твердое тело, можно охарактеризовать как *относительное равновесие*.

Таким образом, вносимое упрощение заключается в том, что мы будем в дальнейшем искать лишь фигуры относительного равновесия, совершенно не касаясь вопроса о движении жидкости при произвольном начальном состоянии.

Отыскание фигур равновесия в общем случае представляет задачу слишком сложную. Поэтому были изучены два крайние случая, хотя

и не встречающиеся в природе, но являющиеся как бы границами, между которыми заключены все действительно встречающиеся случаи.

Одним из таких крайних случаев является случай *однородной несжимаемой жидкости*. Хотя и здесь проблему далеко не удалось разрешить до конца, но все же были получены частные решения, представляющие несомненный интерес для астрономии.

Другим крайним случаем, еще более далеким от действительности, нежели предыдущий, является так называемая *модель Роша*. Здесь вся притягивающая масса предполагается собранной в центре инерции, так что плотность остальных частей жидкости предполагается исчезающе малой. В этом случае задача легко разрешима.

Рассмотрение двух указанных задач дает пределы, охватывающие реально встречающиеся случаи. Но эти пределы слишком широки. Поэтому весьма важны методы получения частных решений задачи о фигурах равновесия неоднородной жидкости, созданные Клэро, Лежандром и Лапласом. Правда, эти методы применимы лишь к фигурам, близким к сферическим, и при условии очень малой угловой скорости вращения, но как раз такие именно случаи и являются наиболее интересными для астрономии. Эти частные решения будут нами подробно рассмотрены в главе VIII.

Теория фигур равновесия жидких масс, возникшая при самом зарождении Небесной механики, в настоящее время является обширным и глубоко разработанным разделом теоретической механики, тесно соприкасающимся как с астрономией, так и с геофизикой. Излагая в этой и следующих главах общую теорию фигур равновесия, мы ограничимся рассмотрением лишь наиболее интересных для Небесной механики вопросов, оставляя в стороне вопросы, представляющие только математический интерес. Поэтому укажем сейчас некоторые работы, содержащие как изложение таких вопросов, так и соответствующие исторические и литературные указания.

Отметим прежде всего:

P. Appel, *Traité de mécanique rationnelle*, t. IV, Fasc. I: *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation*, Paris, 1<sup>re</sup> éd. 1921, 2<sup>me</sup> éd. 1932.

Со второго издания сделан русский перевод:

П. Аппель, *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости*. ОНТИ — 1936.

Кроме классической теории эллипсоидальных фигур равновесия, здесь подробно изложены работы Пуанкаре по фигурам равновесия, близким к эллипсоидальным, а также работы Пуанкаре, Ляпунова и Шварцшильда по вопросам устойчивости этих фигур.

Приложен довольно полный список работ по всем этим вопросам, доведенный до 1929 года.

Введением в изучение работ Ляпунова по фигурам равновесия, близким к эллипсоидальным, может служить статья:

Л. Сретенский, *Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы* (*Успехи математических наук*, Вып. V, 1938).

Более полное изложение методов и результатов Ляпунова, а также дальнейшее развитие теории в том же направлении можно найти в книге:

L. Lichtenstein, *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*, Leipzig, 1933.

Здесь особенно подробно изучаются условия, при которых может быть строго доказано существование тех или иных фигур равновесия. По всем рассматриваемым вопросам весьма подробно указывается литература.



## § 46. Движение изолированной жидкой массы, сохраняющей неизменную форму

Пусть изолированная жидкая масса, на которую не действуют, следовательно, никакие внешние силы, движется так, что взаимные расстояния между всеми ее частицами остаются постоянными.

Движение такой массы будет происходить как движение твердого тела, т. е. оно будет слагаться из движения центра инерции (которое нас здесь не интересует) и из вращения вокруг центра инерции согласно уравнениям Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= 0, \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x &= 0, \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где через  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  обозначены компоненты вектора мгновенной скорости по главным осям инерции рассматриваемого жидкого тела, принимаемым нами за координатные оси, а через  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — главные моменты инерции, соответствующие этим осям.

С другой стороны, должны иметь место основные уравнения гидродинамики. Обозначим через  $V(x, y, z)$  потенциал сил притяжения, а через  $p(x, y, z)$  — давление в точке  $P(x, y, z)$  и напишем условие того, что жидкость находится в равновесии по отношению к осям  $x, y, z$ .

Это условие выражается равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} - J_x \\ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} - J_y \\ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} - J_z, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\kappa(x, y, z)$  попрежнему обозначает плотность, а через  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  обозначены компоненты переносного ускорения в точке  $P$ .

Для вычисления ускорения служат формулы:

$$J_x = \dot{v}_x + \omega_y v_z - \omega_z v_y,$$

$$J_y = \dot{v}_y + \omega_z v_x - \omega_x v_z,$$

$$J_z = \dot{v}_z + \omega_x v_y - \omega_y v_x,$$

где

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y; \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z; \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x$$

суть компоненты скорости.

Окончательно получим:

$$\begin{aligned} J_x &= \dot{\omega}_y z - \dot{\omega}_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - x \omega^2, \\ J_y &= \dot{\omega}_z x - \dot{\omega}_x z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - y \omega^2, \\ J_z &= \dot{\omega}_x y - \dot{\omega}_y x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - z \omega^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Умножим теперь уравнения (2) на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и сложим. Это даст:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} dp &= dV - [(\dot{\omega}_y z - \dot{\omega}_z y) dx + (\dot{\omega}_z x - \dot{\omega}_x z) dy + (\dot{\omega}_x y - \dot{\omega}_y x) dz] + \\ &+ (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) (\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz) - \\ &- \omega^2 (x dx + y dy + z dz). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем всегда считать, что плотность зависит только от давления, так что  $x = f(p)$ . В этом случае левая часть полученного равенства является полным дифференциалом; следовательно, и правая часть должна быть также полным дифференциалом. А для этого необходимо и достаточно, чтобы выражение, стоящее в квадратных скобках, было полным дифференциалом, т. е. чтобы выполнялись условия:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\dot{\omega}_z x - \dot{\omega}_x z) = \frac{\partial}{\partial y} (\dot{\omega}_x y - \dot{\omega}_y x); \dots$$

Эти равенства дают:

$$\dot{\omega}_x = -\dot{\omega}_x; \quad \dot{\omega}_y = -\dot{\omega}_y; \quad \dot{\omega}_z = -\dot{\omega}_z,$$

откуда  $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ , или, после интегрирования:

$$\omega_x = \text{const}; \quad \omega_y = \text{const}; \quad \omega_z = \text{const}. \quad (4)$$

Уравнения (1) принимают теперь вид:

$$(C - B) \omega_y \omega_z = 0; \quad (A - C) \omega_z \omega_x = 0; \quad (B - A) \omega_x \omega_y = 0. \quad (5)$$

Если все главные моменты инерции  $A$ ,  $B$  и  $C$  между собой различны, то, по крайней мере, две из величин  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  должны равняться нулю, т. е. движение жидкости приводится к равномерному вращению вокруг одной из главных осей инерции.

Предположим теперь, что эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения. Пусть, например,  $A = B \neq C$ . Уравнениям (5) можно удовлетворить или полагая  $\omega_x = \omega_y = 0$ , или полагая  $\omega_z = 0$ . Но в том и в другом из этих случаев можно считать, что вращение происходит вокруг главной оси инерции, ибо каждую прямую, лежащую в плоскости  $xu$ , здесь можно считать за главную ось инерции.

Если, наконец,  $A = B = C$ , то про направление оси вращения можно только сказать, что оно остается неизменным; но в этом случае

каждую прямую, проходящую через центр инерции, можно рассматривать как главную ось инерции. Равенства (4) являются здесь непосредственным следствием уравнений Эйлера (1).

Мы приходим, таким образом, к следующему результату, установленному Пуанкаре (1900):

*единственно возможным движением жидкости, находящейся в состоянии относительного равновесия, является равномерное вращение вокруг одной из главных осей инерции.*

Известно, что вращение твердого тела вокруг наибольшей и вокруг наименьшей из осей эллипсоида инерции является устойчивым, тогда как вращение вокруг средней оси неустойчиво. Тем менее устойчивым будет такое вращение для жидкости в состоянии относительного равновесия, так как на жидкость наложено меньше связей. Пуанкаре показал,<sup>1</sup> что вращение вокруг наибольшей из главных осей инерции также является неустойчивым. Таким образом, единственно устойчивым (а следовательно и единственно возможным в действительности) является вращение жидкости вокруг наименьшей из главных осей инерции.

При доказательстве теоремы Пуанкаре мы основывались на предположении, что плотность и давление связаны функциональной зависимостью. В следующем параграфе мы увидим, что справедливо и обратное заключение: если жидкость вращается, как твердое тело, с постоянной угловой скоростью, то плотность и давление связаны соотношением вида  $\kappa = f(p)$ .

#### § 47. Относительное равновесие равномерно вращающейся жидкости

Ось вращения жидкости примем за ось  $z$ . Так как в этом случае  $\omega_x = \omega_y = 0$ ,  $\omega_z = \omega$ , где  $\omega$  — постоянная угловая скорость вращения, то формулы (3) предыдущего параграфа дают:

$$J_x = -\omega^2 x, \quad J_y = -\omega^2 y, \quad J_z = 0,$$

вследствие чего гидродинамические уравнения (2) принимают вид:

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x; \quad \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y; \quad \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1)$$

Умножив эти уравнения на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , и сложив, получим:

$$\frac{1}{\kappa} dp = dW, \quad (2)$$

где для краткости положено:

$$W = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2).$$

<sup>1</sup> H. Poincaré, Figures d'équilibre d'une masse fluide. Paris. 1902.

Равнодействующая силы притяжения и центробежной силы, компоненты которой стоят в правых частях уравнений (1), называется *силой тяжести* в рассматриваемой точке жидкости. Поэтому функцию  $W$  можно назвать *потенциалом силы тяжести*. Поверхности

$$W = \text{const} \quad (3)$$

носят название *уровенных поверхностей*.

Уравнение (2) показывает, что уровенные поверхности совпадают с поверхностями равного давления

$$p = \text{const.}$$

Легко видеть, что эти поверхности совпадают также и с поверхностями равной плотности, определяемыми уравнениями

$$\kappa = \text{const.}$$

Действительно, уравнения (1) дают:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \kappa \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \kappa \frac{\partial W}{\partial y}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \kappa \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Отсюда, приравнявая вторые производные  $p$ , вычисляемые двумя различными путями:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \kappa}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y}; \dots$$

т. е.

$$\frac{\frac{\partial \kappa}{\partial x}}{\frac{\partial W}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \kappa}{\partial y}}{\frac{\partial W}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \kappa}{\partial z}}{\frac{\partial W}{\partial z}},$$

что и доказывает тождественность этих поверхностей. Итак:

*если изолированная жидкая масса находится в состоянии относительного равновесия, то ее уровенные поверхности являются одновременно поверхностями равного давления и равной плотности.*

На внешней поверхности жидкости  $p = 0$ , следовательно,  $W = \text{const}$ . Таким образом, жидкость, находящаяся в состоянии относительного равновесия, ограничена *уровенной поверхностью*.

Если жидкость однородна и несжимаема, то задача полностью решена, когда найдена уровенная поверхность, являющаяся одновременно внешней поверхностью жидкости, т. е. заключающая объем, равный  $M/\kappa$ , где  $M$  — масса рассматриваемой жидкости. Что же касается общего случая, когда жидкость не является однородной и несжимаемой, то тут задача заключается в определении всего семейства уровенных поверхностей.

Нахождение уровенных поверхностей:

$$W = V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = a \quad (4)$$

равносильно решению интегрального уравнения:

$$W = f \int \frac{x' dx' dy' dz'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2),$$

где  $x' = x(x', y', z')$ , а интеграл берется по области  $W(x', y', z') > A$ , если  $A$  есть значение  $\alpha$ , соответствующее внешней поверхности. Трудность рассматриваемой задачи связана со своеобразным характером этого интегрального уравнения, у которого область интегрирования зависит от неизвестной функции  $W$ .

Задачу можно представить в другом, иногда более удобном виде. Пусть

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

есть уравнение одной из уровенных поверхностей, например — поверхности, ограничивающей фигуру равновесия.

Обозначим через  $dx, dy, dz$  компоненты произвольного перемещения вдоль этой поверхности.

Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

а с другой стороны, поскольку эта же поверхность определяется уравнением (4):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y\right) dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0. \quad (4')$$

Следовательно, для определения функции  $\varphi$  имеем такую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial V}{\partial z}}. \quad (5)$$

Механическая интерпретация этих уравнений очевидна: в каждой точке уровенной поверхности сила тяжести должна быть направлена по нормали к этой поверхности.

**Уравнение Вавра.** Предполагая, что жидкость однородна и несжимаема, так что  $x = \text{const}$ , вычислим приращение ее потенциала

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz,$$

соответствующее перемещению  $ds\{dx, dy, dz\}$  рассматриваемой точки.

Так как для однородных тел имеют место формулы § 10 (4):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -x \int \frac{\alpha}{r} d\sigma; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -x \int \frac{\beta}{r} d\sigma; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -x \int \frac{\gamma}{r} d\sigma,$$

где интегралы берутся по поверхности  $S$ , ограничивающей жидкость, а через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  обозначены направляющие косинусы внешней нормали, то

$$dV = -\kappa \int_S (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \frac{d\sigma}{r}.$$

Это выражение можно еще написать так:

$$dV = -ds \cdot \kappa \int_S \frac{\cos(n, s)}{r} d\sigma,$$

если при помощи очевидного равенства:

$$\cos(n, s) = \alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds}$$

ввести угол между внешней нормалью и направлением  $ds$ .

Таким образом, при произвольном перемещении  $ds$  изменение потенциала силы тяжести дается формулой:

$$dW = -ds \cdot \kappa \int_S \frac{\cos(n, s)}{r} d\sigma + \omega^2 \left( x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right) ds.$$

При всяком перемещении вдоль уровня поверхности  $dW = 0$ , следовательно, эти поверхности удовлетворяют уравнению

$$\kappa \int_S \frac{\cos(n, s)}{r} d\sigma = \omega^2 \left( x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right),$$

указанному Вавром.<sup>1</sup>

Если  $\omega = 0$ , то уравнению (6) удовлетворяет сферическая поверхность, так как для нее в каждой точке  $\cos(n, s) = 0$ . Напротив, если  $\omega \neq 0$ , то как показывает это уравнение, сферическая поверхность не может быть фигурой равновесия.

#### § 48. Относительное равновесие однородной сжимаемой жидкости

После случая однородной несжимаемой жидкости, когда  $\kappa = \text{const}$ , простейшим является случай однородной сжимаемой жидкости, когда зависимость между плотностью и давлением определяется для всей жидкой массы одним и тем же уравнением:

$$\rho = f(\kappa).$$

Этот случай мы сейчас и рассмотрим.

<sup>1</sup> R. Wavre, Sur l'équilibre d'une masse fluide, Soc. de physique, Genève, 43, 1926.

Основное уравнение § 47 (2) принимает здесь такой вид:

$$\frac{1}{x} \frac{df(x)}{dx} = \frac{dW}{dx}.$$

Или, после интегрирования:

$$F(x) = W + \text{const}, \quad (1)$$

если положить

$$F(x) = \int \frac{1}{x} \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Возьмем лапласианы от обеих частей равенства (1). Так как, в силу уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 W = -4\pi f x + 2\omega^2,$$

то это даст:

$$\nabla^2 F(x) + 4\pi f x = 2\omega^2. \quad (2)$$

Итак, если однородная сжимаемая жидкость находится в относительном равновесии, то ее плотность должна удовлетворять дифференциальному уравнению (2).

Соотношение (1) определяет так называемый закон плотностей: оно дает плотность  $x$ , соответствующую каждой из уровенных поверхностей  $W = \text{const}$ .

Если из равенства (1) найти  $x$  и подставить в (2), то получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $W$ . Оно будет вида:

$$\nabla^2 W = \Phi(W). \quad (3)$$

Это уравнение можно использовать для того, чтобы проверить, может ли заданное семейство поверхностей

$$\varphi(x, y, z) = \alpha \quad (4)$$

быть конфигурацией равновесия, т. е. представлять поверхности равной плотности.

Если поверхности (4) совпадают с поверхностями

$$W = \text{const},$$

то  $\alpha$  можно рассматривать как функцию  $W$ . Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{d\alpha}{dW}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \alpha}{dW^2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{d\alpha}{dW} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Исключение  $\frac{\partial W}{\partial x}$  дает:

$$\left( \frac{d\alpha}{dW} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \alpha}{dW^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{d\alpha}{dW} \right)^3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Складывая это равенство с двумя аналогичными, получим;

$$\left(\frac{d\alpha}{dW}\right)^2 \nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \alpha}{dW^2} (\nabla \varphi)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dW}\right)^3 \nabla^2 W.$$

В последний член подставим выражение (3). Так как  $\alpha$  и  $W$  связаны функциональной зависимостью, то производные  $\frac{d\alpha}{dW}$  и  $\frac{d^2 \alpha}{dW^2}$  можно считать выраженными через  $\alpha$ , или, учитывая (4), через  $\varphi$ . Таким образом, окончательно получим для  $\varphi$  уравнение вида;

$$F_1(\varphi) \nabla^2 \varphi = F_2(\varphi) (\nabla \varphi)^2 + F_3(\varphi). \quad (5)$$

**Пример.** Докажем при помощи этого уравнения, что семейство гомотетических эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \alpha,$$

где  $a, b, c$  — заданные постоянные, не может представлять конфигурацию равновесия.

В самом деле, в этом случае

$$\nabla^2 \varphi = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2}; \quad (\nabla \varphi)^2 = 4 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right).$$

Отсюда ясно, что уравнение вида (5) не может иметь место, за исключением лишь случая, когда  $a = b = c$ .

Более подробное исследование уравнения (2) показывает, что концентрические сферы могут представлять конфигурацию равновесия лишь в случае  $\omega = 0$ .<sup>1</sup>

## § 49. Равновесие покоящейся жидкости

Возможную форму равновесия покоящейся изолированной жидкости интересно изучить потому, что эту форму можно рассматривать как предел, к которому должны стремиться фигуры равновесия вращающейся жидкости, когда скорость стремится к нулю.

Когда угловая скорость вращения равна нулю, уравнение § 47 (2) дает:

$$\frac{1}{\kappa} dp = dV.$$

Поэтому, ограничиваясь случаем однородной и несжимаемой жидкости, когда  $\kappa = \text{const}$ , получим:

$$p = \kappa V + \text{const}. \quad (1)$$

<sup>1</sup> Дальнейшее развитие этого круга идей, в частности, рассмотрение случая, когда уравнение (4) содержит несколько параметров (являющихся функциями  $W$ ), можно найти в книге: П. Пизетти, Основы механической теории фигур планет, ГТТИ, Москва, 1933.



В этом случае уровенные поверхности совпадают с эквипотенциальными, и очевидным решением задачи является сферическая поверхность. Рассмотрим это решение подробнее.

Пусть  $a$  радиус шара, тогда (§ 9):

$$V = 2\pi f\chi a^2 - \frac{2}{3}\pi f\chi r^2,$$

где  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ; поэтому равенство (1) дает:

$$p = -\frac{2}{3}\pi f\chi^2 r^2 + \text{const.}$$

Чтобы определить постоянную интегрирования, воспользуемся тем обстоятельством, что давление равно нулю при  $r = a$ , т. е. на поверхности сферы. Получим:

$$p = \frac{2}{3}\pi f\chi^2 (a^2 - r^2).$$

Применим эту формулу к вычислению гидростатического давления в центре Земли, считая Землю покоящимся, жидким, однородным шаром.

В центре шара, при  $r = 0$ , давление равно

$$p_0 = \frac{2}{3}\pi f\chi^2 a^2.$$

Принимая в системе CGS:

$$f = 6.67 \cdot 10^{-8}; \quad \chi = 5.52; \quad a = 6366 \cdot 10^5,$$

получим:

$$p_0 = 1.72 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2 = 1.7 \cdot 10^6 \text{ атмосфер.}$$

Очень долго не удавалось доказать, что сфера является единственно возможной фигурой равновесия покоящейся жидкости. Впервые такое доказательство было дано Карлеманом (1918). В настоящее время этот результат непосредственно вытекает из теоремы Лихтенштейна, которая будет изложена в следующем параграфе.

Значительно раньше Ляпунов показал, что сфера является единственной устойчивой фигурой равновесия покоящейся жидкости.

## § 50. Теорема Лихтенштейна о существовании экваториальной плоскости

Ось вращения фигуры равновесия является всегда одной из центральных главных осей инерции. Проведем через центр инерции плоскость, перпендикулярную к оси вращения. Эту плоскость уместно назвать *экваториальной плоскостью*, ибо она, как сейчас будет показано, является плоскостью симметрии для всех фигур равновесия однородной жидкости.

Примем ось вращения за ось  $z$ , а экваториальную плоскость за плоскость  $xy$ .

Допустим, что экваториальная плоскость не является плоскостью симметрии. В таком случае середины хорд, проведенных параллельно оси  $z$ , не будут лежать в этой плоскости, а образуют некоторую поверхность. Обозначим через  $M(x, y, z_1)$  ту точку этой поверхности, для которой  $z$  имеет наибольшее значение. Пусть хорда, параллельная оси  $z$  и проходящая через точку  $M$ , пересечет границу жидкости в точках  $P_1(x, y, z_1)$  и  $P_2(x, y, z_2)$ , причем  $z_1 > z_2$ .

Легко видеть, что

$$V(x, y, z_1) < V(x, y, z_2). \quad (1)$$

В самом деле, если мы разделим жидкость на столбики, параллельные оси  $z$ , то середина каждого такого столбика будет дальше от точки  $P_1$ , нежели от  $P_2$ ; поэтому потенциал каждого столбика в точке  $P_1$  будет меньше чем в  $P_2$ , а так как потенциал  $V$  всей жидкой массы можно рассматривать как сумму потенциалов отдельных столбиков, то отсюда ясна справедливость неравенства (1).

Но, с другой стороны, поскольку точки  $P_1$  и  $P_2$  лежат на уровенной поверхности, ограничивающей жидкость, мы имеем:

$$V(x, y, z_1) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = V(x, y, z_2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

откуда:

$$V(x, y, z_1) = V(x, y, z_2).$$

Итак, допущение, что середины хорд, параллельных оси вращения, не лежат в одной плоскости, приводит к противоречию.

Это рассуждение показывает также, что каждая прямая, параллельная оси вращения, пересекает поверхность жидкой массы не более чем в двух точках.

Для полноты доказательства рассмотрим еще допущение, что точки  $P_1$  и  $P_2$  совпадают друг с другом, а следовательно и с точкой  $M$ . В этом случае точка  $M$  будет также находиться на поверхности жидкости; следовательно, тут возможны два предположения:

1) либо касательная плоскость к уровенной поверхности

$$V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C,$$

ограничивающей жидкость, в точке  $M$  параллельна оси  $z$ , так что в этой точке

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0;$$

2) либо точка  $M$  является особой точкой рассматриваемой поверхности; тогда в этой точке

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

С другой стороны, сравнение потенциала в точках  $M(x, y, z)$  и  $M'(x, y, z - dz)$  показывает, что для точки  $M$  имеет место неравенство

$$\frac{\partial V}{\partial z} < 0,$$

т. е. снова приходим к противоречию.

Таким образом, полностью доказана следующая теорема, найденная Лихтенштейном (1918):

*фигура относительного равновесия однородной жидкости всегда симметрична относительно плоскости, проходящей через центр инерции перпендикулярно к оси вращения; причем каждая прямая, параллельная оси вращения, пересекает поверхность жидкости не более чем в двух точках.*

Если жидкость находится в покое, то только что изложенные рассуждения будут применимы ко всякой плоскости, проведенной через центр инерции.

Каждая такая плоскость должна быть, следовательно, плоскостью симметрии, а поверхность, ограничивающая жидкость, может поэтому быть только сферой. Итак:

*единственная фигура равновесия покоящейся однородной жидкости есть сфера.*

## § 51. Теорема Пуанкаре о верхней границе угловой скорости вращения

Если жидкость находится в состоянии относительного равновесия, то ограничивающая ее поверхность  $S$  будет принадлежать к семейству уровневых поверхностей. Поэтому ее уравнение будет иметь вид:

$$W \equiv V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{const.} \quad (1)$$

Применение формулы Остроградского к функции  $W$  в области  $T$ , ограниченной поверхностью  $S$ , дает:

$$\int_S \frac{\partial W}{\partial n_i} d\sigma = - \int_T \nabla^2 W d\tau,$$

где через  $\partial n_i$  обозначен элемент внутренней нормали к поверхности  $S$ .

Так как

$$\nabla^2 W = \nabla^2 V + 2\omega^2 = -4\pi f x + 2\omega^2, \quad (2)$$

то это равенство можно написать иначе:

$$\int_S \frac{\partial W}{\partial n_i} d\sigma = \int_T (4\pi f x - 2\omega^2) d\tau. \quad (3)$$

Чтобы определить знак интеграла, стоящего слева, заметим, прежде всего, что производная  $\frac{\partial W}{\partial n_i}$  численно равна градиенту функции  $W$ , так что

$$\left| \frac{\partial W}{\partial n_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2}.$$

Следовательно, эта производная может обращаться в нуль лишь в особых точках поверхности (1); и в тех частях этой поверхности, где нет особых точек, она должна сохранять неизменный знак.

Знак  $\frac{\partial W}{\partial n_i}$  в точках поверхности  $S$  легко определить, если предположить, что  $x = \text{const}$ . Заметим, прежде всего, что в этом случае, на основании теоремы Лихтенштейна, особые точки поверхности  $S$ , образующие особую линию, могут быть только в экваториальной плоскости. Иначе говоря, либо эта поверхность не имеет вовсе особых линий, либо такой линией является пересечение поверхности с экваториальной плоскостью. Отсюда следует, что знак  $\frac{\partial W}{\partial n_i}$  должен быть неизменен как в верхней половине поверхности ( $z > 0$ ), так и в нижней ( $z < 0$ ). Поэтому достаточно определить знак  $\frac{\partial W}{\partial n_i}$  вблизи полюсов поверхности  $S$  (т. е. вблизи точек ее пересечения с осью вращения), где знаки  $\frac{\partial W}{\partial n_i}$  и  $\frac{\partial W}{\partial z}$  совпадают, если  $z < 0$  и противоположны, если  $z > 0$ .

Вопрос приводится, таким образом, к определению знака

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right) = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Но легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &< 0, \text{ если } z > 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &> 0, \text{ если } z < 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что  $\frac{\partial V}{\partial z}$  есть компонента притяжения, производимого жидкостью, в направлении оси  $z$ . Если, для вычисления этой компоненты, разбить жидкость на столбики, параллельные оси  $z$ , как это мы делали в предыдущем параграфе, и заметить, что притяжение каждого столбика будет направлено к его середине, лежащей в экваториальной плоскости, то отсюда будет ясна справедливость неравенств (4).

Неравенства (4) показывают, что

$$\frac{\partial W}{\partial n_i} > 0$$

на всей поверхности  $S$ , за исключением лишь самое большое изолированных особых точек и экватора, где эта производная может обратиться в нуль.

Возвращаясь теперь к равенству (3), мы видим, что

$$2\pi \int_T \chi d\tau - \omega^2 \int_T d\tau > 0. \quad (5)$$

Это неравенство мы доказали в предположении, что  $\chi = \text{const}$ . Но непосредственно ясно, что оно должно оставаться справедливым и при довольно широких допущениях относительно неоднородности жидкости; особенно, если эта неоднородность симметрична по отношению к экваториальной плоскости.

Так как интегралы, стоящие в (5), представляют соответственно массу и объем жидкости, то, обозначая через

$$\bar{\chi} = \frac{\int_T \chi d\tau}{\int_T d\tau}$$

среднюю плотность, окончательно получим:

$$\omega < \sqrt{2\pi f \bar{\chi}},$$

что и составляет *теорему Пуанкаре*. Ее можно формулировать следующим образом:

*относительное равновесие жидкости возможно только в том случае, когда угловая скорость вращения меньше  $\sqrt{2\pi f \bar{\chi}}$ .*

Итак, если угловая скорость  $\omega$  больше или равна величине  $\sqrt{2\pi f \bar{\chi}}$ , носящей название *предела Пуанкаре*, то фигуры равновесия существовать не могут, т. е. жидкость не может вращаться, как твердое тело.

Что для однородной жидкости равенство

$$\omega = \sqrt{2\pi f \bar{\chi}} \quad (6)$$

невозможно, — вытекает непосредственно из свойств гармонических функций. Действительно, в этом случае равенство (2) дало бы

$$\nabla^2 W = 0.$$

Таким образом, функция  $W$ , а следовательно и  $\frac{\partial W}{\partial z}$ , была бы гармонической в области  $T$ . Вне этой области функция  $\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z}$  также, очевидно, является гармонической. Но эта функция, будучи

гармонической и ограниченной во всем пространстве, должна быть тождественно равна нулю (§ 32). Итак, при сделанном предположении было бы  $\frac{\partial W}{\partial z} = 0$ . Но это невозможно, ибо уравнение (1) должно заключать  $z$ .

Недопустимость предположения (6) полностью доказана.

## § 52. Предел Крудели для угловой скорости вращения жидкости

Установленный Пуанкаре верхний предел угловой скорости вращения жидкости, находящейся в состоянии относительного равновесия, был значительно снижен Крудели (1910) для случая, когда жидкость ограничена выпуклой поверхностью.

Применим вторую формулу Грина (§ 26) к функции:

$$W = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2), \tag{1}$$

представляющей потенциал силы тяжести; получим:

$$W_P = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( W \frac{\partial r^{-1}}{\partial n_i} - r^{-1} \frac{\partial W}{\partial n_i} \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_T \frac{\nabla^2 W}{r} d\tau, \tag{2}$$

где  $W_P$  есть значение этой функции в точке  $P(x, y, z)$ , лежащей внутри поверхности  $S$ , которая ограничивает рассматриваемую фигуру равновесия.

Учитывая, что

$$\nabla^2 W = -4\pi f_x + 2\omega^2,$$

и ограничиваясь в дальнейшем случае, когда  $x = \text{const}$ , тройной интеграл в равенстве (2) мы можем представить так:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_T r^{-1} (-4\pi f_x + 2\omega^2) d\tau = \left(1 - \frac{\omega^2}{2\pi f_x}\right) \int_T \frac{f_x d\tau}{r}.$$

Но равенство (1) дает:

$$V = \int_T \frac{f_x d\tau}{r} = W - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2).$$

Следовательно, последний член равенства (2) окончательно можно написать в следующем виде:

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{2\pi f_x}\right) \left[ W_P - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right]. \tag{3}$$

Обратимся теперь к двойному интегралу, стоящему в этом равенстве. Так как уравнение поверхности  $S$  имеет вид:

$$W = A,$$

где  $A = \text{const}$ , то (§ 4):

$$\frac{1}{4\pi} \int_S W \frac{\partial r^{-1}}{\partial n_i} d\sigma = \frac{A}{4\pi} \int_S \frac{\partial r^{-1}}{\partial n_i} d\sigma = A. \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в равенство (2), после очевидных упрощений получим:

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\kappa} W_P = A - \frac{\omega^2}{2} \left(1 - \frac{\omega^2}{2\pi f\kappa}\right) (x^2 + y^2) - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n_i} d\sigma. \quad (5)$$

Воспользуемся этим равенством для вычисления производной  $\frac{\partial W}{\partial n_i}$  в точках поверхности  $S$ . Стоящий справа интеграл можно рассматривать как потенциал простого слоя.

Поэтому, как было сказано в § 4:

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \int \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n_i} d\sigma = -2\pi \frac{\partial W}{\partial n_i} + \int_S \frac{\partial W}{\partial n_i} \frac{\partial r^{-1}}{\partial n_i} d\sigma.$$

Но

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial n_i} = \frac{\cos \psi}{r^2},$$

где  $\psi$  есть угол между внутренней нормалью к поверхности  $S$  и положительным направлением радиуса-вектора  $r$ , иначе говоря, между внутренней нормалью в точке  $P$  (которая теперь находится на  $S$ ) и прямой, соединяющей точку  $P$  с произвольной точкой элемента  $d\sigma$ .

Таким образом, после дифференцирования соотношение (5) окончательно будет иметь следующую форму:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2}{\pi f\kappa} - 1 \right) \frac{\partial W}{\partial n_i} = \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{\omega^2}{2\pi f\kappa} - 1 \right) \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial n_i} - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\cos \psi}{r^2} \frac{\partial W}{\partial n_i} d\sigma.$$

Посмотрим теперь, что дает эта формула для точки поверхности  $S$ , в которой нормаль параллельна оси  $z$ .

Для такой точки

$$\frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial n_i} = \pm \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial z} = 0,$$

следовательно:

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\pi f\kappa} \right) \frac{\partial W}{\partial n_i} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\cos \psi}{r^2} \frac{\partial W}{\partial n_i} d\sigma.$$

Если поверхность  $S$  выпукла, то во всех точках этой поверхности  $\cos \psi > 0$ . Как было показано в предыдущем параграфе,  $\frac{\partial W}{\partial n_i}$  есть также величина положительная. Таким образом, стоящий справа интеграл есть величина существенно положительная; следовательно

$$\omega^2 < \pi f_{\kappa}.$$

Итак, если фигура относительного равновесия жидкости выпукла, то угловая скорость вращения меньше  $\sqrt{\pi f_{\kappa}}$ . Эта величина носит название *предела Крудели*.

При доказательстве теоремы Крудели мы ограничились случаем  $\kappa = \text{const}$ . Но это доказательство можно распространить и на случай неоднородной жидкости, если только неоднородность подчинить надлежащим условиям. На этом мы не будем останавливаться.

### § 53. Теорема Стокса

Мы уже видели (§ 25), что в пространстве, внешнем по отношению к такой эквипотенциальной поверхности, которая заключает все притягивающие массы, потенциал вполне определяется формой этой поверхности и суммой заключенных внутри ее масс. Так что от распределения масс внутри этой поверхности величина потенциала во внешнем пространстве не зависит.

Стокс<sup>1</sup> обобщил эту теорему на потенциал вращающейся планеты при условии, что эта планета либо является твердым телом, либо находится в относительном равновесии и, следовательно, вращается, как твердое тело.

Принимая, как и раньше, ось вращения за ось  $z$ , рассмотрим замкнутую уровенную поверхность  $S$ , целиком заключающую все притягивающие массы.

Уравнение поверхности  $S$  имеет вид:

$$W = A, \quad (1)$$

где  $A = \text{const}$ , а через

$$W = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

обозначен потенциал силы тяжести, равный сумме потенциала притяжения  $V$  и силовой функции центробежной силы.

Так как все притягивающие массы заключены внутри поверхности  $S$ , то во всем пространстве, внешнем по отношению к этой поверхности, функция  $V$  является гармонической.

<sup>1</sup>) G. Stokes, On attraction and on Clairauts Theorem (1849). Эту работу можно найти в его Mathematical and Physical Papers, Vol. II (Cambridge, 1883).



Теорема Гаусса (§ 8) позволяет далее написать:

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 4\pi M, \quad (2)$$

— если считать, что производная берется по внутренней нормали, а через  $M$  обозначить массу планеты.

Предположим теперь, что масса  $M$  перераспределена таким образом, что поверхность  $S$ , определяемая уравнением (1), остается без изменения.

Если через  $V'$  обозначить потенциал притяжения во внешнем (по отношению к  $S$ ) пространстве при новом распределении масс и положить

$$W' = V' + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

то уравнение поверхности  $S$ , которая остается попрежнему уровенной, можно написать еще и так:

$$W' = A',$$

где  $A'$  — постоянная величина.

Рассмотрим разность

$$U = W - W' = V - V'.$$

Эта функция, будучи гармонической во всем внешнем по отношению к  $S$  пространстве, должна сохранять постоянное значение на поверхности  $S$ , ибо для точек этой поверхности

$$U = A - A'.$$

С другой стороны, равенство (2) и аналогичное для  $V'$  дают

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Но, как было показано в § 25, гармоническая функция, обладающая такими свойствами, должна быть тождественно равна нулю. Итак,  $A = A'$  и

$$W = W'$$

как на поверхности  $S$ , так и во всем внешнем относительно нее пространстве. Это доказывает справедливость *теоремы Стокса*:

*если вращающаяся жидкость находится в относительном равновесии, то сила тяжести как на ее поверхности, так и во всем внешнем пространстве вполне определяется заданием формы уровенной поверхности, ограничивающей жидкость, общей массы этой жидкости и угловой скорости вращения.*

Эта теорема показывает, например, что изучение распределения силы тяжести на земной поверхности может дать лишь ограниченные сведения о внутреннем строении Земли. Каждый закон изменения плотности с глубиной, приводящий к той же самой внешней фигуре планеты, будет одинаково совместим с наблюдаемым на ее поверхности распределением силы тяжести и наблюдаемыми движениями спутников этой планеты.

**Примечание.** Пусть вращающаяся жидкость находится в относительном равновесии. Рассмотрим интеграл

$$J = \int_{(S)} U \omega \, d\tau, \quad (3)$$

взятый по объему, ограниченному замкнутой уровенной поверхностью  $S$ , которая целиком заключает жидкость. В таком случае, какова бы ни была функция  $U$ , гармоническая внутри поверхности  $S$ , величина интеграла зависит лишь от поверхности  $S$ , массы жидкости  $M$  и ее угловой скорости  $\omega$ .

В самом деле, задание  $S$ ,  $M$  и  $\omega$  вполне определяет потенциал  $V$  и его производную  $\partial V / \partial n_e$  в точках поверхности  $S$ : это вытекает из теоремы Стокса и непрерывности этих функций. Обозначим через  $V_i$  потенциал жидкости внутри поверхности  $S$ . Так как в точках этой поверхности

$$V_i = V, \quad \partial V_i / \partial n_i = -\partial V / \partial n_e,$$

то эти величины будут также вполне определены заданием  $S$ ,  $M$  и  $\omega$ .

Уравнение Пуассона (§ 7) позволяет представить интеграл (3) следующим образом:

$$J = -\frac{1}{4\pi f} \int_{(S)} U \nabla^2 V_i \, d\tau$$

или, применяя первую формулу Грина:

$$J = \frac{1}{4\pi f} \int_S \left( U \frac{\partial V_i}{\partial n_i} - V_i \frac{\partial U}{\partial n_i} \right) d\sigma,$$

поскольку

$$\nabla^2 U = 0.$$

Это равенство показывает, что величина интеграла  $J$  не меняется при таких перераспределениях вращающейся массы, которые не изменяют  $S$ ,  $M$  и  $\omega$ . Величины, обладающие таким свойством, часто для краткости называются *стоксовыми постоянными*.

Приняв за  $U$  три линейно независимые сферические полиномы первого порядка (§ 34), увидим, что интегралы:

$$\int_{(S)} \xi \omega \, d\tau, \quad \int_{(S)} \eta \omega \, d\tau, \quad \int_{(S)} \zeta \omega \, d\tau,$$

а следовательно, и координаты центра инерции являются *стоксовыми постоянными*.

Если за  $U$  принять пять линейно независимых сферических полиномов второго порядка:

$$\xi^2 - \zeta^2, \quad \eta^2 - \zeta^2, \quad \eta\zeta, \quad \xi\zeta, \quad \xi\eta,$$

то легко убедиться, что *разности главных осей инерции и направляющие косинусы этих осей являются стоксовыми постоянными*.

Действительно, положим, как обычно:

$$A' = \int (\eta^2 + \zeta^2) \times d\tau, \quad B' = \int (\xi^2 + \zeta^2) \times d\tau, \quad C' = \int (\xi^2 + \eta^2) \times d\tau,$$

$$F' = \int \eta\zeta \times d\tau, \quad G' = \int \xi\zeta \times d\tau, \quad H' = \int \xi\eta \times d\tau,$$

тогда

$$A' - C', \quad B' - C', \quad F', \quad G', \quad H'$$

будут *стоксовы постоянные*.

Чтобы привести уравнение эллипсоида инерции

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - 2F'yz - 2G'xz - 2H'xy = 1$$

к каноническому виду:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

представим его предварительно так:

$$C'(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi(x, y, z) = 1,$$

где

$$\varphi(x, y, z) = (A' - C')x^2 + (B' - C')y^2 - 2F'yz - 2G'xz - 2H'xy.$$

Приведение к каноническому виду квадратной формы  $\varphi$  даст:

$$\varphi = PX^2 + QY^2 + RZ^2,$$

причем  $P, Q, R$ , а также коэффициенты соответствующей ортогональной линейной подстановки (равные направляющим косинусам главных осей инерции) выражаются через коэффициенты  $\varphi$ , являющиеся *стоксовыми постоянными*.

Так как

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

то

$$A = P + C', \quad B = Q + C', \quad C = R + C'.$$

Отсюда ясно, что разности главных моментов инерции суть *стоксовы постоянные*.

## § 54. Модель Роша

Рассмотрим фигуры относительного равновесия жидкости, вся масса которой практически сосредоточена в центре инерции, так, что притяжением всей остальной части жидкости можно пренебречь. Такого рода модель была подробно изучена Рошем<sup>1</sup> как основа при математической обработке космогонической гипотезы Лапласа. Туманность, из которой согласно этой гипотезе образовалась солнечная система, рассматривалась Рошем как состоящая из центрального весьма конденсированного ядра, окруженного крайне разреженной атмосферой, масса которой исчезающе мала по сравнению с массой центрального сгущения. Дальнейшие исследования установили, что плотность газа, находящегося в изотермическом равновесии, на достаточно большом расстоянии от центра убывает обратно пропорционально квадрату расстояния; если же газ находится в адиабатическом равновесии, то она убывает приблизительно как пятая степень расстояния. Таким образом, как в том, так и в другом из этих случаев притяжение массы, находящейся вне центрального сгущения, уже на небольшом расстоянии становится неощутимым.

С другой стороны, модель Роша и независимо от космогонических приложений представляет интерес как предельный случай, так как фигуры равновесия любой сжимаемой жидкости должны по своим свойствам занимать промежуточное положение между моделью Роша с одной стороны и фигурами равновесия однородной несжимаемой жидкости — с другой.

Примем, как и раньше, ось вращения за ось  $z$ , а плоскость, проведенную через центр инерции  $O$  перпендикулярно к этой оси, — за плоскость  $xy$ .

Если массу центрального ядра, находящегося в точке  $O$ , обозначить через  $M$  и пренебречь притяжением окружающей это ядро атмосферы, то потенциал выразится формулой:

$$V = \frac{fM}{r}, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Таким образом, семейство уровенных поверхностей определяется в этом случае уравнением:

$$\frac{fM}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{const.} \quad (1)$$

Полагая

$$\frac{\omega^2}{fM} = \frac{1}{b^3} \quad (2)$$

<sup>1</sup> E. Roche, Essai sur la constitution et l'origine du système solaire (Mémoires de l'Académie de Montpellier, Section des Sciences, t. VIII, 1873). Тут же указаны его более ранние работы.

(где  $b$  имеет размерность длины), напомним это уравнение так:

$$\frac{2}{r} + \frac{x^2 + y^2}{b^3} = \frac{3k}{b} \quad (3)$$

и посмотрим, как меняется форма уровенной поверхности при изменении постоянной  $k$ .

Уравнение (3) представляет поверхность вращения, симметричную относительно плоскости  $xu$ . Вопрос приводится поэтому к определению формы меридианного сечения.

Делая  $y = 0$ , получим уравнение

$$\frac{2}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{x^2}{b^3} = \frac{3k}{b} \quad (4)$$

меридианного сечения, лежащего в плоскости  $xz$ .

Если  $k$  очень велико, то уравнение (4) представляет очень маленькую овальную кривую, окружающую начало координат, и две бесконечные ветви, асимптотически приближающиеся к прямым

$$x = \pm b \sqrt{3k}.$$

Заметим, что овальная кривая пересекает ось  $z$  в точках

$$z = \pm r_p; \quad r_p = \frac{2b}{3k},$$

где она внешне касается окружности  $r = r_p$ .

На рис. 6 кривая, соответствующая этому случаю (при  $k = 1.44$ ), отмечена цифрой 1.

При уменьшении  $k$  овал будет увеличиваться, а бесконечные ветви кривой будут приближаться к оси  $z$ . Это будет происходить до тех пор, пока овал и бесконечные ветви не будут иметь общие точки, т. е. пока кривая (4) не будет иметь двойные точки.

Координаты двойных точек должны, помимо уравнения (4), удовлетворять еще двум уравнениям:

$$-\frac{2z}{r^3} = 0, \quad -\frac{2x}{r^3} + \frac{2x}{b^3} = 0.$$

Эти три уравнения дают:

$$x = \pm b, \quad z = 0, \quad k = 1.$$

Кривая с двойными точками, соответствующая случаю  $k = 1$ , отмечена на рис. 6 цифрой 2. Легко видеть, что касательные к этой кривой в двойных точках образуют с осью абсцисс углы в  $60^\circ$  и  $120^\circ$ .

При  $k < 1$  кривая (4) уже не пересекает оси абсцисс. На рис. 6 этот случай представлен кривой 3, соответствующей  $k = \frac{4}{5}$  и кривой 4, соответствующей  $k = \frac{2}{3}$ . Отсюда следует, что при  $k < 1$  поверх-

ность (3) не будет замкнутой, а потому она не может быть фигурой равновесия вращающейся жидкости. Остановимся на этом случае несколько подробнее.

Точки пересечения кривой (4) с осью абсцисс определяются уравнением:

$$\frac{2}{|x|} + \frac{x^2}{b^3} = \frac{3k}{b}.$$

Для  $x > 0$  имеем, следовательно, кубическое уравнение:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^3 - 3k\left(\frac{x}{b}\right) + 2 = 0.$$

Помимо отрицательного корня, который нас здесь не интересует, это уравнение имеет два положительных неравных корня, если  $k > 1$ ;

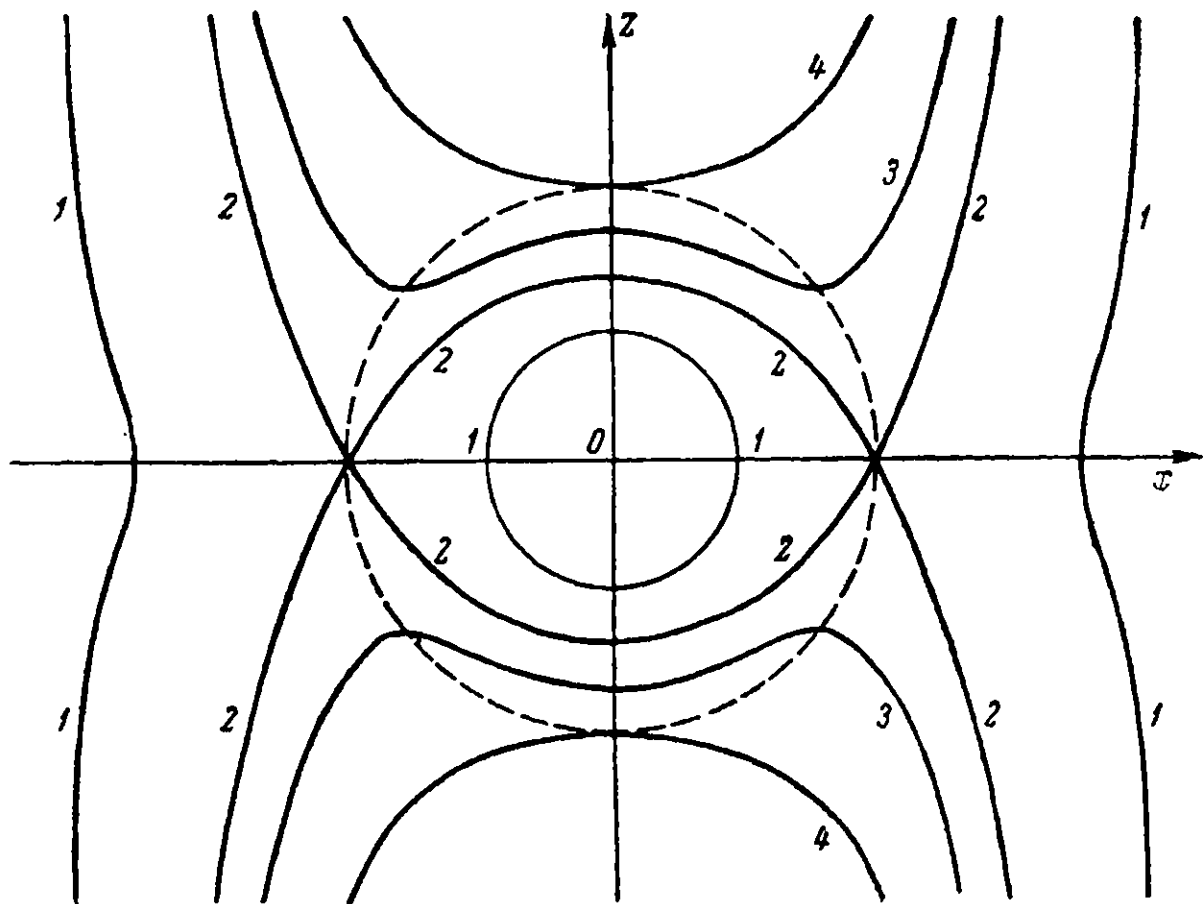


Рис. 6.

эти корни становятся равными при  $k = 1$  и комплексными при  $k < 1$ .

Итак, только при  $k \geq 1$  уровенная поверхность (3) замкнута и, следовательно, может ограничивать фигуру равновесия.

Остановимся еще на форме кривых (4) при  $k < 1$ . Посмотрим, как расположены точки этих кривых, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

В этих точках должно выполняться равенство:

$$-\frac{x}{r^3} + \frac{x}{b^3} = 0. \quad (5)$$

Если  $x=0$ , то соответствующие точки лежат на оси вращения. С другой стороны, этому уравнению удовлетворяют все точки окружности  $r=b$ , проведенной пунктиром на рис. 6.

Учитывая (2), равенство (5) можно написать так:

$$\frac{fMx}{r^3} = \omega^2 x.$$

Отсюда ясно, что сфера  $r=b$  есть геометрическое место точек, в которых центробежная сила равна компоненте притяжения, параллельной плоскости экватора.

Левая часть уравнения (1) есть не что иное, как потенциал силы тяжести  $W$ . Ускорение силы тяжести  $g$  дается поэтому формулой:

$$g^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2. \quad (6)$$

Так как при  $k=1$  экватор является двойной линией поверхности (1), то на экваторе

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

и потому  $g=0$ . Иначе говоря, в этом случае для частиц жидкости, находящихся на экваторе, центробежная сила и сила притяжения взаимно уравновешиваются. Такие частицы должны терять связь с вращающейся массой и рассеиваться в экваториальной плоскости, образуя тот материал, из которого, согласно гипотезе Лапласа, образовались планеты. К этому вопросу мы вернемся несколько дальше.

Поверхность (3) при  $k=1$ , имеющую острое ребро, будем называть *предельной поверхностью*, так как она замыкает последовательность уретенных поверхностей, могущих служить границей жидкости.

## § 55. Атмосферы светил. Туманность Лапласа

Полученные в предыдущем параграфе результаты позволяют сделать несколько замечаний относительно атмосфер, окружающих Солнце и планеты. Так как каждое из этих тел имеет сферическую структуру (поскольку сжатием здесь можно пренебречь), то притяжение, производимое на частицы атмосферы, такое же, как если бы вся масса была сосредоточена в центре. Это, а также ничтожность массы атмосферы делают возможным применение здесь модели Роша в качестве первого приближения.

Пользуясь этой моделью, определим наибольшие возможные размеры атмосферы Солнца, считая ее ограниченной предельной поверхностью.

Как было показано в предыдущем параграфе, экваториальный и полярный радиусы предельной поверхности равны соответственно:

$$r_e = b \quad \text{и} \quad r_p = \frac{2}{3} b, \quad (1)$$

где  $b$  определяется формулой § 54 (2), дающей

$$b^3 = \frac{fM}{\omega^2}. \quad (2)$$

Заметим, что сжатие предельной поверхности равно:

$$\alpha = \frac{r_e - r_p}{r_e} = \frac{1}{3}.$$

Для определения произведения  $fM$  воспользуемся формулой (том I, § 3):

$$fM = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2};$$

здесь через  $a$  и  $P$  обозначены большая полуось и период обращения какой-либо планеты.

С другой стороны:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

если через  $T$  обозначить период вращения Солнца. Поэтому:

$$\frac{b^3}{a^3} = \frac{T^2}{P^2},$$

т. е.  $b$  можно рассматривать как большую полуось орбиты такой планеты, у которой период обращения был бы равен  $T$ .

Принимая

$$T = 24^d.65; \quad P = 365^d.2564, \quad a = 1,$$

получим

$$b = 0.170 \text{ астр. единиц.}$$

Так как  $a = 215.0$  радиусов Солнца, то это показывает, что  $b = 36.5$  радиусов Солнца.

Отсюда следует, что зодиакальный свет не может быть приписан атмосфере Солнца, поскольку, как показывают наблюдения, он простирается гораздо дальше — во всяком случае за пределы орбиты не только Меркурия, но и Венеры. Таким образом, частицы, производящие зодиакальный свет, должны двигаться вокруг Солнца самостоятельно, подобно планетам.

Применив тот же способ к Земле, найдем, что величина  $b$ , определяющая размеры предельной поверхности, в 6.7 раза больше радиуса Земли. Такова верхняя граница протяженности земной атмосферы при тех допущениях, которые лежат в основе наших рассуждений.



Обратимся теперь к той туманности, из которой, согласно известной гипотезе Лапласа, образовалась солнечная система. Эту туманность будем считать состоящей из массивного центрального сгущения, окруженного весьма разреженной атмосферой, вращающейся как одно целое вместе с центральным ядром. Атмосфера, вследствие присущего ей стремления к расширению, заполнит наибольшую из возможных уровней поверхностей. Иначе говоря, она будет ограничена предельной поверхностью, размеры которой, в зависимости от угловой скорости вращения  $\omega$  и массы туманности  $M$ , определяются равенствами (1) и (2).

Когда туманность, постепенно охлаждаясь, будет сжиматься, угловая скорость  $\omega$  должна увеличиваться, так как момент количества движения должен оставаться постоянным. Формула (2) показывает, что величина  $b$ , определяющая размеры предельной поверхности, будет уменьшаться. Предельная поверхность, сохраняющая неизменной свою форму, станет меньше, и поверхностный слой атмосферы, оказавшийся вне новой предельной поверхности, будет стекать по направлению к экватору и через его острое ребро растекаться в экваториальной плоскости.

Конечно, если сжатие туманности происходит быстрее, нежели сокращение предельной поверхности, то такое выделение материи не будет иметь места, и вся туманность сгустится в одно тело.

Возникновение колец, из которых по мнению Лапласа образовались планеты, Рош объясняет чередованием двух только что указанных форм сжатия туманности. В самом деле, размеры предельной поверхности определяются исключительно величинами  $\omega$  и  $M$ . Поэтому, пока охлаждаются и сжимаются только поверхностные слои, предельная поверхность от этого не меняется и отделения материи в экваториальной плоскости нет. Напротив, когда охлаждение распространится до центрального сгущения и заметно уменьшит момент инерции, угловая скорость возрастет и произойдет уменьшение предельной поверхности. Как только эта поверхность перегонит поверхностные слои, они спустятся к экватору и рассеются через острое ребро. При этом обнажатся новые поверхностные слои и начнется вновь процесс поверхностного охлаждения и т. д. Таким образом, выделение материи в экваториальной плоскости должно происходить с перерывами, что и приведет к образованию колец.

Гипотеза Лапласа, хорошо объяснявшая многие существенные особенности солнечной системы и потому пользовавшаяся всеобщим признанием, натолкнулась однако на трудности, преодолеть которые она, повидимому, не может. Еще в 1884 году Фуше (М. Fouché) отметил своеобразное распределение момента количества движения, имеющее место в солнечной системе. Отдаленность планет и медленность вращения Солнца приводят к тому, что свыше 95% общего момента количества движения приходится на долю планет (т. е. на  $\frac{1}{700}$  часть всей массы системы) и только около 2% остается на долю Солнца.

Попытки согласовать с гипотезой Лапласа такое распределение момента количества движения (совсем не похожее на наблюдаемое, например, в системах спутников) остались безуспешными.

Другой фундаментальной трудностью является процесс образования планет из выделенной материи. Исследование этого вопроса показало, что при тех соотношениях масс и расстояний, какие имеют место в солнечной системе, мы должны ожидать скорее превращения выделившейся материи во что-то вроде кольца малых планет, нежели в одну массивную планету. Можно думать, что модель Роша больше подходит для изучения эволюции галактик, нежели эволюции планетной системы, подобной нашей.<sup>1</sup>

### § 56. Предел сжатия планет, даваемый моделью Роша

Рассмотрим подробнее поверхности Роша, имеющие форму сфероидов с небольшим сжатием. В общем уравнение поверхностей Роша § 54 (3):

$$\frac{2}{r} + \frac{x^2 + y^2}{b^3} = \frac{3k}{b}$$

введем полярные координаты, полагая

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta, \quad z^2 = r^2 \cos^2 \theta, \quad (1)$$

а вместо параметра  $k$  введем полярный радиус

$$r_p = \frac{2b}{3k}.$$

Получим:

$$\frac{2}{r} + \frac{r^2}{b^3} \sin^2 \theta = \frac{2}{r_p},$$

или

$$1 - \frac{r_p}{r} = \alpha \left( \frac{r}{r_p} \right)^2 \sin^2 \theta, \quad (2)$$

если положить

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{r_p}{b} \right)^3 = \frac{4}{27k^3}. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда  $\alpha$  величина настолько малая, что квадратом ее можно пренебречь. Из двух положительных корней уравнения (2) интересующей нас поверхности отвечает то значение  $r$ , которое

<sup>1</sup> Литература по космогоническим гипотезам весьма обширна и в настоящее время постоянно пополняется важными работами, связанными с развитием физики и звездной астрономии. Ограничимся указанием только двух работ, наиболее тесно соприкасающихся с содержанием этой и следующей глав:

H. Poincaré, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, Paris 1911; 2 édition, Paris 1914.

J. H. Jeans, *Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics*, Cambridge, 1919.

очень мало отличается от  $r_p$ . Поэтому в пределах указанной точности уравнение (2) можно заменить таким:

$$\frac{r_p}{r} = 1 - \alpha \sin^2 \theta, \quad (4)$$

или

$$r = r_p (1 + \alpha \sin^2 \theta). \quad (5)$$

Так как радиус экватора получается отсюда равным  $r_e = r_p (1 + \alpha)$ , то сжатие рассматриваемой поверхности выражается так:

$$\frac{r_e - r_p}{r_e} = \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

т. е. в пределах принятой точности сжатие равно параметру  $\alpha$ , определяемому равенством (3).

Легко видеть, что с той же точностью поверхность (5) можно считать эллипсоидом вращения. Действительно, отбрасывая  $\alpha^2$ , из уравнения (4) получим:

$$r_p^2 = r^2 (1 - 2\alpha \sin^2 \theta),$$

или, учитывая (1):

$$r_p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha (x^2 + y^2).$$

А это равенство можно написать так:

$$\frac{(1 - 2\alpha)(x^2 + y^2)}{r_p^2} + \frac{z^2}{r_p^2} = 1,$$

или, снова отбрасывая  $\alpha^2$ :

$$\frac{x^2 + y^2}{r_e^2} + \frac{z^2}{r_p^2} = 1.$$

Чтобы иметь возможность сравнить теорию с наблюдениями, вычислим силу тяжести на поверхности этого сфероида.

Формула § 54 (6):

$$g^2 = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2,$$

в которой

$$W = \frac{\omega^2 b^3}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2),$$

дает:

$$g^2 = \omega^4 \left[ \left( \frac{b^3}{r^3} - 1 \right)^2 (x^2 + y^2) + \frac{b^6}{r^6} z^2 \right].$$

Заметим теперь, что, на основании равенств (3) и (4):

$$\left(\frac{b}{r}\right)^3 = \left(\frac{b}{r_p}\right)^3 \left(\frac{r_p}{r}\right)^3 = \frac{1}{2\alpha} (1 - 3\alpha \sin^2 \theta);$$

$$\left(\frac{b}{r}\right)^3 - 1 = \frac{1}{2\alpha} (1 - 2\alpha - 3\alpha \sin^2 \theta).$$

Поэтому, после некоторых упрощений:

$$g = \frac{\omega^2 r}{2\alpha} (1 - 5\alpha \sin^2 \theta).$$

Подставим сюда значение радиуса-вектора

$$r = r_e (1 - \alpha \cos^2 \theta),$$

легко выводимое из (5). Это даст:

$$g = \frac{\omega^2 r_e}{2\alpha} (1 - \alpha \cos^2 \theta - 5\alpha \sin^2 \theta). \quad (6)$$

Таким образом, для силы тяжести на экваторе ( $\theta = 90^\circ$ ) имеем следующее выражение:

$$g_e = \frac{\omega^2 r_e}{2\alpha} (1 - 5\alpha). \quad (7)$$

Отсюда

$$q' = \frac{2\alpha}{1 - 5\alpha} \approx 2\alpha; \quad \alpha \approx \frac{1}{2} q,$$

если через

$$q' = \frac{\omega^2 r_e}{g_e}$$

обозначить отношение центробежной силы и силы тяжести для экватора.

Мы приходим, таким образом, к теореме, установленной другим путем еще Гюйгенсом (1690):

*если всю притягивающую массу планеты полагать сосредоточенной в ее центре, то сжатие планеты равняется половине отношения центробежной силы к силе тяжести в точках, лежащих на экваторе.*

Эта теорема устанавливает нижнюю границу сжатия. Числовые результаты будут приведены ниже, в § 64.

Равенства (6) и (7) дают

$$g = g_e (1 + 4\alpha \cos^2 \theta). \quad (8)$$

Таков закон распределения силы тяжести на сфероиде Роша.

## § 57. Формула Брунса

Заканчивая изложение общих свойств фигур равновесия вращающихся жидких масс, остановимся еще на одном важном следствии, вытекающем из основного соотношения

$$W = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (1)$$

где функция  $W$  есть левая часть уравнения

$$W(x, y, z) = \text{const}, \quad (2)$$

определяющего уровенные поверхности.

Взяв лапласиан от обеих частей равенства (1) и воспользовавшись уравнением Пуассона, получим:

$$\nabla^2 W = -4\pi f x + 2\omega^2. \quad (3)$$

Но лапласиан функции  $W$  в точке поверхности (2) можно выразить через

$$\frac{\partial W}{\partial n} = g, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = \frac{\partial g}{\partial n},$$

т. е. через производные этой функции по нормали к поверхности.

Нормаль мы будем считать направленной внутрь замкнутой поверхности (2), так что  $g$  есть напряжение силы тяжести, а  $\partial g / \partial n$  — абсолютная величина ее вертикального градиента. Через  $\mathbf{n}$  обозначим единичный вектор, направленный по только что указанной нормали, тогда

$$\nabla W = g \cdot \mathbf{n}.$$

Следовательно:

$$\nabla^2 W = \nabla g \cdot \mathbf{n} + g \cdot \nabla \mathbf{n} = \frac{\partial g}{\partial n} - 2Hg, \quad (4)$$

так как можно доказать, что

$$\nabla \mathbf{n} = -2H, \quad (5)$$

если  $H$  есть средняя кривизна поверхности (2) в рассматриваемой точке, определяемая равенством

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны.

Подставив выражение (4) в равенство (3), получим соотношение:

$$\frac{\partial g}{\partial n} - 2Hg = -4\pi f x + 2\omega^2, \quad (6)$$

которое называется *формулой Брунса*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Брунс ограничился лишь указанием этой формулы (1878). Относительно использования ее в гравиметрии см. А. А. Михайлов, Курс гравиметрии и теории фигуры Земли, Москва, 1939.

Эта формула позволяет, прежде всего, вычислить вертикальный градиент силы тяжести над поверхностью Земли со всею желаемой точностью. Она дает:

$$\frac{\partial g}{\partial n} = 2Hg - 4\pi f\chi_1 + 2\omega^2, \quad (7)$$

где  $\chi_1$  — плотность воздуха,

Чтобы сравнить относительную величину трех членов этой формулы, мы можем принять:

$$H = \frac{1}{R}; \quad g = \frac{4}{3} \pi f R D_m,$$

где  $R$  — средний радиус Земли, а  $D_m$  — ее средняя плотность. Это дает

$$2Hg = \frac{8}{3} \pi f D_m.$$

С другой стороны:

$$f = 6.67 \cdot 10^{-8}, \quad \chi_1 = 0.0013, \quad \omega = 0.000073;$$

поэтому второй член формулы (7) составляет только 1/2800 часть первого члена, а третий член — приблизительно 1/288 часть.

Учитывая зависимость  $H$  и  $g$  от широты и пользуясь числовыми данными Гельмерта, имеем:

$$\frac{\partial g}{\partial n} = 0.3086 (1 + 0.00071 \cos 2\varphi), \quad (8)$$

где  $g$  измеряется в галах, а  $n$  — в метрах.

Это соотношение употребляется в гравиметрии для вычисления приведения силы тяжести к уровню моря, называемого „приведением в свободном воздухе“ или „поправкой Файя“.

С другой стороны, формула Брунса открывает возможность определения средней кривизны поверхности Земли путем измерения силы тяжести и ее вертикального градиента. Это может иметь большое значение в будущем, когда будут найдены методы для измерения с достаточной точностью вертикального градиента.

При выводе формулы Брунса мы воспользовались соотношением (5). Это изящное и полезное соотношение, устанавливающее зависимость между дивергенцией нормального вектора и средней кривизной поверхности, в теории поверхностей в явном виде не встречается.

Нужная нам формула (4), которую можно написать так:

$$\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - 2H \frac{\partial W}{\partial n}, \quad (9)$$

является частным случаем формулы Бельтрами:

$$\nabla_F^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial n_F^2} + 2H_F \frac{\partial W}{\partial n_F}, \quad (10)$$

в которой левая часть есть дифференциальный параметр второго порядка функции  $W$  относительно поверхности

$$F(x, y, z) = 0. \quad (11)$$

В правой части производные берутся по нормали к поверхности (11), а через  $H_F$  обозначена средняя кривизна этой поверхности в рассматриваемой точке.<sup>1</sup>

Если в формуле (10) положить  $F = W$ , то получим формулу (9), так как:

$$\nabla_W^2 W = 0.$$

---

<sup>1</sup> G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. III, Paris, 1894, p. 209.

---

## ГЛАВА VI

### ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

#### § 58. Основные этапы развития теории фигур равновесия однородной жидкости

Задача о форме, какую должна принять однородная несжимаемая жидкость под влиянием центробежной силы и взаимного притяжения частиц, была поставлена еще Ньютоном (1686) и стала одной из первоочередных задач Небесной механики. Сравнив веса жидкости в двух каналах, направленных по экваториальному и по полярному радиусам, Ньютон смог определить (конечно только в первом приближении) сжатие, соответствующее определенной угловой скорости вращения (см. § 63).

Что вращающаяся жидкая масса, будучи в состоянии относительного равновесия, может иметь форму эллипсоида вращения, впервые показал Стирлинг (1735). Но он пользовался для компонент притяжения приближенными формулами, в которых были удержаны лишь члены второго порядка относительно эксцентриситета. Строгое доказательство, основанное на точных формулах для компонент притяжения однородным эллипсоидом вращения внутренней точки (§ 18), было дано Маклореном (1742). Поэтому фигуры равновесия, имеющие форму эллипсоидов вращения, принято называть *эллипсоидами Маклорена*.

Основное уравнение, устанавливающее зависимость между эксцентриситетом меридиана и величиной

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f \kappa},$$

Маклорен изучил лишь для очень малых значений угловой скорости  $\omega$ . Его результаты были дополнены Симпсоном (1743), вычислившим таблицу, которая иллюстрирует эту зависимость. Симпсон обнаружил, вычисляя эту таблицу, что эллипсоид вращения может быть фигурой равновесия лишь в том случае, когда  $\Omega \leq 0.2247 \dots$  Дискуссия основ-



ного уравнения, выполненная Даламбером<sup>1</sup> и несколько дополненная Лапласом (1778), не только подтвердила этот результат, но и обнаружила, что для каждого значения  $\Omega$ , меньшего 0.2247, существуют два эллипсоида вращения, каждый из которых является фигурой равновесия.

Лагранж несколько поспешно заключил, что среди эллипсоидов только эллипсоиды вращения могут быть фигурами равновесия. Но Якоби обнаружил (1834), что его доказательство содержит ошибку и что фигуры равновесия, имеющие вид трехосных эллипсоидов, в действительности существуют. Такие фигуры равновесия стали называться *эллипсоидами Якоби*.

Качественное изучение эллипсоидов Якоби при заданной угловой скорости, выполненное несколько позднее Мейером и Лиувиллем,<sup>2</sup> в той окончательной форме, которую ему придали Радо и Тиссеран, излагается во многих работах.<sup>3</sup> Формулы, пригодные для количественного изучения этих эллипсоидов, были даны Дж. Дарвином и Каибара.<sup>4</sup>

Еще Лаплас обратил внимание на то, что изучение фигур равновесия при заданной угловой скорости является, с точки зрения астрономии, задачей скорее вспомогательного характера. Гораздо более важной задачей является нахождение фигур равновесия, определяемых тем моментом количества движения, который был присущ частицам жидкости с самого начала. Как известно, момент количества движения не может измениться при свободном движении жидкости, тогда как угловая скорость меняется по мере изменения момента инерции.

Лаплас показал (1778), что для любой величины момента количества движения (иначе говоря, для любых начальных условий движения жидкости) существует одна и только одна фигура равновесия, имеющая вид эллипсоида вращения. Что касается до эллипсоидов Якоби, то Лиувиллем было установлено, что существует один (и только один) такой эллипсоид для каждого значения момента количества

<sup>1</sup> Перевод работы Даламбера „О фигуре Земли“ (1773), являющейся одним из основных исследований по теории фигур равновесия, выполненных в XVIII веке, приложен к книге: А. К л е р о, Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики, Изд. АН СССР, 1947.

<sup>2</sup> О. Е. М е y e r, De aequilibri formis ellipsoidicis; Journal für die reine und angew. Mathematik, 24 (1842).

J. L i o u v i l l e, Sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation (Connaissance des Temps pour 1848; Journal de Math., 16, 1851).

<sup>3</sup> F. T i s s e r a n d, Traité de Mécanique céleste, t. II, Paris, 1891. Данное здесь изложение воспроизведено в указанных на стр. 127 и 135 книгах Апелля и Пицетти, а также в книге: F. H o p f n e r, Physikalische Geodäsie, Leipzig, 1933.

<sup>4</sup> G. H. D a r w i n, On Jacobi's figure of equilibrium for a rotating mass of fluid; Proceedings of the Royal Society, 41 (1887)-Scientific Papers, Vol. III, 1910.

R. K a i b a r a, On the Jacobian ellipsoid; Tokyo Proceedings of the Math. Society, 4, 1907.

движения, превосходящего некоторую определенную величину, зависящую от массы и плотности жидкости.

В 1882 г. П. Л. Чебышев предложил А. М. Ляпунову, советовавшемуся с ним по поводу темы для магистерской диссертации, следующий вопрос:

„Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов“.

Вот как сам Ляпунов рассказывает о своей работе над задачей, поставленной Чебышевым.<sup>1</sup>

«Впоследствии я узнал, что этот же самый вопрос Чебышев предлагал и другим математикам, как например Золотареву, молодому тогда ученому, блестящие лекции которого я слушал в университете, и Софье Ковалевской.

Не знаю, пробовали ли решать этот вопрос Золотарев и Ковалевская. Я же сильно заинтересовался вопросом, тем более, что Чебышев не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас же принялся за работу. Однако при тех ничтожных математических ресурсах, которыми я обладал тогда лишь два года спустя после окончания курса, я встретил непреодолимые затруднения. Я довольно скоро нашел, что, в первом приближении, как будто никакие новые формы равновесия вблизи предельного эллипсоида невозможны, но что возможны новые фигуры, мало отличающиеся от других эллипсоидов Маклорена и Якоби. Однако всякие попытки получить следующие приближения оставались неудачными. Чебышев, которому я сообщил об этом, очень подивился, заметивши, что обыкновенно все затруднение состоит в разыскании первого приближения, и что, когда оно найдено, следующие приближения получаются уже легко. Это несомненно так, когда имеется уравнение, при помощи которого можно искать эти следующие приближения. В данном же вопросе составить такое уравнение представлялось мне делом чрезвычайной трудности.

После нескольких неудачных попыток я должен был отложить решение вопроса на неопределенное время. Но вопрос этот навел меня на другой, именно на вопрос об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия, который и составил предмет моей магистерской диссертации.<sup>2</sup>

В этой работе я пришел к следующим заключениям.

Пока момент количеств движения менее того предела, при котором эллипсоиды Маклорена переходят в эллипсоиды Якоби, эллипсоиды Маклорена устойчивы. Если же момент количеств движения  $J$  будем увеличивать, начиная от  $J_1$ , эти эллипсоиды теряют устойчивость и устойчивыми делаются эллипсоиды Якоби. Однако, последние не всегда остаются устойчивыми, а только до тех пор, пока  $J$ , возрастая, не достигает некоторого предела  $J_2$ , при котором, насколько можно судить по первому приближению, эллипсоиды переходят в какие-то новые фигуры равновесия, представляющиеся в первом приближении телами с алгебраическими поверхностями третьего порядка. Эти фигуры впоследствии были названы грушевидными.

<sup>1</sup> А. М. Ляпунов, О форме небесных тел. Известия Академии Наук СССР, 1930. Избранные труды, Изд. АН СССР, 1948.

<sup>2</sup> А. М. Ляпунов, Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости, 1884. На французском языке эта работа была напечатана в Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2 série, t. VI, 1904.

Этим я ограничился в своей магистерской диссертации. О новых же формах равновесия, существование которых осталось недоказанным, ибо о них можно было судить лишь по первому приближению, я лишь упомянул в одном из положений к своей диссертации.

Через год после опубликования моей диссертации я, просматривая *Comptes Rendus*, встретил заинтересовавшую меня заметку Пуанкаре, тогда еще молодого, но уже получившего известность, ученого. В этой заметке Пуанкаре говорит, что желая доказать некоторые результаты, только что опубликованные Томсоном без доказательства, он занялся вопросом о формах равновесия вращающейся жидкости и сообщает полученные им при этом выводы. Последние оказались совпадающими с моими, хотя о новых фигурах равновесия Пуанкаре говорит не с той осторожностью, как я, а прямо утверждает, что эти фигуры действительно существуют. Прочитавши эту заметку, я тотчас же послал Пуанкаре экземпляр своей диссертации с письмом, в котором говорю о тех затруднениях, которые я встретил, желая доказать существование тех фигур, на которые указывает первое приближение. При этом я выразил сомнение относительно возможности получить это доказательство при помощи методы последовательных приближений, ибо мне не удалось найти даже второго приближения, а затем, если бы даже и удалось найти методу, позволяющую находить приближения сколь угодно высокого порядка, то совершенно безнадежным является вопрос о доказательстве сходимости.

Однако, так как Пуанкаре утверждает, что фигуры, о которых идет речь, действительно существуют, то, следовательно, он должен обладать какой-либо другой методой для доказательства существования, я и просил его сообщить, в чем состоит эта метода. На это письмо Пуанкаре вскоре ответил, говоря, что он встретил те же самые затруднения, что и я; что он также не пошел дальше первого приближения, и что метода последовательных приближений не может служить для доказательства, ибо даже разыскание второго приближения, которое в смысле доказательства не дает ничего большего против первого, представляет непреодолимые трудности. Если же он все-таки утверждает, что формы равновесия, о которых идет речь, действительно существуют, то только на основании некоторых аналогий и на основании своего убеждения, что строгое доказательство может быть найдено. Он сообщил при этом, что вскоре должен появиться в *Acta Mathematica* его мемуар, где все его исследования будут изложены подробно. Этот мемуар появился в *Acta Mathematica* спустя два года, и, ознакомившись с ним, я совершенно им не удовлетворился.

После этого почти в течение 20 лет я не занимался этим вопросом, будучи отвлечен другими занятиями, и только, после избрания меня в Академию, получив надлежащий досуг, я вновь возвратился к вопросу Чебышева. Замечательно, что я при этом вновь встретился с Пуанкаре, который около этого же времени занялся вопросом об устойчивости грушевидной формы равновесия.

Чтобы можно было что-либо сделать в данном вопросе, прежде всего следовало выяснить, отчего возникают такие непреодолимые, как казалось, трудности при разыскании второго приближения. Размышляя по этому поводу, я вскоре нашел, в чем заключается препятствие. Желая отыскивать новые фигуры, мало отличающиеся от данного эллипсоида, я сравнивал их именно с этим эллипсоидом, и то же самое делал и Пуанкаре, а от этого-то и происходило все затруднение. Между тем оно легко устранимо. Стоило только сравнивать искомую фигуру с *переменным* эллипсоидом, софокусным с данным и проходящим всегда через ту точку искомой поверхности, в которой рассматривается значение потенциала притяжения жидкой массы. Вводя этот переменный эллипсоид, я устранил все затруднения и получил методу, позволяющую разыскивать приближения сколь угодно высокого порядка. Мало того, пользуясь методом Коши, известной под именем метода мажорантных функций, я нашел возможным доказать и самую сходимость ряда последо-

вательных приближений, продолженных до бесконечности, и таким образом я пришел к строгому доказательству существования тех форм равновесия, о которых шла речь выше. Вместе с тем я получил и полное решение задачи Чебышева, ответ на которую получился отрицательный».

Почти одновременно с Ляпуновым теорией фигур равновесия начал заниматься Пуанкаре. Его внимание было привлечено только что опубликованной работой С. В. Ковалевской, в которой впервые было строго доказано существование кольцеобразных фигур равновесия,<sup>1</sup> а также известным трактатом В. Томсона и Тэта,<sup>2</sup> где содержится целый ряд новых весьма важных свойств фигур равновесия, приводимых, однако без доказательства. В своем первом мемуаре Пуанкаре в известном смысле завершил теорию кольцеобразных фигур равновесия.<sup>3</sup> Во втором, весьма богатом содержанием мемуаре<sup>4</sup> Пуанкаре строит общую теорию устойчивости и полностью решает вопрос об устойчивости эллипсоидальных фигур равновесия. Изучая, в ряду эллипсоидальных фигур, те фигуры, для которых происходит изменение характера устойчивости, Пуанкаре, так же как и Ляпунов, пришел к открытию новых фигур равновесия. Он определил, в первом приближении, форму важнейшей из этих новых фигур, названную им грушевидной.

Вопрос об устойчивости грушевидной фигуры потребовал немало усилий для своего разрешения. В только что упомянутом мемуаре Пуанкаре, пользуясь формулами первого приближения, пришел к заключению, что эта фигура устойчива. Когда Шварцшильдом<sup>5</sup> была выяснена невозможность решения вопроса об устойчивости по формулам первого приближения, то Пуанкаре разработал специальный метод,<sup>6</sup> дающий второе приближение и тем самым могущий решить

<sup>1</sup> S. Kowalewski, *Zusätze und Bemerkungen zu Laplaces Rechnungen über die Gestalt der Saturnringe*, Astr. Nachr. 111 (1885). См. также С. В. Ковалевская, *Научные работы*. Изд. АН СССР, 1948.

Вопрос о кольцеобразных фигурах равновесия был поставлен Лапласом для выяснения строения колец Сатурна. Однако, данное Лапласом доказательство существования таких фигур, основанное на замене потенциала кольца с эллиптическим сечением потенциалом бесконечного эллиптического цилиндра, носило лишь предварительный характер. В своем мемуаре (написанном еще в 1874 г. в качестве докторской диссертации Гёттинггенского университета) С. В. Ковалевская дала доказательство, основанное на точном выражении потенциала кольца.

<sup>2</sup> W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, 2 ed. Cambridge, Vol. I (1879), Vol. II (1883).

<sup>3</sup> H. Poincaré, *Sur la stabilité de l'anneau de Saturne*, Bull. astr. 2 (1885). Изложение этого мемуара, так же как и мемуара С. В. Ковалевской, можно найти в трактате Тиссера на, указанном на стр. 160.

<sup>4</sup> H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, Acta Mathematica, 7 (1885).

<sup>5</sup> K. Schwarzschild, *Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichtes einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse*, Annalen der Sternwarte München, Bd. III (1896).

<sup>6</sup> H. Poincaré, *Sur la stabilité de l'équilibre des figures iryiformes, affectées par une masse fluide en rotation*, London Phil. Trans., 198 (1901).

вопрос до конца. Но необходимые для этого громоздкие вычисления он не стал производить, ограничившись лишь указанием общих формул.

Дж. Дарвин, занимавшийся в это время изучением как эллипсоидальных, так и грушевидных фигур равновесия, произвел необходимые вычисления и пришел к заключению, что грушевидная фигура устойчива.<sup>1</sup>

Между тем Ляпунов, занимаясь тем же вопросом и исходя из точных формул (Дарвин пользовался приближенными формулами), пришел к противоположному результату, который и был опубликован в 1905 г.<sup>2</sup>

Это вызвало между Дарвином и Ляпуновым длительную полемику. В 1912 г. Ляпунов опубликовал полностью вывод своих точных формул и все вычисления, устанавливающие неустойчивость.<sup>3</sup>

Наконец, в 1915 г. Джиис показал, что в методе Пуанкаре двух приближений недостаточно, а третье приближение приводит к заключению о неустойчивости грушевидной фигуры, в согласии с результатами Ляпунова.<sup>4</sup>

## § 59. Эллипсоидальные фигуры равновесия

Посмотрим, может ли эллипсоид быть фигурой равновесия однородной жидкой массы, вращающейся вокруг оси с постоянной угловой скоростью. Мы предполагаем, что жидкость находится в равновесии, т. е. вращается как твердое тело.

Поместим начало координат в центре инерции жидкости и направим оси координат по ее главным осям инерции так, чтобы ось  $Oz$  совпадала с осью вращения. Уравнение эллипсоида, ограничивающего жидкость, будет тогда иметь вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

<sup>1</sup> G. H. Darwin, Ellipsoidal Harmonic Analysis, London Phil. Trans., 197 (1901).

G. H. Darwin, On the Pear-shaped Figure of Equilibrium of a Rotating Mass of Liquid, London Phil. Trans., 198 (1901).

G. H. Darwin, The Stability of the Pear-shaped Figure of Equilibrium of a Rotating Mass of Liquid, London Phil. Trans., 200 (1902); 208 (1908).

Все эти работы можно найти в Scientific Papers by Sir George Howard Darwin, Vol. III. Cambridge, 1910.

<sup>2</sup> А. М. Ляпунов, Sur un problème de Tchébyschef, Записки Академии Наук, 8 серия, т. XVII, 3 (1905).

<sup>3</sup> В работе, составляющей третью часть мемуара „Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes.“ Мемуар был издан Академией Наук в четырех частях, вышедших в 1906, 1909, 1912 и 1914 годах.

<sup>4</sup> Относящиеся сюда работы Джинса изложены в книге: J. H. Jeans, Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics, Cambridge, 1919.

Отметим также работу Н. Г. Четаева (Известия физ.-мат. общества при Казанском университете, 3 серия, т. IV, 1929—1930).

С другой стороны, уравнение поверхности, ограничивающей фигуру равновесия, таково (§ 47):

$$V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{const}, \quad (2)$$

если через  $V = V(x, y, z)$  обозначить потенциал масс, заполняющих эту поверхность, а через  $\omega$  угловую скорость вращения.

Так как мы предполагаем, что уравнение (2) тождественно с (1), то потенциал  $V$  может быть выражен формулой (§ 15):

$$V = \pi f \lambda abc \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}.$$

Но эта формула имеет вид:

$$V = \text{const} - Px^2 - Qy^2 - Rz^2,$$

если положить

$$\left. \begin{aligned} P &= \pi f \lambda abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) \Delta} \\ Q &= \pi f \lambda abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s) \Delta} \\ R &= \pi f \lambda abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) \Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

поэтому уравнение (2) можно написать так:

$$\left( P - \frac{\omega^2}{2} \right) x^2 + \left( Q - \frac{\omega^2}{2} \right) y^2 + \left( R - \frac{\omega^2}{2} \right) z^2 = \text{const}.$$

Отождествляя его с уравнением (1), получим два равенства:

$$a^2 \left( P - \frac{\omega^2}{2} \right) = b^2 \left( Q - \frac{\omega^2}{2} \right) = c^2 R, \quad (4)$$

устанавливающие ту зависимость между параметрами эллипсоида (1) и угловой скоростью  $\omega$ , которая должна иметь место, чтобы этот эллипсоид был фигурой равновесия.

Как уже было отмечено, выражения (3) зависят только от отношений осей эллипсоида. Полагая

$$u = c^2 a^{-2}, \quad v = c^2 b^{-2}, \quad s = c^2 x,$$

будем иметь:

$$P = \pi f \kappa \int_0^{\infty} \frac{u dx}{(1+ux)D}, \quad Q = \pi f \kappa \int_0^{\infty} \frac{v dx}{(1+vx)D},$$

$$R = \pi f \kappa \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)D}; \quad D = \sqrt{(1+x)(1+ux)(1+vx)}.$$

После чего соотношения (4) легко могут быть представлены в таком виде:

$$\Omega = \int_0^{\infty} \frac{u(1-u)x dx}{(1+x)(1+ux)D}, \quad \Omega = \int_0^{\infty} \frac{v(1-v)x dx}{(1+x)(1+vx)D}, \quad (4')$$

где

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f \kappa}.$$

Исключение  $\Omega$  дает:

$$(u-v) \int_0^{\infty} (1-u-v-uvx) \frac{x dx}{D^3} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение выражает условие, при котором рассматриваемый эллипсоид может быть фигурой равновесия. Если это условие выполнено, то соответствующая угловая скорость дается либо одним из уравнений (4'), либо, если  $u \neq v$ , уравнением:

$$\Omega = uv \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+ux)(1+vx)D}, \quad (6)$$

симметричным относительно  $u$  и  $v$ . Чтобы получить выражение (6), можно равенства (4') умножить соответственно на  $v$  и  $-u$ , сложить и полученное равенство разделить на  $v-u$ .

Так как  $\Omega > 0$ , то уже из выражений (4') видно, что эллипсоид (1) только в том случае может быть фигурой равновесия жидкости, вращающейся около оси  $z$ , когда  $u < 1$ ,  $v < 1$ , т. е. когда

$$a > c, \quad b > c.$$

Иначе говоря, осью вращения эллипсоида может быть только та из его главных осей, для которой момент инерции наибольший (ср. § 46).

Левая часть уравнения (5) есть произведение двух множителей. Мы должны поэтому рассмотреть отдельно следующие возможности.

Первый случай.  $u = v$ . Это дает эллипсоид вращения, у которого  $a = b > c$ . Угловая скорость  $\omega$ , которую должен иметь этот эллипсоид, чтобы быть фигурой равновесия, определяется одним из уравнений (4').

Таким образом, *эллипсоиды Маклорена*, т. е. эллипсоиды вращения, являющиеся фигурами равновесия, характеризуются одним уравнением

$$\Omega = \varphi(u), \quad (7)$$

где

$$\varphi(u) = \int_0^{\infty} \frac{u(1-u)x \, dx}{(1+ux)^2(1+x)^{3/2}}.$$

Легко видеть, что

$$\varphi(u) = \frac{1+2u}{1-u} \sqrt{\frac{u}{1-u}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-u}{u}} - \frac{3u}{1-u}.$$

Если вместо  $u$  ввести второй эксцентриситет меридианного сечения, обозначаемый через  $l$ , т. е. положить:

$$a^2 = c^2(1+l^2); \quad u = \frac{1}{1+l^2}; \quad l = \sqrt{\frac{1-u}{u}},$$

то уравнение (7) заменится таким:

$$\Omega = \frac{3+l^2}{l^3} \operatorname{arctg} l - \frac{3}{l^3}. \quad (8)$$

Функция  $\varphi(u)$  положительна во всех точках интервала  $(0, 1)$ . Отсюда следует, что сжатый эллипсоид вращения любой формы может быть эллипсоидом Маклорена. В следующем параграфе будет выяснено, при каких значениях параметра  $\Omega$  эти эллипсоиды существуют.

Второй случай.  $u \neq v$  и потому

$$\int_0^{\infty} (1-u-v-uvx) \frac{x \, dx}{D^3} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, трехосный эллипсоид только в том случае может быть фигурой равновесия (иначе говоря, *эллипсоидом Якоби*), когда отношения его осей удовлетворяют соотношению (9).

Легко убедиться, что эллипсоиды Якоби действительно существуют. В самом деле, при  $v=0$  все значения подинтегральной функции положительны, тогда как при  $v=1-u$  все ее значения отрицательны. Таким образом, при любом  $u$ , взятом в интервале  $(0, 1)$ , должно существовать значение  $v$  в интервале

$$0 < v < 1-u,$$

удовлетворяющее уравнению (9). Соответствующее значение  $\Omega$  будет всегда положительно, следовательно, все условия задачи будут удовлетворены.

Заметим, что среди решений уравнения (9) существует такое, когда  $u=v$ .



### § 60. Эллипсоиды Маклорена при заданной угловой скорости и плотности

Зная угловую скорость  $\omega$  и плотность  $\chi$  рассматриваемой жидкой массы, мы можем вычислить величину:

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f\chi}.$$

Форма соответствующего эллипсоида Маклорена, если таковой существует, определяется уравнением (§ 59):

$$\varphi(u) = \Omega,$$

дающим  $u = c^2 a^{-2}$ .

Чтобы найти число корней этого уравнения, лежащих в интервале  $(0,1)$ , изучим течение функции:

$$\varphi(u) = \frac{1+2u}{1-u} \sqrt{\frac{u}{1-u}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-u}{u}} - \frac{3u}{1-u}$$

в этом интервале.

Прежде всего отметим, что на концах интервала значения функции и ее производной таковы:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, & \varphi'(0) &= \infty, \\ \varphi(1) &= 0, & \varphi'(1) &= -\frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Это вытекает из разложения по степеням  $(1-u)$ , имеющего вид:

$$\varphi(u) = \frac{4}{15}(1-u) + \frac{4}{105}(1-u)^2 + \dots,$$

и равенства

$$\varphi'(u) = \frac{1+8u}{2(1-u)^2 \sqrt{u(1-u)}} \theta(u), \quad (1)$$

где положено:

$$\theta(u) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-u}{u}} - \frac{7+2u}{1+8u} \sqrt{u(1-u)}.$$

Знак  $\varphi'(u)$  совпадает со знаком  $\theta(u)$ . Поэтому посмотрим, как меняется эта последняя функция. Так как ее производная, равная

$$\theta'(u) = 4 \left( \frac{1-u}{1+8u} \right)^2 \frac{4u-1}{\sqrt{u(1-u)}},$$

отрицательна при  $u < 0.25$  и положительна при  $u > 0.25$ ; а с другой стороны:

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}; \quad \theta(1) = 0,$$

то функция  $\theta(u)$  обращается в интервале  $(0,1)$  в нуль только при одном значении  $u = u_0$ , причем  $u_0 < 0.25$ . График этой функции дан на рис. 7.

Из уравнения  $\theta(u_0) = 0$  легко находим, что  $u_0 = 0.1352\dots$  При этом значении  $u$  производная (1) обращается в нуль, а функция  $\varphi(u)$  имеет максимум, равный

$$\Omega_0 = \varphi(u_0) = 0.22467\dots$$

Так как функция  $\varphi(u)$  возрастает в интервале  $(0, u_0)$  и убывает в интервале  $(u_0, 1)$ , то ее график имеет вид, изображенный на рис. 7.

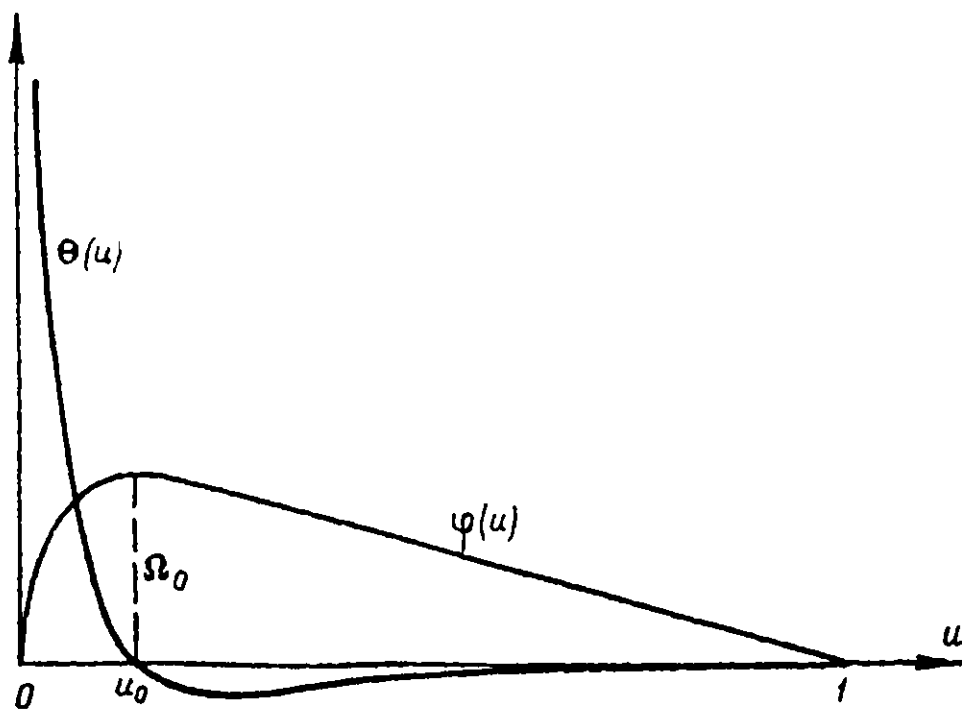


Рис. 7.

Итак, если  $\Omega > \Omega_0$ , т. е.  $\omega > 1.1881\sqrt{x}$ , то эллипсоид вращения не может быть фигурой равновесия.

Если  $\Omega = \Omega_0$ , то только один эллипсоид вращения может быть фигурой равновесия. Этот эллипсоид сильно сжат, так как для него  $c^2 = a^2 u_0$ , а потому эксцентриситеты меридиана и отношение полуосей таковы:

$$e_0 = 0.9299; \quad l_0 = 2.529; \quad a/c = 2.72.$$

Наконец, если  $\Omega < \Omega_0$ , то уравнению  $\Omega = \varphi(u)$  удовлетворяет два значения  $u'$  и  $u''$ , причем

$$1 > u' > u_0 > u'' > 0.$$

В этом случае равновесие возможно в форме двух эллипсоидов вращения,

Когда  $\Omega$  стремится к нулю, то  $u'$  стремится к единице, и соответствующий эллипсоид в пределе обращается в шар. Другой корень  $u''$  стремится при этом к нулю, так что второй эллипсоид приближается по форме к диску, толщина которого стремится к нулю, а радиус — к бесконечности.

Для эллипсоида Маклорена, соответствующего корню  $u'' < u_0$ , отношение полуосей всегда удовлетворяет неравенству

$$c^2/a^2 < u_0, \text{ откуда } a > 2.72 c.$$

Таким образом все эти эллипсоиды весьма сильно сжаты и ничего общего с фигурами планет не имеют. Если, например, за  $\omega$  и  $\kappa$  принять угловую скорость вращения Земли и ее среднюю плотность, то (§ 64)  $\Omega = 0.002\,300$ , а потому  $u'' = 0.000\,002\,156$ , что дает  $a/c = 681$ .

В заключение отметим, что нахождение эллипсоида, близкого к шару при малых значениях  $\Omega$ , удобно выполняется при помощи рядов. Принимая за неизвестную второй эксцентриситет  $l$ , мы можем основное уравнение написать в таком виде (§ 59):

$$\Omega = \frac{3+l^2}{l^3} \operatorname{arctg} l - \frac{3}{l^2}$$

или, ограничиваясь случаем, когда  $0 < l < 1$ ,

$$\Omega = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n 4n}{(2n+1)(2n+3)} l^{2n} = \frac{4}{15} l^2 - \frac{8}{35} l^4 + \dots \quad (2)$$

Обращение этого ряда дает:

$$l^2 = \frac{15}{4} \Omega + \frac{6}{7} \left( \frac{15}{4} \Omega \right)^2 + \frac{37}{49} \left( \frac{15}{4} \Omega \right)^3 + \dots$$

Отсюда находим:

$$\alpha = \frac{15}{8} \Omega + \frac{675}{896} \Omega^2 + \dots \quad (3)$$

так как сжатие  $\alpha$  связано с эксцентриситетом  $l$  соотношением

$$\alpha = \frac{1}{2} l^2 - \frac{3}{8} l^4 + \frac{5}{16} l^6 - \dots$$

## § 61. Эллипсоиды Маклорена в случае, когда заданы момент вращения, плотность и масса жидкости

Моментом вращения называется абсолютная величина момента количества движения. Таким образом, поскольку в рассматриваемом случае движение сводится к вращению вокруг оси  $Oz$ , момент вра-

щения  $M$  будет выражаться интегралом

$$M = \int_z (x\dot{y} - y\dot{x}) x d\tau,$$

взятым по объему, заполненному жидкостью.

Так как

$$\dot{x} = -\omega y; \quad \dot{y} = +\omega x,$$

то

$$M = \omega \int (x^2 + y^2) x d\tau = J\omega,$$

если через  $J$  обозначить момент инерции относительно оси  $Oz$ .

Для однородного эллипсоида, как известно,

$$J = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2),$$

где через

$$M = \frac{4}{3} \pi abc \rho$$

обозначена масса этого эллипсоида.

Поэтому угловую скорость можно выразить через  $M$  следующим образом:

$$\omega = \frac{M}{J} = \frac{5M}{M} \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

С другой стороны, мы можем написать:

$$x = \frac{3M}{4\pi r^3}, \quad (1)$$

если через

$$r = (abc)^{\frac{1}{3}}$$

обозначить радиус шара, имеющего тот же объем (а следовательно и массу), как и рассматриваемый эллипсоид.

Подставляя эти выражения для  $\omega$  и  $x$ , получим:

$$\Omega = \frac{50 M^2}{3frM^3} \left( \frac{r^2}{a^2 + b^2} \right)^2. \quad (2)$$

Для эллипсоида вращения

$$a^2 = b^2 = c^2 (1 + l^2);$$

следовательно:

$$r = c (1 + l^2)^{\frac{1}{3}},$$

и потому

$$\Omega = \frac{25 M^2}{6frM^3} (1 + l^2)^{-\frac{2}{3}}.$$

Подставив это выражение в уравнение § 59 (8) и положив для краткости

$$\Theta = \frac{25M^2}{6frM^3},$$

получим:

$$\Theta = (1 + l^2)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{3 + l^2}{l^3} \operatorname{arctg} l - \frac{3}{l^2} \right). \quad (3)$$

Посмотрим, как меняется  $\Theta$  при изменении  $l$  от 0 до  $+\infty$ .

Прежде всего, легко убедиться, что производная этой величины, равная

$$\Theta'(l) = \frac{1}{3} (1 + l^2)^{-\frac{1}{3}} \left[ \operatorname{arctg} l + \frac{27 + 18l^2}{l^4} \left( \frac{3l + l^3}{3 + 2l^2} - \operatorname{arctg} l \right) \right],$$

всегда положительна. Для этого достаточно показать, что функция

$$f(l) = \frac{3l + l^3}{3 + 2l^2} - \operatorname{arctg} l$$

монотонно возрастает вместе с  $l$  от 0 до  $+\infty$ . Но это является следствием того, что ее производная, равная

$$f'(l) = \frac{(1 + 2l^2) l^4}{(1 + l^2)(3 + 2l^2)^2},$$

всегда положительна.

Так как, с другой стороны,

$$\Theta(0) = 0, \quad \Theta(+\infty) = +\infty,$$

то отсюда ясно, что уравнение (3) при всяком положительном значении  $\Theta$  имеет один и только один положительный корень.

Итак, однородная жидкость, имеющая заданную массу  $M$ , заданный момент вращения  $M$  и заданную плотность  $\kappa$  (или, что то же самое в силу (1), заданное значение  $r$ ), может всегда иметь фигурой равновесия эллипсоид вращения. Этот эллипсоид однозначно определяется уравнением (3).

## § 62. Некоторые числовые данные для эллипсоидов Маклорена

Результаты двух последних параграфов иллюстрирует нижеследующая таблица, дающая в наглядной форме зависимость между различными параметрами, характеризующими эллипсоиды Маклорена.

Первые три столбца табл. 1 содержат:  $e$  — первый эксцентриситет меридианного сечения;  $l$  — его второй эксцентриситет; отношение  $u = c^2/a^2$ .

Эти три величины связаны между собой соотношениями

$$u = 1 - e^2 = (1 + l^2)^{-1}.$$

Четвертый и пятый столбцы дают отношения полуосей меридианного эллипса к радиусу *r* равнообъемного шара.

Таким образом

$$r = au^{\frac{1}{6}} = c(1 + l^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Значения функций

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f\kappa},$$

$$\Theta = \frac{25 M^2}{6frM^3},$$

соответствующие рассматриваемому эллипсоиду, даны в двух последних столбцах.

Последняя строка таблицы включает числа, относящиеся к так называемому *эллипсоиду бифуркации*, который одновременно принадлежит как к ряду эллипсоидов Маклорена, так и к ряду эллипсоидов Якоби (§ 65).

Таблица 1

Эллипсоиды Маклорена

<i>e</i>	<i>l</i>	<i>u</i>	<i>a/r</i>	<i>c/r</i>	Ω	Θ
0.0	0.0030	1.0000	1.0000	1.0000	0	0
0.1	0.1005	0.9900	1.0016	0.9967	0.0027	0.0027
0.2	0.2041	0.9600	1.0068	0.9865	0.0107	0.0110
0.3	0.3145	0.9100	1.0159	0.9691	0.0243	0.0259
0.4	0.4364	0.8400	1.0295	0.9435	0.0436	0.0490
0.5	0.5773	0.7500	1.0491	0.9068	0.0690	0.0836
0.6	0.7500	0.6400	1.0772	0.8618	0.1007	0.1356
0.7	0.9802	0.5100	1.1188	0.7990	0.1387	0.2173
0.8	1.3333	0.3600	1.1856	0.7114	0.1816	0.3589
0.9	2.0648	0.1900	1.3189	0.5749	0.2203	0.6667
0.91	2.1948	0.1719	1.341	0.5560	0.2225	0.7197
0.92	2.3474	0.1536	1.367	0.5355	0.2241	0.7813
0.93	2.5313	0.1351	1.396	0.5131	0.2247	0.8537
0.94	2.7552	0.1164	1.431	0.4883	0.2239	0.9392
0.95	3.0424	0.0975	1.474	0.4603	0.2213	1.0447
0.96	3.4286	0.0784	1.529	0.4280	0.2160	1.1792
0.97	3.9901	0.0591	1.602	0.3895	0.2063	1.3597
0.98	4.9247	0.0396	1.713	0.3409	0.1890	1.6269
0.99	7.0179	0.0199	1.921	0.2710	0.1552	2.1128
1.00	∞	0.0000	∞	0	0	∞
0.81267	1.3946	0.3396	1.1972	0.6977	0.18711	0.3843

### § 63. Сила тяжести на поверхности эллипсоида Маклорена

Силой тяжести называется равнодействующая силы притяжения и центробежной силы. Силовая функция этой равнодействующей дается равенством

$$W = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2).$$

Обозначим, как и раньше, через  $g$  ускорение силы тяжести, тогда

$$g^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2.$$

Поэтому, если жидкая масса имеет форму эллипсоида и, следовательно:

$$V = \text{const} - Px^2 - Qy^2 - Rz^2,$$

то мы будем иметь:

$$g^2 = (2P - \omega^2)^2 x^2 + (2Q - \omega^2)^2 y^2 + (2R)^2 z^2.$$

Пусть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

есть уравнение эллипсоида, ограничивающего жидкость. В таком случае (§ 59):

$$(2P - \omega^2) a^2 = (2Q - \omega^2) b^2 = 2Rc^2,$$

а потому

$$g^2 = (2c^2 R)^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right). \quad (2)$$

Расстояние от центра эллипсоида (1) до касательной плоскости, проведенной в точке  $(x, y, z)$ , дается формулой:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

следовательно:

$$g = \frac{2c^2 R}{d}.$$

Итак, ускорение силы тяжести в точке, лежащей на поверхности эллипсоида, являющегося фигурой равновесия, обратно пропорционально расстоянию центра эллипсоида от касательной плоскости, проведенной в этой точке.

Обратимся теперь к тому случаю, когда фигурой равновесия служит эллипсоид вращения.

Полагая

$$a^2 = b^2 = c^2 (1 + l^2),$$

получим формулы (1) и (2) в следующем виде:

$$\frac{x^2 + y^2}{1 + l^2} + z^2 = c^2,$$

$$g^2 = 4R^2 \left[ \frac{x^2 + y^2}{(1 + l^2)^2} + z^2 \right].$$

Отсюда, после исключения  $x^2 + y^2$ :

$$g = 2R \sqrt{\frac{c^2 + l^2 z^2}{1 + l^2}},$$

причем, § 18 (5):

$$2R = 4\pi f \kappa \frac{1 + l^2}{l^3} (l - \operatorname{arctg} l).$$

Таким образом, ускорение силы тяжести на экваторе равно ( $z = 0$ ):

$$g_e = 4\pi f \kappa c \frac{\sqrt{1 + l^2}}{l^3} (l - \operatorname{arctg} l).$$

Введем в рассмотрение величину:

$$q' = \frac{\omega^2 a}{g_e} = \frac{\omega^2}{4\pi f \kappa} \frac{l^3}{l - \operatorname{arctg} l}, \quad (3)$$

равную отношению центробежной силы к силе тяжести в точке, лежащей на экваторе.

Формула § 59 (8) дает:

$$q' = \frac{1}{2} \frac{(3 + l^2) \operatorname{arctg} l - 3l}{l - \operatorname{arctg} l} = \frac{2}{5} l^2 - \frac{18}{175} l^4 + \frac{62}{875} l^6 - \dots \quad (4)$$

Введем сюда сжатие эллипсоида

$$\alpha = \frac{a - c}{a}.$$

Так как

$$l^2 = (1 - \alpha)^{-2} - 1 = 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \dots,$$

то разложение (4) примет такой вид:

$$q' = \frac{4}{5} \alpha + \frac{138}{175} \alpha^2 + \frac{816}{875} \alpha^3 + \dots \quad (5)$$

Обращение этого ряда дает:

$$\alpha = \frac{5}{4} q' - \frac{345}{224} q'^2 + \dots \quad (6)$$

Ограничиваясь первым членом этого разложения, получаем следующую теорему, открытую еще Ньютоном:



если однородная и несжимаемая жидкая масса, находящаяся в состоянии равновесия, имеет форму слегка сжатого эллипсоида вращения, то сжатие равняется пяти четвертям отношения центробежной силы к силе тяжести в точке, лежащей на экваторе.<sup>1</sup>

Отметим, в заключение, следующие формулы:

$$\Omega = \frac{2}{3} q' - q'^2 + \frac{20}{21} q'^3 - \dots \quad (7)$$

$$q' = \frac{3}{2} \Omega + \frac{27}{8} \Omega^2 + \frac{447}{56} \Omega^3 + \dots, \quad (8)$$

легко получаемые из разложения (4) и формулы § 60 (2).

## § 64. Некоторые приложения полученных формул к телам солнечной системы

Безразмерную величину

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f\kappa}$$

можно выразить через период вращения  $P$  вокруг оси и плотность  $\kappa$ . Так как  $\omega = 2\pi/P$ , то

$$\Omega = \frac{2\pi}{f\kappa P^2}. \quad (1)$$

Применим эту формулу к Земле. Обозначив через  $\kappa_1$ ,  $P_1$ ,  $\Omega_1$  соответствующие значения параметров, получим:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{f\kappa_1 P_1^2}.$$

Таким образом, после исключения  $f$  из равенства (1), будем иметь:

$$\Omega = \Omega_1 \kappa_1 P_1^2 \kappa^{-1} P^{-2}. \quad (2)$$

Для вычисления  $\Omega_1$  воспользуемся формулой § 63 (7). Принимая для Земли<sup>2</sup>

$$q' = 0.003\,46780 = 1/288.367,$$

получим:  $\Omega_1 = 0.002\,29988$ .

<sup>1</sup> Подробное изложение пути, приведшего Ньютона к этому результату, можно найти в статье: Л. Н. Сретенский, Ньютонова теория приливов и фигуры Земли (сборник „Исаак Ньютон, 1643—1943“, изданный Академией Наук СССР в 1943 г.).

<sup>2</sup> Это значение является средним из значений

$$q' = 0.003\,467\,83 \quad \text{и} \quad q' = 0.003\,467\,78,$$

первое из которых соответствует размерам земного эллипсоида и формуле нормальной силы тяжести, принятым на международном геодезическом кон-

Плотность Земли примем за единицу. За единицу времени примем средние солнечные сутки. Тогда

$$\kappa_1 = 1; \quad P_1 = 0^d.997\,26957,$$

и формула (2) окончательно примет вид:

$$\Omega = 0.002\,28734 \kappa^{-1} P^{-1}. \quad (3)$$

В прилагаемой табл. 2 даны, для основных тел солнечной системы, плотности  $\kappa$ , периоды обращения  $P$  и величины  $\Omega$ , вычисленные по формуле (3). Следующий столбец содержит значения  $q'$ , найденные при помощи формулы § 63 (8).

Пользуясь этими значениями  $q'$ , можно вычислить пределы сжатия  $\alpha_R$  и  $\alpha_M$ , даваемые соответственно моделью Роша (§ 58) и эллипсоидом Маклорена (§ 63). Эти величины, определяемые формулами

$$\alpha_R = \frac{1}{2} q', \quad \alpha_M = \frac{5}{4} q' - \frac{345}{224} q'^2 + \dots,$$

а также значение  $\alpha$ , выводимое из наблюдений, приведены в трех следующих столбцах.

Для всех тел солнечной системы  $\alpha$  лежит между пределами, даваемыми фигурами равновесия. Отношение  $\alpha/q'$ , приведенное в следующем столбце, позволяет судить о внутреннем строении: если это отношение близко к 0.50, то это свидетельствует о наличии резко выраженного центрального сгущения; наоборот, если это отношение приближается к своему верхнему пределу, равному 1.25, то планету можно считать близкой к однородности. Нужно, однако, заметить, что в основе всех наших расчетов лежит предположение об установившемся равновесии, что может не оправдываться для четырех больших планет.

Величина  $\Omega$  для всех тел солнечной системы значительно меньше предела  $\Omega_0 = 0.22467\dots$ , при переходе через который эллипсоидальные формы равновесия становятся невозможными. Обозначим через  $P_0$  тот критический период вращения, при котором  $\Omega$  становится равным  $\Omega_0$ . Равенство (3) дает:

$$P_0 = 0.^d10090 \kappa^{-\frac{1}{2}} = (2^h25^m) \kappa^{-\frac{1}{2}}.$$

грессе (1930); второе — системе постоянных, предложенной де Ситтером:

W. de Sitter and D. Brouwer, On the System of Astronomical Constants (Bull. of the Astr. Institutes of the Netherlands, 8, 1938).

Если для большой полуоси взять значение, соответствующее эллипсоиду Красовского (стр. 270), а для силы тяжести на экваторе величину 978.049, то получим:  $q' = 0.003\,467\,75$ .

Таким образом, можно считать, что  $q'$  в настоящее время известно только с пятью значащими цифрами.

Значения  $P_0$  приведены в последнем столбце табл. 2.

Таблица 2

Сравнение теории с наблюдениями для основных тел солнечной системы

	$\kappa$	$P$	$\Omega$	$q'$	
Солнце . . . . .	0,255	$25^d$	0.000 0141	0.000 021	
Луна . . . . .	0,60	27.32 166	0.000 0051	0.000 008	
Меркурий . . . . .	0,68	88	0.000 0004	0.000 001	
Венера . . . . .	0,94	30 (?)	0.000 0027	0.000 004	
Земля . . . . .	1,00	0.99 727	0.002 3000	0.00347	
Марс . . . . .	0,71	1.02 596	0.003 06	0.00462	
Юпитер . . . . .	0,24	0.4100	0.0567	0.0976	
Сатурн . . . . .	0,125	0.4267	0.1005	0.1925	
Уран . . . . .	0,25	0.4507	0.0450	0.0751	
Нептун . . . . .	0,24	0.6528	0.0224	0.0353	

	$\alpha_R$	$\alpha_M$	$\alpha$	$\alpha/q'$	$P_0$
Солнце . . . . .	0.000 010	0.000 026	0	—	$0^d.200$
Луна . . . . .	0.000 004	0.000 010	0	—	0.130
Меркурий . . . . .	0.000 000	0.000 001	0	—	0.122
Венера . . . . .	0.000 002	0.000 005	0	—	0.104
Земля . . . . .	0.0017	0.0043	0.00 337	0.97	0.101
Марс . . . . .	0.0023	0.0058	0.00 526	1.14	0.120
Юпитер . . . . .	0.049	0.108	0.061	0.63	0.208
Сатурн . . . . .	0.096	0.177	0.103	0.54	0.285
Уран . . . . .	0.038	0.086	0.056	0.74	0.202
Нептун . . . . .	0.018	0.042	0.020	0.57	0.206

### § 65. Эллипсоиды Якоби при заданной угловой скорости и плотности

Эллипсоиды Якоби определяются двумя уравнениями (§ 59):

$$\Psi(u, v) = 0, \quad \Omega = \Phi(u, v), \tag{1}$$

где

$$\Psi(u, v) = \int_0^\infty (1 - u - v - uvx) \frac{x \, dx}{D^3}, \tag{2}$$

$$\Phi(u, v) = uv \int_0^\infty \frac{x \, dx}{(1 + ux)(1 + vx)D}, \tag{3}$$

причем

$$D = \sqrt{(1 + x)(1 + ux)(1 + vx)}.$$

Соотношения (1) можно интерпретировать как уравнения кривой в пространстве  $(u, v, \Omega)$ . Каждой вещественной точке этой кривой, лежащей в области:

$$0 < u < 1; \quad 0 < v < 1; \quad \Omega > 0, \quad (4)$$

отвечает фигура равновесия, представляющая эллипсоид, полуоси которого определяются равенствами:

$$c^2 = a^2 u; \quad c^2 = b^2 v; \quad \frac{4}{3} \pi \kappa a b c = M,$$

где  $M$  — масса жидкости, а  $\kappa$  — ее плотность.

Эти соотношения дают:

$$\left. \begin{aligned} a &= r u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{6}}; & b &= r u^{\frac{1}{6}} v^{-\frac{1}{3}}, \\ c &= r u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

если через

$$r = (abc)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{3M}{4\pi\kappa} \right)^{\frac{1}{3}}$$

обозначить радиус равновеликого шара.

Можно показать, что кривая (1) имеет вид кривой  $ANB$ , изображенной на рис. 8.

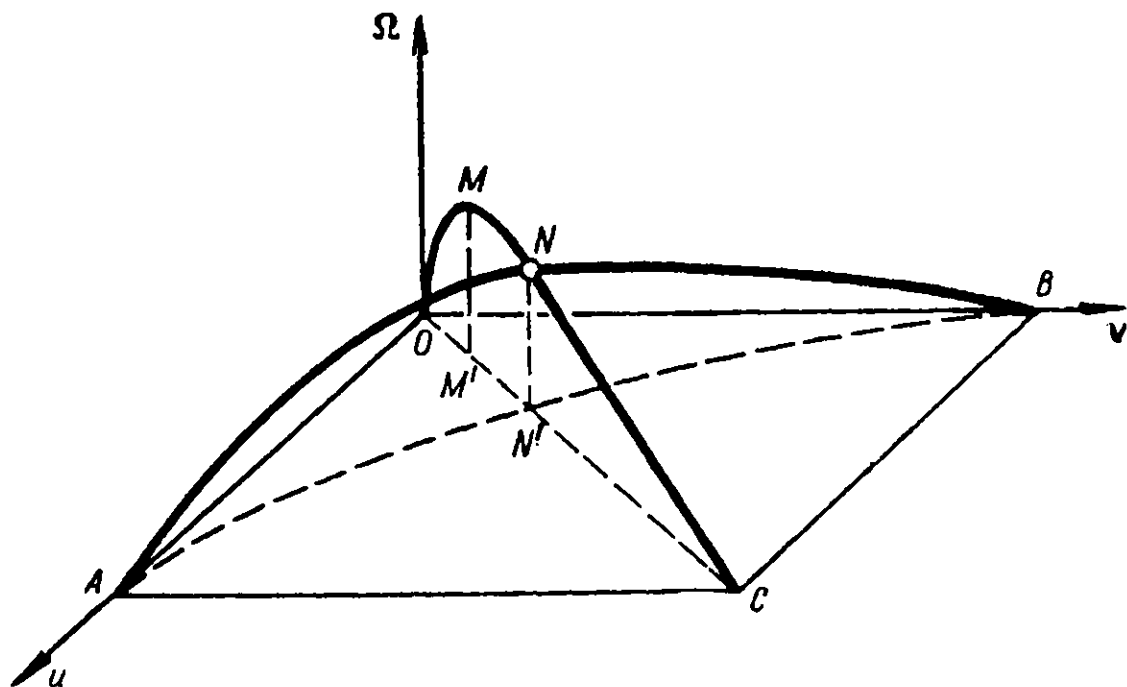


Рис. 8.

В самом деле, прежде всего, легко убедиться, что проекция этой кривой на плоскости  $(u, v)$ , определяемая первым из уравнений (1), имеет вид  $AN'B$ .

Если это уравнение написать в форме:

$$(1 - u - v) \int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{D^3} = uv \int_0^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{D^3},$$

то станет ясно, что

$$u + v < 1$$

(т. е. кривая  $AN'B$  лежит внутри прямоугольного треугольника  $AOB$ ), и что точки  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$  лежат на этой кривой.

Далее, можно показать, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial v} < 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dv}{du} < 0,$$

т. е.  $v$ , рассматриваемое как функция  $u$ , монотонно убывает от точки  $A$  до точки  $B$ .

Итак, кривая  $AN'B$  действительно состоит из дуги, соединяющей точки  $A$  и  $B$  и выпуклой в сторону начала координат  $O$ . Координаты  $u_1 = v_1$  точки  $N'$ , в которой эта дуга пересекает биссектрису  $u = v$ , определяются, очевидно, уравнением:

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - 2u_1 - u_1^2 x) x \, dx}{(1 + u_1 x) \sqrt{1 + x}} = 0,$$

решение которого дает (ср. § 67):

$$u_1 = 0.3396 \dots \quad (7)$$

Соответствующее значение

$$\Omega_1 = \Phi(u_1, u_1) = 0.18711484 \dots \quad (8)$$

легко вычисляется по формуле (3).

Фигура равновесия, определяемая параметрами (7), (8) и являющаяся одновременно как эллипсоидом Якоби, так и эллипсоидом Маклорена, называется фигурой бифуркации.

Обратимся теперь ко второму из уравнений (1). Это уравнение, также симметричное относительно  $u$  и  $v$ , показывает, прежде всего, что  $\Omega = 0$  в точках  $A$  и  $B$  и  $\Omega > 0$  между этими точками.

Рассматривая  $v$  как функцию  $u$ , можно показать, что<sup>1</sup>

$$\frac{d\Omega}{du} = (v - u) F(u, v),$$

<sup>1</sup> Доказательства этого соотношения и неравенств (6), нами опущенные можно найти в книгах, указанных на стр. 160.

причем функция  $F(u, v)$  существенно положительна в области (4). Отсюда следует, что при возрастании  $u$  от 0 до  $A$  (рис. 8)  $\Omega$  будет сначала возрастать от  $\Omega = 0$  в точке  $B$  до максимума при  $u = v$  в точке  $N$ , равного  $\Omega_1$ , затем будет убывать до нулевого значения в точке  $A$ .

Итак, исследование кривой  $ANB$ , представляющей графически серию эллипсоидов Якови, показывает, что эти эллипсоиды существуют лишь при условии

$$\Omega \leq \Omega_1 = 0.18711484 \dots$$

Так как уравнения (1) симметричны относительно  $u$  и  $v$ , то дуги  $AN$  и  $BN$  совершенно одинаковы. Эллипсоиды Якови, соответствующие точкам этих двух дуг с одинаковыми  $\Omega$ , не различимы между собой.

Кривая  $OMNC$  (рис. 8) представляет серию эллипсоидов Маклорена. Точка  $N$ , в которой эта кривая пересекается с только что рассмотренной, соответствующая эллипсоиду бифуркации, называется точкой бифуркации.

Сопоставление полученных результатов с тем, что было найдено в § 60, приводит к следующему заключению.

Эллипсоидальная фигура равновесия невозможна, если  $\Omega > 0.22467$ ; при  $\Omega = 0.22467$  существует один эллипсоид вращения; в интервале

$$0.18711 \leq \Omega < 0.22467$$

мы имеем два эллипсоида вращения; наконец, в интервале

$$0 < \Omega < 0.18711$$

существуют два эллипсоида вращения и один трехосный эллипсоид.

Когда  $\Omega \rightarrow 0$ , то в пределе эллипсоиды вращения становятся — один сферой, дугой — бесконечно тонким диском. Что же касается трехосного эллипсоида, то, как показывают формулы (5), он вытягивается в бесконечно тонкую и бесконечно длинную иглу с круговым поперечным сечением.

## § 66. Эллипсоиды Якови при заданном моменте вращения, плотности и массе жидкости

Величина  $\Omega$  для однородного эллипсоида выражается через момент вращения  $M$  и массу  $M$  формулой § 61 (2):

$$\Omega = \frac{50M^2}{3frM^3} \left( \frac{r^2}{a^2 + b^2} \right)^2,$$

где

$$r^3 = abc = \frac{3M}{4\pi\gamma}. \quad (1)$$

Поэтому, пользуясь равенствами § 65 (5), эту величину можно написать так:

$$\Omega = \frac{50M^2}{3frM^3} \frac{(uv)^{\frac{4}{3}}}{(u+v)^2} = \Theta \frac{4(uv)^{\frac{4}{3}}}{(u+v)^2}.$$

Здесь положено, как это уже было сделано в § 61:

$$\Theta = \frac{25M^2}{6frM^3}. \quad (2)$$

Таким образом, эта величина, которую мы теперь принимаем за параметр, определяющий фигуру равновесия, связана с величинами  $u$  и  $v$ , характеризующими форму эллипсоида, уравнением

$$\Theta = \frac{(u+v)^2}{4(uv)^{4/3}} \Phi(u, v), \quad (3)$$

причем функция  $\Phi$  определяется равенством (3) предыдущего параграфа.

Изучение эллипсоидов Якоби, соответствующих заданной величине  $\Theta$ , приводится к исследованию пространственной кривой, определяемой уравнением (3) совместно с уравнением

$$\Psi(u, v) = 0, \quad (4)$$

где  $\Psi(u, v)$  дается формулой § 65 (2).

Проекция этой кривой на плоскость  $uv$ , определяемая уравнением (4), такова же, как и проекция пространственной кривой, изученной в предыдущем параграфе (рис. 9).

Функция

$$\Phi_1(u, v) = \frac{(u+v)^2}{4(uv)^{4/3}} \Phi(u, v)$$

обращается в бесконечность в точках  $A$  и  $B$ .

Можно показать, что ее производная по  $u$ , вычисленная с учетом соотношения (4), имеет вид:

$$\frac{d\Phi_1}{du} = (u-v) F_1(u, v),$$

где  $F_1(u, v)$  — функция существенно положительная в интервале  $0 < u < 1$ .

Отсюда следует, что при возрастании  $u$  от нуля до  $u = u_1 = 0.3396\dots$ , когда  $u = v$ , функция  $\Phi_1(u, v)$  убывает; при дальнейшем возрастании  $u$  до  $u = 1$  она также возрастает. Таким образом, при  $u = u_1$ ,  $v = u_1$  эта функция имеет минимум. Вычисление дает:  $\Phi_1(u_1, v_1) = 0.3843$ .

Все это показывает, что рассматриваемая кривая имеет вид, изображенный на рис. 9. Ветви кривой  $A_1N$  и  $NB_1$  симметричны, ибо

уравнения (3) и (4) симметричны относительно  $u$  и  $v$ . Соответственные точки этих ветвей дают, очевидно, один и тот же эллипсоид Якоби.

Итак, если  $\Theta < 0.3843\dots$ , то эллипсоид Якоби невозможен, если  $\Theta \geq 0.3843$ , то существует один и только один трехосный эллипсоид, являющийся фигурой равновесия. При  $\Theta = 0.3843$  мы имеем

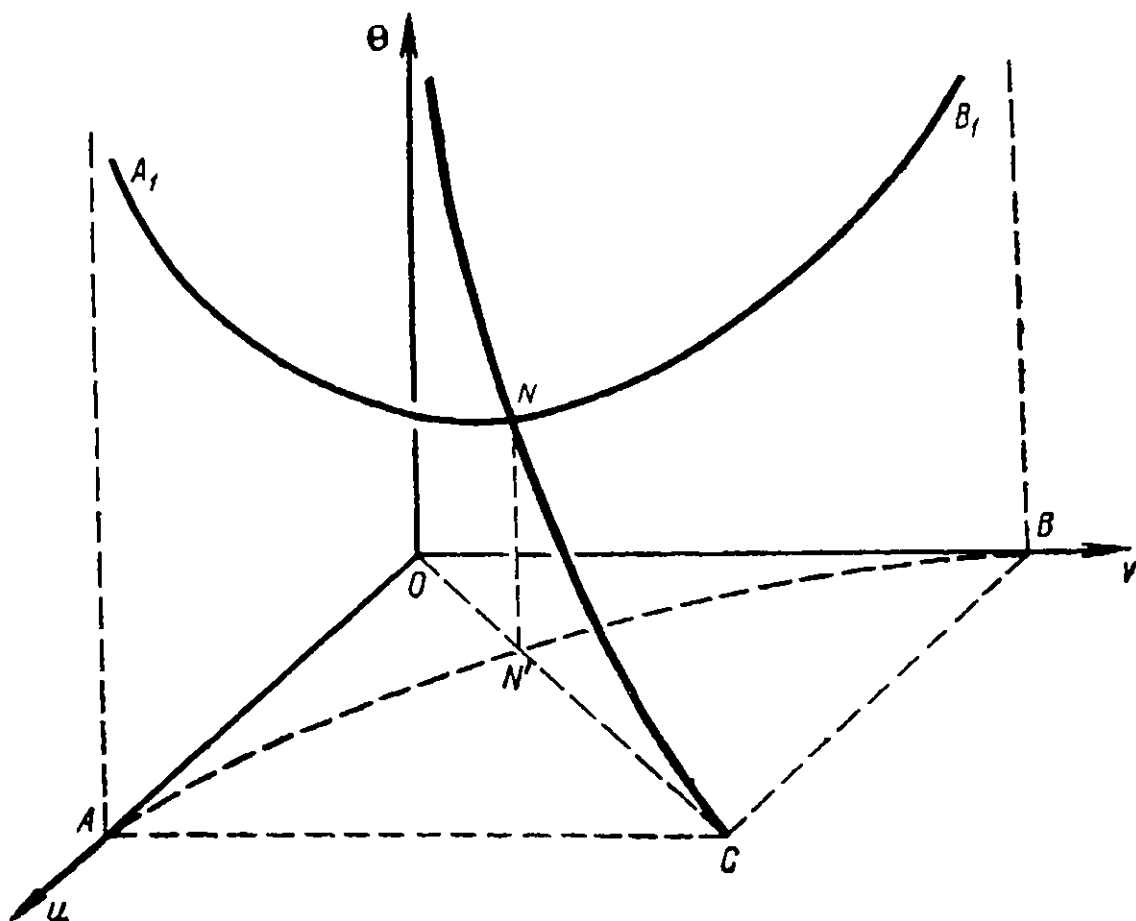


Рис. 9.

эллипсоид бифуркации, принадлежащий одновременно как к серии эллипсоидов Якоби, так и к серии эллипсоидов Маклорена.

На рис. 9 кривая  $CN$  изображает серию эллипсоидов Маклорена, изученную в § 61. В точке бифуркации  $N$  эта кривая пересекается с кривой  $A_1NB_1$ , соответствующей эллипсоидам Якоби.

### § 67. Числовые данные для эллипсоидов Якоби

Эллипсоиды Якоби определяются уравнениями:

$$\Omega = uv \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+ux)(1+vx)D}, \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} (1-u-v-uvx) \frac{x dx}{D^3} = 0, \quad (2)$$



где

$$D = \sqrt{(1+x)(1+ux)(1+vx)}.$$

Эти уравнения мало пригодны для действительного вычисления двух из величин  $u$ ,  $v$ ,  $\Omega$  в функции третьей. Чтобы придать им более удобную форму, введем вместо  $u$  и  $v$  углы  $\gamma$  и  $\beta$ , определяемые равенствами:

$$c = a \cos \gamma, \quad b = a \cos \beta, \quad (3)$$

и положим:

$$k = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}. \quad (4)$$

Делая, далее, подстановку

$$x = \frac{\sin^2 \gamma - \sin^2 \theta}{\cos^2 \gamma \sin^2 \theta},$$

где переменная  $\theta$  монотонно меняется от  $\gamma$  до 0, когда  $x$  возрастает от 0 до  $\infty$ , получим такие соотношения:

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{\sin^3 \theta} \cos \theta d\theta; \quad 1+x = \frac{\sin^2 \gamma \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \gamma}, \\ 1+ux &= \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \theta}; \quad 1+vx = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \theta} \frac{1-k^2 \sin^2 \theta}{1-k^2 \sin^2 \gamma}, \\ u &= \cos^2 \gamma; \quad v = \frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \beta} = \frac{\cos^2 \gamma}{1-k^2 \sin^2 \gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив эти выражения в уравнения (1) и (2), окончательно будем иметь:

$$\Omega = \frac{2 \cos \beta \cos \gamma}{\sin^5 \gamma} \int_0^\gamma \frac{(\sin^2 \gamma - \sin^2 \theta) \sin^2 \theta}{\Delta^3} d\theta, \quad (6)$$

$$\int_0^\gamma \frac{(\cos^2 \beta \sin^2 \theta - \cos^2 \gamma) (\sin^2 \gamma - \sin^2 \theta) \sin^2 \theta}{\Delta^3} d\theta = 0, \quad (7)$$

где

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}.$$

Задав значение  $\gamma$ , мы можем из уравнения (7) найти соответствующее значение  $k$ , после чего, определив  $\beta$  при помощи равенства (4), из уравнения (6) найдем  $\Omega$ . Наконец, соотношения (3) или (5) дадут отношения полуосей.

Чтобы получить все эллипсоиды Якоби, достаточно менять  $u$  в интервале

$$0 \leq u \leq u_1 = 0.3396 \dots,$$

что соответствует изменению  $\gamma$  в интервале

$$90^\circ \geq \gamma \geq \gamma_1 = 54^\circ 35' 761 \dots$$

Уравнение, определяющее  $\gamma_1$ , получается из (7), если положить  $k=0$ . Оно имеет вид:

$$4\gamma_1 = \frac{16 \sin 2\gamma_1 - 5 \sin 4\gamma_1}{4 - \cos 4\gamma_1}.$$

Делая  $\operatorname{tg} \gamma_1 = l_1$ , его легко заменить таким:

$$\frac{\operatorname{arctg} l_1}{l_1} = \frac{3 + 13l_1^2}{3 + 14l_1^2 + 3l_1^4},$$

дающим  $l_1 = 1.394\,604\,096$ .

Чтобы использовать таблицы эллиптических интегралов

$$F = \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\Delta}, \quad E = \int_0^\gamma \Delta d\gamma,$$

уравнения (6) и (7) целесообразно представить в таком виде:

$$\frac{1}{2}\Omega = \frac{\frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma} F - \frac{3}{1 + \sec^2 \beta + \sec^2 \gamma}}{1 + \cos^2 \beta - \frac{6}{1 + \sec^2 \beta + \sec^2 \gamma}}, \quad (8)$$

$$[1 + (k \operatorname{tg} \beta \cos \gamma)^2] E - k'^2 (2F - E) - k \operatorname{tg} \beta \cos \gamma (1 + \sin^2 \beta) = 0, \quad (9)$$

где

$$k'^2 = 1 - k^2.$$

Вычисление по формулам такого типа дает числа, содержащиеся в таблице 3, взятой у Дж. Дарвина.<sup>1</sup>

Таблица 3

## Эллипсоиды Якоби

$\gamma$	$u$	$v$	$a/r$	$b/r$	$c/r$	$\Omega$	$\Theta$
54°3576	0.3396	0.3396	1.1972	1.1972	0.6977	0.1871	0.3843
55°	0.3295	0.3505	1.216	1.179	0.697	0.1870	0.3843
60	0.2500	0.4377	1.3831	1.0454	0.6916	0.1812	0.4093
65	0.1786	0.5366	1.6007	0.9235	0.6765	0.1659	0.4838
70	0.1170	0.6410	1.899	0.8111	0.6494	0.1409	0.6397
75	0.0670	0.7484	2.346	0.7019	0.6072	0.1072	0.9641
80	0.0302	0.8538	3.1294	0.5881	0.5434	0.0661	1.699
85	0.0076	0.9463	5.0406	0.4516	0.4393	0.0259	4.247
90	0	1	$\infty$	0	0	0	$\infty$

<sup>1</sup> В работе, указанной на стр. 160. Там же можно найти вывод соотношений (8) и (9), а также других, им аналогичных.

Из этой таблицы видно, что по мере приближения к нулю величины  $\Omega$  эллипсоид Якоби приближается по форме к бесконечно тонкой и бесконечно длинной игле с круговым сечением. Момент вращения стремится при этом к бесконечности.

В заключение посмотрим, каков эллипсоид Якоби, имеющий ту же угловую скорость  $\omega = 0.000\,072\,921 \dots$ , какую имеет Земля, если его плотность равна средней плотности Земли, т. е.  $\kappa = 5.52$ .

В этом случае  $\Omega = 0.002\,300$ , и поэтому

$$a/c = 52.44, \quad b/c = 1.0023.$$

Отсюда ясно, что этот эллипсоид уже весьма близок к иглообразной форме и не имеет ничего общего с фигурой Земли.

Для Земли  $\Theta \leq 0.002311$ , следовательно эллипсоид Якоби, имеющий ту же массу и плотность, которые имеет Земля, и обладающий одинаковым с ней моментом вращения, оказывается невозможным.

## § 68. Устойчивость линейных серий фигур равновесия

Как уже было сказано (§ 58), весьма важный вопрос об устойчивости эллипсоидальных фигур равновесия был полностью разрешен в работах Ляпунова и Пуанкаре. Примененные ими методы носят весьма общий характер и приложимы не только к эллипсоидальным фигурам равновесия, но и к любым линейным сериям таких фигур, т. е. к семействам фигур равновесия, зависящим от одного параметра. Как эллипсоиды Маклорена, так и эллипсоиды Якоби, являются примерами подобных линейных серий. В самом деле, считая массу и плотность жидкости постоянными, можно и эллипсоиды Маклорена, и эллипсоиды Якоби определять заданием одного параметра. За такой параметр мы принимали сначала угловую скорость  $\omega$ , затем — момент вращения  $M$ .

Мы начнем с того, что дадим основные принципы учения об устойчивости линейных серий фигур равновесия в геометрической форме.

Пусть имеем систему материальных точек, положение которой определяется обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$  и параметром  $\alpha$ . Будем считать, что внешние силы отсутствуют и что потенциальная энергия (т. е. силовая функция с обратным знаком):

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha)$$

не зависит от времени. Следовательно, будет иметь место интеграл энергии  $T + U = \text{const.}$

Рассмотрим сначала случай статического равновесия системы. Согласно принципу виртуальной работы положения равновесия определяются условием стационарности потенциальной энергии:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_n} \delta q_n = 0,$$

или, иначе говоря, уравнениями:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Каждое решение  $q_1(\alpha), \dots, q_n(\alpha)$  этих уравнений даст нам соответствующую линейную серию конфигураций равновесия. По известной теореме Лагранжа конфигурация равновесия является устойчивым положением равновесия, если она обращает потенциальную энергию в минимум. Иначе говоря, *обращение потенциальной энергии в минимум есть достаточное условие устойчивости статической конфигурации равновесия.*

Определение условий, при которых конфигурации равновесия, не обращающие  $U$  в минимум, заведомо не устойчивы, гораздо сложнее. Ляпунову удалось доказать несколько теорем, дающих такие условия. Простейшей и наиболее важной из этих теорем является следующая:

*если для конфигурации равновесия, определяемой уравнениями (1), отсутствие минимума потенциальной энергии устанавливается уже значениями ее вторых производных, то такая конфигурация неустойчива.*<sup>1</sup>

Но если от идеальных систем перейти к реальным, в которых при всяком движении имеет место рассеяние энергии, то легко показать, что обращение потенциальной энергии в минимум всегда является не только достаточным, но и необходимым условием.

В самом деле, рассмотрим некоторую конфигурацию равновесия, для которой функция  $U$  не имеет изолированного минимума. Покажем, что такая конфигурация не может быть устойчивой при наличии диссипативных сил.

Не ограничивая общности, можно считать, что рассматриваемая конфигурация определяется координатами  $q_i = 0$  и что

$$U(0, 0, \dots, 0, \alpha) = 0. \quad (2)$$

Обозначим, далее, через  $D(\epsilon)$  область фазового пространства, определяемую условиями:

$$|q_i| \leq \epsilon, \quad |\dot{q}_i| \leq \epsilon,$$

где  $\epsilon$  настолько малая положительная величина, что эта область не содержит других решений системы (1), кроме  $q_i = 0$ . Пусть  $A$  есть точная верхняя граница  $|U|$  в области  $D(\epsilon)$ .

Рассмотрим теперь движение, определяемое начальными значениями  $q_i^0, \dot{q}_i^0$ , выбранными в области  $D(\delta)$ , где  $\delta < \epsilon$ .

Обозначая через  $T$  кинетическую энергию, будем иметь:

$$T + U = C_0 = \Delta C, \quad (3)$$

где

$$C_0 = T(q_i^0; \dot{q}_i^0) + U(q_i^0; \alpha),$$

<sup>1</sup> А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения (диссертация и статьи). Издание ОНТИ, 1935; стр. 352—362.

Относительно дальнейшего развития этих вопросов см. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.

а через  $\Delta C$  обозначена положительная величина, измеряющая рассеяние энергии. При всяком движении  $\Delta C$  монотонно возрастает. Можно полагать, что это возрастание не ограничено во всех тех случаях, когда не все скорости  $\dot{q}_i$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Так как значение (2) не есть, согласно предположению, изолированный минимум  $U$ , то при всяком  $\delta$  можно выбрать  $q_i^0$  так, что

$$U(q_i^0; \alpha) < 0.$$

С другой стороны, надлежащим уменьшением  $\delta$  величину  $T(q_i^0; \dot{q}_i^0)$  можно сделать сколь угодно малой. Отсюда ясно, что начальные условия движения всегда можно выбрать так, чтобы было  $C_0 < 0$ . Рассмотрим соответствующее движение.

Если допустить, что в этом движении  $T \rightarrow 0$ , то система будет стремиться к конфигурации равновесия. Она не может стремиться к конфигурации  $q_i = 0$ , так как при  $T \rightarrow 0$  и  $U \rightarrow 0$ , равенство (3), правая часть которого существенно отрицательна, привело бы к противоречию. Но если система будет стремиться к другой конфигурации равновесия, то она выйдет из области  $D(\epsilon)$ , что докажет неустойчивость.

Если же  $T$  не стремится к нулю, то  $\Delta C$  будет неограниченно возрастать. Поэтому неравенство

$$U < C_0 - \Delta C,$$

вытекающее из (3), в конце концов даст

$$U < -A,$$

т. е. движение выйдет из области  $D(\epsilon)$ .

Таким образом, при сколь угодно малых  $\epsilon$  и  $\delta$  всегда можно указать движение, не удовлетворяющее критерию устойчивости.

Учитывая все это и принимая во внимание, что в интересующих нас случаях диссипативные силы (обусловленные вязкостью жидкости) не только всегда существуют, но и имеют большое значение, мы будем считать, что *минимум потенциальной энергии является необходимым и достаточным условием устойчивости равновесия.*

Посмотрим теперь, что будет происходить с координатами, определяющими конфигурацию равновесия, при изменении параметра  $\alpha$ .

Обратимся к пространству  $n+1$  измерений, точки которого определяются координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha$ . Через каждую точку этого пространства может проходить только одна из поверхностей  $U = \text{const}$ . Если в рассматриваемой точке выполняются условия (1), то это значит, что касательная плоскость в этой точке перпендикулярна к оси  $\alpha$ . Условимся ось  $\alpha$  называть вертикальной; тогда можно будет сказать, что положения равновесия соответствуют точкам, в которых касательная плоскость к поверхности  $U = \text{const}$ , проходящей через эту точку, горизонтальна.

На рис. 10 (где принято  $n=1$ ) поверхности  $U = \text{const}$  изображены кривыми  $P_1P'_1, P_2P'_2, \dots$ . Кривые  $P_1P_2P_3\dots$  и  $P'_1P'_2P'_3\dots$ , соединяющие точки, в которых касательные плоскости горизонтальны, представляют две линейные серии конфигураций равновесия. Если

считать, что функция  $U$  возрастает в направлении, указанном стрелкой, то линия  $P_1P_2\dots$  представит серию устойчивых положений равно-

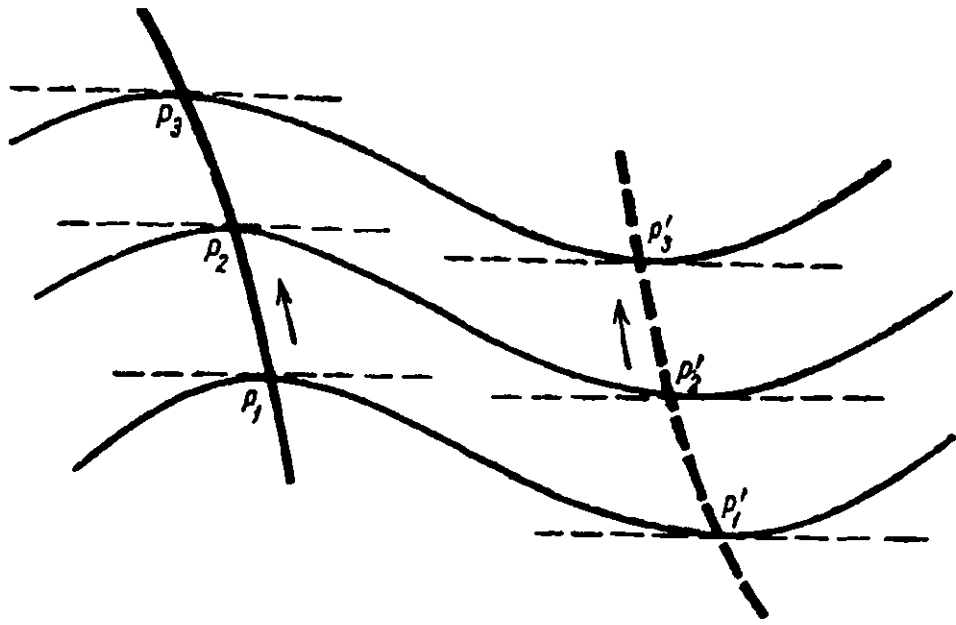


Рис. 10.

весия, тогда как линия  $P'_1P'_2\dots$  будет представлять серию неустойчивых положений — по крайней мере, при наличии диссипативных сил

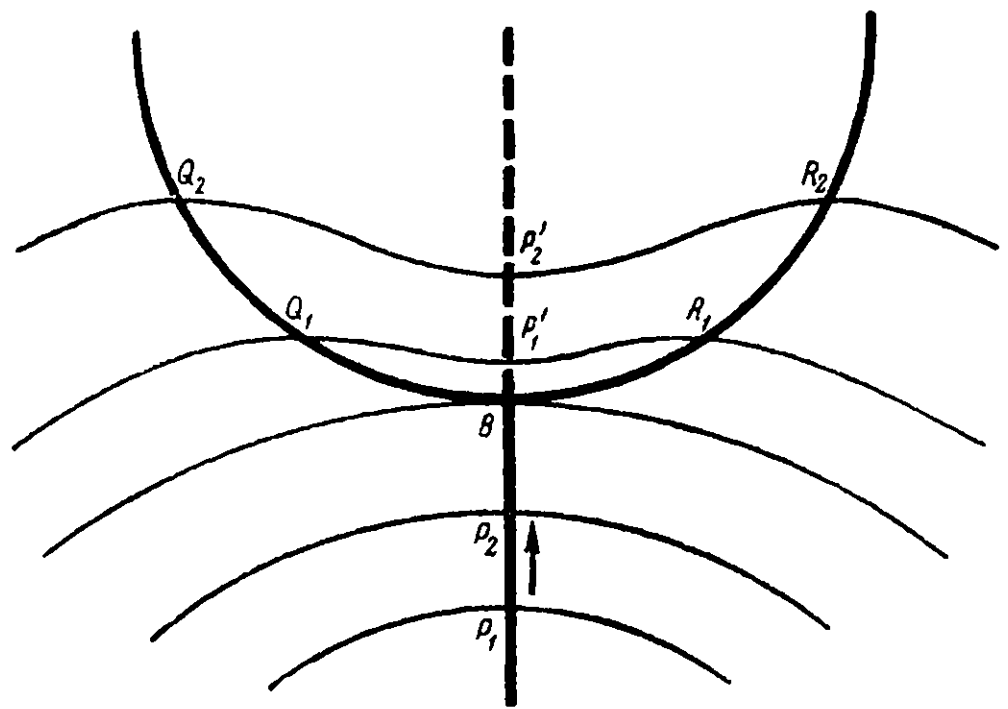


Рис. 11.

При движении вдоль линии, изображающей линейную серию, характер равновесия может измениться. Это может произойти, прежде всего, вследствие достижения точки бифуркации, т. е. такой точки, в которой происходит пересечение двух (или более чем двух) линий, изображающих линейные серии. Так, в случае, изображенном на рис. 11, линейная серия  $P_1P_2\dots$ , достигнув точки бифуркации  $B$ ,

может продолжаться далее тремя различными способами. При этом, линии  $BQ_1Q_2\dots$  и  $BR_1R_2\dots$  дадут положения устойчивого равновесия, тогда как точки линии  $BP'_1P'_2\dots$  будут соответствовать положениям неустойчивого равновесия. Здесь происходит, следовательно, обмен устойчивостью между серией  $P_1P_2BP'_1P'_2$  и серией  $Q_2Q_1BR_1R_2$ .

На рис. 12 изображен случай, когда в точке бифуркации устойчивость, которой обладала серия  $P_1P_2B$ , теряется.

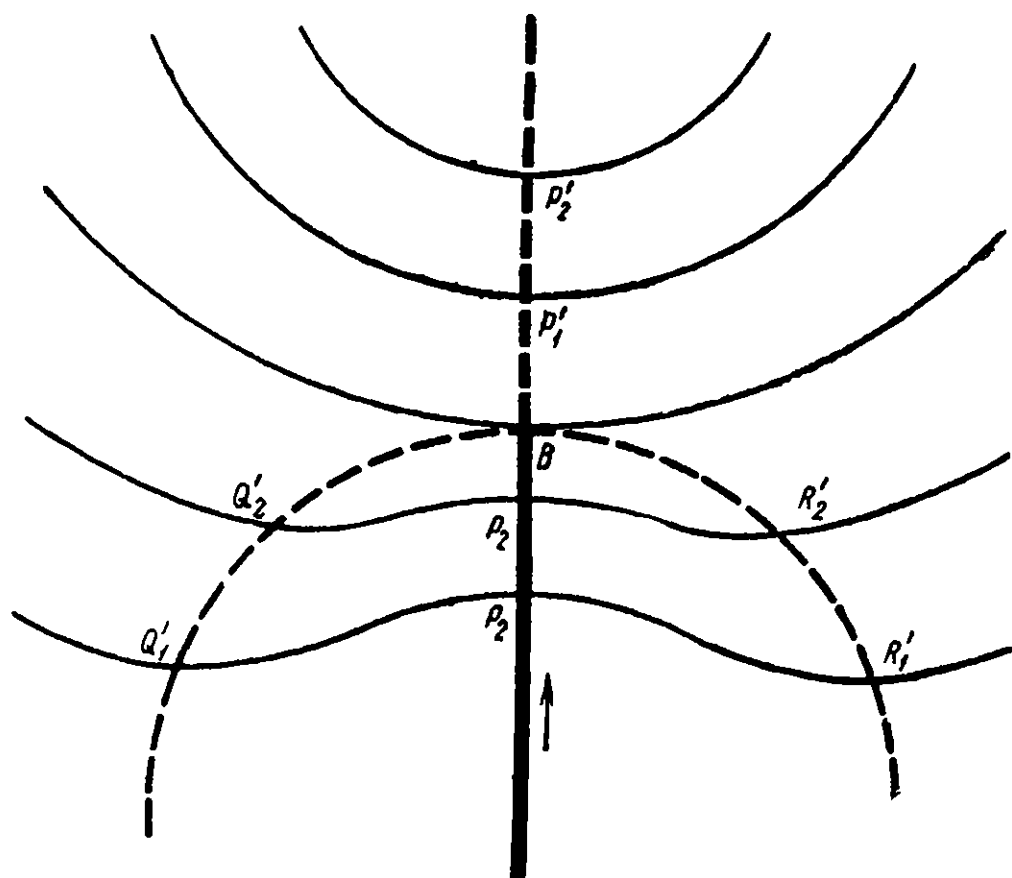


Рис. 12.

Наконец, на рис. 13 показано, каким образом происходит потеря устойчивости в предельной точке  $L$ , в которой сливаются две линейные серии  $P_1P_2\dots L$  и  $Q'_1Q'_2\dots L$ . В этой точке параметр  $\alpha$  имеет максимум.

В тех случаях, когда мы имеем систему с любым числом степеней свободы, общий характер явлений остается таким же. Это позволяет пользоваться следующим правилом для того, чтобы судить об устойчивости линейных серий.

Приняв за исходную точку заведомо устойчивую конфигурацию, надо двигаться вдоль линейной серии в сторону возрастания  $U$  до точки бифуркации. В точке бифуркации (где происходит обмен устойчивостью) надо перейти на новую линейную серию, продолжая двигаться в сторону возрастания  $U$ , и т. д.

До тех пор, пока такое движение будет возможно, мы будем получать устойчивые конфигурации равновесия. Каждая ветвь линейной серии, поворачивающая от точки бифуркации в сторону уменьшения  $U$ , будет состоять из положений неустойчивого

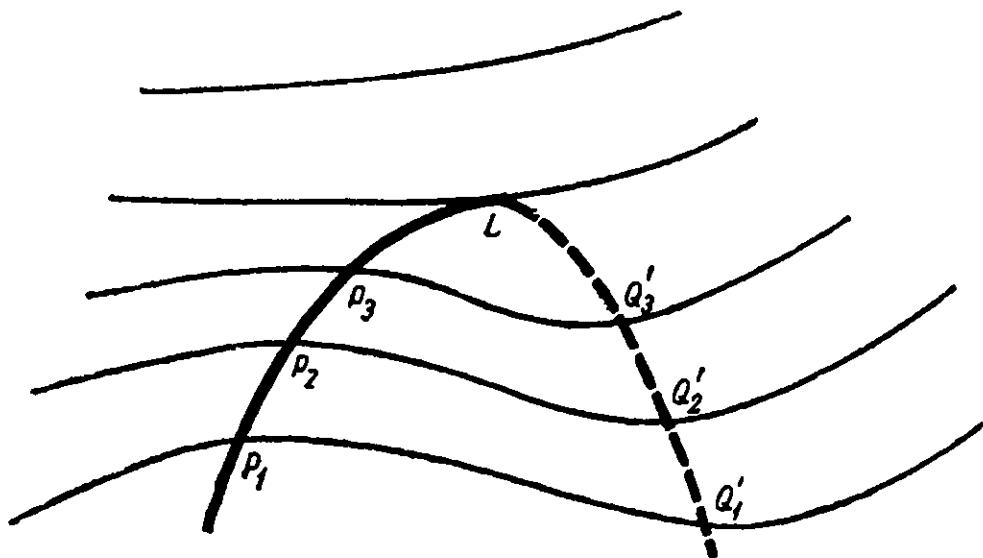


Рис. 13.

равновесия. Наконец, устойчивость переходит в неустойчивость в случае достижения предельной точки (называемой также поворотной точкой), в которой параметр имеет экстремальное значение.

### § 69. Относительное равновесие равномерно вращающейся системы

Рассмотрим систему, отнесенную к осям  $Oxuz$ , вращающимся вокруг оси  $Oz$  в положительном направлении (т. е. от  $Ox$  к  $Oy$ ) с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Компоненты абсолютной скорости точки с координатами  $(x, y, z)$  определяются равенствами:

$$u = \dot{x} - \omega y, \quad v = \dot{y} + \omega x, \quad w = \dot{z}.$$

Поэтому кинетическая энергия выражается так:

$$T = \frac{1}{2} \sum m (u^2 + v^2 + w^2) = T_R + \omega S + \frac{1}{2} \omega^2 J, \tag{1}$$

где

$$T_R = \frac{1}{2} \sum m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{2}$$

есть относительная кинетическая энергия;

$$S = \sum m (x\dot{y} - \dot{x}y) \tag{3}$$



момент количества движения по отношению к вращающимся осям; наконец, через

$$J = \sum m (x^2 + y^2) \quad (4)$$

обозначен момент инерции.

Подобно этому, для момента количества движения имеем:

$$M = \sum m (xv - yu) = S + \omega J. \quad (5)$$

Равенства (1) и (5) дают, если исключить  $S$ :

$$T = T_R + \omega M - \frac{1}{2} \omega^2 J. \quad (6)$$

Положение вращающейся системы осей мы можем определить углом  $q_0$ , удовлетворяющим условию  $\dot{q}_0 = \omega$ , а положение рассматриваемых материальных точек — обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Уравнения движения напишутся тогда так:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_0} = F_0, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k} + F_k, \quad (8)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

если через  $F_0, F_1, \dots, F_n$  обозначить обобщенные внешние силы.

В интересующем нас случае равномерного вращения жидкости мы имеем, на основании равенств (1) и (5):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} = M, \quad \frac{\partial T}{\partial q_0} = 0,$$

так что уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{dM}{dt} = F_0.$$

Это уравнение дает, таким образом, обобщенную силу, которую надо приложить к системе, чтобы поддержать вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Уравнения (8) мы преобразуем, введя в них вместо  $T$  относительную кинетическую энергию  $T_R$ . Выражение (3) дает:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_R}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T_R}{\partial q_k} + \\ &+ \omega \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial S}{\partial q_k} \right] - \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial J}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы упростить первый член второй строки, заметим, что равенство

$$\frac{dx}{dt} = \sum \frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \tag{10}$$

позволяет написать

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_k} &= \sum m \left( x \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_k} - y \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum m \left( x \frac{\partial y}{\partial q_k} - y \frac{\partial x}{\partial q_k} \right), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \sum m \left( \dot{x} \frac{\partial y}{\partial q_k} - \dot{y} \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) + \sum m \left[ x \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_k} \right) - y \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = \sum m \left( \frac{\partial x}{\partial q_k} \dot{y} - \frac{\partial y}{\partial q_k} \dot{x} \right) + \sum m \left[ x \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_k} \right) - y \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) \right].$$

Таким образом:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial S}{\partial q_k} = 2 \sum m \left( \dot{x} \frac{\partial y}{\partial q_k} - \dot{y} \frac{\partial x}{\partial q_k} \right).$$

Если в сумму, стоящую в правой части этого равенства, вместо  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  подставить выражения (10), то окончательно будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial S}{\partial q_k} = \beta_{1k} \dot{q}_1 + \beta_{2k} \dot{q}_2 + \dots, \tag{11}$$

где

$$\beta_{ik} = 2 \sum m \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_k} - \frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial y}{\partial q_i} \right).$$

Подстановка выражений (9) и (11) в уравнения движения (8) дает:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_R}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T_R}{\partial q_k} &= \omega (\beta_{1k} \dot{q}_1 + \beta_{2k} \dot{q}_2 + \dots) = \\ &= - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( U - \frac{1}{2} \omega^2 J \right) + F_k. \end{aligned} \tag{12}$$

Так как мы предполагаем, что внешние силы отсутствуют ( $F_k = 0$ ), то положения относительного равновесия, характеризуемые условиями:

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = 0, \quad \ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = \dots = 0,$$

определяются следующими уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \left( U - \frac{1}{2} \omega^2 J \right) = 0. \tag{13}$$

Итак, в рассматриваемом нами случае, положения относительного равновесия определяются совершенно так же, как и положения абсолютного (статического) равновесия: *надо только потенциальную энергию  $U$  заменить функцией  $U - \frac{1}{2} \omega^2 J$ .*

Все, что было сказано в предыдущем параграфе относительно устойчивости линейных серий равновесия, применимо, поэтому, и в случае равномерно вращающейся системы.

## § 70. Относительное равновесие свободно вращающейся системы

Если система свободна, в частности на нее не действуют силы, поддерживающие постоянство угловой скорости вращения, то угловая скорость будет меняться, в зависимости от изменения момента инерции, таким образом, чтобы момент количества движения оставался постоянным.

Такую систему нецелесообразно изучать при помощи равномерно вращающейся системы осей, так как в этом случае координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  могут возрастать неограниченно и при устойчивом положении относительного равновесия. Сообразно с этим, исключим  $\omega$  из равенств § 69 (1) и (5). Для кинетической энергии будем тогда иметь такое выражение:

$$T = T_s + \frac{M^2}{2J},$$

где положено

$$T_s = T_R - \frac{S^2}{2J}.$$

Следовательно, интеграл энергии принимает вид:

$$T_s + U + \frac{M^2}{2J} = \text{const.}$$

Легко видеть, что  $T_s$  имеет ту же самую структуру, как и кинетическая энергия  $T$ . Действительно, пользуясь выражениями § 69 (2), (3), и (4), имеем:

$$2JT_s = \left[ \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \right] \left[ \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] - \\ - \left[ \sum m_k (x_k \dot{y}_k - \dot{x}_k y_k) \right] \left[ \sum m_i (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) \right],$$

откуда

$$2JT_s = \sum \sum m_i m_k [(x_i \dot{x}_k + y_k \dot{y}_i)^2 + (x_k \dot{x}_i + y_i \dot{y}_k)^2 + \\ + (x_i \dot{y}_k - x_k \dot{y}_i)^2 + (x_k \dot{y}_i - x_i \dot{y}_k)^2 + \dot{z}_i^2 (x_k^2 + y_k^2) + \dot{z}_k^2 (x_i^2 + y_i^2)].$$

Это равенство показывает, что  $T_s$  есть однородный квадратичный полином от  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ , обращающийся в нуль только в том случае, когда все относительные скорости равны нулю.

Поэтому, произведя преобразование уравнений движения, аналогичное сделанному в предыдущем параграфе, условия относительного равновесия получим, вместо § 69 (13), в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \left( U + \frac{M^2}{2J} \right) = 0. \quad (1)$$

Итак, для свободно вращающейся системы положениями устойчивого относительного равновесия являются те конфигурации системы, для которых функция

$$U + \frac{M^2}{2J} \quad (2)$$

имеет минимум.

Сказанное в § 68. относительно устойчивости линейных серий фигур равновесия применимо поэтому и в рассматриваемом случае: нужно только потенциальную энергию  $U$  заменить функцией (2).

### § 71. Фигуры равновесия, близкие к эллипсоидальным

Так как к открытию новых фигур равновесия привело изучение вопроса об устойчивости эллипсоидальных фигур, то мы прежде всего посмотрим, что дают изложенные в предыдущих параграфах принципы для решения вопроса об устойчивости эллипсоидов Маклорена и Якоби.

Устойчивость серии эллипсоидальных фигур, соответствующей параметру  $\Omega$ . При  $\Omega = 0$  мы имеем устойчивую фигуру равновесия в форме шара. При увеличении этого параметра мы будем иметь серию эллипсоидов Маклорена, сжатие которых будет постепенно возрастать и которые должны оставаться устойчивыми фигурами равновесия до тех пор, пока не встретится точка бифуркации. Пусть эта серия изображается вертикальной прямой  $P_1 P_2 B \dots$  (рис. 11 и 12).

Так как на рассматриваемую жидкую массу наложено условие сохранять форму эллипсоида, то единственной точкой бифуркации будет точка  $B$ , соответствующая  $\Omega = 0.18711$ . Сопоставление таблиц, данных в §§ 62 и 67, показывает, что для отвечающих в этой точке эллипсоидов Якоби параметр убывает. Отсюда следует (§§ 68 и 69), что мы имеем здесь случай, изображенный на рис. 12. Таким образом, как все эллипсоиды Якоби, так и эллипсоиды Маклорена при  $\Omega > 0.18711$  являются неустойчивыми фигурами. Если  $\Omega$  превосходит указанное значение, то наступает катастрофа — иначе говоря, статическая (или, вернее, квази-статическая) проблема переходит в динамическую.

Если на вращающуюся жидкую массу наложить более сильное условие — сохранять все время форму эллипсоида вращения, то точка  $\Omega = 0.18711$  перестает быть точкой бифуркации. Эллипсоиды Маклорена остаются устойчивыми фигурами до точки  $\Omega = 0.22467$ , где

параметр достигает максимума. Здесь устойчивость сменяется неустойчивостью, как это показывает рис. 13. Так как дальше нет устойчивых фигур, то статическая задача сменяется, как и в предыдущем случае, динамической.

Устойчивость серии эллипсоидальных фигур, соответствующей параметру  $\Theta$ . Эллипсоиды Маклорена и в этом случае образуют серию устойчивых фигур, начинающуюся в точке  $\Theta = 0$  и продолжающуюся до точки бифуркации  $\Theta = 0.3844$ , соответствующей эллипсоиду бифуркации. Таблицы §§ 62 и 67 показывают, что для эллипсоидов Якоби, ответвляющихся в этой точке, происходит возрастание параметра  $\Theta$ . Мы имеем здесь, следовательно, случай, изображенный на рис. 11, обмена устойчивостью: устойчивость переходит от эллипсоидов Маклорена к эллипсоидам Якоби.

Эллипсоиды Якоби остаются устойчивыми от точки  $B$  до новой точки бифуркации. Если на жидкость наложены условия, допускающие только эллипсоидальные фигуры равновесия, то никакой новой точки бифуркации не будет и все эллипсоиды Якоби будут устойчивы (параметр  $\Theta$  непрерывно возрастает). Но если такие условия не накладывать, то при  $\Theta = 0.63235$  мы получим эллипсоид, являющийся точкой бифуркации.

Этот эллипсоид, определяемый параметрами:

$$\left. \begin{aligned} a/r &= 1.885\,827; & b/r &= 0.814\,975, \\ c/r &= 0.650\,659; \\ u &= 0.119\,043; & v &= 0.637\,409, \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

имеет форму, изображенную на рис. 14 и 15 пунктиром. Новые фигуры равновесия, ответвляющиеся от эллипсоида (1), в смежности с ним имеют вид, указанный сплошной линией.

На рис. 14 изображены три главные сечения новой фигуры равновесия, обычно называемой *грушевидной* (или *апиоидом*), в том виде, как они получились у Дж. Дарвина в первом приближении. Проведя вычисления во втором приближении, он получил,<sup>1</sup> для главного меридианного и экваториального сечений, форму, представленную на рис. 15. Этот чертеж показывает, что на первых порах эллипсоид меняется очень мало, за исключением только образования значительного выступа на одном из концов большой оси.

Надо заметить, что вид этих новых фигур равновесия изучен только в непосредственной близости от эллипсоида (1). Как они эволюционируют при удалении параметра  $\Theta$  от значения, соответствующего эллипсоиду (1), совершенно неизвестно. Насколько можно было проследить изменение их формы, они ограничены поверхностью, имеющей везде положительную кривизну.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> В третьей из работ, указанных на стр. 164.

<sup>2</sup> P. Humbert, Sur les surfaces de Poincaré, Thèse, Paris, 1918.

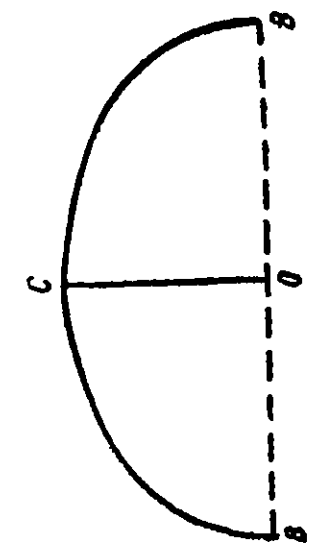


Рис. 14.

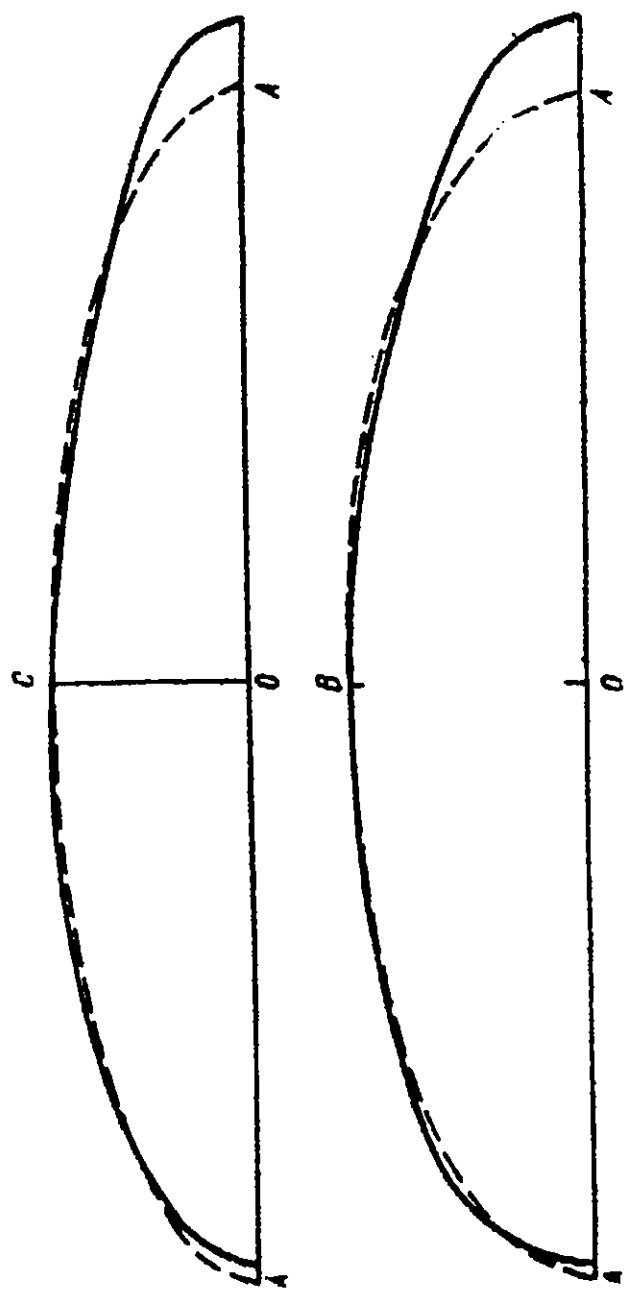
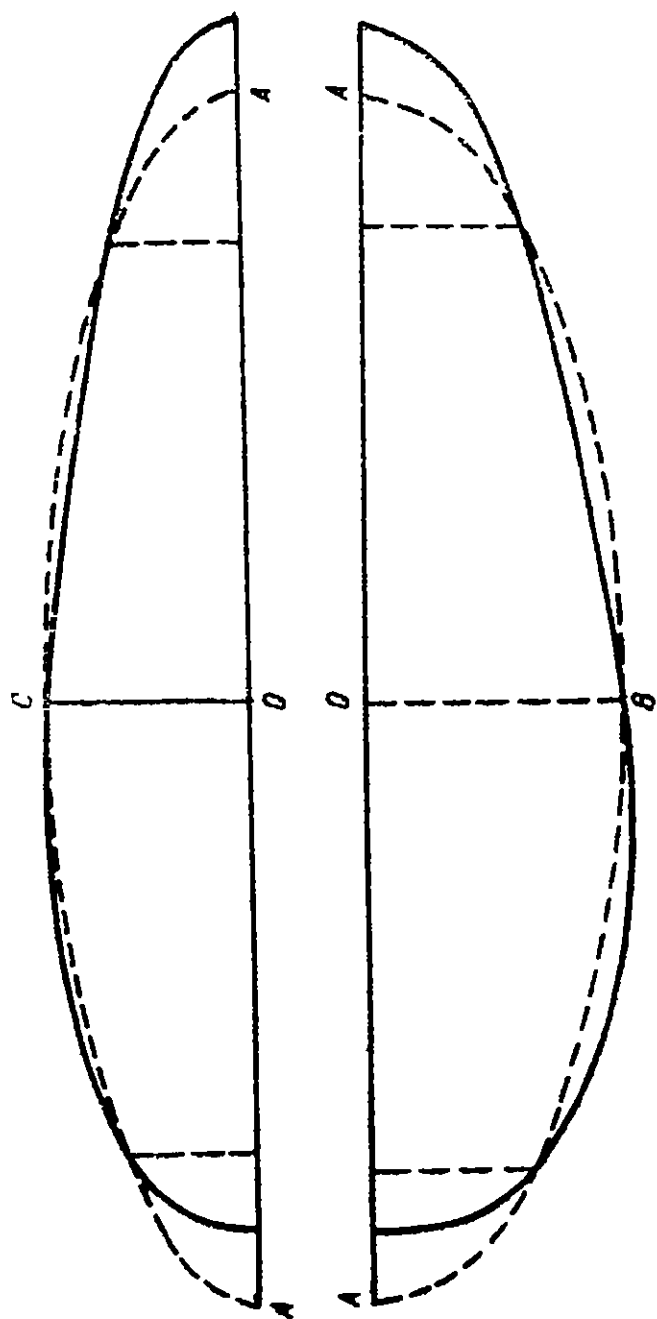


Рис. 13.

Уже было указано (§ 58), что грушевидные фигуры, ответвляющиеся от эллипсоида (1), являются неустойчивыми. Среди эллипсоидов Якоби устойчивыми являются, в рассматриваемом случае, только те, которые соответствуют значениям параметра  $\Theta$  от 0.3843 до 0.6323.

Открытие грушевидных фигур, ответвляющихся от эллипсоида (1), привело к разработке общих методов нахождения эллипсоидов бифуркации. Оказалось, что в серии эллипсоидов Якоби после эллипсоида (1) имеется еще бесчисленное множество эллипсоидов бифуркации. Соответствующие им значения параметра  $\Theta$  образуют последовательность, стремящуюся к бесконечности.

Точно так же и серия эллипсоидов Маклорена включает бесконечное множество эллипсоидов бифуркации. От первого из них, соответствующего  $\Theta = 0.3843$ , ответвляются эллипсоиды Якоби; от следующего ответвляются неэллипсоидальные фигуры; далее, при  $\Theta = 0.8537$ , получаем эллипсоид с максимальной скоростью вращения; наконец, при дальнейшем увеличении  $\Theta$  имеем бесконечную последовательность эллипсоидов Маклорена, дающих начало неэллипсоидальным фигурам.

Важнейшие работы как оригинальные, так и обзорного характера по неэллипсоидальным фигурам равновесия были уже указаны в § 58. Подробнее останавливаться на этих вопросах нет надобности, так как их значение для астрономии еще не ясно. Не следует забывать, что все полученные результаты основаны на предположении полной несжимаемости жидкости. Что из этих результатов сохраняет силу для сжимаемой жидкости, в сущности, не известно, несмотря на попытку, сделанную Джинсом,<sup>1</sup> осветить этот вопрос.

---

<sup>1</sup> В указанной на стр. 164 книге.

## ГЛАВА VII

### ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ, ДЕФОРМИРОВАННЫЕ ПРЯЖЕНИЕМ ВНЕШНЕГО ТЕЛА

#### § 72. Простейшие проблемы этого рода

В предыдущей главе были рассмотрены фигуры равновесия однородной вращающейся жидкости при отсутствии какого-либо внешнего воздействия на эту жидкость. Если учитывать притяжение, производимое на частицы жидкости внешними телами, то задача перестает, вообще говоря, носить статический характер, а становится уже динамической. В теории приливов рассматриваются отдельные случаи этой динамической задачи, представляющие наибольший практический интерес.

Но в двух частных случаях, интересных с астрономической точки зрения, задача сохраняет статический характер. Таким частным случаем является, прежде всего, изучение приливной деформации, производимой в неподвижном жидком теле отдаленным (по сравнению с размерами тела) притягивающим центром.

Другой случай, являющийся обобщением предыдущего, — это так называемая проблема Роша. Проблема, поставленная и разрешенная Рошем (1847), заключается в изучении фигуры равновесия жидкого тела, равномерно вращающегося около оси, при условии, что внешний притягивающий центр находится в экваториальной плоскости и обращается по окружности вокруг жидкого тела с той же самой угловой скоростью.

При изучении формы Луны и других спутников проблема Роша может рассматриваться как первое приближение. Теория приливной эволюции, развитая Джорджем Дарвином, позволяет предполагать, что условие равенства периодов вращения и обращения (наиболее существенное в проблеме Роша) должно, вообще говоря, выполняться.

С другой стороны, проблема Роша представляет несомненный интерес для изучения двойных звезд. Чтобы ближе подойти к условиям, имеющим место в двойных звездах, Джордж Дарвин уточнил и обобщил результаты, полученные Рошем (1906), о чем подробнее будет сказано в § 76. Вопрос о том, насколько выводы, полученные для идеальной однородной жидкости, изменяются при учете сжимаемости и неоднородности, изучался Джинсом (1919).



### § 73. Приливная деформация неподвижной жидкой массы

Если отсутствует притяжение посторонних тел, то жидкая масса, не имеющая вращательного движения, принимает в состоянии равновесия сферическую форму (§ 49).

Посмотрим, какую форму примет жидкость, если ее частицы испытывают, помимо взаимного притяжения, еще притяжение со стороны внешнего тела. Будем считать, что это тело можно заменить материальной точкой. Такая замена возможна, когда тело либо имеет сферическую структуру, либо находится на столь большом расстоянии сравнительно с размерами жидкости, что отклонения от сферической структуры можно не учитывать.

За начало координатной системы  $Oxyz$  возьмем центр инерции  $O$  рассматриваемой жидкости. Ось  $Ox$  направим через точку  $S$ , в которой находится внешняя возмущающая масса  $M'$ ; пусть  $OS = A$ .

Поверхность, ограничивающая нашу жидкость в состоянии равновесия, характеризуется, согласно принципу виртуальной работы, условием:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0, \quad (1)$$

где  $(X, Y, Z)$  есть равнодействующая всех сил, действующих на частицу жидкости с координатами  $(x, y, z)$ .

Эту равнодействующую можно рассматривать как сумму трех сил:

1) градиента потенциала  $V$ , создаваемого притяжением частиц жидкости;

2) градиента потенциала

$$U = \frac{fM'}{r}, \quad r^2 = (A - x)^2 + y^2 + z^2,$$

соответствующего притяжению точки  $S$ ;

3) силы с компонентами  $(-fM'A^{-2}, 0, 0)$ , равной и противоположной той силе, с которой точка  $S$  притягивает центр инерции  $O$  нашей жидкости.

Эта последняя сила прибавляется потому, что мы рассматриваем относительное равновесие — по отношению к координатной системе с началом в точке  $O$ .

Итак, уравнение (1) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - fM'A^{-2}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) dz = 0,$$

или, после интегрирования:

$$V + U - fM'A^{-2}x = \text{const.} \quad (2)$$

В этом уравнении, представляющем точную формулировку проблемы, заменим потенциал  $U$  его приближенным выражением, А именно,

в разложении  $U$  по степеням  $x/A$ ,  $y/A$ ,  $z/A$  условимся отбросить члены третьего и высших порядков. Это дает:

$$U = fM' \left( \frac{1}{A} + \frac{x}{A^2} + \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2A^3} \right).$$

При таком условии уравнение (2) принимает вид:

$$V + \frac{\omega_1^2}{2} (2x^2 - y^2 - z^2) = \text{const}, \quad (3)$$

если для краткости положить

$$\omega_1^2 = \frac{fM'}{A^3}.$$

Итак, в пределах принятой точности фигура равновесия определяется уравнением (3). Это уравнение имеет, по существу, ту же структуру, что и уравнение (2) § 59, определяющее фигуру равновесия изолированной жидкой массы, в состоянии равномерного вращения. Естественно поэтому искать решение уравнения (3) в виде эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$

При таком предположении потенциал притяжения дается формулой (§ 15):

$$V = \text{const} - Px^2 - Qy^2 - Rz^2. \quad (5)$$

Следовательно, уравнение (3), принимающее форму:

$$(P - \omega_1^2) x^2 + \left( Q + \frac{1}{2} \omega_1^2 \right) y^2 + \left( R + \frac{1}{2} \omega_1^2 \right) z^2 = \text{const},$$

действительно может представлять эллипсоид.

Отождествление его с уравнением (4) дает:

$$a^2 (P - \omega_1^2) = b^2 \left( Q + \frac{1}{2} \omega_1^2 \right) = c^2 \left( R + \frac{1}{2} \omega_1^2 \right). \quad (6)$$

Таковы условия, при которых эллипсоид (4) является решением уравнения (3).

В § 59 были даны выражения коэффициентов  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  через отношения:

$$\mu = c^2 a^{-2}, \quad \nu = c^2 b^{-2}.$$

Воспользовавшись этими формулами, полученные условия можно выразить следующими двумя уравнениями:

$$(2 + u) \Omega_1 = \int_0^{\infty} \frac{u(1-u)x dx}{(1+x)(1+ux)D}, \quad (6')$$

$$(v-1) \Omega_1 = \int_0^{\infty} \frac{v(1-v)x dx}{(1+x)(1+vx)D}, \quad (6'')$$

где

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1^2}{2\pi f\kappa}, \quad D = \sqrt{(1+x)(1+ux)(1+vx)}.$$

Так как  $\Omega_1$  есть величина существенно положительная, то равенства (6') и (6'') показывают, что  $u < 1$ ,  $v = 1$ ; иначе говоря

$$a > b = c.$$

Итак, эллипсоид, являющийся фигурой равновесия, должен быть обязательно эллипсоидом вращения, вытянутым вдоль  $Ox$ . Уравнение (6') при  $v = 1$ ,  $0 < u < 1$  дает  $\Omega_1 > 0$ . Отсюда следует, что любой вытянутый эллипсоид вращения может рассматриваться как фигура равновесия.

Учитывая условие, введенное нами при выводе уравнения (3), найденные фигуры равновесия будем называть *бесконечно малыми приливными эллипсоидами*.

Чтобы определить, при каких значениях  $\Omega_1$  существует приливной эллипсоид, можно было бы исследовать уравнение (6') при  $v = 1$ .

Но это уравнение можно заменить значительно более простым. Действительно, если обозначить через  $N$  общее значение величин (6), то рассматриваемые условия представляются так:

$$P - \omega_1^2 = Na^{-2}, \quad Q + \frac{1}{2} \omega_1^2 = Nb^{-2}, \quad R + \frac{1}{2} \omega_1^2 = Nc^{-2}.$$

Сложим почленно эти равенства и воспользуемся соотношением (4) § 15. Это даст:

$$2\pi f\kappa = N(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}).$$

Подставив это значение  $N$  в первое из только что написанных условий, будем иметь:

$$(P - \omega_1^2)(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}) = 2\pi f\kappa a^{-2},$$

или

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{u dx}{(1+ux)D} - \frac{u}{1+u+v}.$$

При  $v=1$  это уравнение принимает вид:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{u dx}{(1+x)(1+ux)^{3/2}} - \frac{u}{2+u}$$

или, окончательно:

$$\Omega_1 = \varphi_1(u), \quad (7)$$

где

$$\varphi_1(u) = \frac{u}{2(1-u)^{3/2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-u}}{1 - \sqrt{1-u}} - \frac{3u}{(1-u)(2+u)}.$$

#### § 74. Существование и устойчивость бесконечно малых приливных эллипсоидов

Уравнение (7) предыдущего параграфа устанавливает зависимость между формой приливного эллипсоида, характеризуемой параметром  $u$ , и величиной

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1^2}{2\pi f \chi} = \frac{M'}{2\pi \chi A^3}, \quad (1)$$

связывающей плотность жидкости с величиной и расстоянием притягивающей массы.

Для исследования этой зависимости введем вместо параметра  $u$  эксцентриситет меридианного сечения, определяемый равенством:

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - u.$$

Это даст:

$$\Omega_1 = \psi(e),$$

где

$$\psi(e) = \frac{1-e^2}{2e^3} \ln \frac{1+e}{1-e} - \frac{3(1-e^2)}{e^2(3-e^2)}.$$

Так как

$$\psi(e) = \frac{4}{45} e^2 + \frac{16}{945} e^4 + \dots,$$

то можно прежде всего отметить, что

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0.$$

Чтобы определить характер изменения функции внутри интервала  $(0,1)$ , заметим, что ее производная равна

$$\psi'(e) = \frac{3-e^2}{e^4} \theta(e), \quad (2)$$

где

$$\theta(e) = \frac{27e - 18e^3 + 7e^5}{(3-e^2)^3} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{1-e}.$$

Знак  $\theta(e)$  легко найти, если заметить, что

$$\theta(0) = 0, \quad \lim_{e \rightarrow 1-0} \theta(e) = -\infty$$

и что производная

$$\theta'(e) = \frac{8e^2(3-4e^2-e^4)}{(1-e^2)(3-e^2)^4}$$

положительна в интервале

$$0 < e < \sqrt{-2 + \sqrt{7}} = 0.80358\dots$$

и отрицательна в интервале  $0.80358\dots < e < 1$ .

Отсюда ясно, что функция  $\theta(e)$  в интервале  $(0,1)$  обращается в нуль только один раз при некотором значении  $e_m$ , большем  $0.80358\dots$ . Вычисление дает:

$$e_m = 0.882579\dots; \quad u = 1 - e_m^2 = 0.22101\dots$$

Формула (2) показывает, что функция  $\psi(e)$  монотонно возрастает в интервале  $(0, e_m)$  и монотонно убывает в интервале  $(e_m, 1)$ . Ее максимальное значение равно:

$$\psi(e_m) = 0.062768\dots$$

Итак, для каждого значения  $\Omega_1$ , находящегося в интервале

$$0 < \Omega_1 < 0.062768,$$

мы имеем два приливных эллипсоида: один соответствующий восходящей ветви кривой с эксцентриситетом, меньшим  $0.8825\dots$ ; другой — соответствующий нисходящей ветви с эксцентриситетом, большим этой величины. При  $\Omega_1 = 0.062768$  существует только один эллипсоид. Если же  $\Omega_1$  превосходит эту величину, то эллипсоидальные фигуры равновесия перестают существовать. Вид эллипсоида с эксцентриситетом  $e_m$ , соответствующего наибольшему значению  $\Omega_1$ , приближенно характеризуется отношениями

$$a : b : c = 17 : 8 : 8.$$

Легко видеть, что менее вытянутые эллипсоиды образуют устойчивую серию фигур равновесия, тогда как более вытянутые эллипсоиды — неустойчивы.

Равенство (1) показывает, что эллипсоидальные фигуры равновесия перестают существовать, когда

$$\frac{M'}{\chi A^3} > 0.394383. \quad (3)$$

Представим себе массу  $M'$  в виде однородного шара той же плотности  $\kappa$ , что и рассматриваемая жидкость. Если обозначить через  $R$  радиус такого шара, то это условие дает:

$$A \leq 2.20R.$$

Таково расстояние от центра шара, ближе которого бесконечно малое жидкое тело уже не может находиться в равновесии: оно будет разорвано приливообразующими силами. Правда, этот вывод основан на допущении, что жидкость в состоянии равновесия имеет форму эллипсоида. Но ему можно приписать общее значение, поскольку такие фигуры равновесия, которые даже приближенно нельзя представить эллипсоидом, являются совершенно невероятными.

### § 75. Фигура спутника бесконечно малой массы. (проблема Роша)

Рассмотрим теперь второй из указанных в § 72 случаев равновесия жидкой массы, когда задача также имеет статический характер.

Пусть жидкое тело вращается около оси  $Oz$ , проходящей через центр инерции  $O$ , с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Пусть, далее, на оси  $Ox$  координатной системы  $Oxyz$ , вращающейся с той же угловой скоростью  $\omega$ , находится материальная точка  $S$  с массой  $M'$ . Расстояние  $OS = A$  будем считать столь же большим, по сравнению с размерами жидкого тела, как и в § 73.

В этом случае, к тем силам, которые рассматривались в § 73, нужно еще добавить центробежную силу с компонентами  $(\omega^2 x, \omega^2 y, 0)$ . Поэтому, чтобы получить уравнение поверхности, ограничивающей фигуру равновесия, нужно только в левой части уравнения (3) § 73 добавить потенциал центробежной силы. Это дает:

$$V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\omega_1^2}{2} (2x^2 - y^2 - z^2) = \text{const}, \quad (1)$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{fM'}{A^3}. \quad (2)$$

Во всех астрономических приложениях равномерное круговое движение тела  $S$  вокруг центра инерции  $O$  рассматриваемого жидкого тела производится их взаимным притяжением. Поэтому:

$$\omega^2 = f(M + M') A^{-3}, \quad (3)$$

где  $M$  — масса жидкого тела.

Введя отношение масс

$$\mu = M/M',$$

из (2) и (3) находим:

$$\omega^2 = \omega_1^2 (1 + \mu), \quad (4)$$

вследствие чего уравнение (1) напишется так:

$$2V + (3 + \mu) \omega_1^2 x^2 + \mu \omega_1^2 y^2 - \omega_1^2 z^2 = \text{const.} \quad (5)$$

Посмотрим, можно ли удовлетворить этому уравнению, приняв, что жидкое тело ограничено эллипсоидом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (6)$$

Так как потенциал внутри жидкости дается в этом случае формулой § 73 (5), то уравнение (5) будет иметь такой вид:

$$[2P - (3 + \mu) \omega_1^2] x^2 + [2Q - \mu \omega_1^2] y^2 + [2R + \omega_1^2] z^2 = \text{const.}$$

Это уравнение должно представлять эллипсоид (6). Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} 2P - (3 + \mu) \omega_1^2 &= Na^{-2}, \\ 2Q - \mu \omega_1^2 &= Nb^{-2}, \\ 2R + \omega_1^2 &= Nc^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для определения величины  $N$  сложим эти уравнения почленно. Учитывая § 15 (4), получим:

$$4\pi f\chi - 2(1 + \mu) \omega_1^2 = N(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}).$$

Если при помощи этого соотношения исключить  $N$  и подставить вместо  $P$ ,  $Q$  и  $R$  их значения (§ 59), то условия (7) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} (1 + u + v) \int_0^\infty \frac{u \, dx}{(1 + ux) D} &= 2u + [3 + \mu + (1 - \mu)u + (3 + \mu)v] \Omega_1, \\ (1 + u + v) \int_0^\infty \frac{v \, dx}{(1 + vx) D} &= 2v + [\mu + \mu u - (2 + \mu)v] \Omega_1, \\ (1 + u + v) \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x) D} &= 2 - [3 + 2\mu + u + v] \Omega_1, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1^2}{2\pi f\chi}, \quad D = \sqrt{(1 + x)(1 + ux)(1 + vx)}. \quad (9)$$

Умножим первые два соотношения соответственно на  $v$  и  $-u$ , затем сложим. Это даст:

$$\Omega_1 = \frac{uv(v-u)}{3v + \mu(v-u)} \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+ux)(1+vx)D}. \quad (10)$$

Подстановка этого выражения в третье из уравнений (8) дает:

$$\begin{aligned} [uv(v-u) + 3v^2 - 3v + \mu(v-u)(v+u-1)] \int_0^\infty \frac{x dx}{D^3} + \\ + uv[4v - u - 3 + \mu(v-u)] \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{D^3} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) являются обобщением уравнений, полученных в § 59 для определения эллипсоидальных фигур равновесия изолированного жидкого тела. Если учесть, что

$$\Omega = \Omega_1(1 + \mu), \quad (12)$$

то легко видеть, что при  $\mu \rightarrow +\infty$  эти уравнения переходят соответственно в уравнения (9) и (6) § 59. Отсюда следует, что при  $\mu = +\infty$  уравнение (11) на плоскости  $(u, v)$  представляет кривую, состоящую из ветвей  $CN'B$  и  $ON'A$  (рис. 8 в § 65).

С другой стороны, при  $\mu = -1$ , иначе говоря для  $\omega = 0$ , полученные уравнения обращаются в уравнения, рассмотренные в § 73. В этом случае уравнение (11) представляет отрезок  $BC$  прямой  $v = 1$ .

Можно показать, что при каждом значении  $\mu$ , взятом внутри интервала  $(-1, +\infty)$ , уравнение (11) также представляет некоторую вещественную кривую. Эта кривая, проходящая при всех значениях  $\mu$  через точки  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 16), состоит из двух ветвей:  $CM'B$  и  $OL'A$ . Вторая ветвь не представляет для нас интереса, так как на ней выражение (10) отрицательно.

Можно, далее, показать, что величина (12) вдоль кривой  $CM'B$  монотонно возрастает от нулевого значения в точке  $C$  до некоторого максимума, после чего монотонно убывает до нулевого значения в точке  $B$ . Так, на кривой  $CN'B$  максимум, равный 0.18711, имеет место в точке  $N'$  (соответствующей эллипсоиду бифуркации).

Мы не будем останавливаться на доказательстве всех этих результатов дискуссии уравнений (10) и (11). Такая дискуссия несколько длинна, но не представляет принципиальных трудностей.

Применение принципов, изложенных в §§ 68 и 69, показывает, что фигуры равновесия, соответствующие точкам кривых, выходящих из  $C$ , будут устойчивы, начиная от точки  $C$  (которая соответствует



сфере) до той точки  $M'$ , в которой  $\Omega$  имеет максимум. В этой точке устойчивость сменяется неустойчивостью, как это изображено на рис. 13 (§ 68).

Совокупность таких точек  $M'$ , соответствующих эллипсоидам, находящимся на границе устойчивости, образует кривую, соединяющую точку  $M_0$  ( $u = 0.22101\dots, v = 1$ ) с точкой  $N'$  ( $u = v = 0.3396\dots$ ).

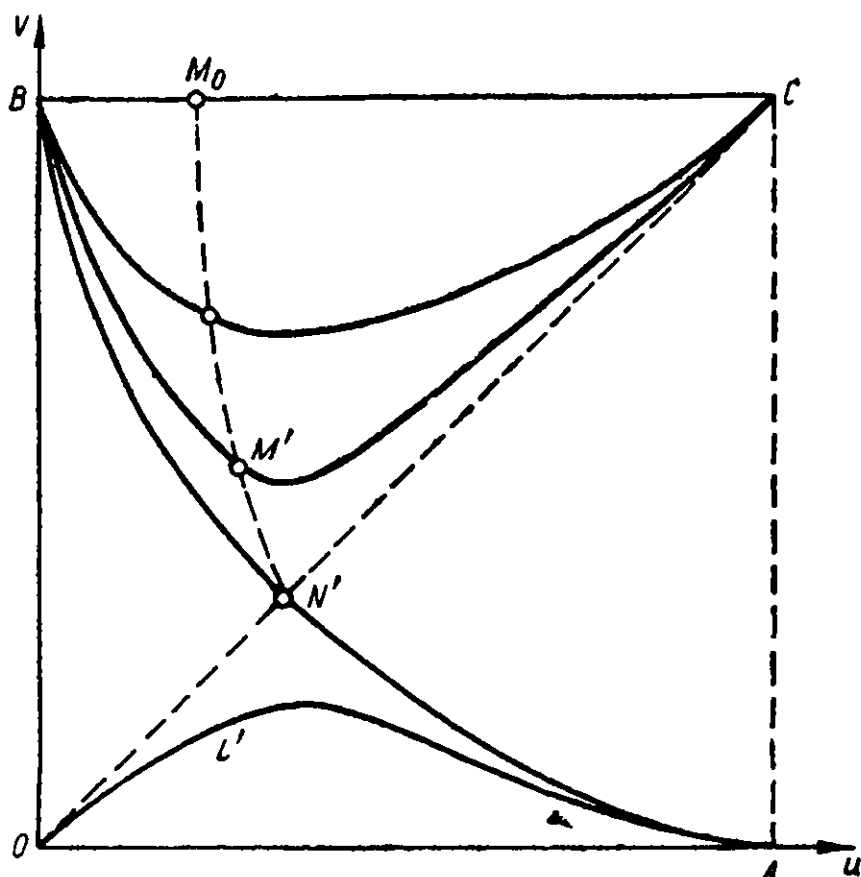


Рис. 16.

Обратимся теперь к рассмотрению наиболее интересного для нас частного случая, когда  $\mu = 0$ . Иначе говоря, будем считать жидкое тело, фигура равновесия которого изучается, бесконечно малым не только по своим размерам, но и по своей массе.

Найдем тот из соответствующих этому случаю эллипсоидов, который находится на границе устойчивости. Для этого надо на кривой (11) определить точку, в которой выражение (10) имеет максимум. При  $\mu = 0$  вычисление дает для координат этой точки такие значения:

$$u = 0.2330, \quad v = 0.8909;$$

причем максимальное значение функции (10) равно

$$\Omega = \Omega_1 = 0.045\,0347. \quad (13)$$

Форма соответствующего эллипсоида характеризуется отношениями:

$$a : b : c = 10\,000 : 5114 : 4827. \quad (14)$$

Предельной величине (13) можно дать такую же интерпретацию, как и в § 74. Если действующую на жидкость внешнюю массу представить в виде однородного шара радиуса  $R$  и плотности  $\chi'$ , то будем иметь:

$$\mathcal{Q} = \frac{2}{3} \left( \frac{R}{A} \right)^3 \frac{\chi'}{\chi}.$$

Следовательно, центр эллипсоида (14) находится на расстоянии

$$A = 2.45539 \left( \frac{\chi}{\chi'} \right)^{\frac{1}{3}} R \quad (15)$$

от центра шара.

Расстояние (15) носит название *предела Роша*. С тою же оговоркою, как и в § 74, можно считать, что бесконечно малый спутник, вращающийся около оси, перпендикулярной к плоскости его орбиты, для которого период вращения совпадает с периодом обращения вокруг центрального тела, на расстоянии (15) уже не может существовать.<sup>1</sup>

Кольца Сатурна лежат внутри предела, даваемого формулой (15), так как радиус наружного края внешнего кольца равен 2.31 экваториального радиуса планеты. Отсюда Рош заключил, что кольца Сатурна должны состоять из мелких твердых частиц (1848). Такое представление, полностью подтвержденное наблюдениями, является теперь общепринятым. Теоретическая разработка условий существования кольца подобной структуры была начата Максвеллом (1857), но еще далека от своего завершения.

## § 76. Фигура спутника конечной массы

Проблему Роша можно приблизить к тем условиям, которые имеют место в действительности для двойных звезд и спутников планет, путем различного рода обобщений. Важнейшие из таких обобщений были подробно изучены Джорджем Дарвином.<sup>2</sup> Остановимся на некоторых из полученных им результатов.

<sup>1</sup> Предел Роша, т. е. то критическое расстояние от планеты, ближе которого существование спутника становится невозможным, получен для жидкого спутника. Изучение действия тех же гравитационных сил на твердый спутник было выполнено Джеффрисом (1947). Оказалось, что внутренние напряжения, достаточные для разрушения спутника, могут возникнуть лишь при весьма значительных размерах спутника. Например, для разрушения спутника (или малой планеты), приблизившегося к самой поверхности Юпитера и имеющего плотность и крепость наших горных пород, нужно, чтобы диаметр спутника был не меньше 400—500 километров. При увеличении минимального расстояния от планеты в  $m$  раз, критическая величина диаметра возрастает в  $m^{1/2}$  раз.

<sup>2</sup> D. H. Darwin, On the figure and stability of a liquid satellite (Phil. Trans. of the R. Soc., 206, A (1906)-Scientific Papers, Vol. III, 1910).

В проблеме Роша спутник считается бесконечно малым как по размерам, так и по массе, а центральное тело (конечной массы) рассматривается как однородный твердый шар.

Оставив первое условие неизменным, придадим центральному телу форму того эллипсоида Маклорена, который соответствует принимаемой нами угловой скорости вращения всей рассматриваемой системы. Плотности спутника и центрального тела будем считать, для простоты, одинаковыми.

Решение этой „модифицированной проблемы Роша“ мало отличается от того, что мы имели в проблеме Роша в ее первоначальном виде. И здесь устойчивые фигуры равновесия даются серией трехосных эллипсоидов. Эта серия начинается сферой и заканчивается предельным эллипсоидом, соответствующим пределу Роша.

Элементы этих эллипсоидов лишь немного отличаются от тех, которые получаются в первоначальной проблеме Роша. В частности, для отношений полуосей предельного эллипсоида имеем:

$$a:b:c = 1000:511:482,$$

что практически совпадает с § 75 (14).

Форма центрального тела в этом случае (т. е. когда спутник имеет форму предельного эллипсоида) такова:

$$a' = b' = 1.030, \quad c' = 0.942, \quad (1)$$

а расстояние спутника от центра центрального тела равно

$$A = 2.457; \quad (2)$$

причем за единицу принимается радиус сферы, объем которой равен объему эллипсоида (1).

Сравнение величины (2) с § 75 (15) показывает, что придание центральному телу эллипсоидальной формы слегка увеличивает предел Роша.

Следующей проблемой является изучение фигуры спутника, бесконечно малого по размерам, но конечной массы. Этот случай был рассмотрен Дарвином для значений отношения масс

$$\mu = M/M',$$

изменяющихся от 0 до 1.

Центральное тело рассматривалось им как твердый трехосный эллипсоид (с полуосями  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ), имеющий фигуру равновесия, соответствующую притяжению, производимому спутником (точечная масса  $M$ ), и угловой скорости вращения  $\omega$ . Таким образом, фигура центрального тела здесь дается решением первоначальной проблемы Роша.

И в этом случае точное решение задачи дается эллипсоидальными фигурами. Отличие этих фигур от решения проблемы Роша невелико. Нижеследующая таблица содержит полуоси ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) предельных

эллипсоидов, полуоси ( $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ) соответствующего центрального тела и соответствующее расстояние  $A$  между центрами спутника и центрального тела (т. е. предел Роша). Все эти величины выражены в единице, равной радиусу такой сферы, объем которой равен сумме объемов спутника и центрального тела. Таким образом:

$$abc + a'b'c' = 1.$$

Эта таблица показывает, что предел Роша очень мало меняется с изменением отношения масс  $\mu$ .

Еще меньше изменяется величина

$$d = A - (a + a'),$$

представляющая расстояние между ближайшими точками поверхностей двух эллипсоидов.

Таблица 4

Таблица элементов предельных эллипсоидов и соответствующих центральных тел в модифицированной проблеме Роша

$\mu$	Спутник			Центр. тело			$A$	$d$
	$a$	$b$	$c$	$a'$	$b'$	$c'$		
0.4	0.843	0.603	0.562	0.988	0.886	0.815	2.484	0.653
0.5	0.870	0.642	0.597	0.979	0.860	0.792	2.485	0.635
0.6	0.888	0.674	0.627	0.969	0.836	0.772	2.490	0.633
0.7	0.901	0.701	0.652	0.958	0.815	0.753	2.497	0.638
0.8	0.912	0.725	0.673	0.947	0.796	0.737	2.502	0.643
0.9	0.921	0.744	0.691	0.937	0.778	0.722	2.508	0.650
1.0	0.927	0.762	0.708	0.927	0.762	0.708	2.514	0.660

Устойчивость, которая имеет место во всех этих проблемах, может быть названа *частичной устойчивостью*, поскольку для ее существования центральное тело не должно деформироваться (мы его считаем твердым). Дальнейшим обобщением является задача о фигурах равновесия двух жидких масс, вращающихся под влиянием взаимного притяжения по круговым орбитам и сохраняющих неизменное взаимное расположение. Исследования Дарвина показали, что в этом случае для малых значений  $\mu$  фигуры равновесия лишь немного отличаются от эллипсоидов. Они близки, по своему общему виду, к фигуре, изображенной на рис. 14 и 15 (§ 71). Устойчивость, имеющая место для серии таких фигур, начинаемой сферой, может быть названа *полной* (или *вековой*). Такая устойчивость не разрушается не только взаимным сближением тел (как в проблеме Роша и ее вышеуказанных модификациях), но и приливным трением, если жидкость считать вязкой.

## § 77. Фигура Луны

Изучение таких фигур бесконечно малых спутников, которые близки к сфере, было выполнено еще Лапласом в связи с определением фигуры Луны.

Лаплас исходил из уравнений § 75 (7). Входящие в эти уравнения величины  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  выражаются через эксцентриситеты главных сечений эллипсоида формулами § 18 (3), в которых надо положить  $u = 0$ . Если эти выражения разложить по степеням эксцентриситетов, то получим:

$$P = \frac{2}{3} \pi f \kappa \left( 1 - \frac{2}{5} l^2 + \frac{1}{5} l_1^2 + \dots \right),$$

$$Q = \frac{2}{3} \pi f \kappa \left( 1 + \frac{1}{5} l^2 - \frac{2}{5} l_1^2 + \dots \right),$$

$$R = \frac{2}{3} \pi f \kappa \left( 1 + \frac{1}{5} l^2 + \frac{1}{5} l_1^2 + \dots \right),$$

где четвертые и высшие степени эксцентриситетов отброшены.

Подстановка этих выражений в § 75 (7) и исключение  $N$  приводит, в пределах принятой точности, к равенствам:

$$\frac{4+\mu}{1+\mu} \Omega = \frac{4}{15} l^2 + \dots, \quad \Omega = \frac{4}{15} l_1^2 + \dots$$

Этими соотношениями можно, следуя Лапласу, воспользоваться для определения фигуры Луны.

В формуле

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f \kappa} = \frac{2\pi}{f \kappa T^2},$$

где через  $T$  обозначен период вращения Луны, имеем (в системе CGS):

$$T = 2360591.51; \quad \kappa = 3.33; \quad f = 6.67 \cdot 10^{-8};$$

следовательно:

$$\Omega = 5.077 \cdot 10^{-6}.$$

Поэтому, принимая  $\mu = 1/81.53$ , получим:

$$l^2 = 0.000\,07546 \quad l = 0.008\,687$$

$$l_1^2 = 0.000\,01904 \quad l_1 = 0.004\,363.$$

Так как диаметр Луны равен 3476 км, то отсюда следует, что

$$a - c = 65 \text{ м}, \quad b - c = 16 \text{ м}.$$

Таковы отклонения фигуры Луны от сферической формы, которые имели бы место, если бы Луна была однородным жидким телом.

Для сжатий главных сечений наша теория дает следующие значения:

$$\alpha' = \frac{b-c}{b} = \frac{1}{2} l_1^2 + \dots = 0.000\,010,$$

$$\alpha'' = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{2} l_2^2 + \dots = 0.000\,038,$$

$$\alpha''' = \frac{a-b}{c} \approx \frac{a-c}{a} - \frac{b-c}{b} = \alpha'' - \alpha' = 0.000\,028.$$

С другой стороны, изучение либрации Луны позволяет найти из наблюдений величины:

$$\alpha = \frac{C' - B'}{A'}, \quad \beta = \frac{C' - A'}{B'}, \quad \gamma = \frac{B' - A'}{C'},$$

где  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  — моменты инерции относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Эти отношения, носящие название *динамических сжатий*, должны очень мало отличаться от геометрических сжатий (§ 79), т. е. должно быть:

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \alpha'', \quad \gamma = \alpha''.$$

Между тем, наблюдения дают<sup>1</sup>

$$\alpha = 0.000\,46, \quad \beta = 0.000\,62, \quad \gamma = 0.000\,16,$$

что значительно превосходит указанные значения выше  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  и  $\alpha'''$ .

Таким образом, как теория, так и наблюдения указывают на то, что Луна имеет приблизительно форму трехосного эллипсоида. Но величины сжатий получаются различные. Это зависит прежде всего от тех упрощающих предположений, на которых базируется теория. С другой стороны, получаемые из наблюдений значения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  весьма мало точны, так как они находятся из либрационных эффектов, лежащих почти на пределе точности наблюдений.

Во всяком случае, в реальности остающихся невязок между наблюдениями и теорией, основанной на предположении о гидростатическом равновесии Луны, не приходится сомневаться. Это приводит к заключению, что Луна значительно дальше от состояния гидростатического равновесия, нежели Земля.

<sup>1</sup> А. Яковкин. Постоянные физической либрации Луны. (Известия Астр. Энгельгардтовской Обсерватории Казанского Университета № 13, 1928).

А. Яковкин. Вращение и фигура Луны. Часть 1. (Там же, № 21, 1939.) Часть II (там же, № 23, 1945).

## ГЛАВА VIII

# ОСНОВЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФИГУР ПЛАНЕТ

### § 78. Постановка задачи

Задача определения фигур равновесия неоднородной жидкой массы<sup>1</sup> весьма трудна, если ее ставить во всей общности. Но в этом нет никакой надобности, если иметь в виду механическую теорию фигур планет, так как тут можно использовать некоторые специфические условия. Прежде всего, все планеты вращаются очень медленно (даже для Юпитера  $\omega = 0.0001775 \text{ sec}^{-1}$ ), а так как решение зависит только от  $\omega^2, \omega^4, \dots$ , то отбрасывая величины порядка  $\omega^4$  — что очень упрощает задачу, — мы допустим лишь весьма малую неточность.

С другой стороны, наблюдения показывают, что внешняя поверхность планет всегда очень мало отличается от сферы. Так как сжатие внутренних поверхностей равной плотности всегда меньше сжатия внешней поверхности (§ 81), то отсюда, ясно, что мы можем ограничиться отысканием решений, мало отличающихся от той сферической структуры, которая соответствует состоянию покоя.

Проблема нахождения таких фигур равновесия медленно вращающейся неоднородной жидкости, которые мало отличаются от сферических, носит название *проблемы Клэро*. В своей знаменитой „Теории фигуры Земли, выведенной из принципов гидростатики“<sup>2</sup> Клэро не только ясно поставил эту задачу, но и дал настолько полное решение, что оно было существенно улучшено лишь в конце 19-го века.

В настоящее время мы имеем три различные решения проблемы Клэро. В первом из них, принадлежащем самому Клэро и носящем название *теории Клэро*, для уровенных поверхностей принимается некоторая определенная форма с достаточным числом неизвестных параметров, которые затем находятся при помощи уравне-

<sup>1</sup> Под определением фигуры равновесия неоднородной жидкости разумеется, собственно, определение конфигурации равновесия, т. е. нахождение всех поверхностей равной плотности, а не только внешней поверхности.

<sup>2</sup> Русский перевод этой книги, изданный в серии „Классики науки“, указан на стр. 160.

ний равновесия. Этим путем можно показать, что, ограничиваясь величинами порядка  $\omega^2$ , мы можем уровенные поверхности считать эллипсоидами вращения; но трехосными эллипсоидами они быть не могут даже в пределах первого приближения. Калландро и Джордж Дарвин указали поверхности 4-го порядка, которые удовлетворяют уравнениям равновесия с точностью до членов порядка  $\omega^4$ .

Недостатком теории Клэро является прежде всего то, что она оставляет открытым вопрос о единственности найденного решения. Точно так же, путь, избранный Клэро, оставляет открытым и вопрос о существовании точного решения задачи, приближением к которому являются найденные фигуры равновесия.

Теория Лапласа, основы которой были положены работами Лежандра и Лапласа, разрешает полностью первый из указанных вопросов, так как показывает, что других решений, помимо найденного Клэро эллипсоидального сфероида, задача не имеет. Трудности, связанные с выяснением областей сходимости тех разложений по сферическим функциям, на которых базируется теория Лапласа, вызвали многочисленные работы. Наиболее простой путь для преодоления этих трудностей был указан Вавром.<sup>1</sup>

Третье решение проблемы Клэро было дано Ляпуновым.<sup>2</sup> В теории Ляпунова не только доказывается единственность решения Клэро в пределах заданной точности, но и решается другой из указанных выше вопросов: доказывается, что точное решение задачи существует. Ляпунов дает общий метод для получения решения с любой точностью. Надо, однако, заметить, что теория Ляпунова является наименее разработанной в отношении своих практических применений.

Исключительно важное значение имеет сравнение выводов механической теории планетных форм с тем, что дают наблюдения. Конечно, сколько-нибудь обстоятельное сравнение может быть сделано только для Земли. Геодезические измерения позволяют определить сжатие внешней поверхности Земли с гораздо большей точностью, нежели это возможно для других планет. Более того, сопоставление реальной фигуры Земли, как она получается из геодезических измерений, или так называемого геоида, с теоретической внешней поверхностью фигуры равновесия дает возможность судить о том, насколько осуществляются предпосылки, лежащие в основе теории.

Одним из важнейших путей сравнения теории с наблюдениями является сопоставление наблюдаемого при перемещении по поверхности Земли изменения силы тяжести с теоретическим. Поэтому изучение силы тяжести на поверхности фигуры относительного

<sup>1</sup> R. Wavre, *Figures planétaires et Géodésie*, Paris, 1932.

<sup>2</sup> *Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes*, Записки Академии Наук, VIII серия, том XIV, № 7, 1903. Этот мемуар включен в книгу: А. М. Ляпунов, *Избранные труды*, Изд. АН СССР, 1948.



равновесия составляет существенно важный раздел механической теории планетных форм.

Полезно отметить, что теория Клэро, которая излагается в этой главе, и теории Лапласа и Ляпунова основаны на одних и тех же физических предположениях; они отличаются между собой только способом математической трактовки вопроса. Таким образом, результаты, к которым они приводят, в пределах определенной точности, должны быть совершенно одинаковы.

## § 79. Некоторые свойства сфероидов

Следуя Лапласу, мы назовем сфероидом тело, в котором все поверхности равной плотности мало отличаются от концентрических сфер.<sup>1</sup> Малыми отличиями мы считаем при этом такие, вторыми степенями которых можно пренебречь.

Уравнение поверхности равной плотности можно написать, пользуясь полярными координатами  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , следующим образом:

$$\rho = r(1 + \epsilon Y), \quad (1)$$

где  $r$  — параметр, характеризующий рассматриваемую поверхность  $Y$  — некоторая функция от  $\theta$ ,  $\psi$  и  $r$ , а через  $\epsilon$  обозначена небольшая положительная величина, квадратом которой можно пренебречь.

Плотность в точках поверхности (1) обозначим через  $\kappa = \kappa(r)$ .

Выбор параметра  $r$  в равенстве (1) может быть сделан различно. Мы выберем этот параметр так, чтобы объем, ограниченный поверхностью (1), равнялся объему сферы радиуса  $r$ .

Посмотрим, что дает это условие для определения функции  $\epsilon Y$ . Элемент объема сфероида

$$d\tau = \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\psi$$

можно представить так:

$$\begin{aligned} d\tau &= r^2 (1 + \epsilon Y)^2 \left(1 + \epsilon \frac{\partial Y}{\partial r}\right) \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\psi = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} [r (1 + \epsilon Y)]^3 dr \, d\sigma, \end{aligned}$$

если через

$$d\sigma = \sin \theta \, d\theta \, d\psi$$

обозначить, для краткости, элемент поверхности единичной сферы  $s$ .

<sup>1</sup> Точнее говоря, поверхности равной плотности можно провести так что они будут мало отличаться от концентрических сфер.

Сфероид иногда определяют как тело, ограниченное сжатым эллипсоидом вращения. В тех случаях, когда применяется такое определение (т. е. для Земли), оно практически совпадает с данными в тексте.

Следовательно объем, ограниченный поверхностью (1), равен:

$$\int d\tau = \frac{1}{3} \int_s d\sigma \int_0^r d[r(1 + \epsilon Y)]^3 = \frac{r^3}{3} \int_s (1 + \epsilon Y)^3 d\sigma.$$

Приравняв это выражение  $\frac{4}{3} \pi r^3$ , получим:

$$\int_s (1 + \epsilon Y)^3 d\sigma = 4\pi. \quad (2)$$

Таким равенством выражается принятое нами условие для определения параметра  $r$ , а следовательно и функции  $\epsilon Y$ .

Найдем массу  $M(r)$ , заключенную внутри поверхности (1). Имеем:

$$M(r) = \int x d\tau = \int_0^r x r^2 dr \int_s (1 + \epsilon Y)^2 \left(1 + \epsilon \frac{\partial r Y}{\partial r}\right) d\sigma.$$

Но если равенство (2) продифференцировать по  $\epsilon$  и полученный результат

$$\int_s (1 + \epsilon Y)^2 \epsilon \frac{\partial Y}{\partial r} d\sigma = 0$$

умножить на  $r$  и прибавить почленно к (2), то найдем:

$$\int_s (1 + \epsilon Y)^2 \left(1 + \epsilon \frac{\partial r Y}{\partial r}\right) d\sigma = 4\pi.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r x r^2 dr. \quad (3)$$

В частности, если значение параметра  $r$ , соответствующее внешней поверхности тела, обозначить через  $r_1$ , то для массы всего тела получим такое выражение:

$$M = 4\pi \int_0^{r_1} x r^2 dr. \quad (4)$$

**Средняя плотность.** Обозначим через  $D$  среднюю плотность той части тела, которая заключена внутри поверхности (1). Тогда:

$$M(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 D.$$

Сравнение этого выражения с (3) дает:

$$r^3 D = 3 \int_0^r x r^2 dr = \int_0^r x d(r^3). \quad (5)$$

Отсюда, после дифференцирования и сокращения:

$$3x = 3D + rD'. \quad (6)$$

Дифференцируя еще раз, имеем:

$$3x' = 4D' + rD''.$$

Мы будем всегда считать, что плотность убывает от центра к поверхности, так что

$$x' < 0, \quad D' < 0.$$

Отсюда следует, что

$$0 < 3D + rD' < 3D,$$

или

$$-3 < \frac{rD'}{D} < 0. \quad (7)$$

Если  $\frac{rD'}{D} = 0$ , то это означает, что тело однородно. Посмотрим, когда достигается нижняя граница в неравенствах (7).

Если

$$\frac{rD'}{D} = -3,$$

т. е.

$$\frac{D'}{D} = -\frac{3}{r},$$

то

$$D = Kr^{-3},$$

где  $K$  — постоянная интегрирования.

Таким образом, здесь  $D = \infty$  при  $r = 0$ , тогда как формула (6) дает  $x = 0$ . Итак, в этом случае вся масса тела сосредоточена в его центре.

Все изложенное дает основание назвать величину

$$\zeta = -\frac{rD'}{D} = -\frac{d \ln D}{d \ln r}$$

параметром конденсации.

Равенство (6) дает:

$$\zeta = 3\left(1 - \frac{x}{D}\right). \quad (8)$$

Неравенства (7) показывают, что во всех интересующих нас случаях

$$0 < \zeta < 3.$$

**Моменты инерции.** Обозначим через  $x, y, z$  прямоугольные координаты, соответствующие полярным  $\rho, \theta, \psi$ . Момент инерции части тела, ограниченной поверхностью (1), относительно оси  $z$ , дается формулой:

$$C = \int \kappa (x^2 + y^2) d\tau = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \kappa \rho^4 \sin^3 \theta d\theta d\psi d\rho.$$

Предположим сначала, что тело однородно, и напомним это выражение так:

$$C = \frac{1}{5} \kappa \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^5 \left[ \frac{2}{3} + \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right) \right] \sin \theta d\theta d\psi.$$

В квадратных скобках вторым слагаемым выделена сферическая функция второго порядка.

Формула (1) дает:

$$\rho^5 = r^5 (1 + 5\epsilon Y),$$

ибо квадратом  $\epsilon$  мы пренебрегаем. Стоящую здесь функцию  $Y$  разложим в ряд по сферическим функциям:

$$Y = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n + \dots$$

Равенство (2) показывает, что в пределах принятой точности  $Y_0 = 0$ .

Так как интегралы

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right) \sin \theta d\theta d\psi$$

вследствие ортогональности сферических функций равны нулю при всех значениях  $n$ , кроме  $n=2$ , то в выражении для  $C$  останется лишь один интеграл, и мы будем иметь:

$$C = \frac{8}{15} \pi \kappa r^5 + \kappa r^5 \epsilon \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_2 \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right) \sin \theta d\theta d\psi. \quad (9)$$

Отсюда следует, что, в пределах принятой нами точности, только гармоники нулевого и второго порядков в разложении радиуса-вектора (1) влияют на моменты инерции.

Возьмем гармонику  $Y_2$  в самой общей форме:

$$Y_2 = (a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{011}yz + a_{101}zx + a_{110}xy) \rho^{-2}. \quad (10)$$

При подстановке в (9) члены с коэффициентами  $a_{011}, a_{101}, a_{110}$ , имеющие множителями интегралы:

$$\int_0^{2\pi} \sin \psi d\psi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi = 0,$$

обратятся в нули, и окончательно получим такое выражение:

$$C = \frac{8}{15} \pi \chi r^5 + \frac{8}{45} \pi \chi \epsilon r^5 (a_{200} + a_{020} - 2a_{002}).$$

Перестановка букв дает момент инерции относительно оси  $x$ :

$$A = \frac{8}{15} \pi \chi r^5 + \frac{8}{15} \pi \chi \epsilon r^5 (a_{020} + a_{002} - 2a_{200}).$$

Таким образом, ограничиваясь лишь главными членами, будем иметь:

$$C - A = \frac{8}{15} \pi \chi \epsilon r^5 (a_{200} - a_{002}), \quad (11)$$

$$C = \frac{8}{15} \pi \chi r^5, \quad (12)$$

откуда, для величины так называемого *динамического сжатия*, имеем:

$$\frac{C - A}{C} = \epsilon (a_{200} - a_{002}). \quad (13)$$

Полученный результат допускает простую интерпретацию. При вычислении этого отношения мы можем рассматриваемое однородное тело считать ограниченным поверхностью

$$\rho = r (1 + \epsilon Y_2). \quad (14)$$

Покажем, что эта поверхность отличается лишь на величины порядка  $\epsilon^2$  от эллипсоида. В самом деле, возведя обе части (14) в квадрат и отбрасывая  $\epsilon^2$ , придем к уравнению:

$$\rho^2 (1 - 2\epsilon Y_2) = r^2,$$

которое представляет, в силу (10), эллипсоид.

Чтобы найти сжатие сечения этого эллипсоида плоскостью  $y = 0$ , определим радиусы-векторы  $\rho_x$  и  $\rho_z$  тех точек, в которых эллипсоид пересекается с осями  $x$  и  $z$ . Равенства (14) и (10) дают:

$$\rho_x = r (1 + \epsilon a_{200}), \quad \rho_z = r (1 + \epsilon a_{002}).$$

Таким образом, искомое сжатие равно:

$$\alpha = \frac{\rho_x - \rho_z}{\rho_x} = \frac{\epsilon (a_{200} - a_{002})}{1 + \epsilon a_{200}} = \epsilon (a_{200} - a_{002}) + \dots$$

Итак, для однородного эллипсоида динамические сжатия равны геометрическим сжатиям соответствующих сечений этого эллипсоида — с точностью до вторых степеней этих сжатий.

Вернемся теперь к общему случаю неоднородного сфероида. Для каждого из двух однородных сфероидов с одинаковой плотностью  $\chi(r)$ , ограниченных поверхностями  $r$  и  $r + dr$ , мы можем вычислить мо-

менты инерции  $C$  по формуле (12). Разность этих двух моментов, равная, с точностью до бесконечно малых высших порядков:

$$\frac{8}{15} \pi \kappa \frac{\partial (r^5)}{\partial r} dr,$$

будет представлять момент  $C$  бесконечно тонкого слоя, заключенного между указанными поверхностями. Суммируя, получим  $C$  для неоднородного сфероида в виде интеграла:

$$C = \frac{8}{15} \pi \int_0^{r_1} \kappa d(r^5). \quad (15)$$

Аналогично:

$$C - A = \frac{8}{15} \pi \int_0^{r_1} \kappa d(\alpha r^5), \quad (16)$$

где  $\alpha = \varepsilon (a_{200} - a_{002})$ .

Эти формулы показывают, что для неоднородного эллипсоида динамические сжатия даются следующими выражениями:

$$\frac{C - A}{C} = \frac{\int_0^{r_1} \kappa d(\alpha r^5)}{\int_0^{r_1} \kappa d(r^5)}. \quad (17)$$

Таким образом, рассматриваемое отношение является взвешенным средним из сжатий слоев равной плотности в плоскости меридиана  $y = 0$ .

В дальнейшем мы будем иметь дело почти исключительно со сфероидами вращения, т. е. такими сфероидами, у которых каждый слой равной плотности ограничен поверхностью вращения. В этом случае формула (17) представляет взвешенное среднее из сжатий в каждом меридианном сечении.

## § 80. Сфероид Клэро

Для того, чтобы поверхность

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

была поверхностью уровня для жидкой массы, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и находящейся в относительном равновесии,

необходимо и достаточно выполнение следующих условий (§ 47):

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}, \quad (2)$$

где через  $V$  обозначен потенциал притяжения.

Клэро показал, что этим условиям можно удовлетворить, — если отбрасывать величины порядка  $\omega^4$ , — приняв за поверхности уровня эллипсоиды вращения с надлежаще выбранными сжатиями. Соответствующая конфигурация равновесия получила название *сфероида Клэро*.

Таким путем получается приближенное решение уравнений (2). Является ли это приближенное решение единственным в пределах принятой точности? Этот вопрос остается здесь открытым. Точно так же путь, избранный Клэро, оставляет открытым и вопрос о существовании точного решения, приближением к которому является найденное указанным путем решение. Несмотря, однако, на все свое несовершенство с математической точки зрения, решение Клэро может считаться достаточно удовлетворительным с точки зрения естествознания. В самом деле, существование решения, т. е. существование конфигурации относительного равновесия, с физической точки зрения очевидно. Что же касается до отсутствия доказательства единственности решения, то сравнение следствий теории Клэро с тем, что нам известно относительно фигуры Земли и распределения силы тяжести на ее поверхности, достаточно свидетельствует о совпадении найденного решения с искомым.

Итак, предположим, следуя Клэро, что уровенные поверхности (1) являются эллипсоидами вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{1 + 2\alpha} + \frac{z^2}{1} = c^2, \quad (3)$$

у которых сжатие  $\alpha = \alpha(c)$  очень мало. За параметр, отличающий одну поверхность от другой, мы принимаем полярную полуось  $c$ .

Уравнения (2) приводятся в этом случае к одному уравнению:

$$(1 + 2\alpha) \left( \frac{1}{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 \right) = \frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Подставим сюда найденные в § 20 выражения для компонент притяжения эллипсоидального сфероида. Отбросив  $\alpha^2$ ,  $\alpha \frac{da}{dc}$  и  $\alpha \omega^2$  как величины второго порядка малости, после некоторых очевидных упрощений условие равновесия получим в такой форме:

$$\frac{5\omega^2}{8\pi f} = \frac{5\alpha}{3c^8} \int_0^c x d(c^3) - \frac{1}{c^5} \int_0^c x d(\alpha c^5) - \int_c^{c_1} x d\alpha. \quad (4)$$

Через  $c_1$  обозначена полярная полуось внешней поверхности. Это уравнение, найденное впервые Клэро и носящее его имя, определяет функцию  $\alpha(c)$  при заданном законе плотностей  $\kappa(c)$ . При выполнении условия (4) эллипсоиды (3) совпадают с уровнями поверхностями сфероида Клэро в пределах принятой нами точности. С тою же точностью это уравнение может быть написано в другой, более удобной для дальнейшего, форме. В качестве параметра, определяющего уровенные поверхности, введем вместо полярной полуоси  $c$ , радиус  $r$  сферы, имеющей тот же объем, что и рассматриваемый эллипсоид. Нетрудно видеть, что (ср. § 19):

$$c=r\left(1-\frac{2}{3}\alpha\right).$$

Поэтому, делая ошибку второго порядка относительно  $\alpha$  и  $\frac{d\alpha}{dr}$  в каждом из трех членов правой части уравнения (4), имеем:

$$\frac{5\omega^2}{8\pi f}=\frac{5\alpha}{3r^3}\int_0^r\kappa d(r^3)-\frac{1}{r^5}\int_0^r\kappa d(\alpha r^5)-\int_r^{r_1}\kappa d\alpha. \tag{5}$$

Через  $r_1$  обозначен радиус сферы равнообъемной с внешней поверхностью сфероида.

В следующих параграфах будет показано, что уравнение Клэро действительно имеет решение, и будут найдены важнейшие свойства определяемой им функции  $\alpha(r)$ . Мы увидим, что достаточно самых общих предположений относительно закона плотностей  $\kappa(r)$ , чтобы уже можно было сделать вполне определенные заключения в отношении сжатия уровенных поверхностей.

Основное допущение, которое мы всегда будем делать в отношении плотности, заключается в предположении, что плотность монотонно убывает от центра сфероида к его внешней поверхности. Только такое допущение совместимо с устойчивостью сфероида.

## § 81. Теоремы Клэро о сжатии уровенных поверхностей

Уравнение (5) предыдущего параграфа, являющееся основой всей теории Клэро, может быть представлено в различных формах.

Покажем, что это уравнение можно заменить линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Вводя среднюю плотность, определяемую равенством (§ 79):

$$D=r^{-3}\int_0^r\kappa d(r^3) \tag{1}$$



и пишем рассматриваемое уравнение так:

$$\frac{5\omega^2}{8\pi f} = \frac{5}{3} \alpha D - r^{-5} \int_0^r \kappa d(\alpha r^5) - \int_r^{r_1} \kappa d\alpha. \quad (2)$$

Умножим теперь обе части на  $r^5$  и продифференцируем по  $r$ . Это даст:

$$\frac{25\omega^2}{8} r^4 = \frac{5}{3} \frac{d(\alpha r^5 D)}{dr} - \kappa \frac{d(\alpha r^5)}{dr} + \kappa r^5 \frac{d\alpha}{dr} - 5r^4 \int_r^{r_1} \kappa d\alpha.$$

Условимся производные по  $r$  обозначать в дальнейшем штрихами. Выполняя здесь дифференцирование и учитывая, что формула (1) дает:

$$D' = -3r^{-1}D + 3r^{-1}\kappa, \quad (3)$$

получим:

$$\frac{15\omega^2}{8\pi f} = (2\alpha + r\alpha') D - 3 \int_r^{r_1} \kappa \alpha' dr. \quad (4)$$

Взяв еще раз производную по  $r$ , будем иметь:

$$\alpha'' + \frac{6\kappa}{rD} \alpha' + \frac{2D'}{rD} \alpha = 0. \quad (5)$$

Это и есть дифференциальное уравнение Клэро.

Учитывая (3), его можно написать так:

$$rD\alpha'' + (6D + 2rD') \alpha' + 2D'\alpha = 0. \quad (6)$$

Воспользуемся этим уравнением для доказательства следующего весьма важного свойства уровенных поверхностей.

**Первая теорема Клэро.** Если плотность вращающейся жидкой массы, находящейся в равновесии, убывает от центра к внешней поверхности, то сжатие уровенных поверхностей возрастает в этом же направлении.

В самом деле, умножив обе части уравнения (6) на  $r^5 D$ , можно его представить в таком виде:

$$\frac{d}{dr} (r^5 D^2 \alpha') = -2r^5 D D' \alpha.$$

Момент инерции относительно оси вращения должен быть наибольшим (§ 46), поэтому  $\alpha > 0$ . С другой стороны, согласно нашему предположению при возрастании  $r$  плотность убывает, следовательно,  $D' < 0$ .

Итак, функция  $r^5 D^2 \alpha'$ , производная которой положительна, должна возрастать. Будучи равной нулю при  $r = 0$  (потому что  $D$  и  $\alpha'$  конечны),

она будет положительна. Отсюда следует, что  $\alpha' > 0$ , т. е. сжатие возрастает от центра планеты до ее внешней поверхности, где достигает наибольшей величины.

**Вторая теорема Клэро.** Если плотность вращающейся жидкой массы, находящейся в относительном равновесии, убывает от центра к внешней поверхности, то сжатие возрастает медленнее, чем  $r^3$ , так что произведение  $\alpha r^{-3}$  убывает.

Для доказательства умножим уравнение (6) на  $r^5$ , что дает:

$$r^6 D\alpha'' + 6r^5 D\alpha' + 2r^6 D'\alpha' + 2r^5 D'\alpha = 0$$

и сравним полученный результат с тождеством:

$$\frac{d}{dr} \left[ r^6 \frac{d(\alpha D)}{dr} \right] = r^6 D\alpha'' + 6r^5 D\alpha' + 6r^5 D'\alpha + 2r^6 D'\alpha' + r^6 D''\alpha.$$

Это позволит написать уравнение (6) в таком виде:

$$\frac{d}{dr} \left[ r^6 \frac{d(\alpha D)}{dr} \right] = 3r^5 \chi' \alpha, \quad (7)$$

ибо (§ 79):

$$3\chi' = 4D' + rD''.$$

Если плотность убывает, то правая часть равенства (7) отрицательна; следовательно функция, стоящая в квадратных скобках, будет убывать; поскольку она равна нулю при  $r=0$ , она будет отрицательной во всем интервале  $(0, r_1)$ . Итак:

$$\frac{d(\alpha D)}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{\alpha}{r^3} \int_0^r \chi \cdot 3r^2 dr \right) < 0,$$

или

$$\left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{\alpha}{r^3} \right) \right] \int_0^r \chi d(r^3) + \frac{3r\alpha}{r} < 0.$$

Второй член слева положителен, также как и интеграл; следовательно:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\alpha}{r^3} \right) < 0,$$

что и доказывает теорему.

Переходя к доказательству третьей теоремы Клэро, которая устанавливает пределы сжатия внешней поверхности, введем в первоначальное уравнение (2) вместо  $\omega^2$  величину:

$$q_1 = \frac{\omega^2 r_1^3}{fM_1} = \frac{3\omega^2}{4\pi f D_1}, \quad (8)$$

где  $D_1$  есть средняя плотность всей жидкой массы, так что

$$D_1 = r_1^{-3} \int_0^{r_1} \chi d(r^3), \quad (9)$$

как это вытекает из формулы (1).

Заметим, что  $q_1$  отличается лишь на величину второго порядка малости от введенного нами ранее (§ 63) отношения центробежной силы на экваторе к силе тяжести, обозначенного через  $q'$ . Указанной на стр. 177 величине  $q'$  соответствует

$$q_1 = 0.003\,449\,96 = 1/289.858.$$

После указанной замены уравнение (2) напишется так:

$$\frac{5}{6} q_1 D_1 = \frac{5}{3} \alpha D - r^{-5} \int_0^r \chi d(\alpha r^5) - \int_r^{r_1} \chi d\alpha. \quad (10)$$

Применим полученное соотношение к внешней поверхности, для которой  $r = r_1$ ,  $D = D_1$ . Это даст:

$$\alpha_1 - \frac{q_1}{2} = \frac{3}{5r_1^5 D_1} \int_0^{r_1} \chi \frac{d(\alpha r^5)}{dr} dr, \quad (11)$$

где через  $\alpha_1$  обозначено сжатие внешней поверхности.

На основании первой теоремы,  $\alpha$  есть величина возрастающая вместе с  $r$ . Производная, стоящая под знаком интеграла, таким образом положительна, и потому

$$\alpha_1 > \frac{q_1}{2}.$$

В § 56 мы видели, что этот нижний предел достигается лишь для модели Роша, когда только что сделанное заключение становится неприменимым.

С другой стороны, воспользовавшись значением  $q_1$ , даваемым равенством (11), имеем:

$$\frac{5}{4} q_1 - \alpha_1 = \frac{3}{2} \alpha_1 - \frac{3}{2r_1^5 D_1} \int_0^{r_1} \chi \frac{d(\alpha r^5)}{dr} dr$$

или, учитывая (9):

$$\frac{5}{4} q_1 - \alpha_1 = \frac{3}{2r_1^5 D_1} \int_0^{r_1} \chi \frac{d}{dr} (\alpha_1 r_1^3 r^3 - \alpha r^5) dr. \quad (12)$$

Легко видеть, что стоящий здесь интеграл представляет существенно положительную величину; так что

$$\alpha_1 < \frac{5}{4} q_1.$$

В самом деле, функция

$$\alpha_1 r_1^2 r^3 - \alpha r^5$$

положительна в интервале  $(0, r_1)$  и обращается в нуль на концах этого интервала. Допуская, для простоты, существование производной  $\chi'$ , по формуле интегрирования по частям находим, что рассматриваемый интеграл равен:

$$- \int_0^{r_1} (\alpha_1 r_1^2 r^3 - \alpha r^5) \chi' dr,$$

т. е. величине существенно положительной, поскольку  $\chi' < 0$ .

Между прочим, отсюда следует, что сжатие достигает своей верхней границы  $\alpha_1 = \frac{5}{4} q_1$  для случая однородной жидкой массы, что согласуется с результатом, полученным в § 63.

Приходим к следующему выводу.

**Третья теорема Клэро.** *Сжатие внешней поверхности вращающейся жидкой массы, находящейся в состоянии относительного равновесия, заключается (с принятой нами точностью) в пределах:*

$$\frac{1}{2} q_1 \leq \alpha_1 \leq \frac{5}{4} q_1,$$

каков бы ни был закон плотностей. Нижний предел достигается сжатием в случае, когда вся масса сосредоточена в центре инерции, верхний — в случае однородной жидкости.

**Примечание.** Если известна поверхностная плотность  $\chi_1$ , то из соотношения (11) можно получить более высокую нижнюю границу сжатия, нежели указанная Клэро.

В самом деле:

$$\int_0^{r_1} \chi \frac{d(\alpha r^5)}{dr} dr > \chi_1 \int_0^{r_1} \frac{d(\alpha r^5)}{dr} dr = \chi_1 \alpha_1 r_1^5,$$

поэтому

$$\alpha_1 - \frac{1}{2} q_1 > \frac{3\chi_1 \alpha_1}{5D_1}$$

и, следовательно:

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\chi_1}{D_1}\right) > \frac{1}{2} q_1.$$

Для Земли можно принять:

$$x_1 = 2.70; \quad D_1 = 5.52;$$

$$x_1/D_1 = 0.49,$$

что дает

$$\alpha_1 > 0.7q_1 = 1/320$$

вместо нижней границы  $1/577$ , получаемой из теоремы Клэро.

## § 82. Дополнения, вносимые теорией прецессии в учение о фигуре Земли

Явление прецессии, обусловленное свойствами внешнего гравитационного поля Земли, тесно связано с ее фигурой, т. е. с распределением земных масс.

Таким образом, использование определенной из наблюдений величины прецессионной постоянной позволяет существенно дополнить теорию Клэро, являющуюся, по существу, учением о внутреннем гравитационном поле Земли.

В теории вращения Земли показывается, что величина лунно-солнечной прецессии выражается формулой:

$$p_1 = \frac{3f}{2\omega} \left( \frac{M_S}{a_S^3} + \frac{M_L}{a_L^3} \right) H \cos \varepsilon, \quad (1)$$

где

$$H = \frac{2C - A - B}{2C} \quad (2)$$

есть так называемое *динамическое сжатие Земли* (через  $A \leq B \leq C$  обозначены главные моменты инерции).

В формуле (1)  $f$  и  $\omega$  имеют прежние значения; через  $M_S$  и  $M_L$  обозначены массы Солнца и Луны, а через  $a_S$  и  $a_L$  — большие полуоси их орбит; наконец,  $\varepsilon$  — наклон эклиптики к экватору. Члены, зависящие от эксцентриситетов солнечной и лунной орбит, в этой формуле для простоты опущены.

Формула (1) показывает, что определив из наблюдений  $p_1$ , можно найти  $H$ .

Таким именно образом де Ситтер (см. стр. 177), приняв

$$p_1 = 50''.3938 \text{ (тропический год; эпоха 1900.0),}$$

$$M_L = 1/81.53 \text{ массы Земли, —}$$

получил (1938):

$$H = 0.003\,279\,423 = 1/304.93.$$

Но наблюдения Эроса в оппозицию 1930—31 годов для массы Луны дали существенно отличное значение, а именно:

$$1/81.271 \pm 0.021.$$

Приняв эту величину и сохранив только что указанное значение  $p_1$ , получим:

$$\begin{aligned} H &= 0.003\,272\,37 \pm 0.000\,000\,59 = \\ &= 1/305.59. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражение (2) можно упростить. В самом деле, изучение движения земных полюсов показывает, что моменты инерции  $A$  и  $B$ , относящиеся к осям инерции, лежащим в плоскости экватора, не могут заметно между собой отличаться. Во всяком случае

$$\frac{B-A}{C} < \frac{1}{3\,000\,000}.$$

Поэтому, не делая заметной ошибки, можно положить:

$$H = \frac{C-A}{C}.$$

Таким образом, пользуясь формулой § 79 (17), получим:

$$H = \frac{\int_0^{r_1} x d(\alpha r^5)}{\int_0^{r_1} x d(r^3)}.$$

Сопоставление этого выражения с равенством (11) предыдущего параграфа дает:

$$\alpha_1 - \frac{q_1}{2} = \frac{3H}{5r_1^5 D_1} \int_0^{r_1} x d(r^5) \quad (4)$$

или

$$\int_0^{r_1} x d(r^5) = \frac{5r_1^5}{3H} \left( \alpha_1 - \frac{q_1}{2} \right) \int_0^{r_1} x d(r^3), \quad (5)$$

поскольку средняя плотность выражается формулой:

$$D_1 = r_1^{-3} \int_0^{r_1} x d(r^3).$$

**Формула Даламбера.** Весьма важное соотношение (5), связывающее геометрическое сжатие внешней поверхности планеты с ее динамическим сжатием, можно написать так:

$$\alpha_1 = \frac{q_1}{2} + \frac{3}{5} H \frac{\int_0^1 \kappa d(r^5)}{\int_0^1 \kappa d(r^3)}, \quad (6)$$

если за единицу длины принять  $r_1$ .

Это равенство, впервые полученное Даламбером в его „Исследованиях по прецессии равноденствий“ (1749), уместно назвать *формулой Даламбера*.

Так как стоящее справа отношение двух интегралов может быть вычислено достаточно точно даже при весьма ограниченных сведениях относительно закона плотностей  $\kappa(r)$ , то формула Даламбера позволяет (как будет показано в §§ 86—87) находить сжатие Земли  $\alpha_1$  по ее динамическому сжатию  $H$ , сравнительно легко выводимому из наблюдений.

**Верхний предел сжатия Земли.** Соотношение (6) позволило Даламберу заключить, что

$$\alpha_1 < \frac{q_1}{2} + \frac{3}{5} H,$$

поскольку стоящее справа отношение двух интегралов меньше единицы. В самом деле, внутренность Земли может находиться в устойчивом равновесии лишь в том случае, когда плотность убывает от центра к поверхности. Но если  $\kappa' < 0$ , то:

$$\int_0^1 \kappa d(r^5) - \int_0^1 \kappa d(r^3) = \int_0^1 (r^3 - r^5) \kappa' dr < 0.$$

С указанными выше значениями  $q_1$  и  $H$  неравенство Даламбера дает:

$$\alpha < 1/278.$$

Такая верхняя граница сжатия поверхности Земли, даваемая прецессионной постоянной в предположении, что  $\kappa' < 0$ . Если этого предположения не делать, то формула (6) позволяет только утверждать, что

$$\alpha_1 < \frac{q_1}{2} + H = 1/200.$$

**Условия, которым должна удовлетворять плотность внутри Земли.** В системе постоянных де Ситтера (стр. 177):

$$\alpha_1 = 1/296.753 = 0.003\,36981; \quad H = 0.003\,27942;$$

$$q_1 = 1/289.861 = 0.003\,44993;$$

поэтому равенство (5) дает:

$$\int_0^1 \chi d(r^5) = 0.8359 \int_0^1 \chi d(r^3). \quad (7)$$

Если для средней плотности Земли принять число

$$\int_0^1 \chi d(r^3) = 5.52, \quad (8)$$

то это соотношение даст:

$$\int_0^1 \chi d(r^5) = 4.61. \quad (9)$$

Итак, допуская вместе с Клэро, что внутренность Земли находится в гидростатическом равновесии, и учитывая те заключения, к которым приводит теория прецессии, мы видим, что закон плотностей для Земли должен удовлетворять условию (7) или же условиям (8) и (9), если мы считаем среднюю плотность Земли достаточно хорошо известной.

Аналогичное условие может быть указано и для функции  $D(r)$ , определяемой равенством

$$r^3 D = 3 \int_0^r \chi r^2 dr,$$

которая представляет среднюю плотность внутри сферы радиуса  $r$ .

В самом деле, умножив это равенство на  $d(r^2)$  и интегрируя от 0 до  $r_1$ , получим:

$$\int_0^{r_1} r^3 D d(r^2) = r_1^5 D_1 - 3 \int_0^{r_1} \chi r^4 dr,$$

или

$$2 \int_0^{r_1} D r^4 dr = 3 r_1^3 \int_0^{r_1} \chi r^2 dr - 3 \int_0^{r_1} \chi r^4 dr.$$

Отсюда, делая  $r_1 = 1$  и пользуясь соотношением (7):

$$\int_0^1 D r^4 dr = 0.7477 \int_0^1 \chi r^2 dr. \quad (10)$$



Если же для средней плотности Земли взять  $D_1 = 5.52$ , то это равенство дает:

$$\int_0^1 D d(r^5) = 6.88. \quad (11)$$

Полученные формулы позволяют, как будет показано в следующих параграфах, сделать ряд важных заключений относительно характера изменения плотности внутри Земли.

### § 83. Границы плотности, вытекающие из предположения, что плотность монотонно возрастает к центру

Функцию  $\kappa(r)$ , представляющую плотность в точках уровенной поверхности, соответствующей параметру  $r$ , будем предполагать монотонно убывающей от значения  $\kappa_0$  при  $r = 0$  до значения  $\kappa_1$  при  $r = 1$ . Для упрощения рассуждений будем считать, что эта функция имеет непрерывную производную. Заметим, что это предположение не является существенным ограничением, с точки зрения приложения к изучению внутренности планеты, так как любое реальное распределение плотностей можно с достаточной точностью аппроксимировать функцией, имеющей непрерывную производную.

Итак, будем предполагать, что в интервале  $0 \leq r \leq 1$  имеет место неравенство

$$\kappa' < 0. \quad (1)$$

Полагая для краткости:

$$\Delta = \Delta_\kappa = \int_0^1 \kappa d(r^3); \quad \Gamma = \Gamma_\kappa = \int_0^1 \kappa d(r^5), \quad (2)$$

для Земли будем иметь, как было показано в предыдущем параграфе:

$$\Delta = D_1 = 5.52, \quad \Gamma = 4.61. \quad (3)$$

Кроме этих двух условий, будем считать еще известной поверхностную плотность  $\kappa_1 = 2.70$ .

Докажем, прежде всего, следующую лемму: если для двух различных законов плотностей  $\kappa = \lambda(r)$  и  $\kappa = \mu(r)$  интегралы (2) равны, так что

$$\Delta_\lambda = \Delta_\mu \text{ и } \Gamma_\lambda = \Gamma_\mu, \quad (4)$$

то уравнение

$$\lambda(r) = \mu(r) \quad (5)$$

имеет в интервале  $(0, 1)$  по крайней мере два корня.

В самом деле, равенства (4) невозможны, если уравнение (5) не имеет ни одного корня в рассматриваемом интервале. Допустим, что оно имеет только один корень  $r = a$ . Так как

$$\Delta_\lambda - \Delta_\mu = 3 \int_0^1 (\lambda - \mu) r^2 dr, \quad \Gamma_\lambda - \Gamma_\mu = 5 \int_0^1 (\lambda - \mu) r^4 dr,$$

то

$$5a^2(\Delta_\lambda - \Delta_\mu) - 3(\Gamma_\lambda - \Gamma_\mu) = 15 \int_0^1 (\lambda - \mu) (a^2 - r^2) r^2 dr.$$

Но произведение  $(\lambda - \mu)(a^2 - r^2)$  должно иметь одинаковый знак в интервалах  $(0, a)$  и  $(a, 1)$ , а потому левая часть не может равняться нулю.

Чтобы найти границы, в которых заключается плотность  $x$  в точке  $r = a$  интервала  $(0, 1)$ , рассмотрим следующий закон плотностей:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_0 \text{ для } 0 \leq r < a, \\ \mu &= \mu_1 \text{ для } a < r \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где постоянные  $\mu_0$  и  $\mu_1$  выбираются так, чтобы удовлетворялись уравнения (2).

Эти уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 a^3 + \mu_1 (1 - a^3) &= \Delta, \\ \mu_0 a^5 + \mu_1 (1 - a^5) &= \Gamma, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= \frac{(1 - a^5) \Delta - (1 - a^3) \Gamma}{a^3 - a^5}, \\ \mu_1 &= \frac{\Gamma - a^2 \Delta}{1 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Легко видеть, что для каждого значения  $r = a$  имеют место неравенства:

$$\mu_0 > x > \mu_1, \quad (9)$$

как это показано на рис. 17.

В самом деле, допустим, что для  $r = a$  было бы  $x > \mu_0$ . Тогда для закона плотностей (6) мы имели бы  $x > \mu$  от  $r = 0$  до той точки  $r = b$ , в которой  $x = \mu_1$ , а при дальнейшем возрастании  $r$  имели бы  $x < \mu$ . Таким образом, уравнение (5) имело бы только один корень, что противоречит только что доказанной лемме.

Рассмотрим подробнее функции  $\mu_0(a)$  и  $\mu_1(a)$ , ограничивающие, в силу (9), плотность в точке  $a$ . Выражения (8) можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= \Delta + (\Delta - \Gamma) \left( \frac{1}{a + a^3} + \frac{1}{a^3} \right), \\ \mu_1 &= \Delta - \frac{\Delta - \Gamma}{1 - a^2}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

откуда видно, что обе эти функции монотонно убывают от  $a = 0$  до  $a = 1$ .

Так как  $x > x_1$ , то нижняя граница  $\mu_1$  представляет интерес только до тех пор, пока  $\mu_1 \geq x_1$ , т. е. при  $a \leq \alpha$ , где  $\alpha$  определяется равенством

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Gamma - x_1}{\Delta - x_1}} = 0.823. \quad (11)$$

В точке  $a = \alpha$  мы имеем нижнюю границу  $\mu_1 = x_1$  и верхнюю границу

$$\mu_0(\alpha) = x_1 + \frac{(\Delta - x_1)^{3/2}}{(\Gamma - x_1)^{3/2}} = 7.76. \quad (12)$$

Этот случай представлен на рис. 18. При дальнейшем увеличении  $a$  мы имели бы случай, изображенный на рис. 19.

Эта последняя величина является также, как нетрудно убедиться, нижней границей плотности в центре Земли. В самом деле, если бы было  $x_0 < \mu_0(a)$ , то мы имели бы  $x < \mu$  при  $0 < r < \alpha$  и  $x > \mu$  при  $\alpha < r < 1$ , что невозможно, ибо означало бы, что уравнение (5) имеет только один корень (рис. 18).

Если положить  $\mu_1 = x_1$  только во втором из условий (7), то для  $\mu_0$  получим такую величину:

$$\mu'_0(a) = x_1 + \frac{\Gamma - x_1}{a^5}. \quad (13)$$

Легко проверить, что

$$\mu'(a) = \mu_0(a),$$

откуда ясно, что в интервале  $\alpha < a < 1$  имеем:

$$\mu'_0(a) < \mu_0(a).$$

Но  $\mu'_0(a)$  также является верхним пределом плотности. В самом деле, если допустить, что  $x(a) > \mu'_0(a)$ , то при  $0 < r < a$  мы будем иметь также

$$x(r) > \mu'_0(a),$$

а в интервале  $a < r < 1$  будем иметь:

$$x(r) > \mu_1 = x_1.$$

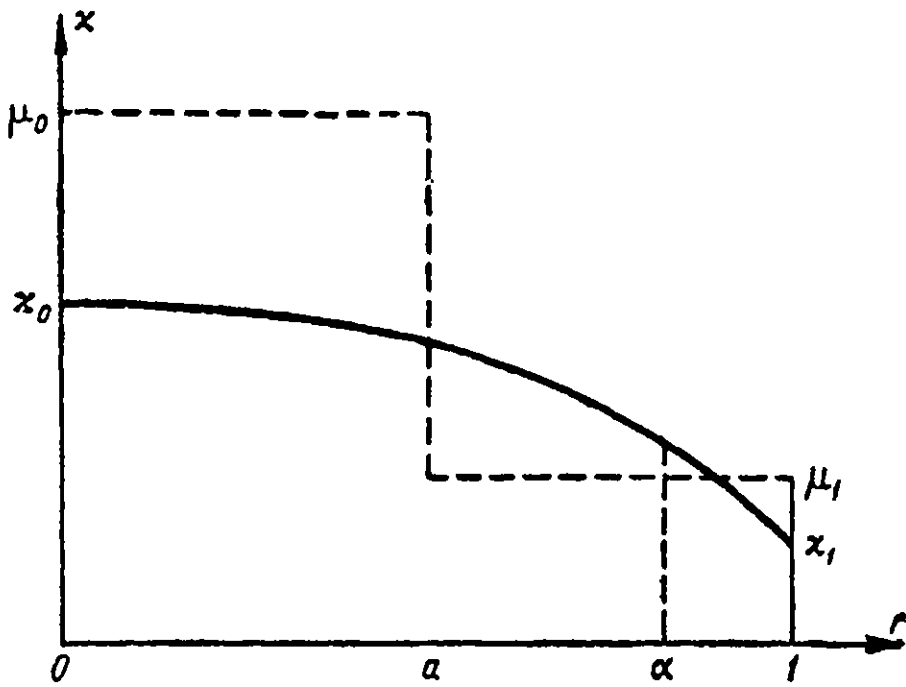


Рис. 17.

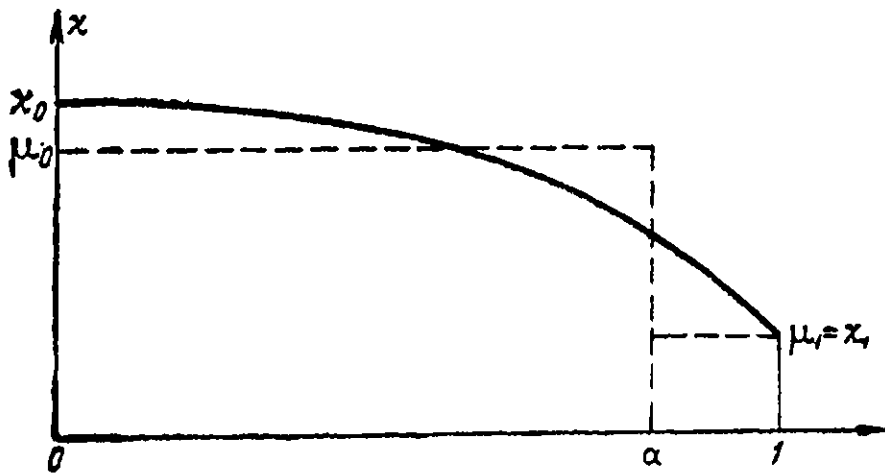


Рис. 18.

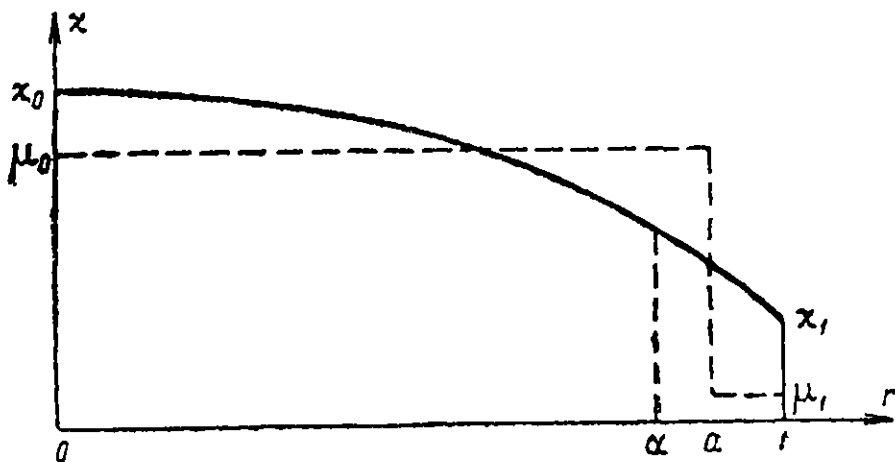


Рис. 19.

Поэтому для плотности  $\mu$ , определяемой равенствами (6), в которых  $\mu_0$  заменено через  $\mu'_0$ , мы имели бы  $\Gamma_\mu = \Gamma_x$ , что противоречит предположению.

Итак, в интервале  $\alpha < a < 1$  равенство (13) дает лучшую верхнюю границу, нежели формулы (10).

В табл. 5 даны границы плотности Земли, вычисленные по формулам этого параграфа. Верхняя граница вычислена по формуле (10) в интервале  $0 \leq a \leq \alpha = 0.823$  и по формуле (13) в интервале  $\alpha \leq a \leq 1$ . Нижняя граница в первом интервале дается формулой (10); что же касается до второго интервала, то тут поверхностная плотность  $x_1 = 2.70$  дает более высокую нижнюю границу.

Таблица 5

Границы плотности внутри Земли  
( $x' < 0$ )

$r$	Верхняя граница	Нижняя граница	$r$	Верхняя граница	Нижняя граница
0.0		4.61 (7.76)	0.8	7.93	2.99
0.2	123	4.57	0.823	7.76	2.70
0.4	21.4	4.44	0.9	5.93	2.70
0.6	10.7	4.10	1.0	4.61	2.70
0.7	8.94	3.73			

При помощи аналогичных рассуждений могут быть доказаны ниже-следующие неравенства:

$$D < x_1 + \frac{\Delta - x_1}{a^3}; \quad \frac{D}{x} < 1 + \frac{1}{a^3} \left( \frac{\Delta}{x_1} - 1 \right);$$
$$D < 2\mu_0 - \mu_1; \quad \frac{D}{x} < \frac{\mu_0}{\mu_1},$$

дающие верхнюю границу средней плотности.

§ 84. Внутреннее строение Земли

Теория Клэро дает возможность найти форму поверхностей равной плотности внутри Земли, если известен закон плотностей  $x(r)$ . Но все, что закон всемирного тяготения позволяет узнать относительно функции  $x(r)$ , сводится к тем следствиям, какие могут быть получены из равенств:

$$\int_0^1 x d(r^3) = 5.52; \quad \int_0^1 x d(r^5) = 4.61; \quad x(1) = 2.70. \quad (1)$$

В предыдущем параграфе мы видели, что, присоединив сюда еще гипотезу о монотонном убывании плотности от центра к поверхности ( $\chi' < 0$ ), уже можно получить некоторое представление о границах плотности на различных глубинах.

Стилтес и Радо, которые больше всего сделали для разработки этого вопроса, показали, что можно идти и дальше.<sup>1</sup> Если предположить, что плотность убывает ускоренно, так что кривая,

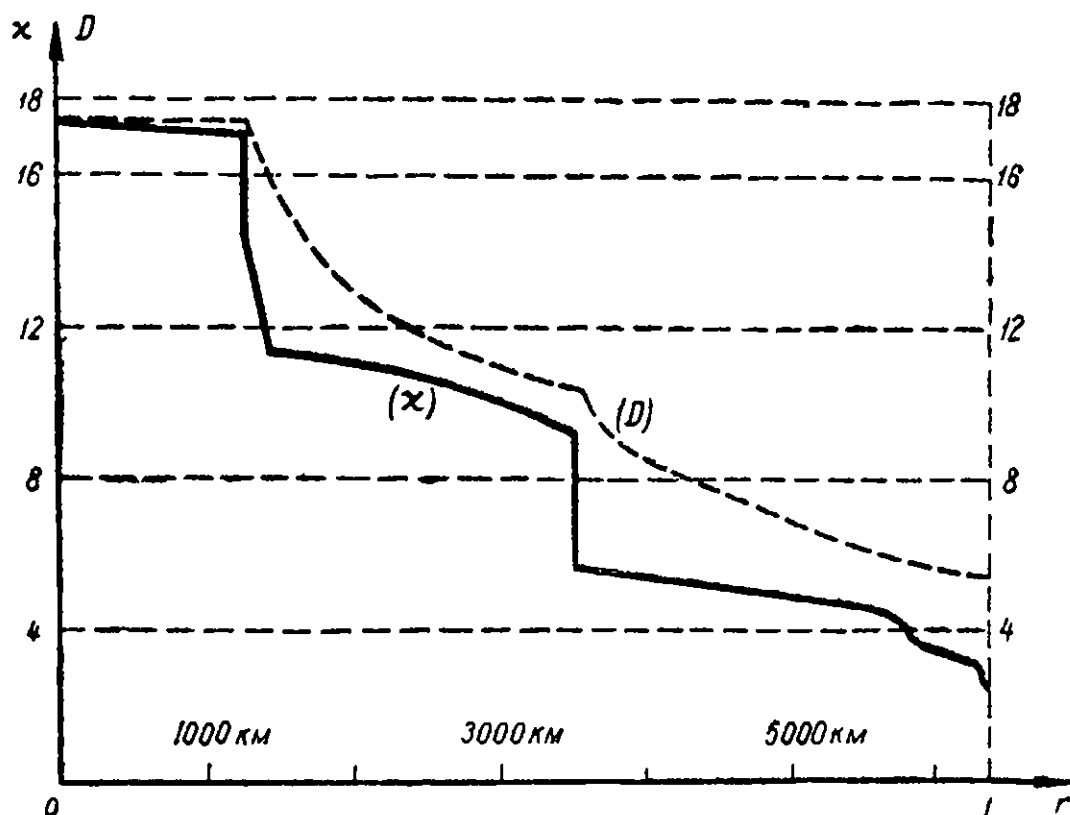


Рис. 20.

представляющая функцию  $\chi(r)$ , везде вогнута в сторону оси абсцисс, то можно получить значительно более тесные границы для плотности. Например, для Земли получается, что плотность в центре должна заключаться между 10.0 и 13.7.

Однако совокупность геофизических данных заставляет думать, что кривая плотности для Земли имеет примерно вид, изображенный на рис. 20. Таким образом, условие вогнутости здесь определенно не выполняется и это делает неприменимыми выводы, построенные на предположении, что не только  $\chi' < 0$ , но и  $\chi'' < 0$ .

По той же причине мы не будем останавливаться на эмпирических формулах, предложенных Лежандром, Рошем, Липшицем и Леви для

<sup>1</sup> T. J. Stieltjes, Note sur la densité de la Terre, Bull. astr., 1, 465—467, 1884.

T. J. Stieltjes, Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre, Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, 19, 435—460, 1884.

R. Radau, Sur la loi des densités à l'intérieur de la Terre, Bull. astr., 7, 76—92, 1890.

плотности Земли.<sup>1</sup> Все эти формулы, содержащие (за исключением формулы Лежандра) достаточное число параметров для выполнения трех указанных выше условий, выбирались таким образом, чтобы облегчить интегрирование уравнения Клэро. Но они приводят к кривым, отличным по своему характеру от кривой, изображенной на рис. 20.

Теорема Стокса (§ 53) объясняет, почему какие бы то ни было заключения относительно распределения плотности внутри Земли могут быть сделаны лишь при помощи некоторых дополнительных предположений ( $\chi' < 0$  или  $\chi' < 0$ ,  $\chi'' < 0$  и т. п.). В силу этой теоремы силовое поле Земли во внешнем пространстве вполне определяется внешней поверхностью Земли, ее массой и угловой скоростью вращения. Но масса и внешняя поверхность определяют среднюю плотность, что дает первое из равенств (1); второе из этих равенств основывается на влиянии силового поля Земли на движение Луны и Солнца.

Таким образом, оба эти равенства остаются неизменными при любом перераспределении масс, совместимым с условиями теоремы Стокса. Понятно поэтому, что равенства (1) сами по себе дают лишь очень мало указаний относительно внутреннего строения Земли.

### § 85. Преобразование Радо. Некоторые свойства параметра сжатия

Уравнению Клэро можно придать форму линейного однородного уравнения второго порядка (§ 81):

$$rD\alpha'' + (6D + 2rD')\alpha' + 2D'\alpha = 0. \quad (1)$$

Решение такого уравнения приводится, как известно, к решению уравнения первого порядка, если за новую неизвестную принять логарифмическую производную  $\alpha$ . Но в данном случае та же цель может быть достигнута другой и притом более выгодной для дальнейшего подстановкой: нужно, следуя Радо, за новую неизвестную принять функцию

$$\eta = \frac{r\alpha'}{\alpha} = \frac{d \ln \alpha}{d \ln r}. \quad (2)$$

В самом деле, это равенство дает:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{r} \eta; \quad \alpha'' = \frac{\alpha}{r^2} (r\eta' + \eta^2 - \eta),$$

вследствие чего уравнение (1) принимает вид:

$$r\eta' + \eta^2 + 5\eta - 2\zeta(1 + \eta) = 0, \quad (3)$$

<sup>1</sup> Подробный разбор всех этих гипотез о законе изменения плотности с глубиной можно найти в главе XV трактата Тиссерана: F. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, 1891.

где

$$\zeta = -\frac{rD'}{D}$$

есть параметр конденсации (§ 79).

Введенную Радо величину (2) будем называть *параметром сжатия*.

Формулы § 79 (6) и (7) показывают, что  $\zeta = 0(r)$  при  $r \rightarrow 0$ . Поэтому, на основании известных свойств особых точек дифференциальных уравнений первого порядка, мы можем утверждать, что уравнение (3) имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее условию:  $\eta = 0$  при  $r = 0$ . Именно это решение мы и будем иметь в виду, говоря о параметре сжатия.

Отметим некоторые свойства функции  $\eta$ , ограничиваясь во всем дальнейшем рассмотрении этой функции лишь в интервале  $0 \leq r \leq 1$ .

Первая теорема Клэро (§ 81) показывает, что  $\eta > 0$ . Вторая теорема Клэро дает:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\alpha}{r^3} \right) = \frac{\alpha}{r^4} \left( \frac{r}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} - 3 \right) < 0,$$

так что  $\eta < 3$ .

Итак, во всем рассматриваемом нами интервале

$$0 \leq \eta < 3. \quad (4)$$

Чтобы найти величину  $\eta_1 = \eta(1)$ , соответствующую внешней поверхности планеты, обратимся к уравнению Клэро, написанному в форме § 81 (10), а именно:

$$\frac{5}{3} \alpha D - r^{-5} \int_0^r \alpha d(\alpha r^5) - \int_r^1 \alpha d\alpha = \frac{5}{6} q_1 D_1. \quad (5)$$

Продифференцировав это соотношение по  $r$ , получим, если учесть § 79 (6):

$$\frac{1}{3} r \alpha' D - \alpha D + r^{-5} \int_0^r \alpha d(\alpha r^5) = 0.$$

Почленное сложение двух последних равенств дает:

$$\frac{1}{3} (r \alpha' + 2\alpha) D - \int_r^1 \alpha d\alpha = \frac{5}{6} q_1 D_1. \quad (6)$$

При  $r = 1$  имеем:

$$\alpha'_1 + 2\alpha_1 = \frac{5}{2} q_1,$$



откуда:

$$\eta_1 = \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} = \frac{5}{2} \frac{q_1}{\alpha_1} - 2. \quad (7)$$

Для однородной планеты  $\alpha_1 = \frac{5}{4} q_1$ , следовательно,  $\eta_1 = 0$ ; для модели Роша  $\alpha_1 = \frac{1}{2} q_1$ , что дает  $\eta_1 = 3$ .

Для Земли, полагая  $q_1 = 1/289.861$ ,  $\alpha_1 = 1/296.753$ , получим:

$$\eta_1 = 0.55944.$$

**Теорема Калландро.** Если в интервале  $0 < r < r_0$  плотность удовлетворяет условиям:

$$\kappa' < 0, \quad \kappa'' < 0,$$

то  $\eta' > 0$  и параметр сжатия  $\eta$  монотонно возрастает в этом интервале от 0 до  $\eta_0 = \eta(r_0)$ .

Равенство (2) дает:

$$\eta' = \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{r}{\alpha} \left( \alpha'' - \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} \right).$$

Так как  $\alpha' > 0$ , то при достаточно малых значениях  $r$  эта производная положительна и функция  $\eta$  возрастает. Производная  $\eta'$  может обратиться в нуль лишь при таком значении  $r$ , которое делает вторую производную  $\eta''$  отрицательной.

Дифференцирование уравнения (3) дает, если положить  $\eta' = 0$ :

$$r\eta'' = 2(1 + \eta)\zeta'.$$

Поэтому при значении  $r$ , обращающем в нуль  $\eta'$ , должно быть  $\zeta' < 0$ .

Но

$$\zeta = -\frac{rD'}{D} = \frac{3(D - \kappa)}{D} = \frac{\kappa r^3 - 3 \int_0^r \kappa r^2 dr}{\int_0^r \kappa r^2 dr}$$

или

$$\zeta = \frac{-\int_0^r r^3 \kappa' dr}{\int_0^r \kappa r^2 dr}.$$

Поэтому, после дифференцирования:

$$\left[ \int_0^r \kappa r^2 dr \right]^2 \zeta' = \kappa r^2 \int_0^r \kappa' r^3 dr - r^3 \kappa' \int_0^r \kappa r^2 dr$$

Если в каждом из двух членов правой части выполнить интегрирование по частям, то справа получим выражение:

$$-\frac{1}{12} r^6 \chi \chi' + \frac{1}{3} r^3 \chi' \int_0^r \chi' r^3 dr - \frac{1}{4} r^2 \chi \int_0^r \chi'' r^4 dr,$$

все члены которого положительны, ибо  $\chi' < 0$ ,  $\chi'' < 0$ . Таким образом,  $\zeta' > 0$ .

Полученное противоречие доказывает, что производная  $\eta'$  должна оставаться положительной во всем рассматриваемом интервале.

Примечание. Каллаидро принадлежит также доказательство нескольких полезных неравенств, заключающих величину  $\eta$ .

Если  $\eta' > 0$ , то уравнение (3) дает:

$$\zeta = -\frac{rD'}{D} > \eta \frac{5+\eta}{2+2\eta}. \quad (8)$$

Отсюда, принимая во внимание § 79 (8), получим:

$$\frac{\chi}{D} < \frac{6+\eta-\eta^2}{6+6\eta} = \frac{3-\eta}{3} \frac{2+\eta}{2+2\eta}. \quad (9)$$

Применение этого неравенства к внешней поверхности Земли дает:

$$\chi_1 < 3.69,$$

что хорошо согласуется с общепринятым значением  $\chi_1 = 2.70$ .

Если не опираться на монотонное возрастание параметра  $\eta$ , то неравенства (8) и (9) можно заменить такими:

$$\zeta > \eta; \quad \frac{\chi}{D} < \frac{3-\eta}{3}. \quad (10)$$

В самом деле, исключение  $q_1 D_1$  из соотношений (5) и (6) дает:

$$D(r^6 \alpha' - 3r^5 \alpha) + 3 \int_0^r \chi d(\alpha r^5) = 0.$$

Делая здесь интегрирование по частям и замечая, что  $r\alpha' = \alpha\eta$ , найдем:

$$D\alpha r^5 (\eta - 3) + 3\alpha r^5 \chi - 3 \int_0^r \alpha r^5 \chi' dr = 0.$$

Так как  $\chi' < 0$ , то

$$D(\eta - 3) + 3\chi < 0,$$

откуда и вытекает справедливость неравенств (10).

### § 86. Уравнение Радо. Сжатие Земли, даваемое теорией Клэро.

Из уравнения Клэро, написанного в форме § 85(3) или:

$$(r\eta' + \eta^2 + 5\eta) D + 2r(1 + \eta) D' = 0, \quad (1)$$

Радо получил весьма важное соотношение, определяющее сжатие внешней поверхности планеты.

Так как

$$\frac{d}{dr} (D\sqrt{1+\eta}) = D'\sqrt{1+\eta} + \frac{D\eta'}{2\sqrt{1+\eta}},$$

то, разделив предыдущее уравнение на  $2r\sqrt{1+\eta}$ , мы можем написать его так:

$$\frac{d}{dr} (D\sqrt{1+\eta}) + \frac{\eta^2 + 5\eta}{2r\sqrt{1+\eta}} D = 0.$$

Замечая, далее, что

$$\frac{d}{dr} (r^5 D \sqrt{1+\eta}) = 5r^4 D \sqrt{1+\eta} + r^5 \frac{d}{dr} (D \sqrt{1+\eta}),$$

получим:

$$\frac{d}{dr} (r^5 D \sqrt{1+\eta}) = 5r^4 DF(\eta),$$

где

$$F(\eta) = \frac{10 + 5\eta - \eta^2}{10\sqrt{1+\eta}}. \quad (2)$$

Интегрирование последнего равенства от  $r=0$  до  $r=1$  дает:

$$D_1 \sqrt{1+\eta_1} = 5 \int_0^1 DF(\eta) r^4 dr. \quad (3)$$

Эту весьма важную для теории фигур планет форму уравнения Клэро будем называть *уравнением Радо* (1885).

Уравнение (3) имеет большое значение потому, что оно позволяет весьма точно оценить отношение интегралов в формуле Даламбера (§ 82):

$$\alpha_1 = \frac{q_1}{2} + \frac{3}{5} H \frac{\Gamma}{D_1}, \quad (4)$$

где

$$D_1 = \int_0^1 \kappa d(r^3), \quad \Gamma = \int_0^1 \kappa d(r^5).$$

В самом деле, уравнение (3) можно написать так:

$$\frac{1}{D_1} \int_0^1 DF(\eta) d(r^5) = \sqrt{1 + \eta_1}. \quad (5)$$

С другой стороны, если обе части равенства

$$r^3 D = 3 \int_0^r \kappa r^2 dr$$

умножить на  $d(r^2)$  и проинтегрировать от 0 до 1, то будем иметь:

$$2 \int_0^1 Dr^4 dr = \int_0^1 \kappa d(r^3) - 3 \int_0^1 \kappa r^4 dr = D_1 - \frac{3}{5} \Gamma,$$

или

$$\frac{1}{D_1} \int_0^1 D d(r^5) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \frac{\Gamma}{D_1}. \quad (6)$$

Левая часть равенства (5) отличается от левой части последнего соотношения лишь присутствием множителя  $F(\eta)$ . Но легко видеть, что эта функция в пределах интегрирования очень близка к единице. Ее значения, для всего интервала изменения параметра  $\eta$  (§ 85), даны в табл. 6.

Таблица 6

$\eta$	$F(\eta)$	$\eta$	$F(\eta)$
0	1.00000	0.5594	0.99971
0.3333	1.00074	1	0.98995
0.5000	1.00021	2	0.92376
0.5278	1.00000	3	0.80000

Исследование выражения (2) показывает, что функция  $F(\eta)$ , равная единице при  $\eta=0$  и  $\eta=5-2\sqrt{5}=0.5278\dots$ , имеет указанный в таблице единственный максимум при  $\eta=1/3$ .

Для Земли параметр сжатия не может сколько-нибудь значительно превзойти  $\eta_1=0.5594\dots$  (§ 85). Поэтому, положив, на основании первой теоремы о среднем значении:

$$\int_0^1 DF(\eta) d(r^5) = F_0 \int_0^1 D d(r^5), \quad (7)$$

$$F_0 = F(\eta_0),$$

где  $0 < \eta_0 < \eta_1$ , мы можем быть уверены, что

$$1 < F_0 < 1.00074$$

при всяком сколько-нибудь правдоподобном распределении плотностей внутри Земли. Более того, имеющиеся сведения о внутреннем строении позволяют легко сузить этот интервал. Можно, например, заменить его таким:

$$1 < F_0 < 1.00040. \quad (8)$$

Формулы (5), (6) и (7) дают:

$$\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{F_0} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \frac{\Gamma}{D_1},$$

откуда

$$\frac{\Gamma}{D_1} = \frac{5}{3} \left( 1 - \frac{2}{5F_0} \sqrt{1+\eta_1} \right). \quad (9)$$

Подставим это выражение в формулу Даламбера (4). Учитывая еще, что  $\eta_1$  дается равенством § 85 (7), окончательно получим:

$$F_0 \left( 1 - \frac{\alpha_1 - \frac{1}{2} q_1}{H} \right) = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{2} \frac{q_1}{\alpha_1} - 1}. \quad (10)$$

Так как входящая сюда неизвестная величина  $F_0$  лишь в очень слабой степени зависит от распределения плотностей внутри Земли, то это уравнение может служить для вычисления сжатия  $\alpha_1$  по известному динамическому сжатию  $H$ .

Пусть, например:

$$q_1 = 0.003\ 4499; \quad H = 0.003\ 2724$$

(см. стр. 229 и 230). Уравнение (10) дает следующую табличку:

если $1/\alpha_1 = 296$ ,	то $F_0 = 1.00754$
$= 297$	$= 1.00328$
$= 298$	$= 0.99913$
$= 299$	$= 0.99506$ .

Отсюда видно, что интервалу (8) соответствует такой интервал для сжатия:

$$1/297.8 < \alpha_1 < 1/296.8.$$

При помощи тех данных о распределении плотностей внутри Земли, которые будут приведены в следующем параграфе, легко убедиться, что  $F_0 = 1.00016$ , а потому:

$$\alpha_1 = 1/297.40.$$

Таково сжатие, вытекающее из теории гидростатического равновесия, развитой с точностью до величин первого порядка и принятых нами значений постоянных.

В следующем параграфе будет показано, что это значение сжатия практически совпадает с тем, что дает теория гидростатического равновесия при учете величин второго порядка.

### § 87. Дальнейшее развитие теории Клэро. Сжатие Земли, даваемое теорией гидростатического равновесия

В предыдущих параграфах мы видели, к каким важным следствиям приводит теория Клэро даже в том случае, когда она развита только до членов первого порядка. Сам Клэро сделал еще один важный вывод из своей теории, получив формулу:

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi), \quad (1)$$

устанавливающую закон изменения силы тяжести с широтой, и формулу

$$\beta + \alpha_1 = \frac{5}{4} q', \quad (2)$$

связывающую коэффициент  $\beta$  с поверхностным сжатием планеты  $\alpha_1$ . При этом оказалось, что обе эти формулы являются совершенно независимыми от закона плотностей. Это обстоятельство, казавшееся столь удивительным, было полностью объяснено сто лет спустя, когда Стокс установил свою знаменитую теорему (§ 53).

Показав, что внешнее силовое поле планеты вполне определяется заданием внешней уровенной поверхности планеты, ее массы и угловой скорости вращения, Стокс тем самым поставил новую задачу: найти по этим данным внешнее силовое поле планеты и, в частности, изменение силы тяжести на ее поверхности. Решение этой задачи, получившей название *проблемы Стокса*, для того случая, когда внешней уровенной поверхностью является сжатый эллипсоид вращения, дает наилучший вывод формул (1) и (2). Этот вывод, излагаемый в следующих параграфах, не только свободен от всех предположений, лежащих в основе теории Клэро, но и легко дает члены второго порядка.

Решение проблемы Клэро с точностью до членов второго порядка включительно, начатое еще Лапласом и Лежандром, было выполнено с большой обстоятельностью Калландро и Дж. Дарвином, шедшими двумя разными путями.<sup>1</sup> Эти вопросы получили дальнейшее разви-

<sup>1</sup> O. Callandreau, Mémoire sur la théorie de la figure des planètes. Annales de l'Observatoire de Paris (Mémoires), 19, 1889.

G. H. Darwin, The theory of the figure of the Earth carried to the second order of small quantities (Monthly Notices, 60, 1900 = Scientific Papers, Vol. III, 1910).

тие в работах Веронне и де Ситтера.<sup>1</sup> Другие возможности открываются здесь работами Ляпунова и Вавра, указанными в § 78.

Если бы строение Земли в точности соответствовало условиям проблемы Клэро (т. е. каждая уровенная поверхность была бы поверхностью равной плотности и плотность нигде не убывала бы с глубиной), то Земля была бы равномерно покрыта океаном глубиной в 2.4 км, ограниченного сверху и снизу уровенными поверхностями. На самом же деле строение верхнего слоя Земли, толщиной примерно до 100 км, существенно отличается от того, что предполагается в проблеме Клэро.

Согласно общепринятым в настоящее время представлениям, условия проблемы Клэро выполняются в центральной части Земли. Последняя уровенная поверхность, для которой эти условия еще выполняются, носит название *изостатической поверхности*; она отделяет, таким образом, центральное ядро от коры, т. е. от области, где гидростатическое равновесие не установилось. Далее, предполагается, что над достаточно большими равными площадями изостатической поверхности находятся равные массы земной коры. Геодезические и гравиметрические наблюдения согласно показывают, что расстояние от изостатической поверхности до физической поверхности Земли около 100 км.

Таковы основы теории изостазии, подробно изучаемой и широко применяемой в гравиметрии.<sup>2</sup>

Итак, предположение о гидростатическом равновесии вещества Земли, основное в проблеме Клэро, полностью не осуществляется. Тем не менее, решение этой проблемы с большей точностью, нежели до членов первого порядка, представляет несомненный интерес. В самом деле, только получив такое решение и сопоставив его с результатами геодезических и гравиметрических измерений, можно судить, в какой степени предположение о гидростатическом равновесии применимо к Земле в целом.<sup>3</sup>

Так как развитие теории Клэро до членов второго порядка не представляет никаких новых, принципиальных затруднений, то ограничимся лишь указанием основных результатов.

Удовлетворить условию гидростатического равновесия, выражаемому уравнениями § 80 (2), считая уровенные поверхности эллипсоидами вращения, можно лишь с точностью до членов первого по-

<sup>1</sup> A. V é r o n n e t, Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre (Journal des Mathématiques pures et appliquées. 1912).

W. de Sitter, On the flattening and the constitution of the Earth (Bull. of the Astr. Institutes of the Netherlands, 2, № 55, 1924).

<sup>2</sup> А. А. М и х а й л о в, Курс гравиметрии и теории фигуры Земли (Москва, 1939), глава 8.

<sup>3</sup> Если иметь в виду только практические потребности описания фигуры Земли и ее силового поля, то члены второго порядка могут быть получены при гораздо более широких предположениях, нежели лежащие в основе проблемы Клэро. Это будет сделано ниже (§§ 92, 93 и 95).

рядка. Чтобы удовлетворить этим уравнениям с точностью до членов второго порядка, нужно взять поверхности более общего вида, зависящие еще от одного параметра.

Эллипсоид вращения

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(1-\alpha)^2} = a^2,$$

имеющий экваториальную полуось  $a$  и сжатие  $\alpha$ , в полярных координатах представляется, с нужной нам точностью, уравнением:

$$\rho = a \left[ 1 - \alpha \sin^2 \varphi' - \frac{3}{8} \alpha^2 \sin^2 2\varphi' \right], \quad (3)$$

где через  $\varphi' = 90^\circ - \theta$  обозначена геоцентрическая широта.

Сообразно с этим, уравнение уровенных поверхностей берется в форме:

$$\rho = a \left[ 1 - \alpha \sin^2 \varphi' - \left( \frac{3}{8} \alpha^2 + \chi \right) \sin^2 2\varphi' \right]; \quad (4)$$

здесь  $\chi$  некоторый новый параметр, по своей величине сравнимый с  $\alpha^2$ .

Наибольшее превышение эллипсоида (3) над сфероидом (4) имеет место при  $\varphi' = 45^\circ$ . Оно равно  $a\chi$ .

Подстановка выражения (4) в условия равновесия дает дифференциальные уравнения, определяющие  $\alpha$  и  $\chi$  в функции параметра  $a$ , характеризующего уровенные поверхности.

Чтобы разрешить эти уравнения полностью, надо знать закон плотностей. Но, как и в первоначальной теории Клэро, уже некоторые весьма общие предположения относительно этого закона дают возможность получить значения  $\alpha_1$  и  $\chi_1$  для внешней поверхности планеты с очень хорошим приближением.

Можно показать, что на внешней поверхности имеют место неравенства:

$$0 \leq \chi_1 \leq \frac{5}{16} \alpha_1^2 - \frac{1}{4} \alpha_1^2.$$

Причем нижняя граница  $\chi_1$  соответствует однородной планете, а верхняя — модели Роша. Таким образом, для Земли имеем:

$$0 < \chi_1 < 0.000\,000\,82.$$

В указанных выше работах Дж. Дарвин и, вслед за ним, де Ситгер приняли:

$$\chi_1 = 0.000\,000\,50,$$

основывая эту оценку на некотором гипотетическом законе плотностей.

В настоящее время, благодаря успехам сейсмологии, достаточно уверенно определено изменение плотности от поверхности Земли до ее центра. Это открыло возможность численно проинтегрировать



упомянутые выше дифференциальные уравнения, определяющие  $\alpha$  и  $\chi$ . Результаты такого интегрирования, выполненного Буллардом,<sup>1</sup> приведены в табл. 7.

Аргументом этой таблицы служит величина

$$d = r_1 - r,$$

выраженная в километрах, т. е. глубина, на которой находится рассматриваемая уровенная поверхность.

Второй столбец, где даны плотности (в системе CGS), показывает, что скачкообразные изменения плотности происходят на глубинах в 33 км, в 2900 км и в 5121 км. По данным второго и третьего столбцов построены кривые, показанные на рис. 20 (стр. 237).

В четвертом и пятом столбцах содержатся сжатие  $\alpha$  и параметр  $\chi$ , вычисленные на основании данных второго столбца.

Важно отметить, что полученное этим путем сжатие внешней поверхности Земли ( $\alpha_1 = 0.003364 = 1/297.3$ ) особого интереса не представляет. Дело в том, что вычисление значений  $\chi$ , помещенных во втором столбце, можно выполнить, лишь приняв некоторое определенное значение для  $\alpha_1$ . В результате интегрирования уравнений, определяющих  $\alpha$  и  $\chi$ , должно получиться значение  $\alpha_1$ , весьма близкое к исходному. Но полученная таблица значений  $\alpha$  на различных глубинах дает возможность найти практически совершенно точное значение  $\alpha_1$ .

В самом деле, мы уже видели, что задача определения  $\alpha_1$  приводится к вычислению правой части уравнения § 86 (3).

Теперь мы можем практически совершенно точно вычислить стоящий там интеграл, тогда как в § 86 мы вынуждены были довольствоваться лишь оценкой его величины. Действительно, зная  $\alpha$  для различных значений  $r$ , можно легко найти соответствующие значения  $\eta$ , а следовательно и значения функции  $F(\eta)$ .

В указанной выше (стр. 246) работе де Ситтера дано уравнение Радо § 86 (5) с учетом величин второго порядка. В этом случае его можно представить так:

$$D_1 \sqrt{1 + \eta'_1} = 5 \int_0^1 DF(\eta') r^4 dr,$$

где  $\eta'$  определяется равенствами:

$$\eta' = \frac{r}{\alpha'} \frac{d\alpha'}{dr}, \quad \alpha' = \alpha - \frac{5}{42} \alpha^2 + \frac{4}{7}.$$

Значения соответствующей функции  $F(\eta')$  приведены в последнем столбце табл. 7.

<sup>1</sup> E. C. Bullard, The Figure of the Earth (Monthly Notices of the R. A. S., Geophysical Supplement, 5, 1948).

Таблица 7

## Основные характеристики внутреннего строения Земли

Глубина в км $d$	Плотность $\chi$	Средняя плотность $D$	Сжатие $10^6 \alpha$	$10^8 \chi$	$F(\eta')$
0	2.76	5.53	3 364	68	0.99964
33	2.76	5.57	3 354	67	0.99972
33	3.32	5.57	3 354	67	0.99972
100	3.38	5.64	3 334	66	0.99979
200	3.47	5.75	3 305	64	0.99988
300	3.55	5.87	3 276	62	0.99997
400	3.63	5.93	3 248	60	1.00006
413	3.64	6.00	3 244	60	1.00007
500	3.89	6.10	3 220	58	1.00013
600	4.13	6.21	3 192	57	1.00018
700	4.33	6.32	3 165	55	1.00020
800	4.49	6.42	3 137	54	1.00020
900	4.60	6.53	3 109	52	1.00019
1000	4.68	6.63	3 081	51	1.00018
1200	4.80	6.86	3 023	47	1.00015
1400	4.91	7.11	2 963	44	1.00014
1600	5.03	7.39	2 903	40	1.00016
1800	5.13	7.71	2 842	35	1.00021
2000	5.24	8.08	2 782	31	1.00030
2200	5.34	8.50	2 723	26	1.00044
2400	5.44	8.99	2 667	21	1.00058
2600	5.54	9.58	2 618	17	1.00062
2800	5.63	10.28	2 580	14	1.00041
2900	5.68	10.70	2 567	13	1.00019
2900	9.43	10.70	2 567	13	1.00031
3000	9.57	10.81	2 556	13	1.00030
3200	9.85	11.03	2 532	12	1.00031
3400	10.11	11.25	2 508	12	1.00032
3600	10.35	11.49	2 480	12	1.00035
3800	10.56	11.75	2 450	12	1.00039
4000	10.76	12.06	2 414	12	1.00043
4200	10.94	12.42	2 372	12	1.00049
4400	11.11	12.89	2 322	11	1.00054
4600	11.27	13.54	2 265	9	1.00055
4800	11.41	14.49	2 203	6	1.00047
4982	11.54	15.84	2 155	2	1.00014
5121	14.20	16.96	2 141	1	0.99994
5121	16.80	16.96	2 141	1	1.00000
5400	16.96	17.06	2 138	0	1.00000
5700	17.08	17.13	2 135	0	1.00000
6000	17.16	17.18	2 133	0	1.00000
6371	17.20	17.20	2 132	0	1.00000

Таким именно путем, принимая (стр. 229):

$$H = 0.003\,272\,37 \pm 0.000\,000\,59,$$

было получено:

$$\alpha_1 = 1/297.338 \pm 0.050 = 0.003\,363\,18 \pm 0.000\,000\,57.$$

Указанная здесь оценка точности учитывает не только влияние погрешности  $H$ , но и допускаемую неточность в распределении плотности внутри Земли.

Сравнение полученной величины сжатия Земли, точно соответствующей гипотезе гидростатического равновесия, с тем, что дают геодезические и гравиметрические измерения (§ 94), показывает очень хорошее согласие. Это тем более интересно, что внешняя поверхность Земли (геоид) чувствительно отклоняется от сфероида (4). Наибольшее из таких отклонений, приближенно интерпретируемое как эллиптичность земного экватора, достигает 200—250 м (А. А. Изотов, 1940).

Интересно отметить, что для  $\chi_1 = 0.000\,000\,68$  наибольшее отклонение сфероида (4) от эллипсоида вращения равно всего 4.3 м.

При учете членов второго порядка формула (1) заменяется такой:

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi),$$

где

$$\beta = \frac{5}{2} q_1 - \alpha_1 + \frac{15}{4} q_1^2 - \frac{17}{14} q_1 \alpha_1 + \frac{8}{7} \chi_1,$$

$$\beta_1 = \frac{25}{8} q_1 \alpha_1 - \frac{1}{8} \alpha_1^2 + 3\chi_1.$$

Для указанных выше значений сжатия и дополнительного параметра это дает:

$$g = g_e (1 + 0.005\,293\,17 \sin^2 \varphi - 0.000\,007\,87 \sin^2 2\varphi).$$

Если в формулу (4) вместо геоцентрической широты ввести астрономическую при помощи хорошо известного соотношения

$$\varphi' = \varphi - m \sin 2\varphi + \frac{m^2}{2} \sin 4\varphi - \dots,$$

где

$$m = \frac{1 - (1 - \alpha)^2}{1 + (1 - \alpha)^2},$$

то получим:

$$r = a \left[ 1 - \alpha \sin^2 \varphi + \left( \frac{5}{8} \alpha^2 - \chi \right) \sin^2 2\varphi \right].$$

Таким образом радиус-вектор сфероида Клэро, представляющего Землю, дается выражением:

$$r = a [1 - 0.003\,363\,17 \sin^2 \varphi + 0.000\,006\,39 \sin^2 2\varphi].$$

### § 88. Проблема Стокса для сжатого эллипсоида вращения

Согласно теореме Стокса, задание уровенной поверхности, заключающей всю планету, ее массы  $M$  и угловой скорости вращения  $\omega$  вполне определяет силовое поле планеты во внешнем, по отношению к этой уровенной поверхности, пространстве. Иначе говоря, этими данными вполне определяется во внешнем пространстве потенциал силы тяжести

$$W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (1)$$

Задача фактического нахождения потенциала  $W$  носит название *проблемы Стокса*.

Покажем, как решается эта проблема в случае, когда одной из уровенных поверхностей, целиком заключающих внутри себя всю планету, является эллипсоид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2)$$

Так как на поверхности (2)  $W = \text{const}$ , то отсюда следует, что решение проблемы Стокса приводится к решению внешней проблемы Дирихле: надо найти функцию  $V$ , гармоническую во внешнем по отношению к поверхности (2) пространстве, принимающую на этой поверхности заданные значения

$$V = \text{const} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (3)$$

и удовлетворяющую условию:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rV = fM, \quad (4)$$

когда

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty.$$

Чтобы построить функцию  $V$ , удовлетворяющую указанным условиям, воспользуемся, прежде всего, известными нам свойствами потенциала однородного эллипсоида. Формула § 17 (4) дает для этого потенциала такое выражение:

$$V_x = \pi f \lambda a^2 c \int_u^\infty \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{(a^2 + s) \sqrt{c^2 + s}}, \quad (5)$$

причем  $u$  определяется уравнением:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1.$$

Мы знаем, что эллипсоид (2) является фигурой относительного равновесия; иначе говоря, в точках его поверхности  $W = \text{const}$ , если

плотность  $\kappa$ , угловая скорость вращения  $\omega$  и эксцентриситет меридианного сечения  $l = \sqrt{a^2 - c^2}/c$  связаны соотношением § 59 (12), а именно:

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\kappa} = \frac{3 + l^2}{l^3} \operatorname{arctg} l - \frac{3}{l^2}. \quad (6)$$

Это равенство определяет постоянную плотность  $\kappa$  — единственный параметр, входящий в выражение (5). Таким образом, если принять  $V = V_x$ , то мы уже не имеем возможности удовлетворить условию (4). Это условие выполнялось бы лишь в том случае, если бы планета была действительно однородной.

Рассмотрим функцию

$$V = V_x + \lambda f \pi \kappa a^2 c U, \quad (7)$$

где

$$U = \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) \sqrt{c^2 + s}} = \frac{2}{cl} \operatorname{arctg} \frac{cl}{\sqrt{c^2 + u}}, \quad (8)$$

а через  $\lambda$  обозначен постоянный множитель. Так как на поверхности (1)  $u = 0$  и, следовательно,  $U = \text{const}$ , то функция (7) удовлетворяет условию (3). Параметром  $\lambda$  можно распорядиться так, чтобы выполнить условие (4). Поскольку

$$\lim rU = 2, \quad (9)$$

для определения  $\lambda$  получим такое уравнение:

$$\pi \kappa a^2 c \left( \frac{4}{3} + 2\lambda \right) = M. \quad (10)$$

Остается только убедиться, что функция  $U$  является гармонической в рассматриваемой области. Это можно сделать прямой проверкой. Вычислим лапласиан более общей функции:

$$U = \int_u^\infty \frac{ds}{\sqrt{\psi(s)}}; \quad \psi(s) = (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s).$$

Уравнение, определяющее  $u$ , т. е.

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1,$$

дает (§ 17):

$$(\nabla u)^2 = \frac{4}{N}, \quad \nabla^2 u = \frac{2}{N} \frac{\psi'(u)}{\psi(u)},$$

где

$$N = \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2}.$$

Поэтому, поскольку:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{\psi(u)}} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{(a^2 + u) N \sqrt{\psi(u)}}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\psi(u)}} \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{\psi(u)}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

имеем  $\nabla^2 U = 0$ . Регулярность функции  $U$  на бесконечности вытекает из равенства (9).

Итак, равенство (7), в котором параметры  $\kappa$  и  $\lambda$  определены из соотношений (6) и (10), дает гармоническую функцию, решающую сформулированную выше проблему Дирихле. Подстановка полученной функции в равенство (1) завершит решение проблемы Стокса для сжатого эллипсоида вращения.<sup>1</sup>

Проблема Стокса для трехосного эллипсоида будет рассмотрена ниже (§ 95).

## § 89. Сила тяжести на поверхности уровня эллипсоида. Формула Сомильяна

В предыдущем параграфе мы нашли для уровня эллипсоида вращения потенциал силы тяжести:

$$W = V_x + \lambda \pi f \kappa a^2 c U + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (1)$$

Это дает возможность вычислить силу тяжести  $g$  для точек его поверхности.

Компоненты силы тяжести (считая ее направленной внутрь планеты) равны:

$$g_x = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = -\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Поэтому, пользуясь формулами § 18 (1) и § 88 (11), получим, учитывая, что на поверхности планеты  $u = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} g_x &= 2Px + \frac{2\lambda \pi f \kappa}{a^2 N_0} x - \omega^2 x, \\ g_y &= 2Py + \frac{2\lambda \pi f \kappa}{a^2 N_0} y - \omega^2 y, \\ g_z &= 2Rz + \frac{2\lambda \pi f \kappa}{c^2 N_0} z. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь

$$N_0 = \frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}, \quad (3)$$

<sup>1</sup> Другое решение этой проблемы можно найти в работе: М. С. Молоденский, Основные вопросы геодезической гравиметрии (Труды Института геодезии, аэросъемки и картографии, вып. 42, 1945).

а  $P$  и  $R$  даются формулами:

$$P = 2\pi f \kappa P', \quad R = 2\pi f \kappa R',$$

где

$$\left. \begin{aligned} P' &= 1 - \frac{1}{5} l^2 + \frac{3}{35} l^4 - \frac{1}{21} l^6 + \dots \\ R' &= 1 + \frac{2}{5} l^2 - \frac{6}{35} l^4 + \frac{2}{21} l^6 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Заметим, что соотношение § 88 (6), устанавливающее зависимость между  $\omega$  и прочими величинами, мы могли бы взять в форме § 59 (4):

$$a^2 \left( P - \frac{\omega^2}{2} \right) = c^2 R,$$

откуда:

$$\omega^2 = 2P - 2 \frac{c^2}{a^2} R. \quad (5)$$

Исключив при помощи этого равенства  $\omega^2$ , будем иметь для компонент силы тяжести такие выражения:

$$g_x = Hx, \quad g_y = Hy, \quad g_z = \frac{a^2}{c^2} Hz,$$

где

$$H = 2\pi f \kappa \left( \frac{\lambda}{a^2 N_0} + 2 \frac{c^2}{a^2} R' \right).$$

Величина силы тяжести может быть представлена поэтому в такой форме:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = H \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{a^4}{c^4} z^2} = a^2 H \sqrt{N_0}. \quad (6)$$

В выражение (3), дающее  $N_0$ , введем сферические координаты. Так как

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi', \quad z = r \sin \varphi',$$

где  $r$  — радиус-вектор, а  $\varphi'$  — геоцентрическая широта, то

$$N_0 = \frac{r^2}{a^4} \left( \cos^2 \varphi' + \frac{a^4}{c^4} \sin^2 \varphi' \right).$$

Но уравнение эллипсоида § 88 (2) дает:

$$\frac{r^2}{a^2} \left( \cos^2 \varphi' + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \varphi' \right) = 1,$$

поэтому:

$$N_0 = \frac{1}{a^2} \frac{1 + \frac{a^4}{c^4} \operatorname{tg}^2 \varphi'}{1 + \frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 \varphi'}.$$

Воспользуемся теперь зависимостью

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{c^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi$$

между геоцентрической широтой  $\varphi'$  и астрономической широтой  $\varphi$ .  
Получим:

$$N_0 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}.$$

Подставив это значение в формулу (6), будем иметь:

$$g = 2\pi f_k \frac{\lambda a^2 \cos^2 \varphi + \lambda c^2 \sin^2 \varphi + 2a^2 R'}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}}$$

или

$$g = 2\pi f_k \frac{(\lambda a^2 + 2a^2 R') \cos^2 \varphi + (\lambda c^2 + 2a^2 R') \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Для силы тяжести на экваторе и на полюсе это выражение дает соответственно:

$$g_e = 2\pi f_k \frac{\lambda a^2 + 2a^2 R'}{a}, \quad g_p = 2\pi f_k \frac{\lambda c^2 + 2a^2 R'}{c}, \quad (7)$$

поэтому его можно написать так:

$$g = \frac{a g_e \cos^2 \varphi + c g_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (8)$$

Эта формула, указанная в 1929 г. Сомильяна, дает точный закон распределения силы тяжести на уровенной поверхности, имеющей форму эллипсоида вращения.

## § 90. Продолжение. Формула Клэро

Для планет с небольшим сжатием точная формула Сомильяна может быть с выгодой заменена более простой приближенной формулой.

Наряду со сжатием планеты  $\alpha = (a - c)/a$  введем величину

$$\beta = (g_p - g_e)/g_e,$$

представляющую относительный избыток силы тяжести на полюсе по сравнению с экватором.

Подставив

$$g_p = g_e (1 + \beta), \quad c = a (1 - \alpha)$$

в формулу (8) предыдущего параграфа, получим:

$$g = g_e \frac{1 + (\beta - \alpha - \alpha\beta) \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - (2\alpha - \alpha^2) \sin^2 \varphi}} \quad (1)$$

или, ограничиваясь величинами второго порядка:

$$g = g_e \left[ 1 + \left( \beta - \alpha\beta - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \sin^2 \varphi + \left( \alpha\beta + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \sin^4 \varphi \right].$$



Этой формуле можно придать более удобный вид, если заметить, что

$$\sin^4 \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi.$$

Окончательно получим:

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi), \quad (2)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{4} \alpha \beta + \frac{1}{8} \alpha^2. \quad (3)$$

Если ограничиться членами первого порядка, то будем иметь формулу Кларо:

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi). \quad (4)$$

Рассмотрим подробнее коэффициент  $\beta$ . Формулы § 89 (7) дают:

$$\beta = \frac{g_p}{g_e} - 1 = \frac{1}{ac} \frac{\lambda c^2 + 2a^2 R'}{\lambda + 2R'} - 1. \quad (5)$$

Чтобы исключить вспомогательный параметр  $\lambda$ , введем безразмерную величину:

$$q' = \frac{\omega^2 a}{g_e}.$$

Для установления связи между  $q'$  и  $\lambda$ , заменим в этом равенстве  $\omega^2$  его выражением § 89 (5), а  $g_e$  — выражением § 89 (7). Это даст:

$$\lambda + 2R' = \frac{2}{q'} \left( P' - \frac{c^2}{a^2} R' \right).$$

Таким образом, формула (5) примет следующий вид (если еще отношение  $\frac{c}{a}$  заменить через  $1 - \alpha$ ):

$$\beta = -\alpha + \frac{2\alpha - \alpha^2}{1 - \alpha} \frac{q' R'}{P' - (1 - \alpha)^2 R'}.$$

Формулы § 89 (4) дают:

$$\frac{P'}{R'} = 1 - \frac{3}{5} l^2 + \frac{87}{175} l^4 - \dots,$$

а так как

$$l^2 = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} = 2\alpha + 3\alpha^2 + \dots,$$

то

$$\frac{P'}{R'} = 1 - \frac{6}{5} \alpha + \frac{33}{175} \alpha^2 - \dots$$

Окончательно получим искомое соотношение в таком виде:

$$\beta = -\alpha + q' \left( \frac{5}{2} - \frac{17}{14} \alpha - \dots \right). \quad (6)$$

Ограничиваясь, как обычно, членами второго порядка, имеем:

$$\beta + \alpha \left(1 + \frac{17}{14} q'\right) = \frac{5}{2} q'. \quad (7)$$

Если отбросить и члены второго порядка, то равенство

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} q' \quad (8)$$

даст знаменитую *теорему Клэро*, впервые установившую зависимость между сжатием земного эллипсоида и законом распределения силы тяжести на его поверхности.

Доказательство формул (4) и (8), данное Клэро, основано на предположении, что планета состоит из слоев равной плотности, ограниченных концентрическими сжатыми эллипсоидами вращения с общей осью, и что внешняя поверхность планеты является уровенной поверхностью. Условие гидростатического равновесия внутри планеты в доказательстве не используется.

Это последнее обстоятельство иногда упускалось из вида, и согласие формул Клэро с наблюдениями ошибочно рассматривалось как подтверждение того, что внутренность Земли находится или, по крайней мере, находилась, в расплавленном состоянии.

Приведенный нами вывод базируется на единственном допущении, что Земля ограничена уровенной поверхностью, имеющей форму сжатого эллипсоида вращения, и не требует никаких предположений относительно характера внутреннего распределения масс.

Полученные формулы могут быть использованы как для определения коэффициентов  $\beta$  и  $\beta_1$ , так и для определения сжатия Земли  $\alpha$ , если эти коэффициенты найдены из наблюдений.

**Нормальная сила тяжести.** Сила тяжести, вычисленная при помощи потенциала для нормального эллипсоида, в гравиметрии называется нормальной силой тяжести и обозначается буквой  $\gamma$ , в отличие от фактически наблюдаемой силы тяжести, для которой сохраняется буква  $g$ . Нормальная сила тяжести для поверхности нормального эллипсоида (или, как говорят, „на уровне моря“) обозначается через  $\gamma_0$ .

Сообразно с этим, формула § 90 (2) дает:

$$\gamma_0 = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi).$$

Положив в основу так называемый международный эллипсоид с элементами

$$a = 6\,378\,388 \text{ м}; \quad \alpha = 1/297.0$$

и взяв

$$g_e = 978.049 \text{ см/сек}^2,$$

найдем  $q' = 0.003\,467\,83$ . Таким образом, соотношения (7) и (3) дают:

$$\beta = 0.005\,2884, \quad \beta_1 = 0.000\,0059.$$

Соответствующая формула

$$\gamma_0 = 978.049 (1 + 0.005\,2884 \sin^2 \varphi - 0.000\,0059 \sin^2 2\varphi)$$

носит название *международной формулы нормальной силы тяжести* (Геодезический конгресс 1930 г. в Стокгольме).

**Сжатие земли.** В качестве примера эмпирической формулы силы тяжести, полученной из обработки обширного наблюдательного материала, укажем формулу Хейсканена (1938):

$$g = (978.049 \pm 0.003) [1 + (0.005\,293 \pm 0.000\,004) \sin^2 \varphi - 0.000\,007 \sin^2 2\varphi + (0.000\,019 \pm 0.000\,003) \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda \pm 5^\circ)],$$

где  $\lambda$  есть долгота, считаемая от Гринича.

Обработка того же материала, произведенная без долготного члена, дала

$$g = 978.049 (1 + 0.005\,289 \sin^2 \varphi - 0.000\,007 \sin^2 2\varphi).$$

Пользуясь этим значением для  $\beta$  и полагая  $q' = 0.003\,467\,83$ , при помощи формулы (7) получим:

$$\alpha = \frac{2.5q' - \beta}{1 + \frac{17}{14} q'} = \frac{0.003\,3806}{1.00421} = \frac{1}{297.0}.$$

## § 91. Фигура Земли

Изложенное в предыдущих параграфах позволяет уточнить понятие „фигуры Земли“.

Ньютон и его ближайшие последователи под фигурой Земли понимали эллипсоид вращения, наиболее приближающийся к ее физической поверхности. Задача заключалась, следовательно, в таком определении параметров этого эллипсоида (радиуса экватора и сжатия), при котором отклонения были бы минимальными. Эта чисто геометрическая задача остается и по настоящее время основной проблемой геодезии, так как эллипсоид вращения с очень большой точностью воспроизводит фигуру Земли. Поэтому при более детальном изучении как реальной, так и идеализированной поверхности Земли, всегда можно исходить из эллипсоида вращения как исходного приближения или, как иногда говорят, *поверхности относимости*.

Однако идеализированная поверхность, которую нам дают непосредственно геодезические работы (выполняемые при помощи уровня), есть всегда кусок уровенной поверхности. И только такая уровенная поверхность имеет непосредственный физический смысл.

После того, как Гаусс и Бессель с несомненностью установили невозможность уложить получаемые из триангуляций куски уровенных

поверхностей на эллипсоиде вращения, Гаусс предложил (1828) за математическую поверхность Земли принять уровенную поверхность, совпадающую со средней поверхностью моря. По предложению Листинга (1873) эта поверхность была названа *геоидом*.

Определение формы геоида выполняется всегда путем нахождения превышений (положительных или отрицательных) точек геоида над соответственными точками эллипсоида. Эти превышения, носящие название *высот геоида*, или *ондуляций*, не превосходят, повидимому, 100—150 м.

Для нахождения высот геоида сравнивается наблюдаемое распределение вектора силы тяжести (после приведения к уровню моря) с тем, которое соответствует основному уровенному эллипсоиду. Разница направлений наблюдаемой силы тяжести и нормали к этому эллипсоиду дает так называемое отклонение отвеса. Разность между наблюдаемой величиной силы тяжести и величиной, соответствующей принятому основному эллипсоиду, называется *аномалией силы тяжести*.

Задачи, связанные с определением формы геоида из наблюдаемых отклонений отвеса и аномалий силы тяжести, выходят уже за пределы Небесной механики и составляют предмет высшей геодезии и гравиметрии.

Отметим некоторые принципиальные трудности, связанные с определением понятия фигуры Земли, данным Гауссом. Дело в том, что *средний уровень моря* не есть нечто вполне определенное. Под влиянием приливов, изменений атмосферного давления, ветров, под влиянием различий в плотности (вызываемых как температурными отличиями, так и различным содержанием солей) средний уровень моря, определенный в разных местах, может и не укладываться на одну и ту же уровенную поверхность.

Таким образом, выбор уровенной поверхности, принимаемой за геоид, можно сделать вполне определенным, лишь выбрав более или менее произвольно тот нуль-пункт, который мы условно примем за средний уровень моря. Такие нуль-пункты в различных странах выбираются различно и связь между ними в настоящее время либо не может быть установлена, либо устанавливается с большой потерей точности. Вопрос о неизменности выбранного нуль-пункта осложняется явлениями поднятий и опусканий материковых масс.

Все эти соображения привели к постановке задачи о возможно полном математическом описании гравитационного поля Земли, независимо от каких бы то ни было предположений о ее внутреннем строении. Эта идея была развита, с одной стороны, Брунсом (1878) и Гельмертом (1884), с другой — Ф. А. Слудским (1883—1888).

Брунс видит основную задачу геодезии не в нахождении некоторой определенной уровенной поверхности, принимаемой за математическую поверхность Земли, а в изучении всего семейства уровенных поверхностей, близких к физической поверхности Земли,

Ф. А. Слудский разработал „общую теорию фигуры Земли“. <sup>1</sup> Под этим именем он разумел теорию, основывающуюся только на общих свойствах потенциала, в частности — на его разложимости в быстро сходящийся ряд (§§ 43 и 44); тогда как теория Клэро исходит из допущения, что планета состоит из концентрических слоев равной плотности и что выполняются условия гидростатического равновесия. Эти допущения предопределяют выводы теории Клэро, <sup>2</sup> которые позволяют поэтому изучать лишь общий характер фигуры Земли, не давая возможности изучать ее детали.

Напротив, теория, развитая в только что указанном направлении, не делает никаких предположений ни о распределении земных масс, ни о применимости к ним (в прошлом или в настоящем) законов гидростатики. Эта теория, основывающаяся исключительно на эмпирическом разложении потенциала, может наиболее полно описать математически наблюдаемое силовое поле Земли.

Вследствие этого, если теории Клэро, Лапласа и Ляпунова представляют большой интерес для небесной механики и космогонии, то эта новая теория лучше удовлетворяет потребностям геодезии. <sup>3</sup>

**Примечание.** Фигура геоида определяется как уровенная поверхность, т. е. как поверхность, перпендикулярная в каждой точке к направлению силы тяжести. Но получаемая из наблюдений сила тяжести есть, строго говоря, равнодействующая не только притяжения Земли и центробежной силы, но и притяжения Луны, Солнца и планет. Если учесть эти притяжения, то сила тяжести, а, следовательно, фигура геоида, будут изменяться во времени. Легко, однако, показать, что эти изменения крайне малы и лежат за пределами точности обычных астрономических и геодезических наблюдений.

Чтобы учесть влияние притяжений светил с массами  $m_i$  и геоцентрическими координатами  $X_i, Y_i, Z_i$  на единичную массу, находящуюся в точке  $(x, y, z)$  земной поверхности, надо к выражениям § 89 (2) для  $g_x, g_y, g_z$  прибавить еще суммы соответствующих компонент этих притяжений, а именно:

$$fm_i \left( \frac{X_i - x}{\rho_i^3} - \frac{X_i}{R_i^3} \right), \dots, \quad (1)$$

где

$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2; \quad \rho_i^2 = (X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2.$$

<sup>1</sup> В сочинении, уже цитированном на стр. 125, в котором указаны и его предыдущие работы.

<sup>2</sup> Так же как и теорий Лапласа и Ляпунова, которые исходят из тех же допущений и отличаются только большей полнотой математической трактовки вопроса.

<sup>3</sup> Дальнейшие подробности относительно всех вопросов, связанных с фигурой Земли, а также весьма обстоятельные литературные указания можно найти в книге: А. А. Михайлов, Курс гравиметрии и теории фигуры Земли, 2-е изд., Москва, 1939.

Но изменение силы тяжести  $\Delta g$ , вызываемое притяжением с компонентами (1), имеет верхнюю границу, практически равную

$$fm_i \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{(R_i + a)^2} \right) < 2fm_i \frac{a}{R_i^3},$$

где  $a$  — экваториальный радиус Земли.

Поэтому

$$\Delta g < 2g \frac{m_i}{M} \left( \frac{a}{R_i} \right)^3,$$

поскольку, с достаточной точностью можно положить

$$g = f \frac{M}{a^2}.$$

Таким образом, для Луны:

$$\frac{m_i}{M} = \frac{1}{81.53}; \quad \frac{a}{R_i} < \frac{1}{56.9}; \quad \Delta g < \frac{g}{7\,300\,000};$$

для Солнца:

$$\frac{m_i}{M} = 324\,400; \quad \frac{a}{R_i} < \frac{1}{23\,000}; \quad \Delta g < \frac{g}{18\,700\,000}.$$

Влияние планет еще незначительнее. Заметим, что отклонение отвеса, производимое таким изменением силы тяжести, не превосходит

$$\frac{\Delta g}{g \operatorname{arc} 1''} < 0''.03.$$

**Примечание.** При обработке как градусных измерений, так и гравиметрических определений нередко находились элементы *трехосного эллипсоида*, наилучшим образом представляющего фигуру Земли.

Такого рода работы, выполненные различными методами и по различным наблюдательным материалам, довольно согласно указывают на эллиптичность земного экватора. Разность полуосей экватора получается равной 150—250 м, причем долгота большой оси колеблется от  $-20^\circ$  до  $+40^\circ$ .

Отсюда видно, что отклонения получаемого трехосного эллипсоида от эллипсоида вращения, того же порядка, как и прочие отклонения геоида от этого последнего. Это показывает, что, принимая за исходное приближение к фигуре Земли вместо эллипсоида вращения трехосный эллипсоид, мы не изменим существенно точность этого приближения, а лишь внесем ненужные осложнения.

## § 92. Нормальный сфероид

Эллипсоид вращения дает приближенное представление фигуры Земли в виде очень простой поверхности. С другой стороны, геоид, дающий точную фигуру Земли, является весьма сложной поверхностью. Аналитическое представление этой поверхности возможно лишь при помощи тех или иных эмпирических формул: например, при помощи численного разложения в ряд по сферическим функциям.

Можно поставить вопрос о нахождении таких аналитических поверхностей, которые, будучи достаточно простыми, представляли бы фигуру Земли значительно точнее, нежели эллипсоид вращения, являясь как бы промежуточным звеном между этим эллипсоидом и геоидом. Примером применения такой поверхности служат упомянутые в конце предыдущего параграфа попытки представления фигуры Земли трехосным эллипсоидом.

Рассмотрим общий путь, подробно разработанный Ф. А. Слудским и Гельмертом,<sup>1</sup> для получения поверхностей, аппроксимирующих фигуру Земли все с большей и большей точностью.

За внешнюю поверхность планеты мы принимаем уровенную поверхность  $W = \text{const}$ , где

$$W = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

есть потенциал силы тяжести. Входящий сюда потенциал притяжения можно представить рядом § 43 (5), дающим

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{Y_2}{r^3} + \frac{Y_3}{r^4} + \dots, \quad (1)$$

так как начало координат находится в центре инерции, то  $Y_1 = 0$ .

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно вне сферы с центром в начале координат, если эта сфера заключает все притягивающие массы. Мы видели (§ 44), что ряд может оставаться сходящимся и в более широкой области — до самой поверхности планеты. Но вопрос о сходимости этого ряда в данном случае не представляет непосредственного интереса: для нас важен тот установленный наблюдениями факт, что уже первые два члена ряда (1) дают весьма точное представление силового поля земных масс. Имеются все основания думать, что взяв в ряду (1) первые три члена, мы получим еще более близкое к действительности представление функции  $V$ . Больше трех членов брать не приходится из-за сложности получающихся выражений и отсутствия в этом надобности, благодаря чему и отпадает вопрос о сходимости.

<sup>1</sup> F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, II Teil, 1884.

F. Hopfner, Physikalische Geodäsie, Leipzig, 1933.

Посмотрим, какова будет уровенная поверхность, если в ряду (1) взять только первые два члена.

Формула § 43 (10) показывает, что

$$Y_2 = \frac{1}{2} f (A + B - 2C) P_2 (\cos \theta) + \frac{3}{4} f (B - A) \sin^2 \theta \cos 2\psi.$$

Поэтому соответствующее приближенное выражение потенциала силы тяжести будет:

$$\begin{aligned} \bar{W} = \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^3} \left[ \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (B - A) \sin^2 \theta \cos 2\psi \right] + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначив через  $\rho$  радиус-вектор точек, лежащих на поверхности планеты, уравнение этой поверхности можем написать так:

$$\begin{aligned} \frac{M}{\rho} + \frac{1}{2\rho^3} \left[ \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (B - A) \sin^2 \theta \cos 2\psi \right] + \frac{\omega^2}{2f} \rho^2 \sin^2 \theta = C_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $C_1$  — некоторое постоянное число.

Сфероид, определяемый уравнением (3), симметричен относительно плоскости  $xu$  (уравнение не меняется при замене  $\theta$  через  $\pi - \theta$ ), которая является, таким образом, экваториальной плоскостью.

Пересечение поверхности (3) с экваториальной плоскостью  $\theta = \frac{\pi}{2}$  представляет кривую:

$$1 + \frac{1}{3} \bar{\mu} + \frac{3}{4} \frac{B-A}{M\rho^2} \cos 2\psi + \frac{1}{2} \bar{q} = C_2 \rho, \quad (4)$$

где  $C_2 = C_1/M$ , а через

$$\bar{\mu} = \frac{3}{2} \frac{1}{M\rho^2} \left( C - \frac{A+B}{2} \right), \quad \bar{q} = \frac{\omega^2 \rho^3}{fM}$$

обозначены малые величины, весьма близкие к параметрам  $\mu$  и  $q$ .

Если  $A \neq B$ , то кривая (4) имеет вид симметричного относительно координатных осей овала, напоминающего эллипс.

Если  $A = B$ , то эта кривая обратится в окружность  $\rho = a$ . В этом случае уравнение (3) представляет поверхность вращения. Рассмотрим этот случай подробнее.

Полагая, как обычно:

$$\mu = \frac{3}{2} \frac{C-A}{Ma^2}; \quad q = \frac{\omega^2 a^3}{fM}, \quad (5)$$

уравнение (3) можно представить так:

$$C_2 \rho = 1 + \frac{\mu}{3} \left( \frac{a}{\rho} \right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) + \frac{q}{2} \left( \frac{\rho}{a} \right)^3 \sin^2 \theta. \quad (6)$$



Пользуясь малостью  $\mu$  и  $q$ , легко определить из этого уравнения радиус-вектор  $\rho$  последовательными приближениями. Ограничиваясь сначала членами первого порядка, имеем:

$$C_2 \rho = 1 + \frac{\mu}{3} + \frac{q}{2} - \left(\mu + \frac{q}{2}\right) \cos^2 \theta,$$

откуда, при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$C_2 a' = 1 + \frac{\mu}{3} + \frac{q}{2}.$$

Следовательно:

$$\frac{\rho}{a} = 1 - \left(\mu + \frac{q}{2}\right) \cos^2 \theta. \quad (7)$$

Для второго приближения подставим это значение в члены первого порядка равенства (6).

Тот же прием даст:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{a} = 1 - \left(\mu + \frac{1}{2}q - \mu^2 + \frac{1}{2}\mu q + \frac{1}{2}q^2\right) \cos^2 \theta - \\ - \left(2\mu^2 - \frac{1}{2}\mu q - \frac{3}{4}q^2\right) \cos^4 \theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Равенство (7) показывает, что в первом приближении сжатие сфероида равно

$$\alpha = \mu + \frac{q}{2}. \quad (9)$$

Второе приближение дает для сжатия сфероида такое выражение:

$$\alpha = \mu + \frac{1}{2}q + \mu^2 - \frac{1}{4}q^2. \quad (10)$$

Обозначим через  $\rho'$  радиус-вектор эллипсоида вращения

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(1-\alpha)^2} = \alpha^2,$$

имеющего тот же радиус экватора и то же сжатие, как и рассматриваемый сфероид.

Легко видеть, что, перейдя к полярным координатам, будем иметь:

$$\rho' = a \left[ 1 - \left(\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2\right) \cos^2 \theta + \frac{3}{2}\alpha^2 \cos^4 \theta + \dots \right].$$

Чтобы оценить разность  $\rho - \rho'$  для Земли, заметим, что в этом случае в формуле (8) можно положить:

$$\mu \approx \frac{1}{2}\alpha; \quad q \approx \alpha,$$

что дает:

$$\rho = \alpha \left[ 1 - \left( \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \alpha^2 \cos^4 \theta \right].$$

Таким образом:

$$\rho - \rho' = \alpha \alpha^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

Отсюда видно, что нормальный сфероид касается рассматриваемого эллипсоида на полюсах и вдоль экватора, охватывая его снаружи. Наибольшее превышение сфероида над эллипсоидом имеет место при  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Для Земли оно составляет всего 19.1 м.

Таким образом, для Земли нормальный сфероид вращения практически совпадает с эллипсоидом вращения. Совпадение можно сделать еще более полным, слегка изменив параметры эллипсоида.

### § 93. Сила тяжести на поверхности нормального сфероида

Потенциал силы тяжести  $W$  для нормального сфероида выражен при помощи полярных координат. Поэтому силу тяжести удобно вычислять по формуле:

$$g^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2,$$

где для краткости положено:

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad W_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad W_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \psi}.$$

Так как в рассматриваемых нами условиях  $W_2$  и  $W_3$  очень малы по сравнению с  $W_1$ , то эту формулу можно заменить, ограничиваясь членами второго порядка, такой:

$$g = -W_1 \left( 1 + \frac{W_2^2 + W_3^2}{2W_1^2} + \dots \right). \quad (1)$$

Если за функцию  $W$  взять выражение § 92 (2), то в общем случае, когда  $A \neq B$ , для силы тяжести получим формулу вида:

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi \cos 2\psi), \quad (2)$$

содержащую долготный член. Наличие такого долготного члена в распределении силы тяжести на Земле подтверждается наблюдениями, как это видно, например, из формулы Хейсканена, приведенной в § 90.

Вычислим значения коэффициентов  $\beta$  и  $\beta_1$ , беря в потенциале притяжения § 92 (1) не два члена, как это делалось в предыдущем параграфе, а первые три члена. Долготный член формулы (2), который с достаточной для всех практических потребностей точностью может

быть вычислен при помощи функции  $\overline{W}$  предыдущего параграфа, нас при этом не интересует. Поэтому можно положить  $A = B$ . Следовательно:<sup>1</sup>

$$Y_2 = P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}; \quad Y_3 = 0;$$

$$Y_4 = P_4(\cos \theta) = \frac{35}{8} \cos^4 \theta - \frac{15}{4} \cos^2 \theta + \frac{3}{8}.$$

Сообразно с этим имеем:

$$W = \frac{fM}{r} \left[ 1 + \frac{\mu}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{5} \left( \frac{a}{r} \right)^4 \left( \frac{3}{35} - \frac{6}{7} \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \right) + \frac{1}{2} q \left( \frac{r}{a} \right)^3 \sin^2 \theta \right], \quad (3)$$

где через  $a$  обозначен радиус экватора рассматриваемого уровня сфероида;  $\mu$  и  $q$  определяются равенствами § 92 (5). Наконец,  $\nu$  есть некоторая постоянная величина, которую можно вычислить либо зная распределение масс внутри планеты, либо сравнивая полученную для силы тяжести формулу (2) с результатами наблюдений.

Коэффициент  $\nu$  мы будем считать величиной второго порядка малости по отношению к  $\mu$  и  $q$ .

Дифференцирование равенства (3) дает:

$$W_1 = - \frac{fM}{r^2} \left[ 1 + \mu \left( \frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) - q' \left( \frac{r}{a} \right)^3 \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + \nu \left( \frac{a}{r} \right)^4 \left( \frac{3}{35} - \frac{6}{7} \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \right) \right],$$

$$W_2 = \frac{fM}{r^2} \left[ 2\mu \left( \frac{a}{r} \right)^2 + q \left( \frac{r}{a} \right)^3 \right] \sin \theta \cos \theta + \dots; \quad W_3 = 0.$$

Члены второго порядка в  $W_2$  нам не нужны.

Подставив эти выражения в (1), получим, удерживая лишь члены не выше второго порядка малости:

$$g = \frac{fM}{r^2} \left\{ 1 + \mu \left( \frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) - q \left( \frac{r}{a} \right)^3 \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + \nu \left( \frac{a}{r} \right)^4 \left( \cos^4 \theta - \frac{6}{7} \cos^2 \theta + \frac{3}{35} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ 2\mu \left( \frac{a}{r} \right)^2 + q \left( \frac{r}{a} \right)^3 \right]^2 (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) + \dots \right\}. \quad (4)$$

Чтобы получить  $g$  в функции угла  $\theta$ , сюда надо подставить значение  $r$ , даваемое уравнением  $W = W_0 = \text{const}$ , определяющим внешнюю

<sup>1</sup> Мы берем  $Y_3 = 0$ , так как считаем силовое поле планеты симметричным относительно ее экватора. Функция  $W$  не должна, следовательно, содержать нечетные степени  $\cos \theta$ .

поверхность планеты. Это уравнение, будучи написано в форме:

$$\frac{W_0}{fM} r = 1 + \frac{\mu}{3} \left(\frac{a}{r}\right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) + \\ + \frac{\nu}{5} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \left(\frac{3}{35} - \frac{6}{7} \cos^2 \theta + \cos^4 \theta\right) + \frac{1}{2} q \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sin^2 \theta, \quad (5)$$

легко решается относительно  $r$ . Вместо § 92 (8) здесь мы получим такое выражение:

$$\frac{r}{a} = 1 - \left(\mu + \frac{1}{2} q - \mu^2 + \frac{1}{2} \mu q + \frac{1}{2} q^2 + \frac{6}{35} \nu\right) \cos^2 \theta - \\ - \left(2\mu^2 - \frac{1}{2} \mu q - \frac{3}{4} q^2 - \frac{1}{5} \nu\right) \cos^4 \theta. \quad (6)$$

Отсюда, делая  $\theta = 0$ , найдем:

$$\alpha = \mu + \frac{1}{2} q + \mu^2 - \frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{7} \nu. \quad (7)$$

Для вычисления множителя перед фигурной скобкой в (4) надо взять:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 + \left(2\mu + q - 2\mu^2 + \mu q + q^2 + \frac{12}{7} \nu\right) \cos^2 \theta + \\ + \left(7\mu^2 + 2\mu q - \frac{3}{4} q^2 - 2\nu\right) \cos^4 \theta.$$

В членах, стоящих внутри фигурной скобки, можно брать менее точные выражения.

Окончательно будем иметь:

$$\frac{a^2 g}{fM} = 1 + \mu - q + \frac{3}{7} \nu + \left(-\mu + 2q + 4\mu^2 + 6\mu q + 2q^2 - \right. \\ \left. - \frac{18}{7} \nu\right) \cos^2 \theta - \left(7\mu^2 + 7\mu q + \frac{7}{4} q^2 - 3\nu\right) \cos^4 \theta.$$

При  $\theta = \frac{\pi}{2}$  это равенство дает:

$$\frac{a^2 g_e}{fM} = 1 + \mu - q + \frac{3}{7} \nu, \quad (8)$$

а потому:

$$g = g_e \left[1 + \left(-\mu + 2q + 5\mu^2 + 3\mu q + 4q^2 - \frac{18}{7} \nu\right) \cos^2 \theta - \right. \\ \left. - \left(7\mu^2 + 7\mu q + \frac{7}{4} q^2 - 3\nu\right) \cos^4 \theta\right]. \quad (9)$$

Делая  $\theta = 0$ , будем иметь:

$$\beta = \frac{g_p - g_e}{g_e} = -\mu + 2q - 2\mu^2 - 4\mu q + \frac{9}{4} q^2 + \frac{3}{7} \nu. \quad (10)$$

Сложив это равенство с (7), получим теорему Клеро (§ 90), с членами второго порядка в такой форме:

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} q - \mu^2 - 4\mu q + 2q^2 + \frac{2}{7} v. \quad (11)$$

Для Земли можно принять:

$$\mu = 0.001\,641\,12; \quad q = 0.003\,461\,58,$$

что дает:

$$\alpha + \beta = 0.008\,6525 + \frac{2}{7} v,$$

или

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} q - 0.000\,001\,45 + \frac{2}{7} v,$$

если эти значения использовать только для вычисления членов второго порядка.

Остается показать, как формула (9) может быть приведена к виду (2). Для этого нужно астрономическую широту  $\varphi$  выразить через геоцентрическую широту  $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Так как

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - \alpha)^2 \operatorname{tg} \varphi,$$

то известный ряд (т. II, § 82) дает:

$$\varphi - \varphi' = m \sin 2\varphi' + \frac{1}{2} m^2 \sin 4\varphi' + \dots,$$

где:

$$m = \frac{1 - (1 - \alpha)^2}{1 + (1 - \alpha)^2} = \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 + \dots$$

Итак

$$\varphi = \varphi' + \left( \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \sin 2\varphi' + \frac{1}{2} \alpha^2 \sin 4\varphi' + \dots,$$

откуда

$$\sin^2 \varphi = \cos^2 \theta + 4\alpha \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \dots$$

$$\sin^4 \varphi = \cos^4 \theta + 8\alpha \sin^2 \theta \cos^4 \theta + \dots$$

Подставив эти выражения в формулу (2), написанную в таком виде:

$$g = g_e [1 + (\beta - 4\beta_1) \sin^2 \varphi + 4\beta_1 \sin^4 \varphi],$$

получим:

$$g = g_e [1 + (\beta - 4\beta_1 + 4\alpha\beta) \cos^2 \theta - (4\alpha\beta - 4\beta_1) \cos^4 \theta].$$

Отождествление этого выражения с (9) дает:

$$-\beta(1 + 4\alpha) - 4\beta_1 = -\mu + 2q + 5\mu^2 + 3\mu q + 4q^2 - \frac{18}{7} v,$$

$$4\alpha\beta - 4\beta_1 = 7\mu^2 + 7\mu q + \frac{7}{4} q^2 - 3v.$$

Решив эти уравнения, получим уже найденное значение (10) для  $\beta$  и

$$\beta_1 = -\frac{11}{4} \mu^2 - \frac{1}{4} \mu q + \frac{9}{16} q^2 + 3\nu. \quad (12)$$

Подстановка только что указанных значений параметров в члены второго порядка формул (10) и (12) дает:

$$\begin{aligned} \beta &= -\mu + 2q - 0.000\,001\,15 + \frac{3}{7} \nu \\ \beta_1 &= -0.000\,002\,09 + 3\nu. \end{aligned}$$

Формулы (7) (10), (11) и (12) могли бы служить для определения параметра  $\nu$ . Однако в настоящее время этот параметр находится весьма ненадежно, так как коэффициенты  $\beta$  и  $\beta_1$  еще не могут быть получены с достаточной точностью. Причиной этого являются как трудности, связанные с исключением местных аномалий силы тяжести, так и трудности, связанные с приведением наблюдаемой силы тяжести к уровню моря.

Гельмерт<sup>1</sup> предложил выбрать параметр  $\nu$  так, чтобы уровенный сфероид (6) возможно меньше отличался от эллипсоида вращения. Наибольшая разность радиусов-векторов сфероида и эллипсоида (имеющего тот же радиус экватора и то же сжатие) равна, как легко видеть:

$$\frac{1}{12} a \left( \frac{21}{2} \mu^2 + 3\mu q - \frac{9}{8} q^2 - 3\nu \right). \quad (13)$$

Приравнивая эту разность нулю, получим:

$$\nu = \frac{7}{2} \mu^2 + \mu q - \frac{3}{8} q^2 = 0.000\,010\,61.$$

Если вместе с де Ситтером принять для Земли форму сфероида § 87 (4), где  $\chi = 0.000\,000\,50$ , то для отождествления сфероида (6) с этим сфероидом (наибольшее отступление которого от эллипсоида равно—3.2 м), надо положить  $\nu = 0.000\,011\,11$ .

Примечание. Формула (8) позволяет установить зависимость между величинами:

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{fM}, \quad q' = \frac{\omega^2 a}{g_e}.$$

Она дает

$$\frac{q}{q'} = 1 + \mu - q + \frac{3}{7} \nu \quad (14)$$

с точностью до членов первого порядка включительно.

<sup>1</sup> F. R. Helmert, Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde, Encyklopädie der math. Wissenschaften; Bd. VI, 1 B; 1910.

## § 94. Сжатие Земли. Астрономические методы определения сжатия

Сжатие Земли, являющееся одной из основных астрономических постоянных, может быть определено несколькими принципиально различными путями. Весьма важно установить, насколько совпадают значения сжатия, получаемые различными способами.

Старейшим из употребляемых для этой цели способов является, как известно, обработка градусных измерений, т. е. сопоставление угловых и линейных расстояний между точками земной поверхности. Не останавливаясь на результатах, имеющих только историческое значение, отметим следующие определения:

1) *эллипсоид Хейфорда (1910):*

$$a = 6\,378\,388 \text{ м} \pm 53 \text{ м}; \quad 1/\alpha = 297.0 \pm 1.2,$$

основанный на материалах астрономо-геодезической сети США. Средние ошибки приведены по исследованию Гельмерта (1911), который однако считает их несомненно преуменьшенными. В 1930 г. Международным геодезическим союзом этот эллипсоид был рекомендован для использования в геодезических работах всех стран;

2) *эллипсоид Красовского (1942):*

$$a = 6\,378\,245 \text{ м}; \quad 1/\alpha = 298.3,$$

выведенный в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэросъемки и картографии (Москва) из обработки астрономо-геодезических сетей СССР и США, а также отдельных дуг Западной Европы.

Возможная ошибка этого результата оценивается не свыше 100 м в размере большой полуоси, и не свыше, чем полторы единицы в знаменателе сжатия.

Не подлежит сомнению, что эллипсоид Красовского является в настоящее время наилучшим из результатов, полученных для фигуры Земли путем обработки астрономо-геодезических материалов.<sup>1</sup> Но при сравнении его с тем, что дают другие методы определения сжатия, надо иметь в виду, что он выведен из материалов, относящихся только к северному полушарию. Между тем, не исключена возможность некоторой асимметрии между северным и южным полушариями.

Второй способ определения сжатия Земли основан на нахождении коэффициентов формулы нормальной силы тяжести:

$$\gamma_0 = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi)$$

из гравиметрических наблюдений, произведенных в различных пунктах земной поверхности.

<sup>1</sup> Относительно дальнейших подробностей см. Ф. И. Красовский, Руководство по высшей геодезии, часть II, Москва, 1942.

Зная эти коэффициенты, легко найти сжатие  $\alpha$  (§§ 90, 92, 95). Сжатие, как мы видели, получается практически с той же самой точностью, с какой найден коэффициент  $\beta$ .

Из результатов, полученных этим путем, отметим следующие:

	$1/\alpha$
Гельмерт (1901) . . . . .	298.3
Гельмерт (1915) . . . . .	296.7
Боуи (1917) . . . . .	297.4
Хейсканен (1928) . . . . .	$297.3 \pm 0.3$
Хейсканен (1938) . . . . .	$297.8 \pm 0.4$

Этот способ определения сжатия имеет огромное преимущество перед предыдущим в том отношении, что наблюдениями силы тяжести может быть покрыта (и притом достаточно равномерно) вся земная поверхность. Быстрое развитие гравиметрической съемки позволяет надеяться на получение в близком будущем весьма точных результатов именно этим способом.

Принципиально отличными от двух первых способов, использующих измерения направления и величины силы тяжести в точках земной поверхности, являются астрономические методы.

Благодаря сжатию уровенных слоев, силовое поле Земли отлично от силового поля материальной точки. Это обстоятельство вызывает, с одной стороны, явления прецессии и нутации, с другой — производит довольно значительные возмущения в движении Луны. Эти явления и могут быть использованы для определения сжатия Земли; причем, в силу теоремы Стокса, получается сжатие именно уровенной поверхности, принимаемой нами за математическую фигуру Земли.

Найденные из наблюдений коэффициенты прецессионных формул дают динамическое сжатие Земли:

$$H = \frac{C - A}{C}, \quad (1)$$

которое, как было показано в § 86 и 87, позволяет определить сжатие.

Точность этого метода в настоящее время лимитируется не столько точностью в определении прецессионной постоянной (ошибка которой не превосходит 0.01%), сколько недостаточно точным знанием других фундаментальных постоянных. Как уже было сказано (стр. 228), в самое последнее время массу Луны пришлось увеличить на 0,3% принимавшейся ранее величины. Это заставило уменьшить динамическое сжатие на 0,2% его прежней величины.

Наилучшим значением, полученным этим способом, в настоящее время следует признать сжатие, вычисленное Буллардом (стр. 250):

$$1/\alpha = 297.34 \pm 0.05.$$

Нужно, однако, напомнить; что в основе рассматриваемого метода лежит допущение применимости теории гидростатического равновесия



к Земле в целом. Таким образом, совпадение или несовпадение получаемого здесь значения  $\alpha$  с тем, что дают другие методы, служит, прежде всего, проверкой этой гипотезы.

Другие астрономические методы основаны на определении параметра

$$\mu = \frac{3}{2} \frac{C-A}{Ma^2} \quad (2)$$

из коэффициентов лунных неравенств, даваемых наблюдениями.

Подробное рассмотрение вопроса<sup>1</sup> показывает, что среди многочисленных периодических неравенств, зависящих от этого параметра, только два имеют значительные амплитуды, а потому могут быть найдены из наблюдений с достаточной относительной точностью. Если взять числовые значения, даваемые теорией Делоне, то эти неравенства имеют такой вид:

$$\delta\lambda = (4360''\mu - 0''.061) \sin \Omega,$$

$$\delta\beta = -(4959''\mu + 0''.226) \sin L,$$

где  $\lambda$  и  $\beta$  — долгота и широта Луны; через  $L$  и  $\Omega$  обозначены ее средняя долгота и средняя долгота восходящего узла ее орбиты.

Неравенство в долготе, имеющее период в 18.6 года, определяется из наблюдений менее точно, нежели неравенство в широте, период которого равен одному месяцу. Поэтому остановимся подробнее на этом последнем.

Теория Брауна и современные значения постоянных дают для неравенства в широте следующее выражение:<sup>2</sup>

$$\delta\beta = -B \sin L, \quad B = 4946''.1\mu + 0''.208;$$

так что

$$\mu = 0.000\,202\,18 (B - 0''.208).$$

Сделав сопоставление всех наиболее надежных определений коэффициента  $B$  из наблюдений, К. Л. Баев принял

$$B = 8''.315 \pm 0''.035.$$

Подставив соответствующее значение

$$\mu = 0.001\,6391 \pm 0.000\,0071$$

в формулу § 93 (7) и приняв  $\nu = 0.000\,0111$ , получим:

$$\alpha = 1/296.9 \pm 0.6.$$

<sup>1</sup> G. Hill, Determination of the inequalities of the Moon's motion which are produced by the figure of the Earth (Astronomical Papers of the American Ephemeris, Vol. III, 1884 = Collected Works, Vol. II, 1906).

<sup>2</sup> К. Л. Баев, Определение фигуры Земли из лунного неравенства. Астр. журнал, 10, 1933.

Вековые движения перигелия и узла лунной орбиты также могут быть использованы для определения параметра  $\mu$ . Этот вопрос был подробно рассмотрен в работах де Ситтера и Джеффриса.<sup>1</sup>

Сопоставление величин, даваемых теорией Брауна без учета отклонений Земли и Луны от сферической структуры, с тем, что получается из наблюдений, приводит к следующим результатам:

	Перигей	Узел
Главный член (исправленный за изменение массы Земли)	$+ 146\,426''.24 \pm 0''.050$	$- 69671''.85 \pm 0''.025$
Планетные члены . . . . .	$+ 2.54 \pm 0.015$	$- 1.38 \pm 0.015$
Теоретическая величина . . .	$+ 146\,428.78$	$- 69673.23$
Наблюдаемая величина <sup>2</sup> . . .	$+ 146\,435.296 \pm 0.006$	$- 69679.417 \pm 0.012$

Таким образом, наблюдаемое нами влияние фигур Земли и Луны выражается следующими годовыми движениями перигея и узла:

$$d\pi = + 6''.516 \pm 0''.052, \quad d\Omega = - 6''.187 \pm 0''.031. \quad (3)$$

Теоретическое изучение этого влияния показывает, что оно выражается формулами:

$$\left. \begin{aligned} d\pi &= + 3891''.1\mu + 390''J' - 1027''K', \\ d\Omega &= - 3647.5\mu - 470 J' - 235 K'. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь положено:

$$J' = \frac{3}{2} \frac{2C' - A' - B'}{2M'a'^2}, \quad K' = \frac{3}{2} \frac{B' - A'}{M'a'^2},$$

где через  $a'$  и  $M'$  обозначены большая полуось лунного экватора и масса Луны;  $A' < B' < C'$  — ее главные моменты инерции.

Приравняв (3) и (4), получим два уравнения с тремя неизвестными.

Теория вращения Луны дает возможность получить еще одно уравнение. Она устанавливает следующую зависимость между главными моментами инерции Луны:

$$\beta(1 + 0.0047f) = 0.000\,6286 \pm 0.000\,0015 \text{ (вероят. ошиб.)},$$

где

$$\alpha = \frac{C' - B'}{A'}; \quad \beta = \frac{C' - A'}{B'}; \quad f = \frac{\alpha}{\beta}.$$

<sup>1</sup> Помимо указанной в § 87 работы де Ситтера 1915 г., отметим следующие: W. de Sitter, On the most probable values of some astronomical constants, first paper, constants connected with the Earth (Bull. of the Astr. Institutes of the Netherlands 4, 1927).

H. Jeffreys, On the figures of the Earth and Moon (Monthly Notices, 97, 1937).

<sup>2</sup> Чтобы сделать полученные из наблюдений значения вполне сравнимыми с теорией Брауна, из них вычтена релятивистская поправка прецессии, равная  $+ 0''.019$ .

Так как:

$$g'\beta = J' + \frac{1}{2} K', \quad f = \frac{2J' - K'}{2J' + K'}, \quad g' = \frac{3C'}{2M'a'^2},$$

то приняв вместе с Джеффрисом

$$g' = 0.596 \pm 0.001,$$

получим такое уравнение:

$$1.0047 J' + 0.4976 K' = 0.0003746 \pm 0.0000011. \quad (5)$$

Решение уравнений (4) и (5) дает:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.0016483 \pm 0.0000085, \\ J' &= 0.000356 \pm 0.000024, \\ K' &= 0.000035 \pm 0.000051. \end{aligned}$$

Соответствующее значение сжатия по формуле § 93 (7) таково:

$$\alpha = 1/296.1 \pm 0.7.$$

Мы видим, таким образом, что астрономические методы дают для сжатия Земли значения, совпадающие, в пределах достижимой точности, с результатами, выводимыми из геодезических и гравиметрических определений.

Точность, с какою получается эта основная постоянная столь разнообразными методами, оказывается одного порядка.

В заключение можно отметить, что сжатие Земли может быть еще определено из сравнения наблюдаемой величины лунного параллакса с величиной, даваемой третьим законом Кеплера. Однако, благодаря систематическим ошибкам, отягчающим наблюдения Луны, этот способ недостаточно точен по сравнению с другими указанными выше методами.

**Примечание.** Астрономические наблюдения позволяют находить, как мы только что видели, две величины  $\mu$  и  $H$ , являющиеся функциями распределения масс внутри Земли.

Однако, для суждения о внутреннем строении Земли обе эти величины дают в сущности одно и то же.

В самом деле, выражения (1) и (2) дают:

$$\frac{\mu}{H} = \frac{3C}{2Ma^2}.$$

Но мы знаем, что (§ 79):

$$C = \frac{8}{15} \pi \Gamma, \quad M = \frac{4}{3} \pi D_1,$$

где, как обычно, ( $r_1 = 1$ ):

$$\Gamma = \int_0^1 x d(r^5), \quad D_1 = \int_0^1 x d(r^3).$$

Следовательно:

$$\frac{\mu}{H} = \frac{3}{5} a^{-2} \frac{\Gamma}{D_1}.$$

С точностью до членов первого порядка формула Даламбера § 86 (4) дает:

$$a^{-2} = 1 - \frac{2}{3} \alpha = 1 - \frac{1}{3} q_1 - \frac{2}{5} H \frac{\Gamma}{D_1},$$

поэтому:

$$\frac{\mu}{H} = \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{1}{3} q_1 - \frac{2}{5} H \frac{\Gamma}{D_1} \right) \frac{\Gamma}{D_1}.$$

Исключение  $\Gamma/D_1$ , при помощи соотношения § 86 (9), дает зависимость между  $\mu$  и  $H$ , в которой внутреннее строение Земли сказывается лишь через посредство почти постоянной величины  $F_0$ . Когда  $\mu$  и  $H$  получены из наблюдений, то это соотношение может быть использовано для определения  $F_0$ .

### § 95. Проблема Стокса для трехосного эллипсоида, близкого к сфере

Проблема Стокса была нами решена (§ 88) в случае, когда уровенная поверхность, ограничивающая планету, может быть принята за эллипсоид вращения. Чтобы придать этому решению форму, удобную для практических приложений, полученные выражения были разложены по степеням сжатия с точностью до вторых степеней малых величин (§ 90).

Решение проблемы Стокса для случая уровенной поверхности, имеющей форму трехосного эллипсоида, легко получается простым обобщением приема, примененного в § 88. Однако, такое решение в общем случае, когда трехосный эллипсоид какой угодно, не представляет практического интереса.<sup>1</sup> Ограничимся поэтому рассмотрением только того частного случая этой задачи, который может найти некоторое применение, а именно — случая трехосного эллипсоида, очень мало отличающегося от сферы.

Итак, будем считать, что уровенная поверхность, заключающая все притягивающие массы, определяется уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

где

$$b = a(1 - \alpha'), \quad c = a(1 - \alpha).$$

<sup>1</sup> Его можно найти в книге Пизетти, указанной на стр. 135. Со всеми возможными подробностями этот вопрос рассмотрен в работе: Д. В. Загребин, Уровенный трехосный эллипсоид и сила тяжести на его поверхности. Изд. АН СССР, 1948.

Проблема Стокса приводится (§ 88) к нахождению функции  $V$ , гармонической вне поверхности (1) и принимающей на этой поверхности значения

$$V = \text{const} - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (2)$$

Определим такую функцию, пренебрегая малыми величинами второго порядка, если  $\alpha$ ,  $\alpha'$  и  $\omega^2$  считать величинами первого порядка малости.

С принятой нами точностью уравнение (1) можно заменить таким:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2\alpha'y^2 - 2\alpha z^2 \quad (3)$$

или

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{\alpha'}{a^3} y^2 + \frac{\alpha}{a^3} z^2, \quad (4)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Учитывая § 35 (8), можно функцию  $V$  искать в форме:

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{f}{r^5} (\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2), \quad (5)$$

где  $M$  обозначает массу планеты. Так как  $V$  гармоническая функция, то подлежащие определению коэффициенты  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  должны удовлетворять соотношению

$$\lambda + \mu + \nu = 0. \quad (6)$$

Для точек, лежащих на поверхности (1), функцию (5) можно, пользуясь соотношениями (3) и (4), представить так:

$$V = \frac{fM}{a} (1 + \alpha) - \frac{f\nu}{a^3} - \frac{fM}{a^3} [\alpha x^2 + (\alpha - \alpha') y^2] + \\ + \frac{f}{a^5} [\lambda - \nu] x^2 + (\mu - \nu) y^2].$$

Отождествление этого выражения с (2) дает два уравнения:

$$\frac{M}{a^3} \alpha - \frac{1}{a^5} (\lambda - \nu) = \frac{\omega^2}{2f}; \\ \frac{M}{a^3} (\alpha - \alpha') - \frac{1}{a^5} (\mu - \nu) = \frac{\omega^2}{2f}.$$

Таким образом, учитывая (6), получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{3} Ma^2 (\alpha + \alpha') - \frac{\omega^2 a^5}{6f}, \\ \mu &= \frac{1}{3} Ma^2 (\alpha - 2\alpha') - \frac{\omega^2 a^5}{6f}, \\ \nu &= \frac{1}{3} Ma^2 (-2\alpha + \alpha') + \frac{\omega^2 a^5}{3f}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Обратимся теперь к вычислению ускорения силы тяжести на поверхности уровня эллипсоида (1). Имеем:

$$g^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2,$$

где

$$W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

причем  $V$  определяется равенствами (5) и (7).

Следовательно, в пределах принятой точности,

$$g = \frac{fM}{r^2} \left[ 1 + \frac{3}{Mr^4} (\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2) - \frac{\omega^2 r}{fM} (x^2 + y^2) \right].$$

Подстановка сюда значений (7) дает, если исключить  $r$  при помощи равенства (3):

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[ 1 + \left( \alpha + \alpha' - \frac{3}{2} q \right) \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \alpha - \frac{8}{2} q \right) \left( \frac{y}{a} \right)^2 + (\alpha' + q) \left( \frac{z}{a} \right)^2 \right],$$

где

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{fM}.$$

Положим, отбрасывая члены первого порядка:

$$x = a \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = a \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = a \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  есть астрономическая широта точки  $(x, y, z)$ , а  $\lambda$  — ее долгота, считаемая от меридиана, проходящего через ось  $x$ .

Подстановка этих выражений в последнюю формулу дает, после некоторых очевидных преобразований:

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[ 1 + \alpha - \frac{3}{2} q + \frac{1}{2} \alpha' + \left( \frac{5}{2} q - \alpha + \frac{1}{2} \alpha' \right) \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \alpha' \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \right].$$

Это равенство можно привести к такому виду:

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda), \quad (8)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} g_e &= \frac{fM}{a^2} \left( 1 + \alpha - \frac{3}{2} q + \frac{1}{2} \alpha' \right), \\ \beta &= \frac{5}{2} q - \alpha + \frac{1}{2} \alpha', \\ \beta_1 &= 0, \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Наша задача, заключающаяся в получении членов первого порядка относительно  $\alpha$  и  $\alpha'$ , таким образом решена.

Для Земли<sup>1</sup>

$$\alpha = 1/298.3, \quad \alpha' = 1/30\,000,$$

т. е.  $\alpha'$  примерно в 100 раз меньше, чем  $\alpha$ .

Поэтому, удерживая члены первого порядка относительно  $\alpha'$ , следует сохранить члены второго порядка относительно  $\alpha$  и величины  $q$ .

Но для того чтобы получить эти члены, нет надобности решать проблему Стокса для трехосного эллипсоида с точностью до членов второго порядка — их можно взять из формул, полученных для эллипсоида вращения (§ 90).

Таким образом, комбинируя (9) с формулами § 90 и вводя вместо  $q$  величину

$$q' = \frac{\omega^2 a}{g_e} = \frac{q}{1 + \alpha - \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}\alpha'} = q \left( 1 - \alpha + \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}\alpha' + \dots \right),$$

будем иметь для коэффициентов формулы (8) такие окончательные выражения:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{5}{2} q' - \alpha - \frac{17}{14} \alpha q' + \frac{1}{2} \alpha', \\ \beta_1 &= \frac{5}{8} \alpha q' + \frac{1}{4} \alpha^2, \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Итак, если брать трехосный эллипсоид за приближение к форме геоида (что позволяет приближено учесть одно из наибольших отступлений геоида от эллипсоида вращения), то формула (8) с коэффициентами (10) даст всю нужную для практических применений точность.

В заключение отметим, что сопоставление формулы (8) с наблюдениями, позволяющее определить  $g_e$ , а следовательно и  $q$ , дает возможность найти массу и среднюю плотность Земли.

<sup>1</sup> По исследованиям Ф. Н. Красовского: см. его Руководство по высшей геодезии, указанное на стр. 270.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аномалии силы тяжести 259  
 Апионид 196  
 Ассоциированные функции Лежандра 100, 109  
 Атмосферы светил 150  
 Венера 178  
 Гармоники зональные 101  
 — секториальные 102  
 — сферические 101  
 — тессеральные 102  
 Гармонические функции 70—77, 80—82  
 Геоид 250, 259  
 Градиент 11  
 Грушевидная фигура равновесия 161—164, 196  
 Земля (внутреннее строение) 236—238, 246, 250, 271  
 — (плотность) 231, 232, 236—238, 248, 278  
 Зодиакальный свет 151  
 Изопотенциальная поверхность 12  
 Изостатическая поверхность 246  
 Интеграл Лапласа (P. S. Laplace) 104  
 Космогоническая гипотеза Лапласа 152, 153  
 Коэффициенты Ламе (G. Lamé) 10  
 Краевые задачи теории потенциала 82, 85, 92, 93, 117, 118  
 Лапласиан 11  
 Луна (внутреннее строение) 178, 213  
 — (диабрация) 213, 273  
 — (масса) 228, 271  
 — (плотность) 178  
 Лунные неравенства, применяемые для определения сжатия Земли 272, 273  
 Марс 178  
 Меркурий 178  
 Модель Роша (E. Roche) 127, 147, 150, 153  
 Нептун 178  
 Ондюляции геоида 259  
 Ортогональность сферических функций 108, 110, 111  
 Отклонение отвеса 259, 261  
 Параметр конденсации 218, 239  
 — сжатия 239  
 Поверхность относимости 258  
 Полиномы Лежандра 97, 104—109  
 — сферические 94, 97, 103  
 Потенциал 11, 14, 23, 24, 75, 83, 119, 123  
 Потенциал двойного слоя 21  
 — однородного тела 36  
 — однородного эллипсоида 52, 56, 59  
 — простого слоя 20  
 — сферического слоя 122  
 Потенциала вторые производные 28  
 — первые производные 19, 24, 28  
 — характеристические свойства 33, 77  
 Поток вектора 10  
 Поток силы притяжения 17, 32  
 Предел Крудели (U. Crudeli) 143  
 — Пуанкаре (H. Poincaré) 140  
 — Роша (E. Roche) 209, 211  
 Пределы сжатия планеты 153, 176, 177, 178  
 Предельная поверхность 150  
 Приливная деформация 199, 200  
 Приливные эллипсоиды 202  
 Принцип Дирихле (P. Lejeune-Dirichlet) 83, 84  
 Притяжение непрерывно распределенных масс 17, 20, 24  
 — однородного эллипсоида 49, 50, 54  
 — точечных масс 13  
 — эллипсоида вращения 61, 63  
 — эллипсоидального тела 64, 66  
 Проблема Дирихле 83, 84, 86, 251  
 — — для сферы 86, 89, 117  
 — Клеро (A. C. Clairaut) 214  
 — Нейманна (C. Neumann) 83, 92, 118  
 — Роша (E. Roche) 199, 205  
 — Стокса (G. G. Stokes) 245  
 — — для эллипсоида вращения 251—253  
 — — для трехосного эллипсоида 275—278  
 — Чебышева 161, 163  
 Разложение потенциала 119, 123  
 Разложение по сферическим функциям 113  
 Рекуррентные соотношения 107  
 Сатурн 178, 209  
 Сжатие динамическое 213, 220, 244, 271  
 — Земли 178, 228, 230, 242, 257, 258  
 — — (астрономические методы его определения) 271, 272, 274  
 Сила тяжести (вертикальный градиент) 69, 157  
 — — (на нормальном сфероиде) 265  
 — — (на уровне эллипсоида) 174, 258, 257, 277  
 — — (нормальная) 257, 258, 270



- Софокусные эллипсоиды 46  
 Спутник бесконечно малой массы 205—209  
 — конечной массы 209—211  
 Стоксовы постоянные 145  
 Сферические полиномы 94, 97, 103  
 — функции 95, 97, 101, 113  
 Сферонд 62, 216—221  
 — Клэро (A. C. Clairaut) 221, 250  
 — нормальный 262, 265  
 — эллипсондальный 62, 222  
 Сферонда масса 217  
 — моменты инерции 218—221  
 Теорема Айвори (J. Ivory) 44, 55  
 — Гаусса (C. F. Gauss) 16, 32  
 — — (о среднем значении) 81  
 — Гольдера (O. Hölder) 31  
 — Гюйгенса (Ch. Huygens) 155  
 — Дирихле (P. Lejeune-Dirichlet) 33  
 — Калландро (O. Callandreau) 240  
 — Клэро (о сжатии Земли) 257, 268  
 — Лагранжа (J. L. Lagrange) 187  
 — Лапласа (P. S. Laplace) 44, 49, 59  
 — Лихтенштейна (L. Lichtenstein) 138  
 — Ляпунова 189  
 — Ньютона (J. Newton) 176  
 — Пикара (E. Picard) 91  
 — Пуанкаре (H. Poincaré) 130  
 — сложения для сферических функций 113  
 — Стокса (G. G. Stokes) 144  
 — Сэже (J. F. Salgey) 67, 69  
 Теоремы Клэро (A. C. Clairaut) 224—227  
 — Шалля (M. Chasles) 46, 48  
 Теория изостазии 246  
 — Клэро (A. C. Clairaut) 214, 221—228, 245  
 — Лапласа (P. S. Laplace) 215  
 — Ляпунова 7, 215  
 — Слудского 260  
 Точка бифуркации 181, 183, 189  
 Уравнение Вавра (R. Wavre) 132  
 — Клэро (A. C. Clairaut) 223, 224, 242  
 — Лапласа (P. S. Laplace) 15, 19  
 — Пуассона (S. D. Poisson) 31  
 — Радо (R. Radau) 242, 249  
 Уран 178  
 Уровенные поверхности 131  
 Уровенный эллипсоид (вращения) 257  
 — — (трехосный) 275  
 Устойчивость фигур равновесия 161, 164, 185—198, 204, 207, 211  
 Фигура Земли 125, 258, 261  
 — Луны 212  
 Фигуры равновесия однородной несжимаемой жидкости 127, 159—186  
 Формула Брунса (H. Bruns) 156  
 — Даламбера (J. D'Alembert) 229, 230, 242  
 — Клэро (A. C. Clairaut) 245, 255, 256  
 — Максвелла (J. Maxwell) 102  
 — Остроградского 9  
 — Пуанкаре (H. Poincaré) 13  
 — Родрига (O. Rodrigues) 99  
 — Сомильяна (C. Somigliana) 255  
 — Хейсканена (W. Helsing) 258  
 Формулы Грина (G. Green) 12, 79  
 Функция Грина (вторая) 93  
 — — (первая) 85, 87  
 — Нейманна (C. Neumann) 93  
 Эквипотенциальная поверхность 12  
 Эллипсоид Красовского 177, 270  
 — международный (Хейфорда) 257, 270  
 Эллипсоиды бифуркации 173, 180  
 — Маклорена 159, 167—173, 181, 195  
 — Якоби (C. Jacobi) 160, 167, 178—186, 195  
 Энергия масс (гравитационная) 38—40  
 Юпитер 178, 214

# Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
30	10 сверху	$= -$	$=$	Корр.
35	11 снизу	$r$	$R$	Авт.
78	16 сверху	$\frac{A}{R^2}$	$\frac{A}{R}$	"
107	7 снизу	$\sum_0^{\infty}$	$= \sum_0^{\infty}$	Корр.
110	8 сверху	$k = 1$	$k - 1$	"
146	6 "	осей	моментов	Авт.
146	7 "	этих осей	осей инерции	"
146	12 снизу	квадратной	квадратичной	"
230	9 "	Такая	Такова	"
248	5 "	$+\frac{4}{7}$	$+\frac{4}{7} \chi$	Тин.