

Б
И
Б
Л
И
О
Т
Е
К
А
Р
А
С
Ч
Е
Т
Ч
И
К
А

Расчет многослойных пластин и оболочек
из композиционных материалов

Н.А. АЛФУТОВ, П.А. ЗИНОВЬЕВ,
Б.Г. ПОПОВ
Расчет многослойных
пластин и оболочек
из композиционных
материалов

БИБЛИОТЕКА РАСЧЕТЧИКА

Редакционная
коллегия:

лауреат Ленинской премии,
заслуженный деятель науки
и техники РСФСР,
д-р техн. наук
проф. Н. Н. МАЛИНИН
(председатель);

д-р техн. наук
проф. Н. А. АЛФУТОВ;
лауреат Ленинской премии,
д-р техн. наук
проф. В. Л. БИДЕРМАН;

д-р техн. наук
проф. В. П. КОГАЕВ;
д-р техн. наук
проф. В. С. СВЕТЛИЦКИЙ



Н.А. АЛФУТОВ, П.А. ЗИНОВЬЕВ,
Б.Г. ПОПОВ

Расчет многослойных
пластин и оболочек
из композиционных
материалов

●

ББК 30.121

A45

УДК.624.016

624.04 (02)

Рецензент

д-р техн. наук проф. Ю. Н. НОВИЧКОВ

Алфутов Н. А. и др.

A45 Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов/Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. — М.: Машиностроение, 1984. — 264 с., ил. — [Б-ка расчетчика Ред. кол.: Н. Н. Малинин (пред.) и др.].

В пер.: 1 р. 30 к.

Содержит методы и примеры расчета силовых элементов конструкций из композиционных материалов, задачи статики и устойчивости многослойных анизотропных пластин и оболочек, способы решения динамических задач, некоторые данные механических испытаний волокнистых композиционных материалов и типовых элементов конструкций.

Для инженеров-расчетчиков проектно-конструкторских и научно-исследовательских организаций; может быть полезна преподавателям строительной механики и сопротивления материалов.

А 2702000000-009
038(01)-84 9-84

ББК 30.121
6П5.3

Предисловие

В современных силовых конструкциях чаще всего применяют волокнистые композиционные материалы, представляющие сравнительно податливую матрицу, армированную высокопрочными и высококомодульными волокнами. Именно из таких композиционных материалов методами непрерывной намотки или укладки создаются типичные элементы силовых конструкций — многослойные оболочки и панели, расчету которых посвящена книга.

В последние годы в нашей стране и за рубежом продолжает нарастать поток публикаций, посвященных вопросам механики композиционных материалов и расчета конструкций из них. Инженеру—практику довольно трудно ориентироваться в обилии информации, содержащейся в этих многочисленных и обычно узкоспециализированных публикациях.

В настоящей книге предпринята попытка изложить минимум сведений, необходимых для выполнения всех основных этапов прочностного расчета оболочечных конструкций из композиционного материала. В двух первых главах приведены зависимости для описания упругих свойств анизотропных тел и упругих характеристик однонаправленных и многослойных композиционных материалов. Кроме того, с помощью одной из наиболее простых структурно-феноменологических моделей дано наглядное представление о специфике деформирования волокнистого композиционного материала с полимерной матрицей. Основное внимание в книге уделено изложению вариационно-матричного метода расчета сложных оболочечных конструкций применительно к многослойным конструкциям из композиционных материалов. В приложениях даны некоторые специальные подпрограммы для ЭВМ.

Авторы ни в коей мере не претендуют на исчерпывающую глубину изложения затронутых вопросов; они с благодарностью примут все замечания читателей.

Элементы механики упругого анизотропного тела

Композиционные материалы, как правило, анизотропны, что определяет особую форму связи напряжений и деформаций. Более того, конкретная форма записи соотношений между напряжениями и деформациями зависит от структуры материала, ориентации армирующих элементов, соотношения характеристик арматуры и связующего и т. д.

Для тонкостенных многослойных конструкций типичны плоское напряженное состояние и изгиб. Поэтому практически важен переход от общих соотношений для линейно упругого анизотропного тела к конкретным формам их записи для этих напряженных состояний. Особенно важны вопросы, связанные с преобразованием характеристик однонаправленного материала — основного элемента современных силовых тонкостенных оболочек, в характеристики многослойных материалов, составленных из разноориентированных слоев однонаправленных материалов.

§ 1.1. Обобщенный закон Гука

Рассмотрим деформируемое тело в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 (рис. 1.1). Компоненты тензора деформаций определим линейными соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

где u_1, u_2, u_3 — проекции полного перемещения соответственно на координатные оси x_1, x_2, x_3 . Вследствие парности касательных напряжений и структуры соотношений (1.1) выполняются равенства

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (i \neq j). \quad (1.2)$$

В классической линейной теории упругости рассматривают обычно изотропное тело, упругие свойства которого одинаковы по всем направлениям. В этом случае при одноосном растяжении или сжатии независимо от направления закон Гука, связывающий напряжения и деформации, имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma, \quad (1.3)$$

отсюда $\sigma = E\varepsilon$, где σ — нормальное напряжение; ε — соответствующее ему относительное удлинение; E — модуль упругости материала.

При сложном напряженном состоянии изотропного тела закон Гука обычно записывают в форме

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}; & \gamma_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{G}; \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}; & \gamma_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{G}; \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} + \frac{1}{E} \sigma_{33}; & \gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений ($i, j = 1, 2, 3$); ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига, связанный с E и ν формулой

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Входящие в (1.4) величины углов сдвига γ_{ij} выражаются через компоненты тензора деформаций: $\gamma_{ij} = (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) = 2\varepsilon_{ij}$ ($i \neq j$).

Независимые компоненты тензора напряжений и тензора деформаций можно объединить в матрицы-столбцы:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (1.5)$$

Здесь и далее фигурными скобками $\{\dots\}$ обозначены матрицы-столбцы. Компоненты матрицы-столбца могут быть выписаны в строку:

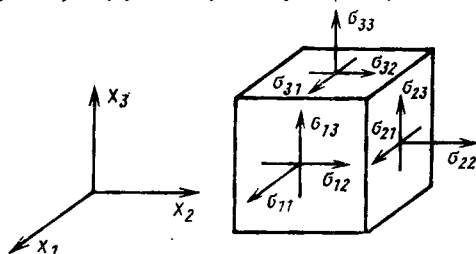
$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}\}; \\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}\}, \end{aligned}$$

но и в этом случае фигурные скобки определяют матрицу-столбец. Для обозначения матрицы-строки используем обозначение $\{\dots\}^T$, где индекс «Т» указывает на операцию транспонирования.

Компоненты матриц-столбцов (1.5) связаны с компонентами тензоров напряжений и деформаций следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_{ii}; & \varepsilon_i &= \varepsilon_{ii}; \\ \tau_{ij} &= \sigma_{ij} = \sigma_{ji}; & \gamma_{ij} &= 2\varepsilon_{ij} = 2\varepsilon_{ji} \quad (i \neq j). \end{aligned} \right\} \quad (1.5A)$$

Рис. 1.1.



Тогда обобщенный закон Гука для изотропного тела в матричной записи примет вид, формально аналогичный закону Гука для одноосного растяжения или сжатия (1.3):

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\}, \quad (1.6)$$

где матрица податливостей $[S]$ определяется зависимостью

$$[S] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Важнейшей особенностью обобщенного закона Гука для изотропного тела является то обстоятельство, что матрица податливостей (1.7) инвариантна по отношению к выбору системы координат и формируется с использованием только двух независимых констант, полностью определяющих упругие свойства изотропного тела. Кроме того, при сложном напряженном состоянии изотропного тела относительные удлинения ε_i не зависят от касательных напряжений τ_{ij} , но связаны со всеми нормальными компонентами напряжений σ_i , в то время как углы сдвига γ_{ij} зависят лишь от соответствующих касательных напряжений τ_{ij} . Поэтому для упругого изотропного тела главные оси напряженного состояния всегда совпадают с главными осями деформированного состояния.

Упругое тело называют анизотропным, когда его упругие свойства различны в различных направлениях. Поведение под нагрузкой такого тела даже при линейной зависимости деформаций от напряжений принципиально усложняется по сравнению с описанием поведения изотропного тела. Как показали опыты с анизотропными телами, любая из компонент тензора напряжения σ_{ij} может привести к возникновению всех компонент ε_{ij} тензора деформаций. Например, если брус прямоугольного поперечного сечения, изготовленный из анизотропного материала, равномерно растягивать вдоль оси, то в общем случае анизотропии такой брус кроме удлинений вдоль оси и изменений размеров поперечного сечения (различных в каждом направлении) будет претерпевать и деформации сдвига во всех трех плоскостях, приводящие к изменению первоначально прямых углов между его гранями.

Обобщенный закон Гука для анизотропного тела можно сформулировать так: в каждой точке тела компоненты ε_{ij} тензора деформаций являются однородными линейными функциями компонент σ_{ij} тензора напряжений.

Воспользовавшись введенными ранее матричными обозначениями, можно записать эту формулировку аналитически в виде, аналогичном (1.6):

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\}, \quad (1.8)$$

где компоненты матрицы $[S]$ — коэффициенты податливости материала (иногда их называют константами или постоянными податливости, а также просто податливостями).

Для анизотропного тела коэффициенты податливости зависят от выбора системы координат. В общем случае для анизотропного тела коэффициенты податливости образуют полностью заполненную матрицу $[S]$ размером 6×6 . Нетрудно показать, что в силу теоремы взаимности работ для компонент матрицы податливости выполняется условие $s_{mn} = s_{nm}$. Поэтому в матрице коэффициентов податливости независимыми являются лишь шесть диагональных коэффициентов и половина недиагональных, т. е. всего 21 коэффициент, и закон Гука в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & \text{сим.} & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Обобщенный закон Гука можно записать и в виде линейной зависимости напряжений от деформаций:

$$\{\sigma\} = [G] \{\varepsilon\}, \quad (1.10)$$

где $[G]$ — матрица жесткости материала размером 6×6 . Компоненты матрицы $[G]$ можно выразить через компоненты матрицы податливости $[S]$, решая систему уравнений (1.8) относительно напряжений $\{\sigma\}$.

Возможность перехода от записи закона Гука в виде (1.8) к выражению (1.10) достаточно очевидна, так как в упругом теле по определению существует взаимно однозначная связь между напряжениями и деформациями.

Анизотропия самого общего вида у реальных материалов, когда матрица коэффициентов податливости $[S]$ содержит 21 независимый коэффициент, — явление редкое. Обычно структура материала такова, что его упругие свойства в некоторых направлениях идентичны. В этих случаях число независимых коэффициентов в матрице коэффициентов податливости (и, следовательно, в матрице коэффициентов жесткости) уменьшается, и при надлежащем выборе системы координат упрощается запись закона Гука.

Плоскость упругой симметрии. Если в анизотропном теле его упругие свойства идентичны в любых двух направлениях, симметричных относительно некоторой плоскости, то такая плоскость называется плоскостью упругой симметрии. В этом случае число независимых коэффициентов, описывающих свойства материала, сокращается до тринадцати [29], а закон Гука принимает более простой вид при совмещении одной из координатных плоскостей с плоскостью упругой симметрии. Например, совместив с плоскостью

симметрии координатную плоскость (x_1, x_2) , можно матрицу коэффициентов податливости в (1.9) представить в виде

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & \text{сим.} & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

В частности, при одноосном растяжении анизотропного тела в направлении, перпендикулярном плоскости упругой симметрии, $\varepsilon_1 = s_{13}\sigma_3$; $\varepsilon_2 = s_{23}\sigma_3$; $\varepsilon_3 = s_{33}\sigma_3$; $\gamma_{23} = 0$; $\gamma_{13} = 0$; $\gamma_{12} = s_{36}\sigma_3$.

При таком напряженном состоянии материал претерпевает деформации сдвига только в плоскости (x_1, x_2) . Из (1.11) следует, что если одна из главных осей напряженного состояния перпендикулярна плоскости упругой симметрии, то одна из главных осей деформированного состояния тоже будет перпендикулярна этой плоскости. Поэтому направление, перпендикулярное плоскости упругой симметрии, называют главным направлением (или главной осью) упругости.

Ортотропный материал. Если в анизотропном теле имеются две взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, то нетрудно показать, что перпендикулярная им плоскость будет тоже плоскостью упругой симметрии. Пусть две главные оси напряженного состояния перпендикулярны двум имеющимся в теле плоскостям упругой симметрии, т. е. совпадают с двумя главными направлениями упругости материала. Тогда с этими направлениями будут совпадать и две главные оси деформированного состояния. Следовательно, третья главная ось деформированного состояния тоже будет совпадать с третьей главной осью напряженного состояния, и перпендикулярная им плоскость будет плоскостью упругой симметрии тела. Тело, обладающее тремя взаимно перпендикулярными плоскостями упругой симметрии, называют ортотропным. Для ортотропного тела число независимых коэффициентов, характеризующих упругие свойства, равно девяти [29].

Закон Гука для ортотропного тела наиболее естественно и просто записывается при совмещении координатных плоскостей с плоскостями упругой симметрии; тогда матрица податливости в (1.9)

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Если выразить коэффициенты податливости (и жесткости) через технические постоянные (модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона), то вместо (1.12) получим

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}. \quad (1.12A)$$

Здесь E_1, E_2, E_3 — модули упругости в соответствующем направлении; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига соответственно в плоскостях $(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3)$; ν_{ij} — коэффициенты Пуассона; первый индекс указывает направление действующего напряжения, а второй — направление возникающей при этом поперечной деформации.

Число независимых коэффициентов в (1.12A) сохраняется равным девяти, поскольку вследствие симметрии матрицы коэффициентов податливости выполняются равенства

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}; \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}; \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}. \quad (1.13)$$

Из (1.13) следует, что $\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} = \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$.

Введенная здесь традиционная система технических постоянных не является единственно возможной. Иная система технических постоянных описана, например, в работе [36].

Закон Гука в виде, разрешенном относительно напряжений, дает соотношение (1.10). Воспользовавшись техническими постоянными, в случае ортотропного тела получим

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})/\Delta; \\ g_{22} &= E_2(1 - \nu_{31}\nu_{13})/\Delta; \\ g_{33} &= E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})/\Delta; \\ g_{12} &= E_2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})/\Delta = E_1(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})/\Delta; \\ g_{13} &= E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})/\Delta = E_1(\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21})/\Delta; \\ g_{23} &= E_3(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})/\Delta = E_2(\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12})/\Delta; \\ g_{44} &= G_{23}; \\ g_{55} &= G_{13}; \\ g_{66} &= G_{12}; \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \det \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{12} & -\nu_{13} \\ -\nu_{21} & 1 & -\nu_{23} \\ -\nu_{31} & -\nu_{32} & 1 \end{bmatrix} = \\ &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}. \end{aligned}$$

Отметим еще частный случай ортотропного тела, в котором упругие свойства одинаковы по всем трем главным осям упругости. Тогда число независимых коэффициентов в матрицах податливости и жесткости сокращается до трех. Если для описания упругих свойств такого ортотропного тела воспользоваться техническими постоянными, то в (1.12) и (1.14) следует принять

$$\left. \begin{aligned} E_1 = E_2 = E_3 = E; \quad G_{12} = G_{13} = G_{23} = G; \\ \nu_{12} = \nu_{21} = \nu_{13} = \nu_{31} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

В отличие от изотропного тела в этом частном случае модуль упругости E , модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν являются независимыми величинами, характеризующими упругие свойства тела.

Плоскость изотропии; трансверсально изотропное тело. Плоскость, в которой упругие свойства во всех направлениях идентичны, называют плоскостью изотропии, а тело, обладающее такой плоскостью, называют трансверсально изотропным. Число независимых коэффициентов, характеризующих упругие свойства такого тела, оказывается равным пяти [29]. Совместив координатную плоскость (x_1, x_2) с плоскостью изотропии, получим следующие выражения для матрицы податливости:

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

или

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_1/E_1 & -\nu_2/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_1 & -\nu_2/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_2 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & & G_2 & 0 \\ & & & & & G_1 \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Здесь E_1 — модуль упругости в направлении, перпендикулярном плоскости изотропии; E_2 — модуль упругости в плоскости изотропии; $G_1 = E_1/2(1 + \nu_1)$ — модуль сдвига в плоскости изотропии; G_2 — модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных плоскости изотропии; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращения в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном этой плоскости, при растяжении в плоскости изотропии.

В трансверсально изотропном теле все направления в плоскости изотропии и направление, перпендикулярное этой плоскости, явля-

ются главными направлениями упругости. Поэтому для такого тела главные оси деформированного состояния совпадают с главными осями напряженного состояния, если одна из главных осей напряженного состояния перпендикулярна плоскости изотропии.

Следует подчеркнуть, что вид («заполненность») матриц податливости и жесткости определяется не только типом упругой симметрии материала, но и выбором системы координат. Тип симметрии материала однозначно определяет число независимых коэффициентов в этих матрицах, однако для любого анизотропного тела матрицы податливости и жесткости в произвольной системе координат, никак не согласованной с упругой симметрией материала, будут в общем случае целиком заполненными.

Надлежащий выбор системы координат позволяет существенно упростить исходные матрицы податливости и жесткости, если материал обладает симметрией упругих свойств. Рассмотрим, например, композиционный материал, состоящий из упругого связующего, регулярно армированного в одном направлении упругими волокнами (рис. 1.2). Для описания деформационных свойств такого материала можно воспользоваться моделью однородного анизотропного упругого тела. В произвольно ориентированной системе координат матрица податливости (и жесткости) будет целиком заполненной, а число подлежащих определению независимых коэффициентов не ясным. В системе координат (x_1, x_2, x_3) плоскость (x_2, x_3) можно считать плоскостью упругой симметрии; матрица коэффициентов податливости в этом случае будет иметь структуру (1.11). Еще более полно симметрия упругих свойств рассматриваемого материала выявляется в системе координат (x'_1, x'_2, x'_3) : плоскость (x'_1, x'_2) тоже можно считать плоскостью упругой симметрии. Следовательно, теперь все координатные плоскости — плоскости упругой симметрии, материал является ортотропным и матрица коэффициентов податливости имеет структуру (1.12). Более того, при равномерном распределении армирующих волокон допустимо считать, что упругие свойства во всех направлениях в плоскости (x'_1, x'_2) идентичны. Теперь становится ясным, что рассматриваемый материал является трансверсально изотропным, матрицы его коэффициентов податливости имеют вид (1.16) и (1.17), а число подлежащих определению независимых коэффициентов, полностью характеризующих упругие свойства, равно пяти.

Отметим, что выше были рассмотрены некоторые случаи упругой симметрии анизотропных тел в декартовой системе координат. В такой системе координат удобно рассматривать тела, обладающие так называемой прямолинейной анизотропией. Аналогично может быть описана локальная симметрия упругих свойств тел, обладающих криволинейной анизотропией; в этом случае вместо декартовых используют триортогональную криволинейную систему координат [29].

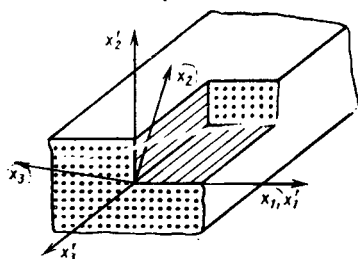


Рис. 1.2.

§ 1.2. Упругие характеристики однонаправленного композиционного материала при плоском напряженном состоянии

Ранее композиционный материал рассматривался как однородное анизотропное тело. Реальные материалы, как правило, на микроуровне неоднородны. Коэффициенты жесткости и податливости таких материалов определяются свойствами компонентов композиционного материала и его внутренней структурой. Определение макроскопических характеристик материала по известным характеристикам армирующих элементов и связующего — задача структурной механики композитов или теории армирования. В настоящем параграфе эта задача решается для однонаправленного волокнистого композиционного материала, характер взаимодействия элементов которого весьма сложен.

Предложено значительное число методов решения указанной задачи [10, 11, 14, 31, 48, 49, 50]. Первые результаты были получены в процессе создания простейших моделей материала, анализ которых может быть проведен с помощью методов, применяемых в сопротивлении материалов. При некоторых упрощающих предположениях (прежде всего предположении об упорядоченности структуры материала, т. е. представлении ее в виде одинаковых армирующих элементов, регулярно размещенных в связующем) оказалось возможным получить точные решения ряда задач с использованием методов теории упругости. В последние годы для решения задач теории армирования активно используются современные численные методы.

Совершенствование методов анализа позволяет заметно уточнить решения задач, полученные с использованием простейших моделей материала. Вместе с тем было установлено, что удовлетворительного соответствия данным экспериментов в ряде случаев достигнуть не удастся, а разброс последних часто перекрывает результаты «уточнения». По-видимому, дело в том, что многие особенности реальных композитов пока не учитываются в существующих методах анализа. Геометрические параметры структуры композита — местоположение («упаковка») армирующих волокон, форма и характерные размеры их сечений — случайные параметры. В ряде случаев волокна искривлены вследствие несовершенства технологии изготовления материала. На границе раздела связующего и армирующего материалов, как правило, протекают сложные физико-химические процессы, в результате которых происходит изменение характеристик компонентов вследствие их взаимодействия, образование трещин и отслоений на границе раздела и т. д.

С учетом сказанного, при определении упругих характеристик однонаправленного материала мы ограничимся рассмотрением одной из простейших моделей такого материала [9]. Представим однонаправленный материал в виде пластины, состоящей из чередующихся слоев, обладающих свойствами волокон или матрицы (рис. 1.3, а). При этом объемная доля «волокна» в модельном мате-

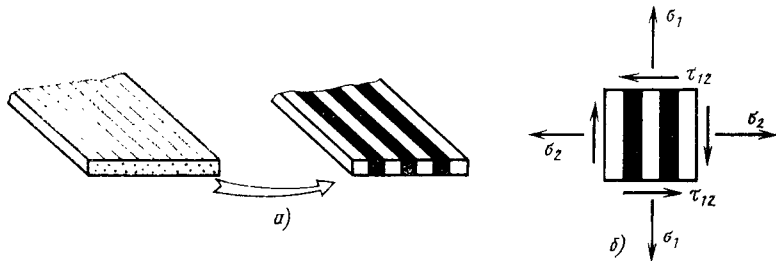


Рис. 1.3.

риале равна его объемной доле в реальном композите. Будем считать, что связь волокон и связующего идеальна, волокно и матрица линейно упруги.

Введем следующие обозначения: ε_{1B} , ε_{2B} , γ_{12B} , ε_{1M} , ε_{2M} , γ_{12M} — деформации, σ_{1B} , σ_{2B} , τ_{12B} , σ_{1M} , σ_{2M} , τ_{12M} — напряжения (буквенные индексы указывают на принадлежность к волокну или матрице); σ_1 , σ_2 , τ_{12} — средние напряжения в однонаправленном материале, равные отношению сил к суммарной площади поперечного сечения композита (см. рис. 1.3, б), и ε_1 , ε_2 , γ_{12} — деформации, соответствующие им. Установим связь между напряжениями и деформациями в волокне и матрице и средними напряжениями в композите, между упругими характеристиками волокна и матрицы и приведенными или эффективными характеристиками композита.

В принятой модели материала выполняются следующие очевидные условия равновесия и совместности деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{1B} = \varepsilon_{1M}; \\ \sigma_2 &= \sigma_{2B} = \sigma_{2M}; \\ \tau_{12} &= \tau_{12B} = \tau_{12M}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

При рассмотрении деформирования материала в случае нагружения композита в направлении укладки волокон, ортогональном направлении и сдвиге в плоскости слоя нетрудно установить, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{1B}\psi + (1 - \psi)\sigma_{1M}; \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{2B}\psi + (1 - \psi)\varepsilon_{2M}; \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12B}\psi + (1 - \psi)\gamma_{12M}, \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

где ψ — объемная доля волокна; $(1 - \psi)$ — объемная доля матрицы.

Полученные соотношения отражают так называемое «правило смесей»: вклад компонента пропорционален его объемной доле.

Запишем закон Гука для волокна и матрицы, полагая, что оба компонента изотропны:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1B} &= \frac{1}{E_B} (\sigma_{1B} - \nu_B \sigma_{2B}); \\ \varepsilon_{2B} &= \frac{1}{E_B} (\sigma_{2B} - \nu_B \sigma_{1B}); \\ \gamma_{12B} &= \frac{1}{G_B} \tau_{12B}, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1M} &= \frac{1}{E_M} (\sigma_{1M} - \nu_M \sigma_{2M}); \\ \varepsilon_{2M} &= \frac{1}{E_M} (\sigma_{2M} - \nu_M \sigma_{1M}); \\ \gamma_{12M} &= \frac{1}{G_M} \tau_{12M}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Преобразовав соотношения (1.18)—(1.21), выразим напряжения в волокне и в матрице через средние напряжения в композите:

$$\sigma_{1M} = \frac{E_M \sigma_1 + \psi (\nu_M E_B - \nu_B E_M) \sigma_2}{\psi E_B + (1 - \psi) E_M}, \quad (1.22)$$

$$\sigma_{1B} = \frac{E_B \sigma_1 + (1 - \psi) (\nu_M E_B - \nu_B E_M) \sigma_2}{\psi E_B + (1 - \psi) E_M}. \quad (1.23)$$

Для средних деформаций могут быть получены выражения

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{\psi E_B + (1 - \psi) E_M} - \frac{\psi \nu_B + (1 - \psi) \nu_M}{\psi E_B + (1 - \psi) E_M} \sigma_2, \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & \left(\frac{\psi E_M + (1 - \psi) E_B}{E_B E_M} - \frac{\psi (1 - \psi) (\nu_M E_B - \nu_B E_M)^2}{E_B E_M [\psi E_B + (1 - \psi) E_M]} \right) \sigma_2 - \\ & - \frac{\psi \nu_B + (1 - \psi) \nu_M}{\psi E_B + (1 - \psi) E_M} \sigma_1, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\gamma_{12} = \left(\frac{\psi}{G_B} + \frac{1 - \psi}{G_M} \right) \tau_{12} = \frac{\psi G_M + (1 - \psi) G_B}{G_B G_M} \tau_{12}. \quad (1.26)$$

Сопоставим (1.24)—(1.26) с законом Гука — [см. (1.9) и (1.12А)]. Для ортотропного тела при плоском напряженном состоянии ($\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$) этот закон совпадает с законом Гука для трансверсально изотропного тела с плоскостью изотропии 2—3, см. рис. 1.3:

$$\{\varepsilon_{12}\} = [S^0] \{\sigma_{12}\} \text{ или } \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \quad (1.27)$$

Находим выражения для технических постоянных однонаправленного композита через упругие постоянные и объемные доли компонентов:

$$E_1 = \psi E_B + (1 - \psi) E_M, \quad (1.28)$$

$$E_2 = \frac{E_B E_M E_1}{E_1 [\psi E_M + (1 - \psi) E_B] - \psi (1 - \psi) (\nu_M E_B - \nu_B E_M)^2}. \quad (1.29)$$

Пренебрегая членами, имеющими порядок квадрата коэффициентов Пуассона в сравнении с единицей, можно привести (1.29) к более простому виду:

$$E_2 \approx \frac{E_B E_M}{\psi E_M + (1 - \psi) E_B}. \quad (1.29A)$$

Для модуля сдвига имеем аналогичную по структуре формулу

$$G_{12} = \frac{G_B G_M}{\psi G_M + (1 - \psi) G_B}. \quad (1.30)$$

В (1.30) модули сдвига изотропных волокна и матрицы соответственно равны

$$G_B = \frac{E_B}{2(1 + \nu_B)}; \quad G_M = \frac{E_M}{2(1 + \nu_M)}. \quad (1.31)$$

Коэффициенты Пуассона однонаправленного материала имеют вид

$$\nu_{12} = \psi \nu_B + (1 - \psi) \nu_M; \quad \nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{E_1}. \quad (1.32)$$

Формулы для модуля упругости E_1 и коэффициента Пуассона ν_{12} достаточно точны для использования в инженерных расчетах. Соотношения (1.29)–(1.31) для модулей E_2 и G_{12} могут быть рекомендованы для прикидочных расчетов. Целесообразно уточнить их по результатам экспериментов с применяемым материалом.

В свою очередь, коэффициенты матрицы жесткости $[G^0]$ в законе Гука для однонаправленного материала при плоском напряженном состоянии

$$\{\sigma_{12}\} = [G^0] \{\varepsilon_{12}\}, \text{ или } \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 & 0 \\ g_{12}^0 & g_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{66}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.33)$$

имеют вид

$$\left. \begin{aligned} g_{11}^0 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad g_{12}^0 = \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \\ g_{22}^0 &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad g_{66}^0 = G_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

Коэффициенты матриц жесткости и податливости связаны следующими соотношениями:

$$[S^0] = [G^0]^{-1} \quad (1.35)$$

$$\left. \begin{aligned} s_{11}^0 &= \frac{g_{22}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - (g_{12}^0)^2} = \frac{1}{E_1}; \\ s_{22}^0 &= \frac{g_{11}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - (g_{12}^0)^2} = \frac{1}{E_2}; \\ s_{12}^0 &= -\frac{g_{12}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - (g_{12}^0)^2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}; \\ s_{66}^0 &= \frac{1}{g_{66}^0} = \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Наконец, технические постоянные упругости выражаются через компоненты матриц жесткости и податливости следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= g_{11}^0 - \frac{(g_{12}^0)^2}{g_{22}^0} = \frac{1}{s_{11}^0}; \\ E_2 &= g_{22}^0 - \frac{(g_{12}^0)^2}{g_{11}^0} = \frac{1}{s_{22}^0}; \\ \nu_{12} &= \frac{g_{12}^0}{g_{22}^0} = -\frac{s_{12}^0}{s_{11}^0}; \\ \nu_{21} &= \frac{g_{12}^0}{g_{11}^0} = -\frac{s_{12}^0}{s_{22}^0}; \\ G_{12} &= g_{66}^0 = \frac{1}{s_{66}^0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

§ 1.3. Преобразование упругих характеристик однонаправленного материала при повороте системы координат

Рассмотрим преобразование упругих характеристик однонаправленного материала при переходе от естественных для однонаправленного материала (связанных с его микроструктурой) осей координат (1, 2, рис. 1.4) к некоторой произвольно ориентированной системе координат (x, y), полученной вращением осей (1, 2) вокруг оси, ортогональной плоскости 1—2 на некоторый угол φ .

Соотношения связи между средними напряжениями и деформациями в однонаправленном слое при плоском напряженном состоянии имеют вид [см. (1.33)]

$$\{\sigma_{12}\} = [G^0] \{\varepsilon_{12}\} \quad (1.38)$$

или

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 & 0 \\ g_{12}^0 & g_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{66}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (1.38A)$$

Преобразование компонент тензоров напряжений и деформаций к новым осям в общем случае осуществляется по известным формулам [31]:

$$\begin{aligned} \sigma_{i'j'} &= \sigma_{ij} l_{i'i} l_{j'j}; \\ \varepsilon_{i'j'} &= \varepsilon_{ij} l_{i'i} l_{j'j}; \quad i', j' = x, y, z \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.39)$$

При повороте осей (1, 2) на угол φ (см. рис. 1.4) матрица направляющих косинусов имеет вид

$$[l] = \begin{bmatrix} l_{x1} & l_{x2} & l_{x3} \\ l_{y1} & l_{y2} & l_{y3} \\ l_{z1} & l_{z2} & l_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Подставив (1.40) в (1.39), для плоского напряженного состояния получим соотношения преобразования напряжений в виде

$$\{\sigma_{xy}\} = [T_1] \{\sigma_{12}\} \quad (1.41)$$

или

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (1.41A)$$

где обозначено $s = \sin \varphi$ и $c = \cos \varphi$.

Соотношения (1.39) применимы к компонентам тензоров. Используя связь

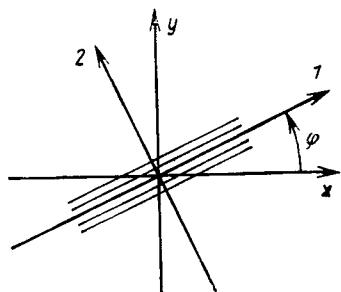


Рис. 1.4.

матричных и тензорных обозначений деформаций, выраженную (1.5А), можно записать

$$\{\varepsilon_{12}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [\Omega] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (1.42)$$

где $[\Omega] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ — диагональная матрица.
Получим

$$[\Omega]^{-1} \{\varepsilon_{xy}\} = [T_1] [\Omega]^{-1} \{\varepsilon_{12}\}. \quad (1.43)$$

Здесь $\{\varepsilon_{xy}\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ — матрица-столбец деформаций в осях (x, y) .

Тогда $\{\varepsilon_{xy}\} = [\Omega] [T_1] [\Omega]^{-1} \{\varepsilon_{12}\}$
или

$$\{\varepsilon_{xy}\} = [T_2] \{\varepsilon_{12}\}, \quad (1.44)$$

где $[T_2]$ — матрица преобразования для матричных компонент деформаций, имеющая следующий вид:

$$[T_2] = [\Omega] [T_1] [\Omega]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Из (1.41) и (1.44) получим формулы обратных преобразований:

$$\{\sigma_{12}\} = [T_1]^{-1} \{\sigma_{xy}\} \quad (1.46)$$

и

$$\{\varepsilon_{12}\} = [T_2]^{-1} \{\varepsilon_{xy}\}. \quad (1.47)$$

Матрицы обратных преобразований $[T_1]^{-1}$ и $[T_2]^{-1}$ имеют вид

$$[T_1]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

$$[T_2]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

При проведении вычислений удобно воспользоваться следующими тождествами:

$$\left. \begin{aligned} [T_1]^{-1} &= [T_2]^T; & [T_2]^{-1} &= [T_1]^T; \\ ([T_2]^{-1})^T &= [T_1]; & ([T_1]^{-1})^T &= [T_2]; \\ [T_1(\varphi)]^{-1} &= [T_1(-\varphi)]; & [T_2(\varphi)]^{-1} &= [T_2(-\varphi)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Найдем связь средних напряжений и деформаций в слое в осях (x, y) . Для этого подставим в (1.38) соотношения (1.46) и (1.47):

$$\begin{aligned} [T_1]^{-1} \{\sigma_{xy}\} &= [G^0] [T_2]^{-1} \{\varepsilon_{xy}\}; \\ \{\sigma_{xy}\} &= [T_1] [G^0] [T_2]^{-1} \{\varepsilon_{xy}\}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma_{xy}\} &= [\bar{G}] \{\varepsilon_{xy}\}; \\ [\bar{G}] &= [T_1] [G^0] [T_2]^{-1} = [T_1] [G^0] [T_1]^T. \end{aligned} \right\} \quad (1.51A)$$

Компоненты матрицы жесткости $[\bar{G}]$ однонаправленного слоя, отнесенного к осям (x, y) :

$$[\bar{G}] = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} & \bar{g}_{16} \\ & \bar{g}_{22} & \bar{g}_{26} \\ \text{сим.} & & \bar{g}_{66} \end{bmatrix},$$

имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_{11} &= c^4 g_{11}^0 + s^4 g_{22}^0 + 2(g_{12}^0 + 2g_{66}^0) s^2 c^2; \\ \bar{g}_{12} &= (g_{11}^0 + g_{22}^0 - 4g_{66}^0) s^2 c^2 + (s^4 + c^4) g_{12}^0; \\ \bar{g}_{16} &= [c^2 g_{11}^0 - s^2 g_{22}^0 + (g_{12}^0 + 2g_{66}^0)(s^2 - c^2)] sc; \\ \bar{g}_{22} &= s^4 g_{11}^0 + c^4 g_{22}^0 + 2(g_{12}^0 + 2g_{66}^0) s^2 c^2; \\ \bar{g}_{26} &= [s^2 g_{11}^0 - c^2 g_{22}^0 - (g_{12}^0 + 2g_{66}^0)(s^2 - c^2)] sc; \\ \bar{g}_{66} &= (g_{11}^0 - 2g_{12}^0 + g_{22}^0) s^2 c^2 + (s^2 - c^2)^2 g_{66}^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Запишем выражение, обратное (1.38):

$$\{\varepsilon_{12}\} = [S^0] \{\sigma_{12}\}. \quad (1.53)$$

Подставив в (1.53) формулы (1.47) и (1.46), получим

$$[T_2]^{-1} \{\varepsilon_{xy}\} = [S^0] [T_1]^{-1} \{\sigma_{xy}\}$$

и

$$\{\varepsilon_{xy}\} = [T_2] [S^0] [T_1]^{-1} \{\sigma_{xy}\}. \quad (1.54)$$

Соотношения (1.54), обратные соотношениям (1.51), позволяют записать формулы для компонент матрицы податливости слоя в осях (x, y) :

$$[\bar{S}] = [T_2] [S^0] [T_2]^T;$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{s}_{11} &= c^4 s_{11}^0 + s^4 s_{22}^0 + (2s_{12}^0 + s_{66}^0) s^2 c^2; \\ \bar{s}_{12} &= (s_{11}^0 + s_{22}^0 - s_{66}^0) s^2 c^2 + (s^4 + c^4) s_{12}^0; \\ \bar{s}_{16} &= [2c^2 s_{11}^0 - 2s^2 s_{22}^0 + (2s_{12}^0 + s_{66}^0)(s^2 - c^2)] sc; \\ \bar{s}_{22} &= s^4 s_{11}^0 + c^4 s_{22}^0 + (2s_{12}^0 + s_{66}^0) s^2 c^2; \\ \bar{s}_{26} &= [2s^2 s_{11}^0 - 2c^2 s_{22}^0 - (2s_{12}^0 + s_{66}^0)(s^2 - c^2)] sc; \\ \bar{s}_{66} &= (4s_{11}^0 - 8s_{12}^0 + 4s_{22}^0) s^2 c^2 + (s^2 - c^2)^2 s_{66}^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Можно воспользоваться следующими тригонометрическими тождествами:

$$\left. \begin{aligned} s^4 &= (3 - 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi)/8; \\ s^3 c &= (2 \sin 2\varphi - \sin 4\varphi)/8; \\ s^2 c^2 &= (1 - \cos 4\varphi)/8; \\ s c^3 &= (2 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi)/8; \\ c^4 &= (3 + 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi)/8. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

Подставив тождества (1.56) в (1.52), получим иную форму записи компонент матрицы жесткости [62]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_{11} &= V_1 + V_2 \cos 2\varphi + V_3 \cos 4\varphi; \\ \bar{g}_{12} &= V_1 - 2V_4 - V_3 \cos 4\varphi; \\ \bar{g}_{16} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\varphi + V_3 \sin 4\varphi; \\ \bar{g}_{22} &= V_1 + V_2 \cos 2\varphi + V_3 \cos 4\varphi; \\ \bar{g}_{26} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\varphi - V_3 \sin 4\varphi; \\ \bar{g}_{66} &= V_4 - V_3 \cos 4\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

Здесь коэффициенты V_1 , V_2 , V_3 и V_4 выражаются через компоненты матрицы жесткости слоя в главных осях слоя (1, 2) (см. рис. 1.4) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= (3g_{11}^0 + 2g_{12}^0 + 3g_{22}^0 + 4g_{66}^0)/8; \\ V_2 &= (g_{11}^0 - g_{22}^0)/2; \\ V_3 &= (g_{11}^0 - 2g_{12}^0 + g_{22}^0 - 4g_{66}^0)/8; \\ V_4 &= (g_{11}^0 - 2g_{12}^0 + g_{22}^0 + 4g_{66}^0)/8. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

В (1.57) шесть коэффициентов матрицы жесткости слоя g_{ij} в осях (x, y) записаны через четыре независимых коэффициента V_h . Число коэффициентов V_h не случайно равно четырем. Оно отражает то обстоятельство, что независимо от преобразований системы координат число независимых характеристик определяется лишь типом симметрии материала. При плоском напряженном состоянии трансверсально изотропный однонаправленный материал имеет четыре независимых характеристики жесткости (податливости), которые могут быть представлены в одном из взаимосвязанных вариантов: $(E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12})$, $(g_{11}^0, g_{12}^0, g_{22}^0, g_{66}^0)$, $(s_{11}^0, s_{12}^0, s_{22}^0, s_{66}^0)$ или, как это сделано в (1.57), (V_1, V_2, V_3, V_4) .

В соотношениях (1.57) можно выделить два инварианта жесткости слоя относительно поворота вокруг оси, ортогональной плоскости 1—2 (см. рис. 1.4):

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \bar{g}_{11} + \bar{g}_{22} + 2\bar{g}_{12} = 4(V_1 - V_4) = g_{11}^0 + g_{22}^0 + 2g_{12}^0; \\ L_2 &= \bar{g}_{66} - \bar{g}_{12} = 3V_4 - V_1 = g_{66}^0 - g_{12}^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Инвариантами являются и комбинации, составленные из инвариантов L_1 и L_2 . Поэтому инвариантами являются и коэффициенты V_1 и V_4 , так как

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= (3L_1 - 4L_2)/8; \\ V_4 &= (L_1 + 4L_2)/8. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Если слой изотропен, то

$$\begin{aligned} g_{11}^0 &= g_{22}^0; \\ g_{66}^0 &= (g_{11}^0 - g_{12}^0)/2. \end{aligned}$$

Из (1.58) видно, что в этом случае

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= V_3 = 0; \\ V_1 &= g_{11}^0 = E/(1 - \nu^2); \\ V_4 &= g_{66}^0 = G. \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

Поэтому можно считать, что коэффициенты V_1 , V_4 в (1.58) характеризуют средние жесткости однонаправленного слоя соответственно при растяжении и сдвиге. Они могут быть использованы для сравнения средней жесткости анизотропных композиционных материалов с жесткостью конкурирующих с ними изотропных материалов [62]. Если анализировать среднюю жесткость композитов (она важна, например, при равномерном двухосном растяжении материала), то сравнивать V_1 с $E/(1 - \nu^2)$ более целесообразно, чем сравнивать модуль E_1 однонаправленного материала с модулем упругости E конкурирующего изотропного материала. Если же анализировать применение материала в условиях одноосного нагружения, последнее сравнение более разумно.

С другой стороны, коэффициенты V_2 и V_3 характеризуют степень анизотропии материала. Диапазон изменения коэффициентов жесткости $\bar{g}_{ij}$ может быть просто оценен из (1.57), поскольку величина тригонометрических сомножителей V_2 и V_3 изменяется в пределах от 1 до -1 .

Подставив (1.56) в (1.55), получим следующие формулы для коэффициентов податливости однонаправленного материала в осях (x, y) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{s}_{11} &= Q_1 + Q_2 \cos 2\varphi + Q_3 \cos 4\varphi; \\ \bar{s}_{12} &= Q_1 - \frac{1}{2} Q_4 - Q_3 \cos 4\varphi; \\ \bar{s}_{16} &= Q_2 \sin 2\varphi + 2Q_3 \sin 4\varphi; \\ \bar{s}_{22} &= Q_1 - Q_2 \cos 2\varphi + Q_3 \cos 4\varphi; \\ \bar{s}_{26} &= Q_2 \sin 2\varphi - 2Q_3 \sin 4\varphi; \\ \bar{s}_{66} &= Q_1 - 4Q_3 \cos 4\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= (3s_{11}^0 + 2s_{12}^0 + 3s_{22}^0 + s_{66}^0)/8; \\ Q_2 &= (s_{11}^0 - s_{22}^0)/2; \\ Q_3 &= (s_{11}^0 - 2s_{12}^0 + s_{22}^0 - s_{66}^0)/8; \\ Q_4 &= (s_{11}^0 - 2s_{12}^0 + s_{22}^0 + s_{66}^0)/2. \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

Можно показать, что коэффициенты Q_1 и Q_4 являются инвариантами податливости относительно поворота слоя вокруг оси, ортогональной плоскости 1—2, т. е. не изменяются при таких поворотах.

§ 1.4. Упругие характеристики многослойных композитов при плоском напряженном состоянии

Пусть композит образован несколькими разноориентированными слоями однонаправленного материала. Введем следующие системы координат: общая, «глобальная» (x, y); местные, локальные однонаправленных слоев $(1, 2)^{(k)}$ (рис. 1.5). Здесь k — номер однонаправленного слоя в пакете многослойного материала.

Необходимо определить характеристики многослойного композита, если известны характеристики жесткости (податливости) входящих в него слоев.

Многослойный параллелепипед единичной длины и ширины показан на рис. 1.6, а. Силы T_x , T_y , T_{xy} , приходящиеся на единицу длины сечения, определяются из следующих очевидных уравнений равновесия:

$$T_x = \sum_{k=1}^n \sigma_x^{(k)} h^{(k)}; \quad T_y = \sum_{k=1}^n \sigma_y^{(k)} h^{(k)}; \quad T_{xy} = \sum_{k=1}^n \tau_{xy}^{(k)} h^{(k)}, \quad (1.64)$$

где n — число слоев в пакете.

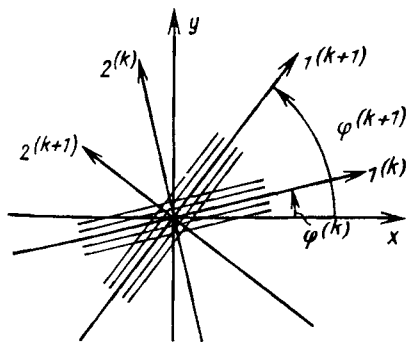
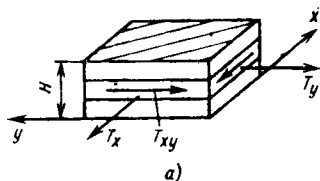
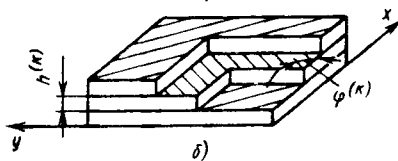


Рис. 1.5.



а)



б)

Рис. 1.6.

Разделив правые и левые части уравнений (1.64) на суммарную толщину пакета слоев $H = \sum_{k=1}^n h^{(k)}$, получим

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^n \sigma_x^{(k)} \bar{h}^{(k)}, \quad \sigma_y = \sum_{k=1}^n \sigma_y^{(k)} \bar{h}^{(k)}, \quad \tau_{xy} = \sum_{k=1}^n \tau_{xy}^{(k)} \bar{h}^{(k)}. \quad (1.65)$$

Здесь σ_x , σ_y , τ_{xy} — средние по толщине пакета слоев напряжения, равные $\sigma_x = T_x/H$, $\sigma_y = T_y/H$ и $\tau_{xy} = T_{xy}/H$; $\bar{h}^{(k)} = h^{(k)}/H$ — относительная толщина k -го слоя (см. рис. 1.6, б). Подставив в соотношения (1.65) закон Гука для k -го слоя (1.51А): $\{\sigma_{xy}\}^{(k)} = [\bar{G}^{(k)}] \{\varepsilon_{xy}\}^{(k)}$, и учтя, что $\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(k)}$, $\varepsilon_y = \varepsilon_y^{(k)}$, $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(k)}$, получим уравнение связи средних напряжений со средними деформациями многослойного материала при плоском напряженном состоянии:

$$\{\sigma_{xy}\} = [G] \{\varepsilon_{xy}\}$$

или

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{16} \\ g_{12} & g_{22} & g_{26} \\ g_{16} & g_{26} & g_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad (1.66)$$

где

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{g}_{ij}^{(k)} \bar{h}^{(k)}. \quad (1.67)$$

Из (1.67) непосредственно следует, что порядок чередования слоев в пакете многослойного материала не имеет значения при подсчете его жесткостей g_{ij} . Если каждый слой из некоторой группы слоев имеет одинаковые жесткости $\bar{g}_{ij}^{(k)}$ (например, это слои одного однонаправленного материала, уложенные с одинаковыми углами φ), то эта группа слоев может считаться одним слоем с толщиной, равной сумме толщин слоев, входящих в эту группу.

Установим вид уравнений (1.66) при повороте системы координат вокруг оси z на угол θ . Рассмотрим случай, когда все слои многослойного материала выполнены из одного однонаправленного материала, и, следовательно, имеют одинаковые значения коэффициентов V_1, V_2, V_3, V_4 в соотношениях (1.57).

Углы армирования всех слоев изменятся на угол θ , например $\varphi^{(1)}$ примет значение $\varphi^{(1)} - \theta$, и т. д. При использовании в соотношениях (1.66) формул (1.57), придется иметь дело со следующими тригонометрическими преобразованиями:

$$\left. \begin{aligned} \cos 2(\varphi - \theta) &= \cos 2\varphi \cos 2\theta + \sin 2\varphi \sin 2\theta; \\ \cos 4(\varphi - \theta) &= \cos 4\varphi \cos 4\theta + \sin 4\varphi \sin 4\theta; \\ \sin 2(\varphi - \theta) &= \sin 2\varphi \cos 2\theta - \cos 2\varphi \sin 2\theta; \\ \sin 4(\varphi - \theta) &= \sin 4\varphi \cos 4\theta - \cos 4\varphi \sin 4\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Учитывая, что θ — величина постоянная для всех слоев, получим следующую формулу для подсчета $g_{11}(\theta)$:

$$\begin{aligned} g_{11}(\theta) &= \sum_{k=1}^n (V_1 + V_2 \cos 2\varphi^{(k)} \cos 2\theta + V_2 \sin 2\varphi^{(k)} \sin 2\theta + \\ &+ V_3 \cos 4\varphi^{(k)} \cos 4\theta + V_3 \sin 4\varphi^{(k)} \sin 4\theta) \bar{h}^{(k)} = \\ &= V_1 + V_2 \cos 2\theta \sum_{k=1}^n \bar{h}^{(k)} \cos 2\varphi^{(k)} + V_2 \sin 2\theta \sum_{k=1}^n \bar{h}^{(k)} \sin 2\varphi^{(k)} + \\ &+ V_3 \cos 4\theta \sum_{k=1}^n \bar{h}^{(k)} \cos 4\varphi^{(k)} + V_3 \sin 4\theta \sum_{k=1}^n \bar{h}^{(k)} \sin 4\varphi^{(k)}. \quad (1.69) \end{aligned}$$

Аналогично можно получить выражения и для остальных коэффициентов $g_{ij}(\theta)$.

Найдем их средние значения в плоскости x, y :

$$\langle g_{ij} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{ij}(\theta) d\theta. \quad (1.70)$$

Так, для $\langle g_{11} \rangle$ получим

$$\begin{aligned} \langle g_{11} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{11}(\theta) d\theta = V_1 + \frac{V_2}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \sum_{k=1}^n \bar{h}^{(k)} \cos 2\varphi^{(k)} + \right. \\ &+ \left. \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta \sum_{k=1}^n \bar{h}^{(k)} \sin 2\varphi^{(k)} \right) + \frac{V_3}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta \sum_{k=1}^n \bar{h}^{(k)} \cos 4\varphi^{(k)} + \right. \\ &+ \left. \int_0^{2\pi} \sin 4\theta d\theta \sum_{k=1}^n \bar{h}^{(k)} \sin 4\varphi^{(k)} \right). \end{aligned}$$

Встречающиеся в выражении для $\langle g_{11} \rangle$ и других коэффициентов $\langle g_{ij} \rangle$ интегралы $\int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta$, $\int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta$, $\int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta$, $\int_0^{2\pi} \sin 4\theta d\theta$ равны нулю. Поэтому средние значения коэффициентов жесткости

$$\begin{aligned} \langle g_{11} \rangle &= V_1; \quad \langle g_{12} \rangle = V_1 - 2V_4; \quad \langle g_{22} \rangle = V_1; \\ \langle g_{16} \rangle &= 0; \quad \langle g_{26} \rangle = 0; \quad \langle g_{66} \rangle = V_4. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Таким образом, средние значения коэффициентов жесткости многослойных материалов, составленных из слоев однонаправленного материала, не зависят от структуры пакета слоев (углов укладки слоев и их относительных толщин) и полностью определяются свойствами однонаправленного материала.

Для многих частных видов структуры пакета слоев многослойного материала формулы (1.67) заметно упрощаются. Рассмотрим три вида структур, часто используемых при создании конструкций из композиционных материалов.

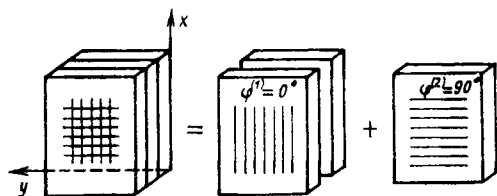


Рис. 1.7.

Ортогонально армированные материалы. Такие материалы состоят из n слоев, из которых часть уложена под углом $\varphi^{(1)} = 0^\circ$, а остальные слои — под углами $\varphi^{(2)} = 90^\circ$ (рис. 1.7). Суммарная относительная толщина слоев первого типа $\bar{h}^{(1)}$, второго типа

$\bar{h}^{(2)}$. Все слои выполнены из однонаправленного материала с одинаковыми жесткостными характеристиками.

Обращаясь к формулам (1.52), (1.67), получим

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= g_{11}^0 \bar{h}^{(1)} + g_{22}^0 \bar{h}^{(2)}; \\ g_{22} &= g_{22}^0 \bar{h}^{(1)} + g_{11}^0 \bar{h}^{(2)}; \\ g_{12} &= g_{12}^0; \quad g_{66} = g_{66}^0; \quad g_{16} = g_{26} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

Структура матрицы жесткости этого материала ($g_{16} = g_{26} = 0$) позволяет считать его ортотропным. Главные оси ортотропии совпадают с осями x, y .

Перекрестно армированные материалы. Такие материалы состоят из $2n$ слоев, из которых n слоев уложены под углом φ к оси x , а остальные под углом $-\varphi$ (рис. 1.8).

Обращаясь к формулам (1.52) и (1.66), получим

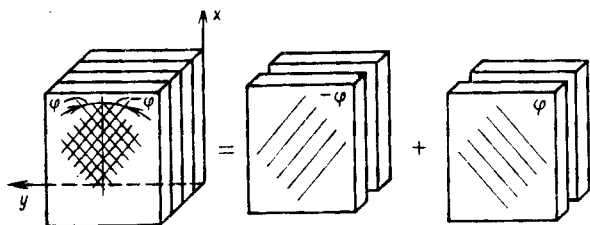
$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{11}^{(1)} + \bar{g}_{11}^{(2)}) = \bar{g}_{11}; \\ g_{22} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{22}^{(1)} + \bar{g}_{22}^{(2)}) = \bar{g}_{22}; \\ g_{12} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{12}^{(1)} + \bar{g}_{12}^{(2)}) = \bar{g}_{12}; \\ g_{66} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{66}^{(1)} + \bar{g}_{66}^{(2)}) = \bar{g}_{66}, \\ g_{16} &= g_{26} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

При укладке слоев под углом $\varphi = \pm 45^\circ$ из (1.57), (1.73) имеем

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = (g_{11}^0 + 2g_{12}^0 + g_{22}^0 + 4g_{66}^0)/4; \\ g_{12} &= (g_{11}^0 + 2g_{12}^0 + g_{22}^0 - 4g_{66}^0)/4; \\ g_{66} &= (g_{11}^0 - 2g_{12}^0 + g_{22}^0)/4; \quad g_{16} = g_{26} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

Заметим, что перекрестно армированный материал с углами $\varphi = \pm 45^\circ$ является, по сути дела, ортогонально армированным материалом с $\bar{h}^{(1)} = \bar{h}^{(2)} = 0,5$, рассматриваемым в осях, повернутых на угол 45° относительно осей системы координат предыдущего примера. Анализ формул (1.74) и (1.72) показывает, что равенство жесткостей материала в двух ортогональных направлениях ($g_{11} = g_{22}$ при $\bar{h}^{(1)} = \bar{h}^{(2)} = 0,5$) в формулах (1.72) еще не означает изотропии в плоскости (x, y).

Рис 1.8.



Квази-изотропные материалы. Рассмотрим многослойный композит с ориентацией слоев одинаковой толщины под углом $\varphi^{(k)} = -k\pi/n$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $n \geq 3$.

Простейшие примеры таких материалов — композиты со схемой укладки слоев $[30^\circ; -30^\circ; 90^\circ]$ или $[0^\circ; 45^\circ; 90^\circ; -45^\circ]$.

Из (1.57) и (1.66) значение коэффициента жесткости материала

$$g_{11} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(V_1 + V_2 \cos \frac{2\pi k}{n} + V_3 \cos \frac{4\pi k}{n} \right). \quad (1.75)$$

при условии, что $h^{(k)} = \frac{1}{n}$.

Суммы $\sum_{k=1}^n \cos(2\pi k/n)$, $\sum_{k=1}^n \cos(4\pi k/n)$, входящие в (1.75), равны нулю. Эти же суммы входят в выражения для g_{22} , g_{12} , g_{66} , поэтому $g_{11} = g_{22} = V_1$, $g_{12} = V_1 - 2V_4$, $g_{66} = V_4$.

В аналогичных (1.75) выражениях для g_{16} , g_{26} присутствуют суммы $\sum_{k=1}^n \sin(2\pi k/n)$ и $\sum_{k=1}^n \sin(4\pi k/n)$, также равные нулю. Поэтому $g_{16} = g_{26} = 0$, что позволяет считать материал ортотропным. Определяя технические постоянные упругости материала по формулам (1.37), пригодным для любого ортотропного материала при плоском напряженном состоянии, можно убедиться в том, что $E_1 = E_2 = 4V_4(1 - V_4/V_1) = E$, $\nu_{12} = \nu_{21} = 1 - 2V_4/V_1 = \nu$, $G_{12} = V_4 = E/[2(1 + \nu)]$, а рассматриваемый материал изотропен в плоскости x, y . Естественно, что значения его коэффициентов жесткости равны средним жесткостям многослойного композита (1.71).

Для определения технических постоянных упругости многослойного композита рассмотрим растяжение многослойного композита в направлении оси x . Уравнения (1.66) для этого случая принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= g_{11}\varepsilon_x + g_{12}\varepsilon_y + g_{16}\gamma_{xy}; \\ 0 &= g_{12}\varepsilon_x + g_{22}\varepsilon_y + g_{26}\gamma_{xy}; \\ 0 &= g_{16}\varepsilon_x + g_{26}\varepsilon_y + g_{66}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

Выразив ε_y и γ_{xy} в функции ε_x из двух последних уравнений системы (1.76) и подставив их в первое уравнение системы (1.76), получим

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{g_{11}g_{22}g_{66} + 2g_{12}g_{26}g_{16} - g_{11}g_{26}^2 - g_{22}g_{16}^2 - g_{66}g_{12}^2}{g_{22}g_{66} - g_{26}^2}$$

или

$$E_x = \frac{\Delta_g}{g_{22}g_{66} - g_{26}^2}. \quad (1.77)$$

Здесь Δ_g есть определитель матрицы $[G]$:

$$\Delta_g = \det \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{16} \\ g_{12} & g_{22} & g_{26} \\ g_{16} & g_{26} & g_{66} \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом получим выражения для модулей

$$E_y = \frac{\Delta_g}{g_{11}g_{66} - g_{16}^2} \quad (1.78)$$

и

$$G_{xy} = \frac{\Delta_g}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad (1.79)$$

а также для коэффициента Пуассона:

$$\nu_{xy} = \frac{g_{12}g_{66} - g_{16}g_{26}}{g_{22}g_{66} - g_{26}^2}. \quad (1.80)$$

В случае ортотропного композита ($g_{16} = g_{26} = 0$) получим известные формулы типа (1.37):

$$\begin{aligned} E_x &= g_{11} - \frac{g_{12}^2}{g_{22}}; & E_y &= g_{22} - \frac{g_{12}^2}{g_{11}}; \\ G_{xy} &= g_{66}; & \nu_{xy} &= \frac{g_{12}}{g_{22}}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Система координат x, y, z может быть повернута вокруг оси z на любой заданный угол θ . При этом коэффициенты жесткости $g_{ij}(\theta)$ в (1.77)–(1.80) как функции угла θ могут быть определены по формулам типа (1.69). Тогда соотношения (1.77)–(1.80) пригодны для определения технических постоянных упругости в новой системе координат.

§ 1.5. Изгиб многослойных композиционных материалов

Установим соотношения упругости при изгибе многослойных композитов [6]. Будем считать, что слои материала идеально связаны между собой (отсутствует проскальзывание слоев). Классическая теория пластин, основанная на гипотезах Кирхгофа—Лява, дает следующие выражения для деформаций (см. § 4.2):

$$\left. \begin{aligned} e_x &= e_x + z\kappa_x; \\ e_y &= e_y + z\kappa_y; \\ \gamma_{xy} &= e_{xy} + z\kappa_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

или в матричном виде

$$\{e_{xy}\} = \{e\} + z\{\kappa\}, \quad (1.82A)$$

где $\{e\} = \{e_x, e_y, e_{xy}\}$; $\{\kappa\} = \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\}$; z — расстояние от некоторой координатной плоскости, за которую может быть принята любая плоскость, параллельная границам слоев многослойного композита (рис. 1.9); $\{\kappa\}$ — матрица-столбец изменений кривизн пластины.

Подставив (1.82) в выражения для напряжений в k -м слое (1.51), получим

$$\{\sigma_{xy}\}^{(k)} = [\bar{G}]^{(k)} (\{e\} + z \{\kappa\}). \quad (1.83)$$

Для следующего в пакете слоя запись аналогична: $\{\sigma_{xy}\}^{(k+1)} = [\bar{G}]^{(k+1)} (\{e\} + z \{\kappa\})$.

Из этих соотношений видно, что, несмотря на линейное распределение деформаций по толщине пакета слоев, напряжения в общем случае распределены кусочно-линейно и при $[\bar{G}]^{(k)} \neq [\bar{G}]^{(k+1)}$ скачкообразно изменяются на границах слоев.

Характеристиками напряженного состояния композита могут служить силы и моменты, действующие на единицу длины координатной плоскости:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_x^{(k)} dz, \quad (x \rightleftharpoons y), \\ T_{xy} &= \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \tau_{xy}^{(k)} dz, \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad (x \rightleftharpoons y), \\ M_{xy} &= \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \tau_{xy}^{(k)} z dz. \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

Использование в (1.84) и (1.85) сумм интегралов позволяет учесть кусочно-линейный характер распределения напряжений по толщине пакета.

Подставив в (1.84) и (1.85) выражения для напряжений (1.83), получим выражения для сил:

$$\{T\} = \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\bar{G}]^{(k)} dz \{e\} + \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\bar{G}]^{(k)} z dz \{\kappa\}, \quad (1.86)$$

где $\{T\} = \{T_x, T_y, T_{xy}\}$, и моментов:

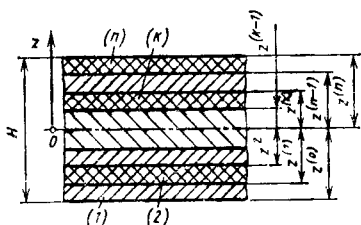


Рис. 1.9.

$$\{M\} = \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\bar{G}]^{(k)} z dz \{e\} + \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\bar{G}]^{(k)} z^2 dz \{\kappa\}, \quad (1.87)$$

где $\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}$.

Объединив $\{T\}$ и $\{M\}$, получим

$$\{Q\} = [D] \{E\} \quad (1.88)$$

или

$$\{Q\} = \{\{T\}, \{M\}\}, \quad \{E\} = \{\{e\}, \{\kappa\}\}.$$

В развернутом виде соотношения (1.88) можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ & & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ & & & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ & & & & d_{55} & d_{56} \\ & \text{сим.} & & & & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Используя матричные блоки (подматрицы), перейдем к следующей компактной записи:

$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_{Te}] & [D_{T\kappa}] \\ [D_{Me}] & [D_{M\kappa}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \kappa \end{Bmatrix}. \quad (1.88A)$$

Здесь $[D_{Te}]$ — матрица мембранных жесткостей; $[D_{M\kappa}]$ — матрица изгибных жесткостей; $[D_{T\kappa}] = [D_{Me}]$ — матрицы мембранно-изгибных жесткостей, отвечающие за взаимосвязь сил и изменений кривизн, моментов и деформаций. Равенство нулю всех компонент матриц $[D_{T\kappa}]$, $[D_{Me}]$ говорит об отсутствии такой связи.

Матрицы $[D_{Te}]$, $[D_{T\kappa}]$, $[D_{Me}]$ и $[D_{M\kappa}]$ симметричны, а их компоненты, как это следует из (1.86) и (1.87), определяются так:

$$\left. \begin{aligned} [D_{Te}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\bar{G}]^{(k)} dz; & [D_{T\kappa}] &= [D_{Me}] = \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\bar{G}]^{(k)} z dz; \\ [D_{M\kappa}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\bar{G}]^{(k)} z^2 dz. \end{aligned} \right\} \quad (1.89)$$

Часто используется следующая сокращенная запись:

$$([D_{Te}], [D_{T\kappa}], [D_{M\kappa}]) = \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\bar{G}]^{(k)} (1, z, z^2) dz. \quad (1.89A)$$

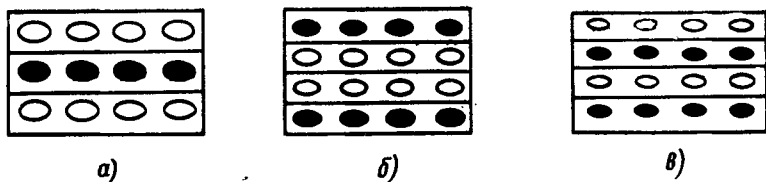


Рис. 1.10.

Если коэффициенты матрицы $[\bar{G}]^{(k)}$ постоянны в каждом из слоев пакета, то, выполнив интегрирование в (1.89), получим

$$\left. \begin{aligned} [D_{Te}] &= \sum_{k=1}^n [\bar{G}]^{(k)} (z_{(k)} - z_{(k-1)}); \\ [D_{Me}] = [D_{Tx}] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{G}]^{(k)} (z_{(k)}^2 - z_{(k-1)}^2); \\ [D_{Mx}] &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{G}]^{(k)} (z_{(k)}^3 - z_{(k-1)}^3). \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

Сопоставив (1.67) и первое уравнение (1.90), заметим, что $[D_{Te}] = [G] H$.

Конкретный вид выражений (1.90) зависит от структуры пакета слоев многослойного композита и расположения координатной плоскости. Для ряда частных случаев соотношения (1.90) заметно упрощаются. Рассмотрим три конкретных примера, относящихся к одному из наиболее распространенных типов многослойных композитов — перекрестно армированному, т. е. образованному слоями однонаправленного материала, ориентированными под углами φ и $-\varphi$. Во всех случаях в качестве координатной поверхности выбрана срединная плоскость, т. е. плоскость, делящая толщину многослойного композита H на две равные части.

Симметричная структура пакета слоев с нечетным общим числом слоев n (рис. 1.10, а). (Здесь и далее на подобных рисунках светлые срезы волокон соответствуют слоям с ориентацией волокон φ , а зачерненные — слоям с ориентацией $-\varphi$.) Формулы (1.90) для рассматриваемого случая принимают следующий вид:

$$(d_{11}, d_{12}, d_{22}, d_{33}) = (\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{22}, \bar{g}_{66}) H;$$

$$(d_{13}, d_{23}) = (\bar{g}_{16}, \bar{g}_{26}) H/n;$$

$$d_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6$$

$$\text{и для} \quad i = 4, 5, 6, j = 1, 2, 3;$$

$$(d_{44}, d_{45}, d_{55}, d_{66}) = (\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{22}, \bar{g}_{66}) H^3/12;$$

$$(d_{16}, d_{56}) = (\bar{g}_{16}, \bar{g}_{26}) \frac{3n^2 - 2}{n^3} \frac{H^3}{12}.$$

Компоненты d_{13} , d_{23} , d_{46} , d_{56} имеют знак, соответствующий знаку угла армирования φ внешних слоев пакета, остальные $d_{ij} > 0$.

Симметричная структура пакета слоев с четным общим числом слоев n ($n = 4, 8, \dots$) (см. рис. 1.10, б). Формулы (1.90) для этого случая принимают вид

$$(d_{11}, d_{12}, d_{22}, d_{33}) = (\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{22}, \bar{g}_{66}) H;$$

$$(d_{13}, d_{23}) = 0;$$

$$d_{ij} = 0 \text{ для } i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6$$

$$\text{и для } i = 4, 5, 6, j = 1, 2, 3;$$

$$(d_{44}, d_{45}, d_{55}, d_{66}) = (\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{22}, \bar{g}_{66}) H^3/12;$$

$$(d_{46}, d_{56}) = (\bar{g}_{16}, \bar{g}_{26}) H^3/4n.$$

Компоненты d_{46} , d_{56} также имеют знак угла армирования внешних слоев пакета. Равенство нулю компонент матриц $[D_{T\kappa}]$, $[D_{Me}]$ характерно не только для рассмотренных примеров, но и для симметричных структур общего вида.

Антисимметричная структура пакета слоев с четным общим числом слоев n (см. рис. 10, в).

Формулы (1.90) для этого случая принимают вид

$$(d_{11}, d_{12}, d_{22}, d_{33}) = (\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{22}, \bar{g}_{66}) H;$$

$$(d_{13}, d_{23}) = 0;$$

$$(d_{14}, d_{15}, d_{24}, d_{25}, d_{36}) = 0;$$

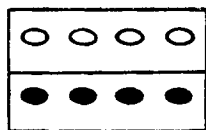
$$(d_{16}, d_{26}, d_{34}, d_{36}) = (\bar{g}_{16}, \bar{g}_{26}, \bar{g}_{16}, \bar{g}_{26}) H^2/2n;$$

$$(d_{44}, d_{45}, d_{55}, d_{66}) = (\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{22}, \bar{g}_{66}) H^3/12;$$

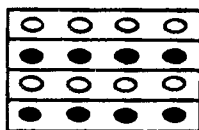
$$(d_{46}, d_{56}) = 0.$$

Компоненты d_{16} , d_{34} и d_{26} , d_{36} имеют знак угла армирования внешнего слоя при положительном z .

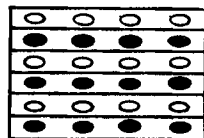
Особенность всех рассмотренных примеров заключается в том, что коэффициенты жесткости d_{ij} , не равные нулю и определяемые через $\bar{g}_{ij}$ с индексами 16, 26, уменьшаются при увеличении числа слоев n . Поэтому «дробление» общей толщины перекрестно армированных компонентов позволяет значительно «улучшить» структуру матрицы жесткости композита, уменьшая величину коэффициентов, ответственных за взаимосвязь изгибных и мембранных параметров напряженно-деформированного состояния. Так перестройка структуры пакета слоев, представленного на рис. 1.11, позволяет умень-



а)



б)



в)

Рис. 1.11.

шить при неизменной общей толщине пакета величину коэффициентов d_{16} , d_{34} и d_{26} , d_{35} по сравнению с вариантом a в варианте b — в 2 раза, а в варианте e — в 3 раза.

Из рассмотренных примеров, в частности, следует, что пару слоев с углами армирования $\pm\varphi$ (если таких пар достаточно много) можно рассматривать как единый ортотропный слой. Равенство нулю коэффициентов жесткости $\bar{g}_{16}$ и $\bar{g}_{26}$ такого слоя автоматически обеспечивает равенство нулю и всех коэффициентов жесткости многослойного материала, определяемых через жесткости $\bar{g}_{16}$ и $\bar{g}_{26}$. Использование такой модели двойного слоя особенно разумно в конструкциях, полученных методом непрерывной спиральной намотки, у которых слои с углами армирования φ и $-\varphi$ периодически меняются местами при движении вдоль слоя.

Соотношения (1.88А) могут быть обращены. При частичном обращении

$$\begin{Bmatrix} e \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{eT}] & [D_{e\kappa}] \\ [D_{MT}] & [D'_{M\kappa}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ \kappa \end{Bmatrix},$$

где $[S_{eT}]$, $[D_{e\kappa}]$, $[D_{MT}]$, $[D'_{M\kappa}]$ — матрицы, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} [S_{eT}] &= [D_{Te}]^{-1}; \quad [D_{e\kappa}] = -[D_{Te}]^{-1} [D_{T\kappa}]; \\ [D_{MT}] &= [D_{T\kappa}] [D_{Te}]^{-1}; \quad [D'_{M\kappa}] = [D_{M\kappa}] - [D_{T\kappa}] [D_{Te}]^{-1} [D_{T\kappa}]. \end{aligned}$$

Наконец, при полном обращении (1.88А)

$$\begin{Bmatrix} e \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{eT}] & [S_{eM}] \\ [S_{\kappa T}] & [S_{\kappa M}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix}, \quad (1.91)$$

где

$$\left. \begin{aligned} [S_{\kappa T}] &= [S_{eM}] = -[D_{Te}]^{-1} [D_{T\kappa}] [D_{M\kappa}]^{-1}; \\ [S_{\kappa M}] &= [D_{M\kappa}]^{-1} + [D_{M\kappa}]^{-1} [D_{T\kappa}] [D_{Te}]^{-1} [D_{T\kappa}] [D_{M\kappa}]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

Для материалов с симметричной структурой пакета, у которых $[D_{T\kappa}] = 0$, формулы (1.92) значительно упрощаются:

$$[S_{eT}] = [D_{Te}]^{-1}; \quad [S_{eM}] = [S_{\kappa T}] = 0; \quad [S_{\kappa M}] = [D_{M\kappa}]^{-1}.$$

Компоненты матрицы $[D_{T\kappa}]$ при симметричной структуре пакета слоев многослойного материала обращаются в нуль лишь в том случае, когда в качестве координатной плоскости выбрана срединная плоскость пакета. Если структура пакета несимметрична, выбор в качестве координатной плоскости срединной не приводит к упрощению соотношений (1.88А). В этом случае при выборе координатной плоскости могут оказаться решающими другие соображения. Так, при расчете оболочек вращения переменной толщины и структуры, полученных намоткой ленты однонаправленного материала на оправку заданной формы, удобно в качестве координатной поверхности выбирать внутреннюю поверхность оболочки.

§ 1.6. Примеры расчетов упругих характеристик

Определим модуль упругости при одноосном деформировании двух типов композитов: перекрестно армированного материала (со структурой армирования $[\pm\varphi]$) и однонаправленного материала при растяжении под углом φ к направлению армирования.

Технические постоянные упругости многослойных композитов в общем случае определяются соотношениями (1.77)–(1.80). Рассмотрим для определенности деформирование в направлении оси x . В соответствии с (1.77) модуль упругости $E_x = \Delta_g / (g_{22}g_{66} - g_{26}^2)$.

Перекрестно армированный материал со структурой армирования $[\pm\varphi]$ является ортотропным материалом [см. (1.73)]. Коэффициенты жесткости g_{11} , g_{22} , g_{12} , g_{66} перекрестно армированного материала в системе координат x , y согласно (1.73) равны соответствующим жесткостям однонаправленного материала в той же системе координат: $g_{11} = \bar{g}_{11}$, $g_{22} = \bar{g}_{22}$, $g_{12} = \bar{g}_{12}$, $g_{66} = \bar{g}_{66}$, а жесткости g_{16} и g_{26} равны нулю.

В случае растяжения однонаправленного материала под углом φ к направлению армирования композит состоит из одного слоя, повернутого на угол φ к оси x . Поэтому все жесткости g_{ij} композита в целом совпадают с соответствующими жесткостями $\bar{g}_{ij}$ однонаправленного материала в системе координат x , y : $g_{11} = \bar{g}_{11}$, $g_{22} = \bar{g}_{22}$, $g_{12} = \bar{g}_{12}$, $g_{16} = \bar{g}_{16}$, $g_{26} = \bar{g}_{26}$, $g_{66} = \bar{g}_{66}$.

Таким образом, матрицы жесткости рассматриваемых материалов выглядят следующим образом:

$$[G(\pm\varphi)] = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} & 0 \\ \bar{g}_{12} & \bar{g}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{g}_{66} \end{bmatrix}; \quad [G(\varphi)] = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} & \bar{g}_{16} \\ \bar{g}_{12} & \bar{g}_{22} & \bar{g}_{26} \\ \bar{g}_{16} & \bar{g}_{26} & \bar{g}_{66} \end{bmatrix},$$

отличаясь лишь значением коэффициентов жесткости $\bar{g}_{16}$, $\bar{g}_{26}$.

Различие в структуре матриц жесткости может заметно сказаться и на величинах технических постоянных упругости. Проведем численный анализ для стеклопластика со следующими характеристиками однонаправленного материала: $E_1 = 46\,000$ МПа, $E_2 = 18\,000$ МПа, $G_{12} = 4500$ МПа, $\nu_{12} = 0,2$.

Вследствие симметрии матрицы жесткости материала коэффициент Пуассона

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{E_1} = 0,078.$$

Коэффициенты жесткости материала в «естественной» системе координат (1, 2) (см. рис. 1.4) в соответствии с (1.34) равны

$$g_{11}^0 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = 46\,700 \text{ МПа};$$

$$g_{12}^0 = g_{11}^0 \nu_{21} = 3660 \text{ МПа};$$

$$g_{22}^0 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = 18300 \text{ МПа};$$

$$g_{66}^0 = G_{12} = 4500 \text{ МПа}.$$

По (1.58) определим коэффициенты V_i :

$$V_1 = (3g_{11}^0 + 2g_{12}^0 + 3g_{22}^0 + 4g_{66}^0)/8 = 27\,500 \text{ МПа};$$

$$V_2 = (g_{11}^0 - g_{22}^0)/2 = 14\,200 \text{ МПа};$$

$$V_3 = (g_{11}^0 - 2g_{12}^0 + g_{22}^0 - 4g_{66}^0)/8 = 4\,960 \text{ МПа};$$

$$V_4 = (g_{11}^0 - 2g_{12}^0 + g_{22}^0 + 4g_{66}^0)/8 = 9\,460 \text{ МПа}.$$

Коэффициенты жесткости однонаправленного материала в системе координат x, y , повернутой на угол φ относительно «естественной» системы координат $(1, 2)$, определяются в соответствии с (1.57) следующим образом (числовые значения приведены для $\varphi = 15^\circ$):

$$\bar{g}_{11} = V_1 + V_2 \cos 2\varphi + V_3 \cos 4\varphi = 42\,300 \text{ МПа};$$

$$\bar{g}_{12} = V_1 - 2V_4 - V_3 \cos 4\varphi = 6\,140 \text{ МПа};$$

$$\bar{g}_{16} = \frac{1}{2} V_2 \sin 2\varphi + V_3 \sin 4\varphi = 7\,850 \text{ МПа};$$

$$\bar{g}_{22} = V_1 - V_2 \cos 2\varphi + V_3 \cos 4\varphi = 17\,700 \text{ МПа};$$

$$\bar{g}_{26} = \frac{1}{2} V_2 \sin 2\varphi - V_3 \sin 4\varphi = -750 \text{ МПа};$$

$$\bar{g}_{66} = V_4 - V_3 \cos 4\varphi = 6\,980 \text{ МПа}.$$

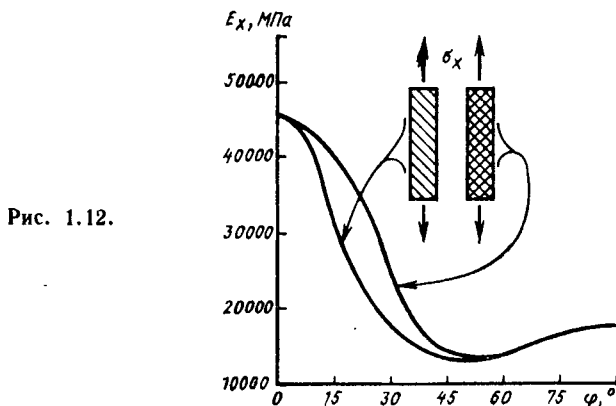
Величина определителя матрицы жесткости однонаправленного материала (она не зависит от угла φ) равна $3\,780\,000 \text{ МПа}^3$. Тогда модуль упругости $E_x(15^\circ)$ в соответствии с (1.77)

$$E_x(15^\circ) = \frac{\Delta g(\varphi)}{\bar{g}_{22}\bar{g}_{66} - \bar{g}_{26}^2} = 30\,700 \text{ МПа}.$$

Структура матрицы жесткости ортотропного перекрестно армированного композита позволяет использовать менее громоздкие формулы (1.81):

$$E_x(\pm 15^\circ) = \bar{g}_{11} - \frac{\bar{g}_{12}^2}{\bar{g}_{22}} = 40\,200 \text{ МПа}.$$

Результаты вычислений для ряда углов φ сведены в табл. 1.1.



1.1. Значения модулей упругости

Модули	Углы укладки, °						
	0	15	30	45	60	75	90
$E_x(\varphi)$, МПа	46 000	30 700	17 900	13 750	13 800	16 800	18 000
$E_x(\pm\varphi)$, МПа	46 000	40 200	25 300	14 400	14 100	16 800	18 000
$E_x(\varphi)/E_x(\pm\varphi)$	1	0,76	0,71	0,95	0,975	~1	1

Соответствующие графики представлены на рис. 1.12. Разница в определяемой величине модуля упругости в рассмотренном случае может составить $\sim 30\%$.

Глава 2

Модель композиционного материала с хрупким полимерным связующим

Эксперименты со многими композиционными материалами позволили обнаружить ряд явлений, не описываемых в рамках линейно упругого представления о деформировании. К основным особенностям поведения композиционных материалов при нагружении можно отнести: заметную нелинейность диаграмм деформирования ряда материалов, зависимость характера диаграмм от вида напряженного состояния и структуры материала, различие диаграмм одноосного растяжения и сжатия, первого и последующих нагружений и др. Теории нелинейного деформирования и разрушения современных композитов далеки от завершения, даже если речь идет о наиболее распространенном и весьма представительном классе композитов с хрупкой полимерной матрицей.

В гл. 2 внимание сосредоточено на особенностях поведения композита с хрупкой полимерной матрицей, вызванных появлением и развитием системы микротрещины во всем объеме связующего. Именно эти процессы в основном ответственны за проявление композитами с хрупкой полимерной матрицей неупругих свойств. В главе обосновывается одна из возможных моделей деформирования и разрушения многослойных композитов при плоском напряженном состоянии. Развиваемую модель можно отнести к числу структурно-феноменологических. Феноменологический подход используется для описания поведения однонаправленного композиционного материала (монослоя), структурный — для рассмотрения многослойных композитов, составленных из разноориентированных монослоев. Основные

достоинства модели — наглядность и минимальный объем исходной информации о свойствах материала. По сути дела, ее требуется не больше, чем для описания деформирования и прочности линейно упругих композитов. Тем не менее показано, что рассматриваемая модель во многих случаях позволяет вполне удовлетворительно описать прочность и процессы деформации современных композитов.

§ 2.1. Прочность однонаправленного композиционного материала при плоском напряженном состоянии

Прочность однонаправленного композита, так же как и прочность композиционных материалов вообще, может быть исследована с использованием двух основных подходов: структурного и феноменологического.

Один из простейших вариантов первого подхода был использован в предыдущей главе для определения жесткостей однонаправленного материала. Для исследования прочности однонаправленного материала на структурном уровне необходимо составить некоторую структурную модель материала, определить поля напряжений (деформаций) в волокне и матрице и сопоставить эти напряжения (деформации) с предельными для волокна, матрицы и границы раздела волокна и матрицы.

Подобные теории, получившие название структурных (или микро-механических) теорий прочности, активно развиваются в последнее время (см., например [49, 57]). Трудности, стоящие на пути создания достоверной структурной теории прочности, весьма значительны. Прежде всего следует отметить, что сохраняются те из них, которые в предыдущей главе (§ 1.2) были названы в качестве основных препятствий, стоящих перед создателями структурных теорий жесткости (податливости) композитов. К ним следует добавить прежде всего повышенные требования к точности определения напряженно-деформированного состояния компонентов композита, поскольку начало разрушения композита обычно связано с локальными физическими процессами. Отсюда — принципиальная невозможность использования многих простейших структурных моделей, достаточных для анализа интегральных (например, жесткостных) характеристик композита. Серьезно затрудняет оценку прочности композита в рамках структурного подхода необходимость рассмотрения кинетики разрушения материала, так как локальные значения параметров напряженно-деформированного состояния компонентов композита часто достигают предельных значений уже на начальных этапах нагружения композита, что, однако, не приводит к исчерпанию его несущей способности.

Современное состояние структурного подхода к прочности таково, что не позволяет получить надежные количественные данные о прочности композитов. Поэтому основное внимание уделим феноменологическому подходу, состоящему в создании достаточно простой мате-

матической модели, максимально учитывающей экспериментальные данные о прочности композитов.

При отсутствии тепловых, временных, химических и радиационных воздействий на материал его разрушение обычно связывают с напряженным состоянием тела; тогда критерий прочности (разрушения) можно записать в виде

$$f(\sigma_{ij}, F) = 0, \quad (2.1)$$

где F — некоторые характеристики прочности материала.

Уравнение (2.1) для анизотропного материала отличается от аналогичного уравнения для изотропного материала прежде всего тем, что в случае изотропии параметр материала F представляет собой единственную скалярную константу, а для анизотропного материала F может быть совокупностью многих параметров материала, вид которой определяется конкретной записью критерия прочности.

Феноменологические критерии прочности не выводятся аналитически, они постулируются или предлагаются на основе обобщения экспериментальных данных. Следствием имеющейся относительной свободы в формулировке критериев прочности явилось значительное число попыток создания таких критериев [7, 15, 16, 31].

Одна из наиболее общих формулировок критерия прочности анизотропных тел имеет вид [16]

$$(F_i \sigma_i)^\alpha + (F_{ij} \sigma_i \sigma_j)^\beta + (F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k)^\gamma + \dots = 1 \quad (2.2)$$

$$(i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, 6),$$

где $F_i, F_{ij}, F_{ijk}, \dots$ — матричные обозначения так называемых тензоров поверхности прочности второго, четвертого, шестого и последующих четных рангов. В [16] наиболее полно был разработан вариант критерия (2.2), в котором принято, что $\alpha = 1, \beta = 1/2, \gamma = 1/3$, и т. д. В этом случае критерий (2.2) представляет собой однородную функцию тензора напряжений.

Более удобным для практического применения оказался вариант критерия, в котором показатели степени в (2.2) приняты равными единице: $\alpha = \beta = \gamma = \dots = 1$,

и

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1. \quad (2.2A)$$

Форма записи (2.2A) получила название тензорно-полиномиального критерия прочности [15, 31].

Феноменологический подход имеет ряд серьезных недостатков. В первую очередь для однонаправленных композитов это необходимость повторения всех экспериментов по определению компонент тензоров поверхности прочности при любом изменении характеристик волокна и матрицы, объемной доли компонентов, технологии изготовления материала и т. д. Экспериментальное определение нужного набора констант прочности однонаправленного материала, как правило, является весьма трудоемкой технической задачей.

Проведенные эксперименты с типичными однонаправленными композитами позволяют установить, что вид разрушения зависит от

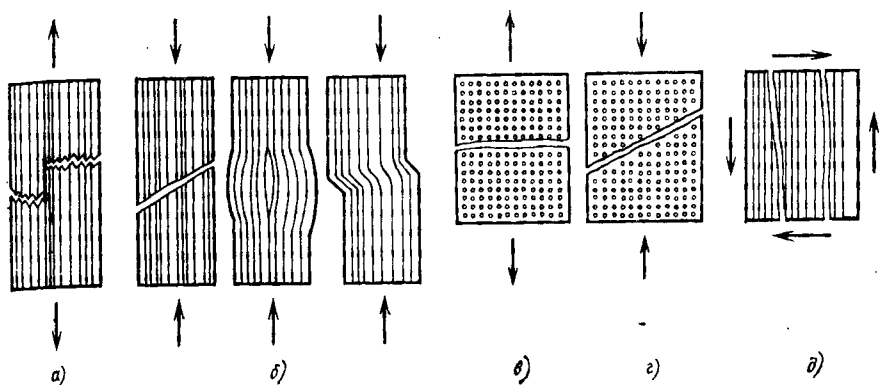


Рис. 2.1.

типа напряженного состояния [50, 57]. Некоторые из характерных видов разрушения однонаправленного материала схематично представлены на рис. 2.1: разрушение при растяжении вдоль волокон, сопровождающееся разрывом волокон (а); разрушение при сжатии вдоль волокон, вызванное «сколом», расслоением, сопровождающимися потерей устойчивости волокон или сдвиговой формой потери устойчивости (б); разрушение связующего и (или) адгезионной связи волокон и связующего при растяжении поперек волокон (в); разрушение композита, вызванное сдвиговыми напряжениями при сжатии поперек волокон (г); расслоение материала, вызванное сдвиговыми напряжениями в плоскости образца (д).

Простейшая гипотеза о поведении однонаправленного материала состоит в том, что эти виды разрушения взаимно независимы и разрушение наступает тогда, когда предельных значений (определенных в эксперименте) достигают в отдельности напряжения σ_1 , σ_2 или τ_{12} . Произвольное плоское напряженное состояние однонаправленного композита может быть изображено точкой в системе координат $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$. Условие прочности определяет в этой системе координат некоторую предельную поверхность, выход за которую означает исчерпание несущей способности материала. Согласно введенной гипотезе предельная поверхность в пространстве $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$ представляет собой прямоугольный параллелепипед (рис. 2.2). Условие прочности может быть записано в виде

$$\left. \begin{aligned} -F_{-1} < \sigma_1 < F_{+1}; \\ -F_{-2} < \sigma_2 < F_{+2}; \\ |\tau_{12}| < F_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где F — соответствующие пределы прочности; знаки «+» и «—» в индексах означают соответственно растяжение и сжатие.

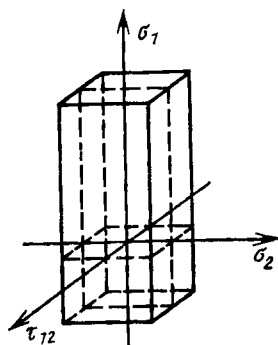


Рис. 2.2.

Критерий (2.3) представляет собой комбинацию критериев наибольших нормальных напряжений и наибольших касательных напряжений, записанных в главных осях анизотропии материала. В работе [15] показано, что представление критерия (2.3) в виде

$$(\sigma_1 - F_{+1})(\sigma_1 + F_{-1})(\sigma_2 - F_{+2})(\sigma_2 + F_{-2})(\tau_{12} - F_{12})(\tau_{12} + F_{12}) = 0 \quad (2.4)$$

позволяет [после раскрытия скобок в (2.4)] записать его в инвариантной тензорно-полиномиальной форме. При этом, однако, запись критерия прочности (2.3) переходит в соотношение весьма громоздкого вида, включающее тензоры прочности вплоть до двенадцатого ранга:

$$\begin{aligned} & F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 3F_{112}\sigma_1^2\sigma_2 + \\ & + 3F_{122}\sigma_1\sigma_2^2 + 3F_{166}\sigma_1\sigma_6^2 + 3F_{266}\sigma_2\sigma_6^2 + 4F_{1122}\sigma_1^2\sigma_2^2 + 4F_{1166}\sigma_1^2\sigma_6^2 + \\ & + 4F_{1266}\sigma_1\sigma_2\sigma_6^2 + 4F_{2266}\sigma_2^2\sigma_6^2 + 5F_{11266}\sigma_1^2\sigma_2\sigma_6^2 + \\ & + 5F_{12266}\sigma_1\sigma_2^2\sigma_6^2 + 6F_{112266}\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_6^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Компоненты тензоров прочности в (2.5) не являются независимыми константами. Они определяются (при плоском напряженном состоянии) через введенные в (2.3) пределы прочности следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{F_{+1}} - \frac{1}{F_{-1}}; & F_2 &= \frac{1}{F_{+2}} - \frac{1}{F_{-2}}; & F_{11} &= \frac{1}{F_{+1}F_{-1}}; \\ 2F_{12} &= \frac{1}{F_{+1}F_{-2}} - \frac{1}{F_{-1}F_{+2}} + \frac{1}{F_{-1}F_{+2}} - \frac{1}{F_{+1}F_{+2}}; \\ F_{22} &= \frac{1}{F_{+2}F_{-2}}; & F_{66} &= \frac{1}{F_{12}^2}; \\ 3F_{112} &= \frac{1}{F_{+1}F_{-1}} \left(\frac{1}{F_{-2}} - \frac{1}{F_{+2}} \right); & 3F_{122} &= \frac{1}{F_{+2}F_{-2}} \left(\frac{1}{F_{-1}} - \frac{1}{F_{+1}} \right); \\ 3F_{166} &= \frac{1}{F_{12}^2} \left(\frac{1}{F_{-1}} - \frac{1}{F_{+1}} \right); & 3F_{266} &= \frac{1}{F_{12}^2} \left(\frac{1}{F_{-2}} - \frac{1}{F_{+2}} \right); \\ 4F_{1122} &= -\frac{1}{F_{+1}F_{-1}F_{+2}F_{-2}}; & 4F_{1166} &= \frac{1}{F_{+1}F_{-1}F_{12}^2}; \\ 4F_{1266} &= \frac{1}{F_{12}^2} \left(\frac{1}{F_{+1}F_{+2}} - \frac{1}{F_{+1}F_{-2}} + \frac{1}{F_{-1}F_{-2}} - \frac{1}{F_{-1}F_{+2}} \right); \\ 4F_{2266} &= -\frac{1}{F_{+2}F_{-2}F_{12}^2}; \\ 5F_{11266} &= \frac{1}{F_{+1}F_{-1}F_{12}^2} \left(\frac{1}{F_{+2}} - \frac{1}{F_{-2}} \right); \\ 5F_{12266} &= \frac{1}{F_{+2}F_{-2}F_{12}^2} \left(\frac{1}{F_{+1}} - \frac{1}{F_{-1}} \right); \\ 6F_{112266} &= \frac{1}{F_{+1}F_{-1}F_{+2}F_{-2}F_{12}^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Только здесь индекс в обозначении предела прочности однонаправленного материала при сдвиге заключен в прямые скобки, отличающие его от обозначения компоненты F_{12} тензора поверхности прочности четвертого ранга.

Приведенные значения компонент тензоров прочности (2.6) соответствуют системе координат, совпадающей с главными осями анизотропии однонаправленного материала (или любого ортотропного материала).

Компоненты тензоров прочности однонаправленного материала в любой другой системе координат могут быть получены по обычным правилам преобразования тензоров при повороте систем координат. Возможность такого преобразования — главное достоинство записи критерия прочности (2.3) в форме (2.5)—(2.6).

Прямоугольный параллелепипед — одна из простейших геометрических моделей предельной поверхности однонаправленного материала, которая, конечно, может уточняться, например, по результатам экспериментов по разрушению материала при различных комбинациях напряжений σ_1 , σ_2 , τ_{12} . Однако эффективность такого уточнения не всегда соизмерима с потребными затратами. Проиллюстрируем сказанное примером.

Влияние прочностных характеристик материала на несущую способность конструкции часто определяется предельной величиной первого инварианта тензора напряжений $I_1(T_\sigma)$, воспринимаемой материалом без разрушения [20]. В случае плоского напряженного состояния $I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2$.

На рис. 2.3 линии равных значений I первого инварианта $\sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}$ равнонаклонены к осям координат. Там же изображен прямоугольник 2, соответствующий критерию наибольших напряжений, и прямая 3, соединяющая экспериментально определенные точки F_{+1} и F_{+2} . Ее уравнение

$$\frac{\sigma_1}{F_{+1}} + \frac{\sigma_2}{F_{+2}} = 1.$$

Экспериментальные результаты, соответствующие разрушению материала при различных комбинациях σ_1 и σ_2 , обычно укладываются в зоне, ограниченной прямыми 2 и 3 (см. например, [15]). Штриховой линией 4 на рис. 2.3 изображена некоторая «действительная» предельная линия.

В случае критерия наибольших напряжений предельное значение первого инварианта тензора напряжений, соответствующее точке А на рис. 2.3, $[I_1(T_\sigma)]_{\text{пред}} = F_{+1} + F_{+2}$, а в случае использования прямой 3 $[I_1(T_\sigma)]_{\text{пред}} = F_{+1}$, если для определенности рассмотреть случай $F_{+1} > F_{+2}$. Этому предельному значению соответствует точка В на рис. 2.3. Отношение указанных предельных значений $(F_{+1} + F_{+2})/F_{+1} = 1 + F_{+2}/F_{+1}$.

Для современных высокопрочных однонаправленных полимерных композиционных материалов предел прочности при растяжении материала в поперечном направлении составляет обычно от одной до восьми сотых предела прочности при растяжении вдоль

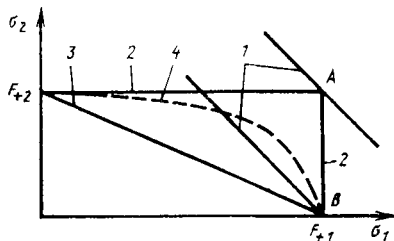


Рис. 2.3.

волокон: $F_{+2} \approx (0,01 \div 0,08) F_{+1}$. Соответственно различие несущей способности при использовании сравниваемых критериев прочности также составляет 0,01—0,08 по сравнению с единицей. Отношение F_{+2}/F_{+1} (если говорить о первом октанте пространства напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$) дает представление о потребности в уточнении формы предельной поверхности с точки зрения правильной оценки предельной несущей способности материала в рационально спроектированной конструкции.

Условия прочности (2.3) легко могут быть использованы для исследования зависимости предельного напряжения σ_x при одноосном нагружении образцов, вырезанных из однонаправленного материала под углом φ к направлению армирования (рис. 2.4). При этом, как следует из § 1.4, напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ определяются зависимостью

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}.$$

При одноосном нагружении в направлении оси x ($\sigma_y = \tau_{xy} = 0$)
 $\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \varphi$; $\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \varphi$; $\tau_{12} = \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi$.

Тогда условие прочности (2.3) будет иметь вид:
 при растяжении

$$\sigma_x < \frac{F_{+1}}{\cos^2 \varphi}; \quad \sigma_x < \frac{F_{+2}}{\sin^2 \varphi}; \quad \sigma_x < \frac{F_{12}}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

при сжатии

$$\sigma_x > \frac{-F_{-1}}{\cos^2 \varphi}; \quad \sigma_x > \frac{-F_{-2}}{\sin^2 \varphi}; \quad \sigma_x > \frac{-F_{12}}{\sin \varphi \cos \varphi}.$$

Для случая растяжения эти условия представлены на рис. 2.5. Здесь легко различимы три диапазона углов φ , соответствующие трем различным механизмам исчерпания несущей способности материала.

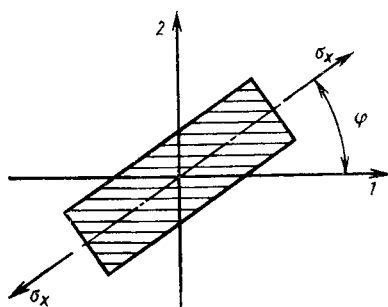


Рис. 2.4.

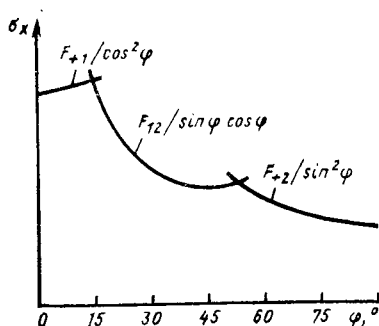


Рис. 2.5.

§ 2.2. Деформирование однонаправленного композиционного материала в составе пакета слоев многослойного материала

Однонаправленные материалы деформируются практически линейно упруго вплоть до разрушения. Условия разрушения могут быть определены с помощью феноменологического критерия прочности, если речь идет о поведении изолированного однонаправленного материала. В том случае, если однонаправленный материал является одним из слоев многослойного материала, составленного из разноориентированных однонаправленных слоев, его поведение может быть значительно более сложным.

Рассмотрим одноосное растяжение трехслойного материала, крайние слои которого образованы однонаправленным материалом, армированным в направлении растяжения, а средний слой армирован в ортогональном направлении (рис. 2.6) [37]. Толщины внешних слоев одинаковы ($h^{(1)} = h^{(3)}$).

Запишем очевидное условие равновесия

$$2(\sigma_x^{(1)} \bar{h}^{(1)} + \sigma_x^{(2)} \bar{h}^{(2)}) = \sigma_x, \quad (2.7)$$

где $\bar{h}^{(i)}$ — относительные толщины слоев, например $\bar{h}^{(1)} = h^{(1)}/2$ ($h^{(1)} + h^{(2)}$). Будем считать, что деформации ϵ_x , ϵ_y для всех слоев одинаковы. Рассмотрим для определенности случай плоской деформации $\epsilon_y = 0$. Тогда напряжение в слоях в направлении оси x

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \frac{\sigma_x E_1}{2(E_1 \bar{h}^{(1)} + E_2 \bar{h}^{(2)})}, \\ \sigma_x^{(2)} &= \frac{\sigma_x E_2}{2(E_1 \bar{h}^{(1)} + E_2 \bar{h}^{(2)})}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Деформации слоев одинаковы, они определяются следующими равенствами:

$$\epsilon_x^{(i)} = \frac{\sigma_x}{2(E_1 \bar{h}^{(1)} + E_2 \bar{h}^{(2)})}, \quad \epsilon_y^{(i)} = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Здесь E_1 и E_2 — модули упругости однонаправленного материала соответственно в продольном и поперечном направлениях. При увеличении приложенных к пакету слоев напряжений σ_x деформации слоев $\epsilon_x^{(i)}$ и напряжения в них $\sigma_x^{(i)}$ возрастают вплоть до разрушения одного из слоев. У современных полимерных однонаправленных композиционных материалов соотношение упругих и прочностных характеристик в направлениях вдоль и поперек волокон таково, что предельные деформации в поперечном направлении (соответствующие выполнению условия $\sigma_2 = F_{+2}$) существенно меньше (обычно в 3—5 раз) предель-

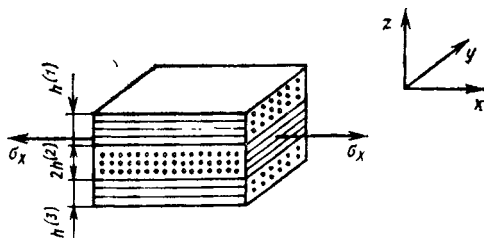


Рис. 2.6.

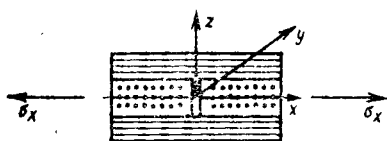


Рис. 2.7.

равенства (2.8):

$$\sigma_x^* = \frac{F_{+2}}{E_2} 2(E_1 \bar{h}^{(1)} + E_2 \bar{h}^{(2)}). \quad (2.9)$$

Предположим, что при этом уровне напряжений во втором слое появляется трещина, параллельная плоскости yz и расположенная в случайном сечении, ослабленном, например, по причинам технологического характера (рис. 2.7).

Представим напряжения в слоях после образования первой трещины в среднем слое следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \sigma_{x0}^{(1)} + \tilde{\sigma}_x^{(1)}, \\ \sigma_x^{(2)} &= \sigma_{x0}^{(2)} - \tilde{\sigma}_x^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где $\sigma_{x0}^{(i)}$ — основные напряжения, определяемые ранее выражениями (2.8); волной сверху отмечены дополнительные напряжения, вызванные образованием трещины. Дополнительное напряженное состояние является самоуравновешенным: $\tilde{\sigma}_x^{(1)} \bar{h}^{(1)} = \tilde{\sigma}_x^{(2)} \bar{h}^{(2)}$.

Все компоненты напряженного состояния слоев материала могут быть выражены через дополнительные напряжения $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$ [37]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(2)} &= \sigma_{x0}^{(2)} - \tilde{\sigma}_x^{(2)}; \\ \sigma_x^{(1)} &= \sigma_{x0}^{(1)} + \tilde{\sigma}_x^{(2)} \bar{h}^{(2)} / \bar{h}^{(1)}; \\ \tau^{(1)} &= \frac{\bar{h}^{(2)}}{\bar{h}^{(1)}} [z - (\bar{h}^{(1)} + \bar{h}^{(2)})] \frac{d\tilde{\sigma}_x^{(2)}}{dx}; \\ \tau^{(2)} &= -z \frac{d\tilde{\sigma}_x^{(2)}}{dx}; \\ \sigma_z^{(1)} &= \frac{\bar{h}^{(2)}}{2\bar{h}^{(1)}} [z - (\bar{h}^{(1)} + \bar{h}^{(2)})]^2 \frac{d^2\tilde{\sigma}_x^{(2)}}{dx^2}; \\ \sigma_z^{(2)} &= -\frac{1}{2} [z^2 - \bar{h}^{(2)} (\bar{h}^{(1)} + \bar{h}^{(2)})] \frac{d^2\tilde{\sigma}_x^{(2)}}{dx^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ — касательные напряжения в соответствующих слоях в плоскости xz .

В свою очередь дополнительные напряжения $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$ могут быть определены из следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d^4 \tilde{\sigma}_x^{(2)}}{dx^4} - 2a^2 \frac{d^2 \tilde{\sigma}_x^{(2)}}{dx^2} + b^4 \tilde{\sigma}_x^{(2)} = 0, \quad (2.12)$$

общее решение которого можно записать в виде

$$\tilde{\sigma}_x^{(2)} = e^{-k_1 x} (C_1 \sin k_2 x + C_2 \cos k_2 x) + e^{k_1 x} (C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x). \quad (2.13)$$

Учитывая граничные условия задачи, можно показать, что напряженное состояние в окрестности трещины определяется соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \sigma_{x0}^{(1)} + \sigma_{x0}^{(2)} \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} e^{-k_1 x} \left(\frac{k_1}{k_2} \sin k_2 x + \cos k_2 x \right); \\ \sigma_x^{(2)} &= \sigma_{x0}^{(2)} \left[1 - e^{-k_1 x} \left(\frac{k_1}{k_2} \sin k_2 x + \cos k_2 x \right) \right]; \\ \tau^{(1)} &= -\frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} [z - (h^{(1)} + h^{(2)})] \frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{k_2} (k_1^2 + k_2^2) e^{-k_1 x} \sin k_2 x; \\ \tau^{(2)} &= \frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{k_2} (k_1^2 + k_2^2) z e^{-k_1 x} \sin k_2 x; \\ \sigma_z^{(1)} &= \frac{h^{(2)}}{2h^{(1)}} [z - (h^{(1)} + h^{(2)})]^2 \frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{k_2} (k_1^2 + k_2^2) e^{-k_1 x} (k_1 \sin k_2 x - \\ &\quad - k_2 \cos k_2 x); \\ \sigma_z^{(2)} &= -\frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{2} [z^2 - h^{(2)}(h^{(1)} + h^{(2)})] \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_2} e^{-k_1 x} (k_1 \sin k_2 x - \\ &\quad - k_2 \cos k_2 x). \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Параметры k_1 и k_2 определяются выражением $k_{1,2} = \sqrt{0,5(b^2 \pm a^2)}$, где, в свою очередь,

$$a^2 = \frac{\frac{h^{(2)3}}{3G_{23}} + \frac{h^{(2)2}h^{(1)}}{3G_{13}} - \frac{\nu_{13}}{E_2} \left(2 \frac{h^{(2)3}}{3} + h^{(1)}h^{(2)2} \right) + \frac{\nu_{12}}{3E_1} h^{(1)}h^{(2)2}}{\frac{1}{2E_2} \left[\frac{h^{(2)5}}{5} - \frac{2h^{(2)4}}{3} (h^{(1)} + h^{(2)}) + h^{(2)3} (h^{(1)} + h^{(2)2}) + \frac{1}{5} h^{(1)3}h^{(2)2} \right]},$$

$$b^4 = \frac{2h^{(2)2} \left(\frac{1}{E_2 h^{(2)}} + \frac{1}{E_1 h^{(1)}} \right)}{\frac{1}{2E_2} \left[\frac{h^{(2)5}}{5} - \frac{2h^{(2)4}}{3} (h^{(1)} + h^{(2)}) + h^{(2)3} (h^{(1)} + h^{(2)2}) + \frac{1}{5} h^{(1)3}h^{(2)2} \right]}.$$

Графики, дающие качественную картину распределения напряжений вблизи трещины в соответствии с формулами (2.14), приведены на рис. 2.8.

Напряжения $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$, $\tau^{(2)}$ и $\sigma_z^{(2)}$ весьма быстро затухают при удалении от края трещины и уже при $x = 2\pi/k_2$ практически равны нулю.

Анализируя второе уравнение из группы (2.14), можно установить, что напряжения во втором слое (нормальные к направлению армирования) принимают наибольшее значение на расстоянии π/k_2 от края трещины. Наибольшее напряжение в слое

$$\max \sigma_x^{(2)} = \sigma_{x0}^{(2)} \left(1 + e^{-\frac{\pi k_1}{k_2}} \right). \quad (2.15)$$

Важно отметить, что наибольшее напряжение превышает уровень напряжения $\sigma_{x0}^{(2)}$, установившийся вдали от трещины, при котором произошло появление первой трещины. Этот уровень ($\sigma_{x0}^{(2)}$) превзойден и в зоне длиной π/k_2 , расположенной вблизи трещины (см. рис. 2.8, а).

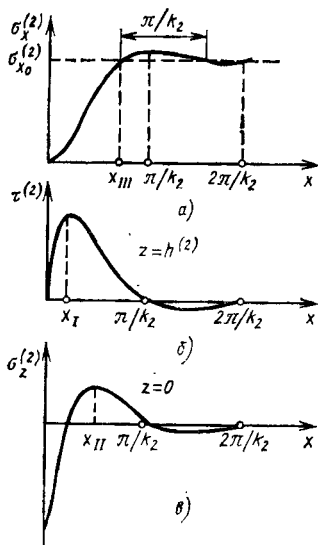


Рис. 2.8.

Касательные напряжения в среднем слое (см. рис. 2.8, б) достигают максимума в точке с координатой $x_I = (\arctg k_2/k_1)/k_2$.

Наибольшее значение касательного напряжения на границе первого и второго слоев может быть найдено из четвертого равенства (2.14) подстановкой $x = x_I, z = h^{(2)}$.

Характер изменения нормальных напряжений $\sigma_z^{(2)}$ представлен на рис. 2.8, в. Наибольшей величины напряжения $\sigma_z^{(2)}$ достигают на краю трещины ($x = 0$). Здесь на границе раздела слоев ($z = h^{(2)}$)

$$\sigma_z^{(2)} = -\frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{2} h^{(1)} h^{(2)} (k_1^2 + k_2^2), \quad (2.16)$$

а в центре второго слоя ($z = 0$)

$$\sigma_z^{(2)} = -\frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{2} (h^{(1)} + h^{(2)}) h^{(2)} (k_1^2 + k_2^2). \quad (2.17)$$

Максимальные положительные (растягивающие) напряжения имеют место при $x = x_{II}$, где x_{II} определяется из выражения

$$x_{II} = \frac{1}{k_2} \arctg \frac{2k_1 k_2}{k_1^2 - k_2^2}.$$

Дальнейшее поведение слоя зависит от соотношения пределов прочности слоя при растяжении поперек волокон, при межслоевом сдвиге и нормальном (межслоевом) отрыве. В зависимости от соотношения названных характеристик возможно (рис. 2.9): появление трещины, параллельной начальной, вызванное напряжениями $\sigma_x^{(2)}$ (а); появление трещины между слоями, вызванной касательными напряжениями (б); появление трещины между слоями (или внутри слоя), вызванной межслоевыми нормальными напряжениями

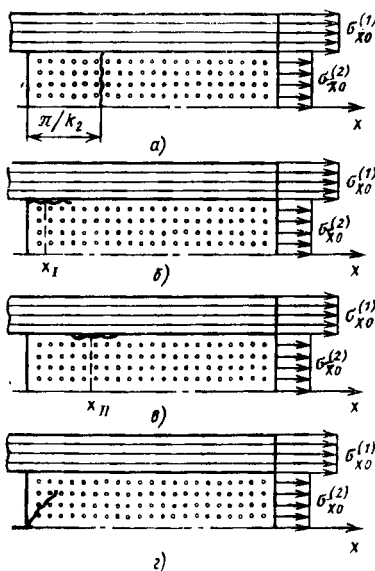


Рис. 2.9.

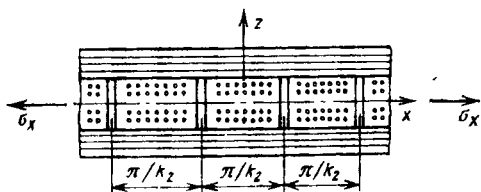


Рис. 2.10.

$\sigma_z^{(2)}(z)$; появление во втором слое трещины (трещин) не параллельной осям координат (z). Поясним на примере последнюю из названных возможных причин образования новых трещин. Напряженное состояние в окрестности начала координат ($x = 0, z = 0$) близко к одноосному сжатию, при этом напряжения определяются формулой (2.17). Максимальные касательные напряжения имеют место на площадках, наклоненных под углом 45° к оси z . Абсолютная величина этих напряжений равна половине напряжений $\sigma_z^{(2)}$: при $x = z = 0$

$$\tau_{45^\circ} = \frac{\sigma_z^{(2)}}{2} = \frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{4} (h^{(1)} + h^{(2)}) h^{(2)} (k_1^2 + k_2^2). \quad (2.18)$$

Комбинация действующих напряжений $\sigma_x^{(2)}$, $\sigma_z^{(2)}$, $\tau^{(2)}$ может явиться причиной появления новых трещин и в других точках второго слоя.

Практика показывает, что чаще всего реализуется первый из названных механизмов образования трещин и возникает трещина, параллельная начальной. Расстояние между начальной и новой трещиной близко к π/k_2 , поскольку при $x = \pi/k_2$ напряжения $\sigma_x^{(2)}$ достигают максимума, определяемого формулой (2.15). Все сказанное применимо и к вновь образовавшейся трещине. Таким образом, при напряжении σ_x , определяемом формулой (2.9), в среднем слое рассматриваемого материала появляется система трещин, делящая его на отдельные блоки (рис. 2.10). Средняя длина блока равна π/k_2 . Однако в области

$$x_{III} + \pi/k_2 > x > x_{III}, \quad (2.19)$$

где $x_{III} = \text{arctg}(-k_2/k_1)/k_2$, напряжения $\sigma_x^{(2)}$ также превышают уровень $\sigma_{x0}^{(2)}$ и отличаются от максимальных напряжений $\sigma_x^{(2)}$ обычно не более чем на 1 %. Поэтому появление блоков любой длины, принадлежащей диапазону (2.19), практически равновероятно.

Рассмотрим для определенности напряженное состояние блока длиной π/k_2 (см. рис. 2.10).

Решение уравнения (2.12) в этом случае удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x^{(2)} = & C_1 \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x + C_2 \operatorname{sh} k_1 x \cos k_2 x + C_3 \operatorname{ch} k_1 x \sin k_2 x + \\ & + C_4 \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В силу симметрии распределения напряжений относительно начала координат $C_2 = C_3 = 0$. Постоянные C_1 и C_4 определяются с учетом соотношений (2.11) из граничных условий на краю трещины: при $x = \pi/2k_2$ $\sigma_x^{(2)} = 0$ и $\tau^{(2)} = 0$.

Напряженное состояние блока описывается следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \sigma_{x0}^{(1)} + \frac{\sigma_{x0}^{(2)} h^{(2)}}{h^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \frac{k_1}{k_2}} \left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x + \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x \right), \\ \sigma_x^{(2)} &= \sigma_{x0}^{(2)} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2 k_2}} \left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x + \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x \right) \right], \\ \tau^{(1)} &= \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} [z - (h^{(1)} + h^{(2)})] \frac{\sigma_{x0}^{(2)} (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2 k_2}} \operatorname{sh} k_1 x \cos k_2 x, \\ \tau^{(2)} &= - \frac{\sigma_{x0}^{(2)} (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2 k_2}} z \operatorname{sh} k_1 x \cos k_2 x, \\ \sigma_z^{(1)} &= \frac{h^{(2)}}{2 h^{(1)}} [z - (h^{(1)} + h^{(2)})]^2 \frac{\sigma_{x0}^{(2)} (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2 k_2}} \times \\ &\quad \times (k_1 \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x - k_2 \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x), \\ \sigma_z^{(2)} &= - \frac{1}{2} [z^2 - h^{(2)} (h^{(1)} + h^{(2)})] \frac{\sigma_{x0}^{(2)} (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2 k_2}} \times \\ &\quad \times (k_1 \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x - k_2 \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x). \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Графики, дающие качественную картину распределения напряжений в отдельном блоке, приведены на рис. 2.11.

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_x^{(2)}$ (см. рис. 2.11, а) имеют место в центре блока ($x = 0$). Они равны

$$\max \sigma_x^{(2)} = \sigma_{x0}^{(2)} \left(1 - \frac{k_1}{k_2 \operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2 k_2}} \right). \quad (2.22)$$

Касательные напряжения на границе раздела слоев $z = h^{(2)}$ достигают максимума в точке x_{IV} (см. рис. 2.11, б), координата

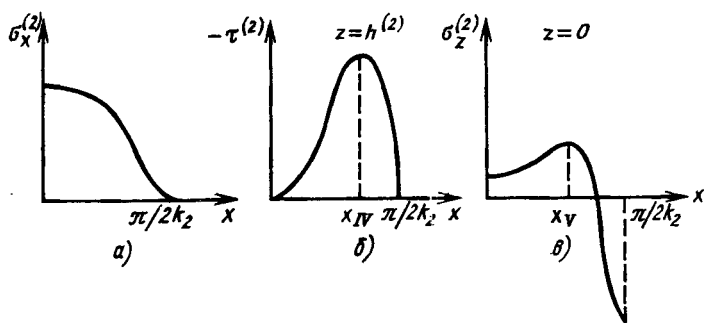


Рис. 2.11.

которой определяется из соотношения

$$\operatorname{th} k_1 x_{IV} \operatorname{tg} k_2 x_{IV} = k_1/k_2. \quad (2.23)$$

Хорошим приближением для x_{IV} является следующее выражение:

$$x_{IV} = (0,5 + 0,1k_1/k_2) \pi/2k_2. \quad (2.24)$$

Максимальное значение касательных напряжений может быть найдено подстановкой x_{IV} в четвертое уравнение из группы (2.21).

Укажем также значения нормальных межслоевых напряжений в центре блока и на его границе. Они определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x=0, z=h^{(2)} \quad \sigma_z^{(2)} &= \frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{2} h^{(1)} h^{(2)} \frac{k_1 (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2k_2}}; \\ \text{при } x=0, z=0 \quad \sigma_z^{(2)} &= \frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{2} (h^{(1)} + h^{(2)}) h^{(2)} \frac{k_1 (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 \operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2k_2}}; \\ \text{при } x=\frac{\pi}{2k_2}, z=h^{(2)} \quad \sigma_z^{(2)} &= -\frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{2} h^{(1)} h^{(2)} (k_1^2 + k_2^2); \\ \text{при } x=\frac{\pi}{2k_2}, z=0 \quad \sigma_z^{(2)} &= -\frac{\sigma_{x0}^{(2)}}{2} (h^{(1)} + h^{(2)}) h^{(2)} (k_1^2 + k_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Максимальное значение положительных (растягивающих) напряжений $\sigma_z^{(2)}$ имеет место в точке $z=0, x=x_V$ (см. рис. 2.11, в), координата которой определяется из соотношения

$$\operatorname{th} k_1 x_V \operatorname{ctg} k_2 x_V = \frac{2k_1 k_2}{k_1^2 - k_2^2}. \quad (2.26)$$

Рассматривая поведение слоя, разделенного на блоки длиной π/k_2 , при последующем нагружении следует вновь проанализировать возможные механизмы трещинообразования с использованием (2.21)—(2.26). Такой анализ обычно выявляет, что доминирующим остается механизм образования трещин, вызванных нормальными напряжениями $\sigma_x^{(2)}$, поскольку их максимальное значение в центре блока, определяемое формулой (2.22), практически равно $\sigma_{x0}^{(2)}$. Таким образом, новые трещины делят средний слой на блоки, длина которых близка к $\pi/2k_2$. Важно отметить, что образование первой трещины, появление системы трещин, делящей слой на отдельные блоки, и последующее деление блоков пополам происходят практически при постоянном уровне напряжений σ_x , определяемом формулой (2.9).

Уравнение (2.20) может быть решено и для случая блока с длиной, равной $\pi/2k_2$. Численный анализ, проведенный для ряда полимерных композиционных материалов, показывает, что для блоков такой длины доминирующими механизмами образования новых трещин становятся типы механизмов, схематично изображенных на рис. 2.9, б и г. Таким образом, становятся возможным развитие трещин по границе слоев и ветвление трещин, происходящее при дальнейшем деформировании ортогонально армированного композита.

На рис. 2.12 приведены некоторые результаты анализа микрофотографий поперечного сечения ортогонально армированного стеклопластика на различных этапах нагружения [56]. Сплошной линией отражены результаты аналитического решения. Цифрой *I* отмечен этап появления первой трещины и последующего за этим деления среднего слоя на блоки. Этап *II* соответствует последующему делению блоков (число трещин на единицу длины возрастает вдвое). Этап *III* соответствует еще одному делению блоков согласно первому из названных механизмов. Число трещин на единице длины при реализации этого механизма должно еще раз удвоиться. Точками на рис. 2.12 отмечены экспериментальные результаты. Они свидетельствуют о том, что после первого разрушения слоя число трещин быстро возрастает, находясь в хорошем соответствии с результатами аналитического решения (этапы *I* и *II*), но далее остается практически постоянным. На микрофотографиях, соответствующих этому этапу нагружения, замечено разветвление трещин и выход их на границу раздела слоев, что косвенно подтверждает предсказанную расчетами возможность смены механизма развития трещин.

Приведенные результаты свидетельствуют о существовании некоторого нижнего предела длины блока, выделенного трещинами из среднего однонаправленного слоя, растягиваемого в поперечном направлении. Простейшая оценка минимальной длины блока может быть сделана по аналогии с известной оценкой критической длины хрупкого волокна в податливом композите [28].

Рассмотрим равновесие полублока, считая, что касательные напряжения постоянны по его длине (рис. 2.13). Условие равновесия выделенной половины блока единичной ширины запишем следующим образом: $2h^{(2)}\sigma_x^{(2)} = 2l\tau$. Отсюда может быть найдена критическая длина блока, при которой в середине блока нормальные напряжения $\sigma_x^{(2)}$ достигают предельной величины F_{+2} :

$$l_{кр} = 2 \frac{F_{+2}}{\tau} h^{(2)}. \quad (2.27)$$

Напряжения τ в (2.27) можно трактовать как предельные напряжения межслойного сдвига. При развитии трещины на границе слоев их можно трактовать как силы трения, приходящиеся на единицу поверхности. Если длина блока превышает $l_{кр}$,

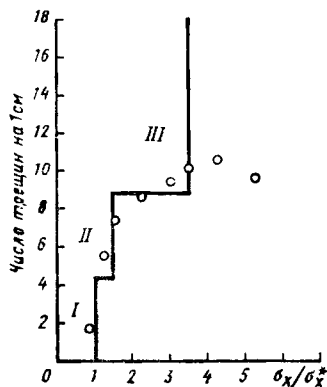


Рис. 2.12.

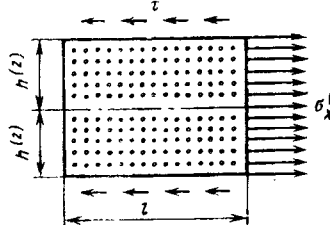


Рис. 2.13.

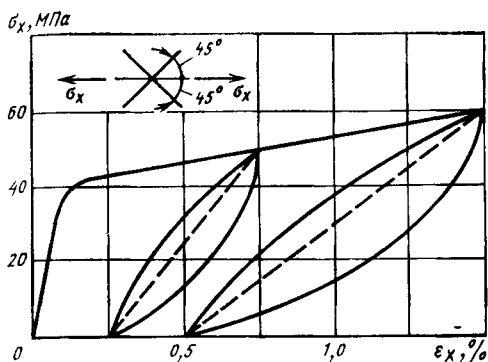


Рис. 2.14.

то при возрастании нагрузки напряжения $\sigma_x^{(2)}$ в центре блока могут превышать предел прочности F_{+2} . При $l < l_{кр}$ увеличение нагрузки может привести к образованию и развитию трещины на границе слоев.

Этапы развитого трещинообразования в слое, сопровождающиеся сложными процессами ветвления и пересечения трещин, взаимодействия контактирующих берегов трещин, пока не имеют аналитического описания. Некоторую косвенную информацию об этих процессах можно получить из описываемых далее экспериментов.

На рис. 2.14 приведена типичная диаграмма деформирования стеклопластика с ортогональным расположением слоев. На диаграмме заметен характерный перелом (точка А), соответствующий началу трещинообразования в слоях, растягиваемых в направлении, ортогональном армирующим волокнам. В предположении о том, что деформирование слоев, растягиваемых в направлении армирования, остается упругим, из диаграммы деформирования композита 1 выделена диаграмма деформирования слоев, ортогональных направлению растяжения (кривая 2). В этих слоях уровень напряжений остается близким к постоянному, отмеченному цифрой 3. Сложение диаграммы деформирования 3 с линейной диаграммой деформирования слоев, армированных в направлении растяжения, дает диаграмму деформирования композита 4, удовлетворительно описывающую эксперимент. Касательный модуль упругости композита до точки перелома А диаграммы 4 имеет значение $E_x = E_1 \bar{h}^{(1)} + E_2 (1 - \bar{h}^{(1)})$, а после точки перелома $E_x = E_1 \bar{h}^{(1)}$. Здесь $\bar{h}^{(1)}$ — относительная толщина слоев, армированных в направлении растяжения.

На рис. 2.15 приведена диаграмма деформирования углепластика со схемой армирования $[45^\circ/-45^\circ]_6$, взятая из работы [58]. При одноосном растяжении перекрестно армированного материала с углами укладки слоев $\pm 45^\circ$ нормальные напряжения в однонаправленном материале σ_1 и σ_2 далеки от предельных, поэтому диаграмма

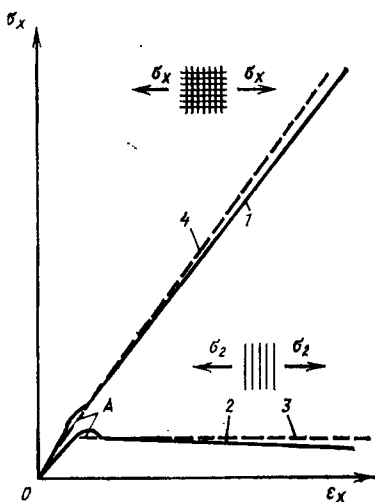


Рис. 2.15.

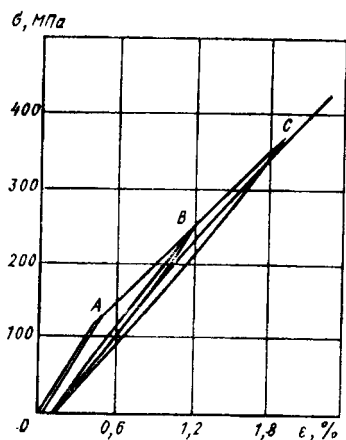


Рис. 2.16.

армирования, взятые из работы [56], приведены на рис. 2.16 (разгрузка начинается в точках A, B, C). Их анализ позволяет сделать ряд выводов. Во-первых, остаточные деформации, фиксируемые при разгрузке, значительно меньше деформаций, достигнутых до начала разгрузки при активном нагружении; относительно малая величина остаточных деформаций соответствует структурным представлениям о возможном закрытии трещин при разгрузке. Во-вторых, средний модуль цикла разгрузка — повторное нагружение (отмечен штриховой линией на рис. 2.15) существенно зависит от уровня деформации, с которого начинается разгрузка; величина этого среднего модуля ближе к величине секущего модуля диаграммы, чем к величине начального модуля материала. В-третьих, наличие нескольких циклов разгрузка — повторное нагружение практически не влияет на вид диаграмм деформирования вне этих циклов.

§ 2.3. Модель поведения монослоя

Будем считать, что деформирование однонаправленного материала монослоя в составе наката слоев многослойного композита происходит в соответствии с модельными диаграммами, изображенными на рис. 2.17.

Деформирование однонаправленного материала в направлении волокон полностью упруго (рис. 2.17, а). При достижении предельных напряжений F_{+1} или F_{-1} слой считается разрушенным.

Поведение слоя при нагружении в направлении, ортогональном волокнам, существенно сложнее (рис. 2.17, б). При деформировании слоя в пределах участка 0—1 он монолитен и линейно упруг. В точке 1 начинается процесс трещинообразования в связующем, который развивается на участке деформирования 1—2. Изолированный монослой в точке 1 разрушается. Разгрузка с любой точки участка 1—2 происходит с разгрузочным модулем $\tilde{E}_2$, равным секущему

на рис. 2.15 характеризует в основном поведение однонаправленного материала при сдвиге в плоскости слоя. По внешнему виду диаграмма деформирования такого материала при активном нагружении напоминает диаграмму деформирования упруго-идеально пластичного тела, качественно совпадая с диаграммой деформирования однонаправленного материала, входящего в состав многослойного композита, при растяжении в направлении, ортогональном волокнам [37].

На рис. 2.15 даны также диаграммы цикла разгрузка — повторное нагружение. Подобные диаграммы для ортогонально армированного стеклопластика при растяжении в одном из направлений

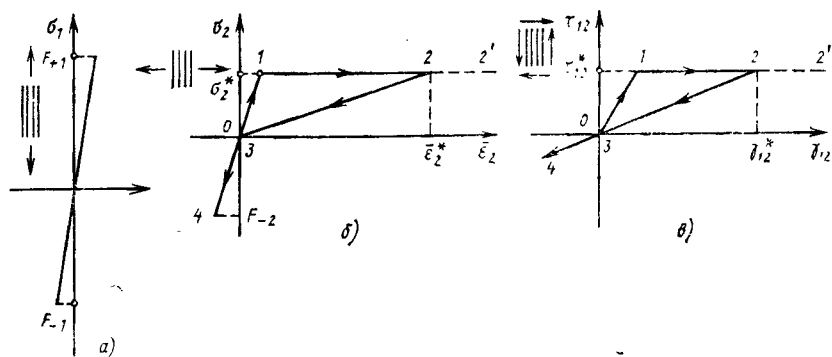


Рис. 2.17.

модулю диаграммы. Остаточные деформации равны нулю, что соответствует предположению о полном закрытии трещин. Поэтому при последующем сжатии монослоя (участок диаграммы 3—4) полностью восстанавливается начальный модуль материала. Повторное деформирование однонаправленного материала при положительных значениях напряжений σ_2 происходит по участку 3—2 и далее по участку 2—2'. Диаграмма деформирования на рис. 2.17, б построена в функции приведенной деформации $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_2 + \nu_{12}\epsilon_1$, что позволяет учесть влияние деформирования в направлении укладки волокон на растрескивание связующего. Разгрузочный модуль $\tilde{E}_2$ определяется следующим выражением:

$$\tilde{E}_2 = \left[\frac{\tilde{\epsilon}_2^*}{\sigma_2^*} + \frac{\nu_{12}^2}{E_1} \right]^{-1} = \frac{\sigma_2^*}{\tilde{\epsilon}_2^* + \nu_{12}^2 \sigma_2^* / E_1}, \quad (2.28)$$

где индекс * — знак наибольшего алгебраического значения параметра за предысторию деформирования.

Поведение монослоя при сдвиге во многом аналогично его поведению при деформировании в направлении, ортогональном волокнам (см. рис. 2.17, в). На участке 0—1 монослой деформируется линейно упруго. Участок диаграммы 1—2 соответствует этапу развития трещинообразования в связующем монослоя. Разгрузка (участок 2—3) происходит с разгрузочным модулем сдвига $\tilde{G}_{12} = \tau_{12}^* / \gamma_{12}^*$. Процесс сдвигового деформирования не зависит от знака напряжения τ_{12} . Поэтому на участке 3—4 деформирование также происходит с разгрузочным модулем $\tilde{G}_{12}$. Повторное деформирование в область положительных напряжений τ_{12} происходит по траектории 4—3—2 и далее по участку 2—2', где возобновляется трещинообразование в связующем. Если напряжения σ_2 достигают предельной величины F_{-2} , не зависящей от предыстории нагружения, слой считается разрушенным.

Процессы образования трещин при сдвиге и деформировании монослоя в поперечном направлении взаимосвязаны. Будем считать, что появление системы трещин, независимо от причины их появления, одновременно сказывается на поведении монослоя и при сдвиге и

при деформировании в поперечном направлении. Началу трещинообразования в монослое соответствуют напряжения σ_2^* и τ_{12}^* (см. рис. 2.17, б, в). При этом возможны два варианта:

$$|\tau_{12}^*| = F_{12}; \quad \sigma_2^* \leq F_{+2} \quad (2.29)$$

или

$$\sigma_2^* = F_{+2}; \quad |\tau_{12}^*| \leq F_{12}.$$

Таким образом, в соответствии с рассматриваемой моделью поведения монослоя [24], кроме двух естественных его состояний — начального (монокристаллический материал) и конечного (материал разрушен) — существует группа промежуточных состояний: материал с трещинами в полимерном связующем. В этой группе, в свою очередь, можно выделить группу состояний материала с открытыми трещинами (трещины разомкнуты) и группу состояний материала с закрытыми трещинами (трещины сомкнуты). Знак напряжения σ_2 определяет группу состояний материала: при положительных значениях σ_2 трещины открыты, при отрицательных (сжатие) — закрыты.

В соответствии с моделью в группе состояний материала с открытыми трещинами выделяются четыре состояния монослоя, отличающиеся величинами достигнутых деформаций $\bar{\epsilon}_2$ и $|\gamma_{12}|$ и знаками приращений этих деформаций $\Delta\bar{\epsilon}_2$, $\Delta|\gamma_{12}|$. Так, на диаграмме рис. 2.17, б можно выделить участок 1—2—2', соответствующий состоянию активного («пионерного») деформирования, которое сопровождается трещинообразованием. При этом $\bar{\epsilon}_2 = \bar{\epsilon}_2^*$ и $\Delta\bar{\epsilon}_2 > 0$. Напротив, деформирование в пределах участка диаграммы 2—3 (разгрузка и повторное нагружение), при котором $\bar{\epsilon}_2 < \bar{\epsilon}_2^*$, не сопровождается новыми необратимыми изменениями монослоя. Аналогичные участки можно отметить и на диаграмме сдвигового деформирования (см. рис. 2.17, в). Общее число комбинаций возможных этапов деформирования монослоя при сдвиге и растяжении в направлении, ортогональном волокнам, в группе состояний материала с открытыми трещинами равно четырем.

Если монослой сжат в поперечном направлении ($\sigma_2 < 0$) и трещины закрыты, то в зависимости от этапа сдвигового деформирования можно выделить еще два типа состояний монослоя. Первое из них соответствует активному трещинообразованию при сдвиге ($|\gamma_{12}| = |\gamma_{12}^*|$, $\Delta|\gamma_{12}| > 0$), второе — деформированию в уже «освоенном» диапазоне деформаций ($|\gamma_{12}| < |\gamma_{12}^*|$).

Введем матрицу-столбец параметров эффективной жесткости монослоя $\{\psi_1, \psi_2, \psi_{12}\}$, которые определим следующим образом:

$$\psi_1 = \frac{E_1}{E_1^0}; \quad \psi_2 = \frac{E_2}{E_2^0}; \quad \psi_{12} = \frac{G_{12}}{G_{12}^0}. \quad (2.30)$$

Здесь E_1^0, E_2^0, G_{12}^0 — начальные, а E_1, E_2, G_{12} — текущие значения касательных модулей упругости монослоя.

В зависимости от знака напряжений σ_2 , величины деформаций $\bar{\epsilon}_2$ и $|\gamma_{12}|$ и знака их приращений матрица-столбец параметров эффективной жесткости монослоя с трещинами принимает одно из шести возможных значений, приведенных в табл. 2.1.

2.1. Параметры эффективной жесткости материала с трещинами

Состояние монослоя	Параметры деформиро- ванного состояния		ψ_1	ψ_2	ψ_{12}
	в попереч- ном направ- лении	при сдвиге			
Трещины открыты $\sigma_2 > 0$	$\bar{\varepsilon}_2 < \bar{\varepsilon}_2^*$	$ \gamma_{12} < \gamma_{12}^* $	1	$\tilde{E}_2/E_2^0$	$\tilde{G}_{12}/G_{12}^0$
	$\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_2^*$		1	0	$\tilde{G}_{12}/G_{12}^0$
	$\Delta \bar{\varepsilon}_2 > 0$	$ \gamma_{12} = \gamma_{12}^* , \Delta \gamma_{12} > 0$	1	0	0
	$\bar{\varepsilon}_2 < \bar{\varepsilon}_2^*$		1	$\tilde{E}_2/E_2^0$	0
Трещины закрыты $\sigma_2 < 0$	$\bar{\varepsilon}_2 < 0$		1	1	0
		$ \gamma_{12} < \gamma_{12}^* $	1	1	$\tilde{G}_{12}/G_{12}^0$

В начале деформирования (когда материал монолитен) матрица-столбец параметров эффективной жесткости имеет значение $\{\psi_1, \psi_2, \psi_{12}\} = \{1, 1, 1\}$, а при полном разрушении монослоя [т. е. выполнении условий $\sigma_1 = F_{+1}$ или $\sigma_1 = F_{-1}$ или (и) $\sigma_2 = F_{-2}$] все ее компоненты равны нулю: $\{\psi_1, \psi_2, \psi_{12}\} = \{0, 0, 0\}$. Таким образом, общее число возможных состояний монослоя равно 8.

Будем считать, что коэффициент Пуассона ν_{12} не изменяет своего значения в процессе деформирования. Тогда, полагая, что для касательных модулей упругости выполняется соотношение $E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$, и учитывая, что параметр ψ_1 для всех состояний материала, вплоть до разрушения, равен единице, имеем

$$\nu_{21} = \nu_{21}^0 \frac{\psi_2}{\psi_1} = \nu_{21}^0 \psi_2. \quad (2.31)$$

Параметры эффективной жесткости используются при формировании матрицы жесткости монослоя, связывающей приращения напряжений и деформаций:

$$\Delta \{\sigma_{12}\} = [G^{0'}] \Delta \{\varepsilon_{12}\} \quad (2.32)$$

или

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta \sigma_2 \\ \Delta \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0} \begin{bmatrix} E_1^0 \psi_1 & \nu_{12}^0 E_2^0 \psi_2 & 0 \\ \nu_{21}^0 E_1^0 \psi_2 & E_2^0 \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0) G_{12}^0 \psi_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_1 \\ \Delta \varepsilon_2 \\ \Delta \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.32A)$$

Компоненты матрицы жесткости в (2.32А) зависят от текущего напряженно-деформированного состояния монослоя и предыстории его деформирования (табл. 2.1).

Отметим, что структурная интерпретация состояний монослоя, использованная в этом параграфе (например, представления о закрытых и открытых трещинах) весьма упрощена и схематизирована. Можно не прибегать к ней, считая изложенный подход чисто феноменологической моделью процессов деформирования однонаправленного материала в составе пакета слоев многослойного композита.

§ 2.4. Алгоритмизация задач о деформировании и прочности многослойных композитов

Описанная в § 2.3 модель поведения монослоя может быть применена для анализа процессов деформирования и разрушения многослойных композитов, составленных из нескольких разноориентированных монослоев. Будем считать, что на всех этапах деформирования композита связь его слоев идеальна, т. е. деформации всех слоев в системе координат композита (x, y) одинаковы и равны средним деформациям композита в целом.

Разработанная модель предназначена для определения вида состояния каждого из слоев композита и учета соответствующих этому состоянию жесткостей при определении средних (приведенных) параметров композита. Для многослойных композитов эта процедура весьма трудоемка. Поэтому в настоящем параграфе рассматриваются возможные алгоритмы проведения необходимых вычислений на ЭВМ.

Наиболее естественным для реализации модели является алгоритм последовательных нагружений. Пусть на n -м шаге нагружения средние напряжения, приложенные к композиту, увеличиваются на величину шага по нагрузке $\Delta \{\sigma_{xy}\}_n = \{\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy}\}_n$.

Найдем соответствующие этому шагу приращения средних деформаций композита

$$\Delta \{\epsilon_{xy}\}_n = [G']_{n-1}^{-1} \Delta \{\sigma_{xy}\}_n, \quad (2.33)$$

где матрица жесткости композита $[G']$ была определена на предыдущем шаге нагружения по формуле (1.67).

Полные средние деформации композита после n -го шага нагружения становятся равными сумме: $\{\epsilon_{xy}\}_n = \{\epsilon_{xy}\}_{n-1} + \Delta \{\epsilon_{xy}\}_n$. Найдем соответствующие им деформации слоев в координатах, связанных с направлениями армирования слоев $(1^{(i)}, 2^{(i)})$. Так, для i -го слоя $\{\epsilon_{12}\}_n^{(i)} = [T_1]_{n-1}^{(i)T} \{\epsilon_{xy}\}_n$ и $\Delta \{\epsilon_{12}\}_n^{(i)} = \{\epsilon_{12}\}_n^{(i)} - \{\epsilon_{12}\}_{n-1}^{(i)}$.

Здесь матрица преобразования координат $[T_1]_{n-1}^{(i)}$ определена на предыдущем шаге нагружения по формуле (1.41А).

Определим приращение напряжений и полные напряжения в слоях:

$$\begin{aligned} \Delta \{\sigma_{12}\}_n^{(i)} &= [G^{0'}]_{n-1}^{(i)} \Delta \{\epsilon_{12}\}_n^{(i)}, \\ \{\sigma_{12}\}_n^{(i)} &= \{\sigma_{12}\}_{n-1}^{(i)} + \Delta \{\sigma_{12}\}_n^{(i)}. \end{aligned}$$

Теперь известны все параметры напряженно-деформированного состояния слоев, необходимые для определения матрицы параметров эффективной жесткости каждого слоя в соответствии с логикой модели, отраженной в табл. 2.1: $\{\psi\}_n^{(i)} = f(\{\sigma_{12}\}_n^{(i)}, \{\epsilon_{12}\}_n^{(i)}, \Delta\{\epsilon_{12}\}_n^{(i)})$.

Параметры эффективности жесткости слоев используем для формирования их матриц жесткости $[G']_n^{(i)}$ в соответствии с правилом (2.32А).

Используя найденные матрицы жесткости слоев $[G^{0'}]_n^{(i)}$, вычислим уточненные (с индексом I) значения приращений напряжений в слоях: $\Delta\{\sigma_{12}\}_{nI}^{(i)} = [G^{0'}]_n^{(i)} \Delta\{\epsilon_{12}\}_n^{(i)}$, и полные напряжения в слоях: $\{\sigma_{12}\}_{nI}^{(i)} = \{\sigma_{12}\}_{n-1}^{(i)} + \Delta\{\sigma_{12}\}_{nI}^{(i)}$.

Относительно небольшая жесткость при сдвиге многих современных полимерных композиционных материалов нередко приводит к заметному изменению исходных углов укладки монослоев за счет деформаций сдвига. Этот вид нелинейностей, связанный с изменением геометрических параметров (углов укладки слоев) структуры многослойного композита, назовем структурной нелинейностью. Приближенный учет этого вида нелинейности может быть проведен путем коррекции углов укладки слоев следующим образом: $\varphi_n^{(i)} = \varphi_{n-1}^{(i)} + \Delta\gamma_{12n}^{(i)}/2$.

Новые значения углов армирования $\varphi_n^{(i)}$ используем при определении матрицы преобразования координат $[T_1]_n^{(i)}$, а ее, в свою очередь, используем для вычисления матрицы жесткости композита на n -м шаге нагружения [см. (1.67), (1.51А)]:

$$[G']_n = \sum_{i=1}^M [T_1]_n^{(i)} [G^{0'}]_n^{(i)} [T_1]_n^{(i)T} \bar{h}^{(i)}.$$

Проведем контроль положительной определенности полученной матрицы $[G']_n$. Обычно для этого достаточно убедиться в том, что $g'_{11} > 0$, $g'_{22} > 0$, $g'_{66} > 0$.

Определим уточненные значения средних напряжений в пакете слоев, полученные с использованием матриц n -го шага:

$$\{\sigma_{xy}\}_{nI} = \sum_{i=1}^M [T_1]_n^{(i)} \{\sigma_{12}\}_n^{(i)} \bar{h}^{(i)}.$$

Матрица-столбец уточненных напряжений $\{\sigma_{xy}\}_{nI}$ в общем случае может отличаться от заданного уровня средних напряжений, равного произведению числа проведенных шагов нагружения на величину одного шага по напряжениям $n\Delta\{\sigma_{xy}\}$. Используем разность этих матриц для контроля точности проведенных вычислений. Найдем модуль невязки (корень квадратный из суммы квадратов компонент $\epsilon = |\{\sigma_{xy}\}_{nI} - n\Delta\{\sigma_{xy}\}|$ и отнесем его к модулю вектора приращения напряжений $|\Delta\{\sigma_{xy}\}|$. Относительную (нормированную) невязку $\bar{\epsilon} = \epsilon/|\Delta\{\sigma_{xy}\}|$ сопоставим с заданной допускаемой погрешностью η . Если $\bar{\epsilon} > \eta$, возвратимся к формуле (2.33) и повторим все последующие вычисления, используя вместо матриц $n - 1$ -го

шага матрицы, полученные в первом приближении на n -м шаге. Число итераций по уточнению состояния слоев полезно контролировать, и если оно превышает некоторые разумные пределы, необходимо уменьшить шаг по нагрузке.

Если $\bar{\epsilon} < \eta$, считаем, что $\{\sigma_{xy}\}_n = n\Delta\{\sigma_{xy}\}$, и переходим к $(n+1)$ -му шагу нагружения.

На первом шаге нагружения определение необходимых для расчета матриц ведем, считая, что характеристики слоев и углы армирования равны исходным значениям.

Приращения напряжений продолжаем до разрушения композита. Будем считать, что многослойный композит разрушен, если хотя бы в одном из его слоев выполнены условия $\sigma_1^{(i)} = F_{+1}^{(i)}$ или $\sigma_1^{(i)} = F_{-1}^{(i)}$, или (и) $\sigma_2^{(i)} = F_{-2}^{(i)}$.

Как показывают результаты экспериментов, это предположение вполне оправдано, по крайней мере, для многослойных композитов, составленных из небольшого числа групп (до 4—5) разноориентированных слоев.

Изменение жесткостных характеристик слоев при деформировании нередко приводит к тому, что матрица жесткости композита $[G']$ становится сингулярной и не имеет обратной матрицы, необходимой для вычислений по формуле (2.33). В этом случае в соответствии с используемой моделью композит получает возможность неограниченного деформирования при заданной нагрузке. Эту ситуацию можно трактовать как потерю устойчивости процесса деформирования композита. При потере положительной определенности матрицы $[G']$ нагружение заканчивается и несущая способность композита считается исчерпанной.

Описанный алгоритм пошагового нагружения может быть использован для построения предельных поверхностей композита (выход за которые означает разрушение или изменение состояния слоев) в пространстве напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$. Рассмотрим алгоритм построения предельных поверхностей на примере алгоритма определения исходной информации для построения линий предельного состояния на плоскости (σ_x, σ_y) . Зададим нужное число лучей нагружения N . Лучом нагружения будем называть прямую линию, проведенную из начала координат на плоскости (σ_x, σ_y) , которой соответствует некоторое заданное отношение σ_y/σ_x . На рис. 2.18 штриховыми линиями показаны 12 лучей нагружения, делящих плоскость (σ_x, σ_y) на равные зоны. Угловое расстояние между лучами нагружения равно $2\pi/N$. Если задан шаг приращения напряжений $|\Delta\sigma_{xy}|$, то компоненты матрицы-столбца приращения напряжений для j -го луча определяются следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = |\Delta\sigma_{xy}| \begin{Bmatrix} \cos(2\pi j/N) \\ \sin(2\pi j/N) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Последовательно решая N задач, каждой из которых соответствует свой шаг по напряжениям $\Delta\{\sigma_{xy}\}_j$, фиксируя этапы смены состояний

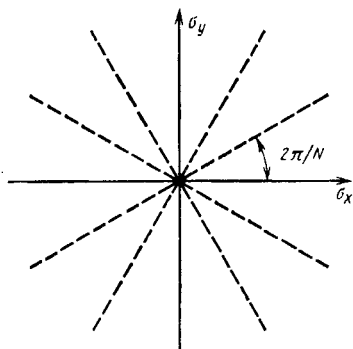


Рис. 2.18.

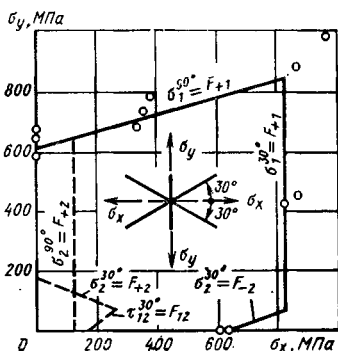


Рис. 2.19.

отдельных слоев и соединяя аналогичные точки, принадлежащие различным лучам, можно построить линии предельных состояний композита на плоскости (σ_x, σ_y) .

В качестве примера на рис. 2.19 приведены линии предельного состояния в 1-м квадранте плоскости (σ_x, σ_y) , построенные для стеклопластика квазиизотропной структуры $[\pm 30^\circ/90^\circ]$: штриховые линии соответствуют смене состояний слоев композита, а сплошные — полному разрушению материала. Надписи у линий поясняют причины изменений состояния материала. Например, запись « $\sigma_2^{30} = F_{+2}$ » означает начало трещинообразования в слоях, уложенных под углами $\pm 30^\circ$, вызванное напряжениями σ_2 . Кружками на рис. 2.19 отмечены экспериментальные результаты [25]. При вычислениях использованы следующие исходные данные для однонаправленного стеклопластика: $E_1 = 46500$ МПа, $E_2 = 7000$ МПа, $G_{12} = 7000$ МПа, $\nu_{12} = 0,25$, $F_{+1} = 1600$ МПа, $F_{-1} = 500$ МПа, $F_{+2} = 40$ МПа, $F_{-2} = 200$ МПа, $F_{12} = 60$ МПа. Эти исходные данные (если специально не указаны другие характеристики) приняты во всех последующих примерах этой главы.

Описанные алгоритмы реализованы в программе ААА (см. приложение 1). Они относятся к алгоритмам силового нагружения, когда на каждом шаге нагружения задается приращение нагрузки (напряжений). Могут быть построены и алгоритмы деформационного нагружения [25], в которых на каждом шаге нагружения задается приращение деформаций. Достоинством последних алгоритмов является отсутствие требования положительной определенности матрицы $[G']$, что позволяет исследовать и участки неустойчивого деформирования материалов.

Параметры материала (исходные данные для расчета) по сути своей — случайные величины. При наличии достаточной информации о законах их распределения алгоритм модели может быть использован для статистического моделирования деформативности и прочности реальных материалов [27].

§ 2.5. Одноосное нагружение перекрестно армированных композитов

Поведение многослойных композитов, составленных из почти линейно упругих однонаправленных слоев, часто оказывается качественно значительно более сложным, чем поведение составляющих их слоев. В зависимости от структуры материала и вида напряженного состояния характер диаграмм деформирования и прочность материала могут меняться в широких пределах.

Рассмотрим поведение перекрестно армированных композитов при одноосном растяжении или сжатии. Проведем параллельный анализ теоретических диаграмм деформирования, построенных по алгоритмам, изложенным в § 2.4, и имеющихся экспериментальных результатов [25].

В зависимости от величины угла φ укладки слоев перекрестно армированного композита возможны несколько вариантов исчерпания несущей способности композита (рис. 2.20). Каждому из них присущ свой вид диаграммы деформирования.

На рис. 2.20 сплошные линии соответствуют расчетному пределу прочности композита, а штриховая — расчетному пределу монолитности, т. е. выполнению условий начала трещинообразования в монослоях. Надписи у линий поясняют определенную расчетом причину смены состояния или разрушения материала. Экспериментальные результаты получены при испытаниях цилиндрических трубчатых стеклопластиковых образцов [25] на осевое растяжение (на рис. 2.20 они отмечены крестиками) или растяжение в окружном направлении (отмечены на рис. 2.20 кружочками). Характеристики однонаправленного стеклопластика, использованные в расчетах, приведены в § 2.4.

При изменении угла φ в пределах $0-20^\circ$ разрушение материала связано с разрывом армирующих волокон ($\sigma_1 = F_{+1}$). При углах φ , меньших $\sim 4^\circ$, диаграмма деформирования материала линейна вплоть до разрушения, а разрушение — единственная стадия изменения состояния материала. Диаграммы, полученные при окружном растяжении образцов с углами армирования $\varphi = \pm 75^\circ$ (что соответствует на рис. 2.20 углу φ , равному 15°), приведены на рис. 2.21, а. На

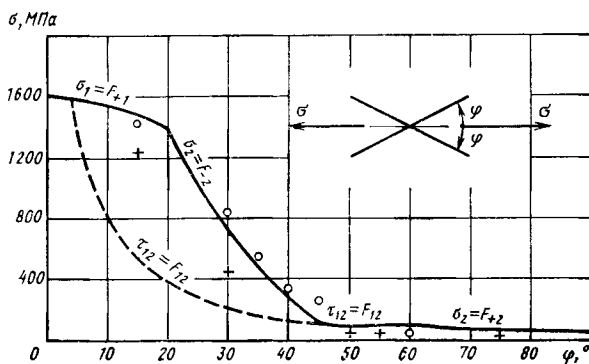


Рис. 2.20.

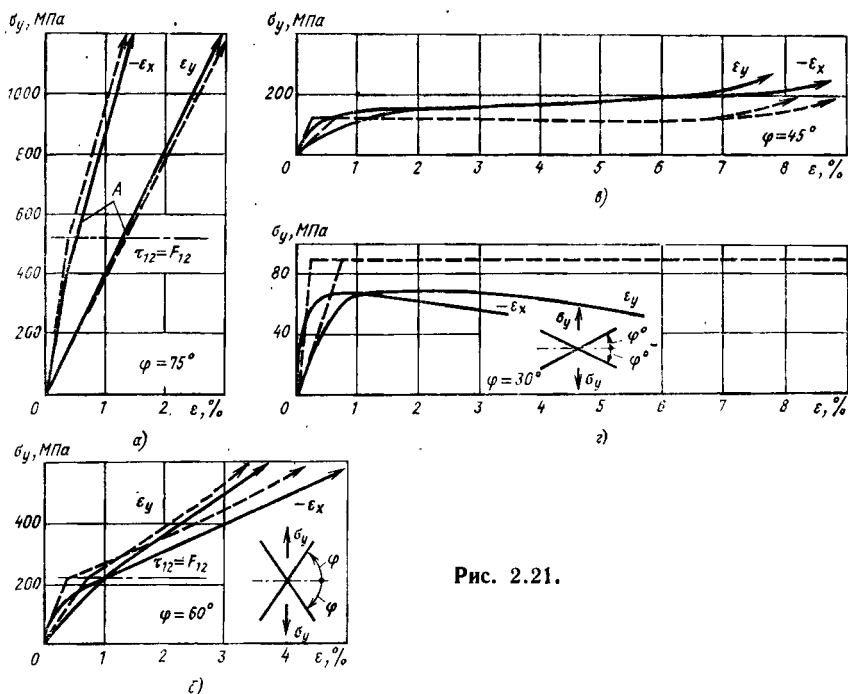


Рис. 2.21.

этом рисунке (и далее на однотипных) сплошные линии — экспериментальные диаграммы, штриховые — теоретические. При $\sigma_y = 520$ МПа согласно расчету в связующем начинается процесс трещинообразования, поскольку сдвиговые напряжения достигают предела прочности при сдвиге $\tau_{12} = F_{12}$. В расчете модуль G_{12} становится равным нулю, а E_2 остается неизменным, поскольку $\sigma_2 < 0$. На теоретических диаграммах образуется излом в точке А (см. рис. 2.21, а). Диаграммы деформирования такого вида характерны для материалов с углами армирования $4^\circ < \varphi < 20^\circ$. Стрелки на диаграммах рис. 2.21, а и однотипных рисунках далее указывают на то, что приведена лишь часть диаграммы деформирования. Величину разрушающей нагрузки можно определить по графику предельных напряжений на рис. 2.20.

В диапазоне углов $20^\circ < \varphi < 45^\circ$ процесс исчерпания несущей способности материала проходит в две стадии. Сначала при некотором уровне напряжений σ (см. рис. 2.20), соответствующем выполнению условия $\tau_{12} = F_{12}$, материал теряет монолитность, что приводит к изменению его жесткости. Деформирование продолжается, нагрузка заметно возрастает. Разрушение материала в этом диапазоне углов армирования вызвано сжатием однонаправленных слоев в направлении, перпендикулярном армированию ($\sigma_2 = F_{-2}$). Типичные для этого диапазона углов диаграммы деформирования приведены на рис. 2.21, б. Они отличаются прежде всего четко выраженной нелинейностью. При растяжении в окружном направлении образца с уг-

лами армирования $\varphi = \pm 60^\circ$ (что соответствует $\varphi = 30^\circ$ на рис. 2.20) привлекает внимание эффект резкого изменения соотношения окружных и осевых деформаций. Анализ диаграмм деформирования, приведенных на рис. 2.21, б, показывает, что величина отношения $-\epsilon_x/\epsilon_y$ (коэффициент Пуассона ν_{yx}), равная на начальном участке деформирования 0,67, в результате трещинообразования в связующем заметно увеличивается, достигая значения 1,3. Теоретическая модель в целом правильно описывает названное явление. Наибольшее расхождение между расчетом и экспериментом наблюдается в местах излома теоретических диаграмм. Это, по-видимому, обусловлено кусочно-линейной аппроксимацией кривых деформирования однонаправленного материала, которая принята при построении модели.

Диаграммы деформирования композита со структурой армирования $\varphi = \pm 45^\circ$ (рис. 2.21, в) внешне похожи на диаграммы деформирования пластичных металлов и принципиально отличаются от диаграмм деформирования, например, материала с углами укладки слоев $\varphi = \pm 75^\circ$ при растяжении в направлении оси y (см. рис. 2.21, а). При этом композит, составленный из слоев, предельная деформация которых не превышает 0,6—3,5 % (в зависимости от направления нагружения), деформируются без разрушения до уровня 9—10 %. Высокая податливость не является только недостатком материалов этого типа. Эффекты «псевдопластичности» могут быть с успехом использованы при проектировании конструкций.

На конечном этапе деформирования заметно увеличение жесткости (касательного модуля) материала, вызванное изменением углов армирования, т. е. проявлением структурной нелинейности. Теоретические кривые деформирования на рис. 2.21, в, г получены с использованием алгоритма деформационного нагружения.

В диапазоне углов $45^\circ < \varphi < 90^\circ$ нарушение монолитности материала приводит к исчерпанию его несущей способности без разделения образца на отдельные части. В этом диапазоне структур армирования материалы также весьма податливы (сказанное относится к поведению в эксперименте трубчатых образцов; плоские образцы в этом диапазоне углов армирования после нарушения монолитности разрушаются). Однако в отличие от предыдущего диапазона после нарушения монолитности на экспериментальных кривых не отмечено увеличения нагрузки. В ряде случаев (см. рис. 2.21, г) она падает. По-видимому, этот вид исчерпания несущей способности материала можно трактовать как проявление неустойчивости процесса деформирования. Осевое растяжение материалов в диапазоне углов армирования $45^\circ < \varphi < 90^\circ$ после нарушения сплошности материала ($\sigma_2 > 0$, $E_2 = G_{12} = 0$) происходит при постоянной нагрузке, которая и считается предельной.

Качественное представление о возможном характере деформирования перекрестно армированных структур дает следующая механическая модель [60]. Рассмотрим ромб с жесткими ребрами, заполненный полимерным связующим (рис. 2.22). Будем считать, что ребра этого модельного ромба соединены между собой шарнирно, и если полость ромба не заполнена связующим, он представляет собой

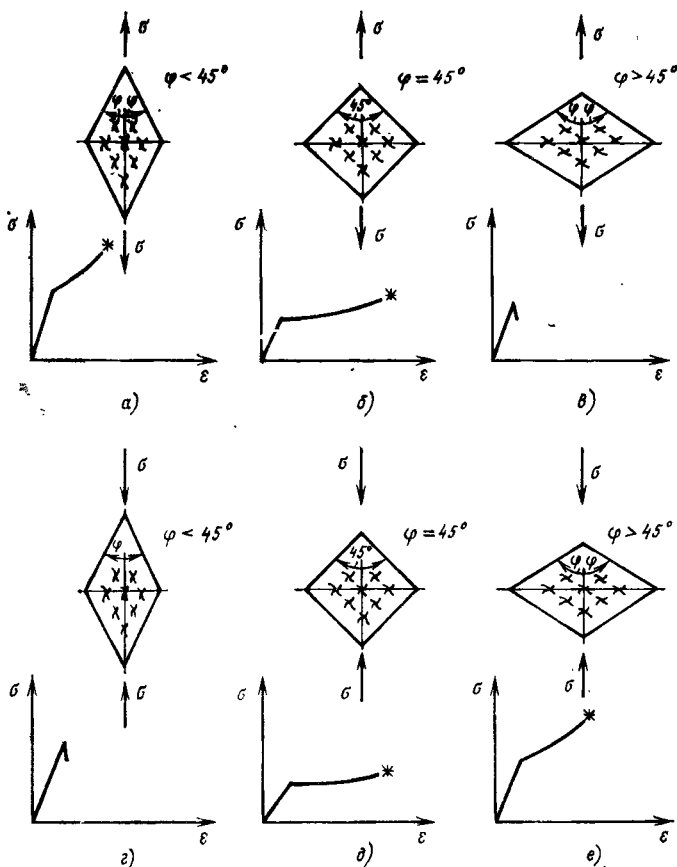


Рис. 2.22.

механизм, геометрические параметры которого изменяются при произвольно малой нагрузке. Иным будет поведение ромба при заполнении его полостью связующим. Для деформирования ромба к его вершинам теперь потребуется приложить необходимые силы, определяемые свойствами связующего. При некоторой величине последних в хрупком связующем могут появиться трещины, делящие его на отдельные блоки. Дальнейшее поведение модели зависит от величины угла при вершине ромба, к которой приложена сила. Если угол в вершине ромба φ меньше 45° (рис. 2.22, а), то площадь ромба при деформировании уменьшается, трещины в связующем закрыты и ромб способен воспринимать возрастающую нагрузку, предельная величина которой определяется прочностью его ребер. Если же угол в вершине ромба, к которой приложена сила, больше 45° (рис. 2.22, в), то после разрушения связующего площадь ромба возрастает, остатки связующего не препятствуют деформированию ромба, который превращается в механизм. Ромб, полуугол в вершине которого равен 45° (квадрат), занимает промежуточное положение между рассмотрен-

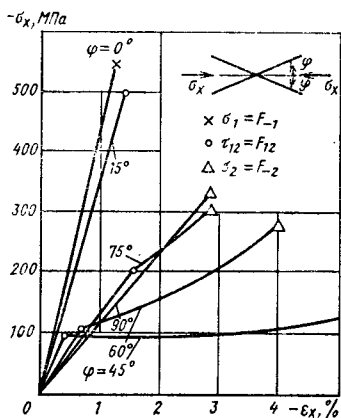


Рис. 2.23.

При конечных перемещениях вершин ромба площадь его уменьшается, а жесткость системы несколько возрастает. Диаграммы деформирования рассмотренной механической модели (см. рис. 2.22) качественно совпадают с описанными ранее диаграммами деформирования реальных материалов. Близкая модель использовалась в работе [41] для определения условий разрушения (достижение предельных напряжений сдвига или разрыв армирующих волокон) перекрестно армированных материалов.

Описанная модель позволяет провести качественный анализ поведения перекрестно армированных материалов и при одноосном сжатии. В этом случае при углах φ , меньших 45° , площадь ромба при деформировании возрастает, и после появления трещин в связующем он превращается в механизм. Напротив, при $\varphi > 45^\circ$ площадь ромба при деформировании уменьшается, система воспринимает возрастающую нагрузку и после появления трещин в связующем. Ожидаемый вид диаграмм деформирования при сжатии рассматриваемого класса материалов дан на рис. 2.22, г, д, е.

Диаграммы деформирования перекрестно армированных материалов при сжатии, рассчитанные по описанным в § 2.4 алгоритмам, приведены на рис. 2.23.

При этом использованы следующие исходные данные: $E_1 = 47000$ МПа, $E_2 = 13000$ МПа, $G_{12} = 4500$ МПа, $\nu_{12} = 0,25$, $F_{+1} = 1000$ МПа, $F_{-1} = 550$ МПа, $F_{+2} = 30$ МПа, $F_{-2} = 340$ МПа, $F_{12} = 40$ МПа. Изменение углов укладки однонаправленных слоев приводит к качественному изменению вида диаграмм деформирования. В широких пределах изменяются податливость и несущая способность (рис. 2.24) материала.

§ 2.6. Многослойные композиты в условиях двухосного растяжения и сдвига

Для обсуждения особенностей поведения многослойных материалов при одном из видов плоского напряженного состояния —

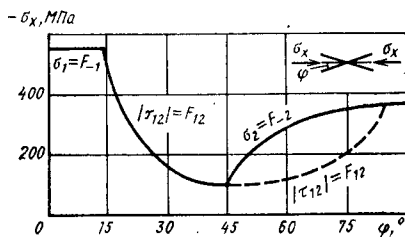


Рис. 2.24.

ными случаями (рис. 2.22, б). Поскольку квадрат является ромбом с максимальной при заданной длине ребер площадью, ее изменение при малых деформациях ромба после разрушения связующего близко к нулю.

двухосном растяжении. — важное значение имеет понятие равновесной структуры армирования. Равновесной будем называть структуру армирования, при которой под действием заданной системы нагрузок $\sigma_x, \sigma_y = k\sigma_x$ происходит равномерное растяжение материала ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_1^{(i)} = \epsilon_2^{(i)} = \epsilon, \gamma_{12}^{(i)} = 0$). Воспользовавшись законом Гука (1.66) для симметрично армированных относительно осей x, y материалов, получим $\sigma_x = (g_{11} + g_{12}) \epsilon$ и $\sigma_y = (g_{12} + g_{22}) \epsilon$.

Структура материала может считаться равновесной для данного случая нагружения, если выполнено соотношение

$$k = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{g_{12} + g_{22}}{g_{11} + g_{12}}. \quad (2.34)$$

Для перекрестно армированных материалов установлено [(см. 1.73)], что коэффициенты жесткости g_{ij} , входящие в (2.34), равны соответствующим коэффициентам жесткости однонаправленного материала, записанным для системы координат (x, y) : $g_{11} = \bar{g}_{11}, g_{12} = \bar{g}_{12}, g_{22} = \bar{g}_{22}$, которые, в свою очередь, могут быть выражены [(см. 1.57)] через коэффициенты V_i ($i = 1, \dots, 4$). Проведя необходимые преобразования, приведем (2.34) к виду

$$\cos 2\varphi = 2 \frac{V_1 - V_4}{V_2} \frac{1 - k}{1 + k}. \quad (2.35)$$

Из (2.35), в частности, следует, что при $k = 1$ ($\sigma_y = \sigma_x$) равновесный угол не зависит от коэффициентов жесткости монослоя и равен $\pi/4$.

Выражая коэффициенты V_i [(см. 2.35)] по формулам (1.58) через коэффициенты жесткости монослоя g_{ij}^0 , получим

$$\cos 2\varphi = \frac{g_{11}^0 + 2g_{12}^0 + g_{22}^0}{g_{11}^0 - g_{22}^0} \frac{1 - k}{1 + k}.$$

Если пренебречь несущей способностью монослоя при сдвиге и растяжении поперек волокон ($g_{12}^0 = g_{22}^0 = 0$), получим

$$\cos 2\varphi = \frac{1 - k}{1 + k}. \quad (2.36)$$

Последнее упрощение обычно принимается для сетевого анализа, широко используемого в проектировании конструкций [37]. Выражение (2.36), записанное для системы перекрестных нитей, делает более «прозрачным» и сам термин равновесная структура: только при углах укладки нитей, удовлетворяющих формуле (2.36), нити находятся в равновесии. В иных случаях при заданных нагрузках ($\sigma_y = k\sigma_x$) система нитей превращается в механизм.

Проведя преобразование, запишем (2.36) в иной, чаще используемой форме:

$$k = \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (2.36A)$$

Вернемся к механической модели перекрестно армированного материала (см. § 2.5) — ромбу с жесткими, шарнирно соединенными ребрами, заполненному связующим. Нетрудно установить, что пло-

щадь ромба уменьшается при деформировании, если выполнены следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} &\text{при } 90^\circ > \varphi \geq 45^\circ \\ &k > \operatorname{tg}^2 \varphi \text{ при } \sigma_x > 0; \\ &k < \operatorname{tg}^2 \varphi \text{ при } \sigma_x < 0; \\ &\text{при } 45^\circ \geq \varphi > 0^\circ \\ &k < \operatorname{tg}^2 \varphi \text{ при } \sigma_x > 0; \\ &k > \operatorname{tg}^2 \varphi \text{ при } \sigma_x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Неравенства (2.37) могут служить ориентиром при прогнозировании поведения перекрестно армированных материалов в условиях плоского напряженного состояния. При выполнении неравенств (2.37) после начала трещинообразования в связующем трещины закрыты и несущая способность системы сохраняется.

Для соотношения напряжений $\sigma_y/\sigma_x = 2$ равновесный угол близок к 55° [формула (2.36) дает значение $\varphi = 54,74^\circ$]. В соответствии с неравенствами (2.37) углы армирования, при которых нарушение монолитности связующего не приводит к потере несущей способности, заключены в диапазоне $45^\circ \leq \varphi < 55^\circ$.

Количественные данные о поведении перекрестно армированных материалов при двухосном растяжении получены при проведении вычислений в соответствии с алгоритмом, изложенным в § 2.4, и представлены на рис. 2.25. Кружками на рис. 2.25 отмечены результаты эксперимента, полученные при соотношении напряжений $\sigma_y/\sigma_x = 1/2$. В последнем случае действительный угол армирования φ на рис. 2.25 заменен дополнительным углом $90^\circ - \varphi$. Максимальные для этого вида испытаний разрушающие напряжения имеют место при $\varphi = 55^\circ$. Теоретическая и экспериментальная диаграммы деформирования для материала с такой структурой (рис. 2.26, а) имеют два характерных участка (1 и 2) и хорошо согласуются между собой. После нарушения сплошности связующего (в расчете $\sigma_2 = F_{+2}$, $E_2 = 0$) диаграммы деформирования $\epsilon_x(\sigma_y)$ и $\epsilon_y(\sigma_y)$ — практически параллельные прямые, что свидетельствует об отсутствии приращений сдвиговых деформаций $\Delta\gamma_{12}^{(i)}$ в монослоях, пропорциональных изменению разности $\epsilon_y - \epsilon_x$. Разрушение сопровождается разрывом

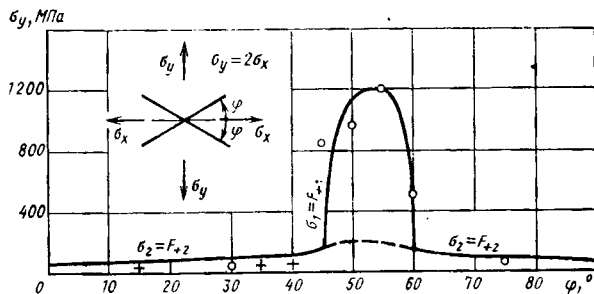


Рис. 2.25.

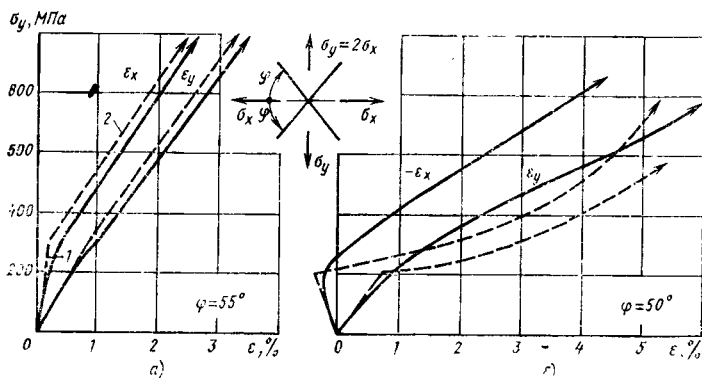


Рис 2.26.

волокон, причина разрушения в расчетах — выполнение условия $\sigma_1 = F_{+1}$.

Значительно более сложный и качественно иной вид имеют диаграммы деформирования стеклопластика с углами армирования $\varphi = \pm 50^\circ$, представленные на рис. 2.26, б (хотя угол армирования в сравнении с предыдущим примером изменился лишь на 5°). До уровня напряжений $\sigma_y \approx 200$ МПа деформирование идет в целом аналогично деформированной структуре $\varphi = \pm 55^\circ$, но после начала процесса разрушения связующего оно резко изменяется. Осевая (для образца) деформация ϵ_x начинает уменьшаться, а затем меняет знак. Причиной столь резких изменений в поведении материала оказывается достижение предельных напряжений $\sigma_2 = F_{+2}$. Сразу после начала трещинообразования в связующем происходит разгрузка по напряжениям σ_2 , и разгрузочный модуль $\tilde{E}_2$ равен начальному. В то же время касательный модуль сдвига G_{12} уменьшается до нуля (реализуется четвертое из возможных состояний материала с трещинами, см. табл. 2.1 в § 2.3). Увеличение сдвиговой податливости материала делает возможным приближение углов армирования к равновесной сетевой структуре $\varphi = \pm 55^\circ$. Теоретические кривые на рис. 2.26, б верно описывают характер деформирования материала, но условие мгновенного изменения касательного модуля G_{12} (с начального значения до нуля) оказывается в данном случае излишне сильным.

Заметим, что изменение знака приращений отдельных компонент тензоров деформаций и напряжений (и даже знака самих компонент) при непрерывном возрастании нагрузки является характерным для многих случаев. При изменении матрицы-столбца средних напряжений $\{\sigma_{xy}\}$ в соответствии с правилами простого нагружения, когда ее компоненты изменяются пропорционально некоторому параметру, монослои, составляющие композит, могут находиться в условиях сложного нагружения. Соотношения компонент матриц напряжений и деформаций монослоев $\{\sigma_{12}^{(i)}\}$, $\{\epsilon_{12}^{(i)}\}$ при этом могут изменяться в широких пределах.

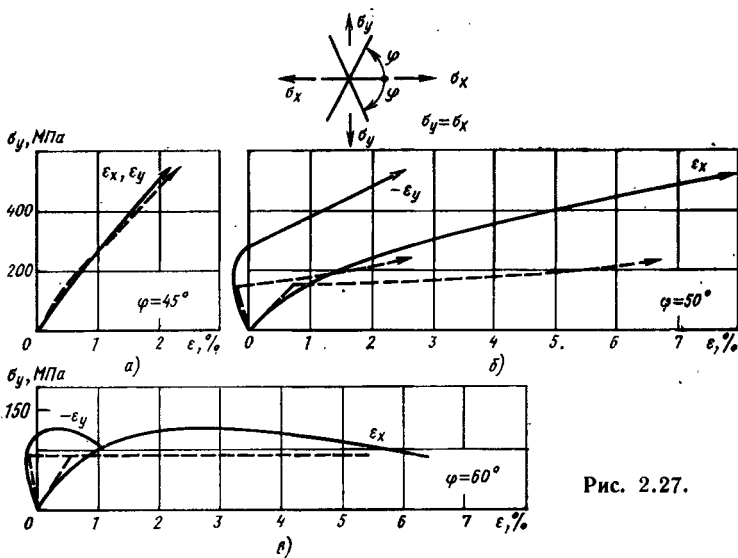


Рис. 2.27.

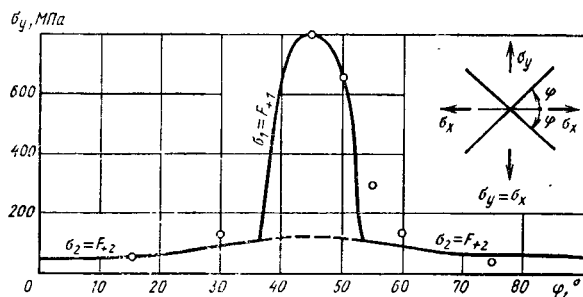
Нарушение сплошности связующего в диапазонах углов армирования $0^\circ < \varphi < 45^\circ$ и $60^\circ < \varphi < 90^\circ$ приводит к исчерпанию несущей способности материала. Дальнейшее деформирование неустойчиво, увеличение деформаций происходит при постоянной нагрузке, что отмечено и в экспериментах [25].

Для соотношения напряжений $\sigma_y/\sigma_x = 1$ равновесный угол армирования $\varphi = \pm 45^\circ$ [см. (2.35)]. Диаграммы деформирования для этого случая нагружения приведены на рис. 2.27, а. Диаграммы $\epsilon_x(\sigma_y)$ и $\epsilon_y(\sigma_y)$ одинаковы. Нарушение сплошности связующего (в расчете $\sigma_2 = F_{+2}$) вызывает лишь незначительное изменение касательного модуля на теоретической диаграмме деформирования, близкой к экспериментальной. Разрушение материала в эксперименте, сопровождаемое разрывом волокон, происходит при $\sigma_y = \sigma_x \approx 800$ МПа.

Отход от равновесной структуры резко изменяет характер диаграмм деформирования. При $\varphi = \pm 50^\circ$ (рис. 2.27, б) диаграммы существенно нелинейны. После первого разрушения монослоя окружающие деформации меняют знак на обратный. Теоретические диаграммы имеют те же характерные особенности, что и экспериментальные, но условие мгновенного изменения касательного модуля E_2 при потере монолитности связующего здесь оказывается излишне сильным. Разрушение материала в эксперименте сопровождается разрывом волокон (в расчетах $\sigma_1 = F_{+1}$) и происходит, согласно теоретическим и экспериментальным данным при $\sigma_y = \sigma_x \approx 680$ МПа (рис. 2.28).

Материалы с углами армирования вне диапазона $37^\circ < \varphi < 53^\circ$ теряют несущую способность без разрушения волокон. Пример такой диаграммы дан на рис. 2.27, в для материала со структурой армирования $\varphi = \pm 60^\circ$ (диаграммы для образца со структурой армирования $\varphi = \pm 30^\circ$ после перестановки индексов x, y совершенно

Рис. 2.28.



идентичны). Экспериментальные кривые деформирования имеют ярко выраженный максимум. Теоретическое значение предельной нагрузки несколько ниже экспериментального. Тем не менее модель верно передает характер деформирования и потери несущей способности (неустойчивость деформирования) материала.

Диаграммы деформирования композита с более сложной структурой армирования $[30^\circ/-30^\circ/90^\circ]$ значительно «спокойней» (рис. 2.29). Это характерно для материалов, армированных по трем направлениям и более. Композит со структурой армирования $[30^\circ/-30^\circ/90^\circ]$ в упругой области является квазиизотропным. Однако при неупругом поведении материала нет полного подобия однотипных диаграмм деформирования, приведенных на рис. 2.29, а, б, в, г. Не наблюдается и полной симметрии линий предельного состояния относительно луча $\sigma_y = \sigma_x$ на рис. 2.19. Теоретические диаграммы деформирования и оценки несущей способности этого композита вполне удовлетворительно совпадают с экспериментальными результатами.

Интересно поведение перекрестно армированных материалов при другом виде плоского напряженного состояния — чистом сдвиге.

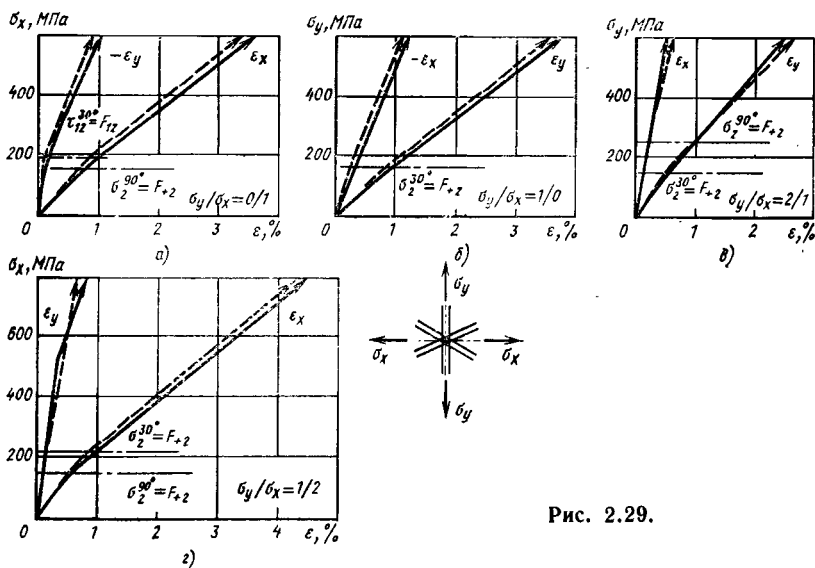


Рис. 2.29.

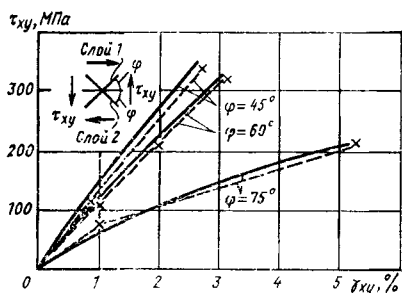


Рис. 2.30.

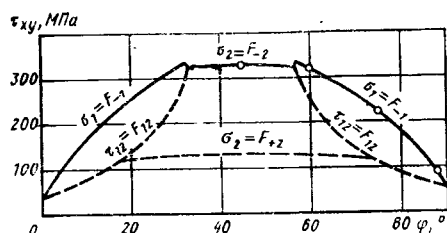


Рис. 2.31.

Вследствие различного поведения монослоев при растяжении и сжатии (в неупругой области) состояния симметрично уложенных слоев перекрестного армированного композита в общем случае различны, а процесс исчерпания несущей способности материала является многофазным.

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих особенности деформирования и разрушения при сдвиге. Экспериментальные данные, используемые ниже, получены при испытаниях стеклопластиковых трубчатых образцов [21]. Однонаправленный стеклопластик имел следующие характеристики (определенные в специальных предварительных экспериментах): $E_1 = 46\,000$ МПа, $E_2 = 18\,000$ МПа, $G_{12} = 4500$ МПа, $\nu_{12} = 0,2$; $F_{+1} = 1800$ МПа, $F_{-1} = 600$ МПа, $F_{+2} = 60$ МПа, $F_{-2} = 160$ МПа, $F_{12} = 45$ МПа.

При кручении образцов со структурой армирования $\varphi = \pm 75^\circ$ при напряжениях $\tau_{xy} = 80$ МПа происходит потеря сплошности слоев, вызванная сдвиговыми напряжениями (в расчете $\tau_{12} = F_{12}$), а при $\tau_{xy} = 207$ МПа разрушается второй слой (рис. 2.30) от сжатия вдоль волокон.

Образцы со структурой армирования $\varphi = \pm 60^\circ$ на первом этапе деформируются линейно упруго. Материал сохраняет свою сплошность до уровня касательных напряжений (в расчете) $\tau_{xy} = 114$ МПа, при котором во втором слое начинается растрескивание связующего, вызванное растяжением слоя поперек волокон. При $\tau_{xy} = 215$ МПа растрескивание связующего начинается и в первом слое, но здесь причина трещинообразования — сдвиговые напряжения $\tau_{12}^{(2)}$. Наконец, при напряжениях $\tau_{xy} = 330$ МПа происходит полное исчерпание несущей способности материала, вызванное сжатием второго слоя вдоль волокон. Все названные характерные точки отмечены крестиками на рис. 2.30.

Отметим, что при испытаниях на кручение образцов со структурой армирования $\varphi = \pm 45^\circ$, обладающих согласно традиционным представлениям максимальной несущей способностью при кручении, не отмечено заметного повышения предельных напряжений по сравнению с материалом со структурой армирования $\varphi = \pm 60^\circ$. Это связано (согласно расчету) с изменением механизма исчерпания несущей способности: у образцов со структурой армирования $\varphi =$

$= \pm 45^\circ$ при напряжениях $\tau_{xy} = 118$ МПа происходит потеря сплошности, вызванная растяжением второго слоя поперек волокон, а затем, при $\tau_{xy} = 340$ МПа, первый слой разрушается от сжатия поперек волокон.

Результирующие линии предельного состояния перекрестно армированных стеклопластиков при кручении представлены на рис. 2.31.

Глава 3

Вариационно-матричный подход к расчету конструкций

Большой интерес к вариационным формулировкам задач деформирования многослойных оболочечных конструкций объясняется в первую очередь тем, что на основе исходных гипотез, применяя формальные математические приемы, можно избежать трудоемкого этапа составления уравнений равновесия статическим методом и приближенно свести трехмерную задачу теории упругости к одномерной или двумерной задаче. При этом соответствующие разрешающие уравнения и граничные условия строго соответствуют исходным допущениям и определяются единственным образом. Кроме того, вариационные формулировки являются основой для эффективных приближенных методов расчета, которые позволяют получить на выбранном классе аппроксимирующих функций наилучшие в энергетическом смысле приближенные решения.

В гл. 3 с единых позиций принципа возможных перемещений рассмотрены формулировки задач статики, устойчивости и динамики. Полученные уравнения в вариациях для упругих консервативных систем являются голономными и представляют условия стационарности соответствующих функционалов, записанных в перемещениях. Вид самих функционалов в большинстве случаев не приводится, поскольку для дальнейшего решения необходимы лишь вариационные формулировки. В общем случае показано, как с использованием этих формулировок удается получить разрешающие дифференциальные уравнения или приближенные решения.

Для одномерных задач показаны этапы вывода вариационно-матричным способом канонических систем дифференциальных уравнений, а также получения с помощью фундаментальных решений матриц жесткости одномерных элементов. Изложены основные положения метода конечных элементов, включая аппроксимацию решений, составление для элемента приведенных матриц жесткости, масс, начальных напряжений. Кратко рассмотрены методы решения задач динамики и нелинейной статики.

Используемая в главе векторно-матричная символика позволяет проследить общие этапы решения широкого круга задач, компактно записать уравнения и значительно облегчить процесс составления программ расчета на ЭВМ. Текст и описание вспомогательных программ расчета приводятся в приложении 2.

С другими вариационными формулировками можно ознакомиться в работах [40, 46].

§ 3.1. Принцип возможных перемещений

Рассмотрим механическую систему, состоящую из произвольного деформируемого тела и приложенных к нему распределенных объемных и поверхностных сил $\{g\} = \{g_1, g_2, g_3\}$ и $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}$. Тело закреплено в пространстве с помощью некоторых связей, исключающих его перемещения как жесткого целого (рис. 3.1). Будем считать, что рассматриваемая система находится в состоянии равновесия. Действительные перемещения, соответствующие переходу точек тела из начального ненагруженного состояния в равновесное обозначим $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}$, действительные напряжения — матрицей-столбцом $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}\}$, компонентами которого являются нормальные и касательные напряжения в декартовой системе координат. Деформированное состояние тела, вызванное действительными перемещениями, опишем матрицей-столбцом $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}\}$, компонентами которого являются относительные удлинения и углы сдвига в декартовой системе координат. Деформации в теле будем считать достаточно малыми, а объем и поверхность тела в деформированном состоянии будем отождествлять с его объемом и поверхностью в начальном недеформированном состоянии.

Наряду с действительными перемещениями мысленно дадим телу возможные перемещения $\delta\{u\} = \{\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3\}$; функции $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3$ можно рассматривать как малые изменения (вариации) действительных перемещений u_1, u_2, u_3 . В объеме тела функции $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3$ непрерывны, имеют непрерывные производные нужного порядка и обращаются в нуль на той части поверхности тела, где соответствующие перемещения запрещены или имеют заданные значения. Возможные перемещения не нарушают внутренних и наружных связей системы, т. е. являются кинематически (или геометрически) допустимыми.

Согласно принципу возможных перемещений сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях тела из равновесного состояния равна

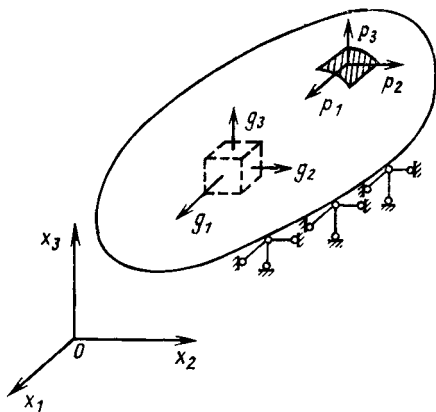


Рис. 3.1.

нулю. Сумма работ всех внешних сил

$$\delta A = \int_V \delta \{u\}^T \{g\} dV + \int_S \delta \{u\}^T \{p\} dS, \quad (3.1)$$

где V и S — соответственно объем и поверхность рассматриваемого тела; T — знак транспонирования. При подсчете суммы работ всех внутренних сил учтем, что деформации $\{\epsilon\}$ для напряжения $\{\sigma\}$ являются обобщенными перемещениями. Поэтому для сообщения телу дополнительных деформаций $\delta \{\epsilon\}$, вызываемых возможными перемещениями $\delta \{u\}$, необходимо затратить работу

$$\delta R = \int_V \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV. \quad (3.2)$$

В соответствии с принципом возможных перемещений запишем $\delta A - \delta R = 0$.

Работа внутренних сил в последнем выражении имеет знак «минус», поскольку на дополнительное деформирование тела нужно затратить работу. Используя (3.1) и (3.2), получим уравнение в вариациях, представляющее математическую формулировку принципа возможных перемещений для деформируемого тела:

$$\int_V (\delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\}) - \delta \{u\}^T \{g\} dV - \int_S \delta \{u\}^T \{p\} dS = 0. \quad (3.3)$$

Это уравнение в вариациях позволяет получить уравнения равновесия элемента рассматриваемого тела и совокупность всех вариантов граничных условий на поверхности тела. Для этого необходимо конкретизировать связь между деформациями $\{\epsilon\}$ и перемещениями $\{u\}$. Тогда условие (3.3) позволяет получить соответствующие уравнения равновесия и граничные условия. Последнее обстоятельство оказывается особенно важным при построении различных вариантов приближенных теорий, основанных на тех или иных кинематических гипотезах (гипотеза плоских сечений, прямой нормали, ломаной нормали и т. д.). Зададим, например, связь деформаций с перемещениями линейными соотношениями

$$\{\epsilon\} = [L] \{u\}, \quad (3.4)$$

где $[L]$ — матрица линейных дифференциальных операторов, имеющая в декартовой системе координат вид

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (3.5)$$

Тогда связь дополнительных деформаций $\delta \{\epsilon\}$ с возможными перемещениями $\delta \{u\}$ определится той же самой матрицей $[L]$:

$$\delta \{\epsilon\} = [L] \delta \{u\}. \quad (3.6)$$

Воспользовавшись (3.6), выразим в уравнении (3.3) величины $\delta \{e\}$ через возможные перемещения. Получим

$$\int_V (([L] \delta \{u\})^T \{\sigma\} - \delta \{u\}^T \{g\}) dV - \int_S \delta \{u\}^T \{p\} dS = 0. \quad (3.7)$$

Для того чтобы избавиться от дифференциальных операторов матрицы $[L]$, действующих на вариации перемещений $\delta \{u\}$, первое слагаемое в уравнении (3.7) проинтегрируем по частям:

$$\int_V \delta \{u\}^T ([L^*] \{\sigma\} - \{g\}) dV + \int_S \delta \{u\}^T ([L^v] \{\sigma\} - \{p\}) dS = 0. \quad (3.8)$$

Здесь $[L^*] = -[L]^T$, а матрица направляющих косинусов $[L^v]$ выглядит так:

$$[L^v] = \begin{bmatrix} l_{v1} & 0 & 0 & 0 & l_{v3} & l_{v2} \\ 0 & l_{v2} & 0 & l_{v3} & 0 & l_{v1} \\ 0 & 0 & l_{v3} & l_{v2} & l_{v1} & 0 \end{bmatrix},$$

где l_{v1} , l_{v2} , l_{v3} — косинусы углов между внешней нормалью к поверхности и осями x_1 , x_2 , x_3 .

Условие (3.8) должно удовлетворяться при любых возможных перемещениях $\delta \{u\}$; поэтому внутри объема рассматриваемого тела должно выполняться уравнение

$$[L^*] \{\sigma\} - \{g\} = 0, \quad (3.9)$$

а в каждой точке поверхности должно быть задано

$$\text{либо } \delta u_i = 0 \text{ (т. е. } u_i = \bar{u}_i), \text{ либо } f_i = 0 \text{ (} i = 1, 2, 3), \quad (3.10)$$

где $\bar{u}_i$ — заданное значение перемещения u_i ; f_i — i -я компонента матрицы-столбца $\{f\} = [L^v] \{\sigma\} - \{p\}$.

В общем случае выражение (3.10) представляет собой граничные условия смешанного типа. На той части поверхности, где заданы все перемещения, граничные условия будут чисто геометрическими: $\delta \{u\} = 0$, т. е. $\{u\} = \{\bar{u}\}$. На части поверхности, полностью свободной от закреплений, граничные условия будут чисто силовыми:

$$[L^v] \{\sigma\} - \{p\} = 0. \quad (3.11)$$

Матричное уравнение (3.9) дает не что иное, как дифференциальные уравнения равновесия элементарного параллелепипеда, вырезанного из тела, а (3.11) — уравнения равновесия элементарной пирамиды, боковые грани которой параллельны координатным плоскостям, а основанием является площадка поверхности тела с заданным направлением внешней нормали v . Действительно, выполнив матричное умножение в выражениях (3.9) и (3.11), придем к обычным уравнениям равновесия и силовым граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \tau_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3} \tau_{13} + g_1 &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \tau_{12} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \tau_{23} + g_2 &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \tau_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2} \tau_{23} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_3 + g_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$l_{v1}\sigma_1 + l_{v2}\tau_{12} + l_{v3}\tau_{13} = p_1;$$

$$l_{v1}\tau_{12} + l_{v2}\sigma_2 + l_{v3}\tau_{23} = p_2;$$

$$l_{v1}\tau_{13} + l_{v2}\tau_{23} + l_{v3}\sigma_3 = p_3.$$

Принцип возможных перемещений является наиболее общим принципом механики. Он справедлив при любых реологических свойствах тела, т. е. при любых зависимостях между деформациями и напряжениями в материале тела; его можно использовать и в случае неконсервативных внешних сил. Основные соотношения этого параграфа получены при линейных кинематических связях деформаций с перемещениями, задаваемых матрицей (3.5), но сам принцип возможных перемещений остается в силе и для более общего вида таких связей, в частности, при нелинейных кинематических зависимостях (в этом случае нелинейные слагаемые появятся в уравнениях равновесия и граничных условиях).

Принцип возможных перемещений носит статико-геометрический характер, и матрица дифференциальных операторов $[L^*]$ в уравнениях равновесия (3.9) полностью определяется исходными кинематическими связями, задаваемыми соотношениями типа (3.4). Поэтому использование принципа возможных перемещений оказывается весьма удобным при построении методов расчета многослойных конструкций, когда в качестве исходных берутся достаточно сложные кинематические соотношения по толщине пакета.

§ 3.2. Функционал Лагранжа и уравнения равновесия упругого тела

Задача определения напряженно-деформированного состояния твердого тела в общем случае внутренне статически неопределима, и для ее решения необходимо дополнить уравнения равновесия конкретными зависимостями между напряжениями и деформациями. Рассмотрим нелинейно упругое тело, у которого напряжения являются однозначными функциями деформаций, не зависящими от истории деформирования. Частный случай такого тела (линейно упругого) был подробно описан в гл. 1.

Для упругого тела можно ввести понятие удельной потенциальной энергии деформации U_0 , являющейся функцией деформаций и обладающей тем свойством, что

$$\{\sigma\} = \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon} \right\}, \quad (3.12)$$

где

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon} \right\} = \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1}, \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_2}, \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_3}, \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{23}}, \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{13}}, \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{12}} \right\}.$$

Уравнение в вариациях (3.3) и вытекающие из него уравнения равновесия и граничные условия справедливы при любом характере

внешних сил. Ограничимся случаем консервативных внешних сил, действующих на упругое тело.

Консервативными будем считать такие силы, работа которых на любом допустимом перемещении тела, к которому они приложены, не зависит от пути деформирования, а определяется только начальной и конечной конфигурацией тела. Примером консервативных сил служат «мертвые» объемные и поверхностные силы, т. е. силы, не изменяющиеся по величине и направлению при любых деформациях тела.

Механическую систему, состоящую из упругого тела и действующих на него объемных и поверхностных консервативных сил, называют консервативной. Для такой системы можно ввести понятие полной потенциальной энергии (функционала Лагранжа)

$$\mathcal{E} = U + \Pi, \quad (3.13)$$

где U — потенциальная энергия деформации тела; Π — потенциал внешних сил. Значение U подсчитывается путем интегрирования по объему тела удельной потенциальной энергии деформации:

$$U = \int_V U_0 dV. \quad (3.14)$$

Для подсчета потенциала внешних сил необходимо конкретизировать характер зависимости внешних сил от перемещений системы. Например, при «мертвых» объемных и поверхностных силах

$$\Pi = - \int_V \{u\}^T \{g\} dV - \int_S \{u\}^T \{p\} dS. \quad (3.15)$$

Знаки «—» перед интегралами соответствуют случаю, когда объемные $\{g\}$ и поверхностные $\{p\}$ силы направлены так же, как и перемещения $\{u\}$; тогда с ростом перемещений потенциал внешних сил уменьшается.

В положении равновесия системы функционал Лагранжа принимает стационарное значение. В этом нетрудно убедиться, если подсчитать первую вариацию функционала Лагранжа $\delta\mathcal{E} = \delta U + \delta\Pi$.

Учитывая (3.12), формально запишем

$$\delta U = \int_V \delta \{e\}^T \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial e} \right\} dV = \int_V \delta \{e\}^T \{\sigma\} dV.$$

Первая вариация потенциала внешних сил Π (3.15) равна

$$\delta\Pi = - \int_V \delta \{u\}^T \{g\} dV - \int_S \delta \{u\}^T \{p\} dS.$$

Сравнивая два последних выражения с равенством (3.3), приходим к вариационному уравнению Лагранжа

$$\delta\mathcal{E} = \delta U + \delta\Pi = 0, \quad (3.16)$$

которое означает, что в положении равновесия функционал Лагранжа (3.13) принимает стационарное значение. Справедливо,

естественно, и обратное утверждение: если значение функционала Лагранжа стационарно, то система находится в положении равновесия.

Существует также теорема [3], которую часто называют принципом минимума полной потенциальной энергии или теоремой Лагранжа: в состоянии равновесия консервативной системы ее полная потенциальная энергия принимает стационарное значение, причем в устойчивом состоянии равновесия это стационарное значение — минимум. Подчеркнем, что принцип минимума полной потенциальной энергии охватывает все консервативные системы — как линейные, так и нелинейные. Нелинейность консервативной системы может быть обусловлена двумя причинами: геометрическими и физическими. Геометрические нелинейности обычно связаны с большими перемещениями гибких тонкостенных систем типа стержней, мембран или оболочек. Физическая нелинейность — это нелинейность зависимости между напряжениями и деформациями в упругом твердом теле.

В классической линейной теории упругости принята следующая постановка задачи: уравнения равновесия формулируются для недеформированного состояния, компоненты деформаций связаны с перемещениями линейными зависимостями, а материал подчиняется закону Гука, т. е. напряжения и деформации связаны между собой линейными зависимостями. В этом случае задача определения напряженно-деформированного состояния сводится к линейным дифференциальным уравнениям, всегда имеющим единственное решение. Нетрудно показать, что напряженно-деформированное состояние, соответствующее этому единственному решению, является устойчивым.

Для линейного упругого тела, как это следует из (3.12), удельная потенциальная энергия U_0 должна быть квадратичной функцией деформаций. В общем случае можно записать

$$U_0 = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [G] \{\epsilon\}, \quad (3.17)$$

где $[G]$ — симметричная матрица коэффициентов упругости. Заметим, что в такой форме с симметричной матрицей $[G]$ можно записать любой однородный квадратичный полином аргумента $\{\epsilon\}$. Поскольку для деформирования всякого реального тела необходимо затратить энергию, то квадратичная форма (3.17) является положительно определенной, т. е. $U_0 > 0$ при любых, не равных нулю, значениях $\{\epsilon\}$.

Из выражения (3.17) и условия (3.12) следует матричная запись закона Гука:

$$\{\sigma\} = [G] \{\epsilon\}, \quad (3.18)$$

а формула (3.14) в этом случае принимает вид

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [G] \{\epsilon\} dV \quad (3.19)$$

или

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV.$$

Связь между деформациями и перемещениями в классической линейной теории упругости задается соотношениями (3.4). Как уже отмечалось, в положении равновесия $\delta\mathcal{E} = 0$, т. е. полная потенциальная энергия принимает стационарное значение. Для выяснения характера соответствующей стационарной точки необходимо исследовать вторую вариацию полной потенциальной энергии $\delta^2\mathcal{E}$. Учитывая, что в соответствии с (3.15) вторая вариация $\delta^2\Pi = 0$, находим $\delta^2\mathcal{E} = \delta^2U = \int_V \delta\{\epsilon\}^T [G] \delta\{\epsilon\} dV$.

Другими словами, в линейных задачах теории упругости вторая вариация полной потенциальной энергии выражается той же положительно определенной квадратичной формой (3.17), что и удельная потенциальная энергия деформации. Следовательно, $\delta^2\mathcal{E} > 0$, и всякое положение равновесия упругой линейной системы устойчиво, поскольку полная потенциальная энергия имеет минимальное значение.

Условие стационарности функционала полной потенциальной энергии (3.16) для линейно упругого тела позволяет достаточно просто получить разрешающие дифференциальные уравнения и граничные условия, записанные через перемещения. Для этого в функционале потенциальной энергии деформации (3.19) следует заменить деформации $\{\epsilon\}$ их кинематическими выражениями. В случае малых перемещений эти выражения имеют вид (3.4). Тогда функционал Лагранжа, выраженный через перемещения, определится как

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V (([L]\{u\})^T [G] [L]\{u\} - \{u\}^T \{g\}) dV - \int_S \{u\}^T \{p\} dS,$$

а условия стационарности (3.16) будут иметь вид вариационного уравнения

$$\delta\mathcal{E} = \int_V (([L]\delta\{u\})^T [G] [L]\{u\} - \delta\{u\}^T \{g\}) dV - \int_S \delta\{u\}^T \{p\} dS = 0. \quad (3.20)$$

Для получения разрешающих уравнений воспользуемся известным приемом вариационного исчисления. Выполним интегрирование по частям и избавимся в (3.20) от дифференциальных операторов при вариациях перемещений. Тогда

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} = & \int_V \delta\{u\}^T ([L^*] [G] [L]\{u\} - \{g\}) dV + \\ & + \int_S \delta\{u\}^T ([L^*] [G] [L]\{u\} - \{p\}) dS = 0. \end{aligned}$$

Откуда получим уравнения Эйлера для вариационной задачи (3.20):

$$[L^*] [G] [L] \{u\} - \{g\} = 0,$$

и граничные условия для любой точки поверхности рассматриваемого тела:

$$\delta \{u\}^T ([L^*] [G] [L] \{u\} - \{g\}) = 0. \quad (3.21)$$

В общем случае условие (3.21) дает набор граничных условий, аналогичных (3.10): либо $u_i = \bar{u}_i$ (геометрическое условие), либо $f_i = 0$ (силовое условие), где под компонентой f_i понимается дифференциальное соотношение, определяющееся i -й строкой матричного уравнения: $\{f\} = [L^*] [G] [L] \{u\} - \{g\}$. Геометрические граничные условия иногда называют главными, силовые граничные условия — естественными.

С другими вариационными постановками задач для упругих систем можно ознакомиться в работах [40, 46].

§ 3.3. Формулировка задач устойчивости

Известны два эквивалентных варианта формулировки статического критерия устойчивости консервативных систем [3]. В одном из них критическая нагрузка определяется как наименьшее из тех значений нагрузки, при которых изменение полной потенциальной энергии при отклонениях системы от начального состояния равновесия имеет стационарное значение. В этом случае аналитическая формулировка критерия устойчивости выглядит так:

$$\delta (\Delta \mathcal{E}) = 0, \quad (3.22)$$

где изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ подсчитывается с точностью до квадратов перемещений системы, отсчитываемых от того начального состояния равновесия, устойчивость которого исследуется. Условие (3.22) используют как для получения линеаризованных уравнений устойчивости, так и для построения приближенных решений (например, с помощью прямых вариационных методов).

Во втором варианте критическая нагрузка разыскивается как наименьшее из значений нагрузки, при которых у системы существуют состояния равновесия, смежные с тем начальным состоянием, устойчивость которого исследуется. Следуя этому определению, линеаризованные уравнения устойчивости обычно получают непосредственно из условий равновесия системы в отклоненном от начального состояния. Однако часто оказывается удобнее (например, для сложных систем типа многослойных конструкций) линеаризованные уравнения устойчивости получать с помощью принципа возможных перемещений.

Рассмотрим консервативную механическую систему, состоящую из упругого тела и приложенных к нему «мертвых» объемных и поверхностных сил. Пусть начальное равновесное состояние, устойчивость которого исследуется, определяется перемещениями $\{u_0\}$,

деформациями $\{\epsilon_0\}$ и напряжениями $\{\sigma_0\}$. Перемещения системы в состоянии, смежном с начальным, запишем в виде

$$\{u\} = \{u_0\} + \{u_*\}, \quad (3.23)$$

где $\{u_*\}$ — дополнительные перемещения первого порядка малости, отсчитываемые от начального равновесного состояния системы (бифуркационные перемещения).

Деформации, вызываемые перемещениями $\{u\}$, подсчитаем с точностью до величин второго порядка малости и для состояния системы, смежного с начальным, получим $\{\epsilon\} = \{\epsilon_0\} + \{\epsilon_*\} + \{\epsilon_{**}\}$. Здесь деформации первого порядка малости $\{\epsilon_*\}$ выражаются через начальные и дополнительные перемещения по формулам [35]

$$\begin{aligned} \epsilon_i^* &= \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_3^*}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3); \\ \gamma_{ij}^* &= \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_3^*}{\partial x_j} + \\ &+ \frac{\partial u_j^0}{\partial x_j} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_j} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_j} \frac{\partial u_3^*}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j). \end{aligned} \quad (3.24)$$

В матричной записи

$$\{\epsilon_*\} = [\mathcal{R}_0] \{u_*\}, \quad (3.25)$$

где элементы матрицы $[\mathcal{R}_0]$ определяются формулами (3.24). Например,

$$l_{61} = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

В задачах устойчивости силовых конструкций часто используют дополнительное упрощающее допущение: докритическое начальное напряженное состояние системы определяют по уравнениям линейной теории упругости и полностью пренебрегают изменением геометрии тела в начальном состоянии равновесия. Другими словами, используют такую модель: до потери устойчивости тело напряжено, но не деформировано. В этом случае в формулах (3.24) следует отбросить подчеркнутые слагаемые, и тогда матрица $[\mathcal{R}_0]$ (3.25) переходит в матрицу $[L]$, определяемую выражением (3.5).

Деформации второго порядка малости $\{\epsilon_{**}\}$ определяются соотношениями [35]

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{**} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (i = 1, 2, 3), \\ \gamma_{ij}^{**} &= \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3, (i \neq j)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Напряжения в системе для положения равновесия, смежного с начальным, запишем в виде, аналогичном выражению (3.23):

$$\{\sigma\} = \{\sigma_0\} + \{\sigma_*\}, \quad (3.27)$$

где $\{\sigma_*\}$ — дополнительные напряжения первого порядка малости.

Теперь на основе принципа возможных перемещений сформулируем условие равновесия, смежного с начальным состоянием. Для этого в качестве возможных перемещений сообщим системе перемещения $\delta \{u_*\}$. С учетом возможных деформаций

$$\delta \{\epsilon\} = \delta \{\epsilon_*\} + \delta \{\epsilon_{**}\} \quad (3.28)$$

принцип возможных перемещений (3.3) можно записать в виде

$$\int_V ((\delta \{\epsilon_*\} + \delta \{\epsilon_{**}\})^T (\{\sigma_0\} + \{\sigma_*\}) - \delta \{u_*\}^T \{g_0\}) dV - \\ - \int_S \delta \{u_*\}^T \{p_0\} dS = 0.$$

Ограничившись величинами до второго порядка малости включительно и отбросив произведение $\delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_*\}$ как величину высшего порядка малости, запишем *

$$\left\{ \int_V (\delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_0\} - \delta \{u_*\}^T \{g_0\}) dV - \int_S \delta \{u_*\}^T \{p_0\} dS \right\} + \\ + \int_V (\delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} - \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\}) dV = 0.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях $\delta \{u_*\}$, отсчитываемых от начального состояния. Поскольку начальное состояние равновесно, то это выражение равно нулю. Таким образом, условие равновесия состояния, смежного с начальным, принимает вид

$$\int_V (\delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} + \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\}) dV = 0. \quad (3.29)$$

Из этого условия получим линеаризованные уравнения и однородные граничные условия для решения задач устойчивости консервативных систем. Выразив деформации первого порядка малости $\{\epsilon_*\}$ через дополнительные перемещения $\{u_*\}$ по формулам (3.24) и выполнив интегрирование по частям, преобразуем первое слагаемое в условии (3.29) к виду

$$\int_V \delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} dV = \int_V \delta \{u_*\}^T [L_0^*] \{\sigma_*\} dV - \int_S \delta \{u_*\}^T [L_0^v] \{\sigma_*\} dS.$$

Входящие сюда матрицы $[L_0^*]$ и $[L_0^v]$ формулируются следующим образом. Матрица $[L_0^*]$ получается из матрицы линейных дифференциальных операторов $[L_0]$ путем транспонирования, смены знака при дифференциальных операторах $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и их переноса налево через

* По той же причине в выражении (3.27) нет смысла удерживать напряжения второго порядка малости: при подсчете работы внутренних сил на возможных деформациях (3.28) они приведут к слагаемым высшего порядка малости.

множители $\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}$. Например, коэффициенту l_{61} матрицы $[\mathfrak{L}_0]$ будет соответствовать коэффициент l_{16}^* матрицы $[\mathfrak{L}_0^*]$:

$$l_{16}^* = -\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2}.$$

Матрица направляющих косинусов $[\mathfrak{L}_0^v]$ получается из матрицы $[\mathfrak{L}_0]$ путем транспонирования и замены дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial x_i}$ на направляющие косинусы l_{vi} . Например, коэффициент l_{16}^v матрицы $[\mathfrak{L}_0^v]$

$$l_{16}^v = l_{v2} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} l_{v2} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} l_{v1}.$$

Второе слагаемое в условии (3.29) преобразуем следующим образом:

$$\int_V \delta \{e_{**}\}^T \{\sigma_0\} dV = \int_V ([\nabla] \delta \{u_*\})^T [T] [\nabla] \{u_*\} dV, \quad (3.30)$$

где

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} [\nabla_x] \\ [\nabla_x] \\ [\nabla_x] \end{bmatrix}; \quad [T] = \begin{bmatrix} [T_0] \\ [T_0] \\ [T_0] \end{bmatrix}; \quad [T_0] = \begin{bmatrix} \sigma_1^0 & \tau_{12}^0 & \tau_{13}^0 \\ \tau_{12}^0 & \sigma_2^0 & \tau_{23}^0 \\ \tau_{13}^0 & \tau_{23}^0 & \sigma_3^0 \end{bmatrix};$$

$$[\nabla_x] = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right]^T.$$

Выполнив интегрирование по частям и используя соотношения (3.11), представляющие силовые граничные условия для начального состояния, получим

$$\int_V ([\nabla] \delta \{u_*\})^T [T] [\nabla] \{u_*\} dV = \int_V \delta \{u_*\}^T [\nabla^*] [T] [\nabla] \{u_*\} dV +$$

$$+ \int_S \delta \{u_*\}^T [P^v] [\nabla] \{u_*\} dS,$$

где

$$[P^v] = [\nabla^v] [T] = \begin{bmatrix} [p_0]^T & & \\ & [p_0]^T & \\ & & [p_0]^T \end{bmatrix}; \quad [\nabla^v] = \begin{bmatrix} [\nabla_x^v]^T & & \\ & [\nabla_x^v]^T & \\ & & [\nabla_x^v]^T \end{bmatrix};$$

$$[p_0]^T = [p_1^0, p_2^0, p_3^0];$$

$$[\nabla_x^v] = [l_{v1}, l_{v2}, l_{v3}].$$

Таким образом, условие (3.29) приобрело форму

$$\int_V \delta \{u_*\}^T ([\mathfrak{L}_0^*] \{\sigma_*\} + [\nabla^*] [T] [\nabla] \{u_*\}) dV +$$

$$+ \int_S \delta \{u_*\}^T ([\mathfrak{L}_0^v] \{\sigma_*\} + [P^v] [\nabla] \{u_*\}) dS = 0.$$

Отсюда в силу произвольности вариации $\delta \{u_*\}$ следуют однородные линейризованные уравнения

$$[\mathcal{L}_0^*] \{\sigma_*\} + [\nabla^*][T][\nabla] \{u_*\} = 0. \quad (3.31)$$

и однородные граничные условия:

$$\text{либо } \{u_*\} = 0, \quad \text{либо } [\mathcal{L}_0^*] \{\sigma_*\} + [P^*][\nabla] \{u_*\} = 0. \quad (3.32)$$

Для решения конкретных задач устойчивости необходимо знать связь дополнительных напряжений $\{\sigma_*\}$ с дополнительными деформациями $\{\epsilon_*\}$. В случае линейно упругого тела эта связь определяется законом Гука $\{\sigma_*\} = [G] \{\epsilon_*\}$, где $[G]$ — матрица коэффициентов упругости. Для нелинейно упругого тела $\{\sigma_*\} = [G'] \{\epsilon_*\}$, где $[G']$ — матрица коэффициентов упругости в приращениях.

В изложенной формулировке задач устойчивости не учитывается изменение объема и поверхности тела в начальном состоянии равновесия, и поэтому под напряжениями понимаются некоторые условные, а не истинные напряжения. Однако такой подход, предполагающий малость деформаций, вполне оправдан для исследования устойчивости тонкостенных силовых конструкций. Кроме того, действующие на тело силы считаются «мертвыми», т. е. неизменными при переходе системы в состояние, смежное с начальным. Это ограничение принципиально: условие (3.29) и вытекающие из него уравнения (3.31) и граничные условия (3.32) нетрудно обобщить и на тот случай, когда действующие на тело консервативные силы изменяются при сообщении системе перемещений $\{u_*\}$. Тогда для системы в состоянии, смежном с начальным, можно записать $\{g\} = \{g_0\} + \{g_*\}$; $\{p\} = \{p_0\} + \{p_*\}$, где $\{g_*\}$ и $\{p_*\}$ — дополнительные объемные и поверхностные силы, линейно зависящие от перемещений $\{u_*\}$ и их производных (так называемые позиционные силы). Величины $\{g_*\}$ и $\{p_*\}$ следует учитывать при подсчете работы внешних сил на возможных перемещениях $\delta \{u_*\}$. В результате такого учета вместо условия (3.29) получим

$$\begin{aligned} \int_V (\delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} + \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} - \delta \{u_*\}^T \{g_*\}) dV - \\ - \int_S \delta \{u_*\}^T \{p_*\} dS = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

а в уравнениях (3.31) и (3.32) появятся дополнительные слагаемые соответственно $\{g_*\}$ и $\{p_*\}$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_0^*] \{\sigma_*\} + [\nabla^*][T][\nabla] \{u_*\} - \{g_*\} &= 0; \\ [\mathcal{L}_0^*] \{\sigma_*\} + [P^*][\nabla] \{u_*\} - \{p_*\} &= 0. \end{aligned}$$

Кинематические граничные условия остаются такими же, как и для (3.32).

§ 3.4. Формулировка задач динамики

Согласно принципу Даламбера введем в систему фиктивные инерционные силы и рассмотрим равновесное положение системы. Для получения разрешающих уравнений и вариационных формули-

ровок снова обратимся к принципу возможных перемещений, который с учетом инерционных сил запишется в виде (без учета демпфирующих сил)

$$\int_V (\delta \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} - \delta \{ u \}^T \{ g \} + \delta \{ u \}^T \rho \{ \ddot{u} \}) dV - \int_S \delta \{ u \}^T \{ p \} dS = 0, \quad (3.34)$$

где $\{ \ddot{u} \} = \{ \ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \ddot{u}_3 \}$ — вектор ускорений; ρ — плотность материала. Считая перемещения малыми, воспользуемся связью возможных деформаций $\delta \{ \epsilon \}$ с возможными перемещениями $\delta \{ u \}$ в форме $\delta \{ \epsilon \} = [L] \delta \{ u \}$. В этом случае после стандартных операций интегрирования по частям выражение (3.34) позволяет получить уравнения движения

$$[L^*] \{ \sigma \} - \{ g \} + \rho \{ \ddot{u} \} = 0, \quad (3.35)$$

а также геометрические и силовые граничные условия на поверхности S для любого момента времени τ :

$$\text{либо } \{ u \} = \{ \bar{u} \}, \quad \text{либо } [L^v] \{ \sigma \} - \{ p \} = 0. \quad (3.36)$$

Для линейно упругого тела уравнения движения (3.35) и силовые граничные условия (3.36) можно записать через перемещения. Для этого необходимо воспользоваться законом Гука (3.18) и связью деформаций с перемещениями (3.4). После подстановки этих выражений в (3.35), получим

$$[L^*] [G] [L] \{ u \} - \{ g \} + \rho \{ \ddot{u} \} = 0. \quad (3.37)$$

Для интегрирования уравнений движения (3.37) кроме граничных условий (3.36) необходимо задавать и начальные условия, которые представляют распределения перемещений и скоростей в начальный момент времени $\tau = \tau_0$:

$$\{ u(\tau_0) \} = \{ \bar{u} \}, \quad \{ \dot{u}(\tau_0) \} = \{ \dot{\bar{u}} \}. \quad (3.38)$$

При решении задач динамики бывает необходимо в ряде случаев оценить влияние предварительного нагружения конструкции на частоты и формы собственных колебаний или исследовать устойчивость неконсервативных систем с использованием динамического подхода. Для таких задач вначале решается задача статики и определяется начальное напряженно-деформированное состояние системы (если это необходимо). Далее рассматривается движение системы в окрестности начального состояния. Вариационную формулировку задачи можно получить, если повторить выкладки § 3.3 с учетом инерционных сил. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \int_V (\delta \{ \epsilon_* \}^T \{ \sigma_* \} + \delta \{ \epsilon_{**} \}^T \{ \sigma_0 \} + \delta \{ u_* \}^T (\rho \{ \ddot{u}_* \} - \{ g_* \})) dV - \\ - \int_S \delta \{ u_* \}^T \{ p_* \} dS = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Для случая «мертвых» нагрузок в (3.39) следует принять $\{g_*\} = 0$, $\{p_*\} = 0$:

$$\int_V (\delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} + \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} + \delta \{u_*\}_I^T \rho \{\ddot{u}_*\}) dV = 0. \quad (3.40)$$

При исследовании гармонических процессов, считая, что $\{\ddot{u}_*\} = -\omega^2 \{u_*\}$ (ω — круговая частота), получим

$$\int_V \delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} + \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} - \rho \omega^2 \{u_*\}^T \{u_*\} dV = 0. \quad (3.41)$$

Выражение (3.41) при $\omega = 0$ переходит в вариационную формулировку задачи устойчивости. В случае отсутствия начальных напряжений выражение (3.41) позволяет сформулировать задачу о собственных колебаниях, а при постоянных начальных напряжениях дает возможность исследовать влияние предварительного нагружения на частоту колебаний системы.

§ 3.5. Получение разрешающих уравнений для одномерных задач

Одномерные и квазиодномерные задачи механики описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. К одномерным можно отнести задачи о деформировании стержней, балок, а также круглых пластин и оболочек вращения при осесимметричном нагружении. В ряде случаев для трехмерных и двумерных задач теории упругости можно применить метод разделения переменных и решать задачу в рядах Фурье или методом Канторовича. Задачи, для которых тем или иным способом возможно приближенно перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным уравнениям, называются квазиодномерными. Для расчетов на ЭВМ наиболее удобной формой представления разрешающих дифференциальных уравнений является система дифференциальных уравнений первого порядка, или каноническая система. Для таких систем разработаны стандартные программы интегрирования, а также различные вычислительные приемы, обеспечивающие достаточную точность решения краевых задач [20, 33].

Ниже рассмотрим вариационно-матричный способ [4, 38, 39] получения систем дифференциальных уравнений первого порядка для одномерных и квазиодномерных задач статики, устойчивости и колебаний. При выводах будем пользоваться векторно-матричной символикой, которая позволяет формально описать модель деформирования упругой системы, компактно выполнить необходимые преобразования и составить программы для ЭВМ.

В общем виде систему разрешающих дифференциальных уравнений первого порядка можно представить в виде

$$\frac{d}{ds} \{Z\} = [A] \{Z\} + \{H\}, \quad (3.42)$$

где $\{Z\} = \{\{X\}, \{\lambda\}\}$ — вектор состояния, с помощью которого в сечении одномерной системы определяются все неизвестные обоб-

щенные кинематические $\{X\}$ и силовые $\{\lambda\}$ факторы; $\{H\}$ — вектор свободных членов; s — координата одномерной системы, для определенности положим, что $s = x_1$. Выбранные в сечении одномерной системы компоненты векторов обобщенных перемещений $\{X\}$ должны быть достаточны для обеспечения необходимой гладкости геометрической стыковки отдельных сечений. Через компоненты вектора $\{X\}$ для одномерной задачи записываются главные (геометрические) граничные условия.

Распределения перемещений и деформаций по сечению устанавливаются согласно исходным гипотезам деформирования и в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\{u(x_1, x_2, x_3)\} = [F_1(x_2, x_3)]\{X(s)\} + [F_2(x_2, x_3)]\{Y(s)\}, \quad (3.43)$$

$$\{\epsilon(x_1, x_2, x_3)\} = [L_1(x_2, x_3)]\{X(s)\} + [L_2(x_2, x_3)]\{Y(s)\}, \quad (3.44)$$

где $s = x_1$; $\{Y\}$ — вектор-столбец обобщенных производных, коэффициентами которого являются первые производные по s от компонент вектора обобщенных перемещений $\{X\}$ или их комбинации с перемещениями, необходимые для записи распределения перемещений и деформаций; $[F_1]$, $[F_2]$ и $[L_1]$, $[L_2]$ — матрицы, которые содержат заданные функции аргументов x_2, x_3 , аппроксимирующие решение в сечении.

Характерной особенностью записи выражений (3.43), (3.44) является то, что аппроксимирующие матрицы не содержат в своих коэффициентах дифференциальных операторов d/ds , поскольку все необходимые первые производные присутствуют в компонентах вектора $\{Y\}$. По этой же причине между векторами $\{X\}$ и $\{Y\}$ можно установить дифференциальную связь, которую в общем случае удобно представить в виде

$$\frac{d}{ds}\{X\} - [C_1]\{X\} - [C_2]\{Y\} = 0. \quad (3.45)$$

Дифференциальное уравнение связи (3.45) учитывается в качестве дополнительного условия при выводе разрешающих уравнений.

Воспользуемся принципом возможных перемещений. Для одномерной системы запишем его в следующей форме:

$$\int_{s_0}^{s_h} \int_F (\delta\{\epsilon\}^T \{\sigma\} - \delta\{u\}^T \{g\}) dx_3 dx_2 ds - \delta\{X\}^T \{\bar{\lambda}\} \Big|_{s_0}^{s_h} = 0, \quad (3.46)$$

где F — площадь поперечного сечения; s_0, s_h — начальная и конечная координаты одномерной системы; $\{\bar{\lambda}\}|_{s_0}, \{\bar{\lambda}\}|_{s_h}$ — внешние силовые факторы, приложенные к системе при $s = s_0$ и $s = s_h$.

Поскольку дифференциальное уравнение (3.45), устанавливающее связь между обобщенными перемещениями $\{X\}$, их производными $\frac{d}{ds}\{X\}$ и вектором $\{Y\}$, должно выполняться также и для

возможных перемещений, то оказывается справедливым выражение

$$\int_{s_0}^{s_h} \left(\frac{d}{ds} \delta \{X\} - [C_1] \delta \{X\} - [C_2] \delta \{Y\} \right)^T \{\lambda\} ds = 0 \quad (3.47)$$

для произвольных множителей $\{\lambda\}$.

Объединим выражения (3.46), (3.47) и заменим вариации векторов перемещений $\delta \{u\}$ и деформаций $\delta \{e\}$ согласно (3.43), (3.44) выражениями

$$\delta \{u\} = [F_1] \delta \{X\} + [F_2] \delta \{Y\};$$

$$\delta \{e\} = [L_1] \delta \{X\} + [L_2] \delta \{Y\}.$$

После этого получим окончательную формулировку задачи в вариациях:

$$\begin{aligned} & \int_{s_0}^{s_h} \left(\int_F (([L_1] \delta \{X\} + [L_2] \delta \{Y\})^T \{\sigma\} - \right. \\ & \quad \left. - ([F_1] \delta \{X\} + [F_2] \delta \{Y\})^T \{g\}) dx_3 dx_2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{d}{ds} \delta \{X\} - [C_1] \delta \{X\} - [C_2] \delta \{Y\} \right)^T \{\lambda\} \right) ds - \\ & \quad \left. - \delta \{X\}^T \{\bar{\lambda}\} \right|_{s_0}^{s_h} = 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Выполнив интегрирование по частям и избавившись в (3.48) от производных при вариациях $\delta \{X\}$, будем иметь

$$\int_{s_0}^{s_h} (\delta \{X\}^T \{\Psi_1\} + \delta \{Y\}^T \{\Psi_2\}) ds + \delta \{X\}^T \{\Psi_3\} \Big|_{s_0}^{s_h} = 0, \quad (3.49)$$

где векторами $\{\Psi_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) обозначены

$$\begin{aligned} \{\Psi_1\} &= \int_F ([L_1]^T \{\sigma\} - [F_1]^T \{g\}) dx_3 dx_2 - [C_1]^T \{\lambda\} - \frac{d}{ds} \{\lambda\}; \\ \{\Psi_2\} &= \int_F ([L_2]^T \{\sigma\} - [F_2]^T \{g\}) dx_3 dx_2 - [C_2]^T \{\lambda\}; \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\{\Psi_3\} = (\{\lambda\} - \{\bar{\lambda}\}) \Big|_{s_0}^{s_h}.$$

По физическому смыслу компоненты вектора неопределенных множителей $\{\lambda\}$ соответствуют обобщенным усилиям в сечении. Поскольку компоненты векторов $\delta \{X\}$, $\delta \{Y\}$ — произвольные допустимые функции, то для равновесного состояния согласно (3.49) должны выполняться условия:

$$\{\Psi_1\} = 0; \quad \{\Psi_2\} = 0. \quad (3.51)$$

При заданных силовых граничных условиях на краях одномерной системы при $s = s_0$, $s = s_h$ необходимо, чтобы

$$\{\Psi_3\}|_{s_0} = 0; \quad \{\Psi_3\}|_{s_h} = 0. \quad (3.52)$$

В случае задания геометрических граничных условий на краях известными считаются обобщенные перемещения. Эти условия можно записать в следующем виде:

$$\{\Psi_4\}|_{s_0} = 0, \quad \{\Psi_4\}|_{s_h} = 0, \quad (3.53)$$

где $\{\Psi_4\} = \{\bar{X}\} - \{X\}$.

В случае смешанных граничных условий задаются либо компоненты векторов $\{\Psi_3\}$, либо компоненты $\{\Psi_4\}$.

Рассмотрим линейно упругую одномерную систему. Соотношения упругости записываются в виде закона Гука (3.18) или с учетом (3.44) в виде

$$\{\sigma\} = [G] ([L_1] \{X\} + [L_2] \{Y\}). \quad (3.54)$$

Приравняв нулю вектор-функции $\{\Psi_1\}$, $\{\Psi_2\}$ [(см. 3.50)], тогда с учетом (3.54) получим одно дифференциальное и одно алгебраическое векторные уравнения:

$$[S_{11}] \{X\} + [S_{12}] \{Y\} - \{N_1\} - [C_1]^T \{\lambda\} - \frac{d}{ds} \{\lambda\} = 0, \quad (3.55)$$

$$[S_{21}] \{X\} + [S_{22}] \{Y\} - \{N_2\} - [C_2]^T \{\lambda\} = 0, \quad (3.56)$$

где

$$[S_{ij}] = \int_F [L_i]^T [G] [L_j] dx_2 dx_3 \quad (i, j = 1, 2), \quad (3.57)$$

$$\{N_i\} = \int_F [F_i]^T \{g\} dx_2 dx_3 \quad (i = 1, 2). \quad (3.58)$$

Здесь матрицы $[F_1]$, $[F_2]$ и $[L_1]$, $[L_2]$ задаются исходными аппроксимациями перемещений и деформаций (3.43) и (3.44). Алгебраическое уравнение (3.56) позволяет выразить вектор $\{Y\}$ через векторы обобщенных перемещений $\{X\}$ и силовых факторов $\{\lambda\}$:

$$\{Y\} = [S_{22}]^{-1} (\{N_2\} + [C_2]^T \{\lambda\} - [S_{21}] \{X\}). \quad (3.59)$$

Воспользуясь (3.59), исключим $\{Y\}$ из дифференциальных уравнений (3.45), (3.55). Тогда получим искомую каноническую систему (3.42), которую представим в блочном виде

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} X \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.60)$$

где

$$[A_{11}] = [C_1] - [b] [S_{21}]; \quad [A_{12}] = [b] [C_2]^T;$$

$$[A_{21}] = [S_{11}] - [d] [S_{21}]; \quad [A_{22}] = -[C_1]^T + [d] [C_2]^T = -[A_{11}]^T; \quad (3.61)$$

$$\{H_1\} = [b] \{N_2\}; \quad \{H_2\} = -\{N_1\} + [d] \{N_2\};$$

$$[b] = [C_2] [S_{22}]^{-1}; \quad [d] = [S_{21}]^T [S_{22}]^{-1}.$$

Система дифференциальных уравнений (3.60) в качестве неизвестных функций аргумента s содержит компоненты векторов обобщенных перемещений $\{X\}$ и обобщенных силовых факторов $\{\lambda\}$. Граничные условия задачи определяются выражениями (3.52) и (3.53). Блоки разрешающей системы и вектор свободных членов были получены формальным вариационно-матричным способом. Для их вычисления согласно (3.61) необходимо иметь в качестве исходной информации законы распределения по сечению перемещений и деформаций [матрицы $[F_1]$, $[F_2]$ и $[L_1]$, $[L_2]$ (см. (3.43) и (3.44)]; соотношения упругости (матрица $[G]$), матрицы связи $[C_1]$, $[C_2]$ [см. (3.45)] и вектор внешних распределенных нагрузок $\{g\}$. Представленные соотношения (3.57), (3.58) и (3.61), определяющие алгоритм получения канонических систем, являются общими для широкого класса одномерных систем.

Рассмотрим некоторые свойства симметрии матричных блоков $[A_{ij}]$ [см. (3.61)] системы разрешающих уравнений (3.60). Поскольку матрица коэффициентов упругости $[G]$ — симметричная ($[G]^T = [G]$), то для матриц $[S_{ij}]$ (3.57) справедливо условие $[S_{ij}]^T = [S_{ji}]$; тогда для матричных блоков $[A_{ij}]$ канонической системы

$$[A_{12}]^T = [A_{12}], \quad [A_{21}]^T = [A_{21}], \quad [A_{11}]^T = -[A_{22}]. \quad (3.62)$$

Другое доказательство этих свойств симметрии с помощью теоремы о взаимности работ приводится в [8]. Соотношения (3.62) для разрешающей системы будут выполняться при условии, если скалярное произведение вектора обобщенных силовых факторов и вектора обобщенных перемещений пропорционально работе внутренних сил в сечении.

Для нелинейно упругих материалов уравнения (3.51), (3.52), (3.53) можно рассматривать как систему нелинейных уравнений. Решение этой системы получим итерационным путем с использованием метода Ньютона. Будем считать, что известно m -е приближение к решению задачи, т. е. известны значения векторов $\{X\}_m$, $\{Y\}_m$, $\{\lambda\}_m$, $\frac{d}{ds}\{\lambda\}_m$. Воспользуемся (3.44), определим деформации в сечении, по ним подсчитаем напряжения $\{\sigma\} = \{f(\epsilon)\}$ и вычислим согласно (3.50), (3.53) значения $\{\Psi_1\}_m$, $\{\Psi_2\}_m$, $\{\Psi_3\}_m$, $\{\Psi_4\}_m$, которые в случае приближенного решения не равны нулю. Для определения поправки к решению выполним линеаризацию функций относительно m -го состояния и примем

$$\begin{aligned} \{\Psi_k\}_{m+1} = & \{\Psi_k\}_m + \left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial X} \right]_m \{\Delta X\}_{m+1} + \left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial Y} \right]_m \{\Delta Y\}_{m+1} + \\ & + \left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial \lambda} \right]_m \{\Delta \lambda\}_{m+1} + \left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial \lambda'} \right]_m \{\Delta \lambda'\}_{m+1} = 0 \quad \text{для } k = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (3.63)$$

где $(\cdot)' = \frac{d}{ds}(\cdot)$.

Уравнения (3.63) и дифференциальное условие связи (3.45), записанное для поправок $\{\Delta X\}_{m+1}$, $\{\Delta Y\}_{m+1}$, позволяют получить

искомую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix}_{m+1} + \begin{Bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \end{Bmatrix}_m, \quad (3.64)$$

где $\{\Delta H_1\}_m = [b] \{\Psi_2\}_m$, $\{\Delta H_2\}_m = \{\Psi_1\}_m - [d] \{\Psi_2\}_m$.

Матричные блоки $[A_{ij}]$ вычисляются по формулам (3.61); необходимые для их вычисления матрицы $[S_{ij}]$ определяются выражениями, аналогичными (3.57), при замене матрицы $[G]$ на матрицу коэффициентов упругости в приращениях, т. е. на $[G']$.

Полученная система (3.64) позволяет вычислить поправки для обобщенных перемещений $\{\Delta X\}_{m+1}$ и обобщенных силовых факторов $\{\Delta \lambda\}_{m+1}$, а затем перейти к новому $(m+1)$ -му приближению $\{X\}_{m+1} = \{X\}_m + \{\Delta X\}_{m+1}$, $\{\lambda\}_{m+1} = \{\lambda\}_m + \{\Delta \lambda\}_{m+1}$. В случае необходимости процесс уточнения повторяется.

Рассмотрим в общем виде вариационно-матричный способ получения разрешающих систем дифференциальных уравнений для решения задач о собственных колебаниях и устойчивости одномерных линейных систем. В качестве исходной вариационной формулировки воспользуемся условием (3.41) для случая «мертвых» нагрузок. Оставим в прежней форме общую запись распределения дополнительных перемещений $\{u_*\}$ и деформаций $\{\epsilon_*\}$ по сечению, т. е. как и для (3.43), (3.44), примем

$$\{u_*\} = [F_1] \{X_*\} + [F_2] \{Y_*\};$$

$$\{\epsilon_*\} = [L_1] \{X_*\} + [L_2] \{Y_*\},$$

где $\{X_*\}$ — дополнительные обобщенные перемещения первого порядка малости. Общий вид дифференциальной связи между компонентами векторов $\{X_*\}$ и $\{Y_*\}$ будет аналогичен (3.45):

$$\frac{d}{ds} \{X_*\} - [C_1] \{X_*\} - [C_2] \{Y_*\} = 0. \quad (3.65)$$

Дополнив вариационную формулировку (3.41) условием связи вида (3.65) для вариаций $\delta \{X_*\}$, $\delta \{Y_*\}$, получим

$$\int_V (\delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} + \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} - \rho \omega^2 \delta \{u_*\}^T \{u_*\}) dV + \int_{s_0}^{s_k} \left(\frac{d}{ds} \delta \{X_*\} - [C_1] \delta \{X_*\} - [C_2] \delta \{Y_*\} \right)^T \{\lambda_*\} ds = 0, \quad (3.66)$$

где $\{\lambda_*\}$ — вектор неопределенных множителей Лагранжа. С учетом того, что второе и третье слагаемые в первом интеграле (3.66) в общем случае можно представить в виде

$$\int_V \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} dV = \Lambda \int_{s_0}^{s_k} \int_F ([R_1] \delta \{X_*\} + [R_2] \delta \{Y_*\})^T [T] ([R_1] \{X_*\} + [R_2] \{Y_*\}) dx_3 dx_2 ds, \dots$$

где $[T]$ — матрица начальных напряжений; Λ — параметр нагружения, и

$$\int_V \delta \{u_*\}^T \rho \omega^2 \{u_*\} dV = \omega^2 \int_{s_0}^{s_h} \int_F \rho ([F_1] \delta \{X_*\} + [F_2] \delta \{Y_*\})^T ([F_1] \{X_*\} + [F_2] \{Y_*\}) dx_3 dx_2 ds$$

уравнения Эйлера для вариационной задачи (3.66) будут

$$[S_{11}] \{X_*\} + [S_{12}] \{Y_*\} - [C_1]^T \{\lambda_*\} - \frac{d}{ds} \{\lambda_*\} = 0, \quad (3.67)$$

$$[S_{21}] \{X_*\} + [S_{22}] \{Y_*\} - [C_2]^T \{\lambda_*\} = 0. \quad (3.68)$$

В задачах устойчивости и колебаний матрицы $[S_{ij}]$ в уравнениях (3.67) и (3.68) отличаются от аналогичных матриц (3.57) тем, что они дополняются матрицами, характеризующими начальное напряженное состояние и инерционные свойства системы:

$$[S_{ij}] = \int_F [L_i]^T [G] [L_j] dx_3 dx_2 + \Lambda \int_F [R_i]^T [T] [R_j] dx_3 dx_2 - \omega^2 \int_F \rho [F_i]^T [F_j] dx_3 dx_2 \quad (i, j = 1, 2). \quad (3.69)$$

Определив из уравнения (3.68) вектор $\{Y_*\}$ и подставив его в дифференциальные уравнения (3.65) и (3.67), получим искомую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} X_* \\ \lambda_* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_* \\ \lambda_* \end{Bmatrix}, \quad (3.70)$$

где $[A_{ij}]$ — матричные блоки определяются выражениями (3.61) при матрицах $[S_{ij}]$, вычисленных по зависимостям (3.69).

Для однородной системы дифференциальных уравнений граничные условия будут тоже однородными. На краях одномерной системы при $s = s_0$, $s = s_h$ должны быть заданы условия: либо $\{X_*\} = 0$ (геометрические), либо $\{\lambda_*\} = 0$ (силовые). Полученная система дифференциальных уравнений (3.70) позволяет решить следующие задачи на собственные значения: при $\omega = 0$ и $[T] \neq 0$ определить критические нагрузки $\Lambda_{кр}$; при $\Lambda = 1$, $[T] \neq 0$, $\rho \neq 0$ — найти собственные частоты и формы колебаний упругой системы с учетом предварительного нагружения (в частном случае при $[T] = 0$ определить частоты и формы ненагруженной системы).

Приведенные в данном параграфе матричные соотношения для определения коэффициентов канонических систем не дают явных аналитических зависимостей, но позволяют для конкретного сечения получить числовые значения коэффициентов. Для сокращения вычислительных операций, выполняемых ЭВМ на каждом шаге численного интегрирования, в случае переменных коэффициентов можно воспользоваться приемом аппроксимации. Для этого разобьем одномерную систему по координате s на участки длиной Δ (рис. 3.2).

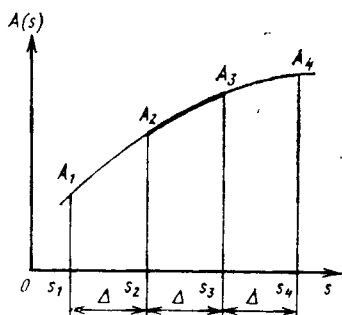


Рис. 3.2.

Будем вычислять матрицы разрешающей системы только в узлах разбивки. В пределах каждого участка все коэффициенты матрицы $[A]$ [см. (3.42)] интерполируем, например, по четырем точкам в виде кубического полинома:

$$[A(s)] \approx [I(s)] = [B_1] + [B_2](s - s_2) + [B_3](s - s_2)(s - s_3) + [B_4](s - s_2)^2(s - s_3),$$

для $s_2 \leq s \leq s_3$, (3.71)

где s_1, s_2, s_3, s_4 — координаты сечений, в которых вычислены точные значения матрицы разрешающей системы. Аппроксимация (3.71) интерполирует приближенное значение коэффициентов матрицы $[A]$ на участке $[s_2, s_3]$. Для определения коэффициентов матриц интерполяции $[B_i]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) будем считать, что аппроксимирующая матрица $[I(s)]$ совпадает с матрицей разрешающей системы на краях участка интерполяции, т. е. при s_2, s_3 выполняются равенства $[I(s_2)] = [A(s_2)]$; $[I(s_3)] = [A(s_3)]$. (3.72)

Кроме того, выполним следующие сопряжения участков аппроксимации по первым производным:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[I] \Big|_{s=s_2} &= \frac{1}{2\Delta} [[A(s_3)] - [A(s_1)]]; \\ \frac{d}{ds}[I] \Big|_{s=s_3} &= \frac{1}{2\Delta} [[A(s_4)] - [A(s_2)]]; \end{aligned} \quad (3.73)$$

После подстановки в (3.72) и (3.73) выражений для $[I(s)]$ (3.71) и $\frac{d}{ds}[I(s)]$ получим следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} [B_1] &= [A_2]; \\ [B_1] + [B_2]\Delta &= [A_3]; \\ [B_1] - [B_3]\Delta &= \frac{1}{2\Delta} [[A_3] - [A_1]]; \\ [B_2] + [B_3]\Delta + [B_4]\Delta^2 &= \frac{1}{2\Delta} [[A_4] - [A_2]], \end{aligned}$$

из которой последовательно определяются

$$\begin{aligned} [B_1] &= [A_2]; \quad [B_2] = \frac{1}{\Delta} [[A_3] - [A_2]]; \\ [B_3] &= \frac{1}{2\Delta^2} [[A_3] - 2[A_2] + [A_1]]; \\ [B_4] &= \frac{1}{2\Delta^3} [[A_4] - 3[A_3] + 3[A_2] - [A_1]], \end{aligned}$$

где $[A_i] = [A(s_i)]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — известные матрицы разрешающей системы, вычисленные в узловых точках. Для решения

задач статики аналогичным образом может быть аппроксимирована изменяющаяся вдоль координаты s внешняя распределенная нагрузка.

§ 3.6. Численное интегрирование разрешающих дифференциальных уравнений для одномерных систем

В общем виде система разрешающих уравнений может быть сведена к канонической форме

$$\frac{d}{ds} \{Z\} = [A] \{Z\} + \{H\}, \quad (3.74)$$

где s — координата одномерной системы; $\{Z\}$ — вектор состояния; $[A]$ — матрица разрешающей системы; $\{H\}$ — вектор свободных членов.

При решении задач устойчивости и колебаний имеем однородную систему и $\{H\} = 0$. Для краевых задач механики, описывающихся дифференциальными уравнениями вида (3.74), разработаны эффективные алгоритмы численных решений [8, 20, 33]. Рассмотрим способ решения, основанный на делении одномерной системы по координате s на отдельные элементы и стыковки отдельных элементов по геометрическим и силовым факторам с использованием матриц жесткости.

Разобьем всю длину одномерной системы на отдельные элементы. Для отдельного элемента (рис. 3.3, а) обозначим начальное сечение цифрой 1, конечное сечение — цифрой 2. Такую нумерацию сечений назовем местной. Ввиду линейности исходного дифференциального уравнения связь вектора состояния в конце элемента (сечение 2) с вектором состояния в начале элемента (сечение 1) можно представить в виде

$$\{Z_2\} = [\omega] \{Z_1\} + \{Z_{\text{частн}}\}, \quad (3.75)$$

где $[\omega]$ — матрица фундаментальных решений на отдельном элементе (МФР); $\{Z_{\text{частн}}\}$ — вектор частных решений (для однородных исходных дифференциальных уравнений в (3.74) $\{H\} = 0$ и, следовательно, $\{Z_{\text{частн}}\} = 0$). Заполнение матрицы $[\omega]$ можно представить так. Решается задача Коши для элемента при $\{H\} = 0$ [см. (3.74)] при начальных условиях, когда только j -я компонента вектора состояния в первом сечении равна единице, остальные компоненты — нули. В результате интегрирования (3.74) в сечении 2 получим определенный вектор состояния. Этот вектор заносится как j -й столбец в матрицу $[\omega]$. Получив решения всех $2n$ задач ($2n$ — размерность вектора $\{Z\}$) с единичными начальными условиями, полностью заполним матрицу фундаментальных решений.

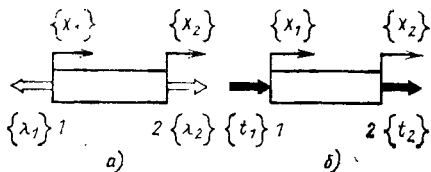


Рис. 3.3.

Вектор частного решения получается после интегрирования неоднородного уравнения (3.34) при нулевых начальных условиях.

При численной реализации процедур заполнения МФР в ряде случаев (например, для моментных оболочечных элементов или балочных на упругом основании) участки выбираются достаточно короткими. Это связано со спецификой разрешающей системы дифференциальных уравнений, для которой возможны быстро возрастающие и быстро затухающие решения, а также с неизбежными погрешностями округления при вычислении на ЭВМ. При большом участке интегрирования векторы решений в МФР при расчете на ЭВМ могут стать практически линейно зависимыми или вычисляться недостаточно точно. По этой причине метод начальных параметров, который используется при расчете стержней, для моментных оболочек применяется очень редко.

Если в качестве компонент вектора состояния $\{Z\}$ выбраны обобщенные перемещения $\{X\}$ и соответствующие обобщенные силовые факторы $\{\lambda\}$, то в блочном виде связь (3.75) можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega_{11}] & [\omega_{12}] \\ [\omega_{21}] & [\omega_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X^{\text{частн}} \\ \lambda^{\text{частн}} \end{Bmatrix}. \quad (3.76)$$

Используя условие взаимности работ, можно доказать следующие свойства матричных блоков МФР (3.76):

$$\begin{aligned} [\omega_{11}]^T [\omega_{22}] - [\omega_{21}]^T [\omega_{12}] &= [E]; \\ [\omega_{11}]^T [\omega_{21}] &= [\omega_{21}]^T [\omega_{11}]; \\ [\omega_{12}]^T [\omega_{22}] &= [\omega_{22}]^T [\omega_{12}], \end{aligned} \quad (3.77)$$

где $[E]$ — единичная матрица $(n \times n)$. Кроме того, на основании (3.77) или условий симметрии матричных блоков канонической системы (3.62) можно показать, что определитель матрицы фундаментальных решений для любого участка интегрирования должен быть равен единице:

$$\det([\omega]) = 1. \quad (3.78)$$

Условие (3.78) можно использовать как необходимое (но, к сожалению, недостаточное) при контроле за точностью численного интегрирования, т. е. если решение верно, то равенство (3.78) выполняется, или если (3.78) не выполняется, то решение заведомо неверно.

Для удобства стыковки элементов перейдем от внутренних силовых факторов $\{\lambda_1\}$, $\{\lambda_2\}$ в сечениях 1, 2 (см. рис. 3.3, а) к реакциям $\{t_1\}$, $\{t_2\}$, для компонент которых положительные направления совпадают с положительными направлениями соответствующих компонент векторов обобщенных перемещений $\{X_1\}$, $\{X_2\}$. На рис. 3.3, б, где условно изображен этот переход, видно, что

$$\{t_1\} = -\{\lambda_1\}, \quad \{t_2\} = \{\lambda_2\}. \quad (3.79)$$

Связь векторов состояния в сечениях 1, 2, представленная с помощью матрицы фундаментальных решений и частного решения (3.76), а также соотношения (3.79), позволяют выразить реакции

$\{t_1\}$, $\{t_2\}$ через перемещения сечений и приведенные к сечениям нагрузки, т. е. получить зависимость

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.80)$$

где

$$\begin{aligned} [K_{12}] &= -[\omega_{12}]^{-1}; \quad [K_{11}] = [K_{12}] [\omega_{11}]; \\ [K_{21}] &= [K_{12}]^T; \quad [K_{22}] = -[\omega_{22}] [K_{12}]; \\ \{P_1\} &= [K_{12}] \{X_{\text{частн}}\}; \quad \{P_2\} = -\{\lambda_{\text{частн}}\} + [\omega_{22}] \{P_1\}. \end{aligned}$$

Здесь матрица, связывающая в элементе обобщенные узловые реакции с обобщенными перемещениями, есть матрица жесткости элемента (МЖЭ); $\{P_1\}$, $\{P_2\}$ — векторы приведенных к узлам элемента внешних нагрузок. На основании теоремы о взаимности работ можно показать, что матрица жесткости элемента является симметричной, т. е.

$$[K_{11}] = [K_{11}]^T; \quad [K_{21}] = [K_{12}]^T; \quad [K_{22}] = [K_{22}]^T.$$

Рассмотрим условия сопряжения двух одномерных элементов. На рис. 3.4, а изображены элементы, имеющие номера e и l . Сечения сопряженных элементов (или узлы) имеют номера i , j , k , которые представляют целые числа, определяющиеся после нумерации всех сечений одномерной системы, разбитой на отдельные элементы. Такую нумерацию узлов в отличие от местной называют глобальной. Если в j -м сечении для стыковки обобщенных перемещений не требуется дополнительных преобразований, то кинематические условия сопряжения будут выглядеть так: $\{X_j^e\} = \{X_j^l\} = \{X_j\}$, где верхний индекс указывает номер элемента, нижний — номер узла; $\{X_j\}$ — вектор обобщенных перемещений в j -м сечении. На рис. 3.4, б условно изображена окрестность сечения j . Будем считать, что в сечении j приложены внешние силы, которые условно изображены вектором $\{T_j\}$. Считается, что компоненты вектора $\{T_j\}$ упорядочены так, что скалярное произведение $\delta \{X_j\}^T \{T_j\}$ равно работе внешних сил на возможных перемещениях $\delta \{X_j\}$ j -го сечения. Реакции элементов e , l на рисунке обозначены $\{t_j^e\}$, $\{t_j^l\}$. Условия равновесия сечения j запишем в виде $\{t_j^e\} + \{t_j^l\} = \{T_j\}$.

Воспользуемся глобальной нумерацией и выразим реакции элементов e и l через обобщенные перемещения сечений:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} t_i^e \\ t_j^e \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [K_{ii}^e] & [K_{ij}^e] \\ [K_{ji}^e] & [K_{jj}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} t_j^l \\ t_k^l \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [K_{jj}^l] & [K_{jk}^l] \\ [K_{kj}^l] & [K_{kk}^l] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_j \\ X_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_j^l \\ P_k^l \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

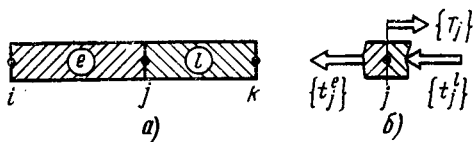


Рис. 3.4.

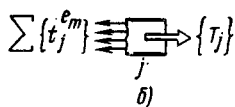
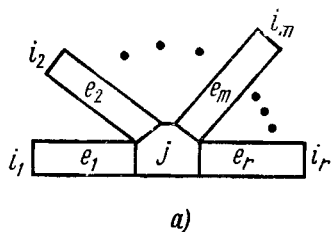


Рис. 3.5.

С использованием (3.81) условие равновесия j -го сечения можно записать через перемещения:

$$[K_{ji}^e] \{X_i\} + ([K_{jj}^e] + [K_{jj}^l]) \{X_j\} + [K_{jk}^l] \{X_k\} = \{T_j\} + \{P_j^e\} + \{P_j^l\}.$$

Используя глобальную нумерацию, достаточно просто записать общий случай стыковки r одномерных элементов в j -м узле (рис. 3.5). На рисунке номера элементов обозначены $e_1, e_2, \dots, e_m, \dots, e_r$. Номера $i_1, i_2, \dots, i_m, \dots, i_r$ соответствуют номерам узлов элементов, не замыкающих к узлу сопряжения j . Будем считать, что на j -й узел действуют сосредоточенные внешние силы $\{T_j\}$ и реакции оболочечных элементов. Запишем уравнение равновесия j -го узла (рис. 3.5, б):

$$\sum_{m=1}^r \{t_j^{e_m}\} = \{T_j\}. \quad (3.82)$$

Поскольку реакция e_m -го элемента в узле j связана с перемещениями сечений i_m и j следующим образом:

$$\{t_j^{e_m}\} = [K_{ji_m}^{e_m}] \{X_{i_m}\} + [K_{jj}^{e_m}] \{X_j\} - \{P_j^{e_m}\},$$

то (3.82) можно записать через перемещения:

$$\sum_{m=1}^r \left(\sum_{k=i_m, j} [K_{jk}^{e_m}] \{X_k\} \right) = \{T_j\} + \sum_{m=1}^r \{P_j^{e_m}\}. \quad (3.83)$$

После анализа структуры уравнения равновесия в форме (3.83) можно отметить, что в правой части стоят внешние силы, действующие в сечении j и сумма приведенных к узлу j поверхностных нагрузок, действующих на сопрягаемые элементы; в левой части стоят произведения матричных блоков МЖЭ и узловых степеней свободы. При формировании уравнений равновесия для j -го узла участвуют лишь блоки матриц жесткости элементов, у которых первый индекс (по глобальной нумерации) равен j . Расположение этих блоков в j -й матричной строке в общей системе уравнений равновесия (т. е. для всех узлов) определяется вторым индексом.

Полученные таким образом уравнения равновесия всех сечений одномерной конструкции с учетом геометрических граничных условий задачи представляют разрешающую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений. Полученную матрицу системы называют глобальной матрицей жесткости или матрицей жесткости конструкции. Эта ма-

трица является симметричной и обладает ленточной структурой. Для решения таких систем в настоящее время разработаны эффективные программы для ЭВМ. Полученные в результате решения системы перемещения позволяют определить реакции элемента (3.81), внутренние силовые факторы [см. (3.79)], вектор $\{Y\}$ (3.59), а также деформации (3.44) и напряжения (3.54).

При решении задач устойчивости или задач о собственных колебаниях в качестве исходных дифференциальных уравнений используют однородную каноническую систему (3.70) или

$$\frac{d}{ds} \{Z_*\} = [A] \{Z_*\}, \quad (3.84)$$

где под компонентами вектора $\{Z_*\}$ понимаются дополнительные обобщенные перемещения и силовые факторы. Коэффициенты матрицы $[A]$ в общем случае зависят от координаты одномерной системы s , а также от параметра нагружения Λ (для задач устойчивости) или частоты колебаний ω (для задач динамики). Система (3.84), дополненная однородными граничными условиями, определяет задачу на собственные значения — требуется найти такие значения параметра Λ (или ω), при которых имеются нетривиальные решения. Для задач устойчивости практический интерес представляет только наименьшее по модулю собственное значение $\Lambda = |\Lambda|_{\min}$, которому соответствуют значения критических нагрузок.

После выполнения процедур построения матриц фундаментальных решений для отдельных элементов и стыковки элементов по геометрическим и силовым факторам с учетом однородных граничных условий получим однородную систему алгебраических уравнений относительно дополнительных перемещений. Формально эту систему представим в виде

$$[K(p)] \{X\} = 0, \quad (3.85)$$

где $p = \lambda$ (для задач устойчивости) или $p = \omega^2$ (для задач о собственных колебаниях). Для нетривиального решения полученной системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя. Этот случай соответствует одному из собственных значений параметра p . Расчет выполняют следующим образом. Для различных значений параметра p производят интегрирование системы (3.84), осуществляют стыковку элементов, вычисляют определитель системы (3.85) и следят за сменой знака определителя. Недостатком такого приема определения собственных значений является то, что для каждого p приходится заново интегрировать систему (3.84), что требует значительных затрат машинного времени. Для сокращения вычислительных операций можно использовать прием линеаризации по параметру p матрицы связи реакций элемента с узловыми перемещениями элемента, т. е. представить в следующем виде связь реакций с перемещениями:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} + \Delta p \begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}.$$

В этом случае после стыковки отдельных элементов получим вместо (3.85) разрешающую систему алгебраических уравнений следующей структуры:

$$([K] + \Delta p [\bar{K}]) \{X\} = 0.$$

Эту систему можно рассматривать как обобщенную задачу на собственные значения относительно параметра Δp .

Показанный выше прием линеаризации существенно уменьшает время расчета, так как матрицы $[K]$ и $[\bar{K}]$ определяются лишь за два приема интегрирования, т. е. для $p = p_0$ и $p = p_0 + \Delta p_0$. В случае необходимости полученное собственное значение $p = p_*$ можно уточнить, при этом линеаризацию матриц следует провести относительно $p_0 = p_*$.

§ 3.7. Формулировка нелинейных задач

Поскольку структурные изменения в многослойном композиционном материале могут происходить на различных этапах нагружения и деформативные свойства конструкции во многом зависят от истории деформирования отдельных слоев, будем поступать следующим образом. Процесс статического нагружения мысленно свяжем с некоторым условным временем τ . Будем считать, что на интервале времени $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ известны конкретные приращения внешних нагрузок.

Пусть в начальный момент времени $\tau = 0$ рассматриваемый объект имел исходную недеформированную конфигурацию. Проследим за изменением этой конфигурации в процессе нагружения. На рис. 3.6 позициями 1, 2, 3 условно показаны координаты точки тела в процессе деформирования в моменты $\tau = 0, \tau, \tau + \Delta\tau$. Дадим порцию нагружения на интервале времени $(\tau, \tau + \Delta\tau)$. Истинные приращения перемещений, которые требуется определить, обозначим $\{u\}$. Поскольку задача нелинейная, в общем случае перемещения $\{u\}$ определяются не за один шаг, а требуют итерационного процесса. Такой итерационный процесс можно организовать с использованием линеаризации формулировки принципа возможных перемещений, записанного для равновесного положения тела в момент времени $\tau + \Delta\tau$. Будем считать, что m -я итерация должна приводить к положению равновесия. В этом случае можно записать

$$\int_V \delta \{\Delta \varepsilon\}_m^T \{\sigma\}_m dV - \delta A = 0, \quad (3.86)$$

где

$$\begin{aligned} \delta A = & \int_V \delta \{\Delta u\}_m^T \{g_{\tau+\Delta\tau}\} dV + \\ & + \int_S \delta \{\Delta u\}_m^T \{p_{\tau+\Delta\tau}\} dS \end{aligned}$$

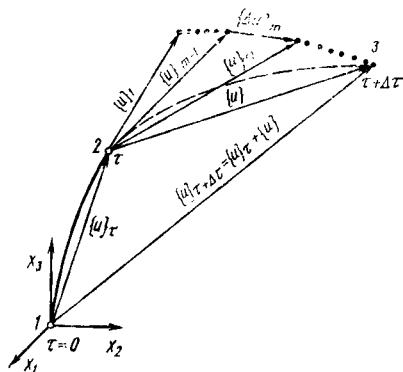


Рис. 3.6.

представляет работу внешних сил. Будем считать, что суммарные напряжения на m -й итерации

$$\{\sigma\}_m = \{\sigma\}_\tau + \sum_{k=1}^{m-1} \{\Delta\sigma\}_k + \{\Delta\sigma\}_m. \quad (3.87)$$

а деформации $\{\Delta\epsilon\}_m$ содержат линейные и нелинейные слагаемые:

$$\{\Delta\epsilon\}_m = \{\Delta\epsilon\}_m + \{\Delta\eta\}_m. \quad (3.88)$$

Индексы τ и $\tau + \Delta\tau$ подчеркивают принадлежность к той или иной конфигурации. Порцию нагружения $\{\Delta g\}$, $\{\Delta p\}$ будем давать достаточно малой, чтобы считать связь приращений напряжений с приращениями деформаций линейной:

$$\{\Delta\sigma\}_m = [G'_\tau] \{\Delta\epsilon\}_m, \quad (3.89)$$

где $[G'_\tau]$ — матрица касательных модулей, определенная для конфигурации τ .

Сохранив члены первого и второго порядков малости с учетом (3.87)–(3.89), запишем принцип возможных перемещений (3.86), после чего будем иметь

$$\int_V (\delta \{\Delta\epsilon\}_m^T [G'_\tau] \{\Delta\epsilon\}_m + \delta \{\Delta\eta\}^T \{\sigma\}_\tau + \delta \{\Delta\epsilon\}_m^T \{\sigma\}_{m-1}) dV - \delta A = 0. \quad (3.90)$$

Формулировка условия равновесия, записанная в виде (3.90), позволяет получить разрешающие уравнения для определения перемещений $\{\Delta u\}_m$ и выполнить итерацию:

$$\{u\}_m = \{u\}_{m-1} + \{\Delta u\}_m.$$

Об объеме, по которому выполняется интегрирование, можно сказать следующее. Наиболее удобным при реализации оказываются два варианта: в одном из них интегрирование проводится по исходному недеформированному объему, т. е. для конфигурации $\tau = 0$, во втором — для конфигурации предыдущего равновесного состояния, соответствующего моменту времени τ . При этом в декартовой системе координат для вычисления линейных составляющих приращений деформации при интегрировании по V_0 следует воспользоваться выражениями, аналогичными (3.24) (индекс итераций m опущен):

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_i &= \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_1^\tau}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u_2^\tau}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_i} + \frac{\partial u_3^\tau}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3); \\ \Delta\epsilon_{ij} &= \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_1^\tau}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_2^\tau}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_3^\tau}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_j} + \\ &+ \frac{\partial u_1^\tau}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u_2^\tau}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_i} + \frac{\partial u_3^\tau}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j). \end{aligned}$$

Во втором варианте, поскольку конфигурация τ включает перемещения $\{u_i\}$, для вычисления компонент $\{\Delta\theta\}$ следует воспользоваться зависимостями

$$\Delta\epsilon_i = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\Delta\epsilon_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j).$$

Нелинейные составляющие приращений деформаций для первого и второго вариантов определяются как

$$\Delta\eta_i = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\Delta\eta_{ij} = \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j).$$

Будем считать, что в физических соотношениях (3.89), связывающих приращения напряжений и деформаций, матрица касательных модулей $[G_\tau]$, вычисленная для равновесной конфигурации τ , сохраняет неизменными свои компоненты на итерациях в пределах этапа нагружения. Кроме того, будем считать деформации малыми, поэтому при использовании соотношений (3.89) не будем делать различия в матрицах $[G_\tau]$ для двух указанных выше вариантов интегрирования. Эти варианты вычислений соответствуют записи принципа возможных перемещений в форме Лагранжа. Более подробно с вычислительными и теоретическими аспектами решения нелинейных задач можно ознакомиться в работе [59]. Такой метод решения нелинейных задач можно назвать шаговым с промежуточной итерационной коррекцией модифицированным методом Ньютона. На рис. 3.7 условно показан процесс вычислений. Здесь p и u обозначают нагрузку и перемещения. Как видно из рисунка, жесткость системы на интервале нагружения $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ сохраняется постоянной.

§ 3.8. Общие этапы решения задач с помощью МКЭ

Полученные ранее на основе принципа возможных перемещений формулировки задач статики, устойчивости и динамики позволяют построить эффективные приближенные методы решения. Рассмотрим основные этапы решения указанных задач с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [22, 40, 43, 59, 61]. Одна из трактовок МКЭ связана с методом Рэлея—Ритца. Характерной особенностью для МКЭ явилось то, что аппроксимация искоемых решений стала выполняться не во всей области, а в пределах отдельных простых элементов, на которые разбивается тело. Отдельные элементы стыкуются между собой по вершинам (узлам) и граням. Координатные функции, как правило, выбираются в виде кусочно-полиномиальных функций. Каждая функция равна нулю на большей части об-

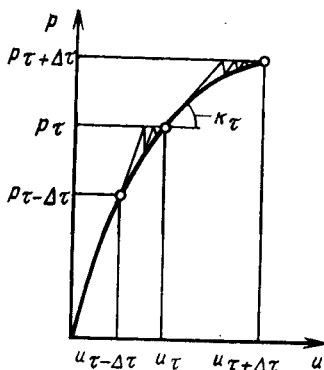


Рис. 3.7.

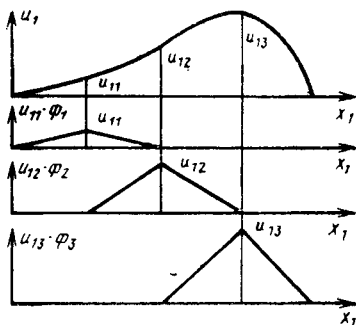


Рис. 3.8.

ласти и отлична от нуля лишь в пределах элементов, окружающих данный узел. Если каждая функция выбирается так, что она равна единице в своем узле, непрерывна в области элементов, примыкающих к узлу, и равна нулю во всех остальных узлах, то в качестве коэффициентов, подлежащих определению, можно рассматривать значения перемещений узловых точек. Кусочно-полиномиальную аппроксимацию перемещений можно представить в виде $u_1 = \sum_{i=1}^N \phi_i u_{1i}$;

$u_2 = \sum_{i=1}^N \phi_i u_{2i}$; $u_3 = \sum_{i=1}^N \phi_i u_{3i}$, где i — номер узла; N — число узловых точек; ϕ_i — координатные кусочно-полиномиальные функции аргументов x_1, x_2, x_3 ; u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} — значения перемещений узловых точек. Обозначим вектор неизвестных узловых перемещений u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) через $\{q\}$ и представим распределение перемещений в матричном виде

$$\{u\} = [\phi] \{q\}, \quad (3.91)$$

где матрица $[\phi]$ содержит указанные выше координатные функции ϕ_i . Для одномерного случая пример аппроксимации решений показан на рис. 3.8. Для аппроксимированных в виде (3.91) полей перемещений воспользуемся дифференциальными соотношениями (3.4) и определим связь деформаций с узловыми перемещениями:

$$\{\epsilon\} = [B] \{q\}, \quad (3.92)$$

где $[B] = [L] [\phi]$.

В силу линейной связи деформаций с узловыми перемещениями возможные деформации $\delta \{\epsilon\}$ будут связаны с возможными перемещениями узлов $\delta \{q\}$ аналогичной зависимостью, т. е. $\delta \{\epsilon\} = [B] \delta \{q\}$.

Соотношения упругости для линейно упругого тела записываются согласно закону Гука и с учетом (3.92) могут быть представлены в следующем виде:

$$\{\sigma\} = [G] [B] \{q\}. \quad (3.93)$$

Для получения разрешающих уравнений задачи статики осталось использовать принцип возможных перемещений

$$\int_V (\delta \{e\}^T \{\sigma\} - \delta \{u\}^T \{g\}) dV - \int_S \delta \{u\}^T \{p\} dS = 0,$$

который следует записать с учетом исходных аппроксимаций МКЭ полей перемещений (3.91), деформаций (3.92) и напряжений (3.93). Выполнив указанные подстановки, получим

$$\begin{aligned} & \int_V (([B] \delta \{q\})^T [G] [B] \{q\} - ([\phi] \delta \{q\})^T \{g\}) dV - \\ & - \int_S ([\phi] \delta \{q\})^T \{p\} dS = 0 \end{aligned}$$

или
$$\delta \{q\}^T ([K] \{q\} - \{P\}) = 0,$$

где $[K] = \int_V [B]^T [G] [B] dV$; $\{P\} = \int_V [\phi]^T \{g\} dV + \int_S [\phi]^T \{p\} dS$.

Матрица $[K]$ и вектор $\{P\}$ называются соответственно матрицей жесткости конструкции и вектором приведенных к узлам нагрузок. В силу произвольности возможных узловых перемещений $\delta \{q\}$ из принципа возможных перемещений получим уравнения равновесия:

$$[K] \{q\} = \{P\}. \quad (3.94)$$

Разрешающая система алгебраических уравнений (3.94) позволяет определить неизвестные узловые перемещения.

Характерной особенностью МКЭ является то, что, поскольку координатные функции ϕ_i , а следовательно, и компоненты матрицы $[B]$ [см. (3.92)] равны нулю на большей части рассматриваемой области, то матрица $[K]$ разрешающей системы уравнений (3.94) является слабозаполненной и, как правило, имеет ленточную структуру. Это обстоятельство позволяет построить эффективные и экономичные вычислительные алгоритмы решения больших систем линейных алгебраических уравнений [22].

Рассмотрим другую трактовку МКЭ, соответствующую методу перемещений при решении задач теории упругости. Будем считать, что элементы взаимодействуют между собой лишь в узловых точках. Решение задачи проведем по следующей схеме. Выделим отдельные элементы и в узловых точках приложим силы реакций отброшенных частей. Для заданной аппроксимации перемещений в пределах элемента, используя принцип возможных перемещений, получим уравнения равновесия элементов и определим связь сил реакций с перемещениями узлов элемента и внешними нагрузками, действующими на элемент. Далее соединим в узлах элементы и запишем условия равновесия отдельных узлов. Для этого приравняем нулю для каждого узла сумму сил реакций от отдельных элементов, прилегающих к рассматриваемому узлу. Полученная система алгебраических уравнений позволит определить неизвестные узловые

обобщенные перемещения, через которые в дальнейшем можно вычислить деформации и напряжения в элементах.

Условно разделим тело на множество конечных элементов простой формы. Присвоим номера всем элементам, а также в определенной последовательности обойдем все узлы и пронумеруем по порядку все степени свободы (или обобщенные перемещения) в узлах. Такую нумерацию степеней свободы в дальнейшем будем называть глобальной. Рассмотрим отдельный элемент с номером e . В заранее установленной последовательности обхода для элементов данного типа обойдем все узлы элемента и пронумеруем по порядку, начиная с единицы, все степени свободы в узлах элемента. Такую нумерацию степеней свободы назовем локальной. Пусть общее число степеней свободы в элементе будет n . Таким образом, для элемента имеются две нумерации: локальная и глобальная. Условно их представим в виде следующих упорядоченных массивов номеров или индексных массивов:

$$\begin{aligned} \{n\}^e &= \{1, 2, 3, \dots, k, \dots, n\}; \\ \{N\}^e &= \{N_1^e, N_2^e, N_3^e, \dots, N_k^e, \dots, N_n^e\}, \end{aligned} \quad (395)$$

где N_k^e — целое число, равное номеру степени свободы в глобальной нумерации и соответствующее степени свободы с номером k в локальной нумерации для элемента e .

Например, для плоской задачи (рис. 3.9) для второго элемента индексный массив глобальной нумерации будет содержать следующие номера степеней свободы: $\{N\}^2 = \{3, 4, 7, 8, 5, 6\}$.

Отметим, что для элементов, имеющих общие узлы, в индексных массивах номера степеней свободы, принадлежащие общим узлам, равны. В дальнейшем индексными массивами будем пользоваться при записи уравнений равновесия узлов.

Рассмотрим отдельный элемент с номером e . Аппроксимируем поле перемещений в пределах элемента

$$\{u\}^e = [\phi]^e \{q\}^e, \quad (3.96)$$

где $\{u\}^e = \{u_1, u_2, u_3\}^e$; $[\phi]^e$ — матрица функций аппроксимаций полей перемещений в элементе или матрица формы; $\{q\}^e$ — вектор обобщенных узловых перемещений или узловых степеней свободы.

С использованием геометрических соотношений связи деформаций с перемещениями (3.4) определяется распределение деформаций в области, занимаемой элементом:

$$\{\varepsilon\}^e = [B]^e \{q\}^e, \quad (3.97)$$

где $[B]^e = [L] [\phi]^e$. Матрица $[B]^e$ будет содержать функции, аппроксимирующие распределение деформаций. После определения узловых перемещений $\{q\}^e$ с помощью соотношения (3.97) можно определить деформации в любой точке

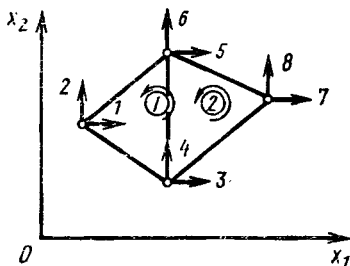


Рис. 3.9.

элемента. Для этого нужно вычислить коэффициенты матрицы $[B]^e$ в точке с нужными координатами и выполнить операцию умножения (3.97).

Связь напряжений в элементе с его деформациями для линейно упругого тела запишем в виде

$$\{\sigma\}^e = [G]^e \{\epsilon\}^e. \quad (3.98)$$

С учетом (3.97) напряжения $\{\sigma\}^e$ также можно связать с перемещениями узлов $\{q\}^e$ следующим выражением:

$$\{\sigma\}^e = [G]^e [B]^e \{q\}^e. \quad (3.99)$$

Будем считать, что на элемент действуют внешние объемные нагрузки $\{g\}^e$, на части поверхности элемента S^e действуют внешние поверхностные нагрузки $\{p\}^e$ (если S^e принадлежит поверхности рассматриваемого тела) и в узлах элемента приложены обобщенные силы реакций $\{t\}^e$. Предположим, что положительные направления обобщенных сил реакций совпадают с положительными направлениями обобщенных перемещений $\{q\}^e$. Для элемента, находящегося в равновесии, воспользуемся принципом возможных перемещений. В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{V^e} ([B]^e \delta \{q\}^e)^T [G]^e [B]^e \{q\}^e dV - \int_{V^e} ([\phi]^e \delta \{q\}^e)^T \{g\}^e dV - \\ - \int_{S^e} ([\phi]^e \delta \{q\}^e)^T \{p\}^e dS - (\delta \{q\}^e)^T \{t\}^e = 0. \end{aligned} \quad (3.100)$$

После интегрирования (3.100) по объему элемента V^e и поверхности S^e получим

$$(\delta \{q\}^e)^T ([K]^e \{q\}^e - \{P\}^e - \{t\}^e) = 0, \quad (3.101)$$

где

$$[K]^e = \int_{V^e} ([B]^e)^T [G]^e [B]^e dV \quad (3.102)$$

— квадратная матрица размерности $(n \times n)$, называемая матрицей жесткости элемента (МЖЭ);

$$\{P\}^e = \int_{V^e} ([\phi]^e)^T \{g\}^e dV + \int_{S^e} ([\phi]^e)^T \{p\}^e dS \quad (3.103)$$

— вектор приведенных к узлам внешних нагрузок.

В силу произвольности вектора обобщенных узловых перемещений $\delta \{q\}^e$ из (3.101) определяется связь вектора реакций $\{t\}^e$ с перемещениями $\{q\}^e$ в следующем виде:

$$\{t\}^e = [K]^e \{q\}^e - \{P\}^e. \quad (3.104)$$

После обхода всех элементов и вычисления их матриц жесткости (3.102) и векторов приведенных к узлам внешних нагрузок (3.103) можно приступить к составлению уравнений равновесия узлов.

В каждом узле сумма вкладов реакций от отдельных элементов, окружающих узел, должна равняться нулю. Причем должна равняться нулю любая составляющая обобщенных суммарных реакций, направление которой соответствует направлению обобщенного перемещения. Для направления обобщенного перемещения с номером i (в глобальной нумерации) приравняем нулю соответствующую составляющую суммы реакций от окружающих данный узел элементов:

$$\sum_{e=(e|i=N_k^e)} t_k^e = 0. \quad (3.105)$$

В (3.105) указано, что суммирование идет по тем элементам, которые в индексных массивах глобальной нумерации степеней свободы, т. е. в массивах $\{N\}^e$ [см. (3.95)], содержат номера i . Уравнения равновесия (3.105) с учетом (3.104) запишем через перемещения:

$$\sum_{e=(e|i=N_k^e)} \sum_{s=1}^n k_{ks}^e q_j = \sum_{e=(e|i=N_k^e)} p_k^e (j=N_s^e) \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (3.106)$$

Уравнение (3.106) записывается для $i = 1, 2, \dots, N$ (N — суммарное число незапрещенных узловых степеней свободы в рассматриваемом теле), и таким образом формируется разрешающая система алгебраических уравнений. Полученная матрица коэффициентов системы носит название глобальной матрицы жесткости, или матрицы жесткости конструкции (МЖК).

При реализации расчета на ЭВМ формирование матрицы жесткости конструкции с помощью индексных массивов выполняется достаточно просто и наглядно. После обработки отдельного элемента, т. е. после получения его матрицы жесткости (3.102) и вектора приведенных к узлам нагрузок (3.103), сразу же можно производить рассылку этих коэффициентов в матрицу жесткости конструкции и в вектор правых частей (3.106). Для коэффициента МЖЭ, находящегося в k -й строке и s -м столбце, вычисляются с использованием (3.95) номер строки i и номер столбца j в матрице жесткости конструкции: $i = N_k^e$; $j = N_s^e$. По этому адресу (i, j) в матрицу жесткости конструкции отсылается коэффициент k_{ks}^e , где производится суммирование с находящимся там числом. Для k -го коэффициента вектора приведенных нагрузок p_k^e вычисляется только номер строки $i = N_k^e$ и также производится отсылка и суммирование. Например, для элемента с номером 2 (см. рис. 3.9) на рис. 3.10 представлена структура его матрицы жесткости. Коэффициент МЖЭ, находящийся во 2-й строке и 3-м столбце, т. е. k_{23} (отмечен точкой на рис. 3.10) будет направлен в 4-ю строку и 7-й столбец матрицы жесткости конструкции (на рис. 3.10 номера даны в рамке). Рассмотренный выше прием формирования

		3	4	7	8	5	6
		1	2	3	4	5	6
3	1						
4	2						
7	3						
8	4						
5	5						
6	6						

Рис. 3.10.

МЖК называется поэлементным. Рассылку коэффициентов матриц жесткости элементов и векторов приведенных нагрузок согласно глобальной нумерации следует рассматривать как формирование уравнений равновесия узлов, принадлежащих рассматриваемому элементу.

В заключение отметим еще два обстоятельства, связанные с формированием матрицы жесткости конструкции. Часто описание деформирования элемента удобно выполнять в некоторой местной системе координат. Если обобщенные перемещения узлов в локальной системе координат $\{q\}^e$ связаны с обобщенными перемещениями узлов в глобальной системе координат линейным преобразованием

$$\{q\}^e = [C]^e \{q\}_s^e, \quad (3.107)$$

то, выполнив процедуры, аналогичные (3.96)–(3.103) в локальной системе с учетом (3.107), получим

$$\begin{aligned} [K]_s^e &= ([C]^e)^T [K]^e [C]^e; \\ \{P\}_s^e &= ([C]^e)^T \{P\}^e, \end{aligned} \quad (3.108)$$

где $[K]^e$, $\{P\}^e$ — матрица жесткости элемента и вектор приведенных к узлам элемента внешних нагрузок, вычисленные в локальной системе координат.

Рассмотрим задание граничных условий. Поскольку уравнения (3.106) представляют уравнения равновесия узлов, то силовые граничные условия формируются автоматически. Из геометрических условий рассмотрим лишь простейший случай, когда запрещены в граничных узловых точках некоторые обобщенные перемещения в глобальной системе координат. В этом случае запрещенные степени свободы можно сразу исключить и формировать систему уравнений (3.106) только относительно активных (т. е. незапрещенных) степеней свободы. Указанное исключение удобно выполняется с помощью индексных массивов (3.95). Признаком запрещения k -й степени свободы в элементе e можно положить $N_k^e = 0$. Более общие случаи задания геометрических граничных условий приводятся в [22, 61].

Рассмотрим способ решения задач статики с помощью МКЭ для нелинейно-упругих систем [22]. Будем считать, что определяющие соотношения, описывающие нелинейно-упругие свойства материалов, разрешимы относительно напряжений, т. е. по известным деформациям всегда можно однозначно вычислить напряжения

$$\{\sigma\} = \{\sigma(\epsilon)\}, \quad (3.109)$$

кроме того, примем, что в любой точке пространства компонент деформаций существует единственная матрица коэффициентов упругости в приращениях

$$[G'] = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right]. \quad (3.110)$$

На основании принципа возможных перемещений в положении равновесия должно выполняться условие

$$\int_V (\delta \{e\}^T \{\sigma\} - \delta \{u\}^T \{g\}) dV - \int_S \delta \{u\}^T \{p\} dS = 0. \quad (3.111)$$

Аппроксимацию полей перемещений и деформаций согласно МКЭ примем, как и раньше, в виде

$$\begin{aligned} \{u\} &= [\phi] \{q\}; \\ \{\varepsilon\} &= [B] \{q\}; \quad [B] = [L] [\phi]. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Тогда с учетом введенных аппроксимаций и нелинейных связей (3.109) рассматриваемое тело с бесконечным числом степеней свободы будет приближенно соответствовать нелинейной механической системе с конечным числом степеней свободы. И вместо вариационного условия (3.111) для конечно-элементного аналога можно будет записать принцип возможных перемещений в следующем виде:

$$\delta \{q\}^T \left(\int_V ([B]^T \{\sigma\} - [\phi]^T \{g\}) dV - \int_S [\phi]^T \{p\} dS \right) = 0. \quad (3.113)$$

В силу произвольности вектора обобщенных перемещений $\delta \{q\}$ выражение при $\delta \{q\}^T$, стоящее в круглых скобках в (3.113), можно рассматривать как нелинейную вектор-функцию:

$$\{\chi\} = \int_V ([B]^T \{\sigma\} - [\phi]^T \{g\}) dV - \int_S [\phi]^T \{p\} dS, \quad (3.114)$$

которая для равновесного состояния должна обращаться в нуль. Отметим, что нелинейность вектора-функции $\{\chi\}$ согласно (3.109) и (3.112) заключается в соотношениях связи напряжений с перемещениями.

Для решения нелинейной системы уравнений $\{\chi\} = 0$ воспользуемся методом Ньютона. Будем считать, что известно m -е приближение к решению задачи, т. е. известны значения $\{q\}_m$. Воспользуемся (3.112), (3.109) и вычислим значения $\{\varepsilon\}_m$ и $\{\sigma\}_m$, после чего определим вектор-функцию $\{\chi\}_m$ [см. (3.114)]. Для приближенного решения коэффициенты вектора $\{\chi\}_m$ не равны нулю. Для определения поправок к решению выполним линеаризацию $\{\chi\}$ относительно m -го состояния и потребуем, чтобы

$$\{\chi\}_{m+1} = \{\chi\}_m + \left[\frac{\partial \chi}{\partial q} \right]_m \{\Delta q\}_{m+1} = 0. \quad (3.115)$$

Поскольку $\{\chi\}$ неявно зависит от $\{q\}$, то для вычисления матрицы первых производных $\left[\frac{\partial \chi}{\partial q} \right]$ необходимо воспользоваться соотношениями (3.110) и (3.112), после чего получим

$$\left[\frac{\partial \chi}{\partial q} \right]_m = \left[\frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right]_m \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right]_m \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial q} \right]_m = \int_V [B]^T [G'] [B] dV = [K']_m, \quad (3.116)$$

где $[G']_m$ — матрица коэффициентов упругости в приращениях, определенная при деформациях $\{\varepsilon\}_m$.

Для вычисления поправки к m -му приближению воспользуемся уравнением (3.115), которое с учетом (3.116) примет вид

$$[K']_m \{\Delta q\}_{m+1} = -\{\chi\}_m. \quad (3.117)$$

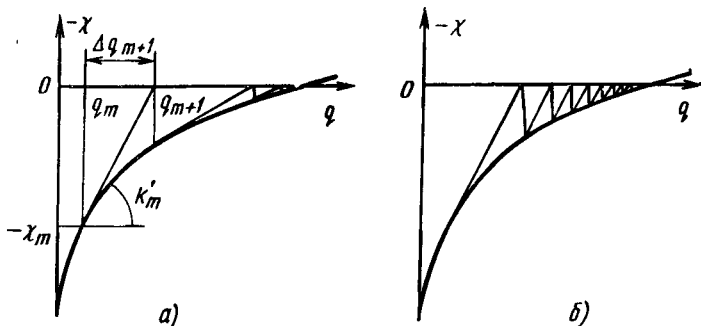


Рис. 3.11.

После решения (3.117) новое приближение $\{q\}_{m+1}$ определится как $\{q\}_{m+1} = \{q\}_m + \{\Delta q\}_{m+1}$. В случае необходимости итерационный процесс можно продолжить по указанной ранее схеме.

Иллюстрация рассмотренного итерационного процесса для одномерного случая приведена на рис. 3.11, а. Если на каждом шаге приближения не проводить корректировку матрицы $[G']_m$ (значит оставлять прежней матрицу жесткости конструкции), а лишь уточнять невязки $\{\chi\}_m$, то итерационный процесс будет соответствовать модифицированному методу Ньютона (рис. 3.11, б). На практике для решения нелинейных задач деформирования многослойных конструкций из композиционных материалов часто применение пошагового нагружения. В пределах шага по нагрузке уточнение выполняют модифицированным методом Ньютона. Матрица касательных модулей корректируется при изменении нагрузки.

Проиллюстрируем общую схему решения задач устойчивости с помощью МКЭ. Нагрузки будем считать «мертвыми», поэтому сразу воспользуемся условием (3.29). Будем считать, что начальное напряженно-деформированное состояние известно и все параметры, имеющие индекс «0», определены. В пределах элемента воспользуемся аппроксимацией дополнительных перемещений в виде

$$\{u_*\}_*^e = [\phi_*]^e \{q_*\}_*^e, \quad (3.118)$$

где $\{q_*\}_*^e$ — вектор узловых дополнительных перемещений. С использованием (3.25) и (3.118) получим распределение дополнительных деформаций в теле: $\{\epsilon_*\}_*^e = [B_*]^e \{q_*\}_*^e$; $[B_*]^e = [\epsilon] [\phi_*]$.

Тогда, выполнив интегрирование первого слагаемого (3.29) в пределах элемента, получим

$$\int_{V^e} \delta \{\epsilon_*\}_*^T \{\sigma_*\}_* dV = (\delta \{q_*\}_*^e)^T [K_*]^e \{q_*\}_*^e,$$

где

$$[K_*]^e = \int_{V^e} ([B_*]^e)^T [G] [B_*]^e dV. \quad (3.119)$$

Выражение (3.119) определяет матрицу жесткости элемента для решения задачи устойчивости.

Второе слагаемое в (3.29) получим с использованием преобразования (3.30). Вычислив предварительно матрицу $[R_*]^e = [V] [\phi_*]^e$, запишем второе слагаемое (3.29) в следующем виде:

$$\int_{V^e} \delta \{\varepsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} dV = (\delta \{q_*\}^e)^T [S_*]^e \{q_*\}^e,$$

где

$$[S_*]^e = \int_{V^e} ([R_*]^e)^T [T] [R_*]^e dV. \quad (3.120)$$

Матрица $[T]$ (3.30) содержит информацию о начальном напряженном состоянии. Матрицу $[S_*]^e$ (3.120) называют матрицей приведенных начальных напряжений элемента.

Выполнив стандартные процедуры МКЭ по сборке отдельных элементов, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений. Эту систему в общем случае можно представить в виде

$$([K_*] + [S_*]) \{q_*\} = 0, \quad (3.121)$$

где $[K_*]$, $[S_*]$ — матрица жесткости и матрица приведенных начальных напряжений. Для нетривиального решения (3.121) необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю. При пропорциональном нагружении критический параметр нагружения определяется из условия $\alpha_{кр} = \min \{ \|\alpha\| \det ([K_*] + [S_*]) = 0 \}$.

Реализация решений задач динамики с помощью МКЭ возможна на основе формулировки (3.34). Формальное отличие от рассматриваемого выше решения задачи статики [см. (3.94)] состоит в определении приведенных инерционных нагрузок системы. Для этого отдельно рассмотрим лишь третье слагаемое в (3.34). Воспользуемся аппроксимацией перемещений в пределах элемента, такой же как (3.96), тогда, выполнив интегрирование в пределах отдельного элемента, получим

$$\int_{V^e} \delta \{u\}^T \rho \{\ddot{u}\} dV = (\delta \{q\}^e)^T [M]^e \{\ddot{q}\}^e,$$

где $[M]^e = \int_{V^e} \rho ([\phi]^e)^T [\phi]^e dV$

— матрица приведенных масс элемента.

После объединения всех элементов определится искомое уравнение движения конечно-элементной модели рассматриваемой системы:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{P\}. \quad (3.122)$$

Формирование матрицы $[M]$ приведенных масс конструкции осуществляется аналогично описанной выше процедуре формирования матрицы жесткости конструкции $[K]$. Для решения задачи о собственных колебаниях в (3.122) полагают $\{P\} = 0$ и ищут решения в виде

$$\{q(\tau)\} = \{q\} e^{-i\omega\tau}, \quad (3.123)$$

где $\{q\}$ — амплитудное значение узловых обобщенных перемещений; ω — круговая частота колебаний. Подстановка (3.123) в (3.122) приводит к обобщенной задаче на собственные значения

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\underline{g}\} = 0, \quad (3.124)$$

решение которой позволяет определить частоты и формы собственных колебаний системы.

Для численного решения уравнения движения известно большое число шаговых численных методов. Конечно-разностные операторы по времени, представляющие ускорение $\{\ddot{q}\}$, разделяются на две группы: условно устойчивые и безусловно устойчивые. Условно устойчивые методы (например, метод центральных разностей) становятся неустойчивыми, если шаг интегрирования Δt больше некоторого критического значения. Безусловно устойчивые методы (например, метод Хунбольта), устойчивы вне зависимости от выбора величины шага по времени, однако при этом усложняется процесс интегрирования и возникает влияние фиктивного затухания, вносимого в модель конечно-разностными операторами. При решении методом Хунбольта вектор узловых обобщенных ускорений $\{\ddot{q}\}$ в момент времени $\tau_0 + j\Delta t$ (j — номер временного шага) аппроксимируется в разностном виде с интерполированием назад:

$$\{\ddot{q}\}_j = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2\{q\}_j - 5\{q\}_{j-1} + 4\{q\}_{j-2} - \{q\}_{j-3}). \quad (3.125)$$

Подстановка (3.125) в уравнение движения (3.122) приводит к системе алгебраических уравнений, которая позволяет определять узловые обобщенные перемещения на j -м временном шаге

$$([K] + \alpha_1 [M]) \{q\}_j = \{P\}_j + [M] (\alpha_2 \{q\}_{j-1} + \alpha_3 \{q\}_{j-2} + \alpha_4 \{q\}_{j-3}),$$

где $\alpha_1 = 2/(\Delta t)^2$, $\alpha_2 = 5/(\Delta t)^2$, $\alpha_3 = -4/(\Delta t)^2$, $\alpha_4 = 1/(\Delta t)^2$.

На начальных этапах решения задачи для временных шагов $j = 1$, $j = 2$ необходимо задать, кроме начальных условий $\{q\}_0$, $\{\dot{q}\}_0$, также значения $\{q\}_{-1}$, $\{q\}_{-2}$, которые можно определить из следующих уравнений:

$$\{\dot{q}\}_0 = (2\{q\}_1 + 3\{q\}_0 - 6\{q\}_{-1} + \{q\}_{-2})/(6\Delta t); \quad (3.126)$$

$$\{\ddot{q}\}_0 = (\{q\}_1 - 2\{q\}_0 + \{q\}_{-1})/(\Delta t)^2,$$

где вектор начальных ускорений $\{\ddot{q}\}_0$ вычисляется из уравнения движения в начальный момент времени $[M] \{\ddot{q}\}_0 + [K] \{q\}_0 = \{P\}_0$. В частном случае при нулевых начальных условиях $\{q\}_0 = 0$, $\{\dot{q}\}_0 = 0$, и при отсутствии нагрузки $\{P\}_0 = 0$ ($\{\ddot{q}\}_0 = 0$) из (3.126) получим $\{q\}_{-1} = \{q\}_1$, $\{q\}_{-2} = -8\{q\}_1$.

В настоящее время для выбора временного шага Δt не существует определенных рекомендаций. Для того чтобы избежать существенного влияния, приносимого затуханием, на тона с диапазоном частот меньше ω_* , шаг интегрирования ориентировочно подбирают, как $\Delta t < 1/(4\omega_*)$.

При решении линейно-упругих задач динамики с помощью МКЭ кроме численного интегрирования по времени часто используют метод

суперпозиции форм [61]. Вначале решается задача на собственные значения (3.124) и определяются k собственных векторов и частот системы. Собственные векторы $\{q_i^0\}$ ортогональны по отношению к матрице масс и нормированы:

$$\{q_i^0\}^T [M] \{q_j^0\} = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq j; \\ 1 & \text{для } i = j. \end{cases} \quad (3.127)$$

С помощью собственных векторов заполняется матрица $[q^0]$:

$$[q^0] = [\{q_1^0\} \{q_2^0\} \dots \{q_k^0\}].$$

Для матрицы собственных векторов согласно (3.127) оказываются справедливыми соотношения

$$[q^0]^T [M] [q^0] = [E]; \quad (3.128)$$

$$[K] \{q^0\} = [\omega^2] [M] \{q^0\}, \quad (3.129)$$

где E — единичная матрица ($k \times k$); $[\omega^2] = [\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2]$ — диагональная матрица, содержащая в качестве коэффициентов квадраты собственных частот системы. После умножения (3.129) на $[q^0]^T$ с учетом (3.128) будем иметь

$$[q^0]^T [K] [q^0] = [\omega^2]. \quad (3.130)$$

Вернемся к решению уравнений движения (3.122). Решение $\{q(\tau)\}$ будем искать в виде разложения

$$\{q(\tau)\} = [q^0] \{\eta(\tau)\}, \quad (3.131)$$

где $\{\eta(\tau)\}$ — вектор-столбец обобщенных координат, зависящих от времени и подлежащих определению.

Подстановка $\{q(\tau)\}$ из (3.131) в уравнение движения (3.122) приводит к уравнению

$$[M] [q^0] \{\ddot{\eta}\} + [K] [q^0] \{\eta\} = \{P(\tau)\}. \quad (3.132)$$

После умножения правой и левой частей (3.132) на транспонированную матрицу форм $[q^0]^T$ с учетом (3.128) и (3.130) получим

$$\{\ddot{\eta}\} + [\omega^2] \{\eta\} = \{P^0(\tau)\}, \quad (3.133)$$

где $\{P^0(\tau)\} = [q^0]^T \{P(\tau)\}$ — вектор-столбец, коэффициенты которого зависят от времени. Полученная система дифференциальных уравнений (3.133) значительно проще исходной системы (3.122), поскольку является несвязанной (матрица $[\omega^2]$ диагональная) и допускает независимое интегрирование коэффициентов вектора $\{\eta\}$:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = P_i^0(\tau). \quad (3.134)$$

В качестве начальных условий для интегрирования (3.133) будут служить выражения $\{\eta(0)\} = [q^0]^T [M] \{q\}_0$, $\{\dot{\eta}(0)\} = [q^0]^T [M] \{\dot{q}\}_0$. При решении (3.134) обычно поступают следующим образом. Разбивают интервал интегрирования на отдельные участки. В пределах участка значение $P_i^0(\tau)$ полагают равным среднему значению и используют аналитическое решение. Значения узловых перемещений восстанавливаются по соотношению (3.131) при известном $\{\eta(\tau)\}$.

В случае необходимости произвести оценку влияния предварительного нагружения на частоты и формы гармонических колебаний можно воспользоваться вариационной формулировкой (3.41). Тогда при решении задач с помощью МКЭ приходим к разрешающей системе алгебраических уравнений вида

$$([K_*] + [S_*] - \omega^2 [M_*]) \{q_*\} = 0, \quad (3.135)$$

где $[M_*]$ — матрица приведенных масс, вычисленная с учетом конечно-элементных аппроксимаций перемещений; $[K_*]$ — матрица жесткости; $[S_*]$ — матрица приведенных начальных напряжений. Решение задачи на собственные значения (3.135) позволяет исследовать влияние предварительного нагружения на частоту колебаний.

Для решения с помощью МКЭ физически и геометрически нелинейных задач статики можно воспользоваться линейаризованной формулировкой задачи (3.90) и получить систему уравнений относительно приращений обобщенных узловых перемещений на m -й итерации:

$$[K_\tau] \{\Delta q\}_m = \{P_{\tau+\Delta\tau}\} - \{F\}_{m-1},$$

где $[K_\tau] = [K'_\tau] + [S_\tau]$.

Для элемента с номером e соответствующие матрицы и векторы вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} [K'_\tau]^e &= \int_{V^e} ([B]^e)^T [G'_\tau] [B]^e dV; \quad [B]^e = [Z] [\phi]^e; \\ [S_\tau]^e &= \int_{V^e} ([R]^e)^T [T_\tau] [R]^e dV; \quad [R]^e = [V] [\phi]^e; \\ \{P_{\tau+\Delta\tau}\}^e &= \int_{V^e} ([\phi]^e)^T \{g_{\tau+\Delta\tau}\} dV + \int_{S^e} [\phi]^e \{p_{\tau+\Delta\tau}\} dS; \\ \{F\}_{m-1}^e &= \int_{V^e} ([B]^e)^T \{\sigma\}_{m-1} dV. \end{aligned}$$

Здесь τ — условное время, соответствующее предыдущей равновесной конфигурации; $[Z]$ — матрица, связывающая линейные приращения деформаций $\{\Delta \epsilon\}_m$ (см. (3.88)) с приращениями перемещений $\{\Delta u\}_m$.

§ 3.9. Примеры использования вариационно-матричных формулировок

Пример 1. Устойчивость многослойной цилиндрической трубы, нагруженной внешним равномерным давлением.

Используя полученную в § 3.3 формулировку критерия устойчивости, найдем критическое значение внешнего гидростатического давления, действующего на длинную цилиндрическую многослойную оболочку. Оболочку считаем настолько длинной, что влиянием условий закрепления ее торцов на величину критического давления можно пренебречь; задача устойчивости такой оболочки,

очевидно, сводится к задаче устойчивости кругового кольца единичной ширины (рис. 3.12, а). Многослойное кольцо считаем состоящим из N слоев, причем каждый i -й слой обладает своим модулем упругости на растяжение в окружном направлении E_i ; для простоты коэффициенты Пуассона всех слоев положим равными нулю. Кроме того, многослойный пакет в целом считаем тонкостенным, т. е. принимаем $h/R \ll 1$, где h — толщина пакета, R — радиус некоторой координатной окружности (рис. 3.12, б) (за координатную окружность может быть взята любая concentрическая окружность, лежащая внутри пакета).

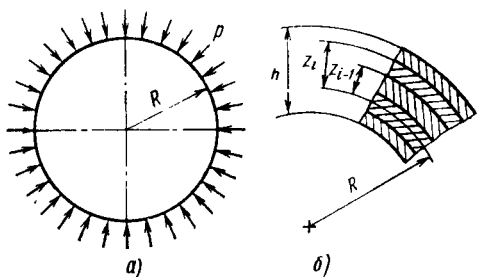


Рис. 3.12.

При решении обратим внимание на две особенности рассматриваемой задачи. Во-первых, внешняя нагрузка при изгибе оболочки меняет свое направление: гидростатическое давление в каждой точке оболочки действует по нормали к деформированной поверхности. Во-вторых, начальное напряженное состояние оболочки неоднородно по толщине пакета.

При решении обратим внимание на две особенности рассматриваемой задачи. Во-первых, внешняя нагрузка при изгибе оболочки меняет свое направление: гидростатическое давление в каждой точке оболочки действует по нормали к деформированной поверхности. Во-вторых, начальное напряженное состояние оболочки неоднородно по толщине пакета.

Критическое значение внешнего давления определим при следующих упрощающих допущениях: начальными деформациями будем полностью пренебрегать (см. § 3.3), а изгиб кольца при потере устойчивости будем описывать с помощью обычной гипотезы плоских сечений.

В качестве исходного берем условие (3.33), учитывающее изменение внешних сил при переходе системы в смежное состояние; в рассматриваемой задаче объемных сил нет, поэтому имеем

$$\int_V (\delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} + \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\}) dV - \int_S \delta \{u_*\}^T \{p_*\} dS = 0. \quad (3.136)$$

В качестве дополнительных бифуркационных перемещений берем нормальные и касательные перемещения точек координатной окружности $\{u_*\} = \{w, v\}$.

В соответствии с принятой гипотезой плоских сечений нормальные перемещения постоянны по толщине пакета, а касательные изменяются по линейному закону:

$$w_{(z)} = w; \quad v_{(z)} = v - z\vartheta; \quad \left(\vartheta = \frac{1}{R} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{v}{R} \right),$$

где ϑ — угол наклона касательной к координатной окружности. Окружные удлинения первого порядка малости ϵ_* по толщине пакета также изменяются по линейному закону

$$\epsilon_* = \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi} \right) - z \left(\frac{d^2 w}{R^2 d\varphi^2} - \frac{dv}{R^2 d\varphi} \right). \quad (3.137)$$

Окружные удлинения второго порядка малости ϵ_{**} постоянны по толщине пакета и равны

$$\epsilon_{**} = \frac{1}{2} \vartheta^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{R d\varphi} - \frac{v}{R} \right)^2.$$

Напряжения σ_* связаны с удлинениями ϵ_* законом Гука, поэтому можно записать $\sigma_{*i} = E_i \epsilon_*$.

Начальные напряжения σ_0 в общем случае различны в различных слоях пакета; с внешней нагрузкой начальные напряжения связаны условием равновесия элемента кольца в докритическом состоянии:

$$\int_{z_0}^{z_N} \sigma_0 dz = \sum_{i=1}^N \sigma_{0i} (z_i - z_{i-1}) = pR, \quad (3.138)$$

где z_i, z_{i-1} — координаты наружной и внутренней поверхности i -го слоя (см. рис. 3.12, б); σ_{0i} — начальное напряжение в i -м слое.

Бифуркационные перемещения $w = w(\varphi)$, $v = v(\varphi)$ естественно конструировать в виде рядов

$$w = \sum_n w_n \cos n\varphi, \quad v = \sum_n v_n \sin n\varphi.$$

Нетрудно проверить, что гармоники с различными n в решении не взаимодействуют, поэтому в дальнейшем знак суммы опускаем и все выкладки ведем для некоторого фиксированного n .

Перейдем к вычислению интегралов, входящих в исходное условие (3.136). Учитывая зависимость (3.137), найдем

$$\epsilon_* = \left[\left(\frac{w_n}{R} + \frac{nv_n}{R} \right) + z \left(\frac{n^2 w_n}{R^2} + \frac{nv_n}{R^2} \right) \right] \cos n\varphi$$

и

$$\delta \epsilon_* = \left[\left(\frac{\delta w_n}{R} + \frac{n \delta v_n}{R} \right) + z \left(\frac{n^2 \delta w_n}{R^2} + \frac{n \delta v_n}{R^2} \right) \right] \cos n\varphi.$$

Тогда

$$\int_V \delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} dV = 1 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_N} \delta \epsilon_* E_i \epsilon_* R dz d\varphi = \delta \{q_*\}^T [K_*] \{q_*\},$$

где $\{q_*\} = \{w_n, v_n\}$,

$$[K_*] = \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} B + 2 \frac{C}{R} n^2 + \frac{D}{R^2} n^4 & Bn + \frac{C}{R} (n + n^3) + \frac{D}{R^2} n^3 \\ Bn + \frac{C}{R} (n + n^3) + \frac{D}{R^2} n^3 & Bn^2 + 2 \frac{C}{R} n^2 + \frac{D}{R^2} n^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь B, C и D — жесткостные характеристики пакета, определяемые формулами

$$B = \sum_{i=1}^N E_i (z_i - z_{i-1}); \quad C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N E_i (z_i^2 - z_{i-1}^2);$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N E_i (z_i^3 - z_{i-1}^3).$$

В частности, для однослойного кольца, взяв в качестве координатной окружности среднюю линию, получим $B = Eh$; $C = 0$; $D = (Eh^3)/12$.

При подсчете второго интеграла учтем условие равновесия (3.138), тогда

$$\int_V \delta \{e_{**}\}^T \{\sigma_0\} dV = \delta \{q_*\}^T [S_*] \{q_*\},$$

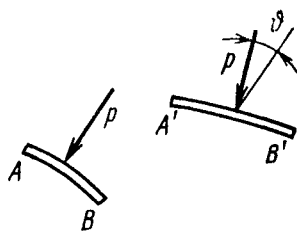


Рис. 3.13.

где

$$[S_*] = -\pi p \begin{bmatrix} n^2 & n \\ n & 1 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления третьего интеграла определим вектор дополнительных нагрузок. В начальном состоянии на элемент кольца AB (рис. 3.13, а) действует давление p , равнодействующая от которого равна pAB . При переходе в смежное состояние элемент поворачивается на угол θ и получает удлинение ϵ_* . Поэтому величина повернутой равнодействующей равна $pAB(1 + \epsilon_*)$. Таким образом, вектор дополнительных нагрузок на элементе кольца $A'B'$ (см. рис. 3.13, б) равен $\{p_*\} = \{-p\epsilon_*, p\theta\}$. Окончательно находим

$$\int_V \delta \{u_*\}^T \{p_*\} d = \delta \{q_*\}^T [Z_*] \{q_*\},$$

где

$$[Z_*] = \pi p \begin{bmatrix} -1 & -n \\ -n & -1 \end{bmatrix}.$$

Сложив все три найденных интеграла и приравняв сумму нулю, получим $\delta \{q_*\}^T ([K_*] + [S_*] + [Z_*]) \{q_*\} = 0$.

В силу произвольности вариаций $\delta \{q_*\}$ приходим к однородной системе алгебраических уравнений

$$([K_*] + [S_*] + [Z_*]) \{q_*\} = 0.$$

В развернутом виде матрица этой однородной системы уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} \bar{B} + 2\bar{C}n^2 + \bar{D}n^4 - p(n^2 - 1) & \bar{B}n + \bar{C}(n^3 + n) + \bar{D}n^3 \\ \bar{B}n + \bar{C}(n^3 + n) + \bar{D}n^3 & \bar{B}n^2 + 2\bar{C}n^2 + \bar{D}n^2 \end{bmatrix},$$

где $\bar{B} = B/R$, $\bar{C} = C/R^2$, $\bar{D} = D/R^3$.

Из условия равенства нулю определителя полученной системы находим собственные значения p_n , наименьшее из которых даст критическую величину внешнего давления $p_{кр}$:

$$p_n = \frac{D_{\min}(n^2 - 1)}{R^3 \left[\left(1 + \frac{C}{BR}\right)^2 + \frac{D_{\min}}{BR^2} \right]} \quad (n_{кр} = 2).$$

Входящий в последнюю формулу комплекс $D_{\min} = (D - C^2/B)$ не зависит от выбора координатной окружности и является факти-

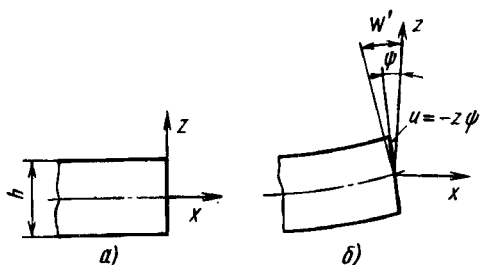


Рис. 3.14.

емое имеет порядок $(h/R)^2$ и также должно быть отброшено. Окончательно получим $p_{кр} = 3D_{\min}/R^3$. Интересно отметить, что при решении нам не понадобились конкретные значения начальных напряжений σ_{0i} в отдельных слоях; в решении было использовано лишь интегральное условие равновесия (3.138). Поэтому распределение начальных напряжений никак не влияло (если оставаться в рамках теории изгиба тонких колец) на величину критического давления. В частности, устойчивость многослойной оболочки совершенно не связана со всякого рода самоуравновешенными начальными напряжениями в ее слоях.

Пример 2. Получение канонических систем для решения задач изгиба и устойчивости прямолинейного стержня с учетом деформаций поперечного сдвига.

На рис. 3.14 изображены сечения стержня до и после деформации. В отличие от классической гипотезы Бернулли предположим, что сечение стержня остается плоским, но поворачивается на угол ψ , отличный от угла поворота нормали dw/dx . Будем считать, что волокна не деформируются в направлении оси z , т. е. проведем расчет без учета деформаций поперечного обжатия. За обобщенные перемещения в примере приняты нормальное перемещение w и угол поворота сечения ψ , т. е. $\{X\} = \{w, \psi\}$. В качестве компонент вектора $\{Y\}$ примем $\{Y\} = \{w', \psi'\}$, где $(\cdot)' = \frac{d}{dx}(\cdot)$.

Распределения перемещений по сечению стержня согласно принятым гипотезам будут иметь вид $u_{(z)} = -z\psi$; $w_{(z)} = w$ или $\{u\} = [F_1]\{X\} + [F_2]\{Y\}$, где

$$\{u\} = \{u_{(z)}w_{(z)}\}; [F_1] = \begin{bmatrix} 0 & -z \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; [F_2] = 0.$$

Деформации растяжения-сжатия ϵ_x продольных волокон и деформации поперечных сдвигов γ_{xz} определяются через перемещения $u_{(z)}$, $w_{(z)}$:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_{(z)}}{\partial x} = -z\psi';$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_{(z)}}{\partial x} + \frac{\partial u_{(z)}}{\partial z} = w' - \psi$$

ческой изгибной жесткостью многослойного кольца. Входящий в знаменатель этой формулы комплекс C/BR имеет порядок h/R ; поскольку решение получено для тонкостенных колец, то не имеет смысла сохранять в формуле этот комплекс. Наконец, слагаемое $D_{\min}/BR^2$ возникает в результате учета растяжимости кольца; это слага-

или в матричной форме

$$\{\epsilon\} = [L_1] \{X\} + [L_2] \{Y\},$$

где

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \gamma_{xz}\};$$

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad [L_2] = \begin{bmatrix} 0 & -z \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие связи между компонентами векторов $\{X\}$, $\{Y\}$ запишем аналогично (3.45)

$$\frac{d}{dx} \{X\} - [C_1] \{X\} - [C_2] \{Y\} = 0,$$

где

$$[C_1] = 0, \quad [C_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для определения коэффициентов разрешающей системы предварительно вычислим интегралы матричных произведений (3.57). Ширину стержня будем считать единичной:

$$\begin{aligned} [S_{11}] &= \int_{-h/2}^{h/2} [L_1]^T [G] [L_1] dz = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}; \\ [S_{21}] &= [S_{12}]^T = \int_{-h/2}^{h/2} [L_2]^T [G] [L_1] dz = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ [S_{22}] &= \int_{-h/2}^{h/2} [L_2]^T [G] [L_2] dz = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z \\ 1 & 0 \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь E — модуль упругости при растяжении вдоль оси x ; G — модуль поперечного сдвига; $B = Gh$ и $D = Eh^3/12$ — сдвиговая и изгибная жесткости; h — толщина стержня.

Будем считать, что на стержень действует внешняя распределенная нагрузка, направленная вдоль оси z , поэтому в качестве векторов $\{N_1\}$, $\{N_2\}$ [см. (3.58)] примем $\{N_1\} = \{p, 0\}$; $\{N_2\} = 0$.

После выполнения матричных умножений согласно (3.61) получим матричные блоки канонической системы

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [A_{12}] = \begin{bmatrix} 1/B & 0 \\ 0 & 1/D \end{bmatrix};$$

$$[A_{21}] = 0; \quad [A_{22}] = -[A_{11}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

и саму систему

$$\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} \omega \\ \psi \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/D \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ \psi \\ Q \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.139)$$

где компоненты вектора обобщенных внутренних силовых факторов $\{\lambda\}$ обозначены: $\{\lambda\} = \{Q, M\}$ и представляют перерезывающую силу Q и изгибающий момент M в сечении. В развернутом виде система (3.139) запишется так:

$$\begin{aligned} \omega' &= \psi - Q/B; \\ \psi' &= M/D; \\ Q' &= -p; \\ M' &= -Q. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Как видно из рис. 3.15, последние два уравнения (3.140) представляют уравнения равновесия элемента стержня.

Геометрические граничные условия будут задаваться на компоненты вектора $\{X\}$, т. е. на перемещение ω и угол поворота сечения ψ (заметим, что на ω' граничные условия не задаются), силовые условия будут задаваться на компоненты вектора $\{\lambda\}$, т. е. на перерезывающую силу Q и изгибающий момент M .

Полученная разрешающая система дифференциальных уравнений (3.139) достаточно проста и позволяет без особых трудов построить фундаментальные и частные решения для случая постоянных по длине жесткостей B, D и нагрузки p :

$$\begin{Bmatrix} \omega(x) \\ \psi(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x/B - x^3/(6D) & x^2/(2D) \\ 0 & 1 & -x^2/(2D) & x/D \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega(0) \\ \psi(0) \\ Q(0) \\ M(0) \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} p[x^4/(24D) - x^2/(2B)] \\ px^3/(6D) \\ -px \\ px^2/2 \end{Bmatrix}. \quad (3.141)$$

В форме (3.141) решение записано через начальные параметры с помощью матрицы фундаментальных решений и вектора частного решения. Такая форма записи весьма удобна для решения задач. Два начальных параметра определяются граничными условиями при $x = 0$. Два остальных параметра находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений, которая представляет запись граничных условий при $x = l$ с использованием (3.141).

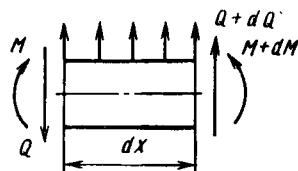


Рис. 3.15.

Получим решения для консольно защемленного стержня (при $x = 0$, $w(0) = 0$, $\psi(0) = 0$), нагруженного на правом краю ($x = l$) перерезывающей силой P . Распределенная нагрузка p равна нулю. Поэтому согласно (3.141) запишем граничные условия при $x = l$:

$$Q(l) = Q(0) = P;$$

$$M(l) = -lQ(0) + M(0) = 0.$$

Отсюда получим $Q(0) = P$, $M(0) = Pl$. Тогда с использованием (3.141) определим решения

$$w(x) = \frac{Pl^3}{D} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right) \frac{D}{Bl^2} \right];$$

$$\psi(x) = \frac{Pl^2}{D} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right) \right];$$

$$Q(x) = P;$$

$$M(x) = Pl \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right) \right].$$

Максимальный прогиб при $x = l$

$$w(l) = \frac{Pl^3}{D} \left(\frac{1}{3} + \frac{D}{Bl^2} \right).$$

В данном примере учет деформаций поперечного сдвига привел к поправке $D/(Bl^2)$, которая для изотропных материалов имеет порядок $(h/l)^2$.

В случае нагружения на правом краю изгибающим моментом $\mathfrak{M}$ согласно (3.141) получим $Q(0) = 0$, $M(0) = \mathfrak{M}$, и решение определится в виде

$$w(x) = \frac{\mathfrak{M}l^2}{D} \left(\frac{x}{l} \right)^2;$$

$$\psi(x) = \frac{\mathfrak{M}l}{D} \left(\frac{x}{l} \right);$$

$$Q(x) = 0;$$

$$M(x) = \mathfrak{M}.$$

Оно ничем не отличается от классического решения изгиба балки. Такое совпадение объясняется тем, что в данной задаче перерезывающая сила в любом сечении равна нулю, и поэтому изгиб стержня происходит без деформаций поперечных сдвигов.

Рассмотрим получение канонической системы дифференциальных уравнений для решения задач устойчивости стержней с учетом де-

формаций поперечного сдвига. Для дополнительных перемещений и деформаций оставим те же выражения, что и при изгибе. Распределение начальных осевых усилий σ_0 по длине стержня будем считать известным. Поскольку дополнительные деформации второго порядка малости для стержня

$$\varepsilon_{**} = \frac{1}{2} (\omega'_*)^2,$$

то для учета начальных напряжений в (3.66) получим

$$\int_V \delta \{\varepsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} dV = \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \delta \omega'_* \sigma_0 \omega'_* dz dx,$$

или в матричном виде

$$\int_V \delta \{\varepsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} dV = \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} ([R_2] \delta \{Y_*\})^T [T] [R_2] \{Y_*\} dz dx,$$

где $[R_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$; $[T] = [\sigma_0]$.

Согласно (3.69) уточнению подлежит лишь матрица

$$[S_{22}] = \int_{-h/2}^{h/2} ([L_2]^T [G] [L_2] + [R_2]^T [T] [R_2]) dz.$$

Она для рассматриваемого случая

$$[S_{22}] = \begin{bmatrix} B + T & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

где $T = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_0 dz$.

Выполнив стандартные матричные операции (3.61), получим каноническую систему

$$\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} w_* \\ \psi_* \\ Q_* \\ M_* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/(1 + T/B) & 1/(B + T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/D \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T/(1 + T/B) & -1/(1 + T/B) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_* \\ \psi_* \\ Q_* \\ M_* \end{Bmatrix}. \quad (3.142)$$

Однородные геометрические граничные условия накладываются на нормальный прогиб w_* и угол поворота ψ_* . Однородные силовые условия могут накладываться на обобщенную перерезывающую силу $Q_* = Q + T\omega'_*$ (рис. 3.16) и изгибающий момент M_* .

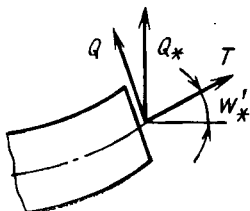


Рис. 3.16.

Для стержня с постоянными по длине жесткостными характеристиками, нагруженного сжимающими усилиями $T = -N$, для системы (3.142) фундаментальными решениями будут

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \omega_*(x) \\ \psi_*(x) \\ Q_*(x) \\ M_*(x) \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & \frac{kD}{N} \sin kx & \frac{k^2 D}{N^2} \left(\frac{1}{k} \sin kx - \frac{N}{k^2 D} x \right) & \frac{1}{N} (1 - \cos kx) \\ 0 & \cos kx & \frac{1}{N} (\cos kx - 1) & \frac{1}{kD} \sin kx \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -kD \sin kx & -\frac{kD}{N} \sin kx & \cos kx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_*(0) \\ \psi_*(0) \\ Q_*(0) \\ M_*(0) \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.143)$$

где

$$k^2 = \frac{N}{D \left(1 - \frac{N}{B} \right)}.$$

В качестве примера рассмотрим решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня: $\omega_*(0) = 0$, $M_*(0) = 0$, $\omega_*(l) = 0$, $M_*(l) = 0$.

Согласно (3.143) данные граничные условия приводят к системе

$$\omega_*(l) = \psi_*(0) \frac{kD}{N} \sin kl + Q_*(0) \frac{k^2 D}{N^2} \left(\frac{1}{k} \sin kl - \frac{N}{k^2 D} l \right) = 0;$$

$$M_*(l) = -\psi_*(0) kD \sin kl - Q_*(0) \frac{kD}{N} \sin kl = 0.$$

Раскрыв и приравняв нулю определитель системы, получим $(1 - N/B) \sin kl = 0$.

Отсюда критическое значение сжимающей силы $N_{кр}$ будет определяться как наименьшее:

$$N_{кр} = \min \left\{ \frac{N_0}{1 + \frac{N_0}{B}}, B \right\} = \frac{N_0}{1 + \frac{N_0}{B}},$$

где $N_0 = \pi^2 D / l^2$ — критическая сила для шарнирно опертого стержня без учета деформаций поперечного сдвига. Аналогичный ход решения используется и для более сложных вариантов граничных условий.

Отметим, что при получении канонических систем и матриц фундаментальных решений в данных примерах наиболее трудоемкие операции матричных перемножений, обращений, интегрирований выполнялись аналитически с целью детально показать последовательность вариационно-матричного способа. Для более сложных моделей деформирования аналогичные операции разумно выполнять на ЭВМ.

Расчет тонких слоистых пластин и оболочек

Учет специфики анизотропных и деформативных свойств, неразрывно связанных с самой структурой композиционных материалов, потребовал развития теоретических подходов к расчету многослойных оболочек. Обзоры основных направлений и результатов исследований по этим проблемам можно найти в работах [1, 18].

В гл. 4 основное внимание уделено многослойным оболочкам вращения, у которых упругие характеристики отдельных слоев примерно одинаковы. Для описания деформирования применяются два подхода. Первый основан на гипотезах Кирхгофа—Лява, второй — на обобщении гипотез С. П. Тимошенко. Рассмотрены способы решения с помощью МКЭ и численного интегрирования систем дифференциальных уравнений задач статики, устойчивости и колебаний, а также вопросы стыковки оболочек с кольцевыми подкрепляющими элементами. Приводится решение задач об осесимметричном деформировании тонкой многослойной оболочки, выполненной из композиционного материала с хрупкой полимерной матрицей, с учетом геометрической, физической и структурной нелинейностей.

Разрешающие уравнения и граничные условия получены вариационным путем. Методы решения ориентированы на использование в расчетах ЭВМ.

§ 4.1. Краткие сведения из теории поверхностей

Рассмотрим гладкую поверхность общего вида, которую для удобства зададим в параметрической форме [8, 17, 34, 55]:

$$x_i = X_i(\alpha_1, \alpha_2) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.1)$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты точки поверхности в декартовой системе координат; α_1, α_2 — параметры; $X_1(\alpha_1, \alpha_2), X_2(\alpha_1, \alpha_2), X_3(\alpha_1, \alpha_2)$ — заданные функции аргументов α_1, α_2 . Пояснения будем проводить для частного случая оболочек — оболочек вращения. Для этих оболочек в качестве параметра α_2 удобно принять угол β , определяющий положение меридиана (рис. 4.1). За параметр α_1 обычно принимают одну из величин: t, r, θ, s (рис. 4.2), где t — координата вдоль оси вращения, r — радиус параллели, θ — угол между осью вращения и нормалью N ; s — расстояние по дуге меридиана. При этом считается, что радиус параллели r и координата t однозначно определяются заданными функциями аргумента α_1 : $r = r(\alpha_1), t = t(\alpha_1)$.

Положение точки M (см. рис. 4.1) определим радиусом-вектором $\{R\}$, который в декартовой системе координат будет иметь компоненты $\{R\} = \{X_1, X_2, X_3\}$.

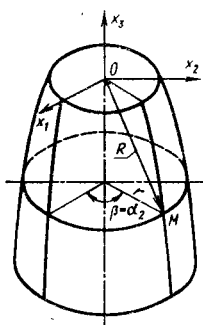


Рис. 4.1.

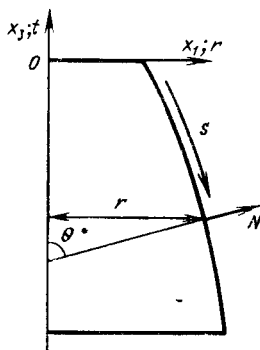


Рис. 4.2.

Здесь и в дальнейшем под вектором $\{R\}$ понимается вектор-столбец, компоненты которого представляют проекции на оси Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 выбранной декартовой системы координат. Для оболочки вращения вектор $\{R\}$ имеет своими компонентами (см. рис. 4.1):

$$\{R\} = \{r \cos \alpha_2, r \sin \alpha_2, t\}. \quad (4.2)$$

Линии на поверхности оболочки, соответствующие значениям параметров $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$, будем называть соответственно α_2 - и α_1 -линиями. На рис. 4.3 показано семейство α_1 - и α_2 -линий для оболочки вращения (α_1 -линии называют меридианами, α_2 -линии — параллелями).

Рассмотрим векторы, касательные к α_1 - и α_2 -линиям (см. рис. 4.3):

$$\{R, 1\} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \{R\} \quad (1 \neq 2).$$

В декартовой системе координат компоненты векторов $\{R, 1\}$, $\{R, 2\}$

$$\{R, 1\} = \{X_{1,1}, X_{2,1}, X_{3,1}\} \quad (1 \neq 2), \quad (4.3)$$

где нижним индексом после запятой отмечен параметр, по которому выполнена операция частного дифференцирования. Для оболочки вращения согласно (4.2) получим

$$\begin{aligned} \{R, 1\} &= \{r' \cos \alpha_2, r' \sin \alpha_2, t'\}, \\ \{R, 2\} &= \{-r \sin \alpha_2, r \cos \alpha_2, 0\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $(\cdot)' = \frac{d}{d\alpha_1} (\cdot)$.

Модули касательных векторов $\{R, 1\}$, $\{R, 2\}$ обозначим коэффициентами A_1 , A_2 и вычислим

$$A_1 = \sqrt{\{R, 1\}^T \{R, 1\}} \quad (1 \neq 2). \quad (4.5)$$

Коэффициенты A_1 , A_2 называют параметрами Ламе. Воспользовавшись выраже-

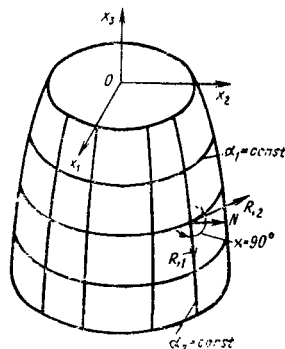


Рис. 4.3.

ниями (4.4), (4.5) для оболочек вращения, получим

$$A_1 = \sqrt{(r')^2 + (t')^2}, \quad A_2 = r. \quad (4.6)$$

Рассмотрим приращение вектора $\{R\}$ при переходе от точки поверхности с параметрами (α_1, α_2) в точку с параметрами $(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2)$. Линейная часть этого приращения, или первый дифференциал, обозначается $d\{R\}$ и определяется следующим образом:

$$d\{R\} = \{R, 1\} d\alpha_1 + \{R, 2\} d\alpha_2. \quad (4.7)$$

Модуль вектора $d\{R\}$ представляет длину элементарной дуги между точками (α_1, α_2) и $(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2)$:

$$dl = \sqrt{d\{R\}^T d\{R\}}. \quad (4.8)$$

Стоящая в подкоренном выражении (4.8) величина $d\{R\}^T d\{R\}$ называется первой квадратичной формой поверхности. С учетом (4.7) ее можно записать в виде:

$$(dl)^2 = \{R, 1\}^T \{R, 1\} d\alpha_1^2 + 2 \{R, 1\}^T \{R, 2\} d\alpha_1 d\alpha_2 + \{R, 2\}^T \{R, 2\} d\alpha_2^2.$$

Коэффициенты $\{R, 1\}^T \{R, 1\}$; $\{R, 1\}^T \{R, 2\}$; $\{R, 2\}^T \{R, 2\}$ называют коэффициентами первой квадратичной формы. Эти коэффициенты можно определить через параметры Ламе A_1, A_2 и угол χ между касательными векторами:

$$\{R, 1\}^T \{R, 1\} = A_1^2 \quad (1 \neq 2); \quad \{R, 1\}^T \{R, 2\} = A_1 A_2 \cos \chi.$$

В случае, когда $\cos \chi = 0$, α_1 - и α_2 -линии ортогональны. Нетрудно убедиться, что для оболочек вращения α_1 - и α_2 -линии в любой точке поверхности ортогональны (см. рис. 4.3), поскольку согласно (4.4) $\{R, 1\}^T \{R, 2\} = 0$.

Введем в рассмотрение единичный вектор нормали к поверхности оболочки (см. рис. 4.3), который определяется векторным произведением:

$$\{N\} = \frac{1}{A_1 A_2 \sin \chi} \{R, 1\} \times \{R, 2\}.$$

Для вычисления компонент вектора $\{N\}$ в декартовой системе координат воспользуемся правилом векторного произведения:

$$\{N\} = \frac{1}{A_1 A_2 \sin \chi} \{ (X_{2,1} X_{3,2} - X_{2,2} X_{3,1}), (X_{3,1} X_{1,2} - X_{1,1} X_{3,2}), (X_{1,1} X_{2,2} - X_{1,2} X_{2,1}) \}, \quad (4.9)$$

где $X_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) — компоненты касательных векторов в декартовой системе координат (4.3). Для оболочек вращения, воспользуясь (4.4) и (4.9), получим

$$\{N\} = \frac{1}{A_1} \{-t' \cos \alpha_2, -t' \sin \alpha_2, r'\}, \quad (4.10)$$

где параметр Ламе A_1 определен выражением (4.6). Тройку единичных векторов $\frac{1}{A_1} \{R, 1\}$; $\frac{1}{A_2} \{R, 2\}$; $\{N\}$ называют основными векторами поверхности, или основным триедром.

Рассмотрим векторы вторых производных от радиуса вектора $\{R\}$. В декартовой системе координат эти векторы будут иметь компоненты

$$\{R, ij\} = \{X_{1, ij}, X_{2, ij}, X_{3, ij}\} \quad (i, j = 1, 2).$$

Для оболочек вращения выражение этих векторов получим с использованием (4.4):

$$\begin{aligned} \{R, 11\} &= \{r'' \cos \alpha_2, r'' \sin \alpha_2, t''\}; \\ \{R, 22\} &= \{-r \cos \alpha_2, -r \sin \alpha_2, 0\}; \\ \{R, 12\} &= \{-r' \sin \alpha_2, r' \cos \alpha_2, 0\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

С помощью векторов $\{R, 11\}$; $\{R, 22\}$; $\{R, 12\}$ можно определить приращение радиуса-вектора при переходе от точки (α_1, α_2) к точке $(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2)$ с точностью до величин второго порядка малости

$$\begin{aligned} \Delta \{R\} &\approx \{R, 1\} d\alpha_1 + \{R, 2\} d\alpha_2 + \\ &+ \frac{1}{2} (\{R, 11\} d\alpha_1^2 + 2 \{R, 12\} d\alpha_1 d\alpha_2 + \{R, 22\} d\alpha_2^2) \end{aligned}$$

и вычислить проекцию этого вектора на нормаль к поверхности. Поскольку векторы $\{R, 1\}$, $\{R, 2\}$ перпендикулярны вектору $\{N\}$,

$$\{N\}^T \Delta \{R\} = \frac{1}{2} (L_{11} d\alpha_1^2 + 2L_{12} d\alpha_1 d\alpha_2 + L_{22} d\alpha_2^2),$$

где

$$L_{11} = \{N\}^T \{R, 11\} \quad (1 \neq 2); \quad L_{12} = \{N\}^T \{R, 12\} \quad (4.12)$$

Коэффициенты L_{11} , L_{22} ; L_{12} называют коэффициентами второй квадратичной формы. С помощью коэффициентов первой и второй квадратичных форм определяются кривизны нормальных сечений, проходящих через α_1 - и α_2 -линии [17]: $k_{11} = -L_{11}/A_1^2$ ($1 \neq 2$); $k_{12} = L_{12}/A_1 A_2$.

Координатные α_1 - α_2 -линии на поверхности оболочки, для которых касательные векторы $\{R, 1\}$; $\{R, 2\}$ ортогональны и коэффициент L_{12} второй квадратичной формы равен нулю, называют линиями кривизны. В этом случае кривизны обозначают $k_1 = k_{11}$, $k_2 = k_{22}$ и называют главными кривизнами:

$$k_1 = -\frac{L_{11}}{A_1^2} \quad (1 \neq 2) \quad (L_{12} = 0). \quad (4.13)$$

Для оболочек вращения α_1 - и α_2 -линии (см. рис. 4.3) являются линиями кривизны. Воспользовавшись выражениями (4.10) для вектора нормали $\{N\}$ и (4.11) для векторов $\{R, 11\}$, $\{R, 22\}$, получим согласно (4.12), (4.13) главные кривизны:

$$k_1 = \frac{r''t' - r't''}{A_1^3}; \quad k_2 = -\frac{t'}{A_1 A_2}.$$

При расчете оболочек вращения понадобятся такие геометрические характеристики, как параметры Ламе A_1 , A_2 , главные кривизны k_1 , k_2 , косинусы и синусы углов между нормальными и осью вращения $(\cos \theta, \sin \theta)$, а также коэффициент $\psi = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}$. Формулы, вы-

ражающие эти характеристики для оболочки, полученной вращением плоской кривой, заданной параметрическими функциями $r(\alpha_1)$, $t(\alpha_1)$, следующие:

$$A_1 = \sqrt{(r')^2 + (t')^2}; \quad A_2 = r; \quad k_1 = \frac{r''t' - r't''}{A_1^3}; \quad k_2 = -\frac{t'}{A_1 A_2}; \quad (4.14)$$

$$\sin \theta = -\frac{t'}{A_1}; \quad \cos \theta = \frac{r'}{A_1}; \quad \psi = \frac{r'}{A_1 A_2}.$$

Ниже приведены примеры расчета геометрических характеристик (4.14) для некоторых типов оболочек вращения.

1. Конус (рис. 4.4). Исходные данные: начальный радиус r_0 и угол θ_0 между осью вращения и нормалью. В качестве параметра α_1 возьмем расстояние по образующей от сечения с радиусом r_0 . В этом случае параметрическое уравнение образующей будет иметь вид

$$r = r_0 + \alpha_1 \cos \theta_0;$$

$$t = -\alpha_1 \sin \theta_0.$$

Тогда $r' = \cos \theta_0$; $t' = -\sin \theta_0$; $r'' = t'' = 0$; согласно (4.14) получим

$$A_1 = 1; \quad A_2 = r_0 + \alpha_1 \cos \theta_0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = \frac{\sin \theta_0}{A_2};$$

$$\sin \theta = \sin \theta_0; \quad \cos \theta = \cos \theta_0; \quad \psi = \frac{\cos \theta_0}{A_2}.$$

Частными случаями конической оболочки будут круглая пластинка ($\theta_0 = 0$) и цилиндрическая оболочка ($\theta_0 = \pi/2$).

2. Эллиптический тор (рис. 4.5). Исходные данные: размеры полуосей a , b и смещение центра эллипса d . В качестве параметра α_1 удобно взять угол между нормалью $\{N\}$ и осью вращения $\{33\}$. В этом случае параметрическое уравнение образующей кривой записывается в виде

$$r = d + \frac{a^2}{c} \sin \alpha_1;$$

$$t = \frac{b^2}{c} \cos \alpha_1, \quad (4.15)$$

где $c = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1}$.

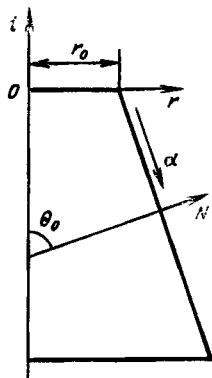


Рис. 4.4.

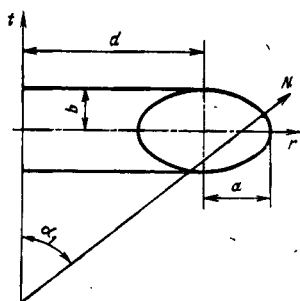


Рис. 4.5.

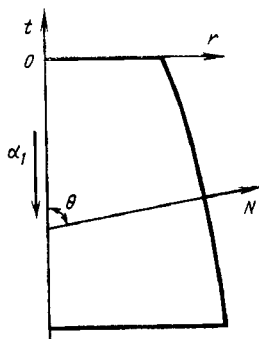


Рис. 4.6.

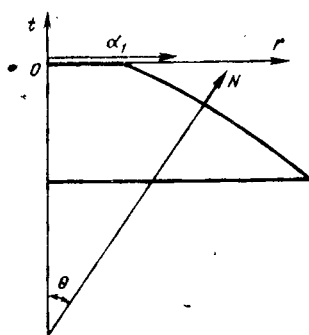


Рис. 4.7.

Первые и вторые производные по параметру α_1 от функций $r(\alpha_1)$ и $t(\alpha_1)$ [(см. 4.15)] будут иметь следующий вид:

$$r' = \frac{a^2 b^2 \cos \alpha_1}{c^3}; \quad t' = -\frac{a^2 b^2 \sin \alpha_1}{c^3};$$

$$r'' = -\frac{a^2 b^2}{c^4} (c \sin \alpha_1 + 3c' \cos \alpha_1); \quad t'' = -\frac{a^2 b^2}{c^4} (c \cos \alpha_1 - 3c' \sin \alpha_1),$$

где $c' = dc/d\alpha_1$.

Геометрические характеристики (4.14) для эллиптического тора имеют вид

$$A_1 = \frac{a^2 b^2}{c^3}; \quad A_2 = d + \frac{a^2 \sin \alpha_1}{c}; \quad k_1 = \frac{1}{A_1}; \quad k_2 = \frac{\sin \alpha_1}{A_2};$$

$$\sin \theta = \sin \alpha_1; \quad \cos \theta = \cos \alpha_1; \quad \psi = \frac{\cos \alpha_1}{A_2}.$$

Частными случаями эллиптического тора будут сфера ($d=0$, $a=b=R$), круговой тор ($d \neq 0$, $a=b=R$), эллипсоид вращения ($d=0$, $a \neq b$).

3. Поверхность вращения, образованная плоской кривой, для описания которой в качестве параметра используется координата, отсчитываемая вдоль оси вращения (рис. 4.6). В этом случае

$$r = r(\alpha_1); \quad t = -\alpha_1; \quad r' = \frac{dr}{d\alpha_1}; \quad t' = -1; \quad r'' = \frac{d^2 r}{d\alpha_1^2}; \quad t'' = 0.$$

тогда согласно (4.14)

$$A_1 = \sqrt{1 + (r')^2}; \quad A_2 = r; \quad k_1 = -r''/A_1^3; \quad k_2 = 1/A_1 A_2; \\ \sin \theta = 1/A_1; \quad \cos \theta = r'/A_1; \quad \psi = r'/(A_1 A_2).$$

4. Поверхность вращения, образованная плоской кривой, для описания которой в качестве параметра используется радиус параллели (рис. 4.7). В этом случае

$$r = \alpha_1; \quad t = t(\alpha_1); \quad r' = 1; \quad t' = \frac{dt}{d\alpha_1}; \quad r'' = 0; \quad t'' = \frac{d^2 t}{d\alpha_1^2},$$

тогда для геометрических характеристик получим

$$A_1 = \sqrt{1 + (t')^2}; \quad A_2 = \alpha_1; \quad k_1 = -t''/A_1^3; \quad k_2 = -t'/A_1 A_2; \\ \sin \theta = -t'/A_1; \quad \cos \theta = 1/A_1; \quad \psi = 1/A_1 A_2.$$

5. Квадратичная аппроксимация угла наклона касательной к меридиану. При решении задач с помощью МКЭ для описания геометрии элемента оболочки вращения часто используется следующий прием [51]. В качестве параметра α_1 выбирается расстояние s вдоль меридиана от первого узлового сечения до текущего сечения

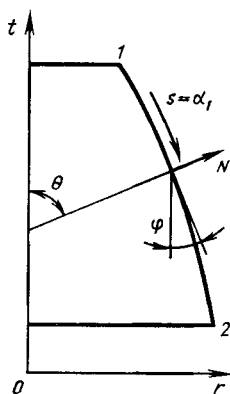


Рис. 4.8.

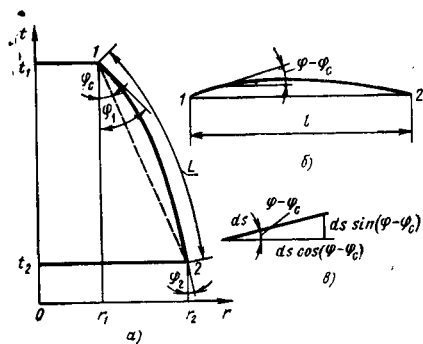


Рис. 4.9.

(рис. 4.8). Аппроксимируется угол φ , характеризующий наклон меридиана ($\varphi = \pi/2 - \theta$), в виде полинома второй степени:

$$\varphi = a_0 + a_1 s + a_2 s^2. \quad (4.16)$$

Константы аппроксимации a_0, a_1, a_2 определяются из трех условий:

$$\varphi(s=0) = \varphi_1; \quad (4.17)$$

$$\varphi(s=L) = \varphi_2; \quad (4.18)$$

$$\int_0^L \sin(\varphi - \varphi_c) ds = 0, \quad (4.19)$$

где L — длина дуги меридиана элемента; φ_1, φ_2 — углы наклона меридиана в узловых сечениях 1 и 2 (см. рис. 4.8 и 4.9, а); φ_c — угол наклона хорды меридиана:

$$\operatorname{tg} \varphi_c = \frac{r_2 - r_1}{t_1 - t_2}. \quad (4.20)$$

Условия (4.17) и (4.18) очевидны (см. рис. 4.9, а). Условие (4.19) требует того, чтобы дуга меридиана длиной L проходила через заданные точки 1 и 2 (рис. 4.9, б). Для достаточно пологих элементов [$\max \{|\varphi - \varphi_c|\} = 3 \div 6^\circ$] можно положить (см. рис. 4.9, в)

$$\sin(\varphi - \varphi_c) \approx \varphi - \varphi_c. \quad (4.21)$$

Тогда из системы уравнений (4.17)–(4.19) получим

$$a_0 = \varphi_1; \quad a_1 = \frac{6\varphi_c - 4\varphi_1 - 2\varphi_2}{L}; \quad a_2 = \frac{3\varphi_1 + 3\varphi_2 - 6\varphi_c}{L^2}.$$

Зная координаты узловых окружностей (см. рис. 4.9, а), определим длину хорды меридиана

$$l = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (t_2 - t_1)^2}; \quad (4.22)$$

используя условие (см. рис. 4.9, б и в)

$$l = \int_0^L \cos(\varphi - \varphi_c) ds,$$

вычислим длину дуги меридиана

$$L = l \left(1 + \frac{2b_1^2 - b_1 b_2 + 2b_2^2}{30} \right), \quad (4.23)$$

где $b_1 = \varphi_1 - \varphi_c$, $b_2 = \varphi_2 - \varphi_c$. При получении (4.23) считается, что для малых углов $\varphi - \varphi_c$ приближенно можно положить

$$\cos(\varphi - \varphi_c) \approx 1 - \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_c)^2. \quad (4.24)$$

Изменение радиуса параллели в пределах элемента определяется следующим образом (см. рис. 4.9, а):

$$r = r_1 + \int_0^s \sin \varphi \, ds. \quad (4.25)$$

Для получения достаточно точного и простого аналитического выражения для r в выражении (4.25) сделаем замену $\sin \varphi = \sin[(\varphi - \varphi_c) + \varphi_c]$, воспользуемся формулой для синуса суммы углов и тогда с учетом (4.21) и (4.24) получим

$$r = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + c_4 s^4 + c_5 s^5, \quad (4.26)$$

где

$$c_0 = r_1; \quad c_1 = (a_0 - \varphi_c) \cos \varphi_c + \left[1 - \frac{1}{2}(a_0 - \varphi_c)^2\right] \sin \varphi_c;$$

$$c_2 = \frac{1}{2} [a_1 \cos \varphi_c - (a_0 - \varphi_c) a_1 \sin \varphi_c];$$

$$c_3 = \frac{1}{3} \left[a_2 \cos \varphi_c - (a_0 - \varphi_c) a_2 \sin \varphi_c - \frac{1}{2} a_1^2 \sin \varphi_c \right];$$

$$c_4 = -\frac{1}{4} a_1 a_2 \sin \varphi_c; \quad c_5 = -\frac{1}{10} a_2^2 \sin \varphi_c.$$

Полученные формулы позволяют вычислить геометрические характеристики элемента. Выполняется это в следующем порядке. В качестве исходных данных по элементу даются координаты узлов r_1, t_1, r_2, t_2 и углы наклона меридиана φ_1, φ_2 (см. рис. 4.9, а). С использованием (4.20) определяется угол наклона хорды φ_c . Далее вычисляются длины хорды (4.22) и дуги (4.23) меридиана. Для сечения с координатой s вычисляется радиус параллели (4.26). Согласно данной параметрической аппроксимации (4.16) при определении геометрических характеристик (4.14) следует положить

$$r' = \sin \varphi; \quad t' = -\cos \varphi;$$

$$r'' = \frac{d\varphi}{ds} \cos \varphi; \quad t'' = \frac{d\varphi}{ds} \sin \varphi,$$

после чего получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s; \quad A_1 = 1; \quad A_2 = r; \quad k_1 = a_1 - 2a_2 s; \quad k_2 = \cos \varphi / r; \\ \sin \theta &= \cos \varphi; \quad \cos \theta = \sin \varphi; \quad \psi = \sin \varphi / r. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Как видно из (4.27), при переходе от элемента к элементу для оболочки вращения общего вида кривизна меридиана k_1 меняется скачком, что при редкой разбивке на элементы вносит определенные погрешности в геометрические характеристики оболочки.

В дальнейшем при получении основных соотношений будем пользоваться векторами, заданными своими проекциями на оси основного триедра (рис. 4.10). В качестве системы координатных α_1 -, α_2 -линий будем выбирать линии кривизн. Чтобы отметить тот факт, что вектор $\{f\}$ задан проекциями на оси основного триедра, будем этот вектор обозначать строчными буквами. Касательные векторы

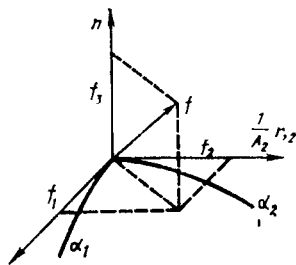


Рис. 4.10.

$\{R_1\}, \{R_2\}$, заданные проекциями на основной триедр, обозначим через $\{r_1\}, \{r_2\}$, в качестве компонент этих векторов будут служить

$$\{r_1\} = \{A_1, 0, 0\}, \{r_2\} = \{0, A_2, 0\}. \quad (4.28)$$

Для единичного вектора нормали соответственно запишем $\{n\} = \{0, 0, 1\}$.

Приведем без вывода правило дифференцирования по параметрам α_i вектора $\{f\}$, заданного проекциями f_1, f_2, f_3 на оси основного триедра (см. рис. 4.10). При дифференцировании по α_i :

$$\{f, i\} = \{f, i\} + [\Gamma_i] \{f\} \quad (i = 1, 2), \quad (4.29)$$

где

$$\begin{aligned} \{f\} &= \{f_1, f_2, f_3\}, \quad \{f, i\} = \{f_{1,i}, f_{2,i}, f_{3,i}\} \quad (i = 1, 2); \\ [\Gamma_1] &= A_1 \begin{bmatrix} 0 & \varphi_{12} & k_1 \\ -\varphi_{12} & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\Gamma_2] = A_2 \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_{21} & 0 \\ \varphi_{21} & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix}; \\ \varphi_{12} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \quad (1 \rightleftharpoons 2). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Векторы $\{f, i\}$, $\{f, 2\}$ называют векторами локальных производных, матрицы $[\Gamma_1]$, $[\Gamma_2]$ характеризуют вращение основного триедра при движении вдоль α_1 -, α_2 -линий.

§ 4.2. Связь деформаций с перемещениями

Пусть для произвольной гладкой оболочки радиус-вектор $\{r(\alpha_1, \alpha_2)\}$ определяет некоторую поверхность и в качестве α_1 -, α_2 -линий выбраны линии кривизны. Эту поверхность будем называть исходной или координатной. Положение точки, принадлежащей оболочке, определим тремя координатами: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где $\alpha_3 = z$ — расстояние по нормали $\{n\}$ к исходной поверхности. Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что точка отстоит на расстояние z от координатной поверхности, радиус-вектор точки обозначим $\{r_{(z)}\}$; выразим его через радиус-вектор координатной поверхности $\{r\}$ и вектор нормали $\{n\}$:

$$\{r_{(z)}\} = \{r\} + z \{n\}. \quad (4.31)$$

Касательные векторы к поверхности z -го слоя определим частными производными

$$\{r_{(z)}, i\} = \{r, i\} + z \{n, i\} \quad (1 \rightleftharpoons 2). \quad (4.32)$$

Поскольку для выражения (4.32) векторы определены проекциями на основной триедр, то для векторов $\{n, i\}$, $\{n, 2\}$ следует воспользоваться правилом дифференцирования [см. (4.29)]. Тогда с учетом выражений для компонент касательных векторов $\{r, i\}$, $\{r, 2\}$ (4.28) получим компоненты касательных векторов $\{r_{(z)}, i\}$, $\{r_{(z)}, 2\}$ для z -го слоя:

$$\begin{aligned} \{r_{(z)}, i\} &= \{H_1, 0, 0\}; \\ \{r_{(z)}, 2\} &= \{0, H_2, 0\}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $H_1 = A_1 (1 + k_1 z)$ ($1 \rightleftharpoons 2$) — называют параметрами Ламе z -го слоя. Отметим, что согласно (4.31) касательный к координате z вектор совпадает с нормалью, поэтому

$$\{r_{(z)}, z\} = \{n\} = \{0, 0, 1\} \quad (4.34)$$

и параметр Ламе $H_3 = 1$.

Пусть в результате внешнего воздействия оболочка деформировалась. Рассматриваемая точка с координатами α_1, α_2, z получила перемещение $\{v_{(z)}\}$. Вектор $\{v_{(z)}\}$ будем задавать компонентами v_1, v_2, v_3 , которые представляют проекции перемещения на оси основного триедра исходной поверхности $\{v_{(z)}\} = \{v_1, v_2, v_3\}$. При получении выражений для деформации в дальнейшем понадобятся векторы частных производных от вектора перемещений $\{v_{(z)}\}$ по криволинейным координатам α_1, α_2 . Выражения для этих векторов получим согласно (4.29):

$$\{v_{(z)}, 1\} = \{v_{(z)}, 1\} + [\Gamma_1] \{v_{(z)}\} \quad (1 \rightleftharpoons 2).$$

В развернутом виде компоненты векторов $\{v_{(z)}, 1\}, \{v_{(z)}, 2\}$ будут

$$\begin{aligned} \{v_{(z)}, 1\} &= A_1 \left\{ \left(\frac{1}{A_1} v_{1,1} + \varphi_{12} v_2 + k_1 v_3 \right), \right. \\ &\quad \left(\frac{1}{A_1} v_{2,1} - \varphi_{12} v_1 \right), \quad \left(\frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_1 v_1 \right) \Big\}; \\ \{v_{(z)}, 2\} &= A_2 \left\{ \left(\frac{1}{A_2} v_{1,2} - \varphi_{21} v_2 \right), \right. \\ &\quad \left(\frac{1}{A_2} v_{2,2} + \varphi_{21} v_1 + k_2 v_3 \right), \quad \left(\frac{1}{A_2} v_{3,2} - k_2 v_2 \right) \Big\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Для частной производной по координате z будем иметь

$$\{v_{(z)}, 3\} = \{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,3}\}. \quad (4.36)$$

Радиус-вектор точки z -го слоя после деформирования

$$\{r_{(z)}^v\} = \{r_{(z)}\} + \{v_{(z)}\}. \quad (4.37)$$

Длина элементарного отрезка z -го слоя, ориентированного вдоль α_i -линии, до деформации составляла

$$dl_i = d\alpha_i \sqrt{\{r_{(z)}, i\}^T \{r_{(z)}, i\}} = H_i d\alpha_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

После деформирования оболочки длина отрезка

$$dl_i^v = d\alpha_i \sqrt{\{r_{(z)}, i\}^T \{r_{(z)}, i\}^v} = H_i^v d\alpha_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$H_i^v = \sqrt{\{r_{(z)}, i\}^T \{r_{(z)}, i\}^v} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.38)$$

— параметр Ламе деформированной поверхности.

Деформацию элементарного отрезка определим как

$$\varepsilon_i = \frac{dl_i^v - dl_i}{dl_i} \quad \text{или} \quad \varepsilon_i = \frac{H_i^v}{H_i} - 1 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.39)$$

С учетом (4.37) вычислим параметр Ламе H_i^v (4.38):

$$H_i^v = H_i \sqrt{1 + \frac{2}{H_i^2} \{r_{(z), i}\}^T \{v_{(z), i}\} + \frac{1}{H_i^2} \{v_{(z), i}\}^T \{v_{(z), i}\}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.40)$$

Предполагая деформации малыми, H_i^v (4.40) можно представить следующим образом:

$$H_i^v = H_i \left(1 + \frac{1}{H_i^2} \{r_{(z), i}\}^T \{v_{(z), i}\} + \frac{1}{2H_i^2} \{v_{(z), i}\}^T \{v_{(z), i}\} \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.41)$$

и получить выражение для деформации элементарного отрезка (4.39):

$$\varepsilon_i = \frac{1}{H_i^2} \left(\{r_{(z), i}\}^T \{v_{(z), i}\} + \frac{1}{2} \{v_{(z), i}\}^T \{v_{(z), i}\} \right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.42)$$

Сдвиговые деформации γ_{12} , γ_{23} , γ_{13} определим как изменения в результате деформирования углов между векторами $\{r_{(z), 1}\}$ и $\{r_{(z), 2}\}$; $\{r_{(z), 2}\}$ и $\{r_{(z), 3}\}$; $\{r_{(z), 1}\}$ и $\{r_{(z), 3}\}$. Вычислим деформацию γ_{ij} . Будем считать, что деформация сдвига мала, тогда $\cos(\pi/2 - \gamma_{ij}) = \sin \gamma_{ij} \approx \gamma_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$ $i \neq j$).

Косинус угла $\pi/2 - \gamma_{ij}$ определяется скалярным произведением единичных векторов $\frac{1}{H_i^v} \{r_{(z), i}^v\}$ и $\frac{1}{H_j^v} \{r_{(z), j}^v\}$ деформированной оболочки. Таким образом,

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{H_i^v H_j^v} \{r_{(z), i}^v\}^T \{r_{(z), j}^v\}. \quad (4.43)$$

Оставаясь в рамках допущений о малости деформаций, выражение (4.43) можно упростить, если принять, что $H_i^v H_j^v \approx H_i H_j$. Тогда с учетом (4.37) получим

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{H_i H_j} (\{r_{(z), i}\}^T \{v_{(z), j}\} + \{r_{(z), j}\}^T \{v_{(z), i}\} + \{v_{(z), i}\}^T \{v_{(z), j}\}) \quad (i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j). \quad (4.44)$$

Получить полные выражения для нелинейных деформаций достаточно просто. Нужно воспользоваться выражениями для касательных векторов (4.33), (4.34), векторов частных производных от вектора перемещений (4.35), (4.36) и выполнить скалярные перемножения, указанные в выражениях для деформаций [см. (4.42) и (4.44)]. После этих процедур получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{1 + k_{1z}} \left(\frac{1}{A_1} v_{1,1} + \Phi_{12} v_2 + k_{13} v_3 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + k_{1z})^2} \times \\ &\times \left[\left(\frac{1}{A_1} v_{1,1} + \Phi_{12} v_2 + k_{13} v_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{A_1} v_{2,1} - \Phi_{12} v_1 \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_{13} v_1 \right)^2 \right] \quad (1 \rightarrow 2); \\ \varepsilon_3 &= v_{3,3} + \frac{1}{2} (v_{1,3}^2 + v_{2,3}^2 + v_{3,3}^2); \end{aligned}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{1+k_2z} \left(\frac{1}{A_2} v_{1,2} - \varphi_{21} v_2 \right) + \frac{1}{1+k_1z} \left(\frac{1}{A_1} v_{2,1} - \varphi_{12} v_1 \right) + \\ + \frac{1}{(1+k_1z)(1+k_2z)} \left[\left(\frac{1}{A_1} v_{1,1} + \varphi_{12} v_2 + k_1 v_3 \right) \left(\frac{1}{A_2} v_{1,2} - \varphi_{21} v_2 \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{A_1} v_{2,1} - \varphi_{12} v_1 \right) \left(\frac{1}{A_2} v_{2,2} + \varphi_{21} v_1 + k_2 v_3 \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_1 v_1 \right) \left(\frac{1}{A_2} v_{3,2} - k_2 v_2 \right) \right]; \quad (4.45)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{1+k_1z} \left(\frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_1 v_1 \right) + v_{1,3} + \\ + \frac{1}{1+k_1z} \left[v_{1,3} \left(\frac{1}{A_1} v_{1,1} + \varphi_{12} v_2 + k_1 v_3 \right) + \right. \\ \left. + v_{2,3} \left(\frac{1}{A_1} v_{2,1} - \varphi_{12} v_1 \right) + v_{3,3} \left(\frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_1 v_1 \right) \right] \quad (1 \neq 2),$$

где $\varphi_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \quad (1 \neq 2).$

Приведенные выражения есть полные нелинейные деформации для трехмерного тела, записанные в криволинейной ортогональной системе координат.

Для деформирования тонких оболочек предполагается справедливой кинематическая гипотеза Кирхгофа—Лява, согласно которой [8, 17, 34, 55] — прямолинейные элементы оболочки, нормальные до деформации к срединной поверхности, остаются прямолинейными, нормальными к деформированной срединной поверхности и сохраняют свою длину. С использованием выражений (4.45) эту гипотезу можно записать:

$$\gamma_{13} = 0; \quad \gamma_{23} = 0; \quad e_3 = 0. \quad (4.46)$$

Приближенное решение системы нелинейных уравнений (4.46) получим с помощью разложения перемещений в степенные ряды относительно аргумента z [34], при этом ограничимся удержанием первых двух членов, т. е.

$$v_i = u_i + z\psi_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.47)$$

Подставим (4.47) в уравнения (4.46), записанные с учетом (4.45) и согласно правилам решения с помощью степенных рядов положим в этих уравнениях $z = 0$. Система (4.46) даст два линейных и одно нелинейное уравнение для определения функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 :

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(1+e_1) + \psi_2\omega_1 - (1+\psi_3)\vartheta_1 &= 0 \quad (1 \neq 2); \\ \psi_1^2 + \psi_2^2 + (1+\psi_3)^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

где

$$e_1 = \frac{1}{A_1} u_{1,1} + \varphi_{12} u_2 + k_1 u_3 \quad (1 \neq 2) - \quad (4.49)$$

деформации;

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1} u_{2,1} - \varphi_{12} u_1 \quad (1 \neq 2) - \quad (4.50)$$

углы сдвига;

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{A_1} u_{3,1} + k_1 u_1 \quad (1 \neq 2) - \quad (4.51)$$

углы поворота нормали,

Решение системы (4.48) можно записать в виде

$$\psi_1 = \frac{a_{31}}{a_{33}} (1 + \psi_3) \quad (1 \neq 2); \quad \psi_3 = a_{33}\chi - 1, \quad (4.52)$$

где

$$a_{31} = \vartheta_1 (1 + e_2) - \omega_1 \vartheta_2 \quad (1 \neq 2); \quad a_{33} = (1 + e_1)(1 + e_2) - \omega_1 \omega_2;$$

$$\chi = (a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2)^{-0.5}.$$

При дополнительном допущении о том, что удлинениями, сдвигами и квадратами углов поворота, нормали можно пренебрегать по сравнению с единицей, решение (4.52) упростится до вида $\psi_1 = \vartheta_1$; $\psi_2 = \vartheta_2$; $\psi_3 = 0$. Искомое распределение перемещений по толщине оболочки будет

$$v_1 = u_1 + z\vartheta_1 \quad (1 \neq 2); \quad (4.53)$$

$$v_3 = u_3.$$

Распределение деформаций ε_1 , ε_2 , γ_{12} по толщине оболочки получим согласно (4.45), (4.53). Будем считать, что для тонких оболочек можно принять

$$\frac{1}{1 + k_1 z} \approx 1 - k_1 z \quad (1 \neq 2). \quad (4.54)$$

Тогда для слоя с координатой z

$$\varepsilon_1 = e_1 + z\kappa_1 + \frac{1}{2} \vartheta_1^2 \quad (1 \neq 2); \quad (4.55)$$

$$\gamma_{12} = e_{12} + z\kappa_{12} + \vartheta_1 \vartheta_2,$$

где

$$e_{12} = \omega_1 + \omega_2;$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A_1} \vartheta_{1,1} + \varphi_{12} \vartheta_2 - k_1 e_1 \quad (1 \neq 2);$$

$$\begin{aligned} \kappa_{12} &= \tau_1 + \tau_2 - k_1 \omega_1 - k_2 \omega_2 = 2\tau_1 - k_1 e_{12} - \\ &- k_1 (\omega_1 - \omega_2) = 2\tau_2 - k_1 e_{12} - k_2 (\omega_2 - \omega_1); \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{A_1} \vartheta_{2,1} - \varphi_{12} \vartheta_1 \quad (1 \neq 2).$$

Различные варианты записи изменения параметра кривизны κ_{12} получены с использованием равенства $\tau_1 + k_1 \omega_2 = \tau_2 + k_2 \omega_1$, которое вытекает из тождества $\{r_{(z), 1}^v\}^T \{r_{(z), 32}^v\} = \{r_{(z), 2}^v\}^T \{r_{(z), 31}^v\}$ при $z = 0$.

При расчете тонких оболочек часто применяются формулы для изменений параметров кривизны, отличающиеся от выражений (4.56) на величины $k_1 e_1$, $k_2 e_2$, $(k_1 + k_2) e_{12}$:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \vartheta_{1,1} + \varphi_{12} \vartheta_2 \quad (1 \neq 2); \\ \kappa_{12} &= 2(\tau_1 + k_1 \omega_2) = 2(\tau_2 + k_2 \omega_1) = \\ &= \tau_1 + \tau_2 + k_1 \omega_2 + k_2 \omega_1, \end{aligned} \quad (4.57)$$

что является следствием неполного учета соотношений (4.54). Однако вносимые при этом погрешности практически не влияют на результаты расчетов тонких оболочек.

§ 4.3. Применение МКЭ для расчета многослойных оболочек вращения

К наиболее распространенному виду многослойных оболочек из композиционных материалов относятся оболочки вращения. Анализ прочности, устойчивости и динамики тонких многослойных оболочек вращения проведем с использованием кольцевого оболочечного элемента. Специфика многослойной структуры элемента будет характеризоваться интегральными жесткостными свойствами по толщине пакета, которые подробно рассмотрены в гл. I.

Для удобства перейдем к следующим обозначениям:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1; \beta = \alpha_2; A = A_1; B = A_2; \psi = \varphi_{21}; \\ u_{(z)} &= v_1; v_{(z)} = v_2; w_{(z)} = v_3; \\ u &= u_1; v = u_2; w = u_3,\end{aligned}\tag{4.58}$$

где $u_i = v_i (z = 0)$.

Согласно последовательности решения задач с помощью МКЭ для отдельного элемента зададим аппроксимацию полей перемещений. Следуя гипотезам Кирхгофа—Лява для тонких оболочек, будем считать, что касательные и нормальные перемещения изменяются по координате z следующим образом:

$$\begin{aligned}u_{(z)} &= u(\alpha, \beta) + z\vartheta_1(\alpha, \beta); \\ v_{(z)} &= v(\alpha, \beta) + z\vartheta_2(\alpha, \beta); \\ w_{(z)} &= w(\alpha, \beta),\end{aligned}\tag{4.59}$$

где u, v, w — перемещения координатной поверхности ($z = 0$); ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота нормали:

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 u; \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + k_2 v.\tag{4.60}$$

В силу периодичности решений по окружной координате β перемещения u, v, w можно разложить в тригонометрические ряды и представить в виде

$$\begin{aligned}u(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_n(\alpha) \cos n\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(\alpha) \sin n\beta; \\ v(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_n(\alpha) \sin n\beta - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}_n(\alpha) \cos n\beta; \\ w(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(\alpha) \cos n\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{w}_n(\alpha) \sin n\beta,\end{aligned}\tag{4.61}$$

или в матричной форме

$$\{U\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_n] \{\bar{U}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_n] \{\tilde{U}_n\},\tag{4.62}$$

где

$$\begin{aligned}\{U\} &= \{u, v, w\}; \\ \{\bar{U}_n\} &= \{\bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n\}; \\ \{\tilde{U}_n\} &= \{\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n\}.\end{aligned}\quad (4.62A)$$

Здесь $[\bar{\beta}_n]$, $[\tilde{\beta}_n]$ — диагональные матрицы:

$$\begin{aligned}[\bar{\beta}_n] &= \begin{bmatrix} \cos n\beta & \sin n\beta & \cos n\beta \\ \sin n\beta & -\cos n\beta & \sin n\beta \end{bmatrix}; \\ [\tilde{\beta}_n] &= \begin{bmatrix} \sin n\beta & -\cos n\beta & \sin n\beta \\ \cos n\beta & \sin n\beta & \cos n\beta \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Коэффициенты разложений $\{\bar{U}_n\}$ и $\{\tilde{U}_n\}$ соответствуют симметричным и кососимметричным (относительно нулевого меридиана $\beta = 0$) составляющим решений и являются функциями координаты α . Знак «—» в разложении v [см. (4.61)] при кососимметричных гармониках поставлен специально. Такой выбор знаков позволяет формировать одинаковые матрицы жесткости элементов для кососимметричных и симметричных составляющих.

В дальнейшем, если для величин или выражений, отмеченных индексом n , не указывается принадлежность к симметричным или кососимметричным составляющим, то подразумевается, что такая запись справедлива как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих. Например, вместо (4.62A) сокращенно можно записать $\{U_n\} = \{u_n, v_n, w_n\}$.

При решении задач методом конечных элементов нужно обеспечить необходимую гладкость сопряжения элементов между собой. Разрешающие уравнения МКЭ будут получены с использованием интегральной формулировки принципа возможных перемещений [см. 3.3]. Входящие в подынтегральное выражение деформации содержат первые производные по α от касательных перемещений u , v и вторые производные от нормального перемещения w . Поэтому при переходе от элемента к элементу необходимо обеспечить непрерывность по α как самих функций u , v , w , так и первых производных от w . Таким условиям удовлетворяют аппроксимации следующего вида [51]:

$$\begin{aligned}u_n(\alpha) &= c_{1n} + c_{2n}\alpha; \\ v_n(\alpha) &= c_{3n} + c_{4n}\alpha; \\ w_n(\alpha) &= c_{5n} + c_{6n}\alpha + c_{7n}\alpha^2 + c_{8n}\alpha^3,\end{aligned}\quad (4.63)$$

справедливые как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих. В матричной форме аппроксимации по α запишем следующим образом:

$$\{U_n\} = [N] \{C_n\}, \quad (4.64)$$

где

$$\begin{aligned}\{C_n\} &= \{c_{1n}, c_{2n}, c_{3n}, c_{4n}, c_{5n}, c_{6n}, c_{7n}, c_{8n}\}; \\ [N] &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (4.65)$$

Для удобства сопряжения элементов перейдем к обобщенным узловым перемещениям, которые (в отличие от неопределенных коэффициентов $\{C_n\}$) имеют наглядное геометрическое представление: амплитудные значения гармоник разложения перемещений и углов поворота нормали к плоскости меридиана (рис. 4.11). Согласно определению запишем обобщенные перемещения в узловых сечениях 1 и 2: $\{q\} = \{u^1, v^1, w^1, \vartheta_1^1, u^2, v^2, w^2, \vartheta_1^2\}$.

Здесь верхние индексы указывают на принадлежность соответствующему узловому сечению. Разложение компонент вектора $\{q\}$ по угловой координате β в тригонометрические

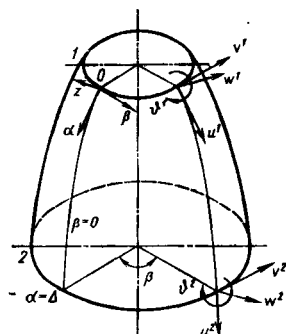


Рис. 4.11.

ряды представим в виде $\{q\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{b}_{qn}] \{\bar{q}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{b}_{qn}] \{\tilde{q}_n\}$,

где $\{q_n\} = \{u_n^1, v_n^1, w_n^1, \vartheta_{1n}^1, u_n^2, v_n^2, w_n^2, \vartheta_{1n}^2\}$; $[\bar{b}_{qn}]$, $[\tilde{b}_{qn}]$ — диагональные матрицы, содержащие функции разложения:

$$[\bar{b}_{qn}] = \begin{bmatrix} \cos n\beta & \sin n\beta & \cos n\beta & \cos n\beta & \cos n\beta & \sin n\beta & \cos n\beta & \cos n\beta \end{bmatrix};$$

$$[\tilde{b}_{qn}] = \begin{bmatrix} \sin n\beta & -\cos n\beta & \sin n\beta & \sin n\beta & \sin n\beta & -\cos n\beta & \sin n\beta & \sin n\beta \end{bmatrix}.$$

С использованием аппроксимации перемещений (4.63) для симметричных составляющих обобщенных перемещений запишем:

$$\begin{aligned} u_n |_{\alpha=0} &= u_n^1; & u_n |_{\alpha=\Delta} &= u_n^2; \\ v_n |_{\alpha=0} &= v_n^1; & v_n |_{\alpha=\Delta} &= v_n^2; \\ w_n |_{\alpha=0} &= w_n^1; & w_n |_{\alpha=\Delta} &= w_n^2; \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$-\frac{1}{A^0} \frac{dw_n}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + k_1^0 u_n |_{\alpha=0} = \vartheta_{1n}^1; \quad -\frac{1}{A^\Delta} \frac{dw_n}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\Delta} + k_1^\Delta u_n |_{\alpha=\Delta} = \vartheta_{1n}^2.$$

Здесь A^0 , A^Δ , k_1^0 , k_1^Δ — параметры Ламе и кривизны меридиана для начального и конечного сечений; Δ — значение параметра α для второго сечения (см. рис. 4.11). Когда в качестве параметра α выбирается длина дуги меридиана s , Δ равняется L (см. рис. 4.9). После подстановки в уравнения (4.66) аппроксимации перемещений (4.63) получим линейную систему восьми уравнений относительно неопределенных коэффициентов $c_{1n} - c_{8n}$. Решение этой системы позволяет выразить неопределенные коэффициенты через обобщенные узловые перемещения $\{q_n\}$:

$$\{C_n\} = [\eta] \{q_n\},$$

где

$$[\eta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\Delta & 0 & 0 & 0 & 1/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\Delta & 0 & 0 & 0 & 1/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^0 k_1^0 & 0 & 0 & -A^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4A^0 k_1^0}{\Delta} & 0 & -\frac{3}{\Delta^2} & \frac{4A^0}{\Delta} & \frac{A^{\Delta} k_1^{\Delta}}{\Delta} & 0 & \frac{3}{\Delta^2} & \frac{A^{\Delta}}{\Delta} \\ \frac{3A^0 k_1^0}{\Delta^2} & 0 & \frac{2}{\Delta^3} & -\frac{3A^0}{\Delta^2} & \frac{A^{\Delta} k_1^{\Delta}}{\Delta^2} & 0 & -\frac{2}{\Delta^3} & -\frac{A^{\Delta}}{\Delta^2} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

после чего аппроксимации по α амплитудных значений гармоник перемещений (4.64) можно записать через обобщенные узловые перемещения:

$$\{U_n\} = [\phi] \{q_n\}, \quad (4.68)$$

где

$$[\phi] = [N][\eta] - \text{матрица функций формы.} \quad (4.69)$$

Окончательно распределение перемещений координатной поверхности в пределах элемента (4.62) принимает следующий вид:

$$\{U\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_n] [\phi] \{\bar{q}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_n] [\phi] \{\tilde{q}_n\}. \quad (4.70)$$

Получим распределение углов поворота нормали (4.60) в пределах элемента. Для этого воспользуемся выражениями (4.61), (4.63), (4.67) и выполним действия согласно (4.60).

Тогда

$$\{\vartheta\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{\vartheta n}] \{\bar{\vartheta}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{\vartheta n}] \{\tilde{\vartheta}_n\}, \quad (4.71)$$

где

$$\{\vartheta\} = \{\vartheta_1, \vartheta_2\}; \quad \{\vartheta_n\} = \{\vartheta_{1n}, \vartheta_{2n}\};$$

$$[\tilde{\beta}_{\vartheta n}] = [\sqrt{\cos n\beta}, \sin n\beta]; \quad [\tilde{\beta}_{\vartheta n}] = [\sin n\beta, -\cos n\beta].$$

Амплитудные значения симметричных и кососимметричных составляющих гармоник разложения углов поворота нормали $\{\bar{\vartheta}_n\}$ и $\{\tilde{\vartheta}_n\}$ могут быть выражены через обобщенные узловые перемещения:

$$\{\vartheta_n\} = [J_n] \{q_n\}, \quad (4.72)$$

где

$$[J_n] = [N_{0n}] [\eta];$$

$$[N_{0n}] = \begin{bmatrix} k_1 & k_1\alpha & 0 & 0 & 0 & -1/A & -2\alpha/A & -3\alpha^2/A \\ 0 & 0 & k_2 & k_2\alpha & \bar{n} & \bar{n}\alpha & \bar{n}\alpha^2 & \bar{n}\alpha^3 \end{bmatrix}; \quad \bar{n} = n/B;$$

окончательный вид распределения углов поворота будет следующим:

$$\{\vartheta\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{\vartheta n}] [J_n] \{\bar{q}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{\vartheta n}] [J_n] \{\tilde{q}_n\}.$$

Далее получим распределение линейных деформаций и изменений кривизн, соответствующих выбранным аппроксимациям перемещений. Предварительно выполним разложения в тригонометрические ряды выражений (4.49), (4.50), (4.57):

$$\{E\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{\varepsilon n}] \{\bar{E}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{\varepsilon n}] \{\tilde{E}_n\}, \quad (4.73)$$

где

$$\{E\} = \{e_1, e_2, e_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}\};$$

$$\{E_n\} = \{e_{1n}, e_{2n}, e_{12n}, \kappa_{1n}, \kappa_{2n}, \kappa_{12n}\}.$$

Здесь диагональные матрицы $[\bar{\beta}_{\varepsilon n}]$, $[\tilde{\beta}_{\varepsilon n}]$ содержат следующие компоненты:

$$[\bar{\beta}_{\varepsilon n}] = \begin{bmatrix} \cos n\beta & \cos n\beta & \sin n\beta & \cos n\beta & \cos n\beta & \sin n\beta \end{bmatrix};$$

$$[\tilde{\beta}_{\varepsilon n}] = \begin{bmatrix} \sin n\beta & \sin n\beta & -\cos n\beta & \sin n\beta & \sin n\beta & -\cos n\beta \end{bmatrix}. \quad (4.73A)$$

Для симметричных компонент n -й гармоники разложения по угловой координате β согласно (4.49), (4.50), (4.57) получим следующие выражения:

$$e_{1n} = \frac{1}{A} \frac{du_n}{d\alpha} + k_1 w_n;$$

$$e_{2n} = \bar{n} v_n + \psi u_n + k_2 w_n; \quad (4.74)$$

$$e_{12n} = \frac{1}{A} \frac{dv_n}{d\alpha} - \bar{n} u_n - \psi v_n;$$

$$\kappa_{1n} = -\frac{1}{A^2} \frac{d^2 w_n}{d\alpha^2} + \frac{1}{A^3} \frac{dA}{d\alpha} \frac{dw_n}{d\alpha} + \frac{1}{A} \frac{dk_1}{d\alpha} u_n + \frac{k_1}{A} \frac{du_n}{d\alpha};$$

$$\kappa_{2n} = \bar{n}^2 w_n + k_2 \bar{n} v_n + \psi \left(-\frac{1}{A} \frac{dw_n}{d\alpha} + k_1 u_n \right);$$

$$\kappa_{12n} = 2 \left(\bar{n} \frac{1}{A} \frac{dw_n}{d\alpha} - k_1 \bar{n} u_n - \psi (\bar{n} w_n + k_2 v_n) + k_2 \frac{1}{A} \frac{dv_n}{d\alpha} \right).$$

Подстановка аппроксимаций перемещений в форме (4.63) в выражения (7.74) дает связь искомого распределения деформаций и изме-

нений кривизн с коэффициентами $\{C_n\}$: $\{E_n\} = [B_{cn}] \{C_n\}$, где

$$[B_{cn}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/A & 0 & 0 & k_1 & k_1\alpha & k_1\alpha^2 & k_1\alpha^3 \\ \psi & \psi\alpha & \bar{n} & \bar{n}\alpha & k_2 & k_2\alpha & k_2\alpha^2 & k_2\alpha^3 \\ -\bar{n} & -\bar{n}\alpha & -\psi & 1/A - \psi\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k'_1/A & k'_1\alpha/A + & 0 & 0 & 0 & A'/A^3 & 2A'\alpha/A^3 - & 3A'\alpha^2/A^3 - \\ & + k_1/A & & & & & -2/A^2 & -6\alpha/A^2 \\ \psi k_1 & \psi k_1\alpha & k_2\bar{n} & k_2\bar{n}\alpha & \bar{n}^2 & \bar{n}^2\alpha - & \bar{n}^2\alpha^2 - & \bar{n}^2\alpha^3 - \\ & & & & & -\psi/A & -2\psi\alpha/A & -3\psi\alpha^2/A \\ -2k_1\bar{n} & -2k_1\bar{n}\alpha & -2\psi k_2 & -2\psi k_2\alpha + & -2\psi\bar{n} & -2\psi\bar{n}\alpha + & -2\psi\bar{n}\alpha^2 + & -2\psi\bar{n}\alpha^3 + \\ & & & + 2k_2/A & & + 2\bar{n}/A & + 4\bar{n}\alpha/A & + 6\bar{n}\alpha^2/A \end{bmatrix};$$

$$k'_1 = \frac{dk_1}{d\alpha}; \quad A' = \frac{dA}{d\alpha}; \quad \bar{n} = n/B.$$

В результате специального выбора знаков в разложениях u [см. (4.61)] и e_{12} , κ_{12} [см. (4.73A)] полученное выражение справедливо как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих. Окончательно с учетом (4.67) распределение деформаций и изменений кривизн представим в виде

$$\{E\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{en}] \{\bar{E}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{en}] \{\tilde{E}_n\}, \quad (4.75)$$

и

$$\{E_n\} = [B_n] \{q_n\}, \quad (4.76)$$

где $[B_n] = [B_{cn}] [\eta]$.

Для получения разрешающих уравнений метода конечных элементов воспользуемся принципом возможных перемещений. Как и прежде (см. § 3.8), рассмотрим отдельный элемент, нагруженный поверхностными нагрузками $\{p\}$ и реакциями отброшенных частей $\{t\}$. Согласно принципу возможных перемещений в положении равновесия должно выполняться условие

$$\int_{V^e} \delta \{e\}^T \{\sigma\} dV - \int_{S^e} \delta \{U\}^T \{p\} dS - \int_0^{2\pi} \delta \{q\}^T \{t\} d\beta = 0, \quad (4.77)$$

где V^e , S^e — соответственно объем и площадь поверхности элемента; $\{q\}$ — обобщенные перемещения узловых сечений.

Рассмотрим последовательно каждое слагаемое, входящее в (4.77). Первое слагаемое, характеризующее работу внутренних сил, можно представить следующим образом:

$$\int_{V^e} \delta \{e\}^T \{\sigma\} dV = \int_0^{\Delta} \int_0^{2\pi} \int_h (\delta \{e\} + z \delta \{\kappa\})^T \{\sigma\} dz AB d\beta d\alpha. \quad (4.78)$$

Здесь $\{e\} = \{e_1, e_2, e_{12}\}$; $\{\kappa\} = \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}\}$; $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}$; h — толщина многослойной оболочки. Выполним в выражении (4.78)

интегрирование по координате z :

$$\int_h (\delta \{e\} + z \delta \{\kappa\})^T \{\sigma\} dz = \delta \{e\}^T \{T\} + \delta \{\kappa\}^T \{M\} = \delta \{E\}^T \{Q\}, \quad (4.79)$$

где

$$\{T\} = \int_h \{\sigma\} dz; \{M\} = \int_h \{\sigma\} z dz; \{E\} = \{\{e\}, \{\kappa\}\}; \{Q\} = \{\{T\}, \{M\}\}.$$

Векторы $\{T\}$, $\{M\}$, по определению, представляют векторы погонных усилий и моментов. В развернутом виде компоненты вектора линейных деформаций и изменений кривизны $\{E\}$ были приведены выше для выражения (4.73). С использованием интегральных по толщине соотношений упругости, полученных для многослойного пакета [см. (1.88)], запишем

$$\{Q\} = [D] \{E\}, \quad (4.80)$$

после этого интеграл (4.79) примет следующий вид:

$$\int_h (\delta \{e\} + z \delta \{\kappa\})^T \{\sigma\} dz = \delta \{E\}^T [D] \{E\}. \quad (4.81)$$

С учетом разложения $\{E\}$ по угловой координате β в тригонометрические ряды (4.75) выполним следующее интегрирование:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \delta \{E\}^T [D] \{E\} d\beta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{en}] \delta \{\bar{E}_n\} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{en}] \delta \{\tilde{E}_n\} \right)^T [D] \left(\sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{en}] \{\bar{E}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{en}] \{\tilde{E}_n\} \right) d\beta. \end{aligned} \quad (4.82)$$

В выражении (4.82) после выполнения операций умножения будут встречаться интегралы, для которых

$$\int_0^{2\pi} [\bar{\beta}_{en}]^T [D] [\bar{\beta}_{em}] d\beta = \int_0^{2\pi} [\tilde{\beta}_{en}]^T [D] [\tilde{\beta}_{em}] d\beta = 0 \quad (4.83)$$

при любых номерах гармоник n и m . А также интегралы

$$\int_0^{2\pi} [\bar{\beta}_{en}]^T [D] [\bar{\beta}_{em}] d\beta = \int_0^{2\pi} [\tilde{\beta}_{en}]^T [D] [\tilde{\beta}_{em}] d\beta = d_n [D], \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \text{где } d_n = \int_0^{2\pi} \cos n\beta \sin m\beta d\beta = \int_0^{2\pi} \cos n\beta \cos m\beta d\beta = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ \pi & \text{при } n = m \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отдельного рассмотрения требует случай $n = m = 0$. Можно показать, что матрица жесткости элемента распадается на две независимые матрицы, характеризующие жесткости на осесимметричный изгиб и осесимметричное кручение, поэтому без потери общности

для (4.84) можно положить $d_n = 2\pi$ при $n = m = 0$. С учетом (4.83) и (4.84) интегрирование по координате β даст

$$\int_0^{2\pi} \delta \{E\}^T [D] \{E\} d\beta = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \delta \{\bar{E}_n\}^T [D] \{\bar{E}_n\} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \delta \{\bar{E}_n\}^T [D] \{\tilde{E}_n\}. \quad (4.85)$$

Отметим, что свойства интегралов (4.83), (4.84), определяющиеся структурой матрицы коэффициентов упругости $[D]$ для слоистой оболочки с ортотропными слоями (см. § 1.5), позволяют разделить [см. (4.85)] осесимметричные и кососимметричные составляющие решения.

Последнее интегрирование для выражения (4.78) выполняется по координате α . С учетом (4.85) и (4.76) окончательно получим

$$\int_{V^e} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_0^{\Delta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \delta \{\bar{E}_n\}^T [D] \{\bar{E}_n\} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \delta \{\tilde{E}_n\}^T [D] \{\tilde{E}_n\} \right) AB d\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \delta \{\bar{q}_n\}^T [K_n] \{\bar{q}_n\} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \delta \{\tilde{q}_n\}^T [K_n] \{\tilde{q}_n\}, \quad (4.86)$$

$$[K_n] = \int_0^{\Delta} [B_n]^T [D] [B_n] AB d\alpha \quad (4.87)$$

— матрица жесткости элемента для n -х симметричных и кососимметричных составляющих гармоник разложения.

В последующем, в силу разделения отдельных составляющих гармоник разложения, воспользуемся сокращенной записью и, например, вместо (4.86) будем записывать

$$\left(\int_{V^e} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \right)_n = d_n \delta \{q_n\}^T [K_n] \{q_n\},$$

подразумевая при этом, что полученная запись справедлива как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих n -й гармоники разложения.

Интегрирование по координате α выражения (4.87) выполняется численно на ЭВМ с использованием квадратурных формул. Как показала практика расчета, достаточно точные результаты получаются при использовании 4—8 точек интегрирования [26].

Второе слагаемое в записи принципа возможных перемещений [см. (4.77)] определяет работу внешних поверхностных нагрузок на возможных перемещениях. Прежде чем приступить к интегрированию по площади элемента, разложим поверхностные нагрузки в триго-

нометрические ряды по угловой координате β аналогично тому, как это было сделано для перемещений координатной поверхности:

$$\{p\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_n] \{\bar{p}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_n] \{\tilde{p}_n\}, \quad (4.88)$$

где $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}$, $\{p_n\} = \{p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}\}$; $[\bar{\beta}_n]$, $[\tilde{\beta}_n]$ — матрицы, приведенные ранее для выражения (4.62). Коэффициенты разложений $\{\bar{p}_n\}$ и $\{\tilde{p}_n\}$ считаются известными функциями координаты α . С учетом (4.62) и (4.88) получим

$$\left(\int_{S^e} \delta \{U\}^T \{p\} dS \right)_n = d_n \int_0^\Delta \delta \{U_n\}^T \{p_n\} d\alpha.$$

Далее воспользуемся функциями формы (4.69) и выполним интегрирование по α , после чего получим

$$\left(\int_{S^e} \delta \{U\}^T \{p\} dS \right)_n = d_n \delta \{q_n\}^T \{P_n\}, \quad (4.89)$$

где $\{P_n\} = \int_0^\Delta [\phi]^T \{p_n\} A B d\alpha$

— вектор приведенных узловых сил для n -х составляющих нагрузок.

Рассмотрим последнее слагаемое в уравнении (4.77). Под компонентами вектора реакций $\{t\}$ будем понимать действующие в узловых сечениях погонные усилия (направления их совпадают с направлениями u , v , w) и погонный изгибающий момент (направленный в сторону положительного направления угла поворота v_1), умноженные на соответствующие радиусы сечений r_1 и r_2 . Интегрирование по координате β выполним с учетом разложения в тригонометрические ряды. После чего получим

$$\left(\int_0^{2\pi} \delta \{q\}^T \{t\} d\beta \right)_n = d_n \delta \{q_n\}^T \{t_n\}. \quad (4.90)$$

Таким образом, после выполнения необходимых интегрирований всех слагаемых принцип возможных перемещений, сформулированный для кольцевого оболочечного элемента (4.77), может быть представлен в следующем виде:

$$d_n \delta \{q_n\}^T ([K_n] \{q_n\} - \{P_n\} - \{t_n\}) = 0. \quad (4.91)$$

Отсюда в силу произвольности вариаций $\delta \{q_n\}$ для n -х гармоник составляющих решений получим

$$\{t_n\} = [K_n] \{q_n\} - \{P_n\}. \quad (4.92)$$

При стыковке отдельных элементов между собой в случае излома меридиана в сопрягаемом сечении удобнее записывать условия сопряжения геометрических и силовых факторов в общей или глобальной системе координат. Формулировка принципа возможных перемещений (4.91) позволяет достаточно просто осуществлять переход к другим обобщенным перемещениям и соответствующим сило-

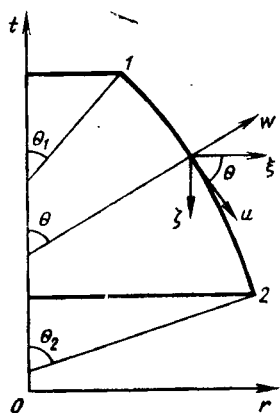


Рис. 4.12.

вым факторам. Вместо нормального и касательного перемещений w и u будем пользоваться радиальным и осевым перемещениями ξ и ζ (рис. 4.12). В этом случае

$$\begin{aligned} u &= \xi \cos \theta + \zeta \sin \theta; \\ w &= \xi \sin \theta - \zeta \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Выбрав в качестве новых обобщенных перемещений узловых сечений вектор $\{q\}_s$ с компонентами

$$\{q\}_s = \{\xi^1, v^1, \zeta^1, \theta_1^1, \xi^2, v^2, \zeta^2, \theta_1^2\}, \quad (4.94)$$

запишем старые обобщенные перемещения с учетом (4.93). В матричном виде связь векторов $\{q\}$ и $\{q\}_s$ будет выглядеть следующим образом:

$$\{q\} = [C] \{q\}_s, \quad (4.95)$$

где

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{u^1, v^1, w^1, \theta_1^1, u^2, v^2, w^2, \theta_1^2\}; \\ [C] &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -\cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & & \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & -\cos \theta_2 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь θ_1, θ_2 — углы между нормалью и осью вращения в сечениях 1 и 2 (см. рис. 4.12). С использованием преобразования (4.95) принцип возможных перемещений (4.91) можно записать через новые обобщенные перемещения:

$$\delta_n \{q_n\}_s^T [C]^T ([K_n] [C] \{q_n\}_s - \{P_n\} - \{t_n\}) = 0.$$

Отсюда вместо условий равновесия (4.92), сформулированных в локальной системе координат, получим соответствующие условия, записанные в глобальной системе:

$$\{t_n\}_s = [K_n]_s \{q_n\}_s - \{P_n\}_s,$$

где $\{t_n\}_s = [C]^T \{t_n\}$; $\{P_n\}_s = [C]^T \{P_n\}$; $[K_n]_s = [C]^T [K_n] [C]$.

Дальнейшее объединение ансамбля элементов, формирование геометрических граничных условий и решение разрешающей системы уравнений выполняется с помощью стандартных процедур МКЭ (см. § 3.8). В случае осесимметричного нагружения деформирование и решение системы осуществляются один раз для нулевой гармоники разложения $n = 0$. При неосесимметричном нагружении общего

вида получают отдельно решения для всех удерживаемых гармоник разложения и осуществляют суммирование в сечениях вывода результатов с учетом развертки по угловой координате β .

Рассмотрим применение кольцевого элемента для решения задач устойчивости оболочки вращения при осесимметричном нагружении. Будем считать, что начальное напряженное состояние оболочки определяется решением задачи статики в линейной постановке, а перемещения в начальном состоянии тождественны нулю. Такие предположения соответствуют модели напряженного, но недеформированного тела в докритическом состоянии. Нагрузки будем считать «мертвыми», т. е. не изменяющимися при переходе системы в смежное состояние. В этом случае решение задачи устойчивости можно получить из вариационного условия (3.29), соответствующего для упругих систем вариационному критерию в форме Брайана. Выделим из оболочки отдельный кольцевой элемент. С учетом работы сил реакций отброшенных частей на дополнительных перемещениях первого порядка малости запишем условие смежного равновесного состояния

$$\int_{V^e} (\delta \{e_*\}^T \{\sigma_*\} + \Lambda \delta \{e_{**}\}^T \{\sigma_0\}) dV - \int_0^{2\pi} \delta \{q_*\}^T \{t_*\} d\beta = 0, \quad (4.96)$$

где $\{\sigma_*\} = \{\sigma_1^*, \sigma_2^*, \tau_{12}^*\}$, $\{e_*\} = \{e_1^*, e_2^*, \gamma_{12}^*\}$ — векторы, компоненты которых представляют соответственно дополнительные напряжения и деформации первого порядка малости; Λ — параметр нагружения; $\{\sigma_0\} = \{\sigma_1^0, \sigma_2^0\}$ — вектор начальных напряжений; $\{e_{**}\} = \{e_1^{**}, e_2^{**}\}$ — вектор дополнительных деформаций второго порядка малости; $\{q_*\}$ — вектор дополнительных обобщенных перемещений узловых сечений оболочки; $\{t_*\}$ — вектор дополнительных реакций.

Решение задачи будем искать в виде разложений по угловой координате β в тригонометрические ряды. По координате α воспользуемся, как и прежде, аппроксимацией [см. (4.68)] и представим дополнительные перемещения координатной поверхности оболочки в виде, аналогичном (4.70),

$$\{U_*\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{p}_n] [\phi] \{\bar{q}_{*n}\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{p}_n] [\phi] \{\bar{q}_{*n}\}. \quad (4.97)$$

Здесь и в дальнейшем величины, отмеченные одной звездочкой, соответствуют дополнительным величинам первого порядка малости. Там, где не дается развернутого представления векторов, отмеченных звездочкой, следует иметь в виду, что последовательность их компонент такая же, как в соответствующих выражениях для задачи статики.

С учетом аппроксимации (4.97) распределение углов поворота нормали представим аналогично (4.71), (4.72):

$$\{\vartheta_*\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{p}_{\vartheta n}] \{\bar{\vartheta}_{*n}\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{p}_{\vartheta n}] \{\bar{\vartheta}_{*n}\}, \quad (4.98)$$

где $\{\vartheta_{*n}\} = [J_n] \{q_{*n}\}$, а распределение дополнительных деформаций и изменений кривизн — аналогично (4.75), (4.76):

$$\{E_*\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{\varepsilon n}] \{\bar{E}_{*n}\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{\varepsilon n}] \{\tilde{E}_{*n}\},$$

где $\{E_{*n}\} = [B_n] \{q_{*n}\}$.

Для определения связи дополнительных реакций $\{t_*\}$ с дополнительными обобщенными перемещениями первого порядка малости $\{q_*\}$ рассмотрим более детально каждое слагаемое выражения (4.96). Выполнив, как и для задачи статики, преобразования (4.78)—(4.87), получим

$$\left(\int_{V^e} \delta \{\varepsilon_*\}^T \{\sigma_*\} dV \right)_n = d_n \delta \{q_{*n}\}^T [K_n] \{q_{*n}\}, \quad (4.99)$$

где $[K_n] = \int_0^{\Delta} [B_n]^T [D] [B_n] A B d\alpha$ — матрица жесткости элемента.

Второе слагаемое в уравнении (4.96) характеризует начальное напряженное состояние. Согласно выражениям для деформаций (4.55) дополнительные деформации второго порядка малости ε_1^{**} и ε_2^{**} имеют следующий вид: $\varepsilon_1^{**} = \frac{1}{2} (\vartheta_1^*)^2$, $(1 \rightleftharpoons 2)$. Подынтегральное выражение для второго слагаемого из (4.96) удобно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \{\varepsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} &= \sigma_1^0 \vartheta_1^* \varepsilon \vartheta_1^* + \sigma_2^0 \vartheta_2^* \delta \vartheta_2^* = \\ &= \begin{Bmatrix} \delta \vartheta_1^* \\ \delta \vartheta_2^* \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_1^0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_1^* \\ \vartheta_2^* \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

После выполнения интегрирования по толщине получим

$$\int_h \delta \{\varepsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} dz = \delta \{\vartheta_*\}^T [T_0] \{\vartheta_*\},$$

где $[T_0] = \begin{bmatrix} T_1^0 & \\ & T_2^0 \end{bmatrix}$ — диагональная матрица. Величины T_1^0 , T_2^0 представляют начальные погонные меридиональные и окружные усилия, возникающие в оболочке от действия внешних осесимметричных нагрузок. С учетом разложения $\{\vartheta_*\}$ в тригонометрические ряды (4.98) и структуры матрицы $[T_0]$ интегрирование по угловой координате β дает разделение симметричных и кососимметричных гармоник:

$$\left(\int_0^{2\pi} \delta \{\vartheta_*\}^T [T_0] \{\vartheta_*\} d\beta \right)_n = d_n \delta \{\vartheta_{*n}\}^T [T_0] \{\vartheta_{*n}\}.$$

Окончательно после интегрирования по α получим

$$\left(\int_{V^e} \delta \{\varepsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} dV \right)_n = d_n \delta \{q_{*n}\}^T [S_n] \{q_{*n}\}, \quad (4.100)$$

где $[S_n] = \int_0^{\Delta} [J_n]^T [T_0] [J_n] AB d\alpha$ — матрица приведенных начальных напряжений для n -й гармоники волнообразования.

Работа сил дополнительных реакций на возможных дополнительных перемещениях может быть представлена в виде, аналогичном (4.90),

$$\left(\int_0^{2\pi} \delta \{q_{*n}\}^T \{t_{*n}\} d\beta \right)_n = d_n \delta \{q_{*n}\}^T \{t_{*n}\}. \quad (4.101)$$

Таким образом, после выполнения интегрирования (4.99), (4.100), (4.101) условие существования смежного равновесного состояния (4.96) запишется в виде

$$d_n \delta \{q_{*n}\}^T (([K_n] + \Lambda [S_n]) \{q_{*n}\} - \{t_{*n}\}) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности коэффициентов $\delta \{q_{*n}\}$ получим искомую связь реакций с перемещениями:

$$\{t_{*n}\} = ([K_n] + \Lambda [S_n]) \{q_{*n}\}. \quad (4.102)$$

Поскольку реакции оболочечного элемента для симметричных и кососимметричных форм (4.102) одинаковы, то при определении критических нагрузок можно рассматривать лишь одни формы волнообразования, например симметричные.

Перевод матрицы жесткости элемента и матрицы приведенных начальных напряжений в глобальную систему координат осуществляется с помощью матрицы преобразования $[C]$ (4.95):

$$[K_n]_s = [C]^T [K_n] [C]; [S_n]_s = [C]^T [S_n] [C]. \quad (4.103)$$

При стыковке отдельных элементов с учетом однородных геометрических граничных условий формируются глобальная матрица жесткости и матрица приведенных начальных напряжений конструкции. При этом используются стандартные процедуры метода конечных элементов. Полученная система линейных уравнений, однородная относительно обобщенных перемещений для n -й гармоники разложения, представляет задачу на собственные значения. Для этой задачи ищется наименьшее по модулю собственное значение Λ_n^* . Критическое значение параметра нагружения Λ^* определяется как наименьшее из всех Λ_n^* , т. е. $\Lambda^* = \min_{\text{по } n} \{|\Lambda_n^*|\}$. Собственный вектор и номер гармоники n , соответствующие Λ^* , характеризуют форму потери устойчивости.

Рассмотрим использование кольцевого оболочечного элемента применительно к решению задач динамики. Для получения матрицы приведенных масс элемента будем пренебрегать инерционными членами, связанными с угловыми ускорениями сечений. В этом случае для конечного элемента принцип возможных перемещений

с учетом «работы» сил инерции запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_{V^e} \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_{S^e} \delta \{U\}^T \{p\} dS - \\ & - \int_0^{2\pi} \delta \{q\}^T \{t\} d\beta + \int_{V^e} \rho \delta \{U\}^T \{\ddot{U}\} dV = 0, \end{aligned} \quad (4.104)$$

где ρ — удельная плотность материала; $(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial \tau} ()$ обозначает дифференцирование по времени. Для внешних нагрузок будем считать, что в любой момент времени τ известны функции Фурье для симметричных и кососимметричных составляющих. Воспользуемся, как и прежде, представлением решений $\{U\}$ в виде (4.70), однако при этом будем считать, что обобщенные перемещения зависят от времени:

$$\{U\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_n] [\phi] \{\bar{q}_n(\tau)\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_n] [\phi] \{\tilde{q}_n(\tau)\}. \quad (4.105)$$

Тогда для вектора ускорений получим следующее выражение:

$$\{\ddot{U}\} = \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\beta}_n] [\phi] \{\ddot{\bar{q}}_n(\tau)\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_n] [\phi] \{\ddot{\tilde{q}}_n(\tau)\}. \quad (4.106)$$

Преобразование первых трех слагаемых, входящих в уравнение (4.104), выполняется аналогично тому, как это было сделано для задачи статики. Поэтому отдельно стоит рассмотреть лишь последнее слагаемое, представляющее согласно принципу Даламбера «работу» сил инерции на возможных перемещениях. С учетом (4.105), (4.106) после интегрирования по объему элемента получим

$$\left(\int_{V^e} \rho \delta \{U\}^T \{\ddot{U}\} dV \right)_n = d_n \delta \{q_n\}^T [M] \{\ddot{q}_n\},$$

где $[M] = \int_0^{\Delta} [\phi]^T [\phi] P A B d\alpha$; $(P = \int_h \rho dz)$ — матрица приведенных масс элемента. Таким образом, принцип возможных перемещений в формулировке (4.104) в окончательном виде записывается следующим образом:

$$d_n \delta \{q_n\}^T ([K_n] \{q_n\} + [M] \{\ddot{q}_n\} - \{P_n\} - \{t_n\}) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\delta \{q_n\}$ в любой момент времени τ получаем искомую связь реакций:

$$\{t_n\} = [K_n] \{q_n\} + [M] \{\ddot{q}_n\} - \{P_n\}. \quad (4.107)$$

Формирование разрешающей системы и численное интегрирование уравнений движения было кратко рассмотрено ранее в § 3.8.

При определении собственных частот колебаний оболочки полагают $\{p\} = 0$ и ищут решение, изменяющееся по времени, в виде гармонической функции, например $\{q(\tau)\} \sim \sin \omega \tau$, где ω — кру-

говая частота колебаний. Тогда связь реакций с перемещениями (4.107) записывается в следующем однородном виде:

$$\{t_n\} = ([K_n] - \omega^2 [M]) \{q_n\}.$$

В случае исследования колебаний системы с учетом предварительного осесимметричного напряженного состояния инерционными слагаемыми дополняется уравнение (4.96). Тогда для дополнительных реакций получаем

$$\{t_{*n}\} = ([K_n] + \Lambda [S_n] - \omega^2 [M]) \{q_{*n}\}. \quad (4.108)$$

Выражение (4.108) позволяет формулировать при $\omega = 0$ задачу устойчивости и определять Λ_n : при $\Lambda = 0$ — задачу о собственных колебаниях, при $\Lambda \neq 0$ — задачу о колебаниях системы с учетом предварительного нагружения (для «мертвых» внешних сил).

При записи условий стыковки отдельных элементов в глобальной системе координат матрица приведенных масс преобразуется так же, как и матрица жесткости элемента:

$$[M]_s = [C]^T [M] [C], \quad (4.109)$$

где $[C]$ — матрица связи обобщенных перемещений в локальной и глобальной системах координат [см. (4.95)].

§ 4.4 Получение канонических систем для решения задач статики, устойчивости и колебаний многослойных оболочек вращения

Математическое описание деформирования тонких многослойных оболочек вращения может быть сведено к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения таких систем в настоящее время разработаны эффективные численные методы. Наиболее удобной формой для интегрирования на ЭВМ является представление разрешающих дифференциальных уравнений в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка (или канонической системы). В § 3.5 был представлен в общем виде вариационно-матричный способ получения канонических систем. Ниже рассмотрим конкретную реализацию этого способа для оболочек вращения.

Введем понятие вектора обобщенных перемещений $\{X\}$ в сечении оболочки. В качестве компонент вектора примем те кинематические факторы, которые определяют главные граничные условия в сечении оболочки при $\alpha = \text{const}$, ими будут

$$\{X\} = \{u, v, w, \vartheta_1\}, \quad (4.110)$$

т. е. касательные и нормальное перемещения координатной поверхности и угол поворота нормали в плоскости меридиана. Поскольку в выражениях для деформаций и изменений кривизны (4.49), (4.50) и (4.57) присутствуют также производные по α от перемещений u, v и угла поворота ϑ_1 , введем в рассмотрение вектор $\{Y\}$ с компонентами

$$\{Y\} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u, v, \vartheta_1\}. \quad (4.111)$$

С учетом разложения решений по угловой координате β будет достаточно компонент векторов $\{X\}$ и $\{Y\}$, чтобы через них выразить все перемещения, углы поворота, деформации и изменения кривизн. Прежде чем приступить к получению этих выражений, отметим, что компоненты векторов $\{X\}$ и $\{Y\}$ не являются независимыми, между ними существует очевидная дифференциальная связь:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{X\} - [C_1] \{X\} - [C_2] \{Y\} = 0, \quad (4.112)$$

где

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [C_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эту связь в дальнейшем будем учитывать при получении разрешающих дифференциальных уравнений.

В силу периодичности решений по угловой координате β все компоненты будем раскладывать в тригонометрические ряды. Таким образом, представим компоненты обобщенных перемещений $\{X\}$ в виде

$$\{X\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{xn}] \{\bar{X}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{xn}] \{\tilde{X}_n\}, \quad (4.113)$$

где

$$\begin{aligned} \{X_n\} &= \{u_n, v_n, w_n, \vartheta_{1n}\}; \\ [\bar{\beta}_{xn}] &= [\cos n\beta, \sin n\beta, \cos n\beta, \cos n\beta]; \\ [\tilde{\beta}_{xn}] &= [\sin n\beta, -\cos n\beta, \sin n\beta, \sin n\beta], \end{aligned}$$

а также компоненты вектора $\{Y\}$:

$$\{Y\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{yn}] \{\bar{Y}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{yn}] \{\tilde{Y}_n\},$$

где

$$\begin{aligned} \{Y_n\} &= \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{u_n, v_n, \vartheta_{1n}\}; \\ [\bar{\beta}_{yn}] &= [\cos n\beta, \sin n\beta, \cos n\beta]; \\ [\tilde{\beta}_{yn}] &= [\sin n\beta, -\cos n\beta, \sin n\beta]. \end{aligned}$$

С помощью обобщенных перемещений выразим перемещения координатной поверхности. С учетом разложения в тригонометрические ряды получим

$$\{U\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_n] \{\bar{U}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_n] \{\tilde{U}_n\}, \quad (4.114)$$

$$\{U_n\} = [F] \{X_n\}, \quad (4.115)$$

где

$$\{U\} = \{u, v, w\}; [F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Остальные компоненты векторов и матриц были приведены для выражения (4.62).

Для углов поворота нормали будем иметь следующее выражение:

$$\{\vartheta\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{\vartheta n}] \{\tilde{\vartheta}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{\vartheta n}] \{\bar{\vartheta}_n\}, \quad (4.116)$$

где

$$\{\vartheta_n\} = [R_n] \{X_n\}; \quad (4.117)$$

$$\{\vartheta\} = \{\vartheta_1, \vartheta_2\}, [R_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & \bar{n} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{n} = n/B.$$

Матрицы $[\bar{\beta}_{\vartheta n}]$, $[\tilde{\beta}_{\vartheta n}]$ были приведены ранее для выражения (4.71).

Для определения выражений деформаций и изменений кривизны через компоненты векторов обобщенных перемещений $\{X\}$ и вектора производных $\{Y\}$, как и прежде, воспользуемся разложением по угловой координате β (4.73):

$$\{E\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{en}] \{\bar{E}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{en}] \{\tilde{E}_n\}, \quad (4.118)$$

где

$$\{E\} = \{e_1, e_2, e_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}\}.$$

С учетом того, что симметричные составляющие векторов $\{\bar{E}_n\}$ связаны с $\{\bar{X}_n\}$ и $\{\bar{Y}_n\}$ так же, как кососимметричные составляющие $\{\tilde{E}_n\}$ с $\{\tilde{X}_n\}$, $\{\tilde{Y}_n\}$:

$$e_{1n} = \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} u_n + k_1 w_n;$$

$$e_{2n} = \psi u_n + \bar{n} v_n + k_2 w_n;$$

$$e_{12n} = -\bar{n} u_n - \psi v_n + \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} v_n;$$

$$\kappa_{1n} = \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \vartheta_{1n};$$

$$\kappa_{2n} = k_2 \bar{n} v_n + \bar{n}^2 w_n + \psi \vartheta_{1n};$$

$$\kappa_{12n} = -2\psi k_2 v_n - 2\psi \bar{n} w_n - 2\bar{n} \vartheta_{1n} + 2k_2 \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} v_n,$$

получим выражение для $\{E_n\}$:

$$\{E_n\} = [L_{1n}] \{X_n\} + [L_{2n}] \{Y_n\}, \quad (4.119)$$

где

$$[L_{1n}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & 0 \\ \psi & \bar{n} & k_2 & 0 \\ -\bar{n} & -\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 \bar{n} & \bar{n}^2 & \psi \\ 0 & -2\psi k_2 & -2\psi \bar{n} & -2\bar{n} \end{bmatrix}; \quad [L_{2n}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом установлена искомая связь перемещений (4.114), (4.115); углов поворота нормали (4.116), (4.117), деформаций и изменений кривизны (4.118), (4.119) с компонентами векторов обобщенных перемещений $\{X\}$ и их производными $\{Y\}$.

После выполнения подготовительных операций приступим к вариационной формулировке задачи статики. Рассмотрим кольцевой элемент оболочки вращения, нагруженный внешними поверхностными нагрузками и реакциями отброшенных частей. Для получения разрешающих уравнений воспользуемся принципом возможных перемещений. Чтобы считать независимыми переменными как коэффициенты вектора обобщенных перемещений $\{X\}$, так и коэффициенты вектора производных $\{Y\}$, введем с помощью множителей Лагранжа $\{\mu\}$ условие связи (4.112), записанное для возможных перемещений, тогда

$$\begin{aligned} \int_{V^e} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_{S^e} \delta \{U\}^T \{p\} dS - \int_0^{2\pi} \delta \{X^1\}^T \{t^1\} d\beta - \\ - \int_0^{2\pi} \delta \{X^2\}^T \{t^2\} d\beta + \int_{S^e} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta \{X\} - [C_1] \delta \{X\} - \right. \\ \left. - [C_2] \delta \{Y\} \right)^T \{\mu\} dS = 0. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое, входящее в уравнение (4.120). Для первого слагаемого интеграл по толщине и окружной координате β с учетом соотношений упругости вычисляется аналогично (4.85):

$$\left(\int_{V^e} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \right)_n = d_n \delta \{E_n\}^T [D] \{E_n\}.$$

Далее, воспользовавшись выражением для деформаций и изменений кривизны в форме (4.119), получим

$$\begin{aligned} \left(\int_{V^e} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \right)_n = d_n \int_0^{\Delta} (\delta \{X_n\}^T ([S_{11}] \{X_n\} + [S_{12}] \{Y_n\}) + \\ + \delta \{Y_n\}^T ([S_{21}] \{X_n\} + [S_{22}] \{Y_n\})) A d\alpha, \end{aligned} \quad (4.121)$$

где

$$[S_{ij}] = B [L_{in}]^T [D] [L_{jn}] \quad (i, j = 1, 2). \quad (4.122)$$

Отметим, что в силу симметрии матрицы соотношений упругости $[D]$ матрицы $[S_{ij}]$ (4.122) обладают следующими свойствами:

$$[S_{ij}]^T = [S_{ji}] \quad (i, j = 1, 2).$$

Работу поверхностных нагрузок на возможных перемещениях запишем с учетом представления перемещений в форме (4.114) и (4.115). Тогда после интегрирования по угловой координате β будем иметь

$$\left(\int_{S^e} \delta \{U\}^T \{p\} dS \right)_n = d_n \int_0^\Delta \delta \{X_n\}^T \{N_n\} A d\alpha, \quad (4.123)$$

где $\{N_n\} = B [F]^T \{p_n\}$; $\{p_n\}$ представляют симметричные $\{\bar{p}_n\}$ или кососимметричные $\{\tilde{p}_n\}$ составляющие разложения поверхностной нагрузки в тригонометрические ряды $\{p\} = \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{\beta}_n| \{\bar{p}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\beta}_n| \{\tilde{p}_n\}$.

Работу сил реакций на торцовых перемещениях преобразуем также с учетом разложения в тригонометрические ряды:

$$\left(\int_0^{2\pi} \delta \{X^i\}^T \{t^i\} d\beta \right)_n = d_n \delta \{X_n^i\}^T \{t_n^i\} \quad (i = 1, 2), \quad (4.124)$$

где верхние индексы $i = 1$ и $i = 2$ соответствуют начальному и конечному торцовым сечениям.

Отдельного рассмотрения требует последний интеграл в уравнении (4.120), учитывающий дополнительное дифференциальное условие связи между компонентами вектора обобщенных перемещений $\{X\}$ и их первыми производными $\{Y\}$. Разложив в тригонометрические ряды по угловой координате β аналогично (4.113) множители Лагранжа $\{\mu\}$, выполним интегрирование по β :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{S^e} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta \{X\} - [C_1] \delta \{X\} - [C_2] \delta \{Y\} \right)^T \{\mu\} dS \right)_n = \\ & = d_n \int_0^\Delta \left(\frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \delta \{X_n\} - [C_1] \delta \{X_n\} - [C_2] \delta \{Y_n\} \right)^T \{\lambda_n\} A d\alpha, \end{aligned} \quad (4.125)$$

где $\{\lambda_n\} = B \{\mu_n\}$.

Далее в выражении (4.125) путем интегрирования по частям избавимся от дифференциальных операторов $\frac{d}{d\alpha}$, стоящих при вариациях $\delta \{X_n\}$, и получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_{S^e} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta \{X\} - [C_1] \delta \{X\} - [C_2] \delta \{Y\} \right)^T \{\mu\} dS \right)_n = \\ & = d_n \int_0^\Delta \left(\delta \{X_n\}^T \left(-\frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{\lambda_n\} - [C_1]^T \{\lambda_n\} \right) - \right. \\ & \left. - \delta \{Y_n\}^T [C_2]^T \{\lambda_n\} \right) A d\alpha + d_n \delta \{X_n^2\}^T \{\lambda_n^2\} - d_n \delta \{X_n^1\}^T \{\lambda_n^1\}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Таким образом, после выполненных преобразований (4.121), (4.123), (4.124), (4.126) исходную вариационную формулировку условия равновесия (4.120) можно представить следующим образом:

$$\int_0^{\Delta} \left(\delta \{X_n\}^T ([S_{11}] \{X_n\} + [S_{12}] \{Y_n\} - [C_1]^T \{\lambda_n\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{\lambda_n\} - \{N_n\}) + \delta \{Y_n\}^T ([S_{21}] \{X_n\} + [S_{22}] \{Y_n\} - \right. \\ \left. - [C_2]^T \{\lambda_n\}) \right) A d\alpha - \delta \{X_n^1\}^T (\{t_n^1\} + \{\lambda_n^1\}) - \delta \{X_n^2\}^T (\{t_n^2\} - \{\lambda_n^2\}) = 0. \quad (4.127)$$

Структура уравнения (4.127) справедлива как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих.

В силу произвольности вариаций $\delta \{X_n\}$, $\delta \{Y_n\}$, $\delta \{X_n^1\}$, $\delta \{X_n^2\}$ получим, что в пределах области элемента должны выполняться уравнения

$$[S_{11}] \{X_n\} + [S_{12}] \{Y_n\} - \{N_n\} - \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{\lambda_n\} - [C_1]^T \{\lambda_n\} = 0; \quad (4.128)$$

$$[S_{21}] \{X_n\} + [S_{22}] \{Y_n\} - [C_2]^T \{\lambda_n\} = 0, \quad (4.129)$$

а на торцах оболочки силовые граничные условия

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha = 0 \quad \{\lambda_n^1\} &= -\{t_n^1\}; \\ \text{при } \alpha = \Delta \quad \{\lambda_n^2\} &= \{t_n^2\}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

В случае задания геометрических граничных условий будем иметь $\delta \{X_n^1\} = 0$, $\delta \{X_n^2\} = 0$, то соответствует: при $\alpha = 0$ $\{X_n^1\} = \{X_{0n}^1\}$; при $\alpha = \Delta$ $\{X_n^2\} = \{X_{0n}^2\}$ ($\{X_{0n}^1\}$, $\{X_{0n}^2\}$ — гармоники разложения заданных обобщенных торцевых перемещений).

Полученные уравнения (4.128), (4.129) и условие связи (4.112) записанное для n -й гармоники разложения:

$$\frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{X_n\} - [C_1] \{X_n\} - [C_2] \{Y_n\} = 0, \quad (4.131)$$

позволяют получить искомую каноническую систему. Для этого, воспользовавшись алгебраическим уравнением (4.129), определим

$$\{Y_n\} = [S_{22}]^{-1} ([C_2]^T \{\lambda_n\} - [S_{21}] \{X_n\}) \quad (4.132)$$

и исключим его из уравнений (4.131), (4.128). После этого получим

$$\frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \begin{Bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -N_n \end{Bmatrix}, \quad (4.133)$$

где

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= [C_1] - [b] [S_{21}]; \\ [A_{12}] &= [b] [C_2]^T; \quad [A_{21}] = [S_{11}] - [d] [S_{21}]; \quad [A_{22}] = -[A_{11}]^T; \\ [b] &= [C_2] [S_{22}]^{-1}; \quad [d] = [S_{21}]^T [S_{22}]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Отметим, что для кососимметричных составляющих решений матрица канонической системы остается такой же, как и для симметричных составляющих.

Полученная система дифференциальных уравнений (4.133) сформулирована для обобщенных перемещений $\{X_n\}$ и обобщенных силовых факторов $\{\lambda_n\}$, соответствующих n -й гармонике разложения.

Проследим этапы получения разрешающей системы. Во-первых, необходимо выбрать компоненты векторов обобщенных перемещений $\{X\}$ (4.110) и векторов производных $\{Y\}$ (4.111), которые определяются моделью деформирования оболочки, и установить между ними дифференциальную связь (4.112). Далее с использованием связи деформаций с перемещениями получить матрицы $[L_{1n}]$, $[L_{2n}]$ (4.119) и с учетом соотношений упругости подсчитать матрицы $[S_{ij}]$ (4.122). Для получения блоков матрицы разрешающей системы необходимо выполнить матричные операции (4.134). Указанная последовательность получения матриц разрешающей системы легко программируется (см. приложение 2).

Покажем, как с использованием системы (4.133) можно получить матрицу жесткости элемента $[K_n]$ и вектор приведенных узловых сил $\{P_n\}$. Для этого с помощью методов численного интегрирования получим на участке кольцевого элемента частотное и фундаментальные решения и представим компоненты кинематических и силовых факторов в конечном и начальном сечениях (см. § 3.6) в виде связи

$$\begin{Bmatrix} X_n^2 \\ \lambda_n^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega_{11}] & [\omega_{12}] \\ [\omega_{21}] & [\omega_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n^1 \\ \lambda_n^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X^{\text{частн}} \\ \lambda^{\text{частн}} \end{Bmatrix}, \quad (4.135)$$

где $[\omega_{ij}]$ ($i, j = 1, 2$) — блоки матрицы фундаментальных решений для $\alpha = \Delta$; векторы $\{X^{\text{частн}}\}$, $\{\lambda^{\text{частн}}\}$ определяются частным решением при $\alpha = \Delta$. Установленная матричная связь (4.135) и определение реакций с помощью внутренних силовых факторов (4.130) позволяют получить выражения для матрицы жесткости элемента и вектора приведенных узловых сил:

$$\{t_n\} = [K_n] \{q_n\} - \{P_n\}, \quad (4.136)$$

где

$$\{t_n\} = \{\{t_n^1\}, \{t_n^2\}\}; \{q_n\} = \{\{X_n^1\}, \{X_n^2\}\}; \{P_n\} = \{\{P_n^1\}, \{P_n^2\}\};$$

$$[K_n] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix};$$

$$[K_{12}] = -[\omega_{12}]^{-1}; \quad [K_{11}] = [K_{12}] [\omega_{11}];$$

$$[K_{22}] = -[\omega_{22}] [K_{12}]; \quad [K_{21}] = [K_{12}]^T;$$

$$\{P_n^1\} = [K_{12}] \{X^{\text{частн}}\}; \quad \{P_n^2\} = -\{\lambda^{\text{частн}}\} + [\omega_{22}] \{P_n^1\}.$$

Полученная с помощью численного интегрирования канонической системы (4.133) матрица жесткости элемента (МЖЭ) не связана

с аппроксимацией полей перемещений и является точной в отличие от МЖЭ, полученной в предыдущем параграфе. В этом случае можно утверждать, что уравнения равновесия внутри элемента выполняются строго и соответствующие поля перемещений элемента содержат необходимые перемещения жесткого тела.

Дальнейшее решение включает следующие процедуры. В результате стыковки отдельных элементов и присоединения граничных условий формируется система линейных алгебраических уравнений относительно узловых обобщенных перемещений. После ее решения по известным узловым обобщенным перемещениям определяются реакции элемента [см. (4.136)] и узловые внутренние силовые факторы [см. (4.130)]. С помощью выражения (4.132) определяется вектор производных $\{Y_n\}$ в узловом сечении, после чего с использованием (4.119) вычисляются деформации и изменения кривизн.

Рассмотрим получение вариационно-матричным способом канонической системы дифференциальных уравнений для решения задач устойчивости и колебаний. При получении разрешающих уравнений будем считать, что в исходном невозмущенном состоянии оболочка напряжена, но не деформирована. Исходное напряженное состояние определяется решением задачи статики в линейной постановке. При составлении уравнений движения в окрестности исходного состояния будем учитывать начальное напряженное состояние. В деформационных соотношениях кроме линейных составляющих будем учитывать нелинейные слагаемые, связанные с дополнительными углами поворота нормалей. При решении задач рассмотрим только осесимметричное начальное напряженное состояние. Будем считать, что действующие на конструкцию внешние нагрузки при движении системы не изменяются ни по величине, ни по направлению. В целом систему, включая внешние нагрузки и условия связи, будем считать консервативной. Исследование движения системы относительно начального состояния проведем без учета демпфирующих свойств.

Выберем в качестве дополнительных обобщенных перемещений $\{X_*\}$ компоненты, аналогичные тем, которые брали при решении задачи статики (4.110), т. е. $\{X_*\} = \{u^*, v^*, \omega^*, \varphi^*\}$. Вектор производных от дополнительных обобщенных перемещений представим аналогично (4.111):

$$\{Y_*\} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u^*, v^*, \omega^*, \varphi^*\}.$$

Дифференциальная связь между векторами $\{X_*\}$ и $\{Y_*\}$ также сохраняет прежний вид:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{X_*\} - [C_1] \{X_*\} - [C_2] \{Y_*\} = 0. \quad (4.137)$$

Рассмотрим гармоническое движение кольцевого оболочечного элемента относительно исходного состояния. С учетом принципа

Даламбера запишем вариационную формулировку задачи, присоединив к ней в качестве дополнительных условий дифференциальную связь (4.137) для возможных перемещений:

$$\int_{V^e} (\delta \{\epsilon_*\}^T \{\sigma_*\} + \Lambda \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} - \omega^2 \rho \delta \{U_*\}^T \{U_*\}) dV - \\ - \int_0^{2\pi} \delta \{X_*^1\}^T \{t_*^1\} d\beta - \int_0^{2\pi} \delta \{X_*^2\}^T \{t_*^2\} d\beta + \\ + \int_{S^e} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta \{X_*\} - [C_1] \delta \{X_*\} - [C_2] \delta \{Y_*\} \right)^T \{\mu_*\} dS = 0, \quad (4.138)$$

где Λ — параметр нагружения; ω — круговая частота колебаний; $\{\mu_*\}$ — вектор множителей Лагранжа.

Поскольку выражение для связи дополнительных деформаций с дополнительными перемещениями остается таким же, как и при решении задачи статики, то отдельного рассмотрения в уравнении (4.138) требуют лишь второе и третье слагаемые. Второе слагаемое характеризует начальное напряженное состояние. После интегрирования по толщине это слагаемое в развернутом виде можно представить следующим образом:

$$\int_{V^e} \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} dV = \int_0^{\Delta} \int_0^{2\pi} (\delta \vartheta_1^* \vartheta_1^* T_1^0 + \delta \vartheta_2^* \vartheta_2^* T_2^0) AB d\beta d\alpha, \quad (4.139)$$

где T_1^0 , T_2^0 — начальные погонные меридиональные и окружные усилия. С учетом представления дополнительных углов поворота нормали в форме, аналогичной (4.116), (4.117), после интегрирования по угловой координате β для выражения (4.139) получим

$$\left(\int_{V^e} \delta \{\epsilon_{**}\}^T \{\sigma_0\} dV \right)_n = d_n \int_0^{\Delta} \delta \{X_{**}\}^T [R_n]^T [T] [R_n] \{X_{**}\} AB d\alpha,$$

где $[T] = \begin{bmatrix} T_1^0 & \\ & T_2^0 \end{bmatrix}$ — диагональная матрица, содержащая начальные погонные усилия.

Для третьего слагаемого в уравнении (4.138), характеризующего инерционность системы, воспользуемся представлением дополнительных перемещений в форме, аналогичной (4.114), (4.115); тогда после интегрирования по толщине и по угловой координате β получим

$$\left(\int_{V^e} \rho \delta \{U_*\}^T \{U_*\} dV \right)_n = d_n \int_0^{\Delta} P \delta \{X_{**}\}^T [F]^T [F] \{X_{**}\} AB d\alpha,$$

где $P = \int_h \rho dz$.

Окончательный вид вариационной формулировки (4.138) для n -й гармоники разложения можно представить следующим образом:

$$\int_0^{\Delta} \left(\delta \{X_{*n}\}^T \left([S_{11}^*] \{X_{*n}\} + [S_{12}] \{Y_{*n}\} - [C_1]^T \{\lambda_{*n}\} - \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{\lambda_{*n}\} \right) + \right. \\ \left. + \delta \{Y_{*n}\}^T \left([S_{21}] \{X_{*n}\} + [S_{22}] \{Y_{*n}\} - [C_2]^T \{\lambda_{*n}\} \right) \right) A d\alpha - \\ - \delta \{X_{*n}^1\}^T (\{t_{*n}^1\} - \{\lambda_{*n}^1\}) - \delta \{X_{*n}^2\} (\{t_{*n}^2\} - \{\lambda_{*n}^2\}) = 0, \quad (4.140)$$

где

$$[S_{11}^*] = B([L_{1n}]^T [D] [L_{1n}] + \Lambda [R_n]^T [T] [R_n] - \omega^2 P [F]^T [F]); \quad (4.141)$$

$$[S_{21}] = [S_{12}]^T = B [L_{2n}]^T [D] [L_{1n}]; \quad [S_{22}] = B [L_{2n}]^T [D] [L_{2n}];$$

$$\{\lambda_{*n}\} = B \{\mu_{*n}\}.$$

Выражение (4.140) справедливо как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих решения.

В силу произвольности вариаций $\delta \{X_{*n}\}$, $\delta \{Y_{*n}\}$ следует потребовать, чтобы в области элемента выполнялись уравнения

$$[S_{11}^*] \{X_{*n}\} + [S_{12}] \{Y_{*n}\} - \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{\lambda_{*n}\} - [C_1]^T \{\lambda_{*n}\} = 0; \\ [S_{21}] \{X_{*n}\} + [S_{22}] \{Y_{*n}\} - [C_2]^T \{\lambda_{*n}\} = 0. \quad (4.142)$$

Уравнения (4.142) совместно с условием связи (4.137), записанным для n -й гармоники разложения:

$$\frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{\lambda_{*n}\} - [C_1]^T \{X_{*n}\} - [C_2] \{Y_{*n}\} = 0,$$

позволяют получить искомую каноническую систему дифференциальных уравнений для решения задач устойчивости и колебаний:

$$\frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \begin{Bmatrix} X_{*n} \\ \lambda_{*n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}^*] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{*n} \\ \lambda_{*n} \end{Bmatrix}, \quad (4.143)$$

где

$$[A_{11}] = [C_1] - [b] [S_{21}]; \quad [A_{12}] = [b] [C_2]^T; \\ [A_{21}^*] = [S_{11}^*] - [d] [S_{21}]; \quad [A_{22}] = -[A_{11}]^T; \\ [b] = [C_2] [S_{22}]^{-1}; \quad [d] = [S_{21}]^T [S_{22}]^{-1}.$$

Отличие матрицы канонической системы (4.143) от матрицы разрешающей системы дифференциальных уравнений для решения задачи статики (4.133) заключается в вычислении для блока $[A_{21}^*]$ матрицы $[S_{11}^*]$ [см. (4.141)], в которую входит искомый параметр Λ (параметр нагружения) для решения задачи устойчивости или ω^2 (квадрат угловой частоты) для решения задачи колебаний. Система дифференциальных уравнений (4.143) позволяет для тонкой многослойной оболочки вращения решать задачи устойчивости и определять критический параметр нагружения. При этом в выражении $[S_{11}^*]$ (4.141) следует положить $\omega^2 = 0$. Для определения частот ко-

лебаний оболочки вычисление матрицы $[S_{11}^*]$ [см. (4.141)] выполняется при $\Lambda = \text{const}$. В частном случае при $\Lambda = 0$ определяются частоты ненагруженной системы.

Поскольку искомым параметр собственного значения Λ (или ω^2) входит в коэффициенты матрицы разрешающих дифференциальных уравнений, то коэффициенты матрицы фундаментальных решений [см. (4.135)], а следовательно, и коэффициенты матрицы жесткости [см. (4.136)] будут иметь нелинейную зависимость от Λ (или ω^2). В случае разбивки оболочки на короткие элементы для каждого элемента можно применить прием линеаризации матрицы жесткости по параметру собственного значения (см. § 3.6) и выделить для элемента матрицу, аналогичную матрице приведенных начальных напряжений (или матрице приведенных масс). В случае необходимости стыковки отдельных элементов в глобальной системе координат преобразования матриц и векторов выполняются в соответствии с зависимостями (4.103), (4.109), которые были приведены в предыдущем параграфе.

§ 4.5. Условия сопряжения с кольцевыми подкрепляющими элементами

В многослойных оболочечных конструкциях при стыковке отдельных элементов, а также в ряде случаев для создания дополнительной жесткости применяются подкрепляющие силовые элементы. Ниже приводится описание деформирования и условия сопряжения с оболочками вращения кольцевых подкрепляющих элементов (шпангоутов).

Рассмотрим замкнутое круговое кольцо. Введем для него местную систему координат α, β, z , центр которой поместим в центре тяжести сечения кольца. Ось α направим вдоль оси оболочки, ось β — в окружном направлении, ось z — перпендикулярно к ней в сторону внешней нормали (рис. 4.13). При выводе основных соотношений воспользуемся гипотезой плоских сечений, согласно которой пренебрегается деформациями в плоскости поперечного сечения кольца и деформациями сечений. В этом случае распределение радиальных, касательных и осевых перемещений ξ, v и ζ по сечению кольца можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi^r - \alpha \vartheta_1^r; \\ v &= v_s^r + \alpha \vartheta_3^r + z \vartheta_2^r; \\ \zeta &= \zeta^r + z \vartheta_1^r,\end{aligned}\quad (4.144)$$

где ξ^r, v^r, ζ^r — соответственно радиальное, касательное и осевое перемещения центра тяжести сечения кольца, направления которых совпадают с направлениями координатных

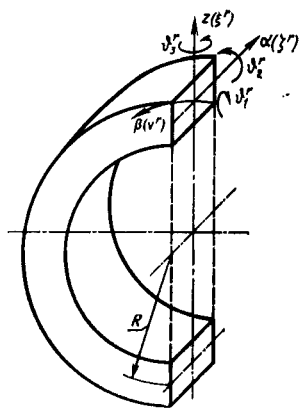


Рис. 4.13.

осей z, β, α ; ϑ_1^r — угол поворота кольца вокруг центра тяжести сечения (угол закручивания); $\vartheta_2^r, \vartheta_3^r$ — углы поворота сечений кольца вокруг осей α, z соответственно. (Здесь и в дальнейшем индекс r будет указывать на принадлежность к кольцу). Согласно кинематическим гипотезам углы поворота

$$\vartheta_2^r = -\frac{1}{R} \frac{d\xi^r}{d\beta} + \frac{1}{R} v^r, \quad \vartheta_3^r = -\frac{1}{R} \frac{d\zeta^r}{d\beta}. \quad (4.145)$$

Окружную деформацию кольцевой линии с координатами α, z запишем через перемещения и углы поворота линии центров тяжести сечений:

$$e_2^r = e_2^r + z\kappa_1^r + \alpha\kappa_3^r + \frac{1}{2} (\vartheta_2^r)^2 + \frac{1}{2} (\vartheta_3^r)^2, \quad (4.146)$$

где $e_2^r = \frac{1}{R} \frac{dv^r}{d\beta} + \frac{\xi^r}{R}$

— окружная линейная деформация линии центров тяжести сечений.

Изменения кривизн в плоскости кольца и из плоскости кольца κ_1^r, κ_3^r определяются следующими выражениями:

$$\kappa_1^r = \frac{1}{R} \frac{d\vartheta_2^r}{d\beta}, \quad \kappa_3^r = \frac{1}{R} \frac{d\vartheta_3^r}{d\beta} - \frac{\vartheta_1^r}{R}.$$

Нелинейную составляющую окружной деформации будем определять лишь квадратами углов поворота нормали [подчеркнутые слагаемые в выражении (4.146)].

Будем считать, что деформации сдвига в плоскости сечения кольца, связанные с кручением, распределены в сечении по следующему закону:

$$v^r = b(\alpha, z) \chi, \quad (4.147)$$

где

$$\chi = \frac{1}{R} \frac{d\vartheta_1^r}{d\beta} + \frac{1}{R} \vartheta_3^r \quad (4.148)$$

— относительный угол закручивания; b — функция кручения, определяющая закон распределения сдвиговых деформаций и зависящая от формы сечения.

При выводе основных соотношений воспользуемся матричной символикой. Введем в рассмотрение вектор обобщенных перемещений кольца. В качестве компонент этого вектора примем радиальное, касательное и осевое смещения линии центров тяжести сечений, а также угол закручивания;

$$\{X\}_r = \{\xi^r, v^r, \zeta^r, \vartheta_1^r\}. \quad (4.149)$$

В силу периодичности решения разложим компоненты вектора $\{X\}_r$ в тригонометрические ряды по угловой координате β :

$$\{X\}_r = \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{\beta}_{xn}| \{\bar{X}_n\}_r + \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\beta}_{xn}| \{\tilde{X}_n\}_r,$$

где, как и прежде, компонентами векторов $\{\bar{X}_n\}_r, \{\tilde{X}_n\}_r$ являются

$$\{X_n\}_r = \{\xi_n^r, v_n^r, \zeta_n^r, \vartheta_{1n}^r\}.$$

Коэффициенты матриц $[\tilde{\beta}_{\alpha n}]$, $[\tilde{\beta}_{\alpha n}]$ были определены ранее для выражений (4.113).

С использованием матричной символики распределение перемещений в сечении кольца (4.144) с учетом разложения решений в тригонометрические ряды по координате β представим в следующем виде:

$$\{U\}_r = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_n] \{\bar{U}_n\}_r + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_n] \{\tilde{U}_n\}_r, \quad (4.150)$$

где

$$\{U_n\}_r = [\phi_n]_r \{X_n\}_r; \quad \{U\}_r = \{\xi, v, \zeta\}.$$

Здесь

$$[\phi_n]_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ z\bar{n} & 1 + z/R & \alpha\bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}, \quad \bar{n} = n/R.$$

Углы поворота ϑ_2^r , ϑ_3^r (4.145) будут связаны с компонентами вектора обобщенных перемещений следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} \{\vartheta\}_r &= \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{\vartheta n}] \{\bar{\vartheta}_n\}_r + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{\vartheta n}] \{\tilde{\vartheta}_n\}_r; \\ \{\vartheta_n\} &= [R_n]_r \{X_n\}_r, \end{aligned} \quad (4.151)$$

где

$$\begin{aligned} \{\vartheta\}_r &= \{\vartheta_2^r, \vartheta_3^r\}; \quad \{\vartheta_n\}_r = \{\vartheta_{2n}^r, \vartheta_{3n}^r\}; \\ [\bar{\beta}_{\vartheta n}]_r &= \begin{bmatrix} \sin n\beta & \sin n\beta \end{bmatrix}; \quad [\tilde{\beta}_{\vartheta n}]_r = \begin{bmatrix} -\cos n\beta & -\cos n\beta \end{bmatrix}; \\ [R_n]_r &= \begin{bmatrix} -\bar{n} & 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{n} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для линейных составляющих деформаций кольца [см. (4.146)–(4.148)] связь с обобщенными перемещениями с учетом разложения в тригонометрические ряды по угловой координате β в матричной форме запишется в виде

$$\begin{aligned} \{E\}_r &= \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{en}]_r \{\bar{E}_n\}_r + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{en}]_r \{\tilde{E}_n\}_r; \\ \{E_n\}_r &= [L_n]_r \{X_n\}_r, \end{aligned} \quad (4.152)$$

где

$$\begin{aligned} \{E\}_r &= \{e_2^r, \gamma^r\}; \quad \{E_n\}_r = \{e_{2n}^r, \gamma_n^r\}; \\ [\bar{\beta}_{en}]_r &= \begin{bmatrix} \cos n\beta & \sin n\beta \end{bmatrix}, \quad [\tilde{\beta}_{en}]_r = \begin{bmatrix} \sin n\beta & -\cos n\beta \end{bmatrix}; \\ [L_n]_r &= \begin{bmatrix} 1/R + \bar{n}^2 z & \bar{n} + z\bar{n}/R & \alpha\bar{n}^2 & -\alpha/R \\ 0 & 0 & b\bar{n}/R & -b\bar{n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

После того как полностью установлена кинематика деформирования кольцевого подкрепления, приступим к формулировке условий сопряжения. Для простоты вначале рассмотрим стыковку одного обо-

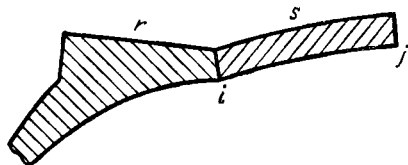


Рис. 4.14.

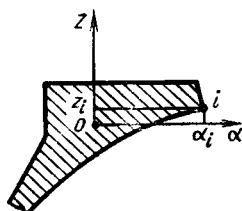


Рис. 4.15.

лочечного элемента со шпангоутом. На рис. 4.14 изображен узел стыковки. Принадлежность к оболочечному элементу будем отмечать нижним индексом s ; для кольцевого элемента (шпангоута) оставим индекс r . Номера сечений оболочечного элемента отметим индексами i, j .

Геометрические условия сопряжения свидетельствуют о том, что для окружности сопряжения i (иногда будем называть точкой сопряжения) обобщенные перемещения оболочки равны обобщенным перемещениям шпангоута. Таким образом, для i -й точки сопряжения

$$\{X^i\}_s = \{X^i\}_r, \quad (4.153)$$

где $\{X^i\}_s$ — обобщенные перемещения оболочки (в глобальной системе координат [см. (4.94)] для узловой окружности с номером i :

$$\{X^i\}_s = \{\xi^i, v^i, \zeta^i, \theta_1^i\}_s; \quad (4.154)$$

$\{X^i\}_r$ — соответствующие обобщенные перемещения кольца, вычисленные для узловой линии сопряжения i :

$$\{X^i\}_r = \{\xi^i, v^i, \zeta^i, \theta_1^i\}_r.$$

Условия (4.153) с учетом разложения в тригонометрические ряды выглядят следующим образом:

$$\{X_n^i\}_s = \{X_n^i\}_r.$$

Для i -й точки сечения шпангоута с координатами (α_i, z_i) (рис. 4.15) соответствующей окружности сопряжения, с использованием (4.150) можно установить, что

$$\{X_n^i\}_r = [Q_n^i] \{X_n\}_r, \quad (4.155)$$

где

$$[Q_n^i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_i \\ z_i \bar{n} & 1 + z_i/R & \alpha_i \bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и записать в окончательном виде геометрические условия сопряжения (4.153). Для

$$\{X^i\}_s = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{xn}] \{\bar{X}_n^i\}_s + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{xn}] \{\tilde{X}_n^i\}_s$$

имеем

$$\{X_n^i\}_s = [Q_n^i] \{X_n\}_r. \quad (4.156)$$

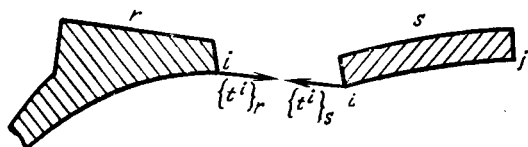


Рис. 4.16.

Как видно из соотношений (4.156), обобщенные перемещения оболочки в узле сопряжения однозначно определяются через обобщенные перемещения шпангоута. Полученная матрица сопряжения $[Q_n^i]$ [см. (4.155)] позволяет по обобщенным перемещениям шпангоута формировать нужные векторы обобщенных перемещений стыкуемой оболочки. В рассматриваемом примере сопряжения в силу того, что компоненты векторов обобщенных перемещений оболочки (4.154) и шпангоута (4.149) имеют схожие компоненты, матрица $[Q_n^i]$ отличается от единичной матрицы лишь учетом эксцентриситетов точки сопряжения. Для более сложных моделей деформирования оболочек (как, например, трехслойные оболочки с учетом деформаций поперечного сдвига) размерность и содержание матриц сопряжения $[Q_n^i]$ меняются, однако формальная запись геометрических условий сопряжения сохраняется.

Для формулировки силовых условий сопряжения мысленно отделим шпангоут от оболочки и введем, как условно показано на рис. 4.16, обобщенные силы реакций $\{t^i\}_r$, действующие на шпангоут со стороны оболочки, и обобщенные силы реакций (в глобальной системе координат) $\{t^i\}_s$, действующие на оболочку со стороны шпангоута. В этом случае силовые условия сопряжения будут выглядеть так:

$$\{t^i\}_r + \{t^i\}_s = 0. \quad (4.157)$$

При решении задач с помощью МКЭ (в варианте метода перемещений) нужно уметь получать с помощью уравнений равновесия выражения для обобщенных реакций. Получим эти выражения для кольцевого подкрепляющего элемента. Воспользуемся принципом возможных перемещений. Для равновесного состояния шпангоута, нагруженного внешними погонными нагрузками $\{p\}_r$, совершающими работу на обобщенных перемещениях $\{X\}_r$, и приведенными реакциями $\{t^i\}_r$, совершающими работу на обобщенных перемещениях $\{X^i\}_r$, принцип возможных перемещений запишем в виде

$$\int_{V^r} \delta \{E\}_r^T \{\sigma\}_r dV - \int_0^{2\pi} R \delta \{X\}_r^T \{p\}_r d\beta - \int_0^{2\pi} \delta \{X^i\}_r^T \{t^i\}_r d\beta = 0, \quad (4.158)$$

где V^r — объем кольцевого подкрепления.

Рассмотрим первое слагаемое в условии (4.158), характеризующее работу внутренних сил. Полагая, что материал шпангоута подчиняется закону Гука, связь напряжений с деформациями представим в следующем виде:

$$\{\sigma\}_r = [G]_r \{E\}_r, \quad (4.159)$$

где

$$\{\sigma_r\} = \{\sigma'_2, \tau_r\}; \quad [G]_r = \begin{bmatrix} E'_2 & 0 \\ 0 & G^r \end{bmatrix}.$$

Здесь E'_2 — модуль на растяжение в окружном направлении; G^r — модуль сдвига в плоскости поперечного сечения шпангоута. В общем случае модули E'_2 , G^r считаются известными функциями аргументов α , z .

С учетом соотношений упругости (4.159) и разложения деформаций в тригонометрические ряды (4.152) последовательно выполним интегрирование по координате β и по площади шпангоута F^r , после чего получим для n -й гармоники разложения

$$\left(\int_{V^r} \delta \{E\}_r^T \{\sigma\}_r dV \right)_n = \int_{F^r} \int_0^{2\pi} ([\beta_{en}]_r \delta \{E_n\}_r)^T [G]_r [\beta_{en}]_r \{E_n\}_r R d\beta dF = \\ = d_n \int_{F^r} \delta \{E_n\}_r^T [G]_r \{E_n\}_r R dF = d_n \delta \{X_n\}_r^T [K_n]_r \{X_n\}_r,$$

где

$$[K_n]_r = \int_{F^r} [L_n]_r^T [G]_r [L_n]_r R dF$$

представляет матрицу жесткости шпангоута. В развернутом виде коэффициенты матрицы жесткости будут определяться следующими выражениями:

$$[K_n]_r = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ \text{сим} & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix}; \quad (4.160)$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= B_0/R + \bar{n}^4 D_1 R + 2\bar{n}^2 C_1; \\ k_{12} &= \bar{n} B_0 + \bar{n}^3 D_1 + (\bar{n}/R + \bar{n}^3 R) C_1; \\ k_{13} &= \bar{n}^2 C_3 + \bar{n}^4 D_{13} R; & k_{14} &= C_3/R + \bar{n}^2 D_{13}; \\ k_{22} &= \bar{n}^2 B_0 R + \bar{n}^2 D_1/R + 2\bar{n}^2 C_1; \\ k_{23} &= \bar{n}^3 C_3 R + \bar{n}^3 D_{13}; & k_{24} &= \bar{n} C_3 + \bar{n} D_{13}/R; \\ k_{33} &= \bar{n}^4 D_3 R + \bar{n}^2 D_k/R; & k_{34} &= -\bar{n}^2 D_3 - \bar{n}^2 D_k; \\ k_{44} &= D_3/R + \bar{n}^2 D_k R. \end{aligned}$$

Здесь

$$B_0 = \int_{F^r} E'_2 dF; \quad C_1 = \int_{F^r} E'_2 z dF;$$

$$C_3 = \int_{F^r} E'_2 \alpha dF;$$

$$D_1 = \int_{F^r} E'_2 z^2 dF; \quad D_3 = \int_{F^r} E'_2 \alpha^2 dF;$$

$$D_{13} = \int_{F^r} E'_2 \alpha z dF; \quad D_k = \int_{F^r} G^r b^2 dF.$$

Для изотропного материала шпангоута выражения упрощаются:

$$\begin{aligned} B_0 &= E_2' F'; & C_1 &= C_3 = 0; & D_1 &= E_2' J_1; \\ D_3 &= E_2' J_3; & D_{13} &= E_2' J_{13}; & D_k &= G' J_k, \end{aligned}$$

где

$$J_1 = \int_{F'} z^2 dF; \quad J_3 = \int_{F'} \alpha^2 dF; \quad J_{13} = \int_{F'} \alpha z dF.$$

J_k — приведенный момент инерции на кручение. Для приближенного вычисления J_k иногда пользуются формулой [33] $J_k \approx 4J_1 J_3 / (J_1 + J_3)$.

Второе слагаемое в уравнении (4.158) определяет работу внешних погонных нагрузок. С учетом разложения перемещений и нагрузок в тригонометрические ряды по угловой координате β после интегрирования получим

$$\left(\int_0^{2\pi} R \delta \{X\}_r^T \{p\} d\beta \right)_n = d_n \delta \{X_n\}_r^T \{P_n\}_r,$$

где

$$\begin{aligned} \{P_n\}_r &= R \{p_n\}_r, \\ \{p\}_r &= \{p_z', p_\beta', p_\alpha', \mathcal{M}'\}. \end{aligned}$$

Здесь p_z' , p_β' , p_α' — соответственно погонные радиальные, окружные и осевые нагрузки; $\mathcal{M}'$ — погонный момент, выкручивающий шпангоут из плоскости; $\{p_n\}_r$ — векторы, содержащие симметричные или кососимметричные составляющие разложения вектора $\{p\}_r$.

Для последнего слагаемого в условии (4.158) после выполнения интегрирования запишем

$$\left(\int_0^{2\pi} \delta \{X^i\}_r^T \{t^i\}_r d\beta \right)_n = d_n \delta \{X_n^i\}_r^T \{t_n^i\}_r, \quad (4.161)$$

где $\{X^i\}_r$ — перемещения i -й узловой окружности сопряжения шпангоута с оболочкой. Принимая во внимание, что перемещения $\{X_n^i\}$ однозначно определяются через обобщенные перемещения линии центров тяжести сечений шпангоута [см. (4.155)], выражение (4.161) можно преобразовать к следующему виду:

$$\left(\int_0^{2\pi} \delta \{X^i\}_r^T \{t^i\}_r d\beta \right)_n = d_n \delta \{X_n\}_r^T [Q_n^i]^T \{t_n^i\}_r.$$

В окончательном виде вариационная формулировка условия равновесия шпангоута (4.158) будет выглядеть следующим образом:

$$d_n \delta \{X_n\}_r^T ([K_n]_r \{X_n\}_r - \{P_n\}_r - [Q_n^i]^T \{t_n^i\}_r) = 0.$$

Откуда в силу произвольности вариаций $\delta \{X_n\}_r$ получим уравнения равновесия, записанные для n -х гармоник разложения симметричных и кососимметричных составляющих:

$$[Q_n^i]^T \{t_n^i\}_r = [K_n]_r \{X_n\}_r - \{P_n\}_r. \quad (4.162)$$

В уравнениях равновесия (4.162) можно исключить реакции $\{t_n^i\}_r$, приходящие на шпангоут со стороны оболочки. Для этого предварительно рассмотрим уравнения равновесия оболочечного элемента s (см. рис. 4.16). Как было показано в §§ 4.3 и 4.4, реакции оболочечного элемента с узлами i, j можно представить в виде

$$\begin{aligned} \{t_n^i\}_s &= [K_{ii}]_s \{X_n^i\}_s + [K_{ij}]_s \{X_n^j\}_s - \{P_n^i\}_s; \\ \{t_n^j\}_s &= [K_{ji}]_s \{X_n^i\}_s + [K_{jj}]_s \{X_n^j\}_s - \{P_n^j\}_s, \end{aligned} \quad (4.163)$$

где $[K_{ii}]_s$; $[K_{ij}]_s$; $[K_{ji}]_s$; $[K_{jj}]_s$ — блоки матрицы жесткости оболочечного элемента для n -й гармоники разложения. Так как для узла сопряжения i обобщенные перемещения оболочки $\{X_n^i\}_s$ определяются через обобщенные перемещения шпангоута $\{X_n^i\}_r$ [см. (4.153) и (4.155)]:

$$\{X_n^i\}_s = [Q_n^i] \{X_n\}_r, \quad (4.164)$$

то в выражениях для реакций (4.163) можно исключить $\{X_n\}_s$:

$$\begin{aligned} \{t_n^i\}_s &= [K_{ii}]_s [Q_n^i] \{X_n\}_r + [K_{ij}]_s \{X_n^j\}_s - \{P_n^i\}_s; \\ \{t_n^j\}_s &= [K_{ji}]_s [Q_n^i] \{X_n\}_r + [K_{jj}]_s \{X_n^j\}_s - \{P_n^j\}_s. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Далее воспользуемся силовыми условиями сопряжения (4.157), согласно которым

$$\{t_n^i\}_r = -\{t_n^i\}_s. \quad (4.166)$$

Тогда уравнения равновесия (4.162) с учетом (4.166) и (4.165) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} ([K_n]_r + [Q_n^T] [K_{ii}]_s [Q_n^i]) \{X_n\}_r + [Q_n^T] [K_{ij}]_s \{X_n^j\}_s = \\ = [Q_n^T] \{P_n^i\}_s + \{P_n\}_r. \end{aligned} \quad (4.167)$$

Полученное уравнение (4.167) представляет матричную строку в системе алгебраических уравнений относительно узловых обобщенных перемещений.

Уравнение равновесия шпангоута (4.167) можно получить другим способом, не рассматривая силовые условия сопряжений (4.157). При вариационном способе получения уравнений равновесия достаточно лишь кинематических условий (4.164). Рассмотрим целиком узел конструкции (см. рис. 4.14), включая шпангоут и оболочку. Согласно принципу возможных перемещений в положении равновесия для рассматриваемого узла будем иметь следующее условие:

$$\begin{aligned} d_n \delta \{X_n\}_r^T ([K_n]_r \{X_n\}_r - \{P_n\}_r) + d_n \delta \{q_n\}_s^T ([K_n]_s \{q_n\}_s - \\ - \{P_n\}_s - \{t_n\}_s) = 0, \end{aligned} \quad (4.168)$$

где

$$\begin{aligned} \{q_n\}_s &= \{\{X_n^i\}_s, \{X_n^j\}_s\}; \\ \{P_n\}_s &= \{\{P_n^i\}_s, \{P_n^j\}_s\}; \\ [K_n]_s &= \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] \end{bmatrix}_s; \\ \{t_n\}_s &= \{\{t_n^i\}_s, \{t_n^j\}_s\}. \end{aligned}$$

Причем в векторе $\{t_n\}_s$ для сил реакций в сечении i для оболочечного элемента следует положить $\{t_n^i\}_s = 0$, так как узел конструкции рассматривается в сборе. Геометрические условия сопряжения (4.164), показывающие, что для оболочки в сечении i обобщенные перемещения однозначно определяются обобщенными перемещениями шпангоута, можно рассматривать как дополнительные кинематические условия для оболочки. В этом случае для элемента оболочки можно перейти к новым обобщенным перемещениям:

$$\{q_n\}_s = [H^i] \{q'_n\}_s, \quad (4.169)$$

где

$$\{q'_n\}_s = \{\{X_n\}_r, \{X'_n\}_s\}; \quad [H^i] = \begin{bmatrix} [Q_n^i] & [0] \\ [0] & [E] \end{bmatrix},$$

т. е. в сечении i вместо обобщенных перемещений $\{X_n^i\}_s$ рассматривать обобщенные перемещения шпангоута $\{X_n\}_r$.

Воспользовавшись новыми обобщенными перемещениями для граничного оболочечного элемента, условия равновесия (4.168) запишем следующим образом:

$$d_n \delta \{X_n\}_r^T ([K_n]_r \{X_n\}_r - \{P_n\}_r) + \\ + d_n \delta \{q'_n\}_s^T ([K'_n]_s \{q'_n\}_s - \{P'_n\}_s - \{t'_n\}_s) = 0, \quad (4.170)$$

где

$$[K'_n]_s = [H^i]^T [K_n]_s [H^i]; \quad (4.171) \\ \{P'_n\}_s = [H^i]^T \{P_n\}_s; \quad \{t'_n\}_s = [H^i]^T \{t_n\}_s = \{t_n\}_s.$$

Представив входящие в (4.170) матрицы в блочном виде, работу внутренних и внешних сил для элемента оболочки запишем следующим образом:

$$d_n \delta \{X_n\}_r^T ([K_n]_r \{X_n\}_r - \{P_n\}_r) + d_n (\delta \{X_n\}_r^T ([Q_n^i]^T [K_{ii}]_s [Q_n^i] \{X_n\}_r + \\ + [Q_n^i]^T [K_{ij}]_s \{X'_n\}_s - [Q_n^i]^T \{P'_n\}_s) + \delta \{X'_n\}_s^T ([K_{ji}]_s [Q_n^i] \{X_n\}_r + \\ + [K_{jj}]_s \{X'_n\}_s - \{P'_n\}_s - \{t'_n\}_s)) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности возможных перемещений $\delta \{X_n\}_r$ получим то же самое уравнение равновесия, что и (4.167).

Подводя итог, можно сказать, что кинематические условия сопряжения (4.164) позволяют для граничного оболочечного элемента перейти к новым обобщенным перемещениям (4.169), в соответствии с которыми преобразуются матрица жесткости элемента и вектор приведенных сил. В случае стыковки в шпангоуте нескольких оболочек преобразования (4.171) выполняются для каждого оболочечного элемента, после чего уравнения равновесия формируются стандартным способом МКЭ.

Получим условия сопряжения шпангоута и оболочки для решения задач устойчивости и колебаний. Рассмотрим сопрягаемый узел конструкции (см. рис. 4.14). Для дополнительных возможных

перемещений с учетом работы инерционных сил для смежного равновесного состояния запишем

$$\begin{aligned} & \int_{V^r} (\delta \{\epsilon_{*}\}_r^T \{\sigma_{*}\}_r + \Lambda \delta \{\epsilon_{**}\}_r^T \{\sigma_0\}_r - \rho_r \omega^2 \delta \{U_{*}\}_r^T \{U_{*}\}_r) dV + \\ & + \int_{V^s} (\delta \{\epsilon_{*}\}_s^T \{\sigma_{*}\}_s + \Lambda \delta \{\epsilon_{**}\}_s^T \{\sigma_0\}_s - \rho_s \omega^2 \delta \{U_{*}\}_s^T \{U_{*}\}_s) dV - \\ & - \int_0^{2\pi} \delta \{q_{*}\}_s^T \{t_{*}\}_s d\beta = 0, \end{aligned} \quad (4.172)$$

где ρ_r и ρ_s — плотности материалов шпангоута и оболочки.

Отдельного рассмотрения в условии (4.172) требуют второе и третье слагаемые в первом интеграле. Преобразования остальных слагаемых особой сложности не представляет. Выражение

$$\int_{V^r} \delta \{\epsilon_{**}\}_r^T \{\sigma_0\}_r dV = \int_0^{2\pi} \int_{F^r} (\delta \vartheta'_{*2} \vartheta'_{*2} + \delta \vartheta'_{*3} \vartheta'_{*3}) \sigma'_0 R dF d\beta \quad (4.173)$$

учитывает начальное напряженное состояние шпангоута (σ'_0 — начальное окружное напряжение в шпангоуте). После выполнения интегрирования выражение (4.173) преобразуется к виду

$$\left(\int_{V^r} \delta \{\epsilon_{**}\}_r^T \{\sigma_0\}_r dV \right)_n = d_n \delta \{X_{*n}\}_r^T [S_n]_r \{X_{*n}\}_r,$$

где

$$[S_n]_r = N_0 R [R_n]_r^T [R_n]_r; \quad N_0 = \int_{F^r} \sigma'_0 dF.$$

Здесь N_0 представляет начальную окружную силу в шпангоуте, матрица $[R_n]_r$ была определена ранее для выражения (4.151). С помощью матрицы $[S_n]_r$ для шпангоута учитывается для n -й гармоники волнообразования начальное напряженное состояние.

Третье слагаемое в (4.172) после выполнения интегрирования запишется следующим образом:

$$\left(\int_{V^r} \rho_r \delta \{U_{*}\}_r^T \{U_{*}\}_r dV \right)_n = d_n \delta \{X_{*n}\}_r^T [M_n]_r \{X_{*n}\}_r,$$

где

$$[M_n]_r = R \int_{F^r} \rho_r [\phi_n]_r^T [\phi_n]_r dF$$

— матрица приведенных масс для шпангоута.

Геометрические условия сопряжения шпангоута с оболочкой, сформулированные для дополнительных перемещений, будут иметь вид, аналогичный (4.164), т. е.

$$\{X_{*n}^i\}_s = [X_n^i] \{X_{*n}\}_r. \quad (4.174)$$

Принимая во внимание (4.174), вектор дополнительных обобщенных перемещений для оболочки преобразуется, как и при решении задачи статики (4.169):

$$\{q_{*n}\}_s = [H^i] \{q'_{*n}\}_s, \quad (4.175)$$

где

$$\{q'_{*n}\}_s = \{\{X^i_{*n}\}_r, \{X^i_{*n}\}_s\}; \quad \{q_{*n}\}_s = \{\{X^i_{*n}\}_s, \{X^i_{*n}\}_s\}.$$

Тогда принцип возможных перемещений, сформулированный для смежного состояния (4.172), можно записать следующим образом:

$$\delta \{X_{*n}\}_r^T ([K_n]_r + \Lambda [S_n]_r - \omega^2 [M_n]_r) \{X_{*n}\}_r + \\ + \delta \{q'_{*n}\}_s^T (([K'_n]_s + \Lambda [S'_n]_s - \omega^2 [M'_n]_s) \{q'_{*n}\}_s - \{t'_{*n}\}_s) = 0, \quad (4.176)$$

где

$$[K'_n]_s = [H^i]^T [K_n]_s [H^i]; \quad [S'_n]_s = [H^i]^T [S_n]_s [H^i]; \\ [M'_n]_s = [H^i]^T [M_n]_s [H^i]; \quad \{t'_{*n}\}_s = [H^i]^T \{t_{*n}\}_s = \{t_{*n}\}_s. \quad (4.177)$$

Полученные матрицы (4.177) представляют преобразованные согласно связи (4.175) матрицы жесткости, начальных напряжений и масс элемента оболочки. Из условия (4.176) получим уравнения смежного равновесного состояния шпангоута, записанные через обобщенные перемещения:

$$([K_n]_r + \Lambda [S_n]_r - \omega^2 [M_n]_r + [Q_n]^T ([K_{ii}]_s + \Lambda [S_{ii}]_s - \\ - \omega^2 [M_{ii}]_s) [Q_n]) \{X_{*n}\}_r + [Q_n]^T ([K_{ij}]_s + \Lambda [S_{ij}]_s - \\ - \omega^2 [M_{ij}]_s) \{X^{(n)}_{*n}\}_s = 0. \quad (4.178)$$

Уравнение (4.178) используется при формировании общей системы уравнений для дополнительных узловых перемещений при решении задач устойчивости и колебаний.

Полученные в данном параграфе условия сопряжения шпангоута и оболочечных элементов сформулированы в достаточно общей форме, которая в дальнейшем будет использоваться и для более сложных моделей деформирования трехслойных оболочек.

§ 4.6. Уточненные модели ортотропных слоистых пластин и оболочек

В тех случаях, когда относительная толщина слоистой оболочки (рис. 4.17) значительна и (или) материал некоторых слоев обладает пониженной жесткостью при поперечном сдвиге, теория оболочек, построенная на основе гипотез Кирхгофа — Лява, приводит к существенным погрешностям в результатах расчетов. Для расчета оболочек разработан ряд вариантов уточненных теорий, построенных на гипотезах, отличных от гипотез Кирхгофа-Лява. При изложении простейших методов расчета, основанных на уточненных моделях деформирования слоистых пластин и оболочек, воспользуемся вариационным принципом Рейсснера [40, 44, 46].

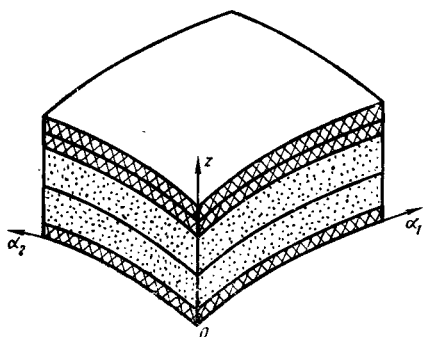


Рис. 4.17.

равное работе внутренних сил на возможных перемещениях. При этом для уменьшения громоздкости математических выкладок, но без потери общности рассуждений дополнительно предположим, что объемные нагрузки $\{g\}$ отсутствуют, а перемещения на контуре равны нулю.

Воспользуемся соотношениями:

обобщенного закона Гука, связывающего деформации с напряжениями:

$$\{\varepsilon\} = [G]^{-1} \{\sigma\} \quad (4.180)$$

($[G]^{-1}$ — матрица коэффициентов податливости) и линейной связью деформаций с перемещениями

$$\{\varepsilon\} = [L] \{V\}, \quad (4.181)$$

где коэффициенты матрицы $[L]$ определяются с использованием выражений (4.45) без учета нелинейных составляющих, т. е.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + k_1 z} \left(\frac{1}{A_1} v_{1,1} + \varphi_{12} v_2 + k_1 v_3 \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2); \quad \varepsilon_3 = v_{3,3}; \quad (4.182)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{1 + k_1 z} \left(\frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_1 v_1 \right) + v_{1,3} \quad (1 \rightleftharpoons 2);$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{1 + k_2 z} \left(\frac{1}{A_2} v_{1,2} - \varphi_{21} v_2 \right) + \frac{1}{1 + k_1 z} \left(\frac{1}{A_1} v_{2,1} - \varphi_{12} v_1 \right).$$

Используя выражения (4.180), преобразуем первые два слагаемых в (4.179):

$$\begin{aligned} \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} &= \delta \{\sigma\}^T ([G]^{-1} \{\sigma\} - [G]^{-1} \{\sigma\}) = \\ &= \delta \{\sigma\}^T ([G]^{-1} \{\sigma\} - \{\varepsilon\}). \end{aligned} \quad (4.183)$$

Принимая во внимание (4.183), условие равновесия (4.179) запишем в следующем виде:

$$\int_V \delta \{\sigma\}^T ([G]^{-1} \{\sigma\} - \{\varepsilon\}) dV + \int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_S \delta \{V\}^T \{p\} ds = 0, \quad (4.184)$$

где под деформациями $\{\varepsilon\}$ принимается их представление через перемещения (4.181),

Запишем принцип возможных перемещений в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\int_V ((\delta \{\varepsilon\})^T \{\sigma\} - \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}) + \\ &+ \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_S \delta \{V\}^T \{p\} dS = 0, \end{aligned} \quad (4.179)$$

где $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}\}$; $\{V\} = \{v_1, v_2, v_3\}$; $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}\}$.

В выражении (4.179) мы прибавили и вычли слагаемое $\delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}$,

Полученное вариационное уравнение (4.184) представляет формулировку принципа Рейсснера. Независимому варьированию в (4.184) подлежат как напряжения, так и перемещения. В силу произвольности вариаций $\delta \{\sigma\}$ и $\delta \{V\}$ (4.184) распадается на два условия:

$$\int_V \delta \{\sigma\}^T ([G]^{-1} \{\sigma\} - [L] \{V\}) dV = 0; \quad (4.185)$$

$$\int_V ([L] \delta \{V\})^T \{\sigma\} dV - \int_S \delta \{V\}^T \{p\} dS = 0. \quad (4.186)$$

При точном выполнении закона Гука условие (4.185) обращается в тождество, так как связь напряжений с перемещениями согласно (4.180) и (4.181) определяется выражением

$$\{\sigma\} = [G] [L] \{V\}. \quad (4.187)$$

Условие (4.186), представляющее запись принципа возможных перемещений, после интегрирования по частям дает дифференциальные уравнения равновесия элемента

$$[L^*] \{\sigma\} = 0, \quad (4.188)$$

где $[L^*]$ — матрица дифференциальных операторов, возникающих после интегрирования по частям. В развернутом виде уравнения равновесия (4.188) можно представить в виде [6]

$$(H_2 \sigma_1)_{,1} + (H_1 \tau_{12})_{,2} + \tau_{12} H_{1,2} - \sigma_2 H_{2,1} + (H_1 H_2 \tau_{13})_{,3} + \\ + \tau_{13} H_2 H_{1,3} = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2);$$

$$(H_1 H_2 \sigma_3)_{,3} + (H_2 \tau_{13})_{,1} + (H_1 \tau_{23})_{,2} - \sigma_1 H_2 H_{1,3} - \sigma_2 H_1 H_{2,3} = 0. \quad (4.189)$$

Для приближенных аппроксимаций напряжений и перемещений уравнения (4.187) и (4.188) могут полностью точно не выполняться, однако условие (4.185) позволяет получить интегральные соотношения упругости, которые в дальнейшем могут использоваться в интегральном условии (4.186).

Воспользуемся рассмотренным вариационным принципом и применим его к слоистым ортотропным оболочкам. Запишем в развернутом виде интегральное (по толщине многослойного пакета) условие (4.185):

$$\int_0^h [\delta \sigma_1 (s_{11} \sigma_1 + s_{12} \sigma_2 + s_{13} \sigma_3 - e_1) + \delta \sigma_2 (s_{12} \sigma_1 + s_{22} \sigma_2 + s_{23} \sigma_3 - e_2) + \\ + \delta \sigma_3 (s_{13} \sigma_1 + s_{23} \sigma_2 + s_{33} \sigma_3 - e_3) + \delta \tau_{23} (s_{44} \tau_{23} - \gamma_{23}) + \delta \tau_{13} (s_{55} \tau_{13} - \gamma_{13}) + \\ + \delta \tau_{12} (s_{66} \tau_{12} - \gamma_{12})] H_1 H_2 dz = 0. \quad (4.190)$$

Здесь h — толщина оболочки; координатная поверхность ($z = 0$) соответствует внутренней поверхности оболочки; коэффициенты матрицы податливости s_{ij} считаются известными кусочно-постоянными функциями аргумента z . Считается, что для любого слоя оси упругой симметрии совпадают с направлениями координатных ли-

ний. В поперечном направлении материал предполагается абсолютно жестким, т. е. для любого слоя

$$\frac{E_3}{E_1} \rightarrow \infty, \quad \frac{E_3}{E_2} \rightarrow \infty. \quad (4.191)$$

Рассмотрим аппроксимацию напряжений. Для напряжений σ_1 , σ_2 , τ_{12} , которые предполагаются основными, введем допущение о разрывном кусочно-линейном распределении по координате z , подчиняющемся зависимости

$$\{\sigma_{(z)}\} = [G_\sigma] (\{d\} + z \{c\}), \quad (4.192)$$

где

$$\begin{aligned} \{\sigma_{(z)}\} &= \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}; \\ \{d\} &= \{d_1, d_2, d_3\}; \\ \{c\} &= \{c_1, c_2, c_3\}; \end{aligned} \quad [G_\sigma] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{66} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы $[G_\sigma]$ есть коэффициенты матрицы упругости, определенные с учетом (4.191):

$$g_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (1 \leftrightarrow 2); \quad g_{12} = \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad g_{66} = G_{12}.$$

Они считаются известными кусочно-постоянными функциями от z . Коэффициенты аппроксимации напряжений $\{d\}$ и $\{c\}$ подлежат определению (и, как ожидается, должны соответствовать деформациям и изменениям кривизн).

Аппроксимацию для напряжений σ_3 рассматривать нет необходимости, так как, принимая во внимание условие (4.191), коэффициенты податливости s_{33} , s_{13} , s_{23} обращаются в нуль. Тогда согласно (4.190) получим $\epsilon_3 = 0$. Поэтому при записи работы внутренних сил вклад слагаемого $\delta \epsilon_3 \sigma_3$ также будет равен нулю.

С аппроксимацией напряжений поперечного сдвига дело обстоит несколько сложнее. Как указывается в [6]: «анализ достаточно точных решений задач изгиба толстых плит и оболочек, а также специальные исследования, посвященные вопросу выбора аппроксимирующих функций, показывают, что некоторые неизбежные неточности, которые допускаются при выборе этих функций, незначительно влияют на основные расчетные величины оболочки вдали от линий искажения. Некоторый произвол при разумном выборе функций не может внести в уточненную теорию недопустимых погрешностей». Вариационный принцип Рейсснера позволяет достаточно гибко подойти к этому вопросу. Вид аппроксимирующих функций можно найти, исходя из структуры уравнений равновесия (4.189). Интегрируя первое уравнение по z , получим [6]

$$\tau_{13} = -H_1^2 H_2^{-1} \left\{ \int_0^z [H_1 (H_2 \sigma_1)_{,1} - H_1 H_{2,1} \sigma_2 + (H_1^2 \tau_{12})_{,2}] dz + \Phi_1 \right\} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

где $\phi_1(\alpha_1, \alpha_2)$ — произвольная функция аргументов α_1, α_2 . С учетом (4.192) напряжения поперечного сдвига представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_{13} = & -H_1^{-2} H_2^{-1} \left\{ \int_0^z [H_1 H_2 (g_{11} d_{1,1} + g_{12} d_{2,1} + \underline{z g_{11} c_{1,1}} + \underline{z g_{12} c_{2,1}}) + \right. \\ & + H_1^2 (g_{66} d_{3,2} + \underline{z g_{66} c_{3,2}}) + 2 H_1 H_{1,2} (g_{66} d_3 + \underline{z g_{66} c_3}) + \\ & \left. + H_1 H_{2,1} ((g_{11} - g_{12})(d_1 + z c_1) + (g_{12} - g_{22})(d_2 + z c_2))] dz + \phi_1 \right\} \quad (1 \rightleftharpoons 2) \end{aligned} \quad (4.193)$$

Считая, что поверхности оболочки $z = 0$ и $z = h$ свободны от касательных нагрузок, и ориентируясь на подчеркнутые слагаемые в (4.193), которые характеризуют градиенты от моментов, аппроксимируем напряжения поперечного сдвига в виде

$$\{\tau_{(z)}\} = |f| \{\tau\}, \quad (4.194)$$

где

$$\begin{aligned} \{\tau_{(z)}\} &= \{\tau_{13}, \tau_{23}\}; \quad \{\tau\} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6\}; \\ |f| &= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{24} & f_{25} & f_{26} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Коэффициенты аппроксимации $\{\tau\}$ подлежат определению. Для функций распределения касательных напряжений поперечного сдвига примем следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \delta_1^{-2} \delta_2^{-1} \int_0^z \delta_1 \delta_2 (z - h_1) g_{11} dz, & f_{12} &= \delta_1^{-2} \delta_2^{-1} \int_0^z \delta_1 \delta_2 (z - h_2) g_{12} dz, \\ f_{13} &= \delta_1^{-2} \delta_2^{-1} \int_0^z \delta_1^2 (z - h_3) g_{66} dz, & f_{24} &= \delta_1^{-1} \delta_2^{-2} \int_0^z \delta_1 \delta_2 (z - h_4) g_{12} dz, \\ f_{25} &= \delta_1^{-1} \delta_2^{-2} \int_0^z \delta_1 \delta_2 (z - h_5) g_{22} dz, & f_{26} &= \delta_1^{-1} \delta_2^{-2} \int_0^z \delta_2^2 (z - h_6) g_{66} dz, \end{aligned} \quad (4.195)$$

где $\delta_1 = 1 + k_1 z$ ($1 \rightleftharpoons 2$).

Константы h_i для приведенных выражений выбираются из условия равенства нулю соответствующей функции f_{hi} при $z = h$. Аналогичная аппроксимация (4.195) применялась Рейсснером [44] для слоистых анизотропных пластин симметричного строения. В этом случае $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $h_i = h/2$.

При более простой аппроксимации можно сократить число неизвестных и для (5.194) положить

$$\{\tau\} = \{\tau_1, \tau_2\}; \quad |f| = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix};$$

$$f_1 = \delta_1^{-2} \delta_2^{-1} \int_0^z (z - h_1) [\delta_1 \delta_2 (g_{11} + g_{12}) + 2 \delta_1^2 g_{66}] dz \quad (1 \rightleftharpoons 2). \quad (4.196)$$

Для пологих многослойных ортотропных оболочек ($\delta_1 = \delta_2 = 1$) аппроксимация, аналогичная (4.196) использовалась в работе [47] для формулировки статической гипотезы. Для случая изотропного материала пластин распределение напряжений сдвига (4.196) определяется квадратичной параболой.

Распределение перемещений при использовании вариационного принципа (4.184) не связано с распределением напряжений и выбирается независимо от него. Приближенные выражения для перемещений будем искать в наиболее простом виде:

$$u_1 = u_1 + z\psi_1 \quad (1 \leftrightarrow 2); \quad u_3 = u_3, \quad (4.197)$$

где $u_1, u_2, u_3, \psi_1, \psi_2$ — функции, подлежащие определению.

Воспользовавшись зависимостями (4.182), получим соответствующие выражения для деформации, которые представим в векторной форме:

$$\{\varepsilon_{(z)}\} = \{\varepsilon_0\} + z\{\kappa\}; \quad (4.198)$$

$$\{\gamma_{(z)}\} = \{\gamma_0\} + z\{\chi\}, \quad (4.199)$$

где

$$\{\varepsilon_{(z)}\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}\}; \quad \{\gamma_{(z)}\} = \{\gamma_{13}, \gamma_{23}\};$$

$$\{\varepsilon_0\} = \{e_1, e_2, e_{12}\}; \quad \{\gamma_0\} = \{e_{13}, e_{23}\};$$

$$\{\kappa\} = \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}\}; \quad \{\chi\} = \{\chi_{13}, \chi_{23}\}.$$

Компоненты указанных выше векторов связаны с перемещениями u_1, u_2, u_3 и углами поворота ψ_1, ψ_2 следующими зависимостями:

$$e_1 = \frac{1}{A_1} u_{1,1} + \varphi_{12} u_2 + k_1 u_3 \quad (1 \leftrightarrow 2); \quad e_{12} = \omega_1 + \omega_2;$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1} u_{2,1} - \varphi_{12} u_1 \quad (1 \leftrightarrow 2);$$

$$e_{13} = \frac{1}{A_1} u_{3,1} - k_1 u_1 + \psi_1 \quad (1 \leftrightarrow 2); \quad (4.200)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A_1} \psi_{1,1} + \varphi_{12} \psi_2 - k_1 e_1 \quad (1 \leftrightarrow 2);$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{A_2} \psi_{1,2} + \frac{1}{A_1} \psi_{2,1} - \varphi_{21} \psi_2 - \varphi_{12} \psi_1 - k_1 \omega_2 - k_2 \omega_1;$$

$$\chi_{13} = -k_1 e_{13} \quad (1 \leftrightarrow 2); \quad \varphi_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

В большинстве расчетов коэффициентами вектора $\{\chi\}$ пренебрегают и считают постоянным распределение деформаций поперечного сдвига по толщине.

После того как установлены приближенные аппроксимации напряжений (4.192) и (4.194), перемещений (4.197) и соответствующих этим перемещениям деформаций (4.198) и (4.199), приступим к получению интегральных соотношений вариационного принципа (4.184). Сначала получим интегральные соотношения упругости. Для этого в силу независимого варьирования напряжений воспользуемся первой частью вариационного условия (4.184) и потребуем,

чтобы оно выполнялось интегрально по толщине многослойной оболочки:

$$\int_0^h \delta \{\sigma\}^T ([G]^{-1} \{\sigma\} - \{\varepsilon\}) \delta_1 \delta_2 dz = \int_0^h (\delta \{\sigma_{(z)}\}^T ([G_\sigma]^{-1} \{\sigma_{(z)}\} - \{\varepsilon_{(z)}\}) + \\ + \delta \{\tau_{(z)}\}^T ([G_\tau]^{-1} \{\tau_{(z)}\} - \{\gamma_{(z)}\})) \delta_1 \delta_2 dz = 0, \quad (4.201)$$

где

$$\{\sigma_{(z)}\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\},$$

$$[G_\tau] = \begin{bmatrix} G_{13} & 0 \\ 0 & G_{23} \end{bmatrix}.$$

$$\{\tau_{(z)}\} = \{\tau_{13}, \tau_{23}\};$$

В общем случае модули поперечного сдвига G_{13} , G_{23} считаются известными кусочно-постоянными функциями аргумента z . С учетом выражений для напряжений (4.192), (4.194) и деформаций (4.198), (4.199) условие (4.201) преобразуем к следующему виду:

$$\delta \{d\}^T ([D_{\varepsilon\varepsilon}] \{d\} + [D_{\varepsilon\kappa}] \{c\} - [D_{\varepsilon\varepsilon}] \{\varepsilon_0\} - [D_{\varepsilon\kappa}] \{\kappa\}) + \\ + \delta \{c\}^T ([D_{\varepsilon\kappa}]^T \{d\} + [D_{\kappa\kappa}] \{c\} - [D_{\varepsilon\kappa}]^T \{\varepsilon_0\} - [D_{\kappa\kappa}] \{\kappa\}) + \\ + \delta \{\tau\}^T ([W] \{\tau\} - [V_0]^T \{\gamma_0\} - [V_1]^T \{\chi\}) = 0,$$

где

$$[D_{\varepsilon\varepsilon}] = \int_0^h [G_\sigma] \delta_1 \delta_2 dz; \quad [D_{\varepsilon\kappa}] = \int_0^h z [G_\sigma] \delta_1 \delta_2 dz; \\ [D_{\kappa\kappa}] = \int_0^h z^2 [G_\sigma] \delta_1 \delta_2 dz; \quad [W] = \int_0^h [f]^T [G_\tau]^{-1} [f] \delta_1 \delta_2 dz; \\ [V_0]^T = \int_0^h [f]^T \delta_1 \delta_2 dz; \quad [V_1]^T = \int_0^h z [f]^T \delta_1 \delta_2 dz. \quad (4.202)$$

Отсюда в силу произвольности вариаций $\delta \{d\}$, $\delta \{c\}$, $\delta \{\tau\}$ получим

$$\{d\} = \{\varepsilon_0\}; \quad \{c\} = \{\kappa\}; \quad (4.203) \\ \{\tau\} = [W]^{-1} [V_0]^T \{\gamma_0\} + [W]^{-1} [V_1]^T \{\chi\}.$$

Далее воспользуемся второй частью вариационного условия (4.184), которую преобразуем с учетом конкретного представления деформаций (4.198), (4.199) и напряжений (4.192), (4.194):

$$\int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_S \delta \{V\}^T \{p\} dS = \\ = \int_S \left(\int_0^h (\delta \{\varepsilon_0\} + z \delta \{\kappa\})^T [G_\sigma] (\{d\} + z \{c\}) \delta_1 \delta_2 dz + \right. \\ \left. + \int_0^h (\delta \{\gamma_0\} + z \delta \{\chi\})^T [f] \{\tau\} \delta_1 \delta_2 dz - \delta \{V\}^T \{p\} \right) dS = 0. \quad (4.204)$$

С помощью полученных соотношений (4.203) и (4.204) нетрудно получить окончательную вариационную формулировку задачи:

$$\int_S (\delta \{E\}^T [D] \{E\} - \delta \{V\}^T \{p\}) dS = 0, \quad (4.205)$$

где $\{E\} = \{\{e_0\}, \{\kappa\}, \{\gamma_0\}, \{\chi\}\} = \{e_1, e_2, e_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}, e_{13}, e_{23}, \chi_{13}, \chi_{23}\}$, а матрица $[D]$ определяет интегральные соотношения упругости:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_{ee}] & [D_{e\kappa}] & 0 & 0 \\ & [D_{\kappa\kappa}] & 0 & 0 \\ & & [D_{\gamma\gamma}] & [D_{\gamma\chi}] \\ \text{сим.} & & & [D_{\chi\chi}] \end{bmatrix}; \quad (4.206)$$

$$[D_{\gamma\gamma}] = [V_0] [W]^{-1} [V_0]^T, \quad [D_{\gamma\chi}] = [V_0] [W]^{-1} [V_1]^T;$$

$$[D_{\chi\chi}] = [V_1] [W]^{-1} [V_1]^T.$$

В условии равновесия (4.205) под компонентами обобщенных деформаций $\{E\}$ следует понимать их представления через перемещения [см. (4.200)]. Интегрирование (4.205) по частям приводит к разрешающим уравнениям равновесия в перемещениях, а также определяет компоненты кинематических и силовых условий.

Получим каноническую систему дифференциальных уравнений для решения линейных задач статики слоистых ортотропных оболочек вращения с использованием данной модели деформирования. При этом, как и прежде, воспользуемся вариационно-матричным способом и обозначениями (4.58) для оболочек вращения. После анализа выражений для деформаций и изменений кривизн (4.200) в качестве компонент вектора обобщенных перемещений примем

$$\{X\} = \{u, v, w, \psi_1, \psi_2\}. \quad (4.207)$$

Для вектора производных $\{Y\}$ будем иметь следующие составляющие:

$$\{Y\} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u, v, w, \psi_1, \psi_2\}.$$

Дифференциальная связь векторов $\{X\}$ и $\{Y\}$ очевидна:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{X\} - \{Y\} = 0. \quad (4.208)$$

В отличие от более общего вида связи [см. (4.112)], в этом случае матрица $[C_1]$ является нулевой, а $[C_2]$ — единичной.

Воспользуемся для оболочек вращения разложением решений в тригонометрические ряды по угловой координате β . Получим соотношения для n -х гармоник разложения составляющих решения. При использовании выражений (4.200) и при учете того, что для оболочек вращения $\partial A / \partial \beta = 0$, связь обобщенных деформаций $\{E\}$ с перемещениями можно записать в следующей форме:

$$\{E_n\} = [L_{1n}] \{X_n\} + [L_{2n}] \{Y_n\}, \quad (4.209)$$

где компоненты вектора $\{E_n\}$ представляют амплитудные значения гармоник разложения $\{E\}$, а матрицы $[L_{1n}]$, $[L_{2n}]$ представляют собой следующие таблицы:

$$[L_{1n}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ \psi & \bar{n} & k_2 & 0 & 0 \\ -\bar{n} & -\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1^2 & 0 & 0 \\ -k_2\psi & -k_2\bar{n} & -k_2^2 & \psi & \bar{n} \\ k_1\bar{n} & \psi k_1 & 0 & -\bar{n} & -\psi \\ -k_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -\bar{n} & 0 & 1 \\ k_1^2 & 0 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2^2 & k_2\bar{n} & 0 & -k_2 \end{bmatrix};$$

$$[L_{2n}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\bar{n} = n/B$; $\psi = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$.

Учитывая связь деформаций с перемещениями (4.209), с помощью вариационной формулировки задачи (4.205) легко получить разрешающие уравнения. Для того чтобы считать компоненты векторов $\{X\}$ и $\{Y\}$ независимыми, дополним (4.205) условиями связи (4.208):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\Delta} (\delta \{E\}^T [D] \{E\} - \delta \{U\}^T \{p\} + \\ + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta \{X\} - \delta \{Y\} \right)^T \{\mu\} AB d\beta d\alpha = 0,$$

где $\{\mu\}$ — вектор множителей Лагранжа. Выполнив операции интегрирования по угловой координате β и избавившись путем интегри-

рования по частям от производных при $\delta \{X\}$, с учетом (4.209) получим следующие уравнения Эйлера:

$$[S_{11}] \{X_n\} + [S_{12}] \{Y_n\} - \{N_n\} - \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{\lambda_n\} = 0;$$

$$[S_{21}] \{X_n\} + [S_{22}] \{Y_n\} - \{\lambda_n\} = 0, \quad (4.210)$$

где $\{\lambda_n\} = B \{\mu_n\}$; $[S_{ij}] = B [L_{in}]^T [D] [L_{jn}]$ ($i, j = 1, 2$).

При действии только нормальной нагрузки p_z для вектора $\{N_n\}$ будем иметь компоненты $\{N_n\} = \{0, 0, B\rho_{zn}, 0, 0\}$.

Уравнения Эйлера (4.210) и условие дифференциальной связи (4.208) позволяют получить искомую каноническую систему

$$\frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \begin{Bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -N_n \end{Bmatrix},$$

где

$$[A_{11}] = [S_{22}]^{-1} [S_{21}]; \quad [A_{12}] = [S_{22}]^{-1};$$

$$[A_{21}] = [S_{11}] - [S_{21}]^T [S_{22}]^{-1} [S_{21}]; \quad [A_{22}] = -[A_{11}]^T.$$

Полученная система сформулирована для n -х гармоник разложения компонент обобщенных перемещений $\{X\}$ (4.207) и соответствующих обобщенных (по Кирхгофу) силовых факторов. Система имеет десятый порядок. На торцах оболочки геометрические условия задаются компонентами вектора $\{X_n\}$, силовые — компонентами вектора $\{\lambda_n\}$.

Наиболее трудоемким этапом в подготовительных процедурах решения задачи является определение интегральных жесткостных характеристик (4.206) и в первую очередь блока $[D_{yy}]$, поскольку исходные аппроксимирующие функции имеют достаточно сложный вид (4.195) или (4.196). При расчетах на ЭВМ необходимое интегрирование можно выполнить численно.

Если слои обладают примерно одинаковыми упругими характеристиками, то можно воспользоваться следующими упрощенными аппроксимациями:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f(z) & 0 \\ 0 & f(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.211)$$

где

$$f(z) = 4 \left[\left(\frac{z}{h} \right) - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right],$$

т. е. представить распределение напряжений поперечного сдвига по толщине оболочки в виде квадратичной параболы. Вычисленные значения τ_1 , τ_2 дадут приближенные величины максимальных напряжений сдвига на срединной поверхности. С использованием указанных допущений в работе [33] приведены в развернутом виде канонические системы для решения геометрически нелинейных осесимметричных задач статики, а также линейных задач колебаний и устойчивости оболочек вращения. Для таких оболочек с постоян-

ными по толщине модулями поперечного сдвига согласно (4.202) получим

$$\tau_i = \frac{5}{4} G_{i3} \gamma_{i3} \quad (i = 1, 2),$$

а матрица приведенных жесткостей на поперечный сдвиг [см. (4.206)] имеет следующий вид:

$$[D_{\gamma\gamma}] = \frac{5}{6} h \begin{bmatrix} G_{13} & 0 \\ 0 & G_{23} \end{bmatrix}.$$

Наиболее простой из всех гипотез об изменении сдвиговых напряжений является гипотеза, предполагающая постоянство касательных напряжений по толщине оболочки, т. е. для аппроксимации (4.211):

$$f(z) = 1. \quad (4.212)$$

Согласно (4.193) такая гипотеза вполне имеет право на существование, например, для пластин, у которых модули упругости материала E_1 , E_2 , G_{12} существенно меньше, чем модули поперечного сдвига G_{13} , G_{23} , и широко используется для описания деформирования заполнителя в трехслойных конструкциях. Если модули поперечного сдвига переменны по толщине, то согласно принципу Рейсснера для аппроксимаций (4.212) с учетом гипотезы прямых нормалей (4.197) получим

$$\delta \{\tau\}^T \int_0^h ([G_\tau]^{-1} \{\tau\} - \{\gamma(z)\}) dz = 0.$$

Отсюда

$$\{\tau\} = h [W]^{-1} \{\gamma(z)\}; \quad [W] = \int_0^h [G_\tau]^{-1} dz,$$

или в развернутом виде

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{13}^{cp} & 0 \\ 0 & G_{23}^{cp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix},$$

где осредненные модули сдвига G_{i3}^{cp} определяются из выражения

$$\frac{1}{G_{i3}^{cp}} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{dz}{G_{i3}^{(z)}} \quad (i = 1, 2). \quad (4.213)$$

Для случая однородного материала, естественно, получаем $G_{i3}^{cp} = G_{i3}$.

Все представленные выше аппроксимирующие функции в силу непрерывности по z обеспечивают сопряжение отдельных слоев по напряжениям сдвига, а функции распределения перемещений (4.197) — геометрические условия стыковки отдельных слоев. Порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений не зависит от числа слоев оболочки, а также от числа коэффициентов, аппроксимирующих напряжения.

§ 4.7. Силовые граничные условия

Пусть на боковой грани оболочки вращения $\alpha = \text{const}$ действуют напряжения $\sigma_1^r, \tau_{12}^r, \tau_{13}^r$, которые представляют известные функции аргументов β, z (рис. 4.18). Поскольку гипотезы как уточненной теории, так и классической приводят задачу трехмерной теории упругости к двумерной, то в каждой точке боковой грани удовлетворить заданным напряжениям невозможно. Определим, каким интегральным силовым факторам можно удовлетворить при использовании кинематических допущений указанных теорий. Для этого запишем работу, совершаемую внешними напряжениями на возможных перемещениях, и сгруппируем силовые факторы при независимых переменных.

Для уточненной теории в качестве обобщенных перемещений используются u, v, w, ψ_1, ψ_2 . В этом случае распределение перемещений на боковой грани оболочки $\alpha = \text{const}$ определяется как

$$u_{(z)} = u + z\psi_1; \quad v_{(z)} = v + z\psi_2; \quad w_{(z)} = w. \quad (4.214)$$

С учетом (4.214) работу внешних напряжений на возможных перемещениях можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta A^r &= \int_{\beta_0}^{\beta_k} \int_0^h (\delta u_{(z)} \sigma_1^r + \delta v_{(z)} \tau_{12}^r + \delta w_{(z)} \tau_{13}^r) (1 + k_2 z) dz B d\beta = \\ &= \int_{\beta_0}^{\beta_k} (\delta u T_1^r + \delta v T_{12}^r + \delta w Q_1^r + \delta \psi_1 M_1^r + \delta \psi_2 M_{12}^r) B d\beta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_1^r &= \int_0^h \sigma_1^r \delta_2 dz; \quad T_{12}^r = \int_0^h \tau_{12}^r \delta_2 dz; \\ Q_1^r &= \int_0^h \tau_{13}^r \delta_2 dz; \\ M_1^r &= \int_0^h \sigma_1^r z \delta_2 dz; \quad M_{12}^r = \int_0^h \tau_{12}^r z \delta_2 dz, \quad (\delta_2 = 1 + k_2 z) \end{aligned} \quad (4.215)$$

— соответственно погонные усилия и моменты, возникающие от действия внешних напряжений; β_0, β_k — координаты, определяющие границы боковой грани.

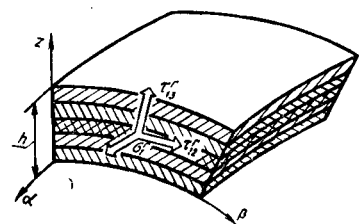


Рис. 4.18.

При получении канонических систем дифференциальных уравнений для решения задач статики оболочек вращения в качестве обобщенных перемещений $\{X\}$ были приняты u, v, w, ψ_1, ψ_2 . Соответствующие им внутренние силовые факторы обозначались $\{\lambda\}$. Если на торце

оболочки заданы силовые граничные условия, то с помощью компонент вектора $\{\lambda\}$ они будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= BT_1^r; \quad \lambda_2 = BT_{12}^r; \quad \lambda_3 = BQ_1^r; \\ \lambda_4 &= BM_1^r; \quad \lambda_5 = BM_{12}^r.\end{aligned}\quad (4.216)$$

При решении задач с помощью гипотез Кирхгофа—Лява распределение перемещений задается в виде $u_{(z)} = u + z\vartheta_1$, $v_{(z)} = v + z\vartheta_2$, $w_{(z)} = w$.

Тогда работа внешних напряжений

$$\delta A^r = \int_{\beta_0}^{\beta_k} (\delta u T_1^r + \delta v T_{12}^r + \delta w Q_1^r + \delta \vartheta_1 M_1^r + \delta \vartheta_2 M_{12}^r) B d\beta, \quad (4.217)$$

где погонные силовые факторы вычисляются согласно (4.215) без учета изменения метрики ($\delta_2 = 1$). Поскольку угол поворота нормали ϑ_2 связан с первой производной по β от нормального перемещения w , то в выражении (4.217) выполним дальнейшее преобразование, связанное с интегрированием по частям последнего слагаемого:

$$\begin{aligned}\int_{\beta_0}^{\beta_k} \delta \vartheta_2 M_{12}^r B d\beta &= \int_{\beta_0}^{\beta_k} \left(-\frac{1}{B} \frac{\partial \delta w}{\partial \beta} + k_2 \delta v \right) M_{12}^r B d\beta = \\ &= \int_{\beta_0}^{\beta_k} \left(\delta w \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} M_{12}^r + \delta v k_2 M_{12}^r \right) B d\beta - [M_{12}^r \delta w]_{\beta_0}^{\beta_k}.\end{aligned}\quad (4.218)$$

С учетом (4.218) работу внешних торцевых напряжений можно записать в окончательном виде

$$\begin{aligned}\int_{\beta_0}^{\beta_k} [\delta u T_1^r + \delta v (T_{12}^r + k_2 M_{12}^r) + \delta w \left(Q_1^r + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} M_{12}^r \right) + \\ + \delta \vartheta_1 M_1^r] B d\beta - [\delta w M_{12}^r]_{\beta_0}^{\beta_k}.\end{aligned}$$

Таким образом, при произвольном распределении напряжений σ_1^r , τ_{12}^r , τ_{13}^r на боковой грани оболочки при использовании гипотез Кирхгофа—Лява можно удовлетворить силовым условиям: по нормальной силе

$$T_1^r = \int_0^h \sigma_1^r dz;$$

по обобщенной сдвигающей силе

$$T_{12}^r - k_2 M_{12}^r = \int_0^h \tau_{12}^r (1 + k_2 z) dz;$$

по обобщенной перерезывающей силе

$$Q_1^r + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} M_{12}^r = \int_0^h \left(\tau_{13}^r + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \tau_{12}^r z \right) dz;$$

по изгибающему моменту

$$M_1^r = \int_0^h \sigma_1^r z dz.$$

В случае, если точки $(\alpha = \text{const}, \beta_0)$ и $(\alpha = \text{const}, \beta_k)$ являются угловыми, то в них со стороны грани $\alpha = \text{const}$ действуют сосредоточенные силы $\pm M_{12}^r$. Эти точки являются особыми.

Для оболочек вращения, при расчете которых принимаются гипотезы Кирхгофа—Лява, в качестве обобщенных перемещений $\{X\}$ используются u, v, w, ϑ_1 . С помощью обобщенных силовых факторов $\{\lambda\}$ на торце оболочки могут быть заданы следующие силовые условия:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= B T_{11}^r; \quad \lambda_2 = B (T_{12}^r + k_2 M_{12}^r); \\ \lambda_3 &= B \left(Q_1^r + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} M_{12}^r \right); \quad \lambda_4 = B M_1^r. \end{aligned} \quad (4.219)$$

При решении неосесимметричных задач условия (4.219) и (4.216) формируются для амплитудных значений гармоник разложения.

§ 4.8. Решение осесимметричных нелинейных задач

В ряде случаев при эксплуатации тонкостенных конструкций из композиционных материалов (КМ) возможны большие перемещения, которые требуют учета в расчетах геометрической нелинейности. Также возможны структурные изменения отдельных слоев, связанные с трещинообразованием от сдвиговых напряжений и напряжений поперек армирования. Как указывалось ранее в гл. 2, проведение многочисленных испытаний образцов и опыт эксплуатации многослойных конструкций из КМ показывают, что исчерпание несущей способности рационально спроектированных конструкций наступает гораздо позже первых этапов структурного изменения. Образование первых трещин в многослойном композите приводит к перераспределению напряжений в слоях и обуславливает его физическую нелинейность. По этой причине уточненные поверочные расчеты следует проводить с учетом более детального рассмотрения внутренних механизмов деформирования.

Рассмотрим тонкую многослойную оболочку вращения, выполненную из КМ, при действии осесимметричных нагрузок. Получим основные исходные матрицы для решения методом конечных элементов физически и геометрически нелинейной задачи деформирования такой оболочки. Воспользуемся шаговым методом нагружения, интегрирование будем проводить по предыдущей равновесной конфигурации (см. § 3.7).

Для описания кинематической модели деформирования воспользуемся гипотезами Кирхгофа—Лява. Тогда распределение перемещений по толщине оболочки будет определяться выражениями:

$$u(z) = u + z\vartheta_1;$$

$$w(z) = w,$$

а распределение деформаций

$$\varepsilon_1 = e_1 + z\kappa_1 + \frac{1}{2} \vartheta_1^2;$$

$$\varepsilon_2 = e_2 + z\kappa_2,$$

где

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{A} \frac{dw}{d\alpha} + k_1 u;$$

$$e_1 = \frac{1}{A} \frac{du}{d\alpha} + k_1 w; \quad e_2 = \psi u + k_2 w;$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{d\vartheta_1}{d\alpha}; \quad \kappa_2 = \psi \vartheta_1; \quad \psi = \frac{1}{AB} \frac{dB}{d\alpha},$$

u, w — касательные и нормальные перемещения координатной поверхности $z = 0$ конфигурации оболочки в момент времени τ . Главные кривизны k_1, k_2 и параметры Ламе также считаются определенными для предыдущего равновесного состояния.

В пределах отдельного конечного элемента перемещения u и w будем аппроксимировать линейным и кубическим полиномами:

$$u = c_1 + c_2 \alpha;$$

$$w = c_3 + c_4 \alpha + c_5 \alpha^2 + c_6 \alpha^3. \quad (4.220)$$

Переход от неопределенных коэффициентов аппроксимации $\{C\} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ к обобщенным перемещениям торцов конечного элемента $\{q\} = \{u^1, w^1, \vartheta_1^1, u^2, w^2, \vartheta_1^2\}$ выполняется аналогично (4.67), т. е.

$$\{C\} = [\eta] \{q\}, \quad (4.221)$$

где

$$[\eta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\Delta & 0 & 0 & 1/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^0 k_1^0 & 0 & -A^0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4A^0 k_1^0}{\Delta} & -\frac{3}{\Delta^2} & \frac{4A^0}{\Delta} & \frac{A^\Delta k_1^\Delta}{\Delta} & \frac{3}{\Delta^2} & \frac{A^\Delta}{\Delta} \\ \frac{3A^0 k_1^0}{\Delta^2} & \frac{2}{\Delta^3} & -\frac{3A^0}{\Delta^2} & \frac{A^\Delta k_1^\Delta}{\Delta^2} & -\frac{2}{\Delta^3} & -\frac{A^\Delta}{\Delta^2} \end{bmatrix}.$$

Здесь используются обозначения § 4.3. Параметр Δ , характеризующий длину элемента, определен для конфигурации τ .

Аппроксимации перемещений (4.220) с учетом (4.221) позволяют записать в пределах элемента распределение следующих кинематических характеристик:

перемещений: $\{U\} = [\phi] \{q\}$,
 где $\{U\} = \{u, w\}$, $[\phi] = [N] [\eta]$;
 угла поворота нормали: $\{\theta\} = [J] \{q\}$,
 где $\{\theta\} = \{\theta_1\}$; $[J] = [N_\theta] [\eta]$;
 линейных деформаций и изменений кривизн: $\{E\} = [B] \{q\}$,
 где $\{E\} = \{e_1, e_2, \kappa_1, \kappa_2\}$; $[B] = [B_c] [\eta]$.
 Матрицы $[N]$, $[N_\theta]$, $[B_c]$ приводятся ниже.
 Матрица перемещений $[N]$:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \end{bmatrix}.$$

Матрица углов поворота $[N_\theta]$

$$[N_\theta] = [k_1 \quad k_1 \alpha \quad 0 \quad -1/A \quad -2\alpha/A \quad -3\alpha^2/A].$$

Матрица линейных деформаций и изменений кривизн $[B_c]$:

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 & 1/A & k_1 & k_1 \alpha & k_1 \alpha^2 & k_1 \alpha^3 \\ \psi & \psi \alpha & k_2 & k_2 \alpha & k_2 \alpha^2 & k_2 \alpha^3 \\ k'_1/A & k'_1 \alpha/A + k_1/A & 0 & A'/A^3 & 2A'\alpha/A^3 - 2/A^2 & 3A'\alpha^2/A^3 - 6\alpha/A^2 \\ \psi k_1 & \psi k_1 \alpha & 0 & -\psi/A & -2\psi \alpha/A & -3\psi \alpha^2/A \end{bmatrix}.$$

Такие же аппроксимации применяются и для приращений перемещений выше величин при m -й итерации вычислительного процесса на интервале нагружения $(\tau, \tau + \Delta\tau)$.

Полученные выше матрицы $[\phi]$, $[J]$, $[B]$ позволяют для элемента e получить связь приращений реакций $\{\Delta t\}_m^e$ с приращением обобщенных перемещений $\{\Delta q\}_m^e$ на m -й итерации. Для этого следует воспользоваться формулировкой условия равновесия (3.90) и выполнить необходимые интегрирования, аналогичные тем, которые были подробно рассмотрены в § 4.3. После чего получим

$$\{\Delta t\}_m^e = ([K'_\tau]^e + [S_\tau]^e) \{\Delta q\}_m^e + \{F\}_{m-1}^e - \{P_{\tau+\Delta\tau}\}, \quad (4.222)$$

где e — номер элемента,

$$[K'_\tau]^e = \int_0^{\Delta} [B]^T [D'_\tau] [B] AB d\alpha, \quad (4.223)$$

$$[S_\tau]^e = \int_0^{\Delta} [J]^T [T_\tau] [J] AB d\alpha, \quad (4.224)$$

$$\{F\}_{m-1}^e = \int_0^{\Delta} [B]^T \{Q\}_{m-1} AB d\alpha, \quad (4.225)$$

$$\{P_{\tau+\Delta\tau}\} = \int_0^{\Delta} [\phi]^T \{p_{\tau+\Delta\tau}\} AB d\alpha. \quad (4.226)$$

В вычислении матрицы жесткости $[K_\tau]^\epsilon$ (4.223) участвует симметричная матрица $[D_\tau]$, устанавливающая связь приращений погонных усилий и моментов с приращениями линейных деформаций и изменений кривизн. Эта матрица имеет следующую структуру:

$$[D_\tau] = \begin{bmatrix} [D_{11}] & [D_{12}] \\ [D_{12}] & [D_{22}] \end{bmatrix}.$$

Матричные блоки $[D_{ij}]$ вычисляются аналогично (1.89А):

$$([D_{11}], [D_{12}], [D_{22}]) = \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [G_\tau']^{(k)}(1, z, z^2) dz,$$

где n — число слоев в многослойной оболочке; $z^{(k-1)}$, $z^{(k)}$ — координаты z внутренней и внешней поверхностей k -го слоя, $[G_\tau']$ — матрица касательных модулей k -го слоя, преобразованная к осям α , β оболочки

$$[G_\tau']^{(k)} = [T_1]^{(k)}_{(2 \times 3)} [G^{0'}]^{(k)} ([T_1]^{(k)})^T_{(2 \times 3)}.$$

Здесь матрица $[T]^{(k)}_{(2 \times 3)}$, необходимая для пересчета жесткостных характеристик k -го монослоя при переходе от системы координат слоя к системе координат оболочки, согласно (1.41) имеет компоненты

$$[T_1]^{(k)}_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \end{bmatrix}; \quad c = \cos \varphi^{(k)}; \\ s = \sin \varphi^{(k)},$$

где $\varphi^{(k)}$ — угол укладки k -го слоя, отсчитывается от направления α -линии оболочки. Коэффициенты матрицы $[G^{0'}]$, характеризующие жесткость однонаправленного КМ в осях слоя, подробно объяснялись в § 2.3 [см. (2.32)]. При вычислении $[G^{0'}]$ параметры ψ_1 , ψ_2 , ψ_{12} (табл. 2.1), зависящие от напряженно-деформированного состояния, следует подсчитывать на этапе предыдущего состояния равновесия, соответствующего τ .

Матрица $[T_\tau]$, используемая при вычислении матрицы приведенных напряжений $[S_\tau]^\epsilon$ (4.224), содержит всего лишь один коэффициент, равный погонному меридиональному усилию T_1^τ , возникающему к моменту времени τ . Вектор внутренних погонных силовых факторов $\{Q\}_{m-1}$, необходимый для подсчета вектора $\{F\}_{m-1}$ (4.225), содержит следующие компоненты:

$$\{Q\}_{m-1} = \{T_1, T_2, M_1, M_2\}_{m-1},$$

т. е. суммарные погонные меридиональные и окружные усилия: T_1 , T_2 и моменты: M_1 , M_2 , которые вычисляются на предыдущей $(m-1)$ -й итерации:

$$T_{1(m-1)} = \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_{1m-1}^{(k)} dz; \\ M_{1(m-1)} = \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_{1m-1}^{(k)} z dz \quad (1 \rightleftharpoons 2).$$

В качестве компонент вектора внешних поверхностных сил $\{p_{\tau+\Delta\tau}\}$, с помощью которого вычисляются приведенные узловые внешние силы, выступают полные касательные и нормальные нагрузки: $\{p_{\tau+\Delta\tau}\} = \{p_1, p_2\}_{\tau+\Delta\tau}$, действующие на этапе нагружения $\tau + \Delta\tau$.

После выполнения стандартных процедур по сборке отдельных элементов с учетом граничных условий получаем линейную систему алгебраических уравнений для определения приращений узловых перемещений:

$$[K_\tau] \{\Delta q\}_m = \{P_{\tau+\Delta\tau}\} - \{F\}_{m-1}, \quad (4.227)$$

где $[K_\tau] = [K'_\tau] + [S_\tau]$, в результате решения которой вычисляются перемещения $\{\Delta q\}_m$, позволяющие уточнить предыдущее решение:

$$\{q\}_m = \{q\}_{m-1} + \{\Delta q\}_m,$$

где для $m = 1$ $\{q\}_0 = 0$.

Рассмотрим кратко алгоритм расчета. Для описания геометрии многослойной оболочки вращения общего вида удобно профиль меридиана задавать по точкам и воспользоваться приемом, подробно разобранным в примере 5, помещенном в § 4.1 (см. рис. 4.9). Такой способ описания, примененный к отдельному конечному элементу, удобен еще и тем, что позволяет отслеживать геометрию координатной поверхности оболочки в процессе деформирования. Для описания физико-механических свойств отдельных слоев можно воспользоваться моделью деформирования КМ с хрупкой (§ 2.3) матрицей.

Рассмотрим общую последовательность решения задачи. При известной геометрии, внутренних силовых факторах и жесткостных свойствах конструкции, определенных в предыдущем положении равновесия, соответствующего времени τ , а также при внешних силах $\{p_{\tau+\Delta\tau}\}$ решаются последовательности задач (4.227) и находятся приращения узловых перемещений. Этим приращениям соответствуют приращения параметров напряженно-деформированного состояния, которые суммируются с параметрами, найденными на предыдущих шагах нагружения.

Далее производится анализ состояния слоев оболочки в соответствии с моделью деформирования, оценка их жесткости, а также возможная корректировка углов армирования, связанная с учетом деформаций сдвига в отдельном слое [26] (структурная нелинейность).

По известным приращениям перемещений также подсчитываются новые координаты контура деформированной оболочки. Для новой конфигурации, соответствующей времени $\tau + \Delta\tau$, вычисляется возможная невязка $\{\chi_{\tau+\Delta\tau}\}_{m-1}$, связанная с погрешностями предыдущего итерационного процесса, а также с переходом к новой геометрии:

$$\{\chi_{\tau+\Delta\tau}\}_{m-1} = \{P_{\tau+\Delta\tau}\} - \{F_{\tau+\Delta\tau}\}_{m-1},$$

где m — номер последней итерации. В том случае, если норма вектора невязки велика и не удовлетворяет условию

$$\|\{\chi_{\tau+\Delta\tau}\}_{m-1}\| \leq \mu \|\{P_{\tau+\Delta\tau}\} - \{F_{\tau+\Delta\tau}\}\|, \quad (4.228)$$

[в правой части неравенства стоит норма приращения вектора внешних узловых сил, μ — допускаемая относительная погрешность ($\mu \approx 0,1 \div 0,01$)], то производится снова итерационное уточнение предыдущего решения:

$$[K_{\tau+\Delta\tau}] \{\Delta q\}_m = \{\chi_{\tau+\Delta\tau}\}_{m-1}$$

до тех пор, пока не будет выполняться условие (4.228). После этого находится новая матрица $[K_{\tau+\Delta\tau}]$, дается очередная порция нагружения и начинается новый итерационный процесс, аналогичный (4.227).

В том случае, если при переходе к новой конфигурации невязки незначительные и условие (4.228) выполняется, то сразу дается очередная порция нагрузки и в итерационном процессе продолжает использоваться «старая» матрица жесткостей.

§ 4.9. Примеры расчетов оболочек из стеклопластиков

Пример 1. Цилиндрическая оболочка с днищами, имеющими одинаковые полюсные отверстия (одна половина ее показана на рис. 4.19), нагружена внутренним давлением p . В районе полюсного отверстия на оболочку действует дополнительное контактное давление p_h , статически эквивалентное действию давления на крышку, закрывающую полюсное отверстие радиуса r_0 . Это давление аппроксимируется линейной функцией от r . В средней части цилиндрической оболочки заданы условия симметрии.

Оболочка образована геодезической перекрестной спиральной намоткой ленты стеклопластика в четыре слоя (№№ 1—4), (см. рис. 4.19). На цилиндрической части имеет место кольцевая подмотка шестью слоями (№№ 5—10) стеклопластика. Контур днища и закон изменения угла армирования рассчитан по зависимостям [37]. Толщина стенки днища рассчитана с учетом ширины ленты стеклопластика, поэтому непосредственно на полюсе она равна нулю. Днище аппроксимировано 60 конечными элементами с длиной

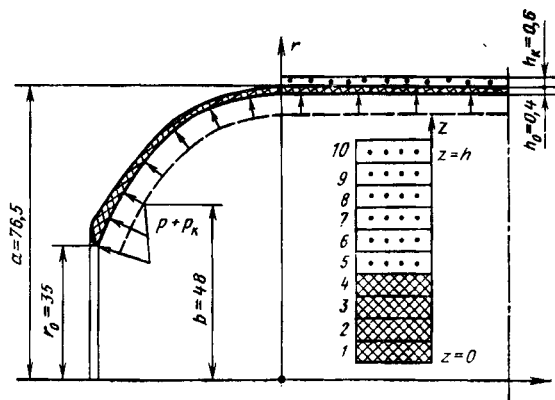


Рис. 4.19.

меридиана в пределах от 1,176 до 1,123 мм, а цилиндрическая часть — 35 элементами длиной 1,143 мм в районе сопряжения с днищем и 5 элементами длиной 16 мм — в средней части.

Однонаправленный материал имеет следующие характеристики: $E_1 = 5,4 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 1,2 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 0,5 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0,28$, $F_{+2} = F_{-2} = 40$ МПа.

Проводилось пошаговое нагружение 40 порциями по $\Delta p = 0,25$ МПа. Учитывались физическая, геометрическая и структурная нелинейности. На рис. 4.20, а и б приведены результаты расчета относительных перемещений в осевом ξ и радиальном $\bar{\xi}$ направлениях, где

$$\xi = \xi/(ea), \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}/(ea),$$

$$e = \sigma_1^0/E_1, \quad \sigma_1^0 = \frac{pa}{2h_a \cos^2 \varphi_a}.$$

Здесь σ_1^0 — напряжения в днище в направлении армирования, подсчитанные согласно сеточному анализу [37], φ_a — угол армирования днища на экваторе ($r = a$).

Как видно на рис. 4.20 (цифрами 1, 10, 20, 30, 40 отмечено число шагов нагружения), по мере нарастания нагрузки меняется харак-

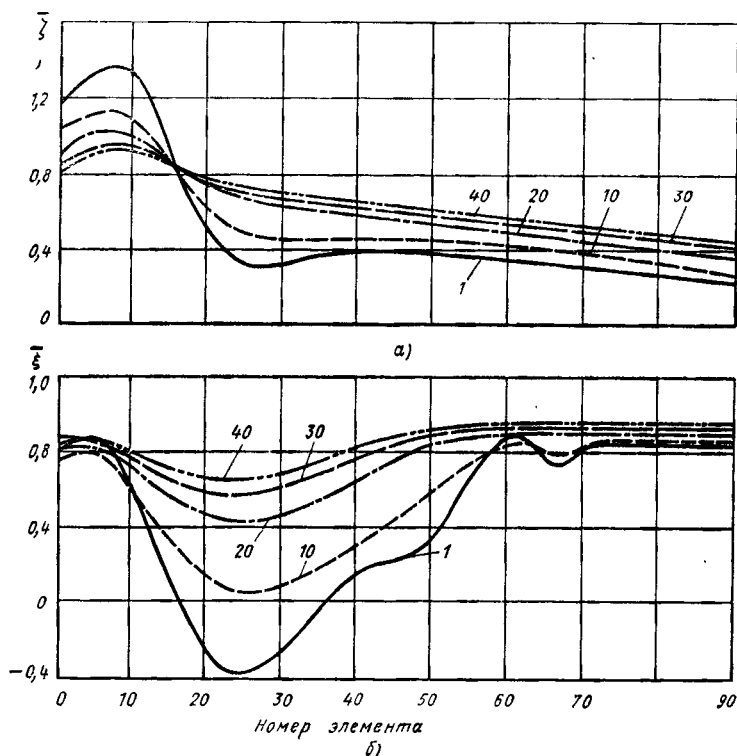


Рис. 4.20.

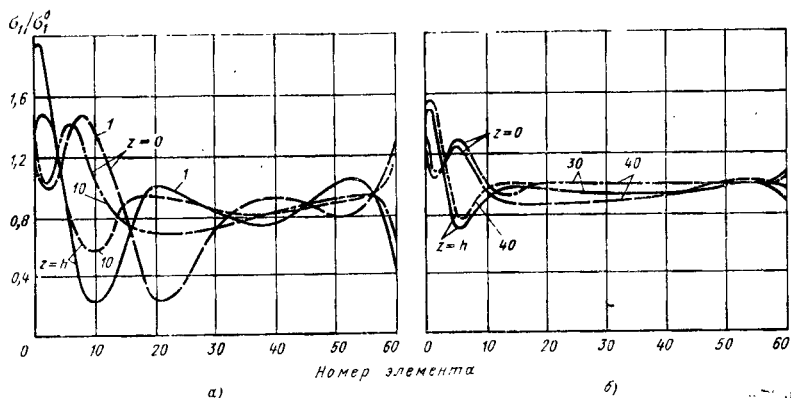


Рис. 4.21.

тер деформирования дна, сглаживаются краевые возмущения. Начиная с 5-го шага нагружения в оболочке происходит разрушение связующего, что приводит к изменению ее жесткости. Наличие растягивающих меридиональных усилий также вносит коррективы в изгибную жесткость оболочки. Характер деформирования дна стабилизировался примерно к 30-му шагу нагружения.

Оценку прочности сосуда давления разумно проводить по максимальным значениям напряжений σ_1 в направлении армирования. О характере их распределения можно судить по рис. 4.21. На первых шагах нагружения (на рис. 4.21, а даны результаты расчета для 1-го и 10-го шагов нагружения) по всей длине меридиана напряжения на внутренней ($z = 0$) и наружной ($z = h$) поверхностях различны, т. е. оболочка находится в «моментном» напряженном состоянии. С ростом нагрузки (на рис. 4.21, б даны результаты для 30-го и 40-го шагов нагружения) состояние дна приближается к безмоментному на всей длине (за исключением зоны действия дополнительного контактного давления).

Если учитывается только физическая нелинейность, изменение жесткостей однонаправленного материала при деформировании может привести к образованию в отдельных зонах оболочки участков с пониженной изгибной жесткостью — псевдопластических шарниров. Если при этом не учитывается влияние мембранных усилий на изгибную жесткость оболочки (эффекты геометрической нелинейности), деформации (и напряжения) могут принимать совершенно нереальные значения.

При учете только эффектов геометрической нелинейности уже при нагрузках, равных 15—20 % от разрушающей, в сосудах давления, изготовленных из современных композиционных материалов (стеклопластиков, органопластиков), напряжения σ_2 и τ_{12} достигают пределов прочности однонаправленного материала. Дальнейший расчет в физически линейной постановке не имеет смысла. Таким образом, эффекты геометрической и физической нелинейности в подобных конструкциях взаимосвязаны.

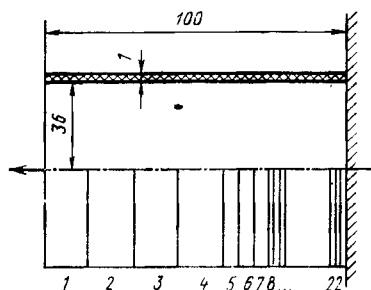


Рис. 4.22.

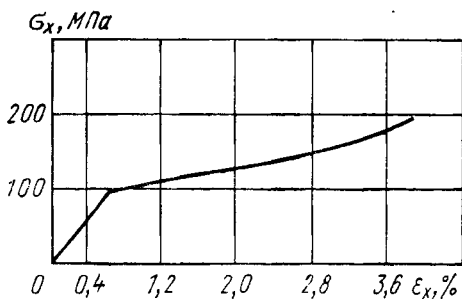


Рис. 4.23.

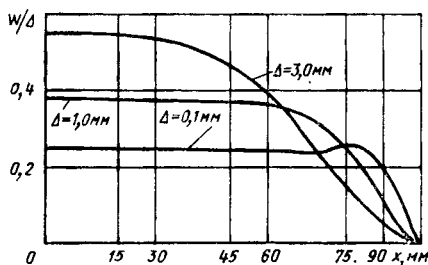


Рис. 4.24.

В рассмотренной задаче деформации сдвига γ_{12} малы и учет изменения углов армирования в процессе нагружения — структурной нелинейности практически не влияет на результаты расчета. Это естественно, поскольку условие малости касательных напряжений τ_{12} закладывалось при проектировании баллона [37]. Для демонстрации влияния структурной нелинейности рассмотрена другая задача.

Пример 2. Жестко защемленная на краях цилиндрическая оболочка нагружена растягивающими усилиями (рис. 4.22). Оболочка образована намоткой стеклопластика под углами $\pm 40^\circ$ к образующей. Характеристики однонаправленного материала те же, что и в предыдущей задаче. На диаграмме деформирования перекрестно армированного под углами $\pm 40^\circ$ стеклопластика (рис. 4.23) при растяжении в направлении оси x видно, что при $\epsilon_x = 0,6\%$, когда начинается разрушение связующего, имеет место излом, величина касательного модуля E_x уменьшается на порядок, а затем по мере роста уровня деформаций несколько растет за счет уменьшения угла армирования. Распределение радиальных перемещений w вдоль образующей при различных значениях приращений общей длины оболочки Δ дано на рис. 4.24. Как видно, характер деформирования существенно изменился при возрастании значения Δ от 0,1 до 3 мм, сгладилось краевое возмущение от заделки, увеличилась зона его действия. В этой задаче проявились все три вида нелинейностей.

Численные методы расчета трехслойных пластин и оболочек с многослойными обшивками

Среди многослойных силовых конструкций трехслойные пластины и оболочки занимают особое место. Их давно широко применяют в тех случаях, когда требуются повышенная жесткость и минимальная масса. Высокая удельная изгибная жесткость в трехслойных конструкциях достигается простым приемом разнесения на некоторое расстояние (за счет промежуточного легкого слоя заполнителя) двух жестких несущих слоев. В качестве заполнителя часто используют различные пенопласты, соты из металлической фольги или полимерной бумаги, гофры, ячейки и др. Для несущих слоев применяют различные металлические сплавы, а также композиционные материалы с высокими удельными жесткостными характеристиками. Для обеспечения совместного деформирования несущие слои скрепляются со слоем заполнителя, например, с помощью высокопрочных клеев.

Особенности расчета трехслойных конструкций в основном связаны с учетом деформаций поперечного сдвига и сжатия мало жесткого слоя заполнителя. Вопросам расчета трехслойных пластин и оболочек посвящена обширная литература, насчитывающая к настоящему времени несколько тысяч публикаций. С обзорами основных результатов исследований можно ознакомиться в работах [1, 2, 18].

В главе основное внимание уделено описанию различных кинематических моделей деформирования трехслойных оболочек вращения и условиям стыковки со шпангоутами. Весьма трудоемкий этап получения разрешающих уравнений задач статики, устойчивости и колебаний предлагается выполнять вариационно-матричным способом и включать его непосредственно в общую программу расчета на ЭВМ.

§ 5.1. Особенности деформирования

Для построения модели деформирования трехслойной оболочки (рис. 5.1) воспользуемся кинематическим подходом, в основе которого лежат гипотезы о распределении перемещений по толщинам слоев оболочки. Это позволит достаточно простым способом приближенно свести трехмерную задачу теории упругости к двумерной. Для оболочек, согласно определению, величина измерения по координате z гораздо меньше двух других измерений. Используя это обстоятельство, перемещения u_1, u_2, u_3 , направленные вдоль координатных линий α_1, α_2, z (рис. 5.2), можно искать в виде степенных рядов от-

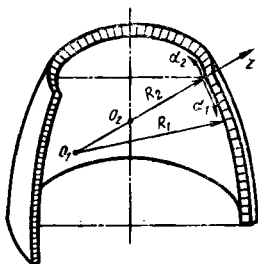


Рис. 5.1.

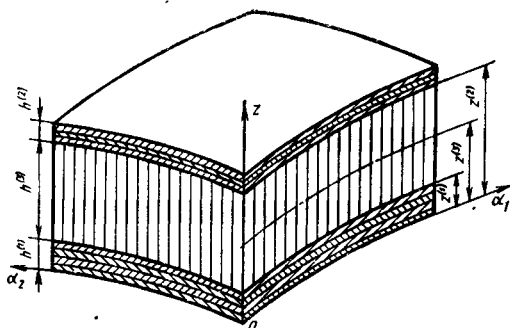


Рис. 5.2.

носителю аргумента z :

$$\begin{aligned} v_1(\alpha_1, \alpha_2, z) &= \sum_{k=0}^m a_k(\alpha_1, \alpha_2) z^k; \\ v_2(\alpha_1, \alpha_2, z) &= \sum_{k=0}^m b_k(\alpha_1, \alpha_2) z^k; \\ v_3(\alpha_1, \alpha_2, z) &= \sum_{k=0}^n c_k(\alpha_1, \alpha_2) z^k, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $m+1$, $n+1$ — числа удерживаемых членов разложения; a_k , b_k , c_k — коэффициенты разложения, представляющие функции аргументов α_1 , α_2 .

Для получения результатов достаточной степени точности при решении задач теории оболочек ограничиваются, как правило, удержанием небольшого числа первых членов разложения. Приведем несколько примеров. При удержании только первых членов разложения (5.1), т. е. в предположении, что касательные и нормальные перемещения постоянны по толщине, получим уравнения безмоментной теории оболочек. Если удержать в (5.1) для касательных перемещений v_1 , v_2 , два члена разложения, а для нормального перемещения v_3 ограничиться первым членом, то получим уравнения теории оболочек, соответствующие гипотезам С. П. Тимошенко. При дополнительном условии об отсутствии деформаций поперечного сдвига получим классические гипотезы Кирхгофа—Лява и соответствующие им уравнения. В приведенных примерах эффекты, связанные с деформациями поперечного сжатия, оказались вне рассмотрения, поскольку для нормальных перемещений удерживался только первый член разложения. При построении моделей более высокого порядка эти эффекты можно легко учесть.

Перейдем к рассмотрению моделей деформирования элемента трехслойной оболочки. Толщины слоев обшивок $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ (см. рис. 5.2) для трехслойных конструкций значительно меньше толщины слоя заполнителя $h^{(3)}$, поэтому для описания кинематики деформирования обшивок можно ограничиться мембранной схемой или гипотезами Кирхгофа—Лява.

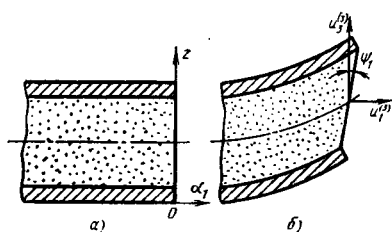


Рис. 5.3.

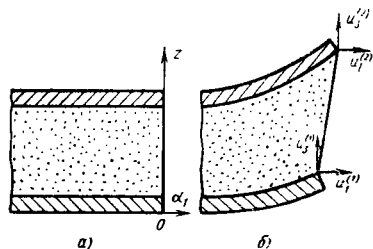


Рис. 5.4.

Ниже рассмотрим три модели слоя заполнителя.

На рис. 5.3, а, 5.4, а и 5.5, а представлен трехслойный пакет в исходном состоянии, на рис. 5.3, б, 5.4, б и 5.5, б — в деформированном.

Первая модель предполагает линейное распределение по толщине заполнителя касательных перемещений и несжимаемость материала в поперечном направлении, т. е. $v_1 = a_0 + a_1 z$, $v_2 = b_0 + b_1 z$, $v_3 = c_0$. Для моментных несущих слоев эта модель соответствует гипотезе ломаной линии [19] для трехслойного пакета. С помощью этой модели в слое заполнителя приближенно учитываются основные деформации — деформации поперечного сдвига. Подавляющее большинство результатов расчета трехслойных конструкций получено с использованием именно этой модели.

Вторая модель в первом приближении учитывает в заполнителе кроме деформаций поперечного сдвига деформации поперечного сжатия. Для этого в аппроксимации (5.1) для всех перемещений удерживаются по два первых члена разложения: $v_1 = a_0 + a_1 z$; $v_2 = b_0 + b_1 z$; $v_3 = c_0 + c_1 z$. Такая модель соответствует линейным законам распределения перемещений по толщине слоя заполнителя (рис. 5.4) [11].

Дальнейшее уточнение деформаций поперечного сдвига и сжатия слоя заполнителя возможно при большем числе членов разложения касательных и нормальных перемещений. На рис. 5.5 представлена форма трехслойного элемента до и после деформирования. Касательные перемещения распределяются в этом случае по кубической параболе аргумента z , а нормальный прогиб — по квадратичной параболе:

$$v_1 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3;$$

$$v_2 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3;$$

$$v_3 = c_0 + c_1 z + c_2 z^2.$$

В дальнейшем для выбранных моделей деформирования аппроксимацию перемещений будем представлять не через неопределенные коэффициенты разложения a_k , b_k , c_k [см. (5.1)], а через перемещения

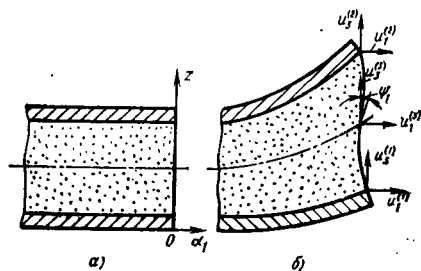


Рис. 5.5.

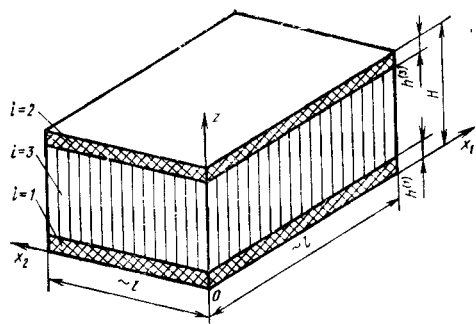


Рис. 5.6.

и углы поворота некоторых характерных поверхностей (на рис. 5.3, б, 5.4, б, 5.5, б обозначены $u_1^{(i)}$, $u_3^{(i)}$ и ψ_1). В этом случае подлежащие определению функции аргументов α_1, α_2 будут иметь наглядное геометрическое представление, а также более удобно будут записываться и граничные условия задачи.

Определим комплексы геометрических и упругих характеристик трехслойной конструкции, в соответствии с которыми

в заполнителе будут преобладать те или иные деформации. Такие предварительные оценки, пусть даже грубые, полезны, поскольку они помогают выбрать соответствующую модель деформирования и приближенно оценить трудоемкость предстоящего расчета.

Рассмотрим трехслойную пластину (рис. 5.6), подвергающуюся изгибу. Воспользуемся энергетическими оценками [11]. Представим плотность потенциальной энергии деформации слоя заполнителя в следующем виде:

$$U_0^{(3)} = U_{01}^{(3)} + U_{02}^{(3)} + U_{03}^{(3)},$$

где

$$U_{01}^{(3)} = \frac{1}{2} (\sigma_1^{(3)} \epsilon_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} \epsilon_2^{(3)} + \tau_{12}^{(3)} \gamma_{12}^{(3)})$$

— плотность энергии деформаций заполнителя в плоскости пластины;

$$U_{02}^{(3)} = \frac{1}{2} (\tau_{13}^{(3)} \gamma_{13}^{(3)} + \tau_{23}^{(3)} \gamma_{23}^{(3)})$$

— плотность энергии деформаций поперечных сдвигов;

$$U_{03}^{(3)} = \frac{1}{2} \sigma_3^{(3)} \epsilon_3^{(3)}$$

— плотность энергии деформаций поперечного сжатия.

Для получения энергетических оценок требуется провести сравнение указанных слагаемых $U_{01}^{(3)}$, $U_{02}^{(3)}$, $U_{03}^{(3)}$ плотности потенциальной энергии деформации заполнителя.

Рассмотрим упругие характеристики материалов. Для обшивок примем, что их модули упругости имеют порядок $E : E_1^{(i)} \sim E_2^{(i)} \sim \sim G_{12}^{(i)} \sim E$ ($i = 1, 2$). Величину E будем называть характерным модулем. Для слоя заполнителя соотнесем его модули упругости с характерным модулем E :

$$\begin{aligned} E_1^{(3)} &\sim E_2^{(3)} \sim G_{12}^{(3)} \sim \varphi_1 E, \\ G_{13}^{(3)} &\sim G_{23}^{(3)} \sim \varphi_2 E, \\ E_3^{(3)} &\sim \varphi_3 E. \end{aligned} \quad (5.2)$$

С помощью чисел $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ устанавливаются порядки отношений модулей заполнителя к характерному модулю.

Будем считать, что напряженно-деформированное состояние обшивок с заданной точностью описывается гипотезами Кирхгофа—Лява. Порядок основных напряжений положим равным σ : $\sigma_1^{(i)} \sim \sim \sigma_2^{(i)} \sim \tau_{12}^{(i)} \sim \sigma$ ($i = 1, 2$), а порядок основных деформаций определим, используя соотношения упругости:

$$\varepsilon_1^{(i)} \sim \varepsilon_2^{(i)} \sim \gamma_{12}^{(i)} \sim \sigma/E = \varepsilon \quad (i = 1, 2). \quad (5.3)$$

Порядки напряжений поперечного сдвига и сжатия в обшивках можно приближенно установить, воспользовавшись уравнениями равновесия элемента:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}^{(i)}}{\partial x_3} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2^{(i)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}^{(i)}}{\partial x_3} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{13}^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}^{(i)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3^{(i)}}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $i = 1, 2$; $x_3 = z$.

Если принять, что изменяемость напряженного состояния вдоль координатных линий x_1, x_2 и x_3 характеризуется масштабными коэффициентами l и h (см. рис. 5.6):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sim \frac{\partial}{\partial x_2} \sim \frac{1}{l}; \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \sim \frac{1}{h},$$

где $h^{(i)} \leq h \leq H$, то согласно (5.4) можно получить следующие оценки для напряжений поперечного сдвига и сжатия обшивок: $\tau_{13}^{(i)} \sim \sim \eta \sigma$; $\tau_{23}^{(i)} \sim \eta \sigma$; $\sigma_3^{(i)} \sim \eta^2 \sigma$ ($i = 1, 2$), где $\eta = h/l$.

Для анализа напряженно-деформированного состояния заполнителя рассмотрим характерные эпюры распределения напряжений по толщине трехслойного пакета (рис. 5.7). Поскольку напряжения поперечного сдвига и сжатия при переходе от слоя к слою не терпят разрывов, то

$$\begin{aligned} \tau_{13}^{(3)} \sim \tau_{23}^{(3)} \sim \tau_{13}^{(i)} \sim \tau_{23}^{(i)} \sim \eta \sigma \sim \eta E \varepsilon; \\ \sigma_3^{(3)} \sim \sigma_3^{(i)} \sim \eta^2 \sigma \sim \eta^2 E \varepsilon \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Порядки соответствующих деформаций поперечного сдвига и сжатия с учетом представления упругих характеристик заполнителя

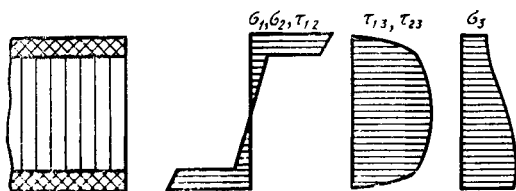


Рис. 5.7.

в виде (5.2) будут равны

$$\begin{aligned}\gamma_{13}^{(3)} &\sim \gamma_{23}^{(3)} \sim \eta \varepsilon / \varphi_2; \\ \varepsilon_3^{(3)} &\sim \eta^2 \varepsilon / \varphi_3,\end{aligned}\quad (5.6)$$

где ε — порядок основных деформаций (5.3). Так как деформации в плоскости пластины при переходе от слоя к слою не терпят разрывов, то

$$\varepsilon_1^{(3)} \sim \varepsilon_2^{(3)} \sim \gamma_{12}^{(3)} \sim \varepsilon, \quad (5.7)$$

а соответствующие напряжения заполнителя определяются с использованием упругих характеристик (5.2)

$$\sigma_1^{(3)} \sim \sigma_2^{(3)} \sim \tau_{12}^{(3)} \sim \varphi_1 E \varepsilon. \quad (5.8)$$

Принимая во внимание полученные оценки для напряжений и деформаций в слое заполнителя [см. (5.5)—(5.8)], плотность потенциальной энергии заполнителя можно представить в виде

$$U_0^{(3)} = U_{01}^{(3)} + U_{02}^{(3)} + U_{03}^{(3)} \sim E \varepsilon^2 (\varphi_1 + \eta^2 / \varphi_2 + \eta^4 / \varphi_3).$$

В зависимости от соотношения параметров φ_1 , η^2 / φ_2 , η^4 / φ_3 проведем классификацию заполнителей следующим образом. Если для трехслойной конструкции

$$\varphi_1 \gg \eta^2 / \varphi_2; \quad \varphi_1 \gg \eta^4 / \varphi_3, \quad (5.9)$$

то $U_0^{(3)} = \frac{1}{2} (\sigma_1^{(3)} \varepsilon_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} \varepsilon_2^{(3)} + \tau_{12}^{(3)} \gamma_{12}^{(3)})$.

Такой слой заполнителя ничем не будет отличаться от слоя, деформирование которого описывается с использованием гипотез Кирхгофа—Лява.

Если для трехслойной конструкции

$$\varphi_1 \sim \eta^2 / \varphi_2; \quad \varphi_1 \gg \eta^4 / \varphi_3, \quad (5.10)$$

то $U_0^{(3)} = \frac{1}{2} (\sigma_1^{(3)} \varepsilon_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} \varepsilon_2^{(3)} + \tau_{12}^{(3)} \gamma_{12}^{(3)} + \tau_{13}^{(3)} \gamma_{13}^{(3)} + \tau_{23}^{(3)} \gamma_{23}^{(3)})$.

В этом случае в заполнителе следует учитывать как напряжения, параллельные срединной поверхности, так и напряжения поперечного сдвига. Такой заполнитель называют «жестким».

Если параметры таковы, что

$$\eta^2 / \varphi_2 \gg \varphi_1; \quad \eta^2 / \varphi_2 \gg \eta^4 / \varphi_3, \quad (5.11)$$

то $U_0^{(3)} = \frac{1}{2} (\tau_{13}^{(3)} \gamma_{13}^{(3)} + \tau_{23}^{(3)} \gamma_{23}^{(3)})$

и в заполнителе учитывают лишь напряжения поперечного сдвига. Такой заполнитель называют «легким» или «мягким».

В случае, если

$$\eta^2 / \varphi_2 \sim \eta^4 / \varphi_3 \gg \varphi_1, \quad (5.12)$$

то $U_0^{(3)} = \frac{1}{2} (\tau_{13}^{(3)} \gamma_{13}^{(3)} + \tau_{23}^{(3)} \gamma_{23}^{(3)} + \sigma_3^{(3)} \varepsilon_3^{(3)})$,

и заполнитель называют трансверсально «мягким». Для таких заполнителей, как видно из (5.12), при $\varphi_2 \sim \varphi_3$ должно выполняться условие $l \sim h$. В этом случае под l понимается масштаб изменения напряженно-деформированного состояния, которое имеет локаль-

ный характер [11]. Такое деформирование возникает, например, в окрестности точек приложения сосредоточенных сил, закреплений, а также при коротковолновых изгибных колебаниях и местных формах потери устойчивости.

§ 5.2. Решение задач статики трехслойных оболочек с использованием гипотезы ломаной линии

В тех случаях, когда можно пренебречь поперечным сжатием заполнителя, но необходимо учесть податливость заполнителя на поперечный сдвиг, расчет трехслойных оболочек выполняют с использованием гипотезы ломаной линии [19]. Согласно этой гипотезе нормальные перемещения всех слоев принимаются одинаковыми. Касательные перемещения в пределах каждого слоя распределяются линейно по координате z и формируют в общем случае ломаный профиль сечения, как это показано на рис. 5.3.

Рассмотрим подробно распределение перемещений по толщине трехслойного пакета. Принадлежность к слоям обшивок или заполнителя будем отмечать индексом, заключенным в круглые скобки. Для внутренней обшивки принят индекс 1, для внешней обшивки — 2, для слоя заполнителя — 3. Обшивки трехслойной оболочки, как правило, выполняют в виде тонких слоев из жестких материалов, поэтому для описания деформирования обшивок в большинстве случаев пользуются гипотезой Кирхгофа—Лява. Согласно этой гипотезе распределение перемещений в пределах обшивки (рис. 5.8) можно записать аналогично (4.53):

$$\begin{aligned} v_1^{(i)} &= u_1^{(i)} + \gamma^{(i)} \vartheta_1^{(i)} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ v_3^{(i)} &= u_3^{(i)}, \end{aligned}$$

где $\gamma^{(i)} = z - z^{(i)}$; $i = 1, 2$.

Перемещения $u_1^{(i)}$, $u_2^{(i)}$, $u_3^{(i)}$ есть перемещения поверхностей обшивок, примыкающих к заполнителю. Углы поворота нормалей обшивок $\vartheta_1^{(i)}$, $\vartheta_2^{(i)}$ определяются через перемещения следующим образом:

$$\vartheta_1^{(i)} = \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(-\frac{1}{A_1} u_{3,1}^{(i)} + k_1 u_1^{(i)} \right), \quad (1 \rightleftharpoons 2).$$

С помощью коэффициентов $\delta_1^{(i)}$, $\delta_2^{(i)}$ учитывается дискретное изменение метрики при переходе от координатной поверхности $z = 0$ к слою с координатой $z^{(i)}$: $\delta_1^{(i)} = 1 + k_1 z^{(i)}$ ($1 \rightleftharpoons 2$).

В соответствии с допущениями о распределении перемещений в слое заполнителя в аппроксимациях (5.1) принимается $m = 1$, $n = 0$, что приводит к следующим выраже-

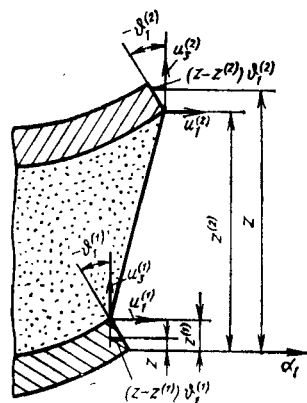


Рис. 5.8.

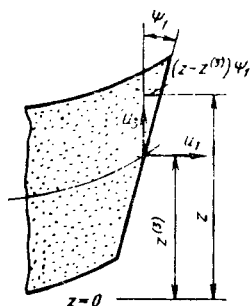


Рис. 5.9.

ниями:

$$v_1^{(3)} = a_0 + a_1 z, \quad v_2^{(3)} = b_0 + b_1 z, \quad v_3^{(3)} = c_0. \quad (5.13)$$

От неопределенных функций $a_0, \dots, c_0$ аргументов α_1, α_2 можно перейти к более наглядным геометрическим представлениям, если принять в качестве неизвестных перемещения u_1, u_2, u_3 срединной поверхности заполнителя и углы поворота сечений заполнителя ψ_1, ψ_2 (рис. 5.9). Полагая

$$v_1^{(3)}(z^{(3)}) = u_1 \quad (1 \rightarrow 2);$$

$$v_{1,2}^{(3)} = \psi_1 \quad (1 \rightarrow 2); \quad v_3^{(3)} = u_3,$$

получим пять уравнений, которые позволяют определить коэффициенты $a_0, \dots, c_0$: $a_0 = u_1 - z^{(3)}\psi_1$; $b_0 = u_2 - z^{(3)}\psi_2$; $a_1 = \psi_1$; $b_1 = \psi_2$; $c_0 = u_3$.

Тогда вместо (5.13) получим следующую запись распределения перемещений в слое заполнителя:

$$v_i^{(3)} = u_i + \gamma^{(3)}\psi_i \quad (1 \rightarrow 2), \quad v^{(3)} = u_3, \quad (5.14)$$

где $\gamma^{(3)} = z - z^{(3)}$.

С использованием выражений (5.14) выполним кинематическое сопряжение слоев, которое согласно рис. 5.8, 5.9 вполне очевидно: $u_1^{(i)} = v_1^{(3)}(z^{(i)}) \quad (1 \rightarrow 2)$; $u_3^{(i)} = u_3 \quad (i = 1, 2)$.

Отсюда получим

$$u_1^{(i)} = u_1 + c^{(i)}\psi_1 \quad (1 \rightarrow 2); \quad u_3^{(i)} = u_3, \quad (5.15)$$

где $c^{(i)} = z^{(i)} - z^{(3)}$; $i = 1, 2$.

Тогда распределение перемещений в обшивках и углы поворота нормалей с учетом (5.15) можно представить в следующем виде:

$$v_1^{(i)} = u_1 + c^{(i)}\psi_1 + \gamma^{(i)}\theta_1^{(i)} \quad (1 \rightarrow 2); \quad u_3^{(i)} = u_3 \quad i = 1, 2; \quad (5.16)$$

$$\theta_1^{(i)} = \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(-\frac{1}{A_1} u_{3,1} + k_1 u_1 + k_1 c^{(i)} \psi_1 \right) \quad (1 \rightarrow 2) \quad i = 1, 2. \quad (5.17)$$

Таким образом, гипотеза ломаной линии позволяет с помощью перемещений срединного слоя заполнителя u_1, u_2, u_3 и углов поворота сечений заполнителя ψ_1, ψ_2 вычислить перемещения в любой точке трехслойной оболочки. Для обшивок следует воспользоваться зависимостями (5.16), (5.17) для заполнителя — (5.14). Перемещения u_1, u_2, u_3 и углы поворота ψ_1, ψ_2 являются независимыми переменными и подлежат определению.

Рассмотрим распределение деформаций по слоям. Из общих выражений для деформаций (4.182), принимая во внимание, что

$$\frac{1}{1 + k_1 z} \approx \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(1 - \frac{k_1 \gamma^{(i)}}{\delta_1^{(i)}} \right) \quad (1 \rightarrow 2) \quad i = 1, 2, 3,$$

распределение деформаций в пределах каждого слоя можно представить в виде постоянной составляющей и составляющей, линейно зависящей от $\gamma^{(i)}$:

$$\{\varepsilon^{(i)}\} = \{e^{(i)}\} + \gamma^{(i)} \{\kappa^{(i)}\} \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.18)$$

где $\gamma^{(i)} = z - z^{(i)}$.

Для слоев обшивок ($i = 1, 2$) в выражении (5.18) под компонентами векторов понимаются следующие:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^{(i)}\} &= \{\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \gamma_{12}^{(i)}\}; \\ \{e^{(i)}\} &= \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_{12}^{(i)}\}; \\ \{\kappa^{(i)}\} &= \{\kappa_1^{(i)}, \kappa_2^{(i)}, \kappa_{12}^{(i)}\}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $\{\varepsilon^{(i)}\}$ — деформации поверхностей $z^{(i)}$ ($i = 1, 2$); $\{\kappa^{(i)}\}$ — изменения кривизн в обшивках. Представленные в (5.19) компоненты связаны с независимыми переменными $u_1, u_2, u_3, \psi_1, \psi_2$ следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} e_1^{(i)} &= \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(e_1 + \frac{c^{(i)}}{A_1} \psi_{1,1} + \varphi_{12} \psi_2 \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ e_{12} &= \omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)}; \\ \omega_1^{(i)} &= \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(\omega_1 + \frac{c^{(i)}}{A_1} \psi_{2,1} - c^{(i)} \varphi_{12} \psi_1 \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ \kappa_1^{(i)} &= \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(\frac{1}{A_1} \vartheta_{1,1}^{(i)} + \varphi_{12} \vartheta_2^{(i)} - k_1 e_1^{(i)} \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ \kappa_{12}^{(i)} &= \frac{1}{\delta_2^{(i)}} \left(\frac{1}{A_2} \vartheta_{1,2}^{(i)} - \varphi_{21} \vartheta_2^{(i)} - k_2 \omega_2^{(i)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(\frac{1}{A_1} \vartheta_{2,1}^{(i)} - \varphi_{12} \vartheta_1^{(i)} - k_1 \omega_1^{(i)} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{A_1} u_{1,1} + \varphi_{12} u_2 + k_1 u_3 \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ \omega_1 &= \frac{1}{A_1} u_{2,1} - \varphi_{12} u_1 \quad (1 \rightleftharpoons 2). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Углы поворота нормалей обшивок $\vartheta_1^{(i)}, \vartheta_2^{(i)}$ вычисляются согласно (5.17)

Если заполнитель трехслойной оболочки считается «жестким» [см. (5.10)I], то в выражении (5.18) составляющими векторов будут

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^{(3)}\} &= \{\varepsilon_1^{(3)}, \varepsilon_2^{(3)}, \gamma_{12}^{(3)}, \gamma_{13}^{(3)}, \gamma_{23}^{(3)}\}; \\ \{e^{(3)}\} &= \{e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_{12}^{(3)}, e_{13}^{(3)}, e_{23}^{(3)}\}; \\ \{\kappa^{(3)}\} &= \{\kappa_1^{(3)}, \kappa_2^{(3)}, \kappa_{12}^{(3)}, \kappa_{13}^{(3)}, \kappa_{23}^{(3)}\}, \end{aligned}$$

а их представления через перемещения u_1, u_2, u_3 и углы поворота сечения заполнителя ψ_1, ψ_2 согласно (5.14) и (4.182) имеют вид

$$\begin{aligned} e_1^{(3)} &= \frac{e_1}{\delta_1^{(3)}} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \quad \omega_1^{(3)} = \frac{\omega_1}{\delta_1^{(3)}} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ e_{12}^{(3)} &= \omega_1^{(3)} + \omega_2^{(3)}; \\ e_{13}^{(3)} &= \frac{1}{\delta_1^{(3)}} \left(\frac{1}{A_1} u_{3,1} - k_1 u_1 \right) + \psi_1 \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ \kappa_1^{(3)} &= \frac{1}{\delta_1^{(3)}} \left(\frac{1}{A_1} \psi_{1,1} + \varphi_{12} \psi_2 - k_1 e_1^{(3)} \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ \kappa_{12}^{(3)} &= \frac{1}{\delta_2^{(3)}} \left(\frac{1}{A_2} \psi_{1,2} - \varphi_{21} \psi_2 - k_2 \omega_2^{(3)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\delta_1^{(3)}} \left(\frac{1}{A_1} \psi_{2,1} - \varphi_{12} \psi_1 - k_1 \omega_1^{(3)} \right); \\ \kappa_{13}^{(3)} &= -\frac{k_1 e_{13}^{(3)}}{\delta_1^{(3)}} \quad (1 \rightleftharpoons 2), \end{aligned} \quad (5.22)$$

где $e_1, e_2, \omega_1, \omega_2$ вычисляются согласно (5.21).

Для случая «легкого» или «мягкого» заполнителя [см. (5.11)] деформации $\varepsilon_1^{(3)}, \delta_2^{(3)}, \gamma_{12}^{(3)}$ не рассматриваются, поэтому в выражении (5.18) компоненты векторов будут следующие:

$$\{\varepsilon^{(3)}\} = \{\gamma_{13}^{(3)}, \gamma_{23}^{(3)}\}; \quad \{e^{(3)}\} = \{e_{13}^{(3)}, e_{23}^{(3)}\}; \quad \{\kappa^{(3)}\} = \{\kappa_{13}^{(3)}, \kappa_{23}^{(3)}\}.$$

Рассмотрим соотношения упругости. Пусть обшивки трехслойной конструкции представляют тонкие многослойные оболочки. Будем считать, что каждый отдельный слой обшивки выполнен из ортотропного материала и оси упругой симметрии в общем случае не совпадают с направлениями координатных линий. Для линейно упругого материала связь напряжений с деформациями будет подчиняться обобщенному закону Гука, который в случае плоского напряженного состояния можно представить как

$$\{\sigma^{(i)}\} = [G^{(i)}] \{\varepsilon^{(i)}\} \quad i = 1, 2. \quad (5.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \{\sigma^{(i)}\} &= \{\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}\}; \quad \{\varepsilon^{(i)}\} = \{\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \gamma_{12}^{(i)}\}; \\ [G^{(i)}] &= \begin{bmatrix} g_{11}^{(i)} & g_{12}^{(i)} & g_{16}^{(i)} \\ \text{сим.} & g_{22}^{(i)} & g_{26}^{(i)} \\ & & g_{66}^{(i)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где коэффициенты матрицы $[G^{(i)}]$ считаются известными кусочно-непрерывными функциями аргумента z . В случае совпадения осей ортотропии с координатными линиями коэффициенты $g_{16}^{(i)} = g_{26}^{(i)} = 0$, остальные определяются соотношениями

$$g_{11}^{(i)} = \frac{E_1^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \quad g_{12}^{(i)} = \frac{E_1^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}; \quad g_{66}^{(i)} = G_{12}^{(i)}. \quad (5.24)$$

Для слоя заполнителя матричная запись соотношений упругости остается аналогичной (5.23):

$$\{\sigma^{(3)}\} = [G^{(3)}] \{\epsilon^{(3)}\}, \quad (5.25)$$

но компонентами в ней будут для случая «жесткого» заполнителя

$$\begin{aligned} \{\sigma^{(3)}\} &= \{\sigma_1^{(3)}, \sigma_2^{(3)}, \tau_{12}^{(3)}, \tau_{13}^{(3)}, \tau_{23}^{(3)}\}; \\ \{\epsilon^{(3)}\} &= \{\epsilon_1^{(3)}, \epsilon_2^{(3)}, \gamma_{12}^{(3)}, \gamma_{13}^{(3)}, \gamma_{23}^{(3)}\} \\ [G^{(3)}] &= \begin{bmatrix} g_{11}^{(3)} & g_{12}^{(3)} & g_{16}^{(3)} & 0 & 0 \\ & g_{22}^{(3)} & g_{26}^{(3)} & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & g_{66}^{(3)} & 0 & 0 \\ & & & g_{55}^{(3)} & g_{45}^{(3)} \\ & & & & g_{44}^{(3)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При совпадении осей упругой симметрии с координатными линиями коэффициенты $g_{16}^{(3)}$, $g_{26}^{(3)}$, $g_{45}^{(3)}$ обращаются в ноль, $g_{55}^{(3)} = G_{13}$, $g_{44}^{(3)} = G_{23}$, остальные коэффициенты определяются аналогично (5.24). Если заполнитель неоднороден по толщине, то под модулями сдвига G_{13} , G_{23} будем понимать осредненные модули [см. (4.213)].

В случае «легкого» или «мягкого» заполнителя в записи соотношений упругости (5.25) будут следующие компоненты:

$$\{\sigma^{(3)}\} = \{\tau_{13}^{(3)}, \tau_{23}^{(3)}\}; \quad \{\epsilon^{(3)}\} = \{\gamma_{13}^{(3)}, \gamma_{23}^{(3)}\};$$

$$[G^{(3)}] = \begin{bmatrix} g_{55}^{(3)} & g_{45}^{(3)} \\ \text{сим.} & g_{44}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Для получения разрешающих уравнений решения задачи статики воспользуемся принципом возможных перемещений, который применительно к трехслойным оболочкам можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_S \int_{h(i)} \delta \{\epsilon^{(i)}\}^T \{\sigma^{(i)}\} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz dS - \sum_{i=1}^2 \int_S \delta \{U^{(i)}\}^T \{p^{(i)}\} dS - \\ - \sum_{i=1}^3 \int_\Gamma \int_{h(i)} \delta \{U^{(i)}\}^T \{\sigma_\Gamma^{(i)}\} \delta_\Gamma^{(i)} dz d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где S — площадь координатной поверхности оболочки; $h^{(i)}$ — толщины обшивок ($i = 1, 2$) и заполнителя ($i = 3$); $\delta_1^{(i)}$, $\delta_2^{(i)}$ — коэффициенты, учитывающие изменение метрики отдельных слоев; $\{U^{(i)}\}$ и $\{p^{(i)}\}$ — векторы, имеющие следующий вид:

$$\{U^{(i)}\} = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}\}; \quad \{p^{(i)}\} = \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} \{p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}\}, \quad (i = 1, 2);$$

они представляют собой соответственно перемещения слоев обшивок [см. (5.15)] и поверхностные нагрузки, действующие на обшивки. Γ — часть контура координатной поверхности, на которой

приложены к слоям внешние напряжения $\{\sigma_r^{(i)}\}$; $\delta_r^{(i)}$ — коэффициент, учитывающий изменение метрики отдельных слоев на контуре.

Преобразуем выражение для работы внутренних сил с учетом представления деформаций в виде (5.18) и напряжений в виде (5.23):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_S \int_{h^{(i)}} \delta \{e^{(i)}\}^T \{\sigma^{(i)}\} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz dS &= \sum_{i=1}^3 \int_S \int_{h^{(i)}} (\delta \{e^{(i)}\} + \\ &+ \gamma^{(i)} \delta \{\kappa^{(i)}\})^T [G^{(i)}] (\{e^{(i)}\} + \gamma^{(i)} \{\kappa^{(i)}\}) \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz dS = \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_S \delta \{E^{(i)}\}^T [D^{(i)}] \{E^{(i)}\} dS, \end{aligned}$$

где $\{E^{(i)}\}$ — вектор обобщенных деформаций слоя, содержащий компоненты векторов $\{e^{(i)}\}$ и $\{\kappa^{(i)}\}$: $\{E^{(i)}\} = \{\{e^{(i)}\}, \{\kappa^{(i)}\}\}$.

Матрицу приведенных соотношений упругости слоя $[D^{(i)}]$ удобно представить в блочном виде:

$$[D^{(i)}] = \begin{bmatrix} [D_{ee}^{(i)}] & [D_{e\kappa}^{(i)}] \\ [D_{\kappa e}^{(i)}] & [D_{\kappa\kappa}^{(i)}] \end{bmatrix} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)}. \quad (5.27)$$

Отдельные матричные блоки определяют следующие интегральные упругие характеристики слоя:

$$\begin{aligned} [D_{ee}^{(i)}] &= \int_{h^{(i)}} [G^{(i)}] dz; \quad [D_{e\kappa}^{(i)}] = \int_{h^{(i)}} [G^{(i)}] \gamma^{(i)} dz; \\ [D_{\kappa\kappa}^{(i)}] &= \int_{h^{(i)}} [D^{(i)}] (\gamma^{(i)})^2 dz. \end{aligned}$$

Работу внешних напряжений $\{\sigma_r^{(i)}\}$, приложенных на боковой поверхности контура Γ , можно представить в виде работы внешних интегральных силовых факторов на обобщенных перемещениях, которые соответствуют выбранной модели деформирования:

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} \int_{h^{(i)}} \delta \{U^{(i)}\}^T \{\sigma_r^{(i)}\} \delta_r^{(i)} dz d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta \{U_r\}^T \{\mu_r\} d\Gamma,$$

где $\{U_r\} = \{u_v, u_l, u_z, \psi_v, \psi_l, \vartheta_v\}$; $\{\mu_r\}$ — вектор, представляющий интегральные силовые факторы, сопряженные с обобщенными перемещениями $\{U_r\}$; u_v, u_l — составляющие тангенциального перемещения срединного слоя заполнителя, направленные по нормали v и по касательной l к контуру Γ ; ψ_v, ψ_l — углы поворота сечений заполнителя вокруг касательной и нормали к контуру; ϑ_v — угол поворота нормали базовой поверхности оболочки в плоскости vz . Для частного случая, когда граница контура совпадает с α_2 -линией, работа внешних напряжений на элементе боковой поверхности может

быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta \{U_r\}^T \{\mu_r\} = & \delta u_1 \sum_{i=1}^3 T_1^{(i)} + \delta u_2 \left(\sum_{i=1}^3 T_{12}^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \frac{k_2}{\delta_2^{(i)}} M_{12}^{(i)} \right) + \\ & + \delta u_3 \left(\sum_{i=1}^3 Q_1^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\delta_2^{(i)}} \frac{1}{A_2} M_{12,2} \right) + \\ & + \delta \psi_1 \left(M_1^{(3)} + \sum_{i=1}^2 \left(c^{(i)} T_1^{(i)} + \frac{k_1 c^{(i)}}{\delta_1^{(i)}} M_1^{(i)} \right) \right) + \\ & + \delta \psi_2 \left(M_{12}^{(3)} + \sum_{i=1}^2 \left(c^{(i)} T_{12}^{(i)} + \frac{k_2 c^{(i)}}{\delta_2^{(i)}} M_{12}^{(i)} \right) \right) + \delta \vartheta_1 \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\delta_1^{(i)}} M_1^{(i)}, \end{aligned}$$

где

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{A_1} u_{3,1} + k_1 u_1;$$

$$T_1^{(i)} = \int_{h^{(i)}} \sigma_1^r \delta_2^{(i)} dz; \quad T_{12}^{(i)} = \int_{h^{(i)}} \tau_{12}^r \delta_2^{(i)} dz; \quad Q_1^{(i)} = \int_{h^{(i)}} \tau_{13}^r \delta_2^{(i)} dz;$$

$$M_1^{(i)} = \int_{h^{(i)}} \sigma_1^r \gamma^{(i)} \delta_2^{(i)} dz; \quad M_{12}^{(i)} = \int_{h^{(i)}} \tau_{12}^r \gamma^{(i)} \delta_2^{(i)} dz.$$

Внешние напряжения σ_1^r , τ_{12}^r , τ_{13}^r , действующие на боковую поверхность (см. рис. 4.18), считаются известными функциями аргументов z и α_2 . Для «легкого» заполнителя следует положить $T_1^{(3)} = T_{12}^{(3)} = M_1^{(3)} = M_{12}^{(3)} = 0$.

После выполнения интегрирования по толщине трехслойного пакета в окончательном виде можно представить вариационную формулировку задачи статики следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_S \delta \{E^{(i)}\} [D^{(i)}] \{E^{(i)}\} dS - \sum_{i=1}^2 \int_S \delta \{U^{(i)}\}^T \{p^{(i)}\} dS - \\ - \int_\Gamma \delta \{U_r\}^T \{\mu_r\} d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где $\{E^{(i)}\}$, $\{U^{(i)}\}$, $\{U_r\}$ — векторы, под компонентами которых следует понимать их представление через независимые переменные u_1 , u_2 , u_3 , ψ_1 , ψ_2 . Формулировка условия равновесия в виде (5.28) после выполнения интегрирования по частям позволяет получить разрешающие уравнения в перемещениях, а также геометрические и силовые граничные условия на контуре. При решении задачи с помощью МКЭ выполняется аппроксимация полей перемещений u_1 , u_2 , u_3 и углов ψ_1 , ψ_2 в пределах элемента, после чего перемещения $\{U^{(i)}\}$ и обобщенные деформации $\{E^{(i)}\}$ представляются в форме $\{U^{(i)}\} = [\phi^{(i)}] \{q\}$ ($i = 1, 2$) и $\{E^{(i)}\} = [B^{(i)}] \{q\}$ ($i = 1, 2, 3$), где $\{q\}$ — вектор обобщенных узловых перемещений элемента, включающий для отдельного узла компоненты перемещений u_1 , u_2 , u_3 , углы пово-

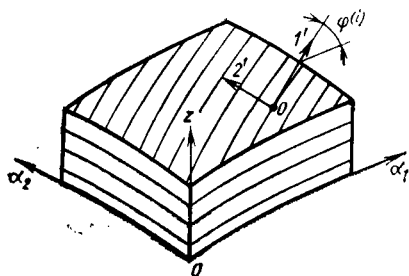


Рис 5.10.

ветственно матрица жесткости трехслойного элемента и вектор приведенных узловых сил.

Рассмотрим формулировку задачи статики при учете стационарного теплового воздействия на трехслойную оболочку с «мягким» заполнителем. При этом будем считать, что задачи теплопроводности и деформирования не связаны и в результате решения задачи теплопроводности определены температурные поля в оболочке.

Рассмотрим случай, когда распределение температур по слоям с достаточной точностью можно принять в виде линейных зависимостей: $T^{(i)} = T_0^{(i)} + \gamma^{(i)} \Delta T^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), где $T_0^{(i)}$, $\Delta T^{(i)}$ — известные функции аргументов α_1 , α_2 . Причем в силу непрерывности распределения температур $T_0^{(i)} = T_0^{(3)} + c^{(i)} \Delta T^{(3)}$ ($i = 1, 2$).

В случае учета температурных деформаций соотношения упругости для несущих слоев записываются в соответствии с законом Дюгамеля—Неймана:

$$\{\sigma^{(i)}\} = [G^{(i)}] (\{\epsilon^{(i)}\} - \{\epsilon_T^{(i)}\}) \quad (i = 1, 2), \quad (5.29)$$

где $\{\epsilon_T^{(i)}\}$ — известные деформации, вызванные тепловым расширением; $\{\epsilon^{(i)}\}$ — полные деформации, связанные с перемещениями зависимостями (5.18). Рассмотрим более подробно вычисление деформаций $\{\epsilon_T^{(i)}\}$. В общем случае будем считать, что обшивки представляют слоистые оболочки, каждый слой которых имеет два главных направления $01'$ и $02'$ (рис. 5.10), и коэффициенты температурного расширения для этих направлений соответственно равны $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$. Направление оси $01'$ составляет с направлением касательной к оси α_1 угол $\varphi^{(i)}$. Для слоистой структуры коэффициенты $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$ и углы $\varphi^{(i)}$ в пределах отдельной обшивки будем считать известными кусочно-постоянными функциями аргумента z . Линейные температурные деформации для i -й обшивки в осях α_1 , α_2 можно получить следующим пересчетом:

$$\{\epsilon_T^{(i)}\} = [T_2^{(i)}] \{\epsilon_T^{'(i)}\}, \quad (5.30)$$

где $\{\epsilon_T^{'(i)}\} = \{\epsilon_{1T}^{(i)}, \epsilon_{2T}^{(i)}, \gamma_{12T}^{(i)}\}$;

$$\{\epsilon_T^{'(i)}\} = \{\epsilon_{1T}^{'(i)}, \epsilon_{2T}^{'(i)}, 0\}; \quad \epsilon_{1T}^{'(i)} = \beta_1^{(i)} T^{(i)} \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

рота сечений заполнителя ψ_1 , ψ_2 , а также углы поворота нормалей ϑ_1 , ϑ_2 . Вариационная формулировка (5.28) позволяет получить выражение для узловых реакций элемента $\{t\}$: $\{t\} = [K] \{q\} - \{P\}$,

$$\text{где } [K] = \sum_{i=1}^3 \int_{S^e} [B^{(i)}]^T [D^{(i)}] [B^{(i)}] dS,$$

$$\{P\} = \sum_{i=1}^2 \int_{S^e} [\phi^{(i)}]^T \{p^{(i)}\} dS \text{ — соот-}$$

С помощью матрицы $[\eta^{(i)}]$ в выражении (5.30) осуществляется преобразование деформаций, определенных в осях 1 и 2, в деформации, определенные в осях α_1 и α_2 [см. (1.45)]:

$$[T_2^{(i)}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь $c = \cos \varphi^{(i)}$, $s = \sin \varphi^{(i)}$.

Для получения вариационной формулировки воспользуемся принципом возможных перемещений (5.26). Отдельного рассмотрения требует выражение для работы внутренних сил, при преобразовании которого необходимо принимать во внимание соотношения упругости, представленные для материала обшивок в форме (5.29):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_S \int_{h^{(i)}} \delta \{ \epsilon^{(i)} \}^T \{ \sigma^{(i)} \} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz dS = \sum_{i=1}^3 \int_S \delta \{ E^{(i)} \}^T [D^{(i)}] \{ E^{(i)} \} dS - \\ - \sum_{i=1}^2 \int_S \delta \{ E^{(i)} \}^T \{ F_\tau^{(i)} \} dS, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где $\{ F_\tau^{(i)} \} = \{ \{ T_\tau^{(i)} \}; \{ M_\tau^{(i)} \} \}$, $\{ T_\tau^{(i)} \} = \int_{h^{(i)}} [G^{(i)}] \{ \epsilon_\tau^{(i)} \} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz$; $\{ M_\tau^{(i)} \} = \int_{h^{(i)}} [G^{(i)}] \{ \epsilon_\tau^{(i)} \} \gamma^{(i)} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz$.

С использованием (5.31) получим в окончательном виде вариационную формулировку задачи статики с учетом теплового воздействия:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_S \delta \{ E^{(i)} \}^T [D^{(i)}] \{ E^{(i)} \} dS - \sum_{i=1}^2 \int_S \delta \{ E^{(i)} \}^T \{ F_\tau^{(i)} \} dS - \\ - \sum_{i=1}^2 \int_S \delta \{ U^{(i)} \}^T \{ p^{(i)} \} dS - \int_\Gamma \delta \{ U_\Gamma \}^T \{ \mu_\Gamma \} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Под компонентами векторов $\{ E^{(i)} \}$, $\{ U^{(i)} \}$, $\{ U_\Gamma \}$ следует понимать их представления через независимые переменные u_1 , u_2 , u_3 , ψ_1 , ψ_2 .

Рассмотрим получение канонических систем дифференциальных уравнений для решения задач статики трехслойных оболочек вращения с жестким заполнителем. Будем считать, что оси упругой симметрии как заполнителя, так и каждого слоя в обшивках совпадают с направлениями координатных линий. За координатную поверхность $z = 0$ примем срединную поверхность заполнителя. В этом случае будем иметь $c^{(i)} = z^{(i)}$ ($i = 1, 2$); $z^{(3)} = 0$; $\delta_1^{(3)} = \delta_2^{(3)} = 1$.

В качестве вектора обобщенных перемещений $\{ X \}$ в сечении оболочки примем те геометрические факторы, относительно которых необходимо обеспечить гладкость сопряжения отдельных кольцевых участков трехслойной оболочки. С учетом обозначений (4.58)

ими будут перемещения срединной поверхности заполнителя, углы поворота сечений заполнителя и угол поворота нормали

$$\{X\} = \{u, v, w, \psi_1, \psi_2, \vartheta_1\},$$

где

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} w + k_1 u.$$

Следует отметить, что всевозможные геометрические условия закрепления на торцах оболочки также могут быть сформулированы с использованием компонент вектора $\{X\}$.

Из анализа выражений для деформаций и изменений кривизн (5.20), (5.22) видно, что для их записи необходимо кроме компонент вектора $\{X\}$ располагать также некоторыми производными. Эти производные сгруппируем в вектор

$$\{Y\} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u, v, \psi_1, \psi_2, \vartheta_1\}.$$

Дифференциальную связь между компонентами векторов $\{X\}$ и $\{Y\}$ будем учитывать при выводе разрешающих уравнений. В матричном виде дифференциальное условие связи запишется следующим образом:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{X\} - [C_1] \{X\} - [C_2] \{Y\} = 0, \quad (5.32)$$

где

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [C_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В силу периодичности решений по угловой координате β все компоненты векторов $\{X\}$ и $\{Y\}$ разложим в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} \{X\} &= \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{xn}] \{\bar{X}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{xn}] \{\tilde{X}_n\}, \\ \{Y\} &= \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{yn}] \{\bar{Y}_n\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{yn}] \{\tilde{Y}_n\}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

где $[\bar{\beta}_{xn}]$, ..., $[\tilde{\beta}_{yn}]$ — диагональные матрицы, содержащие следующие компоненты:

$$\begin{aligned} [\bar{\beta}_{xn}] &= [\sqrt{\cos n\beta}, \sin n\beta, \cos n\beta, \cos n\beta, \sin n\beta, \cos n\beta]_{\perp}; \\ [\tilde{\beta}_{xn}] &= [\sqrt{\sin n\beta}, -\cos n\beta, \sin n\beta, \sin n\beta, -\cos n\beta, \sin n\beta]_{\perp}; \\ [\bar{\beta}_{yn}] &= [\sqrt{\cos n\beta}, \sin n\beta, \cos n\beta, \sin n\beta, \cos n\beta]_{\perp}; \\ [\tilde{\beta}_{yn}] &= [\sqrt{\sin n\beta}, -\cos n\beta, \sin n\beta, -\cos n\beta, \sin n\beta]_{\perp}. \end{aligned}$$

Здесь n — номер гармоники разложения; $\{\bar{X}_n\}, \dots, \{\bar{Y}_n\}$ — векторы, представляющие амплитудные значения соответствующих гармоник разложения.

Компоненты векторов $\{E^{(i)}\}$ также разложим в тригонометрические ряды:

$$\{E^{(i)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{en}^{(i)}] \{\bar{E}_n^{(i)}\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{en}^{(i)}] \{\tilde{E}_n^{(i)}\}, \quad (5.34)$$

где для слоев обшивок ($i = 1, 2$)

$$\{E^{(i)}\} = \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_{12}^{(i)}, \kappa_1^{(i)}, \kappa_2^{(i)}, \kappa_{12}^{(i)}\},$$

$$[\bar{\beta}_{en}^{(i)}] = [\sqrt{\cos n\beta}, \cos n\beta, \sin n\beta, \cos n\beta, \cos n\beta, \sin n\beta]_{\perp};$$

$$[\tilde{\beta}_{en}^{(i)}] = [\sqrt{\sin n\beta}, \sin n\beta, -\cos n\beta, \sin n\beta, \sin n\beta, -\cos n\beta]_{\perp}.$$

Для слоя заполнителя ($i = 3$)

$$\{E^{(3)}\} = \{e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_{12}^{(3)}, e_{13}^{(3)}, e_{23}^{(3)}, \kappa_1^{(3)}, \kappa_2^{(3)}, \kappa_{12}^{(3)}, \kappa_{13}^{(3)}, \kappa_{23}^{(3)}\};$$

$$[\bar{\beta}_{en}^{(3)}] = [\sqrt{\cos n\beta}, \cos n\beta, \sin n\beta, \cos n\beta, \sin n\beta, \cos n\beta, \dots \rightarrow \dots \rightarrow \cos n\beta, \sin n\beta, \cos n\beta, \sin n\beta]_{\perp};$$

$$[\tilde{\beta}_{en}^{(3)}] = [\sqrt{\sin n\beta}, \sin n\beta, -\cos n\beta, \sin n\beta, -\cos n\beta, \dots \rightarrow \dots \rightarrow \sin n\beta, \sin n\beta, -\cos n\beta, \sin n\beta, -\cos n\beta]_{\perp}.$$

Векторы $\{\bar{E}_n^{(i)}\}$ и $\{\tilde{E}_n^{(i)}\}$, представляющие амплитудные значения осесимметричных и кососимметричных составляющих деформаций, с учетом разложения (5.33), (5.34) могут быть выражены для n -й гармоники через компоненты векторов обобщенных перемещений $\{X_n\}$ и производных $\{Y_n\}$ следующим образом:

$$\{E_n^{(i)}\} = [L_{1n}^{(i)}] \{X_n\} + [L_{2n}^{(i)}] \{Y_n\} \quad i = 1, 2, 3.$$

Коэффициенты матриц $[L_{1n}^{(i)}]$, $[L_{2n}^{(i)}]$ приведены для слоев обшивок ($i = 1, 2$) и для слоя заполнителя ниже:

$$[L_{1n}^{(i)}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ \psi^{(i)} & \bar{n}^{(i)} & k_2^{(i)} & \psi^{(i)} c^{(i)} & \bar{n}^{(i)} c^{(i)} & 0 \\ -\bar{n}^{(i)} & -\psi^{(i)} & 0 & -\bar{n}^{(i)} c^{(i)} & -\psi^{(i)} c^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & -(k_1^{(i)})^2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2^{(i)} \psi^{(i)} & 0 & (\bar{n}^{(i)})^2 - & \psi^{(i)} c^{(i)} \times & 0 & \psi^{(i)} / \delta_1^{(i)} \\ & & -(k_2^{(i)})^2 & \times (k_1^{(i)} - k_2^{(i)}) & & \\ \bar{n}^{(i)} (k_2^{(i)} + \psi^{(i)} (k_1^{(i)} - & -2\bar{n}^{(i)} \psi^{(i)} & -\bar{n}^{(i)} c^{(i)} \times & \psi^{(i)} c^{(i)} \times & -2\bar{n}^{(i)} / \delta_1^{(i)} \\ + k_1^{(i)}) & -k_2^{(i)}) & \times (k_1^{(i)} - k_2^{(i)}) & \times (k_1^{(i)} - k_2^{(i)}) & \end{bmatrix};$$

$$[L_{2n}^{(i)}] = \begin{bmatrix} 1/\delta_1^{(i)} & 0 & c^{(i)}/\delta_1^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\delta_1^{(i)} & 0 & c^{(i)}/\delta_1^{(i)} & 0 \\ -k_1^{(i)}/\delta_1^{(i)} & 0 & 0 & 0 & 1/(\delta_1^{(i)})^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (k_2^{(i)} - k_1^{(i)})/\delta_1^{(i)} & 0 & c^{(i)}(k_2^{(i)} - k_1^{(i)})/\delta_1^{(i)} & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$k_1^{(i)} = k_1/\delta_1^{(i)}; \quad k_2^{(i)} = k_2/\delta_2^{(i)};$$

$$\bar{n}^{(i)} = \bar{n}/\delta_2^{(i)}; \quad \psi^{(i)} = \psi/\delta_2^{(i)};$$

$$\bar{n} = n/B; \quad \psi = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha};$$

$$[L_{1n}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi & \bar{n} & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{n} & -\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -k_2 & -\bar{n} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\psi k_2 & -\bar{n} k_2 & -k_2^2 & \psi & \bar{n} & 0 \\ \bar{n} k_2 & k_2 \psi & 0 & -\bar{n} & -\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 \\ 0 & k_2^2 & \bar{n} k_2 & 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[L_{2n}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перемещения, на которых совершают работу внешние поверхностные нагрузки, приложенные к обшивкам, обозначим $\{U^{(i)}\}$. Для тонких несущих слоев в качестве этих перемещений можно взять перемещения поверхностей обшивок, примыкающих к заполни-

телю $\{U^{(i)}\} = \{u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}\}$, $i = 1, 2$. Принимая во внимание условия стыковки перемещений обшивки и заполнителя (5.15), компоненты векторов $\{U^{(i)}\}$ можно выразить через компоненты вектора обобщенных перемещений $\{X\}$:

$$\{U^{(i)}\} = [F^{(i)}] \{X\} \quad i = 1, 2,$$

где

$$[F^{(i)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для получения канонической системы воспользуемся вариационной формулировкой условий равновесия в форме (5.28), которую дополним условием связи [см. (5.32)]:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_{\alpha_0}^{\alpha_k} \int_0^{2\pi} \delta \{E^{(i)}\}^T [D^{(i)}] \{E^{(i)}\} AB d\beta d\alpha - \sum_{i=1}^2 \int_{\alpha_0}^{\alpha_k} \int_0^{2\pi} \delta \{U^{(i)}\}^T \{p^{(i)}\} \times \\ & \times AB d\beta d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_k} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta \{X\} - [C_1] \delta \{X\} - [C_2] \delta \{Y\} \right)^T \times \\ & \times \{\mu\} AB d\beta d\alpha - \delta \{X\}^T \{t_1\} |_{\alpha=\alpha_0} - \delta \{X\}^T \{t_2\} |_{\alpha=\alpha_k} = 0, \quad (5.35) \end{aligned}$$

где α_0, α_k — начальная и конечная координаты по меридиану; $\{t_1\}, \{t_2\}$ — внешние силовые факторы, заданные на торцах оболочки; $\{\mu\}$ — вектор неопределенных множителей, с помощью которых вводится условие связи (5.32). В выражении (5.35) под векторами $\{E^{(i)}\}, \{U^{(i)}\}$ понимается их представление через компоненты обобщенных перемещений $\{X\}$ и производных $\{Y\}$. Опуская промежуточные выкладки, связанные с интегрированием по угловой координате β и интегрированием по частям слагаемого, учитывающего условие связи (см. § 4.4), получим следующие уравнения Эйлера:

$$[S_{11}] \{X_n\} + [S_{12}] \{Y_n\} - \{N_n\} - \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{\lambda_n\} - [C_1]^T \{\lambda_n\} = 0, \quad (5.36)$$

$$[S_{21}] \{X_n\} + [S_{22}] \{Y_n\} - [C_2]^T \{\lambda_n\} = 0, \quad (5.37)$$

где

$$[S_{ij}] = B \sum_{k=1}^3 [L_{in}^{(k)}]^T [D^{(k)}] [L_{jn}^{(k)}] \quad (i, j = 1, 2);$$

$$\{\lambda_n\} = B \{\mu_n\}; \quad \{N_n\} = B \sum_{i=1}^2 [F^{(i)}]^T \{p^{(i)}\}$$

и при $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha = \alpha_k$: $\delta \{X_n\}^T (\{\lambda_n\} - \{t_{1n}\}) = 0$; $\delta \{X_n\}^T (-\{\lambda_n\} - \{t_{2n}\}) = 0$.

С помощью этих соотношений можно сформулировать полный набор геометрических и силовых граничных условий на торцах оболочки. Аналогичные соотношения получаются и для кососимметричных составляющих решения.

После исключения из уравнения (5.37) вектора $\{Y_n\} = [S_{22}]^{-1}([C_2]^T \{\lambda_n\} - [S_{21}]\{X_n\})$ и подстановки выражения $\{Y_n\}$ в уравнение (5.36) и условие связи (5.32), записанное для соответствующей гармоники разложения, получим искомую каноническую систему

$$\frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \begin{Bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ N_n \end{Bmatrix}, \quad (5.38)$$

где

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= [C_1] - [b][S_{21}]; & [A_{12}] &= [b][C_2]^T; \\ [A_{21}] &= [S_{11}] - [d][S_{21}]; & [A_{22}] &= -[A_{11}]^T; \\ [b] &= [C_2][S_{22}]^{-1}; & [d] &= [S_{21}]^T[S_{22}]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Коэффициенты матрицы разрешающей системы, определенные соотношениями (5.39), справедливы как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих решений.

§ 5.3. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек

Рассмотрим вариационную формулировку задач устойчивости и колебаний трехслойных оболочек, деформирование которых описывается с использованием гипотезы «ломаной линии». Будем считать, что в исходном невозмущенном состоянии оболочка напряжена, но недеформирована. Для консервативной системы с использованием принципа Даламбера запишем условие существования смежного равновесного состояния (3.40):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_S \int_{h(i)} \delta \{\epsilon_*^{(i)}\}^T \{\sigma_*^{(i)}\} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz dS + \sum_{i=1}^3 \int_S \int_{h(i)} \delta \{\epsilon_{**}^{(i)}\}^T \{\sigma_0^{(i)}\} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz dS + \\ + \sum_{i=1}^3 \int_S \int_{h(i)} \delta \{u_*^{(i)}\}^T \{\ddot{u}_*^{(i)}\} \rho^{(i)} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz dS = 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

где $\{u_*^{(i)}\}$, $\{\epsilon_*^{(i)}\}$, $\{\sigma_*^{(i)}\}$ — дополнительные перемещения, деформации и напряжения, возникающие в слоях оболочки при переходе в смежное положение; $\{\sigma_0^{(i)}\}$ — начальные напряжения; $\{\epsilon_{**}^{(i)}\}$ — дополнительные деформации второго порядка малости.

Поскольку исходное состояние считается недеформированным, то дополнительные деформации первого порядка малости связаны с дополнительными перемещениями теми же зависимостями, что и при решении линейной задачи статики:

$$\{\epsilon_*^{(i)}\} = \{e_*^{(i)}\} + \gamma^{(i)} \{\kappa_*^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $\{e_*^{(i)}\}$, $\{\kappa_*^{(i)}\}$ — векторы, компоненты которых выражаются соотношениями, аналогичными (5.20)–(5.22), в которых вместо независимых переменных $u_1, u_2, u_3, \psi_1, \psi_2$ следует использовать дополнительные перемещения и углы поворота $u_1^*, u_2^*, u_3^*, \psi_1^*, \psi_2^*$.

Будем считать, что деформации второго порядка малости, как и в классической теории, в основном определяются углами поворота нормали:

$$\{\varepsilon_{**}^{(i)}\} = \{\varepsilon_1^{** (i)}, \varepsilon_2^{** (i)}, \gamma_{12}^{** (i)}\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$\varepsilon_1^{** (i)} = \frac{1}{2} (\vartheta_1^{* (i)})^2 \quad (1 \rightleftharpoons 2); \quad \gamma_{12}^{** (i)} = \vartheta_1^{* (i)} \vartheta_2^{* (i)};$$

$$\vartheta_1^{* (i)} = \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(-\frac{1}{A_1} u_{3,1}^* + k_1 u_1^* + k_1 c^{(i)} \psi_1^* \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2); \quad c^{(i)} = z^{(i)} - z^{(3)}.$$

Тогда слагаемые, учитывающие начальное напряженное состояние в условии (5.40), можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^3 \int_S \int_{h^{(i)}} \{\varepsilon_{**}^{(i)}\}^T \{\sigma_0^{(i)}\} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz dS = \sum_{i=1}^3 \int_S \delta \{\vartheta_*^{(i)}\}^T [T_0^{(i)}] \{\vartheta_*^{(i)}\} dS,$$

$$\text{где } \{\vartheta_*^{(i)}\} = \{\vartheta_1^{* (i)}, \vartheta_2^{* (i)}\};$$

$$[T_0^{(i)}] = \begin{bmatrix} T_1^{0 (i)} & T_{12}^{0 (i)} \\ T_{12}^{0 (i)} & T_2^{0 (i)} \end{bmatrix} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)}.$$

Здесь

$$T_1^{0 (i)} = \int_{h^{(i)}} \sigma_1^{0 (i)} dz \quad (1 \rightleftharpoons 2); \quad T_{12}^{0 (i)} = \int_{h^{(i)}} \tau_{12}^{0 (i)} dz$$

— начальные погонные усилия в слоях.

Для подсчета слагаемых, учитывающих инерционные свойства системы, представим распределение перемещений по слоям следующим образом. В несущих слоях не будем учитывать перемещения, связанные с углами поворота нормалей обшивок, $\{u_*^{(i)}\} = [f^{(i)}] \{U_*\}$, ($i = 1, 2, 3$), где $\{u_*^{(i)}\} = \{u_1^{* (i)}, u_2^{* (i)}, u_3^{* (i)}\}$, $\{U_*\} = \{u_1^*, u_2^*, u_3^*, \psi_1^*, \psi_2^*\}$

$$[f^{(i)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c^{(i)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c^{(i)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [f^{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma^{(3)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Тогда } \sum_{i=1}^3 \int_S \int_{h^{(i)}} \delta \{u_*^{(i)}\}^T \{\ddot{u}_*^{(i)}\} \rho^{(i)} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz dS = \sum_{i=1}^3 \int_S \delta \{U_*\}^T [m^{(i)}] \{\ddot{U}_*\} dS,$$

где

$$[m^{(i)}] = \int_{h^{(i)}} [f^{(i)}]^T [f^{(i)}] \rho^{(i)} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz. \quad (5.41)$$

Для гармонического колебательного движения, полагая, что $\{\ddot{U}_*\} = -\omega^2 \{U_*\}$, в окончательном виде вариационное условие

существования смежного равновесного состояния можно представить в следующей форме:

$$\sum_{i=0}^3 \int_S \{ \delta \{E_*^{(i)}\}^T [D^{(i)}] \{E_*^{(i)}\} + \delta \{\Phi_*^{(i)}\}^T [T_0^{(i)}] \{\Phi_*^{(i)}\} - \\ - \omega^2 \delta \{U_*\}^T [m^{(i)}] \{U_*\} \} dS = 0. \quad (5.42)$$

Вариационное условие (5.42) позволяет получить разрешающие уравнения в перемещениях для решения задачи устойчивости и колебаний трехслойных оболочек, а также сформулировать однородные граничные условия задачи.

Рассмотрим получение канонических систем для трехслойных оболочек вращения. В качестве обобщенных дополнительных перемещений с учетом обозначений (4.58) примем $\{X_*\} = \{u^*, v^*, \omega^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \vartheta_1^*\}$. Компонентами вектора производных $\{Y_*\}$ будут $\{Y_*\} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u^*, v^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \vartheta_1^*\}$.

Как и раньше, условие связи между векторами $\{X_*\}$ и $\{Y_*\}$ запишем в виде дифференциального уравнения

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{X_*\} - [C_1] \{X_*\} - [C_2] \{Y_*\} = 0, \quad (5.43)$$

где $[C_1]$, $[C_2]$ — матрицы, определенные для уравнения (5.32).

Воспользовавшись условиями периодичности по угловой координате β , для оболочек вращения решения будем искать в виде разложения в тригонометрические ряды:

$$\{X_*\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{xn}] \{\bar{X}_{*n}\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{xn}] \{\tilde{X}_{*n}\}; \\ \{Y_*\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{yn}] \{\bar{Y}_{*n}\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{yn}] \{\tilde{Y}_{*n}\}; \quad (5.44)$$

$$\{E_*^{(i)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{\varepsilon n}^{(i)}] \{\bar{E}_{*n}^{(i)}\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{\varepsilon n}^{(i)}] \{\tilde{E}_{*n}^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\{\Phi_*^{(i)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\beta}_{\vartheta n}^{(i)}] \{\bar{\Phi}_{*n}^{(i)}\} + \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\beta}_{\vartheta n}^{(i)}] \{\tilde{\Phi}_{*n}^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$[\bar{\beta}_{\vartheta n}^{(i)}] = [\sqrt{} \cos n\beta, \sin n\beta]; \quad [\tilde{\beta}_{\vartheta n}^{(i)}] = [\sqrt{} \sin n\beta, -\cos n\beta].$$

Остальные матрицы, содержащие тригонометрические функции разложения, приводились для выражений (5.33), (5.34). Амплитудные значения составляющих векторов разложения деформаций и углов поворота могут быть выражены через амплитудные значения векторов разложения обобщенных перемещений и производных:

$$\{E_{*n}^{(i)}\} = [L_{in}^{(i)}] \{X_{*n}\} + [L_{2n}^{(i)}] \{Y_{*n}\}; \\ \{\Phi_{*n}^{(i)}\} = [R_n^{(i)}] \{X_{*n}\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.45)$$

где

$$[R_n^{(i)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1^{(i)} c^{(i)} & 0 & 1/\delta_1^{(i)} \\ 0 & k_2^{(i)} & \bar{n}^{(i)} & 0 & k_2^{(i)} c^{(i)} & 0 \end{bmatrix};$$

$$k_1^{(i)} = k_1/\delta_1^{(i)} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \quad c^{(i)} = z^{(i)} - z^{(3)};$$

$$\bar{n}^{(i)} = \bar{n}/\delta_2^{(i)}; \quad \bar{n} = n/B.$$

Коэффициенты матриц $[L_{1n}^{(i)}]$, $[L_{2n}^{(i)}]$ были представлены на с. 207, 208. Аналогичным образом записываются выражения и для кососимметричных составляющих.

Поскольку при получении разрешающих уравнений в качестве независимых переменных будут выступать компоненты векторов $\{X_*\}$ и $\{Y_*\}$, то перемещения $\{U_*\}$, фигурирующие в (5.42) при записи работы сил инерции, удобно формально представить в виде

$$\{U_*\} = [F] \{X_*\}, \quad (5.46)$$

где

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

После выполненных подготовительных операций воспользуемся для оболочки вращения вариационным уравнением (5.42), которое дополним условиями связи (5.43):

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_k} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^3 \left(\delta \{E_*^{(i)}\}^T [D^{(i)}] \{E_*^{(i)}\} + \delta \{\Phi_*^{(i)}\}^T [T_\delta^{(i)}] \{\Phi_*^{(i)}\} - \right. \right. \\ \left. \left. - \omega^2 \delta \{U_*\}^T [m^{(i)}] \{U_*\} \right) + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta \{X_*\} - [C_1] \delta \{X_*\} - [C_2] \delta \{Y_*\} \right)^T \{\mu_*\} \right) AB \, d\beta \, d\alpha = 0. \quad (5.47)$$

Для оболочек вращения рассмотрим тот случай, когда оси упругой симметрии слоев совпадают с направлениями координатных линий и начальное напряженное состояние является осесимметричным. Тогда гармоники разложения можно рассматривать независимо друг от друга. Принимая во внимание разложение в тригонометрические ряды (5.44) и соотношения (5.45) и (5.46), для n -й гармоники разложения из вариационного уравнения (5.47) получим уравнения Эйлера:

$$[S_{11}^*] \{X_{*n}\} + [S_{12}] \{Y_{*n}\} - \frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \{\lambda_{*n}\} - [C_1]^T \{\lambda_{*n}\} = 0; \quad (5.48)$$

$$[S_{21}] \{X_{*n}\} + [S_{22}] \{Y_{*n}\} - [C_2]^T \{\lambda_{*n}\} = 0, \quad (5.49)$$

где

$$\{\lambda_{*n}\} = B \{\mu_{*n}\};$$

$$[S_{ij}] = B \sum_{k=1}^3 [L_{in}^{(k)}]^T [D^{(k)}] [L_{jn}] \quad (i, j = 1, 2);$$

$$[S_{11}^*] = [S_{11}] + B \left(\Lambda \sum_{i=1}^3 [R_n^{(i)}]^T [T_0^{(i)}] [R_n^{(i)}] - \omega^2 \sum_{i=1}^3 [F]^T [m^{(i)}] [F] \right); \quad (5.50)$$

Λ — параметр пропорционального нагружения (при этом считается, что $T_0^{(i)}$ определяет то начальное напряженное состояние, для которого условно принято значение $\Lambda = 1$), $[m^{(i)}]$ — матрицы, которые вычисляются согласно (5.41). Однородные геометрические граничные условия формируются компонентами вектора обобщенных перемещений $\{X_{*n}\}$, силовые — с помощью компонентов вектора обобщенных силовых факторов $\{\lambda_{*n}\}$.

Уравнения (5.48), (5.49) совместно с условием связи (5.43), записанным для n -й гармоники разложения, позволяют получить искомую каноническую систему

$$\frac{1}{A} \frac{d}{d\alpha} \begin{Bmatrix} X_{*n} \\ \lambda_{*n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{*n} \\ \lambda_{*n} \end{Bmatrix}, \quad (5.51)$$

где

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= [C_1] - [b][S_{21}]; & [A_{12}] &= [b][C_2]^T; \\ [A_{21}] &= [S_{11}^*] - [d][S_{21}]; & [A_{22}] &= -[A_{11}]^T; \\ [b] &= [C_2][S_{22}]^{-1}; & [d] &= [S_{21}]^T [S_{22}]^{-1}. \end{aligned}$$

Полученная матрица канонической системы разрешающих дифференциальных уравнений (5.51) отличается от соответствующей матрицы системы для задачи статики [см. (5.38)] матричным блоком $[A_{21}]$, при вычислении которого матрицей $[S_{11}^*]$ [см. (5.50)] учитываются начальное напряженное состояние и инерционность системы. Параметр нагружения Λ для решения задачи устойчивости (ω^2 — для задачи колебаний) является искомым собственным значением для n -й гармоники волнообразования.

§ 5.4. Условия сопряжения трехслойных оболочек вращения со шпангоутами

Предварительно рассмотрим переход от местной системы координат к глобальной. На рис. 5.11 показан элемент трехслойной оболочки с номерами узлов i, j . В качестве обобщенных перемещений в местной системе координат используются независимые переменные $\{q\} = \{\{X^i\}, \{X^j\}\}$, где $\{X^i\} = \{u^i, v^i, w^i, \psi_1^i, \psi_2^i, \theta^i\}$; $\{X^j\} = \{u^j, v^j, w^j, \psi_1^j, \psi_2^j, \theta^j\}$. Здесь индексы i, j указывают на принадлежность к узлу i или j . В качестве обобщенных перемещений в глобальной системе координат вместо перемещений срединной поверхности слоя заполнителя u^i, w^i, u^j, w^j будем пользоваться радиальными и

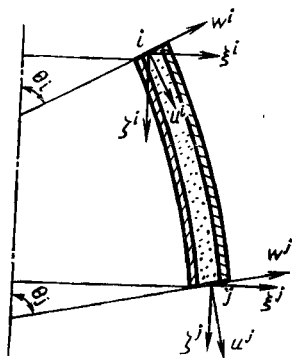


Рис. 5.11.

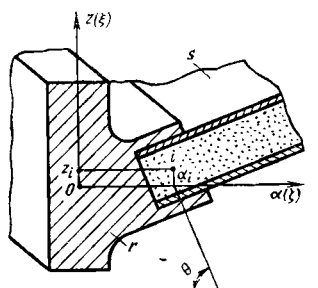


Рис. 5.12.

осевыми перемещениями ξ^i, ζ^i и ξ^j, ζ^j (см. рис. 5.11). Таким образом, компонентами вектора обобщенных перемещений в глобальной системе координат будут $\{q\}_s = \{\{X^i\}_s, \{X^j\}_s\}$, где $\{X^i\}_s = \{\xi^i, v^i, \zeta^i, \psi_1^i, \psi_2^i, \theta_1^i\}$; $\{X^j\}_s = \{\xi^j, v^j, \zeta^j, \psi_1^j, \psi_2^j, \theta_1^j\}$.

Поскольку связь касательного перемещения u и нормального перемещения w с радиальным и осевым перемещениями ξ и ζ осуществляется с помощью соотношений $u = \xi \cos \theta + \zeta \sin \theta$; $w = \xi \sin \theta - \zeta \cos \theta$ (θ — угол между осью вращения и внешней нормалью), то перевод в глобальную систему можно осуществить с помощью преобразования

$$\{q\} = [C] \{q\}_s,$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_i] & [0] \\ [0] & [C_j] \end{bmatrix};$$

$$[C_k] = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & 0 & \sin \theta_k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -\cos \theta_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & 1 & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix} \quad (k = i, j).$$

Углы θ_k ($k = i, j$) показаны на рис. 5.11.

Будем условно считать, что трехслойная оболочка соединяется со шпангоутом по кольцевой окружности i (рис. 5.12). Введем для шпангоута систему координат $O\alpha\beta z$, начало которой поместим в центре тяжести сечения шпангоута. Тогда координаты узловой окружности i , в которой соединяется шпангоут и трехслойная оболочка, будут α_i, z_i .

Как отмечалось в § 4.5, перемещения любой точки сечения шпангоута однозначно определяются перемещениями, углами поворотов

линии центров тяжести сечения и координатами рассматриваемой точки. Таким образом, для точек, принадлежащих окружности с координатами α_i, z_i , будем иметь

$$\begin{aligned}\xi^i &= \xi^r - \alpha_i \vartheta_1^r; \\ v^i &= v^r - \alpha_i \vartheta_3^r + z_i \vartheta_2^r; \\ \zeta^i &= \zeta^r + z_i \vartheta_1^r,\end{aligned}\quad (5.52)$$

где ξ^r, v^r, ζ^r — перемещения точек линии центров тяжести сечений шпангоута ($\alpha = 0, z = 0$ на рис. 5.12); $\vartheta_1^r, \vartheta_2^r, \vartheta_3^r$ — углы поворота шпангоута вокруг осей α, β, z (см. рис. 4.13) причем

$$\begin{aligned}\vartheta_2^r &= -\frac{1}{R} \frac{d\xi^r}{d\beta} + \frac{1}{R} v^r; \\ \vartheta_3^r &= -\frac{1}{R} \frac{d\zeta^r}{d\beta}.\end{aligned}\quad (5.53)$$

При сопряжении по углам поворота трехслойной оболочки со шпангоутом будем считать, что шпангоут накладывает на трехслойную оболочку условия жесткой диафрагмы, которая запрещает относительное перемещение слоев обшивок (рис. 5.13). Таким образом,

$$\begin{aligned}\psi_1^i &= \vartheta_1^r; \\ \psi_2^i &= \vartheta_2^r; \\ \vartheta_1^i &= \vartheta_1^r.\end{aligned}\quad (5.54)$$

На рис. 5.13 поясняется различие деформирования трехслойного элемента в случаях, если в сечении i отсутствует жесткая диафрагма (рис. 5.13, а) и если диафрагма установлена (рис. 5.13, б).

Для n -й гармоники разложения решений по угловой координате геометрические условия сопряжения [см. (5.52) и (5.54)] можно представить следующим образом:

$$\{X_n^i\}_s = [Q_n^i] \{X_n\}_r, \quad (5.55)$$

где

$$[Q_n^i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_i \\ z_i \bar{n} & 1 + z_i/R & \alpha_i \bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{n} & 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\{X_n\}_r = \{\xi_n^r, v_n^r, \zeta_n^r, \vartheta_{1n}^r\}.$$

Для кососимметричных составляющих решения коэффициенты матрицы $[Q_n^i]$ не изменяются. Индексы s и r указывают на принад-

лежность величины к оболочечному и кольцевому элементам соответственно.

Силовые граничные условия можно представить в виде уравнений равновесия шпангоута, на который кроме внешних нагрузок $\{P\}_r$ действуют реакции трехслойной оболочки. Получим эти уравнения с использованием принципа возможных перемещений.

При этом будем считать, что известны для n -х гармоник разложения матрицы жесткости шпангоута $[K_n]_r$ [см. (4.160)] и матрицы жесткости трехслойного элемента $[K_n]_s$, которые вычисляются по стандартным процедурам интегрирования канонической системы дифференциальных уравнений статики и последующего преобразования [см. (4.135), (4.136)]. Для узла конструкции, содержащего шпангоут и примыкающий элемент оболочки, согласно принципу возможных перемещений для равновесного состояния будем иметь

$$\delta \{X_n\}_r^T ([K_n]_r \{X_n\}_r - \{P_n\}_r) + \delta \{q_n\}_s^T ([K_n]_s \{q_n\}_s - \{P_n\}_s - \{t_n\}_s) = 0, \quad (5.56)$$

где

$$\begin{aligned} \{q_n\}_s &= \{[X_n^t]_s, [X_n^j]_s\}; \\ \{P_n\}_s &= \{[P_n^t]_s, [P_n^j]_s\}; \\ \{t_n\}_s &= \{0\}, \{t_n^j\}_s; \end{aligned} \quad [K_n]_s = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] \end{bmatrix}.$$

Здесь $\{t_n^j\}_s$ — вектор реакций отброшенной части оболочки.

Принимая во внимание геометрические условия сопряжения [см. (5.55)], показывающие, что на обобщенные перемещения в месте стыковки трехслойной оболочки со шпангоутом наложены дополнительные связи, перейдем в элементе s к новым обобщенным перемещениям $\{q'_n\}_s$:

$$\{q_n\}_s = [H^i] \{q'_n\}_s, \quad (5.57)$$

где

$$[H^i] = \begin{bmatrix} [Q_n^t] & [0] \\ [0] & [E] \end{bmatrix}; \quad \{q'_n\}_s = \{\{X_n\}_r, [X_n^j]_s\}.$$

Условие (5.57) показывает, что для узловой окружности i трехслойной оболочки ее обобщенные перемещения однозначно определяются обобщенными перемещениями шпангоута.

Подстановка (5.57) в условие равновесия (5.56) приводит к тому, что матрица жесткости трехслойного элемента и вектор приведенных узловых нагрузок преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} [K'_n]_s &= [H^i]^T [K_n]_s [H^i]; \\ \{P'_n\}_s &= [H^i]^T \{P_n\}_s, \end{aligned} \quad (5.58)$$

или в блочном представлении с учетом структуры матрицы $[H^t]$

$$[K'_n]_s = \begin{bmatrix} [K'_{ii}] & [K'_{ij}] \\ [K'_{ji}] & [K'_{jj}] \end{bmatrix}; \quad \{P'_n\}_s = \{\{P'^t_n\}_s, \{P'^t_n\}_s\}, \quad (5.59)$$

где

$$\begin{aligned} [K'_{ii}] &= [Q'_n]^T [K_{ii}] [Q'_n]; & [K'_{ij}] &= [Q'_n]^T [K_{ij}]; \\ [K'_{ji}] &= [K'_{ij}]^T; & [K'_{jj}] &= [K_{jj}]; \\ \{P'^t_n\}_s &= [Q'_n]^T \{P^t_n\}_s; & \{P'^t_n\}_s &= \{P^t_n\}_s. \end{aligned}$$

Раскрыв скалярные произведения в условии (5.56) с учетом (5.59), в силу произвольности компонент векторов $\delta \{X_n\}_r$ получим искомые уравнения равновесия шпангоута:

$$([K_n]_r + [K'_{ii}]_s) \{X_n\}_r + [K'_{ij}] \{X'_n\}_s = \{P_n\}_r + \{P'^t_n\}_s.$$

Таким образом, при решении задачи с помощью МКЭ стыковку трехслойной оболочки со шпангоутом формально можно рассматривать как сопряжение элементов, у которых имеются различные числа узловых обобщенных перемещений. Причем на перемещения примыкающего узла трехслойной оболочки накладываются дополнительные кинематические условия [см. (5.57)], в соответствии с которыми перестраиваются матрица жесткости элемента [см. (5.58)] и вектор приведенных узловых нагрузок.

При решении задач устойчивости и колебаний для дополнительных перемещений геометрические условия сопряжения остаются такими же, как и при решении задачи статики (5.57), поэтому для трехслойного элемента его матрица приведенных начальных напряжений и матрица приведенных масс преобразуются таким же образом, как и матрица жесткости элемента, т. е. с использованием соотношений (5.58).

§ 5.5. Расчет трехслойных оболочек с учетом трансверсальной податливости слоя заполнителя

Для толстостенных трехслойных оболочек с податливым слоем заполнителя при исследовании локальных краевых эффектов в окрестности приложения сосредоточенных сил и закреплений, а также при коротковолновых формах потери устойчивости и колебаний расчет проводят с учетом деформаций поперечного сдвига и сжатия в слое заполнителя. Наиболее простая модель, позволяющая в первом приближении учитывать указанные деформации, может быть получена с использованием предположения о линейном законе распределения всех компонент вектора перемещений по толщине заполнителя [11]. Рассмотрим основные соотношения и вариационные формулировки решения задач статики, устойчивости и колебаний, соответствующие данной модели.

На рис. 5.4 поясняется кинематика деформирования трехслойного пакета. Примем в качестве независимых переменных касатель-

ные и нормальные перемещения нижней и верхней поверхностей заполнителя $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$.

Тогда распределение перемещений в слое заполнителя $v_i^{(3)} = u_i^{(3)} - \gamma^{(3)}\psi_i$ ($i = 1, 2, 3$),

где

$$u_i^{(3)} = \frac{1}{2}(u_i^{(1)} + u_i^{(2)}); \quad \psi_i = \frac{1}{h^{(3)}}(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) \quad (i = 1, 2, 3); \quad (5.60)$$

$$\gamma^{(3)} = z - z^{(3)}.$$

Здесь $h^{(3)}$ — толщина слоя заполнителя; $z^{(3)}$ — координата z срединного слоя заполнителя.

Будем рассматривать достаточно тонкие обшивки трехслойной оболочки, чтобы для описания распределений перемещений воспользоваться гипотезами Кирхгофа—Лява:

$$v_1^{(i)} = u_1^{(i)} + \gamma^{(i)}\vartheta_1^{(i)} \quad (1 \rightleftharpoons 2);$$

$$v_3^{(i)} = u_3^{(i)} \quad (i = 1, 2),$$

где $\gamma^{(i)} = z - z^{(i)}$.

Углы поворота нормалей обшивок $\vartheta_1^{(i)}, \vartheta_2^{(i)}$ связаны с перемещениями соотношениями

$$\vartheta_1^{(i)} = \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(-\frac{1}{A_1} u_{3,1}^{(i)} + k_1 u_1^{(i)} \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2),$$

где $\delta_1^{(i)} = 1 + k_1 z^{(i)}$ ($1 \rightleftharpoons 2$) $i = 1, 2$; $z^{(1)}, z^{(2)}$ — нормальные координаты поверхностей нижней и верхней обшивок, примыкающих к слою заполнителя.

Рассмотрим распределение деформаций, соответствующих выбранной модели. Из общих выражений для линейных деформаций (4.182), принимая во внимание, что

$$\frac{1}{1 + k_1 z} \approx \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(1 - \frac{k_1}{\delta_1^{(i)}} \gamma^{(i)} \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2),$$

и ограничиваясь линейными относительно $\gamma^{(i)}$ слагаемыми, получим

$$\{\varepsilon^{(i)}\} = \{e^{(i)}\} + \gamma^{(i)} \{\kappa^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.61)$$

где для слоев обшивок ($i = 1, 2$) в качестве компонент векторов имеем $\{\varepsilon^{(i)}\} = \{\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \gamma_{12}^{(i)}\}$; $\{e^{(i)}\} = \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_{12}^{(i)}\}$; $\{\kappa^{(i)}\} = \{\kappa_1^{(i)}, \kappa_2^{(i)}, \kappa_{12}^{(i)}\}$.

Компоненты векторов $\{e^{(i)}\}$ определяют деформации поверхностей $z = z^{(i)}$ ($i = 1, 2$):

$$e_1^{(i)} = \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(\frac{1}{A_1} u_{1,1}^{(i)} + \varphi_{12} u_2^{(i)} + k_1 u_3^{(i)} \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2);$$

$$\omega_1^{(i)} = \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(\frac{1}{A_1} u_{2,1}^{(i)} - \varphi_{12} u_1^{(i)} \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2); \quad (5.62)$$

$$e_{12}^{(i)} = \omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)},$$

а компоненты вектора $\{\kappa^{(i)}\}$ — изменения кривизн обшивок:

$$\begin{aligned}\kappa_1^{(i)} &= \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(\frac{1}{A_1} \vartheta_{1,1}^{(i)} + \varphi_{12} \vartheta_2^{(i)} - k_1 e_1^{(i)} \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ \kappa_{12}^{(i)} &= \frac{1}{\delta_1^{(i)}} \left(\frac{1}{A_1} \vartheta_{2,1}^{(i)} - \varphi_{12} \vartheta_1^{(i)} - k_1 \omega_1^{(i)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\delta_2^{(i)}} \left(\frac{1}{A_2} \vartheta_{1,2}^{(i)} - \varphi_{21} \vartheta_2^{(i)} - k_2 \omega_2^{(i)} \right).\end{aligned}\quad (5.63)$$

Слой заполнителя будем считать трансверсально мягким, принимающим лишь напряжения поперечного сдвига и сжатия поэтому в качестве компонент векторов в выражении (5.61) достаточно рассмотреть следующие:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon^{(3)}\} &= \{\gamma_{13}^{(3)}, \gamma_{23}^{(3)}, \varepsilon_3^{(3)}\}; \\ \{e^{(3)}\} &= \{e_{13}^{(3)}, e_{23}^{(3)}, e_3^{(3)}\}; \quad \{\kappa^{(3)}\} = \{\kappa_{13}^{(3)}, \kappa_{23}^{(3)}, \kappa_3^{(3)}\},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}e_{13}^{(3)} &= \frac{1}{\delta_1^{(3)}} \left(\frac{1}{A_1} u_{3,1}^{(3)} - k_1 u_1^{(3)} \right) + \psi_1 \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ e_3^{(3)} &= \psi_3; \\ \kappa_{13}^{(3)} &= - \frac{k_1}{\delta_1^{(3)}} e_{13}^{(3)} + \frac{1}{\delta_1^{(3)}} \frac{1}{A_1} \psi_{3,1} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\ \kappa_3^{(3)} &= 0.\end{aligned}\quad (5.64)$$

Здесь под перемещениями срединной поверхности слоя заполнителя и нормальными составляющими градиентов перемещений понимаются их представления в виде (5.60). При использовании в расчетах осредненных значений деформаций поперечного сдвига компонентами вектора $\{\kappa^{(3)}\}$ можно пренебречь.

Соотношения упругости для слоев запишем в матричном виде:

$$\{\sigma^{(i)}\} = [G^{(i)}] \{\varepsilon^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.65)$$

где для слоев обшивок $\{\sigma^{(i)}\} = \{\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}\}$ ($i = 1, 2$) и коэффициенты матриц $[G^{(i)}]$ имеют структуру такую же, как в выражениях (5.23), (5.24). Для слоя заполнителя в качестве компонент вектора $\{\sigma^{(3)}\}$ выступают: $\{\sigma^{(3)}\} = \{\tau_{13}^{(3)}, \tau_{23}^{(3)}, \sigma_3^{(3)}\}$. В случае совпадения осей ортотропии с координатными линиями матрица $[G^{(3)}]$ имеет диагональную структуру: $[G^{(3)}] = \begin{bmatrix} g_{55} & g_{44} & g_{33} \\ & & \end{bmatrix}$, где для однородного по толщине материала $g_{55} = G_{13}$, $g_{44} = G_{23}$, $g_{33} = E_3/(1 - \eta_3)$.

Здесь $\eta_3 = \eta_1 \nu_{31} + \eta_2 \nu_{32}$;

$$\left(\eta_1 = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{1 - \nu_{13}\nu_{21}}, \quad \eta_2 = \frac{\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right);$$

G_{13} , G_{23} — модули поперечных сдвигов; E_3 — трансверсальный модуль; ν_{ij} — коэффициенты поперечной деформации.

Воспользовавшись, как и в § 5.2, принципом возможных перемещений и соотношениями упругости (5.65), получим вариационную формулировку задачи статики, аналогичную (5.28):

$$\sum_{i=1}^3 \int_S \delta \{E^{(i)}\}^T [D^{(i)}] \{E^{(i)}\} dS - \sum_{i=1}^2 \int_S \delta \{U^{(i)}\}^T \{p^{(i)}\} dS - \\ - \int_\Gamma \delta \{U_\Gamma\}^T \{\mu_\Gamma\} d\Gamma = 0, \quad (5.66)$$

где

$$\{E^{(1)}\} = \{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_{12}^{(1)}, \kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}, \kappa_{12}^{(1)}\} \quad (i = 1, 2);$$

$$\{E^{(3)}\} = \{e_{12}^{(3)}, e_{23}^{(3)}, e_3^{(3)}, \kappa_{13}^{(3)}, \kappa_{23}^{(3)}, 0\};$$

$$\{U^{(i)}\} = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}\} \quad (i = 1, 2);$$

$$\{p^{(i)}\} = \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} \{p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}\} \quad (i = 1, 2);$$

$$\{U_\Gamma\} = \{u_v^{(1)}, u_l^{(1)}, u_3^{(1)}, \vartheta_v^{(1)}, u_v^{(2)}, u_l^{(2)}, u_3^{(2)}, \vartheta_v^{(2)}\}.$$

Перемещения $u_v^{(i)}, u_l^{(i)}$ представляют для поверхностей $z = z_i$ тангенциальные перемещения, направленные по нормали и по касательной к контуру Γ ; $\vartheta_v^{(i)}$ — углы поворота нормалей обшивок в плоскости vz (v — нормаль к контуру Γ). Компоненты вектора $\{\mu_\Gamma\}$ представляют сопряженные с обобщенными перемещениями $\{U_\Gamma\}$ внешние силовые факторы. Матрицы $[D^{(i)}]$ вычисляются аналогично (5.27).

Вариационная формулировка (5.66) задачи статики с использованием соотношений (5.62)—(5.64) позволяет получить разрешающие уравнения в перемещениях и граничные условия.

Определим необходимые исходные матрицы, которыми можно воспользоваться при получении вариационно-матричным способом канонических систем дифференциальных уравнений для оболочек вращения. В качестве компонент вектора обобщенных перемещений для данной модели деформирования с учетом обозначений (4.58) следует принять

$$\{X\} = \{u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, \vartheta_1^{(1)}, u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}, \vartheta_1^{(2)}\}.$$

Компонентами вектора производных $\{Y\}$ будут

$$\{Y\} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{u^{(1)}, v^{(1)}, \vartheta_1^{(1)}, u^{(2)}, v^{(2)}, \vartheta_1^{(2)}\}.$$

Дифференциальное условие связи между векторами $\{X\}$ и $\{Y\}$ записывается в стандартной форме:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{X\} - [C_1] \{X\} - [C_2] \{Y\} = 0, \quad (5.67)$$

где

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & -\delta_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & -\delta_1^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись условиями периодичности решений по угловой координате β , разложим все компоненты искомого решения в тригонометрические ряды. Связь амплитудных значений компонент обобщенных деформаций $\{E^{(i)}\}$ с амплитудными значениями векторов обобщенных перемещений $\{X\}$ и вектора производных $\{Y\}$ запишем в матричном виде:

$$\{E_n^{(i)}\} = [\bar{L}_{1n}^{(i)}] \{X_n\} + [L_{2n}^{(i)}] \{Y_n\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.68)$$

где $[L_{1n}^{(i)}]$, $[L_{2n}^{(i)}]$ — матрицы, имеющие следующую структуру:

$$[L_{1n}^{(1)}] = [[l_{1n}^{(1)}] [0]]; \quad [L_{2n}^{(1)}] = [[l_{2n}^{(1)}] [0]]; \quad [L_{1n}^{(2)}] = [[0] [l_{1n}^{(2)}]]; \quad [L_{2n}^{(2)}] = [[0] [l_{2n}^{(2)}]]; \quad [L_{2n}^{(3)}] = 0.$$

Матрицы $[l_{1n}^{(i)}]$, $[l_{2n}^{(i)}]$, $[L_{1n}^{(3)}]$ приводятся ниже:

$$[l_{1n}^{(i)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1^{(i)} & 0 \\ \psi^{(i)} & \bar{n}^{(i)} & k_2^{(i)} & 0 \\ -\bar{n}^{(i)} & -\psi^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(k_1^{(i)})^2 & 0 \\ -k_2^{(i)} \psi^{(i)} & 0 & (\bar{n}^{(i)})^2 - (k_2^{(i)})^2 & \psi^{(i)} \\ -\bar{n}^{(i)} (k_1^{(i)} + k_2^{(i)}) & \psi^{(i)} (k_1^{(i)} - k_2^{(i)}) & -2\bar{n}^{(i)} \psi^{(i)} & -2\bar{n}^{(i)} \end{bmatrix}; \quad (i=1, 2)$$

$$[L_{2n}^{(i)}] = \begin{bmatrix} 1/\delta_1^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\delta_1^{(i)} & 0 \\ -k_1^{(i)}/\delta_1^{(i)} & 0 & 1/\delta_1^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (k_2^{(i)} - k_1^{(i)})/\delta_1^{(i)} & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\psi^{(i)} = \psi/\delta_2^{(i)}, \quad \bar{n}^{(i)} = \bar{n}/\delta_2^{(i)},$$

$$k_1^{(i)} = k_1/\delta_1^{(i)}, \quad k_2^{(i)} = k_2/\delta_2^{(i)},$$

$$\psi = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad \bar{n} = n/B.$$

$$[L_n^{(3)}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h^{(3)}} & 0 & 0 & -\frac{\delta_1^{(1)}}{2\delta_1^{(3)}} \frac{1}{h^{(3)}} & 0 & 0 & -\frac{\delta_1^{(2)}}{2\delta_1^{(3)}} \\ 0 & -\frac{1}{h^{(3)}} & -\frac{\bar{n}^{(3)}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^{(3)}} - \frac{k_2^{(3)}}{2} & -\frac{\bar{n}^{(3)}}{2} & 0 \\ & -\frac{k_2^{(3)}}{2} & & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h^{(3)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^{(3)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(3)}} \left(\frac{k_1^{(3)}}{2} + \frac{1}{h^{(3)}} \right) & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_1^{(2)}}{\delta_1^{(3)}} \left(\frac{k_1^{(3)}}{2} - \frac{1}{h^{(3)}} \right) \\ 0 & k_2^{(3)} \left(\frac{k_2^{(3)}}{2} + \bar{n}^{(3)} \left(\frac{k_2^{(3)}}{2} + \frac{1}{h^{(3)}} \right) \right) & 0 & 0 & k_2^{(3)} \left(\frac{k_2^{(3)}}{2} - \bar{n}^{(3)} \left(\frac{k_2^{(3)}}{2} - \frac{1}{h^{(3)}} \right) \right) & -\frac{1}{h^{(3)}} & -\frac{1}{h^{(3)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Перемещения $\{U^{(i)}\}$, на которых совершают работу внешние поверхностные нагрузки, формально можно выразить через компоненты вектора обобщенных перемещений:

$$\{U^{(i)}\} = [F^{(i)}] \{X\} \quad (i = 1, 2), \quad (5.69)$$

где

$$\begin{aligned} [F^{(1)}] &= [[E_1][0]]; \\ [F^{(2)}] &= [[0][E_1]]; \end{aligned} \quad [E_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица $[0]$ обозначает нулевую матрицу размерности (3×4) .

С использованием полученных для данной модели деформирования матриц $[C_1]$, $[C_2]$, $[L_n^{(i)}]$, $[L_{2n}^{(i)}]$, $[D^{(i)}]$, $[F^{(i)}]$ каноническая система разрешающих дифференциальных уравнений для n -й гар-

моники разложения получается с помощью стандартных операций (5.39).

Аналогично тому, как было показано в § 5.4, перевод в глобальную систему координат матриц жесткости элемента трехслойной оболочки осуществляется с помощью матрицы преобразования $[C]$:

$$[K_n]_s = [C]^T [K_n] [C];$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_i] & [0] \\ [0] & [C_j] \end{bmatrix};$$

$$[C_k] = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & 0 & \sin \theta_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -\cos \theta_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cos \theta_k & 0 & \sin \theta_k & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & -\cos \theta_k & 0 \\ \text{сим.} & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (k = i, j),$$

где θ_i, θ_j — углы между осью вращения и нормальными, восстановленными в узловых сечениях i, j (см. рис. 5.11). Обобщенными перемещениями для сечений оболочки в этом случае будут выступать

$$\{X\}_s^k = \{\xi^{(1)k}, v^{(1)k}, \zeta^{(1)k}, \vartheta^{(1)k}, \xi^{(2)k}, v^{(2)k}, \zeta^{(2)k}, \vartheta^{(2)k}\} \quad k = i, j.$$

При стыковке трехслойной оболочки со шпангоутом формальные преобразования матрицы жесткости примыкающего элемента аналогичны (5.58):

$$[K'_n]_s = [H^i]^T [K_n]_s [H^i], \quad (5.70)$$

где

$$[H^i] = \begin{bmatrix} [Q_n^i] & [0]_{12} \\ [0]_{21} & [E] \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$[Q_n^i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_i^{(1)} \\ z_i^{(1)} \bar{n} & 1 + z_i^{(1)}/R & \alpha_i^{(1)} \bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_i^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_i^{(2)} \\ z_i^{(2)} \bar{n} & 1 + z_i^{(2)}/R & \alpha_i^{(2)} \bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_i^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$\alpha_i^{(1)}, z_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, z_i^{(2)}$ — координаты окружностей сопряжения (рис. 5.14). Матрицы $[0]_{12}, [0]_{21}$ и $[E]$ имеют размерности (8×8) , (8×4) и (8×8) соответственно. В результате преобразования (5.70) матрица жесткости трехслойного элемента имеет размерность (12×12) .

При получении условий сопряжения используются следующие предположения. Для точек (1) и (2), принадлежащих окружностям сопряжения (см. рис. 5.14), выполняются следующие равенства по перемещениям и углам поворота:

$$\xi_i^{(k)s} = \xi_i^{(k)r}; v_i^{(k)s} = v_i^{(k)r}; \zeta_i^{(k)s} = \zeta_i^{(k)r}; \vartheta_1^{(k)s} = \vartheta_1^{(k)r},$$

где индексами s и r отмечается принадлежность к оболочке или шпангоуту; $k = 1, 2$ — номер окружности сопряжения.

В свою очередь, перемещения точек шпангоута, лежащих на k -й окружности, однозначно определяются перемещениями центра тяжести сечения шпангоута и его углами поворота:

$$\begin{aligned} \xi_i^{(k)r} &= \xi^r - \alpha_i^{(k)} \vartheta_1^r; \\ v_i^{(k)r} &= v^r - \alpha_i^{(k)} \vartheta_3^r + z_i^{(k)} \vartheta_2^r, \\ \zeta_i^{(k)r} &= \zeta^r + z_i^{(k)} \vartheta_1^r \quad (k = 1, 2), \end{aligned}$$

где $\vartheta_2^r, \vartheta_3^r$ — углы поворота, определяющиеся выражениями (5.53).

При решении задачи устойчивости и колебаний трехслойных оболочек с учетом трансверсальной податливости слоя заполнителя будем пользоваться следующим вариационным условием существования смежного равновесного состояния:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_S \{ \delta \{E_*^{(i)}\}^T [D^{(i)}] \{E_*^{(i)}\} - \omega^2 \{U_*\}^T [m^{(i)}] \{U_*\} \} dS + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_S \delta \{\vartheta_*^{(i)}\}^T [T_\delta^{(i)}] \{\vartheta_*^{(i)}\} dS = 0, \end{aligned}$$

где

$$\{E_*^{(i)}\} = \{e_1^{*(i)}, e_2^{*(i)}, e_{12}^{*(i)}, \kappa_1^{*(i)}, \kappa_2^{*(i)}, \kappa_{12}^{*(i)}\} \quad (i = 1, 2);$$

$$\{E_*^{(3)}\} = \{e_{13}^{*(3)}, e_{23}^{*(3)}, e_3^{*(3)}, \kappa_{13}^{*(3)}, \kappa_{23}^{*(3)}, 0\};$$

$$\{U_*\} = \{u^{*(1)}, v^{*(1)}, w^{*(1)}, u^{*(2)}, v^{*(2)}, w^{*(2)}\};$$

$$\{\vartheta_*^{(i)}\} = \{\vartheta_1^{*(i)}, \vartheta_2^{*(i)}\} \quad (i = 1, 2);$$

$$[m^{(i)}] = \int_{h^{(i)}} [f^{(i)}]^T [f^{(i)}] \rho^{(i)} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} dz \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$[f^{(1)}] = [[E] [0]]; [f^{(2)}] = [[0] [E]]; [f^{(3)}] = [\kappa_1 [E] \kappa_2 [E]]; [f^{(3)}] = [\kappa_1 [E] \kappa_2 [E]]; \kappa_1 = \frac{1}{2} - \frac{\gamma^{(3)}}{h^{(3)}}; \kappa_2 = \frac{1}{2} + \frac{\gamma^{(3)}}{h^{(3)}}.$$

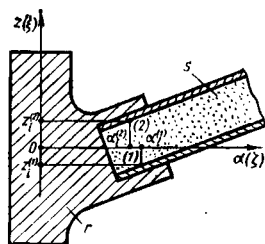


Рис. 5.14.

Здесь компоненты, отмеченные звездочкой, — дополнительные величины первого порядка малости; $[E]$, $[0]$ — единичная и нулевая матрица размерности (3×3) . Поскольку начальное состояние считается напряженным, но недеформированным, все полученные ранее деформационные соотношения остаются справедливыми и для дополнительных величин.

При получении канонических систем дифференциальных уравнений в качестве компонент вектора дополнительных обобщенных перемещений первого порядка малости примем

$$\{X_*\} = \{u^{*(1)}, v^{*(1)}, w^{*(1)}, \vartheta_1^{*(1)}, u^{*(2)}, v^{*(2)}, w^{*(2)}, \vartheta_1^{*(2)}\}.$$

В этом случае матрицы связи $[C_1]$, $[C_2]$ остаются такими же, как в уравнении (5.67). Матрицы $[L_{1n}^{(i)}]$, $[L_{2n}^{(i)}]$, определяющие деформационные соотношения, были приведены для уравнений (5.68). Матричные блоки канонической системы разрешающих уравнений вычисляются по зависимостям, представленным ранее для уравнения (5.51), при этом матрица $[S_{11}^*]$ вычисляется следующим образом:

$$[S_{11}^*] = [S_{11}] + B \left(\Lambda \sum_{i=1}^2 [R_n^{(i)}]^T [T_0^{(i)}] [R_n^{(i)}] - \omega^2 \sum_{i=1}^3 [F]^T [m^i] [F] \right),$$

где

$$\begin{aligned} [R_n^{(1)}] &= [[r_n^{(1)}] [0]]; [R_n^{(2)}] = [[0] [r_n^{(2)}]]; \\ [r_n^{(i)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2/\delta_2^{(i)} & \bar{n}/\delta_2^{(i)} & 0 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2); \quad \bar{n} = n/B; \\ [F] &= \begin{bmatrix} [E_1] & [0] \\ [0] & [E_1] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь матрица $[E_1]$ имеет тот же вид, что и для выражения (5.69); Λ — параметр нагружения; ω — круговая частота.

§ 5.6. Устойчивость и колебания прямоугольных трехслойных пластин, цилиндрических панелей и оболочек с многослойными обшивками

Рассмотрим метод расчета критических нагрузок и частот колебаний трехслойных прямоугольных пластин, цилиндрических панелей и оболочек [42]. Расчетные схемы исследуемых объектов показаны на рис. 5.15.

Верхняя и нижняя обшивки в общем случае представляют многослойные тонкие панели, отдельные слои которых выполнены из различных ортотропных материалов и могут иметь различные толщины. При использовании композиционных материалов отдельный слой может быть перекрестно-армированным (см. рис. 5.10). Материал заполнителя ортотропный, главные направления его упругих свойств совпадают с осями x , y , z . Для конструктивно-ортотропных запол-

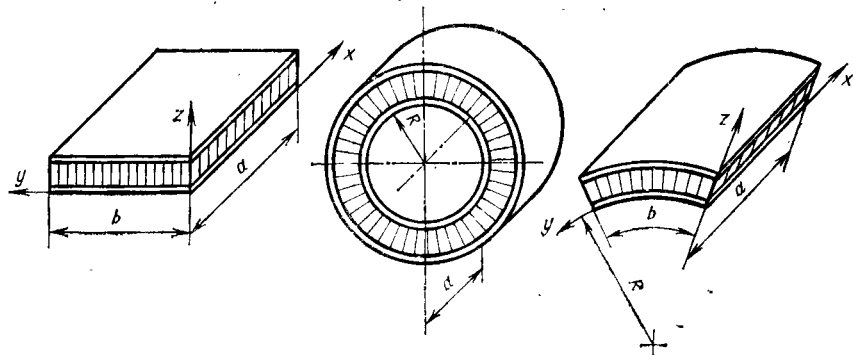


Рис. 5.15.

нителей с дискретной структурой в качестве упругих характеристик рассматриваются их приведенные характеристики.

Идеализированные граничные условия, которые будут рассмотрены ниже, соответствуют шарнирному опиранию обшивок по всему контуру.

Трехслойная пластина, панель или оболочка нагружаются по обшивкам тангенциальными равномерно распределенными погонными усилиями (рис. 5.16). Погонные усилия $T_x^{0(i)}$, $T_y^{0(i)}$ ($i = 1, 2$) могут задаваться отдельно для нижней и верхней обшивок, а также в виде суммарных величин T_x^0 , T_y^0 . В последнем случае погонные усилия будем распределять по обшивкам пропорционально жесткостям несущих слоев. Для цилиндрической панели или оболочки возможно также задание внешнего равномерного давления p_z . При решении задачи устойчивости нагружение будем считать пропорциональным, при определении частот — фиксированным.

Сформулируем основные допущения. Для описания деформирования многослойных обшивок будем использовать гипотезы Кирхгофа—Лява. Для приближенного учета всех компонент напряженно-деформированного состояния в слое заполнителя принимается аппроксимация распределения касательных перемещений по нормальной координате z в виде кубической параболы, для нормальных перемещений — в виде квадратичной параболы. Внешние нагрузки считаются «мертвыми», т. е. не изменяющими своего направления при потере устойчивости. Предполагается, что в исходном невозмущенном состоянии конструкция напряжена, но не деформирована. Напряженное состояние безмоментное.

Для учета деформаций поперечного сдвига и сжатия в слое заполнителя используется кинематический подход, согласно которому вводятся гипотезы распре-

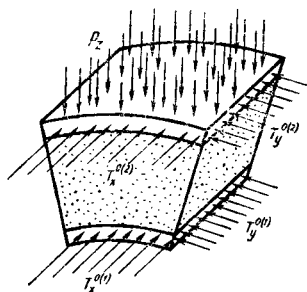


Рис. 5.16.

ления перемещений по толщине слоя. Перемещения раскладываются в степенные ряды относительно аргумента z . Для аппроксимаций нормального перемещения $v_3^{(3)}$ удерживаются первые три члена разложения, для касательных перемещений $v_1^{(3)}$, $v_2^{(3)}$ — четыре:

$$\begin{aligned} v_3^{(3)} &= \gamma_0 + z\gamma_1 + \frac{1}{2} z^2 \gamma_2, \\ v_1^{(3)} &= \alpha_0 + z\alpha_1 + \frac{1}{2} z^2 \alpha_2 + \frac{1}{3} z^3 \alpha_3 - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(z\gamma_0 + \frac{1}{2} z^2 \gamma_1 + \frac{1}{6} z^3 \gamma_2 \right), \\ v_2^{(3)} &= \beta_0 + z\beta_1 + \frac{1}{2} z^2 \beta_2 + \frac{1}{3} z^3 \beta_3 - \frac{\partial}{\partial y} \left(z\gamma_0 + \frac{1}{2} z^2 \gamma_1 + \frac{1}{6} z^3 \gamma_2 \right), \end{aligned} \quad (5.71)$$

где $v_3^{(3)}$, $v_1^{(3)}$, $v_2^{(3)}$ — нормальное и касательные безразмерные перемещения слоя заполнителя. Здесь и ниже под безразмерными следует понимать величины, отнесенные к размеру a (см. рис. 5.15). Коэффициенты α_0 , α_1 , ..., γ_2 — искомые функции аргументов x , y ; x , y , z — безразмерные координаты пластины, панели, оболочки. Выбранная аппроксимация перемещений (5.71) позволяет достаточно устойчиво осуществить предельный переход к тонким оболочкам и пластинкам.

Распределение перемещений в обшивках принимается согласно гипотезам Кирхгофа—Лява:

$$\begin{aligned} v_3^{(i)} &= w_i; \\ v_1^{(i)} &= u_i + (z - z^{(i)}) \vartheta_x^{(i)}; \\ v_2^{(i)} &= v_i + (z - z^{(i)}) \vartheta_y^{(i)} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Здесь w_i , u_i , v_i — перемещения поверхностей сопряжения обшивок и заполнителя:

$$w_i = v_3^{(3)}(z^{(i)}); u_i = v_1^{(3)}(z^{(i)}); v_i = v_2^{(3)}(z^{(i)}) \quad (i = 1, 2);$$

$z^{(i)}$ — координаты поверхностей сопряжения, углы поворота нормалей обшивок:

$$\begin{aligned} \vartheta_x^{(i)} &= -w_{i,x}; \\ \vartheta_y^{(i)} &= \frac{1}{\delta^{(i)}} (-w_{i,j} + kv_i), \end{aligned} \quad (5.73)$$

где $k = 1/R$, $\delta^{(i)} = 1 + kz^{(i)}$.

Для цилиндрической панели связь линейных деформаций слоев с перемещениями устанавливается согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(i)} &= v_{1,x}^{(i)}; \varepsilon_y^{(i)} = \frac{1}{\delta^{(i)}} (v_{2,y}^{(i)} + kv_3^{(i)}), \\ \gamma_{xy}^{(i)} &= v_{2,x}^{(i)} + \frac{1}{\delta^{(i)}} v_{1,y}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3); \\ \varepsilon_z^{(3)} &= v_{3,z}^{(3)}; \gamma_{xz}^{(3)} = v_{3,x}^{(3)} + v_{1,z}^{(3)}; \\ \gamma_{yz}^{(3)} &= \frac{1}{\delta^{(3)}} (v_{3,y}^{(3)} - kv_2^{(3)}) + v_{2,z}^{(3)}. \end{aligned}$$

При решении задачи с помощью метода Рэлея—Ритца движение системы будем считать периодическим с круговой частотой ω . Для граничных условий типа шарнирного опирания функции, аппроксимирующие распределение перемещений (5.71), разложим в двойные тригонометрические ряды по координатам x, y :

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \sin \omega t \sum_m \sum_n \alpha_{kmn} \cos \tilde{m}x \sin \tilde{n}y; \\ \beta_k &= \sin \omega t \sum_m \sum_n \beta_{kmn} \sin \tilde{m}x \cos \tilde{n}y; \\ \gamma_l &= \sin \omega t \sum_m \sum_n \gamma_{lmn} \sin \tilde{m}x \sin \tilde{n}y,\end{aligned}\quad (5.74)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, l = 0, 1, 2, \tilde{m} = m\pi, \tilde{n} = n\pi/\lambda, \lambda = b/a$. Для замкнутой круговой цилиндрической оболочки $\lambda = \pi R/a$.

Функции, аппроксимирующие распределение перемещений, прием в качестве обобщенных перемещений $\{q\}$ и для более компактной формы записи разложение (5.74) представим в векторно-матричном виде:

$$\{q\} = \sin \omega t \sum_m \sum_n [\beta_{qmn}] \{q_{mn}\}, \quad (5.75)$$

где

$$\{q\} = \{\beta_3, \alpha_3, \beta_2, \alpha_2, \gamma_2, \beta_1, \alpha_1, \gamma_1, \beta_0, \alpha_0, \gamma_0\}. \quad (5.76)$$

Диагональные матрицы $[\beta_{qmn}]$, содержащие тригонометрические функции разложения, согласно (5.74) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}[\beta_{qmn}] = & \begin{bmatrix} \sin \tilde{m}x \cos \tilde{n}y, & \cos \tilde{m}x \sin \tilde{n}y, & \sin \tilde{m}x \cos \tilde{n}y, & \cos \tilde{m}x \sin \tilde{n}y, \\ \sin \tilde{m}x \sin \tilde{n}y, & \sin \tilde{m}x \cos \tilde{n}y, & \cos \tilde{m}x \sin \tilde{n}y, & \sin \tilde{m}x \sin \tilde{n}y, \\ \sin \tilde{m}x \cos \tilde{n}y, & \cos \tilde{m}x \sin \tilde{n}y, & \sin \tilde{m}x \sin \tilde{n}y, & \end{bmatrix},\end{aligned}$$

где $\{q_{mn}\}$ — вектор, содержащий соответствующие $\{q\}$ (5.76) амплитудные значения гармоник разложения.

Аналогичным образом можно представить распределение перемещений по слоям:

$$\{U^{(i)}\} = \sin \omega t \sum_m \sum_n [\beta_{umn}^{(i)}] \{U_{mn}^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.77)$$

где $\{U^{(i)}\} = \{v_3^{(i)}, v_1^{(i)}, v_2^{(i)}\}$; $[\beta_{umn}^{(i)}] = \begin{bmatrix} \sin \tilde{m}x \sin \tilde{n}y, & \cos \tilde{m}x \sin \tilde{n}y, & \sin \tilde{m}x \cos \tilde{n}y \end{bmatrix}$.

Связь перемещений слоев с коэффициентами аппроксимаций для амплитудных значений гармоник разложения устанавливается с использованием соотношений (5.71), (5.72) и может быть представлена в матричном виде:

$$\{U_{mn}^{(i)}\} = [F_{mn}^{(i)}] \{q_{mn}\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.78)$$

где матрицы $[F_{mn}^{(i)}]$ приводятся ниже:

$$[F_{mn}^{(i)}] =$$

$$(i = 1, 2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(z^{(i)})^2}{2} & 0 & 0 & z^{(i)} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{(z^{(i)})^3}{3} & 0 & \frac{(z^{(i)})^2}{2} - \left(\frac{z^{(i)}}{3} + \gamma^{(i)}\right) \frac{(z^{(i)})^2}{2} & \bar{m} & 0 & z^{(i)} & -\left(\frac{z^{(i)}}{2} + \gamma^{(i)}\right) z^{(i)} \bar{m} & 0 & 1 & 2 - (z^{(i)} - \gamma^{(i)}) \bar{m} \\ g_i (z^{(i)})^3 & 0 & \frac{g_i (z^{(i)})^2}{2} & 0 & -\left(\frac{z^{(i)}}{3} + s_i\right) \frac{(z^{(i)})^2}{2} & \bar{n} & g_i z^{(i)} & 0 & -\left(\frac{z^{(i)}}{2} + s_i\right) z^{(i)} \bar{n} & g_i & 0 - (g_i z^{(i)} + s_i) \bar{n} \end{bmatrix}$$

$$[F_{mn}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z^2}{2} & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{z^3}{3} & 0 & \frac{z^2}{2} & -\frac{\bar{m} z^3}{6} & 0 & z & -\frac{\bar{m} z^2}{2} & 0 & 1 & -\bar{m} z \\ \frac{z^3}{3} & 0 & \frac{z^2}{2} & 0 & -\frac{\bar{n} z^3}{6} & z & 0 & -\frac{\bar{n} z^2}{2} & 1 & 0 & -\bar{n} z \end{bmatrix},$$

где $\gamma^{(i)} = z - z^{(i)}$, $\kappa_i = k_i \delta^{(i)}$, $k = a/R$, $\delta^{(i)} = 1 + k z^{(i)}$, $g_i = 1 + \gamma^{(i)} \kappa_i$, $s_i = \gamma^{(i)} \delta^{(i)}$, $\bar{m} = m\pi$, $\bar{n} = n\pi/\lambda$.

Распределение углов поворота нормалей в обшивках устанавливается с учетом (5.73):

$$\{\vartheta^{(i)}\} = \sin \omega \tau \sum_m \sum_n [\beta_{\vartheta mn}^{(i)}] \{\vartheta_{mn}^{(i)}\} \quad (i = 1, 2), \quad (5.79)$$

где

$$\{\vartheta^{(i)}\} = \{\vartheta_x^{(i)}, \vartheta_y^{(i)}\};$$

$$[\beta_{\vartheta mn}^{(i)}] = [\cos \tilde{m}x \sin \bar{n}y, \sin \tilde{m}x \cos \bar{n}y];$$

$$\{\vartheta_{mn}^{(i)}\} = [R_{mn}^{(i)}] \{q_{mn}\} \quad (i = 1, 2).$$

Коэффициенты матриц $[R_{mn}^{(i)}]$ даются ниже:

$$[R_{mn}^{(i)}] =$$

$$(i = 1, 2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\tilde{m}(z^{(i)})^2}{2} & 0 & 0 & \tilde{m}z^{(i)} & 0 & 0 & \tilde{m} \\ -\kappa_i(z^{(i)})^3 & 0 & -\frac{\kappa_i(z^{(i)})^2}{2} & 0 & \bar{n} \left(\frac{1}{\delta^{(i)}} + \right. & -\kappa_i z^{(i)} & 0 & \left(\frac{1}{\delta^{(i)}} + \right. & -\kappa_i & 0 & \left(\frac{1}{\delta^{(i)}} + \right. \\ & & & & \left. + \kappa_i \frac{z^{(i)}}{3} \right) \times & & & \left. + \kappa_i \frac{z^{(i)}}{2} \right) \times & & & \left. + \kappa_i z^{(i)} \right) \bar{n} \\ & & & & \times \frac{(z^{(i)})^2}{2} & & & \times z^{(i)} \bar{n} & & & \end{bmatrix}.$$

С использованием выражений (5.71) и принимая во внимание (5.75), связь деформаций с обобщенными перемещениями также представим в векторно-матричной форме:

$$\{e^{(i)}\} = \sin \omega \tau \sum_m \sum_n [\beta_{emn}^{(i)}] \{e_{mn}^{(i)}\}; \quad (5.80)$$

$$\{e_{mn}^{(i)}\} = [B_{mn}^{(i)}] \{q_{mn}\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.81)$$

где для несущих слоев

$$\{e^{(i)}\} = \{e_x^{(i)}, e_y^{(i)}, \gamma_{xy}^{(i)}\} \quad (i = 1, 2);$$

$$[\beta_{emn}^{(i)}] = [\sin \tilde{m}x \sin \bar{n}y, \sin \tilde{m}x \sin \bar{n}y, \cos \tilde{m}x \cos \bar{n}y];$$

$$[B_{mn}^{(i)}] = [L_{mn}^{(i)}] [F_{mn}^{(i)}],$$

для слоя заполнителя

$$\{e^{(3)}\} = \{e_x^{(3)}, e_y^{(3)}, e_z^{(3)}, \gamma_{xy}^{(3)}, \gamma_{xz}^{(3)}, \gamma_{yz}^{(3)}\};$$

$$[\beta_{emn}^{(3)}] = [\sin \tilde{m}x \sin \bar{n}y, \sin \tilde{m}x \sin \bar{n}y, \sin \tilde{m}x \sin \bar{n}y, \cos \tilde{m}x \cos \bar{n}y, \cos \tilde{m}x \sin \bar{n}y, \sin \tilde{m}x \cos \bar{n}y];$$

$$[B_{mn}^{(3)}] = [L_{mn}^{(3)}] [F_{mn}^{(3)}] + [F'_{mn}].$$

Коэффициенты матриц $[L_{mn}^{(i)}]$ ($i = 1, 2, 3$) и $[F'_{mn}]$ приводятся ниже:

$$[L_{mn}^{(i)}] = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{m} & 0 \\ \kappa_i & 0 & -\bar{n}/\delta^{(i)} \\ 0 & \bar{n}/\delta^{(i)} & \tilde{m} \end{bmatrix};$$

$$(i = 1, 2)$$

$$[L_{mn}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_3 & 0 & 0 & \bar{m} & \bar{n}/\delta^{(3)} \\ -\bar{m} & 0 & 0 & \bar{n}/\delta^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{n}/\delta^{(3)} & 0 & \bar{m} & 0 & -\kappa_3 \end{bmatrix};$$

$$[F'_{mn}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & z & -\frac{\bar{m}z^2}{2} & 0 & 1 & -\bar{m}z & 0 & 0 & -\bar{m} \\ z^2 & 0 & z & 0 & -\frac{\bar{n}z^2}{2} & 1 & 0 & -\bar{n}z & 0 & 0 & -\bar{n} \end{bmatrix}.$$

Используя вариационную формулировку условия существования смежного равновесного состояния [см. (5.40)] и учитывая представления перемещений, углов поворота и деформаций слоев [см. (5.77)—(5.81)], придем к следующему виду обобщенной задачи на собственные значения:

$$([K_{mn}] + \Lambda [T_{mn}] - \omega^2 [M_{mn}]) \{q_{mn}\} = 0,$$

где $[K_{mn}]$, $[T_{mn}]$, $[M_{mn}]$ — приведенные матрицы жесткости, начальных напряжений и масс; Λ — параметр нагружения.

Для вычисления матрицы жесткости $[K_{mn}]$ исходными являются соотношения упругости для слоев и связи деформаций с перемещениями. Матрица жесткости $[K_{mn}]$ состоит из трех слагаемых, которые определяются матрицами жесткости обшивок и заполнителя:

$$[K_{mn}] = \sum_{i=1}^3 [K_{mn}^{(i)}].$$

При слоистой структуре обшивок и заполнителя матрицы

$$[K_{mn}^{(i)}] = \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \int_{z_{j-1}^{(i)}}^{z_j^{(i)}} [B_{mn}^{(i)}]^T [G_j^{(i)}] [B_{mn}^{(i)}] \delta^{(i)} dz, \quad (5.82)$$

где $n^{(i)}$ — число слоев (предполагается, что заполнитель состоит из одного слоя, $n^{(3)} = 1$); j — номер слоя; $z_{j-1}^{(i)}$, $z_j^{(i)}$ — начальная и конечная координаты z для j -го слоя i -й обшивки; $z_0^{(i)} = z^{(i)}$ ($i = 1, 2$) представляют координаты поверхностей сопряжения обшивок с заполнителем; для слоя заполнителя $z_0^{(3)} = z^{(1)}$, $z_1^{(3)} = z^{(2)}$; $[B_{mn}^{(i)}]$ — матрицы, определяющие для m — n -й гармоники волнообразования связь амплитудных значений деформаций с амплитудными значениями коэффициентов аппроксимаций $\{q_{mn}\}$ [см. (5.81)]; $[G_j^{(i)}]$ — матрица коэффициентов упругости соответствующего слоя.

Интегрирование (5.82) по координате z удобно выполнять численно на ЭВМ с использованием квадратурных формул Котеса второго порядка для слоев обшивок и шестого порядка для слоя заполнителя.

Матрица начальных напряжений $[T_{mn}]$ формируется по заданным напряжениям в обшивках и матрицам связи углов поворота с амплитудными значениями коэффициентов аппроксимации $\{q_{mn}\}$:

$$[T_{mn}] = \sum_{i=1}^2 \int_{h^{(i)}} [R_{mn}^{(i)}]^T [\sigma_0^{(i)}] [R_{mn}^{(i)}] \delta^{(i)} dz,$$

где

$$[\sigma_0^{(i)}] = \begin{bmatrix} \sigma_x^{0(i)} & 0 \\ 0 & \sigma_y^{0(i)} \end{bmatrix};$$

$\sigma_x^{0(i)}, \sigma_y^{0(i)}$ — начальные напряжения в i -й обшивке.

Матрица приведенных масс $[M_{mn}]$ вычисляется по известным плотностям отдельных слоев и распределениям перемещений по нормальной координате:

$$[M_{mn}] = a^2 \sum_{i=1}^3 [M_{mn}^{(i)}],$$

где

$$[M_{mn}^{(i)}] = \sum_{j=1}^{n(i)} \int_{z_{j-1}^{(i)}}^{z_j^{(i)}} [F_{mn}^{(i)}]^T [F_{mn}^{(i)}] \rho_j^{(i)} \delta^{(i)} dz$$

($\rho_j^{(i)}$ — удельная плотность j -го слоя i -й обшивки; $\rho_1^{(3)}$ — удельная плотность заполнителя).

§ 5.7. Примеры расчетов трехслойных конструкций

Пример 1. Устойчивость трехслойной прямоугольной пластины. Исследуем влияние схем укладки однонаправленных слоев углепластика в обшивках трехслойной пластины на критические нагрузки шарнирно опертой по контуру трехслойной прямоугольной пластины при одноосном равномерном нагружении. Рассмотрим варианты укладки несущих слоев: $[\varphi, 90^\circ, -\varphi]$ и $[\varphi, 0^\circ, -\varphi]$, углы укладки отсчитываются от оси x , вдоль которой действует нагрузка. Упругие характеристики однонаправленного слоя примем равными: $E_1 = 15 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0,8 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 0,5 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0,28$ [направление оси 1 (см гл. 1) совпадает с направлением армирования]. Толщина однонаправленного слоя $0,18 \cdot 10^{-3}$ м. Приведенные упругие характеристики заполнителя принимались равными: $G_{xz} = 26$ МПа, $G_{yz} = 17$ МПа, $E_z = 100$ МПа, $E_x = E_y = G_{xy} = 0$. Толщина заполнителя $3,0 \cdot 10^{-2}$ м. Габариты пластины $a = b = 1$ м.

Проведенный расчет по совместному исследованию несимметричной (общей) и симметричной (типа «сморщивания») форм потери устойчивости (см. § 5.6) показал, что им соответствуют два локаль-

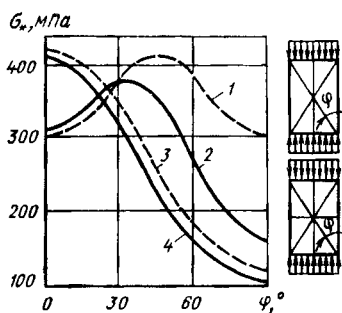


Рис. 5.17.

при углах армирования $\varphi > 20-25^\circ$ реализуются симметричные коротковолновые формы потери устойчивости. При $\varphi = 45^\circ$ расчет на устойчивость без учета сжимаемости заполнителя в поперечном направлении приводит к завышению критических нагрузок для первой структуры примерно на 70 %, для второй — на 40 %.

Пример 2. Исследование весовой эффективности применения углепластиковых материалов. Для трехслойной цилиндрической панели, нагруженной внешним давлением, определим весовую эффективность применения углепластика. Длина панели вдоль образующей 4 м, длина криволинейного контура 2 м, внутренний радиус $R = 2,75$ м, толщина заполнителя $8,6 \cdot 10^{-2}$ м. Приведенные упругие характеристики заполнителя: $G_{xz} = 150$ МПа, $G_{yz} = 270$ МПа, $E_z = 10^3$ МПа, удельная масса заполнителя 53 кг/м³. В качестве материала несущих слоев рассмотрим углепластик со следующими характеристиками однонаправленного слоя: $E_1 = 0,14 \cdot 10^6$ МПа, $E_2 = 0,94 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 0,65 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0,25$, толщина слоя $0,12 \cdot 10^{-3}$ м, удельная масса $1,35 \cdot 10^3$ кг/м³. Для панели примем восьмислойные углепластиковые обшивки со структурой укладки $[\pm\varphi/0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ/\pm\varphi]$ (углы отсчитываются от прямолинейной образующей).

Под эффективностью конструкции принято понимать отношение предельной нагрузки, которую способна выдержать конструкция, к весу конструкции, т. е. $\mathcal{E} = P/W$, где P — предельная нагрузка, W — вес конструкции. Для простейших конструкций их эффективность, как правило, может быть определена произведением двух сомножителей $\mathcal{E} = km$, где k — показатель нагруженности, m — критерий эффективности материала. Показатель нагруженности k определяется внешними нагрузками и габаритными размерами, критерий эффективности материала — механическими характеристиками материала, такими как удельная масса, модули упругости, пределы прочности и другие.

Критерий эффективности материала неразрывно связан с рассматриваемой конструкцией. В различных конструкциях критерий эффективности определяется различными комбинациями механи-

ческих минимума критических нагрузок. На рис. 5.17 представлены результаты расчета, полученные с использованием программы [42]. Величина σ_* определяет средние критические напряжения. Сплошными линиями представлены результаты расчета для варианта укладки несущих слоев $[\varphi, 90^\circ, -\varphi]$, пунктирными — для $[\varphi, 0^\circ, -\varphi]$. Кривые 1, 2 соответствуют несимметричным формам потери устойчивости; кривые 3, 4 — симметричным.

Как видно из графиков, для данных параметров трехслойной пластины

ческих характеристик материала. Для трехслойных цилиндрических панелей, рассматриваемых в данном примере, практически невозможно получить аналитические решения и выделить один комплекс, характеризующий эффективность трехслойного материала. При оценке эффективности применения углепластиковых материалов в трехслойных конструкциях будем поступать следующим образом.

Трехслойную углепластиковую конструкцию будем сравнивать с аналогичной трехслойной конструкцией, в которой несущие слои выполнены из материала Д16, при этом габаритные размеры и расчетные нагрузки для конструкций будем выдерживать одинаковыми. В этом случае показатели нагруженности в определении эффективностей оказываются равными для конструкций из различных материалов. Сравнение эффективностей материалов определим критерием относительной эффективности $\bar{\mathcal{E}} = m_{\text{кму}}/m_{\text{Д16}}$, т. е. отношением критериев эффективности материалов углепластика и Д16. В этом случае критерий относительной эффективности $\bar{\mathcal{E}}$ будет показывать, во сколько раз конструкция из материала Д16 тяжелее, чем аналогичная конструкция из углепластика (или во сколько раз применение углепластика эффективней в весовом отношении, чем применение материала Д16).

Расчеты по определению критических нагрузок для панелей, нагруженных внешним давлением p и осевыми погонными сжимающими нагрузками $pR/2$, проводились по программе [42]. Определение разрушающих нагрузок выполнялось с использованием методики (см. § 2.4). Результаты расчета представлены на рис. 5.18. Сплошной линией показана зависимость критического давления от угла армирования φ для данной структуры обшивок, штриховой — зависимость предельного давления по условию прочности. Из графика видно, что данная конструкция при всех вариантах несущих слоев будет разрушаться вследствие потери устойчивости. Наибольшие критические давления соответствуют углам укладки 45—60°.

Для определения относительной весовой эффективности были проведены расчеты критических нагрузок для аналогичных трехслойных панелей с обшивками из материала Д16. На рис. 5.19 показана зависимость критического давления p для трехслойных па-

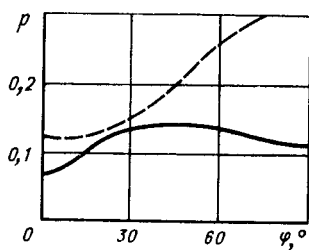


Рис. 5.18.

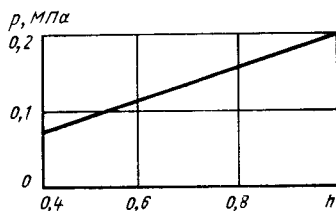


Рис. 5.19.

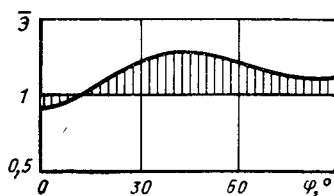


Рис. 5.20.

нелей от толщины обшивок h . Результаты расчета относительной эффективности $\bar{\varepsilon}$ использования углепластика по сравнению с материалом Д16 приведены на рис. 5.20. Как видно из графика, наибольшая относительная эффективность $\bar{\varepsilon}$ для рассматриваемой конструкции достигается при углах укладки $\varphi = 45-60^\circ$. Снижение веса конструкции при этом составляет 30—27 %.

Пример 3. Оценка критической нагрузки шарнирно опертой трехслойной оболочкой. Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку с симметричной структурой трехслойного пакета, нагруженную внешним гидростатическим давлением. Для получения приближенных оценок критической нагрузки воспользуемся основными допущениями полубезмоментной теории [3]. Предположим также, что окружные деформации и сдвиги срединной поверхности пренебрежимо малы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= k w + k v_{,\beta} = 0; \\ \gamma_{12} &= k u_{,\beta} + v_{,x} = 0, \end{aligned} \quad (5.83)$$

где u , v , w — касательные и нормальные перемещения срединной поверхности заполнителя; k — кривизна оболочки, равная $1/R$, где R — радиус оболочки; β , x — угловая и осевая координаты. Обшивки оболочки будем считать безмоментными, деформациями сдвига $\gamma_{12}^{(i)}$ в обшивках будем пренебрегать. Заполнитель оболочки примем «легким» и несжимаемым в поперечном направлении. Будем считать, что деформации поперечного сдвига в осевом направлении $\gamma_{13}^{(3)}$ значительно меньше деформаций поперечного сдвига в окружном направлении $\gamma_{23}^{(3)}$. Энергию деформации, обусловленную $\gamma_{13}^{(3)}$, так же как и энергию изгиба в осевом направлении, в расчете учитывать не будем.

Условия (5.83) позволяют ввести функцию перемещений $u = \Phi_{,x}$, $v = -k\Phi_{,\beta}$, $w = k\Phi_{,\beta\beta}$.

Распределение перемещений по слоям представим согласно гипотезе «прямой линии» (§ 5.2) и с учетом сделанных выше допущений:

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= \Phi_{,x}, \quad w^{(i)} = k\Phi_{,\beta\beta} \quad (i = 1, 2, 3); \\ v^{(i)} &= -k\Phi_{,\beta} + c^{(i)}\psi; \quad c^{(i)} = \mp h^{(3)}/2 \quad (i = 1, 2); \\ v^{(3)} &= -k\Phi_{,\beta} + z\psi, \end{aligned} \quad (5.84)$$

где ψ — угол поворота сечения (соответствует углу ψ_2 , см. § 5.2).

Для кинематической модели деформирования [см. (5.84)] деформации слоев определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(i)} &= \Phi_{,xx} \quad (i = 1, 2); \\ \varepsilon_2^{(i)} &= c^{(i)}k\psi_{,\beta} \quad (i = 1, 2); \\ \gamma_{23}^{(3)} &= k^2(\Phi_{,\beta\beta\beta} + \Phi_{,\beta}) + \psi, \end{aligned}$$

а угол поворота нормали срединной поверхности заполнителя в плоскости (β, z)

$$\vartheta_2 = -k^2(\Phi_{,\beta\beta\beta} + \Phi_{,\beta}).$$

Соотношения упругости для слоев представим в следующем виде:

$$\{\sigma^{(i)}\} = [G^{(i)}] \{\varepsilon^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.85)$$

где для обшивок

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^{(i)}\} &= \{\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}\}; \\ \{\varepsilon^{(i)}\} &= \{\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}\}; \quad [G^{(i)}] = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 & \bar{E}_1 v_{21} \\ \bar{E}_1 v_{21} & \bar{E}_2 \end{bmatrix}; \\ \bar{E}_1 &= \frac{E_1}{1 - v_{12} v_{21}} \quad (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned}$$

для заполнителя

$$\{\sigma^{(3)}\} = \{\tau_{23}^{(3)}\}; \quad \{\varepsilon^{(3)}\} = \{\gamma_{23}^{(3)}\}; \quad [G^{(3)}] = [\bar{G}_{23}^{(3)}].$$

Для получения разрешающих уравнений воспользуемся вариационным условием (3.33), которое в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left(\left(\sum_{i=1}^3 \int_{h(i)} \delta \{\varepsilon^{(i)}\}^T \{\sigma^{(i)}\} dz \right) - \delta \{\vartheta\}^T [T_0] \{\vartheta\} + \right. \\ \left. + \delta \{U\}^T p \{\vartheta\} \right) R d\beta dx = 0, \end{aligned} \quad (5.86)$$

где $\{\vartheta\} = \{\vartheta_2\}$; $[T_0] = [pR]$; $\{U\} = \{v\}$; p — внешнее гидростатическое давление. Последнее слагаемое в условии (5.86) представляет работу дополнительных нагрузок на возможных дополнительных перемещениях (см. рис. 3.13).

В случае шарнирного опирания цилиндрической оболочки примем

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_m \sum_n \Phi_{mn} \sin \bar{m}x \sin n\beta; \\ \Psi &= \sum_m \sum_n \Psi_{mn} \sin \bar{m}x \cos n\beta, \end{aligned}$$

где $\bar{m} = m\pi/l$; l — длина оболочки; m — число полуволн в осевом направлении; n — число волн в окружном направлении.

В силу симметрии соотношений упругости (5.85) условие (5.86) можно рассматривать для отдельной гармоники волнообразования. Кроме того, поскольку интегрирование (5.86) по координатам x , β для каждого слагаемого дает одинаковый сомножитель $\pi l/2$, то можно выполнить все операции лишь для амплитудных значений. Воспользуемся этим обстоятельством и представим все необходимые соотношения в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} \{e_{mn}^{(i)}\} &= [B_{mn}^{(i)}] \{q_{mn}\} \quad (i = 1, 2, 3); \\ \{\vartheta_{mn}\} &= [R_{mn}] \{q_{mn}\}; \\ \{U_{mn}\} &= [N_{mn}] \{q_{mn}\}, \end{aligned}$$

где

$$[B_{mn}^{(i)}] = \begin{bmatrix} -\bar{m}^2 & 0 \\ 0 & -knc^{(i)} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2); \quad [B_{mn}^{(3)}] = [k^2(n - n^3) \quad 1];$$

$$[R_{mn}] = [k^2(n^3 - n) \quad 0]; \quad [N_{mn}] = [-kn \quad 0].$$

Затем согласно условию (5.86) получим обычную формулировку задачи на собственные значения:

$$([K_{mn}] - p[S_{mn}])\{q_{mn}\} = 0, \quad (5.87)$$

где

$$[K_{mn}] = \sum_{i=1}^3 [K_{mn}^{(i)}]; \quad [K_{mn}^{(i)}] = \int_{h^{(i)}} [B_{mn}^{(i)}]^T [G^{(i)}] [B_{mn}^{(i)}] dz;$$

$$[S_{mn}] = R[R_{mn}]^T [R_{mn}] - [N_{mn}]^T [R_{mn}].$$

В развернутом виде матрица системы (5.87) выглядит так:

$$\begin{bmatrix} B_1 \bar{m}^4 + B_{23} k^4 n^2 (n^2 - 1)^2 - & -B_{23} k^2 n (n^2 - 1) \\ -p k^3 n^4 (n^2 - 1) & \\ -B_{23} k^2 n (n^2 - 1) & D_2 k^2 n^2 + B_{23} \end{bmatrix}, \quad (5.88)$$

где

$$B_1 = 2\bar{E}_1 h; \quad B_{23} = G_{23} H; \quad D_2 = \frac{1}{2} \bar{E}_2 h H^2; \quad h = h^{(1)} = h^{(2)}; \quad H = h^{(3)}.$$

Коэффициенты B_1 , B_{23} представляют жесткости на растяжение в осевом направлении и на сдвиг; коэффициент D_2 определяет жесткость трехслойного пакета на изгиб в окружном направлении.

Приравняв определитель матрицы (5.88) нулю, положив $m = 1$ и, перейдя к безразмерному виду, получим собственные значения параметра давления $\bar{p}$ в зависимости от числа волн в окружном направлении:

$$\bar{p} = n_0^8 \frac{1}{n^4 (n^2 - 1)} + \frac{3(n^2 - 1)}{\frac{3}{\gamma} n^2 + 1}, \quad (5.89)$$

где

$$\bar{p} = p \frac{3R^3}{D_2}; \quad \gamma = \frac{3B_{23}R^2}{D_2};$$

$$n_0^2 = \pi \left(\frac{R}{l} \right) \left(\frac{B_1}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_2}{3R^3} \right)^{-1/4}.$$

Считая, что число волн n много больше единицы, можно аналитически проминимизировать выражение для $\bar{p}$ (5.89) и получить значение критического давления

$$p_{кр} = p_0 \left[\frac{1}{4t^3} + \frac{3}{4(2\alpha + 1/t)} \right], \quad (5.90)$$

где

$$t = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}; \quad \alpha = \frac{3}{2} \frac{n_0^2}{\gamma};$$

$$p_0 = 4\pi \left(\frac{R}{l} \right) \left(\frac{B_1}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_2}{3R^3} \right)^{3/4}.$$

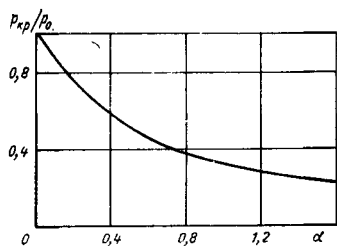


Рис. 5.21.

Число волн, образующихся при потере устойчивости, $n_{кр} = \sqrt{i} n_0$. Как видно из представленных выше соотношений, значения p_0 и n_0 равны критической нагрузке и числу волн, получающихся по формулам Папковича [3]. Стоящий сомножитель при p_0 в выражении для критического давления (5.90) характеризует податливость оболочки на поперечный сдвиг. На рис. 5.21 показан график зависимости отношения $p_{кр}/p_0$ от параметра α .

Пример 4. Численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии трехслойной конструкции. Конструкция, нагруженная внешним равномерным давлением p , состоит из двух трехслойных оболочек конической и цилиндрической формы и двух шпангоутов — торцового и промежуточного (рис. 5.22). Нижний край оболочки жестко зашпелен. Геометрические размеры оболочек принимались равными: $R_1 = 450$ мм, $R_2 = 600$ мм, $L = 800$ мм, $\theta = 70^\circ$. Каждый несущий слой трехслойного пакета состоял из пяти слоев однонаправленного композиционного материала, уложенного по следующей схеме: $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ (углы укладки отсчитываются от направления меридиана). Для однонаправленного слоя толщина принималась равной 0,12 мм, а упругие характеристики: $E_1 = E$, $E_2 = 0,067 E$, $G_{12} = 0,046 E$, $\nu_{12} = 0,25$. Рассматривался

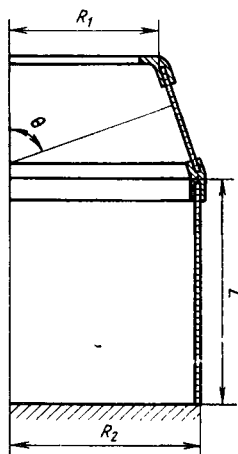


Рис. 5.22.

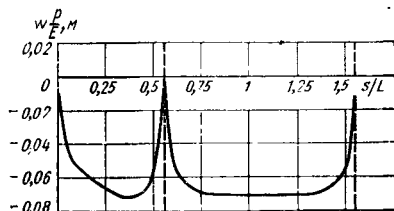


Рис. 5.23.

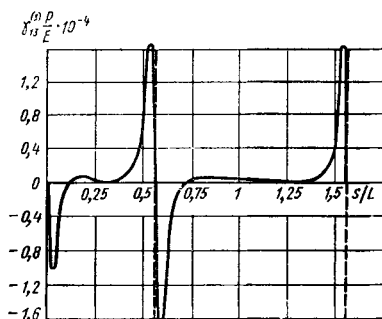


Рис. 5.24.

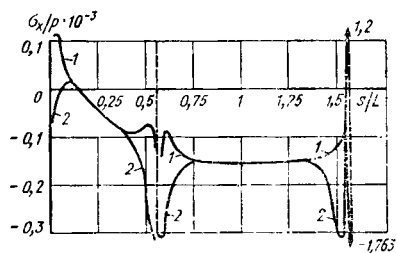


Рис. 5.25.

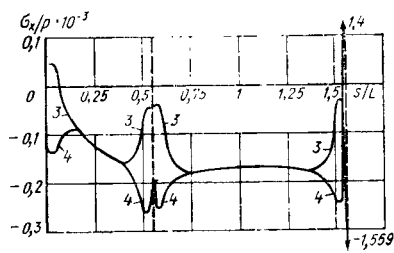


Рис. 5.26.

изотропный заполнитель с модулем упругости, равным $0,146 \cdot 10^{-3} E$ и коэффициентом Пуассона, равным 0,22. Толщина слоя заполнителя составляла 20 мм. Модуль упругости материала шпангоутов равнялся $0,51E$. Геометрические характеристики соответственно торцового (и промежуточного) шпангоутов принимались равными: $J_1 = 3,84 \cdot 10^4$ ($4,92 \cdot 10^4$) мм⁴; $J_3 = 3,21 \cdot 10^3$ ($6,07 \cdot 10^4$) мм⁴, $J_{13} = -2,66 \cdot 10^3$; (0) мм⁴, $J_h = 7 \cdot 10^4$ ($1,1 \cdot 10^5$) мм⁴, $F = 6,48 \cdot 10^2$ ($8,1 \times 10^2$) мм².

Расчет проводился с использованием гипотезы ломаной линии (§ 5.2). На рис. 5.23—5.26 представлены графики изменения нормального прогиба, деформаций поперечного сдвига и продольных напряжений в обшивках по длине конструкции. Кривые 1, 4 соответствуют внутренней и наружной поверхностям трехслойного пакета, кривые 2, 3 — поверхностям внутренней и внешней обшивок, примыкающих к слою заполнителя. Как видно из графиков, вблизи шпангоутов и заделки имеют место ярко выраженные краевые эффекты.

Приложения

1. Программа ААА для расчета диаграмм деформирования и условий разрушения многослойных полимерных композиционных материалов при плоском напряженном состоянии

Назначение программы. Программа предназначена для количественного описания процесса деформирования и разрушения многослойных композиционных материалов (КМ) с полимерным связующим (стеклопластики, углепластики, органопластики и т. д.) при плоском напряженном состоянии.

Программа выполняет расчеты: диаграмм одноосного растяжения (сжатия) многослойного материала; диаграмм деформирования материала при чистом сдвиге; диаграмм деформирования при заданном соотношении главных средних напряжений, приложенных к многослойному материалу; заданного числа диаграмм деформирования для различных «лучей нагружения» с целью построения предельной поверхности многослойного материала.

Информация, получаемая в результате работы программы, позволяет определить приведенные упругие характеристики многослойных КМ; протяженность (область) упругого деформирования материала; параметры напряженно-деформированного состояния (НДС), соответствующие началу растрескивания полимерного связующего в одном или нескольких слоях материала; причины трещинообразования в связующем каждого из слоев; параметры НДС, соответствующие исчерпанию несущей способности многослойного КМ.

Варианты использования программы ААА следующие: выбор рациональных структур КМ для заданных случаев нагружения; прогнозирование механических характеристик, характера деформирования и разрушения новых многослойных КМ; оценка возможных изменений механических характеристик многослойных КМ при изменении свойств однонаправленного слоя; исследование влияния технологических отклонений параметров КМ (углов укладки монослоев, их толщин и характеристик) на свойства КМ; включение программы в системы расчета и проектирования конструкций из КМ.

Используемый алгоритм. Программа ААА реализует процесс пошагового увеличения вектора $\{\sigma_{xy}\}$; определяется вектор средних деформаций пакета $\{\epsilon_{xy}\}$ и соответствующие ему векторы $\{\epsilon_{12}\}^{(i)}$ и $\{\epsilon_{12}\}^{(i)}$; параметры НДС i -го слоя используются для идентификации состояния (одного из возможных восьми), в котором этот слой находится. Затем делается следующий шаг по нагрузке (см. § 2.4).

Процесс нагружения прекращается, если хотя бы в одном слое достигнуты предельные напряжения $\sigma_1 = F_{+1}$, $\sigma_1 = F_{-1}$, или (и) $\sigma_2 = F_{-2}$. Процесс нагружения прекращается также тогда, когда матрица $[G'']$ теряет положительную определенность и процесс деформирования многослойного КМ становится неустойчивым (деформации возрастают без увеличения нагрузки). Программа учитывает изменение начальных углов армирования при нагружении (структурную нелинейность).

Язык программы — ФОРТРАН. Программа предназначена для использования на всех ЭВМ Единой Серии (ЕС).

Состав исходных данных. В табл. 1п приведен перечень идентификаторов в программе, используемых при задании исходной информации

Пример подготовки исходных данных. Требуется провести подробное исследование поведения в первом квадранте (предельная поверхность, диаграммы деформирования) гибридного КМ, содержащего слой углепластика общей толщиной 1 мм, уложенные под углом 90° к оси x , 1 слой стеклопластика, расположенные под углами $\varphi = \pm 30^\circ$, суммарная толщина которых 1,5 мм. Характеристики однонаправленного углепластика $E_1 = 160\,000$ МПа, $E_2 = 7000$ МПа, $G_{12} = 4700$ МПа, $\nu_{12} = 0.25$, $F_{+1} = 800$ МПа, $F_{-1} = 360$ МПа, $F_{+2} = 10$ МПа, $F_{-2} = 80$ МПа, $F_{12} = 30$ МПа. Характеристики стеклопластика $E_1 = 56\,000$ МПа, $E_2 = 7000$ МПа, $G_{12} = 5000$ МПа, $\nu_{12} = 0.26$, $F_{+1} = 1500$ МПа, $F_{-1} = -600$ МПа, $F_{+2} = 30$ МПа, $F_{-2} = -160$ МПа, $F_{12} = 45$ МПа.

Дадим в первом квадранте 20 лучей нагружения с шагом по напряжениям 2,5 МПа (в четырех квадрантах было бы 80 лучей). Информацию будем выводить через 40 шагов по нагрузке.

Идентификатор в программе	Содержание идентификатора	Примечание
NPROB	Число последовательно решаемых самостоятельных задач. Для каждой из задач вводится свой пакет исходных данных	Не путать с числом «лучей нагружения»
NPLY	Число слоев в многослойном КМ (не более 9)	Указывается число слоев, отличающихся углом армирования и (или) жесткостями и (или) прочностными характеристиками. Толщины одинаковых в этом смысле слоев суммируются, и все они считаются одним слоем
NTP	Тип задачи: 0 — расчет одной диаграммы деформирования; 1 — расчет NF диаграмм деформирования для построения предельной поверхности	
JW	Шаг печати (указывает, через сколько шагов по нагрузке производится печать)	
NF	Число лучей нагружения на плоскости (σ_x , σ_y)	Обычно достаточно 16—40 лучей
NPF	Число реализуемых лучей нагружения. NPF не должно превышать число NF	Пример определения NPF. Если необходимо построить линии предельных состояний только в первом квадранте плоскости (σ_x , σ_y), то $NPF = NF/4$
STEP (3)	Шаг по нагрузке. Содержит ($\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, $\Delta\tau_{xy}$) в случае NTP = 0. При NTP = 1 структура массива ($\Delta\sigma_x$, 0, 0)	Рекомендуется выбирать $\Delta\sigma \approx (1/4 + 1/20) F_{min}$. Полезно, чтобы произведение $\Delta\sigma \cdot JW$ давало целое число, удобное при построении диаграмм деформирования
FT (2, NPLY)	Массив углов армирования и толщин для каждого слоя	а) См. примечание к идентификатору NPLY; б) может задаваться относительная толщина слоя в пакете; в) значения углов — в градусах
NST (NPLY)	Массив идентификации слоев по упругим и прочностным характеристикам	Пример определения NST. В 6-слойном КМ 1-й, 3-й и 5-й слои выполнены из одного материала; 2-й и 4-й — из другого материала, а 6-й — из третьего. Массив NST (6) имеет вид 1 2 1 2 1 6
EP (4, ...)	Массив жесткостных характеристик однонаправленного материала. Содержит последовательно значения E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12}	Всего в КМ три «оригинальных» материала (отличающиеся упругими и (или) прочностными характеристиками)
FLT (5, ...)	Массив прочностных характеристик однонаправленного материала. Содержит последовательно F_{+1} , F_{-1} , F_{+2} , F_{-2} , F_{12} Для каждого I-го оригинального слоя вводится сначала массив EP (4, I), а затем FLT (5, I), далее так же для следующего оригинального слоя	Вводится только для «оригинальных» слоев Может вводиться абсолютное значение пределов прочности. Знаки программа формирует автоматически

Примечание. Все целые числа вводятся по формату I4, действительные — по формату E 13.4.

Идентификатор	Значение	Идентификатор	Значение
NPLY	3		30,0; 0,75
NTP	1		—30,0; 0,75
JW	40	NST (3)	1; 2; 2
NF	80	EP (4, 1)	160 000; 7 000; 4 700; 0,25
NPF	20	FLT (5, 1)	800; 360; 10; 80; 30
STEP (3)	2,5; 0,0; 0,0	EP (4, 2)	56 000; 7 000; 5 000; 0,26
FT (2, 3)	90,0; 1,0	FLT (5, 2)	1 500; 600; 30; 160; 45

Вводимая информация приведена в табл. 2п. Она переносится на перфокарты в соответствии с форматами программы ААА.

Порядок распечатки исходных данных и результатов расчета. При выводе результатов расчета в программе приняты следующие обозначения

TX — σ_x TY — σ_y TXY — τ_{xy}
 EX — ϵ_x EY — ϵ_y EXY — γ_{xy}
 T1 — σ_1 T2 — σ_2 T12 — τ_{12}
 E1 — ϵ_1 E2 — ϵ_2 E12 — γ_{12}

Тексты сообщений, выдаваемых программой, приведены в табл. 3п.

Таблица 3п

Текст сообщения	Расшифровка сообщения
«Диаграмма деформирования»	Сообщение разделяет информацию, относящуюся к разным лучам нагружения
«Предельная поверхность»	Тип задачи — расчет данных, необходимых для построения предельной поверхности. Введено значение NTP = 1
«Число лучей нагружения = ...»	Не требует комментария
«Число слоев в пакете = ...»	То же
«Структура пакета слоев»	»
«Упругие характеристики»	В распечатке ниже этого сообщения даны упругие характеристики слоев в координатах $1^{(i)}, 2^{(i)}$ в следующем порядке: $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$
«Прочностные характеристики»	В распечатке ниже этого сообщения приведены прочностные характеристики слоев в следующем порядке: $F_{+1}, F_{-1}, F_{+2}, F_{-2}, F_{12}$
«Нагружение N = ...»	Печатается номер луча нагружения. Первое нагружение ($\sigma_y = 0$) имеет N = 0. В этой же строке далее печатается шаг по нагрузке, соответствующий этому лучу
«Шаг по нагрузке»	Под этим сообщением рассчитывается шаг по нагрузке, заданный при вводе массивом STEP (3)
«Разрушение 1-го слоя при растяжении вдоль волокон»	В 1-м слое напряжение σ_1 достигло величины F_{+1} . Нагружение остановлено. В распечатке под сообщением даны соответствующие значения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$
«Разрушение 1-го слоя при сжатии вдоль волокон»	В 1-м слое напряжение σ_1 достигло величины F_{-1}
«Разрушение 1-го слоя при сжатии поперек волокон»	В 1-м слое напряжение σ_2 достигло величины F_{-2}
«Потеря сплошности 1-го слоя при растяжении поперек волокон»	В 1-м слое напряжение σ_2 достигло величины F_{+2} . Нагружение продолжается. В распечатке под сообщением даны соответствующие значения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$
«Потеря сплошности 1-го слоя при сдвиге»	В 1-м слое начинается растрескивание связующего, вызванное сдвиговыми напряжениями $ \tau_{12} = F_{12}$. Нагружение продолжается. В распечатке выведены соответствующие средние напряжения и деформации в пакете
«Число итераций более 5»	Итерационный процесс определения действительного состояния слоев затягивается. Проверить исходные данные. Уменьшить шаг нагружения
«Погрешность ...»	Выводится значение модуля нормированного вектора невязки по напряжениям, если он превосходит принятое в программе значение 0,01
«Далее деформирование неустойчиво»	Потеряна положительная определенность матрицы жесткости КМ. Деформации увеличиваются неограниченно при уровне нагрузки, зафиксированном в предыдущем сообщении в распечатке

Текст программы *

```

C   PROGRAM AAA
C   ПРОГРАММА ДЛЯ РАСЧЕТА ДИАГРАММ
C   ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСЛОВИЙ РАЗРУШЕНИЯ
C   МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ
C   КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ
C   ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ
      DIMENSION STEP(3),EP(4,9),
      *FLT(5,9),ES(4,9),FFF(9),
      *FT(2,9),NST(9),EST(10,9)
      COMMON AMD
      NPR=0
      READ(1,1)NPROB
100  READ(1, 1)NPLY,NTP,JW,NF
      READ(1,1)NPF
      PRINT 20
      IF(NTP.EQ.0)GO TO 98
      PRINT 4
      PRINT 5, NF
      F=6.283185/NF
      NF=NF-1
98   CONTINUE
      PRINT 6, NPLY
      READ(1,2) STEP
      PRINT 61
      PRINT 10, STEP
      PRINT 11
      READ(1,12)((FT(I,J), I=1,2),
      *J=1, NPLY)
      PRINT 14,(J,(FT(I,J), I=1,
      *2),J=1,NPLY)
      DO 99 I=1, NPLY
99    FT(1,I)=FT(1,I)/57.2957
      DO 96 J=1, NPLY
96    FFF(J)=FT(1,J)
      READ(1,1)(NST(I),I=1,NPLY)
      DO 105J=1,NPLY
      JM=NST(J)
      IF(J.EQ.JM)GO TO 103
      DO 101I=1,4
101   EP(I,J)=EP(I, JM)
      DO 102 I=1,5
102   FLT(I,J)=FLT(I,JM)
      GO TO 104
103   READ(1,2)(EP(I,J),I=1,4)
      READ(1,2) (FLT(I,J),I=1,5)
104   FLT(2,J)=-ABS(FLT(2,J))
105   FLT(4,J)=-ABS(FLT(4,J))
      PRINT 13
      PRINT 16,(J,(EP(I,J),I=1,
      *4),J=1,NPLY)
      PRINT 15
      PRINT 17,(J,(FLT(I,J),I=1,
      *5),J=1,NPLY)
      PP=STEP(1)
      NN=-1

```

* Программа составлена А. И. Таракановым и П. А.

```

AMD=0.
DO 97 J=1,3
97 IF(STEP(J).NE.0.)
* AMD=AMD+STEP(J)* * 2
AMD=SQRT(AMD)
106 DO 111 J=1,NPLY
NST(J)=1
FT(1,J)=FFF(J)
DO 107 I=1,10
107 EST(I,J)=0.
DO 108 I=1,4
108 ES(I,J)=EP(I,J)
111 CONTINUE
PRINT 18
NN=NN+1
PRINT 3
IE(NTP.EQ.0)GO TO 109
FF=F*FLOAT(NN)
STEP(1)=PP*COS(FF)
STEP(2)=PP*SIN(FF)
PRINT 19, NN,STEP
CALL NDEFM(NPLY,EP,ES,FLT,
* STEP,FT,NST,EST,NTP,JW)
IF(NN.GE.NF)GO TO 110
IF(NN.GE.NPF)GO TO 110
GO TO 106
109 CALL NDEFM(NPLY,EP,ES,FLT,
* STEP,FT,NST,EST,NTP,JW)
110 NPR=NPR+1
IF(NPR.LT.NPROB)GO TO 100
STOP
1 FORMAT(20I4)
2 FORMAT(5E13.14)
4 FORMAT(40X,'ПРЕДЕЛЬНАЯ'
* 'ПОВЕРХНОСТЬ'/40X,25('—'))
3 FORMAT(40X,'ДИАГРАММА ДЕ',
* 'ФОРМИРОВАНИЯ'/40X,25('—'))
5 FORMAT(10X,'ЧИСЛО ЛУЧЕЙ'
* 'НАГРУЖЕНИЯ=',I4)
6 FORMAT(10X,'ЧИСЛО СЛОЕВ'
* ' В ПАКЕТЕ=',I4)
10 FORMAT(4G15.3)
11 FORMAT(/5X,'СТРУКТУРА ПА',
* 'КЕТА СЛОЕВ'/3X,'N',5X,
* 'УГОЛ АРМИР.',2X,'ТОЛЩИНА')
12 FORMAT(2E13.4)
13 FORMAT(/30X,'УПРУГИЕ ХА'
* 'РАКТЕРИСТИКИ')
14 FORMAT(I4,2G15.3)
15 FORMAT(/30X,'ПРОЧНОСТНЫЕ ',
* 'ХАРАКТЕРИСТИКИ')
16 FORMAT(I4,4F15.3)
17 FORMAT(I4,5G15.3)
18 FORMAT(120(' '))
19 FORMAT(30X,'НАГРУЖЕНИЕ N=',
* I4,2X,'TX-',G11.4,'TY=',
* G11.4,'TXY=',G11.4)
20 FORMAT(/////120(' '))
61 FORMAT(10X,'ШАГ ПО НАГРУЗКЕ')
END

```

```

SUBROUTINE NDEFMR(NPLY,EP,
* ES,FLT,STEP,FT,NST,
* EST,NTP,JW)
  DIMENSION STEP(3),EP(4,9),
* FLT(5,9),ES(4,9),FT(2,9),
* NST(9),EST(10,9),GG(3),
* DD(3),SE(3),D(3),SS(3),T(3),
* TT(3),TTT(3),ST(3),STT(3),
* FI(40)
  COMMON AMD
  NS=1
  IV=0
  IT=0
  DO 299 I=1,3
    ST(I)=0.0
    T(I)=0.0
    GG(I)=STEP(I)
299 SE(I)=0.0
300 CONTINUE
  B11=0.0
  B12=0.0
  B22=0.0
  B33=0.0
  H=0.0
  DO 301 I=1,NPLY
    U=1.-ES(4,I)*2*ES(2,I)/
* ES(1,I)
    E1=ES(1,I)/U
    E2=ES(2,I)/U
    E3=E2*ES(4,I)
    S=SIN(FT(1,I))
    S=S*S
    C=1.-S
    CS=C*S
    S=S*S
    C=C*C
    E4=(E3+ES(3,I)*2.)*2.*CS
    B11=(E1*C+E4+E2*S)*FT(2,I)+
* B11
    B22=(E1*S+E4+E2*C)*FT(2,I)+
* B22
    E4=(E1+E2)*CS-E4
    B12=B12+(E3+E4)*FT(2,I)
    B33=B33+(ES(3,I)+E4)*FT(2,I)
    H=H+FT(2,I)
301 CONTINUE
  EN=B12/B22
  EM=B12/B11
  EY=(B22-B12*EM)/H
  EX=(B11-B12*EN)/H
  EPS=0.01*EP(3,1)
  IF(EX.LE.EPS)GO TO 350
  IF(EY.LE.EPS)GO TO 350
  IF((B33/H).LE.EPS)GO TO 350
  DD(1)=(GG(1)=EN*GG(2))/EX
  DD(2)=(GG(2)-EM*GG(1))/EY
  DD(3)=GG(3)/B33*H
  DO 310 J=1,3
    SE(J)=SE(J)+DD(J)
310 TTT(J)=0.

```

```

DO 320 J=1, NPLY
S=SIN(FT(1,J))
C=COS(FT(1,J))
CS=C * S
C=C * C
S=S * S
D(1)=DD(1) * C+DD(2) * S+DD(3) * CS
D(2)=DD(1) * S+DD(2) * C-DD(3) * CS
D(3)=(DD(2)-DD(1)) * 2. * CS+
* DD(3) * (C-S)
FT(1,J)=FT(1,J) * D(3)/2.
FI(J)=FT(1,J) * 57.2957
UN=ES(4,J) * ES(2,J)/ES(1,J)
AD=1.-UN * ES(4,J)
SS(1)=ES(1,J)/AD * (D(1)+D(2) *
* UN)
SS(2)=ES(2,J)/AD * (D(2)+D(1) *
* ES(4,J))
SS(3)=ES(3,J) * D(3)
DO 321 I=1,3
EST(I,J)=EST(I,J)+D(I)
321 EST(I+7,J)=EST(I+7,J)+SS(I)
IF(EST(8,J).LT.FLT(1,J))
* GO TO 210
D1=1.-(EST(8,J)-FLT(1,J))/
* SS(1)
DO 323 I=1,3
ST(I)=STT(I)+DD(I) * D1
323 TT(I)=T(I)+GG(I) * D1
PRINT 1,J
PRINT 2,TT,ST
RETURN
210 IF(EST(8,J).GT.FLT(2,J))
* GO TO 211
PRINT 3,J
D1=1.-(EST(8,J)-FLT(2,J))/
* SS(1)
DO 324 I=1,3
ST(I)=STT(I)+DD(I) * D1
324 TT(I)=T(I)+GG(I) * D1
PRINT 2, TT, ST
RETURN
211 IF(EST(9,J).GT.FLT(4,J))
* GO TO 212
PRINT 4,J
D1=1.-(EST(9,J)-FLT(4,J))/
* SS(2)
DO 325 I=1,3
ST(I)=STT(I)+DD(I) * D1
325 TT(I)=T(I)+GG(I) * D1
PRINT 2,TT,ST
RETURN
212 EE=EST(2,J)+EP(4,J) * EST(1,J)
IF(EE.GT.EST(4,J))EST(4,J)=EE
IF(ABS(EST(3,J)).GT.EST(5,J))
* EST(5,J)=ABS(EST(3,J))
IF(NST(J).NE.1)GO TO 199
IF(EST(9,J).LT.FLT(3,J))
* GO TO 198
NST(J)=3
ES(3,J)=0.

```

```

    D1=1.-(EST(9,J)-FLT(3,J))/
*SS(2)
    DO 326 I=1,3
    ST(I)=STT(I)+DD(I)*D1
326   TT(I)=T(I)+GG(I)*D1
    EST(9,J)=FLT(3,J)
    EST(10,J)=EST(10,J)+SS(3)*D1
    PRINT 5,J
    PRINT 2, TT, ST
198   IF(ABS(EST(10,J)).LT.FLT(5,
*J))GO TO 196
    D1=1.-(ABS(EST(10,J))-
*FLT(5,J))/ABS(SS(3))
    EST(10,J)=SIGN(FLT(5,J),
*EST(10,J))
    NST(J)=3
    IF(EST(9,J).LT..0)NST(J)=2
    IF(NST(J).EQ.3)EST(9,J)=
*EST(9,J)-D1*SS(2)
    PRINT 6,J
    DO 327 I=1,3
    ST(I)=STT(I)+DD(I)*D1
327   TT(I)=T(I)+GG(I)*D1
    PRINT 2,TT,ST
196   IF(EST(6,J).LT.EST(9,J))
*EST(6,J)=EST(9,J)
    IF(ABS(EST(10,J)).GT.EST(
*7,J))EST(7,J)=ABS(EST(10,J))
    GO TO 96
199   IF(EST(9,J).LT.0.)GO TO 197
    NST(J)=3
    ES(2,J)=0.
    IF(EE.LT.EST(4,J))ES(2,J)=
*EST(6,J)/(EST(4,J)-ES(4,J))
* * * 2 * EST(6,J)/ES(1,J))
    IF(EST(9,J).GT.EST(6,J))
*EST(9,J)=EST(6,J)
    GO TO 200
197   NST(J)=2
    ES(2,J)=EP(2,J)
200   ES(3,J)=0.
    IF(ABS(EST(10,J)).GT.EST(7,J))
*EST(10,J)=SIGN(EST(7,J),
*EST(10,J))
    IF(EST(5,J).LT.1.E-7)
*GO TO 96
    IF(ABS(EST(3,J)).LT.EST(5,J))
*ES(3,J)=EST(7,J)/EST(5,J)
96   CONTINUE
    TF=FT(2,J)/H
    TTT(1)=(EST(8,J)*C+EST(9,J)
* * S-EST(10,J)*CS*2.)*TF+TTT(1)
    TTT(2)=(EST(8,J)*S+EST(9,J)
* * C+EST(10,J)*CS*2.)*TF+TTT(2)
    TTT(3)=((EST(8,J)-EST(9,J))
* * CS+(C-S)*EST(10,J))*
*TF+TTT(3)
320   CONTINUE
    ERR=0.
    DO 328 I=1,3
    STT(I)=SE(I)

```

```

T(I)=TTT(I)
GG(I)=STEP(I)*FLOAT(NS)—
* TTT(I)
328 ERR=ERR+GG(I)* * 2
    ERR=SQRT(ERR)
    IF(ERR.GE.0.01)GO TO 330
    IT=0
    DO 329 I=1,3
329 GG(I)=GG(I)+STEP(I)
    IV=IV+1
    NS=NS+1
    IF(IV.LT.JW)GO TO 300
    IV=0
    PRINT 7,TTT,SE
    DO 331 J=1,NPLY
331 PRINT 8,J,(EST(I,J),I=8,10),
    * (EST(I,J),I=1,3),FI(J)
    GO TO 300
330 IT=IT+31
    IF(IT.LT.9)GO TO 300
    PRINT 9
    PRINT 10,ERR
    GO TO 370
350 PRINT 12
370 RETURN
1  FORMAT(10X,' * * * РАЗРУШЕНИЕ',
    * I4,'—ГО СЛОЯ ПРИ РАСТЯЖЕ',
    * 'НИИ ВДОЛЬ ВОЛОКОН * * *')
2  FORMAT(2X,'НАПРЯЖЕНИЯ ТХ,
    * ТУ,ТХУ',3E11.3,3X,'ДЕФОР',
    * 'МАЦИИ ЕХ,ЕУ,ЕХУ',3(2PF11.4))
3  FORMAT(10X,' * * * РАЗРУШЕНИЕ',
    * I4,'—ГО СЛОЯ ПРИ СЖАТИИ',3X,
    * 'ВДОЛЬ ВОЛОКОН * * *')
4  FORMAT(10X,' * * * РАЗРУШЕНИЕ',
    * I4,'—ГО СЛОЯ ПРИ СЖАТИИ',3X,
    * 'ПОПЕРЕК ВОЛОКОН * * *')
5  FORMAT(10X,' * * * ПОТЕРЯ СПЛЮ',
    * 'ШНОСТИ',I4,'—ГО СЛОЯ',3X,
    * 'ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ПОПЕРЕК ВО',
    * 'ЛОКОН * * *')
6  FORMAT(10X,' * * * ПОТЕРЯ СПЛЮ',
    * 'ШНОСТИ',I4,'—ГО СЛОЯ ПРИ',
    * 'СДВИГЕ * * *')
7  FORMAT(2X,'НАПРЯЖЕНИЯ ТХ,',
    * 'ТУ,ТХУ',3F11.3,3X,'ДЕФОРМ',
    * 'АЦИИ',2X,'ЕХ,ЕУ,ЕХУ',
    * 3(2PF11.4)/2X,'НАПРЯЖЕНИЯ',
    * ' В СЛОЯХ',3X,'Т1,Т2,Т12',
    * 7X,'ДЕФОРМАЦИИ Е1,Е2,Е12',
    * 10X,'УГОЛ АРМИРОВАНИЯ')
8  FORMAT(15,3F11.4,2PF11.4,
    * 2PF11.4,2PF11.4,0PF11.4)
9  FORMAT(10X,' * * * ЧИСЛО ИТЕРА',
    * 'ЦИИ БОЛЕЕ 5 * * *')
10 FORMAT(10X,' * * * ПОГРЕШНОСТЬ',
    * E11.4,' * * *')
11 FORMAT(4E13.4)
12 FORMAT(10X,' * * * ДАЛЕЕ ДЕФОР',
    * 'МИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВО * * *')
END

```

2. Описание вспомогательных программ расчета многослойных оболочек вращения

Ниже приводятся описания и тексты вспомогательных программ*, обеспечивающих вариационно-матричный способ получения канонических систем дифференциальных уравнений для решения задач статики и устойчивости и колебаний многослойных оболочек вращения; получение матриц фундаментальных решений и матриц жесткости кольцевых оболочечных элементов; формирование и решение систем алгебраических уравнений относительно неизвестных обобщенных узловых перемещений.

SUBROUTINE STMA 2 (C1, C2, S11, S22, S21, Q1, Q2, A1, NX, NY, N,

ISTB, A, P, B, D, S) — подпрограмма получения канонической системы дифференциальных уравнений (3.60). Формальные параметры: C1, C2 — соответствуют матрицам связи $[C_1]$, $[C_2]$ (3.45); S11, S22, S21 — массивы, в которых содержится информация о матрицах $[S_{11}]$, $[S_{22}]$, $[S_{21}]$ [см. (3.57)]; Q1, Q2 — одномерные массивы, передающие в программу векторы $\{N_1\}$, $\{N_2\}$ [см. (3.55), (3.58)]. A1 — параметр Ламе A ($ds = A d\alpha$). NX, NY, N — целые числа, указывающие размерности векторов $\{X\}$, $\{Y\}$ и число уравнений в канонической системе ($N = 2NX$). ISTB — управляющий параметр: ISTB = 1 — для решения задач статики, ISTB = 2 — для задач устойчивости, ISTB = 3 — для задач колебаний; A — массив, содержащий матрицу $[A]$ разрешающей системы; P — массив, содержащий вектор свободных членов (для задачи статики); в массивах B, D, S после работы подпрограммы находятся вспомогательные матрицы $[b]$, $[d]$, $[S_{22}]^{-1}$.

Поскольку дальнейшее интегрирование осуществляется по параметру α , то в массивах A, P содержатся матрица разрешающей системы и вектор свободных членов, умноженные на параметр Ламе A (A1). Все массивы и переменная A1 должны быть описаны в вызывающей программе с двойной точностью.

Вызываемые подпрограммы: MATDP, MTM, MMT, MUM, SKM.

SUBROUTINE API (D, A, B, L) — подпрограмма вычисления матриц аппроксимирующего полинома $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$, $[B_4]$ (3.71) по известным матрицам в узловых точках $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$, $[A_4]$.

Формальные параметры: D — длина участка, соответствует $\Delta = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ ($i = 1, 2, 3$); A — одномерный массив, в котором последовательно расположены по столбцам матрицы $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$, $[A_4]$; B — одномерный массив, в котором после работы программы располагаются по столбцам матрицы $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$, $[B_4]$; L — задает число элементов в отдельной матрице $[A_i]$ (или $[B_i]$).

SUBROUTINE MFR1 (A, B, BV, QQ, N, M, ISTB, Y, Y1, Y2, Y3, Y4, Z, S, Q) — подпрограмма вычисления матрицы фундаментальных решений и вектора частных решений (3.75). Формальные параметры: A, B — начальная и конечная координаты элемента; BV — одномерный массив $(4N^2)$, в котором располагаются по столбцам матрицы аппроксимирующего полинома $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$, $[B_4]$ (с помощью указанных матриц в любой точке элемента восстанавливается значение коэффициентов матрицы разрешающей системы (3.71)); QQ — одномерный массив $(4M)$, в котором последовательно располагаются по столбцам векторы аппроксимирующего полинома для вектора свободных членов; N — указывает порядок системы дифференциальных уравнений; M — число ненулевых компонент вектора свободных членов для решения задач статики; при $\{N_1\} \neq 0$, $\{N_2\} \neq 0$ задается $M = N$; при $\{N_1\} = 0$, $\{N_2\} \neq 0$, $M = N/2$. При решении задачи устойчивости и колебаний M автоматически задается равным единице и обнуляется вектор свободных членов; ISTB = 1 — для задачи статики, ISTB $\neq 1$ — для устойчивости и колебаний; Y — одномерный массив $(N^2 + N)$, в котором после работы подпрограммы располагаются по столбцам матрицы фундаментальных решений и вектор частного решения; Y1, Y2, Y3, Y4, Z — рабочие массивы длиной $(N^2 + N)$ каждый; S, Q — рабочие массивы длиной (N^2) и (M). Через блок COMMON/RUN/ передается переменная KIN, определяющая число шагов интегрирования. Интегрирование на элементе выполняется методом Рунге—Кутты по четырехточечной схеме с постоянным шагом. Вызываемые подпрограммы INTPI, DERVI.

* Программы разработаны Б. Г. Поповым и Э. В. Раман.

SUBROUTINE INTP1 (X, A, B, BB, QQ, L, M, S, Q) — подпрограмма вычисления матрицы разрешающей системы и вектора свободных членов для текущего значения аргумента s с использованием интерполяционной зависимости (3.71).

Формальные параметры: X — текущее значение аргумента s из интервала интерполяции (s_2, s_3); A, B — координаты отрезка интерполяции, соответствующие значениям s_2, s_3 ; BB, QQ, M — описаны ранее для подпрограммы MFR1; L = N^2 (N — порядок разрешающей системы); S (L), Q (M) — массивы, в которых после работы подпрограммы размещаются матрица разрешающей системы (по столбцам) и вектор свободных членов, вычисленные для текущего аргумента s .

SUBROUTINE DERV1 (DY, S, Y, Q, N1, N, M) — подпрограмма вычисления производных для процедур интегрирования матрицы фундаментальных решений и частного решения. Формальные параметры: DY — вектор производных ($N^2 + N$); S — матрица разрешающей системы (N^2); Y — текущий вектор состояния для всех решаемых задач Коши ($N^2 + N$); Q — вектор свободных членов (M); N1 — число одновременно интегрируемых задач Коши; N — порядок системы дифференциальных уравнений; M — число ненулевых компонент в векторе свободных членов.

SUBROUTINE STF1 (Y, N, N1, ISTB, S, R1, R2, M) — подпрограмма получения матриц жесткости элементов и векторов приведенных к узлам нагрузок. Формальные параметры: Y — массив, в котором располагаются матрица фундаментальных решений и вектор частного решения (для статики); N — порядок системы дифференциальных уравнений; N1 = N для задач устойчивости и колебаний, N1 = $N + 1$ — для задачи статики; ISTB = 1 — для задачи статики; S — массив, в котором после работы подпрограммы располагаются по столбцам матрица жесткости элемента и вектор приведенных к узлам нагрузок; R1 (M×M), R2 (M×M) — рабочие массивы; M = N/2. Вызываемая подпрограмма MATDP.

SUBROUTINE FORM2 (SK, R, ST, P, LIN, N) — подпрограмма формирования матрицы жесткости конструкции и вектора узловых сил (сборка элементов). Формальные параметры: SK — массив коэффициентов матрицы жесткости конструкции (NB×NZ); R — массив коэффициентов приведенных узловых сил конструкции (NZ); ST — рабочий массив (N×N) для считывания коэффициентов матрицы жесткости элементов; P — рабочий массив (N) для считывания коэффициентов приведенных узловых сил элемента; LIN — рабочий массив (N) для считывания номеров активных номеров степеней свободы элемента в глобальной нумерации (соответствует вектору $\{N\}^e$ (3.95); N — максимальное число степеней свободы элемента. Через область COMMON/SOL/NB, NZ, NELS передаются значения: NB — полуширина ленты, NZ — число уравнений (суммарное число активных степеней свободы), NELS — суммарное число элементов в конструкции. Внешняя память организована на магнитном диске в виде файла последовательного доступа. Отдельная порция записи содержит: K, LIN, ST, P, где K — число степеней свободы элемента, матрица ST записана по строкам. При формировании массива SK элемент с номером строки i и номером столбца j (в глобальной нумерации) занимает место m в одномерном массиве: $m = b(i - 1) + k$, где $k = j - i + 1$, $b = NB$.

SUBROUTINE SOLV1 (SK, R) — подпрограмма решения симметричной ленточной системы алгебраических уравнений методом Гаусса. Формальные параметры: SK — массив коэффициентов матрицы жесткости (верхняя половина ленты, сформированная в подпрограмме FORM2, упорядоченная по строкам); R — вектор узловых сил. Переменные области COMMON описаны в подпрограмме FORM2. После работы подпрограммы решение располагается в массиве R.

SUBROUTINE MUM (A, B, C, M, N, L) — подпрограмма перемножения двух матриц. Результатом работы будет матрица $C = A \times B$. Переменные M, N, L определяют размеры матриц: A (M×N), B (N×L), C (M×L). Для сокращения операций с индексами матрицы представлены в одномерных массивах.

SUBROUTINE MTM (A, B, C, M, N, L) — подпрограмма перемножения двух матриц, первая из которых транспонирована. Результатом будет матрица $C = A^T \times B$. Переменные M, N, L определяют размеры матриц: A (M×N), B (M×L), C (N, L).

SUBROUTINE MMT (A, B, C, M, N, L) — подпрограмма перемножения двух матриц, вторая из которых транспонирована. Результатом будет матрица $C = A * B^T$. Переменные M, N, L определяют размеры матриц: A (M×N), B (L×N), C (M×L).

SUBROUTINE SKM (A, S, M, N) — программа умножения матрицы на скаляр. A — исходная и результирующая матрица; S — скалярная величина; M, N — целые числа, определяющие размер матрицы.

SUBROUTINE MATDP (A, E, N) — подпрограмма обращения матриц. A — исходная матрица; E — обратная матрица; N — размер квадратных матриц. Обращение производится методом Гаусса, без выбора главного элемента. В случае нулевого диагонального коэффициента в матрице A выдается сообщение о сбое.

Тексты подпрограмм

```

SUBROUTINE STMA2(C1,C2,S11,
* S22,S21,Q1,Q2,A1,NX,NY,N,
* ISTB,A,P,B,D,S)
  DIMENSION C1(NX,NX),C2(NX,
* NY),S11(NX,NX),S22(NY,NY),
* S21(NY,NX),Q1(NX),Q2(NY),
* A(N,N),P(N),B(NX,NY),
* D(NX,NY),S(NY,NY)
  DOUBLE PRECISION C1,C2,S11,
* S22,S21,Q1,Q2,A1,A,P,B,D,S
  DO 1 I=1,NX
    IN=I+NX
    DO 1 J=1,NX
      A(I,J)=C1(I,J)
1    A(IN,J)=S11(I,J)
      CALL MATDP(S22,S,NY)
      CALL MUM(C2,S,B,NX,NY,NY)
      CALL MTM(S21,S,D,NY,NX,NY)
      CALL MMT(B,C2,C1,NX,NY,NX)
      CALL MUM(B,S21,S11,NX,NY,NX)
      DO 2 J=1,NX
        JN=J+NX
        DO 2 I=1,NX
          IN=I+NX
          A(I,J)=A(I,J)-S11(I,J)
          A(JN,IN)=-A(I,J)
2        A(I,JN)=C1(I,J)
          CALL MUM(D,S21,C1,NX,NY,NX)
          DO 3 I=1,NX
            IN=I+NX
            DO 3 J=1,NX
3              A(IN,J)=A(IN,J)-C1(I,J)
              CALL SKM(A,A1,N,N)
              IF(ISTB.NE.1)RETURN
              CALL MUM(B,Q2,P,NX,NY,1)
              I=NX+1
              CALL MUM(D,Q2,P(I),NX,NY,1)
              DO 4 I=1,NX
                IN=I+NX
2              P(IN)=P(IN)-Q1(I)
              CALL SKM(P,A1,N,1)
              RETURN
            END
          SUBROUTINE API (D, A, B, I.)
            DIMENSION A (1), B (1)
            DOUBLE PRECISION D, A, B,
* D2,D3,A2,A3
            D2=D * D * 2.
            D3=D2 * D
            DO 1 I1=1,L
              I2=I1+L
              I3=I2+L
              I4=I3+L

```

```

A2=A(I2)
A3=A(I3)
B(I1)=A2
B(I2)=(A3-A2)/D
B(I3)=(A3-2.*A2+A(I1))/D2
1 B(I4)=(A(I4)-3.*A3+
* 3.*A2-A(I1))/D3
RETURN
END
SUBROUTINE MFR1
* (A,B,BB,QQ,N,M,ISTB,
* Y,Y1,Y2,Y3,Y4,Z,S,Q)
DIMENSION BB(1),QQ(1),
* Y(1),Y1(1),Y2(1),Y3(1),
* Y4(1),Z(1),S(1),Q(1)
COMMON/RUN/KIN.
DOUBLE PRECISION A,B,BB,QQ,
* Y,Y1,Y2,Y3,Z,S,Q,Y4,H,H2,H6,X
N1=N+1
IF(ISTB.EQ.1)GO TO 1
N1=N
M=1
DO 8 I=1,4
8 QQ(I)=0.
1 NN=N*N
II=N*N1
H=(B-A)/KIN
H2=H/2.
H6=H/6.
X=A
DO 2 I=1, II
2 Y(I)=0.
DO 3 I=1,N
L=I+N*(I-1)
3 Y(L)=1.
CALL INTP1(X,A,B,
* BB,QQ,NN,M,S,Q)
DO 7 INT=1,KIN
CALL DERVI
* (Y1,S,Y,Q,N1,N,M)
DO 4 I=1,II
4 Z(I)=Y(I)+Y1(I)*H2
X=X+H2
CALL INTP1(X,A,B,
* BB,QQ,NN,M,S,Q)
CALL DERVI
(Y2,S,Z,Q,N1,N,M)
DO 5 I=1,II
5 Z(I)=Y(I)+Y2(I)*H2
CALL DERVI
* (Y3,S,Z,Q,N1,N,M)
DO 6 I=1,II
6 Z(I)=Y(I)+Y3(I)*H
X=X+H2
CALL INTP1(X,A,B,
* BB,QQ,NN,M,S,Q)
CALL DERVI
* (Y4,S,Z,Q,N1,N,M)
DO 7 I=1,II
7 Y(I)=Y(I)+(Y1(I)+2.*
* (Y2(I)+Y3(I))+Y4(I))*H6

```

```

RETURN
END
SUBROUTINE INTP1
* (X,A,B,BB,QQ,L,M,S,Q)
DIMENSION BB(1),QQ(1),
* S(1),Q(1)
DOUBLE PRECISION X, A, B,
* BB,QQ,S,Q,T2,T3,T4
T2=X-A
T3=(X-B) * T2
T4=T2 * T3
DO 1 I1=1,L
I2=I1+L
I3=I2+L
I4=I3+L
1 S(I1)=BB(I1)+BB(I2) * T2+
* BB(I3) * T3+BB(I4) * T4
DO 2 I1=1,M
I2=I1+M
I3=I2+M
I4=I3+M
2 Q(I1)=QQ(I1)+QQ(I2) * T2+
* QQ(I3) * T3+QQ(I4) * T4
RETURN
END
SUBROUTINE DERV1
* (DY,S,Y,Q,N1,N,M)
DIMENSION DY(1),S(1),Y(1),Q(1)
DOUBLE PRECISION DY,S,Y,Q,D
K=N * N1-M
DO 1 I=1,K
1 DY(I)=0.
DO 2 I=1,M
K=K+1
2 DY(K)=Q(I)
L=-N
DO 3 K=1, N1
L=L+N
DO 3 I=1,N
IJ=I-N
KI=L+I
D=DY(KI)
DO 4 J=1,N
IJ=IJ+N
MJ=L+J
4 D=D+S(IJ) * Y(MJ)
3 DY(KI)=D
RETURN
END
SUBROUTINE STF1
* (Y,N,N1,ISTB,S,R1,R2,M)
DIMENSION Y(N,N1),
* S(N,N1),R1(M,M),R2(M,M)
DOUBLE PRECISION Y, S, R1,
* R2,A,D
DO 1 J=1,M
JM=J+M
DO 1 I=1,M
1 R1(I,J)=Y(I,J,M)
CALL MATDP(R1,R2,M)
DO 3 I=1,M

```

```

IM=I+M
DO 3 J=1,M
JM=J+M
A=Ø.
D=Ø.
S(I,JM)=-R2(I,J)
S(IM,J)=-R2(J,I)
DO 2 L=1,M
LM=L+M
A=A+R2(I,L)*Y(L,J)
2 D=D+Y(IM,LM)*R2(L,J)
S(I,J)=A
3 S(IM,JM)=D
IF(ISTB.NE.1)RETURN
DO 4 I=1,M
A=Ø.
DO 5 J=1,M
5 A=A-R2(I,J)*Y(J,N1)
4 S(I,N1)=A
DO 6 I=1,M
IM=I+M
A=-Y(IM,N1)
DO 7 J=1,M
7 A=A-Y(IM,J+M)*S(J,N1)
6 S(IM,N1)=A
RETURN
END
SUBROUTINE FORM2
*(SK,R,ST,P,LIN,N)
COMMON/SOL/NB,NZ,NELS
DIMENSION SK(1),R(1),
*ST(N,N),LIN(N),P(N)
DOUBLE PRECISION SK,R,ST.
IS=NB*NZ
DO 1 I=1,IS
1 SK(I)=Ø.
DO 2 I=1,NZ
2 R(I)=Ø.
REWIND 9
DO 3 IEL=1,NELS
READ (9)K,
*(LIN(I),I=1,K),
*((ST(I,J),J=1,K),I=1,K),
*(P(I),I=1,K)
DO 3 I=1,K
IS=LIN(I)
IF(IS)3,3,5
5 R(IS)=R(IS)+P(I)
DO 3 J=1,K
JS=LIN(J)
JJ=JS-IS+1
IF(JJ)3,3,4
4 M=NB*(IS-1)+JJ
SK(M)=SK(M)+ST(I,J)
3 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE SOLV1(SK,R)
DIMENSION SK(1),R(1)
COMMON/SOL/NB,NZ,NELS
DOUBLE PRECISION SK,R,C

```

```

DO 5 N=1,NZ
I=N
NNB=NB*(N-1)
DO 4 L=2,NB
I=I+1
INB=NB*(I-1)
NL=NNB+L
N1=NNB+1
IF(SK(NL))1,4,1
1 C=SK(NL)/SK(N1)
J=0
DO 3 K=L,NB
J=J+1
NK=NNB+K
IF(SK(NK))2,3,2
2 IJ=INB+J
SK(IJ)=SK(IJ)-C*SK(NK)
3 CONTINUE
SK(NL)=C
R(I)=R(I)-C*R(N)
4 CONTINUE
5 R(N)=R(N)/SK(N1)
N=NZ
6 N=N-1
IF(N)10,10,7
7 L=N
NNB=NB*(N-1)
DO 9 K=2,NB
L=L+1
NK=NNB+K
IF(SK(NK))8,9,8
8 R(N)=R(N)-SK(NK)*R(L)
9 CONTINUE
GO TO 6
10 RETURN
END
SUBROUTINE MUM(A,B,C,M,N,L)
DIMENSION A(1),B(1),C(1)
DOUBLE PRECISION A,B,C,D
DO 1 I=1,M
IM=I-M
JN=-N
IJ=IM
DO 1 J=1,L
IJ=IJ+M
JN=JN+N
IK=IM
D=0.
DO 2 K=1,N
IK=IK+M
KJ=JN+K
2 D=D+A(IK)*B(KJ)
1 C(IJ)=D
RETURN
END
SUBROUTINE MTM(A,B,C,M,N,L)
DIMENSION A(1),B(1),C(1)
DOUBLE PRECISION A,B,C,D
II=-M
DO 1 I=1,N
IJ=I-N

```

```

II=II+M
JJ=-M
DO 1 J=1,L
IJ=IJ+N
JJ=JJ+M
D=Ø.
DO 2 K=1,M
KI=II+K
KJ=JJ+K
2 D=D+A(KI)*B(KJ)
1 C(IJ)=D
RETURN
END
SUBROUTINE MMT(A,B,C,M,N,L)
DIMENSION A(1),B(1),C(1)
DOUBLE PRECISION A,B,C,D
DO 1 I=1,M
IJ=I-M
II=IJ
DO 1 J=1,L
IJ=IJ+M
IK=II
JK=J-L
D=Ø.
DO 2 K=1,N
IK=IK+M
JK=JK+L
2 D=D+A(IK)*B(JK)
1 C(IJ)=D
RETURN
END
SUBROUTINE SKM(A,S,M,N)
DIMENSION A(1)
DOUBLE PRECISION A,S
MN=M*N
DO 1 I=1,MN
1 A(I)=A(I)*S
RETURN
END
SUBROUTINE MATDP(A,E,N)
DIMENSION A(N,N),E(N,N)
DOUBLE PRECISION A,E,T,ВМ
25 FORMAT(5X,'СБОЙ ПРИ',IX,
* 'ОБРАЩЕНИИ МАТРИЦЫ')
DO 11 I=1,N
DO 11 J=1,N
IF(I.EQ.J)GO TO 1Ø
E(I,J)=Ø.
GO TO 11
1Ø E(I,J)=1.
11 CONTINUE
DO 27 I=1,N
J=I
L=I
LD=Ø
12 IF(DABS(A(L,J)))16,13,16
13 LD=1
IF(L-N)15,14,14
14 PRINT25
GOTO27
15 L=L+1

```

```

GO TO 12
16 IF(LD—1)26,17,26
17 DO18K=1,N
   T=A(L,K)
   A(L,K)=A(I,K)
   A(I,K)=T
   T=E(L,K)
   E(L,K)=E(I,K)
18 E(I,K)=T
26 BM=1./A(I,I)
   DO19K=1,N
19 E(I,K)=E(I,K)*BM
   I1=I+1
   DO20KI=I1,N
   K=N+I1—KI
20 A(I,K)=A(I,K)*BM
   DO23L=1,N
   IF(L.EQ.I)GOTO23
   BM=A(L,I)
   DO21K=1,N
21 E(L,K)=E(L,K)—E(I,K)*BM
   I1=I+1
   DO22KI=I1,N
   K=N+I1—KI
22 A(L,K)=A(L,K)—A(I,K)*BM
23 CONTINUE
27 CONTINUE
   RETURN
   END

```

Список литературы

1. Александров А. Я., Куршин Л. М. Многослойные пластинки и оболочки. — Тр. VII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970, с. 714—721.
2. Александров А. Я., Куршин Л. М. Трехслойные пластинки и оболочки. — В кн.: Прочность, устойчивость, колебания. М.: Машиностроение, 1968. Т. 2, с. 243—308.
3. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978, 311 с.
4. Алфутов Н. А., Попов Б. Г. Использование операторных матриц для расчета трехслойных цилиндрических оболочек, подкрепленных шпангоутами. — Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1977, № 3, с. 74—80.
5. Алфутов Н. А., Попов Б. Г. Устойчивость и колебания трехслойных цилиндрических панелей с многослойными обшивками. — Тр. XII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: ЕГУ, 1980, Т. 1, с. 46—52.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974, 448 с.
7. Ашкенази Е. К., Гаюв Э. В. Анизотропия конструкционных материалов. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1972, 216 с.
8. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977, 488 с.
9. Бидерман В. Л. Пластинки и оболочки из ориентированных стеклопластиков. — В кн.: Прочность, устойчивость, колебания. М.: Машиностроение, 1968, Т. 2, с. 211—242.
10. Болотин В. В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов. — В кн. Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, вып. 72, 1966, 48—63 с.
11. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980, 376 с.
12. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976, 278 с.
- 13. Ванин Г. А., Семенюк Н. П., Емельянов Р. Ф. Устойчивость оболочек из армированных пластиков. Киев.: Наукова думка, 1978, 212 с.
- 14. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов. Киев: Наукова думка, 1971, 232 с.
15. Ву Э. М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. Композиционные материалы/Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока; Пер. с англ. Механика композиционных материалов/Под ред. Дж. Сендеки. Т. 2. М.: Мир, 1978, с. 401—491.
16. Гольденблат И. И., Копиов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968, 192 с.
17. Гольденвейзер А. Л. Теории упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976, 512 с.
18. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек. — Прикладная механика, 1972, Т. VIII, вып. 6, с. 3—17.
19. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973, 170 с.
20. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1973, 228 с.
21. Деформирование и разрушение перекрестно армированных стеклопластиков при растяжении и кручении/И. Н. Данилова, П. А. Зиновьев, Т. В. Соколова, А. И. Тараканов — Изв. вузов. Машиностроение, 1982, № 5, с. 20—25.

22. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
23. Зиновьев П. А. К теории проектирования конструкций минимального веса. — Изв. вузов. Машиностроение, 1972, № 12, с. 32—36.
24. Зиновьев П. А., Тараканов А. И. О нелинейном деформировании слоистых композиционных материалов. — В кн.: Применение пластмасс в машиностроении. М.: МВТУ, 1978, № 16, с. 72—80.
25. Зиновьев П. А., Тараканов А. И., Фомин Б. Я. Деформирование и разрушение композиционных материалов при двухосном растяжении. — В кн.: Применение пластмасс в машиностроении. М.: МВТУ, 1982, вып. 19, с. 33—58.
26. Зиновьев П. А., Тараканов А. И., Фомин Б. Я. Нелинейное деформирование цилиндрических оболочек из армированных материалов. — Труды XII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: ЕГУ, 1980, т. 2, с. 157—163.
27. Исследование несущей способности слоистых цилиндрических оболочек при помощи моделирования процесса разрушения на ЭВМ/В. Д. Протасов, А. Ф. Ермоленко, А. А. Филипенко, И. П. Димитриенко. — Механика композитных материалов, 1980, № 2, с. 254—261.
28. Келли А. Высокопрочные материалы/Пер. с англ. М.: Мир, 1976, 262 с.
29. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, 415 с.
30. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975, 400 с.
31. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980, 572 с.
32. Методика расчета характеристик прочности сложных композиционных материалов при плоском сложно-напряженном состоянии с учетом пластических свойств монослоя. — В кн.: Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. М.: ЦАГИ, 1976, вып. IV, с. 13—19.
33. Мяченков В. И., Григорьев И. В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. М.: Машиностроение, 1981, 212 с.
34. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962, 431 с.
35. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958, 370 с.
36. Новожилов В. В., Черных К. Ф. Об упругих постоянных линейной теории упругости. — В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 215—221.
37. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1976, 144 с.
38. Попов Б. Г. О свойствах симметрии уравнений устойчивости для оболочек вращения. — Изв. вузов. Машиностроение, 1979, № 9, с. 9—13.
39. Попов Б. Г. Получение канонических уравнений для многослойных оболочек вращения из нелинейно упругих материалов. — Изв. вузов. Машиностроение, 1982, № 9, с. 45—49.
40. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977, 280 с.
41. Работнов Ю. Н. О прочности композитов, армированных в двух направлениях. — Механика полимеров, 1978, № 5, с. 832—834.
42. Расчеты и испытания на прочность. МР 30—81. Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости и колебаний прямоугольных трехслойных пластин, цилиндрических панелей и оболочек с многослойными обшивками/Сост.: Б. Г. Попов и др. М.: ВНИИНМАШ, 1981, 69 с.
43. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость/Н. Н. Шапошников, А. Д. Тарабасов, В. В. Петров, В. И. Мяченков. М.: Машиностроение, 1981, 333 с.
44. Рейсснер Е. Непротиворечивое определение деформации сдвига в слоистых анизотропных пластинах. — Ракетная техника и космонавтика, 1972, № 5, с. 193—195.
45. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974, 310 с.
46. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. — Л.: ЛГУ, 1978, 223 с.

47. Рязов А. Ф., Рассказов А. О. К теории многослойных пластин несимметричной структуры с ортотропными слоями. — Прикладная механика, 1974, Т. 10, вып. 2, с. 62—68.
48. Сендецки Дж. Упругие свойства композитов. Композиционные материалы/Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока; Пер. с англ. Механика композиционных материалов/Под ред. Дж. Сендецки. Т. 2. М.: Мир, 1978, с. 61—101.
49. Скудра А. М., Булавс Ф. Я. Прочность армированных пластиков. М.: Химия, 1982, 214 с.
50. Скудра А. М., Булавс Ф. Я. Структурная теория армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978, 192 с.
51. Стриклин, Наваратна, Пиан. Усовершенствование расчета оболочек вращения методом перемещений. — Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 11, с. 252—254.
52. Тарнопольский Ю. М., Киндис Т. Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. М.: Химия, 1981, 272 с.
53. Тарнопольский Ю. М., Розе А. В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1969, 274 с.
54. Тетерс Г. А., Рнкардс Р. Б., Нарусберг В. Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига: Зинатне, 1978, 238 с.
55. Фнлин А. П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1975, 256 с.
56. Цай С., Хан Х. Анализ разрушения композитов. — В кн.: Неупругие свойства композиционных материалов/Под ред. К. Гераковича; Пер. с англ. Механика. Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1978, кн. 16, с. 104—139.
57. Чамис К. Микромеханические теории прочности. Композиционные материалы/Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока; Пер. с англ. Разрушение и усталость/Под ред. Л. Браутмана. Т. 5. М.: Мир, 1978, с. 106—165.
58. Экспериментальное исследование некоторых особенностей деформирования и разрушения слоистого углепластика. — Механика композитных материалов/П. А. Зиновьев, Е. М. Песошников, Б. Г. Попов, Л. П. Таирова, 1980, № 2, с. 241—245.
59. Bathe K.-J. The finite element procedures in engineering analysis. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1982, 615 p.
60. Kawata K. On the yielding—fracture criterion of angleply FW laminates. — Proc. Int. Conf. Mech. Mat. Tokyo, Vol. 5, 1971, pp. 146—155.
61. Rao S. S. The finite element method in engineering — Oxford: Pergamon Press, 1982, 626 p.
62. Tsai S. W., Pagano N. J. Invariant properties of composite materials. — In: Composite materials workshop/Ed. by S. W. Tsai, J. C. Halpin, N. J. Pagano. Technomic Publishing Co., Inc., 1968, pp. 233—253.

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Элементы механики упругого анизотропного тела . . .	6
§ 1.1. Обобщенный закон Гука	6
§ 1.2. Упругие характеристики однонаправленного композиционного материала при плоском напряженном состоянии	14
§ 1.3. Преобразование упругих характеристик однонаправленного материала при повороте системы координат	18
§ 1.4. Упругие характеристики многослойных композитов при плоском напряженном состоянии	23
§ 1.5. Изгиб многослойных композиционных материалов	28
§ 1.6. Примеры расчетов упругих характеристик	34
Глава 2. Модель композиционного материала с хрупким полимерным связующим	36
§ 2.1. Прочность однонаправленного композиционного материала при плоском напряженном состоянии	37
§ 2.2. Деформирование однонаправленного композиционного материала в составе пакета слоев многослойного материала	43
§ 2.3. Модель поведения монослоя	52
§ 2.4. Алгоритмизация задач о деформировании и прочности многослойных композитов	56
§ 2.5. Одноосное нагружение перекрестно армированных композитов . . .	60
§ 2.6. Многослойные композиты в условиях двухосного растяжения и сдвига	64
Глава 3. Вариационно-матричный подход к расчету конструкций	71
§ 3.1. Принцип возможных перемещений	72
§ 3.2. Функционал Лагранжа и уравнения равновесия упругого тела . . .	75
§ 3.3. Формулировка задач устойчивости	79
§ 3.4. Формулировка задач динамики	83
§ 3.5. Получение разрешающих уравнений для одномерных задач . . .	85
§ 3.6. Численное интегрирование разрешающих дифференциальных уравнений для одномерных систем	93
§ 3.7. Формулировка нелинейных задач	98
§ 3.8. Общие этапы решения задач с помощью МКЭ	100
§ 3.9. Примеры использования вариационно-матричных формулировок . .	112
Глава 4. Расчет тонких слоистых пластин и оболочек	122
§ 4.1. Краткие сведения из теории поверхностей	122
§ 4.2. Связь деформаций с перемещениями	130
§ 4.3. Применение МКЭ для расчета многослойных оболочек вращения . .	135
§ 4.4. Получение канонических систем для решения задач статики, устойчивости и колебаний многослойных оболочек вращения	149
§ 4.5. Условия сопряжения с кольцевыми подкрепляющими элементами . .	159
§ 4.6. Уточненные модели ортотропных слоистых пластин и оболочек . . .	169
§ 4.7. Силовые граничные условия	180
§ 4.8. Решение осесимметричных нелинейных задач	182
§ 4.9. Примеры расчетов оболочек из стеклопластиков	187

Глава 5. Численные методы расчета трехслойных пластин и оболочек с многослойными обшивками	191
§ 5.1. Особенности деформирования	191
§ 5.2. Решение задач статики трехслойных оболочек с использованием гипотезы ломаной линии	197
§ 5.3. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек	210
§ 5.4. Условия сопряжения трехслойных оболочек вращения со шпангоутами	214
§ 5.5. Расчет трехслойных оболочек с учетом трансверсальной податливости слоя заполнителя	218
§ 5.6. Устойчивость и колебания прямоугольных трехслойных пластин, цилиндрических панелей и оболочек с многослойными обшивками	226
§ 5.7. Примеры расчетов трехслойных конструкций	233
П р и л о ж е н и я.	
1. Программа для расчета диаграмм деформирования и условий разрушения многослойных полимерных композиционных материалов при плоском напряженном состоянии	241
2. Описание вспомогательных программ расчета многослойных оболочек вращения	250
Список литературы	259

Николай Анатольевич АЛФУТОВ,
Петр Алексеевич ЗИНОВЬЕВ,
Борис Глебович ПОПОВ

**РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН
И ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ**

Редактор *Т. Д. Онегина*
Художественный редактор *С. С. Водниц*
Технический редактор *Л. П. Гордеева*
Корректор *А. П. Сизова*

Сдано в набор 07.02.84. Подписано в печать 12.07.84. Т-12447.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская
№ 1. Гарнитура литературная. Печать
высокая. Усл. печ. л. 16,5. Усл. кр.-отт. 16,5. Уч.-изд. л. 17,57.
Тираж 5600 экз. Заказ 45. Цена 1 р. 40 к.

ИБ 3703

Орден Трудового Красного Знамени изда-
тельство «Машиностроение», 107076,
Москва, Стромынский пер., д. 4

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соко
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144, г. Ленинград, ул. Монсеенко, 10.