

ВАН ЦЗИ-ДЕ

ПРИКЛАДНАЯ
ТЕОРИЯ
УПРУГОСТИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ - 1959



APPLIED ELASTICITY

CHI-TEH WANG, Sc. D.

Professor of Aeronautical Engineering
New York University

McGRAW-HILL PUBLISHING COMPANY LTD
NEW YORK LONDON TORONTO

ВАН ЦЗИ-ДЕ

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Перевод с английского
И. Н. ЗЕМЛЯНСКИХ

Под редакцией А. С. ВОЛЬМИРА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

Ван Ци-де

Прикладная теория упругости.

Редактор *Г. И. Фельдман.*

Техн редактор *К. Ф. Брудно.*

Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 7/V 1959 г.

Подписано к печати 14/IX 1959 г.

Бумага 60×92/16.

Физ. печ. л. 25,0.

Условн. печ. л. 25,0.

Уч.-изд. л. 25,03.

Тираж 7 000 экз.

T-06390.

Цена книги 14 р.

Заказ 369.

Государственное издательство физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	8
Из предисловия автора	10
Глава 1. Теория напряжений	11
1.1. Определение и обозначение напряжений	11
1.2. Дифференциальные уравнения равновесия	13
1.3. Определение напряжения в точке	17
1.4. Главные напряжения и круг Мора	20
1.5. Граничные условия, выраженные через заданные поперечные силы	25
Глава 2. Теория деформаций	26
2.1. Компоненты деформации	26
2.2. Определение деформации в точке	28
2.3. Уравнения совместности	32
Глава 3. Соотношения между напряжениями и деформациями. Общие уравнения теории упругости	35
3.1. Идеализация материалов, применяемых в технике	35
3.2. Обобщенный закон Гука	36
3.3. Упругие постоянные, применяемые в технике	40
3.4. Постановка задач теории упругости	43
3.5. Энергия деформации	46
3.6. Существование решения и его однозначность	51
3.7. Принцип Сен-Венана	54
Глава 4. Плоское напряженное состояние и плоская деформация	56
4.1. Основные дифференциальные уравнения	56
4.2. Изгиб консоли с узким прямоугольным сечением силой, приложенной на конце	60
4.3. Основные уравнения в цилиндрических координатах	66
4.4. Толстая труба под действием равномерного давления. Соединения с натягом	70
4.5. Влияние круглых отверстий малого диаметра на напряжения в пластинках. Концентрация напряжений	75
4.6. Напряжения во вращающихся дисках и цилиндрах	79
4.7. Вращающийся диск переменной толщины	84
4.8. Температурные напряжения в тонких дисках и длинных цилиндрах	87
Глава 5. Кручение стержней различной формы	94
5.1. Кручение призматических стержней	94
5.2. Кручение стержней круглого и эллиптического сечений	99
5.3. Кручение стержней прямоугольного сечения	103

5.4. Мембранная аналогия	108
5.5. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля	114
5.6. Кручение тонкостенных труб	117
5.7. Кручение круглых валов переменного диаметра	121
Глава 6. Метод конечных разностей и метод релаксации	125
6.1. Конечные разности	125
6.2. Уравнения в конечных разностях	129
6.3. Решение уравнений в конечных разностях	131
6.4. Метод релаксации	134
6.5. Групповая релаксация и линии симметрии	139
6.6. Уравнения в конечных разностях высшего порядка	143
6.7. Метод экстраполяции	151
6.8. Случай криволинейного контура. Изменение шага клетки	159
6.9. Другие граничные условия	162
Глава 7. Энергетические принципы и вариационные методы	166
7.1. Принцип потенциальной энергии	166
7.2. Принцип дополнительной энергии	171
7.3. Рассмотрение принципов потенциальной и дополнительной энергии как вариационных принципов	174
7.4. Метод Рэлея — Ритца	181
7.5. Метод Галеркина	187
7.6. Метод Бицено — Коха	191
7.7. Теорема взаимности и теоремы Кастильяно	193
Глава 8. Применение комплексных переменных	197
8.1. Комплексные переменные и комплексные функции	197
8.2. Некоторые основные зависимости теории комплексных переменных	200
8.3. Кручение призматических стержней	205
8.4. Кручение стержня эллиптического сечения	211
8.5. Задачи о плоском напряженном состоянии и плоской деформации	214
8.6. Решение задач о плоском напряженном состоянии и плоской деформации в полярных координатах	219
8.7. Общее решение задачи для бесконечной пластинки с круговым отверстием	220
8.8. Бесконечная пластинка, находящаяся под действием сосредоточенных сил и моментов	225
8.9. Круглая пластинка, произвольно нагруженная по контуру	227
8.10. Пластинки, ограниченные двумя концентрическими окружностями	230
8.11. Растяжение пластинки с эллиптическим отверстием. Метод конформных преобразований	233
Глава 9. Изгиб и сжатие стержней. Устойчивость упругих систем	239
9.1. Чистый изгиб призматических стержней	239
9.2. Призматические стержни при совместном действии изгиба и сжатия	244
9.3. Призматические стержни под действием осевого сжатия. Устойчивость упругого стержня	247
9.4. Критические нагрузки для стержней постоянного поперечного сечения	254

9.5.	Выпучивание рам. Стержни с упруго защемленными концами	259
9.6.	Выпучивание стержней переменного поперечного сечения	261
9.7.	Разрушение реальных стержней	265
9.8.	Боковое выпучивание балок с узким поперечным сечением	267
Глава 10.	Численные методы определения критических нагрузок	272
10.1.	Применение метода конечных разностей	272
10.2.	Метод релаксации	278
10.3.	Приближения высших порядков в методе конечных разностей	281
10.4.	Методы экстраполяции	282
10.5.	Энергетический метод	289
10.6.	Вывод формулы Рэлея из принципа потенциальной энергии	298
10.7.	Погрешности при определении критических нагрузок энергетическим методом	304
10.8.	Определение нижней границы критических нагрузок для стержней переменного поперечного сечения	308
Глава 11.	Изгиб и выпучивание тонких пластинок	314
11.1.	Дифференциальное уравнение изгиба тонких пластинок	314
11.2.	Граничные условия	319
11.3.	Изгиб шарнирно опертых прямоугольных пластинок	321
11.4.	Изгиб прямоугольных пластинок с защемленными кромками. Метод Рэлея — Ритца	325
11.5.	Изгиб круглых пластинок	331
11.6.	Прямоугольные пластинки при совместном действии поперечной нагрузки и сил в срединной плоскости	335
11.7.	Выпучивание шарнирно опертых прямоугольных пластинок, подвергающихся равномерному сжатию в одном направлении	340
11.8.	Выпучивание свободно опертой квадратной пластинки, сжатой в двух перпендикулярных направлениях. Приближенное решение по методу конечных разностей	342
11.9.	Выпучивание шарнирно опертых прямоугольных пластинок при сдвиге. Энергетический метод	345
Глава 12.	Теория тонких оболочек и изогнутых пластинок	351
12.1.	Элементы дифференциальной геометрии поверхности	351
12.2.	Уравнения равновесия	364
12.3.	Безмоментная теория оболочек вращения	369
12.4.	Безмоментная теория круговых цилиндрических оболочек	376
12.5.	Определение компонентов деформации	378
12.6.	Общая теория круговых цилиндрических оболочек	384
12.7.	Круговая цилиндрическая оболочка при осесимметричном нагружении	386
12.8.	Цилиндрические оболочки при несимметричном нагружении	390
12.9.	Выпучивание круговой цилиндрической оболочки под действием равномерного осевого сжатия	394
	Предметный указатель	398

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Данная книга может служить пособием по теории упругости для сравнительно широкого круга читателей: студентов старших курсов высших технических учебных заведений, аспирантов, инженеров, научных работников.

Первые три главы посвящены общему исследованию поля напряжений и деформаций, формулировке закона Гука и выводу основных уравнений теории упругости. Здесь же излагается теорема об однозначности решений и принцип Сен-Венана. К этому разделу примыкает седьмая глава, в которой формулируются энергетические зависимости и, в частности, принцип дополнительной работы. В седьмой главе изложены также вариационные методы решения задач, причем наибольшее внимание уделено методам Ритца и Бубнова — Галеркина.

В четвертой главе рассмотрена плоская задача, в пятой главе — теория кручения стержней произвольного сечения. Дополнением к этим разделам служит восьмая глава: в ней для решения тех же задач применяются функции комплексной переменной.

Девятая глава содержит задачи, относящиеся к продольно-поперечному изгибу балок и устойчивости сжатых стержней, и некоторые сведения по устойчивости рам и по устойчивости плоской формы изгиба полосы.

Большое место в книге уделено численным методам решения задач. В шестой и десятой главах подробно изложены метод конечных разностей и метод релаксации. Дан ряд примеров на применение этих методов к задачам по кручению стержней и расчетам на устойчивость и сравнительный анализ результатов решения в различных приближениях.

Одиннадцатая и двенадцатая главы посвящены теории тонких пластинок и оболочек. Здесь приведен вывод общих уравнений, относящихся к оболочкам произвольного очертания. В качестве частных случаев рассмотрены оболочки вращения и безмоментные оболочки. Разобраны некоторые задачи по устойчивости пластинок. Дано решение одной задачи по устойчивости цилиндрической оболочки, в линейной постановке.

Изложение многих разделов иллюстрируется числовыми примерами. В конце каждого параграфа помещены задачи для самостоя-

тельного решения читателями. Математический аппарат книги отвечает примерно уровню подготовки, получаемой студентами вузов. Выкладки проводятся достаточно подробно. Читатели, имеющие математическую подготовку в объеме университетской программы, могут пропустить некоторые вступительные разделы по функциям комплексной переменной, по теории поверхностей и т. д.

Настоящая книга охватывает лишь часть разделов теории упругости и, конечно, не может заменить таких фундаментальных курсов, какими являются книги Н. И. Мусхелишвили, П. Ф. Папковича, или А. Лява. Ван Цзи-де не приводит ссылок на обширную советскую литературу по теории упругости, за исключением некоторых трудов Б. Г. Галеркина и Н. И. Мусхелишвили. Результаты исследований советских ученых в области теории упругости изложены в курсах Н. И. Безухова, В. В. Новожилова, М. М. Филоненко-Бородича и других авторов, а также в монографиях В. З. Власова по теории оболочек и тонкостенных стержней, А. И. Лурье — по теории оболочек и по пространственным задачам, С. Г. Михлина — по вариационным методам, В. В. Новожилова — по нелинейным задачам и т. д. Большое число статей, относящихся к различным разделам теории упругости, помещено в журнале «Прикладная математика и механика».

При подготовке перевода книги Ван Цзи-де были сверены американское и английское издания 1953 г. и устранены замеченные опечатки. В числовых примерах английские меры переведены в метрические.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

В течение последних лет автор читал курс теории упругости студентам Нью-Йоркского университета — будущим инженерам. Настоящая книга отражает содержание прочитанных лекций. При подготовке курса автор преследовал две цели. Во-первых, необходимо было добиться, чтобы студенты твердо усвоили основы теории и умели правильно поставить любую задачу, относящуюся к классической теории упругости. Во-вторых, имелось в виду познакомить студентов с наиболее эффективными аналитическими и численными методами решения задач. Это должно было научить студентов доводить до конца решение поставленной задачи, используя один из рассмотренных методов.

Автор учитывает, что обычно студенты, изучающие теорию упругости, одновременно с этим проходят специальные главы курса высшей математики. Поэтому при изложении материала предполагается, что слушатель владеет лишь сравнительно простым математическим аппаратом. В тех случаях, когда приходится прибегать к более сложным разделам высшей математики, даются некоторые предварительные сведения. Автор надеется, однако, что это ограничение в отношении математического аппарата не повлияло заметно на строгость изложения.

Так как эта книга предназначена, главным образом, для инженеров, автор старался осветить физический смысл встречающихся обозначений и математических зависимостей. Задача инженера, специализирующегося в области расчетов на прочность, состоит обычно в том, чтобы в пределах сравнительно короткого периода времени снабдить конструктора необходимыми сведениями и числовыми данными для расчета. Поэтому здесь особенно подробно рассмотрены некоторые эффективные численные методы. В тех случаях, когда точное решение задачи затруднено, подобные методы приводят к приближенному решению, вполне удовлетворительному с точки зрения практических приложений.

Во всех разделах книги делаются ссылки на источники. Однако автор должен особо отметить труды С. П. Тимошенко, Р. В. Саусвелла и И. С. Сокольниковой, повлиявшие на построение данного курса.

ГЛАВА 1 ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

1.1. Определение и обозначение напряжений. Если тело находится под действием внешних сил, то форма и размеры его изменяются, причем влияние сил распространяется на все тело. Выделим внутри тела малую плоскую площадку; действие сил передается через нее от части тела, находящейся по одну сторону площадки, на часть тела, находящуюся с другой ее стороны. Под *напряжением* понимается внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади. Будем считать, что материал имеет непрерывное строение. Тогда напряжение, передающееся в некоторой точке через малую площадку ΔA , можно выразить как предел отношения:

$$\text{напряжение} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A},$$

где ΔF — приходящаяся на площадку ΔA внутренняя сила. Допущение о непрерывности строения материала будет рассмотрено позднее.

Через данную точку можно провести бесконечное множество площадок. Рассмотрим в качестве примера стержень, подвергающийся простому растяжению. На рис. 1.1 изображены два плоских сечения, проходящих через точку P . Результирующие силы, действующие по этим сечениям, совпадают; однако напряжения, действующие по сечениям, будут различными, так как наклоны площадок, а следовательно, и их величины неодинаковы. Для того чтобы определить напряжение, необходимо знать не только его величину, линию действия и направление, но также и площадку, по которой оно действует. Поэтому мы должны понимать напряжение как *тензор*: оно зависит не только от *вектора* усилия, но и от вектора, характеризующего соответствующую площадку. В произвольно выбранной прямоугольной системе декартовых координатных осей сила полностью определяется компонентами вдоль этих осей. Эти компоненты вдоль осей x , y , z удобно обозначать, присоединяя к букве F соответственно один индекс: F_x , F_y , F_z . Однако такие обозначения недостаточны для напряжений;

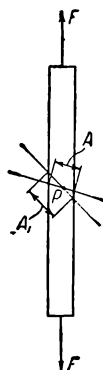


Рис. 1.1.

чтобы полностью охарактеризовать напряжение, нужно еще определить сечение, в котором напряжение действует. Для этого можно ввести второй индекс, соответствующий направлению нормали к плоскости сечения. Например, нормаль к сечению, параллельному плоскости yz , направлена вдоль оси x ; поэтому для обозначения такого сечения можно воспользоваться индексом x .

Напряжение в сечении, проходящем через некоторую точку, можно разложить на две составляющие — *нормальное напряжение*, перпендикулярное к сечению, и *касательное напряжение*, лежащее в плоскости сечения. Будем обозначать нормальную составляющую напряжения через σ , а касательную — через τ . Направление нормальной составляющей является вполне определенным; здесь достаточно одного индекса, обозначающего соответствующую площадку. Касательную же составляющую напряжения можно снова разложить на два компонента по направлениям координатных осей, лежащих в плоскости сечения; поэтому для определения касательного напряжения необходимы два индекса: первый должен обозначать плоскость,

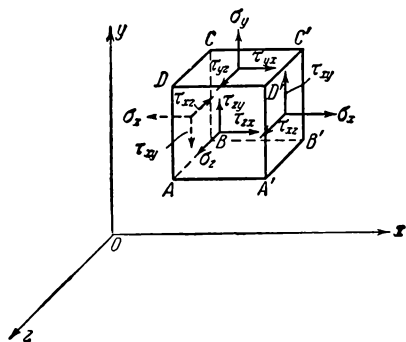


Рис. 1.2.

в которой напряжение действует, а второй — направление напряжения. При этом, например, три составляющие напряжения, действующие в плоскости yz , следует обозначать через σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} . Через любую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные координатные плоскости, так что всего мы получим девять составляющих напряжения. Обозначения для остальных компонентов напряжения указаны на рис. 1.2.

Примем следующее правило знаков. Нормальное напряжение будем считать положительным, если оно является *растягивающим*, т. е. если напряжение направлено от площадки, на которую оно действует. *Сжимающее* напряжение, направленное к площадке, будет тогда отрицательным. Как легко видеть, для сечения, расположенного подобно грани $A'B'C'D'$ на рис. 1.2, нормальное напряжение будет положительным, если его направление совпадает с направлением координатной оси; между тем, для такого сечения, как $ABCD$, положительное нормальное напряжение обращено в сторону, обратную направлению оси. Положительные направления для касательных напряжений условимся выбирать соответственно следующим образом. В площадке, подобной $A'B'C'D'$, где растягивающее напряжение совпадает с направлением одной координатной оси, касательные напряжения будем принимать положительными, если они действуют по направлениям двух

других координатных осей. Если же растягивающее напряжение направлено обратно по отношению к оси, то положительные касательные напряжения будут также действовать в сторону, обратную положительным направлениям координатных осей. Следовательно, положительные направления компонентов напряжения, действующих на правую, переднюю и верхнюю грани элементарного кубика на рис. 1.2, должны совпадать с положительными направлениями координатных осей. Для левой, задней и нижней граней элемента положительными надо, напротив, считать направления, обратные направлениям осей.

1.2. Дифференциальные уравнения равновесия. Приложенные к телу внешние силы считаются *уравновешенными*, если при действии этих сил тело находится в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения. Различают, вообще говоря, два рода внешних сил: *поверхностные* и *объемные силы*. Например, гидростатическое давление, распределенное по поверхности тела, относится к поверхностным силам. С другой стороны, сила веса и центробежная сила, распределенные по объему тела, являются объемными. Поверхностную силу относят к единице площади, а объемную силу — к единице объема. Чтобы различать эти два рода сил, условимся обозначать компоненты поверхностной силы вдоль осей x, y, z через $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, а компоненты объемной силы — через X, Y, Z .

Прежде чем перейти к составлению уравнений равновесия, выпишем выражения для составляющих напряжений в различных площадках бесконечно малого элемента. Выделим элемент длиной, равной единице, и площадью поперечного сечения $dx dy$. В общем случае напряжения в теле меняются от точки к точке. Рассмотрим простой случай, когда тело подвергается действию растягивающих напряжений только в направлении x (рис. 1.3, а). Обозначим напряжение в точке A

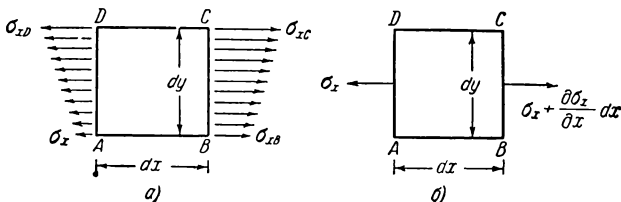


Рис. 1.3.

через σ_x . Так как через dx обозначен бесконечно малый линейный элемент, то напряжение в точке B , равно σ_{xB} , можно представить как сумму σ_x и малого приращения напряжения на отрезке от A до B . Это малое приращение можно определить по известным правилам дифференциального исчисления: скорость изменения σ_x

по координате x , относящуюся к точке A , надо умножить на длину отрезка AB :

$$\sigma_{xB} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx. \quad (1.1)$$

В выражении (1.1) используется символ частной производной, так как σ_x зависит не только от координаты x , но и от y . Выражения для напряжений в точках D и C запишутся аналогичным образом:

$$\sigma_{xD} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xC} &= \sigma_{xB} + \frac{\partial \sigma_{xB}}{\partial y} dy = \\ &= \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy = \\ &= \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Поскольку величины dx и dy являются бесконечно малыми, их квадраты или произведения надо рассматривать как величины второго порядка малости. Поэтому в выражении (1.3) можно было пренебречь членом $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} dx dy$ по сравнению с членами $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ или $\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy$.

Члены, содержащие малые величины в высших степенях, называют членами высшего порядка, и ими можно пренебречь по сравнению с членами, содержащими малые величины в низшей степени.

Выражения (1.1)–(1.3) могут быть получены также путем разложения в ряд Тейлора. Рассмотрим произвольную функцию $f(x, y)$. Пусть при $x = x_0$, $y = y_0$ эта функция равна $f(x_0, y_0)$ или f_0 . Новое значение функции $f(x_0 + dx, y_0 + dy)$, отвечающее аргументам $x = x_0 + dx$ и $y = y_0 + dy$, разложим в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x_0 + dx, y_0 + dy) &= f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 dx^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 dy^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_0 dx dy + \dots; \end{aligned}$$

через $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0$ и т. д. обозначены первые частные производные для $x = x_0$ и $y = y_0$. Если принять $f(x, y) = \sigma_x$, $dy = 0$ и отбросить члены высшего порядка, мы приходим к выражению (1.1). Принимая $dx = 0$, мы получим выражение (1.2). Сохраняя dx и dy и снова пренебрегая членами высшего порядка, получим выражение (1.3).

Когда мы пренебрегаем членами высшего порядка, то допускаем тем самым, что вдоль граней AD и BC напряжения распределяются

по линейному закону. Сила, действующая в сечении AD , будет при этом равна

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) dy = \sigma_x dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2.$$

Аналогичным образом находим силу в сечении BC :

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) dy = \\ &= \sigma_x dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2. \end{aligned}$$

Результирующая сила, действующая на элемент $ABCD$, будет равна

$$\sum F = F_2 - F_1 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy.$$

Если предположить, что среднее напряжение по AD равно σ_x и приложено в центре грани, то среднее напряжение по BC будет

$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. Что касается

результирующей силы, то это второе предположение о равномерном распределении напряжений приводит к тому же результату, что и первое предположение. В уравнения равновесия входят, прежде всего, эти результирующие силы. Таким образом, при выводе уравнений равновесия можно взамен первого, более детального подхода пользоваться вторым предположением, упрощая закон распределения напряжений.

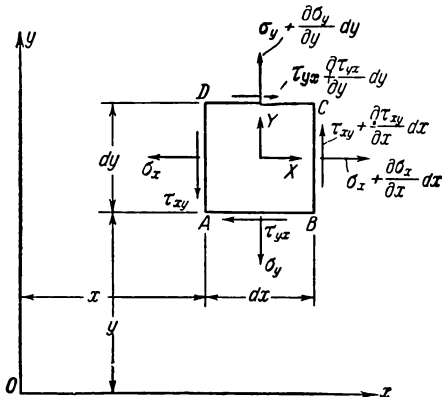


Рис. 1.4.

На рисунке 1.4 показан более общий случай, когда тот же элемент находится в двухосном напряженном состоянии, причем усилия считаются положительными и принят упрощенный закон их распределения; изображены также объемные силы. Под двухосным напряженным состоянием понимается случай, когда σ_x , σ_y , τ_{xy} и τ_{yx} не зависят от z , а остальные компоненты напряжения равны нулю. Объемные силы X и Y принимаются не зависящими от z ; величина Z считается равной нулю. Такое напряженное состояние называют *плоским напряженным состоянием*. Суммируя проекции всех сил на направление x и пользуясь условием $\sum F_x = 0$, получим

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{yx} dx + X dx dy = 0.$$

Приводя подобные члены, находим

$$\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + X\right) dx dy = 0.$$

Произведение $dx dy$, вообще говоря, не равно нулю; поэтому условие $\sum F_x = 0$ сводится к уравнению

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + X = 0. \quad (1.4)$$

Таким же образом из условия $\sum F_y = 0$ получаем

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4) и (1.5) являются *основными дифференциальными уравнениями равновесия* в декартовых координатах.

Обратимся к наиболее общему случаю элемента, находящегося под действием положительных усилий в трех направлениях. Как легко показать, дифференциальные уравнения равновесия в декартовых координатах примут тогда вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Обратимся к рисунку 1.4 и определим моменты всех сил относительно точки O ; исходя из условия $\sum M_0 = 0$, будем иметь:

$$\begin{aligned} (\sigma_x dy) \left(y + \frac{dy}{2}\right) - \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx\right) dy \left(y + \frac{dy}{2}\right) - (\tau_{xy} dy) x + \\ + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy \left(x + dx\right) - (\sigma_y dx) \left(x + \frac{dx}{2}\right) + \\ + \left(\sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} dy\right) dx \left(x + \frac{dx}{2}\right) + (\tau_{yx} dx) y - \\ - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx \left(y + dy\right) - (X dx dy) \left(y + \frac{dy}{2}\right) + \\ + (Y dx dy) \left(x + \frac{dx}{2}\right) = 0; \end{aligned}$$

здесь моменты, вращающие против часовой стрелки, считаются положительными. Приводя подобные члены и отбрасывая члены высшего порядка малости, получим

$$(\tau_{xy} - \tau_{yx}) dx dy - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X \right) y dx dy + \\ + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \right) x dx dy = 0. \quad (1.7)$$

Согласно равенствам (1.4) и (1.5) выражения во второй и третьей скобках уравнения (1.7) обращаются в нуль. Так как произведение $dx dy$, вообще говоря, не равно нулю, уравнение (1.7) преобразуется к виду:

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0,$$

или

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (1.8)$$

Рассматривая общий случай объемного напряженного состояния и определяя моменты сил, действующих на элемент, относительно осей z , y и x , получим

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.9)$$

Равенства (1.9) показывают, что компоненты касательных напряжений симметричны. В параграфе 1.1 говорилось о девяти различных составляющих напряжений, действующих по трем координатным плоскостям в любой точке тела. Теперь мы знаем, что из шести касательных компонентов напряжений только три являются независимыми. Поскольку величины τ_{xy} и τ_{yx} , τ_{xz} и τ_{zx} , τ_{yz} и τ_{zy} попарно равны между собой, мы в дальнейшем не будем делать различия между ними.

Задача 1. Вывести уравнение (1.3), выразив σ_{xC} через σ_{xD} и вводя производную от напряжения для точки D , вместо того, чтобы пользоваться величинами σ_{xB} и производной для точки B , как это было сделано в тексте.

Задача 2. Вывести уравнения (1.6).

Задача 3. Вывести уравнения (1.9).

Задача 4. Показать, что в случае, когда имеются пары объемных сил, компоненты касательного напряжения не будут симметричными, т. е. уравнения (1.9) перестанут быть справедливыми. Примером этого будет случай, когда в упругом теле содержится большое число беспорядочно распределенных малых намагниченных частиц, и поэтому каждый элемент тела находится под действием момента, создаваемого магнитным полем.

1.3. Определение напряжения в точке. Покажем теперь, что напряженное состояние тела полностью определено, если известны значения шести компонентов напряжения в каждой точке. Рассмотрим снова более простой случай плоского напряженного состояния. Зная компоненты σ_x , σ_y , τ_{xy} напряжения в каждой точке тела, можно вычислить напряжения в любой площадке, проходящей через эту точку перпендикулярно к плоскости xy и наклоненной к осям x и y .

Рассмотрим произвольную точку O тела; пусть компоненты напряжения в этой точке O равны σ_x , σ_y и τ_{xy} (рис. 1.5). Для того чтобы найти напряжения в другой площадке, проходящей через O и наклонной к осям x и y , проведем на бесконечно малом расстоянии dh от O параллельную ей площадку BC так, чтобы эта площадка вместе с координатными площадками образовала треугольную призму OBC . Так как напряжения непрерывно меняются по объему тела, то компоненты среднего напряжения, действующего в площадке OC , будут равны: $\sigma_x + d\sigma_x$ и $\tau_{xy} + d\tau_{xy}$; соответствующие компоненты для площадки OB равны $\sigma_y + d\sigma_y$ и $\tau_{xy} + d\tau_{xy}$. Обозначим через \bar{X} и \bar{Y} компоненты по осям x и y напряжения в площадке, параллельной BC

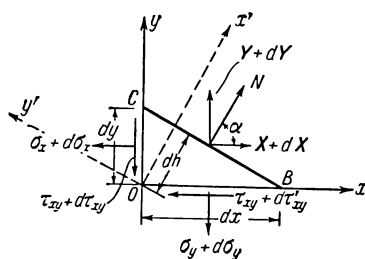


Рис. 1.5.

и проходящей через O . Тогда соответствующие напряжения в площадке BC можно выразить в виде $\bar{X} + d\bar{X}$ и $\bar{Y} + d\bar{Y}$. При уменьшении размеров элемента значения этих компонентов напряжения приближаются к тем, которые относятся к точке O . Другими словами, при $dh \rightarrow 0$, все приращения $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\tau_{xy}$, $d\tau'_{xy}$, а также $d\bar{X}$ и $d\bar{Y}$ будут стремиться в пределе к нулю.

Рассмотрим равновесие элемента призматической формы. Силы, действующие на элемент, можно определить, умножив компоненты среднего напряжения на площади тех граней, по которым они действуют. Обозначим нормаль к плоскости BC через N , и косинусы углов между нормалью N и осями x и y

$$\cos(N, x) = l, \quad \cos(N, y) = m.$$

Нормаль N условимся считать положительной, если она направлена наружу по отношению к элементу. Если через A обозначить площадь грани BC призмы, то площади граней OC и OB будут соответственно равны Al и Am . Условие $\sum F_x = 0$ приводит к уравнению

$$(\bar{X} + d\bar{X})A - (\sigma_x + d\sigma_x)Al - (\tau_{xy} + d\tau'_{xy})Am - X\left(\frac{1}{2}A dh\right) = 0, \quad (1.10)$$

где X — составляющая объемной силы по оси x . Разделив все члены уравнения (1.10) на A и перейдя к пределу при $dh \rightarrow 0$, получаем

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}. \quad (1.11)$$

Таким же путем из условия $\sum F_y = 0$ найдем

$$\bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y. \quad (1.12)$$

Выражения (1.11) и (1.12) позволяют определить компоненты напряжения в точке, лежащей на любой площадке с направляющими

косинусами l и m , если для данной точки известны компоненты напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} .

Введем новую систему координатных осей x' и y' так, чтобы направление x' совпало с N . Пользуясь уравнениями (1.11) и (1.12) для \bar{X} и \bar{Y} , легко выразить компоненты напряжения на площадке BC через σ и τ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= l\bar{X} + m\bar{Y} = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy}, \\ \tau_{x'y'} &= l\bar{Y} - m\bar{X} = (l^2 - m^2)\tau_{xy} + lm(\sigma_y - \sigma_x), \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

где $l = \cos(x', x)$ и $m = \cos(x', y)$. Уравнения (1.13) дают закон преобразования компонентов напряжения для двухмерной задачи при ортогональном преобразовании координатных осей.

В общем случае трехмерного напряженного состояния уравнения, соответствующие (1.11) и (1.12), будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx}, \\ \bar{Y} &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz}, \\ \bar{Z} &= l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

где \bar{X} , \bar{Y} и \bar{Z} — компоненты по осям x , y , z напряжения на произвольной площадке с нормалью N , а

$$l = \cos(N, x), \quad m = \cos(N, y), \quad n = \cos(N, z).$$

Можно показать, что уравнения, отвечающие преобразованию координатных осей для трехмерной задачи, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= l_1^2\sigma_x + m_1^2\sigma_y + n_1^2\sigma_z + 2l_1m_1\tau_{xy} + 2m_1n_1\tau_{yz} + 2n_1l_1\tau_{zx}, \\ \sigma_{y'} &= l_2^2\sigma_x + m_2^2\sigma_y + n_2^2\sigma_z + 2l_2m_2\tau_{xy} + 2m_2n_2\tau_{yz} + 2n_2l_2\tau_{zx}, \\ \sigma_{z'} &= l_3^2\sigma_x + m_3^2\sigma_y + n_3^2\sigma_z + 2l_3m_3\tau_{xy} + 2m_3n_3\tau_{yz} + 2n_3l_3\tau_{zx}, \\ \tau_{x'y'} &= l_1l_2\sigma_x + m_1m_2\sigma_y + n_1n_2\sigma_z + (l_1m_2 + m_1l_2)\tau_{xy} + \\ &\quad + (m_1n_2 + n_1m_2)\tau_{yz} + (n_1l_2 + l_1n_2)\tau_{zx}, \\ \tau_{y'z'} &= l_2l_3\sigma_x + m_2m_3\sigma_y + n_2n_3\sigma_z + (l_2m_3 + m_2l_3)\tau_{xy} + \\ &\quad + (m_2n_3 + n_2m_3)\tau_{yz} + (n_2l_3 + l_2n_3)\tau_{zx}, \\ \tau_{z'x'} &= l_3l_1\sigma_x + m_3m_1\sigma_y + n_3n_1\sigma_z + (l_3m_1 + m_3l_1)\tau_{xy} + \\ &\quad + (m_3n_1 + n_3m_1)\tau_{yz} + (n_3l_1 + l_3n_1)\tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Направляющие косинусы l , m , n между новыми координатными

осями x' , y' , z' и первоначальными осями x , y , z приведены в следующей таблице:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Согласно таблице имеем: $l_1 = \cos(x', x)$, $m_2 = \cos(y', y)$ и т. д.

Так как преобразование координат является ортогональным, то направляющие косинусы должны удовлетворять уравнениям такого вида:

$$\left. \begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1, \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0, \\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Пользуясь первыми тремя уравнениями системы (1.15) и соотношениями ортогональности (1.16), находим

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'}. \quad (1.17)$$

Таким образом, величина $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ инвариантна по отношению к ортогональному преобразованию координат.

Задача 1. Установить инвариантность следующих величин:

а) $\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$;

б) $\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$

Задача 2. Вывести уравнения (1.14) и (1.15).

1.4. Главные напряжения и круг Мора. Обозначая через α угол между нормалью N и осью x , получим: $l = \cos \alpha$ и $m = \sin \alpha$. Выражения (1.13) для нормальной и касательной составляющих напряжений в площадке BC можно записать в таком виде:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1.18)$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1.19)$$

Как видим, величины $\sigma_{x'}$ и $\tau_{x'y'}$ меняются в зависимости от угла α . При определенных значениях α величина $\sigma_{x'}$ может достигать максимума или минимума. Пользуясь известным приемом дифференциального исчисления, определим эти значения α из условия $d\sigma_{x'}/d\alpha = 0$. Дифференцируя выражение (1.18) для $\sigma_{x'}$ по α и приравнявая результат нулю, получаем

$$2(\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + 2\tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0, \quad (1.20)$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (1.21)$$

Так как $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\pi + 2\alpha)$, то уравнение (1.21) дает два взаимно перпендикулярных направления. Можно показать, что величина σ_x' имеет максимальное значение для одного из этих направлений и минимальное — для другого. Такие направления называются *главными направлениями*, а соответствующие нормальные напряжения — *главными напряжениями*. Сравнивая уравнения (1.19) и (1.20), мы видим, что на площадках, перпендикулярных к этим направлениям, касательные напряжения равны нулю. Величины главных напряжений можно получить, подставив значения угла (1.21) в выражение (1.18). После некоторых преобразований имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_2 = \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Если выразить σ_x' и $\tau_{x'y'}$ через главные напряжения, то уравнения (1.18) и (1.19) упрощаются и принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x' &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \\ \tau_{x'y'} &= \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Зависимость величин σ_x' и $\tau_{x'y'}$ от угла α можно изобразить с помощью графика, известного под названием *круга Мора*. Перепишем выражения (1.23) в форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x' &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Круг Мора можно построить следующим образом: на горизонтальной оси из произвольной точки O откладываем отрезки OA и OB , пропорциональные соответственно напряжениям σ_1 и σ_2 с учетом их знака (рис. 1.6). На рисунке 1.6 оба напряжения приняты положительными, т. е. растягивающими. Если напряжения являются сжимающими, т. е. имеют отрицательный знак, то точки A и B будут лежать влево от O . Из точки C , делящей отрезок AB пополам, как из центра, описываем окружность радиусом CA . Полученная

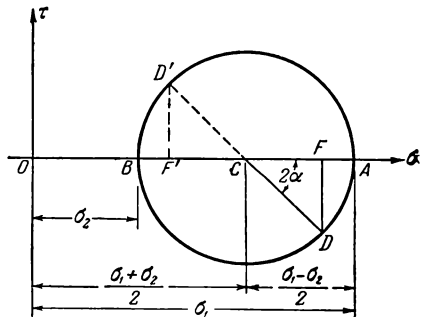


Рис. 1.6.

окружность и является так называемым кругом Мора, изображающим графически уравнения (1.24); этот круг дает возможность наглядно представить и вывести другие важные соотношения между напряжениями.

В общем случае главные напряжения не являются известными; тогда круг Мора можно построить следующим образом. Допустим, что заданы компоненты напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} . По горизонтальной оси откладываем отрезки OF и OF' , отвечающие в известном масштабе напряжениям σ_x и σ_y . В точке F восстанавливаем перпендикуляр к OF и на расстоянии, равном τ_{xy} , отмечаем точку D . Аналогичным образом от F' откладываем отрезок $F'D'$, направленный противоположно FD и равный τ_{xy} . Проводим прямую DD' , пересекающую горизонтальную ось в точке C . Теперь можно снова начертить круг Мора, как показано на рис. 1.6, с центром C и радиусом CD . Пользуясь кругом Мора, можно найти главные напряжения, соответствующие отрезкам OA и OB .

Чтобы найти напряжения по любой площадке BC , нормаль к которой составляет угол α с напряжением σ_x (рис. 1.5), откладываем от оси CA угол 2α и получаем на круге точку D . Из чертежа имеем

$$OF = OC + CF = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_{x'},$$

$$DF = CD \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = -\tau_{x'y'}.$$

Сравнивая эти соотношения с уравнениями (1.24), видим, что координаты точки D дают компоненты напряжения в площадке BC .

Заметим, что угол можно откладывать по часовой стрелке или в обратном направлении; это не влияет на численные результаты.

Для касательных напряжений, полученных при помощи круга Мора, можно установить правило знаков *); однако мы не будем на этом останавливаться, так как для практических приложений направление касательных напряжений обычно не является существенным.

Из рассмотрения круга Мора можно сделать несколько важных заключений.

1. Взяв угол $\pi + 2\alpha$ вместо 2α , т. е. продолжив радиус CD до точки D' , получаем напряжения в площадке, перпендикулярной к BC (рис. 1.5). Из рисунка видно, что касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам численно равны между собой; ранее это уже было показано аналитически [см. равенства (1.8) и (1.9)].

2. При изменении α сумма нормальных напряжений по взаимно перпендикулярным площадкам остается постоянной; так как сумма

*) См. S. Timoshenko, J. N. Goodier, Theory of Elasticity, New York, 1951, стр. 15.

отрезков $\overline{OF'} + \overline{OF} = 2\overline{OC}$, то должно быть

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x'} + \sigma_{y'},$$

что соответствует результату (1.17) для двухмерной задачи.

3. Максимальное касательное напряжение равно радиусу круга Мора и действует в площадках, наклоненных под углом 45° к главным направлениям. Отсюда

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (1.25)$$

На площадках, отвечающих максимальным касательным напряжениям, нормальные напряжения равны друг другу и определяются выражением

$$\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (1.26)$$

Распространим наши рассуждения на случай трехмерного напряженного состояния. Покажем, что существуют три взаимно перпендикулярные главные площадки, для которых три составляющие нормального напряжения имеют стационарное значение (максимум, минимум, или минимакс); компоненты же касательного напряжения в этих площадках равны нулю. Такие нормальные напряжения будут главными напряжениями. Рассмотрим нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной к оси x' . По формулам (1.15) находим

$$\sigma_{x'} = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2lm\tau_{xy} + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx}, \quad (1.27)$$

где l, m, n — косинусы углов между осью x' и соответственно осями x, y, z . Косинусы l, m, n не являются независимыми; они должны удовлетворять уравнению

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (1.28)$$

Следовательно, можно считать l и m в выражении (1.27) независимыми переменными, которым мы вправе придавать произвольные значения, а $\sigma_{x'}$ и n — функциями l и m .

Чтобы найти направляющие косинусы площадки, для которой $\sigma_{x'}$ имеет стационарное значение, примем

$$\frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial m} = 0.$$

После дифференцирования и группировки членов находим:

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} + (l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z) \frac{\partial n}{\partial l} &= 0, \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} + (l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z) \frac{\partial n}{\partial m} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Найдя частные производные выражения (1.28) по l и по m , будем иметь:

$$l + n \frac{\partial n}{\partial l} = 0, \quad m + n \frac{\partial n}{\partial m} = 0. \quad (1.30)$$

Подставив эти равенства в (1.29), получим

$$\frac{l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx}}{l} = \frac{l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz}}{m} = \frac{l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z}{n}. \quad (1.31)$$

Но из уравнений (1.14) вытекают соотношения:

$$\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} &= \bar{X}, \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} &= \bar{Y}, \\ l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z &= \bar{Z}; \end{aligned}$$

поэтому равенства (1.31) можно переписать в виде

$$\frac{\bar{X}}{l} = \frac{\bar{Y}}{m} = \frac{\bar{Z}}{n}. \quad (1.32)$$

Равенства (1.32) показывают, что компоненты по осям x , y , z результирующего напряжения в площадке, где σ_x имеет стационарное значение, будут пропорциональны направляющим косинусам l , m , n нормали к площадке, т. е. результирующее напряжение в площадке направлено по нормали к ней. Мы доказали, таким образом, что в площадке, для которой σ_x имеет стационарное значение, касательное напряжение равно нулю и что такая площадка является главной.

Докажем, что через любую точку можно провести три главные площадки. Примем

$$\frac{\bar{X}}{l} = \frac{\bar{Y}}{m} = \frac{\bar{Z}}{n} = \sigma;$$

тогда величина главного напряжения будет

$$l\bar{X} + m\bar{Y} + n\bar{Z} = l(l\sigma) + m(m\sigma) + n(n\sigma) = (l^2 + m^2 + n^2)\sigma = \sigma. \quad (1.33)$$

Перепишем теперь равенства (1.31) в форме

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x - \sigma) + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} &= 0, \\ l\tau_{xy} + m(\sigma_y - \sigma) + n\tau_{yz} &= 0, \\ l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n(\sigma_z - \sigma) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

Равенства (1.34) можно рассматривать как уравнения для определения направляющих косинусов l , m , n для главных площадок. В силу равенства $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ величины l , m , n не могут одновременно обратиться в нуль. Уравнения (1.34) являются однородными линейными уравнениями относительно l , m , n и дают решения, отличные от нуля только в том случае, если детерминант этих уравнений равен нулю. Вычисляя этот детерминант и приравняв его нулю, приходим к следующему кубическому уравнению относительно σ :

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2)\sigma - \\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Три корня этого уравнения дают значения трех главных напряжений. Подставляя каждое из этих напряжений в уравнения (1.34) и учитывая (1.28), можем найти три группы направляющих косинусов для трех главных площадок. Заметим, что величина главных напряжений не зависит от положения координатных осей x , y , z . Поэтому в уравнении (1.35) выражения, стоящие в скобках, не должны меняться при произвольном изменении направления коор-

динатных осей и являются инвариантными относительно ортогонального преобразования координат.

Задача 1. Определить главные напряжения и определяющий их направления угол α , если дано:

$$\sigma_x = 438 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_y = -88 \text{ кг/см}^2, \quad \tau_{xy} = 455 \text{ кг/см}^2.$$

Задача 2. Определить максимальные касательные напряжения, соответствующие им нормальные напряжения и угол α для напряженного состояния задачи 1.

1.5. Граничные условия, выраженные через заданные поверхностные силы. Выше было показано, что в том случае, когда тело находится в равновесии под действием внешних нагрузок, компоненты напряжения во всех точках тела должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия. Компоненты внутренних усилий меняются по объему тела, и на наружной поверхности, т. е. на границе тела, должны уравниваться приложенными там внешними силами. Поэтому систему внешних сил можно рассматривать как «продолжение» напряженного состояния, имеющего место внутри тела. Условия равновесия на границе могут быть получены из уравнений (1.14); они носят название *граничных условий* для тела, находящегося в равновесии.

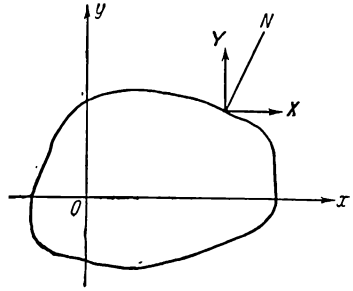


Рис. 1.7.

Если для некоторой точки поверхности обозначить компоненты внешних сил, приходящиеся на единицу площади, через \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , а направляющие косинусы нормали N к поверхности через l , m , n , то согласно уравнениям (1.14) граничные условия будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx}, \\ \bar{Y} &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz}, \\ \bar{Z} &= l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

В частном случае плоского напряженного состояния (рис. 1.7) выражения (1.36) преобразуются к виду:

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \quad \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y. \quad (1.37)$$

ГЛАВА 2 ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

2.1. Компоненты деформации. Под *деформацией* тела подразумевается изменение взаимного положения точек тела. Примем, что материал заполняет сплошь объем тела. Тогда в любой точке тела расположена частица материала. Пусть координаты этой частицы до деформации будут x, y, z . В процессе деформации тела частица получает перемещения u, v, w по направлениям x, y, z и в результате будет иметь координаты $x+u, y+v, z+w$. В общем случае перемещения u, v, w меняются от точки к точке и потому являются функциями x, y, z .

Мы начнем исследование деформаций со случая двухмерной или *плоской деформации*. Под этим мы понимаем такую деформацию, при которой все частицы, находившиеся первоначально в одной

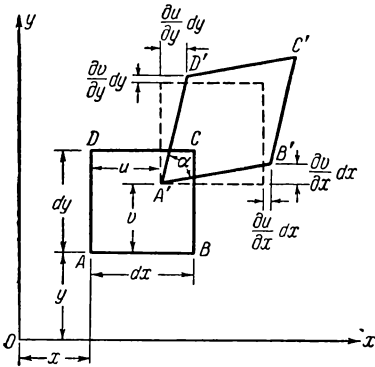


Рис. 2.1.

плоскости, останутся после деформации в этой же плоскости. Пусть координатные оси выбраны так, что оси x и y лежат в плоскости деформации; тогда $w=0$, а u и v не зависят от z . Рассмотрим малый прямоугольный элемент $ABCD$ недеформированного тела со сторонами dx и dy (рис. 2.1). После деформации элемент перемещается в положение $A'B'C'D'$. С геометрической точки зрения можно различать два основных типа деформации: изменение длины первоначально прямой линии в определенном направлении и изменение величины данного угла.

В соответствии с этим будем в дальнейшем различать *продольную деформацию* и *деформацию сдвига*.

Отношение изменения длины к первоначальной длине элементарного отрезка определяется как *продольная деформация*; будем обозначать ее буквой ϵ . В случае сплошного материала деформацию ϵ в любой точке тела можно выразить через начальную

длину ΔL отрезка как предел отношения

$$\epsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta L},$$

где $\Delta \delta$ — изменение длины отрезка.

Изменение величины первоначально прямого угла называют *деформацией сдвига* и обозначают через γ . В случае прямоугольного элемента $ABCD$, показанного на рис. 2.1, до деформации длина отрезка AB была равна dx . После деформации точка A переместилась в A' . Обозначим составляющие перемещения точки A вдоль осей x , y через u и v . Так как величины u и v изменяются в теле от точки к точке, то их можно разложить в ряд Тэйлора, как это было сделано для компонентов напряжения. Отбрасывая члены высшего порядка малости, мы можем записать составляющие перемещения из B в B' в виде $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$. Таким образом, проекция отрезка $A'B'$ на ось x равна $dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, а проекция на ось y окажется равной $\frac{\partial v}{\partial x} dx$. Квадрат длины отрезка $A'B'$ будет

$$(A'B')^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2.$$

Составляющая по оси x продольной деформации ϵ_x определяется как продольная деформация элемента, направленного до деформации вдоль оси x . Поэтому можно записать

$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB},$$

или

$$A'B' = (1 + \epsilon_x) AB = (1 + \epsilon_x) dx.$$

Подставив эту величину в выражение для $(A'B')^2$ и разделив на $(dx)^2$, получаем

$$2\epsilon_x + \epsilon_x^2 = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2. \quad (2.1)$$

Будем рассматривать случай, когда деформации тела весьма малы; тогда величины ϵ и производные от u и v будут малыми. Поэтому квадратами и произведениями этих величин можно пренебрегать по сравнению с самими величинами. Отбрасывая эти члены высшего порядка малости в выражении (2.1), имеем

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подобным же образом найдем составляющую продольной деформации в направлении y :

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Чтобы определить деформацию сдвига, рассмотрим искажение первоначально прямого угла. Деформация сдвига γ_{xy} в точке определяется как изменение величины угла между двумя элементарными отрезками, первоначально параллельными осям x и y . Следовательно, величина γ_{xy} в точке A представляет собой изменение угла между отрезками AB и AD . Перемещение точки B' в направлении y равно $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, а перемещение точки D' в направлении x равно $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$. Пренебрегая членами высшего порядка малости, находим, что линия AB , занимая после деформации положение $A'B'$, окажется наклоненной к ее начальному направлению под малым углом $\frac{\partial v}{\partial x}$, а направление $A'D'$ будет наклонено к AD под малым углом $\frac{\partial u}{\partial y}$. Как видим, прямой угол DAB между отрезками AB и AD уменьшился на угол $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$. Отсюда

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Компоненты деформации для трехмерной задачи можно получить таким же образом. Они будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Шесть величин ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} называются *компонентами деформации*. Из этих формул легко видеть, что деформации сдвига обладают симметрией:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}.$$

Формулы (2.2) показывают также, что к любым выражениям для перемещений u , v , w можно прибавить соответственно величины

$$\bar{u} = a + by - cz, \quad \bar{v} = d - bx + ez, \quad \bar{w} = f + cx - ey,$$

не меняя компонентов деформации. Постоянные a , d , f в приведенных выше выражениях представляют поступательное перемещение тела, а постоянные b , c , e — вращение тела вокруг координатных осей. Поскольку перемещения u , v , w выражают перемещение тела в целом и не определяют каких-либо деформаций в теле, мы будем называть их *перемещениями абсолютно твердого тела*.

2.2. Определение деформации в точке. Если заданы три компонента продольной деформации и три компонента деформации сдвига в данной точке, то можно определить удлинение в *любом*

направлении и искажение угла между *любыми* двумя взаимно перпендикулярными направлениями.

Обратимся снова к случаю плоской деформации. Рассмотрим в недеформированном теле малый линейный элемент AB длиной dL с направляющими косинусами l , m (рис. 2.2). Проекции элемента на координатные оси будут $dx = l dL$, $dy = m dL$. После деформации отрезок AB перемещается в положение $A'B'$; компоненты перемещения точки A равны u и v . Примем длину $A'B'$ равной dL' . Поскольку элемент AB первоначально наклонен к координатным осям, то, следуя тем же рассуждениям, как при выводе уравнения (1.3), получаем компоненты перемещения точки B' равными:

$$\left. \begin{aligned} u + du &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ v + dv &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Продольная деформация ϵ в направлении AB определяется выражением

$$\epsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{dL' - dL}{dL},$$

или

$$dL' = (1 + \epsilon) dL.$$

Выразим величину dL' через проекции:

$$(A'B')^2 = (1 + \epsilon)^2 dL^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)^2. \quad (2.4)$$

После раскрытия скобок получим:

$$\begin{aligned} dL^2 + 2\epsilon dL^2 + \epsilon^2 dL^2 &= dx^2 + dy^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + 2 \frac{\partial v}{\partial x} dx dy + 2 \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Квадрат начальной длины элемента равен $dL^2 = dx^2 + dy^2$. В случае бесконечно малой деформации величины ϵ , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ будут

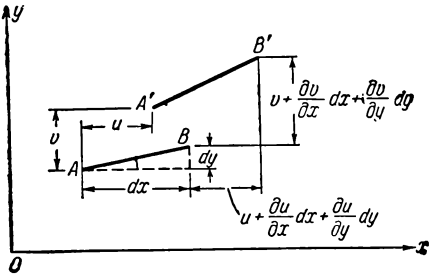


Рис. 2.2.

бесконечно малыми, и их квадратами можно пренебречь по сравнению с ними самими; поэтому выражение (2.5) принимает вид

$$\varepsilon dL^2 = \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy^2.$$

Разделив на dL^2 , получим

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} l^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) lm = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm \gamma_{xy}, \quad (2.6)$$

где $l = dx/dL$ и $m = dy/dL$.

Если обозначить направления новых координатных осей через x' и y' , то будем иметь

$$\varepsilon_{x'} = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm \gamma_{xy}, \quad (2.7)$$

где $l = \cos(x'x)$ и $m = \cos(x'y)$.

Чтобы найти деформацию сдвига для новых направлений, рассмотрим два отрезка OA и OB , взаимно перпендикулярных до деформации (рис. 2.3). После деформации они соответственно принимают положение $O'A'$ и $O'B'$. Пусть начальные длины отрезков OA и OB равны соответственно dL_1 и dL_2 , а компоненты продольной деформации по

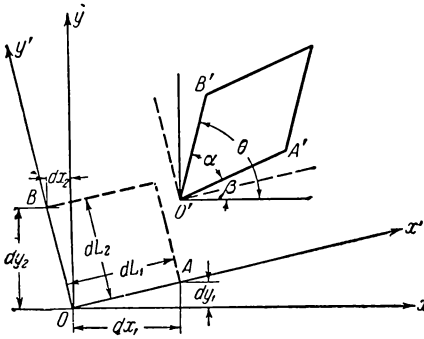


Рис. 2.3.

направлениям OA и OB равны ε_1 и ε_2 . Обозначим направляющие косинусы отрезков OA и OB соответственно через l_1 , m_1 и l_2 , m_2 . Используя соотношения (2.3), найдем, что направляющие косинусы l'_1 , m'_1 отрезка $O'A'$ равны:

$$\left. \begin{aligned} l'_1 &= \frac{dx_1 + du_1}{dL_1(1 + \varepsilon_1)} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y} dy_1}{dL_1(1 + \varepsilon_1)} = \\ &= l_1 \left(1 - \varepsilon_1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_1 \frac{\partial u}{\partial y}, \\ m'_1 &= \frac{dy_1 + dv_1}{dL_1(1 + \varepsilon_1)} = l_1 \frac{\partial v}{\partial x} + m_1 \left(1 - \varepsilon_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right); \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

здесь после деления были отброшены члены высшего порядка малости. Таким же образом направляющие косинусы l'_2 и m'_2 отрезка $O'B'$ будут определяться выражениями:

$$\left. \begin{aligned} l'_2 &= l_2 \left(1 - \varepsilon_2 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_2 \frac{\partial u}{\partial y}, \\ m'_2 &= l_2 \frac{\partial v}{\partial x} + m_2 \left(1 - \varepsilon_2 + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Пусть угол между $O'A'$ и $O'B'$ равен α . По рисунку 2.3 находим

$$\cos \alpha = \cos(\theta - \beta) = \cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta = l'_1 l'_2 + m'_1 m'_2. \quad (2.10)$$

Подставляя в уравнение (2.10) значения l'_1 , m'_1 , l'_2 и m'_2 , определяемые выражениями (2.8) и (2.9), и пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} \cos \alpha = (l_1 l_2 + m_1 m_2)(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 2(l_1 l_2 \varepsilon_x + m_1 m_2 \varepsilon_y) + \\ + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из определения деформации сдвига следует, что

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Для малой деформации сдвига угол $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ также мал, и потому можно записать

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\pi}{2} - \alpha \approx \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

С другой стороны, имеем

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = \cos AOB = \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

поэтому, подставляя (2.11) в выражение для $\gamma_{x'y'}$, найдем

$$\gamma_{x'y'} = 2(l_1 l_2 \varepsilon_x + m_1 m_2 \varepsilon_y) + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \gamma_{xy}. \quad (2.12)$$

Зависимости (2.7) и (2.12) позволяют для случая плоской деформации определить компоненты продольной деформации и деформации сдвига в любом направлении через ε_x , ε_y , и γ_{xy} . Пользуясь соотношениями $l_2 = \cos(\widehat{y'x}) = \cos(\pi - \widehat{x'y}) = -\cos(\widehat{x'y}) = -m_1$ и $m_2 = \cos(\widehat{y'y}) = \cos(\widehat{x'x}) = l_1$, перепишем выражение (2.12) в виде

$$\gamma_{x'y'} = (l_1^2 - m_1^2) \gamma_{xy} + 2l_1 m_1 (\varepsilon_y - \varepsilon_x). \quad (2.13)$$

Сравнивая выражения (2.7) и (2.13) с (1.13), убеждаемся, что они будут иметь одинаковый вид при замене ε на σ и γ на 2τ . Если принять $\gamma = 2\gamma'$, то все выводы, касающиеся главных напряжений, будут справедливы и для главных деформаций, выраженных через ε_x , ε_y и γ_{xy} . Следовательно, мы можем построить круг Мора для деформаций аналогично кругу Мора для напряжений.

В общем случае трехмерной задачи направляющие косинусы, как и ранее, определяются следующей таблицей:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Формулы преобразования компонентов деформации можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{x'} &= l_1^2 \varepsilon_x + m_1^2 \varepsilon_y + n_1^2 \varepsilon_z + l_1 m_1 \gamma_{xy} + m_1 n_1 \gamma_{yz} + n_1 l_1 \gamma_{zx}, \\
 \varepsilon_{y'} &= l_2^2 \varepsilon_x + m_2^2 \varepsilon_y + n_2^2 \varepsilon_z + l_2 m_2 \gamma_{xy} + m_2 n_2 \gamma_{yz} + n_2 l_2 \gamma_{zx}, \\
 \varepsilon_{z'} &= l_3^2 \varepsilon_x + m_3^2 \varepsilon_y + n_3^2 \varepsilon_z + l_3 m_3 \gamma_{xy} + m_3 n_3 \gamma_{yz} + n_3 l_3 \gamma_{zx}, \\
 \gamma_{x'y'} &= 2l_1 l_2 \varepsilon_x + 2m_1 m_2 \varepsilon_y + 2n_1 n_2 \varepsilon_z + (l_1 m_2 + m_1 l_2) \gamma_{xy} + \\
 &\quad + (m_1 n_2 + n_1 m_2) \gamma_{yz} + (n_1 l_2 + l_1 n_2) \gamma_{zx}, \\
 \gamma_{y'z'} &= 2l_2 l_3 \varepsilon_x + 2m_2 m_3 \varepsilon_y + 2n_2 n_3 \varepsilon_z + (l_2 m_3 + m_2 l_3) \gamma_{xy} + \\
 &\quad + (m_2 n_3 + n_2 m_3) \gamma_{yz} + (n_2 l_3 + l_2 n_3) \gamma_{zx}, \\
 \gamma_{z'x'} &= 2l_3 l_1 \varepsilon_x + 2m_3 m_1 \varepsilon_y + 2n_3 n_1 \varepsilon_z + (l_3 m_1 + m_3 l_1) \gamma_{xy} + \\
 &\quad + (m_3 n_1 + n_3 m_1) \gamma_{yz} + (n_3 l_1 + l_3 n_1) \gamma_{zx}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Складывая первые три выражения (2.14) и воспользовавшись условиями ортогональности (1.16), можно показать, что сумма компонентов продольной деформации также инвариантна относительно преобразования прямоугольных координатных осей:

$$\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} + \varepsilon_{z'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (2.15)$$

З а д а ч а. Доказать, что следующие величины также являются инвариантами:

- а) $\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2),$
- б) $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} (\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2).$

2.3. Уравнения совместности. Возвратимся теперь к выражениям (2.2) для компонентов деформации через перемещения. Легко видеть, что здесь шесть компонентов деформации выражены через три компонента перемещений. Поэтому данные соотношения можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно перемещений u , v , w , если компоненты

деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ и γ_{zx} являются заданными функциями x, y, z . Поскольку имеется шесть уравнений относительно трех неизвестных функций, то в общем случае нельзя считать, что эти уравнения будут иметь решение при произвольном выборе компонентов деформации. На компоненты деформации должны быть наложены некоторые условия с тем, чтобы эти шесть уравнений дали систему однозначных непрерывных решений для трех компонентов перемещения. Тот факт, что компоненты деформации не могут быть выбраны произвольно, становится очевидным из следующих геометрических соображений. Представим себе, что упругое тело до деформации разбито на ряд малых элементарных кубиков. Допустим, что каждый элемент подвергается произвольной деформации. После деформации эти элементы примут форму параллелепипедов, и может случиться, что они уже не составят сплошное деформированное тело. Чтобы обеспечить условие, по которому параллелепипеды образуют сплошное тело, компоненты деформации для каждого элемента должны удовлетворять определенным соотношениям.

Продифференцировав выражение

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

по x и y , получим

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так как u и v являются однозначными непрерывными функциями, это выражение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.16)$$

Пользуясь зависимостями $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.17)$$

Продифференцируем далее выражение для γ_{xy} по x и z и выражение для γ_{zx} — по y и x , и сложим полученные выражения; тогда будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Используя по-прежнему то обстоятельство, что u, v и w являются однозначными непрерывными функциями, мы можем придать этой зависимости следующий вид:

$$2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2},$$

или

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \quad (2.18)$$

Другие подобные зависимости могут быть получены циклической перестановкой. В результате мы приходим к шести зависимостям, которым должны удовлетворять компоненты деформации:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} (2.19)$$

Эти дифференциальные уравнения называют *уравнениями совместности* деформации. Если компоненты деформации удовлетворяют уравнениям (2.19), то перемещения u , v , w , связанные с деформациями зависимостями (2.2), будут однозначными непрерывными функциями.

Задача 1. Показать, что деформированное состояние является возможным, если компоненты деформации заданы выражениями

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2), \quad \varepsilon_y = ky^2, \quad \gamma_{xy} = 2kxy, \quad \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

и невозможным, если

$$\varepsilon_x = kz(x^2 + y^2), \quad \varepsilon_y = ky^2z, \quad \gamma_{xy} = 2kxyz, \quad \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0;$$

здесь k — малая постоянная величина.

Задача 2. Упругое тело неравномерно нагрето, причем температура является функцией x , y , z и распределяется по закону $T = T(x, y, z)$. Если тепловое расширение каждого элемента не стеснено, то компоненты деформации будут равны:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

где α — постоянный коэффициент теплового расширения. Доказать, что такая деформация может иметь место лишь в случае, если T будет линейной функцией от x , y , z .

Задача 3. Определить зависимости между постоянными $A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1, C_2$ так, чтобы имели место следующие компоненты деформаций:

$$\varepsilon_x = A_0 + A_1(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4),$$

$$\varepsilon_y = B_0 - B_1(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4),$$

$$\gamma_{xy} = C_0 + C_1xy(x^2 + y^2 + C_2),$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Отв. $A_1 + B_1 - 2C_2 = 0, \quad C_1 = 4.$

ГЛАВА 3

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

3.1. Идеализация материалов, применяемых в технике. Для того чтобы математически исследовать поведение материалов, применяемых в технике, необходимо несколько идеализировать их свойства. В теории упругости, так же как и в других разделах математической физики, мы с самого начала сталкиваемся с двумя противоречивыми требованиями. С одной стороны, необходимо, чтобы теория возможно точнее описывала поведение реальных материалов под действием приложенных к ним сил. С другой стороны, теория должна быть настолько простой, чтобы ее можно было применить к широкому кругу задач, доводя решения до числовых результатов.

Как известно, любое твердое тело, подвергающееся действию внешних сил, испытывает деформацию. Каждому типу напряженного состояния соответствует определенная деформация. Если напряжения не слишком велики, то деформированное тело принимает после снятия нагрузки первоначальную форму и размеры. Это свойство тел восстанавливать первоначальную форму после удаления нагрузок называется *упругостью*. Если тело возвращается полностью к исходной форме, мы называем его *абсолютно упругим*. В том же случае, когда после снятия нагрузок начальная форма восстанавливается не полностью, вводят понятие *остаточной деформации* и говорят, что тело находится в *пластическом состоянии*. Если к твердому телу приложены постепенно возрастающие силы, то, как показывают эксперименты, его можно считать абсолютно упругим до тех пор, пока не будет достигнут так называемый *предел упругости* материала. За пределом упругости материал будет находиться уже в пластическом состоянии, и в нем будет накапливаться остаточная деформация. В теории упругости принимают, что материал является абсолютно упругим; таким образом, мы сосредоточим свое внимание на поведении материала до достижения предела упругости.

В дальнейшем мы будем полагать, что материал обладает свойствами *сплошности, однородности и изотропности*. Считая

материал сплошным, мы не принимаем во внимание дискретности строения реальных тел. Однородным называют тело, если его свойства одинаковы по всему объему, т. е. во всех точках тела. Если упругие свойства тела в любой заданной точке одни и те же по всем направлениям, то оно называется изотропным. При исследовании напряжений и деформаций в главах 1 и 2 мы уже использовали допущение о сплошности материала; понятия же об однородности и изотропности не являлись необходимыми, пока мы не касались зависимости между напряжениями и деформациями.

Большинство материалов, применяемых в технике, имеют либо кристаллическую структуру, например, латунь, либо волокнистую, например, дерево. Поэтому, на первый взгляд, наши допущения противоречат известным данным о реальных материалах. Однако размеры кристаллов и волокон, как правило, настолько малы по сравнению с размерами всего тела, что в среднем поведение материала будет таким, как если бы он был сплошным и однородным. В случае материалов кристаллического строения кристаллы обычно распределены так хаотично, что тело в целом можно считать изотропным. Следует заметить, что процесс прокатки часто вызывает определенную ориентацию кристаллов, так что многие металлы после прокатки *анизотропны*. Такой технический материал, как, например, дерево, определенно анизотропен, и упругие свойства дерева в направлении волокон значительно отличаются от свойств в направлении, перпендикулярном к годовым кольцам. Предполагая материалы изотропными, мы, естественно, не сможем дать методов расчета конструкций, состоящих из анизотропных материалов.

3.2. Обобщенный закон Гука. Все тела, находящиеся в напряженном состоянии, получают деформацию. Зависимость между деформацией и приложенной силой впервые была сформулирована Гуком. Закон Гука о пропорциональности между силами и перемещениями гласит, что «удлинение пропорционально силе», и в нем идет речь о средней величине удлинения тонкого стержня, подвергающегося действию растягивающего усилия. Рассмотрим тонкий стержень с площадью поперечного сечения A , на который действует растягивающая сила F , и предположим, что растягивающее напряжение σ равномерно распределено по площади поперечного сечения; тогда закон Гука можно записать в следующей форме:

$$\sigma = c\epsilon, \quad (3.1)$$

где c — постоянная, а ϵ — продольная деформация.

Естественно обобщить закон Гука на случай объемного напряженного состояния, при условии, что предел упругости не превзойден: *в любой точке сплошной среды каждый из шести компонентов напряжения является линейной функцией шести компонентов деформации, и наоборот.* Это положение называется *обобщенным*

законом Гука. Выражая его математически, мы получим шесть зависимостей «напряжение — деформация» типа

$$\sigma_x = c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z + c_{14}\gamma_{xy} + c_{15}\gamma_{yz} + c_{16}\gamma_{zx}, \quad (3.2)$$

или, наоборот, шесть зависимостей «деформация — напряжение» вида

$$\varepsilon_x = c'_{11}\sigma_x + c'_{12}\sigma_y + c'_{13}\sigma_z + c'_{14}\tau_{xy} + c'_{15}\tau_{yz} + c'_{16}\tau_{zx}, \quad (3.3)$$

причем величины $c_{11}, \dots, c'_{11}, \dots$ определяют упругие свойства материала. Для однородных материалов коэффициенты $c_{11}, \dots, c'_{11}, \dots$ будут постоянными, не зависящими от координат x, y, z . Если известны шесть зависимостей типа (3.2), то из них можно получить шесть зависимостей (3.3), и наоборот.

Выражая закон Гука с помощью зависимостей (3.2) и (3.3), мы вводим 36 постоянных. Однако не все эти постоянные независимы; покажем, что для *изотропных* материалов число независимых постоянных можно свести всего к двум.

Прежде всего, покажем, что направления главных напряжений совпадают с направлениями главных деформаций. Пусть линии 1, 2, 3 будут направлениями главных деформаций. Компоненты деформации сдвига относительно этих направлений равны нулю*) и из уравнений (3.2) получаем

$$\tau_{12} = c_{41}\varepsilon_1 + c_{42}\varepsilon_2 + c_{43}\varepsilon_3. \quad (3.4)$$

Введем систему координат $1', 2', 3'$ путем поворота системы 1, 2, 3 на 180° вокруг оси 2 (рис. 3.1). Тогда оси $1'$ и $3'$ будут соответственно направлены противоположно

осям 1 и 3, а оси 2 и $2'$ совпадут. Для определения направляющих косинусов осей $1', 2', 3'$ пользуемся следующей таблицей:

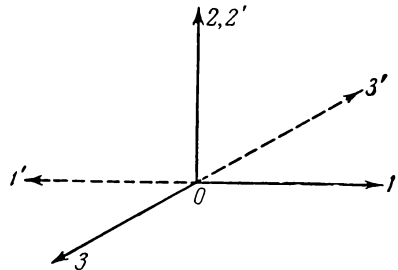


Рис. 3.1.

	1	2	3
1'	l_1	m_1	n_1
2'	l_2	m_2	n_2
3'	l_3	m_3	n_3

Эти направляющие косинусы будут иметь следующие значения:

$$l_1 = n_3 = \cos 180^\circ = -1, \quad m_2 = \cos 0 = 1$$

и

$$l_2 = l_3 = m_1 = m_3 = n_1 = n_2 = \cos 90^\circ = 0.$$

*) См. параграф 2.2, стр. 28 и параграф 1.4, стр. 20.

Для *изотропных* материалов упругие постоянные, и в том числе c_{41} , c_{42} и c_{43} , одинаковы по всем направлениям. Новые координатные оси по-прежнему совпадают с направлениями главных деформаций; поэтому уравнения (3.4) в новых координатных осях принимают вид

$$\tau_{1'2'} = c_{41}\varepsilon_{1'} + c_{42}\varepsilon_{2'} + c_{43}\varepsilon_{3'}. \quad (3.5)$$

Из формулы преобразования компонентов напряжений (1.15) находим, что только одно произведение направляющих косинусов $l_1 m_2$ окажется отличным от нуля, причем

$$\tau_{1'2'} = l_1 m_2 \tau_{12} = -\tau_{12}. \quad (3.6)$$

Из формул преобразования компонентов деформации (2.14) имеем:

$$\varepsilon_{1'} = l_1^2 \varepsilon_1 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{2'} = m_2^2 \varepsilon_2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{3'} = n_3^2 \varepsilon_3 = \varepsilon_3. \quad (3.7)$$

Принимая во внимание зависимости (3.6) и (3.7), можем привести (3.5) к виду

$$-\tau_{12} = c_{41}\varepsilon_1 + c_{42}\varepsilon_2 + c_{43}\varepsilon_3. \quad (3.8)$$

Сопоставляя равенства (3.8) и (3.4), заключаем, что правые части их одинаковы. Отсюда получаем $\tau_{12} = -\tau_{12}$; но это возможно лишь при условии

$$\tau_{12} = 0. \quad (3.9)$$

Подобным же путем можно получить $\tau_{23} = \tau_{31} = 0$. Таким образом, если линии 1, 2, 3 являются главными направлениями *деформации*, то компоненты касательных напряжений вдоль них равны нулю; но тогда эти линии будут одновременно и главными направлениями *напряжения*.

Исходя из сказанного, мы не будем впредь делать различия между главными направлениями напряжения и деформации. Уравнения (3.2), отнесенные к главным направлениям, принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + c_{13}\varepsilon_3, \\ \sigma_2 &= c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 + c_{23}\varepsilon_3, \\ \sigma_3 &= c_{31}\varepsilon_1 + c_{32}\varepsilon_2 + c_{33}\varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Отметим, что коэффициент c_{ij} является упругой постоянной, связывающей напряжение в направлении i с деформацией вдоль линии j . Но для изотропного материала влияние деформации ε_1 на величину напряжения σ_1 должно быть таким же, как и влияние ε_2 на σ_2 или ε_3 на σ_3 . Следовательно, $c_{11} = c_{22} = c_{33}$. Из того же условия изотропности следует, что влияние удлинений ε_2 и ε_3 на величину напряжения σ_1 также должно быть одинаковым; но тогда $c_{12} = c_{13}$. Подобно этому можно показать, что $c_{21} = c_{23}$ и $c_{31} = c_{32}$. Далее, влияние ε_2 или ε_3 на σ_1 должно быть таким же, как влияние ε_1 или

ε_3 на σ_2 , а влияние ε_1 или ε_3 на σ_2 должно соответствовать влиянию ε_1 и ε_2 на σ_3 . Поэтому

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32}. \quad (3.11)$$

Из равенств (3.11) следует, что, относя деформацию к главным осям, мы должны вводить только две упругие постоянные. Обозначим эти постоянные через a и b . Тогда уравнения (3.10) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= a\varepsilon_1 + b(\varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ \sigma_2 &= a\varepsilon_2 + b(\varepsilon_1 + \varepsilon_3), \\ \sigma_3 &= a\varepsilon_3 + b(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Принимая $a - b = 2\mu$ и $b = \lambda$ и пользуясь обозначением

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

мы можем переписать уравнения (3.12) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_1, \\ \sigma_2 &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_2, \\ \sigma_3 &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Постоянные λ и μ были введены Ж. Ламе; в литературе их обычно называют *постоянными Ламе*.

Уравнения (3.13) дают соотношения между главными напряжениями и главными деформациями. Зависимости между напряжениями и деформациями в произвольной системе декартовых координатных осей могут быть получены с помощью формул преобразования компонентов напряжения и деформации. Пусть такая произвольная система координатных осей x, y, z определяется направляющими косинусами, приведенными в следующей таблице:

	1	2	3
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

Поскольку линии 1, 2, 3 являются главными направлениями, то касательные напряжения и деформации сдвига по этим направлениям равны нулю. Из формул для преобразования компонентов напряжения получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= l_1^2 \sigma_1 + m_1^2 \sigma_2 + n_1^2 \sigma_3, \\ \tau_{xy} &= l_1 l_2 \sigma_1 + m_1 m_2 \sigma_2 + n_1 n_2 \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Подобно этому из формул для преобразования компонентов деформации следует:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= l_1^2 \varepsilon_1 + m_1^2 \varepsilon_2 + n_1^2 \varepsilon_3, \\ \gamma_{xy} &= 2(l_1 l_2 \varepsilon_1 + m_1 m_2 \varepsilon_2 + n_1 n_2 \varepsilon_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Подставляя зависимости (3.13) в (3.14), находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) \lambda e + 2\mu (l_1^2 \varepsilon_1 + m_1^2 \varepsilon_2 + n_1^2 \varepsilon_3), \\ \tau_{xy} &= (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) \lambda e + 2\mu (l_1 l_2 \varepsilon_1 + m_1 m_2 \varepsilon_2 + n_1 n_2 \varepsilon_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

В главе 2 было показано, что сумма компонентов продольной деформации является инвариантной относительно ортогонального преобразования координат. Следовательно,

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Вспомнив зависимости

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

и используя соотношения (3.15), можно привести уравнения (3.16) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_x, \\ \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

где $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$. Аналогичным путем могут быть получены подобные соотношения для других компонентов напряжения. Таким образом, мы приходим к следующим шести соотношениям, выражающим обобщенный закон Гука для изотропных материалов в произвольно выбранных декартовых координатных осях x , y , z :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Решая первые три уравнения системы (3.18) относительно ε_x , ε_y , ε_z , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_x - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_y + \sigma_z), \\ \varepsilon_y &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_y - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_z + \sigma_x), \\ \varepsilon_z &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_z - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

3.3. Упругие постоянные, применяемые в технике. Рассмотрим элемент, грани которого параллельны координатным осям. Допустим, что элемент находится под действием нормальных напряжений σ_x , равномерно распределенных по двум противоположным граням, при-

чем все другие грани свободны от напряжений. В этом случае отношение напряжения к деформации называется *модулем упругости при растяжении*. Для большинства материалов, используемых в технике, модуль упругости при растяжении равен модулю упругости при сжатии; будем называть его коротко модулем упругости и обозначать через E . Понятие модуля упругости впервые было введено Юнгом; эту величину часто называют *модулем Юнга*. В символических обозначениях имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (3.20)$$

Экспериментальные наблюдения показали, что удлинение элемента в направлении x сопровождается поперечным укорочением в направлениях y и z ; это можно выразить следующим образом:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad (3.21)$$

где ν — постоянная, называемая *коэффициентом Пуассона*.

Согласно обобщенному закону Гука найдем, что для данного напряженного состояния зависимости (3.19) примут вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_x.$$

Сравнивая их с уравнениями (3.20) и (3.21), приходим к формулам:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.22)$$

Отношение компонента касательного напряжения к соответствующему компоненту деформации сдвига называется *модулем упругости при сдвиге* (модуль сдвига) и обозначается через G :

$$G = \frac{\tau}{\gamma}. \quad (3.23)$$

Из уравнений (3.18) заключаем, что $G = \mu$. Так как для изотропных материалов независимыми являются только две упругие постоянные, то величины E , ν , G должны быть связаны между собой. Решая уравнения (3.22) относительно μ , получаем

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.24)$$

Пользуясь этими, применяемыми в технике, упругими постоянными, можно представить обобщенный закон Гука в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Эти же соотношения, выраженные через компоненты деформации, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} (3.26)$$

В случае плоского напряженного состояния можно использовать уравнения (3.25), полагая $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$; тогда получим формулы для деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{aligned} \right\} (3.27)$$

Выражения для напряжений принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} (3.28)$$

При рассмотрении плоской деформации надо в уравнениях (3.26) положить $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$; тогда найдем следующие формулы для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y], \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu \varepsilon_x + (1-\nu) \varepsilon_y], \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} (3.29)$$

Деформации будут определяться выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y], \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Сопоставление зависимостей (3.27), (3.28), (3.29) и (3.30) показывает, что в задаче о плоском напряженном состоянии нельзя говорить о соответствующей плоской деформации, и наоборот, при наличии плоской деформации мы не будем иметь соответствующего плоского напряженного состояния.

Складывая первые три уравнения (3.25) или (3.26), мы получаем следующую зависимость между относительным изменением объема e и суммой нормальных напряжений Θ :

$$e = \frac{1-2\nu}{E} \Theta, \quad (3.31)$$

где $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

В случае равномерного гидростатического давления интенсивности p имеем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p;$$

из уравнения (3.31) получим

$$e = -\frac{3(1-2\nu)}{E} p. \quad (3.32)$$

Формула (3.32) устанавливает связь между объемной деформацией e и гидростатическим давлением p . Величина $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ называется *модулем объемной деформации* или *объемным модулем*.

3.4. Постановка задач теории упругости. Задача теории упругости сводится обычно к установлению закона распределения напряжений в упругом теле и, в некоторых случаях, к определению деформаций в любой его точке, при заданных объемных силах и заданных условиях на границах тела. Для того чтобы определить напряженное состояние в точке, мы должны найти шесть компонентов напряжения. Эти компоненты удовлетворяют трем уравнениям равновесия. Поскольку трех уравнений недостаточно, чтобы найти шесть неизвестных, мы вводим шесть компонентов деформации; при этом мы располагаем шестью выражениями для компонентов деформации через три компонента перемещения и шестью соотношениями между напряжениями и деформациями. В итоге для определения 15 неизвестных имеется 15 уравнений. Такая система уравнений, вообще говоря, достаточна для решения задачи теории упругости.

Если нас интересует нахождение только компонентов напряжения в теле, мы можем сократить число уравнений до шести с шестью неизвестными компонентами напряжения. Так как в этом случае мы не интересуемся компонентами деформации, то для того, чтобы обеспечить однозначность перемещений, необходимо удовлетворять условиям совместности. Возьмем, например, уравнение совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}. \quad (3.33)$$

Пользуясь обозначением $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, находим из уравнений (3.25)

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_y - \nu \Theta], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_z - \nu \Theta], \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1 + \nu) \tau_{yz}}{E}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3.33), получаем

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}. \quad (3.34)$$

Из третьего и второго уравнений системы (1.6) имеем

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - Z, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - Y. \quad (3.36)$$

Продифференцировав уравнение (3.35) по z и уравнение (3.36) по y и проведя сложение, получим

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Воспользуемся первым уравнением системы (1.6) в виде

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - X;$$

тогда будет

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (3.34) дает

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \left(\nabla^2 \Theta - \nabla^2 \sigma_x - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) = \\ = (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (3.37)$$

здесь для упрощения записи использован символ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Из двух других уравнений совместности типа (3.33) можно получить два уравнения, аналогичных уравнению (3.37). Складывая эти три уравнения, находим

$$\nabla^2\theta = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Подставляя выражение для $\nabla^2\theta$ в уравнение (3.37), получим окончательно

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}. \quad (3.38)$$

Вводя выражение для $\nabla^2\theta$ в два других уравнения, придем к трем уравнениям типа (3.38). Подобно этому остающиеся три уравнения совместности могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\right). \quad (3.39)$$

В результате получаем следующие шесть уравнений для шести неизвестных компонентов напряжения:

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}, \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y}, \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z}, \\ (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} &= -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right), \\ (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \\ (1+\nu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x} &= -\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Исходную систему 15-ти уравнений можно также привести к трем уравнениям относительно компонентов перемещения. Из обобщенного закона Гюка (3.26) имеем

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\epsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx},$$

где $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$. Подставляя эти соотношения в первое из уравнений (1.6), находим

$$\lambda\frac{\partial e}{\partial x} + G\left(2\frac{\partial\epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial z}\right) + X = 0. \quad (3.41)$$

Подставляя сюда выражения (2.1) для компонентов деформации:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}$$

получим

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0,$$

где

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Аналогичным образом могут быть выведены два других уравнения.

Окончательно три уравнения равновесия, выраженные через перемещения, получают вид:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Подстановка зависимостей (3.26) и (2.1) в граничные условия (1.36) дает:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \lambda e l + G \left(l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right) + G \left(l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial x} + n \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \bar{Y} &= \lambda e m + G \left(l \frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial v}{\partial z} \right) + G \left(l \frac{\partial u}{\partial y} + m \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \bar{Z} &= \lambda e n + G \left(l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left(l \frac{\partial u}{\partial z} + m \frac{\partial v}{\partial z} + n \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

При формулировке задачи теории упругости могут быть известны не поверхностные силы на границе, а перемещения u , v , w точек граничной поверхности. Граничные условия могут также заключаться в том, что на одной части границы будут заданы поверхностные силы, а на другой — перемещения. Уравнения (3.42) совместно с граничными условиями полностью определяют три компонента перемещения u , v , w . При этом нет нужды пользоваться уравнениями совместности; напомним, что единственное назначение последних состоит в том, чтобы наложить ограничения на компоненты деформации, обеспечив однозначность и непрерывность перемещений u , v , w .

3.5. Энергия деформации. Допустим, что упругое тело находится под действием внешних сил; при деформации тела эти силы производят работу. Если деформированному абсолютно упругому телу дать возможность медленно вернуться в начальное состояние, то может быть возвращена вся работа, произведенная внешними силами. Поэтому работа, затраченная на деформацию такого типа, рассматривается как энергия, накопленная телом, и называется *потенциальной энергией деформации*.

Вычислим потенциальную энергию, накопленную в деформированном теле. Выделим для этого внутри тела элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz и определим работу внутренних сил, действующих по граням элемента. Допустим вначале, что имеют место только напряжения σ_x (рис. 3.2). Если мы обозначим составляющую перемещения грани $A'B'C'D'$ вдоль оси x через u , то соот-

ветствующее перемещение грани $ABCD$ будет $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Для грани $A'B'C'D'$ усилие $\sigma_x dy dz$ и перемещение u будут направлены в противоположные стороны, в то время как на грани $ABCD$ их направления совпадают. В процессе деформации составляющая σ_x напряжения возрастает от нуля до некоторого значения σ_x , а перемещение

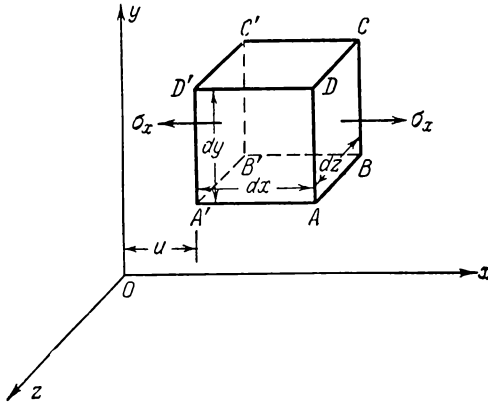


Рис. 3.2.

возрастает от нуля до u . Таким образом, работа производится усилиями, действующими по граням $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Суммарная работа усилий, равная энергии, накопленной в элементе, будет:

$$\int_{\sigma_x=0}^{\sigma_x} \sigma_x d\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz - \int_{\sigma_x=0}^{\sigma_x} \sigma_x du dy dz =$$

$$= \int_{\sigma_x=0}^{\sigma_x} \sigma_x d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx dy dz.$$

Пользуясь формулой для ϵ_x и законом Гука $\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$, получим

$$\int_{\sigma_x=0}^{\sigma_x} \frac{\sigma_x}{E} d\sigma_x dx dy dz = \frac{\sigma_x^2}{2E} dx dy dz = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz.$$

Итак, потенциальная энергия, накопленная в элементе $dx dy dz$, равна:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz.$$

Примем теперь, что в элементе имеют место напряжения σ_x и σ_y . Пусть действие их происходит в следующем порядке: вначале σ_x

возрастает от нуля до значения σ_x , в то время как σ_y равняется нулю; затем, при постоянном значении σ_x , σ_y возрастает от нуля до величины σ_y . Для той части процесса, когда $\sigma_y = 0$, работа, произведенная усилиями σ_x , будет такой же, как была вычислена выше. Принимая по-прежнему $\epsilon_x = \sigma_x/E$, получим

$$dU_1 = \frac{1}{2E} \sigma_x^2 dx dy dz.$$

В то время как σ_x увеличивается от нуля до значения σ_x , ϵ_y также изменяется от нуля до значения $(-\nu\sigma_x/E)$. Но работа, соответствующая этому перемещению, будет равна нулю, так как в течение этой части процесса имеем $\sigma_y = 0$. Возрастание τ_y от нуля до значения σ_y будет сопровождаться увеличением деформации ϵ_y , равной σ_y/E . Этой части ϵ_y будет отвечать потенциальная энергия

$$dU_2 = \frac{1}{2E} \sigma_y^2 dx dy dz.$$

В это же время величина ϵ_x изменяется за счет возрастания σ_y от σ_x/E до $(\sigma_x - \nu\sigma_y)/E$. Но здесь величина σ_x является постоянной; работа, соответствующая *постоянному* напряжению σ_x , будет равна

$$dU_3 = \frac{(\sigma_x dx dy)(-\nu\sigma_y)}{E} = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y dx dy.$$

В этой формуле множитель $1/2$ отсутствует; это объясняется именно тем, что при изменении ϵ_x напряжение σ_x остается постоянным. Таким образом, полная потенциальная энергия, накопленная элементом, равна

$$dU = dU_1 + dU_2 + dU_3 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) dx dy dz.$$

Для рассматриваемой системы напряжений закон Гука дает:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x).$$

Легко видеть, что выражение для dU может быть записано в следующей форме:

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y) dx dy dz. \quad (3.44)$$

Можно показать, что энергия, накопленная телом, будет точно такой же, если мы примем иной порядок приложения усилий. Иными словами, потенциальная энергия зависит только от окончательного напряженного состояния и не зависит от порядка приложения усилий.

Рассмотрим, далее, элемент, по граням которого действуют касательные напряжения τ_{xy} . Из рисунка 3.3 видно, что усилия, прихо-

длежащее на грань элемента, равно $\tau_{xy} dx dz$, а перемещение в направлении усилия будет $\gamma_{xy} dy$. Энергия деформации равна

$$dU = \frac{1}{2} (\tau_{xy} dx dz) (\gamma_{xy} dy) = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz. \quad (3.45)$$

Из закона Гука можно заключить, что нормальные напряжения не будут вызывать деформации сдвига, а напряжения сдвига не вызовут продольной деформации. Следовательно, если на элемент $dx dy dz$ одновременно действуют напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} , общая энергия деформации, накопленная элементом, может быть получена сложением выражений (3.44) и (3.45):

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz. \quad (3.46)$$

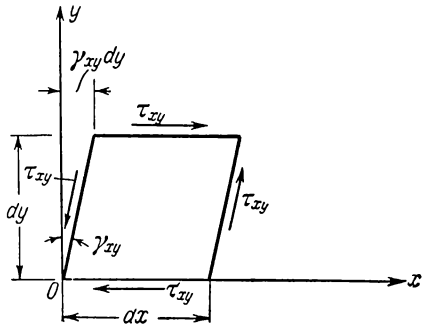


Рис. 3.3.

Мы получили выражение для энергии деформации, накопленной элементом $dx dy dz$ при плоском напряженном состоянии.

Если напряжения в элементе являются переменными, мы получим для энергии деформации то же выражение (3.46) (рис. 3.4). Предположим, что

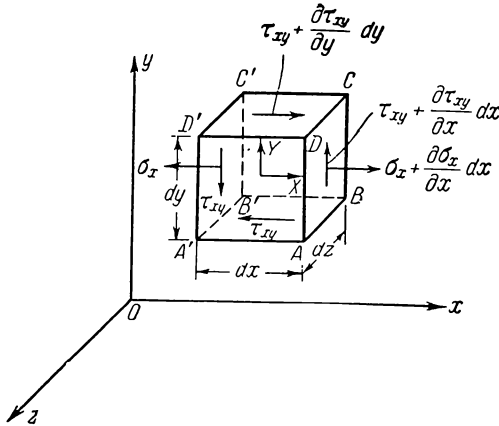


Рис. 3.4.

элемент находится под действием напряжений σ_x и τ_{xy} и объемных сил X , Y . В процессе деформации напряжения σ_x и τ_{xy} возрастают от нуля до некоторого значения σ_x и τ_{xy} ; соответственно возрастут перемещения u и v .

Работа, произведенная при деформации элемента, будет равна:

$$\begin{aligned}
 dU &= \int \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) d \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dy dz - \\
 &\quad - \int \sigma_x d \left(u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dy dz + \\
 &\quad + \int \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) d \left(u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx dz - \\
 &\quad - \int \tau_{xy} d \left(u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dx dz + \\
 &\quad + \int \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) d \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dy dz - \\
 &\quad - \int \tau_{xy} d \left(v + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dy dz + \\
 &\quad + \int X d \left(u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx dy dz + \\
 &\quad + \int Y d \left(v + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx dy dz = \\
 &= \int \sigma_x d \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dz + \int \tau_{xy} d \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy dz + \\
 &\quad + \int \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right) du dx dy dz + \\
 &\quad \quad \quad + \int \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) dv dx dy dz; \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

здесь интегрирование производится в пределах от $u = 0$, $v = 0$ до значений u и v , соответствующих напряжениям σ_x и τ_{xy} ; членами высшего порядка, включающими $dx^2 dy dz$ и $dx dy^2 dz$, мы пренебрегаем. Если принять $\sigma_y = 0$, то условия равновесия примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0,$$

и поэтому два последних интеграла в (3.47) обращаются в нуль. Это значит, что полная работа, производимая этими вариациями усилий, равна нулю. Пользуясь зависимостями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy},$$

придадим выражению (3.47) вид:

$$dU = \int \sigma_x d\epsilon_x dx dy dz + \int \tau_{xy} d\gamma_{xy} dx dy dz.$$

Выполняя интегрирование, найдем:

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz.$$

Мы получили то же выражение, что и в случае, когда изменение напряжений не учитывалось.

В общем случае трехмерного напряженного состояния энергия деформации, накопленная в элементе $dx dy dz$, может быть найдена таким же образом; будем иметь

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.48)$$

Общая потенциальная энергия U , накопленная в деформированном упругом теле, может быть найдена интегрированием dU по всему объему V :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \int \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.49)$$

Пользуясь выражениями (3.25) для деформаций через напряжения, можно выразить величину U только через компоненты напряжения. Тогда формула (3.49) запишется в виде

$$U = \int_V \int \int \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dx dy dz. \quad (3.50)$$

В случае плоского напряженного состояния, при $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, будем иметь

$$U = \frac{1}{2} \int_V \int \int \left[\frac{1}{E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{G} \tau_{xy}^2 \right] dx dy dz. \quad (3.51)$$

С другой стороны, соотношения «напряжения — деформации» позволяют выразить энергию U только через компоненты деформации. В этом случае

$$U = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \int \int \left[\frac{\nu}{1-2\nu} e^2 + (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] dx dy dz. \quad (3.52)$$

При плоской деформации, используя (3.28), получаем

$$U = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \int \int \left[\frac{1}{1-\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 \right] dx dy dz. \quad (3.53)$$

3.6. Существование решения и его однозначность. Рассматривая систему основных уравнений теории упругости совместно с граничными условиями, мы можем доказать не только существование решения этих уравнений, но и то, что решение является однозначным.

Иными словами, можно показать, что заданной внешней нагрузке отвечает только одно определенное напряженное состояние. Строгое доказательство существования решений основных уравнений дали Корн *) и Лихтенштейн **). Требующиеся для доказательства выкладки настолько длинны, что не могут быть приведены в данной книге. Мы займемся здесь только теоремой об однозначности решения, которую можно сформулировать следующим образом ***).

Если, в дополнение к объемным силам, заданы усилия или перемещения для граничной поверхности тела, то осуществляется только одна определенная равновесная форма тела, причем распределение напряжений и деформаций в теле является однозначным.

При выводе этой теоремы надо иметь в виду, что в задачах теории упругости мы оперируем с бесконечно малыми деформациями и перемещениями. Если деформации или перемещения не являются бесконечно малыми, решение основных уравнений может не быть однозначным; это будет показано в последующих главах для задач, касающихся упругой устойчивости.

Для того чтобы установить однозначность решения краевых задач, предположим сначала, что могут быть получены две системы решений:

$$\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, u', v', w'$$

и

$$\sigma''_x, \sigma''_y, \dots, u'', v'', w'',$$

которые удовлетворяют 15-ти уравнениям теории упругости и граничным условиям. Тогда для первого напряженного состояния должны удовлетворяться уравнения

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + X = 0,$$

а также граничные условия

$$\bar{X} = l\sigma'_x + m\tau'_{xy} + n\tau'_{zx},$$

*) A. Korn, Ueber die Lösung des grundproblemcs der elastizitätstheorie, Math. Ann. т. 75, 1914, 497—544.

**) L. Lichtenstein, Ueber die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, Math. Z., т. 20, 1924, 21—28.

***) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Math. Phys. Mechanik, Leipzig, 1883.

при заданных усилиях на поверхности, или условия

$$\begin{aligned}
 u &= u', \\
 &\dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

если заданы перемещения на границе. Для второй системы напряжений должно быть соответственно

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma''_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 \bar{X} &= l\sigma''_x + m\tau''_{xy} + n\tau''_{xz}, \\
 &\dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 u &= u'', \\
 &\dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Благодаря линейности задачи, при вычитании мы получим уравнения для напряженного состояния, отвечающего разностям $\sigma'_x - \sigma''_x$, $\sigma'_y - \sigma''_y$, ...

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\sigma'_x - \sigma''_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau'_{xy} - \tau''_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau'_{xz} - \tau''_{xz})}{\partial z} &= 0, \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 0 &= l(\sigma'_x - \sigma''_x) + m(\tau'_{xy} - \tau''_{xy}) + n(\tau'_{xz} - \tau''_{xz}), \\
 &\dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Мы пришли, таким образом, к новому, «разностному» распределению напряжений, при котором все внешние силы и перемещения на контуре равны нулю. Если внешние силы или перемещения на контуре отсутствуют, то работа этих сил будет равна нулю. Согласно закону сохранения энергии, мы можем сказать, что потенциальная энергия деформации, накопленная в теле, также должна быть равна нулю. Но из формулы (3.52) видно, что энергия деформации является квадратичной функцией компонентов деформации. Если любой

компонент деформации отличается от нуля, то энергия деформации будет иметь определенное положительное значение. Она может быть равна нулю только в том случае, если все компоненты деформации будут равны нулю. Поэтому, если потенциальная энергия, накопленная в теле, равна нулю, то в любой точке тела компоненты деформации, и, соответственно, компоненты напряжения, должны равняться нулю, так что тело будет находиться в ненапряженном состоянии. Таким образом, «разностное» напряженное состояние $\sigma'_x - \sigma''_x, \sigma'_y - \sigma''_y, \dots$ не может иметь места, и оба решения должны быть тождественны; это значит, что для напряжений и деформаций существует одно определенное решение. Перемещения же будут определены однозначно в том случае, если заданы перемещения на контуре. В том случае, когда на границе заданы силы, перемещения будут определяться с точностью до величин, представляющих движение абсолютно твердого тела.

При доказательстве теоремы однозначности мы предполагали, что перемещения u, v, w являются однозначными функциями и что начальные напряжения отсутствуют. В тех случаях, когда имеют место начальные напряжения, можно воспользоваться так называемым принципом наложения и сказать, что деформации и напряжения, вызванные внешними силами, не зависят от начальных напряжений и могут быть вычислены точно таким же образом, как если бы начальные напряжения отсутствовали. Полные напряжения представят собой алгебраическую сумму напряжений, вызванных внешними силами, и начальных напряжений. В некоторых случаях принцип наложения неприменим, как например, при изгибе призматического бруса, сопровождающемся осевым растяжением или сжатием; здесь уже нельзя определить напряжения, вызванные внешними нагрузками, если неизвестны начальные напряжения.

3.7. Принцип Сен-Венана. Применяя методы теории упругости к задачам инженерной практики, мы часто будем обращаться к принципу Сен-Венана; сущность его можно выразить следующим образом.

Если систему сил, действующих на малом участке поверхности упругого тела, заменить другой, статически эквивалентной системой сил, то такое перераспределение нагрузок оказывает существенное влияние на напряжения лишь в непосредственной близости от места приложения нагрузки; в тех же частях тела, которые находятся от нагруженного участка на расстоянии, значительном по сравнению с линейными размерами этого участка, напряжения существенных изменений не претерпевают.

Термин «статически эквивалентные системы сил» означает, что в обоих случаях имеются одна и та же результирующая сила и один и тот же результирующий момент.

Если при решении практических задач граничные условия задаются в строгом соответствии с истинным распределением сил, то решение

задачи с математической стороны может оказаться весьма сложным. Часто, изменив слегка граничные условия, мы можем сделать решение задачи выполнимым; таким путем мы получим решение, которое для большей части упругого тела дает распределение напряжений, очень близкое к истинному. Поэтому, пользуясь принципом Сен-Венана, можно упростить решение задачи, изменяя граничные условия и рассматривая систему приложенных сил, эквивалентную заданной. Кроме того, во многих практических задачах точное распределение сил на контуре неизвестно, в то время как статически эквивалентную нагрузку легко определить; в подобных случаях мы можем решить задачу, относящуюся к этой статически эквивалентной нагрузке; принцип Сен-Венана указывает, что такой путь должен привести к удовлетворительному приближенному решению.

ГЛАВА 4

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

4.1. Основные дифференциальные уравнения. Основной задачей теории упругости является отыскание такого решения общего уравнения (3.40) или (3.42), которое отвечало бы граничным условиям для напряжений или перемещений. Однако осуществление такого решения общей системы уравнений часто оказывается весьма сложным. К счастью, во многих практически важных задачах можно сделать ряд упрощающих предположений, касающихся распределения напряжений или деформаций, благодаря чему решение становится относительно простым.

Рассмотрим длинный призматический цилиндр, находящийся под действием поперечной нагрузки, равномерно распределенной вдоль оси (рис. 4.1). Допустим, что составляющая объемной силы Z равна

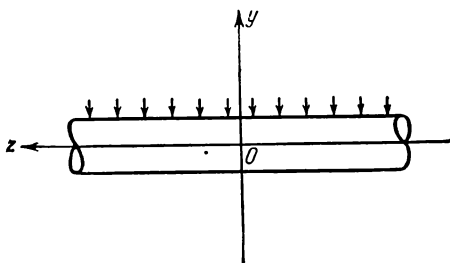


Рис. 4.1.

нулю, а X и Y являются функциями только x и y . В этом случае деформация значительной части тела, находящейся на некотором расстоянии от концов, не зависит от координаты z , а перемещения u и v являются функциями только x и y . Если торцы цилиндра не могут смещаться в направлении z , то перемещение w будет там равно нулю. В среднем сечении цилиндра, как это

следует из симметрии, величина w также должна равняться нулю. Поэтому мы можем сделать приближенное предположение, что в любом поперечном сечении цилиндра значение w равно нулю. Тогда компоненты деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

будут функциями только x и y , а компоненты деформаций

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

окажутся равными нулю. Такое напряженное состояние носит название *плоской деформации*.

Как видно из соотношений (3.29), выражающих закон Гука, в данном случае компоненты напряжений σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} будут функциями только x и y , а величины τ_{yz} и τ_{zx} во всех точках окажутся равными нулю. Следовательно, уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \quad (4.1)$$

Наибольшее значение для практики имеют два вида объемных сил: сила тяжести и центробежная сила. Здесь мы сосредоточим свое внимание на случае, когда объемной силой является сила тяжести; в последующих разделах этой главы будет рассмотрен также случай центробежной силы. Если объемной силой является только сила тяжести, то мы можем написать: $X = \rho g_x$ и $Y = \rho g_y$, где ρ — плотность материала, а g_x , g_y — компоненты ускорения силы тяжести соответственно по осям x и y . Уравнения (4.1) переписутся в виде:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho g_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g_y = 0. \quad (4.2)$$

Система уравнений (4.2) будет удовлетворяться, если ввести функцию напряжений $\psi(x, y)$ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \rho g_x y - \rho g_y x. \quad (4.3)$$

Пренебрегая силой тяжести, получим

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \quad (4.4)$$

Таким образом, наша задача сводится к определению функции напряжений ψ при соответствующих граничных условиях. После того как найдена функция напряжений, можно по формулам (4.3) или (4.4) определить напряжения.

Если задача решается в напряжениях, необходимо использовать уравнения совместности (2.19). Рассмотрение этих уравнений показывает, что только одно из них не будет удовлетворяться тождественно; это относится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.5)$$

В случае плоской деформации зависимости между деформациями и напряжениями имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y], \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x], \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Подставив эти соотношения в уравнение (4.5) и опуская общий множитель, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.7)$$

Если выразить компоненты напряжений через функцию напряжений по формулам (4.3) и (4.4), то уравнение (4.7) получит форму:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0. \quad (4.8)$$

Мы получили основное уравнение для ψ . Пользуясь обозначением

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = (\nabla^2)^2,$$

перепишем уравнение (4.8) в виде

$$\nabla^4 \psi = 0.$$

Оператор $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ называется оператором *Лапласа* или *гармоническим* оператором, а уравнение (4.8) носит название *бигармонического уравнения*.

Рассмотрим, далее, случай, когда концы цилиндра могут свободно смещаться. Тогда можно предположить, что продольная деформация ε_z представляет собой постоянную величину. Такое напряженное состояние можно назвать *обобщенной плоской деформацией*. Из равенств (3.25) находим:

$$\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) + E\varepsilon_z \quad (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] - \nu\varepsilon_z, \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] - \nu\varepsilon_z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

величина ε_z рассматривается как постоянная. Подставляя выражения (4.10) в уравнение (4.5), после упрощений получаем в качестве основного дифференциального уравнения снова уравнение (4.8). После

определения σ_x и σ_y постоянное значение ε_z можно найти из условия, что результирующая сила, действующая по торцам цилиндра в направлении z , равна нулю:

$$\iint \sigma_z dx dy = 0. \quad (4.11)$$

Плоская деформация может иметь место в случае длинного цилиндра, размер которого в направлении z велик по сравнению с другими размерами.

Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда размер тела в направлении z весьма мал, т. е. случай тонкой плоской пластинки. Предположим, что пластинка находится под действием сил, приложенных по контуру параллельно ее плоскости и равномерно распределенных по толщине (рис. 4.2). Допустим также, что объемная сила Z равна нулю, а силы X и Y являются функциями только x и y . Очевидно, поверхности пластинки $z = \pm h/2$ будут свободны от внешних сил, и компоненты напряжений σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} здесь должны быть равны нулю. Если пластинка тонкая, то без существенной ошибки можно принять, что эти компоненты равны нулю по всей толщине пластинки, и что три других компонента — σ_x , σ_y , τ_{xy} — практически остаются постоянными по толщине пластинки. Тогда мы получим случай *плоского напряженного состояния*, для которого $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, а величины σ_x , σ_y , τ_{xy} являются функциями только x и y . При этом уравнения равновесия сохраняют форму (4.1) или (4.2); для того чтобы эти уравнения удовлетворялись, можно по-прежнему ввести ту же функцию напряжений ψ .

Соотношения между деформациями и напряжениями будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Подставляя зависимости (4.12) и (4.3) в (4.5), мы вновь получим уравнение (4.8) в качестве основного уравнения для функции напряжений ψ .

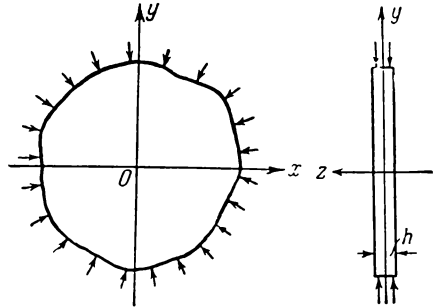


Рис. 4.2.

Обратимся к уравнениям (2.19). Если положить $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, а величины σ_x , σ_y , τ_{xy} считать независимыми от z , то, в дополнение к уравнению (4.5), должны быть удовлетворены еще три уравнения совместности. Они имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.13)$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = ax + by + c,$$

где a , b , c — постоянные интегрирования. Однако при решении задачи о плоском напряженном состоянии с помощью уравнения (4.8) это условие, вообще говоря, не будет удовлетворяться. Очевидно, решение по уравнению (4.8) не может считаться точным, поскольку не все уравнения совместности удовлетворяются. Можно получить точное решение, удовлетворяющее всем уравнениям совместности, если по-прежнему положить $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, но не ставить условия, чтобы величины σ_x , σ_y , τ_{xy} являлись независимыми от z . Будем пренебрегать объемными силами и считать внешние силы расположенными симметрично относительно срединной плоскости пластинки; тогда можно показать*, что функция напряжений ψ , определяемая уравнением (4.4), имеет следующий вид:

$$\psi = \psi_1 - \frac{\nu}{2(1+\nu)} (\nabla^2 \psi_1) z^2,$$

причем функция ψ_1 должна удовлетворять уравнению (4.8). Для тонкой пластинки значение z обычно весьма мало, и потому вторым членом в выписанном выражении можно пренебречь. Следовательно, решение задач с помощью уравнения (4.8) дает в случае тонкой пластинки достаточную точность, хотя при этом не все уравнения совместности оказываются удовлетворенными.

Предыдущее изложение показывает, что для задач о плоском напряженном состоянии, о плоской деформации и об обобщенной плоской деформации функция напряжений определяется одним и тем же дифференциальным уравнением, при условии, что объемные силы представлены только силой тяжести. Решение этих задач отличается только тем, как будут определяться компоненты деформации после того, как найдены компоненты напряжения. В случае плоской деформации при этом следует использовать уравнения (4.6), в случае обобщенной плоской деформации — уравнения (4.10), в случае плоского напряженного состояния — уравнения (4.12). То обстоятельство, что все компоненты напряжения можно выразить через одну функцию напряжений, впервые было установлено Эри**); функцию ψ обычно называют *функцией напряжений Эри*.

4.2. Изгиб консоли с узким прямоугольным сечением силой, приложенной на конце. В качестве первого примера сделаем попытку найти точное решение задачи для случая консольной балки с узким

*) S. Timoshenko, J. N. Goodier, Theory of Elasticity New York, 1951, стр. 241—244.

**) G. B. Airy, Brit. Assoc. Rept., 1862.

прямоугольным сечением, загруженной на конце силой P . Если толщина h мала по сравнению с высотой d , то распределение напряжений в такой балке (рис. 4.3) можно рассматривать как плоское напряженное состояние.

Граничные условия заключаются в том, что верхняя и нижняя грани свободны от нагрузки, а результирующая перерезывающая сила при $x=0$ равна P . Если величина P велика по сравнению с ρg , то силой тяжести можно пренебречь.

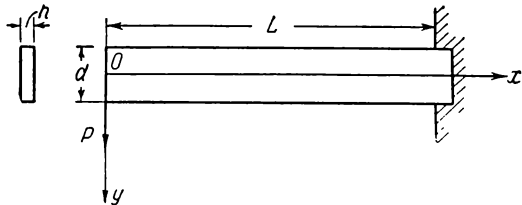


Рис. 4.3.

Из условий статики вытекает, что изгибающий момент в любом сечении пропорционален x , а напряжение σ_x в любой точке сечения пропорционально y . Поэтому положим

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = c_1 x y,$$

где c_1 — некоторая постоянная. Интегрируя, находим

$$\psi = \frac{c_1}{6} x y^3 + y f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — неизвестные функции координаты x . Подстановка полученного выражения в основное уравнение (4.8)

$$\nabla^4 \psi = 0$$

дает

$$y \frac{d^4 f_1}{dx^4} + \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0.$$

Так как f_1 и f_2 — функции только x , то второй член в этом уравнении не зависит от y . Но рассматриваемое уравнение должно удовлетворяться для всех значений x и y , относящихся к балке. Это возможно лишь при

$$\frac{d^4 f_1}{dx^4} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$$

или

$$f_1 = c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5, \quad f_2 = c_6 x^3 + c_7 x^2 + c_8 x + c_9,$$

где c_2, c_3, \dots, c_9 — постоянные интегрирования. Окончательно имеем

$$\psi = \frac{c_1}{6} x y^3 + y(c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5) + c_6 x^3 + c_7 x^2 + c_8 x + c_9. \quad (4.14)$$

Пренебрегая силой тяжести, получаем согласно выражениям (4.4):

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 6(c_2 y + c_6) x + 2(c_3 y + c_7),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{c_1}{2} y^2 - 3c_2 x^2 - 2c_3 x - c_4.$$

Исходя из граничных условий, находим

$$\sigma_y = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm \frac{d}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} 6 \left(c_2 \frac{d}{2} + c_6 \right) x + 2 \left(c_3 \frac{d}{2} + c_7 \right) &= 0, \\ 6 \left(-c_2 \frac{d}{2} + c_6 \right) x + 2 \left(-c_3 \frac{d}{2} + c_7 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения должны удовлетворяться для всех значений x от 0 до L , следовательно,

$$\begin{aligned} c_2 \frac{d}{2} + c_6 &= 0, & c_3 \frac{d}{2} + c_7 &= 0, \\ -c_2 \frac{d}{2} + c_6 &= 0, & -c_3 \frac{d}{2} + c_7 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$c_2 = c_3 = c_6 = c_7 = 0,$$

откуда

$$\tau_{xy} = -\frac{c_1}{2} y^2 - c_4.$$

Чтобы удовлетворить условию $\tau_{xy} = 0$ при $y = \pm d/2$, мы должны положить

$$-\frac{c_1}{8} d^2 - c_4 = 0 \quad \text{или} \quad c_4 = -\frac{c_1 d^2}{8}.$$

На нагруженном конце балки сумма распределенных перерезывающих усилий должна равняться P :

$$-\int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{xy} h \, dy = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{c_1}{8} h (4y^2 - d^2) \, dy = P,$$

Следовательно,

$$c_1 = -\frac{12P}{d^3 h}.$$

Учитывая, что величина $I = d^3 h / 12$ представляет собой момент инерции поперечного сечения, приходим к окончательным выражениям для напряжений:

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right). \quad (4.15)$$

Полученный нами результат полностью совпадает с элементарным решением, которое дается в курсах сопротивления материалов. Из этого решения вытекает, что перерезывающая сила по торцам изменяется по закону параболы, и что напряжение σ_x в сечении у места заделки зависит линейно от y . Поэтому решение будет точным, если

усилия, действующие по торцам, заданы именно таким образом. Если же усилия в граничных сечениях изменяются по какому-либо иному закону, решение не может считаться точным; однако, в соответствии с принципом Сен-Венана, это решение будет отвечать распределению напряжений в некотором поперечном сечении, достаточно удаленном от концов. Мы видели, что постоянные c_5 , c_8 и c_9 в выражении для ψ не зависят от граничных условий. Определение этих постоянных не входит в решение, поскольку напряжения от них не зависят.

Найдя напряжения, мы можем перейти к определению перемещений в балке. Используя выражения для компонентов деформации и закон Гука, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EI}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu Pxy}{EI}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} = -\frac{(1+\nu)P}{EI} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Интегрируя первые два уравнения, получаем

$$u = -\frac{P}{2EI} x^2 y + g_1(y), \quad v = \frac{\nu P}{2EI} x y^2 + g_2(x),$$

где $g_1(y)$ и $g_2(x)$ — некоторые функции от y и x . Подставляя эти выражения в третье уравнение (4.16), будем иметь

$$\frac{dg_1}{dy} - \frac{P}{EI} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) y^2 = -\frac{dg_2}{dx} + \frac{P}{2EI} x^2 - \frac{(1+\nu)P}{4EI} d^2.$$

Легко видеть, что члены в левой части равенства зависят только от y , а члены в правой части — только от x . Функция от x может быть равна функции от y для всех значений x и y только в том случае, если обе они равны постоянной величине; обозначим ее через a_1 . Отсюда

$$\frac{dg_1}{dy} = \frac{P}{EI} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) y^2 + a_1, \quad \frac{dg_2}{dx} = \frac{P}{2EI} x^2 - \frac{(1+\nu)P}{4EI} d^2 - a_1.$$

Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} g_1(y) &= \frac{P}{3EI} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) y^3 + a_1 y + a_2, \\ g_2(x) &= \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{(1+\nu)P}{4EI} d^2 x - a_1 x + a_3, \end{aligned}$$

где a_2 и a_3 — постоянные интегрирования. Перемещения u и v оказываются равными:

$$u = -\frac{P}{2EI} x^2 y + \frac{P}{3EI} \left(1 + \frac{\nu}{2}\right) y^3 + a_1 y + a_2,$$

$$v = \frac{\nu P}{2EI} x y^2 + \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{(1 + \nu)P}{4EI} d^2 x - a_1 x + a_3.$$

Допустим, что точка ($x = L$, $y = 0$) закреплена. Тогда будем иметь следующие граничные условия:

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = L, \quad y = 0.$$

После подстановки выражений для u и v , находим

$$a_1 = \frac{PL^2}{2EI} - \frac{(1 + \nu)Pd^2}{4EI}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{PL^3}{3EI}$$

и

$$u = -\frac{P}{2EI} x^2 y + \frac{P}{3EI} \left(1 + \frac{\nu}{2}\right) y^3 + \frac{P}{2EI} \left[L^2 - (1 + \nu) \frac{d^2}{2}\right] y,$$

$$v = \frac{\nu P}{2EI} x y^2 + \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{PL^2}{2EI} x + \frac{PL^3}{3EI}.$$

Уравнение упругой линии получаем из выражения для v при $y = 0$:

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2 x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}.$$

Кривизна упругой линии равна

$$\frac{1}{R} \approx \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)_{y=0} = \frac{Px}{EI} = \frac{M}{EI},$$

где R — радиус кривизны, а $M = Px$ — изгибающий момент в сечении x . Мы получили хорошо известную из элементарной теории изгиба формулу Эйлера — Бернулли. Рассмотрим, далее, сечение $x = c$, являющееся плоским до изгиба. При изгибе балки точка (x, y) , лежащая в плоскости $x = c$, переместится в точку с координатами $x' = c + u$, $y' = y + v$. Уравнение полученной поверхности будет иметь вид:

$$x' = c + \frac{P}{2EI} \left[L^2 - c^2 - (1 + \nu) \frac{d^2}{2}\right] (y' - v) +$$

$$+ \frac{P}{3EI} \left(1 + \frac{\nu}{2}\right) (y' - v)^3.$$

Эта поверхность будет мало отличаться от плоскости, если отрезок c мал по сравнению с L , т. е. если сечение достаточно удалено от заделанного конца. Однако вблизи заделанного конца поверхность, очевидно, будет искривленной. Можно показать, что при действии

на балку одного только изгибающего момента (см. § 9.1), сечения, являющиеся плоскими до изгиба, продолжают оставаться плоскими после изгиба.

Задача 1. Пусть на консольную балку, изображенную на рис. 4.3, вместо сосредоточенной нагрузки действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности p . Найти функцию напряжений и компоненты напряжений. Граничные условия будут иметь вид:

$$\sigma_y = -p \quad \text{при } y = +\frac{d}{2},$$

$$\sigma_y = 0 \quad \text{при } y = -\frac{d}{2},$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = \pm\frac{d}{2}$$

и

$$\int_{-d/2}^{d/2} \sigma_x dy = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{xy} dy = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Указание. Следует выбрать функцию, исходя из соотношения

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = xf(y).$$

$$\text{Отв. } \psi = -px^2 \left(\frac{y^3}{d^3} - \frac{3y}{4d} + \frac{1}{4} \right) + \frac{pd^3}{5} \left(\frac{y^5}{d^5} - \frac{y^3}{2d^3} \right) + c_1x + c_2y + c_3.$$

Задача 2. Допустим, что распределенная нагрузка, действующая на консольную балку (рис. 4.3), изменяется по линейному закону как функций от x ; эта задача соответствует случаю вертикальной консоли, нагруженной гидростатическим давлением. Плотность жидкости обозначим через ρ . Граничные условия пусть будут следующими:

$$\sigma_y = -\rho x \quad \text{при } y = \frac{d}{2}, \quad \sigma_y = 0 \quad \text{при } y = -\frac{d}{2},$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = \pm\frac{d}{2}, \quad \sigma_x = 0 \quad \text{при } x = 0$$

и

$$\int_{-d/2}^{d/2} \tau_{xy} dy = 0.$$

Найти функцию напряжений и напряжения.

Указание. Следует воспользоваться функцией, отвечающей выражению

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = x^3 f_1(y) + x f_2(y).$$

$$\text{Отв. } \psi = \frac{\rho x^3}{12d^3} (4y^3 - 3d^2y - d^3) - \frac{\rho xy}{80d^3} (16y^4 - 8d^2y^2 + d^4) + c_1x + c_2y + c_3.$$

Задача 3. Треугольная пластинка узкого прямоугольного поперечного сечения и постоянной толщины находится под действием равномерно

распределенной нагрузки p , приложенной вдоль верхнего края, как показано на рис. 4.4. Показать, что функция напряжений

$$\psi = \frac{p \operatorname{ctg} \alpha}{2(1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha)} \left[-x^2 \operatorname{tg} \alpha + xy + (x^2 + y^2) \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) \right]$$

удовлетворяет основному уравнению и граничным условиям. Для частного случая $\alpha = 30^\circ$ выяснить, как распределяются нормальные напряжения в сечении AB и сравнить их с напряжениями, определяемыми по элементарной формуле изгиба $\sigma_x = Mc/I$.

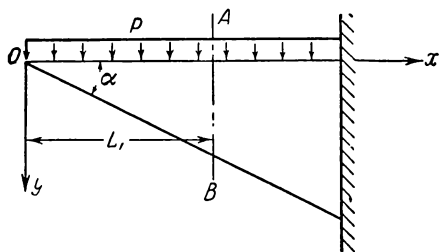


Рис. 4.4.

4.3. Основные уравнения в цилиндрических координатах. При рассмотрении задач для цилиндрических тел круглого очертания удобно пользоваться *цилиндрическими координатами* r, θ, z . В случае плоского напряженного состояния

или плоской деформации $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$, а остальные компоненты напряжения будут функциями только r и θ ; тогда цилиндрические координаты переходят в полярные. Рассмотрим равновесие малого

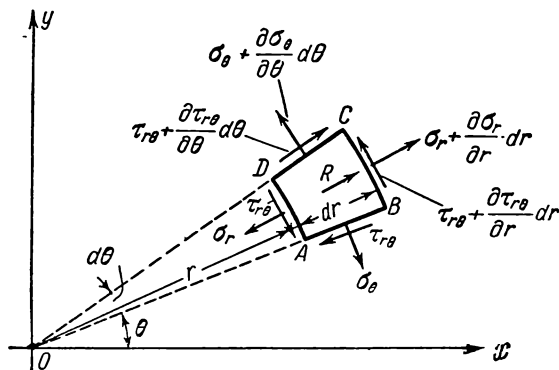


Рис. 4.5 а.

элемента $ABCD$, показанного на рис. 4.5,а. Радиальные компоненты сил, соответствующих напряжениям

$$\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \quad \text{и} \quad \sigma_r,$$

будут равны:

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta.$$

Радиальные компоненты сил, отвечающих напряжениям

$$\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta, \quad \sigma_\theta, \quad \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \quad \text{и} \quad \tau_{r\theta},$$

как это видно из рис. 4.5б, оказываются равными:

$$\begin{aligned} -\left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dr \sin \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} + \\ + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta\right) dr \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{r\theta} dr \cos \frac{d\theta}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку угол $d\theta$ мал, это выражение принимает вид:

$$-\left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dr \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta\right) dr - \tau_{r\theta} dr.$$

Обозначим через F_r, F_θ компоненты объемных сил, приходящихся на единицу объема, соответственно в радиальном и касательном направлениях. Найдем сумму радиальных компонентов сил. Отбрасывая малые величины высшего порядка и деля все величины на элементарную площадь $r dr d\theta$, получим следующее уравнение равновесия для радиального направления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \\ + F_r = 0. \end{aligned}$$

Таким же образом можно получить уравнение равновесия для направления вдоль касательной. Окончательно уравнения равновесия для плоских задач в цилиндрических координатах, соответствующие уравнениям (4.1), будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Допустим, что объемными силами можно пренебречь; уравнения (4.17) будут при этом удовлетворяться тождественно, если ввести

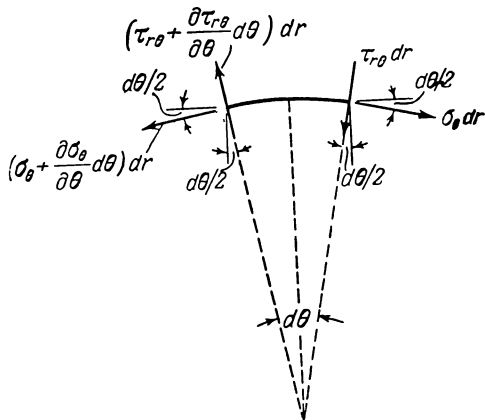


Рис. 4.5б.

функцию напряжений ψ по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Обратимся к выводу уравнений совместности для плоских задач в цилиндрических координатах. Предположим, что элемент $ABCD$ переходит после деформации в положение $A'B'C'D'$, как показано на рис. 4.6. Пусть через u и v обозначены перемещения точки A , соответственно в радиальном и касательном направлениях. Тогда перемещения точки B будут $u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$ и $v + \frac{\partial v}{\partial r} dr$; квадрат отрезка $A'B'$ окажется равным

$$(A'B')^2 = \left(dr + \frac{\partial u}{\partial r} dr \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} dr \right)^2.$$

По определению, имеем

$$A'B' = (1 + \epsilon_r) AB = (1 + \epsilon_r) dr.$$

Пренебрегая членами высших порядков, находим

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

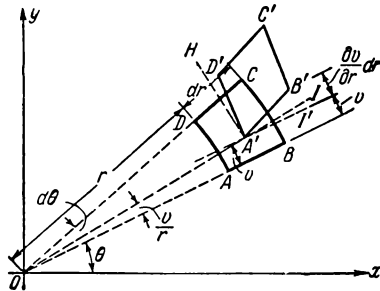


Рис. 4.6.

Компонент продольной деформации в направлении касательной зависит от величин u и v . До деформации было $AD = r d\theta$. После деформации длина AD за счет перемещения u становится равной $(r + u) d\theta$. В то же время точка A' получает перемещение v вдоль касательной, а точка D' — перемещение $v + \frac{\partial v}{\partial \theta} r d\theta$. Отсюда

$$(A'D')^2 = [(1 + \epsilon_\theta) r d\theta]^2 = \left[(r + u) d\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} r d\theta \right]^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} r d\theta \right)^2.$$

Пренебрегая членами высшего порядка, получаем

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Рассмотрим, далее, деформацию сдвига. Угол $B'A'I'$ между направлениями AB и $A'B'$ равен $\frac{\partial v}{\partial r}$, а угол $D'A'H$ между AD и $A'D'$

равен $\frac{\partial u}{r \partial \theta}$. Следовательно, изменение угла DAB (т. е. деформация сдвига $\gamma_{r\theta}$) равно

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta} &= \angle D'A'H + \angle B'A'I = \angle D'A'H + \angle B'A'I - \angle I A'I' = \\ &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned}$$

В результате имеем:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (4.19)$$

Исключая u и v из формул (4.19), легко установить, что уравнения совместности принимают здесь вид:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_r}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} = \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{r \partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta}. \quad (4.20)$$

Перейдем к случаю плоского напряженного состояния. Соотношения между напряжениями и деформациями в полярных координатах можно выписать, заменив в выражениях (4.12) индекс x на r и индекс y на θ ; тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Подставляя эти соотношения в (4.20) и сокращая на $1/E$, будем иметь:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) - \\ &- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{r \partial r \partial \theta} + 2(1+\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

При введении функции напряжений, определяемой формулами (4.18), уравнение совместности примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) представляет собой основное дифференциальное уравнение для функции напряжений ψ . Так как выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

является оператором Лапласа ∇^2 в полярных координатах, то уравнение (4.23) является просто уравнением (4.8), написанным

в полярных координатах. Отсюда вытекает, что оно будет основным уравнением и для задачи о плоской деформации, и для обобщенной задачи о плоской деформации.

Задача 1. Показать, что функция напряжений ψ , заданная выражениями (4.18), по существу совпадает с функцией ψ , определяемой равенствами (4.4).

Задача 2. Зависимость между полярными и декартовыми координатами имеет вид:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Проверить соотношение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}.$$

Пользуясь этим, показать, что уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

представляет собой бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0$$

в полярных координатах.

4.4. Толстая труба под действием равномерного давления. Соединения с натягом. Рассмотрим толстостенный цилиндр, подверженный равномерному давлению по внутренней и внешней поверхностям (рис. 4.7). Через a и b обозначим внутренний и внешний диаметры цилиндра, а через p_i и p_0 соответственно внутреннее и внешнее давление. Тогда граничные условия будут иметь вид:

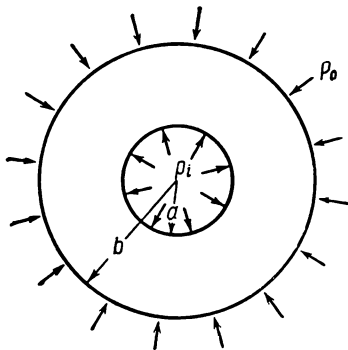


Рис. 4.7.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p_i \quad \text{при} \quad r = a, \\ \sigma_r &= -p_0 \quad \text{при} \quad r = b. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Судя по граничным условиям, напряжения в этом случае должны распределяться симметрично относительно центральной оси цилиндра, перпендикулярной к плоскости xu . Но тогда функция напряжений ψ не зависит от θ и является функцией только r . Уравнения совместности (4.23) принимают вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) = 0,$$

или

$$\frac{d^4 \psi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \psi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\psi}{dr} = 0. \quad (4.25)$$

Уравнение (4.25) является *однородным линейным дифференциальным уравнением*; его можно решить, введя новую переменную $\xi = \ln r$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dr} &= \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\xi}, \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \frac{d\psi}{d\xi} \right), \\ \frac{d^3\psi}{dr^3} &= \frac{1}{r^3} \left(\frac{d^3\psi}{d\xi^3} - 3 \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + 2 \frac{d\psi}{d\xi} \right), \\ \frac{d^4\psi}{dr^4} &= \frac{1}{r^4} \left(\frac{d^4\psi}{d\xi^4} - 6 \frac{d^3\psi}{d\xi^3} + 11 \frac{d^2\psi}{d\xi^2} - 6 \frac{d\psi}{d\xi} \right). \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений уравнение (4.25) принимает форму:

$$\frac{d^4\psi}{d\xi^4} - 4 \frac{d^3\psi}{d\xi^3} + 4 \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = 0.$$

Мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого хорошо известно:

$$\psi = c_1 \xi e^{2\xi} + c_2 e^{2\xi} + c_3 \xi + c_4,$$

или

$$\psi = c_1 r^2 \ln r + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4; \quad (4.26)$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 — постоянные интегрирования. Из уравнения (4.26) находим напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = c_1 (1 + 2 \ln r) + 2c_2 + \frac{c_3}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{d^2\psi}{dr^2} = c_1 (3 + 2 \ln r) + 2c_2 - \frac{c_3}{r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned}$$

В приведенных выше выражениях для напряжений имеются три постоянные, полученные в результате интегрирования, в то время как граничные условия определяют только две постоянные. Для того чтобы однозначно определить эти постоянные, рассмотрим перемещения. В осесимметричной задаче выражения для компонентов деформации имеют следующий вид:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}.$$

Ниже будет показано, что при свободно смещающихся торцах цилиндра надо положить $\sigma_z = 0$ и использовать соотношения (4.21) между напряжениями и деформациями. Тогда получим

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad \text{и} \quad \frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r).$$

Интегрируя первое выражение, находим

$$Eu = c_1 [r(1 - 3\nu) + 2(1 - \nu)(r \ln r - r)] + \\ + 2c_2(1 - \nu)r - c_3(1 + \nu)\frac{1}{r} + c_5,$$

где c_5 — постоянная интегрирования. Второе уравнение дает

$$Eu = c_1 [r(3 - \nu) + 2r(1 - \nu) \ln r] + 2c_2(1 - \nu)r - c_3(1 + \nu)\frac{1}{r}.$$

Для того чтобы оба эти выражения для u совпадали, должны быть выполнены условия:

$$c_1 = 0^*) \quad \text{и} \quad c_5 = 0,$$

а также

$$Eu = 2c_2(1 - \nu)r - c_3(1 + \nu)\frac{1}{r}. \quad (4.27)$$

Отметим, что для рассматриваемой задачи с круговой симметрией мы могли бы не решать уравнения (4.25), а исходить непосредственно из уравнения равновесия (4.17); функцию напряжений при этом можно было определить способом, описанным в § 4.6, затем, исходя из уравнения совместности, относящегося к случаю круговой симметрии, можно получить выражения для напряжений, причем величина c_1 автоматически обратилась бы в нуль.

Обратимся к определению остальных постоянных. Граничные условия (4.24) принимают вид:

$$2c_2 + \frac{c_3}{a^2} = -p_i, \quad 2c_2 - \frac{c_3}{b^2} = -p_0.$$

Решение уравнений дает:

$$2c_2 = \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}, \quad c_3 = \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2}. \quad (4.28)$$

Компоненты напряжений оказываются равными:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Из уравнения (4.29) видно, что сумма $\sigma_r + \sigma_\theta$ не зависит от r и остается постоянной по всей толщине стенки цилиндра. Если торцы цилиндра могут свободно смещаться, то

$$\varepsilon_z = \text{const.}$$

*) Если вместо соотношений между напряжениями и деформациями для плоского напряженного состояния воспользоваться аналогичными зависимостями для случаев плоской деформации или обобщенной плоской деформации, то мы также получим $c_1 = 0$.

Из зависимостей между напряжениями и деформациями находим

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) + E\varepsilon_z = C;$$

здесь C — постоянная, которую надо определить из условия, что результирующие силы по торцам равны нулю:

$$\int_a^b \sigma_z 2\pi r dr = \pi C (b^2 - a^2) = 0,$$

откуда

$$C = \sigma_z = 0.$$

При определении компонентов деформации следует пользоваться зависимостями между напряжениями и деформациями, относящимися к плоскому напряженному состоянию.

Уравнения (4.24) и (4.26) можно использовать для исследования распределения напряжений, вызываемых *горячей посадкой* или *запрессовкой*. На практике имеется ряд случаев, когда на ось или на колесо требуется надеть деталь с натягом. Внутренний диаметр охватываемой детали изготавливается обычно немного меньшего размера, чем внешний диаметр оси или колеса. Если, предварительно нагрев наружный цилиндр, надеть его на ось или колесо, и затем дать ему остыть, то получим так называемую *горячую посадку*. Подобный метод применяют при насадке стальных бандажей на колеса локомотива. *Запрессовка* имеет место при насаживании ступицы на ось. В том и другом случае, при соединении двух деталей, они оказывают друг на друга давление, достаточное, чтобы предотвратить какое-либо относительное перемещение. Часто требуется определить давление, которое соответствует заданной разности диаметров или *натягу*.

Предположим, что после соединения двух цилиндров, выполненного с помощью горячей посадки или запрессовки, радиусы внутреннего цилиндра оказываются равными a и b , а радиусы наружного цилиндра — b и c (рис. 4.8). При $a = 0$ будем иметь случай, когда цилиндр насажен на сплошной вал.

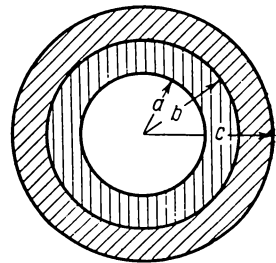


Рис. 4.8.

Обозначим через p радиальное давление между двумя цилиндрами. Если бы эти цилиндры были разъединены, внутренний цилиндр, очевидно, стремился бы расширяться, а наружный — сжаться. Согласно принципу наложения снятие давления p эквивалентно приложению отрицательной нагрузки p к внешней поверхности внутреннего цилиндра и к внутренней поверхности наружного цилиндра. Если положить $p_i = 0$, $p_o = -p$ и $r = b$ в уравнениях (4.27) и (4.28),

мы найдем увеличение внешнего радиуса внутреннего цилиндра

$$u_1 = \frac{bp}{E_1(b^2 - a^2)} [(1 + \nu_1)a^2 + (1 - \nu_1)b^2],$$

где E_1 , ν_1 относятся к материалу внутреннего цилиндра. Аналогично, подставив $p_i = -p$, $p_0 = 0$, $r = c$ и заменив в уравнении (4.28) a и b соответственно на b и c , найдем радиальное перемещение точек внутренней поверхности наружного цилиндра:

$$u_2 = -\frac{bp}{E_2(c^2 - b^2)} [(1 + \nu_2)c^2 + (1 - \nu_2)b^2],$$

где E_2 , ν_2 относятся к материалу наружного цилиндра.

После разъединения труб внешний радиус внутреннего цилиндра будет равен $b + u_1$, а внутренний радиус наружного цилиндра будет $b + u_2$. Следовательно, после разъединения разность радиусов, соответствующая радиальному давлению p , окажется равной

$$\delta = 2(u_1 - u_2) = 2bp \left[\frac{(1 + \nu_1)a^2 + (1 - \nu_1)b^2}{E_1(b^2 - a^2)} + \frac{(1 + \nu_2)c^2 + (1 - \nu_2)b^2}{E_2(c^2 - b^2)} \right].$$

Если оба цилиндра изготовлены из одного и того же материала, то

$$\delta = \frac{4b^3(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \frac{p}{E}.$$

В случае цилиндра, насаженного на сплошной вал, будет $a = 0$, и полученная формула преобразуется к виду

$$\delta = \frac{4bc^2}{c^2 - b^2} \frac{p}{E}.$$

Если заданы величины σ_r или σ_θ в цилиндрах после соединения, можно из (4.29) определить значение p , а затем из приведенного выше уравнения найти δ . Применение этих формул для расчета стволов тяжелых орудий было подробно разобрано Саусвеллом*).

Задача 1. На цилиндр, внутренний диаметр которого равен 100 мм, а толщина стенки 25 мм, в горячем состоянии насажена втулка толщиной 25 мм. Величина натяга такова, что при наличии внутреннего гидростатического давления, максимальные напряжения сдвига в трубе и во втулке равны 1120 кг/см². Вычислить давление жидкости. Определить давление между втулкой и цилиндром при отсутствии давления жидкости.

Отв. 1110 кг/см²; 200 кг/см².

Задача. На трубу, внешний и внутренний диаметры которой соответственно равны 460 и 300 мм, насажена в горячем состоянии другая труба, толщиной 76 мм. Внутренний диаметр наружной трубы выполнен на 1,25 мм меньше внешнего диаметра внутренней трубы. Написать выражения для напряжений во внутренней трубе. Трубы изготовлены из стали, причем $E = 2,1 \cdot 10^8$ кг/см².

*) Р. В. Саусвелл, Введение в теорию упругости, ИЛ, М., 1948.

4.5. Влияние круглых отверстий малого диаметра на напряжения в пластинках. Концентрация напряжений. Рассмотрим напряженную пластинку. Если в какой-либо точке пластинки просверлить круглое отверстие, то это вызовет перераспределение напряжений. В непосредственной близости к отверстию возникнут значительные дополнительные напряжения. *Концентрация напряжений* по краям круглого отверстия имеет большое практическое значение. Это относится, например, к трещинам в сплошных деталях, к отверстиям в палубах кораблей или в фюзеляжах самолетов.

Если отверстие мало, влиянием его можно пренебречь на расстоянии нескольких диаметров от его края. Поэтому точки, находящиеся на таком расстоянии, можно рассматривать как бесконечно удаленные от отверстия.

Рассмотрим сначала задачу о малом отверстии в бесконечной пластинке; из анализа полученных результатов можно установить погрешность, возникающую при замене конечной пластинки на бесконечную. Пусть пластинка находится под действием равномерных растягивающих напряжений S в направлении x . Начало координат поместим в центре отверстия. Очевидно, при отсутствии отверстия

$$\sigma_x = S, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0;$$

это соответствует выражению для функции напряжений

$$\psi_1 = \frac{1}{2} S y^2.$$

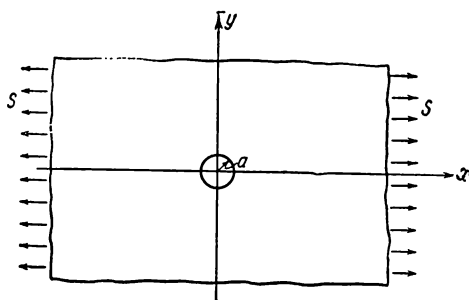


Рис. 4.9.

Заметим, что такое выражение для ψ_1 удовлетворяет бигармоническому уравнению и потому является точным решением. В цилиндрических координатах, при $y = r \sin \theta$,

$$\psi_1 = \frac{1}{2} S r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} S r^2 (1 - \cos 2\theta).$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2} S (1 + \cos 2\theta), \\ \sigma_{\theta_1} &= \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} = \frac{1}{2} S (1 - \cos 2\theta), \\ \tau_{r\theta_1} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2} S \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Если в пластинке просверлить отверстие радиуса a , то граничные условия запишутся в виде

$$\sigma_r + \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = a$$

и

$$\sigma_r = \sigma_{r_1}, \quad \sigma_\theta = \sigma_{\theta_1}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta_1} \quad \text{при } r = \infty.$$

Исходя из выражения для ψ_1 , попробуем принять функцию напряжений в виде

$$\psi = f_1(r) + f_2(r) \cos 2\theta,$$

где $f_1(r)$ и $f_2(r)$ — неизвестные функции r . Подставим это выражение в бигармоническое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = 0,$$

и отметим, что полученное при этом равенство должно удовлетворяться при всех значениях θ . Тогда найдем, что функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$ должны удовлетворять следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} \right) = 0, \quad (4.31)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_2}{dr} - \frac{4f_2}{r^2} \right) = 0. \quad (4.32)$$

Общее решение уравнения (4.31) было найдено в предыдущем параграфе в виде

$$f_1(r) = c_1 r^2 \ln r + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4.$$

Уравнение (4.32) вновь можно привести к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами путем введения новой переменной $\xi = \ln r$, как при решении уравнения (4.25). После таких преобразований приходим к общему решению уравнения (4.32):

$$f_2(r) = c_5 r^2 + c_6 r^4 + \frac{c_7}{r^2} + c_8.$$

Следовательно, функция напряжений имеет вид:

$$\psi = (c_1 r^2 \ln r + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4) + \left(c_5 r^2 + c_6 r^4 + \frac{c_7}{r^2} + c_8 \right) \cos 2\theta,$$

где c_1, c_2, \dots, c_8 — постоянные интегрирования. Соответствующие компоненты напряжений будут равны:

$$\sigma_r = c_1 (1 + 2 \ln r) + 2c_2 + \frac{c_3}{r^2} - \left(2c_5 + \frac{6c_7}{r^4} + \frac{4c_8}{r^2} \right) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_\theta = c_1 (3 + 2 \ln r) + 2c_2 - \frac{c_3}{r^2} + \left(2c_5 + 12c_6 r^2 + \frac{6c_7}{r^4} \right) \cos 2\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2c_5 + 6c_6 r^2 - \frac{6c_7}{r^4} - \frac{2c_8}{r^2} \right) \sin 2\theta.$$

Из граничных условий вытекает, что

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \text{ для всех значений } \theta;$$

$$\text{при } r = \infty \quad \sigma_r = \sigma_{r1}, \quad \sigma_\theta = \sigma_{\theta1}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta1}.$$

Из условия, что величины σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ должны оставаться конечными при бесконечном радиусе r , имеем

$$c_1 = c_6 = 0.$$

Из остальных граничных условий находим

$$2c_2 + \frac{c_3}{a^2} = 0, \quad 2c_5 + \frac{6c_7}{a^4} + \frac{4c_8}{a^2} = 0, \quad 2c_5 - \frac{6c_7}{a^4} - \frac{2c_8}{a^2} = 0,$$

$$2c_5 = -\frac{S}{2}, \quad 2c_2 = \frac{S}{2}.$$

Решения этих уравнений будут иметь вид:

$$c_2 = \frac{S}{4}, \quad c_3 = -\frac{a^2}{2} S, \quad c_5 = -\frac{S}{4}, \quad c_7 = -\frac{a^4}{4} S, \quad c_8 = \frac{a^2}{2} S.$$

Компоненты напряжений оказываются равными:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Из полученных формул вытекает, что σ_θ принимает максимальные значения на концах диаметра отверстия, перпендикулярного к направлению растяжения. Подставив в выражение для σ_θ значения $r = a$ и $\theta = \pi/2$ или $3\pi/2$, найдем максимальное значение σ_θ равным $3S$. Таким образом, максимальное растягивающее напряжение для плоской пластинки, имеющей малое отверстие и находящейся под действием приложенных по краям равномерных растягивающих усилий S , равно утроенному значению интенсивности равномерно распределенного напряжения.

Определим, далее, погрешность, связанную с предположением о бесконечно большом размере пластинки. Для поперечного сечения пластинки, проходящего через центр отверстия перпендикулярно к оси x , будет $\theta = \pi/2$; из выражений (4.33) получаем

$$\sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right), \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

Мы видим, что с увеличением r напряжение σ_θ быстро приближается к значению S . Члены, содержащие r в выражении для σ_θ и соответствующие напряжениям, вызываемым наличием отверстия,

составляют на расстоянии $10a$ от центра отверстия примерно $1/200$ от их значения у края. Таким образом, правильно было рассматривать расстояние от центра отверстия, равное пяти его диаметрам, как практически бесконечно большое.

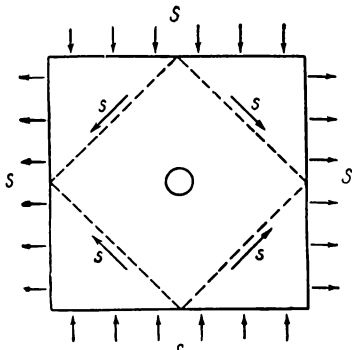


Рис. 4.10.

Рассмотрим, далее, задачу о пластинке с небольшим круговым отверстием при действии равномерно распределенных напряжений сдвига S . При изучении совместного действия различных нагрузок мы видели, что, приложив в направлении x равномерно распределенные растягивающие усилия S , а в направлении y — такие же сжимающие усилия, мы получим по диагональным сечениям равномерно распределенные напряжения сдвига S

(рис. 4.10). Равномерным усилиям сжатия в направлении y отвечают напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \\ \sigma_\theta &= -\frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Накладывая эту систему напряжений на систему, определяемую выражениями (4.33), находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= S \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= -S \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -S \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Легко видеть, что при $r = \infty$ и $\theta = \pi/4$ будет $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ и $\tau_{r\theta} = -S$. Максимальное значение σ_θ равно $4S$; оно относится к точкам с координатами $r = a$ и $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Следовательно, в случае пластинки больших размеров, находящейся под действием чистого сдвига, максимальное касательное напряжение будет в четыре раза больше приложенного сдвигающего напряжения.

Напряжения в бесконечной пластинке с эллиптическим отверстием были определены Инглизом*), а в дальнейшем Н. И. Мусхелишвили

*) C. E. Inglis, Stresses in a Plate due to the presence of cracks and sharp corners, Trans. Inst. Naval. Arch. (London), 1913.

лишвили *). Решение Н. И. Мухелишвили будет рассмотрено ниже, в § 8.11. Если одна из главных осей эллиптического отверстия совпадает с направлением растяжения S , то напряжения на концах оси, перпендикулярной к этому направлению, будут равны:

$$\sigma = S \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right), \quad (4.35)$$

где $2a$ — длина оси эллипса, перпендикулярной к направлению растяжения, а $2b$ — длина другой оси. При $a = b$ получим $\sigma = 3S$, что соответствует максимуму напряжения σ в случае круглого отверстия. Если отношение a/b весьма велико, то максимальное напряжение по краю отверстия также становится очень большим; следовательно, здесь имеет место значительная концентрация напряжений. Этим объясняется то обстоятельство, что трещины, перпендикулярные к направлению действия приложенных сил, имеют тенденцию расширяться. Для того чтобы задержать развитие трещин, следует просверливать по их концам отверстия; тогда концентрация напряжений станет меньшей.

Задача 1. Бесконечная пластинка с круглым отверстием малого диаметра находится под действием равномерного растяжения: $\sigma_x = \sigma_y = S$ при $r = \infty$. Пользуясь формулами (4.33) и методом наложения, найти закон распределения напряжений в пластинке, а также максимальное напряжение, обусловленные наличием отверстия.

Отв. $\sigma_r = S \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = S \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \tau_{\theta r} = 0, \quad \sigma_{\max} = 2S.$

Задача 2. Показать, что решение задачи 1 может быть получено из формул (4.29).

Указание. Сначала показать, что условие $\sigma_x = \sigma_y = S$ эквивалентно условию $\sigma_r = -p_\theta = S$. Затем принять $b = \infty$ и $p_t = 0$.

4.6. Напряжения во вращающихся дисках и цилиндрах. Определение напряжений в быстро вращающихся дисках имеет важное значение для многих практических задач, и в том числе для расчета дисков паровых и газовых турбин. Напряжения, обусловленные передаваемыми касательными усилиями, в этих случаях обычно малы; значительные же напряжения вызываются центробежными силами вращающегося диска. Рассмотрим сначала тонкий диск постоянной толщины. Объемные силы здесь представлены центробежной силой

$$F_r = \rho \omega^2 r,$$

где ρ — плотность материала диска, а ω — угловая скорость. Очевидно, напряжения распределяются симметрично относительно оси

*) Н. И. Мухелишвили, Изв. Росс. Акад. наук, 1919, стр. 663. (См. книгу Н. И. Мухелишвили «Некоторые задачи теории упругости», изд. АН СССР, 1935. *Прим. ред.*)

вращения диска. Уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0,$$

или

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \quad (4.36)$$

Легко убедиться в том, что уравнение (4.36) удовлетворяется при введении функции напряжений ψ по соотношениям

$$r\sigma_r = \psi, \quad \sigma_\theta = \frac{d\psi}{dr} + \rho\omega^2 r^2. \quad (4.37)$$

Благодаря осевой симметрии величина u является функцией только r ; кроме того, $v = 0$. Выражения (4.19) примут следующую форму:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (4.38)$$

Исключая u , приходим к упрощенному уравнению совместности для случая осевой симметрии в виде

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r = 0,$$

или

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0. \quad (4.39)$$

Пользуясь законом Гука (4.21) и вводя функцию напряжений ψ , преобразуем уравнение (4.39) к виду

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{\psi}{r^2} + (3 + \nu)\rho\omega^2 r = 0. \quad (4.40)$$

Придадим этому уравнению иную форму:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\psi) \right] = - (3 + \nu)\rho\omega^2 r.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим

$$\psi = -\frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 r^3 + c_1 \frac{r}{2} + c_2 \frac{1}{r},$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Соответствующие компоненты напряжения равны:

$$\sigma_r = \frac{\psi}{r} = -\frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 r^2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = \frac{d\psi}{dr} + \rho\omega^2 r^2 = -\frac{1 + 3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2 + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2}.$$

Если по контуру сплошного диска радиуса b не приложены внешние силы, то $\sigma_r = 0$ при $r = b$. Так как эти напряжения в диске

не могут быть бесконечно большими, то должно быть $c_2 = 0$. Из граничных условий находим

$$-\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 + \frac{c_1}{2} = 0,$$

или

$$c_1 = \frac{3+\nu}{4}\rho\omega^2 b^2.$$

Напряжения будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 (b^2 - r^2), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{8}\rho\omega^2 [(3+\nu)b^2 - (1+3\nu)r^2]. \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Напряжения достигают максимального значения в центре диска и равны:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2.$$

Если диск имеет в центре круговое отверстие радиуса a , то из условия отсутствия внешних сил на границе следует, что $\sigma_r = 0$ при $r = b$ и $r = a$.

Это дает

$$-\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{b^2} = 0, \quad -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{a^2} = 0,$$

откуда находим

$$\frac{c_1}{2} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 (b^2 + a^2), \quad c_2 = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 b^2.$$

Напряжения оказываются равными:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Максимальное напряжение имеет место на внутреннем контуре и равно:

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{4}\rho\omega^2 b^2 \left(1 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Если круговое отверстие очень мало, то величиной $(a/b)^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей и максимальное значение напряжения будет здесь вдвое больше, чем для сплошного диска. Это означает, что при наличии во вращающемся диске кругового отверстия малого диаметра максимальное напряжение в нем удваивается.

В случае длинного вращающегося круглого вала или цилиндра мы получаем задачу о плоской деформации. Закон Гука при этом записывается в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r], \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Подставляя эти значения в выражения (4.38) и используя функцию напряжений по (4.37), получаем уравнение совместности в виде

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho\omega^2 r = 0. \quad (4.44)$$

В задачах, для которых единственной объемной силой является сила тяжести, основное дифференциальное уравнение будет в случаях плоского напряженного состояния и плоской деформации одним и тем же. Из сравнения уравнений (4.40) и (4.44) видно, что в случае, когда объемной силой является центробежная сила, это совпадение уже не имеет места. Интегрируя уравнение (4.44) тем же путем, что и уравнение (4.40), получаем

$$\psi = -\frac{1}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho\omega^2 r^3 + \frac{c_1}{2} r + c_2 \frac{1}{r}.$$

Соответствующие напряжения равны:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\psi}{r} = -\frac{1}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho\omega^2 r^2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{d\psi}{dr} + \rho\omega^2 r^2 = -\frac{1}{8} \frac{1+2\nu}{1-\nu} \rho\omega^2 r^2 + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2}. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования определяем таким же образом, как и в случае тонкого диска. Окончательно, для сплошного вала радиуса b имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho\omega^2 (b^2 - r^2), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{8} \frac{\rho\omega^2}{1-\nu} [(3-2\nu)b^2 - (1+2\nu)r^2]. \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Для трубчатого вала, внутренний и внешний радиусы которого соответственно равны a и b , получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+2\nu}{3-2\nu} r^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

Максимальные напряжения для сплошного вала имеют место в центре и составляют:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho \omega^2 b^2.$$

Максимум напряжения для полного вала на внутренней поверхности будет:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{4} \frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho \omega^2 b^2 \left(1 + \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Мы видим, что и здесь значение максимального напряжения удваивается, если в центре сплошного вала просверлено отверстие малого диаметра.

В предыдущих рассуждениях мы предполагали, что напряжение σ_z в валу отвечает условию равенства нулю продольной деформации ϵ_z . При $\epsilon_z = 0$ имеем

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta).$$

В случае сплошного вала получим

$$\sigma_z = \frac{\nu \rho \omega^2}{4(1-\nu)} [(3-2\nu)b^2 - 2r^2], \quad (4.47)$$

а в случае трубчатого вала

$$\sigma_z = \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \nu \rho \omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{2r^2}{3-2\nu} \right). \quad (4.48)$$

Если вал может свободно деформироваться в продольном направлении, то удлинение ϵ_z будет равномерным. Эту равномерную продольную деформацию ϵ_z можно определить из условия (4.11), по которому на торцах отсутствуют продольные силы. Находим

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b \sigma_z r \, d\theta \, dr = 0;$$

нижний предел a равен нулю в случае сплошного вала и равен внутреннему радиусу в случае трубчатого вала. Так как σ_z не зависит от θ , то условие (4.11) можно переписать в виде

$$\int_a^b \sigma_z r \, dr = 0.$$

Таким образом, для сплошного вала имеем

$$\nu \int_0^b (\sigma_r + \sigma_\theta) r \, dr + E \epsilon_z \frac{b^2}{2} = 0,$$

откуда

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{2E} \rho \omega^2 b^2$$

и

$$\sigma_z = \frac{\nu \rho \omega^2}{4(1-\nu)} (b^2 - 2r^2). \quad (4.49)$$

Для трубчатого вала

$$\nu \int_0^b (\sigma_r + \sigma_\theta) r dr + E \varepsilon_z \frac{b^2 - a^2}{2} = 0;$$

это дает

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{2E} \rho \omega^2 (b^2 + a^2)$$

и

$$\sigma_z = \frac{\nu \rho \omega^2}{4(1-\nu)} (b^2 + a^2 - 2r^2). \quad (4.50)$$

Задача 1. Тонкий диск внешнего диаметра b плотно посажен на несжимаемый вал радиуса a так, что нормальное давление между валом и диском равно p кг/см². Показать, что угловая скорость ω , при которой диск получает свободное перемещение относительно вала, равна

$$\omega^2 = \frac{4p}{\rho (b^2 - a^2)} \frac{(1 + \nu) b^2 + (1 - \nu) a^2}{(3 + \nu) b^2 + (1 - \nu) a^2};$$

здесь a и b измеряются в см, а ρ — в единицах массы на см³.

Задача 2. Тонкий круглый диск постоянной толщины, имеющий радиус b , составлен из двух концентрических частей; радиус разделяющей поверхности равен a . Найти минимальное значение радиального давления по поверхности раздела в случае покоящегося диска из условия, что при вращении с угловой скоростью ω внешняя часть диска не должна свободно перемещаться относительно внутренней части.

Отв. $\frac{1}{8} (3 + \nu) \rho \omega^2 (b^2 - a^2)$.

Задача 3. Сплошной вал диаметром 60 см вращается со скоростью 300 об/мин. Торцы вала закреплены таким образом, что он не может получать деформации растяжения или сжатия в продольном направлении. Вычислить полное осевое давление в поперечном сечении, возникающее при вращении. Удельный вес стали равен 7,5 г/см³, $\nu = 0,3$.

Отв. 3170 кг (растяжение).

Задача 4. Показать, что задачу о толстой трубе под действием равномерного давления можно решить, положив $\omega = 0$ и следуя методу, изложенному в этом параграфе.

4.7. Вращающийся диск переменной толщины. Метод, изложенный в предыдущем параграфе, может быть использован для решения задачи о вращающемся диске, толщина которого является функцией расстояния r от оси (рис. 4.11). Обозначим через σ_r и σ_θ средние значения напряжений вдоль радиуса и по касательной, на расстоянии r от центра, а через h — переменную толщину; уравнение сов-

местности элемента диска будет иметь вид:

$$\frac{d}{dr} (hr \sigma_r) - h \sigma_0 + \rho \omega^2 hr^2 = 0. \quad (4.51)$$

Это уравнение будет удовлетворено, если ввести функцию напряжений ψ , удовлетворяющую следующим соотношениям:

$$hr \sigma_r = \psi, \quad h \sigma_0 = \frac{d\psi}{dr} + \rho \omega^2 hr^2. \quad (4.52)$$

Используя закон Гука и выражения (4.52), преобразуем уравнение совместности (4.39) к виду

$$r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(1 - \frac{r}{h} \frac{dh}{dr}\right) r \frac{d\psi}{dr} + \left(\nu \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} - 1\right) \psi = -(3 + \nu) \rho \omega^2 hr^3; \quad (4.53)$$

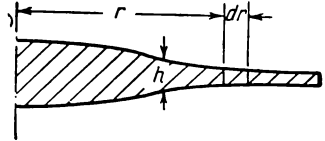


Рис. 4.11.

откуда можно найти ψ при заданном значении h .

Допустим, что толщина диска изменяется по закону

$$h = cr^{-\beta},$$

где c — постоянная, а β — произвольное число; тогда уравнение (4.53) принимает форму

$$r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} + (1 + \beta) r \frac{d\psi}{dr} - (1 + \nu\beta) \psi = -(3 + \nu) \rho \omega^2 cr^{3-\beta}.$$

Это уравнение можно преобразовать в уравнение с постоянными коэффициентами путем подстановки $\xi = \ln r$. С помощью зависимостей, выведенных в § 4.4, находим

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \beta \frac{d\psi}{d\xi} - (1 + \nu\beta) \psi = -(3 + \nu) \rho \omega^2 ce^{(3-\beta)\xi}.$$

Общее решение будет иметь следующий вид:

$$\psi = c_1 e^{q_1 \xi} + c_2 e^{q_2 \xi} - \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} c \rho \omega^2 e^{(3-\beta)\xi},$$

или

$$\psi = c_1 r^{q_1} + c_2 r^{q_2} - \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} c \rho \omega^2 r^{3-\beta},$$

где q_1 и q_2 — корни уравнения

$$q^2 + \beta q - (1 + \nu\beta) = 0. \quad (4.54)$$

Соответствующие компоненты напряжения равны:

$$\sigma_r = \frac{\psi}{hr} = \frac{c_1}{c} r^{q_1 + \beta - 1} + \frac{c_2}{c} r^{q_2 + \beta - 1} - \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{h} \frac{d\psi}{dr} + \rho \omega^2 r^2 = \frac{c_1}{c} q_1 r^{q_1 + \beta - 1} + \frac{c_2}{c} q_2 r^{q_2 + \beta - 1} - \frac{1 + 3\nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 r^2.$$

Из уравнения (4.54) находим

$$q = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + (1 + \nu\beta)}.$$

Примем, что значение q является положительным и что через q_2 обозначен меньший корень; тогда

$$q_2 + \beta = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + (1 + \nu\beta)}.$$

Так как $\sqrt{(\beta/2)^2 + (1 + \nu\beta)} > \beta/2$, то величина $q_2 + \beta$ всегда отрицательна.

Для сплошного диска, при положительном значении β , будет $c_2 = 0$; в противном случае σ_r и σ_θ были бы бесконечно большими в центре диска. Если на контуре поверхностные силы отсутствуют, то из условия $\sigma_r = 0$ при $r = b$ получаем

$$\frac{c_1}{c} = \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 b^{3 - q_1 - \beta}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 b^2 \left[\left(\frac{r}{b}\right)^{q_1 + \beta - 1} - \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)\beta} \rho \omega^2 b^2 \left[q_1 \left(\frac{r}{b}\right)^{q_1 + \beta - 1} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} (4.55)$$

Для диска постоянной толщины имеем $\beta = 0$. Из уравнения (4.54) найдем $q_1 = 1$; выражения (4.55) примут вид (4.41).

Для диска радиуса a с круглым отверстием в центре постоянные интегрирования можно определять тем же путем, что и в предыдущем параграфе, из условия $\sigma_r = 0$ при $r = b$ и $r = a$.

В теории вращающихся дисков было введено понятие «диска равного сопротивления». Для такого диска закон изменения толщины h должен быть таким, чтобы в любой точке диска было $\sigma_r = \sigma_\theta$. Подставляя это условие в уравнения закона Гука (4.21), находим

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta.$$

Уравнения совместности (4.39) преобразуются к виду

$$\frac{d\epsilon_\theta}{dr} = 0 \quad \text{или} \quad \epsilon_\theta = \text{const.}$$

Из закона Гука следует, что σ_r и σ_θ не только равны друг другу, но и являются постоянными для любой точки диска.

Уравнение равновесия (4.51) запишется в виде

$$\sigma \frac{d(hr)}{dr} - \sigma h + \rho \omega^2 hr^2 = 0,$$

где σ — постоянное значение напряжения. Произведя дифференцирование и группируя члены, находим

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} = -\frac{\rho\omega^2}{\sigma} r;$$

после интегрирования получаем

$$\ln h = -\frac{\rho\omega^2}{2\sigma} r^2 + c_3,$$

или

$$h = e^{-(\rho\omega^2 r^2/2\sigma) + c_3} = e^{c_3} e^{-(\rho\omega^2 r^2/2\sigma)} = c_4 e^{-(\rho\omega^2 r^2/2\sigma)}, \quad (4.56)$$

где c_3 и c_4 — постоянные.

4.8. Температурные напряжения в тонких дисках и длинных цилиндрах. В предыдущих рассуждениях мы предполагали, что деформированное состояние обуславливается исключительно действием приложенных сил. Но имеются и другие факторы, могущие вызвать напряжения в упругом теле. Одним из них является неравномерное нагревание различных частей тела. За редкими исключениями, элементы тела при повышении температуры расширяются. Если элемент может свободно расширяться, то тело будет деформироваться, но никаких напряжений это расширение не вызовет. Однако если температура в теле возрастает неравномерно, а тело является однородным, то расширение элементов уже не может происходить свободно; тогда возникают *температурные напряжения*. Определение температурных напряжений в упругом теле, возникающих при данном распределении температур, имеет практическое значение при расчете многих деталей машин, и, прежде всего, при проектировании паровых и газовых турбин и двигателей внутреннего сгорания.

Рассмотрим вначале недеформированное упругое тело при постоянной температуре T_0 . Далее представим себе, что тело нагрето до температуры T , превышающей T_0 . Если температура T меняется от точки к точке, то в теле возникнут напряжения. Деформацию элемента можно считать состоящей из двух частей. Одна часть обуславливается расширением элемента, происходящим в результате изменения температуры. Если через α обозначить *коэффициент линейного расширения* материала, т. е. относительное удлинение при повышении температуры на один градус, то эта часть продольной деформации будет равна αT . Деформации сдвига здесь отсутствуют, так как при расширении элемента, обусловленном изменением температуры, в изотропном материале не будет искажения углов. В случае, когда элемент может свободно расширяться, температурная составляющая деформации будет единственной; напряжения в элементе отсутствуют. Если же элемент не имеет возможности свободно расширяться, то в нем возникнут напряжения и общая деформация

элемента будет складываться из составляющей, отвечающей напряжению, и составляющей, обусловливаемой изменением температуры.

Возвратимся к декартовым координатам и обозначим напряжения в некоторой точке через σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} ; тогда компоненты деформации будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha T, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T, & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Из этих формул находим следующие соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}, \\ \sigma_y &= \lambda e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}, \\ \sigma_z &= \lambda e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

где $\lambda = \nu E(1 + \nu)(1 - 2\nu)$ и $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$. Зависимость между τ и γ остается такой же, как и в случае, когда температурные деформации отсутствуют.

Рассмотрим тонкий круговой диск при неравномерном распределении температур. Предположим, что температура T является функцией только радиального расстояния r ; тогда получим случай осесимметричного плоского напряженного состояния. Пользуясь цилиндрическими координатами, из уравнения (4.57) находим:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \alpha T, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \alpha T. \quad (4.59)$$

Уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

тождественно удовлетворяется, если ввести функцию напряжений ψ по формулам:

$$\sigma_r = \frac{\psi}{r}, \quad \sigma_\theta = \frac{d\psi}{dr}. \quad (4.60)$$

Подставляя выражения (4.59) и (4.60) в уравнение совместности (4.39), получаем

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0.$$

После упрощений находим

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{\psi}{r^2} = -\alpha E \frac{dT}{dr},$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\psi) \right] = -\alpha E \frac{dT}{dr}. \quad (4.61)$$

Это уравнение легко проинтегрировать; решение имеет вид:

$$\psi = -\frac{\alpha E}{r} \int_a^r Tr dr + \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r}; \quad (4.62)$$

нижний предел интегрирования a можно выбрать произвольно. Для диска с центральным отверстием значение a должно равняться внутреннему радиусу. Для сплошного диска принимаем $a = 0$.

Напряжения можно найти, подставив выражение (4.62) в формулы (4.60); тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\alpha E}{r^2} \int_a^r Tr dr + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= \alpha E \left(-T + \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr \right) + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2}. \end{aligned}$$

Для сплошного диска напряжения в центре должны иметь конечное значение, и потому постоянная c_2 должна равняться нулю. Если на контуре отсутствуют внешние силы, то $\sigma_r = 0$ при $r = b$. Отсюда

$$c_1 = \frac{2\alpha E}{b^2} \int_0^b Tr dr.$$

Напряжения равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \alpha E \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right), \\ \sigma_\theta &= \alpha E \left(-T + \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

Рассмотрим в качестве примера тонкий диск, поверхности которого нагреваются и отдают тепло по окружности таким образом, что температура в любой точке диска практически постоянна по толщине диска. Если T_0 — температура у контура, а T_1 — температура

в центре диска, то приращение температуры в точке, имеющей радиус r , дается следующей формулой:

$$T = (T_1 - T_0) - (T_1 - T_0) \frac{r^2}{b^2}.$$

Подставляя это выражение для T в уравнения (4.63) и интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{1}{4} \alpha E (T_1 - T_0) \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right), \\ \sigma_\theta &= -\frac{1}{4} \alpha E (T_1 - T_0) \left(1 - \frac{3r^2}{b^2}\right).\end{aligned}$$

Если в центре диска имеется круговое отверстие радиуса a , а контур свободен от внешних сил, то

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при } r = b \text{ и } r = a.$$

В этом случае

$$\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{b^2} = \frac{\alpha E}{b^2} \int_a^b Tr \, dr, \quad \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{a^2} = 0;$$

отсюда

$$\frac{c_1}{2} = \frac{\alpha E}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr \, dr, \quad c_2 = -\frac{a^2 \alpha E}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr \, dr,$$

и

$$\left. \begin{aligned}\sigma_r &= \alpha E \left[-\frac{1}{r^2} \int_a^r Tr \, dr + \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr \, dr - \frac{a^2}{r^2(b^2 - a^2)} \int_a^b Tr \, dr \right], \\ \sigma_\theta &= \alpha E \left[-T + \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr \, dr + \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr \, dr - \frac{a^2}{r^2(b^2 - a^2)} \int_a^b Tr \, dr \right].\end{aligned}\right\} \quad (4.64)$$

Обратимся к температурным напряжениям в длинном круговом цилиндре с осесимметричным распределением температур. Если концы цилиндра закреплены таким образом, что $\varepsilon_z = 0$, то получим задачу о плоской деформации. Зависимости между напряжениями и деформациями в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T.\end{aligned}\right\} \quad (4.65)$$

В случае плоской деформации $\varepsilon_z = 0$, и третье уравнение дает

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha ET. \quad (4.66)$$

Подставляя значение (4.66) в первые два уравнения (4.65), находим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta + \alpha ET], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r + \alpha ET]. \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

Подставим, далее, выражения (4.67) и (4.60) в уравнение совместности (4.39); после ряда преобразований получим

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{\psi}{r^2} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{dT}{dr}. \quad (4.68)$$

Сравнивая уравнение (4.68) с (4.61), убеждаемся в том, что эти выражения отличаются только коэффициентом при $\frac{dT}{dr}$. Следовательно, решение имеет вид:

$$\psi = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_a^r Tr \cdot dr + \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r};$$

отсюда

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr \, dr + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r^2}.$$

Для сплошного цилиндра $c_2 = 0$, так как напряжения в цилиндре будут конечными. На внешней поверхности $r = b$ имеем $\sigma_r = 0$, откуда

$$c_1 = \frac{2\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr \, dr.$$

Следовательно, напряжения равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b Tr \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr \, dr \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(-T + \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr \, dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr \, dr \right); \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

из выражения (4.66) получаем

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2\nu}{b^2} \int_0^b Tr \, dr - T \right). \quad (4.70)$$

Таков закон распределения нормальных напряжений, которые должны быть приложены, чтобы во всех точках было $\epsilon_z = 0$. Если концы цилиндра свободны, то можно ввести постоянное осевое напряжение $\sigma_z = c_3$ с тем, чтобы результирующая сила по торцам равнялась нулю. Интегрируя, убедимся в том, что условие

$$\int_0^b \sigma_z 2\pi r dr = 0$$

приводит к значению c_3 , равному

$$c_3 = \frac{2\alpha E}{b^2} \int_0^b Tr dr.$$

В этом случае

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2}{b^2} \int_0^b Tr dr - T \right). \quad (4.71)$$

Постоянные интегрирования в случае кругового цилиндра с концентрическим круговым отверстием могут быть определены из условия $\sigma_r = 0$ при $r = b$ и $r = a$. Будем иметь:

$$\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{b^2} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \int_a^b Tr dr, \quad \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{a^2} = 0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{2} &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr, \\ c_2 &= -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr. \end{aligned}$$

Подставляя значения постоянных, находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - \int_a^r Tr dr \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr + \int_a^r Tr dr - Tr^2 \right). \end{aligned} \right\} (4.72)$$

Прибавляя к σ_z постоянное напряжение с тем, чтобы результирующая осевая сила равнялась нулю, получим

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - T \right). \quad (4.73)$$

Если через T_1 обозначена температура на внутренней поверхности цилиндра, а через T_0 — температура на внешней его поверхности, то в случае постоянного теплового потока приращение температуры T на некотором расстоянии r от центра равно:

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r}.$$

Подставляя это выражение в уравнения (4.69) и (4.70), получаем температурные напряжения равными:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E (T_1 - T_0)}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left[-\ln \frac{b}{r} - \frac{a^2 (r^2 - b^2)}{r^2 (b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E (T_1 - T_0)}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left[1 - \ln \frac{b}{r} - \frac{a^2 (r^2 + b^2)}{r^2 (b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \right], \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E (T_1 - T_0)}{2(1-\nu) \ln \frac{b}{a}} \left[1 - \ln \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right]. \end{aligned} \right\} (4.74)$$

При $T_1 > T_0$ радиальные напряжения будут сжимающими во всех точках и обращаются в нуль на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. Напряжения σ_θ и σ_z имеют наибольшие числовые значения на внутренней и внешней поверхностях цилиндра.

Задача 1. На тонкий однородный диск радиуса b насажен жесткий обод, который при равномерной температуре плотно обжимает диск. Диск и обод изготовлены из одного материала. Если поверхности диска нагреваются и отдают тепло по окружности, то приращение температуры на расстоянии r от центра равно

$$T = (T_1 - T_0) - (T_1 - T_0) \frac{r^2}{b^2}.$$

Предположим, что обод воспринимает постоянную температуру T_0 и что деформации, вызванные возникающими при этом напряжениями, незначительны. Показать, что радиальное сжимающее напряжение в диске на расстоянии r от центра равно

$$\frac{1}{4} E \alpha (T_1 - T_0) \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - \frac{r^2}{b^2} \right).$$

Задача 2. Допустим, что электрический ток вызывает повышение температуры внутри длинного, прямого сплошного проводника радиуса b , постоянное по длине. Можно показать, что относительное повышение температуры в проводнике на некотором расстоянии r от центра определяется формулой $T = \lambda (b^2 - r^2)$, где λ — постоянная. Предположим, что напряжения не превышают предела упругости и что отсутствуют внешние силы, препятствующие продольному или поперечному расширению. Доказать, что температурное поле вызовет следующие напряжения:

$$\sigma_r = -\frac{E \alpha \lambda}{4(1-\nu)} (b^2 - r^2), \quad \sigma_\theta = \frac{E \alpha \lambda}{4(1-\nu)} (3r^2 - b^2), \quad \sigma_z = \frac{E \alpha \lambda}{2(1-\nu)} (2r^2 - b^2).$$

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

5.1. Кручение призматических стержней. Прямой метод решения задач теории упругости, заключающийся в интегрировании основных уравнений теории упругости совместно с заданными граничными условиями, не всегда возможен. Для многих задач удобно применять так называемые *обратный* и *полуобратный* методы. При пользовании обратным методом выясняют, каким граничным условиям соответствуют некоторые функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям. Таким путем можно получить ряд полезных результатов. Полуобратный метод, впервые предложенный Сен-Венаном, состоит в том, что делают некоторые допущения в отношении напряжений или перемещений. При этом дифференциальные уравнения настолько упрощаются, что решение их не представляет особых математических трудностей. Принимая те или иные допущения, мы, как правило, ограничиваем общность полученного решения; но обычно их можно формулировать таким образом, чтобы все же получить решение частных задач. Например, в рассматриваемой ниже задаче о кручении призматического стержня мы будем задаваться определенными функциями для перемещений u , v , w , сводя таким образом основные уравнения к одному дифференциальному уравнению.

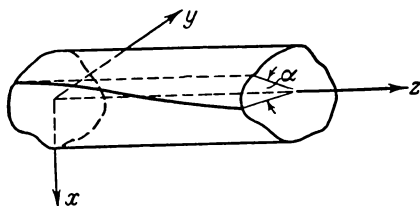


Рис. 5.1.

Но при таких допущениях мы можем найти решение задачи о кручении стержней только постоянного сечения; решения же для стержней, не являющихся призматическими, получить этим путем нельзя. Полуобратный метод является одним из самых эффективных методов решения задач теории упругости.

Предположим, что один конец стержня призматического сечения, длины L , закреплен в плоскости xu , а на другой конец действует пара, вектор-момент который направлен вдоль оси z (рис. 5.1). Мы полагаем, что закрепленный конец не может вращаться, но что оба конца могут свободно перемещаться друг относительно

друга в направлении z . Под действием пары стержень будет закручиваться, причем образующие цилиндра будут превращаться в винтовые линии. Угол поворота любого поперечного сечения зависит от расстояния, на котором находится это сечение от закрепленного конца. При малой деформации можно считать, что угол закручивания α пропорционален расстоянию между сечением и закрепленным концом. Таким образом,

$$\alpha = \theta z, \quad (5.1)$$

где θ — угол закручивания на единицу длины. Будем считать угол закручивания α малым. Рассмотрим сечение стержня, которое находится на расстоянии z от закрепленного конца. Точка P с координатами x, y, z в результате деформации перемещается в точку $P'(x+u, y+v, z+w)$. На рисунке 5.2 показана точка P'_1 , являющаяся проекцией P' на плоскость xu . Предположим, что в плоскости xu точка P перемещается в P'_1

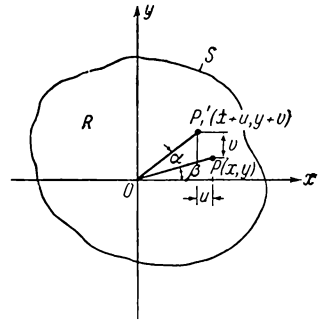


Рис. 5.2.

при повороте на угол закручивания α , причем $OP \approx OP'_1 = r$. Если угол α мал, то $\cos \alpha \approx 1$ и $\sin \alpha \approx \alpha$. Следовательно,

$$u = r \cos(\beta + \alpha) - r \cos \beta = r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta - r \cos \beta \approx -\alpha r \sin \beta,$$

$$v = r \sin(\beta + \alpha) - r \sin \beta = r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta - r \sin \beta \approx \alpha r \cos \beta.$$

Подставляя значение α (5.1), получаем

$$u = -\theta y z, \quad v = \theta x z; \quad (5.2)$$

таким оказывается закон изменения u и v . В отношении w не будем пока делать никаких допущений, кроме того, что w зависит только от x и y и не зависит от z . Следовательно, можно записать

$$w = \theta \varphi(x, y), \quad (5.3)$$

где $\varphi(x, y)$ — некоторая функция от x и y . Так как w определяет искажение (депланацию) торцевых сечений, то функцию φ можно назвать *функцией депланации*. Необходимо выяснить, будут ли отвечать принятые выражения для перемещений, вместе с неизвестной еще функцией φ , напряженному состоянию, удовлетворяющему заданным граничным условиям. Эти условия в данном случае состоят в том, что на обоих торцах должны действовать только крутящие моменты и что боковая поверхность стержня свободна от сил.

Пользуясь приведенными выше выражениями для перемещений, находим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \\ \gamma_{yz} = \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right), \quad \gamma_{zx} = \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Из уравнений (3.26) следует:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{yz} = G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right), \quad \tau_{zx} = G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Подставим эти значения в уравнения равновесия (3.42); уравнения эти будут выполняться, если функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.6)$$

для всех точек поперечного сечения R стержня; здесь

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа.

Обратимся к граничным условиям. Так как

$$\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$$

на боковой поверхности стержня, то последнее из уравнений (1.36) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) m = 0 \quad \text{на контуре } S, \quad (5.7)$$

где S — контурная линия поперечного сечения стержня. Каждая из частей двух других уравнений (1.36) оказывается тождественно равной нулю; это следует из уравнений (5.5) и из того, что для боковой поверхности $n = \cos(\widehat{Nz}) = 0$.

Покажем, далее, что на двух других граничных поверхностях, а именно, на торцах стержня, определяемых плоскостями $z = 0$ и $z = L$, напряжения (5.5) сводятся к скручивающей паре, и результирующие силы отсутствуют. Результирующая сила в направлении x равна

$$\int_R \int \tau_{xz} dx dy = G\theta \int_R \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) dx dy; \quad (5.8)$$

это выражение можно привести к виду

$$G\theta \int_R \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] \right\} dx dy. \quad (5.9)$$

При получении уравнения (5.9) были использованы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) + x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) + x \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right); \end{aligned}$$

здесь принято $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ в соответствии с уравнением (5.6).

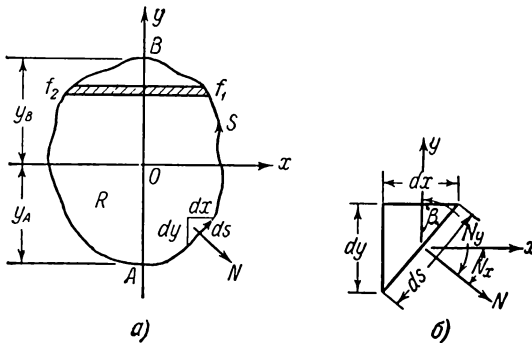


Рис. 5.3.

Пусть f является некоторой функцией x и y ; тогда можно написать равенства (рис. 5.3):

$$\int_R \int \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int \left(\int \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy = \int (f_1 - f_2) dy,$$

где f_1 и f_2 — значения функции f на правой и левой частях контура. Выполним интегрирование по y для контурной кривой в границах от $y = y_A$ до $y = y_B$. Если мы будем вести интегрирование функции f по контуру в направлении против часовой стрелки, то для правой части контура приращение dy — положительно, а для левой — отрицательно. В результате каждая из величин $f_1 dy$ и $(-f_2 dy)$ окажется положительной, и, следовательно,

$$\int_R \int \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \oint_S f dy. \quad (5.10)$$

Аналогично,

$$\int_R \int \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \oint_S f dx. \quad (5.11)$$

Пользуясь формулами (5.10) и (5.11), придадим выражению (5.9) вид:

$$\oint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) dy - x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) dx \right] = \\ = \oint_S x \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{ds} \right] ds. \quad (5.12)$$

Будем считать положительными направления вдоль нормали N во внешнюю сторону и вдоль контура — против часовой стрелки; тогда согласно рис. 5.3, б получим

$$l = \cos(\widehat{Nx}) = \frac{dx}{dN} = \frac{dy}{ds}, \\ m = \cos(\widehat{Ny}) = \frac{dy}{dN} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin\beta = -\frac{dx}{ds}. \quad (5.13)$$

Равенство (5.12) принимает вид

$$\oint_S x \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) m \right] ds = 0;$$

при этом выражение

$$\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) m \right]$$

обращается в нуль на контуре S в соответствии с уравнением (5.7). Мы пришли, таким образом, к равенству

$$\int_R \int \tau_{zx} dx dy = 0.$$

Таким же путем можно показать, что составляющая результирующей силы вдоль оси y также равна нулю:

$$\int_R \int \tau_{zy} dx dy = 0.$$

Следовательно, результирующие силы по торцам цилиндра обращаются в нуль.

Результирующий крутящий момент T по торцам стержня, отвечающий принятому распределению напряжений, равен:

$$T = \int_R \int (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) dx dy = \\ = G\theta \int_R \int \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy. \quad (5.14)$$

Интеграл, фигурирующий в выражении (5.14), зависит от функции кручения φ и, следовательно, от вида поперечного сечения R стержня. Вводя обозначение

$$J = \int_R \int (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x}) dx dy, \quad (5.15)$$

получим

$$T = GJ\theta, \quad (5.16)$$

где J — *постоянная кручения*. Уравнение (5.16) показывает, что крутящий момент пропорционален углу закручивания на единицу длины, так что произведение GJ является мерой жесткости стержня, подвергаемого кручению; величина эта называется *крутильной жесткостью* стержня.

5.2. Кручение стержней круглого и эллиптического сечений. Выше было показано, что для решения задачи о кручении надо найти функцию депланации $\varphi(x, y)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.6)$$

во всех точках поперечного сечения, т. е. в области R , и условию

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right)m = 0 \quad (5.7)$$

на контуре S . Выясним, как найти решение для контура определенной формы.

Задача о кручении стержней круглого и эллиптического сечений решалась с помощью обратного метода. Простейшее решение уравнения Лапласа имеет вид:

$$\varphi = \text{const} = C. \quad (5.17)$$

При $\varphi = C$ условие на контуре (5.7) записывается в следующем виде:

$$yl - xm = y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d}{ds} \frac{x^2 + y^2}{2} = 0,$$

или

$$x^2 + y^2 = \text{const}, \quad (5.18)$$

где x, y — координаты некоторой точки контура. Из аналитической геометрии известно, что уравнение (5.18) отвечает окружности с центром в начале координат. Таким образом, выбор функции φ в виде $\varphi = C$ дает нам решение задачи о кручении стержня круглого сечения. Уравнение (5.3) дает $\omega = \theta C$. Примем граничное

условие $w = 0$ при $z = 0$; тогда $C = 0$. Следовательно, плоское сечение цилиндра, перпендикулярное к оси до закручивания, остается плоским и после деформации. Такое допущение обычно делается при решении этой задачи методами сопротивления материалов. Но уравнение (5.18) показывает, что это предположение справедливо только в случае кругового контура; нельзя ожидать, что оно будет справедливым для сечений другой формы.

Пусть радиус окружности равен r_0 . Из формулы (5.15) при $\varphi = C$ получаем величину J :

$$J = \int_R \int (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \pi r_0^4,$$

равную полярному моменту инерции I_p круглого сечения. Далее, из уравнения (5.16) имеем

$$T = G I_p \theta, \quad (5.19)$$

а согласно выражению (5.15)

$$\tau_{yz} = G \theta x = \frac{T}{I_p} x, \quad \tau_{zx} = -G \theta y = -\frac{T}{I_p} y. \quad (5.20)$$

Результирующее касательное напряжение в некоторой точке $P(x, y)$ равно

$$\tau = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{T}{I_p} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{T}{I_p} r, \quad (5.21)$$

где r — радиус-вектор точки относительно центра окружности, наклоненный к оси x под углом β , причем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{zx}} = -\frac{x}{y}.$$

Следовательно, результирующее касательное напряжение в некоторой точке направлено по касательной к окружности, проходящей через эту точку.

Обратимся теперь к функции

$$\varphi = Ax y. \quad (5.22)$$

Очевидно, такая функция удовлетворяет уравнению Лапласа. Условие на контуре (5.7), после подстановки в него функции φ (5.22), принимает вид:

$$(Ay - y) \frac{dy}{ds} - (Ax + x) \frac{dx}{ds} = 0,$$

или

$$\frac{d}{ds} \left(x^2 + \frac{1-A}{1+A} y^2 \right) = 0.$$

После интегрирования получим уравнение

$$x^2 + \frac{1-A}{1+A} y^2 = \text{const}, \quad (5.23)$$

где x, y — координаты любой точки контура.

Выпишем уравнение эллипса с центром в начале координат:

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2, \quad (5.24)$$

где a и b — полуоси эллипса. Сопоставление уравнений (5.23) и (5.24) показывает, что они будут идентичными при условии, если

$$\frac{a^2}{b^2} = -\frac{A-1}{A+1}.$$

Решая это уравнение относительно A , получим

$$A = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$$

Таким образом, функция

$$\varphi = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy \quad (5.25)$$

представляет собой функцию депланации в задаче о кручении цилиндра эллиптического сечения. Постоянная кручения равна:

$$\begin{aligned} J &= \iint_R (x^2 + y^2 + Ax^2 - Ay^2) dx dy = \\ &= (A+1) \iint_R x^2 dx dy + (1-A) \iint_R y^2 dx dy = \\ &= (A+1) I_y + (1-A) I_x = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где I_y, I_x — моменты инерции соответственно относительно осей y и x .

Касательные напряжения в некоторой точке поперечного сечения равны:

$$\tau_{yz} = \frac{2Tx}{\pi a^3 b}, \quad \tau_{zx} = -\frac{2Ty}{\pi a b^3}. \quad (5.27)$$

Результирующее касательное напряжение в точке $P(x, y)$ равно

$$\tau = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{2T}{\pi a^2 b^2} \sqrt{\frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{b^2}}. \quad (5.28)$$

Напряжение τ достигает максимального значения на концах малой оси. Чтобы показать это, построим ряд эллипсов внутри сечения. Пусть полуоси эллипсов будут a' и b' , причем $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \leq 1$.

Уравнения этих эллипсов могут быть записаны в параметрической форме следующим образом:

$$x = a' \cos \beta, \quad y = b' \sin \beta,$$

где β — угол, показанный на рис. 5.4. Подставляя эти значения x и y в уравнение (5.28), получаем результирующие касательные напряжения в любой точке этих эллипсов:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2T}{\pi a^2 b^2} \sqrt{b^2 \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \cos^2 \beta + a^2 \left(\frac{b'}{b}\right)^2 \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{2T}{\pi a^2 b^2} \frac{a'}{a} \sqrt{b^2 \cos^2 \beta + a^2 \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{2T}{\pi a^2 b^2} \frac{a'}{a} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \beta}. \end{aligned}$$

Если $a > b$, то τ будет максимально при $a' = a$ и $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$. Таким образом, касательное напряжение имеет максимум у концов малой оси, величина τ_{\max} в этих точках равна:

$$\tau_{\max} = \frac{2T}{\pi a b^2}. \quad (5.29)$$

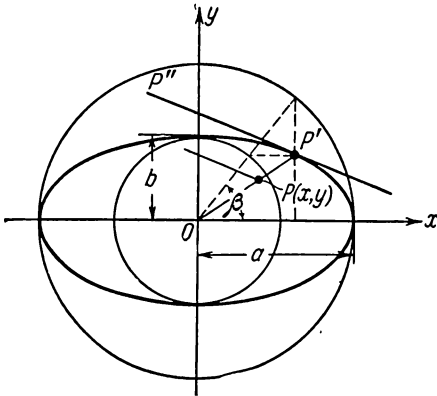


Рис. 5.4.

При $a = b$ эта формула переходит в выражение (5.21), относящееся к стержню круглого сечения. Направление напряжения τ определяется отношением величин τ_{yz} и τ_{zx} . Из формул (5.27) видно, что это отношение пропорционально отношению y/x и, следовательно, постоянно вдоль линии OP . Это означает, что результирующее касательное

напряжение вдоль линии OP имеет постоянное направление, совпадающее с направлением касательной $P'P''$.

Если найдено выражение (5.25) для функции депланации, то легко определить перемещение w :

$$w = \theta \varphi = \frac{T(b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3 G} x y, \quad (5.30)$$

где $\theta = \frac{T}{GJ}$. Линии равной депланации $w = \text{const}$ будут гиперболами (рис. 5.5). Допустим, что цилиндр скручивается крутящим моментом T , действующим так, как показано на рисунке стрелкой; выпуклые части сечения, для которых w положительно, отмечены сплошными линиями, а вогнутые — пунктирными. В случае свободно

депланирующих торцов цилиндра нормальные напряжения на них отсутствуют. Однако, если на одном из концов стержня депланация затруднена, как в случае защемления, то будут возникать нормальные напряжения, положительные в одном квадранте и отрицательные — в другом. Они подобны напряжениям, вызываемым двумя равными и противоположно направленными изгибающими моментами и поэтому называются *напряжениями изгиба, возникающими при кручении*.

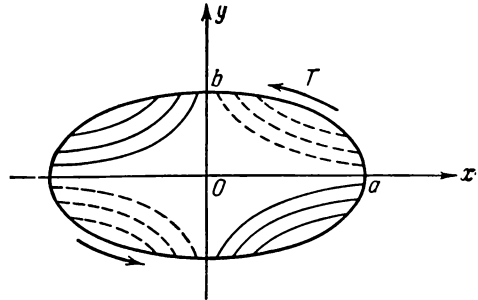


Рис. 5.5.

Задача. Показать, что для решения задачи о кручении стержня, сечение которого представляет собой равносторонний треугольник (рис. 5.6), функцию депланации следует взять в виде

$$\varphi = A(y^3 - 3x^2y),$$

где A — постоянная, подлежащая определению. Найти постоянную кручения J и максимальные касательные напряжения. Контур определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x - a &= 0 \text{ для } CD, \\ x + 2a - \sqrt{3}y &= 0 \text{ для } BC, \\ x + 2a + \sqrt{3}y &= 0 \text{ для } BD. \end{aligned}$$

Указание. Вначале необходимо установить, что функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению. Чтобы показать, что функция отвечает граничным условиям, надо определить значение постоянной A для линии CD и выяснить, что при этом значении A и при $y = \pm(x + 2a)/\sqrt{3}$ граничные условия удовлетворяются для отрезков BC и BD . Для CD имеем $l = 1, m = 0$. Для BC будет $l = \cos 120^\circ =$

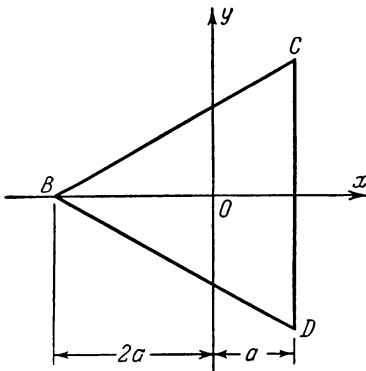


Рис. 5.6.

$$= -\frac{1}{2}, m = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Для } BD$$

$$l = \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}, m = \cos 150^\circ =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Отв. } A = -\frac{1}{6a}, \quad J = \frac{9}{5} \sqrt{3} a^4,$$

$\tau_{\max} = \frac{3Ta}{2J}$. Максимального значения τ достигает в точке $x = a, y = 0$.

5.3. Кручение стержней прямоугольного сечения. Пусть поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами $2a$ и $2b$, направленными

параллельно координатным осям, как показано на рис. 5.7. Пользуемся полученными ранее уравнениями: для всей прямоугольной области

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (5.6)$$

и по контуру

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) m = 0. \quad (5.7)$$

На контурных линиях AB и CD , где $x = \pm a$, будет $l = \pm 1$ и $m = 0$, а на линиях BC и AD имеем $l = 0$ и $m = \pm 1$. Условие на контуре (5.7) можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y & \quad \text{при } x = \pm a, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x & \quad \text{при } y = \pm b. \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

Этим условиям можно придать более удобную форму, вводя новую функцию φ_1 так, что

$$\varphi = xy - \varphi_1. \quad (5.32)$$

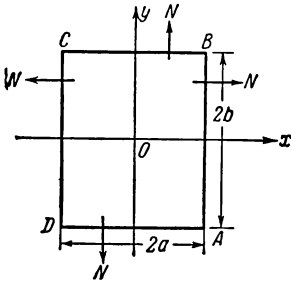


Рис. 5.7.

Легко показать, что для новой функции φ_1 основное уравнение по всей прямоугольной области будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0; \quad (5.33)$$

условия на контуре будут следующими:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 2x \quad \text{при } y = \pm b. \quad (5.35)$$

Примем решение уравнения (5.33) в виде бесконечного ряда

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y), \quad (5.36)$$

каждый член которого удовлетворяет дифференциальному уравнению; здесь $X_n(x)$ и $Y_n(y)$ — функции соответственно только x и y . Очевидно, если решение для φ_1 нельзя выразить в форме ряда (5.36), то мы не сможем найти решение для функций X_n и Y_n , удовлетворяющее граничным условиям.

Подставляя $X_n(x)$, $Y_n(y)$ в уравнение (5.33) и обозначая производные штрихами, находим:

$$X_n''(x) Y_n(y) + X_n(x) Y_n'''(y) = 0,$$

или

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = - \frac{Y_n'''(y)}{Y_n(y)}.$$

Так как левая часть полученного уравнения является функцией только от x , а правая зависит только от y , то уравнение может быть удовлетворено лишь в том случае, если обе его части равны постоянной величине; обозначим ее через $(-k_n^2)$ *). Таким образом, мы получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + k_n^2 X_n = 0,$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - k_n^2 Y_n = 0.$$

Эти дифференциальные уравнения легко решить с помощью известных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решения их будут следующими:

$$X_n = c_1 \sin k_n x + c_2 \cos k_n x, \quad (5.37)$$

$$Y_n = c_3 \operatorname{sh} k_n y + c_4 \operatorname{ch} k_n y. \quad (5.38)$$

Рассмотрим теперь условие на контуре (5.35). Во-первых, можно установить, что выражение

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n'(y) = 2x$$

должно иметь одно и то же значение при $y = b$ и $y = -b$. Это условие может быть выполнено, если производные $Y_n'(y)$ являются симметричными функциями от y . Во-вторых, при $y = \pm b$ будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n'(b) X_n(x) = 2x.$$

Это условие удовлетворяется, если $X_n(x)$ являются антисимметричными функциями относительно x . Исходя из этих соображений, находим, что $c_2 = c_4 = 0$. Условие (5.34) будет выполнено, если $X_n'(\pm a) = 0$, или

$$c_1 k_n \cos k_n a = 0.$$

Отсюда находим

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2a}.$$

Поскольку c_1 и c_2 — произвольные постоянные, функцию φ_1 можно записать в следующем виде:

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin k_n x \operatorname{sh} k_n y, \quad (5.39)$$

*) Постоянную берем со знаком минус, так как иначе граничные условия не будут удовлетворяться.

где $k_n = (2n + 1)\pi/2a$; постоянные A_n следует определить таким образом, чтобы удовлетворялось граничное условие (5.35).

Дифференцируя функцию φ_1 по y и подставляя $y = \pm b$, из уравнения (5.35) получаем

$$2x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n k_n \operatorname{ch} k_n b \sin k_n x = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin k_n x; \quad (5.40)$$

здесь для упрощения записи введено обозначение:

$$B_n = A_n k_n \operatorname{ch} k_n b.$$

Коэффициенты A_n можно определить, пользуясь схемой, применяемой при разложении функций в ряд Фурье. Умножим обе части уравнения (5.40) на $\sin[(2m + 1)\pi x/2a]$ и проинтегрируем все члены по x . Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \sin k_n x \sin k_m x &= \frac{1}{2} [\cos(k_n - k_m)x - \cos(k_n + k_m)x] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(n - m)\pi x}{a} - \cos \frac{(n + m + 1)\pi x}{a} \right], \\ \sin^2 k_m x &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{(2m + 1)\pi x}{2} \right], \end{aligned}$$

получим

$$\int_{-a}^a \sin k_n x \sin k_m x dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ a & \text{при } m = n \end{cases}$$

и

$$\int_{-a}^a 2x \sin k_m x dx = \int_{-a}^a B_m \sin^2 k_m x dx.$$

Вычислив значения интегралов в этом выражении, найдем

$$B_m = \frac{16(-1)^m a}{\pi^2 (2m + 1)^2},$$

или

$$A_n = \frac{32(-1)^n a^2}{\pi^3 (2n + 1)^3} \frac{1}{\operatorname{ch} k_n b};$$

следовательно, решение будет иметь вид:

$$\varphi = xy - \varphi_1 = xy - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)^3} \frac{1}{\operatorname{ch} k_n b} \sin k_n x \operatorname{sh} k_n y. \quad (5.41)$$

Постоянную кручения J можно определить по формуле (5.15):

$$J = \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a}^{x=a} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy =$$

$$= \frac{8a^3b}{3} \left[1 + \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{384a}{\pi^5b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{th } k_n b}{(2n+1)^5} \right].$$

Принимая во внимание равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

приходим к формуле для J :

$$J = 16a^3b \left[\frac{1}{3} - \frac{64a}{\pi^5b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{th } k_n b}{(2n+1)^5} \right] = Ka^3b. \quad (5.42)$$

В таблице 5.1 даны значения K , соответствующие разным величинам отношения b/a . Ряд (5.42) можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{th } k_n b}{(2n+1)^5} = \text{th } \frac{\pi b}{2a} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{th } k_n b}{(2n+1)^5}.$$

Мы замечаем, что сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{th } \frac{k_n b}{(2n+1)^5} \text{ меньше суммы}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} = 0,0046,$$

так как

$$\text{th } \frac{\pi b}{2a} \geq 0,917$$

при $b \geq a$. Следовательно, первый член ряда дает значение суммы с точностью до 0,5%, и для практических расчетов можно пользоваться приближенной формулой

$$J = 16a^3b \left(\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{a}{b} \text{th } \frac{\pi b}{2a} \right). \quad (5.43)$$

Т а б л и ц а 5.1

b/a	K	K_1	K_2
1,0	2,250	1,350	0,600
1,2	2,656	1,518	0,571
1,5	3,136	1,696	0,541
2,0	3,664	1,860	0,508
2,5	3,984	1,936	0,484
3,0	4,208	1,970	0,468
4,0	4,496	1,994	0,443
5,0	4,656	1,998	0,430
10,0	4,992	2,000	0,401
∞	5,328	2,000	0,375

После некоторых выкладок находим следующие формулы для касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{T}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) = - \frac{16Ta}{J\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{sh} k_n y}{\operatorname{ch} k_n b} \cos k_n x, \\ \tau_{yz} &= \frac{T}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) = \frac{T}{J} \left[2x - \frac{16a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{ch} k_n y}{\operatorname{ch} k_n b} \sin k_n x \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

Можно показать, что если $b > a$, то максимальные касательные напряжения имеют место посередине длинных сторон прямоугольника, при $x = \pm a$. Подставляя в уравнения (5.44) значения $x = a$ и $y = 0$, находим

$$\tau_{zx} = 0$$

и

$$\tau_{\max} = \tau_{yz} = \frac{2Ta}{J} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{ch} k_n b} \right] = K_1 \frac{Ta}{J}. \quad (5.45)$$

Бесконечный ряд в правой части уравнения, который мы обозначим через $K_1/2$, сходится очень быстро при $b > a$, и вычисление величины τ_{\max} с достаточной точностью для любого отношения b/a не представляет трудностей. Значения K_1 , соответствующие различным величинам b/a , включены в табл. 5.1. Подставляя выражения постоянной кручения J из уравнения (5.42) в уравнение (5.45), получаем

$$\tau_{\max} = K_2 \frac{T}{a^2 b}, \quad (5.46)$$

где K_2 — второй числовой множитель, значения которого также даны в табл. 5.1.

Горизонталы поверхности, для которых $w = \text{const}$, могут быть легко определены из уравнения для функции φ . Для стержня квадратного сечения, т. е. при $a = b$, горизонталы показаны на рис. 5.8; здесь сплошные линии соответствуют положительным значениям w , а пунктирные — отрицательным, по правилу знаков предыдущего параграфа.

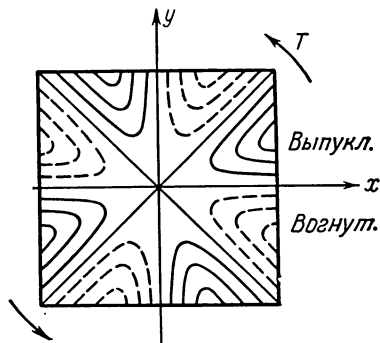


Рис. 5.8.

5.4. Мембранная аналогия. Из примера, разобранный в предыдущем параграфе, становится очевидным, что решение задачи о кручении стержня более сложной формы поперечного сечения может оказаться весьма трудным. Для приближенного решения задач о кру-

чении стержней различных сечений, часто встречающихся в технике, весьма эффективной оказалась так называемая *мембранная аналогия*. Она основана на математической аналогии между задачами о кручении и о деформации упругой натянутой мембраны, подверженной равномерному поперечному давлению.

Пусть тонкая однородная мембрана (рис. 5.9) имеет постоянное натяжение и закреплена по контуру, который ограничивается кривой, лежащей в плоскости xu . Если мембрана подвергается равномерному поперечному давлению p , то точки ее срединной поверхности получат малые перемещения z , зависящие от x и y . Рассмотрим условие равновесия бесконечно малого элемента $ABCD$ мембраны после деформации. Обозначим через F постоянное натяжение, приходящееся на единицу длины мембраны. Усилие F , действующее по стороне AD , наклонено к оси под углом β . Так как деформации малы, то можно принять $\beta \approx \frac{\partial z}{\partial x}$. Прогиб z меняется от точки к точке, поэтому усилие F для стороны BC наклонено под углом

$$\beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \approx \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx.$$

Таким же путем находим, что углы наклона растягивающих усилий,

приложенных по сторонам AB и CD , равны соответственно $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$. Складывая составляющие вдоль оси сил, действующих по четырем сторонам, получаем

$$\begin{aligned} & -(F dy) \frac{\partial z}{\partial x} + (F dy) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right) - (F dx) \frac{\partial z}{\partial y} + \\ & + (F dx) \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right) + p dx dy = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{F} \dots \text{ для области } R. \quad (5.47)$$

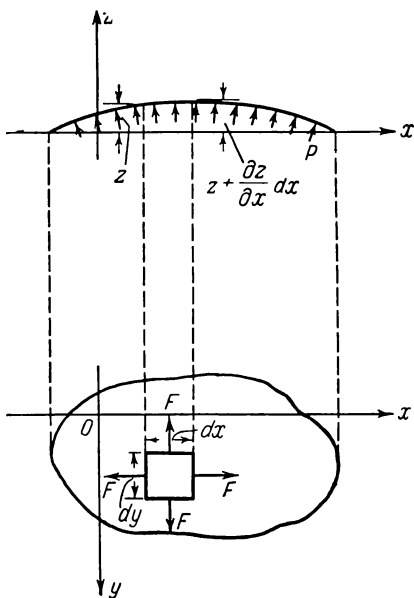


Рис. 5.9.

На контуре прогиб мембраны равен нулю. Поэтому граничное условие имеет вид:

$$z = 0 \text{ на контуре } S. \quad (5.48)$$

Вернемся теперь к задаче о кручении. Основное дифференциальное уравнение будет:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \text{ для области } R, \quad (5.6)$$

а граничное условие имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right)m = 0 \text{ на контуре } S. \quad (5.7)$$

На первый взгляд эти соотношения и уравнения (5.47) и (5.48) не являются аналогичными. Однако им можно придать идентичную форму, если ввести новую функцию $\psi(x, y)$ с помощью соотношений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - x. \quad (5.49)$$

Из уравнений (5.49) имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}.$$

Дифференциальное уравнение (5.6) обращается в тождество, так как

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Таким образом, если функция ψ определяется по формулам (5.49), то уравнения равновесия будут удовлетворяться тождественно.

Выражая касательные напряжения τ_{zx} и τ_{yz} через функцию ψ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{T}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) = \frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \tau_{yz} &= \frac{T}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) = -\frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Если функция ψ найдена, то касательные напряжения можно вычислить путем простого дифференцирования. Следовательно, функция ψ представляет собой *функцию напряжений*; определение функции ψ равнозначно вычислению напряжений. Далее следует использовать уравнение совместности. Системе напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0, \\ \tau_{zx} &= \frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

соответствуют компоненты деформации:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} &= 0, \\ \gamma_{zx} &= \frac{T}{GJ} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = -\frac{T}{GJ} \frac{\partial \psi}{\partial x}.\end{aligned}$$

Подстановка этих величин в уравнения совместности (2.19) показывает, что первые три уравнения и последнее из них тождественно удовлетворяются. Четвертое и пятое уравнения приводятся к виду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Интегрируя их, находим

$$-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \text{const} = c_1.$$

Эту постоянную можно определить, если подставить сюда выражения

$$\begin{aligned}\gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{T}{GJ} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{T}{GJ} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right).\end{aligned}$$

Тогда получим

$$\frac{T}{GJ} \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 1 \right) = c_1,$$

или

$$c_1 = -2T/GJ.$$

Подставляя значение c в уравнение совместности, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \quad \text{для области } R, \quad (5.51)$$

которому должна удовлетворять функция ψ . Отметим, что уравнение (5.51) можно получить непосредственно, продифференцировав уравнения (5.49) и затем исключив из них функцию φ . Но тогда останется нераскрытым то обстоятельство, что уравнение (5.51) является уравнением совместности.

Граничное условие (5.8), выраженное через ψ , имеет вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} l - \frac{\partial \psi}{\partial x} m = 0 \quad \text{на контуре } S.$$

В параграфе 5.1 были уже записаны соотношения

$$\left. \begin{aligned}l &= \frac{dx}{dN} = \frac{dy}{ds}, \\ m &= \frac{dy}{dN} = -\frac{dx}{ds}.\end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Поэтому условие на контуре можно записать в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\psi}{ds} = 0,$$

или

$$\psi = \text{const} = c_2 \quad \text{на контуре } S. \quad (5.52)$$

Заметим, что при вычислении напряжений нам необходимы лишь производные от ψ и что значение постоянной c_2 в уравнении (5.52) не влияет на решение задачи. Поэтому можно принять $c_2 = 0$.

Окончательно решение задачи о кручении сводится к определению функции ψ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \quad \text{для области } R \quad (5.51)$$

и условию

$$\psi = 0 \quad \text{на контуре } S. \quad (5.52)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями для мембраны, мы видим, что между ними имеется полная аналогия, если отношение p/F положить равным 2, и если форма контура мембраны совпадает с формой поперечного сечения стержня.

Мембранная аналогия эффективно используется для экспериментального определения функции напряжений. Техника проведения такого эксперимента, а также опытов, связанных с другими аналогиями, подробно описана в специальных пособиях*).

Мембранная аналогия может быть использована не только для численного определения напряжений; она дает также наглядную картину напряженного состояния. На рисунке 5.10 изображена такая мембрана и нанесены горизонтали изогнутой поверхности. Рассмотрим некоторую точку B срединной поверхности мембраны. Прогиб вдоль горизонтали остается постоянным, так что

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

*) См., например, книгу М. Н е т е н y i, Handbook of Experimental Stress Analysis, New York, стр. 700—751, 1950.

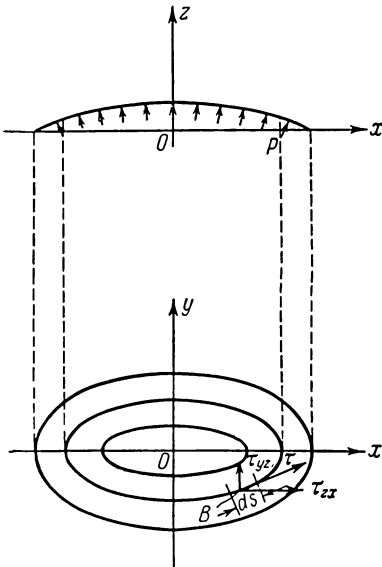


Рис. 5.10.

Пользуясь аналогией, можем написать

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0.$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{J}{T} \left(\tau_{zx} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} \right) = \\ &= \frac{J}{T} \left(\tau_{zx} \frac{dx}{dN} + \tau_{yz} \frac{dy}{dN} \right) = \frac{J}{T} \tau_{zN} \end{aligned}$$

вытекает, что составляющая касательного напряжения, направленная по нормали к горизонтали, равна нулю. Другими словами, касательное напряжение в точке B закручиваемого стержня направлено по касательной к горизонтали, проходящей через эту точку. Величину результирующего касательного напряжения можно найти из следующей формулы:

$$\tau = \tau_{yz} \frac{dy}{ds} + \tau_{zx} \frac{dx}{ds} = - \frac{T}{J} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dN} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dN} \right) = - \frac{T}{J} \frac{d\psi}{dN}.$$

Следовательно, величина касательного напряжения в точке B определяется уклоном мембраны по нормали к горизонтали, и потому касательные напряжения достигают максимума в тех местах, где горизонталь особенно сгущается. Рассмотрение поверхности мембраны показывает, что наибольший уклон имеет место на контуре. Отсюда можно заключить, что максимальные значения касательных напряжений будут также в определенных точках контура сечения стержня.

Обратимся к выводу выражения для постоянной кручения J через функцию ψ . Из формулы (5.15) имеем:

$$\begin{aligned} J &= \int_R \int (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x}) dx dy = \\ &= - \int_R \int (x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y}) dx dy = \\ &= - \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\psi) + \frac{\partial}{\partial y} (y\psi) - 2\psi \right] dx dy = \\ &= - \oint_S x\psi dy + \oint_S y\psi dx + \int_R \int 2\psi dx dy = 2 \int_R \int \psi dx dy. \quad (5.53) \end{aligned}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что по формуле (5.52) на контуре S будет $\psi = 0$. Из мембранной аналогии вытекает, что постоянная кручения J равна удвоенному объему, заключенному между изогнутой мембраной и плоскостью xu . Полагая $c_2 = 0$, в (5.52) мы считали, что величина c_2 не влияет на решение задачи. Однако значение J , на первый взгляд, зависит от величины c_2 . Чтобы

выяснить это, допустим, что $c_2 \neq 0$ и подставим $\psi_1 + c_2$ вместо ψ в предпоследнее из выражений (5.53). Так как в точках контура $\psi_1 + c_2 = c_2$, то для них $\psi_1 = 0$; следовательно, члены, содержащие контурные значения ψ_1 , будут равны нулю так же, как это было для функции ψ . Таким образом,

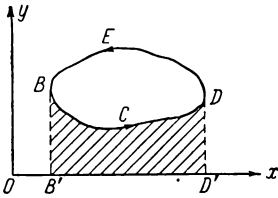


Рис. 5.11.

$$J = - \oint_S c_2 x dy + \oint_S c_2 y dx + \iint_R 2(\psi_1 + c_2) dx dy.$$

Пользуясь рис. 5.11, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \oint_S y dx &= \int_{BCD} y dx + \int_{ГЕВ} y dx = \\ &= \text{площадь } BCDD'B' - \text{площадь } BEDD'B' = -A, \end{aligned} \quad (5.54)$$

где A — площадь поперечного сечения. Подобным же образом можно показать, что $\oint_S x dy = A$. Но в то же время $\iint_R dx dy = A$. Следовательно,

$$J = -c_2 A - c_2 A + 2c_2 A + \iint_R 2\psi_1 dx dy = \iint_R 2\psi_1 dx dy,$$

что совпадает с формулой (5.53).

5.5. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля.

Рассмотрим вначале кручение стержня с поперечным сечением в форме узкого прямоугольника. Из мембранной аналогии заключаем, что влияние коротких сторон прямоугольника распространяется на небольшие участки. Если отношение b/a велико, то в формуле (5.43) величину $\text{th}(\pi b/2a)$ можно приближенно считать равной 1; второй член в скобках становится пренебрежимо мал. Поэтому имеем

$$J \approx \frac{16a^3 b}{3}.$$

Обратимся к формуле (5.45). При значительном отношении b/a величина

$$\text{ch } k_n b = \text{ch } \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a}$$

будет большой, сумма же бесконечного ряда получает пренебрежимо малое значение. В результате получаем

$$\tau_{\max} \approx \frac{2Ta}{J}. \quad (5.55)$$

Если величина J известна, то угол закручивания можно вычислить по формуле

$$\theta = \frac{T}{GJ}. \quad (5.16)$$

Обозначим через b_1 длину, а через t — толщину прямоугольника (рис. 5.12, а); тогда эти формулы примут вид:

$$J \approx \frac{b_1 t^3}{3}, \quad \theta \approx \frac{3T}{b_1 t^3 G}, \quad \tau_{\max} \approx \frac{3T}{b_1 t^2} = G\theta t. \quad (5.56)$$

В предыдущем параграфе было показано, что напряжение τ_{\max} равно произведению отношения T/J на максимальный уклон изогнутой мембраны. Из формул (5.55) и (5.56) следует, что в случае узкого прямоугольного сечения наибольший уклон изогнутой мембраны равен $2a$ или t .

Сопоставим теперь изогнутые мембраны с контурами, изображенными на рис. 5.12, а и б. Очевидно, что если площади поперечного сечения их равны между собой, то равными будут и объемы выпучин

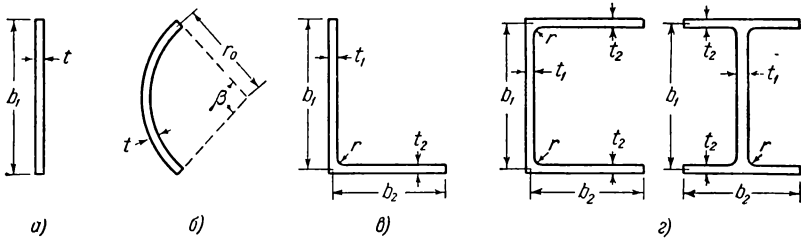


Рис. 5.12.

в изогнутых мембранах. Если толщина t мала, то кривизна сечения в случае (б) незначительно влияет на максимальный уклон мембраны. Поэтому мы делаем вывод, что формула (5.56) может быть использована при получении приближенных решений и для тонкостенных профилей иной формы. Для поперечных сечений такого типа, который показан на рис. 5.12, б, надо только вместо b_1 в формуле (5.56) подставить развернутую длину дуги. В случае дуги окружности развернутая длина равна $r_0\beta$, где r_0 — радиус, а β — угол, стягиваемый дугой, в радианах.

Для таких тонкостенных профилей, как уголки, швеллера и двутавры, вид изогнутых мембран будет таким, как если бы они были натянуты на несколько отдельных узких прямоугольников*). Постоянная кручения J будет равна удвоенному объему, ограниченному изогнутой мембраной и плоскостью xu ; максимальный уклон мембраны

*) Другие приближенные формулы приведены Трейером и Марчем. (G. W. Trautner, H. W. March, The torsion of members having sections common in aircraft construction, NACA Techn. Rep. 1929, 334.)

окажется равным t_i , причем t_i — бóльшая из величин t_1 или t_2 . Следовательно, для уголкового сечения имеем (рис. 5.12, в):

$$\left. \begin{aligned} J &\approx \frac{b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3}{3}, \\ \theta &\approx \frac{3T}{(b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3) G}, \\ \tau_{\max} &\approx G\theta t_i = \frac{3T t_i}{b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3}, \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

а для швеллерного и двутаврового сечений (рис. 5.12, г):

$$\left. \begin{aligned} J &\approx \frac{b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3}{3}, \\ \theta &\approx \frac{3T}{(b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3) G}, \\ \tau_{\max} &\approx \frac{3T t_i}{b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

Следует заметить, что во входящих углах имеет место значительная концентрация напряжений, зависящая от радиуса закруглений углов профиля. Для малых радиусов закруглений ($r = 0,1t$) Треффц *) получил следующее уравнение для максимальных напряжений в углах профиля:

$$\tau_{\text{угл}} = 1,74 \tau_{\max} \sqrt[3]{\frac{t}{r}}, \quad (5.59)$$

где r — радиус закругления угла. Уравнение (5.59) выведено для случая полок равной толщины. Если же полки имеют различную

Таблица 5.2

$\frac{r}{t}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{\tau_{\text{угл}}}{\tau_{\max}}$	2,5	2,25	2,00	1,75

толщину t_1 и t_2 , то в формулу следует подставить большую из них. Концентрация напряжений во входящих углах изучалась экспериментально, причем была использована аналогия с мыльной пленкой **). Отношения $\tau_{\text{угл}}/\tau_{\max}$, соответствующие различным значениям отношения r/t , приведены в табл. 5.2. Экспериментально полученные величины отношения $\tau_{\text{угл}}/\tau_{\max}$ для малых радиусов закругления ребер профиля значительно меньше вычисленных по формуле (5.59). Это, вероятно, можно объяснить тем, что при малых радиусах закруглений трудно определить истинные значения $\tau_{\text{угл}}$.

*) E. Trefftz, Über die Wirkung ein Abrundung auf die Torsionsspannungen in der innern Ecke eines Winkeleisens, ZAMM, т. 2, 1922, 263—267.

***) P. A. Cushman, Shearing stresses in torsion and bending by membrane analogy, University of Michigan, 1932; см. также ASME, Advance Paper, 1932.

5.6. Кручение тонкостенных труб. Ранее было показано, что на контуре функция ψ должна быть постоянной величиной. В случае сплошного сечения эту постоянную можно принять равной нулю. Пусть теперь профиль ограничен двумя замкнутыми кривыми, как изображено на рис. 5.13. Здесь по-прежнему можно принять, что функция ψ равна нулю на внешнем контуре S_1 ; сделать же это допущение для внутреннего контура S_2 нельзя. Известно лишь, что для точек внутреннего контура величина ψ постоянна. В связи с наличием этой новой неизвестной, для решения задачи необходимо иметь дополнительное уравнение. Такое уравнение можно получить из условия, что перемещения должны быть однозначными.

Из уравнений (5.5) имеем:

$$\tau_{zx} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta y \right),$$

$$\tau_{yz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta x \right).$$

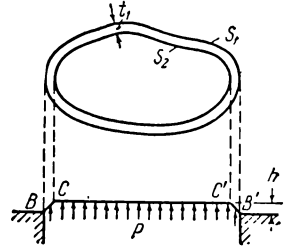


Рис. 5.13.

Вычислим интеграл $\oint \tau ds$ вдоль внутреннего контура:

$$\begin{aligned} \oint_{S_2} \tau ds &= \oint_{S_2} \left(\tau_{zx} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds} \right) ds = G \oint_{S_2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) + \\ &+ G\theta \oint_{S_2} (x dy - y dx). \end{aligned}$$

Так как w является однозначной функцией, и интегрирование производится по замкнутому контуру, то первый интеграл обращается в нуль. В параграфе 5.4 уже было показано, что второй интеграл равен удвоенной площади, ограниченной контуром S_2 . Поэтому имеем

$$\oint_{S_2} \tau ds = 2G\theta A_2, \quad (5.60)$$

где A_2 — площадь, ограниченная контуром S_2 .

Вернемся теперь к мембранной аналогии. Если мембрану внутри контура S_2 заменить невесомой плоской пластинкой (рис. 5.13), то уравнение равновесия пластинки будет иметь вид:

$$\oint_{S_2} F \frac{\partial z}{\partial n} ds = p A_2, \quad (5.61)$$

где F — натяжение мембраны, z — прогиб (см. § 5.4). Пользуясь равенством

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{p}{2F} \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{p}{2F G\theta} \tau,$$

находим из уравнения (5.61)

$$\oint_{S_2} F \frac{p}{2F} \frac{\tau}{G\theta} ds = pA_2 \quad \text{или} \quad \oint_{S_2} \tau ds = 2G\theta A_2,$$

что совпадает с выражением (5.60). Таким образом, в случае полого сечения надо считать, что мембрана натянута по внешнему контуру и связана с невесомой плоской пластинкой по внутреннему контуру.

На рис. 5.13 точки B , B_1 и C , C_1 соответствуют уровням внешнего и внутреннего контуров, а линии BC и $B'C'$ представляют поперечное сечение мембраны, натянутой между двумя контурами. Если стенка тонкая, то линии BC и $B'C'$ приближаются к прямым отрезкам; изменение уклона мембраны будет незначительно. Это равносильно предположению о постоянстве касательных напряжений по толщине стенки. Если через h обозначить постоянное значение функции ψ на контуре S_2 , то из мембранной аналогии следует, что h равно разности уровней обоих контуров. Пусть t — переменная толщина стенки. Касательное напряжение в любой точке определяется уклоном мембраны и равно

$$\tau = \frac{Th}{J}. \quad (5.62)$$

Формула для постоянной кручения J (5.53) должна быть теперь изменена. При выводе уравнений (5.10) и (5.11) нормаль N принималась положительной, если она была направлена наружу по отношению к поперечному сечению. Для внутреннего контура надо пользоваться тем же правилом знаков, так что положительное направление будет внутрь. Следуя этому условию, придется при интегрировании вдоль S_2 изменить знак перед линейными интегралами в уравнениях (5.10) и (5.11). На контуре S_1 функция ψ равна нулю, а на S_2 будет $\psi = h$. Поэтому формула (5.53) принимает вид:

$$J = h \oint_{S_1} (x dy - y dx) + 2 \int \int_R \psi dx dy; \quad (5.63)$$

индекс R соответствует площади A_1 , заключенной между контурами S_1 и S_2 . Так как профиль является тонкостенным, величину ψ во втором интеграле можно заменить средним ее значением между S_1 и S_2 , равным $h/2$. Поэтому получаем

$$J = 2h \left(A_2 + \frac{1}{2} A_1 \right) = 2Ah,$$

где A — площадь, ограниченная средней линией профиля. Подставляя найденное значение J в уравнение (5.62), находим

$$\tau = \frac{T}{2At}. \quad (5.64)$$

Угол закручивания θ можно вычислить по формуле (5.60):

$$\oint_S \tau ds = \frac{T}{2A} \oint_S \frac{ds}{t} = 2G\theta A;$$

отсюда

$$\theta = \frac{T}{4A^2G} \oint_S \frac{ds}{t}; \quad (5.65)$$

здесь S отсчитывается вдоль средней линии профиля. Уравнения (5.64) и (5.65) впервые были получены Бредтом *) и известны как формулы Бредта.

Если трубчатый профиль имеет более чем два контура (рис. 5.14), то части мембраны, ограниченные внутренними контурами, снова могут быть заменены невесомыми плоскими пластинками. Предполагая, что толщина стенки мала, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{Th_1}{Jt_1}, \\ \tau_2 &= \frac{Th_2}{Jt_2}, \\ \tau_3 &= \frac{T}{J} \frac{h_1 - h_2}{t_3} = \frac{\tau_1 t_1 - \tau_2 t_2}{t_3}, \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

где h_1 и h_2 — уровни внутренних контуров CC' и DD' . Уравнение (5.63) запишется в виде

$$J = 2 \int_R \int \psi dx dy + \sum_i 2h_i A'_i = 2h_1 A_1 + 2h_2 A_2,$$

где A'_i — площадь, заключенная внутри контура S_i , а A_1 и A_2 — площади, ограниченные средними линиями S_1 и S_2 . Отсюда

$$T = 2\tau_1 t_1 A_1 + 2\tau_2 t_2 A_2. \quad (5.67)$$

Будем считать толщины t_1 , t_2 , t_3 постоянными. Через s_1 , s_2 и s_3 обозначим длины средних линий. Находя интеграл из уравнения (5.60) сначала по площади A_1 , а затем по A_2 , получаем

$$\tau_1 s_1 + \tau_3 s_3 = 2G\theta A_1, \quad \tau_2 s_2 - \tau_3 s_3 = 2G\theta A_2; \quad (5.68)$$

напряжения τ_1 , τ_2 , τ_3 и угол θ можно вычислить, решая совместно уравнения (5.67) и (5.68).

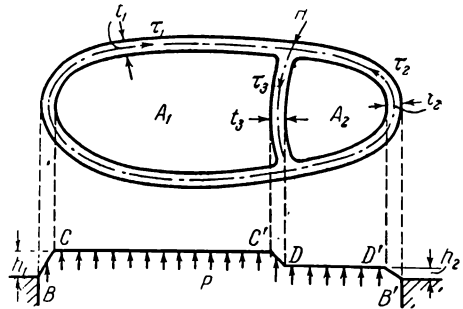


Рис. 5.14.

*) R. Bredt, Kritische Bemerkungen zur drehungselastizität, Z. Ver. deut. Ing. 40, 1896, 785—813.

Из уравнений (5.66) можно видеть, что для той или иной ветви поперечного сечения произведение τt является величиной постоянной. Если соединяются несколько элементов трубчатого сечения, как в точке H , то имеем

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 + \tau_3 t_3. \quad (5.69)$$

Здесь может быть использована гидродинамическая аналогия, причем величина $q = \tau t$ соответствует объему*) идеальной жидкости, циркулирующей по каналу; последний должен иметь ту же форму, что и трубчатый стержень. Тогда уравнение (5.69) означает, что объем вытекающей жидкости должен быть равен объему вытекающей жидкости. Величина q называется поэтому *поток касательных усилий*.

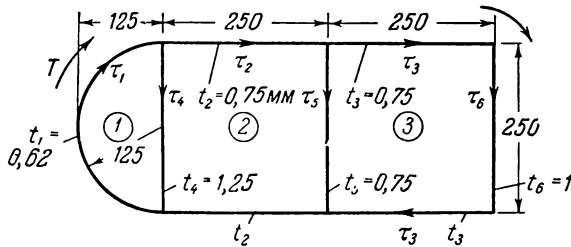


Рис. 5.15.

Приведем численный пример определения касательных напряжений для тонкостенных профилей, в которых число контуров превышает три. На рис. 5.15 показано поперечное сечение и нанесены его размеры. Пусть приложенный крутящий момент будет равен 115 000 кг см. Вычисляем площади:

$$A_1 = \frac{\pi (12,5)^2}{2} = 250 \text{ см}^2, \quad A_2 = A_3 = 625 \text{ см}^2.$$

Примем, что касательные напряжения положительны по направлениям, указанным стрелками. Сопоставляя направления потоков касательных усилий, находим

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 + \tau_4 t_4, \quad \tau_2 t_2 = \tau_3 t_3 + \tau_5 t_5, \quad \tau_3 t_3 = \tau_6 t_6. \quad (5.70)$$

С другой стороны, имеем

$$T = 2\tau_1 t_1 A_1 + 2\tau_2 t_2 A_2 + 2\tau_3 t_3 A_3.$$

Подставив численные значения, получим

$$115\,000 = 2 \cdot 250 \cdot 0,062\tau_1 + 2 \cdot 625 \cdot 0,075\tau_2 + 2 \cdot 625 \cdot 0,075\tau_3,$$

*) Имеется в виду секундный объем (расход) жидкости, протекающей в трубе. (Прим. ред.)

или

$$31\tau_1 + 94\tau_2 + 94\tau_3 = 115\,000. \quad (5.71)$$

По уравнению (5.60) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 s_1 + \tau_4 s_4 &= 2G\theta A_1, \\ -\tau_4 s_4 + 2\tau_2 s_2 + \tau_5 s_5 &= 2G\theta A_2, \\ -\tau_5 s_5 + 2\tau_3 s_3 + \tau_6 s_6 &= 2G\theta A_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

Длины контуров равны:

$$s_1 = 12,5\pi, \quad s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 25 \text{ см.}$$

Используя уравнения (5.70), найдем:

$$\left. \begin{aligned} 51,7\tau_1 - 15\tau_2 &= 500G\theta, \\ -1,25\tau_1 + 9\tau_2 - 2,5\tau_3 &= 125G\theta, \\ -2,5\tau_2 + 9,4\tau_3 &= 125G\theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.73)$$

Решая совместно уравнения (5.71) и (5.73), получим:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 400 \text{ кг/см}^2, & \tau_2 &= 545 \text{ кг/см}^2, & \tau_3 &= 486 \text{ кг/см}^2, \\ \tau_4 &= -127 \text{ кг/см}^2, & \tau_5 &= 67 \text{ кг/см}^2, & \tau_6 &= 364 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Знак минус перед напряжением τ_4 означает, что оно направлено в сторону, противоположную указанной на рисунке.

Задача 1. Дана круглая стальная труба внешнего диаметра 10,2 см и толщиной стенки 0,4 см. Сравнить угол закручивания и максимальное касательное напряжение этой трубы с теми же величинами для трубы, разрезанной вдоль образующей. Надо отметить, что стержень открытого сечения относительно слабо сопротивляется кручению. При решении данной задачи находим, что жесткость замкнутого профиля в 400 раз больше, чем открытого, а максимальные напряжения — в 30 раз меньше.

Задача 2. Дан тонкостенный трубчатый стержень, размеры которого показаны на рис. 5.16. На стержень действует момент 115 000 кг·см. Найти касательные напряжения в трубе.

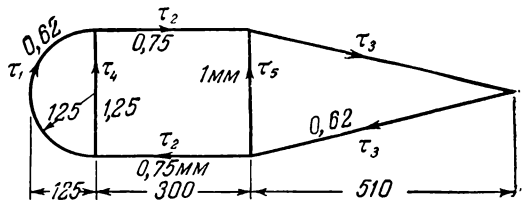


Рис. 5.16.

Отв. $\tau_1 = 445 \text{ кг/см}^2$, $\tau_2 = 570 \text{ кг/см}^2$, $\tau_3 = 400 \text{ кг/см}^2$, $\tau_4 = 12 \text{ кг/см}^2$, $\tau_5 = -180 \text{ кг/см}^2$.

5.7. Кручение круглых валов переменного диаметра. Рассмотрим кручение круглого вала переменного диаметра, изображенного на рис. 5.17, парами, приложенными по торцам. Когда мы встречаемся с телами вращения, удобно пользоваться цилиндрическими

координатами r, θ, z . Примем, что ось z совпадает с осью вала. Из рис. 4.5 легко получить уравнения равновесия элемента. Пренебрегая объемными силами, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

Обозначим перемещения в направлениях r, θ, z соответственно через u, v, w . Выражения для компонентов деформаций $\epsilon_r, \epsilon_\theta$ и $\gamma_{r\theta}$ могут быть выведены таким же образом, как и в параграфе 4.3; компоненты $\epsilon_z, \gamma_{\theta z}$ и γ_{zr} можно легко получить из обычных формул в декартовых координатах. В результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zr} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

В параграфе 5.2 было найдено, что в случае закручивания сплошного круглого вала парами, приложенными по торцам, перемещения вдоль оси вала будут отсутствовать, и перемещение точек

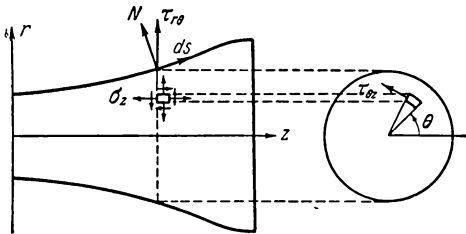


Рис. 5.17.

любого поперечного сечения происходит в направлении касательной. Попробуем решить настоящую задачу, полагая, что в данном случае

$$u = w = 0.$$

Докажем, что решение, в основе которого лежит такое предположение, будет удовлетворять дифференциальным

уравнениям и граничным условиям. Из теоремы об однозначности решения можно сделать вывод, что такое решение является правильным. Благодаря осевой симметрии, перемещение v не может зависеть от угла θ и будет функцией только r и z . Пользуясь этим, из (5.75) находим:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = \gamma_{zr} &= 0, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

Из формул закона Гука легко получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{zr} = 0, \\ \tau_{r\theta} = G \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad \tau_{\theta z} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

Заметим, что единственные компоненты напряжений $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$, отличные от нуля, не зависят от угла θ . Поэтому первые два уравнения (5.74) тождественно удовлетворяются, а третье уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0.$$

Его можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{\theta z}) = 0. \quad (5.78)$$

Это уравнение тождественно удовлетворяется, если ввести функцию напряжений ψ по формулам:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r^2 \tau_{\theta z}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -r^2 \tau_{r\theta},$$

или

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (5.79)$$

Чтобы определить функцию напряжений, надо обратиться к уравнению совместности. Решая совместно уравнения (5.77) и (5.79), находим:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Дифференцируя первое равенство по z , а второе — по r и вычитая одно из другого, получаем следующее уравнение совместности:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.80)$$

Найдем теперь условие на контуре для функции ψ . Так как боковая поверхность вала свободна от внешних нагрузок, то результирующее касательное напряжение должно быть направлено по касательной к контуру осевого сечения, а его проекция на нормаль N к контуру должна равняться нулю. В соответствии с этим имеем

$$\tau_{r\theta} \cos(\widehat{Nr}) + \tau_{\theta z} \cos(\widehat{Nz}) = 0.$$

С другой стороны,

$$\cos(\widehat{Nr}) = dz/ds, \quad \cos(\widehat{Nz}) = -dr/ds,$$

где ds — элемент дуги контура. Подставляя сюда выражение (5.79), получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{dr}{ds} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\psi}{ds} = 0,$$

или

$$\psi = \text{const на контуре.} \quad (5.81)$$

Таким образом, задача о кручении круглого вала переменного диаметра сводится к решению уравнения (5.80) при условии на контуре (5.81).

Величину крутящего момента легко вычислить, определив момент касательных усилий $\tau_{\theta z}$ в поперечном сечении:

$$T = \int_0^a \tau_{\theta z} r (2\pi r) dr = 2\pi \int_0^a \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = 2\pi [\psi(a, z) - \psi(0, z)]. \quad (5.82)$$

Если вал имеет коническую форму, как на рис. 5.18, то на контуре имеет место зависимость

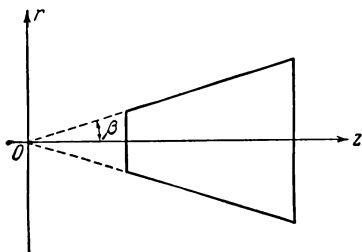


Рис. 5.18.

$$\frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \cos \beta,$$

причем отношение, фигурирующее в левой части равенства, является величиной постоянной. Поэтому любая функция этого отношения будет удовлетворять условию на контуре (5.81). Легко проверить, что функция

$$\psi = C \left\{ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{3} \left[\frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]^3 \right\},$$

где C — постоянная, удовлетворяет уравнению (5.80). Постоянную C можно определить, подставив эту функцию в уравнение (5.82); тогда получим

$$C = -\frac{3T}{2\pi(2 - 3\cos\beta + \cos^3\beta)}. \quad (5.83)$$

Таким образом, касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$ равны:

$$\tau_{r\theta} = -\frac{Cr^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{Crz}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (5.84)$$

где C определяется по формуле (5.83).

Обычно задачи, с которыми приходится сталкиваться на практике, бывают более сложными. В таких случаях применяют численные методы решения, рассмотренные ниже, в гл. VI*).

*) См., например, R. V. Southwell, Relaxation methods in theoretical physics, N. Y., 1940; A. Thom, J. Orr, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 131, 1931, 30—37.

ГЛАВА 6

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И МЕТОД РЕЛАКСАЦИИ

6.1. Конечные разности. После того как сформулирована та или иная задача теории упругости, становится необходимым отыскать решение исходных дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях. В главах 4 и 5 для решения ряда задач применялись аналитические методы. Однако в некоторых задачах аналитическое решение не всегда оказывается возможным, и следует обратиться к приближенным численным методам. Одним из таких эффективных методов является *метод конечных разностей*. Идея этого метода состоит в замене основных дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений, характеризующих условия на контуре, соответствующими *уравнениями в конечных разностях*. При этом задача сводится к решению системы совместных *алгебраических* уравнений, которое осуществляется без особых затруднений.

Перед тем как осуществить переход от дифференциальных уравнений в частных производных к уравнениям в конечных разностях, напомним некоторые основные положения, касающиеся метода конечных разностей. Рассмотрим некоторую непрерывную функцию $f(x)$, зависящую от переменной x , и допустим, что известны значения $f(x)$, относящиеся к равноотстоящим друг от друга значениям x . На рис. 6.1 изображена кривая $f=f(x)$. В точке O , для которой $x=x_0$, производная df/dx по определению равна:

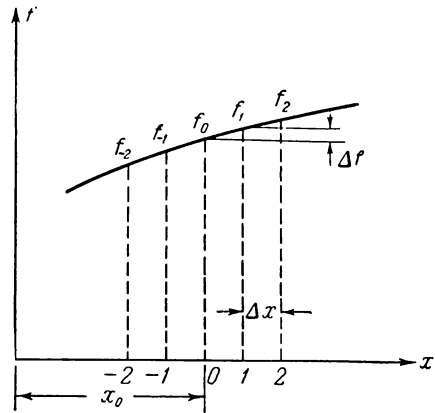


Рис. 6.1.

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1 - f_0}{h}, \quad (6.1)$$

где $\Delta x = h$ — длина интервала, Δf — разность значений функции f в точках 1 и 0 , а f_1 и f_0 — значения f соответственно в точках 1 и 0 . Индекс 0 при df/dx обозначает точку, в которой берется производная. Если интервал h мал, то производная df/dx приближенно равна отношению $\Delta f/\Delta x$. Поэтому выражение (6.1) можно для точки 0 представить в виде

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \approx \frac{1}{h} (f_1 - f_0);$$

для любого значения x будет

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{h} = \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)]. \quad (6.2)$$

Величина $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ называется *первой разностью* функции f , отвечающей известному значению x . В выражении (6.2) фигурирует разность значений функции в рассматриваемой точке и в точке, лежащей справа от нее. Такая разность называется *правой разностью* или *разностью, взятой вперед*. Подобным же образом можно получить приближенное значение производной в точке 0 с помощью *левой разности*, или *разности, взятой назад*:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \approx \frac{1}{h} (f_0 - f_{-1});$$

для любой точки будет:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{1}{h} [f(x) - f(x-h)]. \quad (6.3)$$

Можно также выразить производную через *центральную разность* для точки 0 :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \approx \frac{1}{2h} (f_1 - f_{-1}),$$

или для любой точки x :

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)], \quad (6.4)$$

причем здесь вводится интервал $\Delta x = 2h$.

Пользуясь символами $\bar{\Delta}$, Δ , $\underline{\Delta}$ для обозначения соответственно *первых правой, центральной и левой разностей*, получим:

$$\bar{\Delta}f = f(x+h) - f(x), \quad \Delta f = \frac{1}{2} [f(x+h) - f(x-h)],$$

$$\underline{\Delta}f = f(x) - f(x-h).$$

Таким же образом можно приближенно представить вторую производную с помощью *второй разности*. По правилам дифференциального исчисления находим

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx}\right) \approx \frac{\Delta^2 f}{h^2}, \quad (6.5)$$

где Δ^2 — обозначает вторую разность; в дальнейшем символами $\bar{\Delta}^2$, Δ^2 , $\underline{\Delta}^2$ будем пользоваться для обозначения соответственно *вторых правой, центральной и левой разностей*.

Вторая правая разность в точке 0 (рис. 6.1) будет равна:

$$\begin{aligned}(\bar{\Delta}^2 f)_0 &= \bar{\Delta}(\bar{\Delta} f)_0 = \bar{\Delta}(f_1 - f_0) = \bar{\Delta}f_1 - \bar{\Delta}f_0 = \\ &= (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0.\end{aligned}$$

Из предыдущих выкладок ясно, что каждым из символов $\bar{\Delta}$ можно пользоваться в качестве оператора. Под $\bar{\Delta}^2$ надо понимать дважды примененный оператор $\bar{\Delta}$; величины $(\bar{\Delta} f)_0 = \bar{\Delta}f_0$ и $\bar{\Delta}f_1$ будут первыми правыми разностями соответственно в точках 0 и 1. В некоторой точке x имеем:

$$\bar{\Delta}^2 f = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x). \quad (6.6)$$

Таким же образом находим вторую левую разность в точке 0:

$$\begin{aligned}(\underline{\Delta}^2 f)_0 &= \underline{\Delta}(\underline{\Delta} f)_0 = \underline{\Delta}(f_0 - f_{-1}) = \underline{\Delta}f_0 - \underline{\Delta}f_{-1} = \\ &= (f_0 - f_{-1}) - (f_{-1} - f_{-2}) = f_0 - 2f_{-1} + f_{-2},\end{aligned}$$

или в любой точке x :

$$\underline{\Delta}^2 f = f(x) - 2f(x - h) + f(x + 2h). \quad (6.7)$$

Повторяя выкладки, проведенные при выводе выражений (6.6) и (6.7), получим вторую центральную разность в точке 0:

$$(\Delta^2 f)_0 = \Delta(\Delta f)_0 = \frac{\Delta(f_1 - f_{-1})}{2} = \frac{f_2 - 2f_0 + f_{-2}}{4}.$$

Здесь вторая центральная разность выражена через значения функции в точках, находящихся на *два* интервала правее и на *два* интервала левее данной точки. Можно добиться большей точности, если выразить вторую центральную разность через значения функции в точках, отстоящих от данной точки вправо и влево на *один* интервал. При этом величина $\Delta^2 f$ определяется следующим образом:

$$(\Delta^2 f)_0 = \bar{\Delta}(\underline{\Delta} f)_0 \quad \text{или} \quad (\Delta^2 f)_0 = \underline{\Delta}(\bar{\Delta} f)_0.$$

Так, например, по первой формуле получим

$$\begin{aligned}(\Delta^2 f)_0 &= \bar{\Delta}(\underline{\Delta} f)_0 = \bar{\Delta}(f_0 - f_{-1}) = \bar{\Delta}f_0 - \bar{\Delta}f_{-1} = \\ &= (f_1 - f_0) - (f_0 - f_{-1}) = f_1 - 2f_0 + f_{-1}.\end{aligned}$$

К тому же результату придем, воспользовавшись второй формулой. Следовательно, для некоторой точки x будет

$$\Delta^2 f = f(x + h) - 2f(x) + f(x - h). \quad (6.8)$$

Вообще говоря, производные в той или иной точке будут аппроксимироваться с большей точностью через соответствующие

центральные разности; при этом рассматриваются точки, расположенные вдоль кривой по обе стороны от данной, так что средние значения определяются более точно. В дальнейшем, если не будет особо оговорено, мы будем применять лишь центральные разности.

Выше был указан путь вывода выражений для первой и второй разностей: не представляет затруднений, пользуясь тем же методом, определить центральные разности высших порядков. Так, например, третья центральная разность в точке x равна:

$$\begin{aligned} \Delta^3 f &= \Delta(\Delta^2 f) = \Delta[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = \\ &= \Delta f(x+h) - 2\Delta f(x) + \Delta f(x-h) = \\ &= \frac{f(x+2h) - f(x)}{2} - 2 \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2} + \frac{f(x) - f(x-2h)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)]; \end{aligned} \quad (6.9)$$

четвертая центральная разность будет

$$\begin{aligned} \Delta^4 f &= \Delta^2(\Delta^2 f) = \Delta^2[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = \\ &= \Delta^2 f(x+h) - 2\Delta^2 f(x) + \Delta^2 f(x-h) = \\ &= [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] - 2[f(x+h) - 2f(x) + \\ &\quad + f(x-h)] + [f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)] = \\ &= f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h). \end{aligned} \quad (6.10)$$

В приведенных выше выкладках непосредственно использован оператор (Δ^2) , определяемый формулой (6.8). Из формулы (6.10) видно, что коэффициенты при различных членах в разностях четных порядков совпадают с коэффициентами разложения бинома $(a-b)^n$. Можно показать, что это положение справедливо в общем случае. Следовательно, для *четных* разностей, когда индекс n является четным, n -я центральная разность имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta^n f &= f\left(x + \frac{n}{2}h\right) - nf\left(x + \frac{n}{2}h - h\right) + \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2} f\left(x + \frac{n}{2}h - 2h\right) - \dots + \\ &+ (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} f\left(x + \frac{n}{2}h - rh\right) + \dots + f\left(x - \frac{n}{2}h\right), \end{aligned} \quad (6.11)$$

где r — некоторое число, равное n или меньшее, чем n .

Для производных *нечетного* порядка соответствующие разности выражаются формулой:

$$\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}} \approx \frac{1}{2h} \left[\frac{\Delta^n f(x+h)}{h^n} - \frac{\Delta^n f(x-h)}{h^n} \right],$$

или

$$\Delta^{n+1}f = \Delta(\Delta^n f) = \frac{1}{2} [\Delta^n f(x+h) - \Delta^n f(x-h)], \quad (6.12)$$

где n — четное число; значения $\Delta^n f(x+h)$ и $\Delta^n f(x-h)$ определяются формулой (6.11).

6.2. Уравнения в конечных разностях. В предыдущем параграфе были получены приближенные выражения для производных разного порядка через конечные разности в предположении, что f является функцией только x . Если f будет функцией x и y , то должны быть введены *частные производные*. Воспользуемся теми же рассуждениями, что и ранее, и примем $\Delta x = \Delta y = h$; тогда из определения частных производных вытекают равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{\Delta_x f}{2h}, & \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{\Delta_y f}{2h}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{\Delta_x^2 f}{h^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\approx \frac{\Delta_y^2 f}{h^2}, \end{aligned}$$

причем индексы в операторах Δ_x и Δ_y обозначают направление, для которого взята разность.

Допустим, что исследуемая область разделена сеткой на квадратные ячейки, как показано на рис. 6.2, при $\Delta x = \Delta y = h$; тогда из выражений (6.4) и (6.8) для точки O получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{1}{2h} [f(x+h, y) - f(x-h, y)] = \frac{1}{2h} (f_1 - f_3), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{1}{2h} [f(x, y+h) - f(x, y-h)] = \frac{1}{2h} (f_2 - f_4), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h^2} [f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)] = \\ &= \frac{1}{h^2} (f_1 - 2f_0 + f_3), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h^2} [f(x, y+h) - 2f(x, y) + f(x, y-h)] = \\ &= \frac{1}{h^2} (f_2 - 2f_0 + f_4). \end{aligned}$$

Определим оператор Лапласа

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

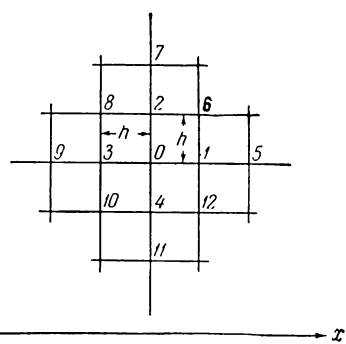


Рис. 6.2.

Из приведенных выше выражений непосредственно вытекает

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h^2} (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0).$$

Если основным дифференциальным уравнением задачи является уравнение Лапласа $\nabla^2 f = 0$, то соответствующее *уравнение в конечных разностях* в точке 0 будет:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0 = 0. \quad (6.13)$$

Для каждой точки области существует одно уравнение в конечных разностях вида (6.13).

Если область разделена сеткой, имеющей n внутренних точек (или узлов), то можно получить n уравнений в конечных разностях. Из них могут быть найдены значения функции для каждой точки области, причем должны удовлетворяться граничные условия. При этом вместо дифференциальных уравнений будем иметь систему алгебраических уравнений, решение которой не представляет математических трудностей.

Обратимся к случаю, когда основное дифференциальное уравнение имеет вид уравнения Пуассона. Это относится, например, к уравнению (5.51):

$$\nabla^2 f = -2.$$

Тогда соответствующее уравнение в конечных разностях в точке 0 будет:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0 = -2h^2. \quad (6.14)$$

Наконец, рассмотрим бигармоническое уравнение

$$\nabla^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0.$$

Обращаясь к рис. 6.2 и вычисляя конечные разности для направлений x и y по формуле (6.10), получаем соответственно:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \approx \frac{\Delta_x^4 f}{h^4} = \frac{1}{h^4} (f_5 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_3 + f_9),$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \approx \frac{\Delta_y^4 f}{h^4} = \frac{1}{h^4} (f_7 - 4f_2 + 6f_0 - 4f_4 + f_{11}).$$

Приближенное выражение для четвертой производной $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \approx \frac{\Delta_x^2 (\Delta_y^2 f)}{h^4} = \\ &= \frac{1}{h^4} \Delta_x^2 (f_2 - 2f_0 + f_4) = \frac{1}{h^4} (\Delta_x^2 f_2 - 2\Delta_x^2 f_0 + \Delta_x^2 f_4) = \\ &= \frac{1}{h^4} (f_6 + f_8 + f_{10} + f_{12} - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 - 2f_4 + 4f_0). \end{aligned}$$

Тогда уравнение в конечных разностях в точке O будет:

$$\frac{1}{h^4} [20f_0 - 8(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + 2(f_6 + f_8 + f_{10} + f_{12}) + f_5 + f_7 + f_9 + f_{11}] = 0. \quad (6.15)$$

Задача. Преобразовать в уравнение в конечных разностях в точке O следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Ответ. Принимаем направления r и z за направления соответственно x и y (рис. 6.2). Уравнение в конечных разностях в точке O будет:

$$f_1 \left(1 - \frac{3h}{2r_0}\right) + f_2 + f_3 \left(1 + \frac{3h}{2r_0}\right) + f_4 - 4f_0 = 0.$$

6.3. Решение уравнений в конечных разностях. Рассмотрим в качестве примера задачу о кручении стержня квадратного сечения. Основное дифференциальное уравнение относительно функции ψ будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \quad \text{в области } R \quad (5.51)$$

и

$$\psi = 0 \quad \text{на контуре } S. \quad (5.52)$$

Разделим сечение на четыре квадрата и пронумеруем узловые точки сетки, как показано на рис. 6.3; тогда получим следующее уравнение в конечных разностях, отвечающее уравнению (5.51) в точке O :

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 = -2h^2. \quad (6.16)$$

Из граничных условий (5.51) вытекает

$$\psi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (6.17)$$

Подставляя значения ψ по (6.17) в уравнение (6.16) и принимая $h = a$, получаем

$$-4\psi_0 = -2a^2, \quad \text{или} \quad \psi_0 = 0,5a^2.$$

Производная $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ в узловой точке I может быть приближенно выражена через первую левую разность:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_1 \approx \frac{1}{h} (\psi_1 - \psi_0) = -0,5a.$$

Согласно формуле (5.53) постоянная кручения равна

$$J = 2 \int \int_R \psi \, dx \, dy;$$

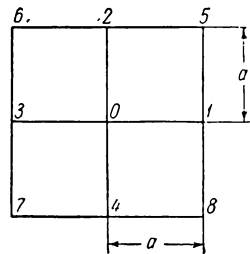


Рис. 6.3.

иными словами, величина J равна удвоенному объему области, ограниченной поверхностью ψ . Объем легко может быть вычислен по правилу Симпсона (см. формулу (6.47) в параграфе 6.7)):

$$J \approx 2 \left[\frac{h^2}{9} (16\psi_0) \right] = 1,778a^4.$$

Подставляя это значение J в формулу (5.52), находим

$$\tau_{\max} = (\tau_{yz})_1 = -\frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx -\frac{T}{1,778a^4} (-0,5a) = 0,281 \frac{T}{a^3}. \quad (6.18)$$

Аналитическое решение дает значение $\tau_{\max} = 0,600T/a^3$. Приведенное приближенное решение дало результат, лежащий ниже на 53,2% ; при выбранной нами крупной сетке такая большая погрешность является естественной.

Чтобы сравнить приближенные величины ψ , $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и J с точными значениями, найдем последние аналитически. Из определения функции ψ по соотношениям (5.49) следует:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y.$$

Частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ легко вычислить, исходя из выражения (5.41). Отсюда можно непосредственно перейти к определению функции напряжений ψ ; она окажется равной

$$\psi = \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} k_n y}{\operatorname{ch} k_n b} \right) \cos k_n x. \quad (6.19)$$

При выводе выражения (6.19) было использовано соотношение (5.40):

$$2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n a}{\pi^2 (2n+1)} \sin k_n x.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{16a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} k_n y}{\operatorname{ch} k_n b} \right) \sin k_n x. \quad (6.20)$$

Пользуясь выражением (6.19), находим значение ψ_0 при $x=0$, $y=0$:

$$\psi = 0,5894a^2.$$

Величина $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_1$ при $x=a$, $y=0$ по (6.20) будет

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_1 = -1,350a.$$

Точное значение постоянной кручения J получаем по формуле (5.42):

$$J = 2,250a^4.$$

Сравнение этих данных с результатами решения в конечных разностях показывает, что приближенное решение приводит к более низким значениям искомых величин: для ψ_0 на 17,9%, для $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_1$ — на 63%, для J — на 21%.

Для получения большей точности разделим область на 16 квадратов со стороной $h = a/2$ и пронумеруем узловые точки, как показано на рис. 6.4. При нумерации точек учитывается симметрия задачи: симметрично расположенным точкам придается один и тот же номер. Составляем уравнения в конечных разностях соответственно для точек 0, 1, 2:

$$\left. \begin{aligned} 4\psi_1 - 4\psi_0 &= 2\left(\frac{a}{2}\right)^2, \\ \psi_0 + 2\psi_2 + \psi_3 - 4\psi_1 &= -2\left(\frac{a}{2}\right)^2, \\ 2\psi_1 + 2\psi_4 - 4\psi_2 &= -2\left(\frac{a}{2}\right)^2. \end{aligned} \right\} (6.21)$$

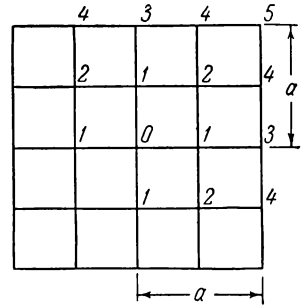


Рис. 6.4.

На контуре имеем

$$\psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = 0. \quad (6.22)$$

Решая совместно уравнения (6.21) и (6.22), получаем:

$$\psi_0 = 0,5625a^2, \quad \psi_1 = 0,4375a^2, \quad \psi_2 = 0,3438a^2.$$

Пользуясь этими значениями функции ψ , находим:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_3 \approx \frac{1}{h}(\psi_3 - \psi_1) = -0,8750a,$$

$$J = 2 \iint_R \psi \, dx \, dy \approx 2 \cdot \frac{h^2}{9} \cdot 4(\psi_5 + 4\psi_4 + \psi_3 + \\ + 4\psi_4 + 16\psi_2 + 4\psi_1 + \psi_3 + 4\psi_1 + \psi_0) = 2,125a^4$$

и

$$\tau_{\max} = -\frac{T}{J} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_3 \approx 0,412 \frac{T}{a^3}.$$

Снова проведем сравнение с точным решением; приближенные значения и здесь будут ниже точных: для ψ_0 — на 4,6%, для численной величины $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_3$ — на 35,2%, для J — на 5,6%, для τ_{\max} — на 31,3%.

Проведем дальнейшее размельчение сетки, разбив область на 64 квадратные ячейки со стороной $h = a/4$. Принимая во внимание

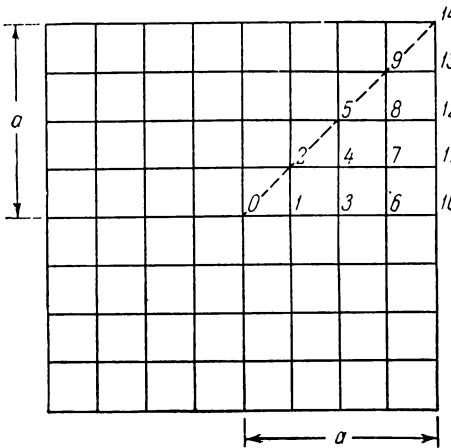
симметричность решения, нумеруем узлы, как показано на рис. 6.5. Составляем уравнения в конечных разностях для узловых точек от 0 до 9; учитываем при этом, что функция ψ на контуре равна нулю. Таким образом, для 10 неизвестных значений ψ во внутренних узлах получим 10 совместных уравнений. Решение *) их дает следующие значения:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0,5822a^2, & \psi_1 &= 0,5509a^2, & \psi_2 &= 0,5217a^2, & \psi_3 &= 0,4530a^2, \\ \psi_4 &= 0,4300a^2, & \psi_5 &= 0,3572a^2, & \psi_6 &= 0,2761a^2, & \psi_7 &= 0,2632a^2, \\ & & \psi_8 &= 0,2219a^2, & \psi_9 &= 0,1422a^2. \end{aligned}$$

Пользуясь этими значениями, находим:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{10} \approx -1,1044a, \quad J \approx 2,2175a^4, \quad \tau_{\max} \approx 0,498 \frac{T}{a^3}.$$

Сопоставим эти данные с аналитическим решением; приближенные значения снова будут ниже точных: для ψ_0 — на 1,2%, для численной величины $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{10}$ — на 22,7%, для J — на 1,4%, для τ_{\max} — на 17%.



Из приведенного сравнения видно, что при шаге сетки $h = a/4$ погрешность в значениях ψ_0 и J становится достаточно малой. Большая ошибка при определении τ_{\max} объясняется погрешностью в значении $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{10}$. В параграфах 6.6 и 6.7 будут рассмотрены пути, ведущие к повышению точности решения.

Рис. 6.5.

6.4. Метод релаксации.

Из примеров, разобранных в предыдущем параграфе, видно, что с уменьшением шага h соответственно повышается точность решения. Однако при таком уменьшении шага быстро возрастает число подлежащих решению совместных уравнений, так что получение окончательных результатов становится весьма трудоемким. Вместо обычных схем решения было предложено много методов и среди них *метод релаксации*, развитый Саусвеллом. Время, требуемое для получения решения с заданной

*) Для совместного решения большого числа линейных уравнений можно пользоваться эффективным методом, предложенным Краутом. См. P. D. Stout, Trans. AIEE, т. 60, 1941.

точностью по методу релаксации, оказывается значительно меньшим по сравнению с другими путями решения; рассмотрим поэтому данный метод более подробно.

Лучше всего изложить метод релаксации на численном примере *). Решение задачи начинается с того, что изображается исследуемая область и наносятся узловые точки сетки. Допустим, что для каждого узла мы располагаем приближенными значениями ψ , найденными из экспериментов, из решения аналогичных частных задач, из предварительных подсчетов и т. д. Уравнение в конечных разностях для некоторой точки O (рис. 6.2) будет иметь вид:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 + 2h^2 = 0. \quad (6.23)$$

Если предполагаемые значения ψ совпадают с истинными, т. е. если они являются корнями уравнений в конечных разностях, то после подстановки их в уравнения типа (6.23) последние должны обратиться в тождества. Но в общем случае такое совпадение не имеет места. Поэтому мы будем иметь

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 + 2h^2 = Q_0, \quad (6.24)$$

где Q_0 — числовая величина, определяющая погрешность решения. Величина Q_0 называется *невязкой* в узловой точке O . Аналогичным образом вычисляются невязки для всех остальных внутренних узлов. Если величины ψ определены точно, то невязки должны быть равны нулю во всей области. Нашей целью является свести невязки во всех узловых точках либо к нулю, либо к настолько малым величинам, что при дальнейшем уменьшении Q последняя значащая цифра в числовом значении ψ будет сохраняться.

Вернемся к уравнению (6.24). Если ψ_1 изменяется на $(+1)$, то Q_0 также получает приращение, равное $(+1)$; это же относится к изменению на $(+1)$ величин ψ_2 , ψ_3 или ψ_4 . Между тем, если происходит изменение на $(+1)$ величины ψ_0 , то Q_0 меняется на (-4) . Следовательно, изменение невязок происходит по определенному закону, благодаря чему невязки можно последовательно уменьшать. Количество операций по вычислению и изменению невязок может быть известным образом сокращено, если применять так называемый *релаксационный оператор*. Этот оператор представляет собой по существу уравнение в конечных разностях, изображенное в схематической форме. Например, для рассматриваемой задачи релаксационный оператор имеет вид, показанный на рис. 6.6. Пользуясь релаксационным оператором, легко вычислить невязки в каждой точке. При этом облегчается процесс изменения невязок: оператор указывает, что возрастание значения ψ в центре на $(+1)$ меняет

*) Метод релаксации подробно рассмотрен в книге R. Y. Southwell, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, N. Y., 1946. См. также H. W. Emmons, *Quart. Appl. Math.*, т. 2, 1944, 173—195; F. S. Shaw, *Numerical Methods of Analysis in Engineering*, N. Y., 1949, 49—65.

невязку в той же точке на (-4) , а невязку в окружающих ее точках — на $(+1)$.

Приведем числовой пример релаксационного процесса. Примем шаг равным $h = a/2$. Пронумеруем точки, как показано на рис. 6.7.

Из мембранной аналогии мы получаем некоторое представление о том, как меняется ψ в различных точках внутри области. Для простейшего случая, когда $h = a$, нам известно, кроме того, что значение ψ_{13} приблизительно равно $0,5a$. Намеренно примем, однако, в качестве первого грубого приближения, что значения ψ равны нулю во всех точках. Вычисляем невязки для всех внутренних точек по выражению (6.24) и с помощью релаксационного оператора (рис. 6.6); записываем невязку ниже и левее

данной точки. Принятые значения ψ записаны ниже и правее данной точки. Все эти данные нанесены в качестве первого этапа на рис. 6.8. Для упрощения записи все значения Q и ψ умножены на коэффициент $1000/a^2$.

Второй этап состоит в том, чтобы найти точку, в которой невязка является наибольшей, и приступить к уменьшению Q в этой точке. В рассматриваемом случае величина Q — одна и та же во всех точках, так что мы можем в качестве исходной выбрать любую из них. Начнем с центральной точки и уменьшим невязку в ней до нуля. Для этого мы должны увеличить ψ в этой точке на $(+\frac{500}{4})$ или на

$(+125)$. При таком изменении ψ значения невязок в каждой из соседних четырех точек увеличатся на $(+125)$. Выпишем окончательные значения невязок слева и внизу от каждой точки, а изменение величины ψ — справа и внизу. На рис. 6.8 эти данные представлены как второй этап вычислений.

Будем далее уменьшать невязку в точке 14; ее значение, полученное ранее, равнялось 625. Чтобы сделать эту величину близкой к нулю, придадим значению ψ в этой точке приращение, равное $(+\frac{625}{4})$ или 156. Тогда невязка в точке 14 станет равной $(+1)$;

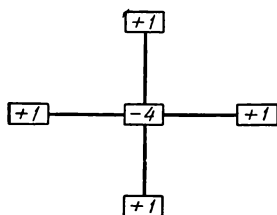


Рис. 6.6.

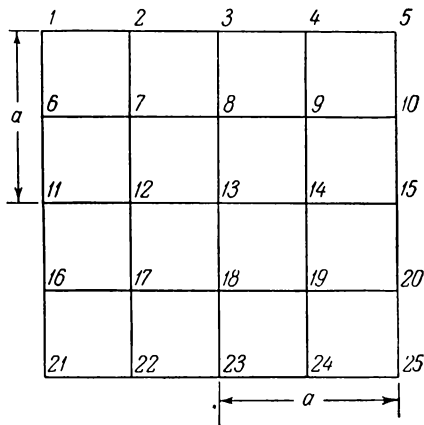


Рис. 6.7.

0	0	0	0	0
0	500	0	500	0
0	500	0	500	0
0	500	0	500	0
0	0	0	0	0

Этап 1

0	0	0	0	0
0	500	0	500	0
0	500	625	0	500
0	500	625	125	625
0	500	625	0	500
0	0	0	0	0

Этап 2

0	0	0	0	0
0	500	0	625	0
0	625	0	156	0
0	500	0	625	0
0	0	0	125	1
0	0	0	156	0
0	500	0	625	0
0	0	0	656	0
0	0	0	0	0

Этап 3

0	0	0	0	0
0	500	0	625	0
0	625	0	156	0
0	500	0	625	0
0	0	0	656	0
0	0	0	-544	300
0	0	0	600	156
0	0	0	0	0

Этап 4

0	0	0	0	0
0	500	0	925	0
0	625	0	156	0
0	500	0	925	0
0	0	0	-544	300
0	0	0	400	-144
0	0	0	125	600
0	0	0	956	156
0	0	0	0	0

Этап 5

0	0	0	0	0
0	900	0	-675	0
0	1300	300	-275	100
0	625	0	156	0
0	1025	400	-644	0
0	-575	25	-244	56
0	900	0	-675	0
0	1300	300	-275	100
0	0	0	400	-144
0	0	0	125	600
0	0	0	956	156
0	0	0	0	0

Этап 6

0	0	0	0	0
0	100	300	25	400
0	20	40	-15	40
0	25	400	56	125
0	-15	40	6	400
0	100	300	25	400
0	20	40	-15	40
0	0	0	0	0

Этап 7

0	0	0	0	0
0	0	300	-1	400
0	0	40	4	40
0	0	4	-2	4
0	0	344	438	344
0	-1	400	0	125
0	0	40	4	40
0	0	4	-2	4
0	0	344	438	344
0	0	300	-1	400
0	0	40	4	40
0	0	4	-2	4
0	0	344	438	344
0	0	0	0	0

Этап 8

Рис. 6.8

невязки в соседних точках даны как третий этап на рис. 6.8. Точка 15 лежит на контуре, так что значение функции в этой точке определяется из граничных условий. Если условие на контуре удовлетворено, то невязка здесь будет равна нулю. Мы замечаем, что уменьшение невязки в точке 14 повлечет за собой новое увеличение невязки в точке 13. Чтобы уменьшить это приращение невязки, мы должны вновь увеличить ψ_{13} . Такое обстоятельство имеет место, если в точках, соседних с данной, невязки имеют один и тот же знак. Чтобы сделать сходимость более быстрой, придадим ψ_{13} во втором шаге такое приращение, чтобы значение Q_{13} не свелось к нулю, а сделалось отрицательным. Такой прием можно сравнить со *стрельбой с перелетом*. Величина превышения зависит от значений невязок с соседних точках. Если превышение окажется недостаточным или излишним, то это не должно смущать нас, так как будет связано лишь с дополнительной затратой времени на вычисления.

В точках 9 и 19 невязка равна 656. Чтобы уменьшить ее, придадим ей сначала завышенное значение, прибавив по 300 в обеих точках. Изменения значений невязок и ψ зафиксированы в качестве четвертого этапа. Затем, в качестве пятого этапа, прибавляем по 400 к значениям ψ в точках 8 и 18; в последующем прибавляем по 400 в точках 13 и 12, по 300 — в точках 7 и 17 и 250 — в точке 14. Окончательные невязки даны в виде шестого этапа. Максимальное значение невязок здесь приблизительно равно 100. Если во всех внутренних точках прибавить по 40, это сведет невязки до таких значений, что максимум не будет превышать 40. Вновь полученные невязки показаны в качестве седьмого этапа. После дальнейших изменений, приведенных в восьмом этапе, максимальное значение невязки сводится к 1. Дальнейшее изменение последней значащей цифры в числовой величине ψ не может привести к уменьшению невязок, и потому наше решение справедливо с точностью до единицы третьего знака.

В рассмотренном примере мы заведомо удлиними вычисления, взяв первое приближение явно неудачным и игнорируя симметричность решения. Для данной частной задачи решение уравнений в конечных разностях обычным методом может показаться более простым. Преимущество метода релаксации становятся очевидными при большем числе точек, так как он позволяет тогда сократить время, затрачиваемое на вычисления.

При осуществлении процесса релаксации желательно проверять вычисления, определяя время от времени невязки во всех узловых точках. При наличии ошибок в вычислениях новые невязки не будут совпадать с теми значениями, которые были зафиксированы ранее. Если такое различие имеет место, то нет надобности возвращаться к предыдущим вычислениям; следует выписать правильные значения невязок и вновь продолжать процесс. Это никак не отразится на результатах вычислений, а приведет лишь к дополнительной затрате времени.

6.5. Групповая релаксация и линии симметрии. В предыдущем параграфе был указан порядок вычислений при пользовании релаксационным методом; мы видели, что этот метод не представляет собой итерационного процесса в обычном смысле слова, поскольку последовательность вычислений не является вполне определенной. Однако именно гибкость релаксационного метода и составляет его основное преимущество; расчетчик может без всяких затруднений изменять порядок выкладок с тем, чтобы наиболее быстро получить конечный результат, т. е. устранить невязки решения. Рассмотрим некоторые приемы, сокращающие процесс релаксации и ускоряющие исклечение невязок.

Один из таких приемов состоит в *групповой* релаксации вдоль линии или на некотором участке. В этапе 7 примера, приведенного в параграфе 6.4, было найдено, что невязки могут быть сведены к минимуму прибавлением числа 40 к значению ψ во всех узлах. Здесь мы имеем одновременное изменение значений функции на одно и то же число для группы точек, расположенных на определенном участке области. Аналогично этому может иметь место одновременное изменение значений функции на одну и ту же величину для группы точек, принадлежащих области и лежащих вдоль некоторой линии.

Выясним, каков эффект одновременного изменения функции на одну и ту же величину в двух соседних точках. Очевидно, мы можем произвести отдельно каждую из этих операций, а затем сложить полученные результаты. В случае, если речь идет об уравнении Лапласа, можно, пользуясь единичными операторами, выписать операторы релаксации вдоль линии в двух, трех, четырех точках, как показано на рис. 6.9, и различные операторы групповой релаксации для участка площади, изображенные на рис. 6.10 и 6.11. Внимательное изучение операторов, приведенных на рис. 6.9, 6.10 и 6.11, дает возможность сформулировать правило, с помощью которого могут быть быстро составлены все подобные операторы. В случае, когда речь идет об операторах групповой релаксации вдоль линии или на участке площади для уравнений Лапласа или Пуассона, это правило заключается в следующем. *Допустим, что одновременно изменились на (+1) значения функции для группы точек, принадлежащих области и лежащих вдоль линии или в пределах некоторого участка площади; тогда невязки во всех точках, непосредственно связанных с тремя внешними точками (как, например, в точках a на рис. 6.9 и 6.10), изменяются на (-3). Невязки в точках, подобных точкам b , с двумя внешними точками, изменяются на (-2). Невязки в точках типа c , связанных с одной внешней точкой, изменяются на (-1). Невязки в точках, подобных точкам d , не связанным непосредственно с внешними точками, не изменяются. Невязки во всех точках типа e , находящихся за пределами области групповой*

релаксации, но непосредственно связанных с одной из точек внутри области, изменяются на $(+1)$. Невязка во внешней точке типа f , непосредственно связанной с двумя внутренними точками, изменяется на $(+2)$.

Преимущества групповой релаксации можно легко выяснить из рассмотрения рис. 6.11. При изменении значений в точках, лежащих

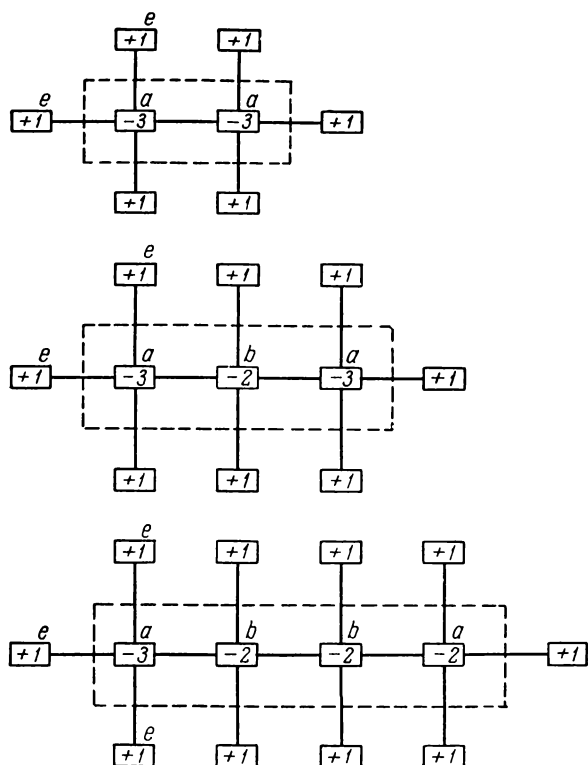


Рис. 6.9.

на границе участка групповой релаксации, невязки во внутренних точках участка не меняются. Удачное применение групповой релаксации может избавить от вычисления ряда последовательных невязок; это позволяет сократить время, требуемое для решения задачи.

Другой полезный прием в методе релаксации заключается в использовании линий симметрии. Как известно, во многих задачах решение обладает симметрией относительно одной или нескольких линий благодаря симметрии области и граничных условий. При решении таких задач нет необходимости определять неизвестную функцию по всей площади. Например, в случае кручения стержня квад-

ратного сечения достаточно найти решение для $1/8$ всей области, как показано на рис. 6.12. При этом нет надобности вводить какую-либо существенно новую процедуру выкладок. Необходимо только помнить об условии сохранения симметрии: *каждый раз, когда меняется невязка в точке, смежной с линией симметрии, одновременно надо изменить ее и для симметрично расположенной точки*. Это значит, что любая операция автоматически сопровождается эквивалентной операцией по другую сторону от линии симметрии. В результате на невязке в точке, лежащей на линии симметрии, отразится изменение невязок в двух симметрично расположенных точках.

Процесс вычислений с использованием линии симметрии хорошо иллюстрируется на примере параграфа 6.4. Нумеруя точки как показано на рис. 6.4, получаем центральную точку, соответствующую 0, точку типа 1, лежащую на стороне, и угловую точку типа 2. Номера помещены в кружках сверху справа от этих точек на рис. 6.12. Процесс релаксации можно разбить на шесть этапов.

Этап 1-й. Полагаем все значения $\psi = 0$; при этом все невязки равны 500.

Этап 2-й. В точке 0 прибавляем 125. В результате невязка в точке 0 обращается в нуль.

Этап 3-й. Для того чтобы добиться уменьшения невязки в точке 1, не меняя невязки в точке 0, осуществим групповую релаксацию, прибавив по 100 в точках 0 и 1. Если мы увеличиваем ψ на 100 в точке 1, то это означает, что в действительности мы прибавляем 100 во *всех* четырех симметрично расположенных точках. Точка 0 является «внутренней», и поэтому невязка в ней не меняется. Точка 1 связана с тремя внешними точками; поэтому невязка в точке 1 меняется на величину $(-3 \cdot 100)$. Точка 2 связана с точкой 1 и точкой, расположенной симметрично относительно точки 1; невязка ее меняется на величину $2 \cdot 100$.

Этап 4-й. Групповая релаксация на $(+350)$ во всех точках.

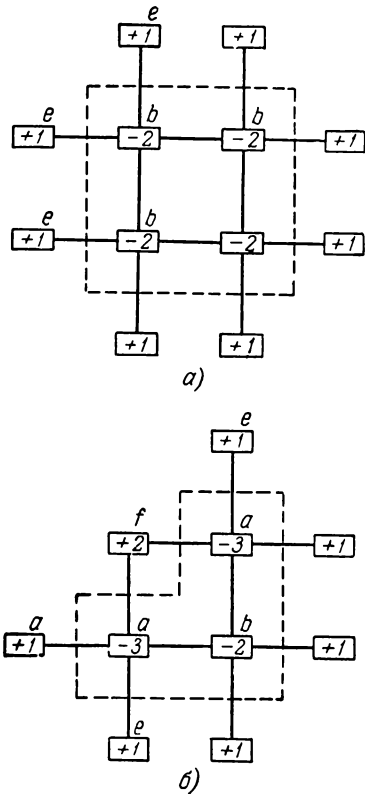


Рис. 6.10.

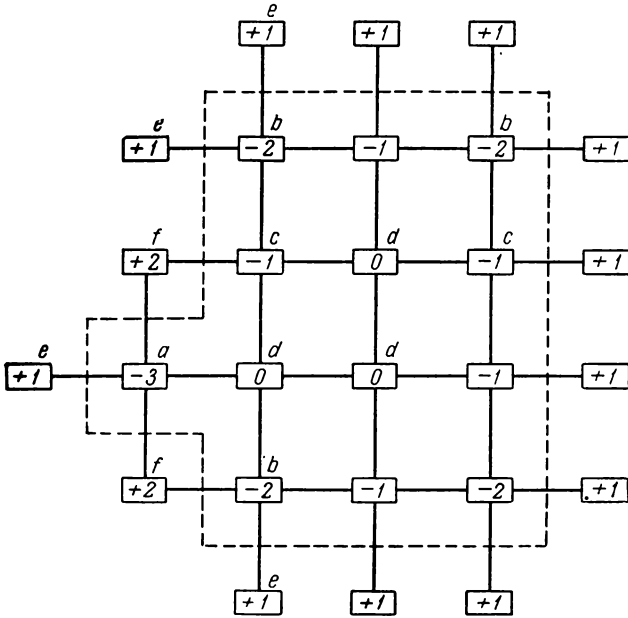
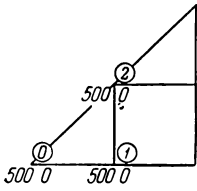
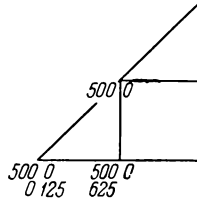


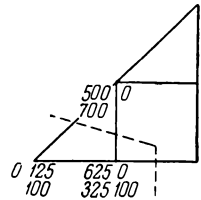
Рис. 6.11.



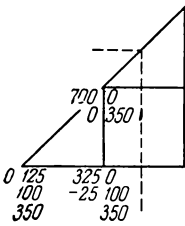
Этап 1



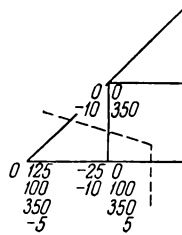
Этап 2



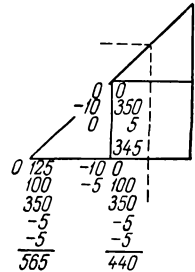
Этап 3



Этап 4



Этап 5



Этап 6

Рис. 6.12.

Этап 5-й. Групповая релаксация на (-5) в точках 0 и 1 .

Этап 6-й. Групповая релаксация на (-5) во всех точках. Алгебраические суммы величин, стоящих внизу справа от точек, представляют окончательные значения ψ во всех этих точках.

Задача. Найти наибольшие касательные напряжения при кручении стержня прямоугольного сечения в случае $b/a = 2$. Принять: 1) $h = a$; 2) $h = a/2$; 3) $h = a/4$.

6.6. Уравнения в конечных разностях высшего порядка. Одним из путей для повышения точности метода конечных разностей является применение более мелкой сетки. Даже при использовании метода релаксации объем вычислений, необходимых для решения задачи, существенно возрастает с увеличением числа узловых точек. Чтобы обойти эту трудность, Фокс *) предложил метод, по которому вместо обычных формул первого порядка (см. § 6.1 и 6.2) используются разностные выражения высшего порядка. Хотя этот подход подвергся критике со стороны Саусвелла **), нам представляется, что такой метод во многих случаях может дать более точное решение при минимальном увеличении объема вычислений.

Формулы для конечных разностей высшего порядка могут быть получены следующим образом. Пусть через некоторую группу точек проведена кривая, уравнение которой аппроксимировано с помощью степенного ряда. Чем выше число известных точек, тем большее число членов степенного ряда может быть найдено; при этом будет лучше аппроксимирована истинная кривая. Если значения функции f известны для $x = x_0, x_1, x_2, \dots$, то формула Ньютона для аппроксимации кривой будет иметь вид:

$$\begin{aligned} f = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ & + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots \end{aligned} \quad (6.25)$$

Если приращения x для всех точек одинаковы, и интервал равен h , то будем иметь $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, и т. д. После подстановки последовательных значений координат в формулу Ньютона могут быть легко найдены коэффициенты a_0, a_1, a_2 и т. д.

Пусть при $x = x_0$ будет $f = f_0$. Подставляя эти значения в (6.25), найдем $a_0 = f_0$; по формуле Ньютона получим:

$$\begin{aligned} f = & f_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \end{aligned}$$

*) L. Fox, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 190, 1947, 31—52.

***) R. V. Southwell, Numerical Methods of Analysis in Engineering, N. Y., 1949, 66—74.

При $x = x_1 = x_0 + h$, $f = f_1$ будем иметь:

$$f_1 = f_0 + a_1(x_0 + h - x_0),$$

откуда

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{\bar{\Delta}f_0}{h};$$

здесь $\bar{\Delta}f_0$ — первая правая разность при $x = x_0$. Это дает

$$f = f_0 + \frac{\bar{\Delta}f_0}{h}(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

Если продолжить вычисления, то формула Ньютона примет вид:

$$f = f_0 + \bar{\Delta}f_0 \left(\frac{x - x_0}{h} \right) + \frac{1}{2!} \bar{\Delta}^2 f_0 \left(\frac{x - x_0}{h} \right) \left(\frac{x - x_1}{h} \right) + \\ + \frac{1}{3!} \bar{\Delta}^3 f_0 \left(\frac{x - x_0}{h} \right) \left(\frac{x - x_1}{h} \right) \left(\frac{x - x_2}{h} \right) + \\ + \frac{1}{4!} \bar{\Delta}^4 f_0 \left(\frac{x - x_0}{h} \right) \left(\frac{x - x_1}{h} \right) \left(\frac{x - x_2}{h} \right) \left(\frac{x - x_3}{h} \right) + \dots$$

Подставляя $(x - x_0)/h = u$, получим

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{[(x - x_0) - (x_1 - x_0)]}{h} = u - 1.$$

Подобным же образом получим

$$(x - x_2)/h = u - 2, \quad (x - x_3)/h = u - 3,$$

и т. д.

Вводя величину u в формулу Ньютона, находим:

$$f = f_0 + u \bar{\Delta}f_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \bar{\Delta}^2 f_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \bar{\Delta}^3 f_0 + \\ + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!} \bar{\Delta}^4 f_0 + \dots \quad (6.26)$$

Судя по формуле (6.26), производные функции f в точке $x = x_0$ можно выразить через конечные разности в точке x_0 с помощью простого дифференцирования. Так, полагая $u = (x - x_0)/h$ и $du/dx = 1/h$, будем иметь:

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_0 = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} = \left(\frac{df}{du} \frac{du}{dx} \right)_{u=0} = \\ = \frac{1}{h} \left(\bar{\Delta}f_0 + \frac{2u-1}{2!} \bar{\Delta}^2 f_0 + \frac{3u^3-6u+2}{3!} \bar{\Delta}^3 f_0 + \right. \\ \left. + \frac{4u^3-18u^2+22u-6}{4!} \bar{\Delta}^4 f_0 + \dots \right)_{u=0} = \\ = \frac{1}{h} \left(\bar{\Delta}f_0 - \frac{1}{2} \bar{\Delta}^2 f_0 + \frac{1}{3} \bar{\Delta}^3 f_0 - \frac{1}{4} \bar{\Delta}^4 f_0 + \dots \right), \quad (6.27)$$

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_0 = \frac{1}{h^2} \left(\bar{\Delta}^2 f_0 - \bar{\Delta}^3 f_0 + \frac{11}{12} \bar{\Delta}^4 f_0 - \dots \right), \quad (6.28)$$

Аналогичным образом легко показать, что производные могут быть выражены через левые разности:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 = \frac{1}{h} \left(\underline{\Delta}f_0 + \frac{1}{2} \underline{\Delta}^2f_0 + \frac{1}{3} \underline{\Delta}^3f_0 + \frac{1}{4} \underline{\Delta}^4f_0 + \dots\right), \quad (6.29)$$

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \left(\underline{\Delta}^2f_0 + \underline{\Delta}^3f_0 + \frac{11}{12} \underline{\Delta}^4f_0 + \dots\right). \quad (6.30)$$

Чтобы выразить производные через центральные разности, надо сначала ввести последние в формулу Ньютона. По определению, имеем

$$\bar{\Delta}f_0 = f_1 - f_0 = \frac{1}{2} (f_1 - f_{-1}) + \frac{1}{2} (f_1 - 2f_0 + f_{-1}) = \Delta f_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 f_0;$$

на втором этапе выкладок вычитается величина $f_{-1}/2$ в первых скобках, а такая же величина прибавляется во вторых скобках. Таким же путем получаем:

$$\bar{\Delta}^2 f_0 = \Delta^2 f_0 + \Delta^3 f_0 + \frac{1}{2} \Delta^4 f_0,$$

$$\bar{\Delta}^3 f_0 = \Delta^3 f_0 + \frac{3}{2} \Delta^4 f_0 + \Delta^5 f_0 + \frac{1}{2} \Delta^6 f_0,$$

$$\bar{\Delta}^4 f_0 = \Delta^4 f_0 + 2\Delta^5 f_0 + 2\Delta^6 f_0 + \Delta^7 f_0 + \frac{1}{2} \Delta^8 f_0.$$

Аналогичные выражения могут быть выписаны для разностей высшего порядка. Подставляя эти соотношения в выражение (6.26) и группируя члены, будем иметь:

$$f = f_0 + u \Delta f_0 + \frac{u^2}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{u(u^2 - 1^2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{u^2(u^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 f_0 + \\ + \frac{u(u^2 - 1^2)(u^2 - 2^2)}{5!} \Delta^5 f_0 + \dots \quad (6.31)$$

Теперь мы имеем возможность выразить различные производные для кривой через центральные разности. Дифференцируя выражение (6.31), находим

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{h} \left(\Delta f_0 + u \Delta^2 f_0 + \frac{3u^2 - 1}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{4u^3 - 2u}{24} \Delta^4 f_0 + \right. \\ \left. + \frac{5u^4 - 15u^2 + 4}{120} \Delta^5 f_0 + \dots \right).$$

При $x = x_0$ будет $u = 0$, и потому производная df/dx при $x = x_0$ равна

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 = \frac{1}{h} \left(\Delta f_0 - \frac{1}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{1}{30} \Delta^5 f_0 - \dots \right). \quad (6.32)$$

Вторая производная будет

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 f_0 - \frac{1}{12} \Delta^4 f_0 + \frac{1}{90} \Delta^6 f_0 - \dots \right). \quad (6.33)$$

Аналогичным образом могут быть найдены производные высших порядков.

Если в формулах (6.27) — (6.30), (6.32) и (6.33) пренебречь разностями высших порядков, то они перейдут в обычные формулы первого приближения. Сравнивая выражения (6.32) с (6.27) и (6.29), приходим к следующим выводам. При сведении формулы (6.32) к обычной формуле первого порядка, приходится пренебречь рядом членов, наибольший из которых равен $\left(-\frac{1}{6}\Delta^3 f_0\right)$. В то же время в формулах (6.27) и (6.29) соответствующие члены равны $\left(-\frac{1}{2}\bar{\Delta}^2 f_0\right)$ и $\left(\frac{1}{2}\underline{\Delta}^2 f_0\right)$. Вообще говоря, величина $\left(-\frac{1}{6}\Delta^3 f_0\right)$ меньше, чем величины $\left(-\frac{1}{2}\bar{\Delta}^2 f_0\right)$ и $\left(\frac{1}{2}\underline{\Delta}^2 f_0\right)$. Следовательно, пользуясь центральными разностями, мы получаем лучшую аппроксимацию, чем при использовании правых или левых разностей. Такое же заключение можно сделать и в отношении аппроксимации производных высших порядков через соответствующие разности того или иного типа.

До сих пор мы полагали, что f является функцией только переменной x . Если же f является функцией двух переменных x и y , то можно легко получить частные производные, заменяя $\bar{\Delta}$, Δ , $\underline{\Delta}$ соответственно на $\bar{\Delta}_x$, Δ_x , $\underline{\Delta}_x$ или $\bar{\Delta}_y$, Δ_y , $\underline{\Delta}_y$. Выпишем выражения для вторых производных через центральные разности:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2} \left(\Delta_x^2 f_0 - \frac{1}{12} \Delta_x^4 f_0 + \frac{1}{90} \Delta_x^6 f_0 - \dots\right), \\ \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2} \left(\Delta_y^2 f_0 - \frac{1}{12} \Delta_y^4 f_0 + \frac{1}{90} \Delta_y^6 f_0 - \dots\right). \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Вернемся теперь к задаче о кручении стержня квадратного сечения. От дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2$$

можно перейти к уравнениям в конечных разностях с помощью формул (5.34). Уравнение в конечных разностях высшего порядка для точки 0 принимает вид:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 + 2h^2 + \Omega = 0, \quad (6.35)$$

где

$$\Omega = -\frac{1}{12} (\Delta_x^4 \psi_0 + \Delta_y^4 \psi_0) + \frac{1}{90} (\Delta_x^6 \psi_0 + \Delta_y^6 \psi_0) - \dots$$

Окончательно решение для ψ можно представить в форме:

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \psi^{(2)}, \quad (6.36)$$

где под $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots$ понимаются решения следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^{(0)} + \psi_2^{(0)} + \psi_3^{(0)} + \psi_4^{(0)} - 4\psi_0^{(0)} + 2h^2 &= 0 \text{ по области } R, \\ \psi^{(0)} &= 0 \text{ на контуре } S, \end{aligned} \right\} (6.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^{(1)} + \psi_2^{(1)} + \psi_3^{(1)} + \psi_4^{(1)} - 4\psi_0^{(1)} + \Omega^{(0)} &= 0, \\ \Omega^{(0)} &= -\frac{1}{12}(\Delta_x^4 \psi_0^{(0)} + \Delta_y^4 \psi_0^{(0)}) + \frac{1}{90}(\Delta_x^6 \psi_0^{(0)} + \Delta_y^6 \psi_0^{(0)}) - \dots \\ \psi^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} (6.38)$$

и т. д. Если сложить (6.37) и (6.38) с другими аналогичными членами ряда, то функция ψ , определяемая по (6.36), будет удовлетворять уравнению (6.35) и граничному условию:

$$\psi = 0 \text{ на контуре } S.$$

Вычисления можно произвести следующим образом. Заметим, что под $\psi^{(0)}$ понимается решение, которое мы уже получили в предыдущем параграфе. Примем, например, шаг равным $h = a/4$. Значения $\psi^{(0)}$ в точках $y/a = 0$ и $x/a = 1; 0,75; 0,5$ и 0 приведены в табл. 6.1. Вторую центральную разность в направлении x для точки $x/a = 0,750$ получаем из формулы:

$$\Delta_x^2 \psi_{0,75} = \psi_{1,0} - 2\psi_{0,75} + \psi_{0,5} = (\psi_{1,0} - \psi_{0,75}) - (\psi_{0,75} - \psi_{0,5}).$$

Но выражения $\psi_{1,0} - \psi_{0,75}$ и $\psi_{0,75} - \psi_{0,5}$ представляют собой центральные разности соответственно в точках $x = 0,875$ и $x = 0,625$.

Таблица 6.1

Вычисление конечных разностей и Ω в различных точках при $y = 0$

x/a	$\psi^{(0)}$	$\Delta_x \psi^{(0)}$	$\Delta_x^2 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^3 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^4 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^5 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^6 \psi^{(0)}$	$\Delta_y^4 \psi^{(0)}$	$\Delta_y^6 \psi^{(0)}$	$\Omega^{(0)}$
1,000	0									
0,875		-2761								
0,750	2761		-992		(-66)		(0)	-52	-44	9
0,625		-1769		-202		(+12)				
0,500	4530		-790		-78		(6)	-76	-26	13
0,375		-979		-124		6				
0,250	5509		-666		-84		10	-82	-6	14
0,125		-313		-40		-4				
0,000	5822		-626		-80		-8	-80	-8	13

Для того чтобы облегчить вычисления, приводим в табл. 6.1 также эти нечетные разности в точках, лежащих между узлами. Разность $\Delta_x^4 \psi^{(0)}$ в точках $x = 0,750$ не может быть вычислена, так как в ее выражение входят величины, относящиеся к внеконтурным точкам.

Таблица 6.2

Вычисление конечных разностей и Ω в различных точках при $y/a = 0,250$

x/a	$\psi^{(0)}$	$\Delta_x \psi^{(0)}$	$\Delta_x^2 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^3 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^4 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^5 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^6 \psi^{(0)}$	$\Delta_y^4 \psi^{(0)}$	$\Delta_y^6 \psi^{(0)}$	$\Omega^{(0)}$
1,000	0									
0,875		-2632								
0,750	2632		-964		(-88)		(1)	-74	-45	13
0,625		-1668		-213		(-1)				
0,500	4300		-751		-87		(1)	-89	-12	15
0,375		-917		-126		-2				
0,250	5217		-625		-85		1	-85	1	14
0,125		-292		-41		-3				
0,000	5509		-584		-82		-6	-84	10	14

Мы можем приближенно принять величину $\Delta_x^4 \psi^{(0)}$ в этой точке равной нулю. Однако бóльшая точность будет достигнута, если экстраполировать величину $\Delta_x^4 \psi^{(0)}$ по значениям для трех других точек. Это можно сделать графически; экстраполированное значение в этой точке равно (-66). В таблице такие экстраполированные значения, а также величины, найденные с их помощью, даны в скобках. Аналогично, в таблицах 6.2, 6.3 и 6.4 даны значения $\psi^{(0)}$ и разностей $\Delta_x^n \psi^{(0)}$ в узловых точках соответственно для $y/a = 0,25; 0,5$ и $0,75$. Вследствие симметрии значения $\Delta_y^n \psi^{(0)}$ в точках $x/a = 0; 0,25; 0,5; 0,75$ и $y/a = 0$ совпадают со значениями $\Delta_x^n \psi^{(0)}$ при $x/a = 0$ и $y/a = 0,25; 0,5; 0,75$, приведенными соответственно в таблицах 6.1, 6.2, 6.3 и 6.4. Находим эти значения из указанных таблиц и заносим их в табл. 6.1.

Таблица 6.3

Вычисление конечных разностей и Ω в точках при $y/a = 0,500$

x/a	$\psi^{(0)}$	$\Delta_x \psi^{(0)}$	$\Delta_x^2 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^3 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^4 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^5 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^6 \psi^{(0)}$	$\Delta_y^4 \psi^{(0)}$	$\Delta_y^6 \psi^{(0)}$	$\Omega^{(0)}$
1,000	0									
0,875		-2219								
0,750	2219		-866		(-163)		(-60)	141	(-32)	24
0,625		-1353		-241		(-49)				
0,500	3572		-625		-114		(-24)	-114	(-24)	18
0,375		-728		-127		-25				
0,250	4300		-498		-89		-12	-87	(1)	15
0,125		-230		-38		-13				
0,000	4530		-460		-76		-26	-78	(6)	13

Таблица 6.4

Вычисление конечных разностей и Ω в точках при $y/a = 0,750$

x/a	$\psi^{(0)}$	$\Delta_x \psi^{(0)}$	$\Delta_x^2 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^3 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^4 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^5 \psi^{(0)}$	$\Delta_x^6 \psi^{(0)}$	$\Delta_y \psi^{(0)}$	$\Delta_y^2 \psi^{(0)}$	$\Omega^{(0)}$
1,000	0									
0,875		-1422								
0,750	1422		-625		(-240)		(-1)	(-240)	(-1)	40
0,625		-797		-241		(-99)				
0,500	2219		-384		-141		(-32)	(-163)	(-60)	24
0,375		-413		-100		-67				
0,250	2632		-284		-74		-45	(-88)	(1)	13
0,125		-129		-26		-22				
0,000	2761		-258		-52		-44	(-66)	(0)	9

Таким образом, легко могут быть найдены величины $\Omega^{(0)}$. Если известны значения $\Omega^{(0)}$, то можно определить величины $\psi^{(1)}$, применяя обычный метод релаксации. На рис. 6.13 отмечены эти величины, вместе с невязками в различных узловых точках. На рис. 6.14 даны значения $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$ в сопоставлении с данными, полученными аналитическим путем; последние записаны сверху справа от точек. Как легко видеть, решение получилось более точным: приближенные значения отклоняются от вычисленных аналитически примерно на 0,6%. Если желательно провести дальнейшее уточнение, то аналогичным образом можно найти $\psi^{(2)}$, $\psi^{(3)}$ и т. д.

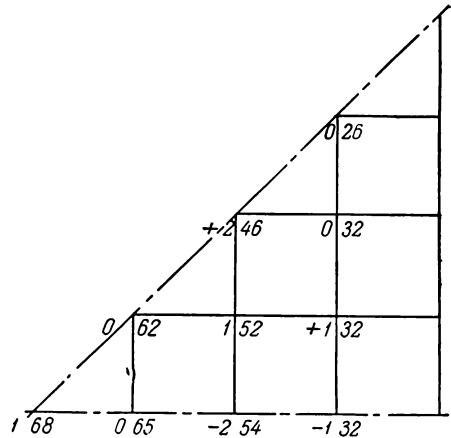


Рис. 6.13.

Определим наибольшие касательные напряжения. Производную $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ можно выразить через левые разности:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{1}{h} \left(\Delta_x \psi + \frac{1}{2} \Delta_x^2 \psi + \frac{1}{3} \Delta_x^3 \psi + \frac{1}{4} \Delta_x^4 \psi + \dots \right).$$

Следовательно, для точки (a, a) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{4}{a} & \left[(0 - 0,2793) + \frac{1}{2} (0 - 2 \cdot 0,2793 + 0,4584) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} (0 - 3 \cdot 0,2793 + 3 \cdot 0,4584 - 0,5574) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (0 - 4 \cdot 0,2793 + 6 \cdot 0,4584 - 4 \cdot 0,5574 + 0,5890) \right] a^2 = -1,352a. \end{aligned}$$

По правилу Симпсона находим

$$J \approx 2,2460a^4.$$

Отсюда

$$\tau_{\max} \approx \frac{0,602\Gamma}{a^3}.$$

Сравнение со значениями, полученными аналитически, показывает, что погрешность в величине $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ составляет 0,15%, в значении J составляет 0,17% и в величине τ_{\max} — лишь 0,33%. Такие результаты

надо считать вполне удовлетворительными.

В параграфе 6.3 было указано, что при использовании первого приближения конечных разностей мы получаем сравнительно большую погрешность в величине τ_{\max} , и что ее следует отнести за счет значительной погрешности в величине $\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Вообще говоря, если

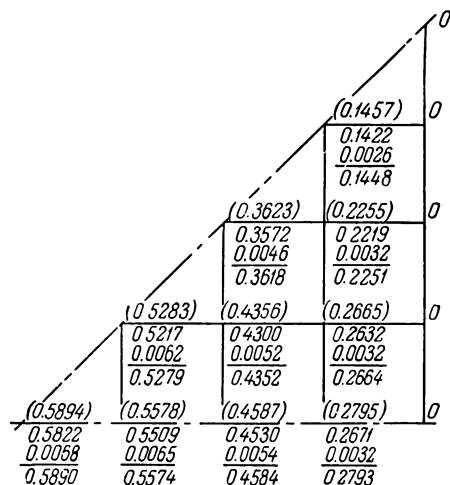


Рис. 6.14.

применять обычные формулы для разностей первого порядка, то при определении функции точность получается большей, чем при нахождении производных функции. В том случае, когда необходимо найти производные, значительно лучшие результаты дает применение

формул для разностей высшего порядка, даже если сама функция найдена с помощью обычных формул с разностями первого порядка. Если принять в примере параграфа 6.3 шаг равным $h = a/4$, то погрешности при определении ψ_0 и J будут равны только 1,2 и 1,4%, в то время как погрешность для $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{10}$ составляет 22,7%.

Не повышая точности в отношении ψ , вычислим $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{10}$ с помощью

разностей высшего порядка:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{10} = \frac{4}{a} & \left[(0 - 0,2761) + \frac{1}{2} (0 - 2 \cdot 0,2761 + 0,4530) + \right. \\ & + \frac{1}{3} (0 - 3 \cdot 0,2761 + 3 \cdot 0,4530 - 0,5509) + \\ & + \frac{1}{4} (0 - 4 \cdot 0,2761 + 6 \cdot 0,4530 - \\ & \left. - 4 \cdot 0,5509 + 0,5822) \right] a^2 = -1,3376a; \end{aligned}$$

ошибка составляет всего 0,91%. Как видим, этот прием позволяет получить более точные результаты.

Задача. Решить задачу о кручении вала прямоугольного сечения при $b/a = 2$, используя конечные разности высшего порядка.

6.7. Метод экстраполяции. Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные в интервале $(x_0 - h) \leq x \leq (x_0 + h)$, то функции $f(x_0 + h)$ и $f(x_0 - h)$ могут быть разложены в ряд Тейлора по степеням h :

$$f(x_0 + h) = f_0 + hf'_0 + \frac{h^2}{2!} f''_0 + \frac{h^3}{3!} f'''_0 + \frac{h^4}{4!} f^{IV}_0 + \dots, \quad (6.39)$$

$$f(x_0 - h) = f_0 - hf'_0 + \frac{h^2}{2!} f''_0 - \frac{h^3}{3!} f'''_0 + \frac{h^4}{4!} f^{IV}_0 - \dots, \quad (6.40)$$

где $f'_0, f''_0, \dots, f^n_0$ — соответственно первая, вторая, ..., n -я производные при $x = x_0$.

Пользуясь выражениями (6.39) и (6.40), находим первые центральные разности для $x = x_0$:

$$\Delta f_0 = \frac{1}{2} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = hf'_0 + \frac{h^3}{3!} f'''_0 + \frac{h^5}{5!} f^{V}_0 + \dots$$

погрешность e_1 при замене первой производной через первое центральное разностное отношение равна:

$$e_1 = f'_0 - \frac{\Delta f_0}{h} = -\frac{h^2}{3!} f'''_0 - \frac{h^4}{5!} f^{V}_0 - \dots$$

Определяем далее по выражениям (6.39) и (6.40) вторую центральную разность при $x = x_0$:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_0 &= f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h) = \\ &= h^2 f''_0 + \frac{h^4}{12} f^{IV}_0 + \frac{h^4}{360} f^{VI}_0 + \dots \end{aligned}$$

При замене второй производной через второе разностное отношение погрешность e_2 будет равна:

$$e_2 = f''_0 - \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} = -\frac{h^2}{12} f^{IV}_0 - \frac{h^4}{360} f^{VI}_0 - \dots$$

Аналогично можно доказать, что ошибка e_n при замене n -й производной через n -е центральное разностное отношение равна:

$$e_n = f_0^n - \frac{\Delta^n f_0}{h^n} = h^2 g_1(x_0) + h^4 g_2(x_0) + h^6 g_3(x_0) + \dots, \quad (6.41)$$

где функции $g_i(x_0)$ зависят только от x_0 и не зависят от h . Судя по уравнению (6.41), погрешность будет зависеть только от четных степеней h ; ряд сходится быстро, если значение h мало. Будем называть подобную величину погрешностью порядка h^2 . Выражение (6.41) было впервые выведено Шеппардом*).

Попытаемся теперь показать, что погрешность при решении задачи, определяемой линейным дифференциальным уравнением и линейными граничными условиями, будет также порядка h^2 .

Доказательство может быть проведено в общей форме. Однако с целью упростить изложение, ограничимся рассмотрением уравнения определенного типа, взяв в качестве примера уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Пусть через f_1 и f_2 обозначены, соответственно, решения дифференциального уравнения в конечных разностях. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0, \quad (6.42)$$

$$\frac{1}{h^2} (\Delta_x^2 f_2 + \Delta_y^2 f_2) = 0. \quad (6.43)$$

Распространяя уравнение (6.41) на случай двух переменных, без труда получим:

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - \frac{\Delta_x^2 f_2}{h^2} = h^2 g_1(x, y) + h^4 g_2(x, y) + \dots$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} - \frac{\Delta_y^2 f_2}{h^2} = h^2 \bar{g}_1(x, y) + h^4 \bar{g}_2(x, y) + \dots$$

или

$$\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{h^2} (\Delta_x^2 f_2 + \Delta_y^2 f_2) = h^2 \varphi_1(x, y) + h^4 \varphi_2(x, y) + \dots$$

где \bar{g}_i , \bar{g}_i и φ_i являются функциями x и y . Вычитая это выражение из (6.42) и замечая, что второй член в левой части равен нулю, согласно (6.43) получим,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \right) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) e = \\ &= -h^2 \varphi_1(x, y) - h^4 \varphi_2(x, y) - \dots \end{aligned}$$

*) W. F. Sheppard, Central Differences, Proc. London Math. Soc., т. 31, 1899.

где $e = f_1 - f_2$ — погрешность решений. Учитывая, что функции φ_i и дифференциальный оператор $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ не зависят от h , заключаем, что выражение для e может быть записано в форме:

$$e = h^2 \bar{\varphi}_1(x, y) + h^4 \bar{\varphi}_2(x, y) + \dots, \quad (6.44)$$

где $\bar{\varphi}_i$ — функции от x и y , не зависящие от h . Как легко показать, подобное доказательство может быть распространено и на линейные дифференциальные уравнения иного типа *).

Пользуясь этим, мы можем с помощью экстраполяции получить новые результаты, исходя из предыдущих данных, относящихся к некоторым значениям h . В параграфе 6.3 были найдены величины:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= 0,5000a^2 \quad \text{при} \quad h = a, \\ \psi_0 &= 0,5625a^2 \quad \text{при} \quad h = \frac{a}{2}, \\ \psi_0 &= 0,5822a^2 \quad \text{при} \quad h = \frac{a}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

Примем, что функция ψ , найденная с помощью дифференциального уравнения, получает в центре квадрата значение $\bar{\psi}_0$. Исходя из выражения (6.44) и пренебрегая членами, содержащими h^6 и высшие степени h , получим

$$\bar{\psi}_0 - \psi_0 = h^2 \bar{\varphi}_1 + h^4 \bar{\varphi}_2.$$

Под $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ понимаются новые постоянные, поскольку в качестве исходной здесь избрана определенная точка. Подставляя значения ψ_0 и h по (6.45), найдем:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0 - 0,5000a^2 &= a^2 \bar{\varphi}_1 + a^4 \bar{\varphi}_2, \\ \bar{\psi}_0 - 0,5625a^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \bar{\varphi}_1 + \left(\frac{a}{2}\right)^4 \bar{\varphi}_2, \\ \bar{\psi}_0 - 0,5822a^2 &= \left(\frac{a}{4}\right)^2 \bar{\varphi}_1 + \left(\frac{a}{4}\right)^4 \bar{\varphi}_2. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получаем $\bar{\psi}_0 = 0,5891a^2$, что отличается от точного значения менее, чем на $0,05\%$. Зная величины ψ_1 и ψ_2 (рис. 6.4), найденные при шаге $h = a/2$ и $h = a/4$, экстраполируем эти значения с помощью формулы

$$\bar{\psi} - \psi = h^2 \bar{\varphi}_1.$$

Выполняя вычисления, будем иметь $\bar{\psi}_1 = 0,4582a^2$ и $\bar{\psi}_2 = 0,3617a^2$, что на $0,11$ и $0,16\%$ меньше, чем соответствующие точные значения. Мы получили несколько большие погрешности, так как сохранили в правой части уравнения (6.44) только член, содержащий h^2 .

*) L. F. Richardson, Phil. Trans. Roy. Soc., London, т. 210, 1911.

Чтобы найти значение $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ в точке $x = a, y = 0$, заменим производные левыми разностями. Желая экстраполировать эти разности, определим отвечающую им погрешность. По уравнению (6.40) имеем:

$$\Delta_x \psi = \psi(x, y) - \psi(x - h, y) = h \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \dots$$

Следовательно, погрешность равна:

$$e = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\Delta_x \psi}{h} = h \alpha_1(x, y) + h^2 \alpha_2(x, y) + \dots \quad (6.46)$$

где α_i — функции от x, y .

Экстраполируя значения ψ , найдем для точки $x = a, y = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{0 - 0,5891a^2}{a} = -0,5891a \quad \text{при } h = a, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{0 - 0,4582a^2}{0,5a} = -0,9164a \quad \text{при } h = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Обозначая через $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}$ точную величину, будем иметь:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + 0,5891a = a \alpha_1, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + 0,9164a = \left(\frac{a}{2}\right) \alpha_1.$$

Из этих уравнений находим:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = -1,2437a;$$

эта величина на 7,8% ниже величины, вычисленной аналитически.

Для того чтобы экстраполировать значение J , определим сначала погрешность, связанную с применением правила Симпсона. Рассмотрим прежде всего применение правила Симпсона в случае одной переменной. По уравнению (6.26) имеем

$$f = f_0 + u \bar{\Delta} f_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \bar{\Delta}^2 f_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \bar{\Delta}^3 f_0 + \dots,$$

где $x = x_0 + hu$ и $dx = h du$. Применим формулу Ньютона для n равноотстоящих интервалов с шагом h . Пределами интегрирования по x будут x_0 и $x_0 + nh$; соответствующими пределами для u будут 0 и n . Находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_0}^{x_0 + nh} f dx = h \int_0^n \left[f_0 + u \bar{\Delta} f_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \bar{\Delta}^2 f_0 + \dots \right] du = \\ &= h \left[n f_0 + \frac{n^2}{2} \bar{\Delta} f_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} \right) \frac{\bar{\Delta}^2 f_0}{2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Полагая $n=2$ и пренебрегая всеми разностями, кроме второй, получаем

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+2h} f dx &= h \left[2f_0 + 2\bar{\Delta}f_0 + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \frac{\bar{\Delta}^2 f_0}{2} \right] = \\ &= h \left[2f_0 + 2f_1 - 2f_0 + \frac{1}{3} (f_2 - 2f_1 + f_0) \right] = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2). \end{aligned}$$

Для следующих интервалов, от x_2 до $x_2 + 2h$, по аналогии имеем:

$$\int_{x_2}^{x_2+2h} f dx = \frac{h}{3} (f_2 + 4f_3 + f_4)$$

и т. д. Складывая подобные выражения для всех интервалов от x_0 до x_n и считая n четным, найдем:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_0}^{x_0+nh} f dx = \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Эта формула известна как правило Симпсона для случая одной переменной. Геометрически это правило можно истолковать так, что мы заменяем график функции через $n/2$ дуг квадратной параболы. Применяя эту формулу, мы должны помнить, что общий интервал интегрирования должен быть разделен на четное число более мелких частей с шагом h .

Разделим интервал интегрирования, например, на шесть частей. Точное значение интеграла будет:

$$\bar{I}_1 = \int_{x-3h}^{x+3h} f(x) dx = [F(x)]_{x_0-3h}^{x_0+3h} = F(x_0+3h) - F(x_0-3h),$$

где $F(x) = \int f(x) dx$. Если разложить функции $F(x_0+3h)$ и $F(x_0-3h)$ в ряд Тейлора, подобно уравнениям (6.39) и (6.40), и учесть соотношения $F'(x) = f(x)$, $F''(x) = f'(x)$, и т. д., то получим:

$$\begin{aligned} F(x_0+3h) &= F_0 + 3hf_0 + \frac{9h^2}{2!} f_0' + \frac{27h^3}{3!} f_0'' + \dots \\ F(x_0-3h) &= F_0 - 3hf_0 + \frac{9h^2}{2!} f_0' - \frac{27h^3}{3!} f_0'' + \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{I}_1 = 6hf_0 + 9h^3 f_0'' + \frac{81}{20} h^5 f_0^{IV} + \frac{243}{280} h^7 f_0^{VI} + \dots$$

Величина этого интеграла по правилу Симпсона равна

$$I_1 = \frac{h}{3} \{f(x_0 - 3h) + f(x_0 + 3h) + 4[f(x_0 - 2h) + f(x_0) + f(x_0 + 2h)] + 2[f(x_0 - h) + f(x_0 + h)]\}.$$

Раскладывая функции $f(x_0 - 3h)$, $f(x_0 + 3h)$ и т. д. в ряд Тейлора, найдем

$$I_1 = 6hf_0 + 9h^3 f_0'' + \frac{49}{12} h^5 f_0^{IV} + \frac{329}{360} h^7 f_0^{VI} + \dots$$

Погрешность, отвечающая правилу Симпсона для одной переменной, оказывается равной

$$e_{I_1} = \bar{I}_1 - I_1 = -\frac{h^5}{30} f_0^{IV} - \frac{29}{630} h^7 f_0^{VI} - \dots = h^5 \beta_1 + h^7 \beta_2 + \dots, \quad (6.48)$$

причем функции β_i не зависят от h .

Чтобы ввести правило Симпсона для случая двух переменных, распространим сначала на этот случай формулу Ньютона. Повторяя вывод уравнения (6.26) и полагая

$$u = \frac{x - x_0}{h}, \quad v = \frac{y - y_0}{h},$$

получим *)

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f_0 + u \bar{\Delta}_x f_0 + v \bar{\Delta}_y f_0 + \frac{1}{2!} [u(u-1) \bar{\Delta}_x^2 f_0 + \\ & + 2uv \bar{\Delta}_{xy} f_0 + v(v-1) \bar{\Delta}_y^2 f_0] + \frac{1}{3!} [u(u-1)(u-2) \bar{\Delta}_x^3 f_0 + \\ & + 3uv(u-1) \bar{\Delta}_{xxy} f_0 + 3uv(v-1) \bar{\Delta}_{xyy} f_0 + \\ & + v(v-1)(v-2) \bar{\Delta}_y^3 f_0] + \dots \end{aligned} \quad (6.49)$$

где $f_0 = f(x_0, y_0)$. Пренебрегая третьими разностями и учитывая соотношения $dx = h du$, $dy = h dv$, имеем:

$$\begin{aligned} I_2 = & \int_{x_0}^{x_0+2h} \int_{y_0}^{y_0+2h} f(x, y) dx dy = \\ & = h^2 \int_0^2 \int_0^2 \left\{ f_0 + u \bar{\Delta}_x f_0 + v \bar{\Delta}_y f_0 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} [u(u-1) \bar{\Delta}_x^2 f_0 + 2uv \bar{\Delta}_{xy} f_0 + v(v-1) \bar{\Delta}_y^2 f_0] \right\} du dv. \end{aligned}$$

*) Этот вывод можно найти в книге Biermann O., *Mathematische Näherungsmethoden*, 138—144; См. также J. B. Scarborough, *Numerical Mathematical Analysis*, 1930, 104—106.

Выполняя интегрирование и раскладывая разности по степеням значений функции в различных точках (рис. 6.15), получим

$$I_2 = \frac{h^2}{9} [16f_{11} + 4(f_{10} + f_{01} + f_{12} + f_{21}) + f_{00} + f_{02} + f_{22} + f_{20}]. \quad (6.50)$$

Формула (6.50) представлена графически на рис. 6.15. Эту формулу можно переписать также в виде

$$I_2 = \frac{h}{3} \left[\frac{h}{3} (f_{00} + 4f_{01} + f_{02}) + 4 \frac{h}{3} (f_{10} + 4f_{11} + f_{12}) + \frac{h}{3} (f_{20} + 4f_{21} + f_{22}) \right],$$

или

$$I_2 = \frac{h}{3} \left[\frac{h}{3} (f_{00} + 4f_{10} + f_{20}) + 4 \frac{h}{3} (f_{01} + 4f_{11} + f_{21}) + \frac{h}{3} (f_{02} + 4f_{12} + f_{22}) \right].$$

Как видим, применение формулы (6.50) эквивалентно использованию правила Симпсона сначала для каждого вертикального столбца рисунка, а затем — для горизонтальной строки, или наоборот.

Определим погрешность формулы (6.50). Сначала найдем интеграл

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 &= \int_{x_0-h}^{x_0+h} \int_{y_0-h}^{y_0+h} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{y_0-h}^{y_0+h} [F(x_0+h, y) - F(x_0-h, y)] dy = \\ &= G(x_0+h, y_0+h) - G(x_0+h, y_0-h) - \\ &\quad - G(x_0-h, y_0+h) + G(x_0-h, y_0-h), \end{aligned} \quad (6.51)$$

где $F(x, y) = \int f(x, y) dx$

и $G(x, y) = \int F(x, y) dy$.

Раскладывая $G(x, y)$ в ряд Тейлора и обозначая $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ и $\frac{\partial^n}{\partial y^n}$ соответственно через ∂_x^n и ∂_y^n , получим:

$$\begin{aligned} G(x_0+h, y_0+h) &= G_0 + h(\partial_x + \partial_y)G_0 + \frac{h^2}{2!}(\partial_x + \partial_y)^2 G_0 + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}(\partial_x + \partial_y)^3 G_0 + \dots \\ G(x_0+h, y_0-h) &= G_0 + h(\partial_x - \partial_y)G_0 + \frac{h^2}{2!}(\partial_x - \partial_y)^2 G_0 + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}(\partial_x - \partial_y)^3 G_0 + \dots \end{aligned}$$

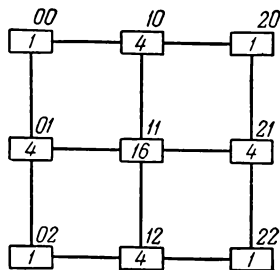


Рис. 6.15.

$$G(x_0 - h, y_0 + h) = G_0 + h(-\partial_x + \partial_y)G_0 + \frac{h^2}{2!}(-\partial_x + \partial_y)^2 G_0 + \\ + \frac{h^3}{3!}(-\partial_x + \partial_y)^3 G_0 +$$

$$G(x_0 - h, y_0 - h) = G_0 + h(-\partial_x - \partial_y)G_0 + \frac{h^2}{2!}(-\partial_x - \partial_y)^2 G_0 + \\ + \frac{h^3}{3!}(-\partial_x - \partial_y)^3 G_0 + \dots$$

где $G_0 = G(x_0, y_0)$.

Подставим эти выражения в уравнение (6.51). Учитывая соотношение

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

найдем

$$\bar{I}_2 = 4h^2 f_0 + \frac{2h^4}{3}(\partial_x^2 + \partial_y^2)f_0 + \frac{h^6}{90}(3\partial_x^4 + 10\partial_x^2\partial_y^2 + 3\partial_y^4)f_0 + \dots$$

По правилу Симпсона (6.50) имеем

$$I_2 = \frac{h^2}{9} \{16f(x_0, y_0) + 4[f(x_0, y_0 + h) + f(x_0 - h, y_0) + f(x_0, y_0 - h) + \\ + f(x_0 + h, y_0)] + f(x_0 - h, y_0 + h) + f(x_0 - h, y_0 - h) + \\ + f(x_0 + h, y_0 - h) + f(x_0 + h, y_0 + h)\}.$$

Раскладывая эти функции в ряд Тейлора, получим

$$I_2 = \frac{h^2}{9} \left[36f_0 + 6h^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)f_0 + h^4 \left(\frac{\partial_x^4}{2} + \partial_x^2\partial_y^2 + \frac{\partial_y^4}{2} \right) f_0 + \dots = \right. \\ \left. = 4h^2 f_0 + \frac{2}{3} h^4 (\partial_x^2 + \partial_y^2) f_0 + h^6 \left(\frac{\partial_x^4}{18} + \frac{\partial_x^2\partial_y^2}{9} + \frac{\partial_y^4}{18} \right) f_0 + \dots \right.$$

Погрешность равна

$$e_{I_2} = \bar{I}_2 - I_2 = \\ = -\frac{h^8}{45}(\partial_x^4 + \partial_y^4)f_0 + h^8 \left(-\frac{\partial_x^6}{945} + \frac{\partial_x^4\partial_y^2}{1980} + \frac{\partial_x^2\partial_y^4}{1980} - \frac{\partial_y^6}{945} \right) f_0 + \dots = \\ = h^8 \bar{\beta}_1 + h^9 \bar{\beta}_2 + \dots \quad (6.52)$$

причем функции $\bar{\beta}_i$ не зависят от h . Используя экстраполированные значения ψ , находим по правилу Симпсона для двух переменных:

$$J = 2,0946a^2 \quad \text{при } h = a,$$

$$J = 2,2316a^2 \quad \text{при } h = \frac{a}{2}.$$

Для определения экстраполированного значения постоянной кручения \bar{J} необходимо решить уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{J} - 2,0946a^2 &= \beta_1 a^6, \\ \bar{J} - 2,2316a^4 &= \beta_1 \left(\frac{a}{2}\right)^6. \end{aligned}$$

Получаем:

$$\bar{J} = 2,2337a^4;$$

это значение на 0,5% ниже точного.

Максимальное касательное напряжение оказывается равным:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1,2437}{2,2337} \frac{T}{a^3} = 0,557 \frac{T}{a^3};$$

это значение на 7,3% ниже величины, полученной аналитически.

В приведенном примере погрешность решения была доведена до значения, вполне удовлетворительного для практических расчетов; при этом объем вычислений увеличился весьма незначительно. В процессе экстраполяции мы отказались от применения густой сетки, чтобы определить более точные значения искомых функций в некоторых точках; при вычислении касательных напряжений шаг h оставался сравнительно большим. Метод экстраполяции особенно удобен в том случае, когда нас интересуют значения функции в определенных точках области.

Задача. Пользуясь методом экстраполяции, определить максимальные касательные напряжения в задаче § 6.5 о кручении стержня прямоугольного сечения.

6.8. Случай криволинейного контура. Изменение шага клетки.

На практике во многих случаях контур является криволинейным. Если делить область на квадратные клетки, то может оказаться, что по соседству с точкой O (рис. 6.16) лежит одна или более точек, для которых расстояния $01, 02, 03, 04$ меньше, чем установленный шаг h . Для таких точек применение обычных операторов неуместно; оказывается необходимым получить специальные операторы.

Пусть через f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 обозначены величины функции соответственно в точках $O, 1, 2, 3, 4$. Разложим $f(x, y)$ в степенной ряд в области, прилегающей к точке $(0, 0)$:

$$f(x, y) = f_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + \dots \quad (6.53)$$

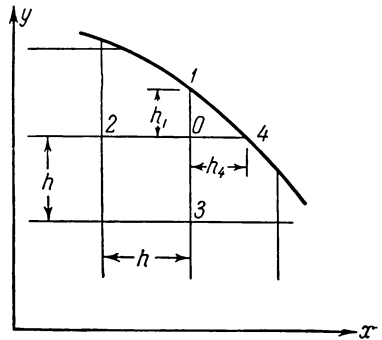


Рис. 6.16.

При $x = 0$, $y = h_1$ будет $f = f_1$; при $x = 0$, $y = -h$ будет $f = f_3$. Поэтому по (6.53) имеем:

$$f_1 = f_0 + a_2 h_1 + a_4 h_1^2, \quad f_3 = f_0 - a_2 h + a_4 h^2.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$a_2 = \frac{h^2(f_1 - f_0) + h_1^2(f_0 - f_3)}{h h_1 (h + h_1)}, \quad a_4 = \frac{h(f_1 - f_0) - h_1(f_0 - f_3)}{h h_1 (h + h_1)}.$$

Аналогичным образом получаем:

$$a_1 = \frac{h^2(f_4 - f_0) + h_4^2(f_0 - f_2)}{h h_4 (h + h_4)}, \quad a_3 = \frac{h(f_4 - f_0) - h_4(f_0 - f_2)}{h h_4 (h + h_4)}.$$

В точке 0 ($x = 0$, $y = 0$) будет:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 &= 2a_3 = 2 \frac{h(f_4 - f_0) - h_4(f_0 - f_2)}{h h_4 (h + h_4)}, \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 &= 2a_4 = 2 \frac{h(f_1 - f_0) - h_1(f_0 - f_3)}{h h_1 (h + h_1)}, \end{aligned}$$

следовательно, выражение для $(\nabla^2 f)_0$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} h^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 &\approx \frac{2}{\alpha_1 (1 + \alpha_1)} f_1 + \frac{2}{1 + \alpha_4} f_2 + \frac{2}{1 + \alpha_1} f_3 + \\ &+ \frac{2}{\alpha_4 (1 + \alpha_4)} f_4 - \left(\frac{2}{\alpha_1} + \frac{2}{\alpha_4} \right) f_0, \end{aligned}$$

где $\alpha_1 = h_1/h$, $\alpha_4 = h_4/h$. При $0 < \alpha_1 < 1$ и $0 < \alpha_4 < 1$ имеем:

$$h^2 (\nabla^2 f)_0 \approx A f_1 + B f_2 + C f_3 + D f_4 - (E + F) f_0. \quad (6.54)$$

Значения A , B , C , D , E , F могут быть табулированы *).

Аналогичным путем могут быть найдены формулы в конечных разностях, отвечающие дифференциальным уравнениям другого типа.

Подобный эквивалент для оператора Лапласа, выраженный в конечных разностях, может быть использован точно таким же образом, как и стандартный оператор $(-4, 1, 1, 1, 1)$. Пример *оператора невязки*, т. е. оператора, с помощью которого может быть определена невязка, дан графически на рис. 6.17; он относится к нерегулярной системе точек с центром в 0 , причем все числа A_0, \dots, F_0 должны быть известны. *Релаксационные операторы*

*) F. S. Shaw, The torsion of solid and hollow prisms in the elastic and plastic range by relaxation methods, Rept. ACA-II, Australian Council for Aeronautics, 1944; см. также F. S. Shaw, Introduction to Relaxation Methods, N. Y., 1953.

оказываются несколько более сложными. Это объясняется тем, что при изменении функции на $(+1)$ в точке O , невязка здесь должна измениться на $[-(E_0 + F_0)]$. В то же время для регулярных сочетаний с центрами в точках 2 и 3 (рис. 6.18) в каждой из точек

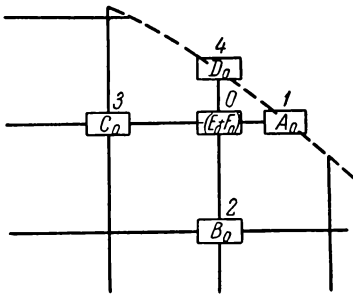


Рис. 6.17.

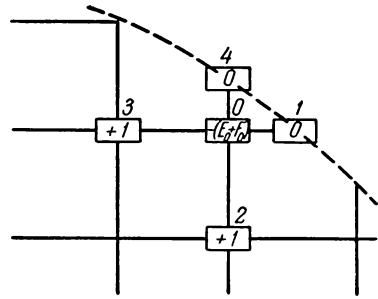


Рис. 6.18.

получаем изменение невязки на $(+1)$. Невязки в точках, лежащих на контуре, будут равны нулю. Соответствующий релаксационный оператор представлен на рис. 6.18. Если мы изменим значение функции в точке 2, то невязка в O получит изменение в B_0 раз большее, чем в точке 2. Релаксационный оператор для точки 2 показан на рис. 6.19.

При наличии подобных «нерегулярных систем» в той или иной частной задаче релаксационный процесс может быть выполнен тем же путем, что и указано выше. Наличие нерегулярных систем приводит к некоторому увеличению объема вычислений, но не вносит какого-либо усложнения метода с принципиальной стороны; имея определенный навык, можно проводить вычисления автоматически.

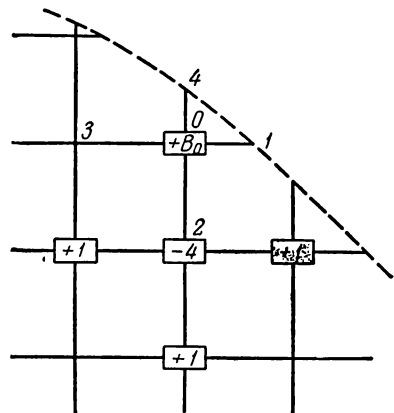


Рис. 6.19.

Выводы, приведенные в предыдущих параграфах, дают возможность получить уточненные формулы для такой области (см. рис. 6.20), где шаг сетки меняется от значения h в одной части до удвоенного значения в другой части. Подобное изменение сетки иногда выгодно вблизи контура, где функция меняется особенно быстро. Если основное дифференциальное уравнение задачи является уравнением

Лапласа, то типовые формулы будут иметь вид:

$$f_4 = \frac{1}{4}(f_1 + f_3 + f_9 + f_5),$$

$$f_{12} = \frac{1}{4}(f_9 + f_{11} + f_{13} + f_{14}),$$

$$f_7 = \frac{1}{6}(2f_2 + f_6 + f_{11} + 2f_8),$$

$$f_9 = \frac{1}{9}(2f_4 + 3f_8 + f_{12} + 3f_{10}),$$

$$f_{15} = \frac{1}{4}(f_7 + f_9 + f_{11} + f_{12}),$$

$$f_8 = \frac{1}{4}(f_3 + f_7 + f_9 + f_{15}) =$$

$$= \frac{1}{16}(4f_3 + 5f_7 + 5f_9 + f_{11} + f_{12}).$$

Путь получения этих формул очевиден.

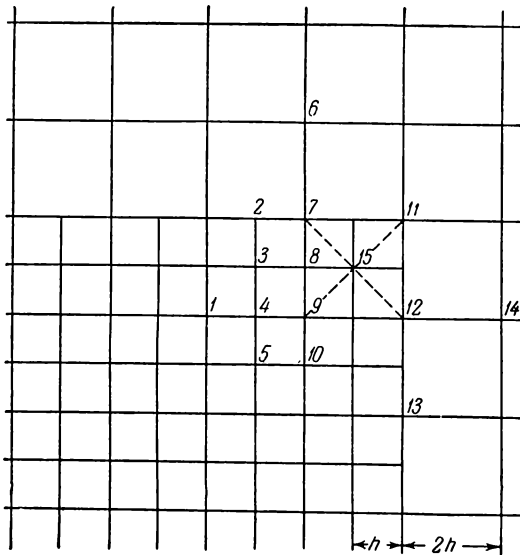


Рис. 6.20.

Задача. Решить задачу о кручении стержня с сечением в виде равно-
стороннего треугольника с помощью обычного релаксационного метода, раз-
деляя область на квадратные клетки. Определить максимальное касательное
напряжение.

6.9. Другие граничные условия. В примере, рассмотренном
в предыдущих параграфах, были приняты наиболее простые гранич-
ные условия: предполагалось, что функция принимает на контуре

постоянное значение, равное нулю. Во многих практически важных задачах граничные условия являются более сложными; при этом усложняется и процесс релаксации. Проиллюстрируем применение релаксационного метода на примере изгиба балки с защемленными концами, при действии равномерно распределенной нагрузки p (рис. 6.21). Основное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{EI}, \quad (6.55)$$

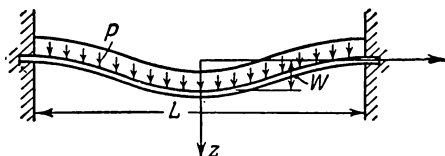


Рис. 6.21.

где w — прогиб, E — модуль Юнга, а I — момент инерции. Граничные условия будут:

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{L}{2}.$$

Принимая $h = L/4$, получим уравнение в конечных разностях в точке O (рис. 6.22):

$$\begin{array}{c} \overset{I'}{\vdots} \quad \overset{2}{\vdots} \quad \overset{1}{\vdots} \quad \overset{0}{\vdots} \quad \overset{1}{\vdots} \quad \overset{2}{\vdots} \quad \overset{I'}{\vdots} \\ \text{---} \end{array} \quad \omega_1 - 4\omega_2 + 6\omega_0 - 4\omega_2 + \omega_1 = \frac{ph^4}{EI}. \quad (6.56)$$

Рис. 6.22.

Здесь учитывается симметричность прогиба. На рисунке 6.23 показан релаксационный оператор. Для того чтобы выразить граничные условия через центральные разности, введем две воображаемые точки I' за пределами балки. Тогда граничные условия примут вид:

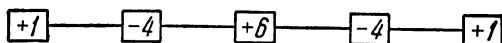


Рис. 6.23.

$$\omega_2 = 0$$

и

$$\omega_{1'} - \omega_1 = 0. \quad (6.57)$$

Процесс релаксации может быть проведен по следующему плану (рис. 6.24).

Этап 1-й. Полагаем $w = 0$ во всех точках. Невязки во всех точках будут иметь вид:

$$Q = \Delta_x^4 w - \frac{ph^4}{EI} = -\frac{ph^4}{EI}.$$

Для упрощения записи умножим все невязки на величину $100EI/ph^4$ и запишем значение (-100) слева и внизу от точек O и I . Прибавим ($+40$) в точке O . Невязка в точке O изменится на величину $6 \cdot 40$ и станет равной ($+140$). Невязка в точке I будет

$$-100 - 4 \cdot 40 = -260.$$

Этап 2-й. Прибавляем 50 в точке 1. Согласно граничным условиям будет $w_1 = w_1$. Поэтому, если численное значение прогиба в точке возрастает на (+50), то такое же приращение должно иметь место и в воображаемой точке 1'. Из условий симметрии надо прибавить (+50) и в точке 1 слева от линии симметрии. Следовательно, невязка в точке 1 изменится, с одной стороны, на величину $6 \cdot 50$, благодаря изменению, относящемуся к данной точке,

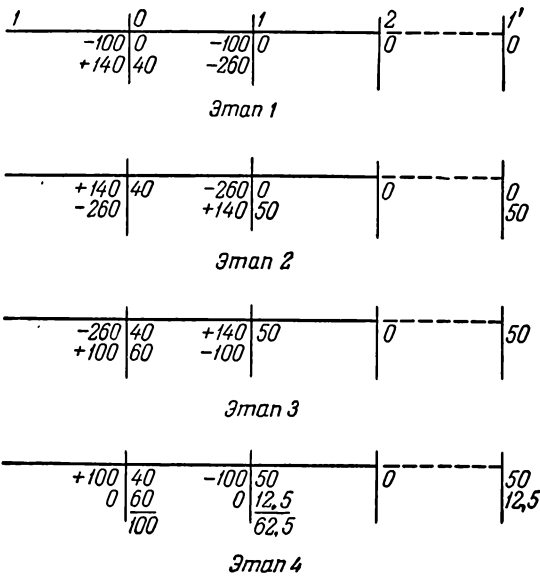


Рис. 6.24.

с другой — на (+50), благодаря изменению в точке 1, и, наконец, на (+50) за счет точки, расположенной симметрично слева от 0. Окончательная невязка равна

$$-260 + 8 \cdot 50 = +140.$$

Невязка в точке 0 меняется на величину $[50 \cdot (-4)]$ по обе стороны от точки и становится равной

$$+140 - 8 \cdot 50 = -260.$$

Этап 3-й. Прибавляем 60 в точке 0. Невязки в точках 0 и 1 будут соответственно (+100) и (-100).

Этап 4-й. Прибавляем 12,5 в точке 1; невязки в точках 0 и 1 обращаются в нуль. Окончательно прогиб в центре оказывается

равным

$$\omega_0 = 100 \frac{ph^4}{100EI} = \frac{ph^4}{EI} = \frac{p}{EI} \left(\frac{L}{4}\right)^4 = \frac{0,00391pL^4}{EI}.$$

Точное значение ω_0 равно $0,002604 pL^4/EI$.

Задача 1. Решить предыдущий пример, приняв $h = L/6$; пользуясь методом экстраполяции, найти прогиб в центре.

Отв.

$$(\omega_0)_{h=L/6} = \frac{0,003183pL^4}{EI},$$

$$(\omega_0)_{\text{экстрал}} = \frac{0,002604pL^4}{EI}.$$

Задача 2. Решить предыдущий пример, пользуясь формулами в конечных разностях высших порядков.

Задача 3. Найти наибольший прогиб балки, если оба конца ее шарнирно оперты.

Указание. Согласно рис. 6.22 граничные условия будут: $w_2 = 0$ и $w_1 + w_1' = 0$, что вытекает из условия

$$M_2 = \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right)_2 = 0.$$

ГЛАВА 7

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

7.1. Принцип потенциальной энергии. Для численного решения задач теории упругости легко использовать, наряду с методом конечных разностей, другую группу методов, также являющихся весьма эффективными. Эти методы основаны на том, что исходные дифференциальные уравнения теории упругости могут быть непосредственно получены при минимизации определенного выражения для потенциальной энергии. Вместо того, чтобы решать дифференциальные уравнения, мы можем, следовательно, прямо разыскивать решение, которое отвечает минимуму энергии; это позволяет избежать математических затруднений, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений. Техника применения этих методов будет подробно описана в данной главе. При изложении подобных методов используется раздел высшей математики, называемый вариационным исчислением; поэтому их иногда называют *вариационными методами*.

Прежде чем обратиться к вариационным методам, напомним принцип возможных работ, сформулированный Иоганном Бернулли в 1717 г. Рассмотрим материальную точку P (рис. 7.1), на которую действуют некоторые силы. Обозначим одну из сил через F . Допустим, что нам неизвестен характер реального движения точки под действием сил; представим себе, что точка совершает произвольное малое перемещение δr . Следует подчерк-

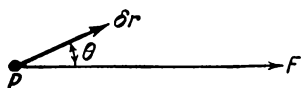


Рис. 7.1.

нуть, что это перемещение, вообще говоря, не совпадает с действительным перемещением точки. Достаточно того, чтобы предполагаемое нами перемещение принципиально могло иметь место. Поэтому его называют *возможным перемещением*; символ δ используется здесь для обозначения возможной бесконечно малой величины. Как легко видеть, работа, произведенная на таком возможном перемещении, равна

$$\delta W = F \delta r \cos \theta = F_r \delta r, \quad (7.1)$$

где F_r — составляющая силы F в направлении δr . Работа, отвечающая возможному перемещению, называется *возможной работой*.

Предположим, что материальная точка P находится в равновесии под действием n сил F_1, F_2, \dots, F_n . Принцип возможных перемещений состоит в следующем.

Если материальная точка находится в равновесии, то полная возможная работа этих n сил на любом возможном перемещении точки равна нулю.

Это утверждение легко доказать. Пусть возможное перемещение равно δr . Из формулы (7.1) следует, что работа силы F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) представляет собой произведение составляющей силы в направлении возможного перемещения на величину перемещения:

$$\delta W_i = F_{ir} \delta r,$$

где F_{ir} обозначает составляющую силы F_i по направлению δr . Общая возможная работа будет иметь вид:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \delta W_i = F_{1r} \delta r + F_{2r} \delta r + \dots + F_{nr} \delta r = \left(\sum_{i=1}^n F_{ir} \right) \delta r.$$

Но равновесие этих статически приложенных сил имеет место при условии, что сумма их проекций на любое направление равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{ir} = 0;$$

отсюда

$$\delta W = 0. \quad (7.2)$$

Таким образом, общая возможная работа, произведенная на любом возможном перемещении, равна нулю.

Упругое тело можно рассматривать как систему материальных точек. Если упругое тело находится в покое под действием поверхностных и объемных сил, то оно представляет собой систему материальных точек, на каждую из которых действуют некоторые уравновешенные силы. Допустим, что произошло возможное перемещение каждой из точек тела. Так как возможная работа сил, действующих на любую материальную точку, обращается в нуль, то и общая возможная работа, произведенная всеми силами, должна быть равна нулю. Единственная особенность рассмотрения точки в упругом теле по сравнению со свободной точкой заключается в том, что, придавая возможное перемещение первой из них, мы должны соблюдать условие сплошности материала, а также условие, по которому перемещения на контуре имеют заданное значение. Условия сплошности материала будут удовлетворены, если возможные перемещения можно выразить с помощью непрерывных функций. Условие, относящееся к заданию перемещений на границе, удобно пояснить на примере. Рассмотрим случай изгиба свободно

опертой балки. Здесь граничные условия требуют, чтобы на обоих концах балки поперечные перемещения равнялись нулю. Так как концы балки не могут перемещаться в поперечном направлении, то возможные перемещения в поперечном направлении следует здесь принять равными нулю.

Обозначим через u , v , w компоненты действительных перемещений в упругом теле под влиянием внешних нагрузок соответственно по направлениям x , y , z , а через δu , δv , δw — компоненты возможных перемещений. Примем, что эти компоненты возможных перемещений являются бесконечно малыми величинами, удовлетворяющими условиям непрерывности упругой деформации, т. е.

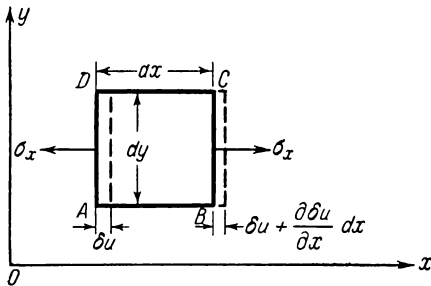


Рис. 7.2.

представляющими собой непрерывные функции x , y , z , а также согласующимися с заданными граничными условиями. Чтобы упростить рассуждения, будем рассматривать элемент упругого тела $dx dy dz$, находящийся под действием одномерной системы усилий (рис. 7.2). Если мы придадим перемещению u приращение δu , то элемент переместится и займет новое положение, показанное на рисунке пунктирными линиями. Полная возможная работа сил взаимодействия между частицами, внешних по отношению к данному элементу, будет равна:

$$\sigma_x \left(\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x \delta u dy dz = \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dy dz. \quad (7.3)$$

Так как упругое тело является непрерывным, то возможное перемещение δu вызовет также изменение деформации. Составляющая деформации в точке A в направлении оси x получит значение

$$\epsilon_x + \delta \epsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \right) - (u + \delta u)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial x};$$

отсюда

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}.$$

Но при $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ имеем

$$\delta \epsilon_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Сравнивая эти результаты, получаем

$$\delta \epsilon_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \delta u}{\partial x}. \quad (7.4)$$

Следовательно, для величины $f(x, y, z)$, являющейся непрерывной функцией x, y, z и имеющей производные, должно выполняться соотношение:

$$\delta df = d \delta f. \quad (7.5)$$

Пользуясь выражением (7.4), перепишем (7.3) в виде

$$\sigma_x \delta \epsilon_x dx dy dz = E \epsilon_x \delta \epsilon_x dx dy dz. \quad (7.6)$$

В параграфе 3.5 мы получили следующее выражение для энергии деформации, накопленной в элементе $dx dy dz$ при одномерном напряженном состоянии:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz = \frac{E}{2} \epsilon_x^2 dx dy dz. \quad (7.7)$$

Сравнивая выражения (7.6) и (7.7), убеждаемся в том, что выражение (7.6) определяет приращение δdU при условии, если для оператора δ приняты такие же правила, как и для дифференциального оператора d в дифференциальном исчислении. Единственное различие состоит в том, что символ δ относится к *возможному* изменению, а символ d — к *действительному* изменению. По аналогии с оператором d , называемым *первым дифференциалом*, оператор δ называется *первой вариацией*.

Пойдем по тому же пути, который был избран в § 3.5 при выводе выражения для потенциальной энергии. Можно показать, что при возможных перемещениях $\delta u, \delta v, \delta w$ полная работа усилий взаимодействия между элементами тела, являющихся внешними по отношению к каждому элементу, равна δU , а работа внутренних усилий равна $(-\delta U)$.

Вычислим, далее, работу объемных сил и сил, приложенных к контуру тела. Пусть составляющие объемных сил вдоль осей x, y, z будут соответственно X, Y, Z , а составляющие поверхностных сил вдоль тех же осей, приходящиеся на единицу площади, будут $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Работа объемных сил равна

$$\int \int \int_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz, \quad (7.8)$$

а работа поверхностных сил

$$\int \int_{A_1} (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) dA, \quad (7.9)$$

где dA — площадь элемента; интегрирование производится по той части граничной поверхности тела A_1 , по которой перемещения не являются заданными. Это объясняется тем, что величины $\delta u, \delta v, \delta w$ равны нулю на той части граничной поверхности, где заданы перемещения, а интеграл (7.9) отличен от нуля только для той части граничной поверхности, на которой заданы поверхностные силы.

Для определенности будем принимать здесь, что на той части поверхности, где заданы силы, перемещения не являются заданными.

Как уже было показано, полная работа всех сил, произведенная на возможном перемещении, обращается в нуль. Поэтому приходим к уравнению:

$$\int_{A_1} \int (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) dA + \\ + \int \int \int (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz - \delta U = 0.$$

Когда система получает возможное перемещение, внешние силы считаются постоянными; следовательно, оператор δ в полученном выражении можно вынести за знаки интегралов. Пропуская такое преобразование для всех членов, получаем:

$$\delta(U - W) = 0, \quad (7.10)$$

где

$$W = \int_{A_1} \int (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dA + \int \int \int (Xu + Yv + Zw) dx dy dz. \quad (7.11)$$

Величина $\Pi = U - W$ называется *потенциальной энергией* системы, поскольку она состоит из потенциальной энергии деформации U и потенциала ($-W$) внешних сил, действующих на тело, причем для ненапряженного состояния (для $u = v = w = 0$) потенциал принят равным нулю.

Уравнение (7.10) можно выразить следующим образом. *В упругой системе, находящейся под действием заданных внешних сил, из различных сочетаний перемещений u , v , w в действительности осуществляются такие перемещения, что для любого возможного отклонения от положения равновесия вариация полной энергии системы оказывается равной нулю.*

Как известно из дифференциального исчисления, равенство

$$df = 0$$

означает, что функция f имеет экстремум (или значение, соответствующее точке перегиба); равенство

$$\delta \Pi = \delta(U - W) = 0$$

показывает, что потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет экстремум (или значение, соответствующее точке перегиба). Можно показать, что для *устойчивого* равновесия при любом возможном перемещении (вариации перемещения) изменение полной потенциальной энергии системы является положительным и, следовательно, в этом случае полная потенциальная энергия системы имеет минимальное значение. Из теоремы однозначности следует, что

в задачах теории упругости, учитывающих малые перемещения и деформации, определяется только одно равновесное состояние. Может быть показано, далее, что это равновесное состояние является устойчивым. Отсюда можно заключить, что для упругого тела, в котором имеют место малые перемещения и деформации, потенциальная энергия минимальна.

Принцип потенциальной энергии можно сформулировать следующим образом. *Из всех перемещений, отвечающих заданным граничным условиям, те перемещения, которые удовлетворяют условиям равновесия, придают потенциальной энергии Π стационарное значение. В случае устойчивого равновесия — потенциальная энергия минимальна.*

7.2. Принцип дополнительной энергии. Вместо того, чтобы рассматривать возможные перемещения от положения равновесия, мы можем варьировать компоненты напряжений. Напомним, что в том случае, когда мы имеем дело с перемещениями, достаточно удовлетворить уравнения равновесия; если же мы обращаемся к компонентам напряжений, то следует, помимо уравнений равновесия, учесть и уравнения совместности. В дальнейшем будет показано, что из всех систем напряжений, удовлетворяющих заданным граничным условиям и условиям равновесия внутри упругого тела, те напряжения, которые удовлетворяют уравнениям совместности, выделяются следующим образом: они придают стационарное значение особому энергетическому выражению, называемому *дополнительной энергией*.

Чтобы упростить вывод, рассмотрим случай плоского напряженного состояния в упругой пластинке. Пусть σ_x , σ_y , τ_{xy} обозначают составляющие истинных напряжений в упругом теле, удовлетворяющие условиям равновесия и совместности, а также заданным граничным условиям. Обозначим через $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\tau_{xy}$ такие малые вариации компонентов напряжений, при которых новые компоненты напряжений $\sigma_x + \delta\sigma_x$, $\sigma_y + \delta\sigma_y$, $\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}$ удовлетворяют уравнениям равновесия, но не удовлетворяют уравнению совместности. Для той части контура, где заданы поверхностные силы, эти новые составляющие напряжений должны отвечать условию, чтобы поверхностные силы не менялись; для другой же части контура, где вместо поверхностных сил заданы перемещения, значения этих сил могут изменяться.

Таким образом, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (\sigma_x + \delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_y + \delta\sigma_y)}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Объемные силы X и Y являются внешними заданными силами и потому не должны меняться. Вычитая из (7.12) уравнения равновесия для неварьированных напряжений, получаем

$$\frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (7.13)$$

Для той части контура A_2 , где поверхностные силы не заданы, их величины будут меняться в соответствии с изменением компонентов напряжений. Обозначим через $\delta \bar{X}$ и $\delta \bar{Y}$ эти малые изменения поверхностных сил на контуре. Тогда для части контура A_2 должны иметь место равенства:

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \delta \sigma_x) l + (\tau_{xy} + \delta \tau_{xy}) m &= \bar{X} + \delta \bar{X}, \\ (\tau_{xy} + \delta \tau_{xy}) l + (\sigma_y + \delta \sigma_y) m &= \bar{Y} + \delta \bar{Y}. \end{aligned}$$

Вычитая отсюда уравнения, содержащие неварьированные величины, имеем

$$l \delta \sigma_x + m \delta \tau_{xy} = \delta \bar{X}, \quad l \delta \tau_{xy} + m \delta \sigma_y = \delta \bar{Y}. \quad (7.14)$$

Для части контура A_1 , на которой заданы внешние силы, должны выполняться условия:

$$l \delta \sigma_x + m \delta \tau_{xy} = 0, \quad l \delta \tau_{xy} + m \delta \sigma_y = 0. \quad (7.15)$$

По формуле (3.51) находим изменение энергии деформации, приходящееся на единицу толщины пластинки и отвечающее вариациям компонентов напряжений:

$$\begin{aligned} \delta U &= U(\sigma_x + \delta \sigma_x, \sigma_y + \delta \sigma_y, \tau_{xy} + \delta \tau_{xy}) - U(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \\ &= \int_R \int \left[\frac{1}{E} (\sigma_x \delta \sigma_x + \sigma_y \delta \sigma_y - \nu \sigma_x \delta \sigma_y - \nu \sigma_y \delta \sigma_x) + \frac{1}{G} \tau_{xy} \delta \tau_{xy} \right] dx dy, \end{aligned}$$

где R — площадь пластинки. Пользуясь законом Гука, находим вариацию δU равной

$$\delta U = \int_R \int (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy}) dx dy.$$

Напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , а вместе с тем и деформации ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} , должны удовлетворять уравнению совместности. Выпишем поэтому соотношения

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

и будем интегрировать частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$

с тем, чтобы определить однозначно функции u и v . Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta\tau_{xy} = \frac{\partial (u \delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u \delta\tau_{xy})}{\partial y} - u \left(\frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \delta\tau_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} \delta\sigma_y = \frac{\partial (v \delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v \delta\sigma_y)}{\partial y} - v \left(\frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} \right).$$

Подставляя эти соотношения в выражение для δU и пользуясь формулой Грина, выведенной в главе 5 [соотношения (5.10) и (5.11)], получаем

$$\delta U = - \int_R \int \left[u \left(\frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} \right) \right] dx dy +$$

$$+ \int_S [u (\delta\sigma_x dy - \delta\tau_{xy} dx) + v (\delta\tau_{xy} dy - \delta\sigma_y dx)].$$

С помощью формул (5.13) находим:

$$\delta\sigma_x dy - \delta\tau_{xy} dx = \left(\delta\sigma_x \frac{dy}{ds} - \delta\tau_{xy} \frac{dx}{ds} \right) ds = (l \delta\sigma_x + m \delta\tau_{xy}) ds$$

и

$$\delta\tau_{xy} dy - \delta\sigma_y dx = (l \delta\tau_{xy} + m \delta\sigma_y) ds.$$

Окончательно будем иметь:

$$\delta U = - \int_R \int \left[u \left(\frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} \right) \right] dx dy +$$

$$+ \int_S [u (l \delta\sigma_x + m \delta\tau_{xy}) + v (l \delta\tau_{xy} + m \delta\sigma_y)] ds,$$

где ds — элементарный отрезок контурной линии. Сопоставляя это уравнение с соотношениями (7.13) и (7.15), получаем

$$\delta U - \int_{S_2} (u \delta\bar{X} + v \delta\bar{Y}) ds = 0,$$

где S_2 — часть контура, для которой поверхностные силы не заданы. Так как для этой части контура S_2 перемещения u и v не варьируются, то можно вынести оператор δ за знак интеграла:

$$\delta \left[U - \int_{S_2} (u \bar{X} + v \bar{Y}) ds \right] = 0.$$

В общем случае трехосного напряженного состояния можно таким же образом прийти к соотношению

$$\delta \Pi^* = \delta (U - W^*) = 0; \quad (7.16)$$

величина $\Pi^* = U - W^*$ называется *дополнительной энергией*, а под W^* понимается выражение

$$W^* = \int_{A_2} (u\bar{X} + v\bar{Y} + w\bar{Z}) dA; \quad (7.17)$$

как и прежде, здесь A_2 — часть контура, для которой поверхностные силы не являются заданными. Уравнение (7.16) выражает *принцип дополнительной энергии*, который может быть сформулирован следующим образом.

По сравнению с различными системами напряжений, удовлетворяющими условиям равновесия внутри тела и на той части контура, где заданы поверхностные силы, истинное напряженное состояние, удовлетворяющее уравнениям совместности, отличается тем, что для него дополнительная энергия Π^ имеет стационарное значение.*

Для тех случаев, когда рассматриваются малые деформации и перемещения, можно, далее, показать, что величина Π^* принимает минимальное значение. Следует отметить, что в нелинейных задачах потенциальная энергия Π определяется по прежней формуле $U - W$; однако, дополнительная энергия Π^* уже не равна $U - W^*$; выражение для Π^* надо выводить отдельно в каждом частном случае*).

7.3. Рассмотрение принципов потенциальной и дополнительной энергии как вариационных принципов. В предыдущих параграфах было установлено, что перемещения в упругом теле, находящемся в равновесии, таковы, что для них потенциальная энергия минимальна; компоненты же напряжений обладают тем свойством, что для них минимальна дополнительная энергия. Покажем теперь, что, пользуясь методами вариационного исчисления, из этих минимальных принципов можно вывести основные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим снова случай плоского напряженного состояния упругой пластинки. Основные дифференциальные уравнения, выраженные через перемещения, можно здесь записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + X &= 0, \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} (7.18)$$

Поставим перед собой целью показать, что эти уравнения можно вывести из условия минимума потенциальной энергии. Наша задача будет состоять, таким образом, в определении функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, для которых энергия $\Pi = U - W$ является минимальной.

*) См., например, Chi Teh Wang, Principle and application of complementary energy method for thin homogeneous and sandwich plates and shells with finite deflections, NACA Techn. Note, 2620, 1952.

Будем полагать, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ отвечают этому требованию; под δu и δv будем понимать произвольные вариации u и v , удовлетворяющие тем же условиям непрерывности, что и величины u и v . Если в выражении для Π величины u и v заменить через $u + \varepsilon \delta u$ и $v + \varepsilon \delta v$, где ε — произвольный малый параметр, то потенциальная энергия станет функцией параметра ε ; согласно принципу потенциальной энергии она должна принимать минимальное значение при $\varepsilon = 0$. Отсюда

$$\left. \frac{d\Pi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{7.19}$$

Пользуясь соотношением

$$\frac{d\Pi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon} - \frac{dW(\varepsilon)}{d\varepsilon},$$

по формуле (3.53) находим:

$$\begin{aligned} \frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_R \int \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial(u + \varepsilon \delta u)}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial(u + \varepsilon \delta v)}{\partial y} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \frac{\partial(u + \varepsilon \delta u)}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \nu \frac{\partial(v + \varepsilon \delta v)}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial(u + \varepsilon \delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(v + \varepsilon \delta v)}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right] \right\} dx dy \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left. \frac{dU}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_R \int \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u) - \left[\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \delta u = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u) - \\ - \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \delta u, \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} \delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y \delta v) - \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \delta v. \end{aligned}$$

В этих выкладках мы пользовались законом Гука. По формуле Грина

$$\int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u) \right] dx dy = \int_S (\sigma_x \delta u dy - \tau_{xy} \delta u dx),$$

где S — дуга контура пластинки. Пользуясь соотношением

$$\begin{aligned} \sigma_x dy - \tau_{xy} dx &= \left(\sigma_x \frac{dy}{ds} - \tau_{xy} \frac{dx}{ds} \right) ds = \\ &= [\sigma_x \cos(\widehat{N, x}) + \tau_{xy} \cos(\widehat{N, y})] ds = \bar{X} ds, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u) \right] dx dy = \int_S \bar{X} \delta u ds.$$

Аналогичным путем находим

$$\int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} \delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y \delta v) \right] dx dy = \int_S \bar{Y} \delta v ds.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= - \int_R \int \left\{ \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \delta u + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \delta v \right\} dx dy + \\ &+ \int_{S_1} (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds. \end{aligned}$$

На той части контура, для которой задано перемещение, линейный интеграл обращается в нуль; поэтому в последнем интеграле можно вместо S подставить S_1 . По формуле (7.11) для W находим, что в случае плоского напряженного состояния

$$\frac{dW(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{S_1} (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds + \int_R \int (X \delta u + Y \delta v) dx dy.$$

Таким образом, условие

$$\frac{d\Pi(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \frac{dU(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} - \frac{dW(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0$$

приводит к уравнению

$$\begin{aligned} - \int_R \int \left\{ \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + X \right] \delta u + \right. \\ \left. + \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + Y \right] \delta v \right\} dx dy = 0, \end{aligned} \quad (7.20)$$

Но вариации δu и δv являются произвольными функциями; поэтому интеграл (7.20) обращается в нуль только при условии, что выполняются уравнения

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + X = 0,$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + Y = 0,$$

совпадающие с основными дифференциальными уравнениями (7.18).

В этом выводе мы использовали приемы вариационного исчисления. Тот же результат можно получить, если рассматривать δ как оператор, подчиняющийся тем же зависимостям, что и оператор d . Это можно показать на другом примере, относящемся к свободно опертой балке постоянного поперечного сечения, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 7.3). Энергия деформации, накопленная в балке, состоит, вообще говоря, из двух частей: потенциальной энергии изгиба и энергии сдвига. Обычно энергией сдвига можно пренебречь по сравнению с энергией изгиба. Поэтому потенциальную энергию деформации балки можно принять равной энергии изгиба:

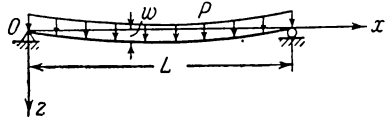


Рис. 7.3.

$$U = \int \int \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dx dy dz.$$

В параграфах 4.2 и 9.1 были получены соотношения

$$\sigma_x = \frac{Mz}{I} \quad \text{и} \quad M = EI \frac{d^2 w}{dx^2},$$

где I — момент инерции поперечного сечения относительно оси y и w — прогиб. Обозначим через A площадь поперечного сечения балки. Используя формулу

$$\int \int z^2 dy dz = I,$$

находим энергию деформации равной

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Для балок постоянного поперечного сечения величина EI не зависит от x , следовательно, энергия изгиба оказывается равной

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \tag{7.21}$$

Потенциальная энергия внешней нагрузки будет

$$-W = -\int_0^L p w dx, \quad (7.22)$$

где p — интенсивность распределенной нагрузки, отнесенная к единице длины балки. Полная потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = U - W = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L p w dx. \quad (7.23)$$

Находим первую вариацию Π :

$$\delta\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L 2 \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx - \int_0^L p \delta w dx.$$

Интегрируем первый член по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^L 2 \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx &= \left[2 \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d \delta w}{dx} \right]_{x=0}^{x=L} - 2 \int_0^L \frac{d^3 w}{dx^3} \frac{d \delta w}{dx} dx = \\ &= \left[2 \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d \delta w}{dx} - 2 \frac{d^3 w}{dx^3} \delta w \right]_{x=0}^{x=L} + 2 \int_0^L \frac{d^4 w}{dx^4} \delta w dx. \end{aligned}$$

Условие $\delta\Pi = 0$ принимает следующий вид:

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^4 w}{dx^4} - p \right) \delta w dx + \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d \delta w}{dx} - EI \frac{d^3 w}{dx^3} \delta w \right]_{x=0}^{x=L} = 0.$$

В силу условий

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = L,$$

а также условия

$$\delta w = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = L,$$

члены в скобках обращаются в нуль для граничных значений $x = 0$ и $x = L$. Для всех остальных сечений балки вариация δw имеет произвольное значение; уравнение

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^4 w}{dx^4} - p \right) \delta w dx = 0$$

будет выполнено только при условии

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - p = 0. \quad (7.24)$$

Уравнение (7.24) представляет собой основное дифференциальное уравнение данной задачи.

Обратимся теперь к принципу дополнительной энергии. В качестве примера рассмотрим задачу о кручении призматических стержней. Выше была введена функция напряжений ψ , связанная с напряжениями τ_{yz} и τ_{zx} зависимостями

$$\tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \tau_{zx} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

остальные компоненты напряжения были приняты равными нулю. Варьирование функции напряжений эквивалентно варьированию компонентов напряжения. Выразим энергию деформации, накопленную в стержне длиной L , через функцию напряжений:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2G} \int_V \int \int (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) dx dy dz = \\ &= \frac{G\theta^2 L}{2} \int_R \int [(\frac{\partial \psi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \psi}{\partial y})^2] dx dy, \end{aligned}$$

где R , как и ранее, обозначает площадь поперечного сечения стержня. Величина W^* обращается в нуль для боковой поверхности стержня, так как здесь поверхностные силы надо считать заданными. Для обоих торцов имеем:

$$W^* = \left[\int_R \int (\tau_{zx} u + \tau_{yz} v) dx dy \right]_{z=0}^{z=L}$$

В главе 5 было найдено, что перемещения u и v равны:

$$u = -\theta zy \quad \text{и} \quad v = \theta zx.$$

При $z=0$ имеем $u=v=0$; при $z=L$ имеем $u=-\theta Ly$, $v=\theta Lx$.

Отсюда:

$$\begin{aligned} W^* &= \theta L \int_R \int (-y\tau_{zx} + x\tau_{yz}) dx dy = \\ &= G\theta^2 L \int_R \int \left(-y \frac{\partial \psi}{\partial y} - x \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx dy = \\ &= 2G\theta^2 L \int_R \int \psi dx dy - G\theta^2 L \oint_S (\psi x dy - \psi y dx); \end{aligned}$$

последнее выражение получаем таким же путем, как и при выводе формулы (5.53) в главе 5. Окончательно дополнительная энергия системы оказывается равной

$$\Pi^* = U - W^* = \frac{G\theta^2 L}{2} \int_R \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 4\psi \right] dx dy - \\ - G\theta^2 L \oint_S (\psi x dy - \psi y dx). \quad (7.25)$$

Вариация дополнительной энергии $\delta \Pi^*$ будет иметь вид:

$$\delta \Pi^* = \frac{G\theta^2 L}{2} \int_R \int \left(2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} - 4\delta \psi \right) dx dy - \\ - G\theta^2 L \oint_S \delta \psi (x dy - y dx).$$

Пользуясь соотношением

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \delta \psi,$$

получаем:

$$\delta \Pi^* = -G\theta^2 L \int_R \int \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 \right) \delta \psi dx dy + \\ + G\theta^2 L \oint_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) dy - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) dx \right] \delta \psi = \\ = -G\theta^2 L \int_R \int \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 \right) \delta \psi dx dy + \\ + G\theta^2 L \oint_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) \cos(\widehat{N}, x) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) \cos(\widehat{N}, y) \right] \delta \psi ds. \quad (7.26)$$

На контуре S поверхностные силы считаются заданными. Условие на контуре, выраженное через функцию ψ , имеет вид:

$$\psi = \text{const.}$$

Отсюда находим

$$\delta \psi = 0 \quad \text{на контуре } S. \quad (7.27)$$

Поэтому линейный интеграл в выражении (7.26) обращается в нуль. Поскольку вариация $\delta \psi$ имеет произвольное значение для области R , то интеграл по поверхности может обратиться в нуль лишь при условии:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 = 0 \quad \text{по области } R. \quad (7.28)$$

В параграфе 5.4 было показано, что постоянное значение ψ на границе S можно принять равным нулю. Считая на контуре $\psi = 0$, найдем дополнительную энергию равной:

$$\Pi^* = \frac{G\theta^2 L}{2} \int_R \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 4\psi \right] dx dy. \quad (7.29)$$

7.4. Метод Рэлея — Ритца. Применяя принципы минимума потенциальной и дополнительной энергии, мы можем подойти с новой точки зрения к решению краевых задач теории упругости. Вместо того, чтобы решать основные дифференциальные уравнения совместно с граничными условиями, что часто связано со значительными математическими трудностями, можно поставить перед собой задачу об определении функций, удовлетворяющих граничным условиям и минимизирующих потенциальную энергию Π или дополнительную энергию Π^* . Например, в случае кручения призматического стержня задача будет заключаться в отыскании функции ψ , минимизирующей дополнительную энергию

$$\Pi^* = \frac{G\theta^2 L}{2} \int_R \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 4\psi \right] dx dy$$

и удовлетворяющей условию $\psi = 0$ на контуре S . Отметим, что, идя этим путем, мы заменяем дифференциальное уравнение условием минимизации. Имеется ряд методов приближенного решения краевых задач, использующих это условие.

Одним из наиболее эффективных вариационных методов является метод Рэлея — Ритца *). Этот метод состоит в следующем. Вначале представляют решение в форме ряда, удовлетворяющего граничным условиям и содержащего неопределенные параметры c_i . Затем принятые функции подставляют в выражения для потенциальной или дополнительной энергии и производят интегрирование. Полученные таким образом выражения будут являться функциями неопределенных параметров c_i , где $i = 1, 2, \dots$. Так как для состояния равновесия потенциальная или дополнительная энергия должны принимать минимальное значение, то эти параметры можно определить из условий минимизации:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = 0, \quad \dots \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_2} = 0, \quad \dots \quad (7.30)$$

Если в решении используются n параметров, то условие (7.30) приводит к n совместным уравнениям, из которых можно определить эти параметры. Подставляя найденные значения параметров в выбран-

*) Rayleigh, On the calculation of Chladni's figures for a square plate, Phil. Mag., т. 22, 1911, 225—229; W. Ritz, Ueber eine neue methode zur Lösung gewissen variations — problems der mathematischen Physik, J. f. Reine u. Angew. Math., т. 135, 1908, 1—61.

ное выражение для функции, получаем приближенное решение рассматриваемой задачи. Можно показать*), что полученное таким путем решение является точным решением краевой задачи, если выбранный ряд включает полную последовательность функций**). Однако в большинстве случаев удается принять во внимание только конечное число параметров, и потому получаемое решение является лишь приближенным.

В качестве примера рассмотрим кручение стержня прямоугольного сечения со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 5.7). Чтобы удовлетворить граничному условию $\psi = 0$ для сторон $x = \pm a$ и $y = \pm b$, можно выбрать полином в виде

$$\psi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(c_1 + c_2x^2 + c_3y^2 + c_4x^2y^2 + \dots), \quad (7.31)$$

где c_1, c_2, \dots — неопределенные параметры. Так как мы знаем, что функция ψ должна быть симметрична относительно осей x и y , в выражение (7.31) включены только члены с четными степенями x и y . В первом приближении ограничимся только одним неопределенным параметром и запишем (7.31) в виде

$$\psi = c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2).$$

После подстановки получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - 4\psi &= \\ &= 4c_1^2[x^2(y^2 - b^2)^2 + (x^2 - a^2)^2y^2] - 4c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2). \end{aligned}$$

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{G\theta^2L}{2} \int_{x=-a}^{x=a} \int_{y=-b}^{y=b} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - 4\psi \right] dx dy = \\ &= \frac{G\theta^2L}{2} \frac{64}{45} [2c_1^2a^3b^3(a^2 + b^2) - 5c_1a^3b^3]. \end{aligned}$$

Условие минимизации

$$\frac{d\Pi^*}{dc_1} = 0$$

дает

$$c_1 = \frac{5}{4(a^2 + b^2)},$$

Таким образом, получаем приближенное решение для ψ :

$$\psi = \frac{5}{4(a^2 + b^2)}(x^2 - a^2)(y^2 - b^2).$$

*) См., например, R. Courant, K. O. Friedrichs, *Methods of mathematical physics*, т. II, N. Y. University, 1943.

**) Последовательность измеримых функций класса C называют полной, если произвольная функция в C может быть аппроксимирована с заданной точностью при помощи линейной комбинации конечного числа этих функций.

Постоянная кручения J оказывается равной:

$$\begin{aligned}
 J &= 2 \int_R \int \psi \, dx \, dy = 2c_1 \int_{x=-a}^{x=a} \int_{y=-b}^{y=b} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \, dx \, dy = \\
 &= \frac{32}{9} a^3 b^3 c_1 = \frac{40}{9} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^3}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} a^4.
 \end{aligned}$$

Максимальное касательное напряжение τ_{\max} имеет место посредине длинной стороны, при $x = \pm a$, $y = 0$, и равно

$$\tau_{\max} = -\frac{T}{J} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{\substack{x=a \\ y=0}} = \frac{T}{J} 2ab^2 c_1 = \frac{9}{16} \left(\frac{a}{b}\right) \frac{T}{a^3}.$$

В случае $b/a = 1$, т. е. для стержня квадратного сечения, приближенное решение дает значение постоянной J , равное $2,222a^4$, в то время как точное значение будет $2,250a^4$. Погрешность составляет $(-1,2)\%$. Наибольшее касательное напряжение равно $0,563t/a^3$; погрешность по сравнению с точным значением $0,600t/a^3$ составляет $(-6,2)\%$.

При $b/a = 10$ приближенное значение J равно $44,0a^4$, причем погрешность по отношению к точному значению $49,92a^4$ составит $(-11,9)\%$. Максимальное касательное напряжение равно по приближенному решению $0,0562T/a^3$; этот результат отличается от точного решения $0,0401T/a^3$ на $(+40,1)\%$.

Введем теперь три неопределенных параметра c_1 , c_2 и c_3 .

Будем иметь

$$\psi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2).$$

После интегрирования получим:

$$\begin{aligned}
 \Pi^* &= \frac{G\theta^2 L}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 - 4\psi \right] dx \, dy = \\
 &= \frac{G\theta^2 L}{2} \frac{64}{4725} a^3 b^3 [210(a^2 + b^2)c_1^2 + a^4(66b^2 + 10a^2)c_2^2 + \\
 &+ b^4(66a^2 + 10b^2)c_3^2 + a^2(84b^2 + 60a^2)c_1 c_2 + b^2(84a^2 + 60b^2)c_1 c_3 + \\
 &+ 12a^2 b^2(a^2 + b^2)c_2 c_3 - 525c_1 - 105a^2 c_1 - 105b^2 c_3].
 \end{aligned}$$

Условия

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_3} = 0$$

дают соответственно:

$$\begin{aligned} 140(a^2 + b^2)c_1 + a^2(28b^2 + 20a^2)c_2 + b^2(28a^2 + 20b^2)c_3 &= 175, \\ (84b^2 + 60a^2)c_1 + a^2(132b^2 + 20a^2)c_2 + 12b^2(a^2 + b^2)c_3 &= 105, \\ (84a^2 + 60b^2)c_1 + 12a^2(a^2 + b^2)c_2 + b^2(132a^2 + 20b^2)c_3 &= 105. \end{aligned}$$

Чтобы упростить решение этих уравнений, подставим сначала в них численное значение отношения r/a . После определения постоянных c_1 , c_2 и c_3 могут быть легко вычислены постоянная кручения и наибольшее касательное напряжение; они равны:

$$\begin{aligned} J &= 2 \iint_R \psi \, dx \, dy = \frac{32}{9} a^3 b^3 \left(c_1 + \frac{a^2}{5} c_2 + \frac{b^2}{5} c_3 \right), \\ \tau_{\max} &= - \left(\frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{\substack{x=a \\ x=0}} = \frac{T}{J} 2ab^2 (c_1 + c_2 a^2). \end{aligned}$$

Для случая $b/a = 1$ находим:

$$c_1 = \frac{1295}{2216a^2}, \quad c_2 = c_3 = \frac{525}{4432a^4};$$

это приводит к значениям J и τ_{\max} соответственно равным $2,246a^4$ и $0,626T/a^3$. Таким образом, здесь ошибка при определении J и τ_{\max} соответственно составляет $(-0,18)\%$ и $(+4,3)\%$. Для стержня прямоугольного сечения при $b/a = 10$ находим постоянные равными:

$$c_1 = \frac{0,008988}{a^2}, \quad c_2 = \frac{0,00002853}{a^4}, \quad c_3 = \frac{0,0002359}{a^4}.$$

Используя эти значения, получаем $J = 48,75a^4$ и $\tau_{\max} = 0,03699T/a^3$. Погрешность при определении J составляет $(-2,3)\%$, а при определении τ_{\max} оказывается равной $(-7,8)\%$.

Для аппроксимации функции напряжений можно вместо полиномов пользоваться тригонометрическим рядом. Например, можно принять

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \cos(2m+1) \frac{\pi x}{2a} \cos(2n+1) \frac{\pi y}{2b}, \quad (7.32)$$

где c_{mn} — неопределенные параметры. Заметим, что принятое выражение для функции ψ удовлетворяет условию на контуре. Если взять только один член и произвести интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{G\theta^2 L}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 4\psi \right] dx \, dy = \\ &= \frac{G\theta^2 L}{2} \left[\pi^2 c_{00}^2 \frac{ab}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - 64c_{00} \frac{ab}{\pi^2} \right]. \end{aligned}$$

Минимизирующее условие

$$\frac{d\Pi^*}{dc_{00}} = 0$$

дает

$$c_{00} = \frac{128}{\pi^4} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Далее находим

$$J = \frac{4096}{\pi^6} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} a^3 b$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{64}{\pi^3} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \frac{T a}{J}.$$

При $b/a = 1$ эти формулы дают

$$J = 2,130a^4 \quad \text{и} \quad \tau_{\max} = \frac{0,484T}{a^3}.$$

Погрешность при определении J и τ_{\max} составляет соответственно $(-5,3)\%$ и $(-19,3)\%$.

Для случая $b/a = 10$ находим

$$J = 4,218a^3 b \quad \text{и} \quad \tau_{\max} = 0,0484 \frac{T}{a^3},$$

причем погрешность решения будет соответственно $(-15,5)\%$ и $+20,7\%$.

Из приведенных примеров видно, что при возрастании числа неопределенных параметров точность решения повышается. Однако, если аппроксимировать функцию посредством двух различных рядов, то может оказаться, что, взяв небольшое число неопределенных параметров в первом ряду, мы получим значительно более высокую точность решения, чем при использовании второго ряда с большим числом параметров. Вариационные методы применяют лишь в тех случаях, когда точное решение неизвестно. Но при этом весьма трудно оценить точность полученного решения. Единственный путь, который позволяет получить ориентировочное представление о точности решения, состоит в последовательном увеличении числа параметров и сравнении окончательных результатов. Если результаты быстро сходятся, то можно сделать предварительное заключение, что аппроксимация является удачной.

В качестве второго примера рассмотрим изгиб шарнирно опертой балки под действием равномерно распределенной нагрузки

(см. рис. 7.3). Представим упругую линию с помощью тригонометрического ряда. Граничные условия здесь будут:

$$w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad x = L.$$

Чтобы удовлетворить этим граничным условиям, можно выбрать ряд в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

причем c_1, c_2, \dots — неопределенные параметры. Подставив это выражение в (7.23) и произведя интегрирование, находим потенциальную энергию равной

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L p w dx = \frac{EI\pi^4}{4L^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 c_n^2 - \frac{2pL}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{c_n}{n}.$$

Минимизируя Π по c_n , получаем

$$\frac{EI\pi^4}{4L^3} 2n^4 c_n - \frac{2pL}{\pi} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{для нечетных индексов } n$$

и

$$\frac{EI\pi^4}{4L^3} 2n^4 c_n = 0 \quad \text{для четных } n.$$

Отсюда $c_n = \frac{4pL^4}{EI\pi^5} \frac{1}{n^5}$ для нечетных n , и $c_n = 0$ для четных n . Таким образом, уравнение упругой линии получает вид:

$$w = \frac{4pL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Так как в данном случае параметры c_n определяются для всех значений n , то рассматриваемый бесконечный ряд дает точное решение краевой задачи. Этот ряд быстро сходится, так что, взяв небольшое число членов, можно получить удовлетворительный результат. Наибольший прогиб имеет место при $x = L/2$ и равен

$$w_{\max} = \frac{4pL^4}{EI\pi^5} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots \right).$$

Взяв только один член ряда, получаем

$$w_{\max} = \frac{pL^4}{76,6EI}.$$

Приближенное решение дает в знаменателе множитель 76,6, в то время как по точному решению этот множитель равен 76,8; таким

образом, погрешность при определении w_{\max} с помощью одного только первого члена ряда составляет лишь 0,26%.

Задача 1. Принять уравнение упругой линии в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Определить c_n , если на балку действует сосредоточенная нагрузка P в сечении $x = a$ вместо равномерно распределенной нагрузки p .

$$\text{Отв. } c_n = \frac{2PL^3}{EI\pi^4 n^4} \sin \frac{n\pi a}{L}.$$

Задача 2. В задаче об изгибе консоли силой P , приложенной на конце, принять уравнение упругой линии в виде $w = ax^2 + bx^3$; это удовлетворяет граничным условиям $w = \frac{dw}{dx}$ при $x = 0$. Определить параметры a и b .

Задача 3. Учитывая в выражении (7.32) три параметра c_{00} , c_{01} , c_{10} , найти постоянную кручения и наибольшее касательное напряжение для случаев кручения стержня квадратного сечения, а также стержня прямоугольного сечения с отношением сторон $b/a = 10$.

7.5. Метод Галеркина. В параграфе 7.3 было показано, что условие минимума потенциальной или дополнительной энергии приводит к соотношениям

$$\int \int \int_V \left[\sum_i (DE)_i \delta f_i \right] dx dy dz = 0;$$

здесь под $(DE)_i$ понимаются левые части основных дифференциальных уравнений, а под δf_i — произвольные вариации различных функций. Например, в случае кручения призматических стержней условие минимума дополнительной энергии можно выразить в виде

$$\int_R (\nabla^2 \psi + 2) \delta \psi dx dy = 0, \quad (7.33)$$

причем функция ψ должна удовлетворять граничным условиям. Примем выражение для ψ в виде ряда

$$\psi_n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i F_i(x, y), \quad (7.34)$$

в котором постоянные c_i являются неопределенными параметрами; функции F_i должны удовлетворять граничным условиям. Тогда будем иметь

$$\delta \psi_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial \psi_n}{\partial c_2} \delta c_2 + \dots = F_1 \delta c_1 + F_2 \delta c_2 + \dots \quad (7.35)$$

Подставляя (7.34) и (7.35) в уравнение (7.33), получаем

$$\int_R \int (\nabla^2 \psi_n + 2) (F_1 \delta c_1 + F_2 \delta c_2 + \dots) dx dy = 0, \quad (7.36)$$

или

$$\int_R \int (\nabla^2 \psi_n + 2) F_1 \delta c_1 dx dy + \int_R \int (\nabla^2 \psi_n + 2) F_2 \delta c_2 dx dy + \dots = 0.$$

Так как вариации $\delta c_1, \delta c_2, \dots$ являются произвольными, то полученное выражение может быть тождественно равно нулю только в том случае, если каждый интеграл в отдельности обращается в нуль. Следовательно, должно быть:

$$\int_R \int (\nabla^2 \psi_n + 2) F_1 \delta c_1 dx dy = 0,$$

$$\int_R \int (\nabla^2 \psi_n + 2) F_2 \delta c_2 dx dy = 0,$$

⋮

Так как $\delta c_1, \delta c_2, \dots$ и т. д. не зависят от x и y , то их можно вынести за знак интеграла, и тогда получаем:

$$\left. \begin{aligned} \int_R \int (\nabla^2 \psi_n + 2) F_1 dx dy &= 0, \\ \int_R \int (\nabla^2 \psi_n + 2) F_2 dx dy &= 0, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Если выбрать n параметров c_i , то получим n совместных уравнений (7.37), из которых можно определить эти параметры. В отличие от метода Рэлея — Ритца, при использовании данного метода нет необходимости формулировать энергетический принцип. Такой способ решения задачи был предложен Б. Г. Галеркиным*) и известен как метод Галеркина.

Метод Галеркина может быть пояснен с другой точки зрения. Рассмотрим двумерную задачу; будем под $Q(x, y)$ понимать левую часть основного дифференциального уравнения. В случае задачи о кручении имеем:

$$Q(x, y) = \nabla^2 \psi + 2.$$

*) Б. Г. Галеркин, Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластин, Вестник инженеров, т. 1, стр. 897—908, 1915. (Этот метод был ранее предложен И. Г. Бубновым в отзыве о работе проф. С. П. Тимошенко «Об устойчивости упругих систем», сб. Ин-та инж. путей сообщения, вып. 31, 1913; см. И. Г. Бубнов, Избранные труды, Судпромгиз, 1956, стр. 135—139. Прим. ред.).

Допустим, что удовлетворяется неравенство

$$\int\int_R Q(x, y) dx dy = K < +\infty$$

и что последовательность функций F_i является полной в том смысле, что любая функция, удовлетворяющая граничным условиям, может при правильном выборе параметров c_i быть аппроксимирована с заданной степенью точности и единственным образом рядом $\sum_i c_i F_i$, тогда из условия

$$\int\int_R Q(x, y) F_i dx dy = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

будет вытекать равенство

$$Q(x, y) = 0 \text{ для области } R.$$

Чтобы доказать это положение, примем, что функция $Q(x, y)$ не является тождественно равной нулю в области R . Тогда в области R должна иметься точка (x_0, y_0) , в которой $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Предположим, что в этой точке $Q(x_0, y_0) > 0$ и что такое же неравенство имеет место внутри небольшого круга C радиуса ε с центром в (x_0, y_0) . Тогда можно определить функцию $V(x, y)$ таким образом, что

$$V(x, y) > 0 \text{ в } C',$$

где C' обозначает малую окружность внутри C , имеющую, например, радиус $\varepsilon/2$;

$$V(x, y) \geq 0 \text{ внутри кольцевой области между } C' \text{ и } C;$$

$$V(x, y) = 0 \text{ за пределами окружности } C.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \int\int_R Q(x, y) V(x, y) dx dy &= \int\int_C Q(x, y) V(x, y) dx dy \geq \\ &\geq \int\int_{C'} Q(x, y) V(x, y) dx dy = \eta > 0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Но последовательность F_i является полной; функция же V удовлетворяет тем же граничным условиям, что и ψ . Следовательно, функцию V можно разложить в ряд $\sum_{i=1}^N d_i F_i$ так, что при достаточно большом N для области R будет удовлетворяться неравенство

$$\left| V(x, y) - \sum_{i=1}^N d_i F_i \right| < \frac{\eta}{2K}$$

независимо от значений x и y . Отсюда

$$\begin{aligned} \left| \iint_R Q \left(V - \sum_{i=1}^N d_i F_i \right) dx dy \right| &\leq \\ &\leq \iint_R |Q| \left| V - \sum_{i=1}^N d_i F_i \right| dx dy \leq \frac{\eta}{2K} \iint |Q| dx dy = \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение

$$\iint_R Q(x, y) F_i dx dy = 0,$$

получим

$$\left| \iint_R Q(x, y) V(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\eta}{2}. \quad (7.39)$$

Сравнивая (7.39) с выражением (7.38), приходим к соотношению $\eta \leq \frac{\eta}{2}$, которое может иметь место только при $\eta = 0$. Но функция $V(x, y)$ не равна нулю; следовательно, величина η может быть равна нулю только при

$$Q(x, y) \equiv 0 \text{ для области } R;$$

это положение завершает доказательство.

Проиллюстрируем применение метода Галеркина, взяв для примера задачу о кручении стержня прямоугольного сечения. Примем, как и в предыдущем параграфе, функцию ψ в виде

$$\psi_1 = c_1 (x^2 - a^2) (y^2 - b^2).$$

Подставляя ψ_1 в дифференциальное уравнение, находим

$$Q_1 = \nabla^2 \psi_1 + 2 = 2c_1 [(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2)] + 2.$$

По методу Галеркина должно быть

$$\begin{aligned} \iint_R Q_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial c_1} dx dy &= \\ &= \iint_R \{2c_1 [(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2)] + 2\} (x^2 - a^2) (y^2 - b^2) dx dy = 0; \end{aligned}$$

отсюда вытекает:

$$c_1 = \frac{5}{4} \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

Такое же значение c_1 было найдено с помощью метода Рэлея — Ритца.

Задача 1. Принимая ψ в виде (7.32), определить c_{00} , c_{01} и c_{10} с помощью метода Галеркина.

Задача 2. Решить задачи из параграфа 7.5 по методу Галеркина.

7.6. Метод Бицено — Коха. Выше было показано, что, приравняв нулю первую вариацию интеграла энергии, мы приходим в случае двумерной задачи к равенству

$$\iint_R \left[\sum_i (DE)_i \delta f_i \right] dx dy = 0. \quad (7.40)$$

При использовании методов Рэлея — Ритца и Галеркина мы аппроксимируем функции с помощью рядов, каждый член которых удовлетворяет граничным условиям; под δf_i понимаем бесконечно малое изменение выражения, принятого для f_i . В вариационном исчислении считается, что величина δf_i может быть выбрана произвольно. Метод Бицено — Коха состоит в том, что выбираются n неопределенных параметров, а затем область R делится на n подобластей R_i , причем величины δf_i принимаются равными

$$\delta f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{для } R_i, \\ 0 & \text{в области } R, \text{ вне } R_i. \end{cases} \quad (7.41)$$

Если в задаче о кручении выбрать $\delta\psi$ по (7.41), то уравнение (7.40) примет вид

$$\iint_{R_i} (\nabla^2 \psi_n + 2) dx dy = 0. \quad (7.42)$$

Отсюда получим n совместных уравнений, соответствующих числу n параметров; следовательно, эти параметры могут быть определены однозначно.

Метод Бицено — Коха впервые был выведен *) при рассмотрении функции погрешности; приведенная выше интерпретация метода была дана Курантом **). Величина

$$Q_n = \nabla^2 \psi_n + 2$$

представляет собой функцию погрешности, связанной с аппроксимацией ψ через ψ_n . Мы можем, очевидно, добиться того, чтобы функция погрешности Q была мала, если потребуем, чтобы она обращалась в нуль в n точках внутри области, рассматриваемой в задаче. Этот прием, известный как *метод коллокации*, сводится к рассмотрению погрешности в n точках; при этом получается n уравнений для определения параметров c_i .

Метод Бицено — Коха можно считать модифицированной формой метода коллокации: в нем ставится требование, чтобы в каждой из n подобластей R_i , составляющих область R , средняя ошибка обращалась в нуль.

Проиллюстрируем оба метода в применении к задаче о кручении стержня квадратного сечения. Выберем, как и ранее, следующее выражение для ψ :

$$\psi_1 = c_1 (x^2 - a^2) (y^2 - a^2); \quad (7.43)$$

тогда найдем

$$Q_1 = \nabla^2 \psi_1 + 2 = 2c_1 [(x^2 - a^2) + (y^2 - a^2)] + 2. \quad (7.44)$$

По методу коллокации принимаем

$$Q(x, y) = 0 \text{ в точке } x = 0, y = 0;$$

*) С. В. Biezeno, J. J. Koch, Ingenieur, т. 38, 25—36, 1923; С. В. Biezeno, Graphical and Numerical Methods for solving stress problems, Proc. First Intern. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924, 3—17.

**) В дискуссии по статье Бицено.

и получаем

$$c_1 = \frac{1}{2a^2}.$$

Приближенные значения постоянной кручения и наибольшего касательного напряжения соответственно равны $1,778a^4$ и $0,562 T/a^3$; погрешности при определении этих величин составляют $(-21)\%$ и $(-6,3)\%$.

В качестве второго приближения примем:

$$\psi_3 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)[c_1 + c_2(x^2 + y^2) + c_3x^2y^2]. \quad (7.45)$$

Чтобы определить три параметра c_1, c_2, c_3 , следует наложить условие, чтобы функция погрешности

$$Q_3 = 2c_1(x^2 + y^2 - 2a^2) + 2c_2[6(2x^2y^2 - a^2x^2 - a^2y^2) + (x^2 - a^2)^2 + (y^2 - a^2)^2] + 2c_3[x^2(x^2 - a^2)(6y^2 - a^2) + y^2(y^2 - a^2)(6x^2 - a^2)] + 2$$

обращалась в нуль в трех точках, например, в точках с координатами $(0, 0)$, $(\frac{a}{2}, 0)$ и $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} 2a^2c_1 - 2a^4c_2 - 1 &= 0, \\ 28a^2c_1 - a^4c_2 - 3a^6c_3 - 16 &= 0, \\ 24a^2c_1 - 12a^4c_2 + 3a^6c_3 - 16 &= 0. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений дает:

$$c_1 = \frac{17}{26a^2}, \quad c_2 = \frac{2}{13a^4}, \quad c_3 = \frac{28}{39a^6}.$$

Постоянная кручения J при принятом выражении (7.45) для ψ будет

$$J = 2 \int \int \psi_3 dx dy = \frac{32}{9} a^6 \left(c_1 + \frac{2}{5} a^2 c_2 + \frac{1}{25} a^4 c_3 \right),$$

а максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{\max} = -\frac{T}{J} \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right)_{\substack{x=a \\ y=0}} = \frac{T}{J} 2a^3 (c_1 + c_2 a^2).$$

Подставив найденные значения c_1, c_2, c_3 , получим приближенные значения J и τ_{\max} соответственно равными $2,646a^4$ и $0,610 T/a^3$; погрешность же составит для первой величины $+17,3\%$, а для второй $+1,7\%$.

Определим, далее, эти параметры с помощью метода Бицено — Коха. Примем функцию ψ снова в форме (7.43); пусть область R_i полностью заполняет область R квадратного сечения. Уравнение (7.42) принимает вид

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a \{2c_1[(x^2 - a^2) + (y^2 - a^2)] + 2\} dx dy = 0;$$

отсюда следует

$$c_1 = \frac{3}{4a^2}, \quad J = 2,667a^4, \quad \tau_{\max} = \frac{0,562T}{a^3};$$

погрешности в значениях J и τ_{\max} соответственно равны $+18,5\%$ и $(-6,3)\%$.

Во втором приближении примем ψ_3 в виде (7.45). Здесь надо разделить поперечное сечение на три области. Из соображений симметрии можно выбрать эти области следующим образом:

$$R_1 \text{ для } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{a}{2},$$

$$R_2 \text{ для } \frac{a}{2} \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \frac{a}{2},$$

$$R_3 \text{ для } \frac{a}{2} \leq x \leq a, \quad \frac{a}{2} \leq y \leq a.$$

Подставляя (7.45) в уравнение (7.42) и интегрируя по площади каждой из этих областей, получаем следующие уравнения:

$$440a^2c_1 - 186a^4c_2 - 17a^6c_3 = 240,$$

$$320a^2c_1 + 564a^4c_2 + 19a^6c_3 = 240,$$

$$200a^2c_1 + 594a^4c_2 + 235a^6c_3 = 240.$$

Решая их, находим:

$$c_1 = \frac{149}{252a^2}, \quad c_2 = \frac{5}{63a^4}, \quad c_3 = \frac{20}{63a^6}.$$

Постоянная кручения оказывается равной $J = 2,260a^4$, что на 0,46% превышает точное значение. Максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = \frac{0,593T}{a^3}$ будет на 1,2% меньше точного значения.

Задача 1. Принимая ψ в форме (7.32), определить параметры c по методу Бицено — Коха.

Задача 2. Решить задачу 2 из § 7.4 с помощью метода Бицено — Коха.

7.7. Теорема взаимности и теоремы Кастильяно. Теорема взаимности и теоремы Кастильяно получили широкое применение в элементарных расчетах конструкций. Покажем, что эти теоремы справедливы и в общем случае упругого тела. Проведем доказательство для случая плоского напряженного состояния плоской пластинки; этот вывод может быть легко распространен на трехмерную задачу.

Рассмотрим два равновесных положения упругой пластинки; пусть первое из них отвечает перемещениям u , v , вызванным объемными силами X , Y и поверхностными силами на контуре \bar{X} , \bar{Y} , а второе — перемещениям u' , v' , полученным при действии объемных сил X' , Y' и поверхностных сил \bar{X}' , \bar{Y}' . Работа, приходящаяся на единицу толщины пластинки, которую произведут силы первого состояния (с обозначениями без штриха) на перемещениях второго состояния (со штрихом), будет равна

$$\int_R \int (Xu' + Yv') dx dy + \int_S (\bar{X}u' + \bar{Y}v') ds.$$

Из уравнений равновесия имеем:

$$\begin{aligned} \int_R \int (Xu' + Yv') dx dy = \\ = - \int_R \int \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) u' + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) v' \right] dx dy. \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u' + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} u' &= \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u') + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u') - \left(\sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} v' + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} v' &= \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} v') + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v') - \left(\tau_{xy} \frac{\partial v'}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

По формуле Грина, аналогично выводу в § 7.3, получаем:

$$\begin{aligned} \int_R \int (Xu' + Yv') dx dy = \\ = \int_R \int \left[\left(\sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \left(\tau_{xy} \frac{\partial v'}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \right] dx dy - \\ - \int_S (\bar{X}u' - \bar{Y}v') ds, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_R \int (Xu' + Yv') dx dy + \int_S (\bar{X}u' + \bar{Y}v') ds = \\ = \int_R \int \left[\left(\sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \left(\tau_{xy} \frac{\partial v'}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Пользуясь законом Гука и выражениями для компонентов деформации, находим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в последний интеграл приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \int_R \int \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v'}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right\} dx dy = \\ = \int_R \int \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \nu \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \nu \frac{\partial u'}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + G \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем:

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \nu \frac{\partial v'}{\partial y} \right), \\ \sigma'_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \nu \frac{\partial u'}{\partial x} \right), \\ \tau'_{xy} &= G \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Применение теоремы Грина дает:

$$\begin{aligned}\int_R \int (Xu' + Yv') dx dy + \int_S (\bar{X}u' + \bar{Y}v') ds &= \\ = \int_R \int (X'u + Y'v) dx dy + \int_S (\bar{X}'u + \bar{Y}'v) ds.\end{aligned}\quad (7.46)$$

Таким образом, мы пришли к *теореме взаимности Бетти и Рэлея*. Если упругое тело подвергается действию двух систем объемных и поверхностных сил, то работа первой системы внешних сил на перемещениях, вызванных второй системой, равна работе второй системы сил на перемещениях, вызванных первой системой.

В соответствии с принципом дополнительной энергии должно быть

$$\delta(U - W^*) = 0,$$

или

$$\delta U = \int_{A_2} (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y} + w \delta \bar{Z}) dA, \quad (7.47)$$

где A_2 — часть контура, на которой не заданы поверхностные силы.

Рассмотрим случай, когда поверхностные силы не являются непрерывно распределенными, а представляют собой сосредоточенные нагрузки. Пусть такими сосредоточенными нагрузками будут силы P_1, P_2, \dots ; перемещения в точках приложения сил по их направлению примем равными d_1, d_2, \dots . Мы можем формулировать задачу таким образом, что перемещения d_1, d_2, \dots заданы на контуре, а нагрузки P_1, P_2, \dots являются независимыми неизвестными величинами. Тогда энергию деформации U можно выразить через нагрузки P_1, P_2, \dots . Изменение энергии деформации, вызванное изменением в величине сил, равно

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial U}{\partial P_2} \delta P_2 + \dots$$

Далее, имеем

$$\int_{A_2} (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y} + w \delta \bar{Z}) dA = d_1 \delta P_1 + d_2 \delta P_2 + \dots$$

Таким образом, уравнение (7.47) принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial U}{\partial P_2} \delta P_2 + \dots = d_1 \delta P_1 + d_2 \delta P_2 + \dots$$

или

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P_1} - d_1 \right) \delta P_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial P_2} - d_2 \right) \delta P_2 + \dots = 0.$$

Так как силы P_1, P_2, \dots статически независимы, то изменения или вариации $\delta P_1, \delta P_2, \dots$ совершенно произвольны; следовательно, все вариации, кроме одной, можно принять равными нулю. Отсюда получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} - d_1 = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} - d_2 = 0, \dots$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = d_1, \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = d_2, \dots$$

Итак, если энергия деформации U упругой системы выражена как функция статически независимых внешних сил P_1, P_2, \dots , то частная производная от энергии по любой из этих сил равна истинному перемещению точки приложения силы в ее направлении. В этом состоит так называемая *первая теорема Кастильяно*.

Если в граничных условиях заданы поверхностные силы, то интеграл по поверхности в правой части уравнения (7.47) обращается в нуль. Уравнение (7.47) принимает вид

$$\delta U = 0.$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом.

Пусть имеется упругая система с заданными силами, действующими на контуре. Если варьировать компоненты напряжений таким образом, что они во всех случаях удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям, то истинными компонентами напряжений будут те, для которых энергия деформации минимальна. Так формулируется *вторая теорема Кастильяно*, или *теорема наименьшей работы*.

ГЛАВА 8

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Комплексные переменные и комплексные функции. Решение многих задач теории упругости может быть значительно упрощено благодаря применению *комплексных переменных*. В комплексную переменную z входят две вещественные переменные x и y :

$$z = x + iy,$$

где $i = \sqrt{-1}$ — так называемая *мнимая единица*. Будем называть x *вещественной* частью комплексной переменной z , а коэффициент y при i — *мнимой* частью. Поскольку i не принадлежит к системе вещественных чисел, следует установить смысл соотношений, включающих равенство, сложение, вычитание, умножение и деление рассматриваемых величин.

Если мы говорим, например, о равенстве двух комплексных чисел, то это означает, что вещественная и мнимая части обоих чисел в отдельности равны между собой. Следовательно, равенство

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

равносильно равенствам

$$x_1 = x_2 \quad \text{и} \quad y_1 = y_2.$$

Подобным же образом при сложении или вычитании двух комплексных чисел надо производить отдельно сложение или вычитание вещественных частей комплексных чисел и отдельно — мнимых частей. Учитывая равенство $i^2 = -1$, можно установить, что действия умножения и деления комплексных чисел производятся по тем же правилам, что и для вещественных чисел. Например,

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy. \quad (8.1)$$

Приведенные правила показывают, что комплексная переменная $z = x + iy$ геометрически может быть представлена точкой $A(x, y)$ в плоскости x, y (рис. 8.1). Ось x в этом случае называют *вещественной осью*, а ось y — *мнимой*. Обращаясь к полярным координатам, будем иметь

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Из рис. 8.1 видим, что число z может быть представлено с помощью вектора OA . Комплексная переменная, отвечающая вектору OA' , будет

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos \theta - i \sin \theta) = re^{-i\theta}.$$

Эта переменная \bar{z} носит название *сопряженной* комплексной переменной z . Имеем:

$$z\bar{z} = r^2, \quad (8.2)$$

причем $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *абсолютной величиной* или *модулем* комплексного числа z , а θ — его *аргументом*.

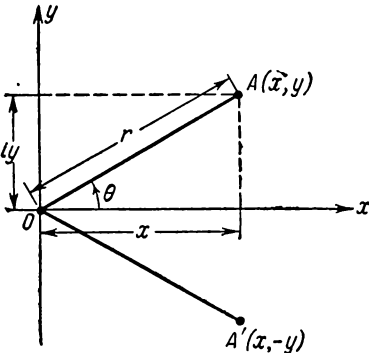


Рис. 8.1.

Функция комплексной переменной z носит название *комплексной функции*. Подобно комплексной переменной, комплексная функция может быть разделена на вещественную и мнимую части:

$$f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

где φ и ψ являются функциями x и y . Например, вещественная и мнимая части комплексной функции $f(z) = z^2$ согласно (8.1) равны

$$\varphi = x^2 - y^2, \quad \psi = 2xy.$$

Функцию ψ называют иногда *сопряженной* с функцией φ , и наоборот. Аналогично случаю комплексных переменных, *функция, сопряженная* с комплексной функцией $f(z)$, будет иметь вид *)

$$\bar{f}(\bar{z}) = \varphi(x, y) - i\psi(x, y),$$

причем символ $\bar{f}(\bar{z})$ будет относиться именно к сопряженной функции. Допустим, что функция $f(z)$ представлена в виде степенного комплексного ряда

$$f(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots$$

где A_0, A_1, A_2, \dots — комплексные постоянные; тогда можно показать справедливость равенства

$$\bar{f}(\bar{z}) = \bar{A}_0 + \bar{A}_1\bar{z} + \bar{A}_2\bar{z}^2 + \dots \quad (8.3)$$

здесь через $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$ и т. д. обозначены числа, сопряженные соответственно с числами A_0, A_1, A_2, \dots и т. д.

*) Часто для сопряженной функции применяется обозначение $\overline{f(z)}$. (Прим. ред.)

Обозначением $\bar{f}(z)$ иногда пользуются для определения функции

$$\bar{f}(z) = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 z + \bar{A}_2 z^2 + \dots; \quad (8.4)$$

это обозначение не надо смешивать с обозначением для сопряженной функции $\bar{f}(\bar{z})$.

Обратимся к правилам дифференцирования комплексной функции. Комплексная функция $f(z)$ называется *аналитической* или *регулярной* в области R , если она имеет единственную производную в каждой точке этой области. Точки, в которых функция $f(z)$ не имеет производных, называются *особыми точками* аналитической функции. Примем, что $f(z)$ является аналитической функцией и найдем частные производные от нее по x и y . Учитывая равенство

$$z = x + iy,$$

имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i$$

и

$$\frac{df}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}, \quad \frac{df}{\partial y} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{df}{dz}.$$

Если производная $\frac{df}{dz}$ должна быть единственной, то будем иметь

$$\frac{df}{\partial y} = i \frac{df}{\partial x}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Разделяя вещественную и мнимую части, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (8.5)$$

Эти уравнения выражают так называемые *условия Коши — Римана* и являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы функция $f(z)$ была аналитической.

Можно показать, что если функция $f(z)$ является аналитической в области R , то в этой области существуют не только первые производные от φ и ψ , но и производные всех высших порядков.

Исключим ψ путем дифференцирования первого из уравнений (8.5) по x , а второго — по y ; произведя сложение, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (8.6)$$

Аналогичным образом, исключая из этих уравнений φ , найдем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (8.7)$$

Из (8.6) и (8.7) видно, что *вещественная и мнимая части любой аналитической функции комплексной переменной удовлетворяют уравнению Лапласа*. Допустим, что необходимо решить дифференциальное уравнение типа уравнения Лапласа; эта задача сводится к нахождению аналитической функции, вещественная или мнимая части которой удовлетворяют граничным условиям. Уравнение Лапласа носит также название *гармонического уравнения*; функции φ и ψ , удовлетворяющие подобному уравнению, называют иногда *гармоническими функциями*.

8.2. Некоторые основные зависимости теории комплексных переменных. В последующем изложении будут использованы некоторые основные зависимости теории комплексных переменных. Ниже дается краткая сводка этих зависимостей.

1. Теорема Коши — Гурса. *Если функция $f(z)$ является однозначной и аналитической внутри замкнутой линии S и на самой линии, то интеграл от этой функции, взятый вдоль линии, равен нулю:*

$$\oint_S f(z) dz = 0. \quad (8.8)$$

Доказательство. В силу равенств $f(z) = \varphi + i\psi$ и $dz = dx + i dy$ имеем:

$$\oint_S f(z) dz = \oint_S [(\varphi dx - \psi dy) + i(\varphi dy + \psi dx)].$$

По теореме Грина находим:

$$\oint_S (\varphi dx - \psi dy) = - \int_R \int_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy,$$

$$\oint_S (\varphi dy + \psi dx) = \int_R \int_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy,$$

где R — область, ограниченная кривой S . Согласно условиям Коши — Римана (8.5) выражения, стоящие под знаком обоих двойных интегралов, обращаются в нуль во всей области R . Отсюда следует

$$\oint_S f(z) dz = 0.$$

Область R называется *односвязной*, если любая простая замкнутая кривая, расположенная внутри нее, содержит только точки

области. Если взять, например, кольцевую область, лежащую между двумя концентрическими кругами, то она не будет односвязной. Подобную область называют *многосвязной*. Многосвязную область можно представить как односвязную, если ввести линии, соединяющие внутренние контуры с внешними, как показано на рис. 8.2. Идя по контуру S в направлении, указанном стрелками на рисунке и принимая, что функция $f(z)$ является аналитической в области R и на контуре, мы получаем из формулы (8.8)

$$\oint_S f(z) dz + \overline{\oint_{S_1} f(z) dz} + \overline{\oint_{S_2} f(z) dz} = 0,$$

или

$$\oint_S f(z) dz = \oint_{S_1} f(z) dz + \oint_{S_2} f(z) dz; \quad (8.9)$$

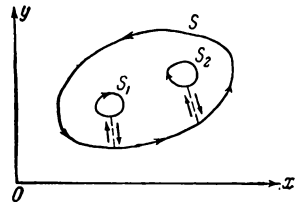


Рис. 8.2.

здесь интегралы с чертой соответствуют обходу контура по часовой стрелке, а остальные интегралы отвечают обходу против часовой стрелки.

Таким образом, интеграл от $f(z)$, взятый по внешнему контуру S , равен сумме интегралов, взятых по внутренним контурам при условии, что интегрирование везде ведется в одном и том же направлении.

2. Интегральная формула Коши. Рассмотрим функцию $f(z)$, однозначную и аналитическую внутри замкнутого контура S и на контуре. Если ζ — любая точка внутри S , то значение функции в этой точке определяется формулой

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_S \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (8.10)$$

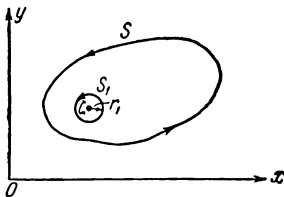


Рис. 8.3.

Доказательство. Проведем вокруг ζ окружность S_1 достаточно малого радиуса

$$|z - \zeta| = r_1,$$

так, чтобы эта окружность находилась внутри контура S (рис. 8.3). По (8.9) имеем

$$\oint_S \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \oint_{S_1} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) \oint_{S_1} \frac{dz}{z - \zeta} + \oint_{S_1} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz. \quad (8.11)$$

Но на контуре S_1 будет $z - \zeta = r_1 e^{i\theta}$ и $dz = i r_1 e^{i\theta} d\theta$, поэтому для любого положительного r_1 должно выполняться равенство

$$\oint_{S_1} \frac{dz}{z - \zeta} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \quad (8.12)$$

Функция $f(z)$ является непрерывной при $z = \zeta$, поскольку понятие регулярности включает свойство непрерывности. Следовательно, если задано некоторое положительное число ε , то имеется такое положительное число δ , что неравенство

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$$

выполняется для всех z , при которых $(z - \zeta) \leq \delta$.

Полагая $r_1 = \delta$, получим

$$\left| \oint_{S_1} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz \right| \leq \oint_{S_1} \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{|z - \zeta|} |dz| < \frac{\varepsilon}{\delta} (2\pi\delta) = 2\pi\varepsilon.$$

Если принять r_1 достаточно малым, то абсолютное значение полученного выше интеграла может стать сколь угодно малым. Так как два других интеграла в (8.11) не зависят от r_1 , то этот интеграл должен также быть независимым от r_1 и равняться нулю. Таким образом, имеем

$$\oint_S \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 2\pi i f(\zeta);$$

теорема доказана.

Формулу для производной $f'(\zeta)$ можно получить, дифференцируя интегральную формулу Коши по ζ под знаком интеграла. Будем иметь

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_S \frac{f(z) dz}{(z - \zeta)^2}$$

и, вообще говоря,

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_S \frac{f(z) dz}{(z - \zeta)^{n+1}}. \quad (8.13)$$

3. Степенные ряды. Если функция $f(z)$ является аналитической во всех точках внутри круга S с центром a , то в любой точке z внутри этого круга

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n + \dots \quad (8.14)$$

Это значит, что бесконечный ряд сходится к $f(z)$. Мы получили разложение функции $f(z)$ в точке $z = a$ в ряд *Тейлора*. При $a = 0$ это разложение преобразуется в ряд *Маклорена*:

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \quad (8.15)$$

Если функция $f(z)$ является аналитической и однозначной на двух concentрических окружностях S_1 и S_2 и внутри кольцевой области между ними, то в каждой точке z внутри этой области эта

функция может быть представлена сходящимся степенным рядом по положительным и отрицательным степеням $(z - a)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z-a)^n}, \quad (8.16)$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_1} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_2} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{-n+1}} \quad n = 1, 2, \dots$$

Ряд (8.16) называется *рядом Лорана*.

4. Теорема вычетов. Как мы видели, функция $f(z)$ всегда может быть представлена с помощью ряда Лорана в окрестности особой точки z_1 . Проинтегрируем теперь ряд Лорана вдоль контура S_1 , включающего особую точку $z = z_1$, но не охватывающего каких-либо других точек.

При положительном n из формулы (8.8) находим

$$\oint_{S_1} (z - z_1)^n dz = 0.$$

При $n = -1$ по (8.12) имеем

$$\oint_{S_1} \frac{dz}{z - z_1} = 2\pi i.$$

Чтобы вычислить интеграл $\oint_{S_1} \frac{dz}{(z - z_1)^n}$ при $n > 1$, построим внутри S_1

малую окружность S'_1 радиуса r с центром в $z = z_1$. Так как функция $1/(z - z_1)^n$ является аналитической внутри области, заключенной между контурами S'_1 и S_1 и вдоль этих контуров, то

$$\oint_{S_1} \frac{dz}{(z - z_1)^n} = \oint_{S'_1} \frac{dz}{(z - z_1)^n} = \oint_{S'_1} \frac{r e^{i\theta} d\theta}{r^n e^{in\theta}} = 0 \quad \text{при } n > 1.$$

Отсюда

$$\oint_{S_1} f(z) dz = \oint_{S_1} \left[\frac{B_1}{z - z_1} + \frac{B_2}{(z - z_1)^2} + \dots + A_1 (z - z_1) + \right. \\ \left. + A_2 (z - z_1)^2 + \dots \right] dz = 2\pi i B_1.$$

Коэффициент B_1 при $1/(z - z_1)$ называется *вычетом* функции в особой точке $z = z_1$ и обозначается через K_1 .

Если область R охватывает n изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , то можно построить n малых окружностей S_j так, чтобы каждая точка была заключена в окружность, и чтобы контур S и все n окружностей не соприкасались. Эти окружности совместно с контуром S образуют многосвязную область, в которой функция $f(z)$ является аналитической. Из формулы (8.9) имеем

$$\oint_S f(z) dz = \oint_{S_1} f(z) dz + \oint_{S_2} f(z) dz + \dots + \oint_{S_n} f(z) dz.$$

В силу равенства

$$\oint_{S_j} f(z) dz = 2\pi i K_j \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

полученная выше формула преобразуется в формулу (8.17). Это доказывает справедливость следующей теоремы. Пусть функция $f(z)$ является аналитической во всех точках внутри замкнутой кривой S и на этой кривой, за исключением нескольких особых точек, лежащих внутри S . Если через K_1, K_2, \dots, K_n обозначены вычеты функции $f(z)$ в этих точках, то будем иметь

$$\oint_S f(z) dz = 2\pi i (K_1 + K_2 + \dots + K_n). \quad (8.17)$$

5. Конформные отображения. Вещественная функция вещественной переменной, например, $y = f(x)$, может быть изображена графически, если нанести значения x и y в качестве прямоугольных координат точек в плоскости x, y . Можно сказать, что функция $f(x)$ отображает каждую точку на оси x в точку плоскости, лежащую на расстоянии y вдоль вертикали выше или ниже исходной точки. В результате отображения всех точек оси x получаем кривую, являющуюся графиком функции. Если переменные являются комплексными, то графическое изображение функций будет более сложным. Если имеется функция $z = f(\zeta)$, где $\zeta = \xi + i\eta$, то каждой точке (ξ, η) в плоскости ζ , на которой определена функция $f(\xi + i\eta)$, будет соответствовать точка (x, y) в плоскости z . Соответствие между точками в двух плоскостях называется *отображением* точек плоскости ζ на точки плоскости z с помощью функции отображения $f(\zeta)$.

Допустим, что некоторая точка перемещается вдоль кривой S , лежащей в плоскости ζ ; тогда соответствующая точка z опишет кривую S' в плоскости z . Кривая S' называется *образом* кривой S . Если функция $f(\zeta)$ является аналитической и $f'(\zeta) \neq 0$, а две кривые S_1 и S_2 лежат в плоскости ζ и пересекаются под углом α , то соответствующие кривые S'_1 и S'_2 в плоскости z также будут пересекаться под углом α . Отображение, произведенное с помощью

аналитической функции $z = f(\zeta)$ при $f'(\zeta) \neq 0$, всегда сохраняет углы неизменными и называется *конформным*. В дальнейшем термином *конформное отображение* мы будем пользоваться для обозначения преобразования с помощью аналитических функций, при условии $f'(\zeta) \neq 0$.

Заметим, что с помощью конформной функции $z = f(\zeta)$, осуществляющей конформное отображение, аналитическая функция комплексной переменной z преобразуется в другую аналитическую функцию комплексной переменной ζ ; вещественная и мнимая части этой новой функции должны удовлетворять уравнению Лапласа. Допустим, однако, что для контурной кривой, охватывающей область R в плоскости z , решение задачи оказывается сложным. Тогда эту кривую можно отобразить на плоскость ζ таким образом, что удовлетворение граничным условиям будет более простым.

8.3. Кручение призматических стержней. Основное дифференциальное уравнение в задаче о кручении призматических стержней имеет форму уравнения Лапласа. Используем комплексные переменные и обозначим через φ функцию депланации; тогда задача сведется к определению аналитической функции $F(z) = \varphi + i\psi$, вещественная часть которой удовлетворяет граничному условию (5.7). Однако это условие применять неудобно. Поэтому рассмотрим граничное условие, которому должна удовлетворять функция ψ .

Вещественная и мнимая части аналитической функции связаны между собой условиями Коши — Римана, которые в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Подставляя эти зависимости в граничное условие (5.7), получаем $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y\right)l + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} + x\right)m = 0$ на контуре S . Вводя значения $l = \frac{dy}{ds}$ и $m = -\frac{dx}{ds}$, после группировки членов получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds},$$

или

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Интегрирование дает

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C \text{ на контуре } S.$$

Так как постоянная C , фигурирующая в полученной формуле, не влияет на значения напряжений, то ее можно не определять. Учитывая соотношения

$$x^2 + y^2 = r^2 = z\bar{z},$$

полученное выше граничное условие, выраженное через комплексную переменную z , приводим к виду

$$\psi = \frac{1}{2} z \bar{z} + C \quad \text{на контуре } S. \quad (8.18)$$

Решение задачи о кручении сводится, следовательно, к определению мнимой части аналитической функции $F(z)$ при условии, чтобы она принимала на контуре S значение $\frac{1}{2} z \bar{z}$.

При этом необходимо конформно отобразить поперечное сечение стержня, лежащее в плоскости z , на единичный круг в плоскости ζ с помощью функции

$$z = f(\zeta). \quad (8.19)$$

Если функцию $F(z)$ выразить через комплексную переменную ζ , то получим

$$F(z) = \varphi + i\psi = F[f(\zeta)] = F_1(\zeta); \quad (8.20)$$

условие на контуре (8.18) принимает вид

$$\psi = \frac{1}{2} f(\zeta) \bar{f}(\bar{\zeta}) \quad \text{на контуре } S_1,$$

где через S_1 обозначен единичный круг $|\zeta| = 1$. Из определения сопряженных функций имеем

$$\bar{F}_1(\bar{\zeta}) = \varphi - i\psi;$$

отсюда

$$2i\psi = F_1(\zeta) - \bar{F}_1(\bar{\zeta}).$$

Приведенное выше граничное условие преобразуется к виду:

$$F_1(\zeta) - \bar{F}_1(\bar{\zeta}) = if(\zeta)\bar{f}(\bar{\zeta}) + C' \quad \text{на контуре } S_1. \quad (8.21)$$

Будем считать, что функция отображения $f(\zeta)$ задана. На единичном круге она обращается в функцию одной только переменной θ и может быть разложена в комплексный ряд Фурье:

$$f(t) = f(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}; \quad (8.22)$$

коэффициенты ряда определяются по формуле

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-in\theta} d\theta. \quad (8.23)$$

В приведенных формулах через $t = e^{i\theta}$ обозначены точки единичного круга.

Так как функция $F_1(\zeta)$ является аналитической внутри круга S_1 , то ее можно разложить в степенной ряд

$$F_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n. \quad (8.24)$$

На единичном круге имеем:

$$F_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{in\theta} \text{ и } \bar{F}_1(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n e^{-in\theta},$$

где \bar{B}_n — величины, сопряженные с B_n . Подставляя эти ряды в уравнение (8.21), находим

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} B_n e^{in\theta} - \sum_0^{\infty} \bar{B}_n e^{-in\theta} &= i \left(\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \bar{A}_n e^{-in\theta} \right) + C' = \\ &= i \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta} + C', \end{aligned}$$

где

$$C_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{n+m} \bar{A}_m, \quad C_{-n} = \bar{C}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Так как постоянные члены в выражении для $F_1(\zeta)$ не играют роли в задаче о кручении, то можно оставить их не определенными. Приравнивая попарно коэффициенты при $e^{in\theta}$ в обеих частях уравнения для всех n , кроме $n=0$, находим

$$B_n = iC_n, \quad \bar{B}_n = -i\bar{C}_n$$

и

$$F_1(\zeta) = i \sum_{n=1}^{\infty} C_n \zeta^n + \text{const.} \quad (8.25)$$

Разделение вещественной и мнимой частей в формуле (8.25) сразу отделяет функцию деформации φ и сопряженную с ней функцию ψ .

Чтобы выразить J через $F_1(\zeta)$ и $f(\zeta)$, надо поступить следующим образом. Из формулы (5.15) имеем:

$$\begin{aligned} J &= \iint_R (x^2 + y^2) dx dy + \iint_R \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) + \frac{\partial}{\partial x} (x y^2) \right] dx dy + \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial y} (x \varphi) - \frac{\partial}{\partial x} (y \varphi) \right] dx dy = \\ &= - \oint_S xy (x dx - y dy) - \oint_S \varphi (x dx + y dy); \end{aligned}$$

последнее преобразование проведено с помощью формулы Грина. Имея

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

находим

$$\begin{aligned} \oint_S xy(x dx - y dy) &= \frac{1}{8i} \oint_S (z^2 - \bar{z}^2)(z dz + \bar{z} d\bar{z}) = \\ &= \frac{1}{8i} \oint_S (z^3 dz + z^2 \bar{z} d\bar{z} - \bar{z}^2 z dz - \bar{z}^3 d\bar{z}). \end{aligned}$$

Но по теореме Коши — Гурса

$$\oint_S z^3 dz = 0, \quad \oint_S \bar{z}^3 d\bar{z} = 0.$$

Интегрируя другие члены подынтегрального выражения по частям и учитывая, что функция $(z\bar{z})^2$ является однозначной, находим

$$\oint_S z^2 \bar{z} d\bar{z} = \oint_S z^2 d\left(\frac{\bar{z}^2}{2}\right) = - \oint_S \bar{z}^2 z dz.$$

Отсюда

$$J = \frac{1}{4i} \oint_S \bar{z}^2 z dz - \oint_S \varphi d\left(\frac{\bar{z}^2}{2}\right).$$

Используя соотношение

$$\varphi = \frac{1}{2} [F_1(\zeta) + \bar{F}_1(\bar{\zeta})],$$

перепишем приведенную выше формулу в виде

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{4i} \oint_S [\bar{f}(\bar{\zeta})]^2 f(\zeta) \frac{df(\zeta)}{d\zeta} d\zeta - \frac{1}{4} \oint_{S_1} [F_1(\zeta) + \bar{F}_1(\bar{\zeta})][f(\zeta) d\bar{f}(\bar{\zeta}) + \\ + \bar{f}(\bar{\zeta}) df(\zeta)]. \quad (8.26) \end{aligned}$$

Из формул (5.5) и (5.16) получаем

$$\tau_{zx} - i\tau_{yz} = \frac{T}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y - ix \right) = \frac{T}{J} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i(x - iy) \right].$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{dF_1(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{F_1'(\zeta)}{f'(\zeta)},$$

где $F_1'(\zeta)$ обозначает $\frac{dF_1(\zeta)}{d\zeta}$, а $f'(\zeta)$ обозначает $\frac{dz}{d\zeta}$ или $\frac{df(\zeta)}{d\zeta}$. Это дает

$$\tau_{zx} - i\tau_{yz} = \frac{T}{J} \left[\frac{F_1'(\zeta)}{f'(\zeta)} - i\bar{f}(\bar{\zeta}) \right]. \quad (8.27)$$

Таким образом, полное решение задачи о кручении осуществимо, если область, ограниченная контуром поперечного сечения стержня, может быть конформно отображена на единичный круг.

Рассмотрим в качестве примера случай кручения стержня, поперечное сечение которого представляет собой кардиоиду. Уравнение кардиоиды в полярных координатах будет иметь вид:

$$r = 2c(1 + \cos \theta),$$

где c — постоянная. Задача о кручении стержня с сечением такой формы представляет некоторый практический интерес: она позволяет учесть отверстие профильного очертания в круглом вале. Сечение, имеющее форму кардиоиды и лежащее в плоскости z (рис. 8.4), можно отобразить на единичный круг в плоскости ζ с помощью функции отображения

$$z = f(\zeta) = c(1 - \zeta)^2. \quad (8.28)$$

На единичном круге $\zeta = e^{i\theta}$

$$f(t) = c(1 - 2e^{i\theta} + e^{2i\theta}) \quad \text{и} \quad \bar{f}(\bar{t}) = c(1 - 2e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}).$$

Находим

$$f(t)\bar{f}(\bar{t}) = c^2(e^{2i\theta} - 4e^{i\theta} - 4e^{-i\theta} + e^{-2i\theta} + 6),$$

откуда

$$C_2 = c^2, \quad C_1 = -4c^2.$$

Это дает

$$F_1(\zeta) = ic^2(\zeta^2 - 4\zeta) + \text{const.}$$

По формуле (8.25) может быть теперь вычислена постоянная кручения J . Учитывая, что на единичном круге $|\zeta| = 1$ будет $\bar{t} = 1/t$, получим:

$$\begin{aligned} J &= \frac{c^4}{4i} \oint_{S_1} \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)^2 (1 - 2t + t^2)(-2 + 2t) dt - \\ &\quad - \frac{c^4}{4} \oint_{S_1} \left[i(t^2 - 4t) - i\left(\frac{1}{t^2} - \frac{4}{t}\right) \right] \left(2t - 4 + \frac{4}{t^2} - \frac{2}{t^3}\right) dt = \\ &= \frac{c^4}{2i} \oint_{S_1} \left(t^3 - 7t^2 + 21t - 35 + \frac{35}{t} - \frac{21}{t^2} + \frac{7}{t^3} - \frac{1}{t^4} \right) dt - \\ &\quad - \frac{c^4 i}{2} \oint_{S_1} \left(t^3 - 6t^2 + 8t + 6 - \frac{18}{t} + \frac{6}{t^2} + \frac{8}{t^3} - \frac{6}{t^4} + \frac{1}{t^5} \right) dt. \end{aligned}$$

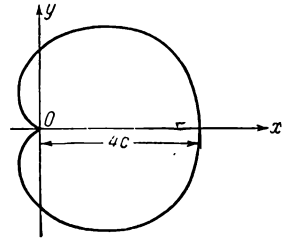


Рис. 8.4.

По теореме вычетов

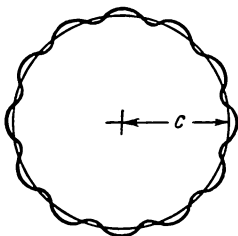
$$J = 2\pi i \left[\frac{c^4}{2i} \cdot 35 - \frac{c^4 i}{2} \cdot (-18) \right] = 17\pi c^4.$$

Отметим, что полученная при интегрировании неопределенная постоянная в выражении для $F_1(\zeta)$, как и следовало ожидать, не влияет на величину J .

Касательные напряжения можно вычислить по формуле (8.27):

$$\tau_{zx} - i\tau_{yz} = \frac{T}{J} \left[\frac{c^2 i (2\bar{\zeta} - 4)}{-2c(1 - \bar{\zeta})} - i(1 - \bar{\zeta})^2 \right] = \frac{Ti}{17\pi c^4} \left[\frac{c(2 - \bar{\zeta})}{1 - \bar{\zeta}} - (1 - \bar{\zeta})^2 \right].$$

Полученная формула позволяет определить касательные напряжения для различных значений $\zeta = \xi + i\eta$. Координаты соответствующих точек в плоскости z можно найти с помощью функции отображения (8.28).



$$n=12, m=1/16$$

Рис. 8.5.

Задача 1. Сечение гофрированной формы в плоскости z , как показано на рис. 8.5, может быть отображено на единичный круг в плоскости ζ при помощи функции отображения

$$z = f(\zeta) = c\zeta(1 + m\zeta^n),$$

где c , m и n — положительные вещественные постоянные. Найти функцию ψ , постоянную кручения J и напряжения в случае, если стержень такого сечения подвергается кручению *).

Задача 2. Сечение призматического стержня получено инверсией эллипса относительно его центра. Стержень подвергается кручению (рис. 8.6) **). Контур поперечного сечения S задан в параметрической форме:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{c} \operatorname{ch} k \cos u, \quad \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{c} \operatorname{sh} k \sin u,$$

где u — параметр, $c = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\operatorname{th} k = \frac{b}{a}$.

Это параметрическое уравнение можно переписать в виде

$$z = c \sec(\omega + ik), \quad v = 0,$$

где $\omega = u + iv$.

Такое поперечное сечение может быть конформно отображено на единичный круг $|\zeta| = 1$ с помощью функции

$$z = \frac{2cek\zeta}{\zeta^2 + e^{2k}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\omega},$$

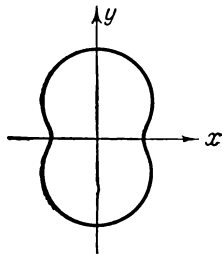


Рис. 8.6.

*) См. A. C. Stevenson, The torsion of a fluted column, Phil. Mag., Ser. 7, т. 34, 1943, 115—120.

***) См. T. J. Higgins, The torsion of a prism with cross section the inverse of an ellipse, J. Appl. Phys., т. 13, 1942, 457—459. См. также J. S. Sokolnikoff, R. D. Specht, Mathematical Theory of Elasticity, N. Y., 1946, 183—185.

г

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, 2, 4, \dots, \\ 2c(-1)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk} & \text{при } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Найти постоянную кручения и касательные напряжения.

$$\text{Отв. } J = \pi c^4 (2 \operatorname{csch}^2 2k + \operatorname{csch}^4 2k),$$

$$\tau_{zx} = -\frac{T}{J} 2c \sin u \left[\frac{\operatorname{csch} 2k \operatorname{ch}(v+k)}{\cos 2u - \operatorname{ch} 2(v+k)} + \frac{\operatorname{sh}(v+k)}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2(v+k)} \right],$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T}{J} 2c \cos u \left[\frac{\operatorname{csc} 2k \operatorname{sh}(v+k)}{\cos 2u - \operatorname{ch} 2(v+k)} - \frac{\operatorname{ch}(v+k)}{\cos 2u + \operatorname{ch} 2(v+k)} \right].$$

8.4. Кручение стержня эллиптического сечения. В предыдущем параграфе было получено полное решение задачи о кручении в предположении что область, ограниченную контуром поперечного сечения, можно конформно отобразить на единичный круг. При этом имелось в виду, что отсутствуют особые точки преобразования, для которых $\frac{dz}{d\zeta} = 0$. Однако имеются поперечные сечения простой конфигурации, для которых такой прямой путь преобразования оказывается невозможным. Примером может служить эллиптический цилиндр; функция конформного преобразования эллиптической области на единичный круг настолько сложна, что задача представляет значительные трудности. Но решение задачи можно значительно упростить, если разрезать эллипс вдоль отрезка, соединяющего его фокусы, и отобразить рассеченный эллипс на круговое кольцо. Тогда функция отображения будет простой; чтобы перейти к сплошному эллиптическому сечению, необходимо лишь удовлетворить условию непрерывности функции $F(z)$ при приближении к разрезу с одной и другой стороны.

Рассмотрим функцию отображения

$$z = f(\zeta) = \frac{c}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad (8.29)$$

где c — вещественная положительная постоянная. Решение относительно ζ дает

$$\zeta c = z \pm \sqrt{z^2 - c^2} = z \pm \sqrt{(z-c)(z+c)}.$$

Рассмотрим функцию

$$\zeta_1 = \pm \sqrt{(z-c)(z+c)}.$$

Если принять

$$z - c = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z + c = r_2 e^{i\theta_2},$$

то

$$\zeta_1 = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}.$$

Если не вводить каких-либо ограничений, то ζ_1 может принимать два значения для каждого z , имеющие разные знаки, в зависимости от выбора θ_1 и θ_2 . Это можно показать, приняв, что z описывает кривую, включающую только точку $z = c$ и не включающую точку $z = -c$ (рис. 8.7, а). Если за начальную точку принять $\theta_1 = \theta_1^*$, $\theta_2 = \theta_2^*$, то после полного обхода контура получим $\theta_1 = \theta_1^* + 2\pi$, $\theta_2 = \theta_2^*$, и аргумент функции ζ_1 возрастет на величину π . Это будет означать, что z возвращается к начальному значению, в то время как ζ_1 не принимает своей исходной величины. То же относится к случаю, когда z описывает кривую, включающую точку $z = -c$, но не охватывающую

точку $z = c$. Обратимся к случаю, когда z описывает кривую, охватывающую обе точки (рис. 8.7, б); тогда θ_1 возрастает от θ_1^* до $\theta_1^* + 2\pi$, а θ_2 возрастает от θ_2^* до $\theta_2^* + 2\pi$; следовательно, ζ_1 возвращается к своему первоначальному значению. Точки $A (z = c)$ и $B (z = -c)$ называются *точками разветвления*. Чтобы обеспечить однозначность функции ζ_1 , надо исключить возможность обхода точкой z такой кривой, которая охватывает только одну из точек разветвления. При этом может быть сделан произвольный разрез, включающий AB , т. е. *разрез вдоль точек разветвления*. Тогда функция ζ_1 будет однородной в вырезанной полоске. Разрез удобнее всего производить вдоль отрезка AB на вещественной оси.

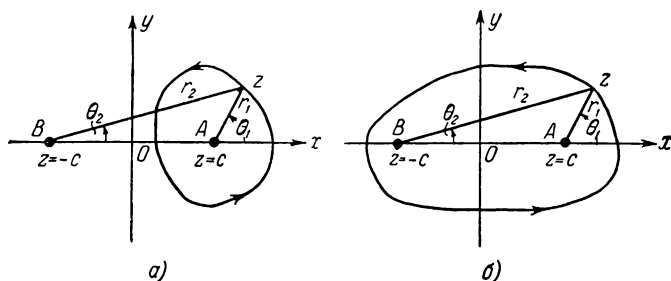


Рис. 8.7.

Вернемся теперь к функции отображения, определяемой выражением (8.29). Отметим, что контур S_1 единичного круга $|\zeta_1| = 1$ соответствует отрезку AB на оси z . Это значит, что разрез в плоскости z отображается на единичный круг в плоскости ζ . Когда точка $\zeta = t = e^{i\theta}$ описывает круг $|\zeta| = 1$, то соответствующая точка z дважды описывает отрезок AB ; это соответствует зависимости

$$z = x = c \cos \theta = \frac{c}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right),$$

причем точки $t = e^{i\theta}$ и $\bar{t} = e^{-i\theta}$ в плоскости ζ соответствуют одной и той же точке отрезка AB . Круг S' радиуса ρ_1 в плоскости ζ соответствует эллипсу в плоскости z , полуоси которого равны:

$$a = \frac{c}{2} \left(\rho_1 + \frac{1}{\rho_1} \right), \quad b = \frac{c}{2} \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1} \right).$$

Выражая ρ_1 и c через a и b , получим

$$\rho_1^2 = \frac{a+b}{a-b} \quad \text{и} \quad c^2 = a^2 - b^2. \quad (8.30)$$

Следовательно, точки $A(-c, 0)$ и $B(c, 0)$ являются фокусами эллипса.

Очевидно, контурное условие (8.21) должно удовлетворяться в плоскости ζ на круге S' , или при $|\zeta| = \rho_1$. Условие $F_1(t) = F_1(\bar{t})$ должно выполняться на единичном круге S_1 , так как точки $t = e^{i\theta}$ и $\bar{t} = e^{-i\theta}$ соответствуют одной и той же точке отрезка AB в плоскости z ; функция $F(z)$ будет приближаться к одному и тому же значению при приближении z к разрезу AB с обеих сторон. Иными словами, функция $F(z)$ будет аналитической в неразрезанном круге.

Функция $F_1(\zeta)$ должна быть однозначной и аналитической внутри кольца между S_1 и S' . Поэтому ее можно разложить в ряд Лорана,

$$F_1(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \zeta^n, \quad (8.31)$$

который сходится при $1 \leq |\zeta| \leq \rho_1$. На единичном круге должно быть

$$F_1(t) = F_1(\bar{t}) \quad \text{или} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{tn} = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{-tn};$$

это возможно при

$$B_n = B_{-n}.$$

Приведенные выше зависимости были получены для случая, когда разрез сделан вдоль отрезка AB вещественной оси. Отметим, однако, что подобные же зависимости могут быть выведены при условии, что разрез сделан вдоль любой другой кривой, соединяющей A и B . Условие (8.21) должно удовлетворяться на круге S' при $\zeta = \rho_1 e^{i\theta}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \rho_1^n e^{in\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{B}_n \rho_1^n e^{-in\theta} &= i \frac{c^2}{4} \left(\rho_1 e^{i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta} \right) \left(\rho_1 e^{-i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{i\theta} \right) + \\ &+ C' = i \frac{c^2}{4} \left[e^{i2\theta} + \left(\rho_1^2 + \frac{1}{\rho_1^2} \right) + e^{-i2\theta} \right] + C'. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $e^{in\theta}$ в обеих частях уравнения, находим

$$B_2 \rho_1^2 - \bar{B}_{-2} \rho_1^{-2} = \frac{ic^2}{4}, \quad B_{-2} \rho_1^{-2} - \bar{B}_2 \rho_1^2 = \frac{ic^2}{4}.$$

С другой стороны,

$$B_n = B_{-n} \quad \text{или} \quad \bar{B}_n = \bar{B}_{-n};$$

отсюда

$$B_2 \rho_1^2 - \bar{B}_2 \rho_1^{-2} = \frac{ic^2}{4}, \quad B_2 \rho_1^{-2} - \bar{B}_2 \rho_1^2 = \frac{ic^2}{4}.$$

Решая эти уравнения, получим

$$B_2 = B_{-2} = \frac{ic^2}{4} \frac{\rho_1^2}{\rho_1^4 + 1};$$

все остальные значения B_n будут равны нулю. Отсюда

$$F_1(\zeta) = \frac{ic^2}{4} \frac{\rho_1^2}{\rho_1^4 + 1} \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) + \text{const.}$$

Учитывая соотношение

$$z^2 = \frac{c^2}{4} \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} + 2 \right),$$

будем иметь

$$F(z) = \frac{i\rho_1^2}{\rho_1^4 + 1} z^2 + \text{const.}$$

Подставляя в полученное уравнение величину ρ_1 , выраженную через большую и малую полуоси a и b , найдем

$$F(z) = \frac{i}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} z^2 + \text{const.}$$

Это дает

$$\varphi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy + \text{const.};$$

такое же выражение было получено в § 5.2.

Чтобы вычислить J , подставим $\zeta = \rho_1 e^{i\theta}$ и $\bar{\zeta} = \rho_1 e^{-i\theta}$ в формулу (8.26). На круге S' имеем:

$$f(\zeta) = \frac{c}{2} \left(\rho_1 e^{i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta} \right); \quad \bar{f}(\bar{\zeta}) = \frac{c}{2} \left(\rho_1 e^{-i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{i\theta} \right).$$

Отсюда

$$df(\zeta) = \frac{ic}{2} \left(\rho_1 e^{i\theta} - \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta} \right) d\theta,$$

$$d\bar{f}(\bar{\zeta}) = \frac{ic}{2} \left(-\rho_1 e^{-i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{i\theta} \right) d\theta,$$

и, далее,

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{4i} \int_0^{2\pi} & \left[\frac{c}{2} \left(\rho_1 e^{-i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{i\theta} \right) \right]^2 \left[\frac{c}{2} \left(\rho_1 e^{i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta} \right) \right] \left[\frac{ic}{2} \left(\rho_1 e^{i\theta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta} \right) \right] d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{ic^2}{4} \frac{\rho_1^2}{\rho_1^4 + 1} \left(\rho_1^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{\rho_1^2} e^{-2i\theta} \right) - \frac{ic^2}{4} \frac{\rho_1^2}{\rho_1^4 + 1} \times \right. \\ & \times \left(\rho_1^2 e^{-2i\theta} + \frac{1}{\rho_1^2} e^{2i\theta} \right) \left] \left[\frac{c}{2} \left(\rho_1 e^{-i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{i\theta} \right) \frac{ic}{2} \left(\rho_1 e^{i\theta} - \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{c}{2} \left(\rho_1 e^{i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta} \right) \frac{ic}{2} \left(-\rho_1 e^{-i\theta} + \frac{1}{\rho_1} e^{i\theta} \right) \right] d\theta. \end{aligned}$$

Непосредственное интегрирование дает

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi c^4}{32} \left(\rho_1^4 - \frac{1}{\rho_1^4} \right) - \frac{\pi c^4}{8} \frac{\rho_1^4 - 1}{\rho_1^4 + 1} = \\ &= \frac{\pi}{4} ab (a^2 + b^2) - \frac{\pi}{4} ab \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Касательные напряжения можно вычислить по формуле (8.27).

8.5. Задачи о плоском напряженном состоянии и плоской деформации. В параграфе 4.1 было показано, что решение задачи о плоском напряженном состоянии или плоской деформации при наличии объемных сил тяжести можно свести к определению функции напряжения ψ , удовлетворяющей бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 \psi = 0.$$

Зададимся целью дать решение этого бигармонического уравнения с помощью комплексных переменных.

Перепишем это уравнение в виде

$$\nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0.$$

Отсюда следует, что функция

$$p = \nabla^2 \psi$$

удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 p = 0$. Если обозначить величину, сопряженную с p , через q , то функция

$$f_1(z) = p + iq$$

будет аналитической, и интеграл этой функции по z будет также аналитической функцией. Примем

$$F(z) = P + iQ = \frac{1}{4} \int f_1(z) dz; \quad (8.32)$$

тогда

$$F'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{4} f_1(z) = \frac{1}{4} (p + iq);$$

отсюда

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{4} p.$$

Эти соотношения дают

$$\nabla^2 (xP + yQ) = 2 \frac{\partial P}{\partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} = p.$$

Имеем $\nabla^2 \psi = p$, следовательно,

$$\nabla^2 (\psi - xP - yQ) = 0.$$

Таким образом, функция $(\psi - xP - yQ)$ является гармонической функцией; обозначим ее через P_1 . Функцию напряжений можно выразить в виде

$$\psi = xP + yQ + P_1. \quad (8.33)$$

Функция напряжений ψ , определяемая по (8.33), может быть представлена с помощью нескольких различных выражений. Составим функцию

$$\chi(z) = P_1 + iQ_1,$$

где Q_1 — функция, сопряженная с P_1 . Учитывая соотношение

$$\bar{z}F(z) = (x - iy)(P + iQ) = (xP + yQ) + i(xQ - yP),$$

имеем

$$\psi = \operatorname{Re} [\bar{z}F(z) + \chi(z)]; \quad (8.34)$$

здесь символ Re обозначает вещественную часть данной функции. Обозначая функции, сопряженные с $F(z)$ и $\chi(z)$, соответственно через $\bar{F}(\bar{z})$ и $\bar{\chi}(\bar{z})$, получим

$$\bar{F}(\bar{z}) = P - iQ, \quad \bar{\chi}(\bar{z}) = P_1 - iQ_1;$$

при этом формула (8.34) переписывается в виде

$$\psi = \frac{1}{2} [\bar{z}F(z) + z\bar{F}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})]. \quad (8.35)$$

Судя по уравнениям (8.34) и (8.35), любую функцию напряжений можно выразить через надлежаще выбранные аналитические функции.

Найдем теперь выражения для перемещений и напряжений через эти аналитические функции. Из соотношений (3.27) и (4.4) следует, что в случае, когда объемные силы отсутствуют, будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

Учитывая зависимости

$$p = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{4} p,$$

из первых двух уравнений получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left[\left(p - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] = \\ &= \frac{1}{E} \left[p - (1+\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{E} \left[4 \frac{\partial P}{\partial x} - (1+\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left[4 \frac{\partial Q}{\partial y} - (1+\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right].$$

Произведя интегрирование, находим:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[4P - (1+\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} + g_1(y) \right], \\ v &= \frac{1}{E} \left[4Q - (1+\nu) \frac{\partial \psi}{\partial y} + g_2(x) \right], \end{aligned}$$

где $g_1(y)$ и $g_2(x)$ — произвольно выбранные функции соответственно от y и x . Подставляя эти выражения в третье уравнение (8.36) и сокращая на общий множитель $1/E$, будем иметь

$$4 \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{dg_1}{dy} + \frac{dg_2}{dx} = -2(1+\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

следовательно,

$$\frac{dg_1}{dy} + \frac{dg_2}{dx} = 0;$$

это дает

$$\frac{dg_1}{dy} = -\frac{dg_2}{dx} = C,$$

где C — постоянная. Отсюда

$$g_1 = Cy + C_1, \quad g_2 = -Cx + C_2.$$

Из определения компонентов деформации следует, что данные компоненты перемещения не вызывают какой-либо деформации и представляют перемещения абсолютно твердого тела. Отбрасывая эти члены, окончательно получаем:

$$u = \frac{1}{E} \left[4P - (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right],$$

$$v = \frac{1}{E} \left[4Q - (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right],$$

или

$$u + iv = \frac{1}{E} \left[4(P + iQ) - (1 + \nu) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right]. \quad (8.37)$$

Учитывая соотношения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i,$$

по формуле (8.35) найдем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} [zF'(z) + F(z) + z\bar{F}'(\bar{z}) + \bar{F}(\bar{z}) + \chi'(z) + \bar{\chi}'(\bar{z})],$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{i}{2} [zF'(z) - F(z) - z\bar{F}'(\bar{z}) + \bar{F}(\bar{z}) + \chi'(z) - \bar{\chi}'(\bar{z})].$$

Отсюда

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = F(z) + z\bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}). \quad (8.38)$$

Учитывая зависимость $P + iQ = F(z)$, имеем

$$u + iv = \frac{3-\nu}{E} F(z) - \frac{1+\nu}{E} [z\bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})]. \quad (8.39)$$

Эта формула позволяет вычислить составляющие перемещения для задачи о плоском напряженном состоянии, если известны функции $F(z)$ и $\chi(z)$. Подобную же формулу легко вывести для задач о плоской деформации.

Рассмотрим теперь составляющие напряжения. Дифференцируя уравнение (8.38) по x и y , находим:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = F'(z) + z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = i [F'(z) - z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) - \bar{\chi}''(\bar{z})].$$

Умножив второе уравнение на i и вычитая полученное уравнение из первого, а затем, сложив его с первым, будем иметь

$$\sigma_x + \sigma_y = 2F'(z) + 2\bar{F}'(\bar{z}) = 4 \operatorname{Re} F'(z), \quad (8.40)$$

$$\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2[z\bar{F}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z})]. \quad (8.41)$$

Уравнению (8.41) можно придать более удобную форму, заменив в обеих частях i на $(-i)$,

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[z\bar{F}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z})]. \quad (8.42)$$

Формулы (8.40) и (8.42) определяют компоненты напряжения, если известны функции $F(z)$ и $\chi(z)$.

Вычислим теперь результирующую силу, действующую в пластинке по дуге AB . Пусть $\bar{X} ds$ и $\bar{Y} ds$ представляют составляющие

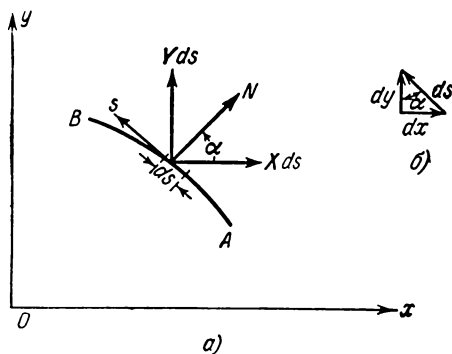


Рис. 8.8.

по осям x и y силы, действующей на элемент ds дуги AB и совпадающей с положительным направлением нормали N . Тогда получим:

$$\bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha,$$

$$\bar{Y} = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha,$$

где α — угол между положительным направлением нормали и осью x . Дуге ds соответствуют проекции dx и dy , как показано на рис. 8.8, б). Если принять положительное направление дуги ds от A к B ,

то с возрастанием s значение x будет уменьшаться, и отрицательному значению dx будет отвечать положительное значение ds . Тогда

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad \text{и} \quad \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}.$$

Вспомнив соотношения

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y},$$

найдем:

$$\bar{X} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right),$$

$$\bar{Y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Компоненты результирующей силы, действующей по AB , оказываются равными:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \int_A^B \bar{X} ds = \int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) ds = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_A^B, \\ F_y &= \int_A^B \bar{Y} ds = -\int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) ds = -\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_A^B; \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

здесь скобки $[]_A^B$ обозначают разности значений в точках B и A .

Момент силы, действующей по дуге AB относительно начала O , равен

$$M = \int_A^B (x\bar{Y} - y\bar{X}) ds = -\int_A^B \left[xd \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + yd \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right].$$

Интегрируя по частям, получаем

$$M = -\left[x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_A^B + [\psi]_A^B. \quad (8.44)$$

8.6. Решение задач о плоском напряженном состоянии и плоской деформации в полярных координатах. Обратимся к общему решению задач о плоском напряженном состоянии и плоской деформации в полярных координатах. Обозначая через v_r и v_θ компоненты перемещения в точке P по направлениям изменения полярных координат r и θ (рис. 8.9), получим:

$$u = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta,$$

$$v = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta.$$

Так как $(-1) = i^2$, получим

$$u + iv = v_r (\cos \theta + i \sin \theta) + + iv_\theta (\cos \theta + i \sin \theta) = (v_r + iv_\theta) e^{i\theta}.$$

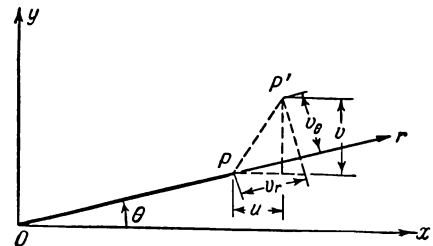


Рис. 8.9.

Для задач о плоском напряженном состоянии находим отсюда

$$\begin{aligned} v_r + iv_\theta &= e^{-i\theta} (u + iv) = \\ &= e^{-i\theta} \left\{ \frac{3-\nu}{E} F(z) - \frac{1+\nu}{E} [z\bar{F}'(z) + \bar{\chi}'(z)] \right\}. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Подставляя в правую часть уравнения (8.45) $z = re^{i\theta}$ и $\bar{z} = re^{-i\theta}$ и разделив вещественную и мнимую части, приходим к выражению для перемещений v_r и v_θ в полярных координатах.

Чтобы выразить составляющие напряжения через полярные координаты, обозначим здесь координатные оси r и θ соответственно через x' и y' . Тогда

$$\sigma_r = \sigma_{x'}, \quad \sigma_\theta = \sigma_{y'}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{x'y'}.$$

Учитывая обозначения

$$l_1 = \cos \theta, \quad m_1 = \sin \theta, \quad l_2 = -\sin \theta, \quad m_2 = \cos \theta,$$

из формул (1.15) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= (-\sigma_x + \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Из этих формул непосредственно вытекают соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y, \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) e^{2i\theta}. \end{aligned}$$

По формулам (8.40) и (8.42) имеем:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} F'(z) = 2 [F'(z) + \bar{F}'(\bar{z})], \quad (8.46)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2 [\bar{z}F''(z) + \chi''(z)] e^{2i\theta}. \quad (8.47)$$

Вычитая (8.47) из (8.46), получим

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = F'(z) + \bar{F}'(\bar{z}) - [\bar{z}F''(z) + \chi''(z)] e^{2i\theta}. \quad (8.48)$$

8.7. Общее решение задачи для бесконечной пластинки с круговым отверстием. Выберем начало координат в центре кругового отверстия. Если граничные условия выражены через заданные напряжения на контуре отверстия, то величины σ_r и $\tau_{r\theta}$ будут известны при $z = ae^{i\theta}$, где a — радиус отверстия.

Аналитические функции $F'(z)$ и $\chi''(z)$ можно разложить в степенные ряды. Так как напряжения должны оставаться конечными при $r \rightarrow \infty$, то из формул (8.46) и (8.48) находим, что эти функции должны оставаться конечными и при $r = \infty$. Следовательно, эти функции должны иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} F'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}, \\ \chi''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{-n}, \end{aligned} \right\} \quad (8.49)$$

где A_n, B_n — комплексные постоянные. Из формул (8.46) и (8.48) видим, что напряжения на бесконечности определяются постоянной B_0 и вещественной частью постоянной A_0 . Мнимая часть комплексной постоянной A_0 не влияет на напряженное состояние.

Интегрируя (8.49) по z , находим:

$$F(z) = A_0 z + A_1 \ln z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n z^{-n+1}}{n-1} + c_1,$$

$$\chi'(z) = B_0 z + B_1 \ln z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^{-n+1}}{n-1} + c_2,$$

где c_1 и c_2 — комплексные постоянные. Учитывая соотношения

$$\bar{F}'(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \bar{z}^{-n},$$

$$\bar{\chi}'(\bar{z}) = \bar{B}_0 \bar{z} + \bar{B}_1 \ln \bar{z} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{B}_n \bar{z}^{-n+1}}{n-1} + \bar{c}_2,$$

из выражения (8.45) получаем

$$\begin{aligned} v_r + iv_\theta = e^{-i\theta} & \left[\frac{3-\nu}{E} \left(A_0 z + A_1 \ln z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n z^{-n+1}}{n-1} + c_1 \right) - \right. \\ & - \frac{1+\nu}{E} \left(\bar{A}_0 z + r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \bar{z}^{-(n+1)} \right) - \\ & \left. - \frac{1+\nu}{E} \left(\bar{B}_0 \bar{z} + \bar{B}_1 \ln \bar{z} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{B}_n \bar{z}^{-n+1}}{n-1} + \bar{c}_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Исследуем функцию $\ln z$. Положив $z = r e^{i\theta}$, будем иметь

$$\ln z = \ln r + i\theta.$$

Эта функция не является однозначной, так как при обходе вокруг отверстия величина θ возрастает от некоторого значения θ_1 до $\theta_1 + 2\pi$. Приращение $v_r + iv_\theta$ при обходе отверстия будет тогда

$$2\pi i e^{-i\theta} \left(\frac{3-\nu}{E} A_1 + \frac{1+\nu}{E} \bar{B}_1 \right).$$

Условие того, чтобы величина $v_r + iv_\theta$ была однозначной, имеет вид

$$(3-\nu) A_1 + (1+\nu) \bar{B}_1 = 0,$$

или

$$A_1 = -\frac{1+\nu}{3-\nu} \bar{B}_1. \quad (8.51)$$

Так как напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ заданы при $r = a$, выражение $(\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{r=a}$ можно разложить в комплексный ряд Фурье:

$$(\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{r=a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}; \quad (8.52)$$

коэффициенты C_n находим по формуле

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_r(\theta) - i\tau_{r\theta}(\theta)]_{r=a} e^{-in\theta} d\theta, \quad n = 0, 1, -1, -2, \dots \quad (8.53)$$

По формуле (8.48) имеем

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = F'(z) + \bar{F}'(\bar{z}) - [zF''(z) + \chi''(z)] e^{2i\theta}.$$

Подставляя в полученное выше выражение ряды (8.49) и (8.52) и учитывая, что на контуре кругового отверстия $r = a$, находим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{a^n} e^{-in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_n}{a^n} e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nA_n}{a^n} e^{-in\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^n} e^{-i(n-2)\theta} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1+n)A_n - \frac{B_{n+2}}{a^2} \right] \frac{e^{-in\theta}}{a^n} - \frac{B_1}{a} e^{i\theta} - B_0 e^{i2\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_n}{a^n} e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $e^{in\theta}$ в обеих частях полученного уравнения, имеем:

$$A_0 + \bar{A}_0 - \frac{B_2}{a^2} = C_0, \quad (8.54)$$

$$\frac{\bar{A}_1}{a} - \frac{B_1}{a} = C_1, \quad (8.55)$$

$$\bullet \quad \frac{\bar{A}_2}{a^2} - B_0 = C_2, \quad (8.56)$$

$$\frac{\bar{A}_n}{a^n} = C_n \quad \text{при } n \geq 3, \quad (8.57)$$

$$\frac{1+n}{a^n} A_n - \frac{B_{n+2}}{a^{n+2}} = C_{-n} \quad \text{при } n \geq 1. \quad (8.58)$$

Поскольку величины $A_0 + \bar{A}_0$ и B_0 характеризуют напряженное состояние на бесконечности, будем считать их известными. Выше отмечалось, что величина напряжений не зависит от мнимой части постоянной A_0 . Из формулы (8.50) следует, что при определении перемещений мнимая часть A_0 будет соответствовать смещению абсо-

лютно твердого тела. Следовательно, величина мнимой части постоянной A_0 не существенна при решении задачи, и ее можно принять равной нулю. Тогда постоянная A_0 станет вещественной; будем иметь

$$A_0 + \bar{A}_0 = 2A_0.$$

Из (8.51) находим

$$\bar{A}_1 = -\frac{1+\nu}{3-\nu} B_1.$$

Подставляя это значение в выражение (8.55) и решая его относительно B_1 , получим

$$B_1 = -\frac{(3-\nu)C_1 a}{4}. \quad (8.59)$$

Из выражения (8.51) следует

$$A_1 = \frac{(1+\nu)\bar{C}_1 a}{4}. \quad (8.60)$$

Из уравнения (8.56) будем иметь

$$A_2 = \bar{B}_0 a^2 + \bar{C}_2 a^2. \quad (8.61)$$

Имея в виду, что постоянная A_0 считается здесь вещественной, из (8.54) находим

$$B_2 = 2A_0 a^2 - C_0 a^2. \quad (8.62)$$

Уравнения (8.57) и (8.58) дают

$$A_n = \bar{C}_n a^n \quad \text{при } n \geq 3 \quad (8.63)$$

и

$$B_n = (n-1)a^2 A_{n-2} - a^n C_{-n+2} \quad \text{при } n \geq 3. \quad (8.64)$$

Таким образом, все коэффициенты оказываются известными. Задача будет полностью решена, если задано распределение напряжений по круговому контуру.

В качестве примера рассмотрим задачу о широкой плите, имеющей в средней части малое круговое отверстие радиуса a и подвергающейся равномерному растяжению в направлении x . Эта задача была решена в параграфе 4.5 другим методом. Граничные условия здесь будут следующими:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = \infty \quad \sigma_x = S, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \\ \text{а при } r = a \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0. \end{array} \right\} \quad (8.65)$$

Из формул (8.40) и (8.41) находим для $r = \infty$:

$$S = 4A_0, \quad -S = 2\bar{B}_0;$$

отсюда

$$A_0 = \frac{S}{4}, \quad \bar{B}_0 = -\frac{S}{2}.$$

Далее, из (8.52) и (8.65) находим, что все коэффициенты Фурье C_n обращаются в нуль. Тогда формулы (8.59) и (8.64) дают:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, & B_1 &= 0, \\ A_2 &= -\frac{Sa^2}{2}, & B_2 &= \frac{Sa^2}{2}, \\ A_n &= 0 & \text{при } n \geq 3, \\ B_3 &= 0, & B_4 &= -\frac{3Sa^4}{2}, \\ B_n &= 0 & \text{при } n \geq 5. \end{aligned}$$

Соответственно, функции $F'(z)$ и $\chi''(z)$ будут иметь вид:

$$F'(z) = \frac{S}{4} \left(1 - \frac{2a^2}{z^2} \right), \quad \chi''(z) = -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} + \frac{3a^4}{z^4} \right).$$

Подставляя эти выражения в формулы (8.46) и (8.47), находим:

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= S \left(1 - 2 \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right), \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= S \left(2 \frac{a^2}{r^2} e^{-i2\theta} - e^{i2\theta} + \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} e^{-i2\theta} \right). \end{aligned}$$

Это дает:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} - 4 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S}{2} \left(1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Мы пришли к тем же выражениям для напряжений, которые были получены в параграфе 4.5.

Отбрасывая несущественные постоянные интегрирования c_1 и c_2 в формуле (8.50) и разделяя вещественную и мнимую части, имеем:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{S(1+\nu)}{2Er} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} r^2 + a^2 + \left(\frac{4a^2}{1+\nu} + r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \right], \\ v_\theta &= -\frac{S(1+\nu)}{2Er} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} 2a^2 + r^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Задача 1. Пользуясь методом, изложенным в данном параграфе, найти закон распределения напряжений в бесконечной равномерно растянутой пластинке с малым круговым отверстием в средней части. Граничные условия здесь будут $\sigma_x = \sigma_y = S$, $\tau_{xy} = 0$ на бесконечности и $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ при $r = a$.

$$\text{Отв. } F'(z) = \frac{S}{2}, \quad \chi''(z) = \frac{Sa^2}{2},$$

$$\sigma_r = S \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = S \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

$$v_r = \frac{S(1+\nu)}{Er} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} r^2 + a^2 \right), \quad v_\theta = 0.$$

Задача 2. Найти распределение напряжений в бесконечной пластинке с круговым отверстием, если по краю отверстия приложено равномерно распределенное нормальное давление p . Напряжения на бесконечности принимаются равными нулю. Граничные условия будут следующими:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} &= 0 \quad \text{при } r = \infty, \\ \sigma_r &= -p, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = a. \end{aligned}$$

Отв. $F'(z) = 0, \quad \chi''(z) = \frac{pa^3}{z^3},$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{pa^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{pa^2}{r^2}, \quad \tau_{r\theta} = 0, \\ v_r &= \frac{pa^2(1+\nu)}{Er}, \quad v_\theta = 0. \end{aligned}$$

Задача 3. Найти распределение напряжений в бесконечной пластинке с круговым отверстием, если давление p , приложенное вдоль кромки отверстия, изменяется по закону

$$\sigma_r = p_0 \cos \theta \quad \text{при } -\alpha \leq \theta \leq \alpha$$

и

$$\sigma_r = p_0 \cos(\pi - \theta) \quad \text{при } \pi - \alpha \leq \theta \leq \pi + \alpha;$$

напряжения на бесконечности считаются равными нулю.

8.8. Бесконечная пластинка, находящаяся под действием сосредоточенных сил и моментов. Метод, описанный в предыдущем параграфе, можно также использовать для исследования напряженного состояния в бесконечной пластинке, находящейся под действием сосредоточенных сил и моментов. Начнем с рассмотрения бесконечной пластинки толщины h с круговым отверстием радиуса a . Предположим, что распределение напряжений по краю отверстия задано в следующей форме:

$$\bar{X} = \frac{P_x}{2\pi ah}, \quad \bar{Y} = \frac{P_y}{2\pi ah},$$

а на бесконечности напряжения равны нулю. Величины P_x и P_y в этих выражениях являются постоянными, это — составляющие результирующей внешних сил, действующих по кромке отверстия. Заметив, что положительная нормаль N составляет с положительным направлением оси x угол $\theta + \pi$ (рис. 8.10), получим:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=a} &= -\frac{1}{2\pi ah} (P_x \cos \theta + P_y \sin \theta), \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= -\frac{1}{2\pi ah} (-P_x \sin \theta + P_y \cos \theta). \end{aligned}$$

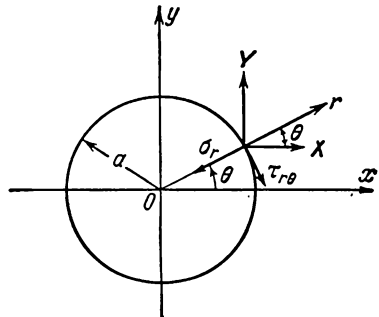


Рис. 8.10.

Следовательно, на круге будем иметь

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2\pi ah} (P_x - iP_y) e^{i\theta}.$$

Из этого уравнения следует, что коэффициент разложения (8.53), не обращающийся в нуль, равен

$$C_1 = -\frac{1}{2\pi ah} (P_x - iP_y).$$

Примем, что напряжения на бесконечности равны нулю. Тогда

$$A_0 = B_0 = 0.$$

По формулам (8.59) и (8.64) находим:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{(1+\nu)(P_x + iP_y)}{8\pi h}, & A_n &= 0 \quad \text{при } n \geq 2, \\ B_1 &= \frac{(3-\nu)(P_x - iP_y)}{8\pi h}, & B_2 &= 0, \\ B_3 &= -a^2 \frac{(1+\nu)(P_x + iP_y)}{4\pi h}, & B_n &= 0 \quad \text{при } n \geq 4. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} F'(z) &= -\frac{(1+\nu)(P_x + iP_y)}{8\pi h} \frac{1}{z}, \\ \chi''(z) &= \frac{(3-\nu)(P_x - iP_y)}{8\pi h} \frac{1}{z} - \frac{(1+\nu)(P_x + iP_y)}{4\pi h} \frac{a^2}{z^3}. \end{aligned}$$

Пусть радиус отверстия a стремится к нулю, и в то же время компоненты поверхностной силы \bar{X} и \bar{Y} возрастают так, что результирующая сила все время остается постоянной по величине и направлению. По мере приближения радиуса a к нулю второй член в выражении для $\chi''(z)$ стремится к нулю. Тогда

$$\chi''(z) = \frac{(3-\nu)(P_x - iP_y)}{8\pi h} \frac{1}{z}.$$

Подставляя эти выражения $F'(z)$ и $\chi''(z)$ в формулы (8.46) и (8.47), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= -\frac{(1+\nu)(P_x \cos \theta + P_y \sin \theta)}{2\pi hr}, \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= \frac{P_x \cos \theta + P_y \sin \theta}{\pi hr} + i \frac{(1-\nu)(P_x \sin \theta - P_y \cos \theta)}{2\pi hr}. \end{aligned}$$

Это дает:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{3+\nu}{4\pi h} \frac{P_x \cos \theta + P_y \sin \theta}{r}, \\ \sigma_\theta &= \frac{1-\nu}{4\pi h} \frac{P_x \cos \theta + P_y \sin \theta}{r}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1-\nu}{4\pi h} \frac{P_x \sin \theta - P_y \cos \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (8.66)$$

Формулы (8.66) дают распределение напряжений в бесконечной пластинке, вызываемое сосредоточенной силой, приложенной в начале координат.

Определим, далее, напряжения в бесконечной пластинке, возникающие под действием момента, приложенного в центре координат. Вначале рассмотрим случай равномерного касательного усилия T , приложенного вдоль кромки кругового отверстия радиуса a . При $r = a$

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = T.$$

Снова примем, что на бесконечности напряжения обращаются в нуль, и потому $A_0 = B_0 = 0$. В силу условия

$$(\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{r=a} = -iT$$

все коэффициенты ряда Фурье (8.52) обращаются в нуль, за исключением постоянного члена

$$C_0 = -iT.$$

Из формул (8.59) и (8.64) находим:

$$\begin{aligned} A_n &= 0 \text{ для всех значений } n, \\ B_n &= 0 \text{ для всех значений } n, \text{ кроме } n = 2, \\ B_2 &= -C_0 a^2 = iTa^2. \end{aligned}$$

Момент внешних сил, приложенных к контуру отверстия, равен

$$M = -2\pi a^2 h T;$$

отсюда

$$B_2 = -\frac{iM}{2\pi h} \quad \text{и} \quad F'(z) = 0, \quad \chi''(z) = -\frac{iM}{2\pi h} \frac{1}{z^2}.$$

Простые вычисления дают:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{M}{2\pi h r^2}. \quad (8.67)$$

Этот результат отвечает распределению напряжений в бесконечной пластинке, находящейся под действием момента M , равномерно распределенного по кромке отверстия радиуса a . Эти формулы не изменятся, если радиус отверстия будет стремиться к нулю, а усилие T будет возрастать так, чтобы момент M оставался постоянным. В предельном случае формулы (8.67) дают распределение напряжений в бесконечной пластинке под действием сосредоточенной пары с моментом M , приложенной в начале координат.

8.9. Круглая пластинка, произвольно нагруженная по контуру. Общее решение задач, относящихся к круговому контуру, может быть легко составлено в форме ряда. Так как напряжения являются конечными и однозначными, то функции $F'(z)$ и $\chi''(z)$ будут аналитическими и однозначными в области $r \leq a$, где a — радиус

круглой пластинки. Следовательно, имеем

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad \chi''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n. \quad (8.68)$$

Допустим, что круглая пластинка находится в равновесии под действием заданной контурной нагрузки

$$(\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{r=a} = f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}, \quad (8.69)$$

причем комплексные коэффициенты Фурье C_n определяются по формуле

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (8.70)$$

Так как круглая пластинка уравновешена, то результирующее усилие $F_x + iF_y$ и момент M вдоль контура должны обращаться в нуль. Учитывая соотношения

$$F_x + iF_y = \int_0^{2\pi} (\sigma_r + i\tau_{r\theta})_{r=a} e^{i\theta} a d\theta,$$

$$M = \int_0^{2\pi} (\tau_{r\theta})_{r=a} a^2 d\theta,$$

имеем

$$C_{-1} = 0 \quad \text{и} \quad C_0 = \bar{C}_0.$$

Таким образом, величина C_0 будет вещественной.

Изменив теперь в формуле (8.69) знак перед i на обратный, подставим полученный ряд, а также ряд (8.68), в (8.48). Учитывая зависимость $z = ae^{i\theta}$ при $r = a$, найдем

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \bar{C}_n e^{-in\theta} = A_0 + \bar{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n a^n e^{-in\theta} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) A_n a^n e^{in\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^n e^{i(n+2)\theta}.$$

Приравнявая коэффициенты при $e^{in\theta}$ в обеих частях полученного уравнения, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A_0 + \bar{A}_0 &= C_0, \\ A_n &= C_n a^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ B_n &= -a^{-n} [(n+1) C_{n+2} + \bar{C}_{-(n+2)}], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.71)$$

В качестве примера рассмотрим круглую пластинку, находящуюся под действием нагрузки, приложенной по двум одинаковым и расположенным друг против друга дугам контура. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p \quad \text{при } -\alpha \leq \theta \leq \alpha \quad \text{и} \quad \pi - \alpha \leq \theta \leq \pi + \alpha, \\ \tau_{r\theta} &= 0 \quad \text{при всех значениях } \theta. \end{aligned}$$

Из формулы (8.70) следует:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} (-pe^{-in\theta}) d\theta + \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} (-pe^{-in\theta}) d\theta \right]$$

или

$$C_0 = -\frac{2p\alpha}{\pi}, \quad C_{2n} = -\frac{p}{n\pi} \sin 2n\alpha, \quad C_{2n+1} = 0.$$

Таким образом, из выражений (8.71) находим:

$$\begin{aligned} A_0 + \bar{A}_0 &= -\frac{2p\alpha}{\pi}, \\ A_{2n+1} &= 0, \quad B_{2n+1} = 0, \\ A_{2n} &= -\frac{p \sin 2n\alpha}{n\pi a^{2n}}, \quad B_{2n} = \frac{2p \sin 2(n+1)\alpha}{\pi a^{2n}}. \end{aligned}$$

Так как мнимая часть A_0 не оказывает влияния на значения напряжений, можно принять ее равной нулю. Тогда

$$F'(z) = -\frac{p}{\pi} \left(\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\alpha}{na^{2n}} z^{2n} \right), \quad \chi''(z) = \frac{2p}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2(n+1)\alpha}{a^{2n}} z^{2n}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (8.46) и (8.47), получаем:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -\frac{4p}{\pi} \left[\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\alpha}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \cos 2n\theta \right],$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{4p}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sin 2(n+1)\alpha \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) e^{i2(n+1)\theta},$$

откуда

$$\sigma_r = -\frac{2p}{\pi} \left[\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \left(1 - \frac{n}{n+1} \frac{r^2}{a^2}\right) \sin 2(n+1)\alpha \cos 2(n+1)\theta \right],$$

$$\sigma_\theta = -\frac{2p}{\pi} \left[\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \left(1 + \frac{n+2}{n+1} \frac{r^2}{a^2}\right) \sin 2(n+1)\alpha \cos 2(n+1)\theta \right],$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2p}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \sin 2(n+1)\alpha \sin 2(n+1)\theta.$$

8.10. Пластинки, ограниченные двумя концентрическими окружностями. Перейдем к рассмотрению пластинки, ограниченной двумя концентрическими окружностями; внешний радиус обозначим через b и внутренний — через a . Выберем начало координат в центре окружностей и примем, что внешние силы приложены по контурам пластинки. Тогда граничные условия будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{r=a} &= f_1(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}, \\ (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{r=b} &= f_2(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_n e^{in\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (8.72)$$

причем коэффициенты ряда Фурье C_n и C'_n определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \\ C'_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (8.73)$$

Судя по формуле (8.40), условие однозначности напряжений будет выполнено, если вещественная часть функции $F'(z)$ является однозначной. Функция $F'(z)$, выраженная в виде комплексного ряда, имеет вид

$$F'(z) = A' \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n. \quad (8.74)$$

Из выражения (8.41) следует, что напряжения будут однозначны, если функция $\chi''(z)$ однозначна. Следовательно, выражение для $\chi''(z)$ можно записать в виде

$$\chi''(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n. \quad (8.75)$$

Если произвести интегрирование функций $F'(z)$ и $\chi''(z)$, определяемых по формулам (8.74) и (8.75), и полученные выражения подставить в (8.39), то условие однозначности компонентов перемещения примет вид:

$$A' = 0 \quad \text{и} \quad (3 - \nu) A_{-1} + (1 - \nu) \bar{B}_{-1} = 0. \quad (8.76)$$

Подставляя ряды (8.74) и (8.75) в формулу (8.48), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} [(1-n)A_n - B_{n-2}a^{-2}] a^n e^{in\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{A}_n a^n e^{-in\theta} &= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{-in\theta}, \\ \sum_{-\infty}^{\infty} [(1-n)A_n - B_{n-2}b^{-2}] b^n e^{in\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{A}_n b^n e^{-in\theta} &= \sum_{-\infty}^{\infty} C'_n e^{in\theta}, \end{aligned}$$

здесь было использовано условие $A' = 0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$ в обеих частях полученных уравнений, находим:

$$\left. \begin{aligned} (A_0 + \bar{A}_0) - B_{-2}a^{-2} &= C_0, \\ (A_0 + \bar{A}_0) - B_{-2}b^{-2} &= C'_0, \\ (1-n)A_n a^n - B_{n-2}a^{n-2} + \bar{A}_{-n}a^{-n} &= C_n, \\ n &= \pm 1, \pm 2, \dots, \\ (1-n)A_n b^n - B_{n-2}b^{n-2} + \bar{A}_{-n}b^{-n} &= C'_n, \\ n &= \pm 1, \pm 2 \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.77)$$

Решая первое из этих уравнений, будем иметь:

$$A_0 + \bar{A}_0 = \frac{C'_0 b^2 - C_0 a^2}{b^2 - a^2}, \quad B_{-2} = \frac{(C'_0 - C_0) a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \quad (8.78)$$

Так как величина $(A_0 + \bar{A}_0)$ вещественна, то и выражение $(C'_0 b^2 - C_0 a^2)$ будет вещественным. В самом деле, простые выкладки показывают, что такое требование эквивалентно условию равенства нулю результирующего момента всех внешних сил. Поскольку прибавление мнимой постоянной к $F'(z)$ не повлияет на распределение напряжений, можно принять, что величина A_0 является вещественной и положить $A_0 = \bar{A}_0$.

Принимая в третьем уравнении (8.77) $n = 1$, получим

$$\bar{A}_{-1} - B_{-1} = C_1 a.$$

Найдя сопряженную величину и учитывая второе из уравнений (8.76), будем иметь:

$$A_{-1} = \frac{1 - \nu}{2 - \nu} \frac{\bar{C}_1 a}{2}, \quad B_{-1} = -\frac{3 - \nu}{2 - \nu} \frac{C_1 a}{2}. \quad (8.79)$$

Разделив третье уравнение (8.77) на $(-a^{n-2})$, а четвертое — на b^{n-2} , и затем сложив их, получим

$$(1-n)(b^2 - a^2)A_n + [b^{-2(n-1)} - a^{-2(n-1)}]\bar{A}_{-n} = C'_n b^{-n+2} - C_n a^{-n+2}. \quad (8.80)$$

Заменяя в выражении (8.80) n через $(-n)$ и найдя величину, сопряженную с окончательным выражением, придем к следующему уравнению:

$$(b^{2n+2} - a^{2n+2})A_n + (1+n)(b^2 - a^2)\bar{A}_{-n} = \bar{C}'_{-n} b^{n+2} - \bar{C}_{-n} a^{n+2}. \quad (8.81)$$

Как легко видеть, условие равенства нулю результирующей всех сил, приложенных к контурам, получает вид

$$C'_1 b - C_1 a = 0.$$

Для $n = 1$ уравнение (8.80) тождественно удовлетворяется. Уравнение (8.81) дает

$$(b^4 - a^4) A_1 + 2(b^2 - a^2) \bar{A}_{-1} = \bar{C}'_{-1} b^3 - \bar{C}_{-1} a^3.$$

Определяем отсюда A_1 :

$$A_1 = \frac{\bar{C}'_{-1} b^3 - \bar{C}_{-1} a^3}{b^4 - a^4} - \frac{1 - \nu}{2 - \nu} \frac{\bar{C}_1 a}{b^2 + a^2}. \quad (8.82)$$

Остальные коэффициенты A_n ($n = \pm 2, \pm 3, \dots$) можно найти, решая систему уравнений (8.80) и (8.81):

$$A_n = \frac{(1+n)(b^2 - a^2)(\bar{C}'_n b^{-n+2} - \bar{C}_n a^{-n+2}) - (b^{-2n+2} - a^{-2n+2})(\bar{C}'_{-n} b^{n+2} - \bar{C}_{-n} a^{n+2})}{(1-n^2)(b^2 - a^2)^2 - (b^{2n+2} - a^{2n+2})(b^{-2n+2} - a^{-2n+2})} \quad (8.83)$$

Остальные коэффициенты B_n можно определить из третьего уравнения (8.77):

$$B_{n-2} = (1-n) A_n a^2 + \bar{A}_{-n} a^{-2n+2} - C_n a^{-n+2}. \quad (8.84)$$

В качестве примера рассмотрим толстостенный цилиндр, подверженный равномерному внутреннему давлению p_i и внешнему давлению p_0 . В этом случае

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_i & \text{при } r &= a, \\ \sigma_r &= -p_0 & \text{при } r &= b, \\ \tau_{r\theta} &= 0 & \text{при } r &= a \text{ и } r = b. \end{aligned}$$

Все коэффициенты в ряде Фурье (8.72) обращаются в нуль, за исключением C_0 и C'_0 ; последние будут равны:

$$C_0 = -p_i, \quad C'_0 = -p_0.$$

Формула (8.75) дает:

$$A_0 = -\frac{p_0 b^2 - p_i a^2}{2(b^2 - a^2)}, \quad B_{-2} = \frac{(p_i - p_0) a^2 b^2}{b^2 - a^2};$$

все остальные коэффициенты в выражениях (8.71) и (8.72) обращаются в нуль. Находим:

$$F'(z) = -\frac{p_0 b^2 - p_i a^2}{2(b^2 - a^2)}, \quad \chi''(z) = \frac{(p_i - p_0) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{z^2};$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_0 b^2 - p_i a^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_i - p_0) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_0 b^2 - p_i a^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_i - p_0) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Эти формулы в точности совпадают с теми, которые были получены в параграфе 4.4.

Задача 1. Показать, что условия равенства нулю результирующих сил и моментов на контурах равнозначны следующим:

$$C_1' b - C_1 a = 0;$$

выражение $(C_0' b^2 - C_0 a^2)$ должно быть вещественным.

Задача 2. Найти распределение напряжений в круглой пластинке, если по равным и лежащим друг против друга дугам внешнего контура действует равномерное давление, а на внутреннем контуре давление равно нулю. Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p & \text{при } r = b \text{ и } -a \leq \theta \leq a \text{ и } \pi - a \leq \theta \leq \pi + a, \\ \sigma_r &= 0 & \text{при } r = a, \\ \tau_{r\theta} &= 0 & \text{при } r = a \text{ и } r = b. \end{aligned}$$

8.11. Растяжение пластинки с эллиптическим отверстием. Метод конформных преобразований. В предыдущих параграфах был решен ряд важных задач для случаев, когда исследуемые области имели круговой контур. Если контурные линии не являются окружностями, то изложенные выше методы надо видоизменить, используя конформные преобразования. В качестве примера рассмотрим бесконечную пластинку с эллиптическим отверстием. Область, лежащую вне эллиптического отверстия в комплексной плоскости z , можно отобразить в область, лежащую вне единичного круга в комплексной плоскости ζ , с помощью функции отображения

$$z = f(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad (8.85)$$

где $0 \leq m \leq 1$. Легко показать, что контур единичного круга $|\zeta| = 1$ соответствует эллипсу с центром в начале координат для плоскости z ; полуоси эллипса будут:

$$a = c(1 + m), \quad b = c(1 - m). \quad (8.86)$$

Выразим величины c и m через большую и малую полуоси:

$$c = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b}. \quad (8.87)$$

Примем, что большая полуось эллиптического отверстия совпадает с осью x , а равномерно распределенное растягивающее усилие S действует под углом β к оси x (рис. 8.11). Через Ox' , Oy' обозначим декартовы оси, полученные при повороте оси Ox на угол β до совмещения с направлением S . Как легко видеть, зависимости (1.15) и (1.17) получают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} + \sigma_{y'} &= \sigma_x + \sigma_y, \\ \sigma_{y'} - \sigma_{x'} + 2i\tau_{x'y'} &= e^{2i\beta} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}). \end{aligned}$$

Поскольку на бесконечности

$$\sigma_{x'} = S, \quad \sigma_{y'} = \tau_{x'y'} = 0,$$

будем иметь:

$$\sigma_x + \sigma_y = S, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -Se^{-2i\beta} \text{ на бесконечности.}$$

Далее, по формулам (8.40) и (8.42) находим

$$4 \operatorname{Re} F'(z) = S, \quad 2 [z\bar{F}''(z) + \chi'(z)] = -Se^{-2i\beta} \text{ на бесконечности.} \quad (8.88)$$

Так как по контуру отверстия внешние нагрузки не приложены, то

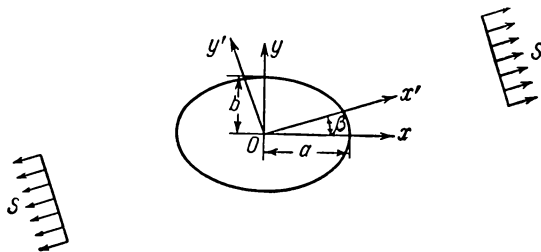


Рис. 8.11.

результатирующее усилие в любой точке контура должно равняться нулю. Таким образом, для эллиптического отверстия имеем:

$$\text{и } \left. \begin{aligned} F_x + iF_y &= 0 \\ F(z) + z\bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.89)$$

С помощью функции отображения $z = f(\zeta)$ можно выразить функции $F(z)$ и $\chi(z)$ через переменную ζ :

$$F(z) = F[f(\zeta)] = F_1(\zeta), \quad \chi(z) = \chi[f(\zeta)] = \chi_1(\zeta). \quad (8.90)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} F'(z) &= \frac{dF}{dz} = \frac{dF_1}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{F_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}, \\ \chi'(z) &= \frac{d\chi}{dz} = \frac{d\chi_1}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\chi_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}, \\ F''(z) &= \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{F_1'(\zeta)}{f'(\zeta)} \right] \frac{d\zeta}{dz} = \frac{F_1''(\zeta)f'(\zeta) - F_1'(\zeta)f''(\zeta)}{[f'(\zeta)]^3}, \\ \chi''(z) &= \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{\chi_1'(\zeta)}{f'(\zeta)} \right] \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\chi_1''(\zeta)f'(\zeta) - \chi_1'(\zeta)f''(\zeta)}{[f'(\zeta)]^3}. \end{aligned} \right\} \quad (8.91)$$

Подставляя эти выражения в формулы (8.39), (8.40), (8.42), (8.43) и (8.44), получаем:

$$u + iv = \frac{3-\nu}{E} F_1(\zeta) - \frac{1+\nu}{E} \left[\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)} \bar{F}'(\bar{\zeta}) + \bar{\chi}'(\bar{\zeta}) \right], \quad (8.92)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \frac{F_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}, \quad (8.93)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \frac{2}{[f'(\zeta)]^2} \left[\bar{f}(\bar{\zeta}) F_1''(\zeta) f'(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta}) F_1'(\zeta) f''(\zeta) + \right. \\ \left. + \chi_1''(\zeta) f'(\zeta) - \chi_1'(\zeta) f''(\zeta) \right], \quad (8.94)$$

$$F_x + iF_y = -l \left[F_1(\zeta) + \frac{f(\zeta)}{\bar{f}'(\bar{\zeta})} \bar{F}_1'(\bar{\zeta}) + \frac{\chi_1'(\bar{\zeta})}{\bar{f}'(\bar{\zeta})} \right]_A^B, \quad (8.95)$$

$$M = \operatorname{Re} \left[\chi_1(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)} \chi_1'(\zeta) - \frac{f(\zeta)\bar{f}(\bar{\zeta})}{f'(\zeta)} F_1'(\zeta) \right]_A^B. \quad (8.96)$$

Для того чтобы напряжения были однозначными, функции $F'(\zeta)$ и $\chi''(\zeta)$ должны иметь вид:

$$F_1'(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^{-n}, \quad \chi_1''(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^{-n}. \quad (8.97)$$

Из уравнений (8.89) и (8.95) видно, что на круге $|\zeta|=1$ имеет место соотношение

$$\bar{f}'(\bar{\zeta}) F_1(\zeta) + f(\zeta) \bar{F}_1'(\bar{\zeta}) + \bar{\chi}_1'(\bar{\zeta}) = 0.$$

Переходя к сопряженным функциям, будем иметь

$$f'(\zeta) \bar{F}_1(\bar{\zeta}) + \bar{f}(\bar{\zeta}) F_1'(\zeta) + \chi_1'(\zeta) = 0 \quad \text{при } |\zeta|=1. \quad (8.98)$$

Интегрируя (8.97), получаем:

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta) &= A_0 \zeta + A_1 \ln \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n \zeta^{-n+1}}{-n+1} + A, \\ \chi_1'(\zeta) &= B_0 \zeta + B_1 \ln \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n \zeta^{-n+1}}{-n+1} + B, \end{aligned} \right\} \quad (8.99)$$

где A и B — комплексные постоянные интегрирования. Подставляя выражения (8.99) в (8.92), находим, что компоненты перемещения будут однозначными при условии

$$(3-\nu)A_1 + (1+\nu)\bar{B}_1 = 0. \quad (8.100)$$

Постоянные A , B и вещественная часть A_0 характеризуют только перемещение абсолютно твердого тела, поэтому эти величины можно принять равными нулю. Для $|\zeta| = 1$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} f'(\zeta) &= c \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) = c(1 - me^{-i2\theta}), \\ \bar{f}(\bar{\zeta}) &= c \left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\bar{\zeta}}\right) = c(e^{-i\theta} + me^{i\theta}), \\ \bar{F}_1(\bar{\zeta}) &= \bar{A}_0 \bar{\zeta} + \bar{A}_1 \ln \bar{\zeta} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{A}_n \bar{\zeta}^{-n+1}}{-n+1} = \\ &= \bar{A}_0 e^{-i\theta} - i\bar{A}_1 \theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{A}_n e^{i(n-1)\theta}}{n-1}, \\ F'_1(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-in\theta}, \\ \chi'_1(\zeta) &= B_0 e^{i\theta} + iB_1 \theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n e^{-i(n-1)\theta}}{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.101)$$

Подставляя эти выражения в (8.98), получаем:

$$\begin{aligned} c(1 - me^{-i2\theta}) \left[\bar{A}_0 e^{-i\theta} - i\bar{A}_1 \theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{A}_n e^{i(n-1)\theta}}{n-1} \right] + \\ + c(e^{-i\theta} + me^{i\theta}) \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-in\theta} \right) + B_0 e^{i\theta} + iB_1 \theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n e^{-i(n-1)\theta}}{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при θ и $e^{in\theta}$ в последнем уравнении, находим:

$$\left. \begin{aligned} c\bar{A}_1 + B_1 &= 0, \\ A_n &= 0 \quad \text{при } n \geq 3, \\ -c\bar{A}_2 + \frac{cm}{3} \bar{A}_4 + cmA_0 + B_0 &= 0, \\ cA_1 + cmA_3 - \frac{B_3}{2} &= 0, \\ c\bar{A}_0 + cm\bar{A}_2 + cA_0 + mA_2 - B_2 &= 0, \\ -cm\bar{A}_0 + cA_2 + cmA_4 - \frac{B_4}{3} &= 0, \\ B_n &= 0 \quad \text{при } n \geq 5. \end{aligned} \right\} \quad (8.102)$$

Граничные условия на бесконечности дают:

$$A_0 = \frac{cS}{4}, \quad B_0 = -\frac{c^2 S e^{-2i\beta}}{2}.$$

Решая первое уравнение (8.102) совместно с (8.100), получаем

$$A_1 = B_1 = 0.$$

Решая остальные уравнения (8.102), будем иметь:

$$A_2 = \frac{cS}{4} (m - 2e^{2i\beta}), \quad B_2 = \frac{c^2 S}{2} (1 + m^2 - 2m \cos \beta),$$

$$B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{3cS}{2} e^{2i\beta}.$$

Тогда найдем:

$$F'(\zeta) = \frac{cS}{4} + \frac{cS}{4} (m - 2e^{2i\beta}) \zeta^{-2},$$

$$\chi''(\zeta) = -\frac{c^2 S}{2} e^{-2i\beta} + \frac{c^2 S}{2} (1 - m^2 - 2m \cos 2\beta) \zeta^{-2} - \frac{3cS}{2} e^{2i\beta} \zeta^{-4};$$

отсюда следует

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \frac{F'(\zeta)}{f'(\zeta)} =$$

$$= \frac{S [1 - m^2 - 2 \cos 2(\beta - \theta) + 2m \cos 2\theta \cos 2(\beta - \theta) - 2m \sin 2\theta \sin 2(\beta - \theta)]}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}. \quad (8.103)$$

Максимальное напряжение имеет место на конце большой полуоси ($\theta = 0$) при $\beta = \pi/2$. Поскольку в этой точке $\sigma_x = 0$, имеем

$$\sigma_{\max} = S \frac{1 - m^2 + 2 - 2m}{1 + m^2 - 2m} = S \frac{3 + m}{1 - m}.$$

Из формул (8.87) находим

$$m = \frac{a - b}{a + b};$$

отсюда

$$\sigma_{\max} = S \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right).$$

Таким образом, величина σ_{\max} возрастает по мере того, как эллипс становится более вытянутым.

Задача 1. Определить функции $F'(\zeta)$ и $\chi''(\zeta)$ в случае, если бесконечная пластинка с эллиптическим отверстием подвергается равномерному растяжению. Показать, что в этом случае максимальное напряжение, имеющее место на конце большой полуоси, равно

$$\sigma_{\max} = \frac{2Sa}{b}.$$

Задача 2. Определить функции $F'(z)$ и $\chi''(z)$ для бесконечной пластинки с круглым отверстием, находящейся в условиях простого растяжения на бесконечности. Применить вместо формулы (8.48) формулу (8.43), как было сделано в этом параграфе.

Задача 3. Бесконечная пластинка, ослабленная криволинейным полигональным отверстием, подвергается простому растяжению; усилия растяжения на бесконечности наклонены к оси x под углом β . Криволинейное полигональное отверстие в плоскости может быть отображено на единичный круг в плоскости ζ с помощью функции отображения

$$z = c(1 + m\zeta^{-n}),$$

где c, m — вещественные положительные постоянные, и $0 \leq m(n-1) \leq 1$.
Найти закон распределения напряжений в пластинке.

ГЛАВА 9

ИЗГИБ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ

9.1. Чистый изгиб призматических стержней. Если стержень изгибается двумя равными и противоположно направленными моментами M (рис. 9.1), то говорят, что стержень подвергается *чистому изгибу*. Из физических соображений вытекает, что в этом случае все компоненты напряжения, кроме σ_x , должны обратиться в нуль. Поэтому предположительно примем:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z), \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad (9.1)$$

здесь $\sigma_x(x, y, z)$ — неизвестная функция от x, y, z . Пользуясь законом Гука, находим компоненты деформации:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

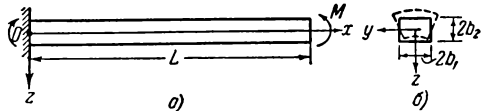


Рис. 9.1.

Подставим эти выражения в уравнения равновесия; последние будут удовлетворяться тождественно при условии

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0. \quad (9.2)$$

Это значит, что σ_x не зависит от x и является функцией только y и z . Если учесть условие (9.2), то уравнения совместности преобразуются к виду:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = 0, \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = 0, \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} = 0. \quad (9.5)$$

Интегрируя уравнение (9.3), получаем

$$\sigma_x = yf_1(z) + f_2(z), \quad (9.6)$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — неизвестные функции, зависящие только от z . Подставляя выражение (9.6) в равенство (9.5), находим

$$\frac{df_1}{dz} = 0, \quad \text{или} \quad f_1(z) = C_1,$$

где C_1 — постоянная. Подстановка (9.6) в равенство (9.4) приводит к уравнению

$$\frac{d^2f_2}{dz^2} = 0.$$

После интегрирования находим

$$f_2(z) = C_2z + C_3,$$

где C_2 и C_3 — постоянные. Отсюда

$$\sigma_x = C_1y + C_2z + C_3. \quad (9.7)$$

Выберем начало координатной системы в центре тяжести поперечного сечения, а плоскость xz совместим с плоскостью изгибающего момента. Тогда для любого плоского сечения, параллельного плоскости yz , должны иметь место равенства:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \int_A \int \sigma_x dA = 0, \\ M_y &= \int_A \int \sigma_x z dA = M, \\ M_z &= \int_A \int \sigma_x y dA = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

причем интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения A . Подставив (9.7) в первое из уравнений (9.8) и произведя интегрирование, получим

$$C_3 = 0;$$

третье условие дает

$$C_1I_z + C_2I_{yz} = 0,$$

где I_{yz} — центробежный момент инерции поперечного сечения стержня относительно осей y и z , а I_z — момент инерции относительно оси z . Для симметричных сечений $I_{yz} = 0$ и, соответственно, $C_1 = 0$. Из второго уравнения (9.8) находим

$$C_2I_y = M, \quad \text{или} \quad C_2 = \frac{M}{I_y}.$$

Отсюда следует:

$$\sigma_x = \frac{Mz}{I_y}, \quad (9.9)$$

где I_y — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси y . Это выражение для σ_x совпадает с расчетной формулой на чистый изгиб, известной из курса «Сопротивление материалов».

Определим, далее, перемещения при чистом изгибе. Из уравнений (9.1), (9.9) и соотношений закона Гука имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{EI_y} z, \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu M}{EI_y} z, \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu M}{EI_y} z, \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (9.13)$$

Из уравнения (9.10) после несложного интегрирования получаем

$$u = \frac{M}{EI_y} xz + u_0(y, z),$$

где $u_0(y, z)$ — неизвестная функция y и z . Второе и третье уравнения (9.13) дают:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{M}{EI_y} x - \frac{\partial u_0}{\partial z}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial u_0}{\partial y} x + v_0(y, z), \\ w &= -\frac{M}{EI_y} \frac{x^2}{2} - \frac{\partial u_0}{\partial z} x + w_0(y, z), \end{aligned}$$

где $v_0(y, z)$ и $w_0(y, z)$ — неизвестные функции y и z . Подставляя эти выражения в (9.11) и (9.12) и группируя члены, находим:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} x = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu M}{EI_y} z, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} x = \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\nu M}{EI_y} z.$$

Так как члены в правой стороне этих уравнений не зависят от x , то должно быть:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0$$

и

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu M}{EI_y} z = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\nu M}{EI_y} z = 0.$$

Имеем

$$v_0 = -\frac{\nu M}{EI_y} yz + g_1(z), \quad w_0 = -\frac{\nu M}{EI_y} \frac{z^2}{2} + g_2(y),$$

где $g_1(z)$ и $g_2(y)$ — соответственно функции от z и y . Перемещения оказываются равными:

$$v = -\frac{\partial u_0}{\partial y} x - \frac{\nu M}{EI_y} yz + g_1(z),$$

$$w = -\frac{M}{EI_y} \frac{x^2}{2} - \frac{\partial u_0}{\partial z} x - \frac{\nu M}{EI_y} \frac{z^2}{2} + g_2(y).$$

Подставляя эти выражения в третье из уравнений (9.13),

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

находим

$$-2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial z} x + \frac{dg_1(z)}{dz} + \frac{dg_2(y)}{dy} - \frac{\nu M}{EI_y} y = 0.$$

Последние три члена не зависят от x ; поэтому можно записать:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dg_2}{dy} - \frac{\nu M}{EI_y} y = -\frac{dg_1}{dz}.$$

Рассматривая второе из этих уравнений, замечаем, что члены, стоящие в левой его части, являются функциями только от y , а член в правой части — функцией только от z . Функция от y может быть равна функции от z для всех значений y и z только в том случае, если обе функции равны постоянной величине; обозначим ее через a_1 . Следовательно, функции g_1 , g_2 и u_0 должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{dg_1}{dz} = -a_1, \quad \frac{dg_2}{dy} - \frac{\nu M}{EI_y} y = a_1$$

и

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial z} = 0.$$

Сравнивая эти зависимости с уравнениями (9.3) — (9.5), находим

$$u_0 = a_2 y + a_3 z + a_4.$$

Прямое интегрирование дает

$$g_1 = -a_1 z + a_5, \quad g_2 = \frac{\nu M}{EI_y} \frac{y^2}{2} + a_1 y + a_6,$$

где a_2 , a_3 , a_4 , a_5 и a_6 — постоянные. Выражения для перемещений принимают вид:

$$u = \frac{M}{EI_y} xz + a_2 y + a_3 z + a_4,$$

$$v = -\frac{\nu M}{EI_y} yz - a_2 x - a_1 z + a_5,$$

$$w = -\frac{M}{2EI_y} (x^2 - \nu y^2 + \nu z^2) - a_3 x + a_1 y + a_6.$$

Чтобы определить постоянные интегрирования, будем считать, что центр тяжести сечения стержня, а также элементарный отрезок оси x и элемент плоскости xz , закреплены в начале координат. Следовательно, при $x = y = z = 0$ должно быть

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Отсюда вытекает

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0.$$

Окончательно перемещения получаются равными:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M}{EI_y} xz, \\ v &= -\frac{\nu M}{EI_y} yz, \\ w &= -\frac{M}{2EI_y} (x^2 - \nu y^2 + \nu z^2). \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

Из формул (9.14) находим, что в плоскости $z = 0$ будет $u = 0$ и $v = 0$. Следовательно, плоскость $z = 0$ является нейтральной плоскостью стержня при изгибе. Чтобы определить изогнутую ось стержня, рассмотрим какую-либо точку оси, например, точку, имеющую до деформации координаты $(x, 0, 0)$. После изгиба эта точка будет иметь координаты (x', y', z') , причем

$$x' = x + u = x, \quad y' = 0 + v = 0, \quad z' = 0 + w = -\frac{M}{2EI_y} x^2.$$

или

$$z' = -\frac{M}{2EI_y} x'^2.$$

Таким образом, изогнутая ось представляет собой параболу с радиусом кривизны R , определяемым из уравнения

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 z'}{dx'^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{\frac{M}{EI_y}}{\left(1 + \frac{M^2 x'^2}{E^2 I_y^2}\right)^{3/2}} \approx -\frac{M}{EI_y}. \quad (9.15)$$

Мы принимаем здесь, что величина $\frac{ML}{EI_y}$ является малой. Полученные соотношения совпадают с формулой Бернулли — Эйлера из элементарной теории изгиба.

Рассмотрим поперечное сечение стержня $x = C$, плоское до изгиба. После деформации точки этого поперечного сечения будут иметь следующие новые координаты:

$$\begin{aligned} x' &= C + u = C + \frac{M}{EI_y} zC = C \left(1 + \frac{M}{EI_y} z\right), \\ z' &= z + w = z - \frac{M}{2EI_y} (C^2 - \nu y^2 + \nu z^2). \end{aligned}$$

Решая совместно эти уравнения и пренебрегая членами, содержащими $\frac{M}{EI_y}$ в степени выше первой, получаем

$$x' \approx C \left(1 + \frac{M}{EI_y} z' \right).$$

Это значит, что при чистом изгибе плоские поперечные сечения остаются плоскими, как это предполагается в элементарной теории. Чтобы исследовать искажение поперечного сечения в его плоскости, рассмотрим стороны $y = \pm b_1$ (см. рис. 9.1). После изгиба будет

$$y' = \pm b_1 + v = \pm \left(1 - \frac{\nu M}{EI_y} z \right) \approx \pm b_1 \left(1 - \frac{\nu M}{EI_y} z' \right).$$

Обе стороны остаются прямыми, но оказываются наклоненными к своему первоначальному положению, как показано на рис. 9.1 пунктирными линиями. Для двух других сторон $z = \pm b_2$ поперечного сечения после изгиба находим уравнения

$$\begin{aligned} z' = \pm b_2 + w &= \pm b_2 - \frac{M}{2EI_y} [C^2 + \nu(b_2^2 - \nu y'^2)] \approx \\ &\approx \pm b_2 - \frac{M}{2EI_y} [C^2 + \nu(b_2^2 - \nu y'^2)]. \end{aligned}$$

Следовательно, эти стороны переходят в параболические кривые, как изображено на рисунке.

Задача. Определить величины C_1, C_2, C_3 в уравнении (9.7), если изгибающий момент приложен в наклонной плоскости и поперечное сечение стержня не является симметричным.

Отв.

$$\sigma_x = \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2} z + \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2} y.$$

9.2. Призматические стержни при совместном действии изгиба и сжатия. Рассмотрим случай сосредоточенной поперечной нагрузки,

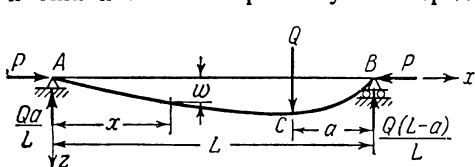


Рис. 9.2

действующей на сжатый стержень со свободно или шарнирно опертыми концами (рис. 9.2). Свободным или шарнирным опиранием считается такой вид закрепления, когда эти концы могут свободно вращаться,

но не могут перемещаться в направлении z . Будем пользоваться обычным в теории сопротивления материалов правилом знаков для изгибающих моментов: момент будем считать положительным, если он вызывает напряжения сжатия в верхних волокнах

балки. Таким образом, слева от нагрузки Q изгибающий момент равен

$$M = Pw + \frac{Qax}{L},$$

а справа от нагрузки Q

$$M = Pw + \frac{Q(L-a)(L-x)}{L},$$

где L — длина балки, a — расстояние от точки приложения нагрузки Q до правой опоры B , w — прогиб.

Можно показать, что в данном случае справедлива та же формула Бернулли — Эйлера, которая применялась в параграфах 4.2 и 9.1*):

$$M = -\frac{EI}{R}.$$

Здесь под I понимается момент инерции относительно оси y . Для малых прогибов имеем

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2w}{dx^2} \quad \text{и} \quad M \approx -EI \frac{d^2w}{dx^2}.$$

Отсюда

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -Pw - \frac{Qax}{L} \quad \text{при } x \leq L - a, \quad (9.16)$$

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -Pw - \frac{Q(L-a)(L-x)}{L} \quad \text{при } x \geq L - a. \quad (9.17)$$

Введем обозначение

$$\frac{P}{EI} = k^2.$$

Уравнение (9.16) принимает вид

$$\frac{d^2w}{dx^2} + k^2w = -\frac{Qa}{EIL} x;$$

*) Знак плюс или минус в формуле Бернулли — Эйлера зависит от правила знаков, принятого для моментов M , и от выбранных координатных осей. Определить знак можно следующим образом. Примем, что на балку действуют положительные изгибающие моменты. Найдем упругую линию, отвечающую этим моментам. Если кривизна упругой линии отрицательна, то в формулу Бернулли — Эйлера надо подставлять знак минус. Если же кривизна положительна, то в формуле берется знак плюс. Например, в рассматриваемом примере упругая линия балки под влиянием положительных изгибающих моментов будет иметь вид, показанный на рис. 9.2. При такой упругой линии уклон уменьшается с увеличением x , и поэтому кривизна будет отрицательной. Следовательно, в формуле Бернулли — Эйлера надо выбрать знак минус. С другой стороны, если направление вверх принять для оси z за положительное и оставить то же правило знаков для M , то прогиб w , направленный вниз, становится в этом случае отрицательным.

Здесь уклон будет уже увеличиваться с возрастанием x . Кривизна $\frac{1}{R}$ окажется положительной, так что в формуле Бернулли — Эйлера надо брать знак плюс.

общее его решение будет иметь вид:

$$w = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx - \frac{Qa}{PL} x. \quad (9.18)$$

Аналогичным образом находим общее решение уравнения (9.17):

$$w = C_3 \cos kx + C_4 \sin kx - \frac{Q(L-a)(L-x)}{PL}, \quad (9.19)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

При $x=0$ и $x=L$ должно быть $w=0$. Поэтому имеем

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_3 = -C_4 \operatorname{tg} kL.$$

В точке приложения нагрузки Q при $x=L-a$ оба отрезка упругой линии согласно уравнениям (9.18) и (9.19) должны иметь одинаковый прогиб и одинаковый уклон. Получаем:

$$\begin{aligned} C_2 \sin k(L-a) - \frac{Qa}{PL}(L-a) &= \\ &= C [\sin k(L-a) - \operatorname{tg} kL \cos k(L-a)] - \frac{Qa}{PL}(L-a) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} C_2 k \cos k(L-a) - \frac{Qa}{PL} &= \\ &= C_4 k [\cos k(L-a) + \operatorname{tg} kL \sin k(L-a)] + \frac{Q(L-a)}{PL}. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$C_2 = \frac{Q \sin ka}{Pk \sin kL}, \quad C_4 = -\frac{Q \sin k(L-a)}{Pk \operatorname{tg} kL}.$$

Уравнения для обеих частей упругой линии при таких значениях постоянных будут иметь вид:

$$w = \frac{Q \sin ka}{Pk \sin kL} \sin kx - \frac{Qa}{PL} x \quad \text{при } x \leq L-a,$$

$$w = \frac{Q \sin k(L-a)}{Pk \sin kL} \sin k(L-x) - \frac{Q(L-a)(L-x)}{PL} \quad \text{при } x \geq L-a.$$

В частном случае нагрузки, приложенной посередине балки, упругая линия будет симметричной; наибольший прогиб имеет место при $x = \frac{L}{2}$. Подставляя $x = \frac{L}{2}$ и $a = \frac{L}{2}$ в каждую из приведенных выше формул, находим

$$w_{\max} = \frac{Q \operatorname{tg} \left(\frac{kL}{2} \right)}{2Pk} - \frac{QL}{4P}.$$

Пользуясь соотношением $P = k^2 EI$, запишем это выражение для w_{\max} в следующем виде:

$$w_{\max} = \frac{QL^3}{48EI} \frac{3 \left[\operatorname{tg} \left(\frac{KL}{2} \right) - \frac{kL}{2} \right]}{\left(\frac{kL}{2} \right)^3}. \quad (9.20)$$

При увеличении осевой силы P значение k возрастает. Если параметр $\frac{kL}{2}$ приближается к значению $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \left(\frac{kL}{2} \right)$ стремится к бесконечности. Следовательно, если положить $\frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2}$ или

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad (9.21)$$

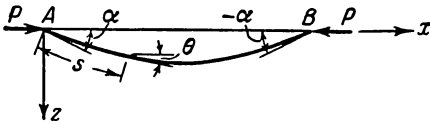
то прогиб стержня окажется бесконечно большим даже при весьма малой поперечной нагрузке Q . Бесконечно большое значение для прогиба было получено нами из-за того, что кривизна определялась по приближенной формуле. Этой формулой можно пользоваться только при малых прогибах. Расчет показывает, однако, что при действии на стержень сжимающей нагрузки, равной P (9.21), стержень получит большие прогибы и разрушится вследствие интенсивного изгиба, независимо от того, как бы мала ни была поперечная сила. Эта продольная сжимающая нагрузка носит название *критической нагрузки* или нагрузки, вызывающей *продольный изгиб* (buckling load). Задача о продольном изгибе стержней впервые была рассмотрена Эйлером; поэтому критическую нагрузку называют также *эйлеровой силой*. В следующем параграфе мы вновь вернемся к определению этой силы.

9.3. Призматические стержни под действием осевого сжатия. Устойчивость упругого стержня. Рассмотрим случай, когда стержень, шарнирно опертый по концам, находится под действием сжимающей нагрузки P , приложенной в центре тяжести сечения. Допустим, что величина нагрузки P лежит ниже критического значения. Можно показать, что при этом стержень будет оставаться прямым, подвергаясь только осевому сжатию. Эта прямолинейная форма упругого равновесия называется *устойчивой*. Иными словами, если в результате бесконечно малого возмущения (например, благодаря действию малой поперечной силы) стержень окажется выведенным из равновесия, то он будет возвращаться к прямолинейной форме, как только прекратится действие возмущающего фактора. В том же случае, когда нагрузка P превышает критическую, оказываются возможными *две* равновесные формы*). Стержень может остаться

*) Теорема об однозначности решения, о которой говорилось в параграфе 3.6, здесь теряет силу, так как соотношения между деформациями и перемещениями становятся нелинейными (см. об этом параграф 10.6.)

прямолинейным, либо принять изогнутую форму. Мы увидим ниже, что прямолинейная форма равновесия является *неустойчивой*, а изогнутая форма — *устойчивой*. При критическом значении нагрузки состояние равновесия будет *безразличным*. Говоря о неустойчивом равновесии, мы имеем в виду, что тело, будучи выведено из состояния равновесия в результате приложения малой силы, получает нарастающую деформацию и после удаления этой силы. Если же деформация тела сохраняется после удаления нагрузки, то принято говорить, что тело находится в состоянии безразличного равновесия.

Допустим, что стержень оказался изогнутым вследствие действия малого возмущения. Координатные оси выберем, как показано на рис. 9.3; изгибающий момент в любом поперечном сечении m окажется равным Pw , а дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь вид:



$$\frac{EI}{R} = -Pw.$$

Точное выражение для кривизны имеет вид

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds};$$

здесь s — длина кривой, отсчитываемая от конца A изогнутого стержня, а θ — угол между касательной к кривой и осью x , как изображено на рис. 9.3. Следовательно,

$$EI \frac{d\theta}{ds} + Pw = 0. \tag{9.22}$$

Дифференцируя уравнение (9.22) по s и учитывая соотношение

$$\frac{dw}{ds} = \sin \theta,$$

получаем

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0. \tag{9.23}$$

Умножим оба члена уравнения на $d\theta$ и проинтегрируем по θ . Принимая во внимание зависимость

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} d\theta = \frac{d \left(\frac{d\theta}{ds} \right)}{ds} d\theta = d \left(\frac{d\theta}{ds} \right) \frac{d\theta}{ds},$$

найдем

$$EI \int \frac{d\theta}{ds} d \left(\frac{d\theta}{ds} \right) + P \int \sin \theta d\theta = C,$$

где C — постоянная интегрирования. Отсюда

$$\frac{EI}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - P \cos \theta = C.$$

На конце A должно быть

$$\theta = \alpha \text{ и } M = EI \frac{d\theta}{ds} = 0,$$

следовательно, величина C равна ($-P \cos \alpha$). Введем обозначение $k^2 = \frac{P}{EI}$; тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\theta}{ds} = \pm k \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}.$$

При увеличении дуги s угол θ уменьшается. Поэтому производная $\frac{d\theta}{ds}$ отрицательна, и перед корнем следует выбрать знак минус. Отсюда

$$ds = \frac{d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}.$$

Общую длину L стержня получим, интегрируя выражение для ds :

$$\begin{aligned} L &= \int ds = - \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \\ &= \frac{1}{2k} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)}}. \end{aligned}$$

Обозначим $\sin \frac{\alpha}{2}$ через p и введем новую переменную φ , определяемую соотношением

$$\sin \frac{\theta}{2} = p \sin \varphi.$$

При изменении θ от $-\alpha$ до $+\alpha$ величина $\sin \varphi$ меняется от -1 до $+1$, а угол φ принимает значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Выразим $d\theta$ и L через φ :

$$d\theta = \frac{2p \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}}$$

и

$$L = \frac{2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2K}{k}. \tag{9.24}$$

Величина

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}}$$

называется полным эллиптическим интегралом первого рода. Значения K для разных параметров p помещены в таблицах*).

Если прогиб весьма мал, то угол α , а следовательно, и параметр p будут очень малы, и величиной $p^2 \sin^2 \varphi$ можно пренебречь по сравнению с 1. В этом случае

$$L = \frac{2}{K} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{EI}{P}}.$$

Отсюда находим выражение для критической силы:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Вычислим, далее, прогиб посередине стержня при $\theta = 0$. Учитывая соотношение $d\omega = ds \sin \theta$, имеем

$$\delta = \frac{1}{2k} \int_0^{\alpha} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

Выражая δ через угол φ , найдем

$$\delta = \frac{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{2p}{k}. \quad (9.25)$$

Из таблиц эллиптических интегралов определяем величину K для разных значений α или p . Из уравнения (9.24) имеем

$$\frac{P}{P_{\text{кр}}} = \frac{PL^2}{\pi^2 EI} = \frac{4K^2}{\pi^2};$$

максимальный прогиб определяется равенством

$$\frac{\delta}{L} = \frac{2p}{\pi \sqrt{\frac{P}{P_{\text{кр}}}}}.$$

*) Краткие таблицы значений K можно найти в книге В. О. Peirce, *A short table of integrals*, Boston, 1929. (Такие таблицы приведены в «Справочнике по математике» И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева и многих других справочных книгах. *Прим. ред.*)

Координату x_B можно вычислить следующим образом:

$$x_B = \int dx = \int \cos \theta ds = \frac{1}{2k} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2p^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Учитывая соотношение $1 - 2p^2 \sin^2 \varphi = 2(1 - p^2 \sin^2 \varphi) - 1$, находим

$$x_B = \frac{4}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2(2\bar{E} - K)}{k},$$

или

$$\frac{x_B}{L} = 2 \frac{\bar{E}}{K} - 1,$$

где \bar{E} — так называемый полный эллиптический интеграл второго рода.

В таблице 9.1 приведены величины $P/P_{кр}$, x_B/L и δ/L , вычисленные для различных значений α .

Таблица 9.1

α	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	176°
$P/P_{кр}$	1,015	1,063	1,152	1,293	1,518	1,884	2,541	4,029	9,116
x_B/L	0,970	0,881	0,741	0,560	0,349	0,123	-0,107	-0,340	-0,577
δ/L	0,110	0,211	0,296	0,359	0,396	0,402	0,375	0,313	0,211
M	0,112	0,224	0,341	0,464	0,601	0,757	0,953	1,261	1,923

Выясним теперь, в какой мере устойчивы различные формы равновесия. Изгибающий момент в середине стержня, отвечающий равносному состоянию стержня, равен $P\delta$. В безразмерной форме имеем

$$M = \frac{P}{P_{кр}} \frac{\delta}{L} = \frac{4Kp}{\pi^2}.$$

В таблице 9.1 даны безразмерные параметры момента M , относящиеся к разным значениям α . На рис. 9.4 дан график изменения M в зависимости от δ/L . Будем считать, что на стержень действует сжимающая нагрузка P' и что стержень имеет некоторую стрелу прогиба δ , причем величины P' и δ не обязательно

соответствуют равновесному состоянию. Наибольший безразмерный параметр изгибающего момента равен

$$M' = \frac{P'}{P_{кр}} \frac{\delta}{L}.$$

Так как величина P' не зависит от δ , то график зависимости момента M' от δ/L будет иметь вид прямой линии.

Стержень окажется в состоянии равновесия при условии

$$M = M',$$

т. е. если кривая $M(\delta/L)$ пересекается с кривой $M'(\delta/L)$. На рисунке 9.4. видно, что при $P' < P_{кр}$ эти кривые пересекаются только в одной точке, совпадающей с началом координат. Таким образом,

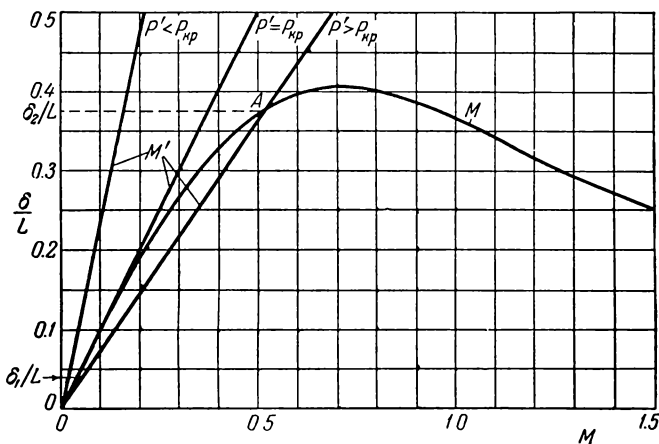


Рис. 9.4.

стержень будет иметь только одну возможную форму равновесия — прямолинейную, при которой $\delta/L = 0$. При $P' > P_{кр}$ имеют место уже две точки пересечения; одна из них соответствует ординате $\delta/L = 0$, а другая — некоторому значению δ/L , отличному от нуля. Следовательно, в этом случае имеются две равновесные формы стержня — прямолинейная и изогнутая.

Примем, что в исходном состоянии было $\delta = 0$. Пусть некоторое малое возмущение вывело стержень из состояния равновесия и придало ему прогиб δ_1 . Из графика видно, что при $P' < P_{кр}$ будет $M > M'$. Это означает, что величина изгибающего момента, вызываемого силой P' , недостаточна, чтобы удержать стержень в изогнутой форме; стержень возвращается к первоначальной прямолинейной форме, как только возмущение будет прекращено. Таким образом, при $P' < P_{кр}$ прямолинейная форма равновесия

является устойчивой. При $P' > P_{кр}$ имеем $M < M'$. Момент M' вызывает дальнейший прогиб стержня; прогиб будет увеличиваться. Отсюда вытекает вывод, что при $P' > P_{кр}$ прямолинейная форма равновесия является неустойчивой. Стержень, будучи выведен из прямолинейной формы, будет продолжать изгибаться, пока δ/L не достигнет значения, при котором линии M и M' вновь пересекутся. Если стержень выведен из состояния равновесия так, что наибольший прогиб превышает δ_2/L , то $M > M'$, и стержень вернется к равновесному положению, определяемому точкой A на рис. 9.4. В том же случае, когда после возмущения наибольший безразмерный прогиб стержня будет меньше, чем δ_2/L , то M окажется меньше M' , и стержень будет изгибаться дальше, переходя к положению равновесия A . Следовательно, эта изогнутая форма равновесия является устойчивой. При $P' = P_{кр}$ линия M' (δ/L) совпадает с касательной к кривой M (δ/L) в начале координат. Таким образом, если возмущение бесконечно мало, то стержень останется в равновесии в смещенном положении. Это соответствует понятию *безразличного равновесия**)

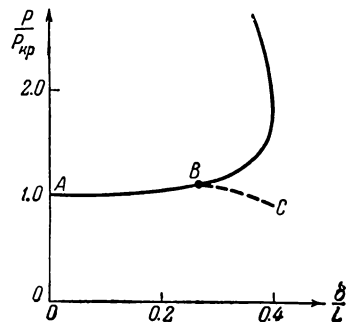


Рис. 9.5.

На рис. 9.5 вычерчена кривая зависимости прогиба от нагрузки, полученная по данным таблицы 9.1. Из графика ясно, что при заданной нагрузке P стержень имеет одну равновесную форму ($\delta/L = 0$) при $P/P_{кр} < 1$, и две формы равновесия, если $P/P_{кр} > 1$. Принимая прогиб весьма малым, получим ту самую критическую нагрузку, которая отвечает точке бифуркации на графике зависимости $P/P_{кр}$ от δ/L . Напомним о сделанном нами выше допущении, по которому при возрастании нагрузки материал остается упругим. В некоторой точке B на рис. 9.5 совместные напряжения сжатия и изгиба во внешних волокнах достигнут предела упругости. За этой точкой сопротивление стержня быстро уменьшается, и кривая «нагрузка — прогиб» будет следовать по пунктирной линии BC . Таким образом, максимальная нагрузка, которую может выдержать стержень, соответствует ординате точки B и несколько превышает критическую нагрузку. Ниже будет показано, что максимальную сжимающую нагрузку, которую может выдержать реальный стержень, можно также приближенно считать равной $P_{кр}$. Вычисления, которые надо провести для определения максимальной нагрузки, весьма громоздки; между тем критическая нагрузка может быть найдена

*) См. F. L. Ryder, A rational explanation of column behaviour, Trans. ASCE, т. 113, 1948, 40—78.

относительно просто. Исходя из этих соображений, в практических расчетах в качестве максимальной нагрузки, которую может выдерживать стержень, принимают именно критическую силу.

9.4. Критические нагрузки для стержней постоянного поперечного сечения. В предыдущем параграфе было показано, что расчет на продольный изгиб может быть значительно упрощен, если требуется определить только критическую силу. При этом можно считать прогибы малыми и применять приближенную формулу для кривизны. Воспользуемся этим методом и вычислим критические нагрузки для стержней постоянного поперечного сечения при разных условиях закрепления концов. Если определять кривизну по приближенной формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2w}{dx^2},$$

то для стержня с шарнирно опертыми концами уравнение (9.22) принимает вид

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} + Pw = 0. \quad (9.26)$$

Это уравнение вытекает из условия, что сумма моментов относительно любого сечения равна нулю. Простота структуры уравнения объясняется тем, что в рассмотренном выше случае моменты и поперечные силы в концевых опорах были равны нулю. При других граничных условиях поперечная сила и момент в опорных сечениях будут, вообще говоря, неизвестны; поэтому уравнение равновесия примет следующий вид:

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} + Pw = Q_0x + M_0; \quad (9.27)$$

здесь Q_0 — поперечная сила, а M_0 — изгибающий момент для концевого сечения стержня. Дифференцируя уравнение (9.27) по x , получаем

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) + P \frac{dw}{dx} = Q_0.$$

Выполняя повторное дифференцирование, находим

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2w}{dx^2} = 0. \quad (9.28)$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению равновесия стержня, имеющего любые граничные условия. Это уравнение можно выразить так, что результирующая поперечных сил, действующих на элемент стержня, равна нулю.

Для стержней постоянного сечения, изготовленных из однородных материалов, величина EI не зависит от x ; при этом уравне-

ние (9.28) приводится к виду

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (9.29)$$

где по-прежнему $k^2 = P/EI$. Уравнение (9.29) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами; метод решения его хорошо известен. Общее решение уравнения будет иметь вид:

$$w = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4, \quad (9.30)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — постоянные.

Рассмотрим задачи с различными граничными условиями.

Случай 1. Оба конца стержня оперты шарнирно. В случае стержня с шарнирно опертыми концами (рис. 9.6, а) граничные условия выражаются в том, что прогиб и изгибающий

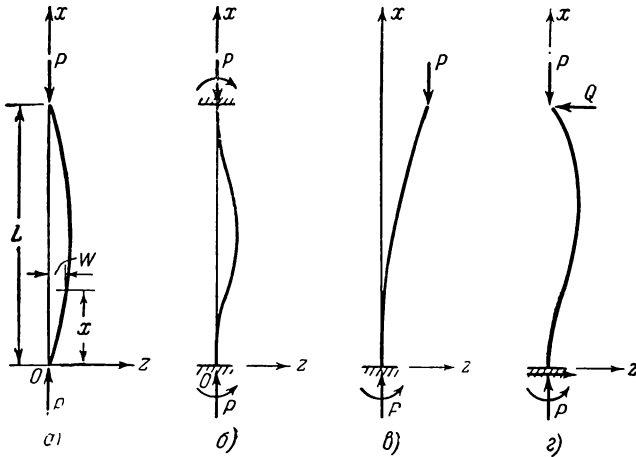


Рис. 9.6.

момент на обоих концах равны нулю. Здесь должно быть, следовательно,

$$w = 0 \text{ и } \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = L.$$

Пользуясь выражением (9.30), находим:

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, & C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3 L + C_4 &= 0, \\ C_2 &= 0, & -C_1 k^2 \sin kL - C_2 k^2 \cos kL &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$C_2 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_1 \sin kL = 0.$$

Последнее условие будет выполнено, если $C_1 = 0$ или $\sin kL = 0$. При $C_1 = 0$ прогиб w тождественно равен нулю. Это означает, что одна из возможных равновесных форм стержня является прямолинейной формой. Если величина w не равна нулю, то должно быть

$$\sin kL = 0,$$

откуда

$$kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

или

$$P_n = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}. \quad (9.31)$$

Если P_n определяется выражением (9.31), то прогибы стержня, находящегося в равновесии, могут быть отличны от нуля. Другими словами, изогнутая равновесная форма оказывается возможной лишь при том условии, что значение P_n отвечает равенству (9.31). Наименьшее значение P_n имеет место при $n = 1$; таким образом, критическая сила равна

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Уравнение упругой линии имеет вид

$$w = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Величина прогиба зависит от постоянной C_1 , которую нельзя найти, исходя из приближенной теории. Определить прогибы становится возможным лишь с помощью точной формулы для кривизны. Решение

$$C_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

называется *тривиальным решением* исходного уравнения. Задачу определения значений k , при которых $C_n \neq 0$ и решение не является тривиальным, называют иногда *задачей о собственных значениях*. Таким образом, применяя приближенную формулу для кривизны, мы сводим задачу к определению наименьшей нагрузки, при которой становится возможной изогнутая форма равновесия.

Случай 2. Оба конца стержня защемлены. В этом случае (рис. 9.6, б) граничные условия будут:

$$w = 0 \text{ и } \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = L.$$

После подстановки выражения (9.30) эти условия принимают вид:

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 = 0, \quad C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3 L + C_4 = 0, \\ kC_1 + C_3 = 0, \quad kC_1 \cos kL - kC_2 \sin kL + C_3 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} C_4 &= -C_2, & C_3 &= -kC_1, \\ C_1(\sin kL - kL) + C_2(\cos kL - 1) &= 0, \\ C_1(\cos kL - 1) - C_2 \sin kL &= 0. \end{aligned}$$

Исключая C_1 из последних двух уравнений, получаем

$$C_2[(\cos kL - 1)^2 + \sin kL(\sin kL - kL)] = 0.$$

После упрощений приходим к уравнению

$$C_2 \sin \frac{kL}{2} \left(\sin \frac{kL}{2} - \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} \right) = 0.$$

Желая найти нетривиальное решение, мы должны положить

$$\sin \frac{kL}{2} = 0,$$

либо

$$\sin \frac{kL}{2} - \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} = 0.$$

При $\sin \frac{kL}{2} = 0$ имеем:

$$\frac{kL}{2} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

и

$$P_n = \frac{4n^2\pi^2 EI}{L^2}.$$

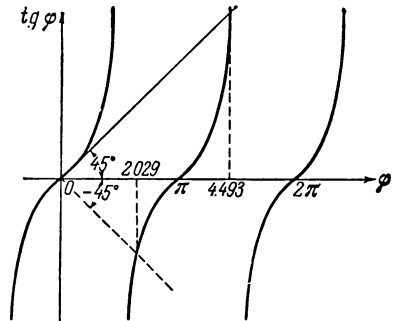


Рис. 9.7.

Наименьшая нагрузка имеет место при $n = 1$ и равна

$$P_1 = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}.$$

Рассмотрим, далее, уравнение

$$\sin \frac{kL}{2} - \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} = 0,$$

которое можно записать в иной форме:

$$\operatorname{tg} \varphi - \varphi = 0, \quad (9.32)$$

где $\varphi = kL/2$. Это уравнение можно решить графически. Начертим кривые, изображающие зависимость $\operatorname{tg} \varphi$ от φ (рис. 9.7). Корням уравнения (9.32) отвечают точки пересечения этих кривых с линией, имеющей уравнение $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$ и наклоненной к оси абсцисс под углом 45° . Наименьший корень оказывается равным

$$\varphi = \frac{kL}{2} = 4,493,$$

что соответствует величине силы

$$P = \frac{80,64EI}{L^2}.$$

Но это значение P больше P_1 ; из этого сопоставления заключаем, что в данном случае критическая нагрузка равна P_1 :

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}.$$

Принимая $\sin(kL/2) = 0$, находим $C_1 = 0$, следовательно, уравнение упругой линии будет иметь вид

$$w = C_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right);$$

значение C_2 остается неопределенным.

Случай 3. Один из концов стержня зашпемлен, а другой — свободен. Граничные условия запишутся в данном случае (рис. 9.6, в) следующим образом: для зашпемленного конца:

$$\text{при } x = 0 \quad w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dx} = 0;$$

для свободного конца:

$$\text{при } x = L \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^3 w}{dx^3} + k^2 \frac{dw}{dx} = 0;$$

последнее уравнение выражает условие равенства нулю поперечной силы на свободном конце. Пользуясь выражением (9.30), получаем:

$$C_2 + C_4 = 0, \quad C_1 k + C_3 = 0,$$

$$C_1 \sin kL + C_2 \cos kL = 0, \quad C_3 = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$C_1 = C_3 = 0, \quad C_4 = -C_2, \quad C_2 \cos kL = 0.$$

Последнее условие будет выполнено при $C_2 = 0$, что приводит к тривиальному решению, либо к уравнению $\cos kL = 0$; в последнем случае будет

$$kL = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, \dots$$

или

$$P_n = \frac{(2n + 1)^2 \pi^2 EI}{4L^2}.$$

Минимальное значение P отвечает $n = 0$ и равно

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}.$$

Уравнение упругой линии имеет вид

$$w = C_2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right).$$

Случай 4. Один конец стержня защемлен, а другой — оперт шарнирно. В этом случае (рис. 9.6, 2) граничные условия имеют вид:

$$\text{при } x = 0 \quad w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dx} = 0;$$

$$\text{при } x = L \quad w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0.$$

Подставляя в эти условия выражения (9.30), получаем

$$C_2 + C_4 = 0, \quad C_1 k + C_3 = 0,$$

$$C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3 L + C_4 = 0, \quad C_1 \sin kL + C_2 \cos kL = 0.$$

Отсюда

$$C_2 = -C_1 kL, \quad C_3 = -C_1 k,$$

$$C_4 = C_1 kL, \quad C_1 (\sin kL - kL \cos kL) = 0.$$

Последнее условие приводит либо к тривиальному решению $C_1 = 0$, либо к уравнению

$$\sin kL - kL \cos kL = 0,$$

из которого можно определить параметр k . Это уравнение можно переписать в виде (9.32):

$$\operatorname{tg} \varphi - \varphi = 0,$$

где $\varphi = kL$. Наименьший корень уравнения равен

$$kL = 4,493;$$

он соответствует критической силе

$$P_{кр} = \frac{20,16EI}{L^2}.$$

Уравнение упругой линии принимает вид

$$w = C_1 [\sin kx - kL \cos kx + k(L - x)].$$

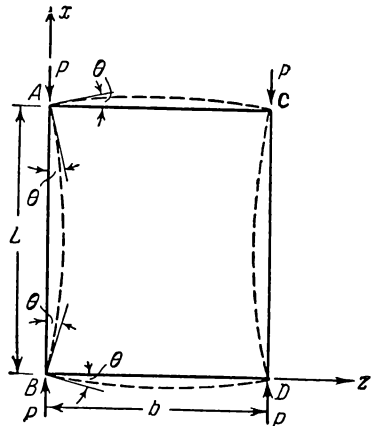


Рис. 9.8.

9.5. Выпучивание рам. стержни с упруго защемленными концами.

Исследуем выпучивание симметричной рамы, изображенной на рис. 9.8. Узлы рамы будем считать жесткими. Это означает, что узел может воспринимать изгибающие моменты и что углы между различными элементами рамы, сходящимися в узле, остаются неизменными. Примем также, что узлы не получают боковых

смещений. Граничные условия для стержня AB будут:

$$\text{при } x=0 \quad w=0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dx} = \theta;$$

$$\text{при } x=L \quad w=0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dx} = -\theta.$$

Пользуясь выражением (9.30), получим:

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, \quad C_1 k + C_3 = \theta, \\ C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3 L + C_4 &= 0, \\ C_1 k \cos kL + C_2 k \sin kL + C_3 &= -\theta. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$C_2 = \frac{1 + \cos kL}{\sin kL} C_1, \quad C_3 = 0,$$

$$C_4 = -\frac{1 + \cos kL}{\sin kL} C_1, \quad \theta = kC_1.$$

Отсюда

$$w = C_1 \left[\sin kx + \frac{1 + \cos kL}{\sin kL} (\cos kx - 1) \right].$$

Момент, действующий на конце A стержня AB , равен

$$M_1 = \left(-EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=L} = EIk^2 C_1 \left(\sin kL + \frac{1 + \cos kL}{\sin kL} \cos kL \right).$$

Рассмотрим, далее, деформацию элемента AC под действием конечных моментов M_1 . Расположим систему координат, как показано на рис. 9.9. Уравнение равновесия получит вид

$$EI_1 \frac{d^2 w'}{dx'^2} = M_1.$$

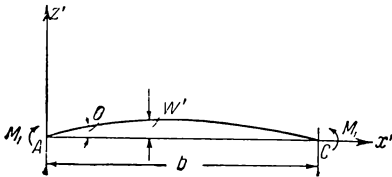


Рис. 9.9.

После интегрирования будем иметь

$$w' + \frac{M_1}{EI_1} \frac{x'^2}{2} + C_5 x' + C_6.$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$w' = 0, \quad \frac{dw'}{dx'} = 0 \quad \text{при } x' = 0,$$

и

$$w' = 0, \quad \frac{dw'}{dx'} = -\theta \quad \text{при } x' = b.$$

Это дает:

$$C_5 = 0, \quad C_6 = \theta,$$

$$\frac{M_1}{EI_1} \frac{b^2}{2} + C_6 b + C_6 = 0, \quad \frac{M_1}{EI_1} b + C_6 = -\theta.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$\theta = -\frac{M_1 b}{2EI_1}.$$

Подставляем сюда соотношение $\theta = kC_1$, а также выражение для M_1

$$M_1 = EIk^2 C_1 \left(\sin kL + \frac{1 + \cos kL}{\sin kL} \cos kL \right).$$

После упрощений находим

$$C_1 \left(\operatorname{tg} \frac{kL}{2} + \frac{Ib}{I_1 L} \frac{kL}{2} \right) = 0.$$

Нетривиальному решению отвечает уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{kL}{2} + \frac{Ib}{I_1 L} \frac{kL}{2} = 0;$$

из него можно определить k и $P_{\text{кр}}$. В случае квадратной рамы с элементами одинаковой жесткости надо положить $b = L$ и $I = I_1$; тогда будем иметь

$$\operatorname{tg} \frac{kL}{2} + \frac{kL}{2} = 0. \quad (9.33)$$

Это уравнение может быть решено таким же образом, как уравнение (9.32). Если вычертить график зависимости $\operatorname{tg} \varphi$ от φ , то значения φ , соответствующие уравнению $\operatorname{tg} \varphi = -\varphi$, определяются точками пересечения линии $\operatorname{tg} \varphi$ и пунктирной прямой, наклоненной под углом (-45°) к оси φ (см. рис. 9.7).

Наименьший корень оказывается равным

$$\varphi = \frac{kL}{2} = 2,029;$$

критическое значение силы будет

$$P_{\text{кр}} = \frac{16,47EI}{L^2}.$$

9.6. Выпучивание стержней переменного поперечного сечения. Можно показать, что стержень постоянного поперечного сечения не является наиболее экономичным конструктивным элементом, предназначенным для восприятия сжимающих нагрузок. Чтобы получить более экономную конструкцию, следует вводить в нее стержни переменного поперечного сечения. В данном параграфе будут решены некоторые задачи такого типа.

В качестве первого примера рассмотрим стержень, изображенный на рис. 9.10. Он состоит из двух частей, каждая из которых имеет постоянное поперечное сечение. Обозначим через I_1 и I_2 моменты инерции поперечного сечения, соответственно в более тонкой и более

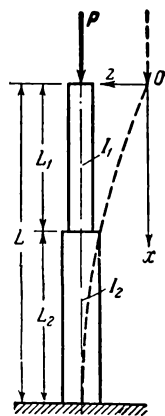


Рис. 9.10.

толстой частях стержня. Предполагается, что один конец стержня зашпелен, а другой — свободен. Если выбрать координатные оси, как показано на рисунке, то уравнения равновесия примут вид:

$$EI_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + P w_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L_1,$$

$$EI_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} + P w_2 = 0 \quad \text{при} \quad L_1 \leq x \leq L.$$

Введем обозначения $k_1^2 = P/EI_1$ и $k_2^2 = P/EI_2$. Решения выписанных уравнений будут иметь вид:

$$w_1 = C_1 \sin k_1 x + C_2 \cos k_1 x \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L_1,$$

$$w_2 = C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x \quad \text{при} \quad L_1 \leq x \leq L,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования. Граничные условия здесь таковы:

$$w_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw_2}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = L.$$

Из этих условий находим:

$$C_2 = 0, \quad C_3 = C_4 \operatorname{tg} k_2 L.$$

При $x = L_1$ должно быть

$$w_1 = w_2 \quad \text{и} \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx};$$

отсюда

$$C_1 \sin k_1 L_1 = C_4 (\operatorname{tg} k_2 L \sin k_2 L_1 + \cos k_2 L_1),$$

и

$$C_1 k_1 \cos k_1 L_1 = C_4 k_2 (\operatorname{tg} k_2 L \cos k_2 L_1 - \sin k_2 L_1).$$

Решая эти уравнения, будем иметь:

$$C_1 = C_4 \left(\operatorname{tg} k_2 L \frac{\sin k_2 L_1}{\sin k_1 L_1} + \frac{\cos k_2 L_1}{\sin k_1 L_1} \right),$$

и

$$C_4 \left[(\operatorname{tg} k_2 L \operatorname{tg} k_2 L_1 + 1) - \frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} k_1 L_1 (\operatorname{tg} k_2 L - \operatorname{tg} k_2 L_1) \right] = 0.$$

Мы получим либо тривиальное решение при $C_4 = 0$, либо уравнение

$$(\operatorname{tg} k_2 L \operatorname{tg} k_2 L_1 + 1) - \frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} k_1 L_1 (\operatorname{tg} k_2 L - \operatorname{tg} k_2 L_1) = 0.$$

Учитывая соотношение

$$\operatorname{tg} k_2 L_2 = \operatorname{tg} k_2 (L - L_1) = \frac{\operatorname{tg} k_2 L - \operatorname{tg} k_2 L_1}{1 + \operatorname{tg} k_2 L \operatorname{tg} k_2 L_1},$$

можно переписать это уравнение в следующем виде:

$$\operatorname{tg} k_1 L_1 \operatorname{tg} k_2 L_2 = \frac{k_1}{k_2}; \quad (9.34)$$

из него может быть определена величина $P_{кр}$. Уравнение (9.34) можно решить следующим путем. Выразим критическую нагрузку в форме

$$P_{кр} = \frac{m^2 EI_2}{L^2},$$

где m^2 — численный множитель, зависящий от параметров $\alpha_1 = L_1/L$ и $\alpha_2 = \sqrt{I_2/I_1}$. Уравнение (9.34) принимает вид:

$$\operatorname{tg} m\alpha_1\alpha_2 \operatorname{tg} m(1 - \alpha_1) = \alpha_2. \quad (9.35)$$

Допустим, что параметры α_1 и α_2 заданы; тогда можно вычислить выражения $[\operatorname{tg} m\alpha_1\alpha_2 \operatorname{tg} m(1 - \alpha_1)]$, соответствующие различным значениям m . Наименьшее значение m , удовлетворяющее уравнению (9.35), можно определить путем аналитического или графического интерполирования. Так, например, для параметров $\alpha_1 = 0,4$ и $\alpha_2^2 = 2,5$ находим $m = 1,46$, что соответствует критической нагрузке

$$P_{кр} = \frac{2,12 EI_2}{L^2}.$$

В качестве второго примера исследуем выпучивание стержня, состоящего из четырех уголков, связанных диагоналями (рис. 9.11); примем

снова, что нижний конец стержня зашпелен, а верхний — свободен. Момент инерции произвольного сечения AA с достаточной точностью может быть определен по формуле

$$I_x = I_1 \left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

где I_1 — момент инерции верхнего сечения стержня, а x — расстояние по вертикали от сечения до точки, в которой пересекаются направления ветвей.

Располагая координатные оси, как изображено на рис. 9.11, выпишем дифференциальное уравнение упругой линии в виде

$$EI_1 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0. \quad (9.36)$$

В параграфе 4.4 было показано, что это однородное линейное дифференциальное уравнение может быть приведено к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью

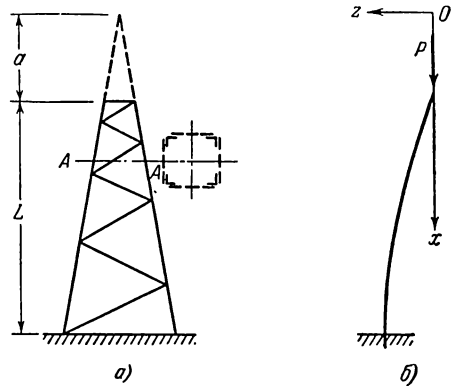


Рис. 9.11.

подстановки $\xi = \ln x$. Уравнение (9.36), выраженное через переменную ξ , принимает вид

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{dw}{d\xi} + \frac{Pa^2}{EI_1} w = 0. \quad (9.37)$$

Решением уравнения (9.37) будет

$$w = e^{q\xi}.$$

Подставив это выражение в уравнение (9.37) и разделив на $e^{q\xi}$, получим

$$q^2 - q + \frac{Pa^2}{EI_1} = 0;$$

отсюда

$$q = \frac{1}{2} \pm i \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_1} - \frac{1}{4}}.$$

Обозначим $\beta = \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_1} - \frac{1}{4}}$; общее решение уравнения (9.37) будет иметь вид

$$w = C_1' e^{\left(\frac{1}{2} + i\beta\right)\xi} + C_2' e^{\left(\frac{1}{2} - i\beta\right)\xi};$$

это выражение можно представить следующим образом:

$$w = \sqrt{x} \left[C_1 \sin\left(\beta \ln \frac{x}{a}\right) + C_2 \cos\left(\beta \ln \frac{x}{a}\right) \right],$$

где C_1' , C_2' , C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Граничные условия будут иметь вид:

$$w = 0 \text{ при } x = a \text{ и } \frac{dw}{dx} = 0 \text{ при } x = a + L.$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, надо положить

$$C_2 = 0 \text{ и } C_1 [\operatorname{tg}(2\beta \ln \alpha) - 2\beta] = 0,$$

причем $\alpha^2 = a/(a + L)$. Тривиальному решению отвечает значение $C_1 = 0$. Критическую нагрузку можно определить из уравнения

$$\operatorname{tg}(2\beta \ln \alpha) = 2\beta. \quad (9.38)$$

Если параметр α задан, то это уравнение можно представить в форме

$$\operatorname{tg} K\varphi = \varphi;$$

коэффициент K равен $\ln \alpha$ и является постоянным. Решение этого уравнения можно получить подобно тому, как это было сделано при рассмотрении уравнений (9.32) и (9.33). При $\alpha^4 = 0,5$ получим $\beta = 4,82$; тогда

$$P_{кр} = \frac{4,046 EI_1}{L^2}.$$

9.7. Разрушение реальных стержней. В предыдущем изложении было принято, что стержень изготовлен из однородного материала, имеет в первоначальном состоянии прямолинейную форму и подвергается центральному нагружению. Реальный стержень является в той или иной степени несовершенным: он может иметь начальный прогиб, а материал может быть несколько неоднородным. Что касается неоднородности материала, то этот фактор трудно учесть в теоретических исследованиях, и здесь мы его рассматривать не будем. Обратимся к случаю центрально-нагруженного стержня, имеющего начальный прогиб. Примем, что стержень имеет постоянное поперечное сечение. Обозначим через w_0 начальный прогиб оси стержня от линии действия силы, как показано на рис. 9.12. Изменение кривизны в произвольном сечении равно $\left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d^2w_0}{dx^2}\right)$ и дифференциальное уравнение для прогиба имеет вид:

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d^2w_0}{dx^2} + k^2w = 0; \quad (9.39)$$

здесь, как и ранее, $k^2 = P/EI$. Закон изменения прогиба w будет зависеть от того, как w_0 меняется по длине. Примем для w_0 выражение:

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\delta}_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

где $\bar{\delta}_n$ — заданные постоянные. Решение уравнения (9.39) можно выразить в виде тригонометрического ряда

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

После подстановки этого выражения в (9.39), найдем

$$\delta_n = \frac{\bar{\delta}_n}{1 - \frac{P}{P_n}}, \quad (9.40)$$

где

$$P_n = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}.$$

Прогиб стержня посередине длины можно определить, положив в полученном уравнении $x = L/2$:

$$\delta' = \delta_{\max} = \delta_1 - \delta_3 + \delta_5 - \dots \quad (9.41)$$

График зависимости прогиба от нагрузки для реального стержня, в соответствии с найденным выше графиком для аналогичного идеального стержня, показан на рис. 9.13. Закон нагружения для реаль-

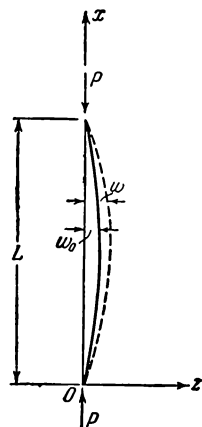


Рис. 9.12.

ного стержня отвечает кривой FG , построенной по уравнению (9.40). Однако при значительных прогибах нельзя пользоваться приближенной формулой для кривизны. Если находить кривизну по точной формуле, то изменение нагрузки будет определяться кривой FHN . В некоторой точке I или I' кривой наибольшее напряжение достигает предела упругости; в последующем истинная кривая FII или $F'I'J'$ будет проходить ниже, чем кривая FH .

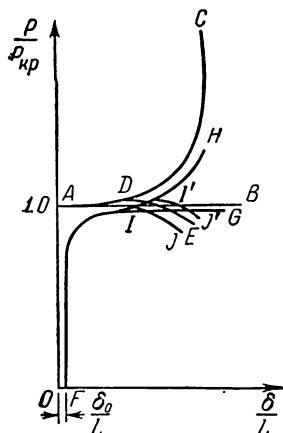


Рис. 9.13.

Отметим, что для реального стержня имеет место только одна изогнутая форма устойчивого равновесия. Таким образом, здесь не происходит разветвления равновесных форм; нельзя говорить и о соответствующей критической нагрузке. Вместе с тем, линия AB является асимптотой для кривой FG . Однако реальная кривая нагружения отклоняется от кривой FG раньше, чем прогибы становятся значительными. Разрушающая нагрузка, отвечающая точке I или I' на рис. 9.13, может лежать выше или ниже, чем критическая нагрузка для соответствующего идеального стержня; тем не менее, если критическое напряжение для стержня не превышает предела упругости, то значения этих нагрузок оказываются, как правило, близкими между собой.

Пользуясь зависимостью $P_n = n^2 P_{кр}$, из уравнения (9.40) получим

$$\delta_n = \frac{\bar{\delta}_n}{1 - \frac{P}{n^2 P_{кр}}}. \quad (9.42)$$

Если P приближается к $P_{кр}$, то

$$\frac{\delta_1}{\delta_1} \rightarrow \infty, \quad \frac{\delta_2}{\delta_2} \rightarrow \frac{4}{3}, \quad \frac{\delta_3}{\delta_3} \rightarrow \frac{9}{8} \dots$$

Следовательно, $\delta_1 \gg \delta_2 > \delta_3 > \dots$

Подставим выражение (9.42) в (9.41); прогиб посередине длины δ' будет приблизительно равен δ_1 , если сила P не мала по сравнению с $P_{кр}$:

$$\delta' \approx \delta_1 = \frac{\bar{\delta}_1}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}; \quad (9.43)$$

в этом случае выражение (9.43) может с достаточной степенью точности заменить (9.41). Кривая зависимости P от δ' будет близка к равносторонней гиперболы, имеющей в качестве асимптоты горизонталь $P = P_{кр}$.

Так как при проведении испытаний прогибы обычно определяют как отклонение от начальной формы стержня, то вместо δ' целесообразно ввести разность $\delta' - \bar{\delta}$. И здесь величина $\bar{\delta}_1$ обычно близка к $\bar{\delta}$. Примем $\bar{\delta} = \delta' - \bar{\delta}_1$, тогда уравнение (9.43) примет форму:

$$\delta = \delta_1 - \bar{\delta}_1 = \frac{\bar{\delta}_1}{\frac{P_{кр}}{P} - 1},$$

или

$$P_{кр} \frac{\delta}{P} - \delta = \bar{\delta}_1. \tag{9.44}$$

Если результаты испытаний представлены в виде графика зависимости δ/P от δ , то при значениях силы P , близких к $P_{кр}$, мы должны, очевидно, получить линию, приближающуюся к прямой; величина, обратная уклону этой прямой, соответствует критической силе $P_{кр}$. С. П. Тимошенко *) показал, что подобная зависимость остается справедливой также в случае приложения нагрузки с некоторым эксцентриситетом. Уравнение (9.44) лежит в основе известного метода Саусвелла**), этот метод широко применялся для определения критической нагрузки по результатам испытаний в пределах упругости. Однако то счастливое обстоятельство, что в пределах упругости разрушающая нагрузка близка к теоретическому значению критической силы, позволяет обычно на практике рассматривать разрушающую нагрузку как критическую силу; поэтому методу Саусвелла не придавалось должного значения. Это связано с тем, что для несовершенных стержней понятие собственно критической нагрузки отпадает, а все реальные стержни являются в той или иной мере несовершенными; следовательно, строго говоря, определение критической силы из эксперимента осуществить невозможно. Вместе с тем, метод Саусвелла позволяет провести теоретически хорошо обоснованный анализ экспериментальных данных; он дает возможность по результатам испытаний несовершенного стержня установить критическую нагрузку соответствующего идеального стержня.

9.8. Боковое выпучивание балок с узким поперечным сечением. Балка с узким поперечным сечением, изогнутая в своей плоскости, может потерять устойчивость при некотором *критическом* значении нагрузки и выпучиться в сторону, как показано на рис. 9.14 и 9.15. Начнем со случая свободно опертой балки, изгибаемой по торцам парами с моментами M . Вычисляя критическое значение M , будем пользоваться теми же определениями, что и для стержней. Примем, что в условиях, когда на балку действуют пары M

*) С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1957.

**) R. V. Southwell, On the analysis of experimental observations in problems of elastic stability, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 135, 1932, 601—616.

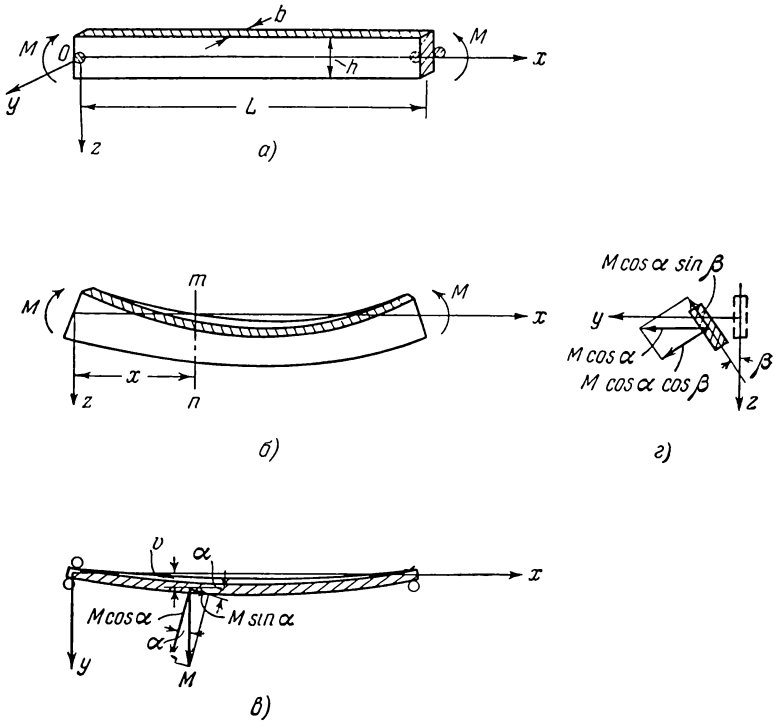


Рис. 9.14.

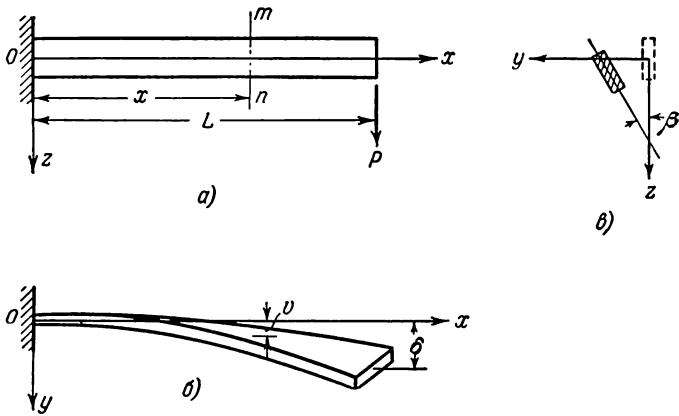


Рис. 9.15.

в вертикальной плоскости, имеет место возмущение, которое придает балке малые боковые прогибы; из уравнений равновесия определяем наименьшее значение момента M , при котором возможна такая изогнутая форма.

На рис. 9.14 изображена подобная балка. Представим момент M , действующий на грань с положительной нормалью, в виде вектора по правилу правого винта. Для некоторого сечения mn , находящегося на расстоянии x от начала координат, имеем (см. рис. 9.14, z и θ):

$$M \cos \alpha \cos \beta = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad M \cos \alpha \sin \beta = -EI_z \frac{d^2 v}{dx^2},$$

$$M \sin \alpha = GJ \frac{d\beta}{dx};$$

здесь I_x и I_y — моменты инерции соответственно относительно осей x и y , GJ — жесткость балки на кручение. Для прямоугольного поперечного сечения имеем:

$$I_x = \frac{hb^3}{12}, \quad I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad J = hb^3k;$$

значения k для различных значений отношения b/h даны в табл. 5.1.

Величины u , v , w , α и β считаются малыми, поэтому можно принять

$$\sin \alpha \approx \alpha = \frac{dv}{dx}, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad \sin \beta \approx \beta, \quad \cos \beta \approx 1.$$

С учетом этих приближенных соотношений уравнения равновесия примут вид:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M, \quad EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -M\beta, \quad GJ \frac{d\beta}{dx} = M \frac{dv}{dx}. \quad (9.45)$$

Первое уравнение (9.45) не представляет для нас интереса, так как оно определяет вертикальные прогибы балки под действием концевых моментов M . Дифференцируя третье уравнение по x и исключая с помощью второго уравнения производную $\frac{d^2 v}{dx^2}$, получаем

$$GJ \frac{d^2 \beta}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_z} \beta = 0,$$

или

$$\frac{d^2 \beta}{dx^2} + k^2 \beta = 0, \quad (9.46)$$

где $k^2 = M^2/GJEI_z$. Для балок постоянного поперечного сечения параметр k^2 не зависит от x ; общее решение уравнения (9.46) имеет вид

$$\beta = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$\beta = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = L.$$

Это дает

$$C_2 = 0 \text{ и } C_1 \sin kL = 0.$$

Положив $C_1 = 0$, получаем тривиальное решение, которое отвечает начальной равновесной форме. Изогнутая форма с боковыми перемещениями оказывается возможной при

$$\sin kL = 0;$$

отсюда

$$M_{кр} = \frac{\pi \sqrt{GJ E I_z}}{L}. \tag{9.47}$$

Рассмотрим, далее, случай изгиба консоли под действием силы P , приложенной в концевом сечении. Примем, что сила P проходит через линию центров тяжести поперечных сечений и действует в плоскости xz . Будем считать, что вследствие малого возмущения балка получает боковое выпучивание (см. рис. 9.15). В некотором поперечном сечении mn , находящемся на расстоянии x от начала координат, изгибающий момент равен $P(L - x)$, а крутящий момент равен $P(\delta - v)$. Рассуждая так же, как при выводе уравнений (9.45), приходим к следующим уравнениям равновесия для этого случая:

$$\left. \begin{aligned} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} &= P(L - x), \\ EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} &= P(L - x)\beta, \\ GJ \frac{d\beta}{dx} &= -P(L - x) \frac{dv}{dx} + P(\delta - v). \end{aligned} \right\} \tag{9.48}$$

Исключая функцию v из второго и третьего уравнений, имеем

$$\frac{d^2 \beta}{dx^2} + \frac{P^2 L}{GJ E I_z} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \beta = 0. \tag{9.49}$$

Введем обозначения:

$$k_1^2 = P^2 L^4 / GJ E I_z \text{ и } \xi = 1 - x/L.$$

Уравнение (9.49) примет вид

$$\frac{d^2 \beta}{d\xi^2} + k_1^2 \xi^2 \beta = 0. \tag{9.50}$$

Решение уравнения можно выразить в виде степенного ряда

$$\beta = a_1 \xi^{m_1} + a_2 \xi^{m_2} + a_3 \xi^{m_3} + \dots$$

Подставляя этот ряд в уравнение (9.50), получим

$$\begin{aligned} a_1 m_1 (m_1 - 1) \xi^{m_1 - 2} + a_2 m_2 (m_2 - 1) \xi^{m_2 - 2} + a_3 m_3 (m_3 - 1) \xi^{m_3 - 2} + \dots \\ \dots + k_1^2 a_1 \xi^{m_1 + 2} + k_1^2 a_2 \xi^{m_2 + 2} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Данное уравнение будет удовлетворено, если выполнены условия:

$$\left. \begin{aligned} m_1(m_1 - 1) &= 0, \\ a_2 m_2(m_2 - 1) &= -k_1^2 a_1, \quad m_2 - 2 = m_1 + 2, \\ a_3 m_3(m_3 - 1) &= -k_1^2 a_2, \quad m_3 - 2 = m_2 + 2 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (9.51)$$

В более общем виде эти условия будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} a_j &= -\frac{k_1^2 a_{j-1}}{m_j(m_j - 1)}, \\ m_j &= m_{j-1} + 4 \end{aligned} \right\} \quad j = 2, 3, \dots \quad (9.52)$$

Из выражений (9.51) находим

$$m_1 = 0, \quad \text{или} \quad m_1 = +1.$$

Этим двум решениям для m_1 отвечают два ряда, удовлетворяющие уравнению (9.50); общее решение этого уравнения принимает вид:

$$\beta = C_1 \left(1 - \frac{k_1^2}{3 \cdot 4} \xi^4 + \frac{k_1^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} \xi^8 - \dots \right) + C_2 \left(\xi - \frac{k_1^2}{4 \cdot 5} \xi^5 + \frac{k_1^4}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} \xi^9 - \dots \right), \quad (9.53)$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Воспользуемся условием $\beta = 0$ при $x = 0$. С другой стороны, при $x = L$ крутящий момент равен нулю, и поэтому $d\beta/dx = 0$. Таким образом, граничные условия будут: $\beta = 0$ при $\xi = 1$ и $d\beta/dx = 0$ для $\xi = 0$.

Из последнего условия вытекает: $C_2 = 0$. Чтобы получить нетривиальное решение задачи, необходимо решить уравнение

$$1 - \frac{k_1^2}{3 \cdot 4} + \frac{k_1^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{k_1^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots = 0. \quad (9.54)$$

Таблица численных значений выражения, стоящего в левой части уравнения (9.54), как функции k_1 , была составлена Прандтлем *). Наименьший корень будет равен

$$k_1 = 4,013;$$

ему соответствует критическая нагрузка

$$P_{кр} = \frac{4,013 \sqrt{GJEI_z}}{L^2}. \quad (9.55)$$

*) L. P r a n d t l, Kipperscheinungen, 1899.

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК**

10.1. Применение метода конечных разностей. Примеры, разобранные в главе 9, показали, что определение критической нагрузки с помощью аналитических методов может привести к утомительным и сложным выкладкам. Во многих случаях, когда поперечное сечение стержня меняется по длине, аналитическое решение может вообще оказаться невыполнимым; тогда приходится переходить к численным методам. Ознакомимся прежде всего с методом конечных разностей.

Применение метода конечных разностей к решению задач устойчивости удобнее всего пояснить на нескольких примерах.

Пример 1. Свободно опертый стержень постоянного поперечного сечения. Дифференциальное уравнение в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0;$$

граничные условия имеют вид:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = L.$$

Вспользуемся прежним обозначением: $k^2 = P/EI$. Уравнение в конечных разностях для некоторой точки x получает вид

$$\frac{w(x+h) - 2w(x) + w(x-h)}{h^2} + k^2 w(x) = 0,$$

или

$$w(x+h) + (k^2 h^2 - 2) w(x) + w(x-h) = 0; \quad (10.1)$$

здесь $h = L/n$, где n — число интервалов, на которые разделена длина стержня. Если принять $n = 2$ или $h = L/2$, это уравнение в конечных разностях в точке $x = L/2$ примет форму

$$0 + (k^2 h^2 - 2) w_1 + 0 = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{k^2 L^2}{4} - 2 \right) w_1 = 0.$$

Отсюда можно получить либо тривиальное решение

$$w = 0,$$

либо соотношение

$$k^2 = \frac{P}{EI} = \frac{8}{L^2},$$

откуда находим

$$P_{кр} = \frac{8EI}{L^2}.$$

По точному аналитическому решению в этом случае имеем

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 9,86960 \frac{EI}{L^2}.$$

Таким образом, решение по методу конечных разностей дает погрешность (—19)%.

Примем, далее, $n = 3$ или $h = L/3$. Замечая, что упругая линия будет симметричной относительно средней точки кривой (рис. 10.1, а) и пользуясь уравнением (10.1) при $x = L/3$, находим

$$w_1 + (k^2 h^2 - 2) w_1 + 0 = 0,$$

или

$$\left(k^2 \frac{L^2}{9} - 1\right) w_1 = 0.$$

Отбрасывая тривиальное решение

$w_1 = 0$, находим:

$$P_{кр} = \frac{9EI}{L^2};$$

погрешность составляет (—9)%.

При $n = 4$ или $h = L/4$ уравнения в конечных разностях, составленные для точек $x = L/4$ и $L/2$, будут иметь вид:

$$w_1 + (k^2 h^2 - 2) w_2 + 0 = 0,$$

$$w_2 + (k^2 h^2 - 2) w_1 + w_2 = 0,$$

или

$$\left. \begin{aligned} w_1 + (k^2 h^2 - 2) w_2 &= 0, \\ (k^2 h^2 - 2) w_1 + 2w_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (10.2)$$

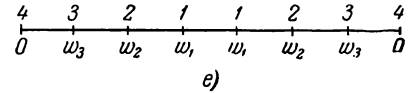
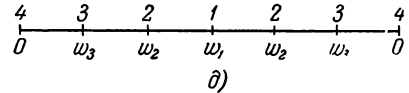
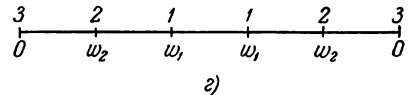
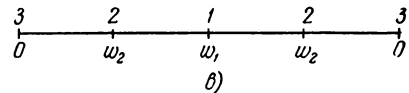
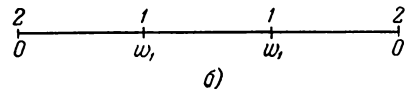
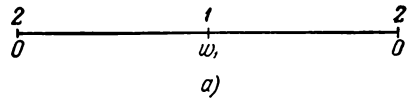


Рис. 10.1.

Как известно, решение системы совместных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{10},$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{20},$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n0}.$$

можно представить в виде

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{20} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

и т. д. Полагая $a_{10} = a_{20} = \dots = a_{n0} = 0$, получим отсюда тривиальное решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, при условии, что детерминант, стоящий в знаменателе, не равен нулю. Если же имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (10.3)$$

то приходим к нетривиальному решению. Следовательно, нетривиальное решение системы уравнений (10.2) имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & (k^2 h^2 - 2) \\ (k^2 h^2 - 2) & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(k^2 h^2 - 2)^2 - 2 = 0.$$

Решая последнее уравнение, имеем

$$k^2 h^2 - 2 = \pm \sqrt{2}.$$

Чтобы найти наименьшее значение k^2 , выбираем перед корнем знак минус; получаем

$$P_{кр} = \frac{9,3726 EI}{L^2};$$

погрешность составляет $(-5)\%$.

Если принять $n = 5$ или $h = L/5$, то уравнение (10.1) для точек $L/5$, $2L/5$ (рис. 10.1, з) будет иметь вид

$$\omega_1 + (k^2 h^2 - 2) \omega_2 = 0, \quad (k^2 h^2 - 1) \omega_1 + \omega_2 = 0.$$

Для получения нетривиального решения надо положить

$$\begin{vmatrix} 1 & (k^2 h^2 - 2) \\ (k^2 h^2 - 1) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(k^2 h^2 - 2)(k^2 h^2 - 1) - 1 = 0.$$

Определяем корень, при котором k^2 имеет наименьшее значение

$$k^2 h^2 = 0,380.$$

Отсюда

$$P_{\text{кр}} = \frac{9,549EI}{L^3};$$

погрешность равна $(-3,2)\%$.

При $n = 6$ или $h = L/6$ уравнение (10.1) для точек $x = L/6, L/3, L/2$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \omega_2 + (k^2 h^2 - 2)\omega_3 &= 0, \\ \omega_1 + (k^2 h^2 - 2)\omega_2 + \omega_3 &= 0, \\ (k^2 h^2 - 2)\omega_1 + 2\omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Приравниваем нулю соответствующий детерминант:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & (k^2 h^2 - 2) \\ 1 & (k^2 h^2 - 2) & 1 \\ (k^2 h^2 - 2) & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$(k^2 h^2 - 2)[(k^2 - h^2 - 2)^2 - 3] = 0.$$

Корень, отвечающий наименьшему значению k^2 , будет $k^2 h^2 = 0,27$, откуда

$$P_{\text{кр}} = \frac{9,646EI}{L^3};$$

погрешность равна $(-2,3)\%$.

Наконец, при $n = 7$ или $h = L/7$ (рис. 10.1, е) уравнение (10.1) в точках $x = L/7, 2L/7, 3L/7$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \omega_2 + (k^2 h^2 - 2)\omega_3 &= 0, \\ \omega_1 + (k^2 h^2 - 2)\omega_2 + \omega_3 &= 0, \\ (k^2 h^2 - 1)\omega_1 + \omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Условия получения нетривиального решения оказывается следующим:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & (k^2 h^2 - 2) \\ 1 & (k^2 h^2 - 2) & 1 \\ (k^2 h^2 - 2) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(k^2 h^2 - 2)^3 + (k^2 h^2 - 2)^2 - 2(k^2 h^2 - 2) - 1 = 0.$$

Решая это уравнение, находим, что наименьшее значение k^2 будет

при

$$k^2 h^2 - 2 = -1,80,$$

что соответствует значению силы

$$P_{кр} = \frac{9,705EI}{L^2};$$

погрешность равна $(-1,7)\%$.

В приведенном примере было осуществлено большое число приближений. Следует отметить, что в приближениях, отвечающих $n = 3, 5, 7$, используются детерминанты того же порядка, что и при $n = 2, 4, 6$; поэтому на практике вычисления проводятся только для нечетных значений n .

Пример 2. Свободно опертый стержень с переменным моментом инерции сечения. Примем, что у стержня, описанного в предыдущем примере, момент инерции сечения I меняется по закону

$$I(x) = I_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{L} \right),$$

где I_0 — постоянная величина; тогда уравнение в конечных разностях для любой точки x примет вид:

$$EI_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{L} \right) \frac{w(x+h) - 2w(x) + w(x-h)}{h^2} + Pw(x) = 0,$$

или

$$w(x+h) + \left(\frac{k^2 h^2}{1 + \sin \frac{\pi x}{L}} - 2 \right) w(x) + w(x-h) = 0, \quad (10.4)$$

де $k^2 = P/EI_0$. Граничные условия будут такими:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = L.$$

Если принять $n = 2$ или $h = L/2$ (рис. 10.1, а) для $x = L/2$, то уравнение (10.4) принимает форму

$$0 + \left(\frac{\frac{k^2 L^2}{4}}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} - 2 \right) w_1 + 0 = 0;$$

отсюда

$$\frac{k^2 L^2}{8} - 2 = 0, \quad \text{или} \quad P_{кр} = \frac{16EI_0}{L^2}.$$

Из этого примера видно, что наличие переменного момента инерции не вводит дополнительных трудностей в решение задачи. Единственное различие между данным и предыдущим случаями заключается в том, что коэффициент при $w(x)$ в уравнении (10.4) теперь является функцией x ; поэтому, выписывая уравнение для разных

точек, следует подставить соответствующие значения x . Решение для других значений n может быть выполнено таким же образом, как в предыдущем примере. Значения $P_{кр}L^2/EI_0$ при $n=3$ и $n=4$ соответственно равны 16,79 и 17,24. Точное решение рассматриваемой задачи отсутствует. Если принять, что упругая линия имеет форму синусоиды, то с помощью энергетического метода критическая сила получается равной $18,05 EI_0/L^2$ (см. параграф 10.5). Предполагаемые погрешности в определении критических сил, вычисленных при $n=2, 3, 4$, соответственно равны $(-11,4)\%$, $(-7)\%$, $(-4,5)\%$.

Из двух предыдущих примеров видно, что с возрастанием n значение $P_{кр}$ приближается к точному решению, полученному аналитическим путем. Но в случае, если момент инерции является переменным, такой результат не всегда имеет место. Чтобы показать это, примем, что момент инерции изменяется по следующему закону:

$$I(x) = \begin{cases} I_0 \left(1 + \frac{2x}{L}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ I_0 \left(3 - \frac{2x}{L}\right) & \text{при } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Уравнение в конечных разностях для любой точки x принимает вид:

$$w(x+h) + \left(\frac{k^2 h^2}{1 + \frac{2x}{L}} - 2 \right) w(x) + w(x-h) = 0, \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (10.5)$$

В таблице 10.1 даны результаты вычислений. Если упругая линия принята в виде синусоиды, то энергетический метод приводит к значению критической силы $P_{кр} = 16,53 EI_0/L^2$. Возможные погрешности по сравнению с этим значением приведены в таблице 10.1.

Пример 3. Боковое выпучивание консольной балки с узким поперечным сечением. Основное уравнение для этого случая было выведено в параграфе 9.8; они имеют вид

$$\frac{d^2 \beta}{dx^2} + \frac{P^2 L^2}{GJ E I_z} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \beta = 0;$$

граничные условия будут иметь вид:

$$\beta = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \frac{d\beta}{dx} = 0 \quad \text{при } x = L.$$

Соответствующее уравнение в конечных разностях для произвольного сечения x запишется в виде

$$\beta(x+h) + \left[k_1^2 h^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 - 2 \right] \beta(x) + \beta(x-h) = 0, \quad (10.6)$$

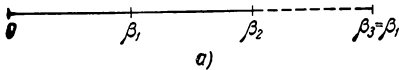
Таблица 10.1

n	$\frac{P_{кр}L^2}{EI_0}$	Предполагаемая погрешность в %
2	16,000	-3,23
3	15,000	-9,27
4	16,000	-3,23
5	15,892	-3,83
6	16,253	-1,70
7	16,179	-2,15

причем

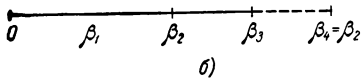
$$\beta(0) = 0, \quad \beta_{m+1} = \beta_{m-1}.$$

Здесь $k_1^2 = P^2 L^2 / GJ EI_z$, а индекс m отвечает точке $x = L$. Величина β_{m+1} соответствует воображаемой точке. Пользуясь рис. 10.2, а, находим следующие уравнения в конечных разностях при $x = L/2$ и $x = L$:



$$\beta_2 + \left[k_1^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] \beta_1 = 0,$$

$$\left[k_1^2 h^2 (1 - 1)^2 - 2 \right] \beta_2 + 2\beta_1 = 0.$$

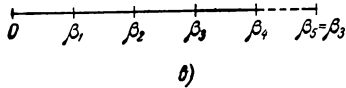


Уравнение, дающее нетривиальное решение, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{k_1^2 h^2}{4} - 2 \right) \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$2 \left(\frac{k_1^2 h^2}{4} - 2 \right) + 2 = 0.$$



Отсюда

$$P_{кр} = \frac{4 \sqrt{GJ EI_z}}{L^2};$$

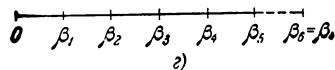


Рис. 10.2.

погрешность составляет $(-0,32)\%$.

Таким же образом можно провести вычисления для $n = 3, 4, 5$; тогда найдем значения $P_{кр} L^2 / \sqrt{GJ EI_z}$, соответственно равные 3,933, 3,959 и 3,976. Точное значение равно 4,013 [уравнение (9.55)]; погрешность равна для каждого из этих случаев $(-1,9)\%$, $(-1,3)\%$ и $(-0,92)\%$.

10.2. Метод релаксации. Примеры, приведенные в предыдущем параграфе, показывают, что при уменьшении длины интервала h точность определения критической нагрузки обычно повышается. Но с увеличением числа узловых точек возникают трудности двойного рода. Во-первых, быстро возрастает затрата времени на раскрытие детерминанта. Во-вторых, повышается степень результирующего уравнения, и потому решение его становится сложным. В задачах на упругую устойчивость интерес представляет только тот корень, который соответствует наименьшей критической нагрузке. Были предложены различные релаксационные методы *); ниже будет описан метод, наиболее удобный в применении к задачам устойчивости.

*) См., например, R. V. Southwell, Relaxation methods in engineering science, N. Y., 1940; A. Vazsonyi, A numerical method in the theory of vibrating bodies, J. Appl. Phys., т. 15, № 8, 1944, 598—606.

Для примера обратимся к задаче об устойчивости свободно опертого стержня постоянного поперечного сечения. Рассмотрим случай, когда число интервалов $n = 7$. Метод релаксации можно осуществить следующими этапами.

Этап 1. Примем $w_1 = 1$, $w_2 = 0,8$ и $w_3 = 0,4$. Отметим, что в задачах на устойчивость точное значение амплитуды упругой линии не может быть определено; представляют интерес лишь отношения прогибов в различных точках, расположенных вдоль стержня. Так, например, в параграфе 9.4 все упругие линии были получены без определения максимальной амплитуды C_1 . Принятые значения w_1 , w_2 , w_3 в действительности являются относительными величинами. Эти значения записаны в первом столбце справа от узловых точек.

Перепишем уравнение в конечных разностях (10.1) в следующей форме:

$$w(x+h) - 2w(x) + w(x-h) = -k^2 h^2 w(x),$$

или

$$\Delta^2 w(x) = -k^2 h^2 w(x). \quad (10.7)$$

Исходя из принятых величин w , вычислим значения $\Delta^2 w$ для каждой узловой точки и запишем их во второй столбец. В нашем примере имеем (рис. 10.1, e):

$$\text{в точке 1: } \Delta^2 w_1 = w_1 - 2w_1 + w_2 = 1,0 - 2 \cdot 1,0 + 0,8 = -0,2,$$

$$\text{в точке 2: } \Delta^2 w_2 = w_1 - 2w_2 + w_3 = -0,2,$$

$$\text{в точке 3: } \Delta^2 w_3 = w_2 - 2w_3 + 0 = 0.$$

Далее, из трех разностных уравнений вычислим значения $k^2 h^2$ для трех узловых точек. Получим

$$\text{в точке 1: } k^2 h^2 = -\frac{\Delta^2 w_1}{w_1} = \frac{0,2}{1,0} = 0,2,$$

$$\text{в точке 2: } k^2 h^2 = -\frac{\Delta^2 w_2}{w_2} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25,$$

$$\text{в точке 3: } k^2 h^2 = -\frac{\Delta^2 w_3}{w_3} = \frac{0}{0,4} = 0.$$

Эти величины записаны в третьем столбце. Полученные результаты приведены на рис. 10.3 в качестве первого этапа.

Этап 2. Если соотношения между w_1 , w_2 , w_3 выбраны правильно, то значения $k^2 h^2$, вычисленные из этих трех уравнений, будут одними и теми же. Очевидно, в нашем примере такого совпадения мы не получили. В предыдущих выкладках для $n = 3$ было найдено $k^2 L^2 = 9$. Следовательно, наименьший корень в данном случае должен дать значение $k^2 L^2$, близкое к 9. Приближенное значение $k^2 L^2$ равно:

$$k^2 h^2 = \frac{k^2 L^2}{n^2} = \frac{9}{49} = 0,18.$$

Имея это в виду, изменим значения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Мы замечаем, что наибольшая погрешность при определении величины k^2h^2 имеется в точке 3. Увеличим ω_3 на 0,444, не меняя ω_2 и ω_1 . Тогда получим

$$\Delta^2\omega_3 = -0,088, \quad (k^2h^2)_3 = 0,198$$

и

$$\Delta^2\omega_2 = -0,156, \quad (k^2h^2)_2 = 0,195.$$

Эти данные представлены в качестве 2-го этапа на рис. 10.3.

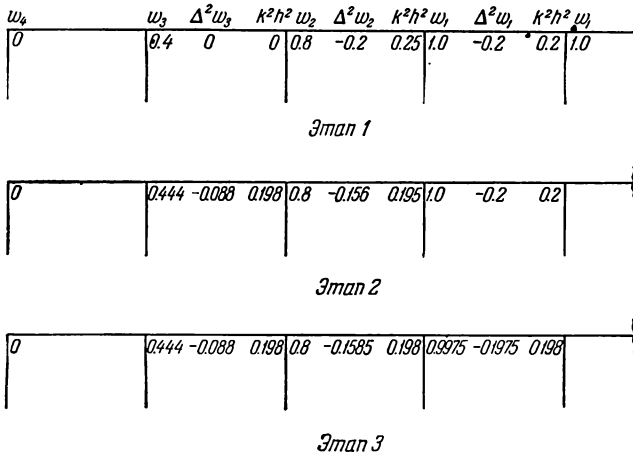


Рис. 10.3.

Этап 3. Уменьшим теперь ω_1 до величины 0,9975, не изменяя ω_2 и ω_3 . Тогда

$$\Delta^2\omega_1 = -0,1975, \quad (k^2h^2)_1 = 0,198,$$

$$\Delta^2\omega_2 = -0,1585, \quad (k^2h^2)_2 = 0,198.$$

Эти данные приведены в виде 3-го этапа на рис. 10.3.

Мы получили одни и те же значения k^2h^2 для всех точек; это показывает, что решение является правильным. Критическая нагрузка оказывается равной

$$P_{кр} = \frac{9,70EI}{L^2}.$$

Снова отметим, что указанные значения ω_1, ω_2 и ω_3 являются лишь относительными величинами. Может быть выписан ряд значений $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, удовлетворяющих этим уравнениям в конечных разностях. Но если их разделить на некоторый коэффициент, то мы получим одни и те же относительные величины; следовательно, критическая сила останется прежней.

10.3. Приближения высших порядков в методе конечных разностей. При решении задач устойчивости мы можем дополнительно улучшить результаты, используя формулы для конечных разностей высшего порядка; такие формулы были выведены в параграфе 6.6. Проиллюстрируем этот метод, взяв снова в качестве примера задачу об устойчивости свободно опертого стержня постоянного поперечного сечения. По формуле (6.33) имеем

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 w - \frac{1}{12} \Delta^4 w + \frac{1}{90} \Delta^6 w - \dots \right).$$

Если воспользоваться этой формулой, то дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dx^2} + k^2 w = 0$$

будет соответствовать уравнение в конечных разностях

$$\Delta^2 w - \frac{1}{12} \Delta^4 w + \frac{1}{90} \Delta^6 w - \dots + k^2 h^2 w = 0. \quad (10.8)$$

Если пренебречь конечными разностями шестого и более высоких порядков, то уравнение (10.8) в некоторой точке x будет иметь вид:

$$w(x+h) - 2w(x) + w(x-h) - \frac{1}{12} [w(x+2h) - 4w(x+h) + \\ + 6w(x) - 4w(x-h) + w(x-2h)] + k^2 h^2 w(x) = 0,$$

или

$$-w(x+2h) + 16w(x+h) + (12k^2 h^2 - 30)w(x) + \\ + 16w(x-h) - w(x-2h) = 0. \quad (10.9)$$

В это разностное уравнение входят значения w для двух точек левее x и двух точек правее x ; поэтому значением w_{m+1} надо пользоваться при составлении уравнения для точки $(m-1)$, причем индекс m относится к граничным точкам. Введем по соседству с каждой граничной точкой воображаемую внеконтурную узловую точку. Имея в виду, что для случая свободного опирания на концах стержня должно быть

$$w = \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad \text{на границах,}$$

и выражая производную $\frac{d^2w}{dx^2}$ через разность первого порядка, находим

$$w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1} = 0,$$

или

$$w_{m+1} = -w_{m-1};$$

имеется в виду, что значение w_m равно нулю.

Поступая таким же образом, как в параграфе 10.1, получим следующие результаты.

Приближение $n = 2$. Применяя уравнение (10.9) для точки $x = L/2$ (рис. 10.4, а), находим

$$\omega_1 + 0 + \left(12k^2 \frac{L^2}{4} - 30\right) \omega_1 + 0 + \omega_1 = 0;$$

это дает

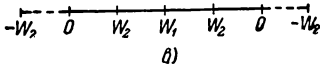
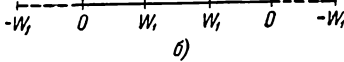
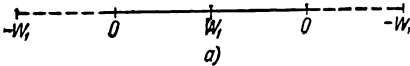
$$k^2 L^2 = 9,33,$$

или

$$P_{кр} = \frac{9,33EI}{L^2};$$

погрешность составляет $(-5,5)\%$.

Приближение $n = 3$. Используя уравнение (10.9) для точки $x = L/3$ (рис. 10.4, б), будем иметь



$$\omega_1 + 0 + \left(12k^2 \frac{L^2}{9} - 30\right) \omega_1 + + 16\omega_1 + 0 = 0$$

и

$$P_{кр} = \frac{9,75EI}{L^2};$$

Рис. 10.4.

погрешность равна $(-1,21)\%$.

Приближение $n = 4$. Пользуясь уравнением (10.9) для точки $x = L/4, L/2$ (рис. 10.4, в), имеем:

$$-\omega_2 + 0 + \left(12k^2 \frac{L^2}{16} - 30\right) \omega_2 + 16\omega_1 - \omega_2 = 0,$$

$$0 + 16\omega_2 + \left(12k^2 \frac{L^2}{16} - 30\right) \omega_1 + 16\omega_2 + 0 = 0.$$

Отсюда получаем уравнение, содержащее детерминант:

$$\begin{vmatrix} (0,75k^2L^2 - 30), & 16 \\ 32 & (0,75k^2L^2 - 30) \end{vmatrix} = 0.$$

Решая его, находим

$$P_{кр} = \frac{9,83EI}{L^2};$$

погрешность равна $(-0,4)\%$.

Сравнивая полученные результаты, убеждаемся в том, что точность решения повышается по мере возрастания n .

10.4. Методы экстраполяции. При решении задач устойчивости должна быть определена критическая нагрузка. При этом весьма эффективным должен оказаться метод экстраполяции. Прежде

чем излагать метод экстраполяции *), докажем следующее положение: погрешность при определении критической нагрузки с помощью метода конечных разностей будет порядка h^2 , если только основное уравнение имеет постоянные коэффициенты.

Пусть решение дифференциального уравнения будет \bar{w} , а решение соответствующего уравнения в конечных разностях будет w . Допустим, что при решении дифференциального уравнения мы получим значение \bar{k}^2 , а при решении соответствующего уравнения в конечных разностях k^2 . Рассмотрим случай свободно опертого стержня постоянного поперечного сечения. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} + \bar{k}^2\bar{w} = 0,$$

с граничными условиями

$$\bar{w} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad x = L.$$

Соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$w(x+h) - 2w(x) + w(x-h) + k^2h^2w(x) = 0, \quad (10.10)$$

с граничными условиями

$$w = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad x = L.$$

Уравнение в конечных разностях (10.10) может быть решено, если принять w в форме

$$w = ce^{mx}, \quad (10.11)$$

где c — постоянная. Подставляя выражение (10.11) в уравнение (10.10), имеем

$$ce^{mx+mh} - 2ce^{mx} + ce^{mx-mh} + ck^2h^2e^{mx} = 0,$$

или

$$[(e^{mh} + e^{-mh}) + (k^2h^2 - 2)] ce^{mx} = 0.$$

При этом должно быть

$$(e^{mh} + e^{-mh}) + (k^2h^2 - 2) = 0,$$

или

$$\operatorname{ch} mh + \left(\frac{k^2h^2}{2} - 1 \right) = 0. \quad (10.12)$$

Отсюда могут быть получены три решения для m , соответствующие значениям

$$\left| \frac{k^2h^2}{2} - 1 \right| > 1, \quad \left| \frac{k^2h^2}{2} - 1 \right| = 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{k^2h^2}{2} - 1 \right| < 1.$$

*) М. G. Salvadori, Numerical computation of buckling loads by finite differences, Trans. ASCE, т. 116, 1951, 590—636.

Можно показать, что в первых двух случаях полученное решение для w не удовлетворяет граничным условиям; поэтому в последующем мы их не будем рассматривать. При $\left| \frac{k^2 h^2}{2} - 1 \right| < 1$ будет $mh < 1$; это возможно лишь при чисто мнимом значении m . Положим $m = i\lambda$; тогда уравнение (10.12) принимает вид

$$\cos \lambda h = 1 - \frac{k^2 h^2}{2}, \quad (10.13)$$

откуда

$$\lambda = \pm \frac{1}{h} \arccos \left(1 - \frac{k^2 h^2}{2} \right).$$

После подстановки этих значений λ в (10.11) можно определить значения k^2 из граничных условий. Так как такие выкладки являются довольно трудоемкими, можно сначала определить λ из граничных условий, а затем найти k^2 из уравнения (10.13). Поскольку параметр λ может иметь либо положительное, либо отрицательное значение, общее решение для w будет иметь вид

$$w = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x. \quad (10.14)$$

Чтобы удовлетворялись граничные условия, надо принять

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad (10.15)$$

где n — целое число; для определения критической нагрузки следует положить $n = 1$. Учитывая соотношение $1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$, преобразуем уравнение (10.14); подставляя значение λ , полученное из (10.15), найдем

$$k^2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \sin^2 \frac{\pi h}{L^2}. \quad (10.16)$$

Воспользуемся разложением функции $\sin \theta$ в ряд

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

Подстановка этого ряда в (10.16) дает

$$k^2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \left[\frac{\pi h}{L} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi h}{L} \right)^3 + \dots \right]^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 - \frac{2}{3!} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left(\frac{h}{2} \right)^4 + \dots$$

После деления на $(h/2)^2$ получим

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2} - \frac{2}{3!} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \dots = \bar{k}^2 - \alpha_1 h^2 - \alpha_2 h^4 + \dots$$

причем коэффициенты α_1, α_2 не будут зависеть от h . Это вытекает из соотношения $\bar{k}^2 = \pi^2/L^2$. Таким образом, мы приходим к заклю-

чению, что в данном случае погрешность будет порядка h^2 , т. е. определяется выражением

$$e = \bar{k}^2 - k^2 = \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \dots \quad (10.17)$$

Если условия закрепления стержня по концам отличны от свободного опирания, то следует пользоваться дифференциальным уравнением (9.29); тогда аналогичным путем можно доказать, что ошибка будет также порядка h^2 .

Пренебрегая в выражении (10.17) величинами α_2 , α_3 и т. д., будем иметь

$$\bar{k}^2 - k^2 = \alpha_1 h^2.$$

Пусть через n_i и n_j обозначаются числа интервалов, на которые разделена длина L . Тогда имеем $h_i = L/n_i$ и $h_j = L/n_j$; при этом

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}^2 - k_i^2 &= \alpha_1 h_i^2 = \frac{\alpha_1 L^2}{n_i^2}, \\ \bar{k}^2 - k_j^2 &= \alpha_1 h_j^2 = \frac{\alpha_1 L^2}{n_j^2}. \end{aligned} \right\} (10.18)$$

Здесь k_i^2 и k_j^2 — значения k^2 , отвечающие соответственно $n = n_i$ и $n = n_j$. Исключая из этих двух уравнений $\alpha_1 L^2$, находим

$$\begin{aligned} \bar{k}_{i,j}^2 &= \frac{n_j^2 k_j^2 - n_i^2 k_i^2}{n_j^2 - n_i^2} = \\ &= a_{n_j} k_j^2 - a_{n_i} k_i^2, \end{aligned} \quad (10.19)$$

где $\bar{k}_{i,j}^2$ — экстраполированное значение k^2 . Таблица 10.2 содержит коэффициенты a_{n_j} , a_{n_i} , входящие в формулу для экстраполяции порядка h^2 (10.19) при наиболее часто встречающихся значениях n_i и n_j .

Так как уравнение (10.19) является однородным относительно n , то коэффициенты экстраполяции порядка h^2 в табл. 10.2 будут функциями только отношения n_j/n_i ; например, формула экстраполяции для (2,1) может быть применена и при (4,2).

Примем во внимание в выражении (10.17) первые два члена ряда и применим основную формулу для трех приближений, отвечающих значениям k_i^2 , k_j^2 , k_k^2 ; последние получены делением

Таблица 10.2

Экстраполяция порядка h^2

n_j/n_i	a_{n_j}	a_{n_i}
2/1	$\frac{4}{3} = 1,33333$	$\frac{1}{3} = 0,33333$
3/2	$\frac{9}{5} = 1,8$	$\frac{4}{5} = 0,8$
4/3	$\frac{16}{7} = 2,28571$	$\frac{9}{7} = 1,28571$
5/4	$\frac{25}{9} = 2,77778$	$\frac{16}{9} = 1,77778$
5/3	$\frac{25}{16} = 1,5625$	$\frac{9}{16} = 0,5625$
6/5	$\frac{36}{11} = 3,272727$	$\frac{25}{11} = 2,272727$
7/5	$\frac{49}{24} = 2,041667$	$\frac{25}{24} = 1,041667$
7/6	$\frac{49}{18} = 3,769234$	$\frac{36}{18} = 2,769234$

характерного размера L на $n_i < n_j < n_k$ частей. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{k}^2 - k_i^2 &= \frac{\alpha_1 L^2}{n_i^2} + \frac{\alpha_2 L^4}{n_i^4}, \\ \bar{k}^2 - k_j^2 &= \frac{\alpha_1 L^2}{n_j^2} + \frac{\alpha_2 L^4}{n_j^4}, \\ \bar{k}^2 - k_k^2 &= \frac{\alpha_1 L^2}{n_k^2} + \frac{\alpha_2 L^4}{n_k^4}. \end{aligned}$$

Исключая $\alpha_1 L^2$ и $\alpha_2 L^4$ из этих трех уравнений, получаем формулу экстраполяции порядка (h^2, h^4) :

$$\begin{aligned} \bar{k}_{i, j, k}^2 &= \frac{n_k^4(n_j^2 - n_i^2)k_k^2 - n_j^4(n_k^2 - n_i^2)k_j^2 + n_i^4(n_k^2 - n_j^2)k_i^2}{n_k^4(n_j^2 - n_i^2) - n_j^4(n_k^2 - n_i^2) + n_i^4(n_k^2 - n_j^2)} = \\ &= a_{n_k}k_k^2 - a_{n_j}k_j^2 - a_{n_i}k_i^2. \end{aligned} \quad (10.20)$$

где $\bar{k}_{i, j, k}^2$ — экстраполированное значение k^2 .

В таблице 10.3 даны коэффициенты экстраполяции порядка (h^2, h^4) для наиболее часто встречающихся значений n_i, n_j, n_k . Здесь по-прежнему значения n могут быть умножены на общий множитель, причем формула останется без изменения.

Таблица 10.3

Экстраполяция порядка h^2, h^4

$n_k/n_j/n_i$	a_{n_k}	a_{n_j}	a_{n_i}
3/2/1	$\frac{243}{120} = 2,025$	$\frac{128}{120} = 1,06667$	$\frac{5}{120} = 0,04167$
4/3/2	$\frac{1280}{420} = 3,04762$	$\frac{972}{420} = 2,31429$	$\frac{112}{420} = 0,26667$
5/4/3	$\frac{4375}{1008} = 4,34028$	$\frac{4096}{1008} = 4,06349$	$\frac{729}{1008} = 0,72321$
6/5/4	$\frac{11\,664}{1980} = 5,89091$	$\frac{12\,500}{1980} = 6,31313$	$\frac{2816}{1980} = 1,42222$
7/6/5	$\frac{26\,411}{3432} = 7,69551$	$\frac{31\,104}{3432} = 9,06294$	$\frac{8125}{3432} = 2,36742$
5/3/1	$\frac{5000}{3072} = 1,62760$	$\frac{1944}{3072} = 0,63281$	$\frac{16}{3072} = 0,00521$
7/5/3	$\frac{38\,416}{15\,360} = 2,50104$	$\frac{25\,000}{15\,360} = 1,62760$	$\frac{1944}{15\,360} = 0,12656$

Проиллюстрируем метод экстраполяции на примерах, разобранных в параграфе 10.1. В применении к первому примеру формула экстраполяции порядка h^2 [уравнение (10.19) и таблица 10.2],

с учетом нескольких первых значений $k^2 L^2$, дает следующие результаты (погрешность указана в скобках):

$$\bar{k}_{2,3}^2 L^2 = 1,8 \cdot 9 - 0,8 \cdot 8 = 9,8 \quad (-0,71\%),$$

$$\bar{k}_{3,4}^2 L^2 = 2,28571 \cdot 9,37264 - 1,2857 \cdot 9 = 9,852 \quad (-0,18\%),$$

$$\bar{k}_{4,5}^2 L^2 = 2,77778 \cdot 9,549 - 1,77778 \cdot 9,373 = 9,862 \quad (-0,08\%).$$

Экстраполяция порядка (h^2, h^4) , уравнение (10.20) и табл. 10.3 дают:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{2,3,4}^2 L^2 &= 3,04762 \cdot 9,37264 - 2,31429 \cdot 9 + \\ &+ 0,26667 \cdot 8 = 9,8690 \quad (-0,006\%), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{3,5,7}^2 L^2 &= 2,50104 \cdot 9,7054 - 1,62760 \cdot 9,549 + \\ &+ 0,12656 \cdot 9 = 9,8696 \quad (0\%). \end{aligned}$$

Как видим, экстраполированные значения лежат весьма близко к истинным; таким образом, практически второе приближение с экстраполяцией порядка h^2 дает более чем достаточную точность.

Вывод формулы (10.17) не может быть распространен на случаи, когда основное дифференциальное уравнение имеет переменные коэффициенты. Однако результаты, относящиеся ко многим разобранным задачам, показывают, что и здесь методом экстраполяции можно пользоваться в качестве эмпирического метода. При этом следует сделать несколько замечаний:

1. По формуле экстраполяции предполагается, что в последовательных приближениях значение k^2 будет все время приближаться к \bar{k}^2 с одной стороны. Если же процесс приближения к \bar{k}^2 носит колебательный характер, то формулой надо пользоваться различным образом в зависимости от того, имеет ли место приближение сверху или снизу. Два экстраполированных значения, полученные таким образом, следует сравнить между собой. Не рекомендуется применять экстраполяцию, если имеется меньше трех приближенных значений k^2 .

2. Даже в том случае, если приближенные значения k^2 монотонно приближаются (сверху или снизу) к истинному значению, нельзя сразу сказать, будет ли экстраполированное значение выше или ниже истинного.

3. Вообще говоря, экстраполяция порядка (h^2, h^4) дает лучшие результаты, чем экстраполяция порядка h^2 , но невозможно сказать заранее, будет ли экстраполяция h^2 при больших n_i давать лучшие результаты, чем экстраполяция (h^2, h^4) при малых n_i ; это относится и к тому случаю, когда имеется три значения n_i , и наибольшее из них совпадает с наибольшим n_i в экстраполяции h^2 .

Во втором из примеров, разобранных в параграфе 10.1, для случая

$$I(x) = I_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{L} \right)$$

приближение k^2 к \bar{k}^2 оказывается монотонным*). Метод экстраполяции дает следующие результаты (погрешность указана в скобках):

$$\bar{k}_{2,3}^2 L^2 = 1,8 \cdot 16,79 - 0,8 \cdot 16 = 17,42, \quad (-3,5\%),$$

$$\bar{k}_{3,4}^2 L^2 = 2,286 \cdot 17,24 - 1,286 \cdot 16,79 = 17,81, \quad (-1,3\%),$$

$$\bar{k}_{2,3,4}^2 L^2 = 3,0476 \cdot 17,24 - 2,3143 \cdot 16,79 + \\ + 0,2667 \cdot 16 = 17,95 \quad (-0,55\%).$$

Примем

$$I(x) = I_0 \left(1 + \frac{2x}{L} \right) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

и

$$I(x) = I_0 \left(3 - \frac{2x}{L} \right) \quad \text{при} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L;$$

тогда можно видеть, что k^2 будет приближаться к \bar{k}^2 с одной стороны, но не монотонно, в то время как сами по себе обе последовательности для четных и нечетных n_j являются монотонными. В таблице 10.4 помещены экстраполированные значения, полученные с использованием обеих последовательностей.

Таблица 10.4

n	$k^2 L^2$	Погрешность в процентах	Экстраполяция h^2			Экстраполяции (h^2, h^4)		
			n	$k^2 h^2$	погрешность в процентах	n	$k^2 h^2$	Погрешность в процентах
2	16,0000	-3,23	2,4	16,0000	-3,23	2, 4, 6	16,5114	-0,13
3	15,0000	-9,27	3,5	16,3933	-0,85	3, 5, 7	16,4964	-0,22
4	16,0000	-3,23	4,6	16,4546	-0,48			
5	15,8917	-3,83	5,7	16,4774	-0,34			
6	16,2526	-1,70						
7	16,1786	-2,15						

В задаче о боковом выпучивании консольной балки, имеющей узкое поперечное сечение, получается, что приближение k^2 к \bar{k}^2 будет монотонным при $n \geq 3$. Экстраполяцию h^2 можно применить

*) Монотонно возрастающей функцией называется такая, в которой каждой последовательности возрастающих значений аргумента соответствуют неизменно возрастающие значения функции; аналогично, функция является монотонно убывающей, если ее значения убывают с возрастанием аргумента.

для $n = 3, 4$ и $n = 4, 5$, в то время как экстраполяцию (h^2, h^4) можно использовать для любой последовательности, и в частности, для $n = 2, 3, 4$ и $n = 3, 4, 5$. В таблице 10.5 даны результаты вычислений.

Таблица 10.5

n	k^2L^2	Погрешность в процентах	Экстраполяция h^2			Экстраполяция (h^2, h^4)		
			n	k^2L^2	погрешность в процентах	n	k^2L^2	погрешность в процентах
2	4,000	-0,32	3,4	3,992	-0,52	2, 3, 4	4,030	+0,42
3	3,933	-1,9	4,5	4,006	-0,17	3, 4, 5	4,014	+0,025
4	3,959	-1,3						
5	3,976	-0,92						

10.5. Энергетический метод. Рассмотрим равновесное состояние стержня при сжимающей нагрузке, *равной* критической силе. Как было указано в параграфе 9.3, здесь возможны две формы равновесия: прямолинейная и изогнутая. Примем, что стержень имеет прямолинейную форму; будучи неустойчивой, при действии любого малого возмущения эта форма скачком перейдет в изогнутую. При переходе от одной формы равновесия к другой энергия деформации стержня возрастает, так как к энергии сжатия добавляется некоторая энергия изгиба. В то же время потенциальная энергия нагрузки уменьшается благодаря сближению концов стержня. Это уменьшение потенциальной энергии равно работе сил, приложенных по концам стержня. Обе формы стержня — прямолинейная и изогнутая — являются возможными формами равновесия *при одной и той же нагрузке*; но тогда переход от одной формы к другой не должен сопровождаться потерей или накоплением энергии. Поэтому энергия изгиба, дополнительно накопленная в стержне, должна быть равна работе, совершенной силами.

В параграфе 7.3 было найдено, что энергия изгиба, накопленная в стержне, равна

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx,$$

где под w по-прежнему понимается прогиб. Укорочение стержня за счет изгиба можно найти следующим образом. Рассмотрим элемент AB оси стержня, имеющий до изгиба длину dx (рис. 10.6). Заметим, что этот элемент уже подвергался сжатию. После изгиба элемент AB переместится в положение $A'B'$. Так как сжимающая

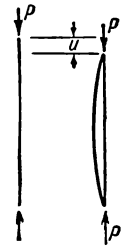
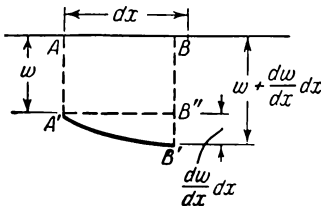


Рис. 10.5.

нагрузка не меняется, то в стержне будут действовать те же осевые напряжения, что и до изгиба; следовательно, удлинение вдоль нейтральной оси должно отсутствовать, и длина дуги $A'B'$ должна быть равна dx . Поэтому укорочение элемента AB по направлению x будет

$$\begin{aligned}
 AB - A'B' &= dx - \left[(dx)^2 - \left(\frac{dw}{dx} dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
 &= dx - dx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \dots \right] \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx;
 \end{aligned}$$

последнее выражение получено в предположении, что членами высшего порядка можно пренебречь. Окончательно сближение концов стержня оказывается равным



$$u = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx.$$

Рис. 10.6.

В процессе сближения концов стержня сила P остается постоянной. Работа, совершаемая нагрузкой P , будет поэтому равна

$$Pu = \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx.$$

Условие сохранения энергии имеет вид:

$$U = Pu,$$

или

$$\frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx; \tag{10.21}$$

отсюда

$$P = \frac{\int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}. \tag{10.22}$$

Мы получили так называемую *формулу Рэлея*. Чтобы получить наименьшее значение силы, которое определяет критическую нагрузку,

мы должны положить

$$P_{\text{кр}} = P_{\text{min}} = \left[\frac{\int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx} \right]_{\text{min}} \quad (10.23)$$

Обозначение P_{min} в уравнении (10.23) в действительности отвечает наименьшему значению P в дискретной последовательности собственных значений. Однако можно показать, что по сравнению со всеми функциями прогиба w , удовлетворяющими граничным условиям, истинная функция прогиба, соответствующая первой собственной форме, придаст силе P минимальное значение в том смысле, как это понимается в вариационном исчислении.

Для доказательства положим

$$\bar{\Pi} = U - Pu.$$

Взяв вариацию по w , будем иметь

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi} &= \int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx - P \int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{d \delta w}{dx} dx = \\ &= \left\{ EI \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) - \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{dw}{dx} \right] \delta w \right\}_0^L + \\ &\quad + \int_0^L \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \delta w dx, \end{aligned}$$

причем последнее выражение получено интегрированием по частям. Граничные условия для концевых точек $x=0$ и $x=L$ представляют собой сочетания условий, относящихся к изгибающему моменту

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

и поперечной силе

$$Q = \frac{d}{dx} \left[EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] + P \frac{dw}{dx} = 0,$$

при заданных значениях dw/dx и w . Следовательно, члены в скобках обращаются в нуль. Условие равновесия внутреннего элемента стержня будет

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

отсюда

$$\delta \bar{\Pi} = 0, \quad \text{или} \quad \delta U - P \delta u = 0.$$

Подставим в последнее уравнение соотношение

$$P = \frac{U}{u};$$

тогда условие $\delta\bar{\Pi} = 0$ примет вид

$$u \delta U - U \delta u = 0.$$

Но это соотношение совпадает с условием

$$\delta P = \frac{u \delta U - U \delta u}{u^2} = 0.$$

Это означает, что из всех функций прогиба, удовлетворяющих граничным условиям, только истинная функция прогиба придает силе P минимальное значение.

Установив это положение, перейдем к нескольким примерам определения критических нагрузок с помощью метода Рэля—Ритца.

Пример 1. Свободно опертый стержень постоянного поперечного сечения. Граничные условия в этом случае будут:

$$w = 0 \text{ и } d^2w/dx^2 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = L.$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, можно принять

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Интегрируя, находим

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 C_n^2,$$

$$u = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 C_n^2,$$

и, далее,

$$\begin{aligned} P = \frac{U}{u} &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 C_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 C_n^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \frac{C_1^2 + 16C_2^2 + 81C_3^2 + \dots}{C_1^2 + 4C_2^2 + 9C_3^2 + \dots} = \\ &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \frac{1 + 16 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 + 81 \left(\frac{C_3}{C_1} \right)^2 + \dots}{1 + 4 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 + 9 \left(\frac{C_3}{C_1} \right)^2 + \dots}. \end{aligned}$$

Чтобы найти критическую силу, надо определить параметры C_2/C_1 , C_3/C_1 и т. д. таким образом, чтобы нагрузка P была мини-

мальной; для этого следует положить

$$\frac{\partial P}{\partial (C_2/C_1)} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial (C_3/C_1)} = 0$$

и т. д. Как показывают вычисления, эти условия будут удовлетворяться при

$$(C_2/C_1) = (C_3/C_1) = \dots = 0;$$

отсюда

$$P_{\text{кр}} = P_{\text{min}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2},$$

что совпадает с точным решением. Такой результат получен благодаря тому, что принятая форма упругой линии отвечает точному решению.

Пример 2. Стержень, один конец которого зашкелен, а другой — свободен. Граничные условия в этом случае будут:

$$w = 0, \quad dw/dx = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, примем

$$w = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{x}{L}\right)^n.$$

При такой форме упругой линии мы после интегрирования не получим общего выражения для всех значений n ; поэтому воспользуемся только первыми двумя членами ряда и примем

$$w = C_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C_1 \left(\frac{x}{L}\right)^3.$$

Если поперечное сечение стержня является постоянным, то после подстановки выражения для w в формулу (10.22) и интегрирования, получим

$$P = \frac{4EI}{L^2} \frac{C_0^2 + 3C_0C_1 + 3C_1^2}{\frac{4}{3}C_0^2 + 3C_0C_1 + \frac{9}{5}C_1^2} = \frac{4EI}{L^2} \frac{1 + 3\frac{C_1}{C_0} + 3\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2}{\frac{4}{3} + 3\frac{C_1}{C_0} + \frac{9}{5}(C_1/C_0)^2}. \quad (10.24)$$

Если мы из этого ряда возьмем только один параметр и положим $C_1 = 0$, то найдем минимальное значение P равным

$$P_{\text{кр}} = \frac{3EI}{L^2}.$$

Погрешность в этом случае равна +21,6%. При двух параметрах минимальное значение P можно найти, дифференцируя (10.24)

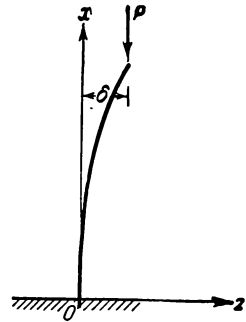


Рис. 10.7.

по (C_1/C_0) и приравнивая результат нулю:

$$\frac{dP}{d(C_1/C_0)} = 0 = \frac{\left[\frac{4}{3} + 3\frac{C_1}{C_0} + \frac{9}{5}\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2\right]\left(3 + 6\frac{C_1}{C_0}\right) - \left[1 + 3\frac{C_1}{C_0} + 3\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2\right]\left(3 + \frac{18}{5}\frac{C_1}{C_0}\right)}{\left[\frac{4}{3} + 3\frac{C_1}{C_0} + \frac{9}{5}\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2\right]^2}$$

или

$$18\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2 + 22\frac{C_1}{C_0} + 5 = 0;$$

отсюда

$$\frac{C_1}{C_0} = -0,301 \quad \text{или} \quad \frac{C_1}{C_0} = -0,92.$$

Подставляя эти значения в (10.24), находим, что корень

$$\frac{C_1}{C_0} = -0,301$$

дает наименьшее значение P ; таким образом,

$$P_{\text{кр}} = \frac{2,49EI}{L^2}.$$

В этом случае погрешность уже будет равна $+0,92\%$. Отметим, что величина C_1 остается здесь неопределенной, как это было и в предыдущих случаях.

Если удерживать более чем два параметра, то соотношения между ними можно определить из следующих условий:

$$\frac{\partial P}{\partial(C_1/C_0)} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial(C_2/C_0)} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Мы не встретимся здесь с математическими трудностями, но выкладки могут стать достаточно длинными. Можно выбрать другой путь вычислений, который представляется более простым. Ранее было доказано, что условие

$$\delta P = 0$$

эквивалентно равенству

$$\delta \bar{\Pi} = 0.$$

Из уравнения (10.24) находим

$$\bar{\Pi}' = (C_0^2 + 3C_0C_1 + 3C_1^2) - P' \left(\frac{4}{3}C_0^2 + 3C_0C_1 + \frac{9}{5}C_1^2 \right),$$

где под $\bar{\Pi}'$ понимается произведение $\bar{\Pi}$ на некоторый коэффициент, а под P' — выражение $PL^2/4EI$. Условия

$$\frac{\partial \bar{\Pi}'}{\partial C_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{\Pi}'}{\partial C_1} = 0$$

принимают вид:

$$2\left(1 - \frac{4}{3}P'\right)C_0 + 3(1 - P')C_1 = 0.$$

$$3(1 - P')C_0 + 2\left(3 - \frac{9}{5}P'\right)C_1 = 0.$$

Уравнение, содержащее детерминант и выражающее условие нетривиального решения, будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} 2\left(1 - \frac{4}{3}P'\right) & 3(1 - P') \\ 3(1 - P') & 2\left(3 - \frac{9}{5}P'\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Приходим к уравнению

$$3P'^2 - 26P' + 15 = 0,$$

или

$$P' = \frac{26 \pm \sqrt{(26)^2 - 3 \cdot 4 \cdot 15}}{6} = 0,6217 \quad \text{или} \quad 8,045;$$

отсюда

$$P_{кр} = 4 \cdot 0,6217 \frac{EI}{L^2} = 2,487 \frac{EI}{L^2}.$$

После определения P' можно вычислить, если это необходимо, отношение C_1/C_0 из уравнения

$$\frac{\partial \bar{\Pi}'}{\partial C_0} = 0.$$

Пример 3. Свободно опертый стержень переменного поперечного сечения. Примем, что момент инерции площади поперечного сечения стержня изменяется по закону

$$I = I_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{L}\right).$$

Так как выбранное выражение для w должно удовлетворять только граничным условиям, снова примем

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Поскольку упругая линия должна быть симметрична относительно середины стержня, то все четные параметры должны равняться нулю. Если удержать только два параметра, будем иметь

$$w = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{L}.$$

Интегрируя, найдем

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L EI_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{L} \right) \left[-C_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} - C_3 \left(\frac{3\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{3\pi x}{L} \right]^2 dx = \\
 &= \frac{1}{2} EI_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} \right) C_1^2 - \frac{24}{5} C_1 C_3 + \left(\frac{2916}{35} + \frac{81\pi}{2} \right) C_3^2 \right]; \\
 u &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{2} C_1^2 + \frac{L}{2} 9 C_3^2 \right);
 \end{aligned}$$

отсюда

$$P = \frac{EI_0 \pi}{L^2} \frac{\left(\frac{8}{3} + \pi \right) C_1^2 - \frac{48}{5} C_1 C_3 + \left(\frac{5832}{35} + 81\pi \right) C_3^2}{C_1^2 + 9C_3^2}.$$

Условия

$$\frac{\partial \bar{\Pi}'}{\partial C_1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{\Pi}'}{\partial C_3} = 0$$

принимают вид:

$$\begin{aligned}
 2 \left[\left(\frac{8}{3} + \pi \right) - P' \right] C_1 - \frac{48}{5} C_3 &= 0, \\
 -\frac{48}{5} C_1 + 2 \left[\left(\frac{5832}{35} + 81\pi \right) - 9P' \right] C_3 &= 0,
 \end{aligned}$$

где $P' = PL^2/EI_0\pi$. Приравняем нулю детерминант для разыскания нетривиального решения:

$$9P'^2 - \left(\frac{5832}{35} + 81\pi + 24 + 9\pi \right) P' + \left(\frac{8}{3} + \pi \right) \left(\frac{5832}{35} + 81\pi \right) - \left(\frac{24}{5} \right)^2 = 0.$$

После вычислений находим

$$P' = 5,746, \quad \text{или} \quad P_{кр} = 18,05 \frac{EI_0}{L^2}. \quad (10.25)$$

Соответствующее значение отношения C_3/C_1 равно 0,01297.

Для стержней со свободно опертыми концами и стержней, у которых один конец защемлен, а другой — свободен, уравнение равновесия можно записать в виде

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0; \quad (10.26)$$

во втором случае начало координат берется у свободного конца.

С. П. Тимошенко отметил, что в выражение для U можно подставить $(-Pw/EI)$ вместо d^2w/dx^2 ; тогда найдем

$$\frac{P^2}{2} \int_0^L \frac{w^2}{EI} dx - \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = 0,$$

или

$$P_{\text{кр}} = P_{\text{min}} = \left[\frac{\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^L \frac{w^2}{EI} dx} \right]_{\text{min}} \quad (10.27)$$

Это — так называемая *формула Тимошенко*; можно показать, что приближенное значение критической нагрузки, найденное по формуле Тимошенко, всегда ближе к точному значению, чем вычисленное по формуле Рэлея.

Вычислим снова критическую нагрузку для примера 3, с использованием формулы Тимошенко. Будем учитывать только один параметр C_1 . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx &= \frac{C_1^2 L}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2, \\ \int_0^L \frac{w^2}{EI} dx &= \int_0^L \frac{C_1^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right)}{EI_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{L} \right)} dx = \\ &= \frac{C_1^2}{EI_0} \int_0^L \left(\sin \frac{\pi x}{L} - 1 + \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi x}{L}} \right) dx = \frac{C_1^2 L}{EI_0} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right); \end{aligned}$$

отсюда

$$P_{\text{кр}} = \frac{\frac{C_1^2 L}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}{\frac{C_1^2 L}{EI_0} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right)} = 18,06 \frac{EI_0}{L^2},$$

что отличается всего на 0,05% от значения, вычисленного с учетом двух параметров в примере 3.

Так как уравнение (10.26) не является общим дифференциальным уравнением при любых граничных условиях, то и формула (10.27) не будет общей. Например, в случае стержня, один конец которого

зашемлен, а другой — свободен, дифференциальное уравнение принимает форму:

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} - P(\delta - w) = 0;$$

начало координат взято так, как показано на рис. 10.7; δ — прогиб свободного конца стержня. Формула Тимошенко в этом случае принимает вид:

$$P_{кр} = \left[\frac{\int_0^L \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^L \frac{(\delta - w)^2}{EI} dx} \right]_{\min} \quad (10.28)$$

Задача 1. Момент инерции сечения свободно опертого стержня изменяется по закону

$$I(x) \begin{cases} = I_0 \left(1 + \frac{2x}{L}\right) & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ = I_0 \left(3 - \frac{2x}{L}\right) & \text{при } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Примем $w = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{L}$. Найти критическую силу по формуле Рэлея. Вычислить критическую силу, пользуясь формулой Тимошенко с одним параметром.

Задача 2. Определить критическую силу в примере 2 с помощью формулы Тимошенко (10.28).

Задача 3. Момент инерции стержня, один конец которого зашемлен, а другой — свободен, изменяется по закону

$$I = I_0 \left(1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2L}\right).$$

Приняв функцию прогиба в виде $w = C_1 \sin \frac{\pi x}{2L}$, вычислить критическую силу по формуле Рэлея и по формуле Тимошенко.

Отв. По формуле Рэлея: $P_{кр} = \frac{4,32EI_0}{L^2}$;

по формуле Тимошенко: $P_{кр} = \frac{4,22EI_0}{L^2}$.

10.6. Вывод формулы Рэлея из принципа потенциальной энергии. В параграфе 3.5 была выведена теорема однозначности Кирхгофа, которая заключается в следующем. При заданной внешней нагрузке упругое тело может принять одну определенную форму равновесия. С энергетической точки зрения это означает, что потенциальная энергия Π внутренних и внешних сил (см. параграф 7.1) имеет одно определенное экстремальное значение, и именно минимальное значение. Теорема единственности справедлива в том слу-

чае, если компоненты напряжения являются линейными функциями компонентов деформации, а последние являются линейными функциями перемещений. Тогда потенциальная энергия Π будет функцией не выше второй степени от перемещений; из геометрических соображений очевидно, что «парабола» второй степени может иметь один, и притом единственный, минимум. Однако этот вывод уже не будет справедливым в случае больших перемещений, когда нельзя пользоваться с достаточной точностью линейными соотношениями между деформациями и перемещениями. Это относится, в частности, к телам, у которых одно измерение мало по сравнению с другими, и к элементам конструкций, имеющих форму стержней, тонких пластинок и тонких оболочек. Например, стержень может получить в пределах пропорциональности прогибы, в несколько раз превышающие его толщину, и тогда квадрат поперечного перемещения в формуле, связывающей деформацию с перемещением, уже нельзя считать малым по сравнению с линейным членом. В выраже-

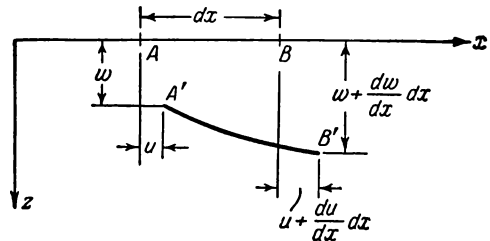


рис. 10.8.

ние для энергии деформации и, следовательно, в выражение для потенциальной энергии Π , перемещение уже будет входить в степени выше второй; но парабола высокого порядка может, конечно, иметь несколько экстремумов, что будет отвечать нескольким положениям равновесия.

Найдем соотношение между деформацией и перемещением. Рассмотрим элемент AB недеформированного стержня. После деформации этот элемент перемещается в положение $A'B'$ (рис. 10.8). Заметим, что рис. 10.8 отличается от рис. 10.6. На рис. 10.6 элемент AB считался уже подвергнутым действию сжимающей нагрузки $P_{кр}$, так что его изгиб имел место при постоянной силе $P_{кр}$; на рис. 10.8 изображен элемент AB в том виде, какой он имеет до приложения нагрузки. Находим

$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left[\left(dx + \frac{du}{dx} dx \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - dx}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2;$$

здесь, как уже было указано в предыдущем параграфе, величина $(dw/dx)^2$ имеет тот же порядок, что и (du/dx) , а такими членами, как $(du/dx)^2$ и $(dw/dx)^3$, можно пренебречь. По закону Гука соответствующее напряжение будет иметь вид

$$\sigma_x = E\epsilon_x = E \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right].$$

Таким образом, энергия сжатия равна

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^2 dx,$$

где A — площадь поперечного сечения стержня. Энергия деформации изгиба будет равна

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Сближение концов стержня равно $-[u(L) - u(0)]$, а нагрузка, сжимающая стержень, будет равна

$$P = -\sigma_x A.$$

Потенциал внешних сил ($-W$) согласно формуле (7.11) равен

$$-W = P[u(L) - u(0)].$$

Потенциальная энергия системы оказывается равной

$$\begin{aligned} \Pi = U_1 + U_2 - W &= \frac{1}{2} \int_0^L EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx + P[u(L) - u(0)]. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Вычислим, далее, вариации этой величины:

$$\begin{aligned} \Pi(u + \delta u, w + \delta w) - \Pi(u, w) &= \delta \Pi + \frac{1}{2} \delta^2 \Pi + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{d \delta u}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{d \delta w}{dx} \right)^2 \right]^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^2 dx + P[u + \delta u]_0^L = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx - P[u]_0^L = \\ &= \int_0^L EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{d \delta u}{dx} dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^L \left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} + EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right\} dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{d\delta u}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L EA \frac{dw}{dx} \frac{d\delta u}{dx} \frac{d\delta w}{dx} dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \left(\frac{d\delta w}{dx} \right)^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \left(\frac{d\delta w}{dx} \right)^2 + EI \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^2 \right\} dx + P [\delta u]_0^L.
 \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi = & \int_0^L EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\delta u}{dx} dx + \\
 & + \int_0^L \left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} + EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right\} dx + P [\delta u]_0^L, \quad (10.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{d\delta u}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L EA \frac{dw}{dx} \frac{d\delta u}{dx} \frac{d\delta w}{dx} dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \left(\frac{d\delta w}{dx} \right)^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \left(\frac{d\delta w}{dx} \right)^2 + EI \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^2 \right\} dx. \quad (10.31)
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, из условия $\delta \Pi = 0$ получим

$$\begin{aligned}
 & \left[\left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] + P \right\} \delta u \right]_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx} \left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \right\} \delta u dx + \\
 & + \left[\left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw}{dx} - \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right\} \delta w + EI \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) \right]_0^L + \\
 & + \int_0^L \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw}{dx} \right\} \right] \delta w dx = 0.
 \end{aligned}$$

Для концевых точек

$$EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] = \tau_x A = -P;$$

исходя из граничных условий, мы должны, следовательно, получить в одном случае

$$EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw}{dx} - \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = 0, \text{ или } \delta w = 0,$$

и в другом случае

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \text{ или } \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) = 0.$$

Поэтому для граничных точек члены, заключенные в первые скобки, будут равны нулю. Так как величины δu и δw для внутреннего элемента произвольны, то коэффициенты при δu и δw в подынтегральных выражениях должны равняться нулю. Отсюда

$$\frac{d}{dx} \left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \right\} = 0, \quad (10.32)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw}{dx} \right\} = 0. \quad (10.33)$$

Из (10.32) получаем

$$EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] = \text{const};$$

из граничных условий находим эту постоянную величину равной $(-P)$. Таким образом, имеем

$$EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] = -P. \quad (10.34)$$

Уравнение (10.33) с учетом (10.34) преобразуется к виду

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (10.35)$$

Мы получили основное дифференциальное уравнение продольного изгиба.

Упругое тело находится в равновесии, если первая вариация потенциальной энергии равна нулю:

$$\delta \Pi = 0;$$

это означает, что величина Π имеет либо экстремальное значение, либо стационарную точку. При выяснении устойчивости равновесных положений надо обратиться ко второй вариации от потенциальной энергии. Можно показать, что равновесное положение будет устойчивым, если потенциальная энергия любого соседнего положения

имеет большее значение. Другими словами, наличие устойчивого равновесного положения обуславливается тем, что потенциальная энергия Π минимальна; при этом должно быть

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{и} \quad \delta^2\Pi > 0.$$

Подобно этому, в случае максимума Π , когда $\delta\Pi = 0$ и $\delta^2\Pi < 0$, равновесие будет неустойчивым. В задаче о продольном изгибе стержня прямолинейная форма равновесия является устойчивой при $P < P_{кр}$, неустойчивой при $P > P_{кр}$ и безразличной при $P = P_{кр}$. Таким образом, в процессе возрастания силы P от некоторого значения, меньшего $P_{кр}$, до значения, превышающего $P_{кр}$, вариация $\delta^2\Pi$ меняет знак, переходя от положительной величины к отрицательной. При $P = P_{кр}$ должно быть $\delta^2\Pi = 0$. Следовательно, условие $\delta^2\Pi = 0$ определяет предел устойчивости.

Рассмотрим теперь вариацию $\delta^2\Pi$, определяемую выражением (10.31). Полагая $\delta\Pi = 0$, будем иметь

$$EI \left[\frac{d^2 \delta w}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \delta w}{dx} \right)^2 \right] = -P,$$

или

$$\frac{d \delta u}{dx} + \frac{d w}{dx} \frac{d \delta w}{dx} = 0. \quad (10.36)$$

Первые три интеграла в (10.31) можно сгруппировать и записать в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(\frac{d \delta u}{dx} + \frac{d w}{dx} \frac{d \delta w}{dx} \right) \frac{d \delta u}{dx} + EA \left(\frac{d \delta u}{dx} + \frac{d w}{dx} \frac{d \delta w}{dx} \right) \frac{d w}{dx} \frac{d \delta w}{dx} \right] dx;$$

судя по равенствам (10.36), это выражение обращается в нуль. Используя (10.34), получим

$$\delta^2\Pi = \int_0^L \left[-P \left(\frac{d \delta w}{dx} \right)^2 + EI \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^2 \right] dx;$$

окончательно условие $\delta^2\Pi$ принимает вид:

$$-P \int_0^L \left(\frac{d \delta w}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L EI \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^2 dx = 0,$$

или

$$P = \frac{\int_0^L EI \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{d \delta w}{dx} \right)^2 dx}, \quad (10.37)$$

где δw — любая малая вариация w по отношению к прямолинейной форме стержня. Так как для прямолинейной формы $w = 0$, то величина δw отвечает истинному прогибу стержня при потере устойчивости. Следовательно, формула (10.37) совпадает с формулой Рэлея. Приведенный выше вывод принадлежит Маргерру*).

10.7. Погрешности при определении критических нагрузок энергетическим методом. В параграфе 10.5 было показано, что приближенные значения критических нагрузок могут быть вычислены при помощи метода Рэлея—Ритца, по формулам Рэлея или Тимошенко. Покажем, что критические нагрузки, вычисленные таким путем, всегда превышают точные значения, и что значения, полученные из формулы Рэлея, должны быть больше значений, найденных по формуле Тимошенко.

Основное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

причем величина I может быть функцией x . Обозначим через w_1, w_2, \dots, w_n функции прогиба, соответствующие силам P_1, P_2, \dots, P_n . Каждая из функций w_n удовлетворяет, следовательно, граничным условиям и уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} \right) + P_n \frac{d^2 w_n}{dx^2} = 0, \quad (10.38)$$

где P_n — n -я критическая нагрузка (см. параграф 9.4). Например, для свободно опертого стержня постоянного поперечного сечения

$$P_n = n^2 \pi^2 EI / L^2 \text{ и } P_1 = P_{кр.}$$

Допустим теперь, что прогиб w аппроксимируется с помощью некоторой функции, которую можно представить в виде бесконечного ряда

$$w = C_1 w_1 + C_2 w_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n w_n;$$

здесь C_1, C_2, \dots — постоянные, определяемые из условия, что сумма $\sum_{n=1}^{\infty} C_n w_n$ будет представлять прогиб w с любой заданной степенью точности, причем

$$I_n = C_n^2 \int_0^L \left(\frac{dw_n}{dx} \right)^2 dx.$$

*) K. Marguerre, Ueber die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme, Jahrb. 1938 DVL, 252—262.

Тогда

$$\int_0^L \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx = \int_0^L \left(C_1 \frac{dw_1}{dx} + C_2 \frac{dw_2}{dx} + \dots\right)^2 dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} I_n + \int_0^L \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n C_m \frac{dw_n}{dx} \frac{dw_m}{dx}\right) dx, \quad (10.39)$$

где $m \neq n$. Чтобы доказать, что интегралы от произведений в (10.39) обращаются в нуль, умножим оба члена уравнения (10.38) на $w_m dx$ и проинтегрируем по частям. Получим

$$\left\{w_m \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w_n}{dx^2}\right) + P_n \frac{dw_n}{dx}\right] - \frac{dw_m}{dx} EI \frac{d^2 w_n}{dx^2}\right\}_0^L +$$

$$+ \int_0^L EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} \frac{d^2 w_m}{dx^2} dx - P_n \int_0^L \frac{dw_n}{dx} \frac{dw_m}{dx} dx = 0. \quad (10.40)$$

Обратимся, далее, к граничным условиям. Если конец стержня свободно оперт, то граничные условия будут иметь вид:

$$w_n = 0 \quad \text{и} \quad EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} = 0.$$

Для защемленного конца имеем

$$w_n = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw_n}{dx} = 0;$$

на свободном конце

$$EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w_n}{dx^2}\right) + P_n \frac{dw_n}{dx} = 0.$$

Таким образом, независимо от того, являются ли концы свободно опертыми, защемленными или свободными, члены, отвечающие граничным точкам в (10.40), обращаются в нуль; тогда будем иметь

$$\int_0^L EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} \frac{d^2 w_m}{dx^2} dx - P_n \int_0^L \frac{dw_m}{dx} \frac{dw_n}{dx} dx = 0. \quad (10.41)$$

Подобно этому, умножив уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w_m}{dx^2}\right) + P_m \frac{d^2 w_m}{dx^2} = 0$$

на $w_n dx$ и произведя интегрирование, получим

$$\int_0^L EI \frac{d^2 w_m}{dx^2} \frac{d^2 w_n}{dx^2} dx - P_m \int_0^L \frac{dw_n}{dx} \frac{dw_m}{dx} dx = 0.$$

Вычитая полученное уравнение из (10.41), находим

$$(P_m - P_n) \int_0^L \frac{dw_n}{dx} \frac{dw_m}{dx} dx = 0.$$

При $n \neq m$ будет

$$P_n \neq P_m$$

и, следовательно,

$$\int_0^L \frac{dw_n}{dx} \frac{dw_m}{dx} dx = 0, \quad \int_0^L EI \frac{d^2w_n}{dx^2} \frac{d^2w_m}{dx^2} dx = 0,$$

отсюда

$$\int_0^L \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Имеем, далее,

$$\begin{aligned} \int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx &= \int_0^L EI \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{d^2w_n}{dx^2}\right)^2 dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \int_0^L EI \left(\frac{d^2w_n}{dx^2}\right)^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n C_m \int_0^L EI \frac{d^2w_n}{dx^2} \frac{d^2w_m}{dx^2} dx. \end{aligned}$$

Если в уравнении (10.41) принять $m = n$, то получим

$$\int_0^L EI \left(\frac{d^2w_n}{dx^2}\right)^2 dx = P_n \int_0^L \left(\frac{dw_n}{dx}\right)^2 dx = \frac{P_n I_n}{C_n^2}.$$

Это дает

$$\int_0^L EI \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} P_n I_n.$$

Приближенное значение критической нагрузки P_R , вычисленное по формуле Рэлея, равно

$$P_R = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P_n I_n}{\sum_{n=1}^{\infty} I_n} = P_1 \frac{I_1 + I_2 \frac{P_2}{P_1} + I_3 \frac{P_3}{P_1} + \dots}{I_1 + I_2 + I_3 + \dots}.$$

При $n > 1$ имеем $(P_n/P_1) > 1$; поэтому должно быть

$$\frac{I_1 + I_2 \frac{P_2}{P_1} + I_3 \frac{P_3}{P_1} + \dots}{I_1 + I_2 + I_3 + \dots} \geq 1 \quad \text{или} \quad P_R \geq P_1,$$

где P_1 — точное значение критической нагрузки. Величина $P_R = P_1$, если значения I_2, I_3, \dots равны нулю.

Допустим, что граничные условия для стержня отвечают дифференциальному уравнению

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0; \quad (10.42)$$

тогда из формулы (10.27) найдем, что критическая нагрузка P_T , отвечающая формуле Тимошенко, будет равна:

$$P_T = \frac{\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^L \frac{w^2}{EI} dx}.$$

При $n \neq m$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{w^2}{EI} dx &= \int_0^L \frac{1}{EI} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n w_n \right)^2 dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \int_0^L \frac{w_n^2}{EI} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_m C_n \int_0^L \frac{w_n w_m}{EI} dx. \end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение (10.42), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{w_n^2}{EI} dx &= -\frac{1}{P_n} \int_0^L w_n \frac{d^2 w_n}{dx^2} dx = \\ &= -\frac{1}{P_n} \left[w_n \frac{dw_n}{dx} \right]_0^L + \frac{1}{P_n} \int_0^L \left(\frac{dw_n}{dx} \right)^2 dx = \frac{I_n}{P_n C_n^2}, \end{aligned}$$

$$\int_0^L \frac{w_n w_m}{EI} dx = -\frac{1}{P_m} \int_0^L w_n \frac{d^2 w_m}{dx^2} dx = 0;$$

здесь учитываются граничные условия $w_n \frac{dw_n}{dx} = 0$ при $x = 0$ и $x = L$. Отсюда

$$P_T = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} I_n}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{P_n}} = P_1 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + \dots}{I_1 + I_2 \frac{P_1}{P_2} + I_3 \frac{P_1}{P_3} + \dots}$$

Так как для $n > 1$ будет $(P_1/P_n) < 1$, находим

$$\frac{I_1 + I_2 + I_3 + \dots}{I_1 + I_2 \frac{P_1}{P_2} + I_3 \frac{P_1}{P_3} + \dots} \geq 1, \text{ или } P_T \geq P_1.$$

Чтобы показать справедливость соотношения $P_R \geq P_T$, надо установить наличие неравенства

$$\frac{P_1 I_1 + P_2 I_2 + \dots}{I_1 + I_2} \geq \frac{I_1 + I_2 + \dots}{\frac{I_1}{P_1} + \frac{I_2}{P_2} + \dots},$$

или

$$(P_1 I_1 + P_2 I_2 + \dots) \left(\frac{I_1}{P_1} + \frac{I_2}{P_2} + \dots \right) \geq (I_1 + I_2 + \dots)^2.$$

Если произвести умножение, то необходимое условие получит вид

$$\sum_n^{\infty} \sum_{\substack{m \\ (n > m)}}^{\infty} I_m I_n \left(\frac{P_n}{P_m} + \frac{P_m}{P_n} \right) \geq \sum_n^{\infty} \sum_{\substack{m \\ (n > m)}}^{\infty} 2 I_n I_m, \text{ или } \frac{P_n}{P_m} + \frac{P_m}{P_n} \geq 2.$$

Но, как легко видеть, из неравенства

$$(P_n - P_m)^2 \geq 0$$

вытекает

$$P_n^2 + P_m^2 \geq 2 P_n P_m, \text{ или } P_n^2 - 2 P_n P_m + P_m^2 \geq 0.$$

Таким образом, мы пришли к соотношению $P_R \geq P_T$.

10.8. Определение нижней границы критических нагрузок для стержней переменного поперечного сечения. В предыдущем параграфе было показано, что энергетические методы всегда дают значение критической нагрузки, более высокое, чем величина, которая определяется из решения дифференциального уравнения, или равное ей. Условимся называть это значение *верхней границей* для критической нагрузки. Так как критическая нагрузка принимается при расчете сжатых стержней в качестве расчетной, то завышение ее значения делает расчет ненадежным; поэтому важно установить для данной задачи наибольшую возможную погрешность. Для этого необ-

ходимо найти метод, который позволял бы определять *нижнюю границу* для критической нагрузки.

Выпишем выражение

$$P_C = - \frac{\int_0^L \left[EI \frac{d^3 w}{dx^3} \frac{d^3}{dx^3} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] dx}{\int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}. \quad (10.43)$$

Как и в предыдущем параграфе, представим w в виде бесконечного ряда

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} C_n w_n;$$

функции w_n подчиняются прежним условиям. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{d^3}{dx^3} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx &= \\ &= \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3}{dx^3} \left(EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} \right) \right] \left(\sum_{n=1}^{\infty} EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} \right) dx = \\ &= - \int_0^L \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{d^2 w_n}{dx^2} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} \right) dx = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w_n}{dx^2} \right)^2 dx - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^L EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} \frac{d^2 w_m}{dx^2} dx, \end{aligned}$$

где $n \neq m$. Согласно параграфу 10.7 имеем

$$\int_0^L EI \left(\frac{d^2 w_n}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{I_n P_n}{C_n^2}, \quad \int_0^L EI \frac{d^2 w_n}{dx^2} \frac{d^2 w_m}{dx^2} dx = 0.$$

Подстановка этих соотношений в выражение (10.43) дает

$$P_C = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} I_n P_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} I_n P_n} = P_1 \frac{I_1 P_1 + I_2 P_2 \frac{P_2}{P_1} + \dots}{I_1 P_1 + I_2 P_2 + \dots} \geq P_1 \quad (10.44)$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned}
 P_R - \frac{P_C - P_R}{\frac{P_2}{P_R} - 1} &= P_R \frac{P_2 - P_C}{P_2 - P_R} = \\
 &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} I_n P_n \left[P_2 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} I_n P_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} I_n P_n} \right]}{\sum_{n=1}^{\infty} I_n \left[P_2 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} I_n P_n}{\sum_{n=1}^{\infty} I_n} \right]} = \frac{P_2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n P_n - \sum_{n=1}^{\infty} I_n P_n^2}{P_2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n - \sum_{n=1}^{\infty} I_n P_n} = \\
 &= P_1 \frac{I_1 (P_2 - P_1) - I_3 (P_3 - P_2) \frac{P_3}{P_1} - I_4 (P_4 - P_2) \frac{P_4}{P_1} - \dots}{I_1 (P_2 - P_1) - I_3 (P_3 - P_2) - I_4 (P_4 - P_2) - \dots} \leq P_1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к формуле, которая дает верхнюю и нижнюю границы для критической нагрузки:

$$\left(P_R - \frac{P_C - P_R}{(P_2/P_R) - 1} \right) \leq P_{кр} \leq P_R.$$

Так как значение P_2 для стержня переменного поперечного сечения неизвестно, то будем пользоваться величиной P_2 для стержня с такими же граничными условиями, но с постоянным поперечным сечением, равным минимальному поперечному сечению рассматриваемого стержня. Можно видеть, что при такой подстановке приведенное выше неравенство остается в силе. Окончательно получаем *)

$$P_R - \frac{P_C - P_R}{\frac{(P_2)_{\min}}{P_R} - 1} \leq P_{кр} \leq P_R, \quad (10.45)$$

при условии $(P_2)_{\min} > P_R$; значения $(P_2)_{\min}$ для стержней с различными условиями будут следующими:

оба конца свободно оперты:

$$(P_2)_{\min} = \frac{4\pi^2 (EI)_{\min}}{L^2},$$

*) Эта формула была впервые дана в иной форме и для одного частного случая в книге G. Temple and W. Bickley, *Rayleigh's principle and its applications*, N. Y., 1933. Этот метод был обобщен Коллатцем в книге «Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung», Leipzig, 1945. См. также C. C. Miesse, *Determination of the buckling load for column of variable stiffness*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, т. 71, 406—410. Приведенный здесь вывод намного проще, чем в упомянутых работах.

оба конца защемлены:

$$(P_2)_{\min} = \frac{16\pi^2 (EI)_{\min}}{L^2},$$

один конец защемлен, другой — свободен:

$$(P_2)_{\min} = \frac{9\pi^2 (EI)_{\min}}{4L^2},$$

один конец защемлен, другой — оперт шарнирно:

$$(P_2)_{\min} = \frac{59,68 (EI)_{\min}}{L^2}.$$

Проиллюстрируем этот метод на нескольких примерах.

Пример 1. Стержни с шарнирно опертыми концами. Примем, что момент инерции поперечного сечения стержня изменяется по закону

$$I = I_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{L}\right).$$

Подобно тому как это было сделано в параграфе 10.5, примем

$$w = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Подставляя это выражение в (10.45) и производя интегрирование получим

$$P_C = - \frac{\int_0^L \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] dx}{\int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx} = \frac{2\pi^2 EI_0}{L^3} = 19,74 \frac{EI_0}{L^3}.$$

В параграфе 10.5 уже было найдено

$$P_R = \frac{1,849\pi^2 EI_0}{L^3} = 18,25 \frac{EI_0}{L^3}.$$

Так как в этом случае $(EI)_{\min} = EI_0$, то

$$(P_2)_{\min} = \frac{4\pi^2 EI_0}{L^3}.$$

Подставляя эту величину в формулу (10.45), находим

$$\frac{17,50 EI_0}{L^3} \leq P_{\text{кр}} \leq \frac{18,25 EI_0}{L^3}.$$

Это показывает, что наибольшая погрешность при определении P_R равна $+4,5\%$. Чтобы получить лучший результат, можно принять

$$w = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{L},$$

где величина C_3 согласно параграфу 10.5 равна $0,01297 C_1$. Вычисления будут аналогичными; предоставляем читателю выполнить их в качестве задачи.

Пример 2. Стержень, один конец которого защемлен, а другой — шарнирно оперт. Допустим, что величина EI изменяется по закону

$$EI = EI_0 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right].$$

В этом случае граничные условия будут иметь вид:

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = L.$$

Чтобы удовлетворялись эти условия, можно принять

$$w = C \left(\frac{x}{L} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right].$$

Подставляя это выражение в формулу (10.44) и интегрируя, находим

$$P_C = 17,98 \frac{EI_0}{L^2}.$$

По формуле (10.23)

$$P_R = 17,88 \frac{EI_0}{L^2}.$$

С другой стороны,

$$(EI)_{\min} = \frac{2}{3} EI_0;$$

отсюда

$$(P_2)_{\min} = 39,79 \frac{EI_0}{L^2}.$$

По ставляя эти значения в формулу (10.45), находим

$$17,79 \frac{EI_0}{L^2} \leq P_{\text{кр}} \leq 17,88 \frac{EI_0}{L^2}.$$

Величина $P_{\text{кр}}$ определяется с точностью до $0,3\%$.

Если граничные условия стержня таковы, что дифференциальное уравнение может быть записано в форме

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} + Pw = 0,$$

то критическую нагрузку можно определить по формуле Тимошенко. В этом случае можно вывести другую формулу, которая дает более тесные границы, чем формула (10.45). Пользуясь результатами, полученными в параграфе 10.7, получим

$$P_T - \frac{P_R - P_T}{\frac{P_2}{P_T} - 1} = P_T \frac{P_2 - R_R}{P_2 - P_T} =$$

$$= P_1 \frac{I_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) - I_3 \left(1 - \frac{P_2}{P_3} \right) \frac{P_3}{P_1} - \dots}{I_1 \left(\frac{P_3}{P_1} - 1 \right) - I_3 \left(1 - \frac{P_2}{P_3} \right) - \dots} \leq P_1.$$

Следовательно,

$$P_T - \frac{P_R - P_T}{\frac{(P_2)_{\min}}{P_T} - 1} \leq P_{\text{кр}} \leq P_T, \quad (10.46)$$

при $(P_2)_{\min} > P_T$.

В примере 1 можно принять

$$w = C_1 \sin \frac{\pi x}{L};$$

тогда

$$P_T = 18,06 \frac{EI_0}{L^2}.$$

Пользуясь выражением (10.46), получаем

$$17,90 \frac{EI_0}{L^2} \leq P_{\text{кр}} \leq 18,06 \frac{EI_0}{L^2}.$$

Таким образом, величина $P_{\text{кр}}$ найдена с точностью до 0,5%.

Задача 1. Используя формулу (10.45), определить верхнюю и нижнюю границы для критической нагрузки в случае стержня из примера 1. Принять

$$w = C_1 \left(\sin \frac{\pi x}{L} + 0,01297 \sin \frac{3\pi x}{L} \right).$$

Задача 2. Определить критическую нагрузку для стержня длиной L , один конец которого зашпелен, а другой — свободен. Жесткость изменяется по закону

$$EI(x) = EI_0 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{2L} \right).$$

ИЗГИБ И ВЫПУЧИВАНИЕ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

11.1. Дифференциальное уравнение изгиба тонких пластин. Упругое тело, толщина которого мала по сравнению с другими размерами, называют *тонкой пластинкой*. Обозначим толщину пластинки через h . Плоскость, параллельная поверхности пластинки и делящая ее толщину пополам, называется *средней плоскостью* недеформированной пластинки. Выберем систему координат таким образом, чтобы оси x и u лежали в срединной плоскости пластинки, а ось z

была перпендикулярна к срединной плоскости.

Если прогибы такой пластинки малы, т. е. если прогиб срединной плоскости мал по сравнению с толщиной h , можно сделать следующие допущения.

1. Нормали к срединной плоскости до изгиба переходят в нормали к срединной плоскости после изгиба.

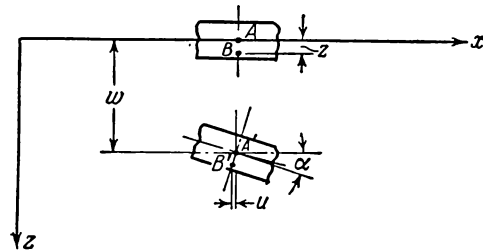


Рис. 11.1.

2. Напряжение σ_z мало по сравнению с другими компонентами напряжения, и потому в соотношениях между напряжениями и деформациями им можно пренебречь.

3. Срединная плоскость остается после изгиба нейтральной.

Рассмотрим элемент сечения пластинки, параллельного плоскости xz , как показано на рис. 11.1. При изгибе пластинки точка A , принадлежащая срединной плоскости, получает перемещение w и переходит в положение A' . Согласно первому допущению, некоторая точка B , лежащая на нормали к недеформированной срединной плоскости на расстоянии z от A , перемещается в точку B' , которая после изгиба снова находится на нормали к срединной поверхности. Из рис. 11.1 можно видеть, что перемещение точки B' в направлении x будет иметь вид:

$$u = -z\alpha.$$

Так как прогиб считается малым, то можно принять

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$$

и

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (11.1)$$

Аналогично, перемещение точки B' в направлении y равно

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (11.2)$$

Допущение о том, что нормали к срединной плоскости до изгиба переходят в нормали к срединной плоскости после изгиба, равносильно допущению о том, что деформации сдвига γ_{xz} и γ_{yz} равны нулю. Это следует непосредственно из определений деформации сдвига. Рассмотрим, например, деформацию сдвига γ_{xz} ; она определяется как происходящее в процессе деформации изменение прямого угла между линейными элементами, параллельными осям x и z . В данном случае нормаль совпадает с направлением z . Прямой угол между нормалью и осью x , согласно сделанному допущению, остается прямым и после изгиба и, следовательно, $\gamma_{xz} = 0$. Аналогичным образом убеждаемся в том, что γ_{yz} также равняется нулю. Допущение о равенстве нулю величин γ_{xz} и γ_{yz} приводит в теории к некоторым противоречиям. Поэтому правильнее принять, что деформации, хотя и не равны нулю, но настолько малы, что ими можно пренебречь.

При выводе формул (11.1) и (11.2) можно не пользоваться геометрическими соображениями, а получить их непосредственно из предположения, что γ_{xz} и γ_{yz} пренебрежимо малы. Будем, например, исходить из формулы

$$u = \int_0^z \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Так как значение z мало, можно написать

$$u = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} z.$$

Но при $z = 0$

$$(\gamma_{xz})_{z=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{z=0} = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = - \frac{\partial w}{\partial x},$$

где w — прогиб точек срединной плоскости. Отсюда

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Подобным путем может быть выведено и уравнение (11.2). Этим методом удобно будет пользоваться при определении компонентов деформации для тонких оболочек.

Выпишем формулы для деформаций:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Используя соотношение (11.1) и (11.2), получаем

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11.3)$$

В соответствии со вторым допущением, получим следующие зависимости для тонкой пластинки при изгибе:

$$\sigma_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \sigma_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \quad (11.4)$$

отсюда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

Подстановка зависимости (11.3) в приведенные выше формулы дает:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

Пользуясь этими соотношениями, можно путем интегрирования определить изгибающий и крутящий моменты, приходящиеся на еди-

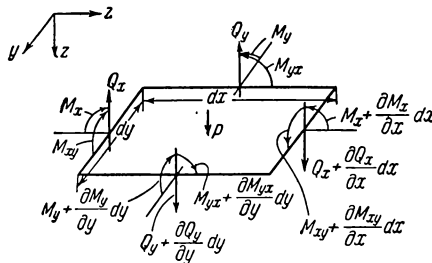


Рис. 11.2.

ницу длины сечения пластинки; рассматриваются сечения, параллельные плоскостям xz или yz (рис. 11.2). Момент M_x равен

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z dz.$$

Так как через w нами обозначен прогиб точек срединной плоскости, то w не зависит от z . Следовательно,

$$M_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (11.7)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — так называемая *цилиндрическая жесткость* пластинки,

$$\left. \begin{aligned} M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = M_{yx} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

знак минус перед интегралом в выражении для M_{xy} объясняется тем, что для положительных значений τ_{xy} и z величина dM_{xy} будет отрицательной.

Рассмотрим, далее, равновесие элемента пластинки $dx dy$, изображенного на рис. 11.2. Примем, что пластинка находится под действием поперечной распределенной нагрузки интенсивности p . Помимо изгибающих и скручивающих моментов, по граням элемента будут действовать вертикальные поперечные силы, соответствующие касательным напряжениям τ_{zx} и τ_{yz} . Обозначим через Q_x и Q_y поперечные силы в сечениях, параллельных соответственно осям y и x , приходящиеся на единицу длины сечения. Имеем

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (11.9)$$

Как уже было сказано, первое из принятых допущений равносильно предположению о том, что величины $\gamma_{zx} = \tau_{zx}/G$ и $\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$ пренебрежимо малы. Но при составлении уравнений равновесия в них надо включить результирующие силы, соответствующие касательным напряжениям τ_{zx} и τ_{yz} . Это можно объяснить следующим образом. Прежде всего заметим, что интенсивность нагрузки p равна напряжению σ_z на верхней поверхности пластинки и, следовательно, является величиной того же порядка, что и σ_z . Согласно второму допущению, величина σ_z также пренебрежимо мала. Принимая, что в выражениях

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\tau_{yz}}{G}$$

члены τ_{zx}/G и τ_{yz}/G пренебрежимо малы по сравнению с другими членами, мы будем считать вместе с тем поперечные силы Q_x и Q_y

величинами того же порядка, что интенсивность нагрузки p и моменты M_x , M_y и M_{xy} .

Для равновесия элемента пластинки необходимо, чтобы суммы проекций сил на оси x , y , z , а также моменты относительно этих осей были равны нулю. Так как компоненты напряжений имеют разное значение в различных точках пластинки, то результирующие моменты и поперечные силы должны быть также функциями x и y . Не будем учитывать объемные силы, так как они обычно малы по сравнению с поперечной нагрузкой p . Срединную плоскость мы считаем недеформируемой; поэтому суммы проекций сил на направления x и y тождественно равны нулю. Условие, по которому сумма проекций сил на ось z равна нулю, принимает вид

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + p dx dy = 0,$$

или

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (11.10)$$

Определяя моменты всех сил, действующих на элемент, относительно оси x и отбрасывая члены высших порядков, получаем уравнение равновесия

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0,$$

или

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \quad (11.11)$$

Аналогичное уравнение равновесия моментов относительно оси y будет иметь вид

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0. \quad (11.12)$$

Из уравнений (11.7), (11.8), (11.11) и (11.12) находим:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right], \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned}$$

Для пластинки постоянной толщины значение D будет постоянным, следовательно,

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (11.13)$$

Подставляя (11.13) в (11.10), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D},$$

или

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D}; \quad (11.14)$$

мы пришли к основному уравнению теории малых прогибов пластинок, относящемуся к пластинкам постоянной толщины.

11.2. Граничные условия. Сформулируем вначале граничные условия для прямоугольной пластинки, кромки которой параллельны осям x и y .

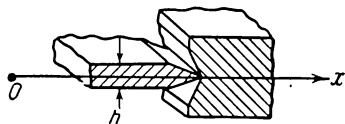


Рис. 11.3.

Шарнирно опертый край. Если опертый край пластинки может свободно поворачиваться, то его называют шарнирно опертым (рис. 11.3). Допустим, что край $x=a$ шарнирно оперт; тогда прогиб и изгибающий момент вдоль края должны равняться нулю:

$$(w)_{x=a} = 0, \quad (M_x)_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Но условие $w=0$ вдоль края $x=a$ означает, что одновременно

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно, граничные условия для шарнирно опертого края могут быть записаны в виде

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0. \quad (11.15)$$

Заделанный или защемленный край. Если край $x=a$ защемлен или заделан, то прогиб и угол поворота в точках края должны равняться нулю:

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0. \quad (11.16)$$

Свободный край. Если край $x=a$ свободен, то вдоль него изгибающие и крутящие моменты, а вместе с тем и вертикальные поперечные силы, должны быть равны нулю:

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (M_{xy})_{x=a} = 0, \quad (Q_x)_{x=a} = 0.$$

Однако Кирхгоф показал*, что для полного определения прогиба w , удовлетворяющего уравнению (11.14), достаточно двух граничных условий; третье условие, полученное из физических соображений, является излишним. Это противоречие происходит из-за допущения, что нормали к срединной плоскости до изгиба переходят в нормали к срединной поверхности после изгиба. Если не пользоваться таким допущением, то можно получить дифференциальное уравнение шестого порядка, при использовании которого могут быть удовлетворены все три граничных условия. Можно, впрочем, установить, что за исключением области, находящейся в непосредственной близости к краю, это новое уравнение по существу отвечает такому же распределению напряжений, как и уравнение (11.14). Если пластинка *тонкая*, то членами шестого порядка можно пренебречь, и более точное уравнение обращается в уравнение (11.14). Это оправдывает применение уравнения (11.14) при исследовании изгиба тонких пластинок. Чтобы избежать противоречий при формулировке граничных условий, два условия, определяющие M_{xy} и Q_x , по предложению Кирхгофа заменяются одним. Это объясняется тем, что крутящий момент, действующий на элемент кромки пластинки, можно представить в виде двух статически эквивалентных сил; последние могут быть затем рассмотрены в сочетании с вертикальными поперечными силами. Такая замена, естественно, окажет влияние на распределение напряжений в непосредственной близости к кромке, но на остальной части пластинки распределение напряжений останется без изменений.

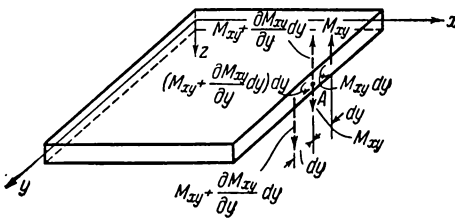


Рис. 11.4.

Рассмотрим край $x = a$. На элемент длины dy действует крутящий момент $M_{xy} dy$; его можно заменить двумя вертикальными силами, равными M_{xy} и действующими на расстоянии dy друг от друга,

как показано сплошными стрелками на рис. 11.4. Для следующего элемента dy крутящий момент будет равен $\left[M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right] dy$, который можно снова представить в виде вертикальных сил величиной $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$; они изображены пунктирными линиями. Переходя таким образом к статически эквивалентной системе сил, мы убеждаемся, что в точке A действует вертикальная сила, величина которой равна $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$; на единицу длины будет приходиться

*) G. Kirchhoff, Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, J. reine u. angew. Math., т. 40. 51—88, 1850.

вертикальная сила величиной $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$. В случае положительного момента M_{xy} статически эквивалентные силы направлены вверх; в соответствии с принятым правилом знаков они будут отрицательны. Следовательно, для свободного края, вместо условий равенства нулю величин M_{xy} и Q_y , вводим условие, по которому равна нулю статически эквивалентная им вертикальная сила:

$$(V_x)_{x=a} = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0.$$

Пользуясь уравнениями (11.8) и (11.13), можно выразить это условие через w в следующем виде:

$$\left[\frac{d^3 w}{dx^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0. \quad (11.17)$$

Из условия $M_x = 0$ вытекает, что

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0. \quad (11.18)$$

Равенства (11.17) и (11.18) выражают граничные условия для свободного края.

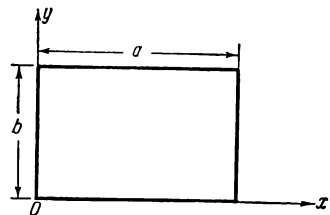


Рис. 11.5.

11.3. Изгиб шарнирно опертых прямоугольных пластинок. Рассмотрим шарнирно опертую прямоугольную пластинку, находящуюся под действием поперечной нагрузки; интенсивность нагрузки пусть будет

$$p = p(x, y).$$

Выберем координатные оси, как показано на рис. 11.5. В параграфе 11.1 было установлено, что прогиб пластинки должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \quad (11.19)$$

при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a. \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b. \end{aligned} \right\} \quad (11.20)$$

Как легко видеть, эти граничные условия удовлетворяются, если прогиб выражается с помощью ряда Фурье:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (11.21)$$

где A_{mn} — неизвестные коэффициенты. Эти коэффициенты можно определить таким образом, чтобы уравнение (11.19) удовлетворилось.

Разложим вначале функцию $p(x, y)$ в ряд Фурье:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (11.22)$$

Чтобы вычислить какой-либо коэффициент Фурье $a_{m'n'}$, умножим обе части уравнения (11.22) на $\sin(m'\pi x/a) \sin(n'\pi y/b) dx dy$ и проведем интегрирование по x в пределах от 0 до a и по y от 0 до b :

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy &= \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy. \end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx &= 0 \quad \text{при } m \neq m', \\ &= \frac{a}{2} \quad \text{при } m = m' \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy &= 0 \quad \text{при } n \neq n', \\ &= \frac{b}{2} \quad \text{при } n = n', \end{aligned}$$

после интегрирования находим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} a_{m'n'}.$$

Отсюда

$$a_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy. \quad (11.23)$$

Чтобы определить коэффициент A_{mn} в выражении для ω , подставим выражения (11.21) и (11.22) в (11.19). Это приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{a_{mn}}{D} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \end{aligned}$$

Так как полученное уравнение должно удовлетворяться для всех значений x и y , то должно быть

$$A_{mn}\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{a_{mn}}{D} = 0,$$

или

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (11.24)$$

причем коэффициенты a_{mn} определяются по формуле (11.23). Выражение (11.24) для ω является результатом решения задачи об изгибе тонкой прямоугольной пластинки под действием поперечной нагрузки $p(x, y)$.

В частном случае прямоугольной пластинки, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $p(x, y) = p_0$, из формулы (11.22) находим

$$a_{mn} = \frac{4p_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16p_0}{\pi^2 mn},$$

где m и n — нечетные числа. Все коэффициенты a_{mn} при четных m и n равны нулю. Окончательно будет

$$\omega = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1, 3, 5}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \quad (11.25)$$

Тому обстоятельству, что все члены ряда (11.25) с четными индексами m и n обращаются в нуль, можно дать следующее физическое объяснение. При равномерной нагрузке изогнутая поверхность пластинки должна быть симметричной. Если координатные оси расположены так, как показано на рис. 11.5, то члены с четными m и n отвечают несимметричным прогибам и, естественно, должны равняться нулю. Наибольший прогиб пластинки имеет место в центре и равен

$$(\omega)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1, 3, 5}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \quad (11.26)$$

Этот ряд сходится достаточно быстро, и первые несколько членов дают, вообще говоря, удовлетворительный результат. Например,

в случае квадратной пластинки, принимая $\nu = 0,3$, находим, что прогиб, определяемый первыми четырьмя членами ряда, равен

$$(w)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = 0,0443 p_0 \frac{a^4}{Eh^3};$$

коэффициент здесь точен до третьей значащей цифры.

Если выражение для прогиба пластинки найдено, то можно найти изгибающие моменты в пластинке, подставляя (11.25) в формулы (11.7) и (11.8):

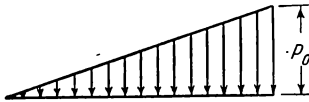
$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ M_y &= \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\left(\nu \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} (11.27)$$

Наибольший изгибающий момент будет также в центре пластинки.

Для квадратной пластинки при $a = b$ первые пять членов ряда дают

$$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = (M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = 0,0479 p_0 a^2.$$

Сравнивая формулы (11.6) с (11.7) и (11.8), выразим изгибные напряжения через изгибающие моменты:



$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3},$$

$$\sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3}.$$

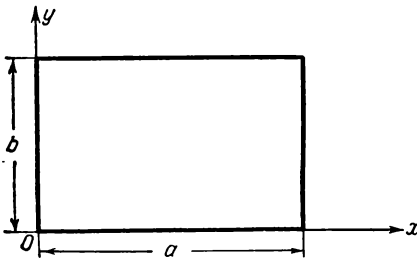


Рис. 11.6.

Наибольшие напряжения изгиба имеют место при $z = \pm \frac{h}{2}$. Для равномерно нагруженной квадратной пластинки

$$\sigma_{\max} = 0,287 p_0 \frac{a^2}{h^2}.$$

Задача 1. Шарнирно опертая прямоугольная пластинка находится под действием гидростатического давления. В этом случае нагрузка распределяется по формуле

$$p(x, y) = \frac{p_0 x}{a}.$$

Найти прогиб, моменты и напряжения в пластинке.

Отв.

$$w = \frac{8\rho_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Задача 2. Шарнирно опертая квадратная пластинка находится под действием равномерно распределенной нагрузки. Найти приближенно наибольший прогиб методом конечных разностей и методом релаксации.

Указание. Для шарнирно опертой пластинки граничные условия вдоль кромок можно записать в виде

$$w = 0 \text{ и } \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ вдоль кромок.}$$

При таких граничных условиях дифференциальное уравнение можно представить в следующей форме:

$$\nabla^2 M = \frac{p(x, y)}{D},$$

$$\nabla^2 w = M.$$

Следовательно, задачу можно решить в два этапа. Вначале определяем функцию M по уравнению

$$\nabla^2 M = \frac{p(x, y)}{D},$$

причем $M = 0$ вдоль кромок. Затем определяем функцию прогиба w по уравнению $\nabla^2 w = M$, причем $w = 0$ вдоль кромок. Такое преобразование позволяет нам пользоваться оператором Лапласа ∇^2 , значительно более простым, чем бигармонический оператор ∇^4 .

11.4. Изгиб прямоугольных пластинок с защемленными кромками. Метод Рэлея — Ритца. В главе VII рассматривалось решение задач теории упругости с помощью метода Рэлея — Ритца. Применим теперь метод Рэлея — Ритца к решению задач о пластинках. Общее выражение энергии деформации, накопленной в упругом теле, дается формулой (3.49):

$$U = \frac{1}{2} \int_V \int \int (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz.$$

В случае тонких пластинок, в соответствии с допущениями, сделанными в параграфе 11.1, напряжения σ_z , γ_{xz} , γ_{yz} являются малыми величинами, и потому ими можно пренебречь. Отбрасывая в полученном выше выражении члены, содержащие σ_z , γ_{xz} , γ_{yz} , и исключая компоненты деформации с помощью выражений (11.4), имеем

$$U = \int_V \int \int \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y) + \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^2 \right] dx dy dz;$$

здесь используется соотношение $G = E/2(1 + \nu)$. Подставляя в приведенную формулу выражение (11.6) для σ_x , σ_y и τ_{xy} через w ,

получим

$$\begin{aligned}
 U = \frac{D}{2} \int \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\
 \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{D}{2} \int \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \\
 \left. - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (11.28)
 \end{aligned}$$

где A — площадь пластинки.

Полученную формулу можно привести к значительно более простому виду для пластин произвольной формы, у которых все кромки защемлены, и для прямоугольных пластинок, вдоль кромок которых $w = 0$. Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned}
 \int_A \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy = - \oint_S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \int_A \int \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dx dy = \\
 = \oint_S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \oint_S \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy + \int_A \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy.
 \end{aligned}$$

Но для пластинок с защемленными краями должно быть

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \text{ и, соответственно, } \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ вдоль кромок.}$$

В случае прямоугольной пластинки будем иметь

$$w = 0 \text{ по всем кромкам}$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ вдоль кромок } y = \text{const}$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ вдоль кромок } x = \text{const.}$$

Таким образом, первые два интеграла в полученном выше выражении будут тождественно равны нулю и мы получим

$$\int_A \int \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0. \quad (11.29)$$

Энергия изгиба будет равна:

$$U = \frac{D}{2} \int \int_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy. \quad (11.30)$$

Чтобы проиллюстрировать применение метода Рэлея — Ритца, рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки с защемленными краями. Расположим координатные оси, как показано на рис. 11.5. Граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a; \\ \omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b. \end{aligned}$$

Эти условия удовлетворяются, если принять ω в следующем виде:

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right); \quad (11.31)$$

здесь параметры A_{mn} надо определить из условия минимума потенциальной энергии системы, равной

$$\Pi = U - W.$$

Подставляя выражение (11.31) в (11.30) и интегрируя, находим

$$\begin{aligned} U &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 A_{mn} \left[\frac{m^2}{a^2} \cos \frac{2m\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n^2}{b^2} \cos \frac{2n\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \right] \right\}^2 dx dy = \\ &= 2D\pi^4 ab \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[3 \left(\frac{m^4}{a^4}\right) + 3 \left(\frac{n^4}{b^4}\right) + 2 \left(\frac{m^2}{a^2}\right) \left(\frac{n^2}{b^2}\right) \right] A_{mn}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} 2 \left(\frac{m^4}{a^4}\right) A_{mr} A_{ms} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{s=1 \\ r \neq s}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{n^4}{b^4}\right) A_{rn} A_{sn} \right\}. \end{aligned}$$

Если пластинка находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности p_0 , то потенциальная энергия внешних сил равна

$$\begin{aligned} -W &= - \int_0^a \int_0^b p_0 \omega dx dy = \\ &= -p_0 \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) \right] dx dy = \\ &= -p_0 ab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}. \end{aligned}$$

Условие $\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = 0$ дает

$$4D\pi^4 ab \left\{ \left[3 \left(\frac{m^4}{a^4} \right) + 3 \left(\frac{n^4}{b^4} \right) + 2 \left(\frac{m^2}{a^2} \right) \left(\frac{n^2}{b^2} \right) \right] A_{mn} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n}}^{\infty} 2 \left(\frac{m^4}{a^4} \right) A_{mr} + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{\infty} 2 \left(\frac{n^4}{b^4} \right) A_{rn} \right\} - p_0 ab = 0. \quad (11.32)$$

Для различных значений m и n получим столько уравнений относительно A_{mn} , сколько параметров было взято. Решая совместно эти уравнения, можно найти эти параметры, а затем прогибы, моменты и напряжения во всех точках пластинки. Если, для примера, взять только один параметр A_{11} , то будем иметь

$$A_{11} = \frac{p_0 a^4}{4D\pi^4} \frac{1}{3 + 3 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^2}.$$

Для квадратной пластинки $A_{11} = p_0 a^4 / 32D\pi^4$. Подставляя это значение в (11.31) и принимая $\nu = 0,3$, находим наибольший прогиб пластинки при $x = a/2$, $y = b/2 = a/2$ равным

$$w_{\max} = \frac{0,0140 p_0 a^4}{Eh^3}.$$

Эта величина всего на 1,5% выше значения, вычисленного значительно более громоздким методом *).

Возьмем теперь большее число параметров; будем учитывать, например, параметры A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , A_{13} , A_{31} , A_{33} . Тогда условие (11.32) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left[3 + 3 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] A_{11} + 2A_{12} + \\ & \quad + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{21} + 2A_{13} + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{31} = \frac{p_0 a^4}{4D\pi^4}, \\ & 2A_{11} + \left[3 + 48 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 8 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] A_{12} + 2A_{13} + 32 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{22} = \frac{p_0 a^4}{4D\pi^4}, \\ & 2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{11} + \left[48 + 3 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 8 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] A_{21} + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{31} + 32A_{22} = \frac{p_0 a^4}{4D\pi^4}, \\ & 32A_{21} + 16 \left[3 + 3 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] A_{22} + 32 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{12} = \frac{p_0 a^4}{4D\pi^4}. \end{aligned}$$

*) Т. Н. Evans, Tables of moments and deflections for a rectangular plate fixed on all edges and carrying a uniformly distributed load, J. Appl. Mech., т. 6, 1939; см. также С. П. Тимошенко, Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.

$$2A_{11} + 2A_{12} + \left[3 + 243 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 18 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right] A_{13} + 162 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{33} = \frac{p_0 a^4}{4D\pi^4},$$

$$2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{11} + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{21} + \left[243 + 3 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + \right.$$

$$\left. + 18 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right] A_{31} + 162 A_{33} = \frac{p_0 a^4}{4D\pi^4},$$

$$162 \left(\frac{a}{b} \right)^4 A_{13} + 162 A_{31} + 81 \left[3 + 3 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right] A_{33} = \frac{p_0 a^4}{4D\pi^4}.$$

Для квадратной пластинки, при $a = b$, решение последних уравнений дает следующие значения параметров:

$$A_{11} = 0,11774p', \quad A_{12} = A_{21} = 0,01184p',$$

$$A_{22} = 0,00189p', \quad A_{13} = A_{31} = 0,00268p',$$

$$A_{33} = 0,00020p',$$

где $p' = p_0 a^4 / 4D\pi^4$. Подставляя эти величины в (11.31), находим максимальный прогиб равным

$$w_{\max} = \frac{0,0138 p_0 a^4}{Eh^3},$$

что в точности совпадает со значением, полученным Ивенсом.

В качестве второго примера рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки сосредоточенной силой P , перпендикулярной к плоскости пластинки и приложенной в точке $x = x_1$, $y = y_1$.

В этом случае потенциальная энергия внешней силы равна

$$-W = -P(w)_{x=x_1, y=y_1} =$$

$$= -P \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x_1}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y_1}{b} \right).$$

Условие $\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = 0$ принимает вид:

$$4D\pi^4 ab \left\{ \left[3 \left(\frac{m^4}{a^4} \right) + 3 \left(\frac{n^4}{b^4} \right) + 2 \left(\frac{m^2}{a^2} \right) \left(\frac{n^2}{b^2} \right) \right] A_{mn} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n}}^{\infty} 2 \left(\frac{m^4}{a^4} \right) A_{mr} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{\infty} 2 \left(\frac{n^4}{b^4} \right) A_{rn} \right\} - P \left(1 - \cos \frac{2m\pi x_1}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y_1}{b} \right) = 0; \quad (11.33)$$

отсюда могут быть найдены параметры A_{mn} .

Обратимся к частному случаю, когда сосредоточенная сила приложена в центре квадратной пластинки. Учитывая семь параметров A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , A_{13} , A_{31} , A_{33} , найдем:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0,12662P', & A_{12} &= A_{21} = -0,00601P', \\ A_{22} &= 0,00301P', & A_{13} &= A_{31} = 0,00278P', \\ A_{33} &= 0,00015P', \end{aligned}$$

где $P' = Pa^2/D\pi^4$. Наибольший прогиб будет в центре пластинки:

$$w_{\max} = \frac{0,0593Pa^2}{Eh^3},$$

что на 3% меньше значения, полученного С. П. Тимошенко *).

Задача 1. Прямоугольная пластинка находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности p_0 (см. рис. 11.5). Если края шарнирно оперты, можно принять

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Определить параметры A_{mn} по методу Рэлея — Ритца.

$$\text{Отв. } A_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{ для нечетных } m \text{ и } n;$$

$$A_{mn} = 0 \text{ для четных } m \text{ и } n.$$

Задача 2. Определить параметры A_{mn} в предыдущей задаче, если пластинка находится под действием сосредоточенной силы P , приложенной в точке $x = x_1$, $y = y_1$. Найти наибольший прогиб центральной нагруженной квадратной пластинки.

$$\text{Отв. } A_{mn} = \frac{4P}{\pi^4 ab D} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

$$(w_{\max})_{a=b} = \frac{0,0115Pa^2}{D}.$$

Задача 3. Для прямоугольной пластинки, у которой два края защемлены, а два других шарнирно оперты, можно принять

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Определить параметры A_{mn} методом Рэлея — Ритца в случае, если пластинка находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью p_0 .

Задача 4. Решить предыдущую задачу, если пластинка находится под действием сосредоточенной силы P в точке $x = x_1$ и $y = y_1$.

*) С. П. Тимошенко, Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.

11.5. Изгиб круглых пластинок. При рассмотрении изгиба круглых пластинок удобно пользоваться полярными координатами. Примем координатную систему, как показано на рис. 11.7. Зависимости между полярными и декартовыми координатами будут следующими:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x};$$

отсюда находим:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = + \frac{x}{r} = \cos \theta,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = + \frac{y}{r} = \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{y}{r^2} = - \frac{\sin \theta}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = + \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

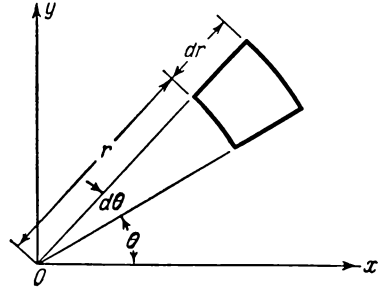


Рис. 11.7.

Пользуясь этими выражениями и рассматривая w как функцию r и θ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta = \\ &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \theta = \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w.$$

Чтобы определить вторые производные, повторим предыдущую операцию:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^3 \theta}{r} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^3 \theta}{r} - 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r} - \\ &\quad - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r^2} - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}. \end{aligned}$$

При таком преобразовании координат получим

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}; \quad (11.34)$$

оператор ∇^2 можно выразить следующим образом:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Напомним формулу для оператора ∇^4 :

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности тонкой пластинки, находящейся под действием поперечной нагрузки, будет в полярных координатах иметь вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{p}{D}. \quad (11.35)$$

Чтобы написать выражения в полярных координатах для моментов и поперечных сил, рассмотрим элемент пластинки, ограниченный двумя смежными осевыми плоскостями, образующими угол $d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями, радиусы которых соответственно равны r и $r + dr$ (рис. 11.8). Примем, что ось x совпадает с радиусом r . Моменты M_r , M_t , M_{rt} и поперечные силы Q_r , Q_t имеют те же значения, что и моменты M_x , M_y , M_{xy} и поперечные силы Q_x , Q_y в той же точке. Подставляя $\theta = 0$ в выражения для $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = \\ &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_t &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = \\ &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \\ M_{rt} &= M_{tr} = (1 - \nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} = \\ &= (1 - \nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = \\ &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\ Q_t &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = \\ &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.36)$$

Граничные условия по краю круглой пластинки радиуса a будут следующими. Если часть края $r = a$ шарнирно оперта, то для нее при $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$w = 0, \quad M_r = 0. \quad (11.37)$$

В случае защемленного края

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (11.38)$$

Для свободного края

$$M_r = 0, \quad V = Q_r - \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} = 0. \quad (11.39)$$

Если нагрузка, действующая на круглую пластинку, распределяется симметрично относительно оси, перпендикулярной к пластинке и проходящей через ее центр, то и граничные условия будут

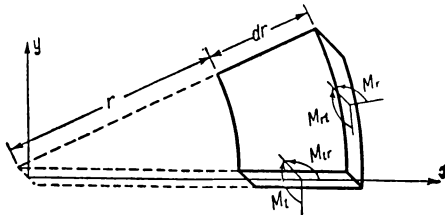


Рис. 11.8.

симметричными; изогнутая поверхность пластинки будет также осесимметричной. В этих случаях прогиб w не будет зависеть от θ , а будет функцией только r . Тогда уравнение (11.35) примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{p}{D}. \quad (11.40)$$

Выражение, стоящее в скобках, равно

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right).$$

Таким образом, уравнение (11.40) можно переписать в следующей форме:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D}. \quad (11.41)$$

Это уравнение легко проинтегрировать при заданной интенсивности нагрузки $p(r)$.

Рассмотрим частный случай круглой пластинки радиуса a , находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки p_0 . Умножая обе части уравнения (11.41) на r и производя интегрирование, получаем

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p_0 r^2}{2D} + C_1,$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p_0 r}{2D} + \frac{C_1}{r}, \quad (11.42)$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Не представляет труда провести и последующие операции интегрирования; тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) &= \frac{p_0 r^2}{4D} + C_1 \ln r + C_2, \\ r \frac{dw}{dr} &= \frac{p_0 r^4}{16D} + \frac{C_1 r^2}{4} (2 \ln r - 1) + \frac{C_2 r^2}{2} + C_3, \\ w &= \frac{p_0 r^4}{64D} + \frac{C_1 r^2}{4} (\ln r - 1) + \frac{C_2 r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4, \end{aligned} \quad (11.43)$$

где C_2, C_3, C_4 — новые постоянные.

В случае симметрично нагруженной пластинки из уравнения (11.36) имеем

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{Q}{D}.$$

Для круглой пластинки без центрального отверстия по формуле (11.42) находим, что при $r=0$ величина Q становится бесконечно большой. Так как это невозможно, то должно быть $C_1=0$. Аналогично из (11.43) следует, что w обращается в бесконечность при $r=0$. Чтобы исключить такую возможность, надо положить $C_3=0$.

Если край пластинки защемлен, имеем

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0$$

при $r=a$. Следовательно,

$$\frac{p_0 a^4}{64D} + \frac{C_2 a^4}{4} + C_4 = 0, \quad \frac{p_0 a^3}{16D} + \frac{C_2 a}{2} = 0;$$

отсюда

$$C_2 = -\frac{p_0 a^4}{8D}, \quad C_4 = \frac{p_0 a^4}{64D}.$$

Прогиб такой пластинки будет равен

$$w = \frac{p_0}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (11.44)$$

Наибольший прогиб имеет место в центре пластинки и равен

$$(w)_{r=0} = \frac{p_0 a^4}{64D}.$$

Подставляя (11.44) в (11.36), получаем:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{p_0}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)], \\ M_t &= \frac{p_0}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)]. \end{aligned} \right\} \quad (11.45)$$

Наибольший изгибающий момент имеет место на кромке пластинки:

$$(M_r)_{r=a} = -\frac{p_0 a^2}{8}.$$

Наибольшее напряжение изгиба оказывается равным

$$(\sigma_r)_{\max} = -\frac{6M_r}{h^2} = \frac{3p_0 a^2}{4h^2}.$$

Задача 1. Круглая пластинка с шарнирно опертым краем находится под действием равномерно распределенной нагрузки. Примем, что пластинка не имеет отверстия. Найти наибольший прогиб, момент и напряжение изгиба.

Отв.

$$w = \frac{p_0 (a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right).$$

Задача 2. Круглая пластинка радиуса a изгибается моментом M , равномерно распределенным вдоль края. Найти выражение для прогиба w , если край оперт шарнирно.

Отв.

$$w = \frac{M}{2D(1 + \nu)} (a^2 - r^2).$$

Задача 3. Пусть круглая пластинка, рассмотренная в задаче 2, имеет в центре отверстие радиуса b . Найти выражение для прогиба пластинки.

Отв.

$$w = \frac{-b^2 M}{2(1 + \nu) D (a^2 - b^2)} (a^2 - r^2) + \frac{a^2 b^2 M}{(1 - \nu) D (a^2 - b^2)} \ln \frac{r}{a}.$$

Задача 4. В центре пластинки радиуса a имеется отверстие радиуса b . Считаем, что пластинка находится под действием равномерно распределенной нагрузки и что внутренний край ее защемлен, а внешний — свободен. Найти наибольший прогиб, момент и напряжение изгиба при $b = a/4$.

11.6. Прямоугольные пластинки при совместном действии поперечной нагрузки и сил в срединной плоскости. Ранее мы полагали, что пластинка получает малый прогиб, находясь под действием только поперечных сил. Если в дополнение к поперечной нагрузке имеются силы, действующие в срединной плоскости пластинки, то в основное дифференциальное уравнение войдут члены, учитывающие влияние этих сил. Обозначим напряжения в срединной поверхности через σ_{x_0} , σ_{y_0} , τ_{xy_0} . Тогда усилия в срединной поверхности, приходящиеся на единицу длины сечения, будут равны:

$$N_x = h \dot{\epsilon}_{x_0}, \quad N_y = h \dot{\epsilon}_{y_0} \quad \text{и} \quad N_{xy} = N_{yx} = h \tau_{xy_0}.$$

Примем, что прогиб w пластинки достаточно мал, так что первые два допущения из параграфа 11.1 остаются в силе, и вместе с тем настолько велик, что произведения сил, лежащих в срединной плоскости, или их производных на производные от w , будут величинами того же порядка, что и производные от поперечных сил Q_x и Q_y . В этом случае напряжения изгиба в пластинке определяются по-прежнему выражениями (11.6), выведенными в параграфе 11.1, а моменты и поперечные силы — выражениями (11.8) и (11.13).

Рассмотрим условия равновесия элемента пластинки со сторонами dx и dy . Помимо сил, показанных на рис. 11.2, имеем еще силы N_x , N_y и $N_{xy} = N_{yx}$, лежащие в срединной поверхности. Так как проекции сил, приведенных на рис. 11.2, на направления x и y равны нулю, то при составлении суммы проекций сил на эти оси следует учитывать только силы, лежащие в срединной поверхности

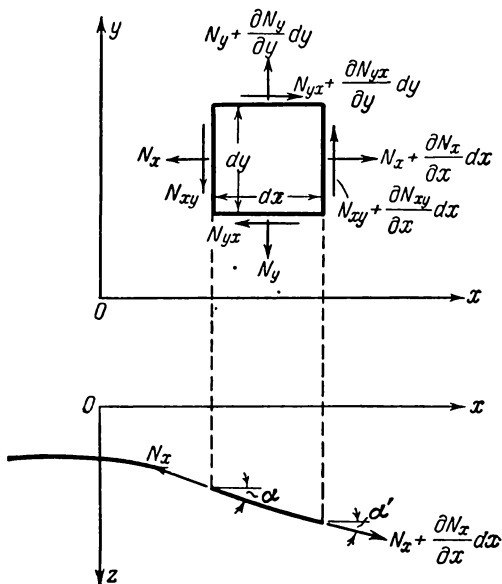


Рис. 11.9.

(рис. 11.9). Сумма проекций на ось x сил $N_x dy$ и $(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) dy$ равна

$$(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) dy \cos \alpha' - N_x dy \cos \alpha, \quad (11.46)$$

где $\alpha' = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$. Воспользуемся соотношениями

$$\cos \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \dots = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$$

Для малого угла α величина $\frac{\alpha^2}{2}$ значительно меньше 1, и $\cos \alpha \approx 1$. Точно так же $\cos \alpha' \approx 1$. Таким образом, выражение (11.46) получает вид

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy.$$

Подобным же путем можно показать, что сумма проекций на ось x сил $N_{yx} dx$ и $\left[N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy \right] dx$ равна

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dx dy.$$

Суммируя эти компоненты, приводим условие $\sum F_x = 0$ к виду

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (11.47)$$

Аналогично, условие $\sum F_y = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (11.48)$$

Выпишем, далее, уравнение равновесия в проекциях на ось z . Здесь надо рассматривать, помимо компонентов сил, показанных на рис. 11.9, еще и силы, изображенные на рис. 11.2. Проекции на ось z сил $N_x dy$ и $\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy$ дают результирующую

$$- N_x dy \sin \alpha + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \sin \alpha'.$$

Для малых углов α и α' имеем

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial w}{\partial x}$$

и

$$\sin \alpha' \approx \alpha' \approx \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx.$$

Следовательно, выражение для результирующей силы принимает вид:

$$\begin{aligned} - N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) = \\ = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy; \end{aligned}$$

членами высшего порядка малости пренебрегаем. Таким же путем можно показать, что результирующая компонентов вдоль оси z сил

$$N_y dx, \quad \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx$$

равна

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy.$$

Чтобы найти проекции на ось z сил $N_{xy} dy$ и $\left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy$, обратимся к рис. 11.10. Прогиб в точке O' изогнутой срединной

поверхности равен w , а прогиб в B' равен $w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$. Следовательно, линия $O'B'$ повернута вниз и находится под углом $\frac{\partial w}{\partial y}$ к оси y . Таким же образом устанавливаем, что линия $A'C'$ наклонена вниз и находится под углом $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx$ к оси y . Поэтому поперечные силы $N_{xy} dy$ и $(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx) dy$ будут иметь результирующую в направлении z , равную

$$\begin{aligned} -N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + (N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx) dy (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx) = \\ = N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Аналогичное выражение можно получить для суммы проекций на ось z сил $N_{yx} dx$ и $(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy)$:

$$N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy.$$

Сложив эти величины с проекциями на ось z сил, показанных на рис. 11.2, и разделив на $dx dy$, получим

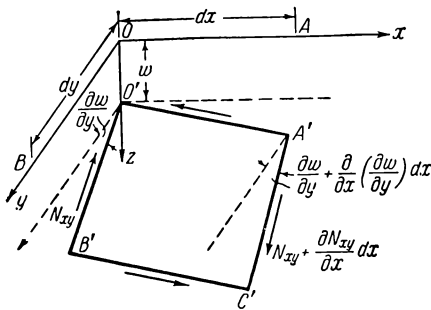


Рис. 11.10.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ + (\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y}) \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + (\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y}) \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Но из уравнений (11.47) и (11.48) следует, что выражения, стоящие в скобках, равны нулю. Так как силы, лежащие в срединной поверхности, не создают моментов вдоль кромки элемента, то уравнения (11.11), (11.12) и соответственно формулы (11.13) останутся без изменения. Пользуясь этими зависимостями, можно придать уравнению равновесия в проекциях на ось z следующий вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (11.49)$$

Уравнения (11.47) и (11.49) являются основными дифференциальными уравнениями для тонкой пластинки, находящейся в условиях совместного действия изгиба и сил, лежащих в срединной плоскости.

Рассмотрим прямоугольную пластинку с шарнирно опертными краями при совместном действии поперечной нагрузки и усилий равномерного растяжения N_x в направлении x . В этом случае имеем

$$N_x = \text{const}, \quad N_y = N_{xy} = 0.$$

Уравнения (11.47) и (11.48) тождественно удовлетворяются, и остается выписать только уравнение (11.49). В параграфе 11.3 было показано, что равномерно распределенная поперечная нагрузка p_0 может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$p = \frac{16p_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Уравнение (11.49) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ = \frac{16p_0}{D\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (11.50)$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \text{ и } x=a \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ \text{при } y=0 \text{ и } y=b \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Эти условия будут удовлетворяться, если принять w в виде двойного ряда:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (11.50), находим:

$$A_{m\pi} = \frac{16p_0}{D\pi^6 mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2} \right]} \quad \text{при нечетных } m \text{ и } n.$$

$$A_{m\pi} = 0 \quad \text{при четных } m \text{ или } n.$$

Окончательно получим

$$w = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2} \right]} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (11.51)$$

Сравнивая выражения (11.51) и (11.25), находим, что при наличии растягивающей силы прогиб пластинки уменьшается. С другой стороны, если сила N_x , лежащая в срединной плоскости, будет сжимающей, то прогиб пластинки возрастает.

Задача 1. Шарнирно опертая прямоугольная пластинка находится под действием гидростатического давления

$$p(x, y) = \frac{p_0 x}{a}.$$

Найти прогиб, моменты и напряжения в пластинке, если на нее действует вдоль сторон $x = 0$ и $x = a$ равномерно распределенное растягивающее усилие N_x .

Задача 2. Шарнирно опертая прямоугольная пластинка находится в условиях совместного действия равномерного поперечного давления p_0 и сил N , лежащих в срединной плоскости и равномерно распределенных вдоль четырех кромок. Найти прогиб, моменты и напряжения в пластинке.

11.7. Выпучивание шарнирно опертых прямоугольных пластинок, подвергающихся равномерному сжатию в одном направлении. Если подвергнуть плоскую пластинку действию сжимающих усилий, лежащих в срединной плоскости, то при некотором критическом значении сил плоская форма равновесия станет неустойчивой, и пластинка начнет выпучиваться. Это явление аналогично продольному изгибу стержней. Рассмотрим шарнирно опертую прямоугольную пластинку (рис. 11.11), сжатую в срединной плоскости силами N_x , равномерно распределенными вдоль сторон $x = 0$ и $x = a$. В этом случае

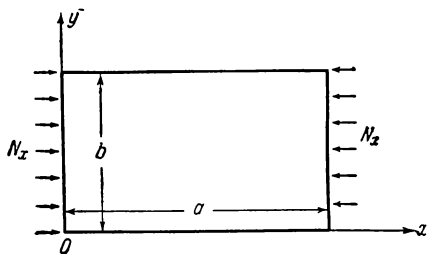


Рис. 11.11.

$$N_x = -\text{const},$$

$$N_y = N_{xy} = p = 0.$$

Уравнения (11.47) и (11.48) тождественно удовлетворяются; остается лишь одно уравнение (11.49). Подставляя в это уравнение ($-N_x$) вместо N_x , получим

$$D\nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (11.52)$$

Граничные условия будут выполнены, если принять

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (11.52), будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - N_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} \right] A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

Тривиальное решение приводит к значениям $A_{mn} = 0$, или $w = 0$. Отбрасывая это решение, мы должны положить

$$D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - N_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} = 0,$$

или

$$N_x = \frac{\pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2}{a^2}} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2. \quad (11.53)$$

Если N_x достигает значения, определяемого правой частью последней формулы, то параметры A_{mn} и прогиб w могут быть отличными от нуля; это отвечает выпучиванию пластинки. К такому же заключению можно прийти, рассматривая уравнение (11.51). Мы видели, что в случае сжимающей силы величину N_x в уравнении (11.51) следует заменить через $(-N_x)$. Когда N_x достигает величины, определяемой выражением (11.53), знаменатель в уравнении (11.51) обращается в нуль; если p_0 отличается от нуля, то w обращается в бесконечность. Физически это означает, что как бы мала ни была поперечная нагрузка, пластинка получит весьма большие прогибы. Другими словами, пластинка будет выпучиваться.

Из уравнения (11.53) следует, что значение N_x будет наименьшим при $n = 1$. Отсюда вытекает, что при выпучивании пластинки может образоваться несколько полуволн в направлении сжатия, и только одна полуволна в перпендикулярном направлении. Следовательно, критическая нагрузка равна

$$(N_x)_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 = k \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (11.54)$$

где $k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$ — численный множитель, величина которого зависит от m и от отношения a/b . Наименьшее значение $(N_x)_{\text{кр}}$ имеет место при

$$\frac{d(N_x)_{\text{кр}}}{d(mb/a)} = \frac{2\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right) \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{mb}{a} \right)^2} \right] = 0,$$

или

$$\frac{mb}{a} = 1.$$

Отсюда минимальное значение $(N_x)_{\text{кр}}$ оказывается равным $4\pi^2 D/b^2$. При определенных значениях множителя m величина k зависит только от отношения a/b . На рис. 11.12 нанесены значения k в зависимости от отношения a/b для $m = 1, 2, 3, 4, 5$. Имея эти кривые, можно определить величину критической нагрузки и число полуволн при любом отношении a/b . Для этого надо найти ординату кривой, соответствующую наименьшему значению k для заданного

отношения a/b . Например, при $a/b = 2,5$ по рис. 11.12 находим: $k = 4,133$ и $m = 3$. Это означает, что выпучивание пластинки сопро-

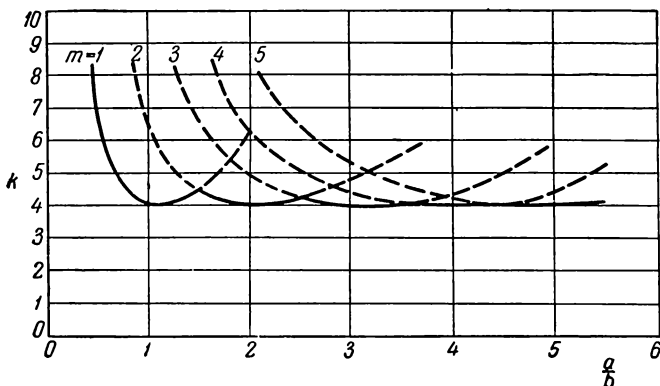


Рис. 11.12.

вождается образованием трех полуволн в направлении действия нагрузки, причем критическое усилие равно

$$(N_x)_{кр} = 4,133\pi^2 D/b^2.$$

Задача 1. Шарнирно опертая прямоугольная пластинка находится под действием равномерного сжатия в двух перпендикулярных направлениях. Найти критическую нагрузку.

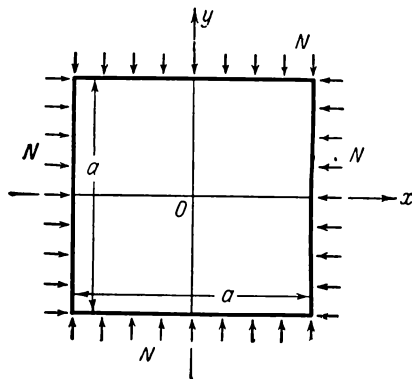


Рис. 11.13.

11.8. Выпучивание свободно опертой квадратной пластинки, сжатой в двух перпендикулярных направлениях. Приближенное решение по методу конечных разностей. Критическую нагрузку можно вычислить также с помощью метода конечных разностей, как это было сделано ранее для стержней. Проиллюстрируем применение метода конечных разностей на численном примере.

Рассмотрим выпучивание шарнирно опертой квадратной пластинки, находящейся под действием равномерного сжатия. Пусть длина стороны равна a . Если выбрать координатные оси, как показано на рис. 11.13, то при

$$N_x = N_y = -N, \quad p = N_{xy} = 0$$

получим уравнение устойчивости (11.49) в виде

$$\nabla^4 w + \frac{N}{D} \nabla^2 w = 0$$

при следующих граничных условиях:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{вдоль кромок } x = \pm \frac{a}{2},$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{вдоль кромок } y = \pm \frac{a}{2}.$$

Так как производная $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ тождественно равна нулю вдоль кромок $x = \pm \frac{a}{2}$, а производная $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ тождественно равна нулю вдоль кромок $y = \pm \frac{b}{2}$, то граничные условия можно записать в следующей форме:

$$\nabla^2 w = 0 \quad \text{вдоль всех кромок.}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение может быть переписано в виде

$$\nabla^2 M + \frac{N}{D} M = 0 \quad (11.55)$$

при $M = 0$ на контуре, и

$$\nabla^2 w = M \quad (11.56)$$

при $w = 0$ на контуре. Сопоставление уравнения (11.56) и условия на контуре для w показывает, что при тривиальном решении $M = 0$ мы получим также тривиальное решение $w = 0$. Следовательно, для решения задачи на устойчивость необходимо найти нетривиальное решение уравнения (11.55).

Обратимся теперь к рис. 11.14; соответствующее уравнение в конечных разностях для произвольной точки O принимает вид

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + C_n M_0 = 0, \quad (11.57)$$

и на контуре

$$M_i = 0.$$

В этих выражениях индекс i относится к точкам контура и введено обозначение

$$C_n = \frac{N_n a^2}{n^2 D} - 4 = \frac{k_n}{n^2} - 4,$$

где $k_n = N_n a^2 / D$. Под N_n понимается приближенное значение критической нагрузки, вычисленное при условии, что стороны пластинки разделены на n отрезков.

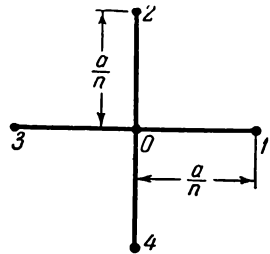


Рис. 11.14.

Приближение $n=2$. Принимая во внимание симметрию, нумеруем узловые точки, как показано на рис. 11.15. Применяем уравнение (11.57) для $x=y=a/2$. Из граничных условий находим $M_2=M_3=0$. Уравнение (11.57) дает

$$C_n M_1 = 0;$$

отсюда $C_n=0$ или $k_n=4n^2=16,00$; погрешность решения составляет $(-19)\%$.

Приближение $n=4$. В связи с симметрией можно рассматривать только восьмую часть пластинки (рис. 11.16). Составляем

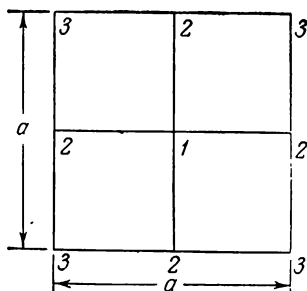


Рис. 11.15.

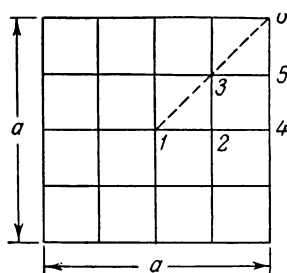


Рис. 11.16.

уравнение (11.57) для узловых точек 1, 2, 3. Принимая во внимание граничные условия

$$M_4 = M_5 = M_6 = 0,$$

получим

$$C_4 M_1 + 4M_2 = 0, \quad M_1 + C_4 M_2 + 2M_3 = 0, \quad 2M_2 + C_4 M_3 = 0.$$

Это уравнение дает решение для M , отличное от нуля, при условии

$$\begin{vmatrix} C_4 & 4 & 0 \\ 1 & C_4 & 2 \\ 0 & 2 & C_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $C_4 = -2,8284$, и $k_4 = 18,75$; погрешность равна $(-5,1)\%$. После экстраполяции получим $k_{2,4} = 19,67$; погрешность будет $(-0,35)\%$. Точное значение k составляет $19,739^*$.

Задача 1. Шарнирно опертая прямоугольная пластинка с отношением сторон $a=2b/3$ подвергается равномерному сжатию вдоль кромок. Вычислить критическую нагрузку методом конечных разностей.

Задача 2. Квадратная пластинка с защемленными краями подвергается равномерному сжатию вдоль двух противоположных сторон. Определить критическую нагрузку методом конечных разностей.

*) С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1957.

Задача 3. У квадратной пластинки две противоположные стороны шарнирно оперты, а две другие — защемлены. Предполагается, что вдоль двух шарнирно опертых сторон равномерно распределены сжимающие усилия. Вычислить критическую нагрузку.

11.9. Выпучивание шарнирно опертых прямоугольных пластин при сдвиге. Энергетический метод. Критическая нагрузка для пластинок может быть вычислена, как и в случае стержней, энергетическим методом. Принимаем, что к пластинке приложены некоторые силы в срединной плоскости, отвечающие моменту выпучивания, т. е. что величины этих сил в точности равны критическим значениям. Предполагается, далее, что пластинка подвергается действию некоторых малых возмущений, вызывающих выпучивание. При таком переходе от одной равновесной формы к другой полная энергия не изменяется; поэтому работа усилий в срединной поверхности должна быть равна энергии изгиба, накопленной в пластинке.

Рассмотрим элемент $dx dy$, изображенный на рис. 11.17. При изгибе пластинки элемент AB перемещается в положение $A'B'$. Так как напряжения в срединной поверхности и деформации не изменяются, то длина $A'B'$ будет по-прежнему dx , но ее горизонтальная проекция теперь равна

$$\left[(dx)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{1/2} = dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \dots$$

Если пренебречь членами высшего порядка малости, то работа, совершенная усилиями $N_x dy$, будет равна

$$\frac{1}{2} \int_A \int N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy.$$

Аналогичное выражение для работы, произведенной усилиями $N_y dx$, имеет вид

$$\frac{1}{2} \int_A \int N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy,$$

где A — площадь пластинки.

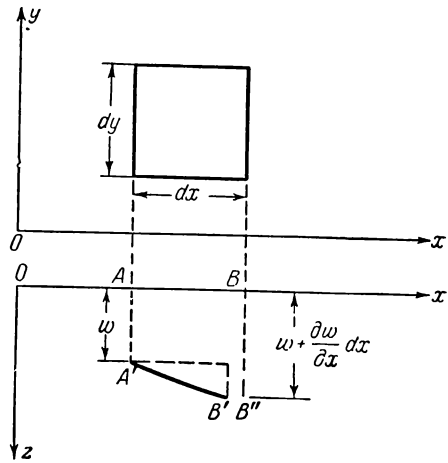


Рис. 11.17.

Чтобы вычислить работу, произведенную касательными усилиями $N_{xy} dx$ и $N_{yx} dy$, найдем деформацию сдвига, сопровождающую изгиб пластинки. Обращаясь к рис. 11.18, находим направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 соответственно элементов O_1A_1 и O_1B_1 :

$$l_1 = \frac{[(dx)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2]^{1/2}}{dx} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$m_1 = 0,$$

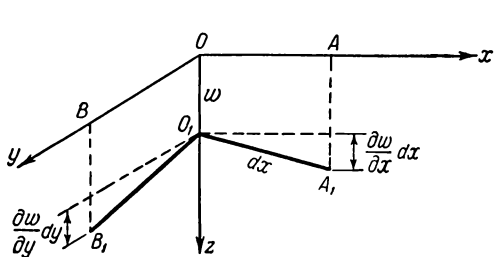
$$n_1 = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$l_2 = 0,$$

$$m_2 = \frac{[(dy)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y} dy\right)^2]^{1/2}}{dy} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$n_2 = \frac{\frac{\partial w}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Деформация сдвига γ_{xy} определяется выражением



$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\pi}{2} - \angle A_1O_1B_1 = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle A_1O_1B_1\right) = \\ &= \cos(\angle A_1O_1B_1) = l_1 l_2 + \\ &+ m_1 m_2 + n_1 n_2 = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Работа касательных усилий $N_{xy} = N_{yx}$ равна

$$\int_A \int N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy.$$

Рис. 11.18.

Общая работа, произведенная силами в срединной поверхности, оказывается равной

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \int_A \int \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (11.58)$$

Накопленная в пластинке энергия изгиба согласно параграфу 11.4 равна

$$U = \frac{D}{2} \int_A \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \right\} dx dy.$$

При выпучивании должно быть

$$\bar{\Pi} = U - \bar{W} = 0. \quad (11.59)$$

Чтобы проиллюстрировать энергетический метод, рассмотрим в качестве примера выпучивание шарнирно опертых прямоугольных пластин под действием касательных усилий N_{xy} , равномерно распределенных вдоль кромок (рис. 11.19). Выражение для w , удовлетворяющее граничным условиям, можно принять в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

В данном случае $N_x = N_y = 0$; поэтому работа, произведенная внешними силами во время выпучивания, оказывается равной

$$\bar{W} = N_{xy} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy.$$

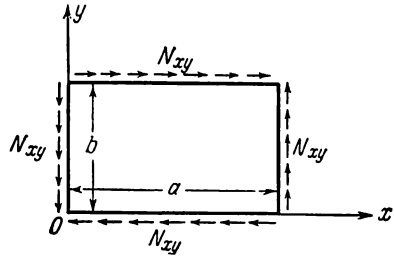


Рис. 11.19.

Подставим сюда принятое нами выражение для w и проведем интегрирование по всей площади. Отметим соотношения

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = 0, \text{ если } m \pm p \text{ — четное число,}$$

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = \frac{2a}{\pi} \frac{m}{m^2 - p^2}, \text{ если } m \pm p \text{ — нечетное число.}$$

Таким образом, будем иметь

$$\bar{W} = 4N_{xy} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q A_{mn} A_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)},$$

где m, n, p, q — такие индексы, для которых $m \pm p$ и $n \pm q$ будут нечетными числами.

После интегрирования находим энергию изгиба выпученной пластинки равной

$$U = \frac{D}{2} \cdot \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2.$$

Уравнение (11.59) принимает вид

$$\bar{\Pi} = \frac{D\pi^4 ab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^n A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \\ - 4N_{xy} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q A_{mn} A_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)} = 0.$$

Определим критические касательные усилия; для этого необходимо подобрать параметры A_{mn} , отвечающие минимальному значению N_{xy} . Как мы видели в параграфе 10.5, это условие эквивалентно требованию, чтобы энергия $\bar{\Pi}$ была минимальной. Продифференцировав

энергию по A_{mn} , получим условие $\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial A_{mn}} = 0$ в виде

$$\frac{D\pi^4 ab}{4} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - 8N_{xy} \sum_p \sum_q A_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)} = 0; \quad (11.60)$$

здесь p и q должны быть такими, чтобы $m \pm p$ и $n \pm q$ были нечетными числами.

Если ввести обозначения

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \varphi = \frac{D\pi^4}{32ab^2 N_{xy}},$$

то уравнение (11.60) примет вид:

$$\varphi A_{mn} \frac{(m^2 + n^2 \alpha^2)^2}{\alpha^2} - \sum_p \sum_q A_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)} = 0. \quad (11.61)$$

Мы пришли к системе однородных линейных уравнений относительно A_{mn} . Для вычисления $(N_{xy})_{кр}$ приравняем нулю детерминант, составленный из коэффициентов при A_{mn} . Так как число уравнений бесконечно, то точное решение будет получено, если мы раскроем детерминант с бесконечным числом рядов и столбцов. Практически находим приближенное решение, взяв некоторое конечное число параметров A_{mn} .

Будем учитывать вначале два параметра A_{11} и A_{22} и будем считать, что все остальные параметры равны нулю. В этом случае уравнение (11.61) принимает вид:

$$\frac{\varphi(1 + \alpha^2)^2}{\alpha^2} A_{11} + \frac{4}{9} A_{22} = 0, \\ \frac{16\varphi(1 + \alpha^2)^2}{\alpha^2} A_{22} + \frac{4}{9} A_{11} = 0.$$

Приравниваем нулю детерминант этой системы уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varphi(1+\alpha^2)^2}{\alpha^2} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{16\varphi(1+\alpha^2)^2}{\alpha^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим

$$\varphi = \pm \frac{1}{9} \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2},$$

или

$$(N_{xy})_{кр} = \pm \frac{9\pi^4 D}{32b^2} \frac{(1+\alpha^2)^2}{\alpha^3}. \quad (11.62)$$

Знаки плюс и минус указывают, что критическое значение касательных сил не зависит от их направления. Уравнение (11.62) дает приближенное значение $(N_{xy})_{кр}$ с погрешностью около 15% для квадратных пластинок и с еще большей погрешностью при других отношениях a/b .

Для того чтобы получить более точный результат, следует ввести большее число параметров. Будем учитывать шесть параметров A_{11} , A_{22} , A_{13} , A_{31} , A_{33} , A_{42} . Уравнение (11.61) примет вид:

$$\begin{array}{cccccc} A_{11} & A_{22} & A_{13} & A_{31} & A_{33} & A_{42} \\ \frac{\varphi(1+\alpha^2)^2}{\alpha^2} & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{45} = 0, \\ \frac{4}{9} & \frac{16\varphi(1+\alpha^2)^2}{\alpha^2} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{36}{25} & 0 = 0, \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{\varphi(1+9\alpha^2)^2}{\alpha^2} & 0 & 0 & -\frac{24}{75} = 0, \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{\varphi(9+\alpha^2)^2}{\alpha^2} & 0 & \frac{24}{21} = 0, \\ 0 & \frac{36}{25} & 0 & 0 & \frac{\varphi(9+9\alpha^2)^2}{\alpha^2} & -\frac{72}{35} = 0, \\ \frac{8}{45} & 0 & -\frac{24}{75} & \frac{24}{21} & -\frac{72}{35} & \frac{\varphi(16+4\alpha^2)^2}{\alpha^2} = 0. \end{array}$$

Приравниваем нулю детерминант, составленный из коэффициентов при A_{mn} в этих уравнениях. Решая полученное уравнение, находим

$$(N_{xy})_{кр} = k \frac{\pi^2 D}{b^2},$$

где k — постоянная, зависящая от отношения a/b . Значения k даны в табл. 11.1 для разных отношений a/b .

Т а б л и ц а 11.1

$\frac{a}{b}$	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3
k	9,4	8,0	7,3	7,1	7,0	6,8	6,6	6,3	6,1

З а д а ч а 1. Шарнирно опертая прямоугольная пластинка подвергается равномерному сжатию вдоль двух противоположных сторон. Вычислить критическую нагрузку с помощью энергетического метода.

З а д а ч а 2. Шарнирно опертая прямоугольная пластинка равномерно сжимается по двум направлениям. Определить критическую нагрузку энергетическим методом.

З а д а ч а 3. Прямоугольная пластинка с защемленными краями равномерно сжимается вдоль двух противоположных сторон. Вычислить критическую силу с помощью энергетического метода.

З а д а ч а 4. Два противоположных края прямоугольной пластинки шарнирно оперты, два других—защемлены. Принимаем, что вдоль двух шарнирно опертых краев на пластинку действует равномерное сжатие. Определить критическую силу энергетическим методом.

ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И ИЗОГНУТЫХ ПЛАСТИНОК

12.1. Элементы дифференциальной геометрии поверхности. В предыдущей главе мы рассматривали теорию тонких плоских пластинок. Распространим теперь наши рассуждения на тонкие оболочки. Так как изогнутую пластинку можно рассматривать как часть оболочки, то общие уравнения для тонких оболочек применимы также и к изогнутым пластинкам. Обозначим толщину оболочки через h . В случае *тонкой* оболочки толщина h мала по сравнению с другими измерениями и радиусом кривизны. Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется *срединной поверхностью*. Геометрия оболочки полностью определяется, если задана форма срединной поверхности и толщина оболочки в каждой точке.

Прежде чем перейти к теории тонких оболочек, рассмотрим некоторые важные геометрические свойства поверхности. В последующем мы будем пользоваться некоторыми понятиями *векторного анализа*. Поверхность определяется как геометрическое место точек, радиус-вектор которых \mathbf{r} относительно некоторого фиксированного центра O является функцией двух независимых параметров ξ_1, ξ_2 . Таким образом, декартовы координаты (x, y, z) точки на поверхности являются известными функциями ξ_1, ξ_2 ; их можно записать в виде

$$x = f_1(\xi_1, \xi_2), \quad y = f_2(\xi_1, \xi_2), \quad z = f_3(\xi_1, \xi_2). \quad (12.1)$$

Уравнения (12.1) являются по сути дела параметрическими уравнениями поверхности. Если из этих уравнений исключить ξ_1 и ξ_2 , то получим уравнение поверхности в обычной форме:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Любое соотношение между параметрами, например, $q(\xi_1, \xi_2) = 0$, представляет кривую на поверхности. В этом случае радиус-вектор \mathbf{r} становится функцией только одного независимого параметра; геометрическое место точек образует кривую линию. В частности, кривые на поверхности, вдоль которых один из параметров остается постоянным, называются *параметризованными кривыми*. Поверхность можно полностью определить как двойную сеть бесконечно большого числа параметризованных кривых. Параметры ξ_1, ξ_2 составляют

систему *криволинейных координат* для точек на поверхности: положение любой точки на поверхности определяется значениями ξ_1 и ξ_2 в этой точке, как показано на рис. 12.1. В качестве примера такого метода описания поверхности рассмотрим случай сферы; воспользуемся при этом обычными сферическими координатами (r, φ, θ) , изображенными на рис. 12.2. Если через R обозначить радиус сферы, то декартовы координаты точки на сфере будут:

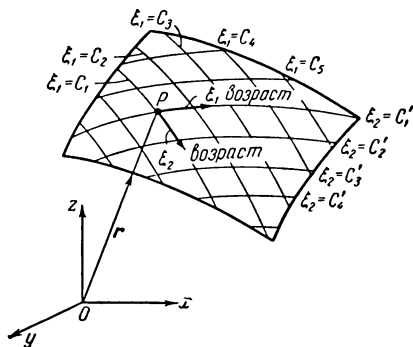


Рис. 12.1

$$\begin{aligned}x &= R \sin \varphi \cos \theta, \\y &= R \sin \varphi \sin \theta, \\z &= R \cos \varphi.\end{aligned}$$

В качестве параметров, определяющих поверхность и заменяющих обобщенные параметры ξ_1 и ξ_2 , здесь можно принять величины φ и θ .

Рассмотрим, далее, две соседние точки P и Q на поверхности (рис. 12.3), радиусы-векторы которых соответственно равны r и $r + dr$, а параметрические координаты имеют значения (ξ_1, ξ_2)

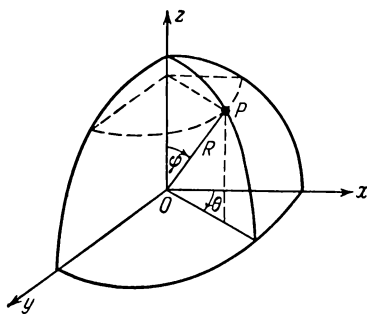


Рис. 12.2.

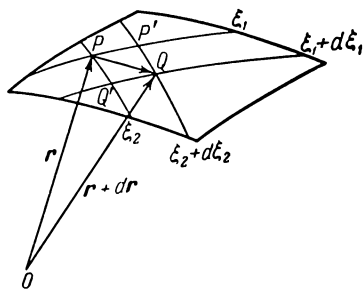


Рис. 12.3.

и $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$. Радиус-вектор r является функцией ξ_1 и ξ_2 , поэтому

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial r}{\partial \xi_2} d\xi_2. \quad (12.2)$$

Проведем кривую через обе точки, лежащие бесконечно близко друг от друга; длину ds элемента дуги, соединяющей P и Q , можно считать равной модулю $|dr|$ вектора dr ; в пределе точка Q будет сливаться с точкой P .

Как известно, *скалярным произведением двух векторов A и B* называют произведение их модулей A и B на косинус угла θ между векторами:

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta.$$

Скалярное произведение будем в дальнейшем обозначать точкой между соответствующими буквами. Пусть i, j, k будут единичными векторами в направлениях x, y, z , а $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ — соответственно компонентами векторов A и B вдоль этих осей, тогда

$$\begin{aligned} A &= A_x i + A_y j + A_z k, \\ B &= B_x i + B_y j + B_z k \end{aligned}$$

и

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Скалярное произведение двух векторов является скалярной величиной и подчиняется *распределительному закону*:

$$(A + B) \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D.$$

Основываясь на этом, получаем

$$\begin{aligned} (ds)^2 = |dr|^2 &= dr \cdot dr = \left(\frac{\partial r}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial r}{\partial \xi_2} d\xi_2 \right) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial r}{\partial \xi_2} d\xi_2 \right) = \\ &= \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \frac{\partial r}{\partial \xi_1} (d\xi_1)^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 + \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_2} (d\xi_2)^2. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \frac{\partial z}{\partial \xi_2}, \\ G &= \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Пользуясь ими, находим

$$(ds)^2 = E (d\xi_1)^2 + 2F d\xi_1 d\xi_2 + G (d\xi_2)^2. \quad (12.3)$$

Величины E, F, G называются *коэффициентами первой квадратичной формы* поверхности; выражение (12.3) определяет *квадрат дифференциала* длины дуги. Отсюда следует, что величины векторов $\frac{\partial r}{\partial \xi_1}$ и $\frac{\partial r}{\partial \xi_2}$ соответственно равны \sqrt{E} и \sqrt{G} . Если обозначить через θ угол между этими двумя векторами, то по определению скалярного произведения имеем

$$F = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \sqrt{E} \sqrt{G} \cos \theta. \quad (12.4)$$

Принимая во внимание соотношение $0 \leq \cos \theta \leq 1$, находим

$$F \leq \sqrt{EG};$$

это означает, что величина $EG - F^2$ не может быть отрицательной. Можно, таким образом, ввести обозначение

$$H^2 = EG - F^2.$$

Вдоль параметрической кривой $\xi_1 = \text{const}$ будет $d\xi_1 = 0$; из выражения (12.2) вытекает, что вектор PP' (см. рис. 12.3) равен

$$(dr)_2 = \frac{\partial r}{\partial \xi_2} d\xi_2.$$

По (12.3) длина элемента PP' составляет

$$(ds)_2 = \sqrt{G} d\xi_2.$$

Аналогично, вдоль параметрической кривой $\xi_2 = \text{const}$ имеем $d\xi_2 = 0$. Вектор PQ' в свою очередь равен

$$(dr)_1 = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} d\xi_1,$$

а длина PQ' окажется равной

$$(ds)_1 = \sqrt{E} d\xi_1.$$

Если параметризованные кривые образуют на поверхности ортогональную криволинейную систему координат, то векторы PP' и PQ' должны быть взаимно перпендикулярны. Но тогда косинус угла между этими двумя векторами должен быть равен нулю; вместе с тем, обращается в нуль их скалярное произведение:

$$(dr)_1 \cdot (dr)_2 = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 = F d\xi_1 d\xi_2 = 0.$$

Отсюда можно сделать заключение, что при $F = 0$ параметризованные кривые образуют на поверхности ортогональную криволинейную систему координат; в этом случае уравнение (12.3) принимает вид

$$(ds)^2 = \alpha_1^2 (d\xi_1)^2 + \alpha_2^2 (d\xi_2)^2, \quad (12.5)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{E} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \sqrt{G}.$$

Обозначим через C и C' две кривые на поверхности, пересекающиеся в точке P ; под s и σ будем понимать длины дуг вдоль C и C' . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \frac{d\xi_1}{ds} + \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \frac{d\xi_2}{ds}, \\ \frac{dr}{d\sigma} &= \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \frac{d\xi_1}{d\sigma} + \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \frac{d\xi_2}{d\sigma}. \end{aligned}$$

Если обозначить через θ угол между C и C' , то косинус этого угла равен

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = E \frac{d\xi_1}{ds} \frac{d\xi_1}{d\sigma} + F \left(\frac{d\xi_1}{ds} \frac{d\xi_2}{d\sigma} + \frac{d\xi_2}{d\sigma} \frac{d\xi_1}{ds} \right) + G \frac{d\xi_2}{ds} \frac{d\xi_2}{d\sigma}.$$

Необходимое и достаточное условие ортогональности C и C' имеет вид

$$E \frac{d\xi_1}{ds} \cdot \frac{d\xi_1}{d\sigma} + F \left(\frac{d\xi_1}{ds} \frac{d\xi_2}{d\sigma} + \frac{d\xi_2}{d\sigma} \frac{d\xi_1}{ds} \right) + G \frac{d\xi_2}{ds} \frac{d\xi_2}{d\sigma} = 0. \quad (12.6)$$

Для того чтобы исключить s и σ из (12.6), выпишем соотношения

$$\frac{d\xi_1}{ds} = \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_C \frac{d\xi_2}{ds}, \quad \frac{d\xi_1}{d\sigma} = \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_{C'} \frac{d\xi_2}{d\sigma}.$$

Здесь под $\left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_C$ понимается производная, вычисленная вдоль C ; аналогичный смысл имеет индекс C' . Подставим эти выражения в (12.6); после деления на $\frac{d\xi_2}{ds} \frac{d\xi_2}{d\sigma}$ получим

$$E \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_C \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_{C'} + F \left[\left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_C + \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_{C'} \right] + G = 0. \quad (12.7)$$

Таково условие ортогональности кривых C и C' .

Плоскость, содержащая три соседние точки пространственной кривой, или, иными словами, содержащая две соседние касательные к кривой, называется *соприкасающейся плоскостью* *) в точке P . Нормаль, перпендикулярная к касательной в точке P и лежащая в соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью* к кривой в точке P .

Нормальным сечением поверхности в некоторой точке P называется сечение некоторой плоскостью, содержащей нормаль к поверхности в этой точке. Такое сечение представляет собой плоскую кривую, главная нормаль к которой совпадает по направлению с нормалью к поверхности в *данной конкретной точке* P ; в некоторой другой точке такое совпадение может уже не иметь места. На рисунке 12.4 изображены нормаль \mathbf{n}_1 к поверхности в точке P , а также содержащая эту нормаль плоскость S_1 . Если кривая AB является линией пересечения плоскости с поверхностью, то \mathbf{n}_1 будет также главной нормалью к кривой AB в точке P . Допустим, с другой стороны, что сечение поверхности некоторой другой плоскостью

*) Имеется в виду предельное положение плоскости, проходящей через данную точку кривой и через две другие точки, неограниченно приближающиеся к первой. *Прим. ред.*

(например, S_2 на рис. 12.4) *не* является нормальным сечением. Тогда кривая пересечения окажется по-прежнему плоской кривой, но ее главная нормаль будет иметь некоторое новое направление n_2 , лежащее в ее плоскости. Кривизна нормального сечения, например

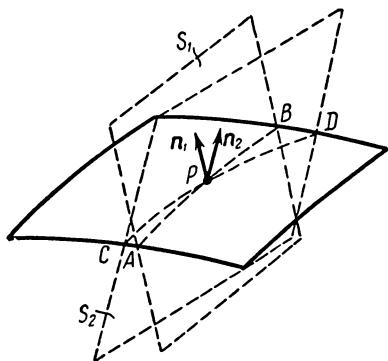


Рис. 12.4.

линии AB на рис. 12.4, называется *нормальной кривизной* поверхности в точке P для направления AB .

Нормали, проведенные в соседних точках поверхности, вообще говоря, не пересекаются между собой. Можно показать, однако, что в любой точке P имеются два таких направления на поверхности, для которых нормаль, проведенная в соседней точке, пересекает нормаль в точке P . В самом деле, обозначим через r радиус-вектор точки P на поверхности и через n — единичную нормаль в той же точке. Пусть $r + dr$ будет радиусом-вектором соседней по отношению к P точки, лежащей на направлении $d\xi_1$ или $d\xi_2$, а $n + dn$ — единичной нормалью в этой точке. Необходимым условием пересечения этих двух смежных нормалей является компланарность векторов n , dn и dr .

Векторным произведением двух векторов A и B , обозначаемым через $A \times B$, называют вектор C , направление которого перпендикулярно к плоскости, проходящей через A и B , а модуль равен площади параллелограмма, образованного A и B . Иными словами, модуль равен $|A||B|\sin\theta$, где θ — угол между этими векторами. Условимся проводить вектор C , пользуясь правилом правого винта: если смотреть на плоскость в сторону положительного направления C , то поворот на наименьший угол от первого вектора A ко второму B должен осуществляться по часовой стрелке (рис. 12.5).

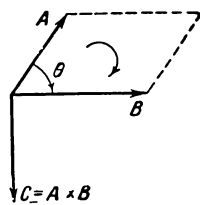


Рис. 12.5.

Нормаль к поверхности S в точке r перпендикулярна к векторам $\frac{\partial r}{\partial \xi_1}$ и $\frac{\partial r}{\partial \xi_2}$; но при этом она будет параллельна вектору $\frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2}$. Определим *единичную нормаль* n к поверхности S в точке r как отношение

$$n = \frac{\frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2}}{\left| \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right|};$$

в знаменателе содержится модуль векторного произведения, равный

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right| \sin \theta.$$

Как мы видели, модули производных равны

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right| = \sqrt{E}, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right| = \sqrt{G};$$

с другой стороны, согласно (12.4)

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}};$$

отсюда

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right| = \sqrt{EG - F^2} = H$$

и

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}}{H}. \quad (12.8)$$

Условие компланарности векторов \mathbf{n} , $d\mathbf{n}$, $d\mathbf{r}$ в векторной записи имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} \times d\mathbf{r} = 0. \quad (12.9)$$

Выпишем выражения для $d\mathbf{n}$ и $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} d\xi_2, \quad d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} d\xi_2. \quad (12.10)$$

Заметим, что для векторных произведений справедлив распределительный закон:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} + \mathbf{D}) &= \mathbf{A} \times (\mathbf{C} + \mathbf{D}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \\ &= \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{A} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Подставим выражения (12.10) в (12.9); после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right) (d\xi_1)^2 + \left[\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right) + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right) \right] d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right) (d\xi_2)^2 = 0. \quad (12.11) \end{aligned}$$

Мы пришли к квадратному уравнению относительно $\frac{d\xi_1}{d\xi_2}$ или $\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_1}$; корни этого уравнения определяют два направления на поверхности, для которых имеет место указанное свойство. Эти два направления называются *главными направлениями* в точке P .

Чтобы доказать, что два главных направления являются ортогональными, запишем уравнение (12.11) в более удобной форме. Так

как вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$ касателен к параметризованной кривой $\xi_2 = \text{const}$ в точке \mathbf{r} , то он перпендикулярен к нормали \mathbf{n} ; но тогда

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} = 0. \quad (12.12)$$

Дифференцируя левую часть по ξ_1 , получим

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1^2} = 0, \quad (12.13)$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1^2} = -L.$$

Продифференцируем, далее, (12.12) по ξ_2 , а затем соотношение $(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}) = 0$ по ξ_1 и ξ_2 . Тогда получим дополнительные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} &= -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = -M, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} &= -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = -M, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} &= -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_2^2} = -N. \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

Величины L , M , N представляют собой проекции векторов $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1^2}$,

$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_2^2}$ на направление нормали к поверхности; их называют *коэффициентами второй квадратичной формы*. Так как \mathbf{n} является единичной нормалью или вектором постоянной длины, то первые производные от \mathbf{n} должны быть перпендикулярны к \mathbf{n} и параллельны плоскости, содержащей векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}$. Поэтому производные $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1}$ и $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2}$ можно выразить через $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}$. Представим эту зависимость в виде

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} = a \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + b \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}, \quad (12.15)$$

где a и b — величины, подлежащие определению. Если составить скалярное произведение из каждой части уравнения (12.15) на вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$, то получим

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} = a \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + b \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}.$$

Используя соотношение (12.13) и выражения для E и F , получим

$$-L = aE + bF. \quad (12.16)$$

Подобным же образом, если скалярно умножить векторное уравнение (12.15) на вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}$, будем иметь

$$-M = aF + bG. \quad (12.17)$$

Решая совместно уравнения (12.16) и (12.17), находим:

$$a = \frac{FM - LG}{EG - F^2} = \frac{FM - LG}{H^2},$$

$$b = \frac{FL - EM}{H^2};$$

Окончательно

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} = \frac{FM - LG}{H^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + \frac{FL - EM}{H^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}. \quad (12.18)$$

Аналогичным путем приходим к соотношению

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} = \frac{FN - GM}{H^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} + \frac{FM - EN}{H^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}. \quad (12.19)$$

С помощью этих зависимостей и уравнения (12.8) легко показать справедливость следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} &= \frac{EM - FL}{H}, \\ \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} &= \frac{FM - GL}{H}, \\ \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} &= \frac{EN - FM}{H}, \\ \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} &= \frac{FN - GM}{H}. \end{aligned} \right\} \quad (12.20)$$

Уравнения (12.11) можно теперь записать в виде

$$(EM - FL) \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)^2 + (EN - GL) \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right) + (FN - GM) = 0. \quad (12.21)$$

Обозначим два корня уравнения (12.21) через $\left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_C$ и $\left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_{C'}$. Из алгебры известны соотношения:

$$\left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_C + \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_{C'} = - \frac{EN - GL}{EM - FL},$$

$$\left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_C \cdot \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2} \right)_{C'} = \frac{FN - GM}{EM - FL}.$$

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (12.7), получаем

$$E(FN - GM) - F(EN - GL) + G(EM - FL) \equiv 0.$$

Это означает, что два направления на поверхности, определяемые корнями уравнений (12.11) или (12.21), взаимно ортогональны.

Другими словами, два главных направления являются ортогональными.

Если кривая C на поверхности S обладает тем свойством, что нормали к поверхности в соседних точках кривой пересекаются между собой, то ее называют *линией кривизны*. Таким образом, на поверхности имеется два семейства линий кривизны, причем через любую заданную точку P проходит одна кривая каждого семейства. Как мы увидим ниже, в теории оболочек в качестве параметризованных кривых поверхности удобно выбирать ее линии кривизны. Вдоль параметризованных кривых должно быть

$$\frac{d\xi_1}{d\xi_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\xi_0}{d\xi_1} = 0.$$

Если эти величины удовлетворяют дифференциальному уравнению (12.21) для линий кривизны

$$(EM - FL)(d\xi_1)^2 + (EN - GL)d\xi_1 d\xi_2 + (FN - GM)(d\xi_2)^2 = 0,$$

то должно быть

$$EM - FL = 0, \quad FN - GM = 0, \quad EN - GL \neq 0. \quad (12.22)$$

Умножая первое из уравнений (12.22) на N , а второе — на L и складывая, получим

$$(EN - GL)M = 0.$$

Аналогично, умножая первое уравнение (12.22) на G , а второе — на E и складывая их, получим

$$(EN - GL)F = 0.$$

Принимая во внимание третье из уравнений (12.22), найдем:

$$M = 0, \quad F = 0. \quad (12.23)$$

Таковы условия того, что параметризованные кривые являются линиями кривизны.

Допустим, что точка P и бесконечно близкая к ней точка лежат на линии кривизны; проведем через них нормали к поверхности. Точка пересечения этих нормалей называется *центром кривизны* поверхности S в точке P . Расстояние от центра кривизны до точки P , измеряемое в направлении единичной нормали n , называется *главным радиусом кривизны* поверхности S в точке P . Величина, обратная главному радиусу кривизны, называется *главной кривизной* поверхности S в точке P . Таким образом, для каждой точки поверхности можно определить две главные кривизны, являющиеся *нормальными кривизнами* поверхности в направлении линий кривизны. Можно показать, что главным направлениям в точке P соответствуют кривизны, одна из которых является максимальной, а вторая — минимальной по отношению ко всем нормальным кривизнам для данной точки. Следует подчеркнуть, что главная нормаль к линии кривизны,

вообще говоря, не совпадает с нормалью к поверхности; иными словами, соприкасающаяся плоскость для линии кривизны не является, как правило, нормальным сечением поверхности. Следовательно, нормальная кривизна поверхности в направлении линии кривизны в общем случае не является кривизной этой линии.

Поставим себе целью определить главные кривизны. Обозначим через r — радиус-вектор поверхности в точке P , через n — единичную нормаль и через R — главный радиус кривизны в той же точке.

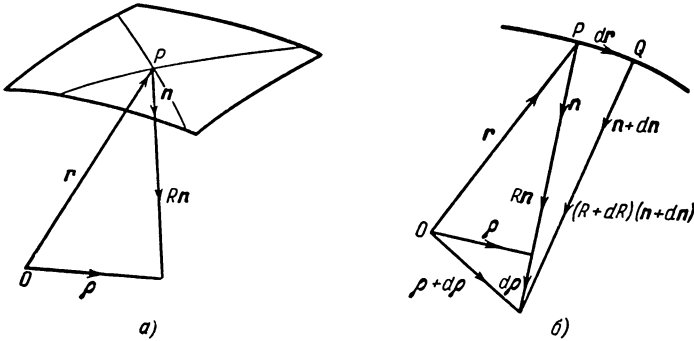


Рис. 12.6.

Центр кривизны определяется при этом вектором ρ (рис. 12.6, а):

$$\rho = r + Rn.$$

Пусть точка Q будет соседней к P точкой, лежащей на линии кривизны (рис. 12.6, б); тогда имеем

$$d\rho = dr + d(Rn) = (dr + Rdn) + n dR.$$

Вектор $dr + Rdn$ касателен к поверхности; в то же время из условия, что вектор dr расположен вдоль линии кривизны, следует, что вектор $d\rho$ должен иметь направление n . Отсюда вытекает

$$dr + Rdn = 0.$$

Обозначая соответствующую главную кривизну через κ , получим

$$\kappa dr + dn = 0. \tag{12.24}$$

Это условие выражает в векторной записи так называемую формулу Родрига. С другой стороны,

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial r}{\partial \xi_2} d\xi_2, \quad dn = \frac{\partial n}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial n}{\partial \xi_2} d\xi_2.$$

Подставляя эти соотношения в (12.24) и группируя члены, будем иметь

$$\left(\kappa \frac{\partial r}{\partial \xi_1} + \frac{\partial n}{\partial \xi_1} \right) d\xi_1 + \left(\kappa \frac{\partial r}{\partial \xi_2} + \frac{\partial n}{\partial \xi_2} \right) d\xi_2 = 0.$$

Составляя скалярное произведение этого уравнения на векторы $\frac{\partial r}{\partial \xi_1}$ и $\frac{\partial r}{\partial \xi_2}$, соответственно получим:

$$\left. \begin{aligned} (kE - L) d\xi_1 + (kF - M) d\xi_2 &= 0, \\ (kF - M) d\xi_1 + (kG - N) d\xi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.25)$$

Эти два уравнения определяют главные кривизны поверхности и, вместе с тем, направления линий кривизны. Исключая отношение $d\xi_1/d\xi_2$ и производя упрощение, находим

$$H^2 x^2 - (EN - 2FM + GL)x + (LN - M^2) = 0. \quad (12.26)$$

Мы получили уравнение второй степени относительно x ; два его корня дают искомые значения.

В технике широко применяются тонкие оболочки, срединная поверхность которых представляет собой поверхность вращения. Обратимся поэтому к некоторым понятиям дифференциальной геометрии, относящимся к поверхностям вращения. Подобные поверхности образуются при вращении плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости. Эта кривая носит название *меридиана*, а соответствующая плоскость — *плоскости меридиана*. На рис. 12.7, а и б за ось вращения принята ось z , а расстояние от оси до точки P , лежащей на

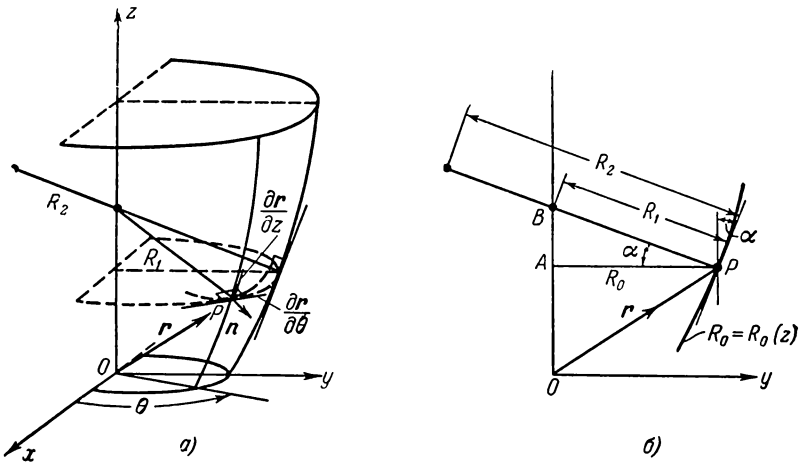


Рис. 12.7.

поверхности, обозначено через R_0 . Положение меридиана определяется углом θ , отсчитываемым от плоскости xz . Уравнение меридиана имеет вид $R_0 = R_0(z)$. Линии пересечения поверхности с плоскостями, перпендикулярными к оси z , являются параллельными кругами и носят название *параллелей*. Положение параллели определяется уравнением $z = \text{const.}$

Если воспользоваться такими обозначениями, то декартовы координаты точки P окажутся равными:

$$x = R_0(z) \cos \theta, \quad y = R_0(z) \sin \theta, \quad z = z.$$

Радиус-вектор r точки P будет:

$$r = iR_0(z) \cos \theta + jR_0(z) \sin \theta + kz.$$

Примем меридианы и параллели в качестве параметризованных кривых и заменим ξ_1 на θ и ξ_2 на z . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial r}{\partial \theta} = -iR_0 \sin \theta + jR_0 \cos \theta + k0, \\ \frac{\partial r}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial r}{\partial z} = iR_0' \cos \theta + jR_0' \sin \theta + k, \end{aligned}$$

где $R_0' = dR_0/dz$. Коэффициенты первой квадратичной формы равны:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_1} = R_0^2 \sin^2 \theta + R_0^2 \cos^2 \theta = R_0^2, \\ F &= \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = -R_0 R_0' \sin \theta \cos \theta + R_0 R_0' \sin \theta \cos \theta = 0, \\ G &= \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = R_0'^2 \cos^2 \theta + R_0'^2 \sin^2 \theta + 1 = 1 + R_0'^2, \\ H &= \sqrt{EG - F^2} = R_0 \sqrt{1 + R_0'^2}. \end{aligned}$$

Так как выполнено условие $F = 0$, то параллели и меридианы будут ортогональны.

Для определения коэффициентов второй квадратичной формы вычислим вторые производные от r и вектор n . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1^2} &= -iR_0 \cos \theta - jR_0 \sin \theta + k0, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} &= -iR_0' \sin \theta + jR_0' \cos \theta + k0, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_2^2} &= iR_0'' \cos \theta + jR_0'' \sin \theta + k0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2}}{H} = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R_0 \sin \theta & R_0 \cos \theta & 0 \\ R_0' \cos \theta & R_0' \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{H} (iR_0 \cos \theta + jR_0 \sin \theta - kR_0 R_0'). \end{aligned}$$

Отсюда

$$L = n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1^2} = \frac{1}{H} (-R_0^2 \cos^2 \theta - R_0^2 \sin^2 \theta) = -\frac{R_0^2}{H},$$

$$M = n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{1}{H} (-R_0 R_0' \cos \theta \sin \theta + R_0 R_0' \cos \theta \sin \theta) = 0.$$

$$N = n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_2^2} = \frac{1}{H} (R_0 R_0'' \cos^2 \theta + R_0 R_0'' \sin^2 \theta) = \frac{R_0 R_0''}{H}.$$

Так как величины F и M одновременно обращаются в нуль, то параметризованные кривые являются линиями кривизны.

Подставим найденные выражения в (12.26); уравнение для определения главных кривизн принимает в данном случае вид:

$$R_0 (1 + R_0'^2)^{\frac{1}{2}} x^2 - \left[\frac{R_0 R_0''}{(1 + R_0'^2)} - 1 \right] x - \frac{R_0''}{(1 + R_0'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Решая его, находим

$$x_1 = -\frac{1}{R_0 (1 + R_0'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad x_2 = \frac{R_0''}{(1 + R_0'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Как легко видеть, величина x_2 представляет собой кривизну плоской меридиональной кривой $R_0 = R_0(z)$.

Чтобы выяснить геометрический смысл величины k_1 , рассмотрим треугольник APB на рис. 12.7, б. Из чертежа следует:

$$\operatorname{tg} \alpha = R_0'.$$

Но с другой стороны,

$$AB = AP \operatorname{tg} \alpha = R_0 R_0'.$$

Отсюда

$$BP = \sqrt{(AP)^2 + (AB)^2} = R_0 \sqrt{1 + R_0'^2}.$$

Таким образом, величина x_1 обратна длине нормали, заключенной между кривой и осью вращения. Знак минус указывает, что радиус кривизны и нормаль имеют противоположные направления. Отметим, что для меридиональной кривой, показанной на рис. 12.7, величина R_0'' будет отрицательна. Вместе с тем, как и следовало ожидать, отрицательной будет кривизна x_2 .

12.2. Уравнения равновесия. Как мы видели в предыдущем параграфе, положение любой точки, принадлежащей оболочке, определяется тремя параметрами; два из них определяют положение точки относительно срединной поверхности оболочки, а третий изменяется

вдоль нормали к срединной поверхности. Выберем линии кривизны для точки срединной поверхности так, чтобы они были параметризованными; тогда будем иметь трехмерную ортогональную координатную систему. Пусть эти параметризованные кривые будут $\xi_1 = \text{const}$ и $\xi_2 = \text{const}$. Допустим, что точка находится на расстоянии z от срединной поверхности; тогда ее ортогональные криволинейные координаты будут ξ_1, ξ_2 и z .

Исследуем распределение внутренних сил. Рассмотрим элемент оболочки, ограниченный поверхностями $\xi_1 = \text{const}, \xi_1 + d\xi_1 = \text{const}, \xi_2 = \text{const}, \xi_2 + d\xi_2 = \text{const}$ и $z = \pm h/2$. Длины сторон элемента равны $\alpha_1 d\xi_1$ и $\alpha_2 d\xi_2$; α_1 и α_2 , как и прежде, — множители, при которых квадрат линейного элемента ds на срединной поверхности оболочки выражается в виде

$$ds^2 = \alpha_1^2 d\xi_1^2 + \alpha_2^2 d\xi_2^2.$$

Возьмем в качестве примера полярную систему координат. Криволинейными координатами будут величины r и θ . Примем $\xi_1 = r$ и $\xi_2 = \theta$. Квадрат линейного элемента ds равен

$$ds^2 = dr^2 = r^2 d\theta^2;$$

следовательно, в этом случае

$$\alpha_1 = 1 \text{ и } \alpha_2 = r.$$

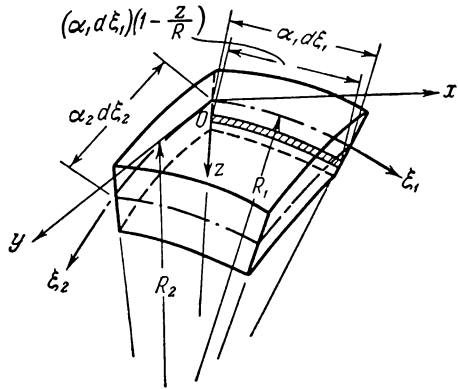


Рис. 12.8.

На рис. 12.8 линии x и y совпадают с направлениями касательных к криволинейным координатным линиям ξ_1 и ξ_2 в точке O . Обозначим через R_1 и R_2 главные радиусы кривизны в точке O , относящиеся соответственно к плоскостям xz и yz . Угол, стягиваемый дугой длины $\alpha_2 d\xi_2$, равен $(\alpha_2 d\xi_2)/R_2$; длина дуги элемента, находящегося на расстоянии z от срединной поверхности в плоскости yz , равна

$$\frac{(R_2 - z) \alpha_2 d\xi_2}{R_2} = \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \alpha_2 d\xi_2.$$

Напряжения, действующие по плоским граням элемента, равны $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{1z}, \tau_{2z}$. Если обозначить через N_1 результирующую нормальную силу, действующую по плоской грани yz и отнесенную к единице длины сечения, то будем иметь

$$N_1 \alpha_2 d\xi_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \alpha_2 d\xi_2 dz,$$

или

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz.$$

Аналогичным путем получим выражения для других результирующих сил и моментов на единицу длины нормальных сечений, показанных на рис. 12.8 и 12.9. Окончательно получаем:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz, & N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz, \\ N_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz, & N_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz, \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{1z} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz, & Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{2z} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz, \\ M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) z dz, & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) z dz, \\ M_{12} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) z dz, & M_{21} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) z dz. \end{aligned} \right\} (12.27)$$

Судя по этим выражениям, величина N_{12} , вообще говоря, не равна N_{21} , так как в общем случае $R_1 \neq R_2$, между тем как $\tau_{12} = \tau_{21}$.

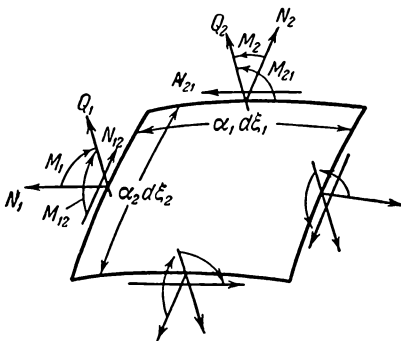


Рис. 12.9.

Момент M_{12} по той же причине, вообще говоря, не равен M_{21} . Однако для тонких оболочек размер h мал по сравнению с R_1 и R_2 , и членами z/R_1 и z/R_2 в выражениях (12.27) можно пренебречь по сравнению с 1. Тогда получим $N_{12} = N_{21}$, $M_{12} = M_{21}$; при этом выражения для результирующих сил и моментов будут теми же, что и в случае тонких пластинок.

Для составления уравнений равновесия определим прежде всего составляющие по оси x сил, действующих на элемент (рис. 12.10). Результирующая составляющая сил N_1 и $N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} d\xi_1$

по направлению x равна:

$$\begin{aligned}
 -N_1 \alpha_2 d\xi_2 + \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right) \left(\alpha_2 d\xi_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2 \right) = \\
 = \left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} \alpha_2 + N_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\partial (\alpha_2 N_1)}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2.
 \end{aligned}$$

Таким же образом находим результирующую составляющую сил N_{21} и $N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \xi_2} d\xi_2$ вдоль оси x :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial N_{21}}{\partial \xi_2} \alpha_1 + N_{21} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 = \\
 = \frac{\partial (\alpha_1 N_{21})}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2.
 \end{aligned}$$

Так как значение α_2 изменяется от точки к точке, то сила $N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} d\xi_2$, действующая по нормали к грани BC , будет наклонена к направлению y под малым углом β . Изменение направления легко видеть на рис. 12.10, *в*; стороны элемента здесь условно приняты прямолинейными. В виду малости угла β имеем

$$\beta \approx \frac{\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2}{\alpha_1 d\xi_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2}.$$

Следовательно, составляющая этой силы по оси x будет равна

$$\begin{aligned}
 - \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 \right) \times \\
 \times \left(\alpha_1 d\xi_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \right) \beta = \\
 = -N_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2.
 \end{aligned}$$

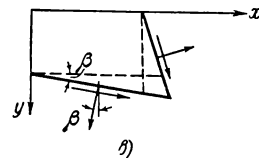
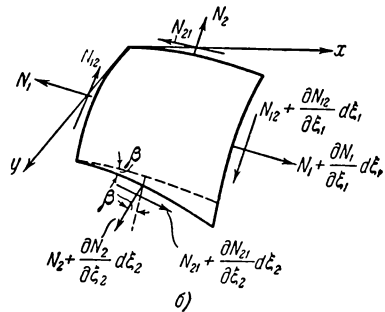
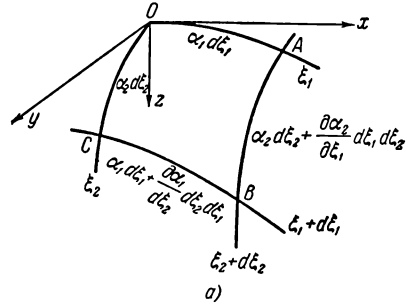


Рис. 12.10.

Таким же образом составляющая силы $N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \xi_1} d\xi_1$ по оси x окажется равной

$$\frac{\left(N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right) \left(\alpha_2 d\xi_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2 \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2}{\alpha_2 d\xi_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2} = N_{12} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2.$$

Из рис. 12.11 видно, что поперечная сила $\left(Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1} d\xi_1\right)$ дает составляющую по оси x , равную

$$-\left(Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1} d\xi_1\right)\left(\alpha_2 d\xi_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2\right) \frac{\alpha_1 d\xi_1}{R_1} = -Q_1 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_1} d\xi_1 d\xi_2.$$

Если интенсивность внешней нагрузки имеет в направлении x составляющую p_1 , то полное усилие будет

$$p_1 \alpha_1 \alpha_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Составим сумму проекций сил и разделим все члены на $d\xi_1 d\xi_2$. Тогда условие $\sum F_x = 0$ примет вид

$$\frac{\partial(\alpha_2 N)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\alpha_1 N_{21})}{\partial \xi_2} + N_{12} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - N_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - Q_1 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_1} = \alpha_1 \alpha_2 p_1 = 0. \quad (12.28)$$

Таким же образом уравнение $\sum F_y = 0$ приводится к форме

$$\frac{\partial(\alpha_1 N_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial(\alpha_2 N_{12})}{\partial \xi_1} + N_{21} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - N_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - Q_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_2} + \alpha_1 \alpha_2 p_2 = 0; \quad (12.29)$$

наконец, из условия $\sum F_z = 0$ находим

$$\frac{\partial(\alpha_2 Q_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\alpha_1 Q_2)}{\partial \xi_2} + N_1 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_1} + N_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_2} + \alpha_1 \alpha_2 p_3 = 0; \quad (12.30)$$

здесь p_1 , p_2 и p_3 — составляющие внешней нагрузки, приходящейся на единицу площади, соответственно вдоль осей x , y и z .

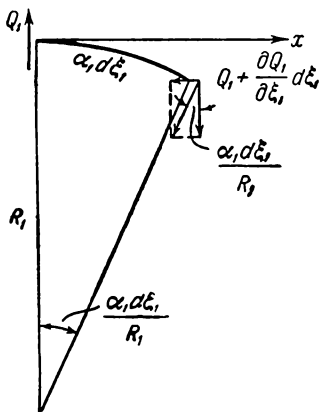


Рис. 12.11.

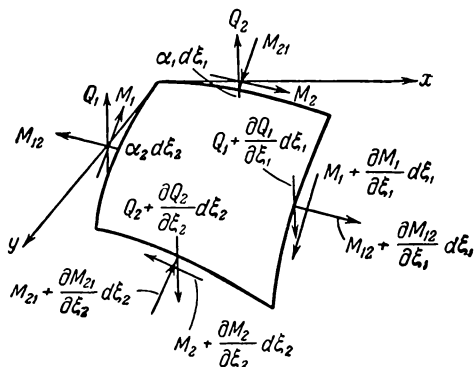


Рис. 12.12.

Составим далее уравнения равновесия для моментов. Представим каждый момент в виде вектора по правилу правого винта, как показано на рис. 12.12. Величины моментов относительно оси x

можно найти, проектируя эти вектор-моменты на ось x . Тогда получим

$$\begin{aligned}
 & -M_{12}\alpha_2 d\xi_2 + \left(M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \xi_1} d\xi_1\right) \left(\alpha_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1\right) d\xi_2 + \\
 & + M_2\alpha_1 d\xi_1 - \left(M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial \xi_2} d\xi_2\right) \left(\alpha_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} d\xi_2\right) d\xi_1 + \\
 & + \frac{\left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi_1} d\xi_1\right) \left(\alpha_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1\right) d\xi_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} d\xi_3 d\xi_1}{\left(\alpha_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1\right) d\xi_2} + \\
 & + \frac{\left(M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \xi_2} d\xi_2\right) \left(\alpha_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} d\xi_2\right) d\xi_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2}{\left(\alpha_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} d\xi_2\right) d\xi_1} = \\
 & = \left(\frac{\partial (\alpha_2 M_{12})}{\partial \xi_1} - \frac{\partial (\alpha_1 M_2)}{\partial \xi_2} + M_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + M_{21} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}\right) d\xi_1 d\xi_2.
 \end{aligned}$$

Момент поперечной силы Q_2 относительно оси x равен

$$\left(Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_2} d\xi_2\right) \alpha_1 d\xi_1 \alpha_2 d\xi_2 = Q_2 \alpha_1 \alpha_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Окончательно условие $\sum M_x = 0$ принимает вид

$$\frac{\partial (\alpha_2 M_{12})}{\partial \xi_1} - \frac{\partial (\alpha_1 M_2)}{\partial \xi_2} + M_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + M_{21} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} + Q_2 \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (12.31)$$

Подобно этому условие $\sum M_y = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial (\alpha_1 M_{21})}{\partial \xi_2} - \frac{\partial (\alpha_2 M_1)}{\partial \xi_1} + M_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} + M_{12} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + Q_1 \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (12.32)$$

12.3. Безмоментная теория оболочек вращения. Во многих задачах, относящихся к тонким оболочкам, основное значение имеют усилия N_1 , N_2 , N_{12} в срединной поверхности, а напряжения изгиба весьма малы. При этом можно получить достаточно точное решение, полностью пренебрегая напряжениями изгиба. Приравнявая нулю моменты и поперечные силы, приходим к трем уравнениям равновесия с тремя неизвестными N_1 , N_2 и N_{12} . Если заданы действующие на оболочку внешние силы, то задача становится статически определимой; искомые усилия можно найти, не пользуясь соотношениями между деформациями. При этом исследование напряженного состояния значительно упрощается. Усилия N_1 , N_2 , N_{12} , полученные таким путем, могут быть названы *мембранными*. Теорию тонких оболочек, основанную на допущении об отсутствии напряжений изгиба, называют *безмоментной теорией*.

Рассмотрим вначале безмоментную теорию оболочек, очерченных по поверхностям вращения. Такого рода тонкие оболочки широко

применяются в различного типа сосудах и баках, а также в куполах зданий. Как уже было сказано в параграфе 12.1, та или иная поверхность вращения может быть получена, если вращать кривую меридиана вокруг оси, лежащей в ее плоскости. Будем совмещать кривые $\xi_1 = \text{const}$ с линиями меридианов, а кривые $\xi_2 = \text{const}$ — с окружностями в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Пользуясь обозначениями, показанными на рис. 12.13, получим $\xi_1 = \theta$ и $\xi_2 = \varphi$. Касательные к криволинейным координатным

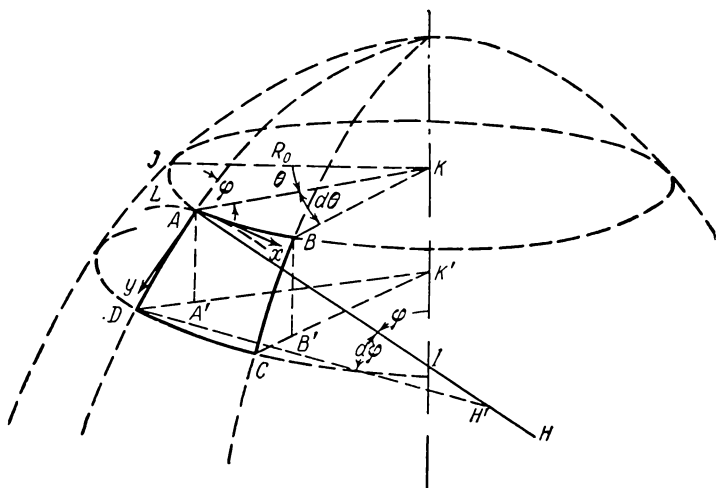


Рис. 12.13.

линиям θ и φ , проходящим через точку A, обозначены соответственно через x и y .

Мы видели, что в случае поверхности вращения плоскость меридиана содержит один из главных радиусов кривизны. Вторым главным радиус кривизны относится к кривой AL, образуемой при пересечении плоскости xz со срединной поверхностью оболочки. Эти два радиуса кривизны лежат на одной прямой, но имеют различную длину. Обозначим радиус кривизны кривой AD в точке A, равный отрезку AH, через R_2 , и радиус кривизны кривой AL в точке A, равный AI, через R_1 . Под R_0 будем понимать радиус параллельного круга в точке A; на рис. 12.13 он изображен в виде отрезка JK. Таким образом, линейный элемент ds срединной поверхности оболочки будет определяться выражением

$$ds^2 = R_0^2 d\theta^2 + R_2^2 d\varphi^2;$$

отсюда находим

$$\alpha_1 = R_0, \quad \alpha_2 = R_2.$$

Если пренебрегать изгибными напряжениями в оболочке, то надо принять

$$M_1 = M_2 = M_{21} = M_{12} = Q_1 = Q_2 = 0.$$

Учитывая равенства $\xi_1 = \theta$ и $\xi_2 = \varphi$, введем обозначения:

$$N_1 = N_\theta, \quad N_2 = N_\varphi, \quad N_{12} = N_{21} = N_{\varphi\theta}.$$

Допустим, далее, что оболочка нагружена симметрично относительно ее оси; тогда будет $p_1 = 0$, $N_{\varphi\theta} = 0$, а величины N_θ , N_φ не будут

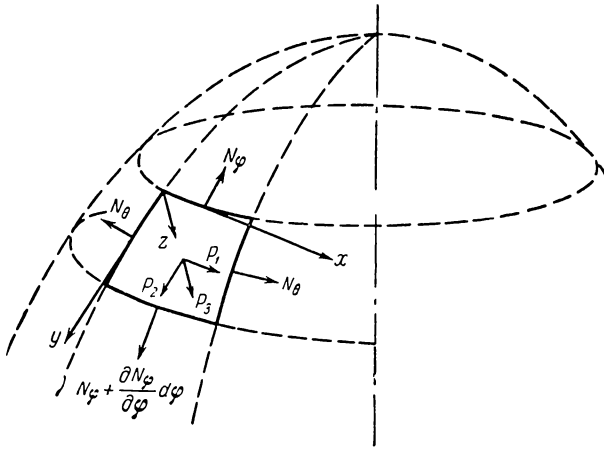


Рис. 12.14.

зависеть от θ (рис. 12.14). Таким образом, в этом случае уравнение (12.28) будет удовлетворяться тождественно. Из уравнения (12.29) получим

$$\frac{d}{d\varphi} (R_0 N_\varphi) - N_\theta \frac{dR_0}{d\varphi} + R_0 R_2 p_2 = 0.$$

Так как величины N_θ и N_φ являются функциями только φ , в обоих уравнениях, выписанных выше, введены символы полных дифференциалов. По рис. 12.13 получим теперь

$$\frac{dR_0}{d\varphi} d\varphi = A'D \approx AD \cos \varphi = R_2 d\varphi \cos \varphi,$$

или

$$\frac{dR_0}{d\varphi} = R_2 \cos \varphi.$$

Следовательно, условие $\sum F_y = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{d}{d\varphi} (R_0 N_\varphi) - R_2 N_\theta \cos \varphi + R_0 R_2 p_2 = 0. \quad (12.33)$$

Радиус кривизны в плоскости xz равен R_1 . Судя по уравнению (12.30), условие $\sum F_z = 0$ получает в рассматриваемом случае вид

$$\frac{N_\theta}{R_1} + \frac{N_\varphi}{R_2} + p_3 = 0. \quad (12.34)$$

Решая эти два уравнения, определяем величины N_θ и N_φ .

Учитывая соотношения $R_0 = R_1 \sin \varphi$, перепишем уравнение (12.34) следующим образом:

$$N_\theta = -\frac{R_0 N_\varphi}{R_2 \sin \varphi} - \frac{R_0 p_3}{\sin \varphi}.$$

Подставляя это выражение в (12.33) и умножая полученное уравнение на $\sin \varphi$, будем иметь

$$\sin \varphi \frac{d}{d\varphi} (R_0 N_\varphi) + R_0 N_\varphi \cos \varphi + R_0 R_2 (p_2 \sin \varphi + p_3 \cos \varphi) = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\varphi} (R_0 N_\varphi \sin \varphi) + R_0 R_2 (p_2 \sin \varphi + p_3 \cos \varphi) = 0.$$

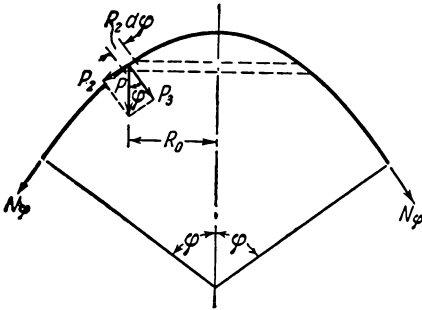


Рис. 12.15.

Интегрируя в пределах между 0 и φ , получим

$$R_0 N_\varphi \sin \varphi + \int_0^\varphi R_0 R_2 (p_2 \sin \varphi + p_3 \cos \varphi) d\varphi = 0.$$

Судя по рис. 12.15, имеем

$$p_2 \sin \varphi + p_3 \cos \varphi = p.$$

Кольцевая поверхность отрезка оболочки, по которой действует давление p , будет

$$2\pi R_0 R_2 d\varphi.$$

Отсюда

$$\int_0^\varphi R_0 R_2 (p_2 \sin \varphi + p_3 \cos \varphi) d\varphi = \frac{F}{2\pi}$$

и

$$2\pi R_0 N_\varphi \sin \varphi + F = 0. \quad (12.35)$$

Здесь под F понимается результирующая всей нагрузки, приходящейся на отрезок оболочки, отвечающий углу φ . Вместо того, чтобы решать систему уравнений (12.33) и (12.34), более удобно определить N_φ из уравнения (12.35), после чего переходить к вычислению N_θ с помощью (12.34).

В качестве первого примера рассмотрим случай сферического купола постоянной толщины, находящегося под действием собственного веса (рис. 12.16). Обозначим через ρ удельный вес материала оболочки. Сила веса, приходящаяся на единицу площади оболочки, будет равна ρh . Если радиус оболочки равен a , то результирующая

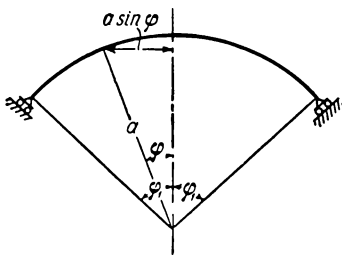


Рис. 12.16.

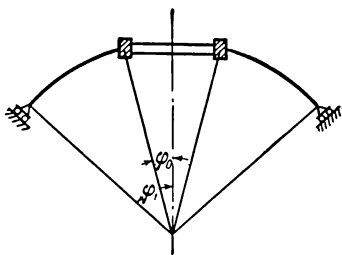


Рис. 12.17.

всей нагрузки, приходящейся на отрезок сферической оболочки, соответствующий углу φ , будет равна

$$F = \int_0^{\varphi} \rho h \cdot 2\pi a \cdot \sin \varphi \cdot a \, d\varphi.$$

Для сферических оболочек $R_1 = R_2 = a$. Уравнения (12.35) и (12.34) приводят к выражениям:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -\frac{a^2 \rho h (1 - \cos \varphi)}{a \sin^2 \varphi} = -\frac{a \rho h}{1 + \cos \varphi}, \\ N_{\theta} &= -a \rho h \left(\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.36)$$

Отрицательные знаки в этих уравнениях соответствуют сжатию. Рассмотрение этих уравнений показывает, что усилие N_{φ} будет сжимающим для всей оболочки; между тем, N_{θ} становится растягивающим, если угол φ превышает $51^{\circ}50'$.

Иногда в конструкциях сферических куполов верхняя часть отсутствует; при этом применяют кольцо жесткости, поддерживающее верхнюю конструкцию (рис. 12.17). Если угол, отвечающий верхней части, равен $2\varphi_0$, а вертикальная сила, приходящаяся на единицу длины кольца жесткости, равна P , то результирующая сила F , соответствующая углу φ , будет

$$F = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho h \cdot 2\pi a \sin \varphi \cdot a \, d\varphi = 2\pi a^2 \rho h (\cos \varphi_0 - \cos \varphi).$$

Вычисление интеграла

$$\int_{\varphi_0}^{\infty} 2\pi \frac{d}{d\varphi} (R_0 N_{\varphi} \sin \varphi) d\varphi$$

дает

$$[2\pi R_0 N_{\varphi} \sin \varphi]_{\varphi=\varphi} - [2\pi R_0 N_{\varphi} \sin \varphi]_{\varphi=\varphi_0}.$$

Обозначим вертикальную силу, действующую на единицу длины кольца жесткости, через P . Тогда

$$(N_{\rho})_{\varphi=\varphi_0} = -P/\sin \varphi_0.$$

Уравнение (12.36) принимает вид

$$2\pi a N_{\varphi} \sin^2 \varphi + 2\pi a P \sin \varphi_0 + 2\pi a^2 \rho h (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) = 0,$$

или

$$N_{\varphi} = -a\rho h \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - P \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 \varphi}.$$

Пользуясь уравнением (12.34), находим

$$N_{\theta} = a\rho h \left(\cos \varphi - \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) + P \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 \varphi}. \quad (12.37)$$

В качестве второго примера рассмотрим оболочку, имеющую форму эллипсоида вращения. Такие оболочки находят практическое применение в конструкциях днищ цилиндрических котлов; при этом используется лишь одна половина эллипсоида, как показано на рис. 12.18. Длину большой и малой полуосей эллипсоида обозначим соответственно через a и b . Уравнение эллипсоида имеет вид

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Главный радиус кривизны можно вычислить по формулам, выведенным в параграфе 12.1. Заметим, что в данном случае величина R_0 равна x ; следовательно,

$$R_0' = \frac{dx}{dy} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x},$$

$$R_0'' = \frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{a^4}{b^2 x^3}.$$

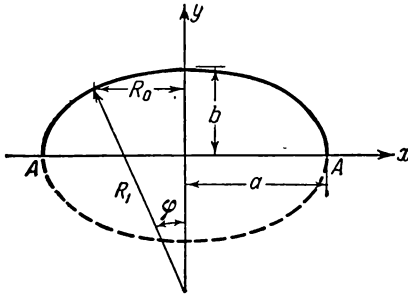


Рис. 12.18.

Подставляя эти значения в формулы для главных кривизн и отбрасывая знак минус, находим:

$$R_1 = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{1}{2}}}{b^2},$$

$$R_2 = \frac{1}{\kappa_2} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Если равномерное давление пара в котле равно p , то результирующая сила F , соответствующая углу φ , равна

$$F = -p \cdot \pi R_0^2 = -\pi p R_1^2 \sin^2 \varphi.$$

Пользуясь равенством $p_3 = -p$, из уравнений (12.35) и (12.34) получаем

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{pR_1}{2} = \frac{p(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{2b^2}, \\ N_\theta &= R_1p - \frac{R_1}{R_2} N_\varphi = \frac{p(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{2b^2} \left(2 - \frac{a^4b^2}{a^4y^2 + b^4x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

Для вершины оболочки при $x=0$, $y=b$ из уравнений (12.38) найдем

$$N_\varphi = N_\theta = \frac{pa^2}{2b}.$$

На экваторе AA при $x=a$, $y=0$ будем иметь

$$N_\varphi = \frac{pa}{2}, \quad N_\theta = pa \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} \right).$$

Задача 1. Найти напряжения в оболочке сферической формы, наполненной жидкостью удельного веса ρ и закрепленной вдоль параллели AA

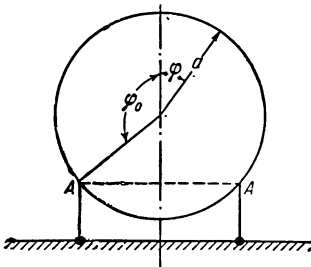


Рис. 12.19.

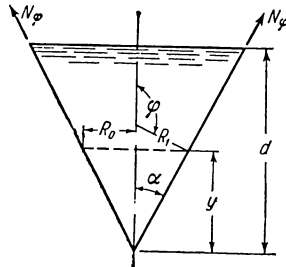


Рис. 12.20.

(рис. 12.19). Давление p_3 , действующее на сферическую поверхность для произвольного угла φ , равно

$$p_3 = -\rho a (1 - \cos \varphi).$$

Отв.

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{\rho a^2}{6} \left(1 - \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right), \\ N_\theta &= \frac{\rho a^2}{6} \left(5 - 6 \cos \varphi + \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) \quad \text{при } \varphi < \varphi_0, \\ N_\varphi &= \frac{\rho a^2}{6} \left(5 + \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} \right), \\ N_\theta &= \frac{\rho a^2}{6} \left(1 - 6 \cos \varphi - \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} \right) \quad \text{при } \varphi > \varphi_0. \end{aligned}$$

Задача 2. Коническая оболочка наполнена жидкостью удельного веса ρ . Определить напряжения в оболочке (рис. 12.20).

Отв.

$$N_{\varphi} = \frac{\rho y (3d - 2y) \operatorname{tg} \alpha}{6 \cos \alpha}, \quad N_{\theta} = \frac{\rho (d - y) y \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

12.4. Безмоментная теория круговых цилиндрических оболочек.

Будем вращать прямую линию вокруг параллельной ей оси так, чтобы каждая точка этой линии описывала окружность в плоскости, перпендикулярной к оси; тогда мы получим круговую цилиндрическую оболочку. Указанную прямую называют образующей цилиндра. Совместим координатную линию ξ_1 с образующей, а линию ξ_2 — с дугой

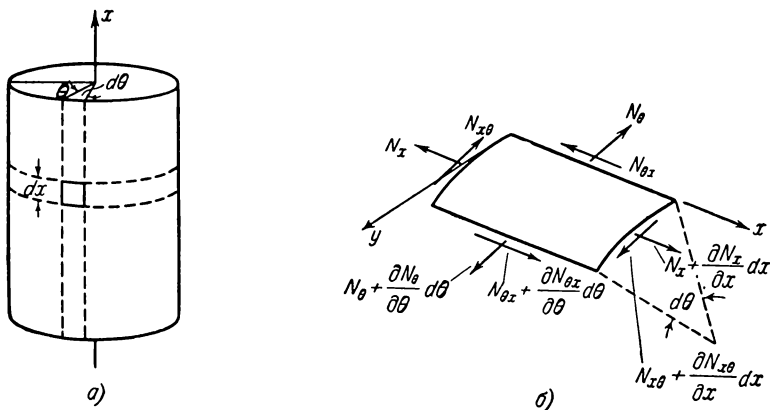


Рис. 12.21.

круга в плоскости, перпендикулярной к оси. Пользуясь обозначениями рис. 12.21, находим $\xi_1 = x$ и $\xi_2 = \theta$. Обозначим радиус круга через a ; тогда длина линейного элемента ds срединной поверхности оболочки будет определяться по формуле

$$(ds)^2 = (dx)^2 + a^2 (d\theta)^2;$$

отсюда

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = a.$$

Главные радиусы кривизны равны

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = a.$$

Если принять в уравнениях равновесия (12.28) — (12.30) поперечные силы и моменты равными нулю, то эти уравнения будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + ap_1 &= 0, \\ a \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + ap_2 &= 0, \\ N_{\theta} + ap_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.39)$$

где N_x , N_θ и $N_{x\theta}$ соответствуют N_1 , N_2 и N_{12} . При заданной внешней нагрузке из третьего уравнения может быть найдено N_θ ; затем можно определить $N_{x\theta}$ и N_x , интегрируя второе и третье уравнения.

В качестве примера рассмотрим горизонтально расположенную круговую цилиндрическую оболочку, наполненную жидкостью и жестко защемленную по торцам (рис. 12.22). Давление в любой точке внутри оболочки равно весу столба жидкости в этой точке с площадью основания, равной единице. Обозначим через ρ удельный вес жидкости, а через θ — угол, измеряемый от вертикальной линии,

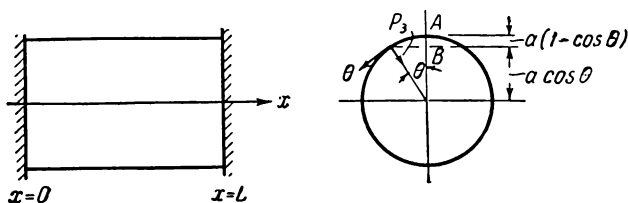


Рис. 12.22.

как показано на рис. 12.22; тогда давление в некоторой точке B равно

$$\rho(AB) = \rho a(1 - \cos \theta).$$

Принимая во внимание, что нагрузка направлена по радиусу от центра, имеем

$$p_3 = -\rho a(1 - \cos \theta) \quad \text{и} \quad p_1 = p_2 = 0.$$

Подставляя эти значения в уравнения (12.29) и производя интегрирование, находим:

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \rho a^2(1 - \cos \theta), \\ N_{x\theta} &= -\int \rho a \sin \theta \, dx + f_1(\theta) = -\rho a x \sin \theta + f_1(\theta), \\ N_x &= \int \rho x \cos \theta \, dx - \frac{1}{a} \int \frac{df_1}{d\theta} \, dx + f_2(\theta) = \\ &= \frac{\rho x^2}{2} \cos \theta - \frac{x}{a} \frac{df_1}{d\theta} + f_2(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (12.40)$$

где $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ — функции от θ , которые подлежат определению из граничных условий.

Мы приняли, что по краям оболочка жестко защемлена. Следовательно, составляющая деформации ϵ_θ должна здесь равняться нулю. Как известно,

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_x).$$

Подставим в это выражение значения (12.40); тогда из условий $\epsilon_\theta = 0$ при $x = 0$ и $x = L$ находим:

$$f_2(\theta) = \frac{\rho a^2}{\nu} (1 - \cos \theta), \quad f_1(\theta) = \frac{\rho a L}{2} \sin \theta + C.$$

Судя по выражению для $N_{x\theta}$, постоянная C соответствует усилиям $N_{x\theta}$, равномерно распределенным по сечению трубы. Если к оболочке не приложен скручивающий момент, то такое усилие не может иметь места; следовательно, величина C должна равняться нулю. Решение уравнений (12.40) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \rho a^2 (1 - \cos \theta), \\ N_{x\theta} &= -\rho a \left(\frac{L}{2} - x \right) \sin \theta, \\ N_x &= -\frac{\rho x}{2} (L - x) \cos \theta + \frac{\rho a^2}{\nu} (1 - \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (12.41)$$

Если опоры являются жесткими и не могут смещаться в направлении x , то, на первый взгляд, длина образующей не должна измениться. Однако изменение длины образующей, соответствующее усилиям (12.41), оказывается не равным нулю:

$$u = \int_0^L \epsilon_x dx = \frac{1}{Eh} \int_0^L (N_x - \nu N_\theta) dx.$$

Это означает, что имеет место изгиб оболочки; следовательно, в данном случае нельзя удовлетворительно описать деформацию с помощью безмоментной теории. Более точное решение задачи можно получить, если учесть влияние как изгибных, так и мембранных усилий.

Задача 1. Горизонтально расположенная тонкая круговая цилиндрическая оболочка наполнена паром постоянного давления p . Радиус цилиндра обозначим через a , длину — через L , толщину — через h . Найти мембранные усилия в оболочке, принимая, что края ее жестко защемлены.

Задача 2. Горизонтально расположенная тонкая круговая цилиндрическая оболочка находится под действием собственного веса. Введем следующие обозначения: ρ — плотность материала, из которого изготовлена оболочка, a — радиус, L — длина цилиндра, h — толщина. Найти мембранные усилия в оболочке, приняв, что концы ее закреплены жестко.

12.5. Определение компонентов деформации. Приступим к определению составляющих деформации для тонких оболочек. Предварительно составим общие выражения компонентов деформации для произвольного тела, отнесенных к ортогональным криволинейным координатам. Обозначим криволинейные координаты через ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 . Рассмотрим две точки $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $Q(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$, находящиеся на малом расстоянии ds друг от друга. На рис. 12.23

изображены касательные x_1, x_2, x_3 к координатным линиям ξ_1, ξ_2, ξ_3 , проведенные в точке P . Пусть направляющие косинусы отрезка PQ по отношению к этим касательным будут l, m, n . Обозначим через A_1, A_2, A_3 множители, которые преобразуют в точке P криволинейные координаты в линейные отрезки; проекции отрезка ds на направления x_1, x_2 и x_3 окажутся равными:

$$\left. \begin{aligned} l ds &= A_1 d\xi_1, \\ m ds &= A_2 d\xi_2, \\ n ds &= A_3 d\xi_3. \end{aligned} \right\} (12.42)$$

Складывая квадраты этих выражений, получим

$$(ds)^2 = (A_1 d\xi_1)^2 + (A_2 d\xi_2)^2 + (A_3 d\xi_3)^2.$$

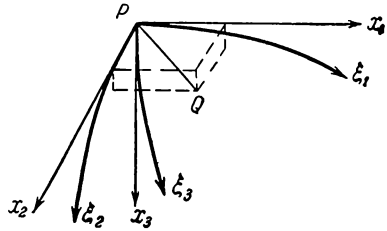


Рис. 12.23.

Допустим, что частицы, находившиеся при ненапряженном состоянии в точках P и Q , перемещаются в процессе деформации в точки P' и Q' . Пусть проекции перемещения PP' на направления x_1, x_2, x_3 равны u_1, u_2, u_3 ; примем величины $\xi'_1 = \xi_1 + \mu_1, \xi'_2 = \xi_2 + \mu_2, \xi'_3 = \xi_3 + \mu_3$ в качестве криволинейных координат в точке P' . Будем считать, что перемещения являются малыми. Тогда

$$u_1 = A_1 \mu_1, \quad u_2 = A_2 \mu_2, \quad u_3 = A_3 \mu_3. \quad (12.43)$$

Криволинейные координаты в точке Q' ($\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$) можно представить в первом приближении в виде:

$$\begin{aligned} \xi''_1 &= \xi'_1 + d\xi_1 + d\mu_1 = \xi_1 + \mu_1 + d\xi_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_3} d\xi_3, \\ \xi''_2 &= \xi'_2 + d\xi_2 + d\mu_2 = \xi_2 + \mu_2 + d\xi_2 + \frac{\partial \mu_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mu_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \mu_2}{\partial \xi_3} d\xi_3, \\ \xi''_3 &= \xi'_3 + d\xi_3 + d\mu_3 = \xi_3 + \mu_3 + d\xi_3 + \frac{\partial \mu_3}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mu_3}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \mu_3}{\partial \xi_3} d\xi_3. \end{aligned}$$

Так как величины A_1, A_2, A_3 изменяются от точки к точке, то функции A'_1, A'_2, A'_3 для точки P' можно выразить через значения A_1, A_2, A_3 в точке P следующим образом:

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} \mu_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \mu_2 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} \mu_3, \\ A'_2 &= A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \mu_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_2} \mu_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_3} \mu_3, \\ A'_3 &= A_3 + \frac{\partial A_3}{\partial \xi_1} \mu_1 + \frac{\partial A_3}{\partial \xi_2} \mu_2 + \frac{\partial A_3}{\partial \xi_3} \mu_3. \end{aligned}$$

Обозначим через ds' длину элемента $P'Q'$, а через l', m', n' — направляющие косинусы отрезка $P'Q'$; последние отнесены к касательным к координатным линиям ξ_1, ξ_2, ξ_3 , проведенным через P' .

Проекция отрезка $P'Q'$ на эти касательные можно выразить с достаточной точностью с помощью трех формул типа

$$\begin{aligned} l' ds' &= A'_1 (\xi''_1 - \xi'_1) = \\ &= \left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} \mu_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \mu_2 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} \mu_3 \right) \times \\ &\quad \times \left(d\xi_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_3} d\xi_3 \right). \end{aligned}$$

Пренебрегая членами высшего порядка, получим

$$\begin{aligned} l' ds' &= A_1 d\xi_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} \mu_1 d\xi_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \mu_2 d\xi_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} \mu_3 d\xi_1 + \\ &\quad + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} A_1 d\xi_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_2} A_1 d\xi_2 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_3} A_1 d\xi_3. \end{aligned}$$

Подставим выражения (12.42) и (12.43) в написанное выше уравнение и примем во внимание соотношение

$$\frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} \mu_1 d\xi_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} A_1 d\xi_1 = \frac{\partial (A_1 \mu_1)}{\partial \xi_1} d\xi_1;$$

тогда найдем

$$\begin{aligned} l' ds' &= l ds \left(1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{u_3}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} \right) + \\ &\quad + m ds \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) + n ds \frac{A_1}{A_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{u_1}{A_1} \right). \end{aligned}$$

Аналогичным путем получим

$$\begin{aligned} m' ds' &= l ds \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \\ &\quad + m ds \left(1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + \frac{u_3}{A_2 A_3} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_3} \right) + n ds \frac{A_2}{A_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{u_2}{A_2} \right), \\ n' ds' &= l ds \frac{A_3}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_3}{A_3} \right) + m ds \frac{A_3}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_3}{A_3} \right) + \\ &\quad + n ds \left(1 + \frac{1}{A_3} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} + \frac{u_2}{A_2 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial \xi_2} + \frac{u_1}{A_1 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial \xi_1} \right). \end{aligned}$$

Вводя обозначение ε для продольной деформации линейного элемента вдоль PQ , найдем

$$\varepsilon = \frac{P'Q' - PQ}{PQ},$$

или

$$P'Q' = PQ(1 + \varepsilon) = ds(1 + \varepsilon).$$

Но, с другой стороны, имеем

$$(P'Q')^2 = (l' ds')^2 + (m' ds')^2 + (n' ds')^2.$$

Таким образом, деформация ϵ определится из уравнения

$$(1 + \epsilon)^2 = \left[l \left(1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{u_3}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} \right) + \right. \\ \left. + m \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) + n \frac{A_1}{A_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \right]^2 + \dots$$

Пренебрегая квадратами и произведениями u_1 , u_2 , u_3 , мы можем выписать результат в виде

$$\epsilon = \epsilon_1 l^2 + \epsilon_2 m^2 + \epsilon_3 n^2 + \gamma_{12} lm + \gamma_{13} ln + \gamma_{23} mn, \quad (12.44)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{u_3}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3}, \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + \frac{u_3}{A_2 A_3} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_3}, \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{A_3} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} + \frac{u_2}{A_2 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial \xi_2} + \frac{u_1}{A_1 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial \xi_1}, \\ \gamma_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right), \\ \gamma_{13} &= \frac{A_1}{A_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_3}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_3}{A_3} \right), \\ \gamma_{23} &= \frac{A_3}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_3}{A_3} \right) + \frac{A_2}{A_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{u_2}{A_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.45)$$

Сравнивая выражение (12.44) с первым из уравнений (2.14), убеждаемся в том, что величины ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 являются компонентами продольной деформации по направлениям соответственно 1, 2 и 3, а величины γ_{12} , γ_{13} , γ_{23} являются компонентами деформации сдвига.

Переходя к определению компонентов деформации для тонких оболочек, сделаем следующие допущения:

1. Линии, нормальные к срединной поверхности до деформации, преобразуются в прямые линии, нормальные к деформированной срединной поверхности.

2. Компоненты напряжений, направленные по нормали к срединной поверхности, малы по сравнению с другими составляющими напряжений, так что в соотношениях между напряжениями и деформациями эти компоненты можно не учитывать.

Оставляя ту же координатную систему для тонких оболочек, принимаем $\xi_3 = z$ и, вместе с тем, $\xi_1 = \xi_1$ и $\xi_2 = \xi_2$. Мы не делаем здесь допущения о том, что срединная поверхность остается недеформированной, как это было в случае плоских пластин малого прогиба; поэтому выражения для перемещений в некоторой точке по направлениям ξ_1 и ξ_2 примут следующий вид (если сохранить члены первого порядка относительно z):

$$u_1 = u_{10} + z \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad u_2 = u_{20} + z \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad (12.46)$$

где u_{10} и u_{20} — перемещения u_1 и u_2 для точек, лежащих на срединной поверхности, т. е. для $z=0$.

В параграфе 11.1 было уже сказано, что первое допущение эквивалентно предположению о равенстве нулю деформаций сдвига: $\gamma_{1z} = \gamma_{2z} = 0$. Дифференцируя выражения (12.45), получим

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1z} &= \frac{1}{A_3} \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{u_1}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{A_3}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_3}{A_3} \right), \\ \gamma_{2z} &= \frac{A_3}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_3}{A_3} \right) + \frac{1}{A_3} \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{u_2}{A_2 A_3} \frac{\partial A_2}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (12.47)$$

Обозначим через α_1, α_2 множители, преобразующие криволинейные координаты в линейные отрезки срединной поверхности оболочки; тогда будем иметь

$$A_1 = \alpha_1 \left(1 - \frac{z}{R_1} \right), \quad A_2 = \alpha_2 \left(1 - \frac{z}{R_2} \right), \quad A_3 = 1.$$

Подставляя эти величины в формулы (12.47) при $z=0$, найдем

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)_{z=0} = - \frac{u_{10}}{R_1} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1}, \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} \right)_{z=0} = - \frac{u_{20}}{R_2} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2},$$

где w соответствует перемещению u_3 точек срединной поверхности. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_{10} - z \left(\frac{u_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right), \\ u_2 &= u_{20} - z \left(\frac{u_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.48)$$

Пренебрегая отношениями z/R_1 и z/R_2 по сравнению с 1, имеем

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2.$$

Учитывая равенства

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = - \frac{\alpha_1}{R_1}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = - \frac{\alpha_2}{R_2}, \quad u_3 = w,$$

получим компоненты деформации в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi_1} + \frac{u_{20}}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - \frac{w}{R_1} \right) - \\ &- z \left[\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{u_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right], \\ \epsilon_2 &= \left(\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u_{20}}{\partial \xi_2} + \frac{u_{10}}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - \frac{w}{R_2} \right) - \\ &- z \left[\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{u_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right], \\ \gamma_{12} &= \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_{20}}{\alpha_2} \right) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_{10}}{\alpha_1} \right) \right] - \\ &- z \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_{20}}{\alpha_2 R_2} + \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_{10}}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12.49)$$

Формулы (12.49) могут быть записаны в виде

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} - z\chi_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{20} - z\chi_2, \quad \gamma_{12} = \gamma_0 - 2z\chi_{12}, \quad (12.50)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10} &= \frac{1}{a_1} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi_1} + \frac{u_{20}}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} - \frac{w}{R_1}, \\ \varepsilon_{20} &= \frac{1}{a_2} \frac{\partial u_{20}}{\partial \xi_2} + \frac{u_{10}}{a_1 a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} - \frac{w}{R_2}, \\ \gamma_0 &= \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_{20}}{a_2} \right) + \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_{10}}{a_1} \right), \\ \chi_1 &= \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_{10}}{R_1} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{u_{20}}{R_2} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2}, \\ \chi_2 &= \frac{1}{a_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_{20}}{R_2} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{u_{10}}{R_1} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1}, \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{a_2}{a_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_{20}}{a_2 R_2} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) + \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_{10}}{a_1 R_1} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Величины ε_{10} , ε_{20} , γ_0 в этих выражениях могут быть физически интерпретированы как деформации в срединной поверхности оболочки, а χ_1 , χ_2 , χ_{12} — как изменения кривизны.

Пользуясь вторым допущением, получим следующие выражения для компонентов напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{10} + \nu \varepsilon_{20} - z(\chi_1 + \nu \chi_2)], \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{20} + \nu \varepsilon_{10} - z(\chi_2 + \nu \chi_1)], \\ \tau_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_0 - 2z\chi_{12}). \end{aligned} \right\} \quad (12.51)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (12.27) и пренебрегая величинами z/R_1 и z/R_2 по сравнению с 1, найдем

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{10} + \nu \varepsilon_{20}), \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{20} + \nu \varepsilon_{10}), \\ N_{12} &= N_{21} = \frac{Eh \gamma_0}{2(1+\nu)}, \\ M_1 &= -D(\chi_1 + \nu \chi_2), \\ M_2 &= -D(\chi_2 + \nu \chi_1), \\ M_{12} &= M_{21} = D(1-\nu)\chi_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (12.52)$$

В приведенном выше выводе основных уравнений мы следовали Рейсснеру *).

*) E. Reissner, A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells, Am. J. Math., т. 63, № 1, 1941, 177—184.

12.6. Общая теория круговых цилиндрических оболочек. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку. Выберем координатную систему так, чтобы координата x изменялась вдоль образующей, θ — вдоль дуги, а z — вдоль нормали к срединной поверхности оболочки. При этом будем иметь: $\xi_1 = x$, $\xi_2 = \theta$. Пусть радиус кругового цилиндра равен a . Тогда линейный элемент срединной поверхности будет определяться формулой

$$(ds)^2 = (dx)^2 + a^2 (d\theta)^2;$$

отсюда находим

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = a.$$

Совместим ось u с касательной к окружности; тогда радиусы кривизны в плоскостях xz и yz будут главными радиусами кривизны:

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = a.$$

Примем $N_1 = N_x$, $N_2 = N_\theta$, $N_{12} = N_{x\theta}$, $M_1 = M_x$, $M_2 = M_\theta$, $M_{12} = M_{x\theta} = M_{\theta x}$, $Q_1 = Q_x$, $Q_2 = Q_\theta$. Вводя в систему уравнений (12.28) — (12.32) эти обозначения и используя найденные выше значения α и R , придем к следующим уравнениям равновесия для круговых цилиндрических оболочек:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + a p_1 &= 0, \\ a \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta + a p_2 &= 0, \\ a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + N_\theta + a p_3 &= 0, \\ a \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + a Q_\theta &= 0, \\ \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - a \frac{\partial M_x}{\partial x} + a Q_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.53)$$

Из последних двух уравнений находим

$$Q_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}, \quad Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta}. \quad (12.54)$$

Подставляя эти соотношения в первые три уравнения системы (12.53), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + a p_1 &= 0, \\ a \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + a p_2 &= 0, \\ a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + N_\theta + a p_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.55)$$

Для определения компонентов деформации введем обозначения:

$$\begin{aligned} u_{10} &= u, & u_{20} &= v, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_x, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_\theta, & \gamma_{12} &= \gamma_{x\theta}, \\ \chi_1 &= \chi_x, & \chi_2 &= \chi_\theta, & \chi_{12} &= \chi_{x\theta}. \end{aligned}$$

Из соотношений (12.49) и (12.50) получаем

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\chi_x, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta0} - z\chi_\theta, \quad \gamma_{x\theta} = \gamma_0 - 2z\chi_{x\theta}, \quad (12.56)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{\theta0} &= \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a}, & \chi_\theta &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ \gamma_0 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & \chi_{x\theta} &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} (12.57)$$

Подставляя эти выражения в равенства (12.52), найдем:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} \right) \right], \\ N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ N_{x\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \\ M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_{x\theta} &= D(1-\nu) \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right), \end{aligned} \right\} (12.58)$$

Вводя в уравнения (12.55) компоненты перемещения u , v , w , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{p_1(1-\nu^2)}{Eh} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\nu a^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ + \frac{h^2}{12a^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{a^2 \partial \theta^3} \right) + \frac{h^2}{12a^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{p_2(1-\nu^2)}{Eh} &= 0, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} - \frac{h^2}{12} \left(a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{a^3 \partial \theta^4} \right) - \\ - \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) + \frac{ap_3(1-\nu^2)}{Eh} &= 0. \end{aligned} \right\} (12.59)$$

Любая конкретная задача для круговой цилиндрической оболочки сводится к решению этой системы дифференциальных уравнений. В следующих двух параграфах будут приведены некоторые примеры решения таких задач.

12.7. Круговая цилиндрическая оболочка при осесимметричном нагружении. Для круговых цилиндрических оболочек, нагруженных симметрично относительно оси, решение уравнений (12.59) можно значительно упростить. Оболочки такого типа имеют широкое практическое применение; к ним относятся, например, цилиндрические котлы, испытывающие нагрузку от давления пара, и вертикальные цилиндрические резервуары, подверженные изнутри давлению жидкости. В рассматриваемом случае вследствие симметрии будем иметь $p_2 = 0$, $v = 0$; величины u и w являются функциями только x . Если радиус цилиндра равен a , то уравнения (12.59) преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\nu}{a} \frac{dw}{dx} + \frac{p_1(1-\nu^2)}{Eh} &= 0, \\ \nu \frac{du}{dx} - \frac{w}{a} - \frac{h^2 a}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{ap_3(1-\nu^2)}{Eh} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.60)$$

Допустим, что на оболочку действует только поперечная нагрузка; тогда будет $p_1 = 0$. Интегрирование первого уравнения приводит к соотношению

$$\frac{du}{dx} - \frac{\nu w}{a} = C, \quad (12.61)$$

где C — постоянная интегрирования. Из уравнений (12.58) находим

$$\frac{du}{dx} - \frac{\nu w}{a} = \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh}.$$

Из соотношения (12.61) можно видеть, что усилие N_x сохраняет постоянное значение.

Исключая $\frac{du}{dx}$ из второго уравнения (12.60), получаем

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_3}{D} + \frac{\nu N_x}{aD}, \quad (12.62)$$

где $\beta^4 = 3(1-\nu^2)/a^2 h^2$. Мы пришли к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Общее решение соответствующего однородного уравнения будет иметь вид:

$$w = C_1 e^{q_1 x} + C_2 e^{q_2 x} + C_3 e^{q_3 x} + C_4 e^{q_4 x},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные величины, а q_1, q_2, q_3, q_4 — корни уравнения

$$q^4 + 4\beta^4 = 0.$$

Если мы в левой части этого уравнения прибавим и вычтем $4q^2\beta^2$, то получим

$$(q^2 + 2\beta^2)^2 - 4q^2\beta^2 = 0.$$

Отсюда

$$q^2 + 2\beta^2 = \pm 2q\beta,$$

или

$$q = \pm \beta \pm i\beta.$$

Общее решение однородного уравнения принимает вид

$$w = e^{-\beta x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) + e^{\beta x} (C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}).$$

Если частный интеграл обозначить через $f(x)$, то общее решение исходного уравнения (12.62) можно записать в следующей форме:

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x), \quad (12.63)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

В качестве первого примера рассмотрим длинную трубу, подвергающуюся изгибу под действием нагрузки, равномерно распределенной вдоль кругового сечения. Расположим оси, как показано на рис. 12.24, и рассмотрим половину цилиндра, находящуюся

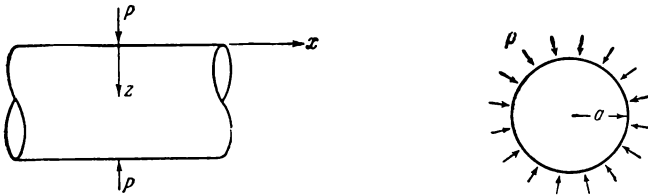


Рис. 12.24.

справа от оси z *). Здесь отсутствует давление p_3 , распределенное по поверхности оболочки; если при заданных условиях на торцах $N_x = 0$, то $f(x) = 0$. Длина цилиндра считается значительной; в сечении у опоры, для которого координата x велика, величина w должна равняться нулю. Это возможно при условии, если в выражении (12.63) будет $C_3 = C_4 = 0$. Таким образом, имеем

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (12.64)$$

Из соотношений (12.58) находим

$$N_{x\beta} = M_{x\beta} = 0.$$

*) Для другой половины цилиндра, находящейся слева от оси z , ось x будет направлена в противоположную сторону.

а также

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{dx} - \frac{w}{a} \right), & M_x &= -D \frac{d^2w}{dx^2}, \\ M_0 &= -D\nu \frac{d^2w}{dx^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.65)$$

Считая, что величина N_x равна нулю, имеем

$$\frac{du}{dx} = -\nu \frac{w}{a};$$

тогда выражение для N_0 можно записать в виде

$$N_0 = -\frac{Ehw}{a}.$$

Пользуясь выражением (12.64), получим

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -D \frac{d^3w}{dx^3}. \quad (12.66)$$

В рассматриваемом случае каждая половина цилиндра воспринимает половину внешней нагрузки; поэтому при $x = 0$ будет $Q_x = -P/2$. Для длинного цилиндра функция w должна быть симметрична относительно $x = 0$; отсюда следует условие, что в этом сечении $\frac{dw}{dx} = 0$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 можно определить из двух условий:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} &= [-\beta C_1 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \\ &\quad + \beta C_2 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)]_{x=0} = -C_1 + C_2 = 0, \\ \left(\frac{d^3w}{dx^3} \right)_{x=0} &= [2\beta^3 C_1 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) + \\ &\quad + 2\beta^3 C_2 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)]_{x=0} = 2\beta^3 (C_1 + C_2) = \frac{P}{2D}. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$C_1 = C_2 = \frac{P}{8\beta^3 D}.$$

Таким образом, выражение для прогиба w принимает вид

$$w = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin \beta x + \cos \beta x). \quad (12.67)$$

Подставляя (12.67) в соотношения (12.65), получим:

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= -\frac{Ehw}{a} = -\frac{EhPe^{-\beta x}}{8\beta^3 Da} (\sin \beta x + \cos \beta x), \\ M_x &= -D \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{Pe^{-\beta x}}{4\beta} (\cos \beta x - \sin \beta x), \\ M_0 &= -D\nu \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\nu Pe^{-\beta x}}{4\beta} (\cos \beta x - \sin \beta x), \\ Q_x &= -D \frac{d^3w}{dx^3} = -\frac{Pe^{-\beta x}}{2} \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (12.68)$$

Из этих формул видно, что наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент имеют место при $x=0$ и равны:

$$w_{\max} = \frac{P}{8\beta^3 D} = \frac{Pa^2\beta}{2Eh}, \quad M_{\max} = \frac{P}{4\beta}.$$

Легко установить, что всеми величинами, которые определяются этими формулами, можно пренебречь при $x > \pi/\beta$. Это означает, что изгиб здесь имеет местный характер; для цилиндра длиной $L = 2\pi/\beta$, нагруженного посередине, получим тот же наибольший прогиб и такие же изгибающие моменты, как и для весьма длинного цилиндра

Напряжения изгиба можно вычислить по формулам (12.51) и (12.52):

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3}, \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + \frac{12M_\theta z}{h^3}.$$

Наибольшие напряжения изгиба имеют место при $x=0$ и $z=h/2$:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{3P}{2\beta h^2}, \quad (\sigma_\theta)_{\max} = -\frac{Pa\beta}{2} - \frac{3\nu P}{2\beta h^2}.$$

Во втором примере рассмотрим цилиндрический резервуар, наполненный жидкостью с удельным весом ρ . Расположим координатные оси, как показано на рис. 12.25. Давление, действующее в любой точке x на стенку цилиндрического резервуара, равно

$$p_3 = -\rho(L-x);$$

знак минус указывает, что давление p_3 направлено в противоположную сторону по отношению к положительному направлению z . Уравнение (12.62) получает форму

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = -\frac{\rho(L-x)}{D}.$$

Частный интеграл этого уравнения будет

$$f(x) = -\frac{\rho(1-x)}{4\beta^4 D} = -\frac{\rho(L-x)a^2}{Eh},$$

а общее решение имеет вид:

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{\rho(L-x)a^2}{Eh}.$$

(12.69)

Если длина L велика по сравнению с a и h , то цилиндр можно рассматривать как бесконечно длинный. Тогда постоянные C_3 и C_4 окажутся равными нулю. Можно принять, что у дна цилиндра жестко заделан; тогда

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

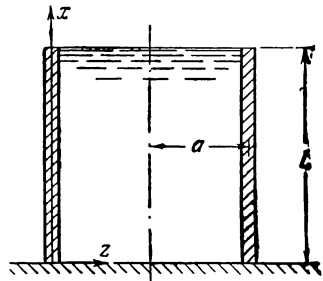


Рис. 12.25.

Из этих условий находим:

$$(w)_{x=0} = C_1 - \frac{\rho a^2 L}{Eh} = 0,$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = \beta(C_2 - C_1) + \frac{\rho a^2}{Eh} = 0.$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{\rho a^2 L}{Eh}, \quad C_2 = \frac{\rho a^2}{Eh} \left(L - \frac{1}{\beta}\right).$$

Прогиб w оказывается равным

$$w = -\frac{\rho a^2}{Eh} \left\{ L - x - e^{-\beta x} \left[L \cos \beta x + \left(L - \frac{1}{\beta} \right) \sin \beta x \right] \right\}.$$

Подставляя это выражение в соотношения (12.65), получим:

$$N_\theta = -\frac{Eh w}{a} = \rho a \left\{ L - x - e^{-\beta x} \left[L \cos \beta x + \left(L - \frac{1}{\beta} \right) \sin \beta x \right] \right\},$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\rho a L h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} e^{-\beta x} \left[-\sin \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta L} \right) \cos \beta x \right],$$

$$M_\theta = -D\nu \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\nu \rho a L h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} e^{-\beta x} \left[-\sin \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta L} \right) \cos \beta x \right].$$

Имея эти выражения для N_θ , M_x и M_θ , легко вычислить максимальные напряжения. Наибольший изгибающий момент имеет место у дна резервуара и равен

$$(M_x)_{\max} = \left(1 - \frac{1}{\beta L} \right) \frac{\rho a L h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}.$$

12.8. Цилиндрические оболочки при несимметричном нагружении. Перейдем к общему случаю цилиндрических оболочек, находящихся под действием несимметричной нагрузки; здесь следует

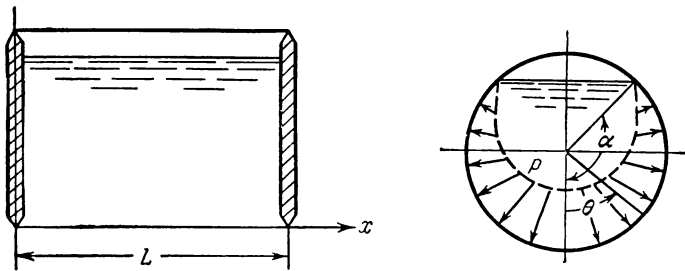


Рис. 12.26.

совместно решать три уравнения (12.59). В качестве примера рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, наполненную жидкостью с удельным весом ρ (рис. 12.26). Допустим, что края

оболочки можно рассматривать как шарнирно опертые *). На опорах $x = 0$ и $x = L$ должно быть

$$v = 0, \quad w = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0.$$

Как легко видеть, эти условия, а вместе с тем и условия симметрии деформации оболочки, удовлетворяются, если компоненты перемещения взять в виде следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos n\theta \cos \frac{m\pi x}{L}, \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{L}, \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{L}; \end{aligned} \right\} \quad (12.70)$$

здесь L — длина цилиндра, θ — угол, который откладывается, как показано на рис. 12.26.

Интенсивность давления p_3 выражается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= -\rho a (\cos \theta - \cos \alpha) && \text{при } 0 \leq \theta \leq \alpha, \\ p_3 &= 0 && \text{при } \alpha \leq \theta \leq \pi, \end{aligned} \right\} \quad (12.71)$$

где угол α определяет уровень жидкости. Удобно представить p_3 , заданное выражениями (12.71), в форме следующего ряда Фурье:

$$p_3 = - \sum_m \sum_n D_{mn} \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{L}. \quad (12.72)$$

Коэффициенты D_{mn} можно вычислить обычным путем по следующим формулам:

$$D_{mn} = \frac{8\rho a}{m\pi^2(n^2 - 1)} (\cos \alpha \sin n\alpha - n \cos n\alpha \sin \alpha), \quad (12.73)$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$ и $n = 2, 3, 4, \dots$

причем

$$\left. \begin{aligned} D_{m0} &= \frac{4\rho a}{m\pi^2} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha), \\ D_{m1} &= \frac{2\rho a}{m\pi^2} (2\alpha - \sin 2\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (12.74)$$

*) I. A. Wojszak, Deformation of thin cylindrical shells subjected to internal loading, Phil. Mag., ser. 7, т. 18, 1934, 1099—1116.

В случае цилиндра, заполненного жидкостью (рис. 12.27), будем через ρd обозначать давление на уровне оси оболочки. Тогда

$$p_3 = -\rho(d + a \cos \theta);$$

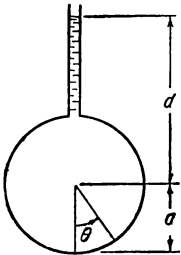
выражения (12.73) и (12.74) принимают вид:

$$D_{mn} = 0, \quad D_{m0} = \frac{4\rho d}{m\pi}, \quad D_{m1} = \frac{4\rho a}{m\pi}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (12.75)$$

Для тонких цилиндров отношение $h^2/12a^2$ будет мало; тогда во втором из уравнений (12.59) можно пренебречь членами, в которые это отношение входит. Подставим выражения (12.70) и (12.72) в (12.59) и введем обозначения

$$\lambda = \frac{L}{a}, \quad \eta = \frac{h}{2L}.$$

Тогда получим



$$\left. \begin{aligned} A_{mn} [2m^2\pi^2 + (1-\nu)\lambda^2 n^2] - \\ - B_{mn} (1-\nu)\lambda mn\pi + C_{mn} 2\nu\lambda m\pi = 0, \\ A_{mn} 3(1+\nu)\lambda mn\pi - B_{mn} [3(1-\nu)m^2\pi^2 + \\ + 6\lambda^2 n^2] - C_{mn} 2\lambda^2 n [3 + \eta^2(m^2\pi^2 + \lambda^2 n^2)] = 0, \\ A_{mn} 3\nu\lambda m\pi - B_{mn} \lambda^2 n^2 [3 + \eta^2(m^2\pi^2 + \lambda^2 n^2)] - \\ - C_{mn} [3\lambda^2 + \eta^2(m^2\pi^2 + \lambda^2 n^2)^2] = -\frac{D_{mn} L^2 h}{2D}. \end{aligned} \right\} \quad (12.76)$$

Рис. 12.27.

Коэффициенты D_{mn} определяются из соотношений (12.73), (12.74) или (12.75); следовательно, пользуясь выражениями (12.76), можно в каждом отдельном случае вычислить величины A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} при любых значениях m и n . Из выражений (12.58) и (12.70) можно, далее, определить результирующие усилия, моменты и компоненты перемещений для любой точки цилиндрической оболочки.

Основываясь на приведенном выше теоретическом решении задачи, рассмотрим цилиндрическую оболочку, заполненную жидкостью, при следующих числовых данных:

$$a = d = 50 \text{ см}, \quad L = 25 \text{ см}, \quad h = 7 \text{ см}, \quad \nu = 0,3.$$

Будем иметь

$$\lambda = \frac{L}{a} = 0,5, \quad \lambda^2 = 0,25, \quad \eta = \frac{h}{2L} = 0,14, \quad \eta^2 = 0,0196.$$

По формулам (12.75) находим

$$D_{m0} = D_{m1} = \frac{4\rho a}{m\pi} \quad \text{для } m = 1, 3, 5, \dots$$

и

$$D_{mn} = 0 \quad \text{для } n > 1.$$

Воспользуемся обозначением $\varphi = \frac{2\alpha\rho L^3 h}{\pi^2 D}$. При $n = 0$ решение уравнений (12.76) будет иметь вид:

$$A_{m0} = \frac{\nu\varphi\lambda}{m^2 [3\lambda^2 (1 - \nu^2) + \eta^2 m^4 \pi^4]},$$

$$B_{m0} = 0,$$

$$C_{m0} = \frac{\varphi\pi}{m [3\lambda^2 (1 - \nu^2) + \eta^2 m^4 \pi^4]}.$$

Если принять $n = 1$ и выразить коэффициенты через эти параметры, то получим весьма громоздкие формулы. Численные значения коэффициентов для $m = 1, 3, 5$ даны в табл. 12.1. Как видим, значения этих коэффициентов уменьшаются очень быстро; поэтому можно взять лишь несколько первых членов в рядах (12.70), чтобы определить деформацию с достаточной точностью.

Т а б л и ц а 12.1

m	$A_{m0}\varphi^{-1}h \times 10^3$	$C_{m0}\varphi^{-1}h \times 10^3$	$A_{m1}\varphi^{-1}h \times 10^3$	$B_{m1}\varphi^{-1}h \times 10^3$	$C_{m1}\varphi^{-1}h \times 10^3$
1	28,94	-606	24,38	-35,95	-593
3	0,0537	- 3,371	0,0520	- 0,372	- 3,352
5	0,00251	- 0,263	0,00247	- 0,00183	- 0,263

Максимальные значения w , N_x , N_θ , M_x и M_θ имеют место при $x = L/2$, $\theta = 0$; они легко могут быть вычислены. Принимая $m = 1, 3, 5$ и $n = 0, 1$, находим

$$w_{\max} = \frac{11,75\rho}{E} \text{ см.}$$

$$(N_x)_{\max} = 0,02375\rho \text{ кг/см.}, \quad (N_\theta)_{\max} = 1,61\rho \text{ кг/см.}$$

$$(M_x)_{\max} = 5,67\rho \text{ кг.}, \quad (M_\theta)_{\max} = 1,763\rho \text{ кг.}$$

Наибольшие напряжения изгиба по окружности и вдоль образующей равны:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{(N_\theta)_{\max}}{h} + \frac{6(M_\theta)_{\max}}{h^2} = 0,4435\rho \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{(N_x)_{\max}}{h} + \frac{6(M_x)_{\max}}{h^2} = 0,694\rho \text{ кг/см}^2.$$

Задача. Принимая в предыдущем числовом примере $h = 0,64$ см и оставляя все остальные данные без изменения, вычислить наибольшие значения прогиба и напряжений.

12.9. Выпучивание круговой цилиндрической оболочки под действием равномерного осевого сжатия. Если цилиндрическая оболочка находится под действием равномерного осевого сжатия (рис. 12.28), то при определенном значении сжимающей нагрузки цилиндрическая форма равновесия становится неустойчивой, и цилиндр выпучивается. Примем здесь, что все усилия в срединной поверхности, за исключением N_x , весьма малы. Значения произведений N_x на производные от перемещений становятся достаточно

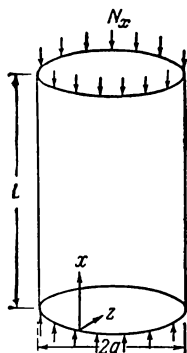


Рис. 12.28.

велики и должны быть включены в уравнения равновесия, в то время как произведениями других усилий на производные от перемещений можно пренебречь. Будем рассуждать аналогично тому, как это сделано в параграфе 11.6. Тогда найдем, что в уравнение $\sum F_y = 0$ следует включить результирующую проекцию на ось y от усилий N_x , равную

$$N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx a d\theta;$$

соответственно в уравнение $\sum F_z = 0$ должна быть включена результирующая проекция на оси z , равная

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx a d\theta.$$

Разделим выражения для этих составляющих на $dx d\theta$ и введем их в уравнения (12.53). Тогда уравнения равновесия примут вид:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_\theta &= 0, \\ a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_\theta &= 0, \\ a \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + a Q_\theta &= 0, \\ a \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - a Q_x &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (12.77)$$

здесь величины p_1, p_2, p_3 приняты равными нулю. Если из этих уравнений исключить поперечные силы Q_x и Q_θ , то получим:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} &= 0, \\ a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_\theta + a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.78)$$

Чтобы найти решение этих уравнений, введем в них функции перемещений u , v , w по формулам (12.58). Считая сжимающие напряжения положительными и вводя обозначения

$$\frac{h^2}{12a^2} = \alpha, \quad \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh} = \varphi, \quad (12.79)$$

окончательно получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{a^2 \partial \theta^2} = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial w}{a^2 \partial \theta} + \\ & + \alpha \left(\frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{a^2 \partial \theta^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \\ & -a\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} - \alpha \left(\frac{\partial^3 v}{a \partial \theta^3} + a \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \right. \\ & \left. + a^3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{a \partial \theta^4} + 2a \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.80)$$

Эти уравнения удовлетворяются, если положить

$$u = \frac{C_1}{\nu a} x + C_2, \quad v = 0, \quad w = C_1, \quad (12.81)$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Такое решение относится к начальной цилиндрической форме равновесия сжатой оболочки, с учетом расширения в поперечном направлении. Выберем начало координат у одного из торцов оболочки и примем длину цилиндра равной L ; тогда общее решение уравнений (12.54) можно выразить с помощью следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{C_1}{\nu a} x + C_2 + \sum_m \sum_n A_{mn} \sin n\theta \cos \frac{m\pi x}{L}, \\ v &= \sum_m \sum_n B_{mn} \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{L}, \\ w &= C_1 + \sum_m \sum_n C_{mn} \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (12.82)$$

Для длинных цилиндров условия на торцах мало влияют на величину критической нагрузки; тогда решение по (12.82) определит критическую нагрузку для цилиндрической оболочки, находящейся под действием осевого сжатия, независимо от характера закрепления торцов.

Подставляя (12.82) в уравнения (12.80) и вводя обозначение

$$\lambda = \frac{m\pi a}{L},$$

придем к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) + B_{mn} \frac{(1-\nu)\lambda n}{2} + C_{mn} \nu \lambda &= 0, \\ A_{mn} \frac{(1+\nu)\lambda n}{2} + B_{mn} \left[\frac{(1-\nu)(1+\alpha)\lambda^2}{2} + (1+\alpha)n^2 - \lambda^2 \varphi \right] + \\ &+ C_{mn} [n + \alpha n (n^2 + \lambda^2)] = 0, \\ A_{mn} \nu \lambda + B_{mn} [1 + \alpha (n^2 + \lambda^2)] + \\ &+ C_{mn} [1 - \lambda^2 \varphi + \alpha (\lambda^2 + n^2)^2] = 0. \end{aligned} \right\} (12.83)$$

Приравнявая нулю детерминант, составленный из коэффициентов в этих уравнениях, придем к нетривиальному решению. Величины α и φ обычно малы, так что членами, содержащими их квадраты, можно пренебречь. Раскрывая детерминант, найдем, что наименьшая величина φ будет отвечать большим значениям λ^2 и n^2 . Принимая во внимание это обстоятельство, отбросим малые члены; тогда окончательно получим

$$\varphi = \alpha \frac{(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1-\nu)\lambda^2}{(n^2 + \lambda^2)^2}.$$

Введем обозначение

$$\beta = \frac{(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2},$$

тогда

$$\varphi = \alpha \beta + \frac{1-\nu}{\beta}.$$

Величина φ принимает минимальное значение при $\frac{d\varphi}{d\beta} = 0$. Находим

$$\alpha - \frac{1-\nu}{\beta^2} = 0;$$

отсюда

$$\beta = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{\alpha}}$$

и, далее,

$$\varphi_{\min} = 2 \sqrt{\alpha(1-\nu^2)}.$$

Пользуясь обозначениями (12.79), имеем

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{N_{\text{кр}}}{h} = \frac{Eh}{a \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (12.84)$$

Выражение (12.84) определяет критическое напряжение для длинной цилиндрической оболочки, находящейся под действием осевого сжа-

тия. Однако это теоретическое значение во многих случаях втрое или вчетверо превышает экспериментальные данные. Объяснение этого несоответствия было дано Карманом и Цянь Сюэ-сенем *) с помощью нелинейной теории выпучивания. Они приняли, что квадраты производных от прогиба w являются величинами того же порядка, что и производные от других перемещений. Однако эта теория является слишком сложной, чтобы ее можно было включить в данную книгу.

*) См. Th. K a r m a n and H. S. T s i e n, The buckling of thin cylindrical shells under axial compression, J. Aeron. Sci., т. 8, 303, 1941; D. L e g g et and R. J o n e s, The behaviour of a cylindrical shell under axial compression when the buckling load has been exceeded, Brit. ARC Tech. Rept. № 2190, 1942; L. D o n n e l l and C. C. W a n, Effect of imperfection on buckling of thin cylinders and columns under axial compression, J. Appl. Mech., т. 17, № 1, 1951. (См. также книги: X. M. M y s t a p a и K. З. Г а л и м о в, Нелинейная теория упругих оболочек, Таткнигоиздат, 1957; A. C. В о л ь м и р, Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956. *Прим. ред.*)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аналогия гидродинамическая 120
— мембранная 108, 109, 117
Аргумент комплексного числа 198

Балка консольная 277
— с узким поперечным сечением 267
Бицено — Коха метод 192
Бредта формула 119

Вал вращающийся 82

— — сплошной 83
— — трубчатый 83
— конический 124
— круглый 124

Вариация 169

Вектор единичный 353
Выпучивание пластинок 340
Вычет функции 203

Галеркина метод 187, 190, 191
Горизонталь поверхности 108
Грина формула 97, 173, 176, 195
Гука закон 36
— — обобщенный 36, 40

Депланация 95

Деформация 26
— главная 37, 39
— остаточная 35
— плоская 26, 56, 57, 60, 70, 214, 219
— — обобщенная 58, 60, 70
— продольная 26, 27, 31, 68
— сдвига 26, 27, 28, 30, 31, 68
Диск вращающийся 84

Жесткость крутильная 99
—цилиндрическая 317

Задача о собственных значениях 256
Закон Гука 36
— — обобщенный 36, 40
Запрессовка 79

Изгиб балки 163, 177, 185
— консоли 60, 270
— оболочки 378
— пластин круглых 331
— — прямоугольных 325
— — тонких 314, 321
— продольный 247
— стержня 239
— чистый 239
Инварианты 25

Интеграл эллиптический второго рода 251
— — первого рода 250

Кардиоида 209

Кастильяно теорема 193
Кирхгофа теорема 298
Кольцо жесткости 373
Компоненты деформации 28, 37, 378
— напряжения 17, 38, 218
— перемещения 217
Концентрация напряжений 75, 116
Координаты криволинейные 352
— полярные 66
— сферические 352
— цилиндрические 352
Котел цилиндрический 386
Коши — Гурса теорема 200, 208
Коши — Римана условия 199, 205
Коши формула 201
Коэффициент линейного расширения материала 87
— второй квадратичной формы поверхности 358, 363
— первой квадратичной формы поверхности 353, 363
— Пуассона 41
— экстраполяции 286
Кривая параметризованная 351, 360
Кривизна 248, 254
— главная 360
— максимальная 360
— минимальная 360
— нормальная 356, 360
Круг Мора 20, 21
Кручение 94
— призматических стержней 94

Лапласа оператор 53, 69, 96, 129
— уравнение 200, 215
Линия равной депланации 102
— симметрии 139, 141
Лорана ряд 203

Маклорена ряд 202
Маргерра формула 304
Метод Бицено — Коха 192
— вариационный 166
— Галеркина 187, 190, 191
— коллокации 192
— преобразований конформных 233
— разностей конечных 125, 272, 281
— релаксации 134, 278
— решения обратный 94
— — полуобратный 94
— — прямой 94
— Рэлея — Ритца 181, 191, 292, 325
— экстраполяции 151, 283

- Метод энергетический 289, 345
 Модуль жесткости 41
 — комплексного числа 198
 — объемный 43
 — сдвига 41
 — упругости 41
 — Юнга 41
 Момент инерции 62
 Мора круг 20, 21
- Нагрузка критическая** 247, 254, 282
Направления главные 21, 357
 — — деформации 38
 — — напряжения 38
Напряжение 11
 — главное 20, 21, 39
 — изгиба при кручении 101
 — касательное 12
 — нормальное 12
 — радиальное 93
 — растягивающее 12
 — сжимающее 12
 — среднее 15
 — температурное 87, 90
 Натяг 70, 73
 Невязка 135
 Нормаль главная 355
 — единичная 356
 Ньютона формула 143, 144, 154
- Область многосвязная** 201
 — односвязная 200
Оболочка в форме эллипсоида вращения 374
 — круговая цилиндрическая 376, 384, 390, 395
 — сферическая 373
 — тонкая 351
 Образ кривой 204
Оператор гармонический или Лапласа 58, 69, 96, 129
 — невязки 160
 — релаксационный 135, 160
 — — групповой 139
Ось изогнутая 243
Отображение 204
 — конформное 204
- Переменные комплексные** 197
 — — сопряженные 198
Перемещение 26
 — возможное 166
 — тела абсолютно твердого 28
Пластинка бесконечная с отверстием 75, 220, 225
 — изогнутая 351
 — квадратная 342
 — кольцевая 230
 — круглая 287
 — прямоугольная 335, 340, 345
 — с отверстием эллиптическим 233
 — тонкая 314
Плита широкая с отверстием 223
Плоскость соприкасающаяся 355
Площадка главная 24
Поверхность срединная тонкой оболочки 351
Погрешность 151, 304
 — Шеппарда 152
Посадка горячая 73
Постоянные кручения 99, 101, 113, 183
 — Ламе 39
 — упругие 40
Потенциал внешних сил 170, 300
Поток касательных усилий 120
- Правило Симпсона** 150, 154, 155, 156
Предел упругости 35
Преобразования конформные 233
Принцип вариационный 174
 — возможных перемещений 167
 — — работ 166
 — наложения 54
 — Сен-Венана 54
 — энергии дополнительной 171, 174, 195
 — — потенциальной 166, 171
Пуассона уравнение 130
- Работа, возможная** 167
Равновесие безразличное 248, 253, 303
 — неустойчивое 248, 303
 — устойчивое 170, 247, 303
Радиус кривизны главный 360
Разность конечная 126, 128, 143, 181
Рама 259
Резервуар вертикальный цилиндрический 386, 389
Релаксация групповая 139
Ролрига формула 361
Рэлея — Ритца метод 181, 191, 292, 325
Рэлея формула 290, 298
Ряд Лорана 203
 — степенной 202
 — Тейлора 202
 — тригонометрический 184, 186
 — Фурье 321
 — — комплексный 206
- Свойство анизотропности** 31
 — изотропности 35, 36
 — однородности 35
 — сплошности 35
Сен-Венана принцип 54
Сечение нормальное 355
Сила критическая 250
 — объемная 13, 57, 82
 — поверхностная 13
 — тяжести 57, 82
 — Эйлера 247
Силы уравновешенные 13
 — центробежные 57, 79, 82
Система нерегулярная 161
Состояние напряженное двухосное 15
 — — объемное 17
 — — плоское 15, 56, 59, 60, 69, 214, 219
 — пластическое 35
Стержень 259
 — круглого сечения 99
 — переменного поперечного сечения 254, 272
 — постоянного поперечного сечения 254, 272
 — призматический 94, 179, 205, 244, 247
 — прямоугольного сечения 103, 182, 190
 — тонкостенный открытого профиля 114
 — эллиптического сечения 99, 211
Структура волокнистая 36
 — кристаллическая 36
- Тейлора ряд** 202
Тело абсолютно упругое 35
Тензор напряжений 11
Теорема взаимности 193, 195
 — вычетов 203
 — Кастильяно 193, 196
 — Кирхгофа 298
 — Коши — Гурса 200, 208
 — наименьшей работы 196
 — однозначности 52, 170, 298
Теория безмоментная 369
 — — оболочек 369, 376
Тимошенко формула 297

Точка особая аналитической функции 199
 — разветвления 212
 Труба 70, 117, 387

Угол закручивания 95, 119
 Упругость 35
 Уравнение бигармоническое 58, 70, 130
 — дифференциальное изогнутой поверхности тонкой пластинки 319, 332
 — — основное для тонкой пластинки 339
 — — продольного изгиба 302
 — изгиба тонких пластин 314
 — Лапласа или гармоническое 200, 219
 — Пуассона 130
 Уравнения в конечных разностях 125, 130, 143
 — поверхности параметрические 351
 — равновесия 16, 56, 66, 105, 205, 254, 364
 — совместности 32, 34, 68
 Усилие критическое касательное 348
 — мембранное 369
 Условия граничные 25, 319
 — компланарности векторов 357
 — Коши — Римана 199, 205
 — минимизации 178, 181, 182, 183, 185
 Устойчивость упругого стержня 247

Формула Бредта 119
 — Грина 97, 173, 176, 195
 — Коши 201
 — Маргерра 304
 — Ньютона 143, 144, 154
 — преобразования компонентов деформации 32
 — Родрига 361

Формула Рэлея 290, 298
 — Тимошенко 297
 — Эйлера — Бернулли 64, 245
 — экстраполяции 286
 Функция аналитическая 199
 — вещественная 200
 — гармоническая 200
 — депланации 95, 101, 207
 — комплексная 198
 — мнимая 200
 — напряжений 68, 110
 — — Эри 60
 — отображения 204
 — регулярная 199
 — сопряженная 198
 Фурье ряд 206, 321

Центр кривизны 360
 Цилиндр 74, 79 82, 90, 392, 395

Шеппарда формула 152

Эйлера — Бернулли формула 64, 245
 Эйлера сила 247
 Энергия деформации 46, 325
 — дополнительная 170, 171, 179, 181
 — изгиба 300, 326
 — потенциальная 170, 300
 Эри функция напряжения 60

Юнга модуль 41

