

ФГОС 3+

С.М. Аполлонский

А.Л. Виноградов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Рекомендовано

ФГБОУ ВПО «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
в качестве **учебного пособия** для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки «Электроэнергетика и электротехника»,
«Электроника и микроэлектроника».

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГАУ «Федеральный институт развития образования»

Регистрационный номер рецензии № 081 от 07.03.2014

BOOK.ru

ЭЛЕКТРОННО-БИБЛИОТЕЧНАЯ СИСТЕМА

КНОРУС • МОСКВА • 2016

УДК 621.3(075.32)
ББК 31.2я723
А767

Рецензенты:

В.В. Фёдоров, проф. кафедры «Теоретические основы электротехники» Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (ЛЭТИ), д-р техн. наук, проф.;

М.А. Шакиров, проф. кафедры «Теоретические основы электротехники» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (ЛПИ), д-р техн. наук, проф.

Аполлонский С.М.

А767 Теоретические основы электротехники : учебное пособие / С.М. Аполлонский, А.Л. Виноградов — М. : КНОРУС, 2016. — 256 с.

ISBN 978-5-406-03879-6

DOI 10.15216/978-5-406-03879-6

Рассмотрены электрические цепи постоянного тока, методы их расчета, стационарные процессы в линейных электрических цепях переменного тока, трехфазные электрические цепи, несинусоидальные периодические процессы в линейных электроцепях, статические и квазистатические процессы в нелинейных электрических цепях, переходные процессы в электрических цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами, методы расчета электростатических, электрических, магнитных и электромагнитных цепей в свободном пространстве и в ограниченных областях.

Соответствует ФГОС ВО 3+.

Для студентов всех форм обучения по направлениям подготовки «Энергетическое машиностроение», «Электроэнергетика и электротехника», «Техническая физика», «Системный анализ и управление», сталкивающихся с необходимостью изучения основ расчета электрических и магнитных цепей и электромагнитного поля, а также магистров, аспирантов и инженерно-технических работников электротехнических направлений.

**УДК 621.3(075.32)
ББК 31.2я723**

**Аполлонский Станислав Михайлович
Виноградов Александр Леонидович**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Сертификат соответствия № РОСС RU.АГ51.Н03820 от 08.09.2015.

Изд. № 6904. Подписано в печать 06.10.2015. Формат 60×90/16.

Гарнитура «NewtonC». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 16,0. Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 500 экз. Заказ №

ООО «Издательство «КноРус».

117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.

Тел.: 8-495-741-46-28.

E-mail: office@knorus.ru <http://www.knorus.ru>

Отпечатано в ОАО «Областная типография „Печатный двор“».

432049, г. Ульяновск, ул. Пушкирева, д. 27.

E-mail: ulpd@mail.ru

ISBN 978-5-406-03879-6

© Аполлонский С.М., Виноградов А.Л., 2016
© ООО «Издательство «КноРус», 2016

Введение	7
--------------------	---

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Глава 1. Электрическая цепь и ее элементы.	10
1.1. Электрическая цепь	10
1.2. Приемники электрической энергии	11
1.3. Источники электрической энергии.	13
1.4. Законы электрических цепей	18
1.5. Групповое соединение приемников.	21
1.6. Передача энергии по линии постоянного тока	23
Вопросы и задания для самопроверки	26
Глава 2. Расчет линейных электрических цепей	27
2.1. Основные понятия и определения	27
2.2. Расчет простых цепей	29
2.3. Общий метод расчета сложных цепей	30
2.4. Метод контурных токов.	32
2.5. Метод узловых потенциалов	34
2.6. Метод наложения	37
2.7. Метод эквивалентного источника	40
Вопросы для самопроверки	41
Глава 3. Однофазные электрические цепи синусоидального тока	42
3.1. Основные понятия о синусоидальных процессах.	42
3.2. Векторное изображение синусоидальных токов и напряжений	43
3.3. Законы Кирхгофа в векторной форме записи.	44
3.4. Действующие значения токов и напряжений	45
3.5. Понятия об эквивалентных параметрах цепей переменного тока	46
3.6. Параметры реальной катушки.	50
3.7. Параметры реального конденсатора	54
3.8. Элементы в цепи синусоидального тока	57
3.9. Цепь с последовательным соединением R, L, C	59
3.10. Цепь с параллельным соединением R, L, C	61
3.11. Мощность цепи синусоидального тока	63
3.11.1. Активная мощность в цепи переменного тока	63

3.11.2. Реактивная и полная мощности в цепи переменного тока	64
3.12. Колебания энергии в цепи переменного тока	65
3.13. Понятие о коэффициентах мощности и полезного действия	69
3.14. Символический метод расчета	70
3.15. Комплексные сопротивление и проводимость	72
3.16. Комплексная мощность	73
3.17. Законы Кирхгофа в комплексной форме записи	74
3.18. Аналогия с цепями постоянного тока	74
3.19. Резонанс в цепях синусоидального тока	75
3.20. Цепи с индуктивно связанными катушками	78
Вопросы для самопроверки	82
Глава 4. Трехфазные электрические цепи	83
4.1. Основные сведения о трехфазных цепях	83
4.2. Соединение трехфазной цепи звездой	85
4.3. Соединение трехфазной цепи треугольником	88
4.4. Расчет трехфазных цепей	89
4.5. Несимметричные режимы трехфазной цепи	92
4.6. Мощность трехфазной цепи	96
Вопросы и задания для самопроверки	96

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ И ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Глава 5. Несинусоидальные периодические ЭДС, напряжения и токи	100
5.1. Разложение несинусоидальной периодической функции в ряд Фурье	100
5.2. Действующие значения несинусоидальных периодических токов и напряжений	101
5.3. Мощность в цепи при несинусоидальном токе и напряжении	102
5.4. Расчет линейных цепей с несинусоидальными ЭДС	103
Вопросы для самопроверки	106
Глава 6. Переходные процессы в электрических цепях	107
6.1. Основные понятия о переходных процессах	107
6.2. Законы коммутации. Начальные условия	108
6.3. Классический метод расчета переходных процессов	109
6.4. Расчет переходных процессов в цепях с одним накопителем энергии	111
6.5. Переходные процессы в цепи с последовательным соединением элементов R, L, C	115
6.6. Операторный метод расчета переходных процессов	119

6.7. Операторные уравнения и схемы замещения элементов R, L, C	120
6.8. Законы Кирхгофа в операторной форме	123
6.9. Аналогии уравнений цепей постоянного тока, синусоидального тока в комплексной форме и переходных процессов, записанных в операторной форме	124
6.10. Переход от операторных токов к оригиналам	126
6.11. Расчет переходных процессов методом наложения	126
6.12. Спектральный метод	132
Вопросы для самопроверки	137
Глава 7. Нелинейные электрические и магнитные цепи при постоянном токе	139
7.1. Нелинейные элементы	139
7.2. Нелинейные электрические цепи при постоянном токе	143
7.3. Аналитический расчет сложных нелинейных электрических цепей	144
7.4. Магнитные цепи при постоянном токе	145
Вопросы для самопроверки	152
Глава 8. Нелинейные цепи при переменном токе	153
8.1. Установившиеся процессы в нелинейных цепях при переменном токе	153
8.2. Алгоритм расчета нелинейных цепей инерционными элементами при воздействии синусоидального напряжения	154
8.3. Метод эквивалентных синусоид и области его применения	158
8.4. Электромагнитные процессы в катушке с ферромагнитным сердечником	161
8.5. Трансформаторы	164
Вопросы для самопроверки	171

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Глава 9. Общие сведения об электромагнитном поле	174
9.1. Векторы электромагнитного поля.	174
9.2. Напряженность и потенциал электрического поля	175
9.2.1. Напряженность электрического поля.	175
9.2.2. Потенциал электрического поля.	178
9.3. Методы расчета электростатических полей	179
9.4. Расчеты симметричных полей	186
9.5. Расчет напряженностей полей наложением	189
9.6. Метод зеркальных отображений	192
9.7. Магнитная индукция и магнитный поток	193

9.7.1. Магнитная индукция	193
9.7.2. Магнитный поток	196
Вопросы для самопроверки	198
Глава 10. Расчеты электрических полей от постоянных токов . . .	199
10.1. Методы расчета электрических полей.	199
10.2. Электрическое поле в проводящей среде.	202
Вопросы для самопроверки	203
Глава 11. Расчеты магнитных полей от постоянных токов	205
11.1. Методы расчета магнитных полей.	205
11.2. Закон полного тока, скалярный магнитный потенциал . . .	208
11.3. Метод зеркальных отображений.	209
11.4. Расчет магнитных полей с помощью закона Био-Савара . .	210
11.5. Силы, моменты и энергия в магнитном поле	211
11.6. Магнитное поле в веществе.	213
Вопросы для самопроверки	214
Глава 12. Расчеты квазистатических электромагнитных полей . .	216
12.1. Условия квазистатичности	216
12.2. ЭДС, наводимые в телах и контурах.	217
12.3. Силы и энергия в электромагнитном поле	219
Вопросы для самопроверки	222
Глава 13. Распространение электромагнитного поля	223
13.1. Уравнения Максвелла в символической форме записи . . .	223
13.2. Уравнения Максвелла в проводящей среде.	224
13.3. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде . . .	225
13.4. Теорема Умова — Пойнтинга	228
13.4.1. Общие сведения об энергии электромагнитного поля	228
13.4.2. Теорема Умова — Пойнтинга для мгновенных значений	230
13.4.3. Передача энергии от генератора к приемнику по коаксиальному кабелю	232
13.5. Поверхностный эффект в электротехнических устройствах.	236
13.5.1. Явление поверхностного эффекта	236
13.5.2. Поверхностный эффект в прямоугольной шине . . .	241
13.5.3. Поверхностный эффект в плоском ферромагнитном листе.	241
13.5.4. Эффект близости для двух параллельных токопроводящих шин	244
Вопросы для самопроверки	248
Список литературы	249

В учебном пособии рассматриваются вопросы, связанные с методами расчета линейных электрических цепей постоянного и синусоидального тока при установившихся режимах их работы. Учебное пособие включает три части и содержит 13 глав, расположенных в последовательности, соответствующей возрастающей сложности.

Первая часть — «Анализ линейных электрических цепей при установившихся режимах работы» — включает четыре главы, в которых рассмотрены электрические цепи постоянного тока: элементы цепей, совместная работа источников и приемников, методы расчета цепей постоянного тока, двухполюсники и четырехполюсники.

Рассмотрение материала в первой части пособия проводится традиционным способом, как это принято в электротехнической литературе. Не все из этих глав обязательны к изучению в полном объеме. В зависимости от специальности некоторые из них можно изучать частично.

Вторая часть — «Несинусоидальные и переходные процессы. Нелинейные цепи» — включает также четыре главы, где рассмотрены несинусоидальные периодические ЭДС, напряжения и токи; переходные процессы в электрических цепях постоянного и переменного тока; нелинейные электрические и магнитные цепи при постоянном токе и нелинейные цепи при переменном токе.

Третья часть — «Электромагнитное поле» — включает пять глав, в которых рассмотрены следующие вопросы: общие сведения об электромагнитном поле; расчеты электрических и магнитных полей от постоянного тока; расчеты квазистатических электромагнитных полей; распространения электромагнитных полей в свободном пространстве и в технических устройствах.

Наиболее сложные разделы, связанные с расчетом нестационарных электромагнитных полей в неоднородных и многосвязных средах, представляющие самостоятельный интерес, опущены при рассмотрении. Желающие могут с ними познакомиться из специальной литературы, приведенной в библиографии.

Содержание учебного пособия полностью отвечает требованиям федеральных образовательных программ по направлениям подготовки бакалавров: 140400 — электроэнергетика и электротехника; 210100 — электроника и нанoeлектроника.

Пособие может быть полезно для магистров и технических работников, встречающихся в своей деятельности с расчетами электрических и магнитных цепей.

Отобранный для пособия учебный материал дает студенту возможность в дальнейшем успешно осваивать специальные электротехнические дисциплины.

Все теоретические выкладки имеют подробные пояснения, что помогает студенту самостоятельно разобраться в их последовательности и оценить полученный результат. Много внимания уделяется в пособии выработке навыков практических расчетов как электрических и магнитных цепей, так и электромагнитного поля. Все главы пособия заканчиваются вопросами для самоконтроля усвояемости учебного материала.

Авторы приносят глубокую благодарность д-ру техн. наук, проф. В.В. Федорову, д-ру техн. наук, проф. М.А. Шакирову за внимательное прочтение рукописи и ряд полезных замечаний, способствовавших ее улучшению.

Авторы будут благодарны всем замечаниям, которые будут высказаны по настоящему пособию, так как это авторское пособие — первый опыт написания пособия для бакалавров. Замечания можно направлять на адрес издательства, которое обязуется передать их авторам.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ
РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ
ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ**

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ И ЕЕ ЭЛЕМЕНТЫ

1.1. Электрическая цепь

Определение цепи. Электрической цепью называется совокупность устройств, предназначенных для передачи, распределения и взаимного преобразования электромагнитной электроэнергии, образующих путь для электрического тока.

Элементы цепи. В соответствии с перечисленными назначениями в электрических цепях на практике выделяют три основные группы элементов:

- а) источники электрической энергии;
- б) приемники электрической энергии;
- в) соединительные линии.

К *источникам электрической энергии* относятся устройства, осуществляющие преобразование различных видов энергии в электрическую энергию. Примерами источников являются электромашинные генераторы, преобразующие механическую энергию в электрическую, гальванические элементы, термоэлектрические генераторы (термопары), служащие для непосредственного преобразования тепловой энергии в электрическую, фотоэлементы и т.д.

Приемники электрической энергии служат для преобразования электрической энергии в различные другие виды энергии. Например, электродвигатели осуществляют преобразование электрической энергии в механическую, в электролитических ваннах электрическая энергия затрачивается на определенные химические преобразования, различного рода электрические нагреватели преобразуют электромагнитную энергию в тепло, а в электрических лампах происходит превращение электрической энергии в свет.

Соединительные линии (линии передачи), представляющие собой электрические провода, предназначены для передачи и распределения электрической энергии.

Схема цепи. Графическое изображение электрической цепи называется ее *схемой*. В схеме различают ветви, узлы и контуры. *Ветвью* назы-

вается неразветвленный участок цепи, в пределах которого протекает один и тот же ток. *Узлом* называется место в цепи, где сходится более двух ветвей. *Контуром* называется замкнутый путь в электрической цепи.

На рисунке 1.1 даны структурные схемы трех электрических цепей и указано количество ветвей, узлов и контуров в каждой из них.

№ цепи \ Наименование	I	II	III
Ветвь	3	5	6
Узел	2	3	4
Контур	3	6	7

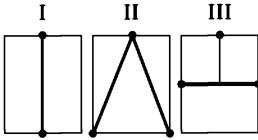


Рис. 1.1. Структурные схемы электрических цепей

Принятые в учебнике графические обозначения основных элементов цепи показаны на рис. 1.2.

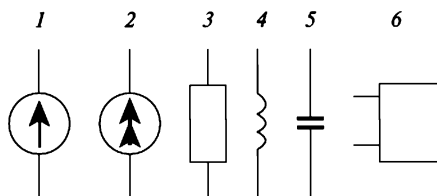


Рис. 1.2. Графические изображения основных элементов цепи:
1 — источник ЭДС; 2 — источник тока; 3 — сопротивление R ;
4 — индуктивность L ; 5 — емкость C ; 6 — двухполюсник (цепь с неизвестной структурой, имеющая два входных зажима)

1.2. Приемники электрической энергии

Вольтамперная характеристика приемника. Основной электрической характеристикой приемника является его вольтамперная характеристика, то есть зависимость напряжения U на приемнике от протекающего по нему тока I . Вольтамперные характеристики различных приемников могут быть весьма разнообразными (рис. 1.3), но в большинстве случаев линии, графически изображающие эти характеристики, проходят через начало координат. Если вольтамперная характеристика приемника представляет прямую линию (линия 1 на рис. 1.3), то такой приемник называют линейным приемником, в отличие от нелинейных приемников, характеристики которых изображаются кривыми линиями (линии 2, 3, 4).

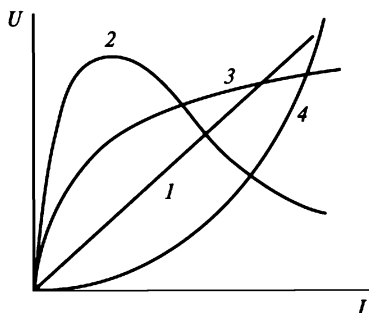


Рис. 1.3. Вольтамперные характеристики приемников

Примерами линейных приемников, рассмотрением которых мы ограничимся в начале курса, являются многие из нагревательных устройств, обмотки электрических машин и аппаратов постоянного тока, всевозможные реостаты и большинство резисторов.

Закон Ома. Вольтамперная характеристика линейных приемников может быть легко выражена аналитически в двух видах:

$$U = RI \quad (1.1)$$

или

$$I = GU \quad (1.2)$$

в зависимости от того, какую из двух величин — ток или напряжение — условимся принимать за аргумент. Коэффициенты пропорциональности R и G в этих выражениях, связанные между собой очевидной зависимостью:

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.3)$$

и называемые соответственно электрическим сопротивлением (R) и электрической проводимостью (G), являются основными параметрами приемника, то есть такими постоянными величинами, которые характеризуют его свойства. Из этих двух величин на практике преимущественно пользуются сопротивлением, прибегая к проводимости лишь при теоретических расчетах.

Приведенные соотношения (1.1) и (1.2), которые в дальнейшем будем называть уравнениями приемника, выражают известный из курса физики закон Ома для участка цепи.

Мощность приемника. Важной величиной, оценивающей интенсивность преобразования электрической энергии в приемнике, то есть

характеризующей режим его работы, является мощность приемника. Строго говоря, следовало бы ввести понятие о двух мощностях приемника: электрической мощности, характеризующей интенсивность поступления к приемнику электрической энергии из электрической цепи, и неэлектрической мощности, оценивающей интенсивность получения от данного приемника полезной неэлектрической энергии. При этом несомненный интерес для практической электротехники имеет и коэффициент полезного действия приемника, определяющий эффективность преобразования энергии в приемнике и равный отношению его неэлектрической мощности к электрической. Однако в теоретическом курсе, где подходим к приемнику только как к элементу электрической цепи, ограничимся рассмотрением лишь его электрической мощности.

Как известно из курса физики, электрическая мощность, которую в дальнейшем для краткости будем называть просто мощностью, равна произведению напряжения на ток:

$$P = UI. \quad (1.4)$$

Используя уравнения приемника, нетрудно получить еще две весьма часто используемых на практике формулы для мощности приемника:

$$P = RI^2 = GU^2, \quad (1.5)$$

из которых вытекает, что мощность приемника пропорциональна квадрату тока или квадрату напряжения в приемнике.

1.3. Источники электрической энергии

Направление действия источника. Источники электрической энергии, называемые также генераторами, характеризуются определенным направлением действия, то есть направлением, в котором каждый источник стремится послать электрический ток в присоединенную к нему цепь. Это направление на электрических схемах указывают стрелкой (рис. 1.2).

Внешняя характеристика источника. Как и в случае приемника, основной электрической характеристикой источника является его вольтамперная характеристика, то есть связь между током I источника и его напряжением U (рис. 1.4).

В отличие от характеристик приемника вольтамперные характеристики источников, называемые на практике внешними характеристиками, не проходят через начало координат, а пересекают оси напряже-

ния и тока в двух точках, отвечающих двум особым режимам работы источника — режиму холостого хода (точка Х.Х. пересечения характеристики с осью напряжения) и режиму короткого замыкания (точка К.З. пересечения характеристики с осью тока). Все остальные режимы источника называются режимами нагрузки.

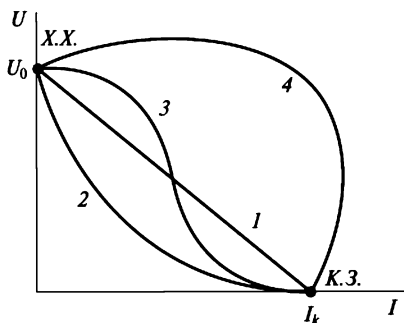


Рис. 1.4. Внешние характеристики источников

Подчеркнем, что для режима холостого хода характерным является отсутствие тока в источнике, а для режима короткого замыкания — равенство нулю напряжения источника. Все величины, относящиеся к режиму холостого хода источника, принято отмечать индексом «0» (нуль), а величины, отвечающие режиму короткого замыкания, — индексом «К».

Напряжение U_0 на источнике в режиме холостого хода, называемое напряжением холостого хода, и ток I_K в режиме короткого замыкания, именуемый током короткого замыкания, являются параметрами источника. В частном случае линейного источника, отличающегося прямолинейной внешней характеристикой (характеристика 1 на рис. 1.5), эти параметры вполне определяют положение внешней характеристики. В случае нелинейных источников, внешние характеристики которых изображаются кривыми линиями (характеристики 2, 3, 4), напряжение U_0 и ток I_K не дают представления о внешней характеристике источника в целом.

Уравнения источника. Остановливаясь в начале курса только на линейных источниках, нетрудно записать их внешние характеристики аналитически в двух видах:

$$U = U_0 - R_{\text{и}} I \quad (1.6)$$

или

$$I = I_K - G_K U \quad (1.7)$$

в зависимости от того, какую из двух величин — ток или напряжение — мы условно принимаем за аргумент. Соответственно этим двум уравнениям, называемым уравнениями источника, в теоретической электротехнике существуют два различных подхода к анализу работы источника в электрической цепи и два условных представления об источнике электрической энергии как об источнике напряжения или об источнике тока.

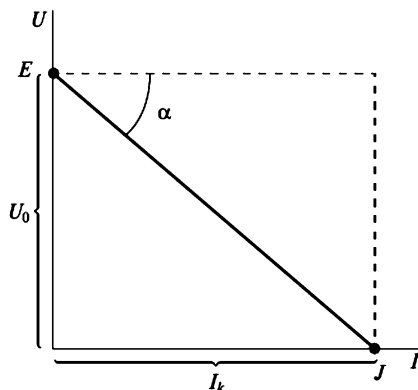


Рис. 1.5. Внешняя характеристика источника напряжения

Источник напряжения. Представление об источнике напряжения связано с уравнением (1.5), которое обычно записывают, заменяя напряжение U_0 холостого хода равной ему величиной E , называемой электродвижущей силой (ЭДС) источника:

$$U = E - R_{\text{и}} I. \quad (1.9)$$

При этом вводят понятие о направлении ЭДС, принимая его совпадающим с направлением действия источника.

В приведенном уравнении, получившем название уравнения источника напряжения, коэффициент $R_{\text{и}}$, определяемый крутизной наклона характеристики источника к оси тока ($R_{\text{и}} = k \operatorname{tg} \alpha$, рис. 1.5) и имеющий размерность сопротивления, называется внутренним сопротивлением источника.

Источник с внутренним сопротивлением $R_{\text{и}} = 0$ получил название идеального источника напряжения, или источника ЭДС. Очевидно, что напряжение идеального источника напряжения не зависит от тока нагрузки источника и всегда остается постоянным, равным его ЭДС. Следует иметь в виду, что условие $R_{\text{и}} = 0$ практически недостижимо, и поэтому для реальных линейных источников характерно снижение

напряжения по сравнению с ЭДС по мере увеличения нагрузки на величину.

Из уравнения (1.8) вытекает, в частности, уже упомянутое положение, что в режиме холостого хода ($I = 0$) напряжение на источнике равно его электродвижущей силе:

$$U_0 = E. \quad (1.9)$$

В режиме короткого замыкания ($U = 0$) уравнение источника напряжения принимает вид:

$$0 = E - R_{\text{и}} I_K,$$

откуда следует, что ток короткого замыкания

$$I_K = \frac{E}{R_{\text{и}}} \quad (1.11)$$

равен отношению ЭДС к внутреннему сопротивлению. Уравнению источника напряжения соответствует эквивалентная схема источника напряжения (рис. 1.6), в которой внутреннее сопротивление приписывают отдельному элементу $R_{\text{и}}$ (резистору), а электродвижущую силу — идеальному источнику E (без внутреннего сопротивления).

Источник тока. Представление об источнике тока связывают с уравнением (1.7), которое чаще записывают, заменяя ток I_K короткого замыкания равной ему величиной J , называемой исходным током источника:

$$I = J - G_{\text{и}} U. \quad (1.12)$$

Направление исходного тока, так же как и направление ЭДС, принимают совпадающим с направлением действия источника.

В приведенном уравнении, получившем название уравнения источника тока, коэффициент $G_{\text{и}}$, имеющий размерность проводимости, называется внутренней проводимостью источника.

Применяя уравнение источника тока к режиму холостого хода ($I = 0$), получим

$$0 = J - G_{\text{и}} U_0,$$

откуда напряжение холостого хода можно представить в виде

$$U_0 = \frac{J}{G_{\text{и}}}, \quad (1.13)$$

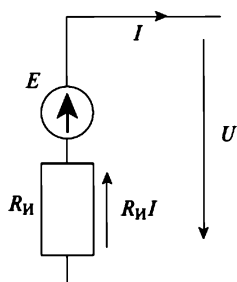


Рис. 1.6. Источник ЭДС

то есть как отношение исходного тока к внутренней проводимости.

Для режима короткого замыкания ($U = 0$) будем иметь

$$I_K = J. \quad (1.14)$$

Следовательно, как было указано, ток короткого замыкания равен исходному току источника.

Источник тока можно представить в виде эквивалентной схемы источника тока, показанной на рис. 1.7, в которой внутренняя проводимость приписана отдельному элементу (резистору) $G_{\text{и}}$. При этом источник J , внутренняя проводимость которого теперь предполагается равной нулю, называют идеальным источником тока. Характерным свойством такого идеального источника является полная независимость его тока, равного исходному току, от режима работы источника. Иначе говоря, внешняя характеристика идеального источника тока изображается прямой, параллельной оси напряжения.

Преобразование источников. Рассмотренные две эквивалентные схемы источников энергии (рис. 1.6 и 1.7) являются условными схемами, удовлетворяющими лишь внешней характеристике источника и в большинстве случаев не раскрывающими сложные внутренние физические процессы преобразования энергии внутри источника. Сопоставляя выражения (1.9) и (1.13) для напряжения холостого хода, а также выражения (1.11) и (1.14) для тока короткого замыкания, приходим к важным связям:

$$E = \frac{J}{G_{\text{и}}} \quad \text{и} \quad J = \frac{E}{R_{\text{и}}}, \quad (1.15)$$

откуда вытекают простые соотношения:

$$R_{\text{и}} = \frac{1}{G_{\text{и}}} \quad \text{и} \quad G_{\text{и}} = \frac{1}{R_{\text{и}}}. \quad (1.16)$$

Последние четыре формулы позволяют перейти от параметров E и $R_{\text{и}}$, которыми описывается источник напряжения, к параметрам J и $G_{\text{и}}$ источника, тока, или наоборот.

Мощность источника. Для оценки интенсивности преобразования в источнике того или иного вида энергии в электрическую энергию используют понятие о его мощности. Как и в случае приемника, следовало бы говорить о двух мощностях источника: неэлектрической мощности, характеризующей интенсивность подвода к источнику пре-

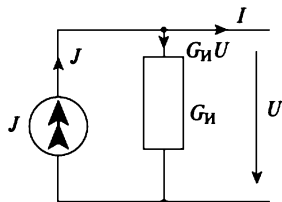


Рис. 1.7. Источник тока

образуемой неэлектрической энергии, и электрической мощности, оценивающей процесс получения от источника электрической энергии и ее поступления в электрическую цепь. Отношение этих величин, являющееся коэффициентом полезного действия источника, определяет эффективность осуществляемого в нем преобразования энергии. Однако эти понятия, играющие исключительно важную роль в практической электротехнике, не представляют интереса в теории электрических цепей, и поэтому здесь обратим внимание лишь на электрическую мощность источника, равную произведению его напряжения на ток:

$$P = UI. \quad (1.17)$$

Характерно, что электрическая мощность источника, которую в дальнейшем будем называть просто мощностью источника, обращается в нуль как в режиме холостого хода, когда ток источника равен нулю, так и в режиме короткого замыкания, когда его напряжение падает до нуля.

1.4. Законы электрических цепей

Направления тока и напряжения. Для расчета электрических цепей необходимо принять направления для токов, напряжений и ЭДС. Эти направления указывают на схемах стрелками (рис. 1.8).

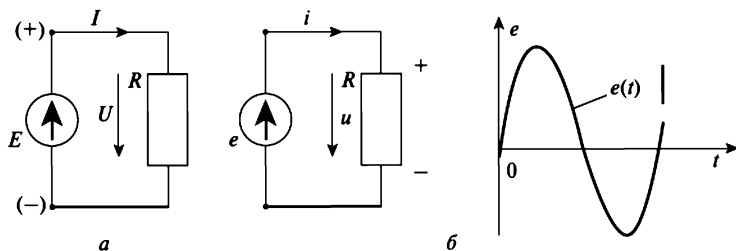


Рис. 1.8. Выбор направлений токов, напряжений и ЭДС

В цепях постоянного тока направление действия ЭДС источника принято указывать от отрицательного потенциала к положительному потенциалу.

За направление тока принято направление движения положительных зарядов, т.е. стрелка у тока направлена от большего потенциала к меньшему потенциалу. Направление напряжения в приемнике всегда указывают в ту же сторону, что и направление тока.

В цепях синусоидального тока (рис. 1.8, б) принято обозначать направления ЭДС, тока и напряжения, используя положительный полупериод тока, при котором ток не изменяет своего направления. При этом картина этих направлений получается аналогичной с цепью постоянного тока.

В тех случаях, когда хотят подчеркнуть различие потенциалов двух точек, прибегают к их разметке знаками «+» и «-», причем знак «+» ставят у точки с более высоким потенциалом, а знак «-» — у точки с более низким потенциалом (см. разметку выводов приемника на рис. 1.8).

Потенциалы всех точек верхнего на рис. 1.8 провода, соединяющего источник и приемник, будут одинаковыми (сопротивлением соединительных проводов пренебрегаем). Не будут отличаться и потенциалы различных точек нижнего провода. Поэтому верхний вывод источника, как и верхний вывод приемника, будет иметь более высокий потенциал по сравнению с нижним выводом (см. разметку выводов источника на рис. 1.8). Следовательно, напряжение на источнике (стрелка справа от него) окажется направленным против направления действия источника и навстречу тока в нем.

Закон Ома для замкнутой цепи. Анализ работы цепи при непосредственном соединении линейных источника и приемника можно провести, пользуясь аналитическими выражениями их характеристик, например в форме

$$U = E - R_{\text{и}} I \quad \text{и} \quad U = RI.$$

Совместно решая эти уравнения, то есть удовлетворяя упомянутому выше условию равенства напряжений и токов источника и приемника, нетрудно, приравняв правые части приведенных уравнений, получить выражение для тока в цепи

$$I = \frac{E}{R + R_{\text{и}}}, \quad (1.18)$$

знакомое из курса физики под названием закона Ома для замкнутой цепи.

Законы Кирхгофа. Все методы расчета электрических цепей в конечном счете основываются на двух законах Кирхгофа, которые нами фактически уже использовали при анализе групповых соединений приемников и источников.

Первый закон Кирхгофа гласит, что для любого узла электрической цепи алгебраическая сумма токов в расходящихся из узла ветвях равна нулю

$$\sum_k I_k = 0, \quad (1.19)$$

причем токи, утекающие от узла, в этой алгебраической сумме принято считать положительными, а токи, притекающие к узлу, — отрицательными. Физически это означает, что сумма токов, притекающих к данному узлу электрической цепи, должна равняться сумме токов, утекающих от этого узла.

Второй закон Кирхгофа утверждает, что в любом контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений входящих в контур элементов равна нулю

$$\sum_k U_k = 0, \quad (1.20)$$

причем напряжения, действующие в контуре в одном направлении, принимают в алгебраической сумме с положительным знаком, а действующие в противоположном направлении — с отрицательным. Физически это означает, что сумма напряжений, действующих на элементах данного контура электрической цепи в одном направлении, должна равняться сумме напряжений, действующих в контуре в противоположном направлении.

Баланс мощностей. Для любой, сколько угодно сложной цепи постоянного тока, можно составить энергетический баланс, вытекающий непосредственно из закона сохранения энергии: *алгебраическая сумма всех мощностей источников энергии равна сумме всех мощностей приемников энергии*:

$$\sum_k^K E_k I_k = \sum_{n=1}^N I_n^2 R_n. \quad (1.21)$$

В этой формуле K — число источников энергии цепи; N — число приемников энергии цепи.

Во всех приемниках энергии токи и напряжения имеют одно и то же направление. Поэтому правая часть уравнения (1.21) является арифметической суммой мощностей всех приемников цепи. Что касается левой части этого уравнения, то в некоторых ветвях сложной цепи ток ветви может оказаться направленным противоположно действию ЭДС источника энергии. Тогда произведение EI получается отрицательным. Физически это означает, что при таком режиме работы рассматриваемый источник не генерирует энергию, а потребляет ее (например, аккумулятор при его зарядке).

Согласование приемника с источником. Выше было показано, что максимальная мощность в источнике достигается в режиме, когда ток равен половине тока короткого замыкания:

$$I = \frac{I_K}{2} = \frac{E}{2R_{\text{и}}}.$$

Приравняв этой величине предыдущее выражение для тока

$$\frac{E}{R + R_{\text{и}}} = \frac{E}{2R_{\text{и}}},$$

из полученного уравнения нетрудно определить оптимальное сопротивление приемника, при котором мощность заданного источника получит наибольшее значение. Очевидно, это сопротивление должно удовлетворять условию

$$R + R_{\text{и}} = 2R_{\text{и}} \quad \text{или} \quad R = R_{\text{и}}, \quad (1.22)$$

т.е. наибольшую мощность источник будет передавать приемнику, когда сопротивление последнего равно внутреннему сопротивлению источника.

Процесс подбора сопротивления приемника, удовлетворяющего этому условию, называется согласованием приемника с источником. Напомним, что к согласованию приемника с источником прибегают лишь в маломощных цепях, не стремясь к нему в энергетических цепях из-за низкого КПД источника в этом режиме.

1.5. Групповое соединение приемников

О групповом соединении. В практике мы часто встречаемся со случаями, когда от одного источника питается группа нескольких соединенных между собой приемников. Из большого разнообразия возможных способов группового соединения приемников остановимся в первую очередь на так называемых последовательном и параллельном соединениях.

Последовательное соединение. При последовательном соединении по всем приемникам протекает один и тот же ток (рис. 1.9, а), напряжение U на всей группе приемников равно сумме напряжений на отдельных ее элементах:

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

Если представить эту группу в виде одного эквивалентного приемника (рис. 1.9, б), которым можно заменить всю группу без нарушения режима цепи в остальной ее части, то его сопротивление, называемое эквивалентным сопротивлением, должно равняться:

$$R = \frac{U}{I},$$

где I — ток в группе приемников.

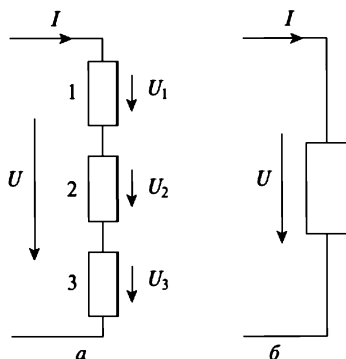


Рис. 1.9. Последовательное соединение приемников

Подставляя в последнее выражение значение суммарного напряжения U из предыдущего уравнения, получим:

$$R = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{I}$$

или

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \quad (1.23)$$

Таким образом, эквивалентное сопротивление группы последовательно соединенных приемников равно сумме сопротивлений отдельных приемников этой группы.

В частном случае последовательного соединения n приемников с одинаковыми сопротивлениями эквивалентное сопротивление R группы будет в n раз больше сопротивления R' одного приемника:

$$R = nR'. \quad (1.24)$$

Параллельное соединение. При параллельном соединении приемников, отличающемся тем, что на всех приемниках действует одно и то же напряжение (рис. 1.10), ток всей группы равен сумме токов отдельных приемников в соответствии с первым законом Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

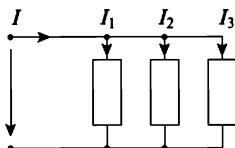


Рис. 1.10. Параллельное соединение приемников

Заменяя группу одним эквивалентным приемником и вводя понятие об эквивалентной проводимости G группы, можно написать

$$G = \frac{I}{U},$$

где U — напряжение на группе приемников.

Подставляя в последнее выражение значение суммарного тока I из предыдущего равенства, получим

$$G = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{U},$$

откуда

$$G = G_1 + G_2 + G_3, \quad (1.25)$$

т.е. эквивалентная проводимость группы параллельно соединенных приемников равна сумме проводимостей отдельных приемников этой группы.

В частном случае параллельного соединения n одинаковых приемников эквивалентная проводимость G группы, как видно из соотношения (1.25), будет в n раз больше проводимости G' одного приемника:

$$G = nG' \quad \text{или} \quad R = \frac{R'}{n}, \quad (1.26)$$

т.е. эквивалентное сопротивление R группы будет в n раз меньше сопротивления R' одного приемника.

Смешанное соединение. Следующим по сложности является так называемое смешанное соединение приемников, представляющее сочетание последовательного и параллельного соединения, при котором эквивалентное сопротивление группы в целом может быть найдено по изложенным выше правилам.

1.6. Передача энергии по линии постоянного тока

Влияние линии. Непосредственное соединение источника с приемником встречается на практике сравнительно редко. Обычно эти элементы электрической цепи связаны друг с другом соединительной линией (рис. 1.11, *а*), которая оказывает существенное влияние на режим передачи энергии от источника к приемнику. В частности, на-

пряжение U_2 на приемнике теперь не будет равняться напряжению U_1 на источнике, как это имело место при непосредственном соединении источника и приемника.

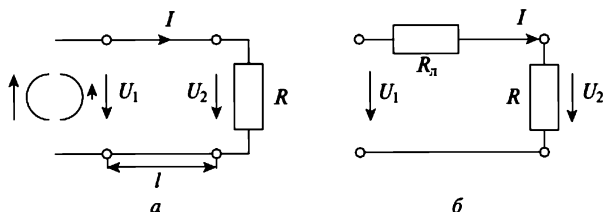


Рис. 1.11. Линия электропередачи

Обращаясь к эквивалентной схеме цепи (рис. 1.11, б), в которой сопротивление обоих проводов линии условно предполагается сосредоточенным в одном эквивалентном резисторе $R_{\text{л}}$, соединенном последовательно с приемником R , напряжение U_2 на приемнике или, иначе говоря, в конце линии можно представить в виде

$$U_2 = U_1 - R_{\text{л}} I.$$

Отсюда следует, что напряжение на приемнике оказывается ниже напряжения U_1 на источнике, то есть в начале линии, и зависит от ее тока I или, как говорят, от тока нагрузки. Поэтому даже при постоянном напряжении источника напряжение на приемнике при изменении нагрузки будет меняться. Поскольку для нормальной работы приемников электрической энергии требуется вполне определенное (номинальное) напряжение, отклонение от которого обычно ведет к резкому ухудшению эксплуатационных показателей приемников, упомянутое явление необходимо учитывать не только в процессе эксплуатации линии передачи, но и при ее проектировании, основной задачей которого является расчет толщины проводов линии.

Расчет длинных линий. При расчете относительно длинных линий ориентируются на потерю напряжения в линии, представляющую разность напряжения U_1 в начале и U_2 в конце линии:

$$\Delta U_{\text{л}} = U_1 - U_2 = R_{\text{л}} I.$$

Выражая сопротивление $R_{\text{л}}$ двух проводов линии через ее длину l , удельное сопротивление ρ материала проводов и площадь s их поперечного сечения:

$$R_{\text{л}} = \rho \frac{2l}{s},$$

для потери напряжения в линии получаем

$$\Delta U_{\text{л}} = \rho \frac{2l}{s} I.$$

Отсюда следует, что при заданных длине линии и токе в ней потеря напряжения будет тем меньше, чем больше площадь поперечного сечения проводов. Так как потеря напряжения в линии с практической точки зрения представляет нежелательное явление, а толщина проводов с экономической точки зрения должна быть по возможности меньшей, площадь поперечного сечения проводов при проектировании линии определяют из последнего соотношения, исходя из предельно допустимого значения потери напряжения:

$$s = \rho \frac{2l}{\Delta U_{\text{л}}} I.$$

Выражая ток приемника через его мощность

$$I = \frac{P_2}{U_2}$$

и вводя в рассмотрение относительную допустимую потерю напряжения

$$\varepsilon = \frac{\Delta U_{\text{л}}}{U_2},$$

нетрудно получить широко применяемую в инженерной практике формулу для расчета площади поперечного сечения проводов линии передачи:

$$s = 2\rho \frac{P_2 l}{\varepsilon U_2^2}, \quad (1.27)$$

из которой следует, что при заданной относительной допустимой потере напряжения площадь поперечного сечения проводов пропорциональна как мощности передачи, так и длине линии и обратно пропорциональна квадрату напряжения, при котором работает линия передачи. Вот почему при передаче больших мощностей на далекие расстояния технически рационально и экономически выгодно повышать напряжение до весьма больших значений. Например, линия передачи от Волжской гидроэлектростанции в Москву работает при напряжении 500 кВ, а линия постоянного тока Волгоград — Донбасс действует при напряжении 800 кВ. Позднее были построены в России линии передачи с напряжением до 1750 кВ.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Дайте определение структурным элементам схемы электрической цепи (ветвь, узел, контур).
2. Сформулируйте первый закон Кирхгофа для цепи постоянного тока.
3. Сформулируйте второй закон Кирхгофа для цепи постоянного тока.
4. Укажите графическое изображение элементов цепи.
5. Что называется источником напряжения?
6. Что называется источником тока?
7. Что является вольтамперной характеристикой источника?
8. Что является вольтамперной характеристикой приемника?
9. Какие элементы электрической цепи называются пассивными?
10. Какие элементы электрической цепи называются активными?
11. Какие уравнения электрической цепи постоянного тока считаются основными?
12. Как оценивается баланс мощностей в цепи постоянного тока?
13. Как определяются токи и напряжения элементов цепи постоянного тока с последовательным, параллельным и смешанным соединением приемников?
14. Как влияет длина линии электропередачи на эффективность передачи электроэнергии?
15. Как влияет величина напряжения на коэффициент полезного действия линии электропередачи?

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2.1. Основные понятия и определения

Задачи расчета цепей. Под расчетом электрических цепей в общем случае понимают весьма обширный круг задач, которые по форме постановки можно разделить на три группы: анализ цепей, расчет характеристик цепей, синтез цепей.

Анализ цепей включает задачи, связанные с определением режима в цепи, то есть с расчетом токов, напряжений и мощностей в различных ее участках при условии, что схема цепи и характеристики всех ее элементов заданы. Простейшим примером задачи анализа электрической цепи может служить расчет тока в лампе накаливания с заданным сопротивлением при ее питании от источника с известными ЭДС и внутренним сопротивлением.

К расчету *характеристик цепей* относится группа задач, в которых при данной схеме цепи и требуемом режиме ее работы определяют необходимые характеристики или параметры отдельных элементов цепи, например рассчитывается сопротивление реостата, включаемого последовательно с лампой накаливания для обеспечения ее нормального горения при питании от источника с напряжением, превышающим номинальное напряжение лампы.

Синтез цепей представляет задачу определения схемы цепи, которая может обеспечить в заданных элементах требуемый режим их работы при питании цепи от заданных источников энергии. Упрощенным примером синтеза цепи является поиск способа нормального питания лампы накаливания от источника с напряжением, превышающим ее номинальное напряжение.

Задачи синтеза в общем случае являются наиболее сложными из всех задач расчета цепей и в настоящем курсе не рассматриваются. Задачи, связанные с расчетом характеристик цепей, в большинстве случаев теоретически не имеют определенных решений и для получения однозначности ответа требуют введения дополнительных условий технико-экономического характера. Это обстоятельство также при-

водит к необходимости отказаться от их рассмотрения в курсе теоретических основ электротехники, за исключением отдельных частных случаев, где окончательное решение подобных задач возможно на базе методов, разработанных для анализа цепей. Поэтому в дальнейшем под расчетом цепей в основном будем понимать лишь задачи их анализа, которые всегда имеют определенное решение на базе только чисто теоретических предпосылок. Наряду с общими задачами анализа цепей, т.е. определением режима во всей заданной цепи, мы будем встречаться с практически важными частными задачами, в которых при заданном режиме в одном элементе цепи требуется определить режим в ряде других ее элементов.

Классификация цепей. В зависимости от вида характеристик, входящих в цепь элементов (источников и приемников), электрические цепи разделяют на линейные и нелинейные цепи. Под линейными цепями понимают цепи, включающие только линейные элементы. Цепи, содержащие нелинейные элементы, называют нелинейными цепями. При этом достаточно присутствия в цепи хотя бы одного нелинейного элемента, чтобы вся цепь в целом оказалась нелинейной. В данной теме остановимся на задачах расчета только линейных электрических цепей.

По конфигурации электрические цепи подразделяются на неразветвленные и разветвленные. В неразветвленной цепи, являющейся простейшим примером электрических цепей, все элементы соединены последовательно в один замкнутый контур, во всех участках которого протекает один и тот же ток. Таким образом, неразветвленная цепь состоит из одной ветви. Все остальные цепи, содержащие несколько ветвей, по которым могут протекать разные токи, относятся к разветвленным цепям.

В теоретической электротехнике электрические цепи принято делить также на простые и сложные. К простым цепям относят такие цепи, направления всех токов в которых не зависят от параметров входящих в них элементов и поэтому могут быть установлены только по направлению действия источников этих цепей, не прибегая к числовому расчету последних. Все другие цепи, в которых направления хотя бы части токов зависят от параметров тех или иных элементов и поэтому не могут быть установлены без числового расчета, составляют группу сложных цепей.

Подчеркнем, что деление цепей на простые и сложные не связано с их громоздкостью. Разветвленная цепь, состоящая из десятков ветвей и сотен приемников, может оказаться простой цепью, в то время как весьма простая на вид цепь, содержащая два источника, работа-

ющих параллельно на один общий приемник, должна быть отнесена к сложным цепям.

Принадлежность данной цепи к группе простых или сложных цепей определяет специфику приемов ее расчета.

2.2. Расчет простых цепей

К ним относятся цепи с последовательным, параллельным и смешанным соединением сопротивлений. Их расчет осуществляется с помощью закона Ома и законов Кирхгофа:

а) *цепь с последовательным соединением сопротивлений* (рис. 2.1, а).

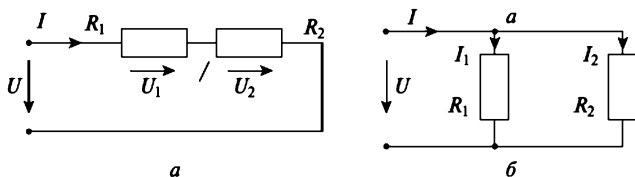


Рис. 2.1. Схемы простых цепей

Эта неразветвленная одноконтурная цепь, по которой протекает один и тот же ток I во всех ее сопротивлениях. При этом на каждом из них возникает напряжение, определяемое законом Ома. К такой цепи применяем второй закон Кирхгофа. Выбрав (произвольно) направление обхода контура по часовой стрелке, получаем

$$U_1 + U_2 - U = 0 \quad \text{или} \quad U_1 + U_2 = U, \quad (2.1)$$

где $U_1 = IR_1$; $U_2 = IR_2$.

Тогда

$$U = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) = IR_3,$$

где

$$R_3 = R_1 + R_2. \quad (2.2)$$

Таким образом, в последовательной цепи постоянного тока общее напряжение цепи U складывается из суммы напряжений всех ее элементов, а общее сопротивление цепи R_3 складывается из суммы всех ее сопротивлений;

б) *цепь с параллельным соединением сопротивлений* (рис. 2.1, б).

В такой цепи напряжение одинаково на всех ее сопротивлени-

ях, но токи в них в общем случае различны. Применяем к такой цепи первый закон Кирхгофа для узла «а», получаем

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

или

$$I = I_1 + I_2, \quad (2.3)$$

где в соответствии с законом Ома $I_1 = U/R_1$; $I_2 = U/R_2$.

Токи I_1 и I_2 можно выразить и через проводимость G $I_1 = UG_1$, где $G_1 = 1/R_1$; $I_2 = UG_2$, где $G_2 = 1/R_2$.

Тогда $I = UG_1 + UG_2 = U(G_1 + G_2) = UG_3$, где

$$G_3 = G_1 + G_2 = 1/R_3. \quad (2.4)$$

Таким образом, в параллельной цепи постоянного тока общий ток I есть сумма токов, а общая проводимость G_3 цепи есть сумма проводимостей всех ее ветвей. Общее сопротивление цепи из двух параллельных ветвей определяется формулой (2.4)

$$1/R_3 = 1/R_1 + 1/R_2,$$

откуда получаем

$$R_3 = \frac{1}{G_3} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.5)$$

2.3. Общий метод расчета сложных цепей

Идея метода. Общий метод расчета электрических цепей, называемый иначе методом токов в ветвях, основан на одновременном использовании двух законов Кирхгофа для составления системы алгебраических уравнений, в которых в качестве неизвестных входят искомые токи различных ветвей цепи. Решая такую систему, находят величины и направления токов в ветвях.

Для ее расчета, т.е. для определения токов во всех ее ветвях, необходимо составить систему уравнений по законам Кирхгофа. Общее число уравнений в системе должно соответствовать числу неизвестных токов, т.е. числу ветвей. Для нашей цепи (рис. 2.2) это пять неизвестных токов. При этом:

по первому закону Кирхгофа составляется число уравнений, на единицу меньшее числа узлов цепи, поскольку уравнение для последнего

узла есть следствие всех предыдущих уравнений и не дает ничего нового для расчета. В нашем примере надо составить два уравнения, так как в цепи три узла;

по второму закону Кирхгофа составляются все недостающие уравнения для любых произвольно выбранных независимых контуров цепи. В нашем примере надо составить три уравнения ($6 - 2 = 4$).

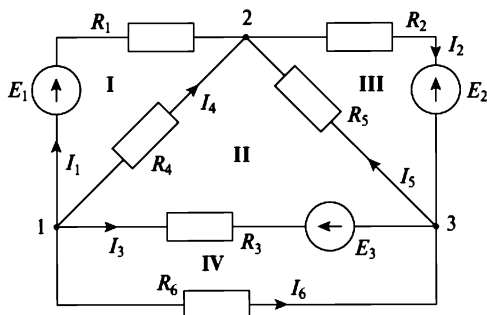


Рис. 2.2. Схема для иллюстрации общего метода расчета

Предварительно следует задаться (произвольно) направлением токов во всех ветвях цепи и направлением обхода выбранных контуров. При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа токи, подходящие к узлу, будем считать положительными и брать со знаком (+), а токи, отходящие от узла — отрицательными и брать со знаком (–). При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа ЭДС и токи, совпадающие с выбранным направлением обхода контура, будем брать со знаком (+), а несовпадающие — со знаком (–).

Приняв для нашей цепи направление токов в ветвях, как показано на рис. 2.2, и направление обхода по часовой стрелке четырех выбранных контуров, составляем следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{узел 1} & \left\{ \begin{array}{l} -I_1 - I_4 - I_3 = 0, \\ I_1 + I_4 + I_5 - I_2 = 0, \end{array} \right. \\ \text{узел 2} & \\ \text{контур I} & \left\{ \begin{array}{l} I_1 R_1 - I_4 R_4 = E_1, \\ I_4 R_4 - I_5 R_5 - I_3 R_3 = E_3, \end{array} \right. \\ \text{контур II} & \\ \text{контур III} & \left\{ \begin{array}{l} I_2 R_2 + I_5 R_5 = -E_2, \\ I_3 R_3 - I_6 R_6 = -E_3. \end{array} \right. \\ \text{контур IV} & \end{array}$$

Решив полученную систему уравнений, определим токи во всех пяти ветвях этой цепи.

2.4. Метод контурных токов

Контурные токи. В целях упрощения расчета сложных цепей Максвеллом было предложено вместо действительных токов в ветвях ввести фиктивные, так называемые контурные токи, искусственно наделенные свойством не разветвляться в цепи, а замыкаться в ней по определенным контурам.

Если замкнуть контурные токи по независимым контурам цепи, выбрав, таким образом, их число равным числу независимых контуров, то все действительные токи в ветвях однозначно определятся через контурные токи.

Так, например, если в цепи, топологическая схема которой показана на рис. 2.3, выбрать пять контурных токов $I_I, \dots, I_V$, замыкающихся по пяти независимым, в данном случае простейшим контурам $I, \dots, I$ схемы, то действительные токи $I_1, \dots, I_5$ в периферийных ветвях 1, ..., 5 будут равны соответствующим контурным токам, так как по каждой из упомянутых ветвей протекает только один контурный ток. Таким образом, обозначая контурные токи римскими цифрами, можно написать

$$I_1 = I_I, \quad I_2 = I_{II}, \quad I_3 = I_{III}, \quad I_4 = I_{IV}.$$

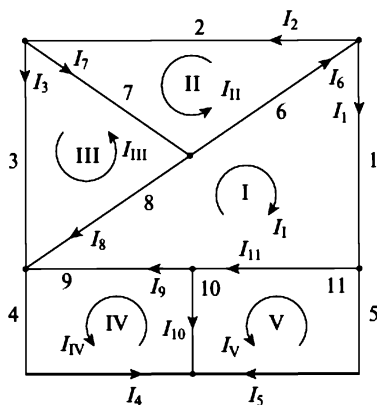


Рис. 2.3. Топологическая схема сложной электрической цепи

Ток I_5 в пятой ветви по величине также будет равен контурному току I_V , однако по формальным соображениям этим токам следует приписать разные знаки:

$$I_5 = -I_V,$$

так как контурный ток I_V направлен в пятой ветви противоположно действительному току I_5 .

Во внутренних ветвях, по каждой из которых протекает два контурных тока, действительные токи определяются алгебраической суммой двух соответствующих контурных токов:

$$\begin{aligned} I_6 &= I_I + I_{II}, & I_7 &= I_{II} - I_{III}, & I_8 &= -I_I - I_{III}, \\ I_9 &= I_I + I_{IV}, & I_{10} &= -I_{IV} + I_V, & I_{11} &= I_I + I_V. \end{aligned}$$

При этом знак перед каждым контурным током в алгебраической сумме выбирается из сопоставлений направлений контурного и действительного токов в данной ветви: при одинаковых их направлениях перед контурным током ставится знак «+», а при противоположных — «-».

Введение вместо действительных токов в ветвях фиктивных контурных токов, число которых, как было указано, должно равняться числу независимых контуров, существенно сокращает число неизвестных и, следовательно, число уравнений в системе, которую необходимо решить для определения токов. Так, например, в рассмотренной цепи (рис. 2.3), содержащей 11 ветвей, будет пять контурных токов, требующих для их определения решения системы лишь из пяти уравнений вместо 11, с которыми пришлось бы иметь дело в методе токов в ветвях.

Это обстоятельство привело к тому, что метод контурных токов нашел широкое применение на практике и является одним из основных методов расчета сложных цепей.

Методика составления уравнений. Для составления уравнений по методу контурных токов используют только второй закон Кирхгофа, так как контурные токи не разветвляются, и применение к ним первого закона Кирхгофа бессмысленно.

Приступая к расчету цепи, прежде всего необходимо выбрать систему независимых контуров, руководствуясь правилами, применяемыми в методе токов в ветвях, и пометить на схеме направления контурных токов, замыкающихся по выбранным контурам. При этом следует применять совпадающую нумерацию независимых контуров и соответствующих им контурных токов. Во избежание ошибок при записи связей между контурными токами и действительными токами последним также необходимо приписать определенные направления в каждой ветви. Напомним, что выбор направления обеих систем токов произволен и может повлиять только на знак ответа для того или иного тока.

Техника составления левых частей уравнений по второму закону Кирхгофа при расчете цепей по методу контурных токов несколько отличается от таковой, принятой в методе токов в ветвях.

Условимся сумму сопротивлений всех элементов, входящих в какой-либо, например k -ый, контур, называть собственным сопротивлением контура и обозначать символом R_{kk} с двумя одинаковыми индексами, соответствующими номеру этого контура. Сумму сопротивлений всех элементов, входящих в ветвь, являющуюся общей для двух соседних, например k -го и m -го контуров, будем называть общим сопротивлением этих контуров и обозначать символом R_{km} с двумя разными индексами, отражающими номера соседних контуров.

Очевидно, что порядок расстановки индексов у общего сопротивления не имеет значения. Иначе говоря,

$$R_{km} = R_{mk},$$

т.е. два общих сопротивления, отличающихся друг от друга порядком расстановки индексов, равны друг другу.

В связи с тем, что каждый контурный ток протекает по всем ветвям своего контура, при составлении суммы напряжений вдоль какого-либо, например k -го, контура целесообразно умножением контурного тока I_k на собственное сопротивление R_{kk} этого контура одним членом вида $R_{kk}I_k$ сразу учесть все напряжения, определяемые в контуре его собственным контурным током. Знак члена $R_{kk}I_k$, вообще говоря, будет зависеть от направлений контурного тока и обхода контура, но так как в методе контурных токов этот обход всегда выполняют в направлении контурного тока, то упомянутый член может быть только положительным.

Естественно, что таким членом не будут исчерпаны все напряжения, возникающие на элементах k -го контура, поскольку по некоторым из них наряду с k -ым контурным током протекают еще соседние контурные токи, создающие на этих элементах дополнительные напряжения. Для учета последних левую часть уравнения для k -го контура необходимо дополнить слагаемыми вида $R_{km}I_m$, где I_m — ток соседнего m -го контура, а R_{km} — общее сопротивление k -го и m -го контуров. Знаки последних слагаемых зависят от того, как выбрано направление обхода по данному контуру и какими приняты направления соседних контурных токов, и могут оказаться как положительными, так и отрицательными. Последнее обстоятельство удобнее пояснить на примере.

2.5. Метод узловых потенциалов

Метод основан на положении о том, что токи во всех ветвях сложной цепи можно рассчитать, если известны напряжения на всех ее ветвях.

На рисунке 2.4, *а* представлена схема некоторой сложной цепи, имеющей шесть ветвей. Рассмотрим одну из ветвей этой цепи, расположенную между любыми двумя узлами «*k*» и «*m*» (рис. 2.4, *б*). Применяв второй закон Кирхгофа и учитывая, что $R_{km} = 1/R_{km}$, получаем $I_{km}R_{km} - U_{km} = E_{km}$ или

$$R_{km} = (R_{km} + U_{km})/R_{km} = R_{km}(E_{km} + U_{km}). \quad (2.6)$$

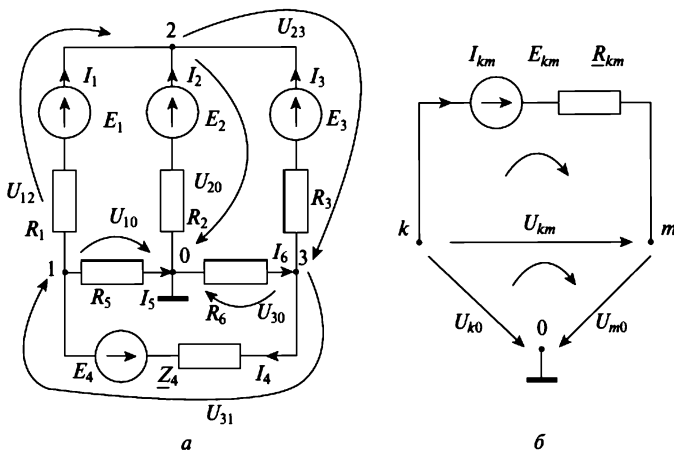


Рис. 2.4. Схема, рассчитываемая методом узловых напряжений

В этой формуле ток, напряжение и ЭДС обозначены двойными индексами. При этом все они направлены от узла «*k*» к узлу «*m*». Если реальные токи, напряжения и ЭДС окажутся направлены в противоположную сторону, то они войдут в уравнение (2.6) со знаком «—». Здесь E_{km} и R_{km} — известные из условия задачи величины. Если, кроме того, найти напряжение U_{km} , то ток I_{km} в этой ветви также будет найден.

В нашей схеме шесть ветвей и, следовательно, шесть неизвестных напряжений. Для их нахождения необходимо предварительно найти только те из них, которые действуют между каждым из узлов цепи и опорным узлом «О» (выбираются произвольно). Они называются *узловыми напряжениями*.

Для схемы рис. 2.4, *а* узловыми являются напряжения U_{10} , U_{20} и U_{30} . Все они направлены к опорному узлу «0». Если узловые напряжения известны, то напряжения между всеми остальными узлами легко находятся в соответствии со вторым законом Кирхгофа (рис. 2.4, *б*) по формуле

$$U_{km} = U_{k0} - U_{m0}. \quad (2.7)$$

В нашем примере $U_{12} = U_{10} - U_{20}$; $U_{31} = U_{30} - U_{10}$; $U_{23} = U_{20} - U_{30}$.

Если электрический потенциал опорного узла принять равным 0, то тогда узловые напряжения U_{10} , U_{20} и U_{30} будут являться также электрическими потенциалами узлов 1, 2 и 3.

Очевидно, что узловых напряжений меньше, чем токов ветвей. Поэтому данный метод позволяет существенно понизить порядок системы уравнений по сравнению с непосредственным применением первого и второго законов Кирхгофа. Рассмотрим составление системы уравнений по методу узловых напряжений.

Согласно первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма токов, подходящих к любому узлу цепи, равна нулю. Каждый из этих токов определяется формулой (2.6). Тогда для каждого узла цепи имеем

$$\sum I_{km} = \sum E_{km} G_{km} + \sum G_{km} U_{km} = 0 \quad \text{или} \quad \sum G_{km} (U_{k0} - U_{m0}) = - \sum E_{km} G_{km}.$$

Здесь $\sum E_{km} G_{km}$ — сумма произведений ЭДС на проводимость всех ветвей, подходящих к рассматриваемому узлу цепи. Эти величины известны из условий задачи; $\sum G_{km} (U_{k0} - U_{m0})$ — сумма произведений проводимости ветвей на напряжения ветвей, где G_{km} — известные из условий задачи величины, а U_{k0} и U_{m0} — неизвестные узловые напряжения.

Опуская ряд несложных промежуточных преобразований, получаем в результате систему уравнений относительно неизвестных узловых напряжений цепи в следующем виде:

$$\begin{cases} U_{10} G_{11} + U_{20} G_{12} + U_{30} G_{13} = J_{11} \\ U_{10} G_{21} + U_{20} G_{22} + U_{30} G_{23} = J_{22} \\ U_{10} G_{31} + U_{20} G_{32} + U_{30} G_{33} = J_{33}, \end{cases} \quad (2.8)$$

где U_{10} , U_{20} , U_{30} — неизвестные узловые напряжения; G_{11} , G_{22} , G_{33} — собственные проводимости узлов, т.е. сумма проводимости всех ветвей, подходящих к данному узлу цепи; в уравнения (2.8) они всегда входят со знаком (+); $G_{12} = G_{21}$; $G_{13} = G_{31}$; $G_{23} = G_{32}$ — взаимные проводимости узлов, т.е. сумма проводимости всех ветвей цепи, находящихся между узлами 1—2, 1—3 и 2—3; их численные значения всегда входят в уравнения (2.8) со знаком (—); J_{11} , J_{22} , J_{33} — известные из условий задачи величины, представляющие собой сумму произведений ЭДС на проводимость ($\sum ER$) всех ветвей, подходящих к данному узлу. Если при этом E направлена к узлу, то произведение ER этой ветви берется со знаком (+), а если E направлена от узла — со знаком (—).

Произведение ER каждой ветви можно рассматривать как ток эквивалентного источника тока этой ветви.

Решая полученную систему уравнений, находим узловые напряжения U_{10} , U_{20} , U_{30} , затем напряжения на всех ветвях цепи в соответствии с формулой (2.7) и, наконец, токи во всех ее ветвях, используя формулу (2.6).

Расчет двухузловой цепи. Метод узловых потенциалов особенно эффективен при расчете так называемых двухузловых цепей, то есть цепей, содержащих всего два узла, между которыми включены все p ветвей цепи (рис. 2.5).

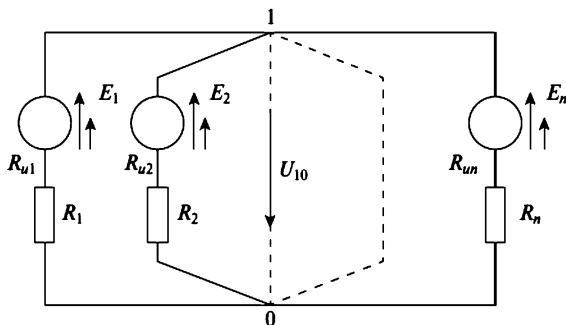


Рис. 2.5. Схема двухузловой электрической цепи

Приняв один из узлов за опорный, приходим к задаче с одним неизвестным, для определения которого достаточно решить одно уравнение. Положив, например, на рис. 2.5 потенциал нижнего узла равным нулю, для потенциала верхнего узла имеем

$$-V_1(G_1 + G_2 + \dots + G_p) = J_1 + J_2 + \dots + J_p,$$

где

$$G_k = \frac{1}{R_k + R_{ик}}, \quad J_k = -\frac{E_k}{R_k + R_{ик}} = -E_k G_k.$$

Отсюда для искомого потенциала, равного напряжению между узлами цепи, получаем удобную расчетную формулу

$$U_{10} = V_1 - V_{10} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + \dots + E_p G_p}{G_1 + G_2 + \dots + G_p}. \quad (2.9)$$

2.6. Метод наложения

Принцип наложения. Известно, что всякий материальный процесс, протекающий в определенных условиях под воздействием несколь-

ких возмущающих сил и описывающийся системой линейных алгебраических уравнений, можно представить как результат наложения нескольких более простых процессов, каждый из которых протекает в тех же условиях под воздействием только одной из возмущающих сил. Докажем это положение, называемое принципом наложения, или суперпозиции, применительно к электрическим процессам в линейных цепях.

Идея расчета цепей по методу наложения. Принцип наложения позволяет при расчете цепей с несколькими источниками расчленить исходную задачу на ряд частичных задач, в каждой из которых предполагаются поочередно действующими лишь по одному из всех источников цепи. Решая каждую из частичных задач, т.е. находя частичные токи, получаем возможность путем их соответствующего суммирования вычислить действительные токи в цепи. Если во всех частичных задачах, число которых должно равняться числу источников в исходной цепи, будем получать упрощение цепи, то решение даже нескольких частичных задач может представить меньшие затруднения, чем расчет исходной сложной цепи. Метод наложения целесообразно применять при небольшом количестве источников (два, три) и преимущественно в тех случаях, когда частичные цепи оказываются простыми цепями.

Следует особо подчеркнуть, что в частичных задачах должны быть полностью сохранены конфигурация и структура цепи, то есть все ее элементы во всех частичных задачах должны быть оставлены на месте в прежнем соединении друг с другом. Это означает, что исключение действия отдельных источников необходимо выполнить не путем полного выключения их из цепи, а подавлением ЭДС источников при сохранении их внутренних сопротивлений. При этом упомянутое выше упрощение частичных схем наступает не за счет сокращения числа элементов цепи, а благодаря уменьшению числа действующих в цепи ЭДС.

Правила наложения токов. Так как направление отдельных частичных токов в той или иной ветви, зависящее от направления действия соответствующих источников, может быть различным, то в процессе их наложения при определении действительного тока в ветви исходной схемы следует вычислить алгебраическую сумму частичных токов, считая положительными те из них, направление которых одинаково с выбранным на исходной схеме направлением действительного тока в данной ветви, и отрицательными — направление которых противоположно направлению действительного тока.

Пример. Рассмотрим задачу о параллельной работе двух источников E_1 и E_2 на общий приемник R через линии передачи $R_{Л1}$ и R_2 . Параметры, указанные на схеме, условимся считать заданными (второй источник принимаем идеальным с $R_{и2} = 0$), а предметом расчета выберем ток I_1 первого источника (рис. 2.6, а).

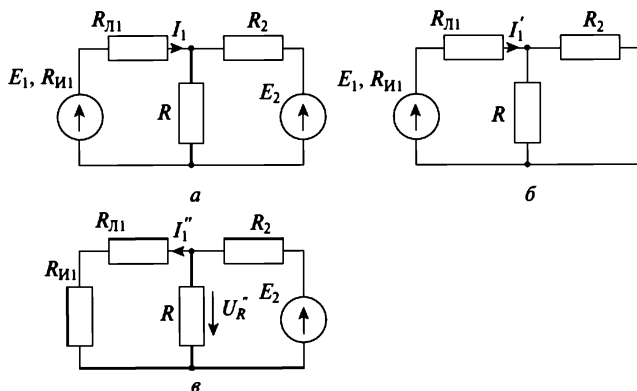


Рис. 2.6. Параллельная работа двух источников

Изображая для наглядности две частичные схемы, соответствующие раздельному действию источников, в первой из них (рис. 2.6, б), где в действии оставлен только первый источник, второй источник замкнем накоротко, так как его внутреннее сопротивление равно нулю. Во второй же частичной схеме (рис. 2.6, в), где сохранено действие второго источника, на месте первого источника должен быть включен резистор с сопротивлением, равным внутреннему сопротивлению $R_{и1}$. Нетрудно видеть, что получившиеся две цепи являются простыми и их расчет не представляет затруднений.

Обозначая для краткости записи сумму сопротивлений $R_{Л1}$ первой линии и внутреннего сопротивления $R_{и1}$ первого источника одной буквой

$$R_1 = R_{Л1} + R_{и1}$$

для частичного тока I'_1 , протекающего по первой ветви под действием первого источника, будем иметь (рис. 2.6, б)

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}} = \frac{E_1 (R_2 + R)}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}.$$

Для определения тока I_1'' в той же ветви под действием второго источника целесообразно предварительно найти ток I_2'' второго источника во второй частичной схеме (рис. 2.6, в)

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_2 R}{R_1 + R}} = \frac{E_2 (R_1 + R)}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2},$$

а затем напряжение U_R'' на приемнике R

$$U_R'' = \frac{R_1 R}{R_1 + R} I_2'' = \frac{E_2 R_1 R}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}.$$

Тогда искомый ток

$$I_1'' = \frac{U_R''}{R_1} = \frac{E_2 R}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}.$$

Выбрав направление действительного тока I_1 в первой ветви так, как показано на рис. 2.6, а, приходим к выводу, что

$$I_1 = I_1' - I_2'' = \frac{E_1 (R_2 + R) - E_2 R}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}.$$

2.7. Метод эквивалентного источника

Метод эквивалентного источника применяется для расчета тока в какой-либо одной выделенной ветви сложной цепи. В его основе лежит *теорема об эквивалентном источнике*, суть которой состоит в следующем: любая сколь угодно сложная электрическая цепь относительно выделенной ветви может быть представлена одним эквивалентным источником ЭДС или одним эквивалентным источником тока.

Рассмотрим здесь метод расчета, основанный на эквивалентном преобразовании сложной цепи в эквивалентный источник ЭДС. На рисунке 2.7, а представлена сложная цепь со многими источниками и многими сопротивлениями в виде активного двухполюсника. Требуется определить ток I в выделенном из этой цепи сопротивлении R .

Представим двухполюсник в виде эквивалентного источника ЭДС с параметрами E_r и R_r (рис. 2.7, б) и получим, что в соответствии со вторым законом Кирхгофа искомый ток цепи

$$I = \frac{E_r}{R_r + R}. \quad (2.10)$$

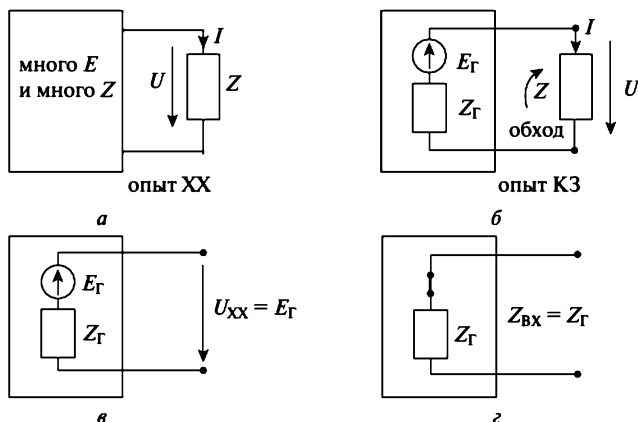


Рис. 2.7. Схема для метода эквивалентного источника ЭДС

Неизвестные величины E_{Γ} и R_{Γ} можно найти из опыта холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ). При проведении опыта ХХ (рис. 2.7, в) ветвь с сопротивлением R размыкается, и на ее зажимах возникает напряжение $U_{ХХ}$, равное ЭДС эквивалентного генератора: $U_{ХХ} = E_{\Gamma}$. При проведении опыта КЗ (рис. 2.7, г) отключаются все ЭДС цепи и заменяются перемычками без сопротивления. Тогда входное сопротивление цепи становится равным сопротивлению эквивалентного генератора: $R_{ВХ} = R_{\Gamma}$.

Вопросы для самопроверки

1. Как осуществляется расчет простых цепей?
2. Как применяется первый закон Кирхгофа к расчету сложных цепей постоянного тока?
3. В каких случаях используется при расчете сложных цепей метод контурных токов?
4. Когда целесообразно использовать метод узловых потенциалов?
5. В чем заключается метод двух узлов?
6. В каких цепях целесообразно использовать метод наложения?
7. В каких случаях используется метод эквивалентного источника?

ОДНОФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

3.1. Основные понятия о синусоидальных процессах

Синусоидальный ток — это периодический ток, изменяющийся во времени по закону синуса. График этого тока представлен на рис. 3.1 в виде кривой, полученной на экране осциллографа.

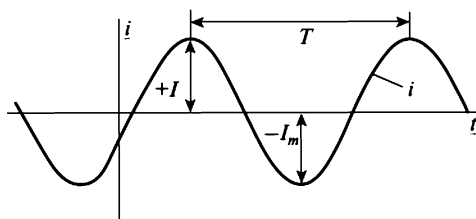


Рис. 3.1. Синусоидальный ток

На этом рисунке ось времени (ось абсцисс) проведена между наибольшим и наименьшим значениями тока. Ось тока (ось ординат) проведена перпендикулярно оси времени. Пересечение ее с осью начала отсчета времени t можно выбирать произвольно.

Значение тока i в любой момент времени t называется *мгновенным значением*. Все значения i выше оси t считаются положительными, а ниже оси — отрицательными. Максимальное значение тока (относительно оси t) называется *амплитудой* и обозначается I_m . Синусоидальный ток изменяется во времени от $+I_m$ до $-I_m$.

Наименьшее время T , по истечении которого значения тока повторяются, называется *периодом тока*. На осциллограмме период наиболее удобно измерять между двумя амплитудами. Число периодов, совершаемых током за одну секунду, называется *частотой тока* f . Частота тока и период тока — величины взаимнообратные. Частота f имеет физическую размерность $1/\text{с}$ и названа «герц» (Гц):

$$f = 1/T, \text{ Гц.} \quad (3.1)$$

При теоретических расчетах часто используют понятие об *угловой (круговой) частоте*. Угловая частота ω связана с частотой f соотношением

$$\omega = 2\pi f, \text{ 1/с.} \quad (3.2)$$

Все сказанное выше о синусоидальном токе справедливо и по отношению к синусоидальному напряжению и синусоидальной ЭДС.

Синусоидальные токи и напряжения выражаются аналитически следующим образом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.3)$$

В этих формулах: i и $u \rightarrow$ *мгновенные значения тока и напряжения*; I_m и U_m — *амплитуды* тока и напряжения; ω — *угловая частота* тока и напряжения; t — *время*; $(\omega t + \psi_i)$ и $(\omega t + \psi_u)$ — *фазы тока и напряжения*, измеряемые в градусах (град) или радианах (рад); ψ_i и ψ_u — *начальные фазы* тока и напряжения — это фазы $(\omega t + \psi_i)$ и $(\omega t + \psi_u)$ при $t = 0$. Их численные значения зависят от выбора момента начала отсчета времени.

Для полного определения синусоидального тока или напряжения необходимо знать три величины: *амплитуду, частоту и начальную фазу*. Если известно приложенное к цепи синусоидальное напряжение, то это значит, что заданы U_m , ω и ψ_u . Следовательно, для определения синусоидального тока этой цепи надо определить только две величины: I_m и ψ_i , так как частота тока ω такая же, как и у приложенного напряжения.

3.2. Векторное изображение синусоидальных токов и напряжений

Существуют два способа графического изображения синусоидальных токов и напряжений: с помощью графиков $i(\omega t)$ и $u(\omega t)$ в декартовых координатах и с помощью вращающихся векторов в полярных координатах.

На рисунке 3.2, а показано изображение тока в виде вектора длиной I_m , вращающегося (как принято в теории цепей) *против часовой стрелки* с постоянной угловой скоростью ω (соответствующей угловой частоте тока) относительно точки 0 полярной системы координат.

Его положение на этом рисунке зафиксировано в момент времени $t = 0$, при котором угол его наклона к полярной оси P составляет величину, равную начальной фазе $+\psi_i$ (положительные начальные фазы откладывают от полярной оси против часовой стрелки, а отрицательные — по часовой).

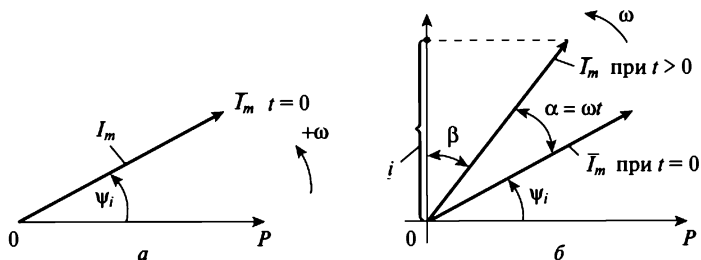


Рис. 3.2. Векторное изображение синусоидального тока

При вращении вектора $\bar{I}_m$ против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω проекция этого вектора на ось, перпендикулярную полярной оси (рис. 3.2, б), совершает синусоидальные колебания во времени. В самом деле, пусть за время t , прошедшее от начала отсчета, вектор $\bar{I}_m$ при своем вращении против часовой стрелки повернулся на угол $\alpha = \omega t$ (рис. 3.2, б). Тогда проекция этого вектора на ось, перпендикулярную полярной оси, составит $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, что является мгновенным значением тока.

3.3. Законы Кирхгофа в векторной форме записи

При расчете цепей можно использовать законы Кирхгофа в векторной форме записи.

Первый закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^K \bar{I}_k = 0. \quad (3.4)$$

Геометрическая сумма векторов всех токов, подходящих к любому узлу цепи, равна нулю.

Второй закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^K \bar{E}_k = \sum_{n=1}^N \bar{U}_n. \quad (3.5)$$

Геометрическая сумма векторов всех ЭДС любого контура цепи равна сумме векторов напряжений на всех участках этого контура.

Фазовые соотношения между синусоидальными токами и напряжениями. Если две или несколько синусоид имеют одинаковые начальные

фазы, то это значит, что они *совпадают по фазе*. На векторной диаграмме такие синусоиды располагаются на одной прямой или параллельно друг другу.

Если две синусоиды имеют неодинаковые начальные фазы, то это значит, что они не совпадают по фазе или, иначе говоря, сдвинуты по фазе.

В электроэнергетике большое значение придается углу сдвига фаз между напряжением и током цепи. Он определяется как разность начальных фаз напряжения и тока и обозначается греческой буквой φ :

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \quad (3.6)$$

3.4. Действующие значения токов и напряжений

В цепях синусоидального тока для измерения действующих значений токов и напряжений используют амперметры и вольтметры.

Понятие о действующем значении тока сложилось исторически при переходе электроэнергетики от использования сетей постоянного тока к сетям переменного синусоидального тока. Новый для того времени переменный ток сравнивали с постоянным током по его способности преобразовывать электромагнитную энергию в тепловую. Условились считать синусоидальный ток эквивалентным (равноценным) в этом смысле постоянному току, если он в сопротивлении R за время T одного периода выделяет такое же количество тепла, что и постоянный ток. При этих условиях количество тепла, выделенного постоянным током, $W_{\text{пост}} = I^2 RT$, а количество тепла, выделенного синусоидальным током, $W_{\text{син}} = \int_0^T i^2 R dt$. Полагая $W_{\text{пост}} = W_{\text{син}}$, находим, что

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt \quad \text{или} \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt}. \quad (3.7)$$

Полученное соотношение определяет величину постоянного тока I , эквивалентного синусоидальному току по тепловому действию. Эта величина называется действующим значением синусоидального тока i . Подставив $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ в формулу (3.7) и произведя интегрирование, получаем

$$I = I_m / \sqrt{2}. \quad (3.8)$$

Таким образом, действующие значения синусоидального тока в $\sqrt{2}$ раз меньше его амплитуды. Аналогичная формула существует и для определения действующего значения синусоидального напряжения:

$$U = U_m / \sqrt{2}. \quad (3.9)$$

В настоящее время действующие значения синусоидального тока и напряжения являются основными расчетными величинами. Поэтому при дальнейшем изложении будем использовать главным образом действующие значения этих величин.

3.5. Понятия об эквивалентных параметрах цепей переменного тока

Эквивалентные сопротивления и проводимости. При изучении приемов расчета цепей переменного тока мы встретились с понятием эквивалентных сопротивлений и эквивалентных проводимостей как параметров всей цепи в целом и научились рассчитывать эти параметры исходя из параметров отдельных элементов в цепи и схемы их соединения между собой.

К тем же понятиям об эквивалентных параметрах цепи переменного тока можно подойти, не касаясь ее внутренней структуры, а интересуясь лишь режимом ее работы на внешних выводах цепи. Действительно, выше подчеркивалось, что сопротивления и проводимости цепи переменного тока не следует рассматривать иначе, чем коэффициенты пропорциональности между различными (полными, активными и реактивными) напряжениями и токами цепи.

При этом наиболее естественными представлялись нам понятия полного сопротивления z и полной проводимости y , поскольку они связывают важнейшие с практической точки зрения величины — действующее напряжение U и ток I в цепи, имеющие к тому же четкий физический смысл:

$$U = zI, \quad I = yU.$$

Именно из этих соотношений и прибегают к формальному понятию эквивалентного полного сопротивления и эквивалентной полной проводимости цепи переменного тока или какого-либо ее участка:

$$z = \frac{U}{I}, \quad y = \frac{I}{U}. \quad (3.10)$$

Таким образом, *эквивалентным полным сопротивлением* цепи переменного тока называют отношение действующего напряжения на ней к действующему току в неразветвленной ее части.

Эквивалентной полной проводимостью цепи переменного тока называют отношение действующего тока в ее неразветвленной части к действующему напряжению на ней.

Эквивалентные активные сопротивление r и проводимость g как параметры цепи переменного тока принято определять из выражений для активной мощности цепи

$$P = rI^2, \quad P = gU^2,$$

называя *эквивалентным активным сопротивлением* цепи отношение ее активной мощности к квадрату действующего тока в неразветвленной части цепи

$$r = \frac{P}{I^2}, \quad (3.11)$$

а *эквивалентной активной проводимостью* — отношение активной мощности цепи к квадрату действующего напряжения на ней

$$g = \frac{P}{U^2}. \quad (3.12)$$

Эквивалентные реактивные сопротивление x и проводимость b определяют через эквивалентные полные и активные сопротивления и проводимости, руководствуясь известными соотношениями

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}, \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

Выражая отсюда реактивные сопротивление и проводимость

$$x = \pm \sqrt{z^2 - r^2}, \quad b = \pm \sqrt{y^2 - g^2}, \quad (3.13)$$

подчеркнем, что перед квадратным корнем в последних случаях следует предусмотреть оба знака, так как в зависимости от характера цепи эквивалентные реактивные сопротивление и проводимость могут быть как положительными, так и отрицательными.

Фазовый угол цепи. К эквивалентным параметрам цепи переменного тока иногда относят и фазовый угол цепи, который обычно определяют его косинусом через эквивалентные сопротивления и проводимости или непосредственно через характеристики режима цепи (напряжение, ток, мощность):

$$\cos \varphi = \frac{r}{z} = \frac{g}{y} = \frac{P}{UI}. \quad (3.14)$$

Этот путь не позволяет, однако, вычислить знак фазового угла, так как косинус, являясь четной функцией, остается положительным как при положительных, так и при отрицательных углах.

Измерение эквивалентных параметров. Определения эквивалентных параметров цепи переменного тока, приведенные в предыдущих пунктах, позволяют измерить их для практически заданной цепи или какого-либо ее участка опытным путем. Для этого в цепь или соответствующий ее участок необходимо включить, как показано на рис. 3.3, три измерительных прибора — вольтметр V , амперметр A и ваттметр W , с помощью которых можно было бы измерить соответственно напряжение U , ток I и мощность P и присоединить цепь к источнику переменного тока.

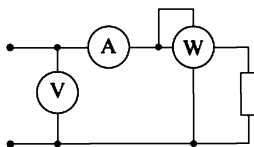


Рис. 3.3. Схема для измерения эквивалентных параметров цепи

Эти три величины позволяют по приведенным выше формулам (3.10)—(3.14) рассчитать интересующие нас эквивалентные параметры. При этом знак реактивных сопротивлений x и проводимости b при их вычислении по формулам (3.13), а также знак фазового угла φ , косинус которого определяется по формуле (3.14), выбирают в зависимости от характера исследуемой цепи: положительные знаки при индуктивном характере и отрицательные — при емкостном. Если характер цепи не очевиден (случай, когда в цепи присутствуют и катушки и конденсаторы), то для его выяснения необходимо провести дополнительные экспериментальные исследования. Наиболее просто с принципиальной точки зрения характер цепи определяется путем включения в нее прибора для измерения фазового угла φ — фазометра, который и покажет знак этого угла.

Эквивалентные схемы. Эквивалентной схемой данной электрической цепи, или, точнее, ее участка, называют схему простейшей цепи, составленной из идеальных элементов, с помощью которой может быть воспроизведен тот же режим, что и в исходной цепи.

Например, для сколь угодно сложной пассивной, то есть не содержащей источников энергии, цепи переменного тока с индуктивным характером, в которой ток I отстает по фазе от напряжения U , можно предложить эквивалентную схему, содержащую всего два идеальных элемента: резистор и катушку. Соответствующим подбором сопротив-

ления резистора и индуктивности катушки в этой цепи можно достичь при заданном напряжении U тех же значений тока I , мощности P и фазового угла φ , какие имеют место в сложной цепи. При этом возможны два варианта эквивалентной схемы — с последовательным соединением резистора R' и катушки L' (рис. 3.4, а), коротко называемой последовательной эквивалентной схемой, или с параллельным соединением элементов R'' и L'' (рис. 3.4, б), именуемой параллельной эквивалентной схемой. Если эквивалентные сопротивления или проводимости этих простых цепей будут соответственно равны эквивалентным сопротивлениям или проводимостям заданной сложной цепи, то в этих цепях при напряжениях, равных напряжению заданной цепи, устанавливаются те же режимы, что и в сложной цепи: одинаковыми будут и токи во входных проводах цепей и расходуемые в цепях мощности:

$$I = \frac{U}{z} = Uy, \quad P = rI^2 = gU^2,$$

где z , y , r и g — эквивалентные параметры рассматриваемых цепей.

Эквивалентные схемы для произвольной пассивной цепи переменного тока с емкостным характером, в которой ток I опережает по фазе напряжение U , должны, очевидно, содержать конденсаторы (рис. 3.5). Здесь также возможны два варианта, в первом из которых идеальный резистор R' и конденсатор C соединены последовательно (рис. 3.5, а), а во втором — элементы R'' и C'' соединены параллельно (рис. 3.5, б).

Как мы убедимся позднее, сопротивления резисторов R' и R'' , индуктивности катушек L' и L'' , а также емкости конденсаторов C' и C'' в последовательной и параллельной эквивалентных схемах для одной и той же реальной цепи не одинаковы, то есть

$$R' \neq R'', \quad L' \neq L'', \quad C' \neq C''.$$

Эквивалентные индуктивности и емкости. Индуктивности L' и L'' идеальных катушек или емкости C' и C'' идеальных конденсаторов в эквивалентных схемах (рис. 3.4 и 3.5) каких-либо реальных элек-

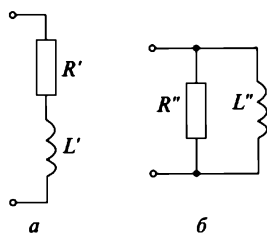


Рис. 3.4. Эквивалентные электрические схемы

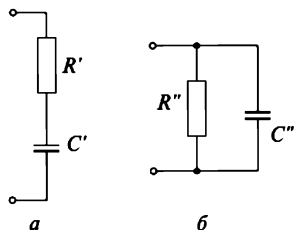


Рис. 3.5. Эквивалентные схемы с емкостным характером

трических цепей коротко называют эквивалентными индуктивностями или эквивалентными емкостями этих электрических цепей.

Поскольку индуктивности катушек L' и L'' или емкости конденсаторов C' и C'' в двух возможных вариантах эквивалентных схем (последовательной и параллельной) для данной реальной цепи не равны друг другу (см. последнее замечание предыдущего пункта), понятия эквивалентных индуктивности или емкости неоднозначны: для вполне определенной реальной цепи с индуктивным характером можно назвать две отличающихся друг от друга эквивалентных индуктивности L' и L'' , а для конкретной цепи с емкостным характером — вычислить два различных значения C' и C'' эквивалентной емкости. Все зависит от того, исходя из какой эквивалентной схемы будут определены эквивалентная индуктивность или эквивалентная емкость данной электрической цепи.

3.6. Параметры реальной катушки

Реальная катушка представляет собой обычную индуктивную катушку, в которой при работе в электрической цепи наблюдается расход энергии. В простейшем случае эта энергия затрачивается на нагрев обмотки протекающим по ней током, а в более сложных конструкциях катушек происходит нагрев магнитопроводов и ряда вспомогательных деталей, что вызывается явлениями гистерезиса и вихревых токов. Подробно эти вопросы излагаются во второй и третий частях пособия.

Напряжение и ток реальной катушки сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол φ , меньший 90° , а ее активные сопротивление r и проводимость g не равны нулю, как в идеальной катушке, и имеют конечные значения, определяемые расходуемой в ней мощностью:

$$r = \frac{P}{I^2}, \quad g = \frac{P}{U^2}.$$

Эквивалентные индуктивности реальной катушки. Для реальной катушки как элемента цепи переменного тока, имеющего индуктивный характер, можно предложить две эквивалентные схемы с последовательным (рис. 3.4, а) или параллельным (рис. 3.4, б) соединением идеальной катушки и идеального резистора. Следовательно, для такой катушки можно определить два значения L' и L'' эквивалентной индуктивности.

Обращаясь сначала к последовательной эквивалентной схеме (рис. 3.4, а), заметим, что ее активное r' и реактивное x' сопротивления будут равны

$$r' = R', \quad x' = \omega L'.$$

Для того чтобы эта схема была действительно эквивалентна заданной реальной катушке с параметрами r и x (при заданной угловой частоте ω), необходимо выполнить условия

$$r' = r \quad \text{и} \quad x' = x,$$

то есть сопротивление R' резистора и индуктивность L' катушки в последовательной эквивалентной схеме должны быть равны

$$R' = r \quad L' = \frac{x}{\omega}.$$

Переходя к параллельной эквивалентной схеме (рис. 3.4, б), нетрудно определить ее активную g'' и реактивную b'' проводимости

$$g'' = \frac{1}{R''}, \quad b'' = \frac{1}{\omega L''}.$$

Приравнявая эти проводимости проводимостям g и b заданной реальной катушки

$$g'' = g = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad b'' = b = \frac{x}{r^2 + x^2},$$

где r и x — ее активное и реактивное сопротивления,

получаем возможность определить сопротивление R'' резистора и индуктивность L'' катушки параллельной эквивалентной схемы

$$R'' = \frac{1}{g''} = \frac{r^2 + x^2}{r}, \quad L'' = \frac{1}{\omega b''} = \frac{r^2 + x^2}{\omega x}.$$

Сопоставляя эти выражения с ранее полученными выражениями для сопротивления R' и индуктивности L' , нетрудно убедиться, что сопротивления R' и R'' резисторов в двух эквивалентных схемах для одной и той же реальной катушки не равны друг другу. Различными оказываются и индуктивности L' и L'' катушек в этих схемах, причем $L' < L''$.

Это можно проверить, представив выражение для L' в виде

$$L' = \frac{x}{\omega} = \frac{x^2}{\omega x}$$

и сравнив его с выражением для L'' , памятуя, что в реальной катушке $r \neq 0$.

Таким образом, для реальной катушки можно назвать два отличающихся друг от друга значения эквивалентной индуктивности, каждое из которых соответствует определенной эквивалентной схеме.

Эта двойственность в определении такого важного понятия, как индуктивность катушки, не должна смущать учащихся. Ее следует рассматривать как проявление одного из законов диалектики об относительности наших представлений о явлениях природы и зависимости этих представлений от позиции, с которой они рассматриваются.

В заключение заметим, что из двух эквивалентных схем реальной катушки последовательная схема точнее отражает физические процессы в катушке. Поэтому на практике, оценивая работу реальной катушки в цепи переменного тока, обычно обращаются к понятию ее эквивалентной индуктивности, определяемой из последовательной эквивалентной схемы, даже не всегда подчеркивая это обстоятельство.

Добротность катушки. Если индуктивность характеризует катушку по ее основному назначению — созданию магнитного поля, то активное сопротивление оценивает сопутствующее, как правило, нежелательное, явление в катушке — затрату энергии на ее нагревание. Поэтому качество катушки при прочих равных условиях считается тем выше, чем больше ее индуктивность и меньше активное сопротивление.

Для объективной оценки качества индуктивной катушки в радиотехнике, а иногда и в электротехнике обращаются к понятию о добротности катушки, представляющей собой безразмерную величину

$$Q = \frac{x_L}{r} = \frac{\omega L}{r}, \quad (3.15)$$

равную отношению индуктивного сопротивления x_L катушки к ее активному сопротивлению r .

Векторная диаграмма реальной катушки. При анализе работы реальных катушек в цепях переменного тока часто обращаются к их векторной диаграмме (рис. 3.6), на которой, помимо векторов напряжения и тока катушки, останавливаясь на варианте последовательной эквивалентной схемы (рис. 3.4, *а*), строят также векторы, изображающие ее потокосцепление и ЭДС самоиндукции — исходя из известного соотношения

$$\Psi = L'i,$$

нетрудно прийти к заключению, что потокосцепление Ψ и ток i катушки будут совпадать по фазе, то есть изображаться векторами, имеющими одинаковое направление. При этом заметим, что вектором потокосцепления принято на диаграммах изображать не действующее, а его максимальное значение (Ψ_m), так как именно эта величина встречается в расчетах электромагнитных процессов катушек при переменном токе.

ЭДС самоиндукции катушки определяется законом электромагнитной индукции

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Если представить потокосцепление синусоидальной функцией с начальной фазой, равной нулю (рис. 3.7, б),

$$\Psi = \Psi_m \sin \omega t,$$

то для ЭДС, индуцирующейся в катушке, получим

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -\omega\Psi_m \cos \omega t = -E_m \cos \omega t,$$

то есть будет изменяться во времени по закону «минус косинус» или, как вытекает из рис. 3.7, б, где наряду с синусоидой потокосцепления Ψ нанесена также и кривая ЭДС e , последняя будет отставать по фазе от потокосцепления на угол $\pi/2$. Соответственно будет повернут относительно вектора $\vec{\Psi}_m$ и вектор $\vec{E}$ на векторной диаграмме катушки (рис. 3.6).

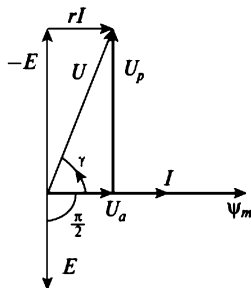


Рис. 3.6. Векторная диаграмма реальной катушки

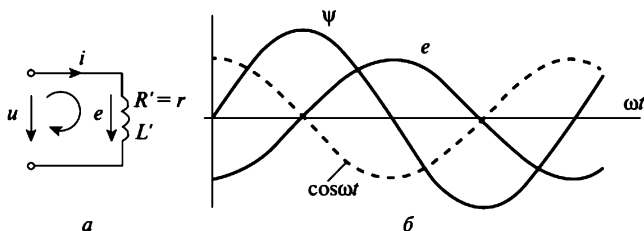


Рис. 3.7. Потокосцепление в реальной цепи

Подчеркнем, что полученный вывод имеет весьма общий смысл и обычно формулируется в виде теоремы о том, что ЭДС, индуцированная синусоидальным магнитным потоком, всегда отстает от него по фазе точно на 90° .

Обращаясь ко второму закону Кирхгофа и записывая его для мгновенных значений синусоидальных величин по контуру катушки (рис. 3.7, а), получим

$$-u + R'i = e.$$

Переходя к изображению мгновенных значений соответствующими векторами, получим уравнение

$$-\vec{U} + R'\vec{I} = \vec{E},$$

из которого, имея в виду равенство $R' = r$ для напряжения на катушке, получим

$$\vec{U} = -\vec{E} + r\vec{I}.$$

Таким образом, для построения вектора напряжения U необходимо к перевернутому вектору ЭДС E (рис. 3.6) прибавить вектор $r\vec{I}$, совпадающий по направлению с вектором тока $\vec{I}$. Угол φ между векторами тока и напряжения является фазовым углом катушки.

Спроектировав вектор напряжения U на вектор тока I , можно получить активную U_a и реактивную U_p составляющие напряжения, вторая из которых, как это следует из диаграммы, по величине равна ЭДС катушки, но противоположна ей по фазе

$$\vec{U}_p = -\vec{E}.$$

3.7. Параметры реального конденсатора

Реальный конденсатор представляет собой обычный конденсатор с твердым диэлектриком, в котором при переменном напряжении наблюдается расход энергии. Основной причиной этого явления, выражающегося в нагреве диэлектрика, является переменная поляризация диэлектрика под воздействием переменного электрического поля между обкладками конденсатора.

Потеря энергии в конденсаторе, оцениваемая при его работе на переменном напряжении мощностью потерь P , определяет конечные значения активного сопротивления и активной проводимости конденсатора

$$r = \frac{P}{I^2}, \quad g = \frac{P}{U^2},$$

а также приводит к тому, что в реальном конденсаторе ток опережает напряжение на угол φ , меньший 90° :

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} > 0, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}.$$

Угол потерь. Отличие фазового угла в реальных конденсаторах от 90° весьма незначительное, и поэтому при оценке взаимного расположения векторов тока I и напряжения U в конденсаторах удобнее оперировать не фазовым углом φ , а дополняющим его до 90° положительным углом δ (рис. 3.8), называемым углом потерь конденсатора.

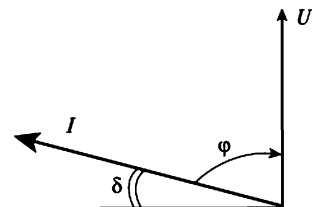


Рис. 3.8. Угол потерь в конденсаторе

Для угла потерь δ имеем следующие очевидные выражения

$$\sin \delta = \cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{r}{z} = \frac{g}{y}, \quad \cos \delta = |\sin \varphi| = \left| \frac{Q}{UI} \right| = \left| \frac{x}{z} \right| = \left| \frac{b}{y} \right|,$$

где r , x , z и g , b , y — соответственно активные, реактивные, полные сопротивления и проводимости конденсатора, а Q — его реактивная мощность. Однако чаще всего угол потерь оценивают его тангенсом (тангенсом дельта)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{r}{x} = \frac{g}{b},$$

хотя по существу в силу малости угла потерь, как правило, не превышающего градуса и чаще оцениваемого минутами, сам угол потерь (выраженный в радианах), его синус или тангенс практически равны друг другу

$$\operatorname{tg} \delta \approx \delta \approx \sin \delta = \frac{P}{UI}. \quad (3.16)$$

Эквивалентные емкости реального конденсатора. Для реального конденсатора, как для всякого элемента цепи переменного тока, имеющего емкостный характер, можно предложить две эквивалентные схемы с последовательным (рис. 3.9, а) или параллельным (рис. 3.9, б) соединением идеального конденсатора и идеального резистора. Емкости C' и C'' конденсаторов в этих схемах и будут являться эквивалентными емкостями реального конденсатора.

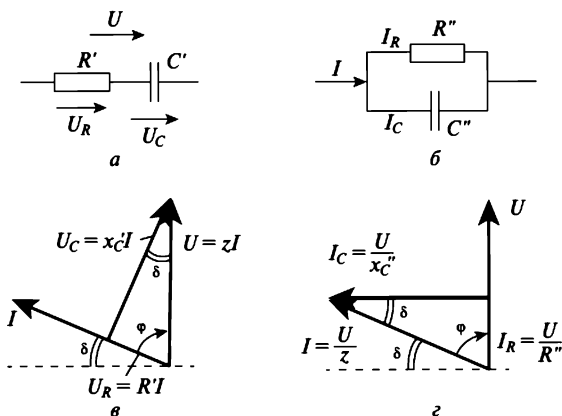


Рис. 3.9. Схемы подключения идеальных конденсатора и резистора

Обратимся к векторной диаграмме реального конденсатора (рис. 3.8) и, останавливаясь сначала на последовательной эквивалентной схеме (рис. 3.9, а), разложим вектор напряжения U на две составляющие (рис. 3.9, в) — совпадающую с вектором тока I и ему перпендикулярную. Применительно к последовательной эквивалентной схеме (рис. 3.9, а) первая составляющая U_R будет представлять собой напряжение на идеальном резисторе R' , равное $U_R = RI$, а вторая составляющая U_C — напряжение на идеальном конденсаторе C' , равное $U_C = x'_C I$, где $x'_C = 1/\omega C'$ — емкостное сопротивление конденсатора C' . Из треугольника напряжений на рис. 3.8, в, гипотенузой которого является полное напряжение $U = zI$ на реальном конденсаторе, нетрудно определить синус и косинус угла потерь (верхний угол треугольника напряжений)

$$\sin \delta = \frac{U_R}{U} = \frac{R'}{z}, \quad \cos \delta = \frac{U_C}{U} = \frac{x'_C}{z} = \frac{1}{\omega C' z},$$

где z — полное сопротивление реального конденсатора.

Переходя к параллельной эквивалентной схеме (рис. 3.9, б), разложим вектор тока I конденсатора на две составляющие (рис. 3.9, г) — совпадающую с вектором напряжения U и ему перпендикулярную. Применительно к параллельной эквивалентной схеме (рис. 3.9, б) первая составляющая I_R будет представлять собой ток в идеальном резисторе R'' , равный $I_R = U/R''$, а вторая составляющая I_C — ток в идеальном конденсаторе C'' , равный $I_C = U/x''_C$ где $x''_C = 1/\omega C''$ — емкостное сопротивление конденсатора C'' . Из треугольника токов (рис. 3.9, г),

гипотенузой которого является полный ток $I = U/z$ реального конденсатора, нетрудно определить синус и косинус угла потерь (левый угол треугольника токов)

$$\sin \delta = \frac{I_R}{I} = \frac{z}{R''}, \quad \cos \delta = \frac{I_C}{I} = \frac{z}{x_C''} = z\omega C''.$$

Перемножим выражения для синусов, а затем и для косинусов угла потерь, полученные из анализа последовательной и параллельной схем,

$$\sin^2 \delta = \frac{R'}{z} \frac{z}{R''} = \frac{R'}{R''}, \quad \cos \delta = \frac{1}{z\omega C'} z\omega C'' = \frac{C''}{C'}$$

и проанализируем полученные результаты.

Поскольку, как уже упоминалось, угол потерь реальных конденсаторов весьма мал, квадрат его синуса является ничтожной величиной, и следовательно, сопротивление R' резистора в последовательной эквивалентной схеме несоизмеримо меньше сопротивления R'' резистора в параллельной эквивалентной схеме ($R' < R''$). Квадрат косинуса угла потерь, наоборот, весьма близок к единице, и поэтому различие двух эквивалентных емкостей C' и C'' реального конденсатора крайне незначительно. Вот почему на практике при оценке емкости реального конденсатора обычно оперируют одним значением.

В заключение заметим, что из двух упомянутых эквивалентных схем реального конденсатора параллельная схема точнее отражает физические процессы в конденсаторе. Поэтому при анализе работы конденсаторов в цепях переменного тока обычно отдают предпочтение параллельной схеме, часто не указывая на это обстоятельство.

3.8. Элементы в цепи синусоидального тока

Рассмотрим амплитудные и фазовые соотношения между током и напряжением в элементах R , L и C . Для этого приложим к этим элементам синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и рассчитаем мгновенное значение тока в каждой из них (т.е. найдем его амплитуду и начальную фазу).

1. Сопротивление R . В этом элементе

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Анализ полученного выражения:

а) $I_m = \frac{U_m}{R}$ или действующее значение тока

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3.17)$$

Сопротивление R в цепи синусоидального тока называется *активным*, так как в нем проходит процесс преобразования электромагнитной энергии в тепловую. В большом диапазоне частот активное сопротивление R практически постоянно. Величина, обратная активному сопротивлению, называется активной проводимостью: $G = 1/R$. Тогда формула для тока приобретает вид

$$I = U/R = UG. \quad (3.18)$$

Это закон Ома для цепи с активным сопротивлением;

б) начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u$ или $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$, т.е. в цепи с активным сопротивлением ток и напряжение совпадают по фазе.

2. Индуктивность L . В этом элементе

$$i = \frac{1}{L} \int u dt = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Анализ полученного выражения:

а) $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$ или действующее значение тока

$$I = \frac{U}{X_L}. \quad (3.19)$$

Выражение $X_L = \omega L$, Ом, стоящее в знаменателе, — это реактивное индуктивное сопротивление цепи. Величина, обратная индуктивному сопротивлению, называется индуктивной проводимостью

$$b_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}. \quad (3.20)$$

Тогда формула для тока в индуктивности приобретает вид

$$I = U/X_L = Ub_L. \quad (3.21)$$

Это закон Ома для цепи с индуктивным сопротивлением;

б) начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u - 90^\circ$ или $\varphi = \psi_u - \psi_i = +90^\circ$, т.е. в цепи с индуктивностью ток отстает от напряжения по фазе на 90° .

3. Емкость C . В этом элементе

$$i = C \frac{du}{dt} = \frac{U_m}{1/\omega C} \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Анализ полученного выражения:

а) $I_m = \frac{U_m}{1/\omega C}$ или действующее значение тока

$$I = \frac{U}{X_C}. \quad (3.22)$$

Выражение $X_C = 1/\omega C$, Ом, стоящее в знаменателе, — это реактивное емкостное сопротивление цепи. Величина, обратная емкостному сопротивлению, называется емкостной проводимостью

$$b_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{1/\omega C} = \omega C. \quad (3.23)$$

Тогда формула для тока в емкости получает вид

$$I = U/X_C = Ub_C. \quad (3.24)$$

Это закон Ома для цепи синусоидального тока с емкостью;

б) начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u + 90^\circ$, т.е. в цепи с емкостью ток опережает приложенное напряжение по фазе на 90° . При этом $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$.

На рисунке 3.10 приведены мгновенные значения токов и напряжений для элементов R , L и C .

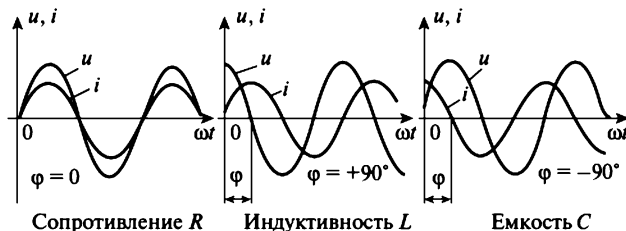


Рис. 3.10. Мгновенные значения токов и напряжений

3.9. Цепь с последовательным соединением R , L , C

Известно приложенное к цепи синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и параметры R , L , C цепи (рис. 3.11, а). Требуется определить ток цепи i , т.е. его амплитуду I_m и начальную фазу ψ_i . В такой цепи действует второй закон Кирхгофа, который в векторной форме записи в соответствии с формулой (3.5) имеет вид: $\bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C - \bar{U} = 0$ или $\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$.

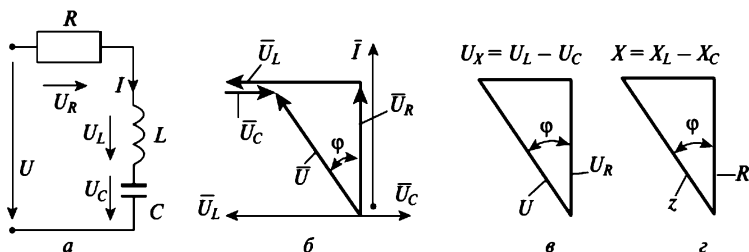


Рис. 3.11. Схема с последовательным соединением элементов и ее векторные диаграммы

Решим поставленную задачу с помощью векторной диаграммы. Она показана на рис. 3.11, б для случая, когда $U_L > U_C$. Диаграмму начинаем строить с вектора тока $\bar{I}$, откладывая его на плоскости чертежа вертикально вверх (выбор произвольный).

При этом вектор $\bar{U}_R$ совпадает с вектором $\bar{I}$ по фазе, вектор $\bar{U}_L$ опережает вектор $\bar{I}$ по фазе на 90° , а вектор $\bar{U}_C$ отстает от вектора $\bar{I}$ по фазе на 90° .

Применяя правило многоугольника для сложения векторов и откладывая векторы $\bar{U}_R$, $\bar{U}_L$ и $\bar{U}_C$ друг за другом, находим вектор $\bar{U}$ приложенного к цепи напряжения. Полученный результат показывает, что действующие значения напряжений этой цепи (длины векторов) соотносятся между собой как стороны прямоугольного треугольника. Этот треугольник напряжений показан на рис. 3.11, в. Применяя к этому треугольнику теорему Пифагора, находим

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2},$$

где $U_X = (U_L - U_C)$.

Учитывая, что $U_R = IR$, $U_L = IX_L$ и $U_C = IX_C$, получаем

$$U = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I\sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{или} \quad U = Iz. \quad (3.25)$$

Эта формула является законом Ома для цепи синусоидального тока с последовательным соединением активного и реактивных сопротивлений. Здесь

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3.26)$$

— полное сопротивление данной цепи.

Заметим, что треугольник сопротивлений подобен треугольнику напряжений: поделив все стороны треугольника напряжений на величину действующего значения тока I цепи, получаем треугольник сопротивлений.

Из векторной диаграммы видно, что ток и напряжение цепи не совпадают по фазе. Угол сдвига фаз φ определяется из треугольника напряжений или треугольника сопротивлений:

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (3.27)$$

Этот угол по абсолютному значению меньше 90° . В нашем примере $U_L > U_C$, угол $\varphi > 0$ и цепь имеет индуктивный характер. Если $U_L < U_C$, то $\varphi < 0$ и цепь имеет емкостной характер. Если же $U_L = U_C$, то $\varphi = 0$ и цепь ведет себя как чисто активная.

3.10. Цепь с параллельным соединением R, L, C

Известно приложенное к цепи (рис. 3.12, *a*) синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и ее параметры R, L, C .

Требуется определить ток в цепи i . Затем строим векторы $\bar{I}_R$, $\bar{I}_L$ и $\bar{I}_C$. Вектор $\bar{I}_R$ откладываем по одной линии (параллельно) с вектором $\bar{U}$, так как ток и напряжение в активном сопротивлении R совпадают по фазе. Вектор $\bar{I}_L$ откладываем под углом 90° по часовой стрелке к вектору $\bar{U}$, так как в индуктивности ток отстает от напряжения на 90° . Наконец, вектор $\bar{I}_C$ откладываем под углом 90° против часовой стрелки к вектору U , поскольку в цепи с емкостью ток опережает напряжение по фазе на 90° .

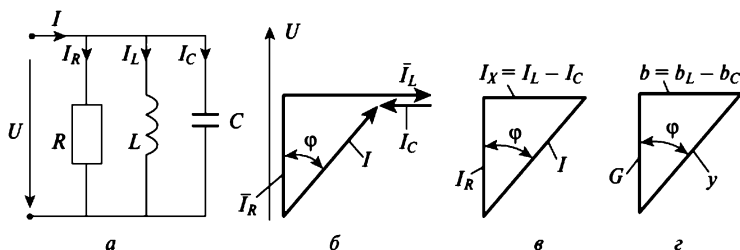


Рис. 3.12. Схема с параллельным соединением элементов

Складывая эти векторы по правилу многоугольника (предварительно выстроив их друг за другом), находим результирующий вектор $\bar{I}$. Из полученной диаграммы следует, что действующие значения токов ветвей (длины векторов) соотносятся между собой как стороны

прямоугольного треугольника (рис. 3.5, в). Применяя теорему Пифагора, получаем

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{I_R^2 + I_X^2}, \quad \text{где } I_X = (I_L - I_C). \quad (3.28)$$

При этом $I_R = UG$; $I_L = Ub_L$; $I_C = Ub_C$.

Подставляя эти значения токов в формулу (3.28), находим

$$I = U\sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} = U\sqrt{G^2 + b^2} \quad \text{или} \quad I = Uy. \quad (3.29)$$

Эта формула является законом Ома для цепи с параллельным соединением активных и реактивных сопротивлений. Здесь

$$y = \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{G^2 + b^2} \quad (3.30)$$

— полная проводимость исследуемой цепи.

Из формулы (3.30) следует, что активная G , реактивная b и полная y проводимости цепи соотносятся между собой как стороны прямоугольного треугольника (рис. 3.5, г), подобного треугольнику тока: его можно получить, если все стороны треугольника тока поделить на действующее значение напряжения цепи U . Сравнивая между собой формулы (3.16) и (3.20), замечаем, что полная проводимость y и полное сопротивление цепи z являются взаимобратными величинами:

$$y = I/U; \quad z = U/I.$$

Отсюда

$$z = 1/y. \quad (3.31)$$

Из векторной диаграммы на рис. 3.6, б следует, что ток и напряжение цепи не совпадают по фазе. Угол сдвига фаз φ определяется либо из треугольника проводимостей, либо из треугольника токов:

$$\varphi = \arctg \frac{I_L - I_C}{I_R} = \arctg \frac{b_L - b_C}{G}. \quad (3.32)$$

Этот угол, как видно из диаграммы, по абсолютному значению меньше 90° . Здесь возможны три варианта. Если $I_L > I_C$ ($b_L > b_C$), этот угол положителен и цепь имеет индуктивный характер. При $I_L < I_C$ ($b_L < b_C$) угол сдвига фаз отрицателен и цепь имеет емкостной характер. Если $I_L = I_C$ ($b_L = b_C$), то $\varphi = 0$ и цепь ведет себя как чисто активная.

Результаты, полученные при рассмотрении данной задачи, позволяют рассчитывать цепи, содержащие параллельно соединенные элементы в любой комбинации.

3.11. Мощность цепи синусоидального тока

3.11.1. Активная мощность в цепи переменного тока

Обозначим через u и i мгновенные значения напряжения на зажимах цепи и тока в этой цепи. Тогда работа dA , совершаемая в цепи за отрезок времени dt , равна

$$dA = uidt$$

и скорость совершения работы в данный момент времени, т.е. мгновенное значение мощности, развиваемой в цепи, будет

$$p = \frac{dA}{dt} = ui.$$

При периодических процессах обычно интересуются работой, совершаемой в цепи за один полный период, и средним значением мощности за полный период, чаще называемым активной мощностью или просто мощностью.

Так как работа A за полный период равна

$$A = \int_0^T uidt,$$

то для активной мощности P имеем

$$P = \frac{A}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T uidt.$$

Из последнего выражения для случая, когда напряжение и ток являются синусоидальными функциями времени, а именно:

$$u = U_m \sin \omega t = U \sqrt{2} \sin \omega t \quad \text{и} \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = I \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi),$$

получим

$$P = \frac{UI}{T} \int_0^T 2 \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt = \frac{UI}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt.$$

Так как определенный интеграл второго члена подынтегральной функции обращается в нуль, имеем

$$P = UI \cos \varphi,$$

откуда следует, что в цепи переменного тока среднее за период значение мощности, т.е. активная мощность, зависит не только от действу-

ющих значений напряжения и тока, но и от разности φ их фаз. Множитель $\cos \varphi$, входящий в выражение для активной мощности, носит название коэффициента мощности, и так как косинус не может быть больше единицы, то активная мощность вообще меньше произведения действующих значений напряжения и тока.

3.11.2. Реактивная и полная мощности в цепи переменного тока

Наряду с активной мощностью P , характеризующей среднюю за период скорость поступления энергии в цепь, вводят в рассмотрение так называемую реактивную мощность

$$Q = UI \sin \varphi$$

и полную мощность

$$S = UI.$$

Величины Q и S не имеют того же физического смысла, что активная мощность, однако использование их имеет определенное практическое значение.

Смысл введения понятия полной мощности ясен из сказанного в предыдущем параграфе. Если под U и I понимать номинальные значения, т.е. допускаемые при номинальном режиме действующие значения напряжения и тока электрической машины, трансформатора или других преобразователей энергии, то произведение $S = UI$ дает наибольшую возможную активную их мощность при наиболее благоприятных условиях, т.е. при $\cos \varphi = 1$.

Практическое значение введения понятия реактивной мощности вытекает, например, из следующего рассмотрения. Обычный счетчик энергии дает величину энергии, отданной приемнику за некоторый промежуток времени τ . Эту энергию можно записать в форме

$$\int_0^{\tau} P dt = \int_0^{\tau} UI \cos \varphi dt,$$

если заметное изменение P происходит только за большое количество периодов T тока и если, соответственно, τ во много раз превосходит T . Однако показания такого счетчика не дают возможности судить о том, при каком коэффициенте мощности $\cos \varphi$ работает потребитель энергии. Такая оценка возможна, если наряду с обычным счетчиком, показывающим действительную энергию, передаваемую приемнику, включить на зажимы приемника еще счетчик, показы-

вающий величину интеграла реактивной мощности Q за тот же промежуток времени τ :

$$\int_0^{\tau} Q dt = \int_0^{\tau} UI \sin \varphi dt.$$

Очевидно, чем больше показание этого счетчика по сравнению с показанием обычного счетчика, тем ниже среднее значение $\cos \varphi$ приемника за рассматриваемый промежуток времени.

Величину P можно измерить с помощью обычного ваттметра, а величину Q — с помощью специально предназначенного для этой цели электроизмерительного прибора. Зная P и Q , можно определить $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ потребителя энергии в момент измерения. Однако необходимо знать характер работы потребителя за длительный промежуток времени. С этой целью и используются счетчики, дающие вышеуказанные интегральные величины.

Понятием реактивной мощности Q широко пользуются также при расчете электрических сетей переменного тока.

Имеем соотношения

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 x = U^2 b \quad \text{и} \quad S = UI = I^2 z = U^2 y.$$

Из выражений для P , Q и S следует, что P и S всегда положительны, но реактивная мощность Q положительна лишь при $\varphi > 0$, т.е. для индуктивных цепей, а при $\varphi < 0$, т.е. для емкостных цепей, она отрицательна.

Заметим, что при $\varphi = \pm 0,5\pi$, например, в случае конденсаторов или катушек без потерь, абсолютное значение реактивной мощности совпадает с полной мощностью.

3.12. Колебания энергии в цепи переменного тока

При подробном анализе энергетических процессов в цепи переменного тока необходимо обратить внимание не только на процесс преобразования электромагнитной энергии в тепло или иные виды энергии, но также и на то, что запас энергии в магнитном и электрическом полях, связанных с рассматриваемой цепью, непрерывно изменяется. Поэтому нельзя ограничиться рассмотрением среднего значения мощности за полный период, т.е. активной мощности, а необходимо проследить изменение мгновенного значения мощности. Переходя к это-

му, напомним, что энергия магнитного поля W_M , связанного с цепью, обладающей индуктивностью L , и энергия электрического поля $W_Э$ конденсатора, имеющего емкость C , равны соответственно

$$W_M = \frac{Li_L^2}{2} \quad \text{и} \quad W_Э = \frac{Cu_C^2}{2},$$

где i_L и u_C — мгновенные значения тока в цепи с индуктивностью и напряжения на обкладках конденсатора.

Произведем анализ энергетических процессов в неразветвленной цепи, составленной из последовательно соединенных элементов r , L и C . Ток i является общим для всех участков цепи, и следовательно, $i_L = i$.

От основного уравнения напряжений для этой цепи

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{\int idt}{C} = u_r + u_L + u_C$$

можно, умножая обе части его на $idt = d\left(\int idt\right) = Cdu_C$, перейти к уравнению элементарных работ

$$uidt = i^2 r dt + Lidi + Cu_C du_C = i^2 r t + d(W_M + W_Э),$$

откуда следует, что работа $uidt$, совершаемая источником приложенного напряжения за элемент времени dt , расходуется, с одной стороны, на выделение тепла, а с другой стороны, на изменение энергии магнитного и электрического полей. При этом величина $i^2 r dt$ всегда положительна, но величины $uidt$ и $d(W_M + W_Э)$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, т.е. в цепи переменного тока в некоторые моменты времени источник приложенного напряжения может быть приемником энергии, а поля могут быть источниками энергии.

Рассмотрим изменения мгновенного значения мощности p при $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ и $i = \sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$ Тогда

$$p = ui = 2UI \sin\omega t \sin(\omega t - \varphi) = UI [\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)],$$

откуда следует, что мгновенное значение мощности изменяется с угловой частотой 2ω , в два раза превышающей угловую частоту напряжения и тока, и следовательно, скорость поступления энергии в цепь в нашем случае все время изменяется в отличие от цепи постоянного тока, в которую энергия поступает равномерно.

Характер энергетических процессов особенно четко может быть выяснен при рассмотрении двух предельных случаев, когда $\cos\varphi = 1$, и случая, когда $\cos\varphi = 0$.

При $\cos \varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 0$, имеем:

$$p = UI(1 - \cos 2\omega t) \quad p_{\text{МАКС}} = 2UI; \quad p_{\text{МИН}} = 0, \quad P = UI.$$

На рисунке 3.13 приведены кривые напряжения и тока, совпадающие по фазе, и соответствующая кривая мгновенных значений мощности. Как из последней кривой, так и из выражения для p следует, что в этом случае мощность колеблется с угловой частотой 2ω около своего среднего значения UI . При этом мощность не принимает отрицательных значений, следовательно, энергия все время поступает в цепь, и хотя это поступление энергии происходит в различные моменты времени с различной скоростью, но возврата энергии из цепи в источник приложенного напряжения при $\varphi = 0$ не происходит. В этом случае вся энергия, поступающая в цепь, преобразуется в ней в тепло.

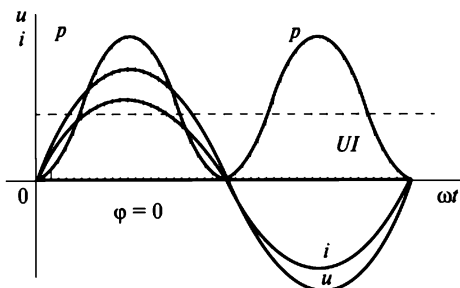


Рис. 3.13. Распределение мгновенной мощности в цепи при $\cos \varphi = 1$

При $\cos \varphi = 0$, т.е. при $\varphi = \pm 0,5\pi$, имеем:

$$p = \pm UI \sin 2\omega t; \quad p_{\text{МАКС}} = UI; \quad p_{\text{МИН}} = -UI, \quad P = 0.$$

Как из выражения для p , так и из кривых следует, что при $\cos \varphi = 0$ мощность колеблется около оси абсцисс с угловой частотой 2ω . При этом, оставаясь в течение одной четверти периода положительной, в течение следующей четверти периода мощность отрицательна. В соответствии с этим в отличие от предыдущего случая энергия то поступает в цепь, когда $p > 0$, то возвращается из цепи обратно в источник приложенного напряжения, когда $p < 0$.

На рисунке 3.14 приведены кривые напряжения, тока и мощности для этого случая.

При этом энергия, поступающая в цепь, временно запасается в магнитном поле при $\varphi = 0,5\pi$ или в электрическом поле при $\varphi = -0,5\pi$.

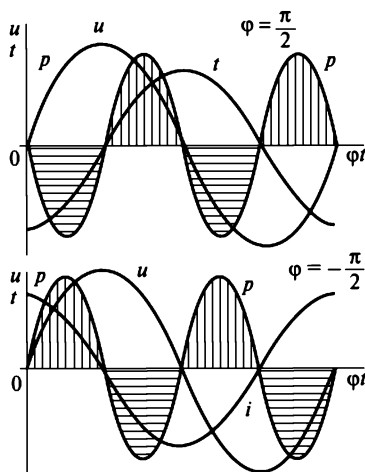


Рис. 3.14. Распределение мгновенной мощности в цепи при $\cos \varphi = 0$

Интенсивность колебаний энергии между источником приложенного напряжения и полями цепи можно охарактеризовать наибольшим значением скорости поступления энергии в поля цепи. При $\varphi = \pm 0,5\pi$ это наибольшее значение равно амплитуде кривой мощности, т.е. UI .

При $1 > \cos \varphi > 0$, т.е. при $0 < |\varphi| < 0,5\pi$, имеем:

$$p = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]; \quad p_{\text{МАКС}} = UI(\cos \varphi + 1);$$

$$p_{\text{МИН}} = UI(\cos \varphi - 1); \quad P = UI \cos \varphi.$$

Из выражения для p следует, что мощность колеблется с угловой частотой 2ω около оси, приподнятой над осью абсцисс на величину активной мощности $P = UI \cos \varphi$. При этом, хотя мгновенная мощность и принимает отрицательные значения, но части периода, в течение которых она остается положительной, преобладают, и площади кривой мощности, расположенные над осью абсцисс, превышают площади этой кривой, расположенные под осью абсцисс. В соответствии с этим энергия, поступающая от источника напряжения в цепь, превосходит энергию, возвращаемую цепью этому источнику. В цепи при $1 > \cos \varphi > 0$ существуют одновременно процесс преобразования электромагнитной энергии в тепло и процесс запасаения и возврата энергии полями.

3.13. Понятие о коэффициентах мощности и полезного действия

В энергетике широко распространено понятие о коэффициенте мощности цепи, под которым понимают отношение ее активной мощности P к полной S :

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{P}{UI}. \quad (3.33)$$

Этот коэффициент показывает, какая доля полной мощности S преобразуется в теплоту и другие виды энергии. Чем больше $\cos \varphi$, тем больше степень использования полной мощности, тем меньшим током при заданном напряжении можно доставить к потребителю активную мощность.

Из (3.33) находим действующее значение тока

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}.$$

При заданной активной мощности P и напряжении U ток I обратно пропорционален $\cos \varphi$, а от значения I зависят сечения подводящих энергию проводов, кабелей, линий передачи, которые, как правило, изготавливаются из дорогостоящих цветных металлов. Кроме того, потери энергии в подводящих энергию проводниках пропорциональны квадрату действующего значения тока. Таким образом, увеличивая $\cos \varphi$, мы не только снижаем потери в подводящих энергию проводниках, но можем использовать проводники меньшего сечения.

Энергетики стремятся коэффициент мощности свести к единице, т.е. иметь $P = S$ или $\cos \varphi = 1$, при котором угол φ сдвига фаз между напряжением и током цепи равен нулю. Иначе говоря, наиболее эффективным режимом работы цепи является резонанс токов. С этой целью на зажимы заводских и районных подстанций подключают батареи конденсаторов, подбирая их емкость так, чтобы в цепи имел место резонанс. Энергетики называют такие действия компенсацией реактивной мощности.

Не следует путать коэффициент мощности $\cos \varphi$ и коэффициент полезного действия η электроустановок. Коэффициент мощности показывает, какая доля полной мощности S источника преобразуется в активную мощность, а коэффициент полезного действия — насколько эта активная мощность эффективно используется в конкретных электрических установках, например в электродвигателях.

Известно (рис. 3.15), что мощность $P_{\text{вых}}$, которую электродвигатель развивает на валу, меньше потребляемой из сети активной мощности $P_{\text{вх}}$ за счет внутренних потерь ΔP на нагрев обмоток и сердечников, трение в подшипниках, работу вентилятора.

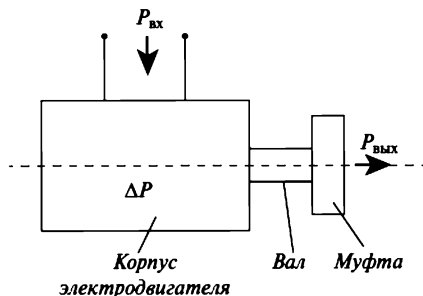


Рис. 3.15. Макет электродвигателя

Коэффициент полезного действия электротехнической установки — это отношение активной мощности на ее выходе к активной мощности на входе. Измеряется он в относительных единицах (или в процентах) и всегда меньше единицы (меньше 100%):

$$\eta = \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{P_{\text{вх}} - \Delta P}{P_{\text{вх}}} 100 < 100\%.$$

3.14. Символический метод расчета

Основы метода. Расчет разветвленных цепей синусоидального тока с помощью векторных диаграмм весьма затруднен. Выход из этих затруднений состоит в том, что вектор можно математически представить в виде комплексного числа. В результате геометрические действия с векторами можно заменить алгебраическими действиями с комплексными числами.

При этом следует всегда помнить, что каждому вектору на плоскости соответствует комплексное число, а каждому комплексному числу соответствует вектор на плоскости.

Применяя символический (комплексный) метод, будем пользоваться всеми известными из курса математики правилами действия с комплексными числами.

Главными положениями символического метода являются понятия о комплексных токах и напряжениях, о комплексном сопротивлении, комплексной проводимости и комплексной мощности.

Комплексные токи и напряжения. Положения векторов токов и напряжений на комплексной плоскости показаны на рис. 3.16. Здесь $\dot{U}$ — комплексное действующее значение напряжения (сокращенно — комплексное напряжение); $\dot{I}$ — комплексное действующее значение тока (сокращенно — комплексный ток). Аналитическая запись $\dot{U}$ и $\dot{I}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{U} &= a_1 + jb_1 = U \cos \psi_u + U \sin \psi_u = Ue^{j\psi_u}; \\ \dot{I} &= a_2 + jb_2 = I \cos \psi_i + I \sin \psi_i = Ie^{j\psi_i}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

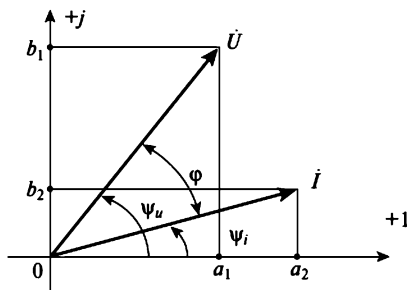


Рис. 3.16. Векторы тока и напряжения на комплексной плоскости

Формулы (3.34) представляют собой алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи. В этих формулах a_1 и a_2 — вещественные части комплексных величин; b_1 и b_2 — мнимые части комплексных величин; U и I — модули комплексных величин (действующие значения); ψ_u и ψ_i — аргументы комплексных величин (начальные фазы).

Пример. Известны комплексное напряжение и комплексный ток на зажимах двухполюсника: $\dot{U} = 30 + j40$ В; $\dot{I} = 4 + j1$ А. Требуется определить: а) действующие значения тока и напряжения; б) угол сдвига фаз φ между напряжением и током; в) построить векторную диаграмму двухполюсника на комплексной плоскости.

Решение.

а) Переведем комплексные напряжение и ток в показательную форму

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \sqrt{30^2 + 40^2} e^{j \arctg(40/30)} = 50e^{j53^\circ} \text{ В}; \\ \dot{I} &= \sqrt{4^2 + 1^2} e^{j \arctg(1/4)} = 4,12e^{j14^\circ} \text{ А},\end{aligned}$$

где $I = 4,12$ А — действующее значение тока, соответствующее показанию амперметра; $U = 50$ В — действующее значение напряжения,

$\psi_i = +14^\circ$ — начальная фаза тока, а $\psi_u = +53^\circ$ — начальная фаза напряжения.

б) Угол сдвига фаз φ между напряжением и током $\varphi = \psi_u - \psi_i = 53^\circ - (+14^\circ) = +39^\circ$. Знак (+) этого угла указывает на индуктивный характер.

в) Векторная диаграмма этой цепи показана на рис. 3.16.

В рассмотренных выше примерах векторы $\dot{U}$ и $\dot{I}$ располагались на комплексной плоскости в первом и четвертом ее квадрантах. При построении векторных диаграмм сложных цепей (трансформатор, асинхронный двигатель) комплексные токи и напряжения могут располагаться в любом из четырех ее квадрантов.

3.15. Комплексные сопротивление и проводимость

а) *Комплексное сопротивление* $\underline{Z}$ есть отношение комплексного напряжения $\dot{U}$ к комплексному току $\dot{I}$:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\psi_u - \psi_i)} = ze^{j\varphi}.$$

Здесь z — полное сопротивление цепи, а φ — угол сдвига между напряжением и током.

Переходя к алгебраической форме записи $\underline{Z}$ через тригонометрическую, находим, что его вещественная часть $z \cos \varphi$ соответствует активному сопротивлению цепи R , а его мнимая часть $z \sin \varphi$ соответствует реактивному сопротивлению X . Поэтому

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = ze^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = (R + jX). \quad (3.35)$$

Таким образом, комплексное сопротивление содержит в себе полное сопротивление цепи z , активное сопротивление R , реактивное сопротивление X и угол сдвига фаз φ между напряжением и током.

б) *Комплексная проводимость* $\underline{Y}$ есть величина, обратная комплексному сопротивлению $\underline{Z}$ и равная отношению комплексного тока к комплексному напряжению:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}} = \frac{I}{U}e^{j(\psi_i - \psi_u)} = ye^{-j\varphi}.$$

Здесь y — полная проводимость цепи, а φ — угол сдвига фаз между напряжением и током.

Аналогично находим, что ее вещественная часть $u \cos \varphi$ соответствует активной проводимости цепи G , а ее мнимая часть $u \sin \varphi$ — реактивной проводимости b . Поэтому

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = (G - jb). \quad (3.36)$$

Заметим, что формулы (3.35) и (3.36) представляют собой закон Ома в комплексной форме записи для участка цепи с $\underline{Z}$ или $\underline{Y}$.

Из соотношений 3.35 и 3.36 вытекают следующие соответствия между мгновенными и комплексными значениями напряжений и токов:

$$u_R = iR \div R\dot{I}; \quad u_L = L \frac{di}{dt} \div j\omega L \dot{I}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int idt = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} \div \frac{\dot{I}}{j\omega C};$$

$$i_G = Gu \div G\dot{U} \quad i_C = Cdu/dt \div j\omega C \dot{U},$$

где ($\div$) — принятый здесь знак соответствия.

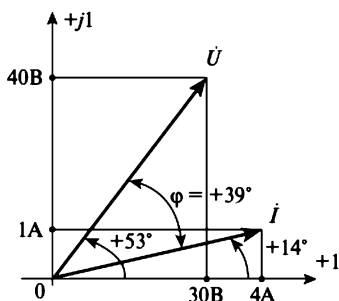


Рис. 3.17. Изображение комплексных тока и напряжения

3.16. Комплексная мощность

Комплексная мощность есть произведение комплексного напряжения на сопряженный комплексный ток цепи:

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = Se^{j\varphi}.$$

Это показательная форма записи комплексной мощности¹. Здесь S — полная мощность цепи; φ — угол сдвига фаз между напряжением

¹ Знак * над комплексной мощностью носит название «тильда» и ставится вместо точки, потому что мощность не является синусоидой.

и током; $\dot{I} = Ie^{-j\psi_i}$ — комплексный ток, сопряженный заданному комплексному току $\dot{I} = Ie^{+j\psi_i}$. Переходя от показательной к алгебраической форме записи, находим, что ее вещественная часть $S \cos \varphi$ соответствует активной мощности цепи P , а ее мнимая часть $S \sin \varphi$ — реактивной мощности цепи Q . Поэтому

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I} = Se^{j\varphi} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = P + jQ. \quad (3.37)$$

Таким образом, комплексная мощность цепи содержит в себе полную мощность S , активную мощность P , реактивную мощность Q и угол сдвига фаз φ между напряжением и током. Заметим, что полная мощность S равна модулю комплексной мощности $\tilde{S}$:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ ВА.}$$

3.17. Законы Кирхгофа в комплексной форме записи

Законы Кирхгофа в комплексной форме записи и алгоритмы составления уравнений по этим законам выполняются.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма комплексных токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^K \dot{I}_k = 0, \quad (3.38)$$

где K — число ветвей, подходящих к данному узлу цепи.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма комплексных ЭДС контура равна алгебраической сумме комплексных напряжений на всех комплексных сопротивлениях этого контура:

$$\sum_m^Q \dot{E}_q = \sum_{n=1}^N \dot{I}_n Z_n, \quad (3.39)$$

где Q — число источников ЭДС контура; N — число комплексных сопротивлений контура.

3.18. Аналогия с цепями постоянного тока

Сравнивая формулы закона Ома и законов Кирхгофа для цепей постоянного тока с соответствующими формулами для цепей синусо-

идального тока в комплексной форме записи, легко убеждаемся в том, что они формально тождественны (аналогичны) друг другу, хотя физические процессы в сравниваемых цепях различны. Таким образом, если в формулах для цепей постоянного тока заменить U , I , E , R и G на $\underline{U}$, $\underline{I}$, $\underline{E}$, $\underline{Z}$ и $\underline{Y}$, то получаем формулы, записанные в комплексной форме. Это позволяет все методы расчета цепей постоянного тока применять для расчета комплексных токов, на основании которых находят действующие и мгновенные значения искомых токов.

Расчет цепей комплексным методом рекомендуется вести в следующей последовательности.

1. Изображаем заданные синусоидальные напряжения и параметры реактивных элементов комплексными числами.

2. Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составляем уравнения для определения комплексных токов (напряжений).

3. Определяем комплексные токи в ветвях в результате решения алгебраических уравнений п. 2 (основные алгебраические действия с комплексными числами, которые используются на этом этапе, приведены в приложении).

4. С учетом соответствия преобразуем найденные комплексные токи в ветвях в соответствующие мгновенные значения.

3.19. Резонанс в цепях синусоидального тока

Резонансом в цепи, содержащей сопротивления индуктивности и емкости, называется такой режим, при котором ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе. Это обусловлено тем, что реактивные сопротивления и проводимости отдельных участков цепи могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, следовательно, взаимно компенсироваться. Существует резонанс напряжений и резонанс токов.

Резонанс в последовательной цепи из элементов R , L , C (резонанс напряжений). Комплексное сопротивление цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов R , L и C (рис. 3.18) имеет вид:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jx = ze^{j\varphi},$$

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad z = \sqrt{R^2 + x^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

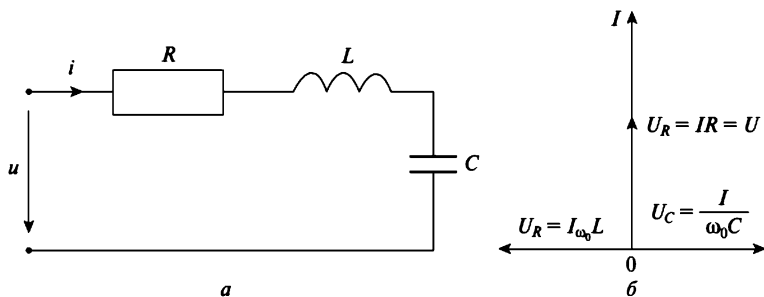


Рис. 3.18. Резонанс в последовательной цепи

Резонанс имеет место, как указано выше, при $\varphi = 0$, что равносильно при последовательном соединении условию:

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Резонанса можно достичь, изменяя или частоту приложенного к цепи напряжения, или индуктивности катушки или емкости конденсатора. При этом значения угловой частоты, при которой наступает резонанс, определяется формулой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Частоту ω_0 называют резонансной частотой. Если реактивные сопротивления $x_L = x_C$ при резонансе превосходят по величине активное сопротивление R , то напряжения на индуктивности $U_L = I\omega_0 L$ и на емкости $U_C = \frac{I}{\omega_0 C}$ могут превосходить напряжение на зажимах цепи.

Поэтому такой резонанс называют *резонансом напряжений*.

Отношение

$$Q = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{U_{L0}}{U}$$

определяет кратность превышения напряжения на индуктивности и на емкости над напряжением на зажимах всей цепи. Величину Q , определяющую резонансные свойства контура, называют *добротностью контура*.

Резонанс в параллельной цепи из элементов R, L, C (резонанс токов).

Условием резонанса при параллельном соединении активного индуктивного и емкостного сопротивлений (рис. 3.19, а) является также отсутствие сдвига фаз между током и напряжением на входе цепи.

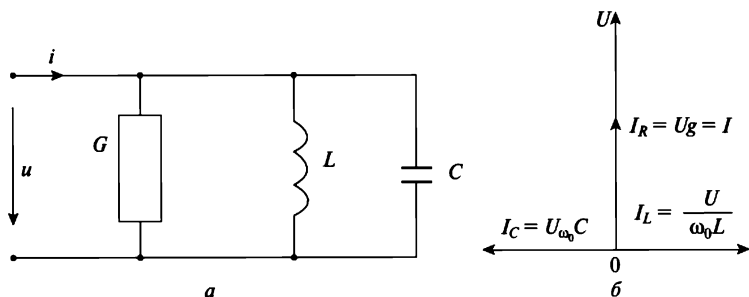


Рис. 3.19. Резонанс в параллельной цепи

Комплексная проводимость цепи имеет вид

$$\underline{Y} = g - jb = ye^{-j\varphi},$$

$$\text{где } y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b_L - b_C}{g}.$$

Резонанс имеет место, как указано выше, при $\varphi = 0$, что равносильно при параллельном соединении условию

$$b = b_L - b_C = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\omega L} - \omega C = 0.$$

Резонанса токов можно достичь, изменяя или частоту приложенного к цепи напряжения, или индуктивности катушки или емкости конденсатора. При этом значения угловой частоты, при которой наступает резонанс, определяется формулой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

При резонансе реактивная проводимость цепи равна нулю, и полная проводимость цепи достигает своего минимального значения. Поэтому ток в общей ветви $I = Uy$ при неизменном значении оказывается наименьшим в отличие от резонанса с последовательным соединением. Векторная диаграмма при резонансе в рассматриваемой цепи приведена на рис. 3.2, б. При этом токи в индуктивности и в емкости равны и находятся в противофазе. По величине они могут превосходить, а иногда намного, суммарный ток в цепи. Поэтому такой резонанс называют *резонансом токов*.

Отношение

$$Q = \frac{I_{C0}}{I} = \frac{I_{L0}}{I}$$

определяет кратность превышения тока в индуктивности и тока в емкости над суммарным током всей цепи.

Величину Q , определяющую резонансные свойства контура, называют *добротностью контура*.

3.20. Цепи с индуктивно связанными катушками

Если при изменении во времени тока в одной катушке на зажимах второй возникает ЭДС — такие катушки называются *индуктивно связанными*. Это, например, катушки на стальных сердечниках электрических машин и аппаратов, провода линий электропередачи, а также многие другие электротехнические устройства.

При протекании в первой катушке синусоидального тока i_1 в ней возникает магнитное поле, характеризующееся потокоцеплением самоиндукции $\psi_{L1} = w_1 \Phi$, где w_1 — число витков первой катушки, Φ — магнитный поток, проходящий через один виток катушки. Это потокоцепление в соответствии с законом электромагнитной индукции индуцирует в первой катушке ЭДС самоиндукции:

$$e_{L1} = -d\psi_{L1} / dt.$$

Напряжение u_1 на этой катушке численно равно этой ЭДС, но направлено в противоположную сторону и поэтому имеет обратный знак:

$$u_1 = e_{L1} = + \frac{d\psi_{L1}}{dt} = L \frac{di_1}{dt}.$$

Здесь $\psi_{L1} = L_1 i_1$, где L_1 — индуктивность первой катушки.

В комплексной форме записи это напряжение имеет вид $\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1$, где $\omega L_1 = X_{L1}$ — индуктивное сопротивление первой катушки.

При наличии магнитной связи между первой и второй катушками некоторая часть потокоцепления самоиндукции первой катушки ψ_{L1} проникает во вторую катушку. Эта его часть ψ_{M21} называется потокоцеплением взаимной индукции второй катушки, вызванное током i_1 первой катушки.

Потокоцепление ψ_{M21} индуцирует во второй катушке ЭДС взаимной индукции $e_{M21} = - \frac{d\psi_{M21}}{dt}$. Отношение потокоцепления взаимной индукции ψ_{M21} к току в первой катушке i_1 есть взаимная индуктивность этих катушек: $\psi_{M21} / i_1 = M_{21}$. Взаимная индуктивность так же, как и собственная индуктивность, измеряется в генри (Гн). С учетом по-

следнего соотношения ЭДС взаимной индукции второй катушки приобретает вид

$$e_{M21} = -\frac{d\psi_{M21}}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Аналогичные рассуждения можно привести и для случая, когда синусоидальный ток i_2 протекает только по второй катушке. Потокосцепление самоиндукции ψ_{L2} второй катушки индуцирует в ней электродвижущую силу самоиндукции $e_{L2} = -(d\psi_{L2}/dt)$. Напряжение на второй катушке равно ей по величине и противоположно по знаку: $u_2 = -e_{L2} = +d\psi_{L2}/dt = L_2 di_2/dt$. Здесь $\psi_{L2} = L_2 i_2$, где L_2 — индуктивность второй катушки. В символической форме записи это напряжение имеет вид $\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2$, где $\omega L_2 = X_{L2}$ — индуктивное сопротивление второй катушки.

Некоторая часть потокосцепления самоиндукции ψ_{L2} проникает в первую катушку и образует там потокосцепление взаимной индукции ψ_{M12} . Оно индуцирует в первой катушке ЭДС взаимной индукции $e_{M12} = -d\psi_{M12}/dt$. *Отношение потокосцепления взаимной индукции ψ_{M12} к току во второй катушке i_2 есть взаимная индуктивность этих двух катушек: $\psi_{M12}/i_2 = M_{12}$. С учетом этого соотношения ЭДС взаимной индуктивности в первой катушке $e_{M12} = -M_{12} di_2/dt$.*

Заметим, что для линейных электрических цепей взаимная индуктивность двух катушек не зависит от того, каким образом она была определена экспериментально:

$$\frac{\psi_{M12}}{i_2} = \frac{\psi_{M21}}{i_1} = M_{12} = M_{21} = M. \quad (3.33)$$

Она является их общим параметром и не зависит от величин потокосцеплений и токов, а определяется только конструкцией катушек, их взаимным расположением и магнитными свойствами окружающей среды.

Придвигая катушки друг к другу, мы увеличиваем M , а отодвигая их друг от друга, уменьшаем M . Наибольшей взаимной индуктивностью обладают две катушки, навитые одинаково друг на друга, а наименьшей — расположенные своими осями под углом 90° друг к другу или далеко удаленные друг от друга.

При одновременном протекании токов в обеих катушках в соответствии с принципом наложения имеем распределение их магнитных потоков.

Здесь в каждой из катушек индуцируются одновременно две электродвижущие силы: ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимоиндукции. Поэ-

тому напряжения u_1 и u_2 каждой индуктивно связанной катушки имеют две составляющие: одна из них (u_L) вызвана действием ЭДС самоиндукции, а другая (u_M) вызвана действием ЭДС взаимной индукции:

$$u_1 = u_{L1} \pm u_{M12} = \frac{d\psi_{L1}}{dt} \pm \frac{d\psi_{M12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad (3.41)$$

$$u_2 = u_{L2} \pm u_{M21} = \frac{d\psi_{L2}}{dt} \pm \frac{d\psi_{M21}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \quad (3.42)$$

В формулах (3.41) и (3.42) знаки (+) или (–) у вторых составляющих напряжений зависят от взаимного направления магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции в катушках.

Знак (+) берется в том случае, когда потоки самоиндукции и взаимной индукции совпадают по направлению. Такое соединение катушек называется *согласным включением*. Если потоки самоиндукции и взаимной индукции не совпадают по направлению, то берется знак (–), и такое соединение катушек называется *встречным включением*.

Переходя к комплексной форме записи напряжений на индуктивно связанных катушках, получаем

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1, \end{cases} \quad (3.43)$$

где $j\omega L_1 \dot{I}_1$ и $j\omega L_2 \dot{I}_2$ — комплексные напряжения первой и второй катушек, вызванные действиями токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ катушек; $\pm j\omega M \dot{I}_2$ — дополнительная составляющая напряжения первой катушки, вызванная током $\dot{I}_2$ второй катушки; $\pm j\omega M \dot{I}_1$ — дополнительная составляющая напряжения второй катушки, вызванная током $\dot{I}_1$ первой катушки. В уравнениях (3.4) знак (+) соответствует согласному включению катушек, а знак (–) — встречному включению.

Способ включения индуктивно связанных катушек указывается на ее схеме путем маркировки «начал» катушек либо в виде жирных точек (знак $\cdot$), либо в виде звездочек (знак $*$). При этом действует следующее правило: *если токи в катушках направлены к одноименным выводам, то включение катушек является согласным, а если к разноименным выводам — встречным*.

Цепь с трансформаторной связью между катушками. Такая цепь представлена на рис. 3.20, у которой катушки не имеют друг с другом проводниковых соединений.

Известны параметры обеих катушек R_1, R_2, L_1, L_2 , их взаимная индуктивность M , частота ω и комплексное напряжение $\dot{U}_1$. Требуется определить комплексные токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ катушек при согласном и встречном их включении.

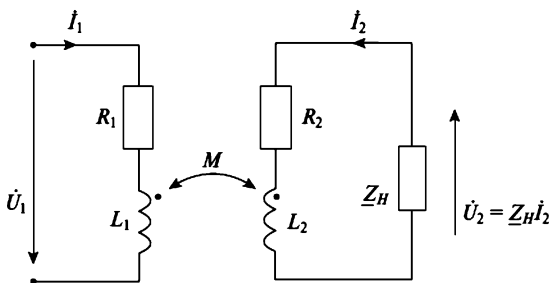


Рис. 3.20. Индуктивности с трансформаторной связью

Решение. Составляем уравнения для левого и правого контуров цепи в соответствии с формулами (3.36) и получаем

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 \pm j\omega M\dot{I}_2; \\ 0 = \pm j\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 + \underline{Z}_H \dot{I}_2. \end{cases} \quad (3.44)$$

В этих уравнениях знак (+) у составляющих вида $j\omega M\dot{I}$ соответствует согласному включению катушек, а знак (–) — встречному включению.

Заметим, что в уравнениях (3.44) $\underline{Z}_H \dot{I}_2 = \dot{U}_2$.

Обозначаем в этих уравнениях для краткости записи

$$(R_1 + j\omega L_1) = \underline{Z}_1; \quad (R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_H) = \underline{Z}_2; \quad j\omega M = \underline{Z}_M$$

и получаем

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \underline{Z}_M \dot{I}_2; \quad 0 = \pm \underline{Z}_M \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2. \quad (3.45)$$

Решая эту систему уравнений, находим комплексные токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ обеих катушек цепи. При решении задачи применяем теорию определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \pm \underline{Z}_M \\ \pm \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U}_1 & \pm \underline{Z}_M \\ 0 & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_2 \dot{U}_1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \dot{U}_1 \\ \pm \underline{Z}_M & 0 \end{vmatrix} = -\underline{Z}_M \dot{U}_1;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\underline{Z}_2 \dot{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\mp \underline{Z}_M \dot{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

Заметим, что знак (–) в числителе $\dot{I}_2$ соответствует согласному включению катушек, а знак (+) — встречному.

Вопросы для самопроверки

1. Как аналитически описывается мгновенный, максимальный и действующий токи в цепи переменного тока?
2. Как производится расчет цепей при последовательном соединении элементов?
3. Что представляют собой топографические диаграммы?
4. Как производится расчет цепей при параллельном соединении элементов?
5. Как производится расчет цепей при смешанном соединении приемников?
6. Как рассчитывается мощность в цепи переменного тока?
7. Как определяется коэффициент полезного действия в цепи переменного тока?
8. Что подразумевается под коэффициентом мощности в цепи переменного тока?
9. Как определяется полная, активная и реактивная мощности в цепи переменного тока?
10. Какие формы комплексного числа вы знаете?
11. Как изображается вектор на комплексной плоскости?
12. Как записываются законы Ома и Кирхгофа в символической форме?
13. Каков порядок расчета цепей переменного тока в символической форме?
14. Какое условие должно выполняться, чтобы в цепи, содержащей реактивные элементы, возник резонанс?
15. Почему нельзя получить резонанс в цепи в результате изменения величины напряжения на входе цепи?
16. В каких случаях добротность цепи больше 1, а в каких — меньше 1?
17. Для всех ли цепей резонансная частота может быть определена из соотношения $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$?
18. Какое условие необходимо наложить на две катушки, чтобы они были индуктивно связанные?
19. Как определяется на схеме встречное и согласное включение?

ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

4.1. Основные сведения о трехфазных цепях

Трехфазная система цепей. При практическом использовании электроэнергии исключительное преимущество дает применение трехфазной системы цепей, представляющей собой совокупность трех сходных по конфигурации электрических цепей переменного тока, в которых действуют три периодические ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе. Отдельные цепи, входящие в такую систему, называют ее фазами и по стандарту обозначают первыми тремя буквами латинского алфавита *A, B, C*. Этими же буквами помечают в виде индексов и все величины, относящиеся к той или иной фазе трехфазной системы цепей.

Различают *несвязанные* трехфазные системы цепей, отдельные фазы которых электрически не соединены друг с другом, и *связанные* трехфазные системы цепей, в которых все три фазы электрически соединены друг с другом и по существу образуют одну электрическую цепь, сокращенно называемую трехфазной цепью.

Как правило, на практике встречаются симметричные трехфазные цепи, отдельные фазы которых одинаковы не только по конфигурации, но и по всем параметрам входящих в них элементов. Однако в некоторых случаях, в частности в аварийных ситуациях, приходится сталкиваться и с несимметричными трехфазными цепями, в которых упомянутые условия не выполняются.

Заметим, что обычные электрические цепи переменного тока, с которыми мы имели дело до сих пор, в противоположность трехфазным цепям, часто называют однофазными цепями.

Простейший трехфазный генератор. Три ЭДС одинаковой частоты и сдвинутые друг относительно друга по фазе на определенные углы получают в специальных генераторах, называемых трехфазными генераторами.

Простейший по конструкции трехфазный генератор представляет собой три одинаковые жестко скрепленные друг с другом витка проволоки, расположенные в равномерном магнитном поле на оси, пер-

пендикулярной направлению поля. Плоскости отдельных витков повернуты друг относительно друга на равные углы по 120° .

При вращении такой системы витков с постоянной угловой скоростью в каждом из них будет индуцироваться синусоидальная ЭДС, начальная фаза которой определяется начальным положением витка в поле. Так, например, при начальном положении витка A , показанном на рис. 4.1, когда нормаль n_A к плоскости витка совпадает по направлению с полем, начальная фаза ЭДС e_A , индуцирующейся в этом витке, будет равна нулю и, следовательно, эту ЭДС можно записать в виде:

$$e_A = E_{Am} \sin \omega t.$$

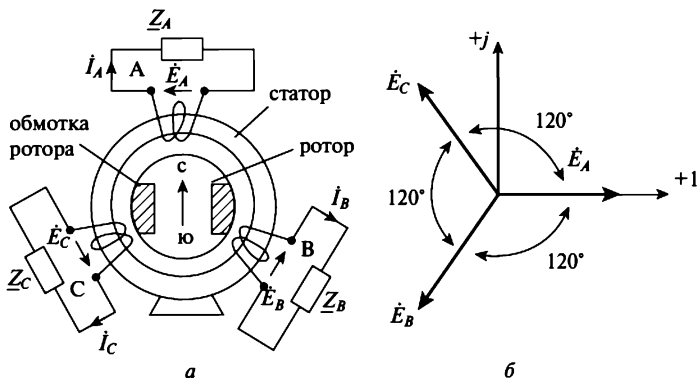


Рис. 4.1. Простейшая схема трехфазного генератора

Расположив ЭДС обмотки A вдоль оси вещественных чисел комплексной плоскости, получаем запись ЭДС в следующем виде:

$$\dot{E}_A = E_A; \quad \dot{E}_B = E_A e^{j240^\circ} = E_A e^{-j120^\circ}; \quad \dot{E}_C = E_A e^{j120^\circ}, \quad (4.1)$$

где $E_A = E_B = E_C$ — действующие значения фазных ЭДС генератора.

Величину e^{+j120° для краткости обозначают буквой a ($e^{+j120^\circ} = a$) и называют *фазовым множителем*. Используя его в формулах 4.1, получаем

$$\dot{E}_A = E_A; \quad \dot{E}_B = a^2 E_A; \quad \dot{E}_C = a E_A. \quad (4.1, a)$$

Заметим, что

$$a = e^{j120^\circ} = (-0,5 + j0,87); \quad a^2 = e^{j240^\circ} = (-0,5 - j0,87); \\ 1 + a + a^2 = 0. \quad (4.1, б)$$

С учетом формул (4.1, б) очевидно, что сумма трех векторов симметричной системы фазных ЭДС генератора, показанных на рис. 4.1, б, равна нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = E_A(1 + a + a^2) = 0. \quad (4.2)$$

Если к обмоткам генератора (рис. 4.1, а) подсоединить нагрузочные сопротивления, получится простейшая (несвязанная) трехфазная цепь, состоящая из трех отдельных двухпроводных цепей, называемых *фазами*. Для отличия друг от друга их обозначают буквами А, В, С. На рисунке 4.1, а этими буквами обозначены начала фазных обмоток генератора.

Термин «фаза», употребляемый здесь, следует отличать от термина «фаза», используемого в теории цепей синусоидального тока для обозначения стадии развития синусоиды тока, напряжения или ЭДС.

Обычно трехфазные цепи связывают звездой (условное обозначение Y) или треугольником (условное обозначение Δ).

4.2. Соединение трехфазной цепи звездой

При соединении звездой концы всех трех обмоток генератора объединяют в одну общую точку, которая называется нейтральной точкой генератора, или *нейтралью* (рис. 4.2). Также поступают и с приемниками, которые образуют нейтральную точку (нейтраль) трехфазного приемника.

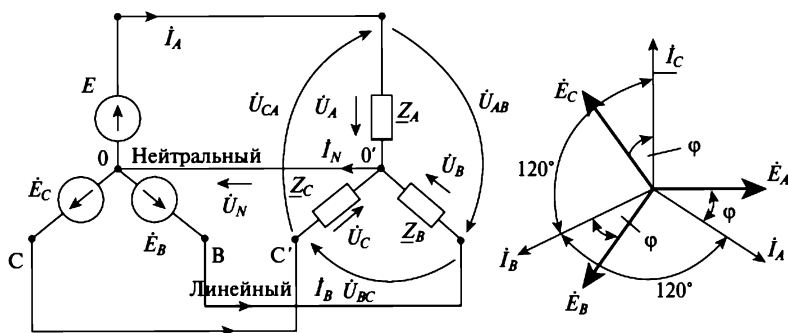


Рис. 4.2. Трехфазная цепь, связанная звездой

При этом три обратных провода отдельных фаз объединяются в один, и система из шестипроводной становится четырехпроводной.

Провода, идущие от генератора к приемникам, называются *линейными*, а провод, соединяющий нейтральные точки генератора и приемника, называется *нейтральным*. Показанные на этом рисунке направления действия ЭДС, токов и напряжений соответствуют направлениям, принятым в большинстве учебников по теории цепей.

Трехфазная цепь, связанная звездой, имеет ряд особенностей.

1. Токи линейных проводов, не разветвляясь, попадают в фазы приемников, поэтому фазные токи равны токам в линейных проводах:

$$\dot{I}_\phi = \dot{I}_A.$$

2. Ток в нейтральном проводе $\dot{I}_N$ равен алгебраической сумме комплексных токов всех трех фаз. В соответствии с первым законом Кирхгофа для нейтральной точки приемника (0') имеем

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N. \quad (4.3)$$

При отсутствии или обрыве нейтрального провода получаем

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

В этом случае, зная два линейных тока, можно легко найти третий ток.

3. Если генератор вырабатывает симметричную систему фазных ЭДС (рис. 4.1, б) и, кроме того, комплексные сопротивления всех трех фаз цепи одинаковы ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\phi = R \pm jX$), то комплексные токи, определяемые в соответствии с формулой закона Ома ($\dot{I}_\phi = \dot{U}_\phi / \underline{Z}_\phi$), имеют одинаковые действующие значения и сдвинуты друг относительно друга по фазе на 120° (как это показано на рис. 4.2, б). Они образуют симметричную систему фазных токов и при этих условиях $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. Следовательно, ток в нейтральном проводе отсутствует и этот провод фактически не нужен.

Рассмотренный выше режим работы трехфазной цепи называется *симметричным*. В этом режиме работают все трехфазные приемники (например, трехфазные двигатели, нагревательные печи). Они имеют три одинаковые обмотки и не нуждаются в нейтральном проводе. Такие трехфазные приемники называют *симметричными*. Однофазные же приемники (лампы освещения, бытовые приборы) при соединении их звездой требуют наличия нейтрального провода для поддержания одинакового напряжения на всех трех фазах цепи.

4. Трехфазные цепи, связанные звездой, широко используются в электроэнергетике для передачи электромагнитной энергии на большие расстояния.

Возможная несимметрия в ЛЭП компенсируется нейтральным проводом, в качестве которого используется земля (система с заземленной нейтралью).

5. При связывании звездой (рис. 4.2) различают фазные и линейные напряжения. Фазные напряжения ($\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$, $\dot{U}_C$) действуют между началом и концом каждой фазы. Их направление принято в соответствии с направлением фазных токов цепи — от начала фазы к ее концу (к нейтральной точке $0'$). Линейные напряжения ($\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{CA}$) действуют между линейными проводами. Их направление принято по часовой стрелке.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для каждого из трех контуров, образованных одним линейным и двумя фазными напряжениями, имеем

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (4.4)$$

Для построения, например, вектора линейного напряжения $\dot{U}_{AB}$ надо сложить в соответствии с формулами (4.4) вектор фазного напряжения $\dot{U}_A$ с вектором $\dot{U}_B$, взятым с обратным знаком: $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A + (-\dot{U}_B)$. Если полученный таким образом вектор $\dot{U}_{AB}$ перенести параллельно самому себе так, чтобы его конец совпал с концом вектора $\dot{U}_A$, то его начало совпадет с концом вектора $\dot{U}_B$. Аналогичным образом следует поступить и при построении векторов $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$:

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B + (-\dot{U}_C); \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C + (-\dot{U}_A),$$

как это показано на векторной диаграмме рис. 4.3.

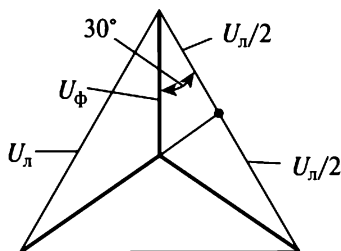


Рис. 4.3. Векторная диаграмма симметричной цепи, соединенной звездой

Перенеся эти векторы параллельно самим себе аналогично предыдущему, получим, что вектор линейного напряжения $\dot{U}_{BC}$ расположит-

ся между концами векторов фазных напряжений $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$, а вектор линейного напряжения $\dot{U}_{CA}$ — между концами векторов фазных напряжений $\dot{U}_C$ и $\dot{U}_A$.

В частном случае, если система векторов фазных напряжений симметрична, то система векторов линейных напряжений также симметрична и образует равносторонний треугольник, из геометрии которого следует, что действующие значения (длины векторов) линейных напряжений в $\sqrt{3}$ больше действующих значений фазных напряжений:

$$U_L = \sqrt{3}U_\phi. \quad (4.5)$$

4.3. Соединение трехфазной цепи треугольником

При соединении трехфазной цепи треугольником (рис. 4.4) конец обмотки фазы А генератора соединяется с началом обмотки В, конец обмотки В — с началом обмотки С, конец обмотки С — с началом обмотки А, образуя замкнутый контур.

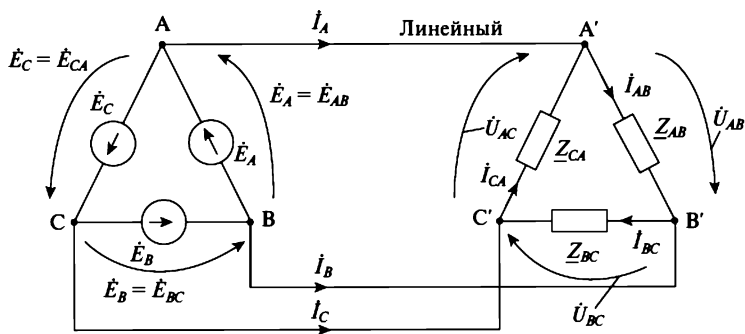


Рис. 4.4. Трехфазная цепь, связанная треугольником

Из начала фаз А, В и С генератора отходят три провода к приемникам энергии. Они называются *линейными*. Направления действия линейных токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ принято на рис. 4.4 такое же, как и при соединении звездой — от генератора к приемнику.

Заметим, что при соединении треугольником фазные ЭДС генератора и фазные сопротивления приемников удобно здесь обозначать двойными индексами: $\dot{E}_A = \dot{E}_{AB}$; $\dot{E}_B = \dot{E}_{BC}$; $\dot{E}_C = \dot{E}_{CA}$; $\underline{Z}_A = \underline{Z}_{AB}$;

$\underline{Z}_B = \underline{Z}_{BC}$; $\underline{Z}_C = \underline{Z}_{CA}$. Это же относится к фазным токам и фазным напряжениям, направления действия которых принято по часовой стрелке.

Трехфазная цепь, связанная треугольником, имеет ряд особенностей.

1. Напряжения между линейными проводами ($\dot{U}_L$) одновременно являются и фазными ($\dot{U}_\phi$) напряжениями: $\dot{U}_L = \dot{U}_\phi$.

2. При связывании трехфазной цепи треугольником различают фазные ($\dot{I}_{AB}$, $\dot{I}_{BC}$ и $\dot{I}_{CA}$) и линейные ($\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$) токи. Применяя первый закон Кирхгофа к узлам А, В и С трехфазного приемника, получаем следующие соотношения между этими токами:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \quad (4.6)$$

Эти соотношения в виде векторной диаграммы показаны на рис. 4.5, где представлена симметричная система фазных токов $\dot{I}_{AB}$, $\dot{I}_{BC}$ и $\dot{I}_{CA}$ и показано, что векторы линейных токов расположены между концами векторов фазных токов.

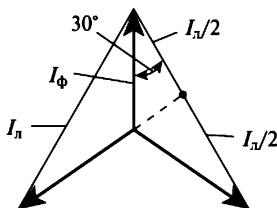


Рис. 4.5. Векторная диаграмма симметричной цепи, соединенной треугольником

В частном случае при симметрии системы векторов фазных токов (рис. 4.5) система векторов линейных токов получается также симметричной и образует равносторонний треугольник, из геометрии которого следует, что действующие значения (длины векторов) линейных токов в $\sqrt{3}$ больше действующих значений фазных токов:

$$I_L = \sqrt{3} I_\phi. \quad (4.7)$$

4.4. Расчет трехфазных цепей

Трехфазные цепи могут работать в двух основных режимах — симметричном и несимметричном.

а) *Симметричный режим работы трехфазной цепи* имеет место при следующих двух условиях: генератор вырабатывает симметричную систему ЭДС и, кроме того, комплексные сопротивления всех трех фаз приемника одинаковы (симметричный приемник). Очевидно, что при симметричном режиме достаточно произвести расчет только одной фазы трехфазной цепи (например, фазы А). Токи других фаз будут иметь с фазой А одинаковые амплитуды (а также и действующие значения) и сдвинуты по фазе относительно своих фазных напряжений на один и тот же угол φ . При этом друг относительно друга токи всех трех фаз будут сдвинуты по фазе на $\pm 120^\circ$, как это показано на рис. 4.2, б.

б) *Несимметричный режим работы трехфазной цепи* имеет место в тех случаях, когда хотя бы одно из двух условий симметричного режима отсутствует. При этом необходимо производить расчеты токов и напряжений всех трех фаз, используя известные методы расчета цепей синусоидального тока.

Пример 4.1. Трехфазная цепь (рис. 4.2, а) состоит из генератора, вырабатывающего симметричную систему ЭДС с действующим значением $E = 220$ В, и симметричного приемника, соединенного звездой, сопротивление каждой фазы которого равно $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\phi = R = 22$ Ом. Требуется определить токи и напряжения всех трех фаз приемника, ток в нейтральном проводе.

Решение. 1. Принимаем направление действия ЭДС, токов и напряжений в данной цепи в соответствии с рис. 4.2, а.

2. Определяем комплексные фазные ЭДС генератора. Для этого совмещаем ЭДС фазы А с осью вещественных чисел (рис. 4.1, а) и получаем $\dot{E}_A = 220$ В, $\dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190)$ В; $\dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190)$ В.

3. Определяем комплексные линейные напряжения приемника. Для этого воспользуемся вторым законом Кирхгофа для контуров цепи, образованных фазными ЭДС генератора и линейными напряжениями приемника:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = [220 - (-110 - j190)] =$$

$$= (330 + j190) = \sqrt{330^2 + 190^2} e^{j \arctg \frac{190}{330}} = 380e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = [(-110 - j190) - (-110 + j190)] = -j380 = 380e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = [(-110 + j190) - 220] = -330 + j190 = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}.$$

Действующие значения всех трех линейных напряжений одинаковы и составляют $U_A = 380$ В.

4. Определяем комплексные фазные напряжения приемника. В соответствии со вторым законом Кирхгофа непосредственно из схемы цепи находим, что при наличии нейтрального провода они равны фазным ЭДС генератора:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A = 220 \text{ В}; \quad \dot{U}_B = \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \dot{U}_C = \dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} \text{ В}.$$

Действующие значения всех трех фазных напряжений одинаковы ($U_\phi = 220$ В) и в $\sqrt{3}$ раз меньше линейных напряжений ($U_A = 380$ В).

5. Определяем комплексные фазные (они же линейные) токи приемника, используя закон Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{22} = 10 \text{ А}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{22} = 10e^{-j120^\circ} = (-5 - j8,7) \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{220e^{+j120^\circ}}{22} = 10e^{+j120^\circ} = 10(-0,5 + j8,7) = (-5 + j8,7) \text{ А}.$$

Действующие значения токов во всех трех фазах цепи одинаковы и составляют $I_\phi = 10$ А. Вектора этих токов образуют симметричную систему, и их сумма, определяющая ток в нейтральном проводе $\dot{I}_N$ в соответствии с формулой (4.3, а), равна нулю. Следовательно, при симметричном режиме работы нейтральный провод для нормальной работы цепи не нужен.

Пример 4.2. Три одинаковых нагрузочных сопротивления $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}_\phi = (30 + j40)$ Ом соединены треугольником и подключены к трехфазному генератору, фазные обмотки которого объединены в звезду (рис. 4.6). Генератор вырабатывает симметричную систему фазных ЭДС с действующим значением $E_\phi = 380$ В.

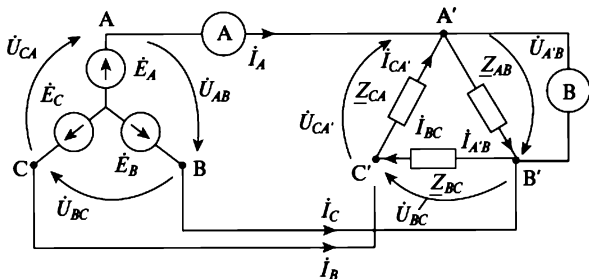


Рис. 4.6. Схема соединения генератора с нагрузкой по системе звезда — треугольник

Требуется определить показания электромагнитных амперметра и вольтметра, включенных в цепь.

Решение. 1. Данная трехфазная цепь работает в симметричном режиме, поэтому для решения задачи достаточно рассчитать только одну ее фазу (например, фазу АВ приемника). Принятые направления напряжений и токов соответствуют рис. 4.6.

2. Действующие значения линейных ЭДС трехфазного генератора в $\sqrt{3}$ больше действующих значений его фазных ЭДС и составляют $E_{\text{л}} = \sqrt{3}E_{\text{ф}} = 660$ В. Провода линии электропередачи в нашем примере не обладают сопротивлением, поэтому действующие значения фазных напряжений приемника, соединенного треугольником, $U_{\text{ф}} = E_{\text{л}} = 660$ В. Таким образом, показание вольтметра электромагнитной системы, включенного в фазу АВ приемника, составляет 660 В.

3. Действующие значения тока в фазе АВ приемника:

$$I_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{ф}}}{z_{\text{ф}}} = \frac{660}{50} = 13 \text{ А},$$

где $z_{\text{ф}} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ Ом.

4. Угол сдвига фаз φ между напряжением и током фазы АВ: $\varphi = \arctg X/R = \arctg 40/30 = 53^\circ$. На этот угол (цепь имеет индуктивный характер) ток $I_{\text{АВ}}$ в фазе АВ отстает от приложенного напряжения $U_{\text{АВ}}$.

5. Действующие значения напряжений и токов в фазах ВС и СА приемника такие же, как и в фазе АВ, но их вектора сдвинуты относительно векторов фазы АВ на 120° : в фазе ВС на 120° по часовой стрелке, а в фазе СА на 120° против часовой стрелки.

6. При симметричном режиме работы трехфазной цепи действующие значения линейных токов в $\sqrt{3}$ раз больше действующих значений фазных токов, поэтому $I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}} = \sqrt{3} \cdot 13 = 25$ А. Следовательно, показание амперметра, включенного в любой линейный провод, составляет 25 А.

4.5. Несимметричные режимы трехфазной цепи

Пример 4.3. В трехфазной схеме с несимметричной нагрузкой определить показания электромагнитных амперметров A_1 , A_2 и A_3 и вольтметра, включенных в линейные провода, как это показано

на рис. 4.7 при обрыве (отсутствии) в цепи нейтрального провода. Исходные данные: $\dot{E}_A = 220 \text{ В}$; $\dot{E}_B = 220e^{j240^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}$; $\dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}$; $\underline{Z}_A = 55 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_B = j44 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_C = -j36,6 \text{ Ом}$.

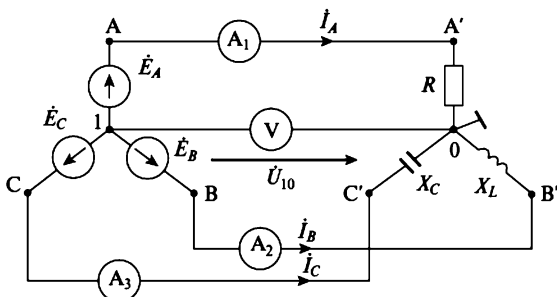


Рис. 4.7. Схема с несимметричной нагрузкой

Решение. 1. Применяем метод узловых напряжений, в соответствии с которым промежуточной неизвестной величиной является узловое напряжение $\dot{U}_{10}$. Приняв нейтраль генератора за узел (1), а нейтраль приемника за опорный узел (0) и направив $\dot{U}_{10}$ от узла 1 к узлу 0, получаем $\dot{U}_{10} = \dot{J}_{11} / \underline{Y}_{11}$, где $\dot{J}_{11} = -(\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C)$ и $\underline{Y}_{11} = (\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C)$.

2. Находим численные значения указанных выше величин:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{55} = 0,0182 \text{ См}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{j44} = -j0,0227 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{-j36,6} = +j0,0273 \text{ См}; \quad \dot{E}_A \underline{Y}_A = 220 \cdot 0,0182 = 4 \text{ А};$$

$$\dot{E}_B \underline{Y}_B = 220e^{j240^\circ} \cdot 0,0227e^{-j90^\circ} = 5e^{j150^\circ} = (-4,3 + j2,5) \text{ А};$$

$$\dot{E}_C \underline{Y}_C = 220e^{j120^\circ} \cdot 0,0272e^{+j90^\circ} = 6e^{j210^\circ} = (-5,2 - j3) \text{ А};$$

$$\dot{J}_{11} = -[4 + (-4,3 + j2,5) + (-5,2 - j3)] = 5,5 + j0,5 = 5,52e^{j5,2^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{Y}_{11} = 0,0182 - j0,0227 + j0,0273 = 0,0182 + j0,0046 = 0,0188e^{j14,2^\circ} \text{ См}.$$

3. Находим узловое напряжение:

$$\dot{U}_{10} = \frac{\dot{J}_{11}}{\underline{Y}_{11}} = \frac{5,52e^{j5,2^\circ}}{0,0182e^{j14,2^\circ}} = 234e^{-j9^\circ} = (289 - j46) \text{ В}.$$

Модуль этого напряжения $U_{10} = 234 \text{ В}$ определяет показание вольтметра V.

4. Определяем токи в линейных проводах, используя закон Ома для обобщенной ветви:

$$\dot{I}_A = \underline{Y}_A (\dot{E}_A + \dot{U}_{10}) = 0,0182[220 + (289 - j46)] = (9,3 - j0,8) = 9,3e^{-j5^\circ} \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= \underline{Y}_B (\dot{E}_B + \dot{U}_{10}) = -j0,0227[(-110 - j190) + (289 - j46)] = \\ &= (-5,4 - j4,1) = 6,7e^{-j217^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_C &= \underline{Y}_C (\dot{E}_C + \dot{U}_{10}) = +j0,0273[(-110 + j190) + (289 - j46)] = \\ &= (-3,9 + j4,9) = 6,3e^{j129^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

5. Показания амперметров, включенных в линейные провода цепи, соответствуют модулям линейных токов и составляют $A_1 = 9,3 \text{ А}$; $A_2 = 6,7 \text{ А}$; $A_3 = 6,3 \text{ А}$.

Пример 4.4. В трехфазной цепи примера 4.1 произошло короткое замыкание фазы А при отсутствии нейтрального провода. Требуется определить комплексные токи и напряжения всех трех фаз приемника, а также напряжение между нейтральной точкой приемника и генератора; построить векторную диаграмму токов и напряжений на комплексной плоскости.

Решение. 1. Исходные данные для расчета: $\dot{E}_\phi = 220 \text{ В}$; $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\phi = R = 22 \text{ Ом}$. Совместим ЭДС фазы А с осью вещественных чисел и получим $\dot{E}_A = 220 \text{ В}$; $\dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}$; $\dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}$.

2. Линейные напряжения приемника остаются такими же, как и при симметричном режиме работы:

$$\dot{U}_{AB} = 380e^{j30^\circ} = (330 + j190) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ} = -j380 \text{ В}; \quad \dot{U}_{CA} = 380e^{+j150^\circ} = (-330 + j190) \text{ В}.$$

Однако фазные напряжения приемника претерпевают изменения.

3. Определяем комплексное напряжение $\dot{U}_N$ между нейтральными точками приемника и генератора. Формула метода узловых напряжений здесь не годится, так как при коротком замыкании фазы А $\underline{Y}_A = \infty$ и она приводит к неопределенности вида ∞/∞ . Поэтому комплексное напряжение $\dot{U}_N$ находим, рассмотрев контур 0AA'0' и составив для него уравнение по второму закону Кирхгофа: $\dot{E}_A = \dot{U}_A + \dot{U}_N$. При коротком замыкании фазы А, $\dot{U}_A = 0$, и получаем, что $\dot{U}_N = \dot{E}_A = 220 \text{ В}$.

4. Определяем комплексные токи в фазах В и С приемника:

$$\dot{I}_B = \underline{Y}_B (\dot{E}_B - \dot{U}_N) = 0,045[(-110 - j190) - 220] = (-15 - j8,6) = 17,3e^{-j150^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \underline{Y}_C (\dot{E}_C - \dot{U}_N) = 0,045[(+110 + j190) - 220] = (-15 + j8,6) = 17,3e^{+j150^\circ} \text{ А}.$$

5. Определяем комплексный ток в линейном проводе А, используя соотношение, согласно которому $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

Тогда

$$\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C) = -[-15 - j8,6] + [-15 + j8,6] = -(-30) = +30 \text{ А}.$$

6. Определяем комплексные напряжения на фазах В и С приемника (напряжение $\dot{U}_A = 0$), используя формулу закона Ома:

$$\dot{U}_B = \dot{I}_B \underline{Z}_B = [(-15 - j8,6) \cdot 22] = (-330 - j190) = 380e^{-j150^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U}_B = -\dot{U}_{AB};$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \underline{Z}_C = [(-15 + j8,6) \cdot 22] = (-330 + j190) = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U}_C = \dot{U}_{CA}.$$

7. На рисунке 4.8 показана в двух вариантах векторная диаграмма токов и напряжений при коротком замыкании фазы А.

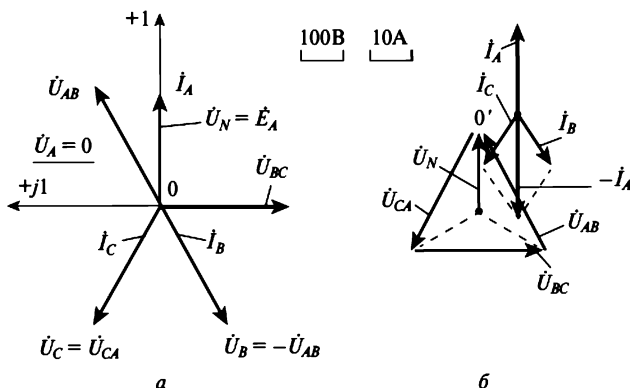


Рис. 4.8. Векторная диаграмма цепи с коротким замыканием фазы А

В первом варианте (рис. 4.8, а) все векторы расположены в начале координат комплексной плоскости (точка 0). Во втором варианте (рис. 4.11, б) векторы линейных напряжений перенесены параллельно самим себе так, чтобы они расположились между концами соответствующих фазных векторов. Такое их расположение позволяет определять действующие значения всех фазных токов и напряжений цепи, не произведя ее полного расчета.

Очевидно, что точка 0' диаграммы, находящаяся при симметричном режиме работы в центре равностороннего треугольника, переме-

щается при коротком замыкании фазы А ($\dot{U}_A = 0$) вверх и совпадает с его вершиной. При этом действующие значения напряжений на фазах В и С становятся равными линейным напряжениям и составляют $U_B = U_C = 380$ В, т.е. увеличиваются по сравнению с симметричным режимом работы данной цепи в $\sqrt{3}$ раз. Токи в фазах В и С совпадают по фазе со своими фазными напряжениями, и их действующие значения составляют $I_B = I_C = 17,3$ А, т.е. возрастают по сравнению с симметричным режимом работы также в $\sqrt{3}$ раз. Ток в закороченной фазе А $\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C)$. Его действующее значение, как это непосредственно следует из геометрических построений, составляет 30 А и увеличивается по сравнению с симметричным режимом работы в 3 раза.

4.6. Мощность трехфазной цепи

Комплексная мощность трехфазной цепи равна сумме комплексных мощностей всех трех ее фаз:

$$\tilde{S}_{3\phi} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C. \quad (4.8)$$

С учетом формулы (4.8) для комплексной мощности трехфазной цепи получаем

$$\tilde{S}_{3\phi} = \sum P_\phi + j \sum Q_\phi,$$

где

$$\sum P_\phi = P_A + P_B + P_C \quad \text{и} \quad \sum Q_\phi = Q_A + Q_B + Q_C. \quad (4.9)$$

В частном случае при симметричном режиме работы трехфазной цепи имеем $P_{3\phi} = 3P_\phi$; $Q_{3\phi} = 3Q_\phi$; $S_\phi = U_\phi I_\phi = \sqrt{P_\phi^2 + Q_\phi^2}$. С учетом формул (4.5) и (4.9) получаем для соединения приемников как звездой, так и треугольником:

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} U_A I_A \cos \varphi; \quad Q_{3\phi} = \sqrt{3} U_A I_A \sin \varphi; \quad S_{3\phi} = \sqrt{3} U_A I_A = \sqrt{(P_{3\phi})^2 + (Q_{3\phi})^2}.$$

Вопросы и задания для самопроверки

1. Из чего состоит простейшая конструкция трехфазного генератора?

2. Как соединяют звездой в трехфазной цепи обмотки генератора и нагрузку?
3. Как соединяют нагрузку треугольником?
4. Какие точки соединяет в трехфазной цепи нейтральный провод?
5. Дайте определение фазным и линейным напряжениям и токам.
6. Какие особенности имеет трехфазная цепь, связанная звездой?
7. Какие особенности имеет трехфазная цепь, связанная треугольником?
8. Какие условия должны выполняться при симметричном режиме работы трехфазной цепи?
9. В каких случаях возникает несимметричный режим работы?
10. Каков порядок расчета симметричного режима работы трехфазной цепи?
11. Каков порядок расчета несимметричного режима работы трехфазной цепи?

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

**НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ
И ПЕРЕХОДНЫЕ
ПРОЦЕССЫ.
НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ**

НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЭДС, НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ

5.1. Разложение несинусоидальной периодической функции в ряд Фурье

Несинусоидальными периодическими токами и напряжениями называются токи и напряжения, изменяющиеся во времени по несинусоидальному периодическому закону.

Пусть нам дана несинусоидальная периодическая функция, т.е. функция, подчиняющаяся закону:

$$f(\omega t) = f(\omega t + 2\pi).$$

Из курса математики известно, что всякая несинусоидальная периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая за период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + A_k \sin(k\omega t + \psi_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.1)$$

где A_0 — постоянная составляющая, равная среднему значению функции за период, $A_1 \sin(\omega t + \psi_1)$ — основная, или первая, гармоника.

Она имеет тот же период $T = 2\pi/\omega$, что и данная несинусоидальная функция. Все остальные гармоники, имеющие частоту, не равную частоте ω , называются высшими гармониками. Номер гармоники означает, во сколько раз угловая частота больше основной частоты ω . Следует отметить, что число гармоник стремится к бесконечности, а амплитуды по мере увеличения номера гармоники уменьшаются и стремятся к нулю $U_{nm} \rightarrow 0$. Ряд Фурье (5.1) можно записать и в другом виде, если воспользоваться тригонометрической формулой:

$$\begin{aligned} A_k \sin(k\omega t + \psi_k) &= A_k \cos \psi_k \sin k\omega t + A_k \sin \psi_k \cos k\omega t = \\ &= B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$B_k = A_k \cos \psi_k, \quad C_k = A_k \sin \psi_k. \quad (5.3)$$

На основании (5.3) ряд (5.1) примет вид:

$$f(\omega t) = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (5.4)$$

Коэффициенты ряда (5.4) могут быть определены с помощью следующих интегралов:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d\omega t$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d\omega t.$$

Переход от первой формы ряда (5.1) ко второй форме ряда (5.4) осуществляется с помощью соотношений (5.3), а обратный переход от ряда (5.4) к ряду (5.1) — с помощью соотношений:

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \quad \psi_k = \arctg \frac{C_k}{B_k}.$$

5.2. Действующие значения несинусоидальных периодических токов и напряжений

Известно, что действующим значением тока или напряжения называется среднеквадратичное значение их за период, т.е.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}. \quad (5.5)$$

Примем, что ток несинусоидальный:

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + \dots = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1}) + I_{m2} \sin(2\omega t + \psi_{i2}) + \dots \quad (5.6)$$

Тогда при подстановке (5.6) в (5.5) получаем:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2}, \quad (5.7)$$

аналогично для напряжения:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}. \quad (5.8)$$

Пример 5.1. Мгновенное значение несинусоидального тока представлено в виде ряда:

$$i = 12 + 6 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Требуется найти действующее значение тока.

Решение. Действующее значение несинусоидального тока определим по выражению 5.8:

$$I = \sqrt{12^2 + \frac{6^2}{2} + \frac{4^2}{2}} = 13,1 \text{ А.}$$

5.3. Мощность в цепи при несинусоидальных токе и напряжении

Пусть на входе цепи имеется несинусоидальное напряжение и ток:

$$u = U_0 + u_1 + u_2 + \dots; \quad i = I_0 + i_1 + i_2 + \dots \quad (5.9)$$

Известно, что активная мощность цепи равна:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (5.10)$$

При подстановке (5.9) в (5.10) получим:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T (U_0 + u_1 + u_2 + \dots)(I_0 + i_1 + i_2 + \dots) dt. \quad (5.11)$$

Из (5.11) получаем формулу для расчета активной мощности при несинусоидальном токе и напряжении:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots = P_0 + P_1 + P_2 + \dots \quad (5.12)$$

Активная мощность при несинусоидальном режиме согласно (9.12) равна сумме постоянной мощности и активных мощностей всех гармоник.

Полной мощностью называется произведение действующих значений несинусоидальных напряжения и тока.

Для периодических несинусоидальных процессов вводят понятие о коэффициенте мощности λ , определяя его из соотношения:

$$P = UI\lambda, \quad \text{т.е.} \quad \lambda = \frac{P}{UI} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}}. \quad (5.13)$$

По аналогии с синусоидальным током вводят понятие о реактивной мощности Q , которая определяется как сумма реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k. \quad (5.14)$$

Пример 5.2. Известны несинусоидальные ток i и напряжение u на входе цепи:

$$i = 18\sqrt{2} \sin(\omega t + 20^\circ) + 12\sqrt{2} \sin(3\omega t + 13^\circ) + 4\sqrt{2} \sin(5\omega t - 17^\circ),$$

$$u = 10 + 20\sqrt{2} \sin(\omega t + 35^\circ) + 14\sqrt{2} \sin(3\omega t + 63^\circ) + 8\sqrt{2} \sin(5\omega t + 37^\circ).$$

Требуется определить: активную, реактивную, полную мощности и коэффициент мощности.

Решение. Действующие значения тока и напряжения равны:

$$I = \sqrt{18^2 + 12^2 + 4^2} = 22 \text{ А}, \quad U = \sqrt{10^2 + 20^2 + 14^2 + 8^2} = 27,6 \text{ В}.$$

Полная мощность: $S = UI = 22 \cdot 27,6 = 607 \text{ ВА}$.

Активная мощность:

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 = \\ &= 10 \cdot 0 + 20 \cdot 18 \cos 15^\circ + 14 \cdot 12 \cos 50^\circ + 8 \cdot 4 \cos 54^\circ = 488,7 \text{ В}. \end{aligned}$$

Реактивная мощность:

$$\begin{aligned} Q &= U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 + U_5 I_5 \sin \varphi_5 = \\ &= 20 \cdot 18 \sin 15^\circ + 14 \cdot 12 \sin 50^\circ + 8 \cdot 4 \sin 54^\circ = 247 \text{ вар}. \end{aligned}$$

Коэффициент мощности:

$$\lambda = P/S = 488,7/607 = 0,8.$$

5.4. Расчет линейных цепей с несинусоидальными ЭДС

Расчет основан на принципе наложения, а именно: мгновенное значение несинусоидального тока в любой ветви в данный момент времени равно алгебраической сумме мгновенных значений отдельных гармоник тока в данный момент времени. В результате этого расчет можно свести к решению n задач с синусоидальными ЭДС (n — число гармоник) и одной задачи с постоянной ЭДС.

Весь расчет можно разделить на следующие этапы.

1. Разложение несинусоидальных источников ЭДС в ряд Фурье, т.е. на постоянную и гармонические составляющие. При этом в зависимости от симметрии кривой ЭДС в ней может отсутствовать постоянная составляющая.

2. Расчет постоянной составляющей тока, если в разложении присутствует постоянная составляющая ЭДС.

3. Расчет мгновенных значений гармоник тока i_k комплексным методом.

4. Суммирование мгновенных значений тока отдельных гармоник и постоянной составляющей:

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k.$$

При расчете постоянной составляющей тока необходимо учесть, что индуктивное и емкостное сопротивления соответственно равны:

$$X_{L0} = 0, \quad X_{C0} = \infty, \quad (5.15)$$

так как постоянную составляющую можно представить процессом, у которого частота $\omega \rightarrow 0$ или $\omega = 0$.

При расчете гармонических составляющих тока необходимо учесть, что индуктивное и емкостное сопротивления зависят от частоты, т.е. от номера гармоники:

$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}, \quad X_{Ck} = 1/k\omega C = X_{C1}/k. \quad (5.16)$$

Активное сопротивление в диапазоне низких частот, что имеет место в электротехнике, практически не зависит от частоты и остается таким же, как и при постоянном токе.

Комплексный метод применим к каждой синусоидальной гармонике с учетом ее номера, т.е. необходимо учитывать соотношения (5.16).

Следует отметить, что если гармоники заданы в виде косинуса или синуса с отрицательной амплитудой, то их следует преобразовать в синусы с положительными амплитудами, воспользовавшись известными соотношениями.

Векторные диаграммы имеют смысл только для отдельных гармоник.

Пример 5.3. Для цепи рис. 5.1 дано $X_{L1} = \omega L = 3 \text{ Ом}$, $R = X_{C1} = 1/\omega C = 4 \text{ Ом}$; $u = 10 + 5\sqrt{2} \sin \omega t + 2\sqrt{2} \sin 3\omega t$.

Требуется определить действующее и мгновенные значения тока на входе цепи и активную мощность.

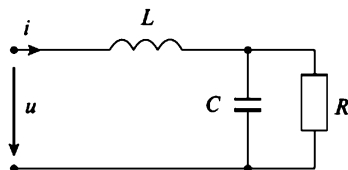


Рис. 5.1. Схема для примера 5.3

Решение 1. Постоянная составляющая тока равна

$$I_0 = U_0 / R = 10 / 4 = 2,5 \text{ A.}$$

2. Действующее и мгновенное значения тока первой гармоники найдем комплексным методом:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_1}; \quad \dot{U}_1 = 5; \quad \underline{Z}_1 = jX_{L1} - \frac{jRX_{C1}}{R - jX_{C1}} = j3 - \frac{j16}{4 - j4} = j3 - \frac{-64 + j64}{4^2 + 4^2} = 2 + j;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{5}{2 + j} = 2 - j; \quad I_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ A}; \quad i_1 = \sqrt{10} \sin(\omega t - 0,46) \text{ A.}$$

3. Определим действующее и мгновенное значения тока третьей гармоники

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{\underline{Z}_3}; \quad \dot{U}_3 = 2;$$

$$\underline{Z}_3 = j3X_{L3} - \frac{jR \frac{X_{C1}}{3}}{R - j \frac{X_{C1}}{3}} = j9 - \frac{j5,3}{4 - j4} = 0,39 + j12,1;$$

$$\dot{I}_3 = \frac{2}{0,39 + j12,1} = 0,005 - j0,16; \quad I_3 = 0,16 \text{ A}; \quad i_3 = \sqrt{0,32} \sin(3\omega t - 1,57) \text{ A.}$$

4. Действующее значение тока на входе цепи

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{6,25 + 5 + 0,0256} = 3,3 \text{ A.}$$

5. Мгновенное значение тока на входе цепи

$$i = I_0 + i_1 + i_3 = 2,5 + \sqrt{10} \sin(\omega t - 0,46) + \sqrt{0,32} \sin(3\omega t - 1,57) \text{ A.}$$

6. Активная мощность

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 10 \cdot 2,5 + 5 \cdot 2,23 \cos 0,46 + 2 \cdot 0,16 \cos 1,57 = 36,2 \text{ Вт.}$$

Вопросы для самопроверки

1. От чего зависит состав гармоник несинусоидального напряжения?
2. Какие математические функции можно разложить в ряд Фурье?
3. Как определить действующие значения тока, напряжения, ЭДС?
4. Как определяется коэффициент мощности в цепях с несинусоидальными токами?
5. Чему равны индуктивное и емкостное сопротивления в цепи постоянного тока?
6. Какова зависимость индуктивного и емкостного сопротивлений от частоты?
7. Какой принцип положен в основу расчета несинусоидальных периодических токов?

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

6.1. Основные понятия о переходных процессах

В предшествующих разделах курса рассматривались установившиеся процессы в цепях с сосредоточенными параметрами. Напомним, что цепи с сосредоточенными параметрами — это такие цепи, для которых с достаточной степенью точности можно считать, что электрическое поле, магнитное поле и выделение тепла сосредоточены на отдельных участках цепи, т.е. параметрам R , C , L отводится определенное отдельное место, при этом их геометрические размеры не учитываются.

Установившимся процессом или режимом называется такой процесс, который протекает в рассматриваемый момент времени при условии, что все изменения (включение или отключение источников, нагрузки, изменение параметров цепи и др.) происходили теоретически при $t = -\infty$, практически при достаточно большом времени в прошлом.

Переходный процесс в электрической цепи — это переход от одного установившегося режима к другому, отличному от первого. Такие процессы имеют место при коммутации, т.е. при включении или отключении электрических цепей, при достаточно быстром изменении величины и формы напряжения и параметров цепи. Возникновение переходных процессов обусловлено свойством реактивных элементов индуктивности и емкости накапливать энергию электромагнитного поля и возвращать ее во внешнюю цепь в достаточно короткий промежуток времени.

На схеме обычно коммутация указывается в виде выключателя со стрелкой. На рисунке 6.1, *а* стрелка означает включение рубильника, стрелка на рис. 6.1, *б* — отключение.

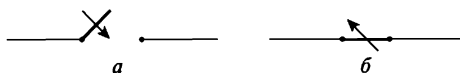


Рис. 6.1. Схема обозначения выключателя

Весь процесс в электрических цепях можно разделить на три режима.

1. Начальный установившийся режим, который имел место до коммутации.

2. Переходный режим. За его начало обычно принимается момент времени $t = 0$.

3. Конечный установившийся режим после коммутации, который наступает теоретически при $t = +\infty$, а практически, как будет показано ниже, через сравнительно короткое время.

Длительность переходного процесса исчисляется обычно весьма малыми долями секунды, но токи и напряжения за это время могут достигнуть значений значительно больших величин, чем в установившемся режиме, а это может привести к повреждению электрооборудования. Кроме того, в таких областях техники, как электроника, радиотехника, автоматика и др., важно знать о характере переходных процессов, что позволяет определить характеристики систем.

Следовательно, изучение и расчет переходных режимов являются актуальной задачей.

Прежде чем приступить к расчету переходных процессов, рассмотрим два важных вопроса: законы коммутации и начальные условия.

6.2. Законы коммутации. Начальные условия

Переходные процессы связаны с изменением магнитной энергии в индуктивности L и электрической энергии в емкости C и запасом этих энергий на момент коммутации.

Энергия магнитного поля в индуктивности

$$W_M = \frac{Li_L^2}{2} = \frac{\psi^2}{2L} \quad (6.1)$$

и энергия электрического поля в емкости

$$W_9 = \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \quad (6.2)$$

не могут изменяться мгновенно, так как для мгновенного изменения энергии потребовались бы бесконечно большие мощности источников, что физически невозможно.

Из соотношения (6.1) следует, что ток и потокосцепление в индуктивности не могут изменяться скачком (мгновенно). Это положение известно под названием **первого закона коммутации**. Из соотношения

(6.2) следует, что напряжение на емкости и его заряд не могут изменяться скачком (мгновенно). Это положение называется **вторым законом коммутации**.

Для учета влияния энергетического состояния цепи на момент коммутации и для записи законов коммутации введем понятие тока $i_L(-0)$ в индуктивности и напряжения $u_C(-0)$ на емкости в последний момент перед коммутацией, а также понятие тока $i_L(+0)$ в индуктивности и напряжения $u_C(+0)$ на емкости в первый момент после коммутации. Напомним, что за момент коммутации принято время $t = 0$. В соответствии с этим законы коммутации можно записать в виде:

первый закон коммутации

$$i_L(-0) = i_L(+0) \quad \text{или} \quad \psi(-0) = \psi(+0); \quad (6.3)$$

второй закон коммутации

$$u_C(-0) = u_C(+0) \quad \text{или} \quad q(-0) = q(+0). \quad (6.4)$$

Заметим, что напряжение на индуктивности и ток в емкости могут изменяться мгновенно.

Если цепь содержит только активные сопротивления, то запасенная энергия электрического и магнитного полей несоизмеримо мала с выделяющейся тепловой энергией в сопротивлениях, что обуславливает отсутствие переходных процессов в таких цепях. При этом ток и напряжения изменяются мгновенно от первоначально установившегося режима до нового установившегося режима. **Независимыми начальными условиями** принимают токи $i_L(-0)$ в индуктивностях и напряжения $u_C(-0)$ на емкостях. В дальнейшем для краткости будем их называть начальными условиями. Если $i_L(-0) = 0$ и $u_C(-0) = 0$, то такие начальные условия называются нулевыми. Следует отметить, что характер переходного процесса зависит от начальных условий.

6.3. Классический метод расчета переходных процессов

Электромагнитные процессы в электрических цепях описываются дифференциальными уравнениями, составленными согласно первому и второму законам Кирхгофа с использованием уравнений элементов. Порядок дифференциального уравнения определяется тем, сколько в цепи имеется накопителей электрической и магнитной энергии. Если требуется найти ток i_k в k -й ветви, то исключая последовательно

все токи остальных ветвей, можно получить одно дифференциальное уравнение, содержащее только ток i_k и его производные

$$a_n \frac{d^n i_k}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_k}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di_k}{dt} + a_0 i_k = f(t). \quad (6.5)$$

Здесь $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — постоянные коэффициенты, значение которых зависит от конфигурации цепи. Правая часть $f(t)$ содержит в себе заданные ЭДС.

Полный интеграл дифференциального уравнения с правой частью равен сумме частного решения этого уравнения и решения того же уравнения без правой части (однородного).

Частное решение уравнения (6.5) дает нам значение тока при $t = \infty$, т.е. при установившемся режиме, наступившем после коммутации. Характер и величина этой составляющей определяются внешними источниками. Поэтому ее часто называют принужденной составляющей и обозначают как i_{np} . Например, если источники постоянны, то и принужденный ток $i_{np} = \text{const}$. Если же ЭДС заданы в виде синусоидальных функций, то i_{np} также будет синусоидальной функцией. Определение i_{np} является задачей расчета установившегося режима в цепи, способы и методы которых рассматривались в предыдущих главах.

Общее решение определяет электромагнитные процессы, происходящие в цепи при отсутствии внешних источников энергии, за счет запаса энергии в индуктивностях и емкостях, который был в начальный момент времени.

Так как в реальных цепях всегда имеет место рассеяние энергии (преобразование в тепло), то запас энергии будет со временем исчерпан, и электромагнитные процессы в цепи прекратятся.

Из этого следует, что общее решение однородного уравнения должно стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Эта составляющая не зависит от источников, и поэтому ее часто называют свободной составляющей и обозначают как $i_{св}$. Общее решение однородного дифференциального уравнения n -го порядка, как известно из курса математики в случае простых корней, имеет вид:

$$i_{св} = \sum_{k=1}^N A_k e^{\lambda_k t},$$

где t — время; A_k — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий; λ_k — корень характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (6.6)$$

Рассмотренный метод расчета переходных процессов называется **классическим**. Обратим внимание, что при составлении дифференциальных уравнений в качестве неизвестных необходимо принимать ток i_L в индуктивности и напряжение u_C на емкости.

6.4. Расчет переходных процессов в цепях с одним накопителем энергии

Электромагнитные процессы при переходном процессе в таких цепях обусловлены запасом магнитной энергии в индуктивности и ее рассеиванием в виде тепла на активных сопротивлениях. Отметим, что цепи, содержащие всего один участок с накопителем магнитной энергии (L), описываются дифференциальным уравнением первого порядка, т.е. такие уравнения содержат только одну производную di_L/dt . При расчете установившегося режима в случае постоянных внешних ЭДС необходимо помнить, что сопротивление индуктивности постоянному току равно нулю.

Ниже рассмотрим пример. Расчет его выполнен по алгоритму, который рекомендуется к применению для других подобных задач.

Пример 6.1. Включение последовательной цепи R, L на постоянное напряжение.

Последовательная цепь R, L (рис. 6.2, а) $R = 100$ Ом и $L = 2$ Гн подключается к постоянному напряжению $U = 100$ В. Требуется определить ток и напряжение на индуктивности в переходном процессе и построить графики зависимостей $i_L(t)$, $u_L(t)$.

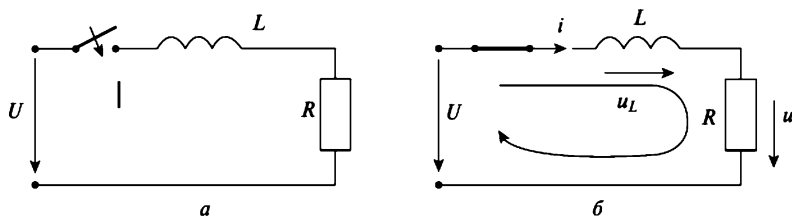


Рис. 6.2. Схема до коммутации и после коммутации

Решение. 1. Определяем начальное условие: $i_L(-0) = 0$, так как цепь до коммутации была отключена (принимая, что это было достаточно длительное время).

2. Изображаем электрическую цепь после коммутации (рис. 6.2, б) и на ней указываем направления токов и напряжений.

3. Для схемы (рис. 6.2, б) составляем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$u_L + u_R - U = 0. \quad (6.7)$$

Подставляя уравнения элементов $L di/dt$ и Ri в уравнение (6.7) и учитывая, что для последовательной цепи $i = i_L$, получим:

$$L di/dt + Ri = U. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.8) — линейное дифференциальное первого порядка.

4. Решение уравнения (искомый ток переходного процесса) ищем в виде

$$i = i_{np} + i_{ce}. \quad (6.9)$$

5. Определяем i_{np} , который представляет собой установившийся постоянный ток в цепи. Находим его по закону Ома, учитывая при этом, что индуктивное сопротивление при постоянном токе равно нулю:

$$i_{np} = U/R = 100/100 = 1 \text{ A}.$$

6. Составляем однородное дифференциальное уравнение

$$L di_{ce}/dt + Ri_{ce} = 0,$$

решением которого будет функция $i_{ce} = Ae^{\lambda t}$.

7. Составляем характеристическое уравнение для определения λ

$$L\lambda + R = 0,$$

корень, которого равен $\lambda = -R/L = -100/2 = -50 \text{ с}^{-1}$.

Величина $\tau = |1/\lambda| = 0,02 \text{ с}$ называется постоянной времени цепи и имеет размерность времени.

8. Запишем решение (ток в переходном процессе)

$$i = i_{np} + i_{ce} = 1 + Ae^{-50t}. \quad (6.10)$$

9. Согласно первому закону коммутации и начальным условиям

$$i_L(-0) = i_L(+0) = i(0) = 0.$$

10. Определим постоянную интегрирования A путем подстановки в уравнение (6.10) $t = 0$ и, учитывая условие п. 9, получим

$$i(0) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = 1 + Ae^{-50 \cdot 0}; \quad 0 = 1 + Ae^{-50 \cdot 0} \quad A = -1.$$

Ток в переходном процессе

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = 1 - e^{-50t} \text{ А.} \quad (6.11)$$

11. Напряжение на индуктивности можно определить по уравнению

$$u_L = U - u_R = U - Ri = 100 - 100(1 - e^{-50t}) = 100e^{-50t} \text{ В.} \quad (6.12)$$

Графики переходных процессов в соответствии с (6.11, 6.12) представлены на рис. 6.3. Постоянную времени τ можно определить графически.

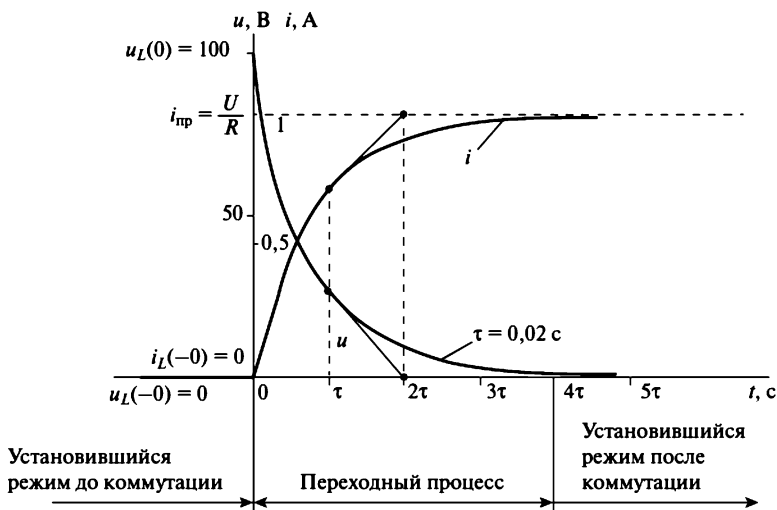


Рис. 6.3. Переходные процессы в последовательной цепи R, L

Для этого к любой точке функции i_L проводят касательную, тогда длина подкасательной на оси времени даст в том же масштабе, что и время, постоянную времени τ . За длительность переходного процесса принимают время, равное $t = (4 \div 5)\tau$. За это время величина тока в переходном процессе будет отличаться от установившегося значения тока менее чем на 1%.

Пример 6.2. Расчет переходных процессов в цепях с одним накопителем энергии — емкостью.

Электромагнитные процессы при переходном процессе в таких цепях обусловлены запасом электрической энергии в емкости C и рассеиванием этой энергии в виде тепла на активных сопротивлениях цепи. При составлении дифференциального уравнения следует в качестве неизвестной функции выбрать напряжение u_C на емкости.

Следует отметить, что при расчете установившихся режимов, т.е. при определении начальных условий и принужденной составляющей, сопротивление емкости в цепях постоянного тока равно бесконечности.

Расчет выполним по тому же алгоритму, что и предыдущий пример.

Пример 6.3. Включение последовательной цепи R, C на постоянное напряжение. Цепь (рис. 6.4, а), состоящая из последовательно соединенных сопротивления $R = 1000$ Ом и емкости $C = 200$ мкФ, в некоторый момент времени подключается к постоянному напряжению $U = 60$ В. Требуется определить ток и напряжение емкости в переходном процессе и построить графики $u_C(t)$, $i(t)$.

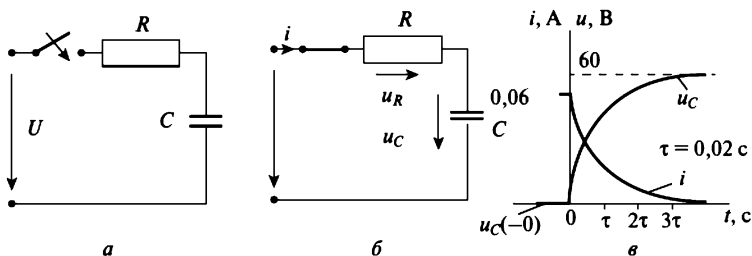


Рис. 6.4. Переходные процессы в цепи с емкостью

Решение. 1. Определяем начальные условия. Начальное условие $u_C(-0) = 0$, так как цепь до коммутации была отключена (полагаем достаточно длительное время).

2. Изображаем электрическую цепь после коммутации (рис. 6.4, б), указываем направления тока и напряжений и для нее составляем уравнение по второму закону Кирхгофа

$$u_R + u_C - U = 0 \quad \text{или} \quad Ri + u_C = U.$$

3. Преобразуем уравнение п. 2 в дифференциальное. Для этого, подставив вместо тока i известное уравнение $i = C du_C / dt$, получим:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U.$$

4. Решение уравнения (искомое напряжение на емкости) ищем в виде:

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв}.$$

5. Определяем u_{Cnp} . Так как в цепи постоянного тока в установившемся режиме сопротивление емкости равно бесконечности (при этом $Ri = 0$), то все напряжение будет приложено к емкости. Поэтому

$$u_{Cnp} = U = 60 \text{ В}.$$

6. Составляем однородное дифференциальное уравнение

$$RC \frac{du_{C\kern 0.08em\kern 0.08em\kern 0.08em}}{dt} + u_{C\kern 0.08em\kern 0.08em\kern 0.08em} = 0,$$

решением которого будет функция $u_{C\kern 0.08em\kern 0.08em\kern 0.08em} = Ae^{\lambda t}$.

7. Составляем характеристическое уравнение $RC\lambda + 1 = 0$, корень которого равен

$$\lambda = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -5 \frac{1}{\text{с}}.$$

$$\text{Постоянная времени } \tau = \left| \frac{1}{\lambda} \right| = RC = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ с}.$$

8. Запишем решение $u_C(t) = u_{Cnp} + u_{C\kern 0.08em\kern 0.08em\kern 0.08em} = U + Ae^{\lambda t}$.

9. Согласно второму закону коммутации и начальным условиям

$$u_C(-0) = u_C(+0) = u_C(0) = 0.$$

10. Определим постоянную интегрирования A путем подстановки $t = 0$ в уравнение п. 8

$$u_C(0) = U + A; \quad A = -U.$$

Напряжение на емкости в переходном процессе

$$u_C = U - Ue^{\lambda t} = U(1 - e^{\lambda t}) = 60(1 - e^{-5t}) \text{ В}.$$

11. Ток в цепи можно определить по уравнению $i = C \frac{du_C}{dt}$ или

$$\text{по уравнению п. 2 } i = \frac{U - u_C}{R} = \frac{U - U(1 - e^{\lambda t})}{R} = \frac{U}{R} e^{\lambda t} = 0,06 e^{-5t} \text{ А}.$$

Графики $u_C(t)$ и $i(t)$ представлены на рис. 6.4, в.

6.5. Переходные процессы в цепи с последовательным соединением элементов R, L, C

Рассмотрим особенности переходного процесса в цепи R, L, C (рис. 6.5, а) с нулевыми начальными условиями при подключении ее к постоянному напряжению U .

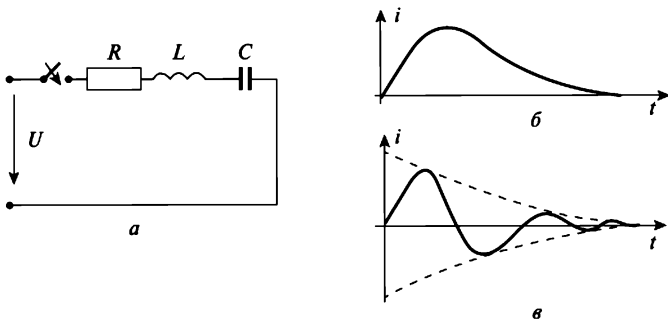


Рис. 6.5. Переходные процессы в последовательной цепи

Определим ток переходного процесса, придерживаясь указанного выше алгоритма.

1. В соответствии с исходными данными начальные условия являются нулевыми:

$$i_L(-0) = 0; \quad u_C(-0) = 0. \quad (6.13)$$

2. Выполним коммутацию и составим уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$u_R + u_L + u_C = U. \quad (6.14)$$

3. Преобразуем уравнение (6.14), используя известные соотношения:

$$u_R = Ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0);$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = U. \quad (6.15)$$

Для того чтобы избавиться от интеграла, продифференцируем обе части уравнения (6.15) и после деления на L получим

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (6.16)$$

Уравнение (6.16) — дифференциальное, однородное уравнение второго порядка. Поэтому оно содержит только одну свободную составляющую. Принужденная составляющая $i_{np} = 0$. Это следует также из того, что ток установившегося режима после коммутации должен быть равен нулю, так как сопротивление емкости постоянному току равно бесконечности.

4. Решением однородного уравнения (искомый ток i) будет функция, состоящая из суммы двух экспонент:

$$i = i_{сг} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (6.17)$$

5. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0, \quad (6.18)$$

корни которого λ_1 и λ_2 равны

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (6.19)$$

где $\delta = -R/2L$, $\omega_0 = 1/LC$.

6. Определим постоянные интегрирования A_1 и A_2 , входящие в уравнение (6.17). Для этого надо составить два уравнения, в которых неизвестными должны быть A_1 и A_2 .

Первое уравнение получим из нулевых начальных условий и закона коммутации, учитывая при этом, что $i_L = i$

$$i(-0) = i(+0) = 0. \quad (6.20)$$

Подставив $t = 0$ в (6.17) с учетом (6.20), получим первое уравнение

$$A_1 + A_2 = 0.$$

Второе уравнение получим, если продифференцируем (6.17) и примем в нем $t = 0$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \quad (6.21)$$

Выражение для $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ можно получить из исходного дифференциального уравнения (6.15)

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{U - Ri(0) - u_C(0)}{L} = \frac{U}{L}, \quad (6.22)$$

так как $i(0) = 0$ и $u_C(-0) = u_C(+0) = 0$.

Второе уравнение для определения A_1 и A_2 примет вид:

$$\frac{U}{L} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \quad (6.23)$$

Таким образом, мы имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными A_1 и A_2

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0; \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = U/2. \end{cases} \quad (6.24)$$

Решение этой системы дает

$$A_1 = \frac{U}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}; \quad A_2 = -\frac{U}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (6.25)$$

7. Искомый ток переходного процесса с учетом (6.25) будет равен:

$$i = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{U}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}).$$

Переходный процесс зависит от корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (6.18). Рассмотрим два случая:

а) Корни вещественные, отрицательные и разные по величине

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0; \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Это возможно только при условии

$$\delta > \omega_0, \quad \text{или} \quad \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}, \quad \text{или} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Такой режим называется **апериодическим**. При этом ток приближается к установившемуся значению, меняя свою величину, но не меняя свое направление (рис. 6.5, а).

б) Корни λ_1, λ_2 комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью. Это возможно при условии

$$\delta < \omega_0, \quad \text{или} \quad \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}, \quad \text{или} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Такой режим называется **периодическим**, или **колебательным**. Здесь имеет место многократный обмен энергией между индуктивностью и емкостью (рис. 6.5, б). Число таких обменов или колебаний в единицу времени называется собственной частотой колебаний, которая не зависит от входного напряжения. При каждом колебании часть энергии будет расходоваться, выделяясь в виде тепла в активное сопротивление R . Поэтому процесс является затухающим.

6.6. Операторный метод расчета переходных процессов

Основы операторного метода. Как известно, переходные процессы в линейных электрических цепях с постоянными параметрами описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Решение таких уравнений можно выполнить с помощью интегрального преобразования Лапласа. Этот способ решения также называют **операторным методом расчета**. В данном методе действительные функции времени t , называемые оригиналами, т.е. функциями времени, заменяют их изображениями, т.е. функциями комплексной переменной p .

Преобразование Лапласа выбрано потому, что оно заменяет операции дифференцирования и интегрирования функций времени простыми алгебраическими операциями над их изображениями. Это позволяет дифференциальные уравнения для оригиналов перевести в алгебраические уравнения для их изображений. Затем полученные решения алгебраических уравнений в виде операторных изображений искомых токов и напряжений переводят в область функции времени t , т.е. находят оригиналы $i(t)$, $u(t)$.

Поскольку решение алгебраических уравнений, как правило, легче, чем решение дифференциальных уравнений, то преимущества операторного метода очевидны. Поэтому этот метод нашел широкое применение не только в электротехнике, но и в других областях науки.

Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа представляет собой интегральное уравнение, связывающее функцию $f(t)$ действительной переменной времени и функцию $F(p)$ комплексной переменной p :

$$F(p) = \Lambda[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (6.26)$$

Это уравнение называется прямым преобразованием Лапласа, в котором Λ является условным обозначением этого преобразования, $p = a + jb$ и называется оператором, $f(t)$ — оригиналом, а $F(p)$ — изображением.

Вместо (6.26) соответствие между функциями $F(p)$ и $f(t)$ может записываться и так:

$$F(p) \leftrightarrow f(t).$$

Для того чтобы можно было провести преобразование (6.26), функция $f(t)$ при $t > 0$ должна за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, а также иметь ограниченный порядок возрастания. Следует отметить, что для постоянных, синусоидальных и для большинства других видов используемых токов и напряжений эти ограничения выполняются, т.е. для их расчета в переходном процессе применим операторный метод.

Оригинал $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ может быть найден с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \Lambda^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (6.27)$$

где Λ^{-1} — условное обозначение этого преобразования.

Следовательно, интегрирование функции времени соответствует в операторной форме делению изображения этой функции на оператор p (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
$K = \text{const}$	K/p
Ke^{-at}	$K/(p + a)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p + a)}$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p}$

6.7. Операторные уравнения и схемы замещения элементов R , L , C

Операторные уравнения для элементов электрической цепи L , R , C получим в результате преобразования по Лапласу уравнений для мгновенных значений токов и напряжений.

1. Активное сопротивление R .

Уравнение для мгновенных значений имеет вид:

$$u(t) = Ri(t). \quad (6.28)$$

Преобразуя это уравнение $\Lambda[u(t)] = \Lambda[Ri(t)]$ и учитывая свойство линейности интегрального преобразования, получим операторное уравнение

$$U(p) = RI(p), \quad (6.29)$$

где $U(p) = \Lambda[u(t)]$, $I(p) = \Lambda[i(t)]$.

Активное сопротивление R и соответствующее ему операторное сопротивление $Z_R(p)$, как следует из (6.29), равны $Z_R(p) = R$. Схемы, соответствующие уравнениям (6.28) и (6.29), представлены на рис. 6.6.

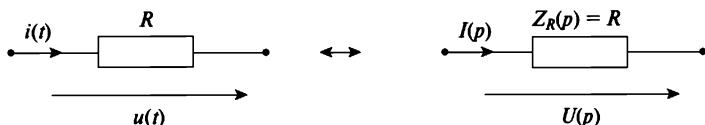


Рис. 6.6. Активное сопротивление в двух формах изображения

2. Индуктивный элемент L .

Уравнение индуктивности для мгновенных значений имеет вид:

$$u_L(t) = L di/dt = Li'(t).$$

Преобразуя это уравнение $\Lambda[u_L(t)] = \Lambda[Li'(t)]$ и учитывая соответствующее соотношение, приведенное в табл. 6.1, получим операторные уравнения для индуктивности:

$$U(p) = pLI(p) - E_L, \quad E_L = Li_L(0). \quad (6.30)$$

Выражениям (6.30) соответствуют операторная эквивалентная схема (рис. 6.7). Величина $Z_L(p) = pL$ называется индуктивным операторным сопротивлением, $Y_L(p) = 1/pL$ — индуктивной операторной проводимостью. Начальное значение тока в индуктивности $i_L(0)$ учитывается в виде дополнительного источника ЭДС E_L . При нулевых начальных условиях $i_L(0) = 0$ дополнительный источник в операторном уравнении (6.30) и, соответственно, на схеме замещения индуктивности отсутствует.

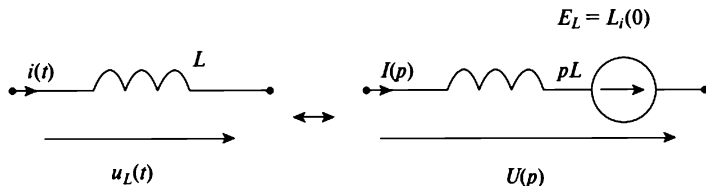


Рис. 6.7. Индуктивное сопротивление в двух формах изображения

3. Емкостной элемент C .

Уравнение емкости для мгновенных значений имеет вид:

$$i(t) = C u'_C(t). \quad (6.31)$$

Преобразуя это уравнение

$$\Lambda[i(t)] = \Lambda[C u'_C(t)]$$

и учитывая соответствующее соотношение, приведенное в табл. 6.1, получим операторное уравнение для емкости:

$$U(p) = \frac{I(p)}{pC} - E_C(p), \quad E_C(p) = -\frac{u_C(0)}{p}. \quad (6.32)$$

На рисунке 6.8 представлена схема, соответствующая уравнению (6.31) для мгновенных значений токов и напряжений, и уравнениям (6.32) для операторных токов и напряжений. Величина $Z_C(p) = 1/pC$ называется емкостным операторным сопротивлением, $Y_C(p) = pC$ — емкостной операторной проводимостью.

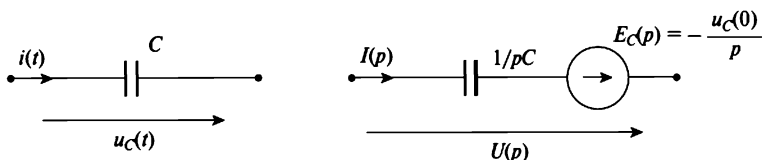


Рис. 6.8. Емкостное сопротивление в двух формах изображения

Начальное значение напряжения $u_C(0)$ учитывается, как видно из уравнений (6.32) и рис. 6.8, в виде дополнительного источника ЭДС $E_C(p)$.

Схемы замещения электрических цепей. Для расчета переходных процессов операторным методом на первом этапе надо составить так называемую операторную схему замещения, соответствующую схеме с реальными параметрами и источниками.

В основу операторных схем положены уравнения элементов в операторной форме и их схемы замещения. Порядок составления операторных схем целесообразно выполнить в следующей последовательности.

1. Изображается электрическая схема до коммутации ($t < 0$).
2. Определяются начальные условия, т.е. напряжение $u_C(-0)$ на емкостях и ток $i_L(-0)$ в индуктивностях в схеме п. 1, используя при этом любой метод расчета установившихся процессов.
3. Изображается электрическая схема после коммутации ($t \geq 0$) и выбирается направление токов в ветвях.

4. Используя схему по п. 3, составляется ее операторная схема замещения на основе операторных схем замещения отдельных элементов цепи, приведенных на рис. 6.7—6.9. Кроме того, с помощью таблицы соответствия (табл. 6.2) записываются операторные изображения заданных ЭДС, напряжений и токов.

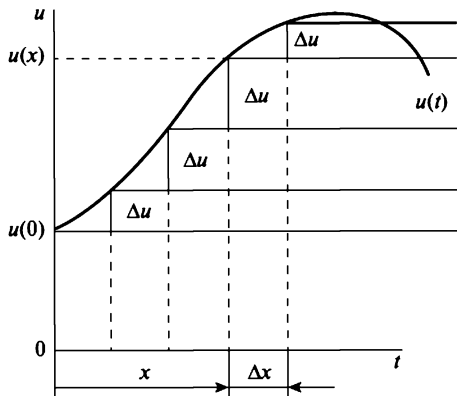


Рис. 6.9. Входное напряжение цепи

6.8. Законы Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа. Для узла электрической цепи можно составить уравнение по первому закону Кирхгофа для мгновенных значений токов:

$$\sum_{k=1}^K i_k(t) = 0.$$

Преобразуя это уравнение по Лапласу, получим:

$$\Lambda \left[\sum_{k=1}^K i_k(t) \right] = \sum_{k=1}^K I_k(p) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^K I_k(p) = 0. \quad (6.33)$$

Уравнение (6.33) выражает **первый закон Кирхгофа в операторной форме**.

Второй закон Кирхгофа. Для любого контура электрической схемы можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и ЭДС:

$$\sum_{k=1}^m u_k(t) = \sum_{k=1}^n e_k(t), \quad (6.34)$$

где $e_k(t)$ источник ЭДС в k -й ветви, а $u_k(t)$ напряжение на этой ветви.

Преобразуя уравнение по Лапласу, получим:

$$\Lambda \left[\sum_{k=1}^m u_k(t) \right] = \Lambda \left[\sum_{k=1}^n e_k(t) \right] \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^m U_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p). \quad (6.35)$$

С учетом ненулевых начальных условий для ветви, содержащей элементы R , L , C , и учитывая их операторные уравнения (6.29), (6.30), (6.32), имеем:

$$U_k(p) = R_k I(p) + pL_k I(p) + \frac{I(p)}{pC_k} - E_{Lk} - E_{Ck}(p). \quad (6.36)$$

Отметим, что это уравнение называют законом Ома в операторной форме с ненулевыми начальными условиями.

Используя (6.36), запишем операторное уравнение (6.35) в виде:

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n [E_k(0) + E_{Lk} + E_{Ck}(p)], \quad Z_k(p) = R_k + pL_k + 1/pC_k. \quad (6.37)$$

Уравнение (6.37) называется **вторым законом Кирхгофа в операторной форме**.

При составлении уравнений Кирхгофа в операторной форме сохраняются все правила составления уравнений Кирхгофа для мгновенных значений токов, напряжений, ЭДС. Заметим, что структура записи операторного сопротивления ветви $Z(p)$ и комплексное сопротивление этой же ветви $\underline{Z} = R + j\omega L + 1/j\omega C$ аналогичны, если допустить, что $j\omega = p$. Отсюда следует, что выражение для операторного сопротивления $Z(p)$ можно получить из комплексного сопротивления путем замены в нем $j\omega$ на оператор p .

6.9. Аналогии уравнений цепей постоянного тока, синусоидального тока в комплексной форме и переходных процессов, записанных в операторной форме

В таблице 6.2 сведены токи, напряжения, ЭДС, параметры цепи, законы Ома и Кирхгофа для различных форм записи.

В силу аналогичности приведенных параметров и уравнений для различных форм записи все методы расчета цепей постоянного тока

и цепей синусоидального тока в комплексной форме применяют для расчета операторных схем замещения.

Таблица 6.2

Цепь постоянного тока	Цепь синусоидального тока в комплексной форме	Переходные процессы — операторная форма записи
I	$\dot{I}$	$I(p)$
U	$\dot{U}$	$U(p)$
E	$\dot{E}$	$E(p)$
R	$\underline{Z}$	$Z(p)$
$G = 1/R$	$\underline{Y} = 1/\underline{Z}$	$Y(p) = 1/Z(p)$
$I = U/R$	$\dot{I} = \dot{U}/\underline{Z}$	$I(p) = U(p)/Z(p) *$
$\sum_{k=1}^K I_k = 0$	$\sum_{k=1}^K \dot{I}_k = 0$	$\sum_{k=1}^K I_k(p) = 0$
$\sum_{k=1}^m U_k = \sum_{k=1}^n E_k$	$\sum_{k=1}^m \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k$	$\sum_{k=1}^m U_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p) *$

* При ненулевых начальных условиях ($i_L(0) \neq 0$, $u_C(0) \neq 0$) в числитель дроби (закон Ома) и в сумму операторных ЭДС (второй закон Кирхгофа) надо алгебраически прибавить дополнительные ЭДС E_L и $E_C(p)$.

Определение операторных токов выполняется после составления операторной схемы. Данную процедуру следует выполнять в следующей последовательности.

1. Составляем операторную схему замещения для цепи, образовавшейся после коммутации.

2. Для операторной схемы записываем систему уравнений в операторной форме по законам Кирхгофа либо используем другие методы (методы контурных токов, узловых напряжений и т.д.).

3. Решаем линейную алгебраическую систему и определяем операторные токи в ветвях операторной схемы замещения.

4. Определяем мгновенные значения токов (ниже будет рассмотрен заключительный этап по определению искомым мгновенных значений токов переходного процесса из полученных операторных токов).

Рассмотрим несколько примеров по определению операторных токов.

Пример 6.4. Цепь, состоящая из последовательно включенных элементов $R = 10$ Ом и $L = 0,2$ Гн с нулевыми начальными условиями, включается под постоянное напряжение $U = 100$ В. Найти операторный ток в цепи $I(p)$.

Решение. Согласно закону Ома, в операторной форме при нулевых начальных условиях

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U}{p(R + pL)} = \frac{100}{p(10 + 0,2p)},$$

где $U(p) = U/p$ — изображение постоянного напряжения (табл. 6.2); $Z(p) = R + pL = (10 + 0,2p)$.

6.10. Переход от операторных токов к оригиналам

Этот переход является заключительным этапом в определении мгновенных значений токов в переходном процессе операторным методом. Это можно сделать различными способами: с применением табличных формул соответствия, часть из которых приведена в табл. 6.2, обратного преобразования Лапласа, использованием компьютера с соответствующими прикладными программами, теоремы разложения.

Теорема разложения. В большинстве случаев изображение может быть представлено рациональной дробью, например для тока

$$I(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}. \quad (6.38)$$

Если степень числителя меньше степени знаменателя $m < n$, a_k и b_k — вещественные числа, а корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ уравнения $N(p) = 0$ не кратны и не равны корням уравнения $M(p) = 0$, то, как известно из курса математики, оригинал соотношения (11.3) может быть найден по теореме разложения:

$$I(p) = \frac{M(p)}{N(p)} \leftrightarrow i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (6.39)$$

где p_k — корень уравнения $N(p) = 0$, N' — производная от $N(p)$ по p .

Теорема (6.39) разложения позволяет по изображению в виде рациональной дроби найти оригинал.

6.11. Расчет переходных процессов методом наложения

Интеграл Дюамеля. Расчет переходного процесса при включении линейной цепи на напряжение $u(t)$, являющееся любой функцией вре-

мени, может быть произведен методом наложения, если заменить кривую напряжения ступенчатой кривой (рис. 6.9). Тогда можно считать, что в момент времени $t = 0$ цепь включается на постоянное начальное напряжение $u(0)$, а затем на ряд смещенных на равные промежутки времени Δx постоянных напряжений Δu в общем случае разной величины и имеющих положительный знак при возрастании напряжения и отрицательный при его убывании.

Ток или напряжение любой ветви при переходном процессе можно найти из суммы токов, вызываемых отдельными постоянными составляющими напряжения. Для применения этого метода необходимо предварительно рассчитать переходный ток или напряжение исследуемой ветви цепи по заданному постоянному входному напряжению U_0 или току I_0 и найти зависимую от времени переходную функцию $K(t)$, связывающую искомую и заданную величины. Например, при включении цепи r, L на постоянное напряжение ток

$$i = \frac{U_0}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{L}t\right) \right].$$

Следовательно, переходная функция

$$K(t) = \frac{i}{U_0} = \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{L}t\right) \right].$$

В данном случае она имеет размерность проводимости и называется переходной проводимостью

$$Y(t) = \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right],$$

где $\tau = L/r$ — постоянная времени этой цепи.

Для постоянного напряжения, включенного позже на время x , переходная проводимость

$$Y(t-x) = \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right) \right].$$

Аналогичным образом определяется любая переходная функция $K(t)$. Например, напряжение на индуктивности при включении r, L на постоянное напряжение U_0 и переходная функция, соответственно, равны:

$$u_L = U_0 \exp\left(-\frac{r}{L}t\right), \quad K(t) = \exp\left(-\frac{r}{L}t\right).$$

В этом случае переходная функция безразмерна. Переходная функция в принципе сразу определяет выходную величину, так как дает

численное значение (но не размерность!) выходной величины, когда входная (U_0 или I_0) равна единице.

Составляющая переходного тока от напряжения $u(0)$, включаемого в начальный момент, равна $Y(0)u(0)$, а от скачка напряжения Δu , включаемого в момент $x + \Delta x$, равняется $Y(t - x - \Delta x)$. В результате приближенное значение искомого переходного тока будет:

$$i(t) \approx Y(t)u(0) + \sum_{x=0}^{x=t} Y(t - x - \Delta x)\Delta u.$$

Точное значение тока $i(t)$ получится при переходе Δx в пределе к бесконечно малым промежуткам времени dx .

Тогда

$$\Delta u \rightarrow du = u'(x)dx \quad \text{где} \quad u'(x) = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=x}$$

и ток

$$i(t) \approx Y(t)u(0) + \int_0^t Y(t - x)u'(x)dx.$$

Это выражение называется интегралом Дюамеля. При определении напряжения какой-либо ветви в интеграле Дюамеля вместо переходной проводимости должна стоять соответствующая переходная функция.

Далее в виде примера определен ток при включении цепи r, L на затухающее по показательному закону напряжение $u(t) = U \exp(-t/T)$, где T — постоянная времени, характеризующая скорость затухания $u(t)$. Переходные проводимости для этого случая даны выше, а $u(0) = U$,

$$u(x) = U \exp\left(-\frac{x}{T}\right), \quad u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = -\frac{U}{T} \exp\left(-\frac{x}{T}\right).$$

После подстановки этих величин в интеграл Дюамеля и интегрирования определяется искомым ток:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] U + \int_0^t \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right) \right] \left(-\frac{U}{T} \exp\left(-\frac{x}{T}\right) \right) dx = \\ &= \frac{U}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] - \frac{U}{r\tau} \left[-T \exp\left(-\frac{t}{T}\right) + T - \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}} \left(\exp\left(\frac{t}{\tau} - \frac{t}{T}\right) - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{U \left[\exp\left(-\frac{t}{T}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]}{r \left(1 - \frac{\tau}{T} \right)}. \end{aligned}$$

В частном случае, когда $\tau = T$, получается неопределенность, которая после раскрытия дает:

$$i = \frac{U}{L} t \exp\left(-\frac{r}{L} t\right).$$

Во всех случаях переходный ток положителен и имеет максимум i_m , определяемый обычным образом. При $\tau = T$

$$i_m = \frac{U}{er}.$$

Применение метода наложения удобно также в тех случаях, когда напряжение, на которое включается цепь, представляет собой кусочно-аналитическую кривую, имеющую разрывы. При этом переходный ток определяется как сумма интегралов Дюамеля за время отдельных участков $u(t)$, причем в их первых членах $Y(t)u(0)$ напряжение $u(0)$ равно разности приложенных напряжений после и до разрыва, с которого начинается данный участок.

Импульсный интеграл Дюамеля. Метод наложения может быть также применен, если заданное входное напряжение $u(t)$ представить в виде следующих друг за другом прямоугольных импульсов напряжения $u(x)$ малой длительности Δx (рис. 6.10) с последующим наложением выходной величины, например тока цепи, от каждого импульса напряжения с учетом его величины и сдвига во времени.

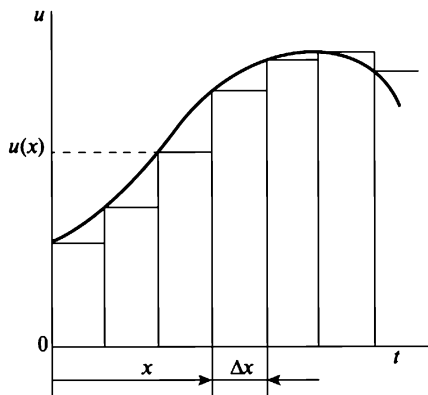


Рис. 6.10. Вид входного напряжения цепи

Прямоугольный импульс (рис. 6.11) характеризуется интенсивностью $S = U_1 \Delta t$, равной произведению амплитуды импульса U_1 на его длительность Δt . Импульс с интенсивностью $S = 1$ называется единичным.

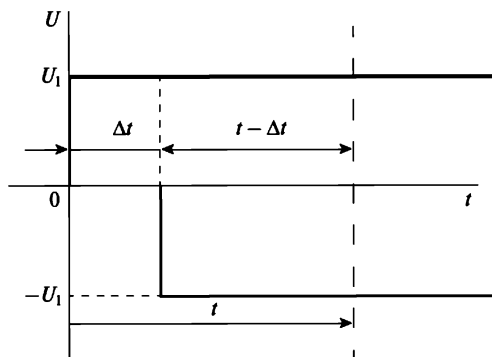


Рис. 6.11. Преобразование входного напряжения цепи

Один прямоугольный импульс может быть представлен алгебраической суммой двух одинаковых скачков постоянного напряжения $+U_1$ и $-U_1$, из которых второй возникает на время Δt позже первого. Тогда ток $i_1(t)$ от рассматриваемого импульса напряжения в момент t определяется с помощью переходной проводимости, которая для первого скачка равна $Y(t)$, а для второго $Y(t - \Delta t)$:

$$i_1(t) = Y(t)U_1 - Y(t - \Delta t)U_1.$$

Если на цепь воздействует единичный импульс напряжения, т.е. $U_1\Delta t = 1$, предыдущее выражение получает вид:

$$i_1(t) = \frac{U_1\Delta t}{\Delta t} [Y(t) - Y(t - \Delta t)] = \frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

При переходе к пределу $\Delta t \rightarrow dt$ единичный импульс превращается в так называемую единичную импульсную функцию, а ток

$$i_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow dt} \frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{\Delta t} = Y'(t).$$

Таким образом, аналогично численному равенству переходной проводимости $Y(t)$ току от единичного скачка напряжения при единичной импульсной функции напряжения ток равен производной от $Y(t)$. Поэтому $Y(t)$ называется импульсной переходной проводимостью.

Для установления связи между искомым током $i(t)$, заданным напряжением произвольной формы, разбитым на элементарные импульсы $u(x)$, и импульсной переходной проводимостью можно идти тем же путем, как и при выводе интеграла Дюамеля, но проще это сделать, интегрируя его по частям:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= Y(t)u(0) + \int_0^t Y(t-x)u'(x)dx = \\
 &= Y(t)u(0) + Y(0)u(t) - Y(t)u(0) + \int_0^t Y'(t-x)u(x)dx.
 \end{aligned}$$

Отсюда получается импульсный интеграл Дюамеля:

$$i(t) = Y(0)u(t) + \int_0^t Y'(t-x)u(x)dx.$$

В общем случае в импульсный интеграл Дюамеля вместо $u(x)$ следует подставить заданную входную величину, а взамен $Y(t-x)$ — соответствующую импульсную переходную функцию $K'(t-x)$.

Далее в виде примера решается та же задача — определение переходного тока $i(t)$ при включении цепи r, L на напряжение $u(t) = U \exp(-t/T)$. Здесь

$$Y(t) = \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{L}t\right) \right], \quad u(x) = U \exp\left(-\frac{x}{T}\right),$$

$Y'(t-x)$ есть производная функции $Y(t-x)$ по ее аргументу $t-x$, или, что то же самое, ее производная по t :

$$Y'(t-x) = \frac{1}{L} \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right),$$

где $\tau = L/r$ — постоянная времени цепи.

Из-за наличия индуктивности $Y(0) = 0$, ток

$$\begin{aligned}
 i(t) &= 0 \cdot U \exp\left(-\frac{x}{T}\right) + \int_0^t \frac{1}{L} \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right) U \exp\left(-\frac{x}{T}\right) dx = \\
 &= \frac{U}{L} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right)x dx = \frac{U \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{L\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right)} \left[\exp\left(\frac{1}{\tau} - \frac{t}{T}\right) \right] = \\
 &= \frac{U \left[\exp\left(-\frac{t}{T}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]}{r \left(1 - \frac{\tau}{T} \right)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом получен тот же результат, что и при применении первой формы интеграла Дюамеля, но вычисления в данном примере несколько упростились.

Область применения метода наложения. Из изложенного видно, что метод наложения позволяет найти выходную величину переходного процесса по заданной или полученной путем аппроксимации аналитической зависимости входной величины от времени. При этом следует применять ту форму интеграла Дюамеля, для которой подынтегральное выражение упрощается. Очевидно, что метод наложения применим только в случае интегрируемых функций.

6.12. Спектральный метод

Прямое и обратное преобразование Фурье. В параграфе 6.11 для расчета переходных процессов при включении цепи на непериодическое напряжение было применено его разложение на скачкообразные или импульсные напряжения с последующим применением принципа наложения. Эту задачу также можно решить, если представить непериодическую функцию в виде суммы гармоник.

Так как каждая гармоника ряда Фурье может быть записана в комплексной форме:

$$v_k = V_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) = \operatorname{Im} V_{km} \exp(jk\omega t)$$

(V_{km} — комплексная амплитуда), весь ряд Фурье может быть также записан в комплексной форме:

$$f(\omega t) = V_0 + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{k=m} V_{km} \exp(jk\omega t).$$

Коэффициенты этого ряда, т.е. комплексные амплитуды гармоник, могут быть определены из данных параграфа 5.1 выражений для A_k и B_k :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{km} &= V_{km} \exp(j\varphi_k) = V_{km} \cos \varphi_k + j V_{km} \sin \varphi_k = \\ &= A_k + j B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) (\sin k\omega t + j \cos k\omega t) d\omega t = \\ &= \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) (\cos k\omega t - j \sin k\omega t) d\omega t = \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) \exp(-jk\omega t) d\omega t. \end{aligned}$$

Комплексная амплитуда гармоники k периодической функции $f_1(\omega_1 t) = f(t)$ с периодом $T = 2\pi/\omega_1$

$$V_{km} = \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\omega_1 t) \exp(-jk\omega_1 t) d\omega_1 t = \frac{j\omega_1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt.$$

Непериодическую функцию можно рассматривать как предельный случай периодической, у которой период T стремится к бесконечности. Тогда разница в частоте $\Delta\omega$ между двумя соседними гармониками будет стремиться к $d\omega$. Так как частота основной (первой) гармоники $\omega_1 = \Delta\omega$, она также стремится к $d\omega$. Частота $k\omega_1$ гармоники k должна быть обозначена через ω . Тогда общее выражение комплексной амплитуды гармоники частоты ω получает вид:

$$V_m(\omega) = \frac{j d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt = \frac{j d\omega}{\pi} F(j\omega).$$

Таким образом, воздействие на цепь непериодической функции $f(t)$ может быть заменено суммарным воздействием бесконечно большого числа бесконечно малых гармоник, т.е. спектра $V_m(\omega)$. Относительное значение амплитуд гармоник пропорционально комплексной функции частоты $F(j\omega)$, имеющей вид интеграла Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

и называемой спектральной характеристикой или спектральной плотностью функции $f(t)$. Эта характеристика может быть записана в показательной форме:

$$F(j\omega) = F(\omega) \exp(j\varphi(\omega)).$$

Тогда $F(\omega)$ называется амплитудно-частотной, а $\varphi(\omega)$ — фазо-частотной характеристикой.

Преобразование $f(t)$ в $F(j\omega)$, т.е. прямое преобразование Фурье, возможно, если интеграл Фурье имеет конечное значение. Так как $|\exp(-j\omega t)| = 1$, для этого достаточно, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

чего, например, не будет, если $f(t)$ — постоянная величина или синусоидальная функция.

Первым этапом спектрального метода расчета переходных процессов является преобразование оригинала $f(t)$ в его изображение $F(j\omega)$. Если $U(j\omega)$ является спектральной характеристикой напряжения, спектральная характеристика тока $I(j\omega)$ может быть найдена из закона Ома по известному комплексному сопротивлению $Z(j\omega)$ или проводимости $Y(j\omega)$ цепи, в общем случае являющимися также комплексными функциями частоты. Тогда

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)} = Y(j\omega)U(j\omega).$$

В общем случае при задании какой-либо функции с характеристикой $F_1(j\omega)$, воздействующей на вход цепи, характеристика искомой функции выхода

$$F_2(j\omega) = K(j\omega)F_1(j\omega),$$

где $K(j\omega)$ — так называемая передаточная функция.

При изменении частоты ω передаточная функция изменяется и по величине и по фазе. В отличие от аналогичной величины — переходной функции, которая характеризовала переходный процесс при воздействии на цепь постоянного напряжения, передаточная функция $K(j\omega)$ характеризует установившийся процесс при синусоидальном воздействии.

После определения спектральной характеристики, т.е. изображения искомой величины, должен быть найден оригинал. Для вывода формулы обратного преобразования $F(j\omega)$ в $f(t)$ может быть также использован переход от дискретного ряда к непрерывному.

Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$f_1(\omega_1 t) = V_0 + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{k=m} V_{km} \exp(jk\omega_1 t).$$

Учитывая, что мнимая часть любого комплексного числа $\dot{F}$

$$\operatorname{Im} \dot{F} = \frac{\dot{F} - \dot{F}^*}{2j}$$

($\dot{F}^*$ — сопряженный комплекс), после переходов $T \rightarrow \infty$, $k\omega_1 \rightarrow \omega$ и $\dot{V}_{km} \rightarrow \dot{V}_m(\omega) = \frac{j d\omega}{\pi} F(j\omega)$ получают следующее значение неперiodической функции:

$$f(t) = \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{2j} \cdot \frac{j\omega}{\pi} F(j\omega) \exp(j\omega t) - \int_0^{\infty} \frac{1}{2j} \cdot \frac{j\omega}{\pi} F(-j\omega) \exp(-j\omega t) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega - \int_0^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Постоянная составляющая ($\omega = 0$) учтена тем, что нижний предел исходных интегралов взят равным нулю.

Это обратное преобразование Фурье служит для получения иско- мой функции времени по ее спектральной характеристике.

Необходимо отметить, что отрицательная частота имеет лишь мате- матический смысл. Она возникла в результате замены синусоид пока- зательными функциями $\exp(\pm j\omega t)$.

Пример применения спектрального метода. В качестве примера рас- сматривается переходный процесс включения цепи r, L на прямоу- голный импульс напряжения U продолжительностью τ_0 . После окон- чания импульса контур остается замкнутым.

Для упрощения удобно представить импульс существующим с момента времени $-0,5\tau_0$ до $+0,5\tau_0$ (рис. 6.12, *a*). Так как вне этого промежутка времени $f(t) = 0$, интеграл Фурье вычисляется только для $-0,5\tau_0 \leq t \leq 0,5\tau_0$:

$$U(j\omega) = \int_{-0,5\tau_0}^{+0,5\tau_0} U \exp(-j\omega t) dt = \frac{U}{-j\omega} \left[\exp(-j\omega t) \right] \Big|_{-0,5\tau_0}^{+0,5\tau_0} =$$

$$= \frac{2U}{\omega} \frac{\exp\left(j\frac{\omega\tau_0}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{\omega\tau_0}{2}\right)}{2j} = 2U \frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\omega}.$$

Это и есть спектральная плотность, которая в данном случае веще- ственна и изображается вектором, совпадающим с осью вещественных.

Следовательно, фаза спектральной плотности равна нулю, когда

дробь $\frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\omega}$ положительна, и равна π , когда эта дробь отрицательна.

Амплитудно-частотная характеристика, очевидно, равна:

$$U(\omega) = 2U \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\omega} \right|,$$

откуда $U(0) = U\tau_0$. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характе- ристика изображены на рис. 7.4, *б*.

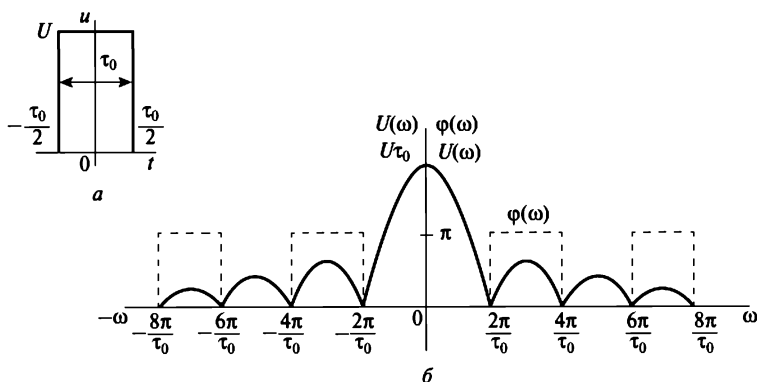


Рис. 6.12. Импульс входного напряжения

Так как сопротивление цепи $Z(j\omega) = r + j\omega L$, спектральная характеристика тока

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{2U}{\omega(r + j\omega L)} \sin \frac{\omega\tau_0}{2}.$$

Переходный ток находят с помощью обратного преобразования Фурье:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2U \exp(j\omega t)}{\omega(r + j\omega L)} \sin \frac{\omega\tau_0}{2} d\omega,$$

что требует вычисления интеграла сравнительно сложной функции. Решение этой же задачи методом наложения (включение цепи на напряжение U при $t = 0$ и на $-U$ при $t = \tau_0$) значительно проще.

Если требуется найти напряжение $u_L(t)$ на индуктивности, то, так как

$$\dot{U}_L = \frac{j\omega L}{r + j\omega L} \dot{U},$$

передаточная $K(j\omega)$ и спектральная $U_L(j\omega)$ функции получают вид

$$K(j\omega) = \frac{j\omega L}{r + j\omega L}, \quad U_L(j\omega) = K(j\omega)U(j\omega).$$

Определение искомого напряжения

$$u_L(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2jLU \exp(j\omega t)}{(r + j\omega L)} \sin \frac{\omega\tau_0}{2} d\omega$$

также связано с вычислением интеграла.

Область применения спектрального метода. Как видно из изложенного, непосредственное применение спектрального метода имеет следующие ограничения:

- 1) он может применяться только для абсолютно интегрируемых функций;
- 2) этот метод принципиально не учитывает начальных условий, поэтому он применим только для задач с нулевыми начальными условиями.

Некоторые искусственные приемы позволяют обойти эти ограничения, но при этом расчеты еще больше усложняются. Как было видно из рассмотренного примера, наиболее трудным этапом является обратное преобразование, связанное с интегрированием сложных функций. В ряде случаев интегралы не берутся и приходится прибегать к приближенным расчетам. Очевидно также, что спектральный метод как разновидность метода наложения применим только для линейных цепей.

Ценность спектрального метода заключается в том, что расчет переходных процессов сводится к расчету установившихся режимов в цепях синусоидального тока и, следовательно, к возможности получения ответа без составления и решения дифференциальных уравнений. Задачи могут быть решены при помощи определенных из опыта или заданных аналитически или графически амплитудно-частотных характеристик входных напряжений и токов цепи и передаточных функций. Этот метод в чистом или приближенном виде широко применяется в теории автоматического регулирования и радиотехнике.

Вопросы для самопроверки

1. В каких цепях возможны переходные процессы?
2. Как формулируются первый и второй законы коммутации?
3. Почему ток в индуктивности и напряжение на емкости не могут изменяться мгновенно?
4. Почему уравнения, отражающие переходные процессы в цепи, получаются дифференциальными?
5. Какие особенности имеет классический метод расчета переходных процессов?
6. Что влияет на частное решение (принужденную составляющую) дифференциального уравнения?
7. Почему свободная составляющая при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю?
8. Зачем необходимо определять начальные условия?

9. Как графически определить постоянную времени цепи?
10. Какие особенности индуктивности в цепи постоянного тока необходимо учитывать при расчете начальных условий и принужденной составляющей тока $i_{Lпр}$?
11. Какое преимущество имеет операторный метод перед классическим методом?
12. Какой вид имеют уравнения резистивного, индуктивного и емкостного элементов и их операторные схемы замещения?
13. Какое отличие имеют операторные схемы замещения реактивных элементов при начальных условиях отличных от нуля?
14. Какое отличие имеет второй закон Кирхгофа в операторной форме с ненулевыми начальными условиями от второго закона Кирхгофа — с нулевыми начальными условиями?
15. Какое интегральное преобразование используется в частотном методе?
16. Можно ли утверждать, что преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа при $p = j\omega$?
17. Что является частотной характеристикой цепи?
18. Что является передаточной характеристикой цепи?

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТОКЕ

7.1. Нелинейные элементы

Нелинейными электрическими цепями называются цепи, содержащие хотя бы один нелинейный элемент.

Строго говоря, все электрические цепи нелинейные, так как их параметры в той или иной степени зависят от тока и напряжения. Например, активное сопротивление проводников зависит от величины тока, поскольку с изменением тока в проводниках меняется их температура. Индуктивность катушек также зависит от величины тока, если магнитная проницаемость материала сердечника зависит от напряженности магнитного поля. Однако во многих практически важных случаях эта нелинейность выражена весьма слабо. Это дает нам возможность пренебречь нелинейностью при анализе процессов в таких цепях и применять теорию линейных электрических цепей для расчета многих электротехнических устройств.

Вместе с тем в ряде электротехнических устройств применяются элементы, нелинейные свойства которых проявляются очень сильно. Это полупроводниковые диоды, транзисторы, тиристоры и т.д.

Нелинейные сопротивления. Схемы замещения нелинейных резистивных элементов могут быть представлены нелинейными сопротивлениями (рис. 7.1, б). Свойства этих элементов описываются вольтамперными характеристиками.

Различают два типа ВАХ — статические и динамические. Статическими называют характеристики, в которых каждая точка дает значение постоянного напряжения при соответствующем значении постоянного тока.

По статическим характеристикам определяют статические и дифференциальные сопротивления нелинейных элементов (НЭ):

$$R_{CT} = \frac{u}{i}, \quad R_d = \frac{du}{di}.$$

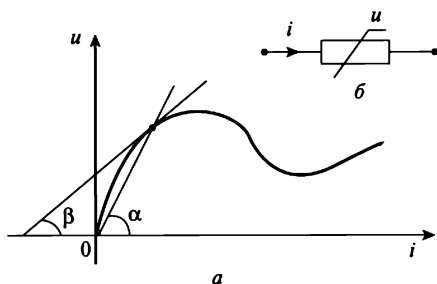


Рис. 7.1. Нелинейное сопротивление и его ВАХ

Динамическими называют характеристики, устанавливающие связь между напряжением и током при быстром их изменении. Они могут отличаться от статических вследствие инерционности некоторых процессов в НЭ (нагрев, ионизация и т.д.). По динамическим ВАХ определяют динамическое сопротивление:

$$R_d = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}.$$

По ВАХ НЭ статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона прямой, проведенной из начала координат в соответствующую точку характеристики (рис. 7.1, а):

$$R_{CT} = k \operatorname{tg} \alpha,$$

где k — отношение масштабов напряжения и тока.

Дифференциальное сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона касательной в данной точке характеристики

$$R_0 = k \operatorname{tg} \beta.$$

Как видно из рис. 7.1, а, все эти параметры изменяются при переходе из одной точки характеристики в другую.

Индуктивность. Характеристикой катушки индуктивности является зависимость $\psi(i)$, выражающая связь потокосцепления самоиндукции ψ и тока i в катушке. Эта характеристика называется вебер-амперной. Если магнитный поток распространяется в линейной среде, например в воздухе, где $\mu = \mu_0 = \text{const}$, то вебер-амперная характеристика линейна (рис. 7.2). Для катушки с ферромагнитным сердечником $\psi(i)$ нелинейна (рис. 7.2), так как магнитная проницаемость μ ферромагнитного материала сильно зависит от напряженности магнитного поля. Вебер-амперная характеристика катушки с замкнутым ферромагнитным сер-

дечником имеет тот же характер, что и начальная кривая намагничивания $B(H)$ материала сердечника.

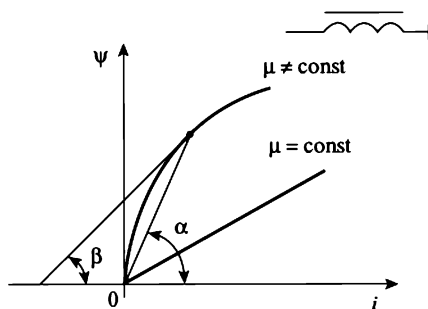


Рис. 7.2. Нелинейная индуктивность и ее ВАХ

Различают два типа вебер-амперных характеристик — статические, получаемые при медленном изменении тока, и динамические, которые получают при достаточно быстрых изменениях тока. Динамическая характеристика отличается от статической из-за магнитной вязкости и вихревых токов. Из статической характеристики определяют статическую индуктивность: $L_{CT} = \psi/i$; из динамической — динамическую индуктивность: $L_d = d\psi/di$.

При достаточно медленном изменении тока статическая и динамическая характеристики катушки совпадают, и динамическая индуктивность в этом случае равна дифференциальной $L_d = d\psi/di$, определяемой из статической характеристики.

Статическая индуктивность пропорциональна тангенсу угла наклона прямой, проведенной из начала координат в соответствующую точку на характеристике, а динамическая пропорциональна тангенсу угла наклона касательной в этой точке (рис. 7.3):

$$L_{CT} = \frac{\psi}{i} = k \operatorname{tg} \alpha; \quad L_d = \frac{d\psi}{di} = k \operatorname{tg} \beta,$$

где k — отношение масштабов потокосцепления и тока.

Нелинейная емкость. Самыми распространенными устройствами, которые используются в качестве накопителей энергии электрического поля, являются конденсаторы. Характеристики конденсаторов зависят от свойств диэлектрика, в котором распространяется электрическое поле. В большинстве диэлектриков диэлектрическая проницаемость ε зависит от напряженности электрического поля E . В этом случае кулонвольтовая характеристика конденсатора $q(u)$ нелинейная.

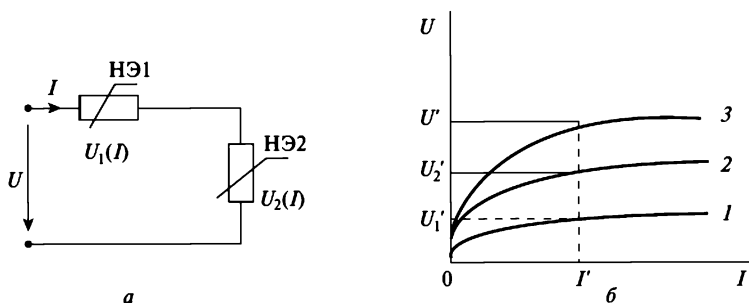


Рис. 7.3. Последовательное соединение нелинейных сопротивлений

Аналогично нелинейным сопротивлению и индуктивности вводят понятия статической и динамической емкости:

$$C_{CT} = \frac{q}{u}, \quad C_d = \frac{dq}{du}.$$

Нелинейные емкости применяют, например, в радиоэлектронике.

Аналитическое представление характеристик нелинейных элементов. Характеристики нелинейных элементов задаются в виде кривых или графиков, построенных по экспериментальным данным. Но для аналитических расчетов нелинейных цепей характеристики элементов должны быть представлены аналитическими выражениями. Процесс замены нелинейной характеристики, заданной графиком или таблицей, приближенным математическим выражением называется аппроксимацией.

При подборе математического описания нелинейной характеристики желательно выполнить следующие условия.

Во-первых, аппроксимация должна быть по возможности более точной. Во-вторых, необходимо, чтобы аппроксимирующее выражение было несложным, так как чем сложнее выражение, тем труднее дальнейшее решение уравнения, описывающего нелинейную цепь. Поэтому необходим компромиссный выбор между усложнением функции и точностью приближения.

Наиболее распространенной является аппроксимация нелинейных характеристик полиномом

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n.$$

Такая аппроксимация широко используется для математического описания вебер-амперных характеристик нелинейных индуктивностей $i(\psi)$ с ферромагнитными сердечниками. Достаточно хорошие результаты по точности дает аппроксимация усеченными полиномами вида

$$i(\psi) = \alpha \psi^3; \quad i(\psi) = \alpha_1 \psi + \alpha_3 \psi^3.$$

7.2. Нелинейные электрические цепи при постоянном токе

Задача расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока значительно сложнее аналогичного исследования линейных электрических цепей. Это связано с тем, что при расчете нелинейных цепей неприменим принцип наложения и методы, основанные на этом принципе. Для анализа простых нелинейных цепей можно эффективно применять графические методы расчета. При расчете сложных нелинейных цепей с помощью первого и второго законов Кирхгофа составляют системы нелинейных алгебраических уравнений, описывающих процессы в этих цепях. В большинстве случаев получить аналитическое решение таких систем уравнений невозможно. Поэтому для их решения широко используются численные методы расчета.

Если вольтамперные характеристики нелинейных элементов цепи постоянного тока заданы графическими зависимостями, то расчет такой цепи выполняется графическими методами. Расчет таких цепей производится с использованием законов Кирхгофа.

Последовательное соединение резистивных элементов. Рассмотрим цепь (рис. 7.3, *а*) с последовательным соединением нелинейных элементов $U_1(I)$ и $U_2(I)$ (приведены на рис. 7.3, *б* в виде кривых 1 и 2).

Согласно второму закону Кирхгофа

$$U = U_1(I) + U_2(I),$$

где U — приложенное напряжение; $U_1(I)$ и $U_2(I)$ — напряжения на первом и втором нелинейных элементах.

Элементы соединены последовательно, и в них протекает одинаковый ток I . Поэтому результирующая вольтамперная характеристика нелинейной цепи $U(I)$ определяется кривой 3 (рис. 7.3, *б*). Она получена в результате сложения ординат кривых 1 и 2 при одних и тех же значениях тока.

По характеристике $U(I)$ находим значение тока I' в цепи при заданном значении приложенного напряжения U' . По этому значению тока определяем падения напряжения U'_1 и U'_2 на первом и втором элементах по кривым $U_1(I)$ и $U_2(I)$.

Параллельное соединение резистивных элементов. Если элементы соединены параллельно (рис. 7.4, *а*) и заданы их вольтамперные характеристики $I_1(U)$ и $I_2(U)$ кривыми 1 и 2 (рис. 7.4, *б*), то в этой цепи по первому закону Кирхгофа

$$I = I_1(U) + I_2(U).$$

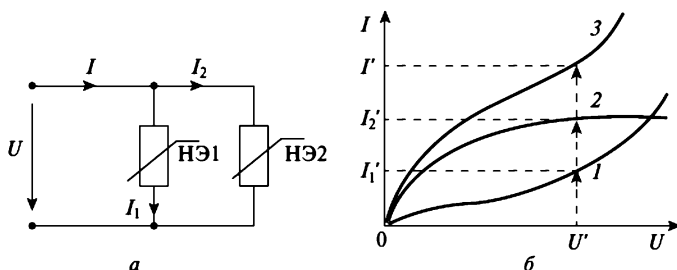


Рис. 7.4. Параллельное соединение нелинейных сопротивлений

Напряжения на первом и втором элементах одинаковы и равны U . Поэтому вольтамперную характеристику цепи (рис. 7.4, б) $I(U)$ (кривая 3) можно получить, суммируя токи (ординаты кривых) при одинаковых значениях U . По кривой $I(U)$ определим значение тока I' при заданном U' , а по кривым $I_1(U)$ и $I_2(U)$ находим токи нелинейных элементов I_1' и I_2'

7.3. Аналитический расчет сложных нелинейных электрических цепей

Если вольтамперные характеристики элементов заданы аналитическим выражением, то применяются аналитические методы расчета нелинейных цепей. Такой расчет содержит следующие этапы.

1. Задание характеристик нелинейных элементов аналитическими выражениями.

2. Запись системы уравнений цепи по законам Кирхгофа.

3. Аналитическое или численное решение системы уравнений.

Рассмотрим нелинейную цепь, приведенную на рис. 7.5.

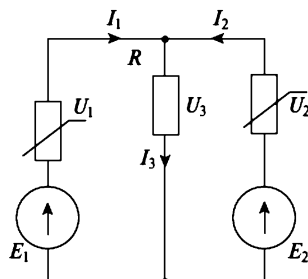


Рис. 7.5. Нелинейная цепь с двумя источниками ЭДС

По законам Кирхгофа можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ U_1(I_1) + RI_3 = E_1; \\ U_2(I_2) + RI_3 = E_2. \end{cases} \quad (7.1)$$

Заменим в системе (7.1) нелинейные зависимости $U_1(I_1)$ и $U_2(I_2)$ аналитическими выражениями:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ \alpha I_1^3 + RI_3 = E_1; \\ \beta I_2^5 + RI_3 = E_2. \end{cases} \quad (7.2)$$

Решение нелинейной алгебраической системы уравнений (7.2) позволяет найти токи I_1 ; I_2 ; I_3 . В большинстве случаев аналитическое решение нелинейных систем уравнений, описывающих сложные цепи постоянного тока, получить невозможно. Поэтому применяются численные методы решения: метод итераций, метод Ньютона и другие.

7.4. Магнитные цепи при постоянном токе

Электромагнитные реле, электромагниты, электрические машины и другие устройства, в которых преобразование электрической энергии в механическую производится с использованием энергии магнитного поля, конструируются таким образом, чтобы магнитный поток в них был по возможности наибольшим и сосредоточенным в ограниченной части конструкции. Такой эффект достигается применением ферромагнитных материалов для ферромагнетиков $\mu \gg \mu_0$, поэтому при одинаковой напряженности магнитного поля H магнитная индукция внутри ферромагнитной конструкции $B = \mu H$ намного больше, чем магнитная индукция $B = \mu_0 H$ в окружающем пространстве. В таких устройствах магнитный поток вне ферромагнитной конструкции называется потоком рассеяния.

Рассмотрим катушку с замкнутым ферромагнитным сердечником (рис. 7.6).

Пренебрегаем потоками рассеяния и считаем, что магнитный поток Φ распределен равномерно по сечению магнитопровода.

Основными уравнениями магнитного поля постоянных токов являются:

закон полного тока

$$\oint_l \overline{H} d\overline{l} = I \quad (7.3)$$

и принцип непрерывности магнитного потока

$$\oint_S \overline{B} d\overline{S} = 0. \quad (7.4)$$

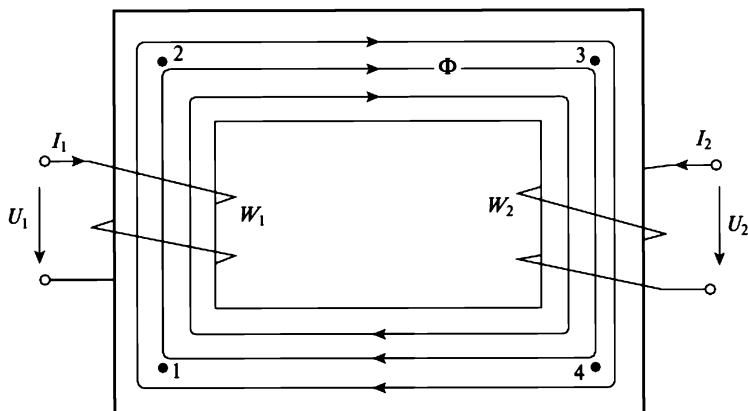


Рис. 7.6. Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником

Полный ток I в уравнении (7.3) для магнитной цепи (рис. 7.6) можно вычислить как сумму токов во всех витках обмоток w_1 и w_2 :

$$I = \sum I_k = w_1 I_1 + w_2 I_2 = F_1 + F_2 = F,$$

где F — по аналогии с электродвижущей силой в электрических цепях называется магнитодвижущей силой.

В общем случае для участка магнитной цепи

$$F = \sum_{k=1}^n w_k I_k. \quad (7.5)$$

Магнитный поток Φ аналогичен току I в электрических цепях и может быть вычислен на любом участке магнитной цепи как

$$\Phi = \int_S \overline{B} d\overline{S} \cong BS = \mu HS,$$

где B — магнитная индукция; S — сечение магнитопровода; H — напряженность магнитного поля; μ — магнитная проницаемость материала, в котором распространяется магнитный поток.

Отношение магнитодвижущей силы (МДС), равной интегралу напряженности магнитного поля вдоль всей цепи $\oint_l \overline{H} dl$ к магнитному потоку Φ , называется магнитным сопротивлением всей цепи:

$$R_M = \frac{F}{\Phi} = \frac{wI}{\Phi}.$$

Такой подход дает возможность записать закон магнитной цепи, связывающий МДС с магнитным потоком:

$$\Phi = \frac{F}{R_M} = \frac{wI}{R_M}, \quad (7.6)$$

который аналогичен закону Ома для замкнутой цепи при постоянном токе:

$$I = E/R.$$

Вычислим МДС F в цепи рис. 7.6 как интеграл от H по замкнутому пути, проходящему по средней линии магнитопровода через точки 1, 2, 3, 4. Рассматриваемый магнитопровод можно разделить на три участка одинакового сечения. Первый участок (1-2-3) с сечением S_1 и длиной отрезка средней линии ℓ_1 . Второй участок (3-4) с сечением S_2 и длиной отрезка средней линии ℓ_2 и третий участок (4-1) с сечением S_3 и длиной отрезка средней линии ℓ_3 . В результате имеем:

$$\begin{aligned} w_1 I_1 + w_2 I_2 &= \int_l \overline{H} dl = \int_{\ell_1} \overline{H} dl + \int_{\ell_2} \overline{H} dl + \int_{\ell_3} \overline{H} dl = H \ell_1 + H \ell_2 + H \ell_3 = \\ &= U_{M1} + U_{M2} + U_{M3}, \end{aligned}$$

где U_{M1} , U_{M2} , U_{M3} — магнитные напряжения участков цепи.

Обобщая полученные результаты, можно записать **второй закон Кирхгофа** для любого контура магнитной цепи

$$\sum_{k=1}^n U_{Mk} = \sum_{k=1}^n w_k I_k. \quad (7.7)$$

Рассмотрим магнитное напряжение одного из участков цепи, учитывая, что $B_k = \mu_k H_k$ и $\Phi_k = B_k S_k$

$$U_{Mk} = H_k \ell_k = \frac{B_k}{\mu_k} \ell_k = \Phi_k \frac{\ell_k}{\mu_k S_k} = \Phi_k R_{mk},$$

т.е. для любого участка магнитные напряжение и сопротивление составляют

$$U_{mk} = \Phi_k R_{mk}, \quad (7.8)$$

где

$$R_{mk} = \frac{l_k}{\mu_k \cdot S_k}. \quad (7.9)$$

Принцип непрерывности магнитного потока

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

позволяет записать **первый закон Кирхгофа** для узла магнитной цепи —

$$\sum_{k=1}^m \Phi_k = 0. \quad (7.10)$$

Рассмотренные выше законы Кирхгофа (7.7, 7.10) для магнитной цепи позволяют эффективно рассчитывать устройства, в которых используется постоянное магнитное поле, с помощью теории цепей.

Магнитная цепь с последовательным соединением участков. Магнитные цепи обычно содержат участки из ферромагнитных материалов, в которых магнитная проницаемость μ зависит от напряженности магнитного поля H . Таким образом, магнитные цепи являются нелинейными, и к ним применимы все рассмотренные выше методы расчета нелинейных цепей постоянного тока. Основным этапом расчета является переход от устройства к схеме замещения магнитной цепи. Для этого необходимо.

1. Разбить магнитную цепь на участки постоянного сечения и определить длины l_k и площади поперечного сечения S_k этих участков (длины участков берутся по средней силовой линии).

2. Определить количество источников МДС, равное количеству обмоток с током.

3. По конфигурации магнитопровода составить схему замещения магнитной цепи.

Так, в катушке с магнитопроводом (рис. 7.7) имеются три участка l_1 ; l_2 ; l_3 с сечениями S_1 ; S_2 ; S_3 и две обмотки с токами I_1 и I_2 . Поэтому схема замещения (рис. 7.7) одноконтурная с источниками МДС $w_1 I_1$ и $w_2 I_2$, нелинейными сопротивлениями R_{M1} ; R_{M2} ; R_{M3} и магнитным потоком Φ .

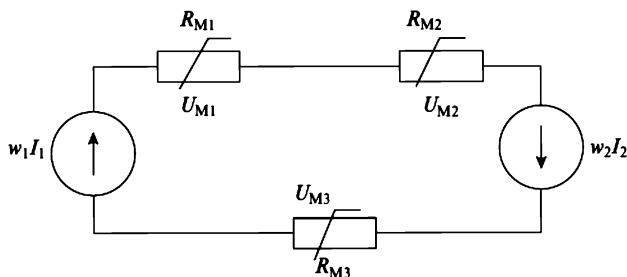


Рис. 7.7. Схема замещения магнитной цепи

Нелинейной характеристикой этих сопротивлений является зависимость $U_M(\Phi)$, которая может быть получена из кривой намагничивания материала $B(H)$ с учетом геометрии участка магнитопровода, т.е. длины участка l и сечения магнитопровода S . В этом случае $U_M = H \cdot l$; $\Phi = B \cdot S$. Если известны нелинейные зависимости $U_M(\Phi)$ и значение МДС, то расчет магнитного потока Φ может производиться любым графическим или аналитическим методом анализа нелинейных цепей постоянного тока.

Пример 7.1. Какова должна быть величина тока в обмотке электромагнита (рис. 7.8) для создания силы притяжения $f = 2000$ Н. Число витков обмотки $w = 628$. Электромагнит состоит из сердечника (поз. 1, рис. 7.8, а) и ярма (поз. 2, рис. 7.8, а). Параметры магнитопровода — $l_1 = 0,25$ м, $l_2 = 0,6$ м. Сечения магнитопровода, ярма и сердечника одинаковы: $S_1 = S_2 = S = 25 \cdot 10^{-4}$ м². Величина зазора — $d = 0,001$ м. Кривые намагничивания материала сердечника (кривая 1) и ярма (кривая 2) приведены на рис. 7.9.

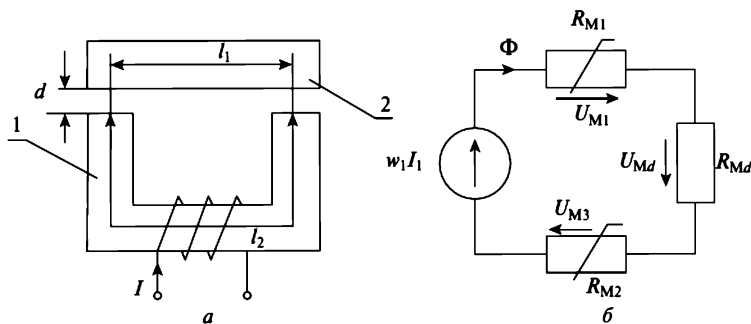


Рис. 7.8 Электромагнит и его схема замещения

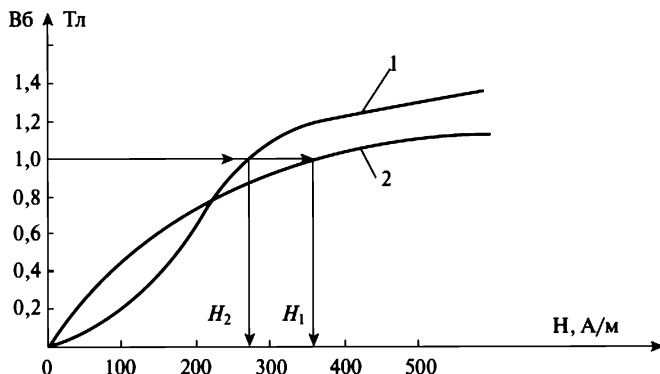


Рис. 7.9. Кривые намагничивания сердечника и якоря

Решение. Сила притяжения, создаваемая электромагнитом, зависит от величины магнитного потока в зазоре и сечения зазора S_d :

$$f = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S_d},$$

поэтому можно найти величину магнитного потока, необходимого для создания этой силы:

$$\Phi = \sqrt{f \cdot 2\mu_0 \cdot S_d} = \sqrt{2000 \cdot 2 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Схема замещения магнитной цепи изображена на рис. 7.8, б, где R_{M1} — магнитное сопротивление сердечника; R_{M2} — магнитное сопротивление якоря; $R_{M\Delta}$ — магнитное сопротивление двух зазоров. По второму закону Кирхгофа для магнитной цепи МДС равна сумме магнитных напряжений участков

$$F = wI = U_{M1} + U_{M2} + U_{M\Delta} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\Delta \cdot 2d.$$

Площади сечения сердечника, якоря и зазора одинаковы, поэтому магнитная индукция на всей участках

$$B_1 = B_2 = B_\delta = \frac{\Phi}{S} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ Тл.}$$

По кривым намагничивания (рис. 7.10) для сердечника и ярма определим напряженности магнитного поля: $H_1 = 375 \text{ А/м}$, $H_2 = 275 \text{ А/м}$.

Напряженность магнитного поля в зазоре равна

$$H_d = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{1,257 \cdot 10^{-6}} = 795\,545 \text{ А/м.}$$

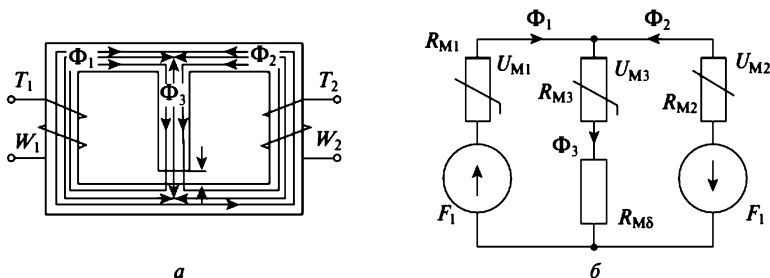


Рис. 7.10. Сердечник с зазором и его схема замещения

В результате необходимая МДС вычисляется как

$$F = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_{\Delta} \cdot 2d = 375 \cdot 0,25 + 275 \cdot 0,6 + 795\,545 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1860 \text{ A},$$

а ток в обмотке электромагнита, необходимый для создания силы в 2000 Н, равен

$$I = \frac{F}{w} = \frac{1860}{628} = 3 \text{ A}.$$

Разветвленная магнитная цепь. В разветвленной магнитной цепи существует несколько магнитных потоков. Если пренебречь потоками рассеяния, то потоки на различных участках магнитопровода можно вычислить, используя теорию магнитных цепей. Геометрия магнитопровода, изображенного на рис. 7.10, а, такова, что на его участках существует три магнитных потока: Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 .

В зазоре d магнитная проницаемость постоянна и равна μ_0 , поэтому этот участок цепи описан линейным сопротивлением $R_{M\delta}$. Эту цепь можно рассчитать, составив систему уравнений по законам Кирхгофа для магнитной цепи:

$$\begin{cases} \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0; \\ U_{M1}(\Phi_1) + U_{M3}(\Phi_3) + R_{M\delta} \Phi_3 = w_1 I_1; \\ U_{M2}(\Phi_2) + U_{M3}(\Phi_3) + R_{M\delta} \Phi_3 = w_2 I_2. \end{cases}$$

В этой системе уравнений $U_{M1}(\Phi_1)$, $U_{M2}(\Phi_2)$ и $U_{M3}(\Phi_3)$ — нелинейные характеристики магнитных сопротивлений, которые рассчитываются по кривой намагничивания материала сердечника $B(H)$. Магнитный поток $\Phi = B \cdot S$, магнитное напряжение $U_M = H \cdot l$ где S и l — площадь сечения и длина участка магнитопровода.

Следует отметить, что расчет магнитных потоков методом теории магнитных цепей может давать значительные погрешности, особенно

в случаях насыщения магнитопровода. Это обусловлено уменьшением магнитной проницаемости магнитопровода при насыщении. В результате значительно увеличиваются потоки рассеяния, которыми при расчете пренебрегают. Поэтому рекомендуется использовать эти методы для расчета магнитных потоков в ненасыщенных магнитопроводах.

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличается статическое сопротивление от дифференциального?
2. Чем отличается статическая емкость $C_{СТ}$ от динамической емкости C_d ?
3. Что такое аппроксимация?
4. Каким образом производится расчет нелинейной цепи при последовательном соединении элементов?
5. Как производится расчет магнитной цепи при параллельном соединении участков?
6. Почему вебер-амперная характеристика катушки с ферромагнитным сердечником нелинейна?
7. Как производится расчет магнитной цепи при последовательном соединении участков?
8. Как производится расчет разветвленной магнитной цепи?
9. Как формулируются законы Кирхгофа для магнитных цепей?
10. Какие параметры магнитопровода надо знать, чтобы определить его магнитное сопротивление?

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ

8.1. Установившиеся процессы в нелинейных цепях при переменном токе

Общие положения. Установившийся режим является основным режимом работы электротехнических устройств. Поэтому исследование таких режимов в нелинейных цепях является важной задачей электротехники.

Анализ процессов в нелинейных электрических цепях оказывается намного сложнее исследования процессов в линейных цепях. Эти процессы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В большинстве случаев получить общее аналитическое решение этих уравнений невозможно. Поэтому для расчетов установившихся режимов применяются различные приближенные методы, дающие возможность получить решение для тех или иных типов конкретных устройств с нелинейными элементами.

Основные свойства инерционных элементов. Нелинейные электрические цепи, параметры которых изменяются со значительным запаздыванием по отношению к мгновенным значениям напряжения или тока, называются инерционными элементами. К этой группе относятся резистивные элементы, сопротивления которых изменяются в зависимости от температуры. Тепловые процессы инерционны и протекают значительно медленнее изменения мгновенных токов и напряжений. Поэтому активное сопротивление элемента практически не изменяется в течение периода изменения тока, и вольтамперная характеристика для мгновенных значений установившегося режима линейна.

Таким образом, однозначной характеристикой инерционного резистивного элемента в установившемся режиме является его активное сопротивление R . Для действующих значений напряжений и токов вольтамперная характеристика такого сопротивления $U(I)$ будет нелинейна, так как нагрев зависит от действующего значения тока I . Следовательно, сопротивление инерционного элемента изменяется при

переходе от одного установившегося режима к другому и нелинейно зависит от действующего значения тока. Такими свойствами обладают все лампы накаливания, терморезисторы, а также другие резистивные элементы, температура которых в процессе эксплуатации изменяется значительно.

Аналогичными свойствами обладают инерционные электро-механические устройства, такие как электромагниты, электро-механические реле, электро-механические контакторы и т.д. Индуктивность таких устройств существенно зависит от положения ферромагнитного якоря, к которому приложена электромагнитная сила, втягивающая якорь в пространство между полюсами электромагнита. В силу инерционности якорь не успевает значительно переместиться в течение периода приложенного напряжения. Поэтому индуктивность L также не изменяется, т.е. для мгновенных значений установившегося режима индуктивность L можно считать линейной. Положение якоря зависит от действующего значения намагничивающего тока I . При переходе от одного установившегося режима к другому установившемуся режиму якорь перемещается, что вызывает изменение индуктивности L таких электро-механических устройств. Следовательно, индуктивность нелинейно зависит от действующего значения тока.

8.2. Алгоритм расчета нелинейных цепей инерционными элементами при воздействии синусоидального напряжения

Общим свойством описанных выше инерционных элементов является линейность их характеристик для мгновенных значений установившегося режима. Это свойство упрощает расчет электрических цепей с инерционными элементами. При синусоидальном приложенном напряжении все токи и напряжения на участках цепи также синусоидальны, что дает возможность применять комплексный (символический) метод расчета. Однако при изменении установившегося режима комплексные сопротивления нелинейных элементов изменяются, так как для действующих значений их характеристики нелинейны: $R = R(I)$, $L = L(I)$. В результате в комплексных уравнениях модули и аргументы комплексных сопротивлений нелинейных элементов являются функциями токов через эти элементы. Это исключает возможность применения принципа наложения и затрудняет расчет таких цепей.

Рассмотрим метод расчета цепей с инерционными элементами на примере цепи, изображенной на рис. 8.1. Эта цепь содержит источник синусоидального напряжения $\dot{E}$, линейные сопротивления $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ и нелинейное инерционное сопротивление с характеристикой относительно действующих значений вида $U_{нз} = \alpha I_3^3$. По законам Кирхгофа запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 = \dot{E}; \\ \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + U_{нз} = \dot{E}. \end{cases} \quad (8.1)$$

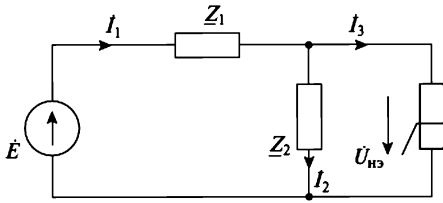


Рис. 8.1. Схема с нелинейным резистивным элементом

По вольтамперной характеристике $U_{нз} = \alpha I_3^3$ определим выражение для нелинейного активного сопротивления $R(I_3)$:

$$R(I_3) = \frac{U_{нз}}{I_3} = \frac{\alpha I_3^3}{I_3} = \alpha I_3^2.$$

В результате получим

$$\dot{U}_{нз} = R(I_3) \dot{I}_3 = (\alpha I_3^2) \dot{I}_3. \quad (8.2)$$

Подставив (8.2) в (8.1), запишем нелинейную систему комплексных уравнений, описывающих процессы в цепи с инерционным сопротивлением:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 = \dot{E}; \\ \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + (\alpha I_3^2) \dot{I}_3 = \dot{E}. \end{cases}$$

Сложность решения этой системы уравнений заключается в том, что коэффициент при комплексном токе $\dot{I}_3$ в третьем уравнении, равный αI_3^2 , зависит от модуля этого тока. Поэтому, предварительно вы-

делив действительные и мнимые части уравнений системы, получим систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3] = 0; \\ \operatorname{Re}[\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2] = \operatorname{Re}[\dot{E}]; \\ \operatorname{Re}[\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + (\alpha I_3^2) \dot{I}_3] = \operatorname{Re}[\dot{E}]; \\ \operatorname{Im}[\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3] = 0; \\ \operatorname{Im}[\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2] = \operatorname{Im}[\dot{E}]; \\ \operatorname{Im}[\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + (\alpha I_3^2) \dot{I}_3] = \operatorname{Im}[\dot{E}], \end{cases}$$

которая может быть решена методом итераций или Ньютона. В результате найдем действительные и мнимые составляющие комплексных токов и вычислим $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$.

Пример 8.1. Определите комплексный $\dot{I}$ и мгновенный i токи в цепи (рис. 8.2) с нелинейным инерционным сопротивлением. Комплексное напряжение $\dot{U} = 10e^{j30^\circ}$ В, реактивное сопротивление емкости $X_C = 3$ Ом, вольтамперная характеристика инерционного сопротивления $U_{нз}(I) = \alpha I^2$ В, где $\alpha = 2$ Ом/А.

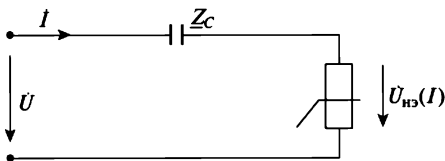


Рис. 8.2. Схема нелинейного сопротивления и линейной емкости

Решение. На основании второго закона Кирхгофа запишем комплексное уравнение цепи $\underline{Z}_C \dot{I} + \dot{U}_{нз}(I) = \dot{U}$.

По вольтамперной характеристике определим зависимость нелинейного сопротивления от тока:

$$R(I) = \frac{U_{нз}(I)}{I} = \frac{\alpha I^2}{I} = \alpha I$$

и выразим $\dot{U}_{нз}$ в виде $\dot{U}_{нз}(I) = R(I)\dot{I} = (\alpha I)\dot{I}$. Учитывая, что $\underline{Z}_C = -jX_C$, $\dot{U}_{нз}(I) = (\alpha I)\dot{I}$, преобразуем исходное уравнение к виду $[(\alpha I) - jX_C]\dot{I} = \dot{U}$.

Из этого уравнения запишем систему нелинейных уравнений для модулей и аргументов:

$$\begin{cases} \sqrt{(\alpha I)^2 + X_C^2} \cdot I = U; \\ \arctg \frac{-X_C}{\alpha I} + \psi_i = \psi_u, \end{cases}$$

решение которых позволит определить действующее значение I и начальную фазу ψ_i искомого тока.

Из первого уравнения системы найдем I . Для этого возведем в квадрат правую и левую части уравнения, преобразуем его к виду

$$I^4 + \frac{X_C^2}{\alpha^2} I^2 - \frac{U^2}{\alpha^2} = 0 \text{ и вычислим } I^2:$$

$$I^2 = \frac{-X_C}{2\alpha^2} \pm \sqrt{\left(\frac{X_C^2}{2\alpha^2}\right)^2 + \frac{U^2}{\alpha^2}} = -\frac{9}{8} \pm \frac{41}{8}.$$

Отрицательный корень не имеет физического смысла, так как $I^2 \geq 0$, следовательно, $I^2 = 4A^2$, а $I = 2A$.

Начальную фазу тока определим из второго уравнения системы

$$\psi_i = \psi_u - \arctg \frac{-X_C}{\alpha I} = 30^\circ - \arctg \frac{-3}{4} = 67^\circ.$$

Таким образом, комплексное действующее значение тока равно $\dot{I} = 2e^{j67^\circ}$, а выражение для мгновенного тока имеет вид

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i) = 2,83 \sin(\omega t + 67^\circ) \text{ А.}$$

Особые свойства безынерционных нелинейных элементов. Нелинейные элементы электрической цепи, параметры которых изменяются практически мгновенно с изменением напряжения или тока, называются безынерционными элементами. Такими характеристиками обладают все полупроводниковые устройства (диоды, стабилитроны, тиристоры, транзисторы, аналоговые и логические микросхемы), а также устройства с ферромагнитными сердечниками, трансформаторы и дроссели. Они являются основными элементами современных систем автоматического регулирования и управления, устройств электроэнергетики, информационных систем, компьютеров, радио- и телевизионных систем передач информации.

Общим свойством безынерционных нелинейных элементов является способность преобразовывать спектр напряжений или токов. Наличие в цепи нелинейного элемента приводит к тому, что даже при

синусоидальном входном напряжении токи и напряжения на всех элементах цепи становятся несинусоидальными. Рассмотрим это свойство нелинейных цепей на примере однополупериодного выпрямителя (рис. 8.3).

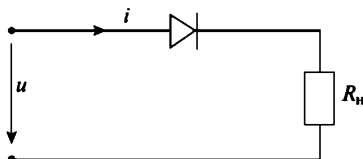


Рис. 8.3. Схема однополупериодного выпрямителя

Идеализированная вольтамперная характеристика этой цепи $i(u)$ нелинейна (рис. 8.4). В результате при синусоидальном входном напряжении u ток i несинусоиден и содержит постоянную составляющую и высшие гармоники.

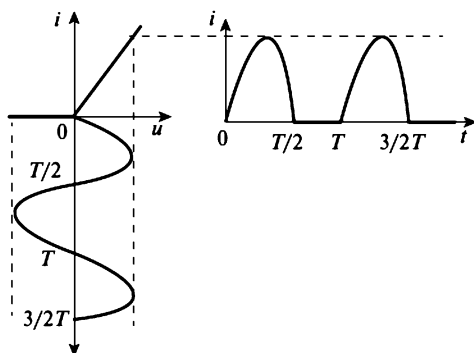


Рис. 8.4. Свойство нелинейных элементов преобразовывать напряжения

8.3. Метод эквивалентных синусоид и области его применения

Способность нелинейных элементов к преобразованию спектра напряжений и токов создает трудности при расчете таких цепей переменного тока. В связи с тем, что напряжения и токи безынерционного нелинейного элемента не могут быть одновременно синусоидальными, нельзя использовать комплексный метод, а из-за нелинейности цепи неприменим и принцип наложения. В связи с этим используются

различные приближенные методы расчета, одним из которых является метод эквивалентных синусоид.

Область применения метода. Метод предназначен для расчета установившихся процессов в цепях переменного тока с нелинейными элементами, характеристики которых симметричны, например: $u_{нз} = \alpha i_{нз}^3$ (рис. 8.5).

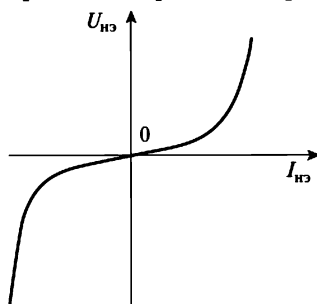


Рис. 8.5. Вольтамперная характеристика

Сущность метода. Несинусоидальные напряжения и токи исследуемой цепи заменяются эквивалентными синусоидальными u и i , причем действующие значения реальных напряжений и токов и их эквивалентных синусоид равны. В некоторых случаях эквивалентные синусоиды принимаются равными первым гармоникам реальных напряжений и токов.

Математический аппарат метода. Принятые допущения дают возможность считать нелинейные элементы условно инерционными, т.е. линейными для мгновенных значений эквивалентной синусоиды. В результате этого применим комплексный метод расчета. Однако, как и в цепях с инерционными элементами, сопротивления нелинейных участков зависят от действующего значения тока.

Рассмотрим применение метода эквивалентных синусоид на примере цепи, изображенной на рис. 8.6, в которой вольтамперная характеристика нелинейного активного сопротивления для мгновенных значений имеет вид $u_{нз} = \alpha i_{нз}^3$ (рис. 8.6), а ЭДС синусоидальная — $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$. Расчет цепи состоит из следующих этапов.

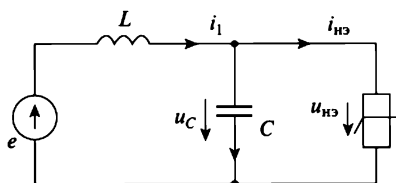


Рис. 8.6. Цепь с нелинейным активным инерционным элементом

1. По законам Кирхгофа составляем систему уравнений для исследуемой цепи.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_{нз} = 0; \\ L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{c} \int i_2 dt = e; \\ L \frac{di_1}{dt} + u_{нз}(i_{нз}) = e. \end{cases}$$

2. По нелинейной характеристике $u_{нз}(i_{нз})$ для мгновенных значений напряжения и тока определяем нелинейную характеристику для действующих значений $U_{нз}(I_{нз})$, считая, что $i_{нз} = I_{мнз} \sin \omega t$:

$$u_{нз} = \alpha i_{нз}^3 = \alpha I_{мнз}^3 \sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \alpha I_{мнз}^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} \alpha I_{мнз}^3 \sin 3\omega t.$$

При синусоидальном токе напряжение нелинейного элемента не-синусоидально и содержит первую и третью гармоники. Определим действующие значения этого напряжения.

$$\begin{aligned} U_{нз} &= \sqrt{\frac{U_{м1}^2}{2} + \frac{U_{м3}^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{3}{4} \alpha I_{мнз}^3\right)^2 + \left(\frac{1}{4} \alpha I_{мнз}^3\right)^2} = \\ &= \frac{\alpha \sqrt{10}}{2} \cdot \left(\frac{I_{мнз}}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\alpha \sqrt{10}}{2} I_{нз}^3. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристика для действующих значений напряжения и тока нелинейного элемента имеет вид:

$$U_{нз}(I_{нз}) = \frac{\alpha \sqrt{10}}{2} I_{нз}^3.$$

В общем случае при расчете других электрических цепей эта характеристика может быть задана или получена экспериментально.

3. Заменяем кривые мгновенных токов i_1 , i_2 , $i_{нз}$ и напряжения $u_{нз}$ в системе на эквивалентные синусоиды и получим систему комплексных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_{нз} = 0; \\ j\omega L \dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega c} \dot{I}_2 = \dot{E}; \\ j\omega L \dot{I}_1 + \left(\frac{\alpha \sqrt{10}}{2} I_{нз}^2\right) \dot{I}_{нз} = \dot{E}. \end{cases}$$

Сложность решения заключается в том, что коэффициент при токе $\dot{I}_{нз}$, равный $(\alpha\sqrt{10}/2 \cdot I_{нз}^2)$, нелинейно зависит от модуля этого тока. Поэтому, выделив действительные и мнимые части уравнений системы, получим систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_{нз}] = 0; \\ \operatorname{Re}\left[j\omega L\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega c}\dot{I}_2\right] = \operatorname{Re}[\dot{E}]; \\ \operatorname{Re}\left[j\omega L\dot{I}_1 + \left(\frac{\alpha\sqrt{10}}{2}I_{нз}^2\right)\dot{I}_{нз}\right] = \operatorname{Re}[\dot{E}]; \\ \operatorname{Im}[\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_{нз}] = 0; \\ \operatorname{Im}\left[j\omega L\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega c}\dot{I}_2\right] = \operatorname{Im}[\dot{E}]; \\ \operatorname{Im}\left[j\omega L\dot{I}_1 + \left(\frac{\alpha\sqrt{10}}{2}I_{нз}^2\right)\dot{I}_{нз}\right] = \operatorname{Im}[\dot{E}], \end{cases}$$

совместное решение которых методом итерации или Ньютона позволяет найти действительную и мнимую составляющие комплексных токов эквивалентных синусоид. Действующие значения этих токов I_1 , I_2 , $I_{нз}$ приближенно равны действующим значениям несинусоидальных токов i_1 , i_2 , $i_{нз}$ исследуемой цепи.

Достоинства метода. Введенные допущения дают возможность использовать комплексный метод и векторные диаграммы, что упрощает расчеты.

Недостатки метода. Точность метода зависит от содержания высших гармоник в напряжениях и токах. Если нелинейные элементы обладают существенно нелинейными характеристиками и содержание высших гармоник значительно, данный метод по действующим значениям дает большую погрешность. Метод не позволяет вычислить мгновенные напряжения и токи цепи.

Однако, несмотря на указанные недостатки, простота метода обуславливает его широкое применение, особенно при расчете цепей с дросселями и трансформаторами.

8.4. Электромагнитные процессы в катушке с ферромагнитным сердечником

В современной технике широкое применение находят дроссели, или катушки с ферромагнитными сердечниками. При расчете элек-

тротехнических установок с дросселями важно знать схему замещения дросселя идеальными элементами электрической цепи. Такая схема может быть разработана с учетом электромагнитных процессов в этом устройстве. На рисунке 8.7 приведена конструктивная схема катушки индуктивности с замкнутым магнитопроводом. Обмотка подключена к источнику напряжения u .

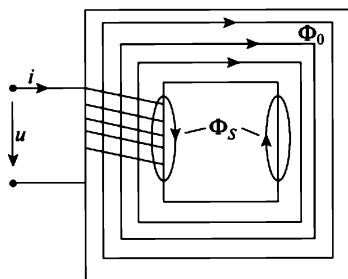


Рис. 8.7. Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником

Ток i , протекающий по обмотке, создает магнитный поток Φ , основная часть которого Φ_0 замыкается в ферромагнитном сердечнике, так как его магнитная проницаемость μ намного больше магнитной проницаемости окружающей среды (воздуха).

Однако часть магнитного потока Φ_S замыкается по воздуху и называется магнитным потоком рассеяния.

Уравнение, описывающее электромагнитные процессы в дросселе, витков имеет вид:

$$u = Ri + \frac{d\psi}{dt}, \quad (8.3)$$

где R — активное сопротивление обмотки; ψ — полное потокосцепление.

$$\psi = w\Phi = \psi_0 + \psi_S, \quad (8.4)$$

где w — число витков обмотки дросселя, ψ_0 — потокосцепление, обусловленное потоком Φ_0 , замыкающимся в сердечнике, а ψ_S — обусловленное потоком Φ_S , замыкающимся вне сердечника

$$\psi_S = w\Phi_S.$$

Подставив (8.4) в уравнение (8.3), получим

$$u = Ri + \frac{d}{dt}(\psi_0 + \psi_S) = Ri + \frac{d\psi_S}{dt} + \frac{d\psi_0}{dt}.$$

Поток Φ_S замыкается по линейной среде (воздуху) с постоянной магнитной проницаемостью μ_0 , и потокоцепление ψ_S пропорционально току i . Это дает возможность ввести в рассмотрение линейную индуктивность рассеяния L_S , связывающую количественно ψ_S и i : $\psi_S = L_S i$. В результате уравнение примет вид:

$$u = Ri + L_S \frac{di}{dt} + w \frac{d\Phi_0(i)}{dt} = Ri + L_S \frac{di}{dt} + u_0.$$

Зависимость потокоцепления ψ_0 от тока i нелинейная (рис. 8.8) и определяется свойствами ферромагнитного сердечника. Поэтому данное уравнение является нелинейным. В результате ток несинусоидальный, даже в том случае, если к катушке приложено синусоидальное напряжение.

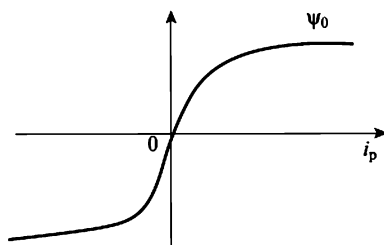


Рис. 8.8. Вебер-амперная характеристика

При анализе электромагнитных процессов в дросселе используем метод эквивалентных синусоид. При этом заменяют несинусоидальные i и Φ_0 эквивалентными синусоидами, для которых записывают уравнение в комплексной форме:

$$\dot{U} = R\dot{I} + j\omega L_S \dot{I} + j\omega w \Phi_0 = R\dot{I} + j\omega L \dot{I} + \dot{U}_0. \quad (8.5)$$

Такая форма записи дает возможность разработать схему замещения катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 8.9, а) и привести ее векторную диаграмму катушки (рис. 8.9, б).

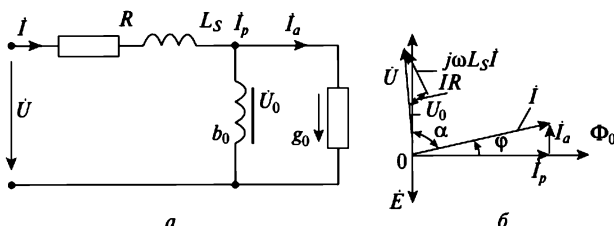


Рис. 8.9. Схема замещения дросселя и его векторная диаграмма

Сопротивление R отражает процессы превращения электрической энергии в тепловую в обмотке дросселя, индуктивность L_S связана с магнитным потоком Φ_S вне сердечника. Причем R и L_S — линейные элементы схемы замещения. Процессы в ферромагнитном сердечнике отражаются нелинейными активной проводимостью g_0 и индуктивностью с реактивной проводимостью ϵ_0 .

8.5. Трансформаторы

Назначение и принцип действия. Трансформатором называется статический электромагнитный аппарат, служащий для преобразования электрической энергии переменного тока с одними параметрами в электрическую энергию с другими параметрами (напряжение, ток, форма и начальная фаза), при этом частота остается неизменной.

Чем выше напряжение, тем при той же передаваемой мощности будет меньше значение тока и тем меньше получается требуемое сечение проводов линии передач:

$$S = UI.$$

Поэтому на электрических станциях выгодно повышать напряжение до сотен тысяч вольт, а затем передавать энергию по проводам к месту потребления, где напряжение должно понижаться до обычно применяемых величин 220, 380 В и т.д. Повышение напряжения до линии передач и понижение его после линии передач осуществляется трансформаторами.

Устройство трансформатора схематично показано на рис. 8.10. На замкнутом сердечнике, собранном из листовой электротехнической стали, помещены две обмотки с числом витков w_1 и w_2 . Обмотка, к зажимам которой подводится электрическая энергия, называется первичной; обмотка, к зажимам которой подключается потребитель, называется вторичной.

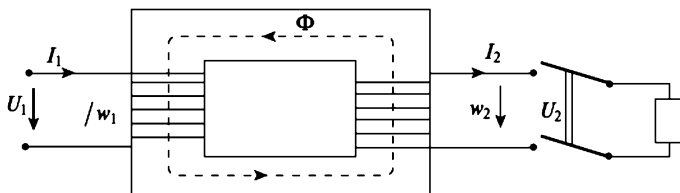


Рис. 8.10. Трансформатор

Протекающий по первичной обмотке переменный ток создает переменный магнитный поток Φ , который замыкается по сердечнику. Этот поток сцеплен с обеими обмотками и вызывает в каждой из них переменную ЭДС. Поэтому вторичная обмотка может рассматриваться как источник переменного напряжения. Трансформатор, изображенный на рис. 8.10, является двухобмоточным. Если на сердечнике несколько обмоток, то такой трансформатор называют многообмоточным.

Величина ЭДС, индуцируемая в одном витке первичной и вторичной обмоток, находится на основании закона электромагнитной индукции:

$$e = -d\Phi / dt. \quad (8.4)$$

Выражение гармонического магнитного потока:

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t,$$

где Φ и Φ_m — мгновенное и амплитудное значения потока.

Отсюда имеем

$$e = -d\Phi / dt = -\Phi_m \omega \cos \omega t = \Phi_m \omega \sin(\omega t - \pi/2).$$

Обозначим амплитудное значение ЭДС в одном витке:

$$E_m = \omega \Phi_m,$$

тогда

$$e = E_m \sin(\omega t - \pi/2).$$

Таким образом, индуцированная ЭДС отстает по фазе от потока на $\pi/2$.

Найдем действующее значение ЭДС в одном витке, поделив максимальное значение на $\sqrt{2}$:

$$E = \omega \Phi_m / \sqrt{2} = 2\pi f \Phi_m / \sqrt{2} = 4,44 f \Phi_m. \quad (8.5)$$

Если в первичной обмотке w_1 витков, а во вторичной w_2 витков, то полная ЭДС каждой обмотки будет:

$$E_1 = 4,44 w_1 f \Phi_m, \text{ В}; \quad (8.6)$$

$$E_2 = 4,44 w_2 f \Phi_m, \text{ В}. \quad (8.7)$$

Отношение ЭДС первичной и вторичной обмоток или отношение их чисел витков называется *коэффициентом трансформации*:

$$k = E_1 / E_2 = w_1 / w_2. \quad (8.8)$$

Для понижающих трансформаторов $w_1 > w_2$ и $k > 1$, для повышающих — $w_1 < w_2$ и $k < 1$.

Первичная активная мощность, потребляемая трансформатором из сети, равна

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1.$$

Вторичная активная мощность, или мощность, отдаваемая потребителю, равна

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2.$$

Если не учитывать потери в трансформаторе, то приблизительно можно предположить

$$P_1 \approx P_2.$$

Как будет показано ниже, $\varphi_1 \approx \varphi_2$ и напряжения первичной и вторичной обмоток мало отличаются от ЭДС обмоток.

Тогда имеем

$$U_1 I_1 \approx U_2 I_2 \quad \text{и} \quad I_1 / I_2 \approx U_2 / U_1 \approx E_2 / E_1 = 1/k. \quad (8.9)$$

При понижении напряжения вторичной обмотки в k раз вторичный ток будет больше первичного тока в k раз.

Нагрузка трансформатора. При нагрузке трансформатора вторичная цепь замкнута на нагрузочное сопротивление z_H и по ней протекает ток I_2 . В этом случае можно выделить три потока: основной поток Φ , сцепленный как с первичной, так и со вторичной обмотками; поток рассеяния первичной обмотки Φ_{1P} и поток рассеяния вторичной обмотки Φ_{2P} . Дополнительные ЭДС, индуцируемые в обмотках потоками рассеяния, учитывают при помощи индуктивных сопротивлений рассеяния первичной и вторичной обмоток x_1 и x_2 .

ЭДС от потоков рассеяния уравниваются напряжениями:

$$jx_1 I_1 = -\dot{E}_{1P}, \quad jx_2 I_2 = -\dot{E}_{2P},$$

где $jx_1 = j\omega L_{1P}$ и $jx_2 = j\omega L_{2P}$ — комплексные сопротивления рассеяния обмоток; $L_{1P} = \psi_{1P} / I_1$ и $L_{2P} = \psi_{2P} / I_2$ — индуктивности рассеяния первичной и вторичной обмоток; ψ_{1P} и ψ_{2P} — потоки рассеяния первичной и вторичной обмоток.

Составляющие $x_1 I_1$ и $x_2 I_2$ опережают токи I_1 и I_2 на $\pi/2$.

Уравнения по второму закону Кирхгофа в комплексной форме для первичной и вторичной цепей имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 + \dot{E}_1 &= \dot{I}_1 Z_1; \\ \dot{U}_2 + \dot{E}_2 &= \dot{I}_2 Z_2, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где U_2 — напряжение на нагрузочном сопротивлении; $Z_1 = R_1 + jx_1$ — комплексное полное сопротивление первичной обмотки; $Z_2 = R_2 + jx_2$ — комплексное полное сопротивление вторичной обмотки.

Падения напряжений в обмотках составляют обычно не более нескольких процентов от напряжений U_1 и U_2 . Поэтому с некоторым приближением можно считать, что и в нагруженном трансформаторе сохраняются приближенные равенства $U_1 \approx E_1$ и $U_2 \approx E_2$. Следовательно, при нагрузке трансформатора амплитуда основного магнитного потока приблизительно постоянна и равна амплитуде потока в режиме холостого хода. Постоянной должна быть и намагничивающая сила как при нагрузке, так и на холостом ходу. В режиме нагрузки результирующая намагничивающая сила равна сумме намагничивающих сил первичной и вторичной обмоток:

$$w_1 \dot{I}_1 + w_2 \dot{I}_2 = w_1 \dot{I}_0. \quad (8.11)$$

Поделив все члены последнего равенства на w_1 , получаем

$$\dot{I}_1 + \frac{1}{k} \dot{I}_2 = \dot{I}_0.$$

Введем понятие *приведенный вторичный ток*:

$$\dot{I}'_2 = \frac{\dot{I}_2}{k}.$$

Окончательно получим

$$\dot{I}_1 + \dot{I}'_2 = \dot{I}_0. \quad (8.12)$$

На холостом ходу $\dot{I}'_2 = 0$, и следовательно, $\dot{I}_1 = \dot{I}_0$. Если мы нагрузим трансформатор, то во вторичной обмотке появляется ток I_2 . Этот ток по закону Ленца препятствует причине, его вызвавшей. Поэтому ток I_2 так направлен, чтобы размагнитить сердечник, т.е. действие его противоположно действию тока I_1 . Это вызывает увеличение тока I_1 .

Активные и индуктивные падения напряжений в первичной и вторичной обмотках зависят от протекающих токов I_1 , I_2 и от индуктивных и активных сопротивлений обмоток трансформатора.

Схема замещения. Уравнения напряжений (8.10) и токов (8.12) позволяют рассчитать все режимы трансформатора. Для расчета используют часто приведенные схемы трансформатора, у которого, как говорилось выше, принимают, что $E_1 = E_2$ и $w_1 = w_2$.

На рисунке 8.11 представлена схема замещения приведенного трансформатора в соответствии с уравнениями (8.10) и (8.12). Эта схема относится к одной фазе.

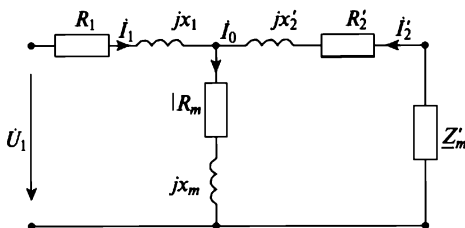


Рис. 8.11. Схема замещения трансформатора

Активное сопротивление R_m обусловлено потерями в стали сердечника:

$$P_{CT} = I_0^2 R_m.$$

Индуктивное сопротивление x_m обусловлено взаимоиндукцией первичной и вторичной обмоток.

Приведенные активное и индуктивное сопротивления вторичной обмотки и сопротивление нагрузки трансформатора определяются из соотношений

$$R_2' = k^2 R_2; \quad x_2' = k^2 x_2; \quad Z_2' = k^2 Z_2.$$

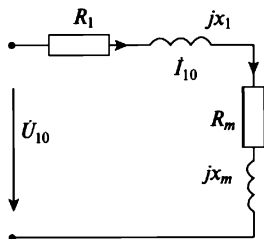


Рис. 8.12. Схема замещения в режиме холостого хода

Режим холостого хода. Для режима холостого хода ($I_2 = 0$) схема замещения имеет вид рис. 8.12. Обычно $R_1 \ll R_m$ и $x_1 \ll x_m$, и поэтому R_1 и x_1 (рис. 8.12) можно пренебречь.

Опытное определение параметров производится по схеме рис. 8.13. При этом можно считать, что сопротивление вольтметра равно бесконечности.

На основании опытных данных определяем параметры:

$$k = \frac{U_{10}}{U_{20}}; \quad z_m \approx \frac{U_{10}}{I_{10}}; \quad R_m \approx \frac{P_{10}}{I_{10}^2};$$

$$x_m \approx \sqrt{z_m^2 - R_m^2}.$$

Величина тока холостого хода I_{10} составляет 2...5% I_N .

Мощность P_0 , потребляемая трансформатором в режиме холостого хода,

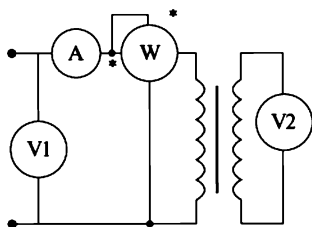


Рис. 8.13. Опыт холостого хода

определяется в основном потерями в стали на гистерезис и вихревые токи.

Режим короткого замыкания. В режиме короткого замыкания (рис. 8.14 (КЗ)) вторичная обмотка замкнута ($U_2 = 0$). При этом токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}'_2$ сдвинуты по фазе почти на 180° и примерно равны, поэтому

$$\dot{I}_1 + \dot{I}'_2 = \dot{I}_{10} \approx 0.$$

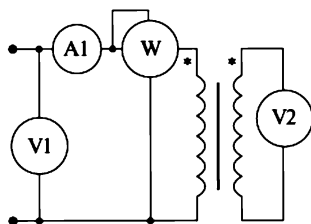


Рис. 8.14. Опыт короткого замыкания

Это позволяет пренебречь контуром намагничивания (ветвью R_m, x_m).

Если учесть, что

$$R_1 + R'_2 = R_K, \quad \text{и} \quad x_1 + x'_2 = x_K,$$

то схема замещения примет вид рис. 8.15. При этом можно считать сопротивление амперметра A2 равным нулю.

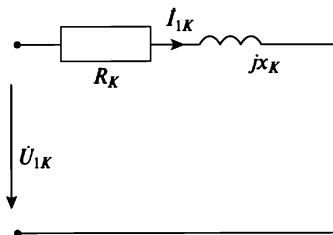


Рис. 8.15. Схема замещения в режиме короткого замыкания

Опытное определение параметров производится по схеме рис. 8.15. На основании опытных данных определяем параметры:

$$z_K = \frac{U_{1K}}{I_{1K}}; \quad R_K = \frac{P_{1K}}{I_{1K}^2}; \quad x_K \approx \sqrt{z_K^2 - R_K^2}; \quad R_1 \approx R'_2 = \frac{R_K}{2}; \quad x_1 \approx x'_2 = \frac{x_K}{2}.$$

Таким образом, опыты XX и КЗ позволяют определить все параметры схемы замещения (рис. 8.11).

Напряжением короткого замыкания u_K называется такое напряжение на первичной обмотке (вторичная обмотка при этом замкнута), при котором ток короткого замыкания в первичной обмотке равен номинальному току:

$$I_{1K} = I_{1H}, \quad u_K = I_H Z_K.$$

Активная и реактивная составляющие:

$$u_{KA} = I_H R_K = u_K \cos \varphi_K; \quad u_{KP} = I_H x_K = u_K \sin \varphi_K,$$

где $\cos \varphi_K = R_K / Z_K$, $\sin \varphi_K = x_K / Z_K$.

Напряжение короткого замыкания u_K выражают в процентах:

$$u_{K\%} = \frac{u_K}{U_H} 100 \, \%.$$

Значение $u_{K\%}$ составляет 5...10% от U_H , и ее величина, а также активная и реактивная составляющие $u_{K\%}$ приводятся в паспортных данных трансформатора. Мощность, потребляемая трансформатором в режиме короткого замыкания, определяется потерями в обмотках. Для номинального значения тока эта мощность равна

$$P_{KH} = I_H^2 R_K.$$

Потери в обмотках для тока, отличающегося от номинального, можно определить по формуле

$$P_K = P_{KH} \beta^2,$$

где β — коэффициент нагрузки, который равен

$$\beta = I / I_H.$$

Внешняя характеристика трансформатора. Изменение напряжения на вторичной обмотке трансформатора при постоянном входном напряжении зависит не только от величины нагрузки, но и от коэффициента мощности нагрузки ($\cos \varphi_2$), и может быть определено по приближенной формуле

$$\Delta u \% \approx (u_{KA} \cos \varphi_2 + u_{KP} \sin \varphi_2) \beta.$$

КПД трансформатора. КПД равен отношению полезной мощности, выделяемой в нагрузке трансформатора к мощности потребляемой из сети:

$$\eta = P_2 / P_1,$$

где $P_2 = S_H \beta \cos \varphi_2$, $S_H = U_{\Phi H} I_{\Phi H}$ — номинальная мощность трансформатора, $P_1 = P_2 + P_0 + P_K$.

$$\text{Следовательно, } \eta = \frac{S_H \kappa_{HG} \cos \varphi_2}{S_H \kappa_{HG} \cos \varphi_2 + P_0 + P_{KH} \kappa_{HG}^2}.$$

Потери в стали называются постоянными потерями, так как они не зависят от тока нагрузки. Эти потери зависят только от Φ^2 , т.е. от U_1^2 и от частоты f .

Вопросы для самопроверки

1. Каков алгоритм расчета нелинейных цепей с инерционными элементами при воздействии синусоидального напряжения?
2. Как формируется метод эквивалентных синусоид и области его применения?
3. Что является потоком рассеяния?
4. По какому пути замыкается основная часть магнитного потока?
5. Почему уравнение дросселя для мгновенных значений токов и напряжений является нелинейным?
6. Какие физические процессы отражены на схеме замещения дросселя?
7. Как выглядит схема замещения приведенного трансформатора?
8. Как определить параметры трансформатора?

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

9.1. Векторы электромагнитного поля

В электротехнических устройствах происходит преобразование и распространение энергии электромагнитного поля (ЭМП), поэтому изучение теории и методов расчета ЭМП имеет большое практическое значение.

ЭМП можно рассматривать как особое свойство материи. Оно характеризуется четырьмя векторными величинами: $\vec{E}$ — напряженностью электрического поля (ЭП); $\vec{D}$ — электрической индукцией; $\vec{H}$ — напряженностью магнитного поля (МП); $\vec{B}$ — магнитной индукцией. Определить ЭМП в некоторой области пространства — значит указать эти векторы в любой ее точке. Таким образом, ЭМП предстает как совокупность ЭП ($\vec{E}$, $\vec{D}$) и МП ($\vec{H}$, $\vec{B}$), находящихся во взаимной зависимости. Деление ЭМП на эти две составляющие относительно, оно зависит от условий наблюдения и возможно только при макроскопическом рассмотрении явлений. При движении заряженного тела в окружающем пространстве возникает ЭМП, и неподвижный наблюдатель обнаружит ЭП и МП по механическим силам, действующим на пробный заряд и магнитную стрелку. Однако наблюдатель с пробным зарядом и магнитной стрелкой, движущейся вместе с заряженным телом, не обнаружит отклонения магнитной стрелки, а отметит только воздействие на пробный заряд. Для такого наблюдателя существует только ЭП, а МП отсутствует.

При макроскопическом рассмотрении всегда обнаруживаются обе стороны ЭМП. Например, при рассмотрении неподвижного заряженного тела необходимо учесть также МП движущихся по своим орбитам электронов, из которых складывается общий заряд тела. Однако из-за хаотического расположения этих элементарных токов их МП чрезвычайно быстро убывает с увеличением расстояния от тела. При макроскопическом подходе вокруг неподвижного заряженного тела учитывается только ЭП.

Поскольку можно создать условия, при которых проявляется одна из составляющих ЭМП, возможно и раздельное изучение ЭП и МП. Это соответствует ряду практических задач, когда в электротехническом устройстве представляет интерес определение только одного из полей.

9.2. Напряженность и потенциал электрического поля

9.2.1. Напряженность электрического поля

Напряженность ЭП — характеристика векторная, определяемая в каждой точке и величиной, и направлением. Если в ЭП поместить малый положительный заряд, который своим присутствием не вызовет заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда Q определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q}. \quad (9.1)$$

Таким образом, $\vec{E}$ — силовая характеристика ЭП, определяемая при условии, что внесенный в данную точку поля заряд не исказил поля, существовавшего до его внесения. Отсюда следует, что сила $\vec{f}$, действующая на точечный заряд Q , внесенный в поле, будет равна

$$\vec{f} = Q\vec{E}, \quad (9.2)$$

где $\vec{E}$ — напряженность ЭП в точке расположения заряда, а напряженность численно равна силе, действующей на единичный заряд.

Если использовать закон Кулона, который является исторически первым законом из области электромагнитных явлений и определяет силу f взаимодействия двух точечных электрических зарядов Q_1 и Q_2 , то сила, действующая по прямой x , соединяющей эти заряды, будет равна

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{x^2}, \quad (9.3)$$

где ϵ — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, то модуль напряженности $\vec{E}$ в поле точечного заряда можно определить в виде

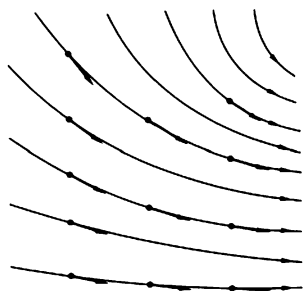


Рис. 9.1. Картина ЭП

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon x^2}. \quad (9.4)$$

Поскольку сила, действующая на электрический заряд со стороны ЭП, имеет вполне определенное направление, приходится говорить о направленности свойств этого поля. При этом за направление ЭП в данной точке пространства принимают направление вектора напряженности поля. Более наглядное представление о направленности ЭП можно

получить, если в пространстве наметить ряд линий так, чтобы векторы напряженности в той или иной точке поля были бы касательными к этим линиям (рис. 9.1).

Такие линии называют линиями вектора напряженности ЭП, или электрическими линиями. Электрические линии всегда направлены от положительно заряженных тел к отрицательно заряженным телам.

Совокупность электрических линий принято называть картиной ЭП (рис. 9.1). Если ЭП создается n зарядами (Q_i , $i \in [1, \bar{n}]$), то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каждого из n зарядов в отдельности: $\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i$, т.е. при расчете ЭП применим метод наложения.

Представим себе ЭП (рис. 9.2), в котором по некоторому пути от точки A до точки B под действием поля движется пробный точечный положительный заряд Q . Со стороны поля к заряду будет приложена сила f . Она направлена по касательной к линии движения и равна (9.2).

Работа на пути от точки A до точки B определится линейным интегралом

$$A = \int_A^B Q E \cos \alpha dl = Q \int_A^B E \cos \alpha dl,$$

где dl — элемент длины пути интегрирования; заряд Q вынесен за знак интеграла, так как в процессе движения величина заряда не меняется.

Таким образом, работа по перемещению заряда равна произведению заряда Q на линейный интеграл от напряженности поля вдоль пути движения заряда:

$$U_{AB} = \int_A^B E \cos \alpha dl. \quad (9.5)$$

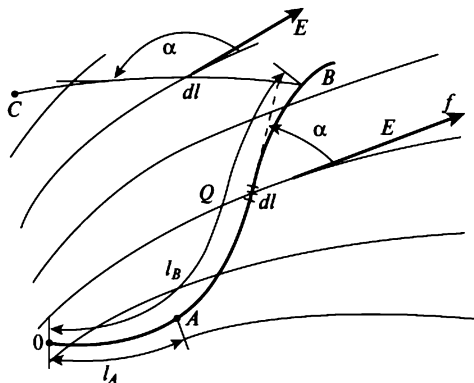


Рис. 9.2. Перемещение точечного заряда в ЭП

Этот интеграл, определяющийся характеристиками поля по выбранному пути, получил название электрического напряжения между точками A и B .

Выражение (9.5) можно записать в векторной форме:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}. \quad (9.6)$$

Напряжение U_{AB} характеризует собой энергетические возможности поля в данной области пространства. Электрическое напряжение является скалярной величиной и в общем случае может приобретать как положительные, так и отрицательные значения.

Единицей электрического напряжения является вольт (В). Если напряжение между двумя точками поля 1 В, то при перемещении заряда в 1 Кл из одной точки в другую будет совершена работа в 1 Дж.

Нетрудно показать, что электрическое напряжение между точками не зависит от пути его вычисления и определяется только положением начальной и конечной точек.

Для пояснения выберем две произвольные точки A и B в поле и рассмотрим два различных пути m и n между ними. Очевидно, что оба эти пути составляют замкнутый контур $AmBnA$ (рис. 9.3), для которого справедливо условие — линейный интеграл вектора напряженности в электростатическом поле по любому замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint_{AmBnA} \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

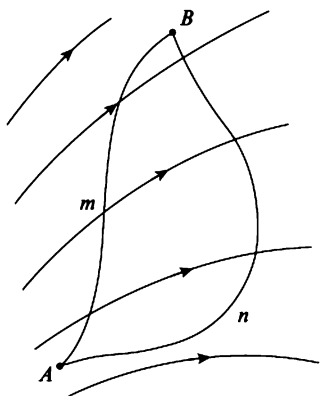


Рис. 9.3. Пути перемещения заряда в ЭП

Линейный же интеграл вектора напряженности по замкнутому контуру можно разбить на два интеграла по двум его участкам

$$\oint_{AmBnA} \vec{E} d\vec{l} = \int_{AmB} \vec{E} d\vec{l} + \int_{BnA} \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Изменяя направление интегрирования во втором слагаемом на обратное, т.е. вычисляя линейный интеграл по пути n от A к B , получим

$$\int_{AmB} \vec{E} d\vec{l} - \int_{AnB} \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

так как перестановка пределов интегрирования приводит к изменению знака интеграла. Отсюда

$$\int_{AmB} \vec{E} d\vec{l} = \int_{AnB} \vec{E} d\vec{l},$$

т.е. оба интеграла и представляемые ими напряжения U_{AB} между точками A и B , вычисленные по разным путям, равны друг другу. Это и является доказательством ранее высказанного тезиса.

9.2.2. Потенциал электрического поля

Если в качестве конечной точки при определении напряжения условиться всегда брать фиксированную в пространстве точку P , которую назовем опорной точкой, то напряжение

$$U_{AP} = \int_A^P \vec{E} d\vec{l}$$

между произвольной точкой A и опорной точкой P будет являться функцией положения только точки A . В этом случае напряжение называют электрическим потенциалом точки A и обозначают буквой φ :

$$\varphi_A = \int_A^P \vec{E} d\vec{l} = \int_A^P E \cos \alpha dl.$$

По своей физической природе потенциал не отличается от напряжения и потому является также скалярной величиной и измеряется в вольтах.

Если поинтересоваться потенциалом самой точки P , то придем к выводу:

$$\varphi_P = \int_P^P \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

что он равен нулю, так как определенный интеграл с одинаковыми нижним и верхним пределами обращается в нуль. Поэтому опорную точку нередко называют точкой нулевого потенциала.

В принципе за опорную точку можно принять любую точку пространства. Однако в отдельных случаях ее рациональный выбор позволяет упростить расчет потенциалов остальных точек поля. В частности, в теоретических задачах, связанных с полем ограниченной системы заряженных тел, опорную точку часто располагают в бесконечности. В практической электротехнике точку нулевого потенциала обычно связывают с поверхностью земли или основанием электромеханического устройства.

В заключение данного параграфа следует остановиться еще на некоторых важных понятиях в ЭП.

1. Если точка перемещается в ЭП таким образом, что приращение потенциала при перемещении равно нулю, то потенциал всех точек этой линии будет оставаться одним и тем же. Такие линии в ЭП называют линиями равного потенциала, или эквипотенциальными линиями.

2. Если точка перемещается в ЭП по поверхности, проложенной всюду перпендикулярно электрическим линиям, то придем к понятию о поверхностях равного потенциала, или эквипотенциальных поверхностях.

3. Электрические заряды располагаются на проводящих телах в поверхностном слое, все точки которого обладают равным потенциалом. Внутри заряженного тела ЭП отсутствует.

4. ЭП, позволяющее ввести понятие потенциала как однозначной функции координат точки поля, принято называть потенциальным полем.

9.3. Методы расчета электростатических полей

Электростатическим полем (ЭСП) называют электрическое поле (ЭП) неподвижных зарядов. Силовой характеристикой ЭП является

напряженность $\vec{E}$. Она определяется как отношение силы, действующей на пробный заряд, помещенный в ЭП, к величине этого заряда

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q_0}.$$

Здесь под пробным зарядом понимаем заряд q_0 положительного знака, настолько малый по величине, что он не искажает внешнего поля, в которое помещен. Другой важной характеристикой ЭП является вектор электрической индукции (в диэлектрике его называют вектором электрического смещения) $\vec{D}$. Если во внешнее поле, созданное положительным зарядом Q , поместить две тонкие металлические пластины небольшого размера с изолированными ручками, то свободные или слабосвязанные со своими атомами электроны переместятся влево. Левая пластина окажется заряженной отрицательно, а правая пластина из-за недостатка электронов окажется заряженной положительно. Как видим, пластины зарядились без какого-либо контакта с зарядом Q , т.е. вследствие электрической индукции. За изолированную ручку мы можем вынуть из рассматриваемой области любую из пластин — другая останется и будет иметь положительный или отрицательный заряд.

Описание этого явления производится с помощью характеристики, которую называют электрической индукцией. Поверхностная плотность заряда, наведенного на любой из пластин $\sigma = D$, а весь заряд на пластине $Q = \sigma S''$, где S'' — площадь пластины. Если в пространство вблизи заряда Q поместить диэлектрик, например, неполярный (т.е. такой, атомы которого в отсутствии поля не обладают дипольным моментом — центры электронных оболочек и положительного ядра совпадают), то под влиянием заряда Q электронные оболочки атомов диэлектрика будут притягиваться к заряду Q — произойдет смещение отрицательного заряда. Описание этого явления производится с помощью характеристики, которую называют вектором электрического смещения.

ЭП свободных зарядов, созданных внешними источниками и находящихся на электродах или в виде пространственного заряда, ослабляется действием связанных зарядов вещества, в котором эти свободные заряды находятся. Фактическое результирующее поле $\vec{E}$ обусловлено свободными и связанными зарядами (рис. 9.4). При этом теорема Гаусса имеет вид

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} (Q_{\text{своб}} + Q_{\text{связ}}), \quad (9.7)$$

причем знак заряда $Q_{связ}$ противоположен знаку заряда $Q_{своб}$. Свободный заряд $Q_{своб}$ связан с электрической индукцией $\vec{D}$ уравнением (постулат Максвелла)

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_{своб}, \quad (9.8)$$

поэтому

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = Q_{своб} + Q_{связ},$$

откуда

$$Q_{своб} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} - Q_{связ} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} - \epsilon_0 \oint_S \vec{P} d\vec{S}.$$

Вектор, ответственный за образование связанного заряда, называется вектором поляризации $\vec{P}$. С учетом предыдущего в однородных средах

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S} - \oint_S \vec{P} d\vec{S},$$

откуда

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} - \vec{P},$$

причем $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$; вектор $\vec{D}$ совпадает с вектором $\vec{E}$, вектор $\vec{P}$ им противоположен, т.е. численно

$$D = \epsilon_0 E + |P|.$$

В поле неподвижных зарядов нет токов, значит, нет и вызываемого токами МП. Поэтому уравнение для ЭСП имеет вид

$$\text{rot } \vec{E} = 0. \quad (9.9)$$

Уравнение (9.3) свидетельствует о том, что ротор (вихрь) ЭП $\vec{E}$ в рассматриваемой области пространства отсутствует, следовательно, поле безвихревое и аналитически может быть описано некоторой скалярной потенциальной функцией, которую называют электрическим потенциалом ϕ .

Связь между напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и потенциалом ϕ устанавливается с помощью выражений:

$$\phi_A = \int_A^P \vec{E} d\vec{l}; \quad \phi_A = \int_{l_A}^{l_P} \vec{E} d\vec{l}. \quad (9.10)$$

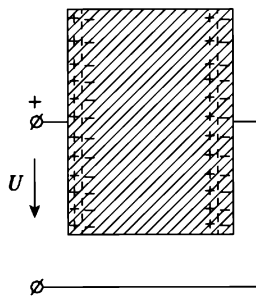


Рис. 9.4. Свободные и связанные заряды на пластинах конденсатора

Потенциал в точке A определяется как интеграл от $\vec{E}$ по $d\vec{l}$ от точки A , в которой хотим найти потенциал, до точки P , потенциал в которой принят равным нулю. Положение точек A и P определяется расстоянием вдоль некоторого пути, отсчитываемого от выбранного начала отсчета. Взяв производную от обеих частей равенства (9.10) по переменному нижнему пределу (точка A может находиться в произвольном месте), получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E_l \frac{\partial \varphi}{\partial l},$$

откуда

$$\varphi = -\int E_l dl = -\int \vec{E} d\vec{l}. \quad (9.11)$$

Таким образом, потенциал в произвольной точке A может быть найден либо с помощью определенного интеграла (9.10), либо с помощью неопределенного интеграла (9.11).

Из общей системы уравнений Максвелла для ЭСП используются три:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

которые в однородном поле приводятся к одному уравнению:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (9.12)$$

При отсутствии зарядов в рассматриваемой области

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0. \quad (9.13)$$

Уравнение (9.12) называют неоднородным уравнением Лапласа (в технических дисциплинах — уравнением Пуассона), уравнение (9.13) — однородным уравнением Лапласа (в технических дисциплинах — уравнением Лапласа) для ЭСП. В прямоугольной системе координат x, y, z , с учетом

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \varphi = \nabla^2 \varphi \quad \text{и} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

уравнения (9.12) и (9.13) примут вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{уравнение Пуассона}); \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{уравнение Лапласа}). \quad (9.15)$$

Интегрирование уравнений Пуассона или Лапласа позволяет найти потенциал $\varphi(x, y, z)$ в каждой точке поля, а затем, используя выражения (9.10, 9.11), также напряженность поля $\vec{E}$ по формуле

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (9.16)$$

При интегрировании уравнений Пуассона и Лапласа встречаемся с необходимостью определения постоянных интегрирования, которые находятся из граничных условий.

Граничные условия на поверхностях проводников:

внутри проводников

$$\vec{E} = 0;$$

на поверхности проводников

$$\vec{E} = E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}; \quad E_\tau = 0,$$

где E_n и E_τ — соответственно нормальная и касательная к поверхности проводника составляющие вектора $\vec{E}$.

1. Поверхность проводника представляет собой поверхность равного потенциала

$$\varphi = \text{const.} \quad (9.17)$$

2. Величина вектора электрической индукции $\vec{D}$ численно равна поверхностной плотности заряда

$$D = \sigma, \quad (9.18)$$

т.е. весь заряд проводника сосредоточен на его поверхности, внутри проводника заряда нет.

Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков

1. Касательные составляющие вектора $\vec{E}$ на поверхности раздела двух диэлектриков (рис. 9.5, а) равны

$$\left. \begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, \\ E_1 \sin \alpha_1 &= E_2 \sin \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

2. Нормальные составляющие вектора $\vec{D}$ на поверхности раздела двух диэлектриков (рис. 9.5, б) равны

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}, \\ D_1 \cos \alpha_1 &= D_2 \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

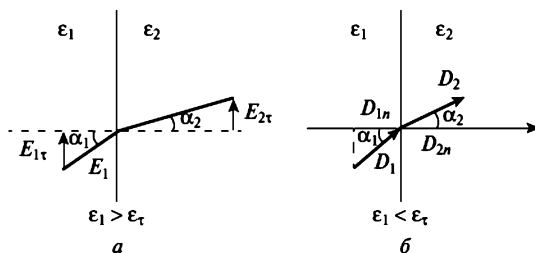


Рис. 9.5. Условия на границе раздела диэлектриков

3. Соотношение между углом падения и углом преломления линий электрического поля на границе раздела двух диэлектриков имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}. \quad (9.21)$$

Скачок нормальной составляющей напряженности ЭП объясняется наличием на границе сред некомпенсированных связанных зарядов и равен

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma_{\text{связ}}}{\varepsilon_0}.$$

В каждой точке поверхности заряженного тела напряженность определяется поверхностной плотностью свободных зарядов

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Величина вектора поляризации равна поверхностной плотности связанных зарядов

$$P = \sigma_{\text{связ}}.$$

Потенциал на границе раздела двух сред изменяется непрерывно

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (9.22)$$

Производные от потенциала, взятые по нормали к границе раздела, удовлетворяют равенству

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n},$$

что соответствует выражению (9.20).

Теорема, доказывающая, что задача расчета ЭСП по уравнениям Лапласа и Пуассона с учетом граничных условий может быть решена единственным образом, называется *теоремой единственности*.

Для наглядности ЭП изображают с помощью картинок, называемых *картинами поля*. На картинах указывают линии вектора напряженности $\vec{E}$ и линии равного потенциала φ . На рисунке 9.6 изображено ЭП положительного заряда Q сферической формы. Поток вектора $\vec{E}$, создаваемый зарядом Q сквозь любую замкнутую поверхность S , по теореме Гаусса, равный

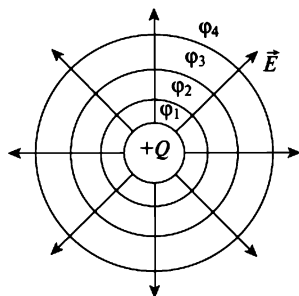


Рис. 9.6. Картина ЭСП

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon}, \quad (9.23)$$

разбит на трубки равного потока. Границы между трубками равного потока на рис. 9.6 есть линии $\vec{E}$.

Кроме того, на том же рис. 9.6 изображены линии равного потенциала, т.е. следы на плоскости сферических поверхностей равного потенциала φ . Картина поля на плоскости строится так, чтобы удовлетворялись два правила:

1. Линии $\vec{E}$ и линии φ пересекаются под прямым углом.
2. Ячейки картины поля, образующиеся при пересечении линий $\vec{E}$ и φ , должны быть подобны друг другу:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &\perp \varphi \\ \frac{\Delta a}{\Delta n} &= \text{const} \end{aligned} \right\}, \quad (9.24)$$

где Δa — расстояние между линиями $\vec{E}$; Δn — расстояние между линиями φ в каждой ячейке.

Цель расчета поля: найти значения напряженности поля $\vec{E}$ и электрического потенциала φ при заданной геометрии (расположение и форма заряженных тел) и граничных условиях. Задачи могут быть двух видов:

- а) заданы значения потенциала на границах поля;
- б) заданы значения напряженности поля на границах или, что то же, задано распределение зарядов по поверхности проводящих тел;
- в) заданы значения потенциалов на одних из границ, а на других — напряженности (задачи со смешанными граничными условиями).

Ниже на примерах рассмотрены наиболее употребляемые и относительно простые методы расчета ЭСП.

9.4. Расчеты симметричных полей

Задача 9.1. ЭСП создано двумя тонкими параллельно расположенными пластинами бесконечного размера. Поверхностная плотность заряда на одной из пластин $+\sigma$, на другой $-\sigma$ Кл/м². Найти напряженность поля между пластинами и снаружи пластин. Как изменится напряженность поля, если одну из пластин удалить? Для обоих случаев нарисовать картину поля.

Решение. В соответствии с граничным условием весь заряд пластины сосредоточен на ее поверхности, обращенной к другой пластине.

$D = \sigma$; $E = \frac{D}{\varepsilon}$; $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$; $\varepsilon_r = 1$. Распределение векторов $\vec{D}$, $\vec{E}$ в пространстве между пластинами изображено на рис. 9.7, а.

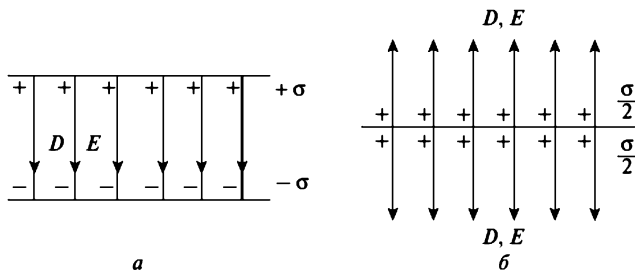


Рис. 9.7. ЭСП между двумя тонкими параллельными пластинами

Если одну из пластин удалить, ЭСП окажется симметричным по обе стороны оставшейся пластины:

$$D = \frac{\sigma}{2}; \quad E = \frac{D}{2\varepsilon}. \quad (9.25)$$

Картина поля изображена на рис. 9.5, б.

Задача 9.2. Шар имеет заряд $Q = 10^{-10}$ Кл. Найти наименьший радиус шара R , при котором в воздухе градиент потенциала не превысит допустимого значения (30 кВ/см).

Решение.

$$|\text{grad } \varphi| = E = 3 \cdot 10^6 \frac{B}{\text{м}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 E}} = \sqrt{\frac{10^{-10} \cdot 10^{12} \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 3}} = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Если бы весь заряд Q был расположен в центре шара, то напряженность поля такого точечного заряда также определялась бы по формуле (9.1). По существу мы решаем заданную задачу в предположении, что весь заряд шара расположен в его центре.

Задача 9.3. Рассчитать поле заряженной уединенной проволоки.

Решение. Согласно условию задачи, есть только одна заряженная проволока, и больше ничего нет. Если длина проволоки достаточно велика, что в рассматриваемой области пространства ее можно считать бесконечно длинной, то поле проволоки обладает цилиндрической симметрией. То есть используя теорему Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon} = \frac{\tau l}{\epsilon},$$

где $\tau = \frac{Q}{l}$ — линейная плотность заряда,

можно определить напряженность поля E в любой точке, удаленной от проволоки на расстояние r (рис. 9.8).

$$E = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon}. \quad (9.26)$$

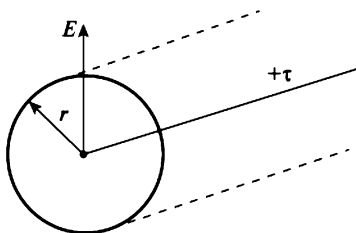


Рис. 9.8. Бесконечной длины проволока

Электрический потенциал

$$\varphi = -\int \vec{E} d\vec{r} = -\int \frac{\tau}{2\pi r \epsilon} dr = -\frac{\tau}{2\pi \epsilon} \ln r + \text{const.} \quad (9.27)$$

Постоянная интегрирования определяется в каждой конкретной задаче. Например, если мы имеем одножильный кабель, то потенциал оболочки кабеля, удаленной на расстояние R от заряженной жилы, равен потенциалу земли, т.е. нулю, тогда

$$0 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln R + \text{const}; \quad \text{const} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon R};$$

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r + \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln R = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R}{r}.$$

Задача 9.4. Исследовать поле коаксиального кабеля.

Решение. В диэлектрике между жилой и оболочкой коаксиального кабеля (рис. 9.9, а) напряженность поля будет та же, что и в поле заряженной оси:

при $r_1 \leq r \leq r_2$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r},$$

при $r_1 \leq r \leq r_2$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}.$$

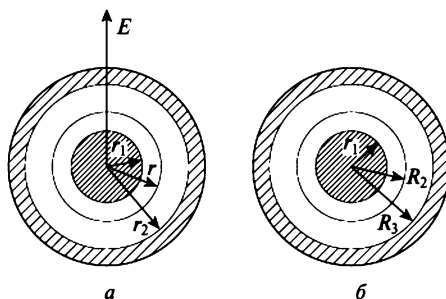


Рис. 9.9. Коаксиальный кабель

В жиле и в оболочке, а также вне кабеля поле отсутствует. Напряжение между жилой и оболочкой

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Емкость кабеля

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\tau l}{\tau} 2\pi\epsilon \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Если кабель имеет двухслойную изоляцию (рис. 9.9, б), то, так как значение вектора электрического смещения $\vec{D}$ не зависит от диэлек-

трической проницаемости среды, для расчета используют обобщенную теорему Гаусса

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q = \tau l$$

вследствие цилиндрической симметрии поля

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 2\pi r l = \tau l,$$

откуда

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}.$$

На границе раздела слоев изоляции $D_1 = D_2$, поэтому на границе раздела слоев изоляции напряженность поля меняется скачком:

$$E_2 = E_1 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

Таким образом, если изоляция кабеля однослойная, то т.к. значение $E(r)$ определяется гиперболической зависимостью (9.26), а поэтому существенно неодинаково по толщине изоляции, то выбирать в качестве изоляции диэлектрик с повышенной электрической прочностью оказывается невыгодным (напряженность поля в значительной части диэлектрика будет существенно меньше допустимого для данного диэлектрика значения). Если же сделать изоляцию кабеля многослойной, то неоднородность напряженности по толщине диэлектрика уменьшится, и обеспечить необходимую изоляцию жилы от оболочки можно при меньшей толщине изоляции.

9.5. Расчет напряженностей полей наложением

Электрическое поле в воздухе, а также в подавляющем большинстве видов изоляции является линейным, т.е. линейна зависимость $D(E)$: $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$, где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\epsilon_r = \text{const}$. Для любой линейной среды применим метод наложения. С помощью этого метода ниже решены некоторые задачи.

Задача 9.5. Рассчитать поле двухпроводной линии.

Решение. Пусть точки A и B — следы пересечения плоскости заряженными проволоками $+\tau$ и $-\tau$ (рис. 9.10). Найдем значения напряженности поля E и потенциала φ в произвольной точке M .

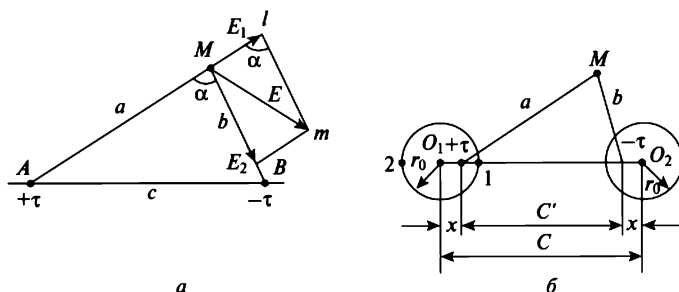


Рис. 9.10. Двухпроводная линия

$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{a}$ — напряженность поля от заряженной проволоки $+\tau$, направлена по линии, соединяющей точку M с зарядом $+\tau$.

$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{b}$ — напряженность поля от заряженной проволоки $-\tau$, направлена по линии, соединяющей точку M с зарядом $-\tau$.

$\triangle Mlm \sim \triangle AMB$, т.к. отношение длин двух сторон одного треугольника (b/a) пропорционально отношению длин двух сторон другого треугольника (E_1/E_2):

$$E_1 a = E_2 b = \frac{\tau}{2\pi\epsilon}; \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{b}{a}.$$

Заключенные между сторонами b и a и сторонами Ml и lm углы равны, как углы между параллельными сторонами. Из подобия треугольников

$$E = E_1 \frac{c}{b} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \frac{c}{ab}. \quad (9.28)$$

Найдем теперь потенциал в точке M от заряда $+\tau$ по формуле

$$\varphi'_M = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln b + \text{const.}$$

Потенциал в точке M от заряда $-\tau$

$$\varphi''_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln a + \text{const.}$$

Потенциал в точке M от обеих заряженных проволок

$$\varphi_M = \varphi'_M + \varphi''_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} + \text{const.}$$

Постоянную интегрирования найдем, считая, что потенциал точки, расположенный посередине между заряженными осями, равен нулю. Так как при этом

$$\frac{b}{a} = 1; \quad \ln 1 = 0, \quad \text{то} \quad 0 = 0 + \text{const}; \quad \text{const} = 0,$$

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}. \quad (9.29)$$

Выше рассмотрен случай, когда радиусы проводов (r_0) много меньше расстояния между проводами ($r_0 \ll c$). Рассмотрим теперь более сложный случай, когда расстояние между проводами двухпроводной линии соизмеримо с радиусом проводов. При этом, с одной стороны, поверхности проводов (проводящие металлические) являются поверхностями равного потенциала, с другой стороны, произойдет смещение противоположных по знаку зарядов на проводах друг к другу. Это приведет к тому, что так называемые «электрические оси» проводов ($+\tau$; $-\tau$)* и их геометрические оси (O_1 ; O_2) сместятся (рис. 9.10, б).

Условием эквипотенциальности является условие $\frac{b}{a} = \text{const}$, поэтому для точки 1 (рис. 9.10, б)

$$\frac{c - r_0 - x}{r_0 - x} = \text{const},$$

а для точки 2

$$\frac{c + r_0 - x}{r_0 + x} = \text{const}.$$

Так как точки 1 и 2 принадлежат одному проводу и потенциалы их равны, то соотношение

$$\frac{c - r_0 - x}{r_0 - x} = \frac{c + r_0 - x}{r_0 + x}.$$

То есть весь заряд с поверхности цилиндра переносится на одну линию, при этом рассчитанное поле будет учитывать неравномерное распределение зарядов на поверхности провода (проводящего цилиндра): на части поверхности, обращенной к другому проводу, поверхностная плотность заряда будет больше, чем на удаленном. Перенесение заряда с поверхности цилиндра на его «электрическую ось» аналогично перенесению заряда шара в его центр.

Откуда

$$x = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - r_0^2}.$$

Далее задача решается аналогично предыдущему случаю (когда геометрические и «электрические» оси совпадают).

9.6. Метод зеркальных отображений

Метод зеркальных отображений применяется в случаях, когда требуется определить поле зарядов, расположенных вблизи границы раздела сред с различными электрическими свойствами. При расчете поля зарядов, расположенных вблизи *хорошо проводящей поверхности*, влияние индуцированных на ней зарядов заменяется полем отображений, сосредоточенных по другую сторону границы раздела (рис. 9.11).

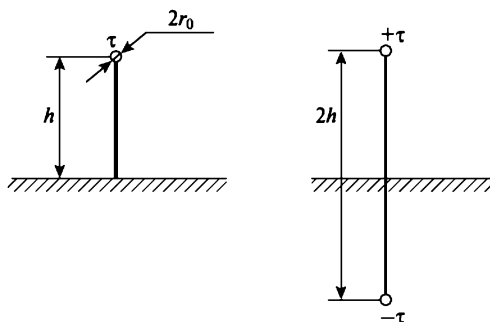


Рис. 9.11. Бесконечно длинный провод

При этом:

- а) алгебраическая сумма зарядов — отображений должна быть равна и противоположна по знаку действительному заряду, т.е. общая сумма всех зарядов должна быть равна нулю;
- б) результирующее поле от действительного заряда и зарядов — отображений должно удовлетворять граничным условиям поставленной задачи.

Задача 9.6. Определить емкость на единицу длины бесконечно длинного провода, проходящего на расстоянии h от проводящей поверхности (от земли), если радиус провода $r_0 \ll h$ (рис. 9.11).

Решение. Индуцированный заряд, распределенный по проводящей поверхности, равен по величине и противоположен по знаку индук-

цирующему заряду. Линейная плотность заряда провода τ . Пользуясь методом зеркальных изображений, заменим поле индуцированного заряда полем линейного заряда $-\tau$, расположенного как зеркальное отображение действительного заряда и будем рассчитывать поле обоих зарядов, полагая, что оба они находятся в воздухе. При этом граничные условия поставленной задачи будут выполнены, так как плоскость симметрии поля, совпадающая с проводящей поверхностью реальной задачи, будет поверхностью нулевого потенциала.

Таким образом, поле между линией с зарядом $+\tau$ и землей оказывается частью поля двухпроводной линии с зарядами $+\tau$ и $-\tau$, и для него справедливы выражения (9.28, 9.29), полученные в задаче 9.5. Потенциал провода относительно границы раздела согласно (9.23)

$$\varphi_{np} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}.$$

Здесь $a = r_0$; $b = 2h - r_0$, поэтому

$$\varphi_{np} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h - r_0}{r_0} \approx \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h}{r_0}.$$

Емкость провода относительно земли (на единицу длины провода)

$$C = \frac{Q_{np}}{\varphi_{np}} = \frac{\tau l}{l} \cdot \frac{2\pi\epsilon}{\tau \ln \frac{2h}{r_0}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{2h}{r_0}}.$$

9.7. Магнитная индукция и магнитный поток

9.7.1. Магнитная индукция

Согласно современным научным представлениям об электромагнитных явлениях, МП неразрывно связано с электрическим током: МП не может существовать без тока, и нельзя себе представить электрический ток без МП.

Если в пространстве, где существует МП, поместить магнитную стрелку, то она стремится занять вполне определенное положение, что свидетельствует о направленности свойств МП. Условились направлением МП в данной точке пространства считать направление, в котором устанавливается ось свободно подвешенной бесконечно малой магнитной стрелки, центр которой совмещен с этой точкой пространства. При этом из двух возможных направлений вдоль оси стрелки МП условно приписывают направление от южного конца стрелки к северному.

Наглядное представление о направленности МП можно получить, если в пространстве провести ряд линий, по отношению к которым оси всех магнитных стрелок являлись бы касательными. Такие линии получили название магнитных линий. Совокупность магнитных линий принято называть картиной МП. Для примера на рис. 9.12 приведены плоскостные картины МП постоянного магнита в форме параллелепипеда (рис. 9.12, *а*), МП тока в прямом проводе круглого сечения (рис. 9.12, *б*), МП соленоида (рис. 9.12, *в*) и МП обмоток возбуждения электрической машины постоянного тока (рис. 9.12, *г*).

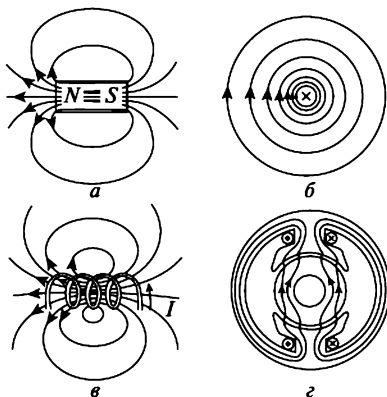


Рис. 9.12. Картины МП постоянного магнита

Направление МП, созданного током, зависит от направления тока в проводах. Это направление принято определять по правилу правого винта. В электротехнике это правило применяют в двух вариантах в зависимости от того, идет ли речь о поле, созданном током в отрезке провода или током, замыкающимся в витке, в частности протекающим по обмотке индуктивной катушки.

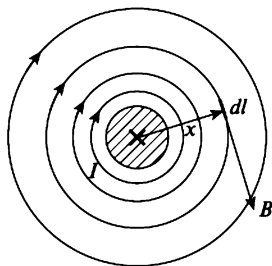


Рис. 9.13. Расположение магнитных линий у прямолинейного проводника с током

В первом случае, обращаясь к МП проводника с током (рис. 9.13), винт с правой нарезкой мысленно располагают так, чтобы его ось оказалась совмещенной с осью провода, по которому течет ток. Если вращать винт в направлении магнитных линий, то направление его поступательного перемещения будет соответствовать направлению тока в проводе.

Во втором случае, когда МП образовано индуктивной катушкой (рис. 9.12, *а*) или витком с током (рис. 9.12, *б*), ось винта следует совместить с осью витка или катушки. Тогда при вращении винта в направлении движения тока в витке или по обмотке катушки поступательное перемещение винта укажет направление МП сквозь рассматриваемые виток или катушку.

МП помимо направления характеризуется еще и интенсивностью. Рассмотрим, для примера, воздействие МП на небольшой плоский контур с электрическим током. Такой контур будет стремиться занять в пространстве определенное положение, при котором нормаль к плоскости контура совпадает с направлением МП в одной из точек плоскости, ограниченной этим контуром.

При выведении контура из указанного положения на него начинает действовать момент, стремящийся вернуть контур в первоначальное положение. Величина момента пропорциональна току I контура, его площади S и синусу угла β , составляемого нормалью к плоскости контура и направлением МП в одной из ее точек (рис. 9.14).

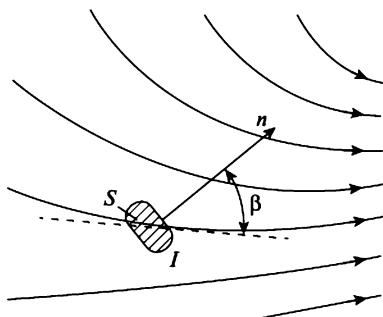


Рис. 9.14. Воздействие МП на плоский контур с током

Таким образом, обозначая коэффициент пропорциональности буквой B , для момента m , действующего на отклоненный контур, можно написать:

$$m = BIS \sin \beta.$$

Если беспрестанно уменьшать площадь контура, стягивая его в точку, придем к выражению для бесконечно малого момента dm , действующего на контур бесконечно малой площади ds :

$$dm = BI \sin \beta ds, \quad (9.30)$$

где угол β приобретает определенный смысл угла между нормалью к плоскости бесконечно малого контура и направлением МП в точке пространства, где расположен бесконечно малый контур.

В этих условиях коэффициент B принимают за характеристику интенсивности МП в данной точке пространства и называют индукцией МП.

Магнитную индукцию рассматривают как векторную величину, совмещая направление вектора магнитной индукции с направлением МП в данной точке пространства.

МП, характеризующееся в некоторой области пространства неизменным значением вектора магнитной индукции, называют равномерным МП. Магнитная индукция в международной системе (СИ) измеряется в единицах тесла (Тл). Магнитная индукция равномерного МП равна 1Тл, если она воздействует на плоский электрический контур с площадью $S = 1 \text{ м}^2$ и током $I = 1 \text{ А}$, расположенный так, что магнитные линии лежат в плоскости контура ($\beta = 0,5\pi$, $\sin \beta = 1$), с моментом $m = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Область пространства, с каждой точкой которого связан определенный вектор, принято называть полем данного вектора. Для наглядного представления векторного поля широко используют понятия линий и трубок данного вектора. При этом под линией вектора понимают линию, проведенную в поле так, что в любой ее точке вектор направлен по касательной линии. Тружкой вектора называют трубчатую область пространства, ограниченную совокупностью прилегающих друг к другу линий данного вектора, проведенных через замкнутый контур. К упомянутому математическому представлению о векторном поле часто прибегают при описании различных физических полей. В частности, при описании МП обращаются к полю вектора магнитной индукции, определяя в нем линии и трубки вектора магнитной индукции.

9.7.2. Магнитный поток

При исследовании магнитных явлений важную роль играет поток вектора магнитной индукции, или сокращенно магнитный поток.

Пусть в МП дана бесконечно малая поверхность ds (рис. 9.15), положение которой в пространстве определим относительно МП углом β между нормалью к этой поверхности и вектором $\vec{B}$ магнитной индукции в центре этой поверхности. Спроектируем вектор магнитной индукции на направление нормали n к поверхности ds . Произведение этой проекции $B_n = B \cos \beta$ на площадь ds поверхности $d\Phi = B_n ds = B \cos \beta ds$ получило название магнитного потока сквозь бесконечно малую площадку ds .

Пользуясь известным из математики представлением плоской поверхности в виде вектора, величина которого равна площади этой поверхности, а направление совпадает с направлением нормали к ней, и вспоминая о скалярном произведении двух векторов как произведении величин этих векторов на косинус угла между ними, можно магнитный поток записать в векторной форме: $d\Phi = \vec{B}d\vec{s}$.

Для представления магнитного потока сквозь поверхность S конечных размеров (рис. 9.16) разобьем эту поверхность на элементарные поверхности ds и определим бесконечно малые магнитные потоки $d\Phi$ сквозь каждую такую поверхность. Магнитным потоком сквозь поверхность конечных размеров называют сумму потоков сквозь все составляющие ее элементарные поверхности, определяющуюся интегрированием бесконечно малых потоков в пределах всей поверхности:

$$\Phi = \int_S B \cos \beta ds. \quad (9.31)$$

Выражение (9.31) в векторной форме представится в виде

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s}. \quad (9.32)$$

Интеграл в правых частях формул (9.31) и (9.32) читается как поток вектора магнитной индукции сквозь заданную поверхность.

Единица магнитного потока в международной системе (СИ) называется вебер (Вб). Магнитный поток, равный 1 Вб, достигается сквозь плоскую поверхность площадью в 1 м², если ее разместить в равномерном поле с магнитной индукцией величиной в 1 Тл перпендикулярно магнитным линиям.

Используя формулы (9.31), (9.32), магнитную индукцию B можно представить как величину, численно рав-

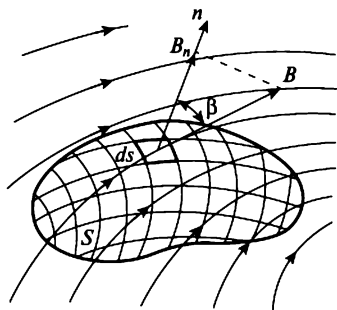


Рис. 9.16. Прохождение МП через элементы малой поверхности

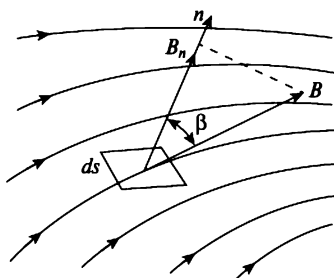


Рис. 9.15. Прохождение МП через малую поверхность

ную магнитному потоку, приходящемуся на единицу площади, расположенной перпендикулярно магнитным линиям:

$$B = \frac{d\Phi}{ds_n}. \quad (9.33)$$

Для частного случая конечной плоскости, расположенной перпендикулярно магнитным линиям в равномерном МП, получаем выражение

$$B = \frac{\Phi}{S}. \quad (9.34)$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие источники энергии являются причиной появления ЭП?
2. Какими величинами можно оценить качественные и количественные характеристики ЭП?
3. Какие источники энергии являются причиной появления электростатического поля?
4. Какими уравнениями можно описать статическое ЭП?
5. Что представляет собой электростатическое экранирование?
6. Что такое электрическая напряженность ЭП (ЭМП) — $\vec{E}$?
7. Что такое электрическая индукция ЭП — $\vec{D}$?
8. Какие источники являются причиной появления МП?
9. Какими величинами можно оценить качественные и количественные характеристики МП?
10. Чем связаны МП и ЭП?
11. Что такое электрический потенциал и электрическое напряжение?
12. Что такое магнитный поток и магнитная индукция?
13. Как можно определить направление МП, индуцированного электрическим током?

РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ОТ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

10.1. Методы расчета электрических полей

Внутри проводников, по которым протекает электрический ток, существует электрическое поле. В изотропной среде напряженность поля связана с плотностью тока соотношением

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}, \quad (10.1)$$

где γ — удельная проводимость.

Выражение (10.1) называют «закон Ома в дифференциальной форме». Действительно, умножив левую и правую части (10.1) на сечение проводника S_{np} , а также умножив и разделив правую часть (10.1) на длину проводника l_{np} , получим

$$JS_{np} = \gamma \frac{S_{np}}{l_{np}} El_{np};$$

$$I = \frac{U}{R}. \quad (10.1, a)$$

Второе уравнение Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

в поле постоянных токов имеет вид:

$$\text{rot } \vec{E} = 0. \quad (10.2)$$

В интегральной форме уравнение (10.2) записывается

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \sum U = 0, \quad (10.2, a)$$

что представляет собой второй закон Кирхгофа, поэтому уравнение (10.2) называют «вторым законом Кирхгофа в дифференциальной форме».

Линии тока в проводящей среде всюду непрерывны (принцип непрерывности электрического тока)

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0. \quad (10.3)$$

В интегральной форме это уравнение имеет вид

$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = 0; \quad \sum I = 0, \quad (10.3, a)$$

что представляет собой первый закон Кирхгофа, поэтому уравнение (10.3) называют «первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме».

Таким образом, уравнения (10.1)—(10.3) представляют собой законы электрических цепей постоянного тока (постоянного, т.к. закон Ома в виде (10.1) учитывает только активное сопротивление проводника, в отличие от цепей переменного тока, где необходимо также учитывать емкость конденсатора и индуктивность катушки. Поэтому задачи на расчет цепей постоянного тока, которые приводятся в разделе курса ТОЭ «Теория линейных электрических цепей постоянного тока», по существу являются примерами расчета ЭП поля постоянных токов.

Поле в диэлектрике, окружающем проводники с токами, характеризуется уравнениями:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Так как $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, то потенциальное поле $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Так как $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, то

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = 0; \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad (10.4)$$

в декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (10.5)$$

Таким образом, в диэлектрике, окружающем проводники с токами, поле описывается тем же уравнением Лапласа, как и в ЭСП.

Граничные условия на поверхности проводник-диэлектрик в рассматриваемом поле отличаются от электростатического. В ЭСП поверхность проводящего тела является поверхностью равного потенциала, линии напряженности нормальны к поверхностям проводящих тел $\vec{E} = E_n$ (рис. 10.1).

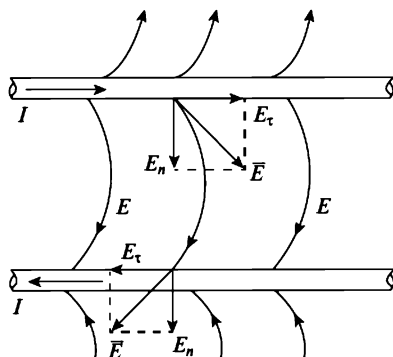


Рис. 10.1. Распределение ЭП между проводниками с током

В рассматриваемом поле векторы напряженности имеют не только нормальную, но и тангенциальную составляющую E_τ (при прохождении тока по проводнику возникает падение напряжения $U = E_\tau l$).

Поэтому линии напряженности поля подходят к проводнику не под прямым углом (как в ЭСП), а под некоторым, отличным от прямого.

Так обстоит дело, если рассматривать вопрос строго теоретически. Практически же обычно $E_\tau \ll E_n$ и касательной составляющей можно пренебречь. Действительно, пусть на расстоянии $d = 10$ см друг от друга находятся два параллельных провода. Напряжение между ними $U = 100$ В. Плотность тока в проводе $\delta = 5$ А/мм². Провода медные с проводимостью $\gamma = 58$ м/Ом · мм².

$$E_\tau = \frac{J}{\gamma} = \frac{5}{58} = 0,086 \text{ В/м}; \quad E_n = \frac{U}{d} = \frac{100}{0,1} = 10^3 \text{ В/м}; \quad \frac{E_n}{E_\tau} > 10^4 \quad \vec{E} \cong \vec{E}_n.$$

Поэтому при рассмотрении ЭП в диэлектрике, окружающем проводники с токами, можно использовать решения, полученные при рассмотрении задач при расчете ЭСП.

Решения, полученные при рассмотрении электростатических задач, можно использовать также при анализе ЭП внутри проводящих тел с постоянными токами, т.к. между уравнениями ЭП в проводящей среде и уравнениями ЭСП существует аналогия, приведенная в табл. 10.1.

В таблице 10.1 ψ_D — поток вектора $\vec{D}$ сквозь некоторую поверхность S , равен части заряда заряженного тела.

Используя вышеприведенную аналогию, можно получить решение задач электрического поля в проводящей среде на основе решений ЭСП и наоборот, если заменить:

$$\varepsilon \leftrightarrow \gamma, \quad D \leftrightarrow J, \quad C \leftrightarrow G, \quad \psi_D \leftrightarrow I.$$

Таблица 10.1

ЭП поле в проводящей среде	ЭСП
$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$
$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0$	$\operatorname{div} \vec{D} = 0$
$\int_s \vec{\delta} d\vec{s} = I$	$\int_s \vec{D} d\vec{S} = \psi_D \quad (\psi_D = \Delta Q)$
$I = GU$	$\psi_D = CU$

Аналогичны также и граничные условия на поверхности раздела сред в электростатическом и электрическом поле в проводящей среде.

Выводы, полученные на основе табл. 10.1 и граничных условий, позволяют моделировать экспериментально ЭСП электрическим полем в проводящей среде, используя для этого проводящую бумагу (если производится моделирование на плоскости) или электролитическую ванну, если производится объемное моделирование.

10.2. Электрическое поле в проводящей среде

Задача 10.1. Плоский конденсатор с многослойным диэлектриком имеет площадь обкладок $S = 25 \text{ см}^2$, толщины слоев $d_1 = 2 \text{ см}$, $d_2 = 3 \text{ см}$, $d_3 = 2 \text{ см}$ и удельные проводимости в слоях: $\gamma_1 = 10^{-10} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$; $\gamma_2 = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$; $\gamma_3 = 10^{-10} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$. Определить сопротивление утечки и емкость конденсатора, используя метод электростатической аналогии.

Решение. Электрический ток проводимости в конденсаторе вследствие конечной проводимости диэлектриков одинаков во всех слоях и равен $I = \delta S$, т.к. S одинаково, то и δ одинаково во всех слоях, поэтому

$$E_1 = \frac{\delta}{\gamma_1}; \quad E_2 = \frac{\delta}{\gamma_2}; \quad E_3 = \frac{\delta}{\gamma_3};$$

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 + E_3 d_3 = \delta \left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} + \frac{d_3}{\gamma_3} \right) = \frac{I}{S} \left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} + \frac{d_3}{\gamma_3} \right);$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{S} \left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} + \frac{d_3}{\gamma_3} \right).$$

Проводимость утечки $G_{yt} = 1/R$, откуда

$$C = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3}}.$$

Задача 10.2. Коаксиальный кабель имеет радиус прямого провода (жилы) $r_1 = 1$ см; внутренний радиус обратного провода (оболочки) $r_3 = 3$ см. Изоляция состоит из двух слоев. Граничная поверхность между ними имеет радиус $r_2 = 2$ см. Удельная проводимость слоев: $\gamma_1 = 10^{-10}$ 1/Ом · м; $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-10}$ 1/Ом · м. Определить сопротивление утечки R_{yt} и емкость кабеля на 1 км длины.

Решение. По аналогии с предыдущей задачей

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S},$$

где I — ток утечки, $S = 2\pi r l$ — поверхность цилиндра.

$$E_1 = \frac{I}{2\pi r_1 l \gamma_1} \quad \text{— напряженность поля}$$

на внутренней границе первого слоя.

$$E_2 = \frac{I}{2\pi r_2 l \gamma_2} \quad \text{— то же на внутренней границе}$$

второго слоя (рис. 10.2).

Напряжение между проводами кабеля

$$U = \int_1^2 E_1 dr + \int_2^3 E_2 dr = \frac{\tau}{2\pi l} \left[\frac{1}{\gamma_1} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} + \frac{1}{\gamma_2} \ln r \Big|_{r_2}^{r_3} \right];$$

$$R_{yt} = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi l} \left(\frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right).$$

$$G_{yt} = \frac{1}{R_{yt}}; \quad C = \frac{2\pi l}{\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

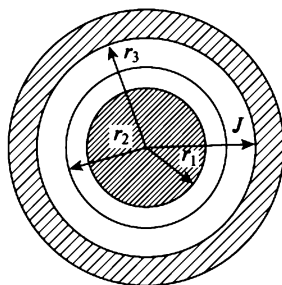


Рис. 10.2. Сечение коаксиального кабеля

Вопросы для самопроверки

1. Как выглядит анатомическая модель ЭП в диэлектрической среде?
2. Как выглядит анатомическая модель ЭП в проводящей среде?

3. Какими уравнениями математической физики описываются ЭП постоянного тока?
4. Что такое граничные условия для уравнения математической физики, описывающей ЭП?
5. Какой зависимостью описывается плотность электрического тока в воздушной среде энергоемкого района?
6. Как можно определить силу, действующую в точке среды на помещенное в нее тело в ЭП?
7. Что такое граничные условия для уравнения математической физики, описывающей ЭП?

РАСЧЕТЫ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ОТ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

11.1. Методы расчета магнитных полей

Уравнения МП постоянных токов, как это следует из общей системы дифференциальных уравнений ЭМП, имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}; \quad (11.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (11.2)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (11.3)$$

В соответствии с уравнением (11.1) МП является вихревым. Для его расчета используют векторный магнитный потенциал $\vec{A}$, вводимый в виде

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (11.4)$$

Подстановка (11.4) в (11.2) дает выражение, тождественно равное нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0.$$

Записав последнее выражение с помощью оператора «набла», имеем: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \vec{A}]$ — скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор, равный векторному произведению $[\vec{\nabla} \vec{A}]$, что, как следует из рис. 11.1, всегда равно нулю.

Умножим обе части выражения (11.1) на величину μ :

$$\mu \operatorname{rot} \vec{H} = \mu \vec{\delta}.$$

Тогда в однородном поле при $\mu = \text{const}$

$$\operatorname{rot} \mu \vec{H} = \mu \vec{\delta}; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{\delta}; \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu \vec{\delta}. \quad (11.5)$$

Как отмечалось выше, функция $\vec{A}$ непрерывна, т.е. $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Выражение (11.5) теперь можно представить в виде

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu \vec{\delta}. \quad (11.6)$$

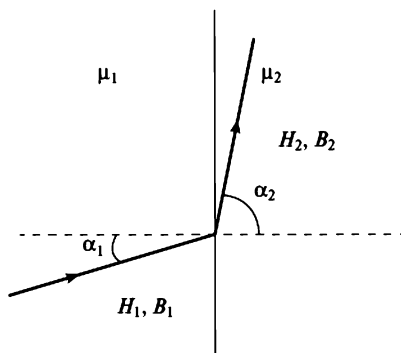


Рис. 11.1. Граничные условия на поверхности раздела двух магнитных сред

Выражение (11.6) представляет собой уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала $\vec{A}$. Величина $\vec{A}$ есть вектор, поэтому (11.6) можно представить в виде трех уравнений для компонент $\vec{A}$:

$$\bar{\nabla}^2 A_x = -\mu \delta_x; \quad \bar{\nabla}^2 A_y = -\mu \delta_y; \quad \bar{\nabla}^2 A_z = -\mu \delta_z. \quad (11.7)$$

Решение уравнений (11.7) с учетом граничных условий в МП позволяет найти величину индукции $\vec{B}$ и напряженности $\vec{H}$ МП.

Выражение магнитного потока через векторный магнитный потенциал. Магнитный поток Φ , пронизывающий какую-либо поверхность S , равен

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

С учетом (11.4)

$$\Phi = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}.$$

По теореме Стокса

$$\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_l \vec{A} d\vec{l},$$

откуда

$$\Phi = \oint_l \vec{A} d\vec{l}. \quad (11.8)$$

Кроме того, что МП описывается векторным магнитным потенциалом $\vec{A}$, в области, где нет токов, его также можно описать с помощью скалярного магнитного потенциала φ_m (по аналогии с тем, как ЭП описывается скалярным электрическим потенциалом φ).

Другими словами, поскольку $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, то $\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m$.

С учетом (11.2) и (11.3) в однородном поле при $\mu = \text{const}$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu \vec{H} = m \operatorname{div} \vec{H} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0; \quad (11.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m &= 0; \\ \nabla^2 \varphi_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

То есть скалярный магнитный потенциал подчиняется уравнению Лапласа, которое в проекциях на оси прямоугольной системы координат (x, y, z) записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} = 0. \quad (11.11)$$

Граничные условия на поверхности раздела двух магнитных сред. Из выражения (11.9) находим

$$H_1 \tau = H_2 \tau, \quad (11.12)$$

а из (11.2) соответственно

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (11.13)$$

где $H_1 \tau$, $H_2 \tau$ — касательные составляющие векторов $\vec{H}$ к границе раздела сред (рис. 11.1); B_{1n} , B_{2n} — нормальные составляющие векторов $\vec{B}$.

Из рисунка 11.1 следует, что

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2; \quad B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2,$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\mu_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\mu_2}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (11.14)$$

Следствие. Под каким бы углом линии магнитной индукции ни входили из воздуха в ферромагнитную среду ($\mu_2 \gg \mu_1$), внутри ферромагнитной среды они будут параллельны поверхности среды. Действительно, магнитная проницаемость воздуха $\mu_1 = \mu_0$. Магнитная проницаемость ферромагнетика, для примера, $\mu_2 = 10^4 \mu_0$, тогда

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_0}{10^4 \mu_0} = \frac{1}{10^4}.$$

Пусть $\alpha_1 = 0,5^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,009 \approx 0,01$, тогда $\operatorname{tg} \alpha_2 = 10^4 \cdot 0,01 = 100$, что соответствует $\alpha_2 = 89,5^\circ$.

11.2. Закон полного тока, скалярный магнитный потенциал

Задача 11.1. По длинному прямолинейному проводу радиуса R протекает постоянный ток I . Найти напряженность МП внутри и вне провода.

Решение. При постоянном во времени токе плотность тока по сечению провода есть величина постоянная:

$$\delta = \frac{I}{\pi R^2};$$

при $r \leq R$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I_r; \quad H 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2; \quad H = \frac{I}{2\pi R^2} r;$$

при $r \geq R$

$$I = 2\pi r H; \quad H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Задача 11.2. Длинный прямолинейный провод имеет кольцевое сечение радиусов R_1 и R_2 . По проводу протекает постоянный ток I . Построить кривую $H(r)$, где r — расстояние от точки O на оси провода до произвольных точек областей 1, 2, 3 (рис. 11.2).

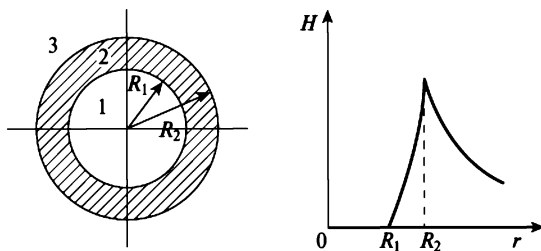


Рис. 11.2. Прямолинейный полый цилиндрический провод

Решение.

1. Область: $r < R_1$, $H = 0$.

2. Область: $R_1 \leq r \leq R_2$, $\delta = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$; δ — плотность тока;

$$\frac{I\pi(r^2 - R_1^2)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = 2\pi r H; \quad H = \frac{I r^2 - R_1^2}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)r}.$$

3. Область: $r \geq R_2$: $2\pi r H = I$; $H = \frac{I}{2\pi r}$.

Таким образом для нахождения B и H через векторный потенциал $\vec{A}$ необходимо выполнить достаточно сложные математические преобразования, в то время как и без векторного потенциала значение B и H найдено в задаче 11.2 достаточно просто.

График $H(r)$ построен на рис. 11.2.

Вполне законно возникает вопрос: зачем же нужен векторный потенциал, если уже известно МП? Ответ здесь может быть следующим: часто вычисление векторного потенциала полезно потому, что позволяет найти качественную картину, которая может быть полезна для отыскания количественных результатов. Как уже отмечалось, понятие векторного потенциала в МП соответствует скалярному потенциалу в ЭП. Их выражения часто оказываются подобными, из чего часто следует и подобие полей — электрического и магнитного (табл. 11.1).

Таблица 11.1

	Электрическое поле	Магнитное поле
Поле уединенного провода	$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r + \text{const}, \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}$	$A = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln r + \text{const}, \quad H = \frac{\tau}{2\pi r}$
Поле двух проводов	$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}, \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{c}{ab}$	$A = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad H = \frac{I}{2\pi} \frac{c}{ab}$

11.3. Метод зеркальных отображений

Задача 11.3. Прямолинейный длинный изолированный провод, по которому протекает ток $I = 60$ А, расположен в воздухе параллельно плоской поверхности стальной плиты на расстоянии $h = 2$ см от нее (рис. 11.3). Относительная магнитная проницаемость стали $\mu_r \rightarrow \infty$. Требуется найти напряженность МП в точках a и b . Координаты точек a и b : $x_a = 0$; $y_a = 0$; $x_b = 3$ см; $y_b = 2$ см.

Решение. Воспользуемся методом зеркальных отображений. Найдем фиктивный ток I_2 (рис. 11.4):

$$I_2 = I_1 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = I_1 = I.$$

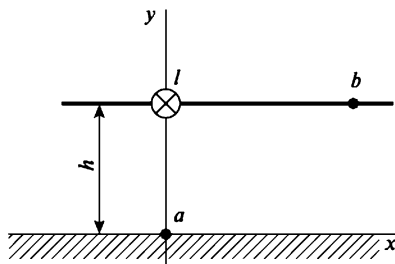


Рис. 11.3. Провод с постоянным током над поверхностью земли

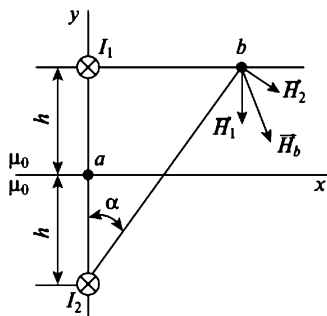


Рис. 11.4. Расчетная схема для задачи 11.3

Окончательно получим

$$\vec{H}_b = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{i}172 - \vec{j}432, \text{ А/м},$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ — единичные орты вдоль осей x и y .

11.4. Расчет магнитных полей с помощью закона Био-Савара

Во многих случаях закон Био-Савара позволяет с меньшими усилиями (чем с помощью векторного потенциала) рассчитать МП.

Если в замкнутом линейном конуре протекает ток I А, то по закону Био-Савара напряженность МП в любой точке пространства (в «точке наблюдения») равна

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}^0}{r^2}. \quad (11.15)$$

В (11.15): $d\vec{l}$ — длина элемента проводника (м), направление $d\vec{l}$ совпадает с направлением тока в рассматриваемом элементе

(рис. 11.5, а); $\vec{r}^0$ — единичный вектор, направленный из указанного элемента проводника в точку наблюдения; r — расстояние (м) между отрезком проводника и точкой наблюдения.

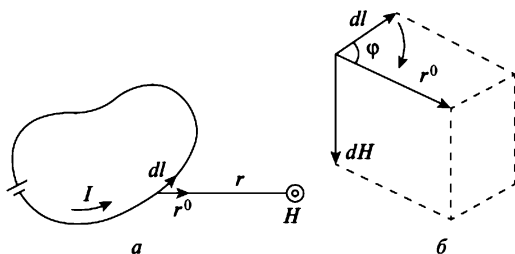


Рис. 11.5. Электрический ток в замкнутом контуре

Интегрирование должно быть произведено вдоль всего замкнутого контура. Хотя в любой точке пространства имеет смысл лишь общая напряженность магнитного поля и лишь она может быть обнаружена на опыте, формулу (11.15) можно все же толковать и так, что каждый элемент проводника создает свою слагающую общей напряженности магнитного поля, определяемую формулами

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \cdot \vec{r}^0}{r^2}; \quad dH = \frac{I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin \varphi,$$

причем векторы $d\vec{l}$, $\vec{r}^0$, $d\vec{H}$ в указанной последовательности образуют правовинтовую систему (рис. 11.5, б).

Применяя выражение (11.15) к бесконечно длинному прямолинейному проводнику, найдем, что линии МП в виде окружностей охватывают проводник, а их направление связано с направлением тока так же, как направление вращения правоходового винта связано с направлением осевого перемещения:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \cdot \vec{r}^0}{r^2} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{dl}{r^2} \sin \varphi = \frac{I}{2\pi r}.$$

11.5. Силы, моменты и энергия в магнитном поле

Силы взаимодействия постоянного магнитного поля с движущимися частицами и токами. Сила, действующая на заряженную частицу при движении ее в МП (Сила Лоренца), равна

$$\vec{f} = Q[\vec{v} \cdot \vec{B}], \quad (11.16)$$

где Q — заряд частицы; $\vec{v}$ — скорость ее движения; $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции в точке, где находится частица.

Сила взаимодействия между параллельными проводами с током [3]

$$f = B_1 I_2 l = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} I_2 l \quad (11.17)$$

при условии $d \ll l$. Здесь B_1 — магнитная индукция на оси второго провода от тока I_1 ; I_1 — ток в первом проводе; I_2 — ток во втором проводе; l — длина проводов; d — расстояние между осями проводов.

Если токи в проводах направлены одинаково, провода притягиваются. Если токи в проводах направлены в разные стороны, провода отталкиваются.

Задача 11.4. Расстояние между проводами $d = 10$ см (рис. 11.6). Токи в проводах $I_1 = 1000$ А, $I_2 = 500$ А направлены в одну сторону. Длина проводов 1 м. Определить магнитную силу взаимодействия f .

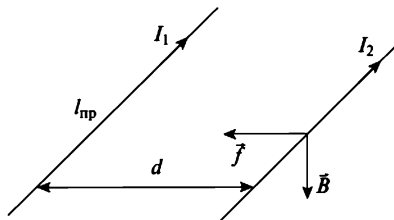


Рис. 11.6. Взаимодействие между проводами

Решение.

$$f = \frac{I_1 I_2 \mu_0 l}{2\pi d} = \frac{1000 \cdot 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2\pi \cdot 0,1} = 1 \text{ Н.}$$

Провода притягиваются.

Задача 11.5. По двум параллельным проводам двухпроводной линии протекают равные по величине, но противоположно направленные токи $I_1 = I_2 = 400$ А. Расстояние между осями проводов $d = 0,3$ м. Найти величину и направление магнитной силы, действующей на 1 км длины каждого провода.

Решение.

$$f = \frac{I_1 I_2 \mu_0 l}{2\pi d} = \frac{400^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3}{2\pi \cdot 0,3} = 106,4 \text{ Н.}$$

Эти силы отталкивают провода.

11.6. Магнитное поле в веществе

Уравнения МП постоянных токов (11.1)—(11.3) можно рассматривать как законы магнитных цепей. Действительно,

$$B = \mu H \rightarrow BS_{\mathcal{M}} = \mu HS_{\mathcal{M}} \frac{l_{\mathcal{M}}}{l_{\mathcal{M}}} \rightarrow \Phi = \frac{HI_{\mathcal{M}}}{\frac{l_{\mathcal{M}}}{\mu S_{\mathcal{M}}}} = \frac{U_{\mathcal{M}}}{R_{\mathcal{M}}}. \quad (11.18)$$

Выражение (11.18) является законом Ома для участка магнитной цепи. Здесь $U_{\mathcal{M}} = HI_{\mathcal{M}}$ — магнитное напряжение; $R_{\mathcal{M}} = \frac{l_{\mathcal{M}}}{\mu S_{\mathcal{M}}}$ — магнитное сопротивление участка магнитной цепи; $l_{\mathcal{M}}$ — длина участка магнитопровода, $S_{\mathcal{M}}$ — сечение магнитопровода.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \rightarrow \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \rightarrow \sum \Phi = 0 \quad (11.19)$$

— первый закон Кирхгофа для магнитной цепи.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \rightarrow \oint_l \vec{H} d\vec{l} = wI \rightarrow \sum U_{\mathcal{M}} = \sum F \quad (11.20)$$

— второй закон Кирхгофа (здесь $F = Iw$ — магнитодвижущая сила — МДС).

Законы магнитных цепей и их параметры.

На основе приведенной аналогии (табл. 11.2) можно сделать вывод о том, что магнитные цепи могут быть рассчитаны теми же методами, что и электрические цепи.

Таблица 11.2

Электрические цепи	Магнитные цепи
Электродвижущая сила	Магнитодвижущая сила $F = Iw$
Электрический ток I	Магнитный поток Φ
Электрическое напряжение U	Магнитное напряжение $U_{\mathcal{M}}$
Электрическое сопротивление $R = \frac{l}{\gamma S}$	Магнитное сопротивление $R_{\mathcal{M}} = \frac{l_{\mathcal{M}}}{\mu S_{\mathcal{M}}}$
Закон Ома $I = \frac{U}{R}$	Закон Ома $\Phi = \frac{U_{\mathcal{M}}}{R_{\mathcal{M}}}$
Первый закон Кирхгофа $\sum I = 0$	Первый закон Кирхгофа $\sum \Phi = 0$
Второй закон Кирхгофа $\sum U = \sum E$	Второй закон Кирхгофа $\sum U_{\mathcal{M}} = \sum F$

Задача 11.6. Рассчитать магнитную цепь, приведенную на рис. 11.8, *а*. Магнитную проницаемость считать постоянной.

Решение. На рисунке 11.7, *б* изображена схема, соответствующая магнитной цепи (рис. 11.7, *а*). Направление МДС определено по правилу правого винта. Магнитные сопротивления:

$$R_{mc} = \frac{l_m}{\mu S_m}; \quad R_{m3} = \frac{\delta}{\mu_0 S_m}; \quad F = Iw.$$

(R_{mc} — магнитное сопротивление стального магнитопровода, R_{m3} — магнитное сопротивление зазора магнитной цепи):

$$\Phi = \frac{F}{R_{mc} + R_{m3}}; \quad B = \frac{\Phi}{S_m}; \quad H_c = \frac{B}{\mu}; \quad H_3 = \frac{B}{\mu_0}.$$

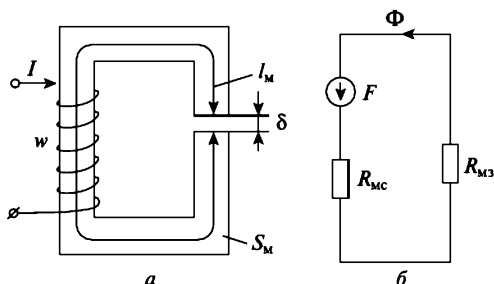


Рис. 11.7. Схема магнитной цепи

Вопросы для самопроверки

1. Каким способом можно определить наличие МП в некоторой области пространства?
2. Как формулируется аналитическая задача для определения МП постоянных токов.
3. Какими уравнениями описывается МП постоянного тока?
4. Для какой цели применяется заземление всех видов аппаратуры, источников электрической энергии и приемников электрической энергии?
5. По каким формулам рассчитывается энергия в ЭМП в объеме dv ?
6. В чем заключается принцип соответствия плоскопараллельных ЭП и МП?
7. Как можно определить силу, действующую в точке среды на помещенное в нее тело в МП?

8. Как записывается плотность электрического тока в воздушной среде?
9. Как описываются аналитически характеристики ЭМП — $\vec{D}$, $\vec{B}$ в разных средах?
10. Что характеризует аналитическая зависимость $\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \int_s \text{rot} \vec{A} d\vec{s}$, представляющая теорему Стокса?
11. Каким уравнением описывается МП, образующиеся вокруг проводника с током $\vec{I}$?

РАСЧЕТЫ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

12.1. Условия квазистатичности

На практике обычно имеют дело с переменными токами, меняющимися по периодическому закону, например $i = I_m \sin \omega t$, где $\omega = 2\pi f$ — угловая частота; f — частота переменного тока; $T = 1/f$ — период. Токи создают в окружающем пространстве МП. Изменение тока приводит и к изменению МП. Однако это изменение не может произойти сразу во всем пространстве. Оно будет распространяться, например, в вакууме или в воздухе со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В каждый момент времени МП в непосредственной близости от проводника определяется мгновенным значением создающего его тока, если изменения тока во времени значительно медленнее, чем время распространения в пространстве этого изменения. Математически это можно описать выражением:

$$T = \frac{1}{f} \gg \frac{l}{c}, \quad f \ll \frac{c}{l}, \quad (12.1)$$

где l — протяженность проводника, в котором наводится ЭДС.

Условие (12.1) называют условием квазистатичности, при его соблюдении мгновенные значения индукции МП синхронно меняются с током (эффектом распространения МП можно пренебречь). Отметим также, что постоянный ток — это частный случай переменного тока с частотой $f = 0$.

Возможен и другой (хотя по существу тот же, но другими словами) подход: ЭМП, периодически изменяющееся во времени по синусоиде с не слишком высокими частотами, позволяющими пренебречь в уравнениях Максвелла токами смещения по сравнению с токами проводимости, можно рассматривать в квазистатическом приближении, если

$$\gamma \vec{E} \gg \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (12.2)$$

откуда $\gamma \gg \omega\epsilon$, где γ — электрическая проводимость среды, 1/Ом м; ω — круговая частота ЭМП; ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м. Если учесть, что $\omega = 2\pi f$, то $f \ll (\gamma/2\pi\epsilon)$. Практически можно ограничиться частотами $f < 10^5$, Гц. Примерно к такому же выводу можно прийти на основании (12.1).

12.2. ЭДС, наводимые в телах и контурах

Задача 12.1. Металлический диск радиусом $r = 15$ см, расположенный перпендикулярно МП с индукцией $B = 2$ Тл, вращается вокруг оси, проходящей через его центр (рис. 12.1). Два скользящих контакта (один на оси диска, другой на его краю) соединяют диск с сопротивлением $R = 4$ Ом. С какой угловой скоростью должен вращаться диск, чтобы на сопротивлении выделялась мощность 5 Вт?

Решение. При повороте на угол $\Delta\alpha$ радиус диска описывает площадь $\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\alpha$ и при этом пересекает некоторое число линий магнитной индукции. Изменение магнитного потока при повороте диска на угол $\Delta\alpha$ равно $\Delta\Phi = \frac{1}{2}Br^2\Delta\alpha$. Индуцируемая при этом между контактами ЭДС

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2}B\omega r^2,$$

где $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega$ — угловая скорость вращения диска.

Электрический ток в цепи (ток будет постоянный, т.к. ЭДС также постоянна во времени)

$$I = \frac{e}{R} = \frac{B\omega r^2}{2R}.$$

Выделяемая им мощность

$$P = I^2 R = \frac{B^2 \omega^2 r^4}{4R},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{4RP}{B^2 r^4}} = 200 \frac{1}{c}.$$

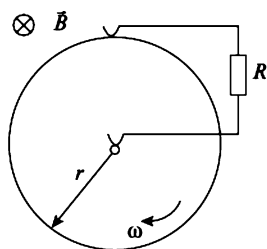


Рис. 12.1. Металлический диск на оси

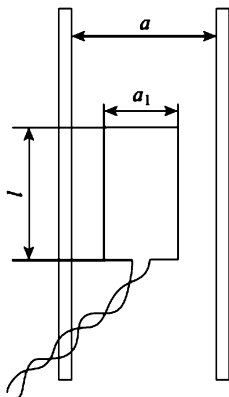


Рис. 12.2. Схема расчета к задаче 12.2

Количество оборотов в минуту диска определяется из соотношений:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n_1 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}; \quad n = \frac{30\omega}{\pi},$$

здесь n_1 — количество оборотов диска в секунду; n — количество оборотов в минуту.

Задача 12.2. Между проводами двухпроводной линии симметрично и в одной плоскости с ними расположена рамка, имеющая 100 витков (рис. 12.2).

Через рамку проходит ток $i = 10 \sin 500t$, А. Вывести формулу коэффициента взаимной индуктивности. Определить величину ЭДС, наводимой в линии, если $a = 40$ мм, $a_1 = 25$ мм, $l = 50$ мм.

Решение. Контур, образованный двухпроводной линией, обозначим цифрой 1, контур, образованный рамкой, — цифрой 2. Поскольку в линейной среде $M_{12} = M_{21}$, предположим, что ток течет по линии, а в рамке наводится ЭДС. ЭДС, наводимая в рамке от двухпроводной линии,

$$e_r = -\frac{d\Psi}{dt} = -w \frac{d\Phi}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Магнитный поток Φ' в рамке от левого провода

$$\Phi' = \int_{\frac{a-a_1}{2}}^{\frac{a-a_1}{2}+a_1} \bar{B} d\bar{S} = \int_{\frac{a-a_1}{2}}^{\frac{a+a_1}{2}} \bar{B} d\bar{S} = \int_{\frac{a-a_1}{2}}^{\frac{a+a_1}{2}} \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{a+a_1}{a-a_1},$$

где $B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r}$ — магнитная индукция на расстоянии r от левого провода; $ds = l dr$.

Магнитный поток в рамке от правого провода будет таким же, поэтому магнитный поток в рамке от обоих проводов

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\Psi}{i_1} = \frac{w\Phi}{i_1} = \frac{\mu_0 w l}{\pi} \ln \frac{a+a_1}{a-a_1}.$$

Численные значения $M_{12} = M_{21} = 2,93 \cdot 10^{-6}$ Гн.

Используя полученный коэффициент взаимной индукции, найдем ЭДС, наводимую в линии:

$$\begin{aligned}
 e &= -M_{12} \frac{di_2}{dt} = -\frac{\mu_0 w l}{\pi} \times \\
 &\times \ln \frac{a+a_1}{a-a_1} \frac{d}{dt} (10 \sin 500t) = \\
 &= -2,93 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 500 \cos \omega t = \\
 &= 0,0147 \cos \omega t.
 \end{aligned}$$

Задача 12.3. Стержень AD движется в МП (рис. 12.3) со скоростью $v = 0,25$ м/с. Магнитная индукция между полюсами электромагнита (т.е. на площади $0,5 \text{ м} \times 0,2 \text{ м}$) изменяется во времени по закону $B = B_0(1 - kt)$, где $B_0 = 1$ Тл, $k = 5 \text{ с}^{-1}$, t — время, отсчитываемое от момента, когда стержень AD расположен, как показано на рис. 12.3. В остальной части проводникового контура, замкнутого вольтметром, МП можно пренебречь. Требуется определить ЭДС, наводимую в контуре (показание вольтметра V).

Решение. ЭДС, наводимая в контуре, определяется по закону электромагнитной индукции:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(BS) = -\left(S \frac{dB}{dt} + B \frac{dS}{dt}\right).$$

В условиях данной задачи $B = B_0(1 - kt)$; $S = a(l - vt)$; $dB/dt = -B_0k$; $dS/dt = -av$, где $a = 0,5$ м; $l = 0,05$ м и $e = aB_0(lk + v - 2vkt)$.

Заметим, что часть ЭДС, обусловленная движением контура (BdS/dt), может быть определена иным способом по напряженности ЭП, возникающей в проводнике, движущемся в МП: $aB_0(1 - kt)v$.

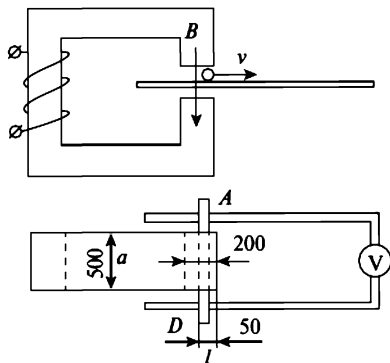


Рис. 12.3. Схема расчета к задаче 12.3

12.3. Силы и энергия в электромагнитном поле

Задача 12.4. Проводник $ABCD$ изогнут в форме, изображенной на рис. 12.4. Подвижный проводник ab скользит свободно сверху вниз без нарушения контакта. Сопротивление подвижного проводника — R , масса — m , длина — l . Вся конструкция помещена в однородное МП $\vec{B}$, перпендикулярное плоскости рисунка. Какова максимальная скорость проводника ab ?

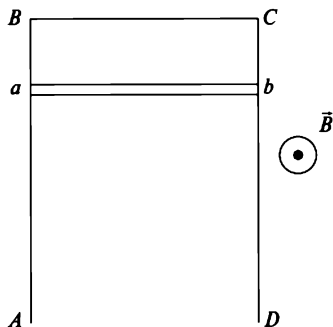


Рис. 12.4. Схема расчета к задаче 12.4

Решение. Пусть скорость проводника в какой-то момент времени равна v . Тогда ЭДС индукции в контуре $abcd$ (рис. 12.4),

$$e = Blv,$$

а ток

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Так как по проводнику ab течет ток, то со стороны МП на него будет действовать сила Ампера

$$d\vec{f} = i[d\vec{l} \cdot \vec{B}],$$

где $d\vec{l}$ — элемент длины проводника.

Эта сила направлена вверх и препятствует свободному падению проводника ab . Так как $l \perp B$, то

$$f = i \int_0^l B dl = iBl.$$

После подстановки в последнее выражение значения тока найдем

$$f = \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

Ускорение проводника ab в рассматриваемый момент времени определяется из соотношения

$$ma = mg - f.$$

Максимальную скорость проводник достигнет, когда сила Ампера и сила тяжести сравняются (ускорение проводника будет равно нулю).

Вначале, когда скорость v была мала, сила тяжести была больше силы Ампера. Если сила Ампера станет больше силы тяжести, скорость будет уменьшаться.

$$v_{\max} = \frac{mgR}{B^2 l^2}.$$

Задача 12.5. При поражении молнией трубчатого молниеотвода труба оказалась сплюсненной. Определить давление, действовавшее на трубу при токе молнии $I = 200$ кА в предположении, что ток протекал лишь в тонком поверхностном слое трубы (поверхностный эффект). Наружный радиус трубы $r_0 = 1,25$ см.

Решение. Сила, действующая на элемент поверхности dS ,

$$df = \frac{dW}{dr} = -\frac{1}{2}BHdS,$$

где dW — приращение энергии в единице объема $dV = dS \cdot dr$

$$dW = -W'dV = -\frac{1}{2}BHdS \cdot dr,$$

W' — энергия МП в единице объема. Знак (–) указывает на то, что МП, созданное током, протекающим по трубе, находится вне трубы и действует не во внешнюю от трубы сторону (тогда был бы знак (+)), а во внутреннюю — внутрь трубы.

Давление, действовавшее на трубу

$$p = \frac{df}{dS} = -\frac{1}{2}BH = -\frac{1}{2}\mu_0 H^2 = -0,5 \cdot 1,25 \cdot 10^{-6} \cdot (2,55)^2 \cdot 10^{12} = -4,06 \cdot 10^6, \text{ Н/м}^2,$$

$$\text{где } H = \frac{I}{2\pi r_0} = \frac{2 \cdot 10^5}{2\pi \cdot 1,25 \cdot 10^{-2}} = 2,55 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

Задача 12.6. Тонкая дисковая катушка с числом витков w и током i находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном ее плоскости (рис. 12.5). Определить силу, стремящуюся изменить средний радиус катушки.

Решение. Вырежем в теле катушки элементарную кольцевую трубку с током

$$di = \frac{i w dr}{r_2 - r_1}.$$

Радиальная сила, действующая

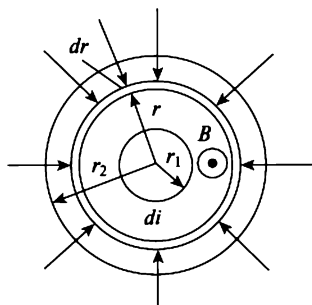


Рис. 12.5. Тонкая дисковая катушка

щая на нее, $df = B2\pi r di$. Суммарная сила, действующая в радиальном направлении,

$$f = \int df = \int_{r_1}^{r_2} B2\pi r \frac{iw}{r_2 - r_1} dr = \pi Bwi(r_1 + r_2).$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие условия необходимы для ЭМП, чтобы его можно считать квазистатическим?
2. Как можно определить наличие ЭМП в некоторой области пространства?
3. В чем заключается закон электромагнитной индукции?
4. Что представляет собой диполь электрический?
5. Что представляет собой диполь магнитный?
6. Как можно определить ЭДС, наводимую в телах и контурах?
7. Как связан суммарный магнитный поток ($\Psi = w\Phi$), пересекающий замкнутый контур, с наведенной в этом контуре ЭДС — e_L ?
8. Как определять силу и энергию в электромагнитном поле?

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

13.1. Уравнения Максвелла в символической форме записи

Основные дифференциальные уравнения электромагнитного поля

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}}; \quad (13.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -\frac{\partial \mu \dot{\vec{H}}}{\partial t} \quad (13.2)$$

записаны для мгновенных значений напряженностей $\dot{\vec{H}}$, $\dot{\vec{E}}$. Если напряженности E и H изменяются во времени синусоидально, то можно воспользоваться символическим методом и записать уравнения (13.1) и (13.2) с помощью комплексных чисел. Пусть

$$E = E_m \sin(\omega t + \varphi_E), \quad H = H_m \sin(\omega t + \varphi_H). \quad (13.3)$$

Можно записать:

$$E = \operatorname{Im} \dot{E}_m e^{j\omega t},$$

где Im — мнимая часть, $\dot{E}_m = E_m e^{j\varphi_E}$.

Аналогично

$$H = \operatorname{Im} \dot{H}_m e^{j\omega t}.$$

Можно перейти к условной форме записи (к изображениям):

$$E \rightarrow \dot{E}_m e^{j\omega t}; \quad (13.4)$$

$$H \rightarrow \dot{H}_m e^{j\omega t}, \quad (13.5)$$

где стрелка представляет значок соответствия.

Поскольку напряженности E и H меняются во времени по синусоидальному закону, являются функциями векторными, то над ними

ставят стрелку и точку $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$. Стрелка означает, что речь идет о векторе в пространстве, точка — о том, что проекции этого вектора на любую из координатных осей во времени изменяются синусоидально.

В дальнейшем переходим от амплитудных значений к действующим значениям, поэтому опускаем индекс m . Члены уравнений Максвелла теперь записываются в виде изображений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &\rightarrow e^{j\omega t} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}, \quad \vec{\delta}_{np} \rightarrow \gamma \dot{\vec{E}} e^{j\omega t}, \quad \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow j\omega \varepsilon \dot{\vec{E}} e^{j\omega t}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &\rightarrow e^{j\omega t} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}, \quad \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \rightarrow j\omega \mu \dot{\vec{H}} e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Подстановка (13.6) в дифференциальные уравнения Максвелла (13.1) и (13.2) дает возможность перейти к следующей форме записи (член $e^{j\omega t}$, входящий во все члены уравнений и не зависящий от координат, можно исключить):

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = -j\omega \varepsilon' \dot{\vec{E}}; \quad (13.7)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu \dot{\vec{H}}, \quad (13.8)$$

где $\varepsilon' = \varepsilon + j(\gamma/\omega)$.

Исключив из (13.7) и (13.8) вектор $\dot{\vec{E}}$ или $\dot{\vec{H}}$, получим уравнения типа Гельмгольца отдельно для $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$:

$$\Delta \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0; \quad \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = 0; \quad (13.9)$$

$$\Delta \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0; \quad \operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0, \quad (13.10)$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu}$ — волновое число.

13.2. Уравнения Максвелла в проводящей среде

Пусть ЭМП распространяется в среде с электрической проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ . Уравнения Максвелла (13.7), (13.8) запишутся в виде:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}}; \quad (13.11)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu \dot{\vec{H}}, \quad (13.12)$$

так как в электрически проводящей среде при промышленных частотах ($f \leq 10^5$, Гц) $\gamma \gg \omega \epsilon$, что дает возможность пренебречь токами смещения.

Уравнения (13.11) и (13.12) представляют собой уравнения с двумя неизвестными $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$. Можно осуществить разделение переменных. Для этого возьмем ротор от уравнения (13.11) и используем известную формулу векторного анализа

$$\text{rot rot } \dot{\vec{H}} = \text{grad div } \dot{\vec{H}} - \nabla^2 \dot{\vec{H}} = \gamma \text{ rot } \dot{\vec{E}}.$$

Учтем, что $\text{div } \dot{\vec{H}} = 0$ и поэтому $\text{grad div } \dot{\vec{H}} = 0$. Значение $\text{rot } \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}$ подставим из уравнения (13.12). Получим

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = j\omega\gamma\mu\dot{\vec{H}}. \quad (13.13)$$

Уравнение (13.13) является дифференциальным относительно $\dot{\vec{H}}$. Аналогичные операции можно осуществить с уравнением (13.12) для получения дифференциального уравнения относительно $\dot{\vec{E}}$:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} = j\omega\gamma\mu\dot{\vec{E}}. \quad (13.14)$$

Рассмотрим решения (13.13) и (13.14) для случая плоской электромагнитной волны.

13.3. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде

Под плоской электромагнитной волной понимают волну, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ которой расположены в плоскости xOy , перпендикулярной направлению распространения волны (ось Oz), и изменяющиеся только в функции координаты z и времени t . Расположим координатные оси так, чтобы ось Oy совпадала с магнитной напряженностью поля $\vec{H}$. При этом $\dot{\vec{H}} = \vec{j}\dot{H}$, где $\vec{j}$ — единичный орт оси Oy декартовой системы координат (рис. 13.1).

Из условия определения плоской волны

$$\frac{\partial \dot{\vec{H}}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\vec{H}}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial y} = 0.$$

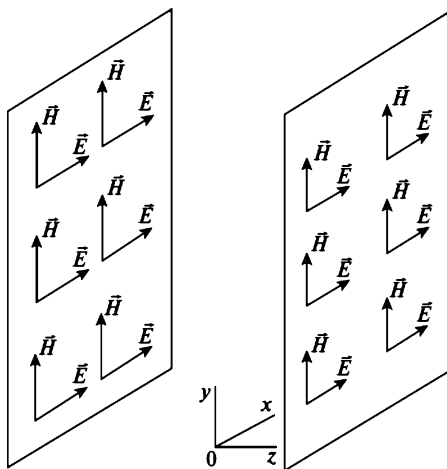


Рис. 13.1. Распространение электромагнитной волны

Подставим $\dot{\vec{H}} = \vec{j}\dot{H}$ в уравнение (13.13) и раскроем ∇^2 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \vec{j}\dot{H} = j\omega\mu\vec{j}\dot{H}. \quad (13.15)$$

Учтем, что

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial y^2} = 0$$

Тогда из (13.15) получим

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = j\omega\mu\dot{H}. \quad (13.16)$$

В уравнении (13.16) вместо частной производной использована полная производная. Это связано с тем, что $\dot{H}$ является функцией лишь одной переменной z .

Уравнение (13.16) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого находится в виде:

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}, \quad (13.17)$$

где $\dot{C}_1$, $\dot{C}_2$ — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Из характеристического уравнения $p^2 = j\omega\mu$ найдем коэффициент

$$p = \sqrt{j\omega\mu}. \quad (13.18)$$

Если принять во внимание, что $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = (1+j)/\sqrt{2}$, то p можно представить в виде:

$$p = k(1+j), \quad (13.19)$$

где $k = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2}}$.

Электрическую напряженность ЭМП можно найти из уравнения (13.14):

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{\gamma} \text{rot } \dot{\vec{H}}.$$

Найдем прежде всего $\text{rot } \dot{\vec{H}}$, учитывая $\frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = 0$:

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{H} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} \right). \quad (13.20)$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} \right) = \vec{i} \left(-\frac{p}{\gamma} [\dot{C}_1 e^{pz} - \dot{C}_2 e^{-pz}] \right). \quad (13.21)$$

Из (13.21) следует, что электрическая напряженность ЭМП в плоской волне при выбранном расположении осей координат направлена вдоль оси Ox , об этом свидетельствует присутствие единичного орта оси Ox . Таким образом, в плоской электромагнитной волне между $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ есть пространственный сдвиг в 90° .

Частное от деления p на γ называют волновым сопротивлением

$$Z_B = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j45^\circ}. \quad (13.22)$$

Волновое сопротивление Z_B , измеряемое в омах, зависит от свойств среды (γ , μ) и угловой частоты ω . Учитывая (13.21), проекция $\dot{\vec{E}}$ на ось Ox равна

$$\dot{E} = \dot{E}_{nad} + \dot{E}_{omp},$$

где

$$\dot{E}_{nad} = Z_w \dot{C}_2 e^{-pz} \quad \text{и} \quad \dot{E}_{omp} = -Z_w \dot{C}_1 e^{pz}.$$

Аналогично проекция $\dot{H}$ на ось Oy в соответствии с (13.21):

$$\dot{H} = \dot{H}_{nad} + \dot{H}_{omp},$$

где

$$\dot{H}_{nad} = \dot{C}_2 e^{-pz} \quad \text{и} \quad \dot{H}_{omp} = \dot{C}_1 e^{pz}.$$

Волновое сопротивление Z_B можно трактовать как отношение $\dot{E}_{nad} / \dot{H}_{nad}$. Так как волновое число является числом комплексным (13.22) и имеет аргумент 45° , то сдвиг во времени между $\dot{E}_{nad}$ и $\dot{H}_{nad}$ для одной и той же точки поля тоже равен 45° .

13.4. Теорема Умова — Пойнтинга

13.4.1. Общие сведения об энергии электромагнитного поля

В любом электротехническом устройстве всегда существуют взаимно связанные ЭП и МП. При этом процесс преобразования и передачи энергии определяется не отдельно ЭП или МП, а их совокупностью, т.е. ЭМП. В системе источник — линия передачи — приемник можно отметить следующие энергетические процессы. В источнике механическая, химическая или другая энергия преобразуется в энергию ЭМП, вдоль линии происходит передача этой энергии, а в самой линии она преобразуется в тепловую энергию потерь, в приемнике — в полезную механическую, тепловую или другие виды энергии. Поэтому очень важно выяснить роль ЭМП в процессе преобразования и передачи энергии.

Для полей в однородных средах мощность тепловых потерь в единице объема составляет

$$P_0 = \gamma E^2, \quad (13.23)$$

а объемные плотности энергии ЭП и МП, соответственно, равны

$$W_{e0} = \frac{\epsilon E^2}{2}, \quad W_{m0} = \frac{\mu H^2}{2}.$$

Максвелл предположил, и это в дальнейшем подтвердилось, что плотность энергии ЭМП

$$W_0 = \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}. \quad (13.24)$$

Как видно, энергия ЭМП в этом случае полностью характеризуется векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и свойствами среды. Однако выражения (13.23) и (13.24), характеризуя распределение энергии, не дают никаких указаний относительно ее движения. Между тем ясно, что передача энергии от источника к приемнику, как и выделение тепла в линии, связана с движением энергии ЭМП. Поэтому и движущаяся энергия ЭМП должна, очевидно, также определяться векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Переносимую в пространстве энергию можно характеризовать потоком энергии $\vec{P}$, проходящим в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения поля. Величина плотности потока энергии подсчитывается или как произведение объемной плотности энергии на скорость распространения электромагнитной волны (редакция Умова), или как произведение величин $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (редакция Пойнтинга) $\vec{P} = w\vec{v} = \vec{E}\vec{H}$. Поскольку векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны, то плотность потока энергии изображают в виде вектора $\vec{P}$ (рис. 13.2), который (перпендикулярен к плоскости, проходящей через $\vec{E}$ и $\vec{H}$) показывает направление распространения электромагнитной волны. Вектор называют вектором Умова — Пойнтинга. Он имеет размерность мощности, отнесенной к единице поверхности. Его направление совпадает с направлением движения острия правого винта, если головку последнего вращать по кратчайшему направлению от $\vec{E}$ к $\vec{H}$.

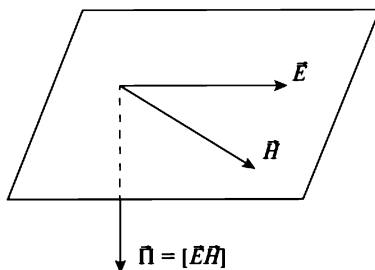


Рис. 13.2. Направление вектора Умова — Пойнтинга

Электромагнитная волна при взаимодействии с поглощающей преградой перестает существовать. Ее масса, энергия и импульс передаются преграде. Энергия электромагнитной волны преобразуется в энергию теплового движения частиц преграды. Действие электромагнитной волны в точке пространства оценивается средним значением величины вектора Умова — Пойнтинга за период волны. Эта величина называется интенсивностью электромагнитной волны. Интенсивность J плоской линейно поляризованной монохроматической бегущей волны равна

$$J = 0,5 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2 = 0,5 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} H_0^2,$$

где $E_0(H_0)$ — амплитуда электрической (магнитной) составляющей напряженности ЭМП.

13.4.2. Теорема Умова — Пойнтинга для мгновенных значений

Большое значение в теории ЭМП имеет теорема Умова — Пойнтинга, которая описывает энергетические соотношения в поле.

Теорема Умова — Пойнтинга имеет две формы записи: первая — для мгновенных значений, вторая — комплексная форма — для синусоидально изменяющихся величин. В соответствии с (13.14) энергия ЭМП в объеме dv равна

$$W_0 dv = \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv. \quad (13.25)$$

Для того чтобы образовать выражение, в которое вошла бы полная энергия в объеме dv , умножим (13.11) на $\vec{E} dv$, а (13.12) — на $\vec{H} dv$. Получим

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} dv = \left(\gamma \vec{E} \vec{E} + \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dv = \left(\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon E^2}{2} \right) dv, \quad (13.26)$$

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} dv = \left(-\mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dv = \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu H^2}{2} \right) dv. \quad (13.27)$$

Из (13.26) вычтем (13.27), получим

$$(\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) dv = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \right\} dv. \quad (13.28)$$

Используя формулу векторного анализа

$$\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H},$$

получим

$$-\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]dv = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \right\} dv.$$

Для сокращения записи обозначим векторное произведение $[\vec{E}\vec{H}]$ через $\vec{P}$, тогда

$$-\operatorname{div} \vec{P} dv = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \right\} dv. \quad (13.29)$$

Распространим (13.29) на некоторый объем конечных размеров, проинтегрировав по объему V :

$$-\int_V \operatorname{div} \vec{P} dv = \int_V \gamma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv. \quad (13.30)$$

В соответствии с теоремой Остроградского — Гаусса объемный интеграл, находящийся в левой части выражения (13.30), преобразуется в поверхностный, откуда

$$-\oint_S \vec{P} d\vec{s} = \int_V \gamma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv. \quad (13.31)$$

Левая часть (13.31) представляет собой поток вектора Пойнтинга (направленный внутрь объема) сквозь любую замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторый объем V .

В соответствии с уравнением Джоуля — Ленца в дифференциальной форме γE^2 есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единице объема в единицу времени. Поэтому $\int_V \gamma E^2 dv$ есть энергия, выделяющаяся в единицу времени в объеме V ; $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$ есть скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема. Но скорость изменения электромагнитной энергии есть мощность. Следовательно, поток вектора Пойнтинга сквозь любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V , равен мощности, выделяющейся в объеме V в виде теплоты и мощности, идущей на приращение энергии ЭМП.

Теорему Умова — Пойнтинга следует трактовать как уравнение энергетического баланса: левая часть (13.31) есть мощность, или энергия, в единицу времени, доставляемая в виде потока Пойнтинга внутрь некоторого объема; правая часть (13.31) есть энергия, расходуемая в единицу времени внутри объема.

Соотношение (13.31) получено в предположении, что среда внутри объема V однородна и изотропна, а также в предположении, что отсутствует отраженная волна и внутри объема нет источников электро-движущей силы.

Если поле не изменяется во времени, то $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) = 0$ и $-\int_V \operatorname{div} \vec{P} dv = \int_V \gamma E^2 dv$.

Необходимо обратить внимание и на то, что формула (13.31) учитывает возможность прохождения потока вектора $\vec{P}$ транзитом через объем V .

13.4.3. Передача энергии от генератора к приемнику по коаксиальному кабелю

Электромагнитная энергия от места ее генерирования передается к месту потребления по диэлектрику. Провода в линиях передачи выполняют двоякую роль: они являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике. Покажем справедливость этого утверждения на простейшем примере.

Рассмотрим процесс передачи энергии от генератора к приемнику на примере идеализированного коаксиального кабеля. В них ЭМП заключено только внутри объема, занимаемого кабелем.

Если при напряжении U по кабелю протекает ток I и сопротивлением жилы и оболочки кабеля по сравнению с сопротивлением приемника можно пренебречь, то передаваемая мощность $P = UI$.

Пренебрежение сопротивлением жилы и оболочки означает, что ЭМП в них можно пренебречь по сравнению с полем в диэлектрике между ними.

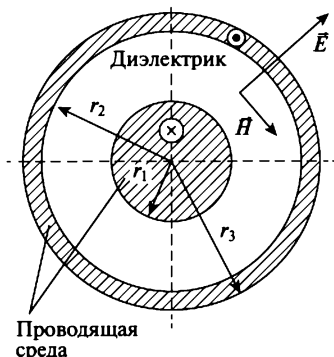


Рис. 13.3. Коаксиальный кабель

Пусть радиус жилы и внутренний радиус оболочки кабеля (рис. 13.3) таковы, что $r_2 - r_1 \ll r_1$.

Приближенно можно считать, что напряженности E и H во всех точках диэлектрика имеют одинаковые значения и равны

$$E = \frac{U}{r_2 - r_1}, \quad H = \frac{I}{\pi(r_2 + r_1)}.$$

Отсюда $U = E(r_2 - r_1)$, $I = H\pi(r_2 + r_1)$ и мощность

$$P = EHS, \quad P = UI = EH\pi(r_2^2 - r_1^2) = EHS,$$

где S — площадь сечения диэлектрика.

Таким образом, произведение $P/S = EH$ характеризует мощность, передаваемую через единицу площади сечения диэлектрика.

Так как вектор $\vec{E}$ направлен по радиусу, вектор $\vec{H}$ перпендикулярен ему, а мощность передается вдоль оси кабеля, то произведение EH можно рассматривать как векторное.

Подсчитаем поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, в рассматриваемом примере представляющее собой кольцо с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 (рис. 13.4).

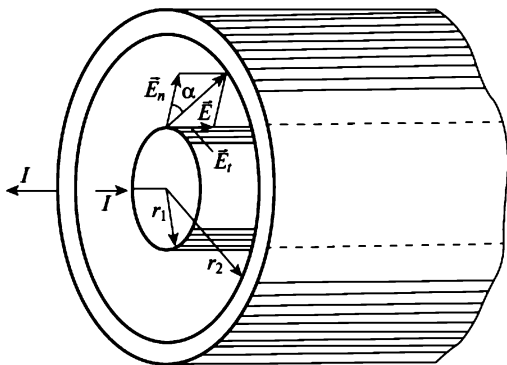


Рис. 13.4. Распространение энергии по коаксиальному кабелю

В реальном коаксиальном кабеле поле неоднородно, и оба провода имеют сопротивление. В жиле и оболочке напряженности электрического поля параллельны оси Oz кабеля, равны

$$E_{z1} = \frac{\delta_1}{\gamma} = \frac{I}{\gamma\pi r_1^2}, \quad E_{z2} = \frac{\delta_2}{\gamma} = \frac{I}{\gamma\pi(r_3^2 - r_2^2)r},$$

направлены перпендикулярно радиусу r в рассматриваемой точке и оси кабеля. В изоляции кабеля напряженность МП

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi r},$$

а напряженность ЭП имеет и радиальную, и осевую составляющие аналогично полю двухпроводной линии. При этом радиальная составляющая представляет собой напряженность поля цилиндрического конденсатора

$$E_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Вектор Пойнтинга имеет в изоляции осевую Π_z и радиальную Π_r составляющие, а в жиле и оболочке — только радиальную.

Осевая составляющая характеризует энергию, поступающую в жилу и оболочку и превращающуюся там в тепло. Таким образом, энергия от генератора к приемнику движется только в диэлектрике между жилой и оболочкой.

Если в конце кабеля (у приемника) напряжение и радиальная составляющая напряженности ЭП, соответственно, равны U и E_r , то потребляемую приемником мощность можно определить как поток вектора $\vec{\Pi}$, имеющего осевую составляющую $\Pi_z = E_r H_{\phi}$, через поверхность S сечения диэлектрика:

$$P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{r_1}^{r_2} \Pi_z r dr = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{I}{2\pi r} r dr = UI. \quad (13.32)$$

Мощность тепловых потерь в отрезке жилы длиной l определяется как поток вектора $\vec{\Pi}$, имеющего радиальную составляющую $\Pi_{r1} = E_{z1} H_{\phi 1}$, через боковую поверхность цилиндра $S_1 = 2\pi r_1 l$. Поскольку составляющая Π_{r1} во всех точках этой поверхности имеет одинаковые значения

$$\Pi_{r1} = \frac{I}{\gamma \pi r_1^2} \cdot \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 r_1^3},$$

то

$$P_1 = \Pi_{r1} 2\pi r_1 l = I^2 R_1,$$

где $R_1 = \frac{l}{\gamma \pi r_1^2}$ — сопротивление отрезка жилы.

Если учесть, что при $r = r_2$ напряженность $H_{\phi 2} = \frac{I}{2\pi r_2}$, а при $r = r_3$ она равна нулю, то мощность тепловых потерь в отрезке оболочки равна потоку вектора $\vec{P}$, имеющего радиальную составляющую

$$P_{r2} = E_{z2} H_{\phi 2} = \frac{I}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2)} \cdot \frac{I}{2\pi r_2},$$

через боковую поверхность цилиндра $S_2 = 2\pi r_2 l$, т.е.

$$P_2 = P_{r2} 2\pi r_2 l = I^2 R_2,$$

где $R_2 = \frac{l}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2)}$ — сопротивление отрезка оболочки. Вне кабеля ЭМП отсутствует, значит, движения энергии там нет.

Проведенный анализ показывает, что энергия от источника к приемнику движется в диэлектрике между жилой и оболочкой кабеля, из диэлектрика энергия ЭМП поступает также в жилу и оболочку, где преобразуется в тепло. Аналогичным образом для двухпроводной линии передачи можно прийти к выводу, что энергия движется не по проводам, а вдоль проводов в диэлектрике, окружающем эти провода. Провода определяют направление движения энергии и поглощают часть ее на нагрев.

Из рассмотрения следует, что вектор Пойнтинга выражает поток энергии ЭМП в единицу времени (поток мощности) через единицу поверхности, нормальной к направлению распространения энергии.

Таким образом, зная распределение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в пространстве, можно определить движущуюся энергию ЭМП в каждой точке, а следовательно, и рассчитать передаваемую и затрачиваемую на нагрев проводников мощность в любом электротехническом устройстве.

Необходимо отметить, что простое наложение постоянных ЭП и МП не создает ЭМП. Например, если на ЭСП конденсатора наложить поле постоянного магнита, то, хотя в каждой точке некоторой области будут определенные значения $\vec{E}$ и $\vec{H}$, векторное произведение этих величин нельзя трактовать как вектор Пойнтинга, поскольку здесь нет движения и преобразования энергии. Поэтому понятие вектора Пойнтинга относится только к ЭМП.

13.5. Поверхностный эффект в электротехнических устройствах

13.5.1. Явление поверхностного эффекта

Поверхностный эффект. Как известно, постоянный ток, протекая по прямому проводу равного сечения вдоль всей его длины, распределяется по поперечному сечению провода равномерно. Иначе говоря, плотность постоянного тока по всему сечению провода остается неизменной и потому может быть вычислена простым делением всего протекающего по проводу тока на площадь поперечного сечения провода.

Переменный же ток распределяется по поперечному сечению провода неравномерно: в поверхностных слоях плотность тока выше, а к середине сечения провода она падает. Это явление, называемое поверхностным эффектом, или скинэффектом (старое название), бывает иногда выражено настолько ярко, что почти весь ток протекает в тонком поверхностном слое провода, в то время как в остальных частях сечения плотность тока практически равна нулю.

В большинстве случаев поверхностный эффект представляет собой вредное явление, так как оно вызывает повышенный расход энергии на нагревание проводов и тем самым уменьшает КПД электротехнических устройств и усложняет их эксплуатацию. Однако в некоторых случаях специально прибегают к использованию поверхностного эффекта с целью нагрева детали электрическим током в тонком поверхностном слое. Примером может служить так называемая поверхностная высокочастотная закалка стальных деталей.

Природа поверхностного эффекта объясняется индуктирующимися в проводе ЭДС самоиндукции, которые оказываются не одинаковыми по сечению провода. Действительно, если представить провод как совокупность отдельных проводящих нитей, параллельных его оси, то последние окажутся в неодинаковых условиях по отношению к магнитному полю провода (рис. 13.5), существующему, как известно, не только вне провода, но и внутри него. В то время как нить 1, проходящая через центр сечения провода, охвачена всеми магнитными линиями поля, нить 2, расположенная у поверхности провода, сцепляется только с линиями внешнего поля. Поэтому при переменном токе, когда переменным будет и его магнитное поле, ЭДС, индуктирующиеся в центральных нитях провода, окажутся больше, чем ЭДС, возникающие в периферийных нитях. Согласно закону Ленца, индуктирующиеся ЭДС будут противодействовать вызвавшей их причине, то есть индуктирующему их магнитному полю или, что то же, проте-

кающему по проводу переменному току, так как поле и ток представляют собой по существу одно явление. Таким образом, переменный ток в центральных нитях провода будет встречать в виде индуцированных ЭДС большие препятствия, чем в периферийных нитях, и потому устремится преимущественно в периферийные нити.

Влияние различных факторов на степень проявления поверхностного эффекта. В первую очередь остановимся на влиянии частоты. При низкой частоте индуцированные в проводе ЭДС незначительны, и их роль в распределении тока по отдельным нитям по сравнению с ролью одинакового для всех нитей электрического сопротивления (сопротивления постоянному току) невелика. При повышении же частоты ЭДС самоиндукции возрастают и начинают влиять на распределение тока более эффективно. Поэтому при высоких частотах поверхностный эффект проявляется более ярко, чем при низких. Например, упомянутое выше крайне резкое проявление поверхностного эффекта, когда ток практически течет лишь в тонком поверхностном слое провода, наблюдается только при относительно высоких частотах порядка сотен килогерц и выше (радиочастоты).

В проявлении поверхностного эффекта важную роль играет материал провода, в частности его магнитная проницаемость и удельное электрическое сопротивление.

В проводах из стали, магнитная проницаемость которой весьма высока, внутреннее поле провода, а вместе с ним и различие в потекосцеплениях центральных и периферийных нитей провода относительно велико. Отсюда велика и разность ЭДС самоиндукции в сравниваемых нитях провода, которая обуславливает в стальных проводах при прочих равных условиях значительно более резкое проявление поверхностного эффекта, чем в медных или алюминиевых проводах.

Низкое удельное сопротивление материала провода также способствует более яркому проявлению поверхностного эффекта, а высокое удельное сопротивление, наоборот, ослабляет его. Последнее объясняется тем, что при увеличении удельного сопротивления материала провода увеличивается электрическое сопротивление его отдельных нитей и, следовательно, усиливается уравнивающее влияние последнего на распределение тока по поперечному сечению провода.

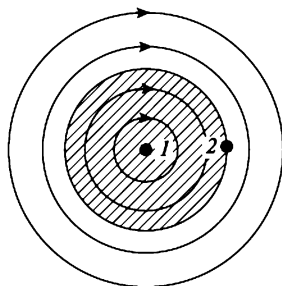


Рис. 13.5. Магнитное поле вокруг провода

Влияние поверхностного эффекта на активное сопротивление проводов. Поверхностный эффект приводит к увеличению активного сопротивления r провода при переменном токе по сравнению с сопротивлением R этого провода постоянному току.

Активное сопротивление провода формально определяется отношением

$$r = \frac{P}{I^2}$$

мощности P , расходуемой в проводе на его нагревание при протекании по проводу переменного тока, к квадрату действующего значения I этого тока. Отсюда вытекает, что по отношению к проводу понятие о его активном сопротивлении близко к физическому понятию об электрическом сопротивлении провода, так как именно этим сопротивлением мы объясняем нагревание провода электрическим током. Следует только ввести коррективу в это физическое понятие в связи с тем, что неравномерное распределение переменного тока по поперечному сечению провода приводит к худшему использованию этого провода и эквивалентно уменьшению фактически используемой током площади поперечного сечения. Это наиболее наглядно иллюстрируется на приведенном выше примере яркого проявления поверхностного эффекта, когда по внутренним частям поперечного сечения провода ток практически не проходит вовсе. Поэтому при оценке сопротивления провода в таких условиях нельзя учитывать всю площадь поперечного сечения провода. При уменьшении же площади, фактически используемой током при его протекании по проводу, сопротивление R последнего будет, естественно, возрастать, так как сопротивление провода пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади s поперечного сечения

$$R = \rho \frac{l}{s},$$

где ρ — удельное сопротивление материала провода.

Коэффициент поверхностного эффекта. Степень проявления поверхностного эффекта принято выражать отношением активного сопротивления r провода при переменном токе к сопротивлению R этого провода при постоянном токе

$$k_{\Pi} = \frac{r}{R}, \quad (13.33)$$

называемым коэффициентом поверхностного эффекта.

В зависимости от степени проявления поверхностного эффекта этот коэффициент может меняться от единицы, когда поверхностный эффект практически не наблюдается, до нескольких сотен при ярком проявлении поверхностного эффекта.

Следует иметь в виду, что коэффициент поверхностного эффекта зависит еще от размеров и формы поперечного сечения проводов: в тонких проводах поверхностный эффект проявляется слабее и коэффициент поверхностного эффекта оказывается меньше. В толстых проводах вследствие более яркого проявления поверхностного эффекта этот коэффициент будет выше.

В заключение заметим, что при промышленной частоте 50 Гц в относительно тонких (с площадью поперечного сечения до 1 см²) проводах из меди или алюминия увеличением активного сопротивления вследствие поверхностного эффекта можно пренебречь ($k_n \approx 1$), а в стальных проводах в тех же условиях поверхностный эффект проявляется довольно ярко.

При повышенной частоте (400 Гц) с поверхностным эффектом даже в медных проводах приходится считаться начиная с диаметра в несколько миллиметров. При радиочастотах порядка сотен килогерц поверхностный эффект уже в медных проводах сказывается настолько резко, что применять сплошные провода оказывается нецелесообразно. Поэтому высокочастотные установки обычно монтируют тонкостенными трубками, активное сопротивление которых оказывается практически тем же, что и сплошных проводов того же диаметра.

Влияние поверхностного эффекта на индуктивность проводов рассмотрим на примере прямого провода круглого поперечного сечения (рис. 13.6), индуктивность которого можно представить состоящей из двух слагаемых — внешней и внутренней индуктивности. Нетрудно показать, что вторая из этих составляющих, обусловленная магнитным полем внутри провода, будет вследствие поверхностного эффекта уменьшаться.

Поверхностный эффект, как известно, приводит к уменьшению плотности тока во внутренних частях сечения провода и, следовательно, к ослаблению его внутреннего магнитного поля. Действительно, если обратиться к одной из магнитных линий, замыкающихся в теле провода (рис. 13.6), и представить, что плотность тока во внутренней области уменьшается, то станет очевидным, что ток, охватываемый такой линией, тоже уменьшается. Это и приведет к ослаблению магнитного поля в центральной области сече-

ния провода. При этом на периферии провода магнитное поле при том же полном токе провода не усилится, несмотря на концентрацию тока у поверхности провода, поскольку наибольшая индукция внутреннего поля (у поверхности провода) определяется всем током, протекающим по проводу, и не зависит от того, как этот ток распределен внутри контура периферийной магнитной линии. Таким образом, в результате поверхностного эффекта будет наблюдаться только ослабление внутреннего поля провода, что приведет к уменьшению его внутренней индуктивности. В пределе весьма яркого проявления поверхностного эффекта, когда ток протекает в тончайшем поверхностном слое провода, его внутреннее магнитное поле, а следовательно, и внутренняя индуктивность исчезнут почти полностью.

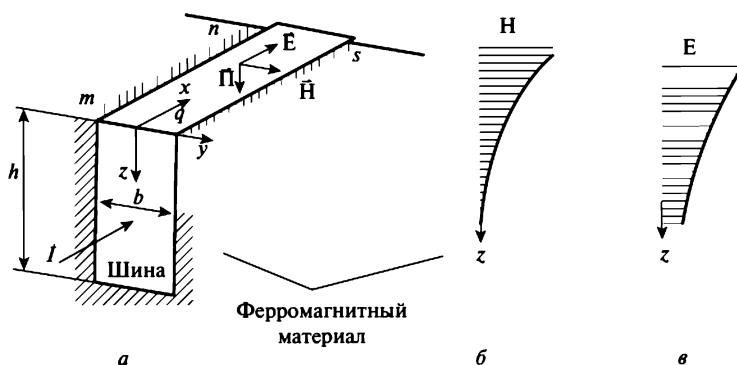


Рис. 13.6. Шина в пазу электрической машины

Внешнее магнитное поле провода круглого сечения, а вместе с ним и внешняя индуктивность такого провода не будут зависеть от степени проявления поверхностного эффекта. Следовательно, полная индуктивность провода будет изменяться под влиянием поверхностного эффекта только за счет внутренней индуктивности, и степень этого изменения при прочих равных условиях будет зависеть от соотношения внутренней и внешней индуктивности. Например, в кабеле, где внутренняя индуктивность его проводов имеет один порядок с внешней индуктивностью кабеля, поверхностный эффект может вызвать заметное изменение суммарной индуктивности, а в воздушной линии, в которой внутренняя индуктивность на порядок, а то и два меньше внешней индуктивности, поверхностный эффект практически не отразится на суммарной индуктивности линии.

13.5.2. Поверхностный эффект в прямоугольной шине

Решение такой задачи имеет очень важное значение в электромашиностроении. Все электрические машины имеют пазы на подвижной и на неподвижной частях (у ряда машин только на одной из частей — подвижной или неподвижной), в которые уложены обмотки, состоящие из проводников разной формы сечения (например, прямоугольной, круговой цилиндрической и т.д.). В этих проводниках проявляется электрический поверхностный эффект.

Расположим оси декартовой системы в соответствии с рис. 13.6, а.

Обозначим: $\dot{I}$ — ток по шине; b — ширина; h — высота паза. Магнитная проницаемость шины μ . Магнитную проницаемость ферромагнитного материала, в котором сделан паз, считаем очень большой, теоретически стремящейся к бесконечности. При этом допущении индукция в ферромагнитном материале будет конечна, а напряженность поля в нем будет стремиться к нулю. В шине $\dot{\vec{H}}$ направлена по оси Oy , $\dot{\vec{E}}$ — по оси Ox . Вектор Пойнтинга направлен по оси Oz . Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в шину через наружную поверхность и по мере проникновения в шину затухает по амплитуде.

По закону полного тока при $z = 0$ $\dot{H} = \dot{I}/b$, а при $z = h$ $\dot{H} = 0$. Для определения постоянных интегрирования $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ в выражении

$$\dot{H} = \dot{A}_1 e^{pz} + \dot{A}_2 e^{-pz} \quad (13.34)$$

составим два уравнения:

$$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \dot{I}/b, \quad \dot{A}_1 e^{pz} + \dot{A}_2 e^{-pz} = 0.$$

После определения $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ и подстановки их в (13.34) получим:

$$\dot{H} = \frac{\dot{I} \operatorname{sh} p(h-z)}{b \operatorname{sh} ph}, \quad \dot{\vec{E}} = i \dot{\vec{E}}_x = i \dot{\vec{E}}, \quad (13.35)$$

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} = \frac{p}{\gamma} \frac{\dot{I} \operatorname{ch} p(h-z)}{b \operatorname{sh} ph}, \quad \dot{\delta} = \gamma \dot{E}. \quad (13.36)$$

Графики модулей H и E по высоте шины изображены на рис. 13.6, б, в.

13.5.3. Поверхностный эффект в плоском ферромагнитном листе

Электротехнические устройства в качестве своих элементов имеют проводники, служащие для проведения электрического тока, и магни-

топроводы, служащие для проведения магнитного потока. В тех случаях, когда электротехнические устройства связаны с источниками постоянного напряжения, возникающие токи и магнитные потоки равномерно распределяются по сечению соответствующих элементов. При питании устройства от источника переменного тока (например, синусоидального тока) возникающие в элементах токи и потоки распределяются по сечениям неравномерно. Переменный ток имеет наименьшую плотность на оси провода и наибольшую у его поверхности. Аналогично распределяется и переменный магнитный поток в проводящем теле.

Оба эти случая являются результатом поверхностного эффекта (скин-эффекта), связанного с неравномерным распределением ЭМП в проводящей среде из-за затухания электромагнитной волны.

Ранее было показано, что переменное ЭМП поле быстро затухает по мере проникновения в толщу проводящей среды. Это приводит к неравномерному распределению поля по сечению провода, а следовательно, к неравномерному распределению тока и магнитного потока. В установившемся режиме эти величины имеют максимальное значение у поверхности провода.

Поверхностный эффект в большинстве случаев является вредным явлением, так как он увеличивает сопротивление провода переменному току и магнитное сопротивление переменному магнитному потоку. В некоторых случаях явление поверхностного эффекта используется, например, в установках для индукционного поверхностного нагрева и закалки.

Для уменьшения потерь на вихревые токи и для более равномерного распределения магнитного потока по сечению магнитопроводы мощных электротехнических устройств (электрических машин, трансформаторов и т.д.) собираются из ферромагнитных листов, изолированных друг от друга. Рассмотрим, как распределяется магнитный поток в одном из таких листов.

Пусть в плоском листе толщиной a , высотой h и длиной l направление магнитного потока совпадает с осью Oy (рис. 13.7, a), и магнитный поток изменяется во времени синусоидально. Как и в расчете, при равномерном распределении потока по сечению принимается, что $h \gg a$, $l \gg a$ и $\gamma = \text{const}$. Тогда искажением поля у краев пластины можно пренебречь и считать, что в пластину с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна, для которой справедливы уравнения:

$$\dot{H} = \dot{A}_1 e^{-pz} + \dot{A}_2 e^{pz}, \quad \dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz}, \quad (13.37)$$

где по-прежнему $p = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1+j)k$.

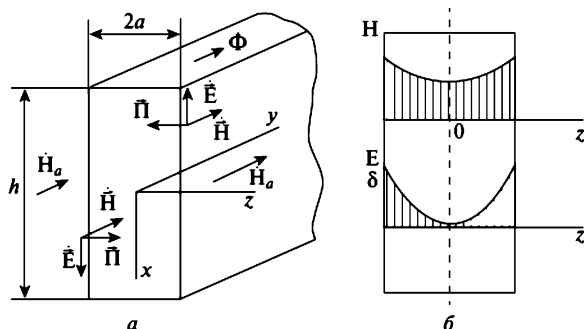


Рис. 13.7. Плоский ферромагнитный лист

Соответственно комплексное значение индукции

$$\dot{B} = \dot{A}_1 \mu e^{-pz} + \dot{A}_2 \mu e^{pz}. \quad (13.38)$$

Поскольку электромагнитные волны входят в лист с двух сторон, то значения индукции $\dot{B}$ при $z = \pm 0,5a$ равны между собой. Это приводит к равенству $\dot{A}_2 = \dot{A}_1$.

Таким образом,

$$\dot{B} = \dot{A}_1 \mu (e^{-pz} + e^{pz}) = 2\dot{A}_1 \mu \operatorname{ch} pz = \dot{B}_0 \operatorname{ch} pz, \quad (13.39)$$

$$\dot{\delta} = \gamma \dot{E} = -\frac{d\dot{H}}{dz} = -\frac{\dot{B}_0 p}{\mu} \operatorname{sh} pz, \quad (13.40)$$

где $\dot{B}_0 = 2\dot{A}_1 \mu$ — комплексное действующее значение индукции в середине сечения листа ($z = 0$).

Среднее значение комплексного действующего значения вектора магнитной индукции

$$\dot{B}_{cp} = \frac{1}{a} \int_{-0,5a}^{0,5a} \dot{B} dz = \frac{\dot{B}_0}{a} \int_{-0,5}^{0,5} \operatorname{ch} pz dz = 2 \frac{\dot{B}_0}{pa} \operatorname{sh} \frac{pa}{2}. \quad (13.41)$$

Переход от комплексов к действующим значениям требует вычисления модулей комплексов $\operatorname{sh} pz$, $\operatorname{ch} pz$ и p :

$$|\operatorname{sh} pz|^2 = \operatorname{sh}(kz + jkz) \operatorname{sh}(kz - jkz) = 0,5(\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz),$$

$$|\operatorname{ch} pz|^2 = \operatorname{ch}(kz + jkz) \operatorname{ch}(kz - jkz) = 0,5(\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz), \quad |p| = \sqrt{2}k.$$

Таким образом,

$$B = B_0 \sqrt{0,5(\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz)},$$

$$\delta = \frac{kB_0}{\mu} \sqrt{0,5(\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz)}, \quad B_{cp} = \frac{B_0}{ka} \sqrt{\operatorname{ch} ka - \cos ka}.$$

Наибольшее значение индукция имеет у поверхности листа:

$$B_e = B_0 \sqrt{0,5(\operatorname{ch} ka + \cos ka)}. \quad (13.42)$$

Зависимости действующих значений вектора магнитной индукции и вектора плотности тока от координаты z представлены на рис. 13.7, б.

При значении параметра $ka = \sqrt{0,5\omega\mu} a = 2$, что имеет место при $f = 400$ Гц, $\mu = 1000\mu_0$, $\gamma = 10^7$ См/м и $a = 0,5$ мм, отношение $B_e/B_0 = 1,3$, но уже при $ka = 4$, т.е. $a = 1$ мм, $B_e/B_0 = 3,7$. Поэтому неравномерность распределения магнитного потока по сечению может считаться допустимой при значениях $ka < 2$.

Мощность потерь на вихревые токи в единице объема листа

$$P_0 = \frac{\delta^2}{\gamma} = \frac{\omega B_0^2}{2\mu} (\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz) = \frac{\omega k^2 a^2 B_{cp}^2}{2\mu} \frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{\operatorname{ch} ka - \cos ka}. \quad (13.43)$$

Потери во всем листе

$$P = \int_{-0,5a}^{0,5a} P_0 l h dz = B_{cp}^2 \frac{\omega ka}{2\mu} \frac{\operatorname{sh} ka - \sin ka}{\operatorname{ch} ka - \cos ka}. \quad (13.44)$$

При $ka \ll 1$ эти потери определяются формулой

$$P_{0cp} = \frac{\pi^2}{3} f^2 \gamma a^2 B_{cp}^2, \quad (13.45)$$

совпадающей с выведенной в предположении равномерного распределения потока.

Так как $ka = \sqrt{0,5\omega\mu} a$, то при увеличении частоты для сохранения той же величины потерь приходится уменьшать толщину листа или применять прессованные сердечники из ферритов.

13.5.4. Эффект близости для двух параллельных токопроводящих шин

Понятие об эффекте близости. Похожим на поверхностный эффект по своему проявлению и физической природе является так называемый эффект близости, который заключается в перераспределении переменного тока по сечению прополов при их близком расположении друг к другу.

Познакомимся с этим эффектом на примере двухжильного кабеля, прямой и обратный провода которого расположены на небольшом расстоянии друг от друга (рис. 13.8). Характерная особенность магнитного поля такого кабеля заключается в том, что магнитные линии расположены эксцентрично относительно осей проводов. Поэтому нити *1* этих проводов, которые расположены на участках поверхностей этих проводов, обращенных друг к другу, будут сцепляться с меньшим числом магнитных линий, чем нити *2*, лежащие в противоположных концах сечений проводов. Следовательно, при переменном токе в проводах, то есть при переменном магнитном поле кабеля, ЭДС самоиндукции, индуцирующиеся в нитях *1*, будут меньше ЭДС, индуцирующихся в нитях *2*. Поскольку эти ЭДС, согласно принципу Ленца, противодействуют протеканию тока, путь для последнего по нитям *1* будет легче, чем путь по нитям *2*. В результате ток распределится по сечению проводов неравномерно, причем в областях сечений, обращенных к соседнему проводу, плотность тока окажется больше, чем у противоположных поверхностей проводов. Создается впечатление будто токи, направленные навстречу друг другу, «притягиваются».

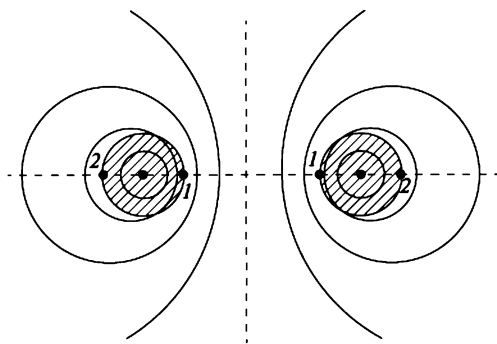


Рис. 13.8. Эффект близости двух проводов

Если переменные токи будут протекать по двум параллельным проводам в одну сторону, ток в каждом из них в результате эффекта близости будет, наоборот, «отжиматься» от средней линии между проводами к частям сечений проводов, наиболее удаленных друг от друга, то есть явление станет протекать так, будто одинаково направленные токи «отталкиваются».

Следует особо отметить, что эффект близости не имеет никакого отношения к механическому взаимодействию двух параллельно протекающих токов, и по направлению смещения токов развивается прямо противоположно тому, что следовало бы из закона меха-

нического взаимодействия проводов с токами (токи, направленные противоположно, отталкиваются, а направленные одинаково — притягиваются).

Эффект близости между двумя плоскими шинами. Пусть две плоские шины толщиной a и высотой $h \gg a$ расположены параллельно друг другу на расстоянии $b \ll h$ (рис. 13.9).

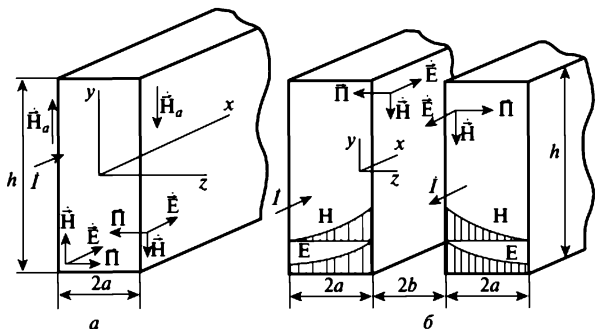


Рис. 13.9. Две плоские параллельно расположенные шины

Длина шин $l \gg b$ и искажения поля у концов и краев шин в расчете не учитываются. Материал шин обладает постоянными магнитной проницаемостью μ и удельной проводимостью γ . По шинам протекают в разных направлениях токи $\dot{I}$ частоты ω , одинаковые по величине.

Оси координат указаны на рис. 13.8, a . Начало координат находится посередине между шинами.

При принятых условиях поле является плоскопараллельным, и вектор $\dot{H}$ имеет практически лишь одну составляющую $\dot{H}_y = \dot{H}$. Все величины являются функцией только одной координаты x .

Так же, как и в параграфе 13.5.2, общее решение уравнения для комплексного действующего значения напряженности МП имеет вид

$$\dot{H} = \dot{A}_1 e^{-px} + \dot{A}_2 e^{px}, \quad (13.46)$$

где $p = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$.

Из закона полного тока, примененного к двум контурам, один из которых охватывает одну шину, а другой — обе шины, следует, что напряженность поля между шинами неизменна и равна $\dot{I}/h$, а на внешних поверхностях обеих шин — равна нулю из-за взаимной компенсации обеих шин.

Таким образом, для правой шины при $x = 0,5b$

$$\dot{A}_1 e^{-0,5pb} + \dot{A}_2 e^{0,5pb} = \frac{\dot{I}}{h}, \quad (13.47)$$

при $x = 0,5b + a$

$$\dot{A}_1 e^{-p(0,5b+a)} + \dot{A}_2 e^{p(0,5b+a)} = 0. \quad (13.48)$$

Из уравнений (13.47) и (13.48) находят постоянные интегрирования:

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{I}}{h} \frac{e^{0,5pb}}{1 - e^{-2pa}}, \quad \dot{A}_2 = -\frac{\dot{I}}{h} \frac{e^{-p(0,5b+2a)}}{1 - e^{-2pa}}. \quad (13.49)$$

Следовательно,

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}}{h} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2pa}} [e^{-p(x-0,5b)} - e^{p(x-0,5b-2a)}]. \quad (13.50)$$

Вектор плотности тока $\hat{\delta}$ имеет лишь одну составляющую $\hat{\delta}_z = \hat{\delta}$, поэтому

$$\dot{\delta} = \frac{d\dot{H}}{dx} = -\frac{\dot{I}}{h} \frac{p}{1 - e^{-2pa}} [e^{-p(x-0,5b)} + e^{p(x-0,5b-2a)}]. \quad (13.51)$$

Для левой шины получаются аналогичные формулы.

Из выражения для плотности тока (13.51) следует, что распределение тока по сечению шины несимметрично по отношению к оси симметрии ее сечения. Плотность тока больше у внутренней поверхности (рис. 13.9, б). При этом возрастает активное сопротивление шин. Из-за сближения прямого и обратного токов уменьшается площадь контура, а следовательно, и его индуктивность.

При одинаковом направлении токов в обеих шинах плотность тока будет наименьшей у внутренних поверхностей шин и наибольшей у наружных.

Эффект близости используется в индукционном поверхностном нагреве. Если контур с током высокой частоты (индуктор) приблизить к поверхности нагреваемого тела, то вблизи поверхности возникает индуцированный ток. Из-за эффекта близости путь индуцированного в теле тока повторяет форму индуктора, так как индуцированный в теле ток находится в противофазе с током индуктора, что качественно соответствует рассмотренному примеру. Тем самым создается нагрев поверхности в требуемых местах. Этот метод широко используется для поверхностной закалки стальных изделий сложной формы.

Вопросы для самопроверки

1. Какие преимущества получает расчетчик при переходе к символической форме записи уравнений ЭМП?
2. Как выглядят уравнения Максвелла в символической форме?
3. Как можно рассчитать активное и реактивное сопротивления материальной среды с помощью комплексных чисел?
4. Всегда ли целесообразно переходить к описанию уравнений ЭМП в символической форме?
5. Что такое плоская электромагнитная волна?
6. Что представляет собой вектор Умова — Пойнтинга?
7. Что такое электрический поверхностный эффект?
8. Что такое магнитный поверхностный эффект?
9. Что такое эффект близости?
10. Как рассчитать электрический поверхностный эффект?
11. Что происходит с активным сопротивлением среды при наличии электрического поверхностного эффекта?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аполлонский С.М.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле : учеб. пособие. — СПб. : Лань, 2012. — 505 с.
2. *Аполлонский С.М.* Электромагнитное поле в неоднородных средах : учеб. пособие. — СПб. : СЗТУ, 2006. — 545 с.
3. *Аполлонский С.М., Горский А.Н.* Расчеты электромагнитных полей. — М. : Маршрут, 2006. — 980 с.
4. *Аполлонский С.М., Виноградов А.Л.* Теоретические основы электротехники. Линейные и нелинейные цепи. Переходные процессы : учеб. пособие. — СПб. : СЗТУ, 2010. — 377 с.
5. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Учебник для вузов — 11-е изд. — М. : Гардарики, 2006. — 701 с.
6. *Демирчян К.С.* и др. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов. Т. 3. — М., 2003. — 376 с.
7. *Каплянский А.С., Лысенко А.П., Полотовский Л.С.* Теоретические основы электротехники. — М. : Высшая школа, 1972. — 447 с.
8. *Башарин С.А.* Теоретические основы электротехники. Теория электрических цепей и электромагнитного поля. : учеб. пособие для вузов: / С.А. Башарин, В.В. Федоров. — М. : Академия, 2007.
9. *Шакиров М.А.* Теоретические основы электротехники, тензоры в ТОЭ, электродинамика, теория относительности: учеб. пособие. СПб. : СПб ГПУ, 2011.
10. *Богословский А.С.* Постоянные электрические поля. — Л. : ВВМИОЛУ, 1987. — 121 с.
11. *Богословский А.С.* Магнитные поля и цепи постоянного тока. — Л. : ВВМИОЛУ, 1977. — 204 с.