

В.В.ВАСИЛЬЕВ

**Механика
конструкций
из композиционных
материалов**



МОСКВА « МАШИНОСТРОЕНИЕ » 1988

ББК 30.4
В19
УДК 531/534 : 620.22-419.8

Рецензент д-р техн. наук, проф. Ю. М. ТАРНОПОЛЬСКИЙ

Васильев В. В.

В19 **Механика конструкций из композиционных материалов.** — М.: Машиностроение, 1988. — 272 с.: ил. — (Б-ка расчетчика/Ред. кол.: Н. Н. Малинин (пред.) и др.).

ISBN 5-217-00038-4

Изложены методы расчета элементов конструкций из композиционных материалов. Описаны конструкционные и технологические свойства этих материалов. Построена универсальная расчетная модель и получены уравнения строительной механики, на основе которых рассмотрен широкий класс задач статики, динамики и устойчивости композитных стержней, балок, пластин и оболочек. Приведены примеры расчета конкретных конструкций.

Для инженеров-расчетчиков, проектно-конструкторских и научно-исследовательских организаций, может быть полезна преподавателям и студентам вузов.

В 2702000000—038
038 (01)—88 36—88

ББК 30.4

ISBN 5-217-00038-4

© Издательство «Машиностроение», 1988

Оглавление

Предисловие	7
Глава 1. Конструкционные свойства композиционных материалов	9
§ 1.1. Армирующие элементы	9
§ 1.2. Матрицы	14
§ 1.3. Структурные особенности и механические свойства композитов	24
§ 1.4. Характеристики армированного слоя	34
§ 1.5. Характеристики симметричной системы слоев	38
Глава 2. Уравнения механики конструкций из композиционных материалов	43
§ 2.1. Уравнения теории упругости ортотропной среды в ортогональных криволинейных координатах	43
§ 2.2. Исходные допущения	52
§ 2.3. Уравнения строительной механики тонкостенных композитных систем	65
§ 2.4. Постановка задачи	76
§ 2.5. Обобщенные жесткости слоистого материала	79
§ 2.6. Уравнения статики слоистых элементов переменной толщины	85
§ 2.7. Уравнения термоупругости	89
§ 2.8. Нелинейные уравнения	92
§ 2.9. Линеаризованные уравнения устойчивости	102
§ 2.10. Уравнения динамики	107
§ 2.11. Особенности описания подкрепленных, трехслойных и сетчатых конструкций	108
Глава 3. Композитные балки и стержни	115
§ 3.1. Композитные балки	115
§ 3.2. Тонкостенные стержни с замкнутым контуром поперечного сечения	132
§ 3.3. Особенности расчета тонкостенных стержней с открытым контуром сечения	150
§ 3.4. Особенности расчета тонкостенных балок с многозамкнутым контуром сечения	162
Глава 4. Композитные панели и пластины	168
§ 4.1. Уравнения теории слоистых пластин	168
§ 4.2. Гладкие слоистые панели с симметричным расположением слоев	176

§ 4.3. Особенности расчета подкрепленных, трехслойных и сетчатых панелей	191
§ 4.4. Закрытая деформация и несущая способность сжатых композитных панелей	200
Глава 5. Цилиндрические оболочки	209
§ 5.1. Уравнения теории ортотропных слоистых цилиндрических оболочек	209
§ 5.2. Расчет безмоментных цилиндрических оболочек	211
§ 5.3. Цилиндрические оболочки, напряженно-деформированное состояние которых не зависит от продольной координаты	217
§ 5.4. Осесимметричная деформация цилиндрических оболочек	226
§ 5.5. Общий случай нагружения цилиндрических оболочек — решения в двойных тригонометрических рядах	233
§ 5.6. Полубезмоментная теория композитных цилиндрических оболочек	240
§ 5.7. Устойчивость цилиндрических оболочек	250
Список литературы	265

Предисловие

В настоящей книге рассмотрены прикладные методы расчета, элементов конструкций, изготовленных из композиционных материалов, получивших в последние годы широкое распространение в различных областях техники. Как известно, расширение класса конструкционных материалов и совершенствование их свойств является результатом технического прогресса. Новые материалы, появление которых, как правило, определяется необходимостью повышения эффективности разрабатываемых конструкций, в свою очередь, открывают возможности для реализации принципиально новых конструктивных решений и технологических процессов, а дальнейшее совершенствование конструкций и технологии ставит новые задачи перед материаловедением. Такая взаимообусловленность процессов развития материалов, конструкций и технологии отчетливо проявляется в настоящее время в связи с разработкой и применением композиционных материалов. Появление стеклопластиков, получивших широкое распространение благодаря высокой прочности при малой по сравнению с традиционными конструкционными материалами плотности, позволило разработать перспективные концепции проектирования и эффективные технологические процессы, вызвавшие, в свою очередь, появление новых, более совершенных материалов на основе углеродных, органических, борных волокон и полимерной или металлической матрицы.

Современные композиционные материалы обладают не только широким спектром механических, физических и химических свойств, но и способностью к направленному их изменению в соответствии с назначением конструкции. Идея соединения двух или более компонентов с целью получения материала, обладающего свойствами, не присущими отдельно взятым компонентам, издавна используется человеком. Принцип специализации этих свойств отчетливо прослеживается во всех природных материалах, появившихся в процессе длительной эволюции и призванных воспринимать гравитационные, ветровые и другие статические и динами-

ческие нагрузки. Направленный характер свойств композитов, естественно, предполагает, что наряду с высокими механическими характеристиками в одних направлениях они обладают низкими в других. Поэтому эффективная реализация достоинств этих материалов в конструкциях требует решения комплекса задач, связанных с выбором взаимно согласованных исходных компонентов, с определением рациональной структуры материала, соответствующей полю внешних нагрузок и других воздействий, с учетом его особенностей и технологических ограничений при разработке проекта.

Интенсиивно расширяющееся внедрение композитов в несущие конструкции различного назначения требует разработки расчетных моделей и методов, учитывающих особенности структуры и поведения этих материалов. К числу таких особенностей, как известно, относятся их анизотропия, слоистый характер и сравнительно низкая прочность и жесткость в направлениях, не совпадающих с направлением армирования. В совокупности эти особенности настолько усложняют расчетные модели, что полное изложение строительной механики композитных элементов конструкций в книге ограниченного объема представляется задачей не вполне реальной. Тем не менее именно такую задачу поставил перед собой автор, учитывая уже образовавшийся значительный разрыв между числом публикаций, посвященных теории армированных сред, пластин и оболочек и прикладным методам расчета типовых элементов конструкций.

Настоящая книга построена по традиционному для строительной механики принципу, предполагающему последовательное усложнение расчетной модели. Вторая глава посвящена стержням и балкам, третья — панелям и пластинам, четвертая — цилиндрическим оболочкам. Расчет композитного элемента в отличие от металлического предусматривает анализ распределения напряжений по слоям композита. Соотношения, позволяющие определить эти напряжения, представлены в первой главе. Там же кратко описаны конструктивные и технологические свойства композитов, выделяющие их из широкого класса анизотропных материалов, и определяющие специфические для композитов расчетные модели.

Основная задача, которую ставил перед собой автор, заключалась в том, чтобы описать прикладные методы расчета типовых элементов конструкций так, чтобы учесть все существенные особенности композитов, используя по возможности наиболее простые расчетные модели. Трудно судить о том, насколько успешно удалось ее решить, и автор будет признателен читателям, которые пришлют свои замечания по этой книге.

Конструкционные свойства композиционных материалов

Композит представляет собой неоднородный сплошной материал, состоящий из двух или более компонентов, среди которых можно выделить армирующие элементы, обеспечивающие необходимые механические характеристики материала, и матрицу (или связующее), обеспечивающую совместную работу армирующих элементов. Механическое поведение композита определяется соотношением свойств армирующих элементов и матрицы, а также прочностью связи между ними. Эффективность и работоспособность материала зависят от правильного выбора исходных компонентов и технологии их совмещения, призванной обеспечить прочную связь между компонентами при сохранении их первоначальных характеристик. В результате совмещения армирующих элементов и матрицы образуется комплекс свойств композита, не только отражающий исходные характеристики его компонентов, но и включающий свойства, которыми изолированные компоненты не обладают. В частности, наличие границ раздела между армирующими элементами и матрицей существенно повышает трещиностойкость материала, и в композитах, в отличие от металлов, повышение статической прочности приводит не к снижению, а, как правило, к повышению характеристик вязкости разрушения [101].

Ниже рассмотрены основные свойства армирующих элементов, матричных материалов и композитов на их основе. Свойства композитов и их компонентов приведены в работах [39, 45, 46, 75, 77].

§ 1.1. Армирующие элементы

В современных композитах используются тонкие диаметром ($5\div 200$) 10^{-6} м непрерывные или короткие волокна, которые являются армирующими элементами или служат основой для изготовления нитей, жгутов, лент и тканей с различными типами плетения. Волокна должны удовлетворять комплексу

эксплуатационных и технологических требований. К первым относятся условия по прочности, жесткости, плотности и стабильности свойств в процессе эксплуатации. Технологичность волокон определяет возможность создания высокопроизводительных процессов изготовления изделий на их основе. Еще одним важным требованием является совместимость материала волокон с материалом матрицы. При этом совместимыми считаются компоненты, на границе которых возможно достижение прочной связи, близкой к прочности матрицы при условиях, обеспечивающих сохранение исходных свойств компонентов.

Рассмотрим основные типы волокон.

Стекланные волокна. Непрерывные стекланные волокна образуются из расплавленной стекломассы путем вытягивания струи на выходе из фильер до диаметра $(5 \div 20) 10^{-6}$ м и быстрого охлаждения. Предел прочности полученных после вытягивания стекланных волокон составляет 2—6 ГПа и определяется в основном составом стекломассы, условиями вытяжки и последующей обработки. Модуль упругости волокон составляет 50—130 ГПа, плотность 2500—2600 кг/м³. Стекланные волокна с неповрежденной поверхностью имеют предел прочности 5—6 ГПа. Предел прочности промышленных волокон, например алюмоборосиликатных с диаметром $(5 \div 7) 10^{-6}$ м, составляет 2—2,5 ГПа, модуль упругости — 73 ГПа. Температура оказывает существенное влияние на прочность стекланных волокон. Предел прочности промышленных алюмоборосиликатных волокон при понижении температуры до —196 °С возрастает в 1,5—2 раза, а с повышением температуры снижается, причем наиболее интенсивно после температуры 300 °С. Модуль упругости стекланных волокон с повышением температуры до температуры размягчения уменьшается незначительно.

Именно со стекланными волокнами английским ученым А. Гриффитсом были проведены в 1920 г. эксперименты, положившие начало механике хрупкого разрушения и обосновавшие основное свойство тонких волокон, благодаря которому они и используются в композитах, — высокую прочность по сравнению с прочностью монолитного материала. Подробное обсуждение этого вопроса содержится в учебном пособии [47].

Как известно, теоретическая прочность материалов, предсказываемая физикой твердого тела, значительно (на несколько порядков) превосходит прочность реальных материалов, наблюдаемую экспериментально. В частности, теоретический предел прочности стекла, по оценкам А. Гриффитса, составляет примерно 14 ГПа, а для стекланных стержней диаметром 1×10^{-3} м почти в 100 раз меньше. Такая разница связана с влиянием поверхностных дефектов — трещин, существенно снижающих прочность реальных материалов. Это подтверждается значительным (более чем на порядок) повышением предела прочности стекланных стержней при травлении их кислотой, сглаживающей поверх-

ностные дефекты. А. Гриффитсом была установлена критическая длина трещины, при которой трещина становится неустойчивой, т. е. проявляет тенденцию к неограниченному росту, приводящему к разрушению материала. Существенно, что соответствующее критическое напряжение зависит от абсолютного размера трещины, а поскольку глубина трещины на поверхности волокна не может превышать его диаметра, естественно ожидать возрастания наблюдаемого предела прочности при уменьшении диаметра волокон. Именно этот эффект и был отмечен А. Гриффитсом и неоднократно наблюдался впоследствии. При уменьшении диаметра стеклянных волокон, начиная от $0,03 \times 10^{-3}$ м, предел прочности резко увеличивается, а при экстраполяции экспериментальной зависимости на минимальные диаметры предел прочности составляет примерно 11 ГПа, что близко к теоретическому пределу.

Таким образом, использование тонких волокон (не только стеклянных) в качестве армирующих элементов в композитных материалах связано прежде всего с их высокой прочностью. Отметим, что повышение прочности при уменьшении диаметра наблюдается и у стальной проволоки, однако эффективность ее применения существенно снижается из-за высокой плотности стали. В связи с этим в качестве характеристики волокон и вообще материалов часто используется удельная прочность $k_\sigma = \bar{\sigma}/\gamma$, представляющая собой отношение предела прочности $\bar{\sigma}$ к удельному весу материала γ . Удельная прочность измеряется в единицах длины и имеет простой физический смысл — она равна длине волокна, разрушающегося под действием собственного веса. Стальная проволока, имеющая примерно такую же прочность, что и стеклянное волокно, по удельной прочности уступает ему более чем в 3 раза. По аналогии с удельной прочностью иногда вводится и удельный модуль упругости $k_E = E/\gamma$.

При изготовлении композитных элементов конструкций стеклянные волокна используют в виде первичных нитей; ровингов, т. е. прядей нескрученных нитей; крученных нитей и тканей на их основе. Текстильная обработка заметно снижает предел прочности стеклянных волокон. Их достоинствами являются высокая прочность при растяжении и сжатии, сравнительно низкая стоимость исходных материалов и процесса изготовления, хорошая совместимость с полимерными матрицами и технологичность. Недостатки связаны с низким модулем упругости и сравнительно низкой теплостойкостью. Из композитов на основе стеклянных волокон изготавливают баллоны давления, цистерны и резервуары, малотоннажные суда, лодки, катера и яхты, элементы кузова автомобилей, винты самолетов и вертолетов, радиопрозрачные обтекатели и купола.

Углеродистые волокна. Процесс изготовления углеродных волокон заключается в последовательном температурном и механическом воздействии на исходные органические волокна, при-

водящем к их карбонизации, графитизации и совершенствованию структуры. На первом этапе нагрев исходных растянутых волокон до температуры порядка 220°C приводит к образованию поперечных химических связей между макромолекулами полимера. Второй этап — нагрев до температуры 1000°C — позволяет получить так называемые «карбонизованные» волокна, на 80—95 % состоящие из элементарного углерода и обладающие достаточно высокой прочностью. На третьем этапе термообработки при температуре $1500\text{—}2500^{\circ}\text{C}$ получается конечный продукт — графитизированные углеродные волокна с кристаллической структурой, близкой к структуре графита. В зависимости от условий получения и типа исходного сырья предел прочности и модуль упругости углеродных волокон находятся соответственно в пределах 2—3,5 ГПа и 220—700 ГПа. Наибольшей прочностью обладают волокна, нагрев которых на последнем этапе при температуре 1600°C создает мелкокристаллическую структуру. Высокомодульные материалы получают в результате растяжения волокна при температуре 2700°C .

В качестве армирующих элементов композитных материалов углеродные волокна применяют в виде жгутов, лент и тканей. Они являются более хрупкими и менее технологичными, чем стеклянные, отличаются химической инертностью, низкой поверхностной энергией, обуславливающей плохое смачивание волокон растворами и расплавами матричных материалов, что в итоге приводит к низкой прочности сцепления на границе волокно — матрица. Основным достоинством углеродных волокон является их более высокая по сравнению со стеклянными волокнами жесткость. Механические характеристики углеродных волокон сохраняются неизменными при повышении температуры до 450°C , что позволяет применять их в композитах как с полимерной, так и с металлической матрицей. Волокна характеризуются отрицательным температурным коэффициентом линейного расширения, что в совокупности с положительным коэффициентом у матрицы позволяет синтезировать композиции для конструкций, сохраняющих свои размеры при температурном воздействии. Углеродные волокна используют для изготовления элементов, необходимая жесткость которых является условием, снижающим эффективность применения материалов, армированных стеклянными волокнами. Из композитов на основе углеродных волокон изготавливают несущие панели крыла, оперения и фюзеляжа самолета, элементы конструкций ферм, карданные валы автомобилей, детали, работающие в условиях интенсивного теплового воздействия.

Борные волокна. Эти волокна получают осаждением бора на нагреваемую вольфрамовую нить диаметром $(12\div 16) \cdot 10^{-6}$ м. При таком процессе вокруг нити формируется борная оболочка, частично прореагировавшая с материалом нити. В настоящее время выпускают волокна диаметром $(100\div 200) \cdot 10^{-6}$ м, имеющие

предел прочности при растяжении 2—4 ГПа, модуль упругости 370—430 ГПа, плотность 2500—2700 кг/м³. Борные волокна обладают высокой чувствительностью к концентраторам напряжений, чем объясняется их большая прочность при сжатии, чем при растяжении. С повышением температуры заметное разупрочнение волокон бора на воздухе начинается с температуры 400 °С. Для предотвращения окислительной деструкции на поверхность волокон наносят тугоплавкие покрытия из карбидов кремния или бора толщиной $(2\div 6) 10^{-6}$ м. Волокна бора выпускают в виде моноволокон, комплексных нитей, лент. Комплексные нити представляют собой пучки непрерывных параллельно уложенных волокон с обмоткой вспомогательной стеклянной нитью. Такие нити легко пропитываются связующим и, уплотняясь в процессе формования, обеспечивают высокое (до 70 % по объему) содержание армирующего компонента в материале. Борные волокна хорошо совмещаются как с полимерной, так и с металлической матрицей. Их основными достоинствами являются высокая жесткость и прочность при сжатии, а к недостаткам можно отнести высокую стоимость, хрупкость и связанную с ней низкую технологичность, большую толщину элементарного слоя, определяемую диаметром волокон. С целью снижения стоимости выпускают борные волокна, имеющие углеродную сердцевину. Композиты на основе борных волокон и полимерной или металлической матрицы применяют в основном для изготовления стержневых элементов и панелей, а также для усиления профилей и элементов конструкций с целью повышения их жесткости и прочности при сжатии.

Высокомодульные органические волокна. Прогресс в области создания синтетических материалов привел к получению армирующих волокон, способных конкурировать с неорганическими. Высокомодульные органические волокна получают из концентрированных растворов полимеров формованием через фильеры. Далее волокна пропускают через ванны осаждения, где удаляется основная часть растворителя, после чего осуществляют ориентационную вытяжку и фиксацию структуры волокон.

В зависимости от состава полимера и метода формования получают органические волокна, имеющие плотность 1410—1450 кг/м³, предел прочности при растяжении 1,8—3,0 ГПа, модуль упругости 70—130 ГПа. Волокно сохраняет исходные характеристики до температуры 180 °С, а при повышении температуры, не плавясь, карбонизируется. Криогенные температуры не вызывают охрупчивания волокон. При достаточно высоком модуле упругости и большом предельном удлинении (до 2 %) органические волокна обладают высокой ударной вязкостью и малой чувствительностью к повреждениям. Последнее свойство позволяет сохранять до 90 % прочности волокон при получении тканевых полуфабрикатов. Органические волокна хорошо воспринимают растягивающие нагрузки. По удельной прочности и жесткости они превосходят стеклянные волокна и заменяют последние в баллонах давления

1.1. Физико-механические характеристики волокон

Параметр	Сте- клян- ное	Углеродное		Бор- ное	Орга- ниче- ское	Сталь- ное
		высоко- модуль- ное	высоко- прочное			
Плотность 10^{-3} , кг/м ³	2,5	1,95	1,76	2,5	1,45	7,8
Модуль упругости, ГПа	89	400	260	400	120	210
Предел прочности при растя- жении, ГПа	3,5	2,1	3,3	3,5	2,8	2,9
Удельная жесткость 10^{-6} , м	3,6	20,3	14,7	16	8,3	2,7
Удельная прочность 10^{-2} , м	140	108	187	140	193	37

и других элементах, материал которых работает на растяжение. При сжатии композиты на основе органических волокон значительно уступают стеклопластикам. Рассматриваемые волокна обладают хорошей технологичностью, однако совмещаются с поли-
мерными связующими хуже, чем стеклянные.

Ориентировочные характеристики волокон, применяющихся в настоящее время в композитах, представлены в табл. 1.1. Можно отметить, что по удельной жесткости высокомодульные углеродные волокна превосходят все прочие; наибольшую удельную прочность имеют высокопрочные углеродные и органические волокна. Борные и углеродные волокна обладают высокой удельной прочностью и высоким удельным модулем. Наиболее перспективными в настоящее время считаются углеродные волокна. Их свойства непрерывно совершенствуются, а стоимость снижается.

§ 1.2. Матрицы

В композитных материалах армирующие элементы соединены изотропной полимерной или металлической матрицей, которая обеспечивает монолитность материала, фиксирует форму изделия, способствует совместной работе волокон и перераспределяет нагрузку при разрушении части волокон. Тип матрицы определяет также метод изготовления конструкции. Таким образом, матрицы должны удовлетворять определенному комплексу требований, которые можно разделить на эксплуатационные и технологические. Эксплуатационные требования определяют совокупность характеристик матрицы, обеспечивающих работоспособность композита в процессе эксплуатации конструкции. Матрица должна обладать достаточной жесткостью и обеспечивать совместную работу волокон; ее прочность является определяющей при нагружении, не совпадающем по направлению с ориентацией волокон. Особенно важным является свойство матрицы образовывать монолитный материал, в котором матрица сохра-

няет свою целостность вплоть до разрушения волокон. Рациональная микроструктура композита требует вполне определенных соотношений между жесткостью волокон и деформативностью матрицы, причем в разработанных к настоящему времени композициях эти условия полностью не выполняются.

Природа матрицы определяет уровень рабочих температур композита, характеризует устойчивость материала к воздействию внешней среды, химическую стойкость, частично теплофизические, электрические и другие свойства. Технологические характеристики матрицы определяют процесс получения композита и изделия из него. Основным содержанием этих процессов является совмещение армирующих волокон с матрицей и окончательное формообразование изделия, что определяет следующие требования к материалу матрицы: хорошее смачивание волокна жидкой матрицей в процессе пропитки; возможность предварительного изготовления полуфабрикатов (препрегов) с последующим изготовлением из них изделий; качественное соединение слоев композита в процессе формования; невысокие значения параметров окончательного формообразования (температуры, давления); обеспечение высокой прочности сцепления матрицы с волокном. Наиболее широкое распространение получили композиты на полимерной и металлической матрицах, рассмотренные ниже.

Термореактивные полимерные матрицы. Связующие рассматриваемого типа образуются из смолы, отвердителя, катализатора или инициатора отверждения и растворителя, который иногда вводят для понижения вязкости и улучшения процесса пропитки системы армирующих элементов. В исходном состоянии связующее представляет собой вязкую жидкость, которая в результате полимеризации при нормальной или повышенной температуре отверждается и переходит в нерастворимую и неплавкую матрицу. В производстве конструкций из композитных материалов наиболее широкое применение находят полиэфирные, фенолоформальдегидные, эпоксидные, кремнийорганические и полиимидные связующие.

Полиэфирные связующие, отверждаемые при нормальной и повышенной температуре, характеризуются высокой стойкостью к действию воды, минеральных масел, неорганических кислот, многих органических растворителей, хорошими диэлектрическими свойствами. К преимуществам полиэфирных связующих относятся следующие: малая вязкость полимеров, обеспечивающая простоту совмещения их с волокнами; способность отверждаться в широком температурном интервале без применения высоких давлений; простота модифицирования другими смолами. К недостаткам — невысокий уровень механических характеристик, слабая адгезия, малая жизнеспособность, относительно большая усадка и наличие в составе токсичных веществ типа стирола.

Фенолоформальдегидные связующие отверждаются при температурах 160—200 °С с применением значительного давления порядка 30—40 МПа и выше. Получаемые в результате полимеры стабильны при длительном нагревании до 200 °С, а в течение ограниченного времени способны противостоять действию и более высоких температур — несколько суток при температурах 200—250 °С, несколько часов при 250—500 °С, несколько минут при температурах 500—1000 °С. Разложение начинается при температуре около 3000 °С. К недостаткам фенолоформальдегидных смол можно отнести их хрупкость и большую объемную усадку (15—25 %) при отверждении, связанную с выделением большого количества летучих веществ. С целью получения материала с малой пористостью необходимо при формировании применять высокие давления.

Эпоксидные связующие обладают комплексом благоприятных свойств, определивших их широкое применение в производстве конструкций из композитов. К этим свойствам относятся следующие: высокие механические и адгезионные характеристики, позволяющие достаточно полно использовать свойства армирующих волокон; хорошая технологичность связующих, обеспечивающая создание высокопроизводительных процессов пропитки армирующих элементов, формирования изделия и окончательного его отверждения. Эпоксидные связующие могут длительное время находиться в недоотвержденном состоянии, что позволяет изготавливать на их основе предварительно пропитанные и частично отвержденные полуфабрикаты (препреги). Отверждение смол можно осуществлять, при необходимости, в широком интервале температур, и оно протекает без выделения летучих веществ с малой объемной усадкой 1—5 %. Отвержденные эпоксидные связующие имеют достаточно высокие механические характеристики, стойки к действию многих растворителей и агрессивных сред, влагостойки и могут эксплуатироваться до температуры порядка 150 °С.

Кремнийорганические связующие характеризуются работоспособностью в широком интервале температур (от —200 до +350 °С), стойкостью к действию органических растворителей и минеральных кислот, высокими диэлектрическими свойствами. К недостаткам относятся низкие по сравнению с другими связующими механические свойства при невысоких температурах (до 100 °С); необходимость значительных давлений при формировании изделий; длительный цикл отверждения и высокая стоимость.

Полиимидные связующие отверждаются при сравнительно высокой температуре (300—350 °С), отличаются высокой теплостойкостью, хорошими механическими характеристиками и стойкостью к действию различных агрессивных сред, стабильностью размеров в широком температурном интервале. К недостаткам полиимидных связующих относятся значительные

1.2. Физико-механические характеристики отвержденных термореактивных связующих

Параметр	Полиэфирные	Фенолформальдегидные	Эпоксидные	Кремнийорганические	Полиамидные
Предел прочности, МПа:					
при растяжении	30—70	40—70	35—100	25—50	90—95
при сжатии	80—150	100—125	90—160	60—100	250—280
Модуль упругости, ГПа	2,8—3,8	7—11	2,4—4,2	6,8—10	3,2—5
Плотность 10^{-3} , кг/м ³	1,2—1,35	1,2—1,3	1,2—1,3	1,35—1,40	1,41—1,43
Теплостойкость, °С	50—80	140—180	130—150	250—280	250—320
Относительное удлинение, %	1,0—5,0	0,4—0,5	2—9	0,3—0,5	1—2,5
Объемная усадка, %	5—10	15—25	1—5	15—20	3—20

технологические трудности изготовления изделий из материалов на их основе, связанные с высокой температурой отверждения.

Некоторые характеристики рассмотренных матриц представлены в табл. 1.2.

Как уже отмечалось, природа матрицы определяет в основном технологические параметры процесса изготовления композитного элемента, при котором образуется и сам материал. В связи с этим рассмотрим типовые технологические процессы, характерные для производства изделий из композитов с термореактивной полимерной матрицей.

Одним из наиболее распространенных методов формообразования композитных элементов является прессование с помощью пресс-формы, в которой создаются давление и температура, необходимые для формования заготовки и отверждения матрицы. Прессованием изготавливают детали как с хаотическим, так и с ориентированным расположением волокон. В первом случае используются так называемые пресс-материалы, т. е. полуфабрикаты из отрезков волокон, лент, гранул, таблеток. Во втором — предварительно раскроенные и уложенные под необходимыми углами армирования слои препрега. Давление прессования определяется типом связующего и формой детали. Прессованием изготавливают панели, лопасти винтов, обтекатели и другие элементы, требующие высокой геометрической точности и хорошего качества поверхностей, образуемых в результате контакта пресс-материала с матрицей и пуансоном пресс-формы.

Для изготовления крупногабаритных панелей широко используется вакуумное или автоклавное формование, при котором собранная листовая заготовка укладывается одной стороной на форму, а с другой стороны покрывается эластичной и герметичной диафрагмой. При вакуумном формовании в результате откачки воздуха из-под диафрагмы создается давление формования порядка 70—90 кПа, и в термопеч

щего. При автоклавном формовании система помещается в автоклав (цилиндрический сосуд давления, заполняемый воздухом или азотом и снабженный нагревательным устройством), в котором создается давление 300—2500 КПа. В отличие от прессования, при котором формуются обе поверхности детали, в рассматриваемом случае высоким качеством обладает только одна — соприкасающаяся с формой поверхность. В качестве материалов для форм используют древесину, гипс, алюминиевые и другие сплавы. Для образования полостей сложной формы может оказаться эффективным применение резиновых форм-блоков, удаляемых после отверждения детали. При больших габаритах листовых заготовок формирование их структуры осуществляется с помощью лентоукладочных машин, обеспечивающих автоматическую выкладку армированных лент по заданным траекториям. Вакуумное и автоклавное формование успешно применяют для изготовления крупногабаритных панелей — плоских и криволинейных гладких, подкрепленных и трехслойных.

Габариты деталей, изготавливаемых методом автоклавного формования, ограничиваются размерами автоклавов, диаметр которых достигает 6 м, а длина — 20 м. Для получения более крупных изделий, а также элементов, к которым не предъявляются слишком высокие требования по качеству и стабильности характеристик, используют самый простой технологический процесс — контактное формование. При этом в качестве исходных материалов применяют, как правило, ткани различного плетения, предварительно раскроенные и пропитанные связующим, отверждающимся при нормальной температуре. Уплотнение материала на поверхности формы осуществляется прикаткой через разделительный слой. Для получения изделия при этом требуется только время, необходимое для полимеризации связующего. Рассматриваемым методом изготавливают, в частности, крупногабаритную технологическую оснастку для производства панелей обшивки самолета методом обтяжки [10].

Одним из наиболее перспективных технологических процессов является намотка, предусматривающая следующие операции: автоматическую укладку по заданным траекториям армированного материала на оправку, по форме соответствующую будущему изделию; отверждение связующего и удаление оправки. Намотка осуществляется нитями, жгутами, лентами и тканями, которые пропитываются полимерным связующим непосредственно перед укладкой на оправку (мокрая намотка) или предварительно — на пропиточных установках с частичным отверждением связующего (сухая намотка). Намотка осуществляется на специальную оправку, которая может быть разборной или неразборной (с которой изделие может быть стянуто или спрессовано), полностью или частично разрушаемой, растворяемой или вымываемой. Для изготовления оправок используют металлическую арматуру, гипс, растворимые соли, композиции на основе песка и раство-

римых связующих веществ. Укладку армированного материала при намотке осуществляют с некоторым натяжением, которое способствует получению монолитной беспористой структуры композита. Иногда для этих целей используют прикатку, дополнительную обмотку по наружной поверхности через разделительный слой, внешнее давление. Классификация видов намотки может быть осуществлена по различным признакам. Приведем классификацию по структурным свойствам получаемого композита.

Радиальную или кольцевую намотку используют для изготовления труб и производят предварительно пропитанными связующим полотнищами ткани, укладываемыми на вращающуюся оправку одновременно по всей длине. Оправка лежит на валках (один из которых является ведущим) и своей тяжестью уплотняет материал.

Более высокие механические характеристики позволяет получить так называемая продольно-поперечная намотка, осуществляемая однонаправленными лентами, укладываемыми в осевом и кольцевом направлениях. Ленты сматываются с катушек, установленных на кольцах-вертлюгах, внутри которых размещается цилиндрическая оправка. При продольном движении вертлюги образуются слой с осевым армированием, а в результате его вращения и осевого перемещения формируется кольцевой слой. Рассматриваемый процесс является эффективным для изготовления труб, стержней и трубопроводов с криволинейной осью.

Для изготовления композитных оболочек и других тонкостенных элементов широко используют спиральную намотку, при которой на вращающуюся оправку с раскладчика, совершающего возвратно-поступательное движение параллельно оси оправки, подается армированная лента, укладываемая под заданными углами к оси. Спиральная намотка осуществляется на станках с программным управлением, обеспечивающих необходимую траекторию армирования. Эта траектория не может быть произвольной — она должна удовлетворять условиям равновесия ленты на поверхности оправки в процессе намотки. Наиболее просто в этом отношении реализуются геодезические траектории, поскольку гибкая нить, укладываемая на абсолютно гладкую поверхность без трения, стремится расположиться вдоль геодезической линии. Ввиду того, что в реальных условиях между лентой и поверхностью, на которую она укладывается, существует трение (коэффициент трения 0,15—0,20), оказывается возможной спиральная намотка по траекториям, отличающимся от геодезических. Это обстоятельство существенно расширяет возможности спиральной намотки.

Для получения замкнутых или имеющих малые отверстия в полюсах оболочек вращения типа баллонов давления и резервуаров может быть использована так называемая плоскостная намотка, при которой виток ленты лежит в плоскости, составляющей некоторый угол с осью оправки. При этом либо раскладчик

вращается в этой плоскости вокруг оправки, либо оправка, вращаясь также в этой плоскости, наматывает на себя ленту.

Достоинством процесса намотки является возможность его полной автоматизации, что обеспечивает высокую стабильность получаемых изделий. Намоткой изготавливают в основном детали типа тел вращения, однако она может быть использована для изготовления коробчатых балок, лонжеронов винтов и других элементов типа стержней с достаточно сложным (но обязательно выпуклым) контуром поперечного сечения.

Стержневые элементы — профили, прутки, трубы малого диаметра — могут быть получены также методом протяжки (пултрузин). При этом армирующий материал в виде плоской ленты пропитывается связующим и протягивается через систему прессформ, в которых происходит формование заданного профиля и отверждение связующего. Методом протяжки могут быть получены прутки сплошного сечения, уголкового профиля, швеллер, тавровый, трапециевидный и другие профили. Протяжка является высокопроизводительным автоматическим процессом изготовления элементов набора подкрепленных конструкций. Некоторая модификация позволяет получать стержни с криволинейной осью.

Термопластичные полимерные матрицы. В последние годы все более широкое применение в качестве матриц находят термопластичные материалы, которые при нагревании расплавляются, а при последующем охлаждении затвердевают. Преимущества термопластичных матриц по сравнению с описанными выше термореактивными определяются неограниченной жизнеспособностью полимера с завершённой химической структурой и отсутствием необходимости в длительном и энергоемком процессе полимеризации. В связи с этим использование термопластичных связующих может привести к значительному снижению стоимости изделий из композитов. По уровню механических характеристик некоторые термопласты не уступают отвержденным термореактивным связующим, а по таким свойствам, как химическая стойкость и герметичность, как правило, превосходят их. К недостаткам рассматриваемых связующих относятся ярко выраженная зависимость свойств композитов на их основе от температуры, низкая теплостойкость термопластов (исключение составляют специальные теплостойкие материалы) и технологические трудности, связанные с высокой вязкостью их растворов и расплавов. Поэтому для качественной пропитки систем армирующих элементов требуется высокое давление, приводящее к разрушению арматуры. Прогрессивные методы совмещения волокон и термопластичной матрицы предполагают чередование слоев из волокон и пленки (например, органических волокон и полиамидной пленки) и формирование жгутов и лент из армирующих и термопластичных (например, из поликапроамида, полипропилена, полиамида) волокон. В процессе термообработки под давлением термопластичные

1.3. Физико-механические характеристики термопластичных связующих

Параметр	Нейлон 6,6	Полифе- нилен- сульфид	Сопо- лимер этилена	Поли- сульфон	Полиэфир термо- пластич- ный
Предел прочности при рас- тяжении, МПа	83	77	45	72	56
Модуль упругости, ГПа	2,8	4,2	1,4	2,7	2,5
Плотность 10^{-3} , кг/м ³	1,14	1,34	1,7	1,24	1,32
Теплостойкость, °С	65	135	74	174	68
Относительное удлинение, %	10	3—4	150	50—100	10

пленки и волокна расплавляются и, заполняя пространство между армирующими элементами, образуют непрерывную матрицу. Характеристики некоторых видов термопластичной матрицы представлены в табл. 1.3.

Перспективные технологические процессы получения композитных элементов на основе термопластичной матрицы предусматривают прессование или формование панелей и других элементов конструкций из предварительно подготовленных листов, образованных из нитей, лент, ткани и термопластичного полимера. Получаемые в результате предварительного совмещения компонентов такие листовые материалы характеризуются стабильностью структуры, легко обрабатываются и соединяются в процессе изготовления детали под действием температуры и давления. Композитные жгуты и ленты, включающие, как армирующие, так и расплавляемые термопластичные волокна, позволяют широко использовать высокопроизводительный процесс намотки.

Углеродная матрица. Композиты на основе углеродной матрицы получают в результате специальной обработки (карбонизации) систем, образованных из углеродных волокон и фенольных смол или пеков. Отвержденную смолу подвергают пиролизу в инертной среде или в вакууме. Если конечная температура пиролиза не превышает 800—1500 °С, получается карбонизованный материал. В случае нагрева карбонизованного материала до 2500—3000 °С происходит его графитизация. Пиролиз, как правило, сопровождается усадками и увеличением пористости, что вызывает необходимость последующего уплотнения матрицы. Процесс уплотнения осуществляется пропиткой органической смолой или пеком и повторным циклом пиролиза или пропусканьем углеродосодержащего газа, в результате которого происходит пиролитическое осаждение углерода в порах. Многократное повторение циклов пропитка — отверждение — карбонизация благоприятно сказывается на механических свойствах композита, но ведет к значительному увеличению продолжительности процесса изготовления.

Углеродная матрица может быть также образована прямым химическим осаждением из газовой фазы на заготовки из сухого углеродного волокна. При этом используют метан или подобный газообразный углеводород в комбинации с водородом или аргоном. Процесс осуществляют при сравнительно высокой температуре порядка 1000—1500 °С. Матрицы, полученные методом химического осаждения, имеют большую плотность, более высокое содержание углерода, лучшие характеристики сцепления волокна с матрицей, но большую стоимость, чем матрицы, полученные из органических смол и пеков.

Основные преимущества композитов с углеродной матрицей состоят в высокой теплостойкости, стойкости к тепловому удару и облучению, химической инертности. Эти материалы обладают высокими механическими характеристиками при повышенной температуре, малой плотностью и рядом других ценных свойств, позволяющих их применять в термонагруженных защитных и конструкционных элементах. К их недостаткам можно отнести длительность и сложность процесса получения углеродной матрицы, ее хрупкость, а также трудности, возникающие при решении проблемы крепления и соединения деталей из этих материалов.

Металлические матрицы. В последние годы все более широкое применение находят металлические композитные материалы, образуемые из высокомодульных борных или углеродных волокон и пластичной металлической матрицы. Ввиду того, что механические свойства металлической матрицы выше, чем у полимерной, композиты на основе металлической матрицы обладают более высокой жесткостью и прочностью при нагружении поперек волокон и сдвиге, чем полимерные композиты. С другой стороны, металлическая матрица требует значительно более интенсивных в температурном и силовом отношении технологических методов. Для образования металлической матрицы наиболее широко используют сплавы на основе алюминия, имеющего плотность 2700 кг/м³, модуль упругости 70 ГПа и температуру плавления 780 °С. Сплавы алюминия способны подвергаться разнообразным видам обработки, на которых и основываются различные способы изготовления изделий из композитов на металлической матрице. Для формирования металлической матрицы могут быть применены многочисленные технологические методы, включающие различные виды литья, обработку металлов давлением, порошковую металлургию, напыление, осаждение и т. д. Все способы совмещения волокон и матрицы можно разделить на твердофазные, жидкофазные и осаждение.

Твердофазные способы заключаются в сборке пакета заготовок, состоящего из чередующихся слоев материала матрицы и волокон, и последующем соединении компонентов между собой. С целью облегчения укладки армирующих волокон вводится операция изготовления препрега, представляющего собой уложенный на фольгу из материала матрицы слой волокон, зафиксиро-

рованный на ней либо нанесением на волокно слоя матрицы, либо приклеиванием легковыгорающими и не загрязняющими матрицу клеями. Например, ленту на основе алюминиевой матрицы и борных волокон получают в результате намотки волокон на алюминиевую фольгу, обернутую вокруг оправки, и нанесения на поверхность волокон плазменным напылением слоя матричного материала. Для изготовления препрега применяют также процессы химического и электрохимического осаждения материала матрицы на волокна. Например, осаждением получают препреги из углеродного волокна, покрытого алюминием или никелем. Основная операция метода твердофазного совмещения — соединение волокон и матрицы — осуществляется следующими способами: диффузионной сваркой (соединением в вакууме нагретых элементов из однородных и разнородных материалов, протекающим без расплавления материала и основанным на диффузионном взаимопроникновении контактирующих веществ под действием давления); прокаткой листов препрега, нагретых до температуры 600—650 °С; импульсным горячим прессованием на падающих молотах; сваркой взрывом; методами порошковой металлургии; соединением давлением, получающимся в результате температурного расширения при нагревании заготовки в замкнутом объеме.

Жидкофазные способы предусматривают различные виды литья расплавленного материала матриц, обеспечивающие пропитку предварительно уложенной системы волокон. Существует несколько разновидностей метода жидкофазного совмещения: пропитка в вакууме, пропитка при обычном и повышенном давлении и их комбинация. Пропитка расплавом матрицы при нормальном давлении и разновидность этого метода — пропитка пучка волокон протяжкой их через расплав — являются эффективными способами изготовления изделий сложной формы и полуфабрикатов в виде прутков, труб, профилей. Этот метод позволяет получить профильные элементы из углеалюминия, бороалюминия, композиций из углеродных волокон с матрицей из меди и олова. Для улучшения смачиваемости волокон на них наносятся покрытия. На углеродные волокна электрохимическим осаждением наносят тонкие слои никеля и меди, а волокна бора покрывают нитридом бора. Улучшение смачивания волокон происходит и при наложении ультразвуковых колебаний на расплав матричного металла. Принудительную пропитку (пропитку в вакууме или под давлением) обычно применяют при отсутствии смачивания волокон матричным расплавом или для ускорения процесса. Технические характеристики материалов, получаемых принудительной пропиткой или протяжкой через матричный расплав, примерно одинаковые. По сравнению с твердофазным совмещением метод жидкофазного совмещения компонентов характеризуется более высокой производительностью, меньшими механическими воздействиями на компоненты, что позволяет изготавливать крупно-

габаритные изделия и детали сложной формы, а также возможностью применения жгутов и тканей (например, из углеродного волокна).

Образование металлической матрицы методами осаждения состоит в нанесении на волокна различными способами (газофазным, химическим, электролитическим и т. п.) слоя металла и заполнении им межволоконного пространства. Эти методы характеризуются незначительными температурным и механическим воздействиями на волокна в процессе их совмещения с матрицей. В связи с большими технологическими трудностями способы газофазного, химического, электрохимического осаждения в основном применяют для нанесения на армирующие волокна промежуточных слоев, выполняющих роль либо барьеров, предотвращающих чрезмерное взаимодействие волокон с матрицей, либо покрытий, улучшающих смачиваемость и прочность связи между матрицей и волокном. Метод газотермического напыления широко применяют для обеспечения связи между волокном и матрицей при изготовлении препрегов. Этим же методом можно получать и полуфабрикаты в виде лент, листов и профилей.

§ 1.3. Структурные особенности и механические свойства композитов

Рассмотрим типовые структуры композитов, образованные в результате совмещения описанных выше армирующих элементов и матриц. К таким структурам условно можно отнести ориентированные материалы, армированные прямолинейными волокнами (рис. 1.1, а); композиты, армированные тканями (рис. 1.1, б); материалы, хаотически армированные непрерывными (рис. 1.1, в) или дискретными (рис. 1.1, г) волокнами; пространственно армированные системы (рис. 1.1, д).

Отметим, что в конструкции перечисленные композиции обладают двумя уровнями неоднородности: микронеоднородностью, связанной с наличием двух фаз (волокон и матрицы), и макронеоднородностью, связанной с наличием в материале различным образом ориентированных микронеоднородных слоев. При расчете и проектировании конструкций обычно учитывают только второй уровень неоднородности материала, т. е. считается, что он состоит из совокупности квазиоднородных слоев, свойства которых

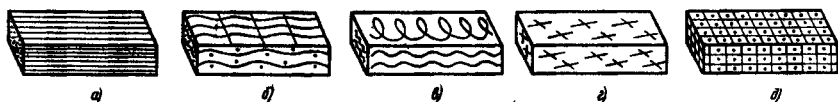


Рис. 1.1. Типовые структуры композитов:

ориентированные материалы, армированные прямолинейными волокнами (а) и тканями (б); хаотически, армированные непрерывными (в) и дискретными (г) волокнами; пространственно армированные (д)

известны. Анализ зависимости этих свойств от характеристик исходных компонентов и их содержания в композиции является предметом микромеханики композитов, основная задача которой заключается в определении эффективных модулей упругости, т. е. коэффициентов, связывающих усредненные по объему напряжения и деформации. К настоящему времени разработано большое число микромоделей композитов, армированных прямолинейными волокнами, которые можно разделить на следующие группы.

1. Модели, учитывающие только упругие свойства и объемные содержания компонентов.

2. Самосопряженные модели, где композит представляется в виде одного волокна, окруженного бесконечной средой, которая обладает свойствами композита. Вариант этой модели представляет собой три концентрических цилиндра, причем внутренний цилиндр имеет свойства волокна, средний — матрицы, наружный — композита.

3. Модели, учитывающие форму и предполагающие регулярное расположение волокон. Модели такого рода исследуются различными методами, основанными на:

упрощенных предположениях о напряженном состоянии матрицы;

точных решениях плоской задачи теории упругости для изотропного пространства (матрицы) с периодической системой включений (волокон);

приближенных или численных решениях задачи теории упругости для повторяющегося элемента структуры, содержащего одно или несколько волокон;

анализе напряженного состояния матрицы методами фотоупругости.

4. Энергетические модели, основанные на аппроксимации распределения напряжений и перемещений матрицы и использовании вариационных принципов, позволяющих получить верхнюю и нижнюю границы для эффективных упругих постоянных.

5. Статистические модели, основанные на предположении о случайном распределении волокон и решении задач теории упругости микронегоднородных сред, структура которых описывается корреляционными функциями различного порядка.

Модели, описывающие композиты, армированные тканями, дополнительно учитывают искривление волокон, связанное с переплетением нитей основы и утка ткани; для анализа хаотически армированных материалов осуществляют их осреднение по углу ориентации волокон; пространственно армированные композиты рассматривают как совокупность ортогональных и взаимно проникающих слоев из прямолинейных или искривленных волокон.

Микромеханика композитов изложена в работах [15, 17, 44, 57, 62, 74, 81, 82, 85, 93]. Отметим, что соотношения микромеханики основаны на некоторых априорных предположениях

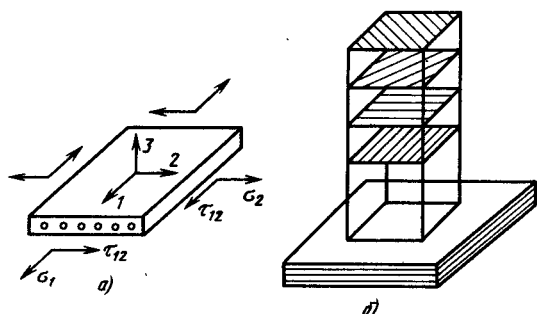


Рис. 1.2. Элемент однонаправленного слоя (а) и слоистого композита (б)

о структуре композита, т. е. на идеализированных моделях, приближенно отражающих реальную структуру материала и часто не учитывающих не поддающиеся формальному описанию особенности материала, связанные с реализуемыми в конкретных условиях параметрами технологического процесса. В связи с этим соотношения микромеханики в основном предназначены для ориентировочных оценок и качественного анализа влияния микроструктурных параметров на свойства композитов, необходимых для решения задач материаловедения, связанных с модификацией свойств и разработкой новых материалов. Для задач расчета конструкций из композитных материалов представляется более оправданным экспериментальный подход, согласно которому упругие постоянные и пределы прочности композита с типовой структурой (см. рис. 1.1) определяют при соответствующих испытаниях плоских, кольцевых или трубчатых образцов, изготовленных тем же технологическим методом, что и рассматриваемая конструкция. В этом случае получаемые экспериментально характеристики позволяют учесть все особенности изготовления материала: качество пропитки; натяжение ленты; давление прессования и т. д. Экспериментальные методы исследования свойств композитов изложены в работе [86].

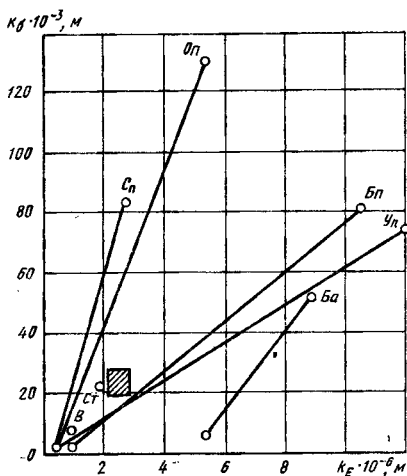
Рассмотрим особенности структуры и свойства композитов с типовыми схемами армирования.

Ориентированные материалы, армированные непрерывными прямолинейными волокнами. Достоинства и высокие механические характеристики композитов наиболее полно реализуются в ориентированных материалах, армированных параллельными волокнами, т. е. в так называемых однонаправленных слоях или монослоях (рис. 1.2, а), из которых путем укладки в различных направлениях образуются слоистые композиты (рис. 1.2, б). Несмотря на большое многообразие структур, которые определяются числом слоев, их толщиной и взаимной ориентацией, свойства таких материалов определяются свойствами однонаправленного слоя. Эти свойства (ориентировочные) представлены в табл. 1.4 и иллюстрируются линиями, показанными на рис. 1.3 и соответствующими стеклопластику (Сп), органопластику (Оп),

Рис. 1.3. Удельная прочность (k_σ) и удельная жесткость (k_E) композитов

боропластику (Бп), углепластику (Уп) и бороалюминию (Ба). Верхние точки характеризуют удельную прочность и жесткость при растяжении вдоль волокон, а нижние — поперек волокон. Заштрихованная прямоугольная область условно соответствует традиционным конструкционным материалам — металлическим сплавам. Из табл. 1.4 и рис. 1.3 следует, что по продольным характеристикам однонаправленные композиты

значительно превосходят металлические сплавы, а по поперечным существенно им уступают. Область, в которой располагаются прямые линии на рис. 1.3, примерно соответствует комбинациям свойств, которые могут быть получены в результате сочетаний однонаправленных композитных слоев с различной ориентацией волокон по отношению к направлению нагружения.



1.4. Физико-механические характеристики однонаправленных композитов

Параметр	Стеклопластик	Углепластик	Органо-пластик	Воропластик	Углерод-углерод	Углерод-алюминий	Вороалюминий
Плотность 10^{-3} , кг/м ³	2,1	1,5	1,38	2,0	1,9	2,2	2,64
Предел прочности, ГПа:							
при растяжении вдоль волокон	1,75	1,1	1,8	1,6	0,34	1,1	1,4
при растяжении поперек волокон	0,034	0,033	0,028	0,065	0,007	0,045	0,14
при сжатии	0,65	0,45	0,28	2,4	—	0,6	2,0
вдоль волокон при сдвиге	0,048	0,027	0,042	0,102	0,03	0,045	0,084
Удельная прочность при растяжении вдоль волокон 10^{-3} , м	83	73	130	80	18	50	53
Модуль упругости, ГПа:							
вдоль волокон	57	180	72	210	170	200	230
поперек волокон	9	6,2	4,9	19	19	—	140
Удельная жесткость 10^{-6} , м	2,7	12	5,3	10,5	8,9	9,1	8,8
Модуль сдвига, ГПа	5,2	5,0	2,0	6,2	9	—	63

Диаграммы деформирования всех ориентированных композитов при растяжении и сжатии вдоль волокон в первом приближении можно считать линейными вплоть до разрушения материала. При поперечном нагружении и особенно при сдвиге в плоскости армирования иногда наблюдается нелинейное поведение материала. Однако жесткости при поперечном нагружении и сдвиге значительно меньше продольной, и в слоистом пакете отмеченная нелинейность, как правило, проявляется слабо. Таким образом, волокнистые композиты удовлетворительно описываются моделью линейно-упругого тела.

Прочность однонаправленного слоя, показанного на рис. 1.2, а, определяется пределами прочности при растяжении и сжатии вдоль и поперек волокон ($\bar{\sigma}_1^\pm$, $\bar{\sigma}_2^\pm$) и при сдвиге в плоскости слоя ($\bar{\tau}_{12}$). Истощение несущей способности материала при продольном растяжении происходит в результате разрыва волокон, а при сжатии — в результате потери устойчивости волокон или образования трещины, параллельной волокнам. Разрушение при растяжении поперек волокон и при сдвиге связано, как правило, с разрушением матрицы (нарушение когезионной прочности) или с отслоением матрицы от волокон (нарушение адгезионной прочности). Разрушение при сжатии поперек волокон происходит в результате скола материала под углом к направлению нагружения. Разрушение композитов даже при простом нагружении является весьма сложным процессом, теоретическое описание которого связано с большими трудностями. Поэтому, как уже отмечалось, наибольшее распространение получили экспериментальные методы определения пределов прочности $\bar{\sigma}_1^\pm$, $\bar{\sigma}_2^\pm$, $\bar{\tau}_{12}$. Прочность при продольном растяжении и сжатии определяется на плоских образцах или кольцах с однонаправленным армированием. При растяжении и сжатии поперек волокон используют плоские образцы с поперечным армированием или трубки с кольцевыми волокнами. Предел прочности при сдвиге определяют при кручении таких трубок. Однонаправленный слой, работая в составе многослойного материала (см. рис. 1.2, б), как правило, испытывает воздействие всех трех напряжений: σ_1 , σ_2 и τ_{12} (см. рис. 1.2, а). Поэтому необходимо иметь критерий прочности, по которому можно предсказывать разрушение материала на основе имеющихся данных о разрушении и свойствах композита, полученных при простых опытах (растяжении, сжатии, сдвиге). Существующие критерии прочности имеют в основном феноменологический характер, т. е. представляют собой аналитическую аппроксимацию экспериментальных результатов. В связи с тем, что такая аппроксимация может быть осуществлена неоднозначно, а степень ее соответствия экспериментальным результатам, имеющим, как правило, значительный разброс, оценивается субъективно, существует множество таких критериев [4, 29, 53, 80, 81, 93, 95].

Одна из наиболее простых форм аппроксимации предельного

состояния ортотропного материала, находящегося в условиях плоского напряженного состояния (см. рис. 1.2, а), имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2} + \left(\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\bar{\tau}_{12}}\right)^2 \leq 1. \quad (1.1)$$

Из (1.1) следует, что критерий нечувствителен к знаку нормальных напряжений, т. е. строго справедлив для материалов с одинаковой прочностью при растяжении и сжатии. Однако его можно использовать и для оценки прочности материалов с различной сопротивляемостью растяжению и сжатию. Если знаки напряжений известны (что обычно и бывает), то вместо $\bar{\sigma}_{1,2}$ подставляют $\bar{\sigma}_{1,2}^+$, если $\sigma_{1,2} > 0$, и $\bar{\sigma}_{1,2}^-$, если $\sigma_{1,2} < 0$. Соотношение (1.1), если сохранить в нем знак равенства, определяет в пространстве напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ поверхность, называемую предельной (рис. 1.4, а). Как следует из табл. 1.4, для однонаправленных материалов $\bar{\sigma}_1 \gg \bar{\sigma}_2$ и $\bar{\sigma}_1 \gg \bar{\tau}_{12}$, т. е. первые два слагаемых (1.1) оказываются малыми, и критерий можно записать в виде

$$\left(\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\bar{\tau}_{12}}\right)^2 \leq 1. \quad (1.2)$$

Таким образом, разрушение слоя связано с напряжениями σ_2 и τ_{12} , т. е. с разрушением связующего, в результате которого образуются трещины, параллельные волокнам. Это явление называется нарушением монолитности слоя и далеко не всегда приводит к разрушению слоистого материала, так как волокна продолжают воспринимать нагрузку. Разрушение волокон определяется первым слагаемым в (1.1); соответствующее условие прочности имеет вид

$$(\sigma_1/\bar{\sigma}_1)^2 \leq 1. \quad (1.3)$$

Условия (1.2), (1.3) определяют цилиндрическую предельную поверхность, показанную на рис. 1.4, б.

В практических расчетах часто применяют более простую форму записи критерия прочности:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1^- &< \sigma_1 < \bar{\sigma}_1^+, \quad \bar{\sigma}_2^- < \sigma_2 < \\ &\leq \bar{\sigma}_2^+, \quad |\tau_{12}| \leq \bar{\tau}_{12}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Предельная поверхность при этом образуется гранями

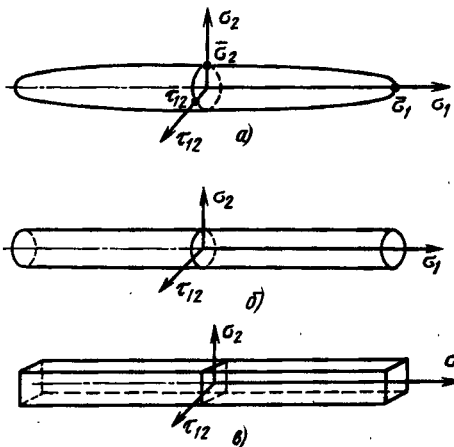


Рис. 1.4. Предельные поверхности однонаправленного композита, соответствующие критериям прочности:

а — по формуле (1.1); б — (1.2), (1.3); в — (1.4)

параллелепипеда, показанного на рис. 1.4, в. Преимуществом формы записи (1.4) является то, что она позволяет получить информацию о напряжениях, которые вызывают разрушение слоя, и, следовательно, о характере этого разрушения. Критерий (1.4) иногда записывают через деформации

$$\bar{e}_1^- < e_1 < \bar{e}_1^+, \bar{e}_2^- < e_2 < \bar{e}_2^+, |e_{12}| < \bar{e}_{12}. \quad (1.5)$$

Значения нормальных напряжений и деформаций подставляют в (1.4) и (1.5) с учетом знаков.

Материалы, армированные тканями. Большинство применяемых волокон (исключение составляют борные волокна) в результате текстильной переработки позволяют получать ткани, которые широко используют в композитах в качестве армирующих элементов. Основным преимуществом таких материалов является их высокая технологичность, особенно при изготовлении крупногабаритных изделий. В то же время текстильная переработка волокон и их искривление, появляющееся в результате переплетения, вызывают значительное снижение прочности и жесткости материала при нагружении в направлениях армирования. Ткани обычно изготавливают из низкомодульных стеклянных и органических волокон. Стеклоткани конструкционного назначения формируются из текстильных крученых нитей, состоящих из волокон диаметром $(6 \div 7) \times 10^{-6}$ м, и стекложгутов из волокон диаметром 10×10^{-6} м. В производстве композитов на основе тканей (текстолитов) применяют в основном ткани полотняного и сатинового переплетения. Механические свойства материала зависят как от вида переплетения волокон, так и от соотношения волокон по основе и утку ткани. Типовые свойства материалов на основе стеклотканей различного переплетения представлены в табл. 1.5. Как видно из приведенных результатов, тканые материалы значительно уступают по прочности и жесткости композитам с прямолинейными волокнами. Например, два слоя стеклопластика, пред-

1.5. Характеристики стеклотекстолитов на основе стеклотканей различного плетения

Вид ткани	Толщина тка- ни, мм	Плотность пла- стика 10 ⁻¹ , кг/м ²	Содержание связующего (масс. доли), %	Предел прочности при растя- жении, ГПа		Модуль уп- ругости при растяжении, ГПа	
				Ос- нова	Уток	Ос- нова	Уток
Сатиновая:							
8/3	0,23	1,89	30,7	0,67	0,33	33	21
5/3	0,35	1,85	33,8	0,53	0,28	27	20
Полотняная	0,27	1,93	27,1	0,52	0,30	30	25
Основная	0,25	1,94	25,5	0,73	0,14	35	17
Многослойная	2,50	1,85	31,5	0,34	0,28	25	18

ставленного в табл. 1.4, позволяя получить материал, обладающий в двух взаимно ортогональных направлениях пределами прочности порядка 0,88 ГПа. На рис. 1.3-стеклотекстолитам соответствует точка Ст. Из рис. 1.3 следует, что по удельным характеристикам рассматриваемые композиты соответствуют традиционным конструкционным материалам (заштрихованная область). Прочность и жесткость материалов, армированных тканями, могут быть увеличены в результате полной или частичной замены стеклянных волокон органическими или углеродными.

Приведенные выше оценки относились к нагружению тканых материалов в направлении нитей основы или утка, однако характеристики тканых (армированных в ортогональных направлениях) композитов зависят от угла между направлениями нагрузки и нитей ткани. При действии нагрузки под углом к ориентации нитей прочность и жесткость материала в значительной мере определяются свойствами полимерного связующего. С увеличением этого угла модуль упругости и предел прочности снижаются, а модуль сдвига и коэффициент Пуассона возрастают, достигая максимальных значений при угле 45° . Это обстоятельство используется при изготовлении элементов из тканых композитов методами прессования, вакуумного, автоклавного и контактного формования. Сухая ткань или ткань, пропитанная неотвержденным связующим при растяжении под углом 45° по отношению к нитям основы и утка, обладает высокой деформационной способностью, что позволяет формировать из плоских полотнищ панели двойной кривизны с неразвертывающейся поверхностью.

Прочность тканых материалов при нагружении в направлении нитей основы и утка определяется числом и прочностью этих нитей, а прочность при сдвиге в плоскости армирования связана в основном со свойствами связующего. В общем случае плоского напряженного состояния нити основы и утка, а также соединяющая их матрица сравнительно слабо взаимодействуют, и условие прочности может быть принято в форме записи (1.4) или (1.5), где оси 1 и 2 совпадают с направлениями армирования.

Композиты с хаотическим армированием. Хаотически армированные композиты образуются в результате соединения полимерной матрицы с неориентированными непрерывными или короткими волокнами. Типичным материалом первого типа является композиция АГ-4В [60] на основе спутанного стекловолокна и фенолоформальдегидного связующего, обладающая в отвержденном состоянии модулем упругости 14 ГПа и пределом прочности на растяжение 63 МПа. Наибольшее распространение получили материалы второго типа, содержащие хаотически расположенные короткие волокна. Композиты с неориентированной структурой получают: из коротких волокон длиной $(5 \div 100) \times 10^{-3}$ м, образуемых путем расчленения расплавленной струи стекломассы потоком пара или газа; гранул; рубленых пучков волокон и однонаправленных лент, пропитываемых связующим предварительно или в процессе

изготовления детали. Изготовление изделий осуществляется методами прессования, напыления, контактным или вакуумным формованием. Механические свойства волокнитов повышаются с увеличением длины и степени ориентации волокон. Кривые деформирования таких материалов нелинейны. При изготовлении деталей в ряде случаев происходит некоторая ориентация волокон, степень которой зависит от конфигурации изделия и метода его изготовления. Это приводит к тому, что в различных деталях из одного и того же материала механические характеристики могут существенно различаться. Волокнит на основе полиэфирного связующего и стеклянных волокон длиной 38×10^{-3} м, полученный прессованием, имеет плотность 1700 кг/м^3 , модуль упругости $12,4 \text{ ГПа}$ и предел прочности при растяжении 138 МПа [45]. На рис. 1.3 рассматриваемым волокнитам соответствует точка В. Как видно, по удельным характеристикам они значительно уступают остальным материалам. Основными достоинствами волокнистых композитов с хаотическим расположением волокон являются хорошая технологичность и сравнительно низкая стоимость, в связи с чем их широко применяют для изготовления деталей несилового назначения в самых различных областях техники.

Композиты с пространственным армированием. Существенным недостатком композитных материалов, образованных из армированных слоев, является их низкая прочность при межслоевом сдвиге, растяжении и сжатии, которая определяется матрицей. Этот недостаток в значительной мере устраняется при пространственном армировании. Образование композиций с пространственной структурой армирования возможно с помощью многослойных тканей, систем нитей, ориентированных в трех и более направлениях, а также с помощью дискретных волокон, размещаемых в пространстве между основными армирующими элементами.

В многослойных тканях поперечное армирование достигается переплетением нитей одного из направлений отдельных слоев или всей ткани по толщине. Многослойные ткани изготавливают обычно из низкомодульных стекло-, органо- и углеродных волокон. Применение, например, стеклотканей пространственного плетения приводит к возрастанию сдвиговой прочности композита в 2—2,5 раза, но из-за существенного искривления волокон уменьшается прочность при растяжении.

Структура пространственного материала, образованного системой нитей, создается переплетением семейств прямолинейных волокон, каждое из которых образует в пространстве некоторые углы с другими семействами. Такой принцип пространственного армирования используют для получения композитов на основе углеродных волокон и углеродной матрицы. В настоящее время интенсивно разрабатываются углерод-углеродные композиты, армированные в трех и более направлениях. Простейшая пространственная структура образуется правильным переплетением трех

семейств прямолнейных волокон. В этом случае каждое семейство волокон образует с другими семействами углы в 90° . Четырехмерная структура образуется путем правильного переплетения четырех семейств волокон, и их направления соответствуют четырем высотам правильного тетраэдра. Таким образом, каждое семейство волокон образует с другими семействами углы в $70,5^\circ$. Существуют пространственные структуры, образованные из большего числа семейств волокон. Наиболее перспективной считается четырехмерная структура — она допускает такое же, как и в трехмерной структуре, содержание волокон, но ее свободные внутренние пустоты открыты, взаимосвязаны и легко пронизываются углеродом, образующим матрицу, тогда как ячейки трехмерной структуры состоят из практически изолированных полостей. При производстве элементов из рассматриваемых композитов сначала, в соответствии с заданной схемой армирования, собирают стержни из углеродных волокон, пропитанных, например, фенольной смолой. Диаметр стержней порядка $(1 \div 2) \times 10^{-3}$ м. Стержни собирают с помощью приспособлений, обеспечивающих точное соблюдение схемы их расположения и ориентации. Как уже отмечалось в § 1.2, углеродная матрица формируется в результате многоступенчатой пропитки и пиролиза или прямым осаждением углерода из газовой фазы. Получаемые таким образом пространственно армированные углерод-углеродные композиты характеризуются относительной изотропностью, низким температурным коэффициентом линейного расширения и допускают изготовление деталей больших размеров, работающих при высоких температурах.

Введение дискретных волокон в пространство между основными непрерывными волокнами при образовании пространственно армированного композита осуществляется несколькими способами: чередованием слоев, состоящих из непрерывных волокон и дискретных волокон в виде матов, бумаги; пропиткой связующим, в которое предварительно введены дискретные волокна; вискеризацией основных армирующих волокон.

Вискеризация — нанесение дискретных волокон или нитевидных кристаллов на армирующие элементы — осуществляется различными способами: выращиванием нитевидных кристаллов на поверхности волокон из газовой фазы; осаждением дискретных волокон и нитевидных кристаллов на поверхность нитей, жгутов, лент, тканей из аэрозоля и суспензий. При оптимальном содержании нитевидных кристаллов в композитах удается повысить разрушающее напряжение при сдвиге в 2—3 раза, модуль упругости при сдвиге в 1,3—1,6 раза, разрушающее напряжение при сжатии в 1,5—2 раза и при растяжении в трансверсальном направлении в 1,5—3 раза. Вискеризованные композиты характеризуются также более высокой длительной прочностью при повышенных температурах и ударной вязкостью по сравнению с обычными материалами.

Свойства и особенности структуры пространственно армированных композитов подробно рассмотрены в работе [44].

Выше были приведены механические свойства основных типов композитных материалов. Следует отметить, что они обладают широким спектром и других физических свойств. В частности, положительным или отрицательным температурным коэффициентом линейного расширения, электропроводимостью или электроизоляционными свойствами, радиопрозрачностью, поглощающей или отражательной способностью, коррозионностойкостью и т. д. Направленное использование широких возможностей композитов открывает перспективы для создания материалов, обладающих свойствами, в наибольшей степени соответствующими назначению и условиям эксплуатации конструкции.

§ 1.4. Характеристики армированного слоя

Как следует из табл. 1.4, волокнистые композиты с однонаправленным армированием обладают высокими механическими характеристиками только при нагружении вдоль волокон. При нагружении поперек волокон и при сдвиге жесткость и особенно прочность материала оказываются весьма низкими, так как они определяются свойствами матрицы. В связи с этим однонаправленные материалы в чистом виде практически не используются в конструкциях. Как правило, материал представляет собой совокупность однонаправленных или тканых слоев с различными углами ориентации волокон (см. рис. 1.2, б). Ниже будут получены соотношения, определяющие термоупругие характеристики слоя, армированного под углом к направлению нагружения.

Рассмотрим слой, отнесенный к координатам 1, 2, 3, связанным с направлением армирования. В однонаправленном материале ось 1 совместим с направлением волокон (см. рис. 1.2, а), а в случае армирования тканью направим оси 1 и 2 вдоль нитей основы и утка. Ось 3 ортогональна плоскости армирования. Предположим, что элемент слоя находится в условиях плоского напряженного состояния (см. рис. 1.2, а) и температурного воздействия. Поскольку оси координат 1, 2 являются осями ортотропии, закон Гука для слоя может быть записан в виде

$$e_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2} + \alpha_1 T; \quad e_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_2 T; \quad (1.6)$$

$$e_{12} = \tau_{12}/G_{12},$$

где E_1 , E_2 и G_{12} — модули упругости в направлениях 1, 2 и модуль сдвига в плоскости слоя; μ_{12} , μ_{21} — коэффициенты Пуассона; α_1 , α_2 — температурные коэффициенты линейного расширения; T — приращение температуры.

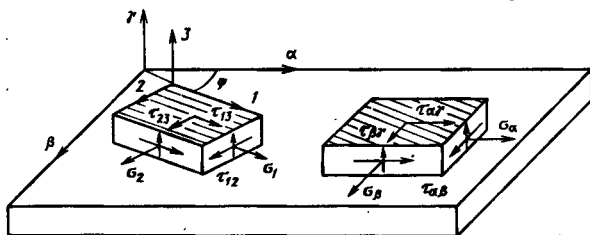


Рис. 1.5. Элемент однонаправленного слоя композита в осях 1, 2, 3, связанных с направлением армирования, и в осях α , β , γ конструкции

Как уже отмечалось, характеристики слоя в координатах 1, 2 определяют экспериментально. Равенства (1.6) могут быть разрешены относительно напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \bar{E}_1(e_1 + \mu_{12}e_2) - \bar{E}_1(\alpha_1 + \mu_{12}\alpha_1)T; \\ \sigma_2 &= \bar{E}_2(e_2 + \mu_{21}e_1) - \bar{E}_2(\alpha_2 + \mu_{21}\alpha_1)T; \\ \tau_{12} &= G_{12}e_{12},\end{aligned}\quad (1.7)$$

где $\bar{E}_{1,2} = E_{1,2}/(1 - \mu_{12}\mu_{21})$. Здесь имеет место условие симметрии упругих постоянных

$$E_1\mu_{12} = E_2\mu_{21}. \quad (1.8)$$

Введем ортогональные координаты α , β , γ и предположим, что ось 1 армированного слоя составляет с осью α угол φ (рис. 1.5). Статические соотношения, связывающие напряжения в системах координат α , β и 1, 2, следующие:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi - \tau_{12} \sin 2\varphi; \\ \sigma_\beta &= \sigma_1 \sin^2 \varphi + \sigma_2 \cos^2 \varphi + \tau_{12} \sin 2\varphi; \\ \tau_{\alpha\beta} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{12} \cos 2\varphi,\end{aligned}\quad (1.9)$$

а геометрические соотношения, позволяющие выразить деформации в системе координат 1, 2 через деформации в осях α , β , можно записать следующим образом [66]:

$$\begin{aligned}e_1 &= e_\alpha \cos^2 \varphi + e_\beta \sin^2 \varphi + e_{\alpha\beta} \sin \varphi \cos \varphi; \\ e_2 &= e_\alpha \sin^2 \varphi + e_\beta \cos^2 \varphi - e_{\alpha\beta} \sin \varphi \cos \varphi; \\ e_{12} &= (e_\beta - e_\alpha) \sin 2\varphi + e_{\alpha\beta} \cos 2\varphi.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Получим теперь соотношения, связывающие напряжения σ_α , σ_β , $\tau_{\alpha\beta}$ с деформациями e_α , e_β , $e_{\alpha\beta}$ и температурой. С этой целью подставим деформации e_1 , e_2 , e_{12} (1.10) в закон Гука (1.7), а полученные в результате этой подстановки напряжения σ_1 , σ_2 , τ_{12} — в соотношения (1.9). После некоторых преобразований с помощью

условия симметрии (1.8) запишем физические соотношения для слоя, армированного под углом φ к оси α :

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= A_{11}^I e_{\alpha} + A_{12}^I e_{\beta} + A_{13}^I e_{\alpha\beta} - A_{1T}^I T; \\ \sigma_{\beta} &= A_{21}^I e_{\alpha} + A_{22}^I e_{\beta} + A_{23}^I e_{\alpha\beta} - A_{2T}^I T; \\ \tau_{\alpha\beta} &= A_{31}^I e_{\alpha} + A_{32}^I e_{\beta} + A_{33}^I e_{\alpha\beta} - A_{3T}^I T,\end{aligned}\quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned}A_{11}^I &= \bar{E}_1 \cos^4 \varphi + \bar{E}_2 \sin^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ A_{12}^I &= A_{21}^I = \bar{E}_1 \mu_{12} + [\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2(\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ A_{22}^I &= \bar{E}_1 \sin^4 \varphi + \bar{E}_2 \cos^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ A_{13}^I &= A_{31}^I = \sin \varphi \cos \varphi [\bar{E}_1 \cos^2 \varphi - \bar{E}_2 \sin^2 \varphi - (\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12}) \cos 2\varphi]; \\ A_{23}^I &= A_{32}^I = \sin \varphi \cos \varphi [\bar{E}_1 \sin^2 \varphi - \bar{E}_2 \cos^2 \varphi + (\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12}) \cos 2\varphi]; \\ A_{13}^I &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_1 \mu_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12} \cos^2 2\varphi; \\ A_{1T}^I &= \bar{E}_1 (\alpha_1 + \mu_{12} \alpha_2) \cos^2 \varphi + \bar{E}_2 (\alpha_2 + \mu_{21} \alpha_1) \sin^2 \varphi; \\ A_{2T}^I &= \bar{E}_1 (\alpha_1 + \mu_{12} \alpha_2) \sin^2 \varphi + \bar{E}_2 (\alpha_2 + \mu_{21} \alpha_1) \cos^2 \varphi; \\ A_{3T}^I &= \sin \varphi \cos \varphi [\bar{E}_1 (\alpha_1 + \mu_{12} \alpha_2) - \bar{E}_2 (\alpha_2 + \mu_{21} \alpha_1)].\end{aligned}\quad (1.12)$$

Для получения обратных соотношений можно разрешить уравнения (1.11) относительно деформаций. Однако проще повторить их вывод, используя статические и геометрические соотношения, обратные (1.9) и (1.10). Действительно, разрешая (1.9) относительно напряжений σ_1 , σ_2 , τ_{12} и (1.10) — относительно e_{α} , e_{β} , $e_{\alpha\beta}$, имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{\alpha} \cos^2 \varphi + \sigma_{\beta} \sin^2 \varphi + \tau_{\alpha\beta} \sin 2\varphi; \\ \sigma_2 &= \sigma_{\alpha} \sin^2 \varphi + \sigma_{\beta} \cos^2 \varphi - \tau_{\alpha\beta} \sin 2\varphi; \\ \tau_{12} &= (\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha}) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{\alpha\beta} \cos 2\varphi\end{aligned}\quad (1.13)$$

и

$$\begin{aligned}e_{\alpha} &= e_1 \cos^2 \varphi + e_2 \sin^2 \varphi - e_{12} \sin \varphi \cos \varphi; \\ e_{\beta} &= e_1 \sin^2 \varphi + e_2 \cos^2 \varphi + e_{12} \sin \varphi \cos \varphi; \\ e_{\alpha\beta} &= (e_1 - e_2) \sin 2\varphi + e_{12} \cos 2\varphi.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Заметим, что первое равенство (1.13) может быть получено, если сложить первое соотношение (1.9), умноженное на $\cos^2 \varphi$, второе — умноженное на $\sin^2 \varphi$, и третье — умноженное на $\sin 2\varphi$. Остальные выводятся аналогичным образом. Подставляя теперь напряжения σ_1 , σ_2 , τ_{12} (1.13) в закон Гука (1.6), а полу-

ценные таким образом деформации e_1, e_2, e_{12} — в правые части равенств (1.14), запишем выражения, обратные (1.11):

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha^1} - \mu_{\alpha\beta}^1 \frac{\sigma_\beta}{E_\beta^1} + \eta_{\alpha,\alpha\beta}^1 \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}^1} + \alpha_\alpha^1 T; \\ e_\beta &= \frac{\sigma_\beta}{E_\beta^1} - \mu_{\beta\alpha}^1 \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha^1} + \eta_{\beta,\alpha\beta}^1 \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}^1} + \alpha_\beta^1 T; \\ e_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta,\alpha}^1 \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha^1} + \eta_{\alpha\beta,\beta}^1 \frac{\sigma_\beta}{E_\beta^1} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}^1} + \alpha_{\alpha\beta}^1 T, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_\alpha^1} &= \frac{\cos^4 \varphi}{E_1} + \frac{\sin^4 \varphi}{E_2} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{21}}{E_1} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ \frac{\mu_{\alpha\beta}^1}{E_\beta^1} &= \frac{\mu_{\beta\alpha}^1}{E_\alpha^1} = \frac{\mu_{21}}{E_1} - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\mu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ \frac{\eta_{\alpha,\alpha\beta}^1}{G_{\alpha\beta}^1} &= \frac{\eta_{\alpha\beta,\alpha}^1}{E_\alpha^1} = \sin 2\varphi \left[\frac{\cos^2 \varphi}{E_1} - \frac{\sin^2 \varphi}{E_2} - \left(\frac{1}{2G_{12}} - \frac{\mu_{21}}{E_1} \right) \cos 2\varphi \right]; \\ \frac{\eta_{\beta,\alpha\beta}^1}{G_{\alpha\beta}^1} &= \frac{\eta_{\alpha\beta,\beta}^1}{E_\beta^1} = \sin 2\varphi \left[\frac{\sin^2 \varphi}{E_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{E_2} + \left(\frac{1}{2G_{12}} - \frac{\mu_{21}}{E_1} \right) \cos 2\varphi \right]; \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{E_\beta^1} = \frac{\sin^4 \varphi}{E_1} + \frac{\cos^4 \varphi}{E_2} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{21}}{E_1} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

$$\frac{1}{G_{\alpha\beta}^1} = \sin^2 2\varphi \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\mu_{21}}{E_1} \right) + \frac{\cos^2 2\varphi}{G_{12}};$$

$$\alpha_\alpha^1 = \alpha_1 \cos^2 \varphi + \alpha_2 \sin^2 \varphi, \quad \alpha_\beta^1 = \alpha_1 \sin^2 \varphi + \alpha_2 \cos^2 \varphi;$$

$$\alpha_{\alpha\beta}^1 = (\alpha_1 - \alpha_2) \sin 2\varphi,$$

где E_α^1, E_β^1 и $G_{\alpha\beta}^1$ — модули упругости слоя в направлениях α и β и модуль сдвига в плоскости армирования в этих осях; $\mu_{\alpha\beta}^1$ и $\mu_{\beta\alpha}^1$ — коэффициенты Пуассона; η — коэффициенты, определяющие влияние касательных напряжений на удлинения и нормальных напряжений на деформацию сдвига. Наличие этих коэффициентов показывает, что слой, ортотропный в координатах 1, 2, является анизотропным в координатах α, β .

В дальнейшем понадобятся также упругие постоянные слоя при сдвиге в плоскостях, ортогональных плоскости армирования (рис. 1.5). В осях координат 1, 2 закон Гука имеет вид

$$\tau_{12} = G_{12}e_{12}; \quad \tau_{23} = G_{23}e_{23}. \quad (1.17)$$

Здесь G_{12} и G_{23} — модули сдвига слоя, определяемые экспериментально. Запишем соотношения, связывающие касательные напряжения и деформации сдвига в координатах α, β, γ и 1, 2, 3 (см. рис. 1.5):

$$\tau_{\alpha\gamma} = \tau_{12} \cos \varphi - \tau_{23} \sin \varphi, \quad \tau_{\beta\gamma} = \tau_{23} \cos \varphi + \tau_{12} \sin \varphi; \quad (1.18)$$

$$\varpi_{12} = \varpi_{\alpha\gamma} \cos \varphi + \varpi_{\beta\gamma} \sin \varphi, \quad \varpi_{23} = \varpi_{\beta\gamma} \cos \varphi - \varpi_{\alpha\gamma} \sin \varphi \quad (1.19)$$

и

$$e_{13} = e_{\alpha\gamma} \cos \varphi + e_{\beta\gamma} \sin \varphi, \quad e_{23} = e_{\beta\gamma} \cos \varphi - e_{\alpha\gamma} \sin \varphi; \quad (1.20)$$

$$e_{\alpha\gamma} = e_{13} \cos \varphi - e_{23} \sin \varphi, \quad e_{\beta\gamma} = e_{23} \cos \varphi + e_{13} \sin \varphi. \quad (1.21)$$

С помощью равенств (1.17), (1.18), (1.20) можно получить соотношения типа (1.11), т. е.

$$\tau_{\alpha\gamma} = A_{44}^1 e_{\alpha\gamma} + A_{45}^1 e_{\beta\gamma}; \quad \tau_{\beta\gamma} = A_{54}^1 e_{\alpha\gamma} + A_{55}^1 e_{\beta\gamma}, \quad (1.22)$$

где

$$A_{44}^1 = G_{13} \cos^2 \varphi + G_{23} \sin^2 \varphi;$$

$$A_{55}^1 = G_{13} \sin^2 \varphi + G_{23} \cos^2 \varphi;$$

$$A_{45}^1 = A_{54}^1 = \sin \varphi \cos \varphi (G_{13} - G_{23}).$$

Обратные им соотношения типа (1.15) следуют из равенств (1.17), (1.19), (1.21), т. е.

$$\begin{aligned} e_{\alpha\gamma} &= \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}^1} + \lambda_{\alpha\gamma, \beta\gamma}^1 \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}^1}; \\ e_{\beta\gamma} &= \lambda_{\beta\gamma, \alpha\gamma}^1 \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}^1} + \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}^1}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где

$$\frac{1}{G_{\alpha\gamma}^1} = \frac{\cos^2 \varphi}{G_{13}} + \frac{\sin^2 \varphi}{G_{23}};$$

$$\frac{1}{G_{\beta\gamma}^1} = \frac{\sin^2 \varphi}{G_{13}} + \frac{\cos^2 \varphi}{G_{23}};$$

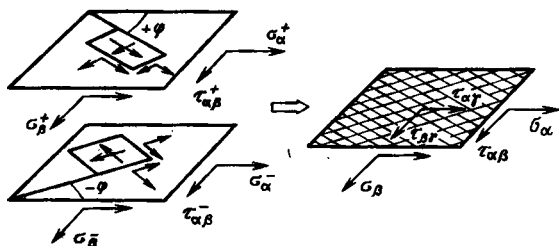
$$\frac{\lambda_{\alpha\gamma, \beta\gamma}^1}{G_{\beta\gamma}^1} = \frac{\lambda_{\beta\gamma, \alpha\gamma}^1}{G_{\alpha\gamma}^1} = \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{G_{13}} - \frac{1}{G_{23}} \right),$$

где $G_{\alpha\gamma}$, $G_{\beta\gamma}$ — модули сдвига слоя в плоскостях $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$; λ — коэффициенты, характеризующие взаимное влияние деформаций сдвига в этих плоскостях.

§ 1.5. Характеристики симметричной системы слоев

В слоистых композитах слою с углом армирования $+\varphi$, как правило, соответствует такой же слой с углом армирования $-\varphi$ (рис. 1.6). Практически все автоматизированные технологические процессы формования слоистого пакета обеспечивают укладку, а в некоторых случаях и взаимное переплетение смежных симметричных слоев с углами $\pm\varphi$. Такие два слоя естественно считать при расчете как один симметрично армированный слой. Такое предположение вполне соответствует реальной структуре слоистых композитов и значительно упрощает соотношения, связывающие напряжения и деформации. Если каждый из сим-

Рис. 1.6. Взаимодействие симметрично армированных слоев



метричных слоев, показанных на рис. 1.6, является анизотропным в координатах α, β , то, работая совместно, они образуют ортотропный слой, закон Гука для которого имеет более простую форму записи, чем соотношения (1.11), (1.15), (1.22) и (1.23) для отдельного слоя. Для получения этого закона запишем равенства (1.7), (1.9) и (1.10) для слоев с углами армирования $\pm\varphi$:

$$\begin{aligned}\sigma_1^\pm &= \bar{E}_1(e_1^\pm + \mu_{12}e_2^\pm) - \bar{E}_1(\alpha_1 + \mu_{12}\alpha_2)T; \\ \sigma_2^\pm &= \bar{E}_2(e_2^\pm + \mu_{21}e_1^\pm) - \bar{E}_2(\alpha_2 + \mu_{21}\alpha_1)T; \\ \tau_{12}^\pm &= G_{12}e_{12}^\pm;\end{aligned}\quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^\pm &= \sigma_1^\pm \cos^2 \varphi + \sigma_2^\pm \sin^2 \varphi \mp \tau_{12}^\pm \sin 2\varphi; \\ \sigma_\beta^\pm &= \sigma_1^\pm \sin^2 \varphi + \sigma_2^\pm \cos^2 \varphi \pm \tau_{12}^\pm \sin 2\varphi;\end{aligned}\quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta}^\pm &= \pm (\sigma_1^\pm - \sigma_2^\pm) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{12}^\pm \cos 2\varphi; \\ e_1^\pm &= e_\alpha \cos^2 \varphi + e_\beta \sin^2 \varphi \pm e_{\alpha\beta} \sin \varphi \cos \varphi; \\ e_2^\pm &= e_\alpha \sin^2 \varphi + e_\beta \cos^2 \varphi \mp e_{\alpha\beta} \sin \varphi \cos \varphi; \\ e_{12}^\pm &= \pm (e_\beta - e_\alpha) \sin 2\varphi + e_{\alpha\beta} \cos 2\varphi.\end{aligned}\quad (1.26)$$

Здесь знаки $\pm$ соответствуют слоям с углами $\pm\varphi$. В соотношениях (1.24) учтено, что свойства материала обоих слоев одинаковы, а равенства (1.26) учитывают условия совместности деформаций слоев: $e_\alpha^\pm = e_\alpha$; $e_\beta^\pm = e_\beta$; $e_{\alpha\beta}^\pm = e_{\alpha\beta}$. Подставляя деформации (1.26) в закон Гука (1.24), а напряжения $\sigma_1^\pm$, $\sigma_2^\pm$, $\tau_{12}^\pm$ — в соотношения (1.25), получим напряжения $\sigma_\alpha^\pm$, $\sigma_\beta^\pm$, $\tau_{\alpha\beta}^\pm$, выраженные через деформации e_α , e_β , $e_{\alpha\beta}$. Осредняя напряжения по формулам (рис. 1.6):

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha^+ + \sigma_\alpha^-); \quad \sigma_\beta = \frac{1}{2}(\sigma_\beta^+ + \sigma_\beta^-); \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tau_{\alpha\beta}^+ + \tau_{\alpha\beta}^-),$$

запишем физические соотношения, связывающие средние напряжения симметричной пары слоев с соответствующими деформациями:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= A_{11}e_\alpha + A_{13}e_\beta - A_{17}T; \quad \sigma_\beta = A_{21}e_\alpha + A_{23}e_\beta - A_{27}T; \\ \tau_{\alpha\beta} &= A_{33}e_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (1.27)$$

Здесь $A_{mn} = A_{mn}^1$, $A_{mT} = A_{mT}^1$, где A_{mn}^1 ($mn = 11, 12, 21, 22, 33$) и A_{mT}^1 ($m = 1, 2$) определяются равенствами (1.12). Соотношения (1.27) соответствуют ортотропному материалу, у которого нагружение вдоль осей ортотропии α и β не вызывает изменения прямого угла между этими осями, а касательные напряжения не вызывают удлинений в направлениях α и β . Разрешая равенства (1.27) относительно деформаций, получим

$$e_{\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha}}{E_{\alpha}} - \mu_{\alpha\beta} \frac{\sigma_{\beta}}{E_{\beta}} + \alpha_{\alpha} T; e_{\beta} = \frac{\sigma_{\beta}}{E_{\beta}} - \mu_{\beta\alpha} \frac{\sigma_{\alpha}}{E_{\alpha}} + \alpha_{\beta} T; \quad (1.28)$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}},$$

где

$$E_{\alpha} = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}; E_{\beta} = A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}}; G_{\alpha\beta} = A_{33}; \quad (1.29)$$

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{A_{12}}{A_{11}}; \mu_{\beta\alpha} = \frac{A_{12}}{A_{22}}; \alpha_{\alpha} = \frac{1}{E_{\alpha}} (A_{1T} - \mu_{\beta\alpha} A_{2T});$$

$$\alpha_{\beta} = \frac{1}{E_{\beta}} (A_{2T} - \mu_{\alpha\beta} A_{1T}),$$

где E_{α} , E_{β} и $G_{\alpha\beta}$ — средние модули упругости и модуль сдвига системы двух симметрично армированных слоев; $\mu_{\alpha\beta}$, $\mu_{\beta\alpha}$ — коэффициенты Пуассона; α_{α} , α_{β} — средние температурные коэффициенты линейного расширения.

На рис. 1.7 и 1.8 приведены зависимости модуля упругости E_{α} (модуль E_{β} получается из E_{α} заменой φ на $90^{\circ} - \varphi$) и модуля сдвига $G_{\alpha\beta}$ от угла φ для материалов, свойства которых представлены в табл. 1.4.

E_{α} , ГПа

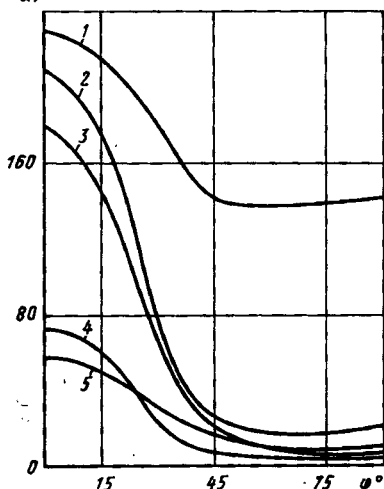


Рис. 1.7. Зависимость модуля упругости от угла армирования для материалов: 1 — бороалюминия; 2 — боропластика; 3 — углепластика; 4 — органиоластика; 5 — стеклоластика

$G_{\alpha\beta}$, ГПа

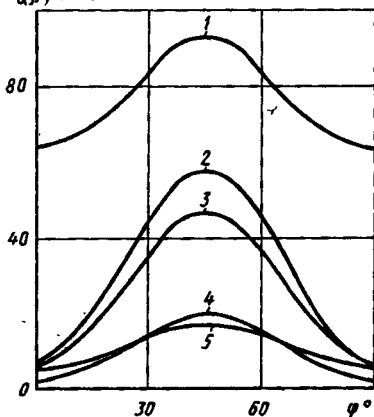
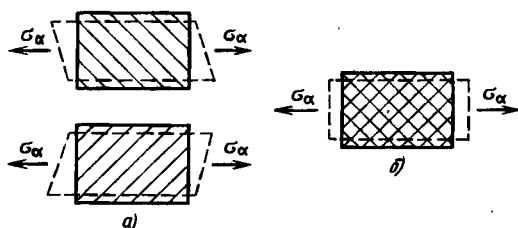


Рис. 1.8. Зависимость модуля сдвига от угла армирования для материалов: 1 — бороалюминия; 2 — боропластика; 3 — углепластика; 4 — органиоластика; 5 — стеклоластика

Рис. 1.9. Деформации отдельных (а) и связанных (б) симметрично армированных слоев

Заметим, что модули упругости (1.29) не совпадают с соответствующими упругими постоянными слоя, которые определяются равенствами (1.16). Для иллюстрации рассмотрим растяжение в направлении оси α элементов, показанных на рис. 1.9. Деформации элементов, армированных одним семейством волокон (рис. 1.9, а), определяются соотношениями (1.15), т. е.



$$e_{\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha}}{E_{\alpha}^1}; e_{\beta} = -\mu_{\beta\alpha}^1 \frac{\sigma_{\alpha}}{E_{\alpha}^1}; e_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta, \alpha}^1 \frac{\sigma_{\alpha}}{E_{\alpha}^1}, \quad (1.30)$$

а для симметрично армированного элемента (рис. 1.9, б), согласно (1.28), получим

$$e_{\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha}}{E_{\alpha}}; e_{\beta} = -\mu_{\beta\alpha} \frac{\sigma_{\alpha}}{E_{\alpha}}; e_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.31)$$

Из равенств (1.30), (1.31) и рис. 1.9 следует, что в несвязанных несимметрично армированных слоях появляются деформации сдвига $e_{\alpha\beta}$, которые взаимно уничтожают друг друга, если эти слои работают совместно. Для того чтобы привести элементы, изображенные на рис. 1.9, а, к состоянию, показанному на рис. 1.9, б, к ним необходимо приложить взаимно уравновешенные касательные напряжения $\tau_{\alpha\beta}$, обеспечивающие выполнение условия $e_{\alpha\beta} = 0$. В результате из третьего соотношения (1.15), приняв в нем $e_{\alpha\beta} = 0$ и учитывая, что $\sigma_{\beta} = 0$ и $T = 0$, найдем

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{G_{\alpha\beta}^1}{E_{\alpha}^1} \eta_{\alpha\beta, \alpha}^1 \sigma_{\alpha}.$$

Подставляя это выражение в первое равенство (1.15), после некоторых преобразований получим $e_{\alpha} = \sigma_{\alpha}/E_{\alpha}$, где

$$E_{\alpha} = E_{\alpha}^1 \left[1 - \frac{G_{\alpha\beta}^1}{E_{\alpha}^1} (\eta_{\alpha\beta, \alpha}^1)^2 \right]^{-1}.$$

Отсюда следует, что $E_{\alpha} \geq E_{\alpha}^1$, т. е. система связанных симметрично армированных слоев в общем случае обладает большей жесткостью, чем несимметрично армированный слой такой же толщины.

Выведем теперь соотношения, связывающие касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ с соответствующими деформациями симме-

трично армированных слоев (см. рис. 1.6). Для слоев с углами $\pm\varphi$, согласно равенствам (1.22), имеем

$$\tau_{\alpha\gamma}^{\pm} = A_{44}^1 e_{\alpha\gamma}^{\pm} \pm A_{45}^1 e_{\beta\gamma}^{\pm}; \quad (1.32)$$

$$\tau_{\beta\gamma}^{\pm} = \pm A_{54}^1 e_{\alpha\gamma}^{\pm} + A_{55}^1 e_{\beta\gamma}^{\pm}. \quad (1.33)$$

Рассмотрим симметричную пару слоев, нагруженную напряжениями $\tau_{\alpha\gamma}$. Тогда $\tau_{\alpha\gamma}^+ = \tau_{\alpha\gamma}^- = \tau_{\alpha\gamma}$, и, поскольку система является ортотропной (см. рис. 1.6), в соотношении (1.32) следует принять $e_{\alpha\gamma}^+ = e_{\alpha\gamma}^- = e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}^+ = e_{\beta\gamma}^- = 0$. Аналогично, при нагружении касательными напряжениями $\tau_{\beta\gamma}$, в равенстве (1.33) имеем: $\tau_{\beta\gamma}^+ = \tau_{\beta\gamma}^- = \tau_{\beta\gamma}$; $e_{\alpha\gamma}^+ = e_{\alpha\gamma}^- = 0$; $e_{\beta\gamma}^+ = e_{\beta\gamma}^- = e_{\beta\gamma}$. В результате получим

$$\tau_{\alpha\gamma} = A_{44}^1 e_{\alpha\gamma}; \quad \tau_{\beta\gamma} = A_{55}^1 e_{\beta\gamma}. \quad (1.34)$$

Вводя модули сдвига, соотношения (1.34) можно записать следующим образом:

$$\tau_{\alpha\gamma} = G_{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma}; \quad \tau_{\beta\gamma} = G_{\beta\gamma} e_{\beta\gamma}, \quad (1.35)$$

где

$$G_{\alpha\gamma} = G_{13} \cos^2 \varphi + G_{23} \sin^2 \varphi; \quad G_{\beta\gamma} = G_{13} \sin^2 \varphi + G_{23} \cos^2 \varphi. \quad (1.36)$$

Таким образом, физические соотношения для симметричной системы слоев определяются равенствами (1.27) и (1.35).

Глава 2

Уравнения механики конструкций из композиционных материалов

В настоящей главе представлены уравнения теории упругости ортотропной среды, которые позволяют описать напряженно-деформированное состояние широкого класса композитных систем. Для большинства из этих систем могут быть введены некоторые дополнительные гипотезы, которые существенно упрощают исходные уравнения и позволяют сформулировать рассматриваемую в этой главе прикладную теорию композитных конструкций.

§ 2.1. Уравнения теории упругости ортотропной среды в ортогональных криволинейных координатах

Введем декартову систему координат x, y, z и связанную с рассматриваемой средой ортогональную систему криволинейных координат α, β, γ (рис. 2.1). Расстояние между двумя бесконечно близкими точками среды

$$ds^2 = ds_\alpha^2 + ds_\beta^2 + ds_\gamma^2,$$

где

$$ds_\alpha = H_1 d\alpha \quad (1, 2, 3). \quad (2.1)$$

Символ $(1, 2, 3)$ здесь и далее означает, что из записанного соотношения, соответствующего направлению α , можно получить еще два, соответствующие направлениям β и γ , если заменить α на β , β на γ , γ на α и 1 на 2, 2 на 3 и 3 на 1. Параметры H_1, H_2, H_3 , называемые коэффициентами Ламе, по существу являются масштабными коэффициентами и показывают, сколько единиц длины содержится в единице координаты α, β или γ .

Площади граней и объем элемента, показанного на рис. 2.1, определяются равенствами

$$dS_{\alpha\beta} = H_1 H_2 d\alpha d\beta \quad (1, 2, 3); \quad dV = H_1 H_2 H_3 d\alpha d\beta d\gamma. \quad (2.2)$$

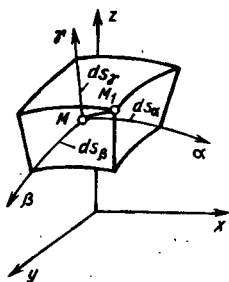


Рис. 2.1. Элемент сплошной среды, отнесенный к декартовым (x, y, z) и криволинейным (α, β, γ) координатам

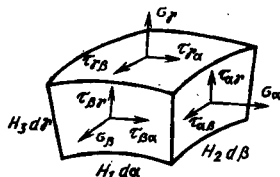


Рис. 2.2. Напряженное состояние элемента, отнесенного к криволинейным координатам

Если соответствие между декартовой и криволинейной системами координат задано уравнениями связи $x(\alpha, \beta, \gamma)$, $y(\alpha, \beta, \gamma)$, $z(\alpha, \beta, \gamma)$, параметры Ламе для принятой системы α, β, γ находят по формулам

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2 \quad (1, 2, 3). \quad (2.3)$$

В общем случае коэффициенты Ламе являются функциями переменных α, β, γ . Эти функции не могут быть выбраны произвольно. Для того чтобы они определяли метрические свойства сплошной среды, должны выполняться уравнения Ламе:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} = 0 \quad (1, 2, 3);$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \beta \partial \gamma} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \beta} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \quad (1, 2, 3). \quad (2.4)$$

Следует привести один важный частный случай. Пусть одна из осей криволинейной системы координат, например ось γ , является прямой линией. Тогда декартовы координаты могут быть выражены через криволинейные следующим образом:

$$x = f_1(\alpha, \beta) + l_x \gamma; \quad y = f_2(\alpha, \beta) + l_y \gamma; \quad z = f_3(\alpha, \beta) + l_z \gamma,$$

где $l_x = \cos(\widehat{x, \gamma})$; $l_y = \cos(\widehat{y, \gamma})$; $l_z = \cos(\widehat{z, \gamma})$, причем $l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$. Из третьего равенства (2.3) при этом следует, что $H_3^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$.

Запишем уравнения равновесия, связывающие напряжения, действующие по граням выделенного из среды элемента (рис. 2.2), и объемные (отнесенные к единице объема) силы $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$. Уравнения, соответствующие суммам проекций сил, действующих на элемент, на касательные к осям координат, имеют вид

$$L_\alpha(\sigma) + F_\alpha H_1 H_2 H_3 = 0 \quad (1, 2, 3), \quad (2.5)$$

где

$$L_\alpha(\sigma) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 H_3 \sigma_\alpha) - \sigma_\beta H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - \sigma_\gamma H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 H_3 \tau_{\beta \alpha}) + \tau_{\alpha \beta} H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \tau_{\gamma \alpha}) + \tau_{\alpha \gamma} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \gamma}. \quad (2.6)$$

Касательные напряжения обладают свойством парности: $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ (1, 2, 3), которое следует из уравнений моментов относительно касательных к координатным осям.

В криволинейной ортотропной среде, оси ортотропии которой совпадают с координатными линиями α, β, γ , нормальные напряжения вызывают удлинения

$$e_\alpha = \frac{1}{E_\alpha} \sigma_\alpha - \mu_{\alpha\beta} \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \mu_{\alpha\gamma} \frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} \quad (1, 2, 3), \quad (2.7)$$

а касательные напряжения — деформации сдвига

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} \quad (1, 2, 3). \quad (2.8)$$

Здесь имеют место условия симметрии упругих постоянных

$$\mu_{\alpha\beta} E_\alpha = \mu_{\beta\alpha} E_\beta \quad (1, 2, 3). \quad (2.9)$$

Нормальные и сдвиговые деформации связаны с перемещениями $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ вдоль соответствующих координатных линий геометрическими соотношениями:

$$e_\alpha = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{u_\beta}{H_1 H_2} + \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} \frac{u_\gamma}{H_1 H_3} \quad (1, 2, 3); \quad (2.10)$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{H_2} \right) \quad (1, 2, 3).$$

Исключая из (2.10) перемещения, можно получить уравнения совместности деформаций, связывающие относительные деформации.

Равенства (2.5)—(2.8) и (2.10) образуют полную систему уравнений теории упругости в ортогональных криволинейных координатах. Решение этих уравнений должно удовлетворять граничным условиям, заданным на поверхности тела (рис. 2.3). Геометрические граничные условия, определяющие характер закрепления тела, накладываются непосредственно на перемещения $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$. Статические граничные условия, определяющие характер нагружения тела поверхностными силами, записывают следующим образом:

$$t_\alpha = T_\alpha \quad (1, 2, 3). \quad (2.11)$$

Здесь $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$ — проекции поверхностной нагрузки на оси α, β, γ ;

$$t_\alpha = \sigma_\alpha l_\alpha + \tau_{\alpha\beta} l_\beta + \tau_{\alpha\gamma} l_\gamma \quad (1, 2, 3), \quad (2.12)$$

где $\sigma_\alpha, \tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\gamma}$ — напряжения в соответствующей точке граничной поверхности; $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$ — направляющие коси-

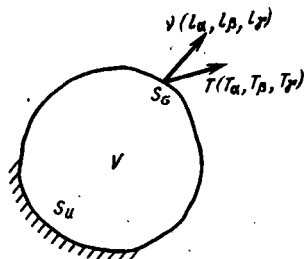


Рис. 2.3. К определению граничных условий

нуса нормали ν к этой поверхности, т. е. $l_\alpha = \cos(\nu, \alpha)$ (1, 2, 3).

Приведенные выше уравнения теории упругости могут быть также получены из вариационных принципов, как условия минимума некоторых энергетических функционалов. Вариационные принципы устанавливают энергетические критерии, по которым истинное состояние тела, имеющее место при заданных нагрузках и условиях закрепления, можно выделить из всех возможных его состояний. Прежде всего дадим определение таких возможных состояний.

Зададим, например, перемещения $u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma)$, $u_\beta(\alpha, \beta, \gamma)$ и $u_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ так, чтобы они были непрерывными функциями координат и соответствовали условиям закрепления рассматриваемого тела. Очевидно, что существует множество систем таких перемещений, составляющих совокупность кинематически возможных состояний тела. Для каждого из этих состояний геометрические соотношения (2.10) позволяют найти деформации, а физические соотношения (2.7), (2.8) определяют напряжения. В общем случае эти напряжения не будут удовлетворять уравнениям равновесия (2.5) и статическим граничным условиям (2.11). Та из возможных систем перемещений, при которой удовлетворяются уравнения (2.5) и условия (2.11), и является истинной.

Зададим теперь некоторую систему напряжений. Поскольку шесть напряжений $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma, \tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ связаны тремя уравнениями равновесия (2.5), эти напряжения всегда можно подобрать так, чтобы уравнения (2.5) удовлетворялись. Более того, можно обеспечить и выполнение статических граничных условий (2.11). Системы напряжений, удовлетворяющие уравнениям (2.5) и условиям (2.11), называются статически возможными. Для каждой такой системы из физических соотношений (2.7), (2.8) можно найти деформации; однако дальнейшее определение перемещений связано с необходимостью решения шести геометрических уравнений (2.10) относительно трех перемещений $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$. В общем случае система (2.10) является несовместной. Она имеет решение только в случае, если относительные деформации связаны уравнениями совместности деформаций, вытекающими из (2.10). Та из статически возможных систем напряжений, при которой соответствующие деформации удовлетворяют уравнениям совместности, и является истинной.

Таким образом, истинные перемещения отличаются от всех кинематически возможных тем, что соответствующие им напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия и статическим граничным условиям, а истинные напряжения отличаются от всех статически возможных тем, что соответствующие им деформации удовлетворяют уравнениям совместности деформаций. Как уже отмечалось, вариационные принципы устанавливают энергетические критерии, которые позволяют выделять истинные системы перемещений или напряжений из возможных.

Рассмотрим основные вариационные принципы, которые будут использованы в дальнейшем. Введем потенциальную энергию деформации

$$U = \iiint W(\sigma, e) dV. \quad (2.13)$$

Здесь dV определяют из второго равенства (2.2). Квадратичная форма

$$W(\sigma, e) = \frac{1}{2} (\sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_\beta e_\beta + \sigma_\gamma e_\gamma + \tau_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma} + \tau_{\beta\gamma} e_{\beta\gamma}) \quad (2.14)$$

представляет собой энергию, накопленную в единице объема упругой среды, и называется упругим потенциалом. С помощью физических соотношений, связывающих напряжения и деформации, потенциал W может быть выражен только через деформации или через напряжения. В результате получим

$$U_e = \iiint W(e) dV; \quad U_\sigma = \iiint W(\sigma) dV. \quad (2.15)$$

Рассмотрим систему напряжений $\sigma'_\alpha \dots \tau'_{\beta\gamma}$ и независимую от нее систему деформаций $e'_\alpha \dots e'_{\beta\gamma}$, которые связаны с перемещениями $u'_\alpha, u'_\beta, u'_\gamma$ геометрическими соотношениями (2.10). Преобразуем формально интеграл [11]

$$J = 2 \iiint W(\sigma', e') dV. \quad (2.16)$$

Здесь W определяется равенством (2.14), в котором σ, τ и e следует заменить на σ', τ' и e' . Подставляя в (2.16) деформации, выраженные через перемещения согласно равенствам (2.10), и преобразуя интеграл по объему в интеграл по поверхности S тела с помощью формулы Остроградского

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 H_3 \Phi_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 H_3 \Phi_\beta) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \Phi_\gamma) \right] d\alpha d\beta d\gamma = \iint (\Phi_\alpha l_\alpha + \Phi_\beta l_\beta + \Phi_\gamma l_\gamma) dS, \end{aligned}$$

справедливой для функций $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$, получим

$$\begin{aligned} 2 \iiint W(\sigma', e') dV = & \iint (t'_\alpha u'_\beta + t'_\beta u'_\alpha + t'_\gamma u'_\gamma) dS - \\ & - \iint (L'_\alpha u'_\alpha + L'_\beta u'_\beta + L'_\gamma u'_\gamma) d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь t' и L' определяются равенствами (2.12) и (2.6), в которых σ и τ заменены на σ' и τ' . Равенство (2.17), которое позволяет сравнивать возможные системы перемещений и напряжений, является исходным для вывода рассматриваемых ниже вариационных принципов. Для определенности этот вывод будет осуществлен применительно к телу (см. рис. 2.3), у которого часть поверхности S_u закреплена, т. е. $u_\alpha = u_\beta = u_\gamma = 0$ на S_u , а на другой части поверхности S_σ действует поверхностная нагрузка T с проекциями $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$.

Пусть напряжения, деформации и перемещения являются истинными, т. е. $\sigma' = \sigma$; $\tau' = \tau$; $e'' = e$; $u'' = u$. Поскольку истинные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия (2.5) и статическим граничным условиям (2.11):

$$\dot{t}_\alpha = T_\alpha; \quad L'_\alpha = -F_\alpha H_1 H_2 H_3, \quad (2.18)$$

равенство (2.17) принимает вид

$$U = A/2. \quad (2.19)$$

Здесь U определяется выражением (2.13); для тела, показанного на рис. 2.3,

$$A = \iiint (F_\alpha u_\alpha + F_\beta u_\beta + F_\gamma u_\gamma) dV + \iint_{S_\sigma} (T_\alpha u_\alpha + T_\beta u_\beta + T_\gamma u_\gamma) dS. \quad (2.20)$$

Соотношение (2.19) является аналитической формулировкой теоремы Клапейрона, согласно которой потенциальная энергия деформации U равна половине «работы» внешних сил A на соответствующих им перемещениях. Отметим, что термин «работа» используется по отношению к параметру A формально, учитывая структуру правой части равенства (2.20). В действительности при развитии перемещений внешние силы не остаются постоянными — в линейно упругом теле силы и перемещения связаны линейными зависимостями вида $F = ku$, где k — некоторый коэффициент жесткости. Работа, произведенная силой F ,

$$A_F = \int_0^u F du = \frac{ku^2}{2} = \frac{Fu}{2}.$$

Таким образом, действительная работа, совершенная объемными и поверхностными силами, вдвое меньше A и согласно (2.19) равна потенциальной энергии, накопленной в теле.

Предположим теперь, что напряжения являются истинными, т. е. $\sigma' = \sigma$, $\tau' = \tau$, а перемещения u'' являются кинематически возможными и отличаются от истинных перемещений u на малые вариации, т. е. $u'' = u + \delta u$. Соответственно, согласно равенствам (2.10) $e'' = e + \delta e$. Подставляя e'' и u'' в (2.17) и учитывая, что для истинных напряжений справедливы соотношения (2.18), получим

$$\begin{aligned} 2 \iiint W(\sigma, e + \delta e) dV = & \iiint_{S_\sigma} [T_\alpha (u_\alpha + \delta u_\alpha) + T_\beta (u_\beta + \delta u_\beta) + \\ & + T_\gamma (u_\gamma + \delta u_\gamma)] dS + \iiint [F_\alpha (u_\alpha + \delta u_\alpha) + \\ & + F_\beta (u_\beta + \delta u_\beta) + F_\gamma (u_\gamma + \delta u_\gamma)] dV. \end{aligned}$$

Ввиду того, что для истинного состояния справедливо равенство (2.19), можно записать следующее важное соотношение:

$$\delta U - \delta A = 0, \quad (2.21)$$

где

$$\delta U = \iiint (\sigma_\alpha \delta e_\alpha + \sigma_\beta \delta e_\beta + \sigma_\gamma \delta e_\gamma + \tau_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\gamma} \delta e_{\alpha\gamma} + \tau_{\beta\gamma} \delta e_{\beta\gamma}) dV \quad (2.22)$$

— вариация потенциальной энергии деформации;

$$\delta A = \iiint (F_\alpha \delta u_\alpha + F_\beta \delta u_\beta + F_\gamma \delta u_\gamma) dV + \iint_{S_0} (T_\alpha \delta u_\alpha + T_\beta \delta u_\beta + T_\gamma \delta u_\gamma) dS \quad (2.23)$$

— работа объемных и поверхностных сил на малых возможных вариациях перемещений.

Выражая в (2.22) напряжения через деформации с помощью физических соотношений, после некоторых преобразований можно привести δU к вариации потенциальной энергии U_e , записанной через деформации в соответствии с первым соотношением (2.15). Для большинства реализуемых на практике условий нагружения можно считать, что внешние силы не изменяются при малом варьировании перемещений. В результате в (2.23) знак вариации можно вынести за интегралы и ввести вариацию «работы» A , которая определяется равенством (2.20). Отметим, что эта операция не может быть осуществлена при так называемых следящих силах, величина или направление которых определяются перемещениями системы. Если исключить из рассмотрения такие силы, то равенство (2.21) можно записать следующим образом:

$$\delta \Pi_e = 0, \quad (2.24)$$

где $\Pi_e = U_e - A$ — так называемая полная энергия упругой системы.

Условие (2.24) позволяет заключить, что функционал Π_e имеет стационарное и, как можно показать, минимальное значение. Поскольку изменение состояния тела, а следовательно, и изменение Π_e является следствием малых возможных отклонений перемещений точек тела от их истинных значений, можно сформулировать вариационный принцип Лагранжа: из всех возможных систем перемещений истинные перемещения сообщают полной энергии минимальное значение.

Подставляя в формулу для U_e деформации, выраженные через перемещения с помощью геометрических соотношений (2.10), можно записать функционал Π_e через перемещения и получить для этих перемещений вариационные уравнения и естественные граничные условия, обеспечивающие минимальное значение Π_e . Этими уравнениями и граничными условиями будут уравнения

равновесия (2.5) и статические граничные условия (2.11), в которых напряжения выражены через перемещения с помощью равенств (2.7), (2.8), (2.10). Таким образом, минимизация полной энергии согласно принципу Лагранжа эквивалентна удовлетворению уравнений равновесия и статических граничных условий. Отметим, что формулировка (2.21) является более общей, чем (2.24), поскольку она не требует, чтобы внешние силы были постоянными при варьировании перемещений, и, кроме того, справедлива для нелинейно-упругого материала.

На вариационном принципе Лагранжа основаны эффективные прикладные методы расчета — метод Ритца, вариационно-разностный метод, метод локальных вариаций, метод конечных элементов (формулировка в перемещениях).

Рассмотрим еще один вариационный принцип. Пусть деформации и перемещения являются истинными, т. е. $e'' = e$; $u'' = u$, а напряжения являются статически возможными и отличаются от истинных на малые вариации, т. е. $\sigma' = \sigma + \delta\sigma$; $\tau' = \tau + \delta\tau$. Ввиду того, что напряжения σ' и τ' являются статически возможными, они удовлетворяют уравнениям равновесия и статическим граничным условиям, т. е. справедливы равенства (2.18). Тогда соотношение (2.17) принимает вид

$$2 \iiint W(\sigma + \delta\sigma, e) dV = \iint_{S_\sigma} (T_\alpha u_\alpha + T_\beta u_\beta + T_\gamma u_\gamma) dS + \\ + \iiint (F_\alpha u_\alpha + F_\beta u_\beta + F_\gamma u_\gamma) dV.$$

Выделяя здесь члены, соответствующие истинным напряжениям и перемещениям, и учитывая, что они связаны соотношением (2.19), получим

$$\iiint (e_\alpha \delta\sigma_\alpha + e_\beta \delta\sigma_\beta + e_\gamma \delta\sigma_\gamma + e_{\alpha\beta} \delta\tau_{\alpha\beta} + \\ + e_{\alpha\gamma} \delta\tau_{\alpha\gamma} + e_{\beta\gamma} \delta\tau_{\beta\gamma}) dV = 0. \quad (2.25)$$

Если в равенстве (2.25) выразить деформации через напряжения с помощью физических соотношений (2.7), (2.8), то после некоторых преобразований его можно записать в виде

$$\delta U_\sigma = 0, \quad (2.26)$$

где U_σ — потенциальная энергия деформации, которая определяется вторым равенством (2.15). Условие (2.26) является условием стационарности (минимума) функционала U_σ . Поскольку в рассматриваемом случае изменение потенциальной энергии осуществляется за счет статически возможного варьирования напряжений вблизи истинного напряженного состояния, равенство (2.26) позволяет сформулировать следующий вариационный принцип минимума потенциальной энергии деформации: из всех систем напряжений, статически возможных в линейно упругом теле, действительные напряжения сообщают потенциальной энер-

гии деформации минимальное значение. Вариационные уравнения, которые получаются из условия минимума функционала потенциальной энергии, являющиеся условиями совместности деформаций, записанными через напряжения.

Таким образом, реализация рассматриваемого вариационного принципа эквивалентна удовлетворению уравнений совместности деформаций, т. е. операции, которая, как уже отмечалось ранее, позволяет выделить истинную систему напряжений из статически возможных. Отметим, что формулировка (2.25) является более общей, чем (2.26), так как соотношение (2.25) справедливо и для нелинейно-упругого материала. На принципе минимума потенциальной энергии деформаций основаны такие эффективные методы расчета, как метод сил и метод конечных элементов (формулировка в напряжениях).

В заключение рассмотрим еще один, так называемый смешанный вариационный принцип, который позволяет получить в качестве вариационных уравнений физические соотношения. Будем исходить из соотношения (2.26). Напомним, что входящие в него напряжения должны быть статически возможными, т. е. удовлетворять уравнениям равновесия (2.5) и статическим граничным условиям (2.11). Отметим, что учет дополнительных связей в виде уравнений равновесия можно осуществить двумя способами. Во-первых, путем исключения с помощью этих уравнений части неизвестных функций во втором равенстве (2.15), что и подразумевается в (2.26). И во-вторых, путем введения уравнений связей с помощью множителей Лагранжа. Имея в виду реализацию этого второго метода, построим расширенный функционал:

$$\Pi_{\sigma} = U_{\sigma} + \iiint [(L_{\alpha} + F_{\alpha} H_1 H_2 H_3) u_{\alpha} + (L_{\beta} + F_{\beta} H_1 H_2 H_3) u_{\beta} + (L_{\gamma} + F_{\gamma} H_1 H_2 H_3) u_{\gamma}] d\alpha d\beta d\gamma, \quad (2.27)$$

где

$$U_{\sigma} = \iiint \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{\alpha}^2}{E_{\alpha}} + \frac{\sigma_{\beta}^2}{E_{\beta}} + \frac{\sigma_{\gamma}^2}{E_{\gamma}} - 2 \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{E_{\beta}} \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} + \frac{\mu_{\alpha\gamma}}{E_{\gamma}} \sigma_{\alpha} \sigma_{\gamma} + \frac{\mu_{\beta\gamma}}{E_{\gamma}} \sigma_{\beta} \sigma_{\gamma} \right) + \frac{\tau_{\alpha\beta}^2}{G_{\alpha\beta}} + \frac{\tau_{\alpha\gamma}^2}{G_{\alpha\gamma}} + \frac{\tau_{\beta\gamma}^2}{G_{\beta\gamma}} \right] dV.$$

В равенстве (2.27) в круглых скобках записаны уравнения равновесия (2.5), а через u_{α} , u_{β} , u_{γ} обозначены множители Лагранжа. Как будет показано далее, эти множители имеют физический смысл — они являются перемещениями, что и отражено в обозначениях.

Согласно принципу минимума потенциальной энергии деформации и методу множителей Лагранжа, функционал (2.27) должен иметь минимальное значение, т. е. $\delta \Pi_{\sigma} = 0$. При этом в качестве варьируемых параметров выступают как напряжения, так и множители Лагранжа, т. е. перемещения, что и определяет название — смешанный вариационный принцип. Минимизация Π_{σ}

по u_α , u_β , u_γ дает уравнения равновесия (2.5), а вариационные уравнения, соответствующие напряжениям, имеют следующий вид (в записанных уравнениях минимизация осуществляется по функциям $H_2 H_3 \sigma_\alpha$ и $H_3 \tau_{\alpha\beta}$):

$$H_1 \left(\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \mu_{\alpha\beta} \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \mu_{\alpha\gamma} \frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} \right) - \frac{u_\beta}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - \frac{u_\gamma}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} = 0$$

(1, 2, 3);

$$\frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} H_1 H_2 + \frac{u_\alpha}{H_1} \frac{\partial H_1^2}{\partial \beta} + \frac{u_\beta}{H_2} \frac{\partial H_2^2}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 u_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 u_\beta) = 0$$

(1, 2, 3).

Отождествляя теперь множители Лагранжа u_α , u_β , u_γ с перемещениями и учитывая геометрические соотношения (2.10), а также условия симметрии (2.9), можно привести эти равенства к форме

$$\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \mu_{\alpha\beta} \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \mu_{\alpha\gamma} \frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} = e_\alpha; \quad \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} = e_{\alpha\beta} \quad (1, 2, 3),$$

совпадающей с физическими соотношениями (2.7), (2.8).

Рассматриваемый смешанный вариационный принцип может быть использован в случаях, когда сложную в конструктивном отношении систему необходимо описать более простой, но эквивалентной по жесткости расчетной моделью. Пусть, например, имеется оболочка, образованная из обшивки и системы подкрепляющих элементов. Такую оболочку можно рассматривать как гладкую и анизотропную, обладающую некоторыми эффективными жесткостями. Для решения этой задачи записывают функционал типа (2.27), в который включают потенциальную энергию U_0 исходной системы и вводимые с множителями Лагранжа условия статической эквивалентности исходной и условной гладкой оболочки, а также уравнения равновесия для гладкой оболочки. В результате реализации смешанного вариационного принципа получают физические соотношения для гладкой оболочки, коэффициенты жесткости которых учитывают все конструктивные особенности исходной системы.

§ 2.2. Исходные допущения

Приведенные выше уравнения теории упругости позволяют описать широкий класс композитных конструкций, однако, как правило, они оказываются малопригодными для практического расчета. Основной причиной этого является сложность этих уравнений, связанная главным образом с тем, что они являются трехмерными, т. е. включают три независимые координаты α , β и γ . Это обстоятельство существенно затрудняет получение как аналитических, так и численных решений. Однако элементы конструкций, изготовленные из волокнистых композиционных матери-

алов, обладают особенностью, которая позволяет значительно упростить исходные уравнения. Как правило, такие элементы образуются из ограниченного числа композитных слоев, причем суммарная толщина этих слоев, даже будучи достаточно большой, всегда значительно меньше по крайней мере одного из двух других размеров элемента. Таким образом, композитные элементы в большинстве случаев могут быть описаны с помощью традиционных расчетных моделей — тонкостенных стержней, балок, пластин и оболочек. Отметим, что теории и методы расчета анизотропных, слоистых и композитных пластин и оболочек изложены в обзорах [31, 40, 88].

Для того чтобы выявить, к каким упрощениям может привести отмеченная особенность, рассмотрим слоистую плиту, нагруженную как в плоскости слоев, так и нормально к ним (рис. 2.4). Для прямолинейных осей координат $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, т. е. статические (2.5), физические (2.7), (2.8) и геометрические соотношения (2.10) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{a}{h} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1, 2); \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{a}{h} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad (2.29)$$

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy} \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{xz} \frac{\sigma_z}{E_z} \quad (1, 2); \quad (2.30)$$

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E_z} - \mu_{zx} \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{zy} \frac{\sigma_y}{E_y}; \quad (2.31)$$

$$e_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}; \quad e_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}} \quad (1, 2); \quad (2.32)$$

$$e_x = \frac{1}{a} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1, 2); \quad e_{xy} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad (2.33)$$

$$e_z = \frac{1}{h} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad e_{xz} = \frac{1}{h} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (1, 2). \quad (2.34)$$

Здесь $x = \alpha/a$, $y = \beta/a$, $z = \gamma/h$ — безразмерные координаты, а символ (1, 2), как и ранее, означает, что из записанного соотношения можно получить еще одно заменой x на y и y на x . Безразмерные координаты, изменяющиеся в пределах от 0 до 1, позволяют провести сравнительную оценку напряжений. Действи-

тельно, если напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , действующие в плоскостях слоев, считать соизмеримыми с некоторым значением σ ,

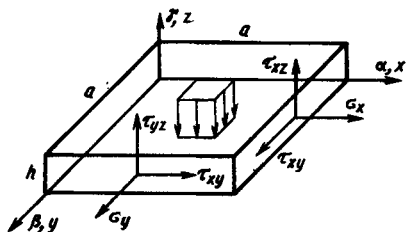


Рис. 2.4. Элемент слоистой плиты

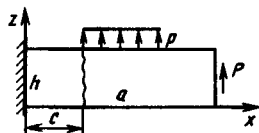


Рис. 2.5. Консольная балка

то согласно уравнениям (2.28), (2.29) межслоевые касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} будут $\sigma(h/a)$, а нормальные напряжения σ_z будут соизмеримы с $\sigma(h/a)^2$. Таким образом, чем меньше относительная толщина пластины, тем меньше относительная величина напряжений, действующих на площадках, нормальных к оси z . Применительно к композиционным элементам это свойство напряжений находится в полном соответствии с механическими характеристиками материала. Высокая прочность слоистого композита в плоскости слоев, как правило, сочетается с низкой прочностью связи между слоями, т. е. преимущества волокнистых композитов наиболее полно реализуются в тонкостенных элементах, где напряжения в слоях значительно превышают межслоевые нормальные и касательные напряжения. В элементах, где все компоненты напряжения соизмеримы между собой, волокнистые композиты утрачивают свою эффективность как силовые конструкционные материалы и применяются главным образом благодаря своей коррозионной стойкости, электро- и радиотехническим, а также другим свойствам. Если исключить из рассмотрения такие элементы, то дальнейший анализ можно в основном ограничить слоистыми конструкциями, толщина стенки которых значительно меньше по крайней мере одного из других размеров.

В этом случае координаты α , β , γ (или x , y , z), очевидно, являются неравноправными, и если расположить координатные линии α и β (x и y) на поверхности некоторого слоя, а ось γ (или z) направить по нормали к этой поверхности, то естественно попытаться отделить нормальную координату и свести трехмерные исходные уравнения к двумерным, т. е. к уравнениям, включающим две независимые переменные α и β (или x и y). Это можно сделать как формально математически, так и путем введения некоторых физических гипотез. Для иллюстрации процесса отделения нормальной координаты рассмотрим балку, показанную на рис. 2.5. Для сведения этой двумерной задачи к одномерной воспользуемся методом начальных функций [23, 24]. Отбрасывая в уравнениях (2.28)—(2.34) все члены, включающие индекс y , и пренебрегая для упрощения анализа эффектом Пуассона ($\mu_{xz} = \mu_{yz} = 0$), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{a}{h} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{a}{h} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{a}{E_x} \sigma_x; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{h}{E_z} \sigma_z, \quad \frac{1}{h} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Для реализации метода начальных функций выразим из этих уравнений производные искомых функций по переменной z , которую предполагается исключить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} &= h e_{xz} - \frac{h}{a} \frac{\partial u_z}{\partial x} = h \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}} - \frac{h}{a} \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= h e_z = h \frac{\sigma_z}{E_z}; \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{h}{a} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = -\frac{h E_x}{a^3} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{h}{a} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}.$$

В соответствии с рассматриваемым методом перемещения u_x , u_z и напряжения τ_{xz} , σ_z , зависящие от двух переменных x и z , представляются по координате z рядами Тейлора. Например, для u_x будем искать

$$u_x(x, z) = u_x^0(x) + z \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)_0 + \frac{z^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)_0 + \dots,$$

где символ 0 обозначает, что соответствующие функции и их производные задаются на начальной поверхности $z = 0$. Записывая такие ряды для всех искомых функций, выражая в них производные по z через функции и производные по x с помощью равенств (2.36) и учитывая, что для балки, показанной на рис. 2.5, напряжения τ_{xz} и σ_z при $z = 0$ отсутствуют, окончательно получим

$$\begin{aligned} u_x &= L_{xx}(u_x^0) + L_{xz}(u_z^0); \quad u_z = L_{zx}(u_x^0) + L_{zz}(u_z^0); \\ \tau_{xz} &= L_{\tau x}(u_x^0) + L_{\tau z}(u_z^0); \quad \sigma_z = L_{\sigma x}(u_x^0) + L_{\sigma z}(u_z^0), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где

$$L_{xx} = 1 - \frac{z^2}{2!} k_0 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{z^4}{4!} (k_0^2 - k_E) \frac{d^4}{dx^4} - \frac{z^6}{6!} (k_0^3 - k_E k_0) \frac{d^6}{dx^6} + \dots;$$

$$L_{xz} = \frac{h}{a} \left[-z \frac{d}{dx} + \frac{z^3}{3!} k_0 \frac{d^3}{dx^3} - \frac{z^5}{5!} k_0 (k_0 - k_E) \frac{d^5}{dx^5} + \dots \right];$$

$$L_{zx} = \frac{a}{h} \left(\frac{z^3}{3!} k_E \frac{d^3}{dx^3} - \frac{z^5}{5!} k_0 k_E \frac{d^5}{dx^5} + \dots \right);$$

$$L_{zz} = 1 - \frac{z^4}{4!} k_E \frac{d^4}{dx^4} + \frac{z^6}{6!} k_0 k_E \frac{d^6}{dx^6} - \dots; \quad (2.38)$$

$$L_{\tau x} = \frac{h E_x}{a^3} \left[-z \frac{d^2}{dx^2} + \frac{z^3}{3!} k_0 \frac{d^4}{dx^4} - \frac{z^5}{5!} (k_0^2 - k_E) \frac{d^6}{dx^6} + \dots \right];$$

$$\begin{aligned} L_{\tau z} &= L_{\sigma x} = \frac{h^3 E_x}{a^3} \left[\frac{z^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{z^4}{4!} k_0 \frac{d^4}{dx^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^6}{6!} (k_0^2 - k_E) \frac{d^6}{dx^6} - \dots \right]; \end{aligned}$$

$$L_{\sigma z} = \frac{h^3 E_x}{a^4} \left(-\frac{z^3}{3!} \frac{d^3}{dx^3} + \frac{z^5}{5!} k_0 \frac{d^5}{dx^5} - \dots \right);$$

$$k_0 = \frac{h^3 E_x}{a^3 G_{xz}}; \quad k_E = \frac{h^4 E_x}{a^4 E_z}. \quad (2.39)$$

Таким образом, все искомые функции выражаются через начальные функции $u_x^0(x)$ и $u_z^0(z)$. Для их определения можно составить два уравнения, следующие из граничных условий на верхней грани балки (рис. 2.5): $\sigma_z = p$ и $\tau_{xz} = 0$ при $z = 1$ (на-

помним, что координаты x и z отнесены к a и h , т. е. изменяются от 0 до 1). Учитывая соотношения (2.37), получим

$$L_{\sigma x}^{(1)}(u_x^0) + L_{\sigma z}^{(1)}(u_z^0) = p; L_{\tau x}^{(1)}(u_x^0) + L_{\tau z}^{(1)}(u_z^0) = 0. \quad (2.40)$$

Верхний индекс здесь показывает, что операторы должны быть записаны при $z = 1$. Как следует из разложений (2.38), уравнения (2.40) имеют бесконечно высокий порядок по переменной x , т. е. двумерные уравнения (2.35) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям бесконечно высокого порядка. Аналогично трехмерные уравнения (2.28)—(2.34) могут быть сведены к двумерным; однако отделение одной координаты, вызывающее появление производных бесконечно высокого порядка по другим, трудно признать упрощением исходной системы уравнений.

Для получения уравнений с ограниченным порядком в разложениях (2.38) можно сохранить конечное число членов (или сразу представить решение в форме конечных степенных рядов по переменной z), однако на этом пути возникают существенные трудности. Помимо вопроса о степенн соответствия между точностью получаемого результата и числом удержанных членов, появляется еще один — по сколько членов нужно удерживать в каждом из разложений (2.38) для того, чтобы возникающие в рассматриваемой системе напряжения и деформации учитывались с соизмеримой степенью точности?

В связи с отмеченными и другими трудностями формальных методов понижения размерности задачи в прикладных теориях более широкое распространение получили физические гипотезы, введение которых до некоторой степени эквивалентно естественному ограничению разложений (2.38).

Остановимся прежде всего на одном общем вопросе, связанном с рассматриваемым способом построения и упрощения математической модели системы. Введение априорных гипотез, определяющих в какой-то степени поведение решения, естественно, приводит к тому, что исходные уравнения, описывавшие систему до ее упрощения, уже не будут удовлетворены. При этом далеко не последнюю роль играет, какая группа уравнений — статическая (2.28), (2.29), физическая (2.30)—(2.32) или геометрическая (2.33), (2.34) — будет нарушаться, поскольку нарушение уравнений первой и третьей групп может привести не только к формальным, но и к физическим противоречиям. Таким образом, гипотезы целесообразно вводить так, чтобы возможные противоречия проявлялись в физических соотношениях, связывающих напряжения и деформации через систему постоянных, характеризующих упругие свойства материала. Если при этом удастся соответствующим подбором этих постоянных формально удовлетворить физические соотношения, то для такого модельного материала построенная прикладная теория оказывается формально строгой в том смысле, что соответствующее ей решение будет удовлетворять всем исходным уравнениям, описывавшим систему до введения упроща-

ющих гипотез. Достоинством такого подхода является также возможность сравнения свойств модельного и реального материалов, позволяющая просто и с достаточной для практики степенью достоверности судить о приемлемости принятых гипотез.

Для иллюстрации затронутых выше вопросов рассмотрим балку, показанную на рис. 2.5 и описываемую соотношениями (2.35) или (2.37)—(2.40). Механические свойства балки характеризуются двумя параметрами k_G и k_E (2.39), входящими в разложения (2.38). Оценим значения этих параметров для балок из различных материалов. В частности, для металлических балок, у которых отношения E_x/G_{xz} и E_x/E_z соизмеримы с единицей $k_G \sim (h/a)^2$ и $k_E \sim (h/a)^4$, т. е. даже для сравнительно толстых балок с относительной толщиной $h/a = 0,1$ параметры k_G и k_E меньше единицы. В связи с этим естественно упростить исходные соотношения, положив в них $k_G = k_E = 0$. Прежде чем перейти к анализу последствий такого упрощения, попытаемся обеспечить выполнение записанных условий соответствующим изменением свойств исходного материала. Из равенств (2.39) следует, что для этого необходимо, чтобы $E_x/G_{xz} = E_x/E_z = 0$ или отбрасывая явно нереальный случай $E_x = 0$, чтобы $G_{xz} \rightarrow \infty$ и $E_z \rightarrow \infty$. Таким образом, балка должна быть абсолютно жесткой при сдвиге и растяжении-сжатии вдоль оси z . Полагая далее в разложениях (2.38) $k_G = k_E = 0$, с учетом соотношений (2.37) получим

$$\begin{aligned} u_z &= w(x); \\ u_x &= u(x) + zh\theta_x, \quad \theta_x = -w'/a; \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{hE_x}{a^3} z \left(u'' + z \frac{h}{2} \theta_x'' \right); \\ \sigma_z &= \frac{h^3 E_x}{2a^3} z^2 \left(u''' + z \frac{h}{3} \theta_x''' \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Здесь принято $u_x^0 = u$; $u_z^0 = w$; штрихом обозначена производная по x .

Перемещения (2.41) и напряжения (2.42) тождественно удовлетворяют исходной системе уравнений (2.35), если принять в ней $G_{xz} \rightarrow \infty$, $E_z \rightarrow \infty$. Распределение перемещений в форме (2.41) соответствует широко распространенной в теории изгиба балок гипотезе плоских сечений Бернулли — Эйлера. При этом все искомые перемещения и напряжения выражают через две функции $u(x)$ и $w(x)$, которые определяют из уравнений (2.40), имеющих в рассматриваемом случае следующий вид:

$$u''' - \frac{h}{3a} w^{IV} = \frac{2pa^3}{E_x h^3}; \quad -u'' + \frac{h}{2a} w'' = 0.$$

Исключая из этих уравнений u , придем к традиционному в сопротивлении материалов уравнению упругой линии балки

$$w^{IV} = \frac{12pa^4}{E_x h^3}.$$

Опуская несущественные для настоящего раздела операции, связанные с решением полученных уравнений и удовлетворением граничных условий (они будут рассмотрены в § 3.1), запишем окончательные выражения для перемещений консольной балки, показанной на рис. 2.5 и нагруженной силой P ($p = 0$)

$$u_x = \frac{6Pa^3}{E_x h^3} x \left(1 - \frac{x}{2}\right) (1 - 2z); \quad (2.43)$$

$$u_z = \frac{6Pa^3}{E_x h^3} x^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right).$$

Рассмотрим теперь балки из композитных материалов, у которых, как уже отмечалось, жесткость связи между слоями, определяемая модулями упругости G_{xz} и E_z , может быть значительно меньше жесткости слоя, характеризующейся модулем E_x . В зависимости от структурных параметров композита значения отношений E_x/G_{xz} и E_x/E_z могут быть от 1 до 10^2 . Соответственно для балки с относительной толщиной $h/a = 0,01$ $k_G \sim 10^{-2} \div 1$ и $k_E \sim 10^{-2} \div 10^{-4}$.

Рассмотрим сначала параметр k_E , который по-прежнему значительно меньше единицы и может быть приближенно принят равным нулю. Отметим, что этот параметр определяет деформацию e_z , вызванную напряжением σ_z . Однако эта деформация может быть также вызвана напряжениями σ_x и σ_y и эффектом Пуассона. В связи с тем, что эта вторая составляющая деформации e_z считается несущественной и практически всегда игнорируется (даже когда учитывается первая часть σ_z/E_z), рассмотрим закон Гука (2.31), т. е.

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E_z} - \mu_{zx} \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{zy} \frac{\sigma_y}{E_y}. \quad (2.44)$$

Выше уже отмечалось, что если напряжения σ_x и σ_y имеют порядок σ , то σ_z имеет порядок $\sigma (h/a)^2$. Учитывая дополнительно условия симметрии $E_x \mu_{xz} = E_z \mu_{zx}$, $E_y \mu_{yz} = E_z \mu_{zy}$, запишем (2.44) в виде

$$e_z \sim \frac{\sigma}{E_z} \left(\frac{h^2}{a^2} - \mu_{zx} - \mu_{yz} \right).$$

Таким образом, напряжения σ_z вносят основной вклад в деформацию e_z , если коэффициенты Пуассона много меньше отношения $(h/a)^2$. В конструкциях из современных композитов члены, входящие в правую часть равенства (2.44), имеют примерно одинаковый порядок. Учитывая, что первый член, как было показано выше, мало влияет на результат, пренебрежем и остальными, т. е. примем $E_z \rightarrow \infty$ и $\mu_{zx} = \mu_{zy} = 0$, что в соответствии с равенством (2.44) обеспечивает отсутствие поперечной нормальной деформации e_z при любых напряжениях σ_x , σ_y , σ_z .

Теперь рассмотрим параметр k_G , посредством которого учитывается деформация сдвига e_{xz} . Как было установлено выше, этот параметр имеет порядок $(1 \div 10^2) (h/a)^2$, т. е. соответствующая

сдвиговая податливость материала может учитываться или игнорироваться в зависимости от свойств композита и относительной толщины стенки конструкции. При этом отношение h/a , входящее в k_G в квадрате, играет значительно большую роль, чем отношение E_x/G_{xz} . Как показывают многочисленные расчеты конкретных конструкций из современных и перспективных композитов, поперечную (межслоевую) сдвиговую податливость материала можно не учитывать, если $(h/a) \leq 0,02$. При большей относительной толщине эта деформация уже заметно сказывается на напряжениях и перемещениях, причем при увеличении h/a ее влияние резко возрастает. Не ограничиваясь в дальнейшем расчетом композитных элементов, относительная толщина стенки которых не превышает 0,02, будем учитывать при построении прикладной теории композитных балок, пластин и оболочек деформации поперечного сдвига.

Рассмотрим, как и прежде, балку, показанную на рис. 2.5. Принимая в разложениях (2.38) $k_E = 0$ и сохраняя k_G , можно заключить, что в разрешающих уравнениях (2.40) остаются производные бесконечно высокого порядка, т. е. строгий учет сдвиговой податливости материала не позволяет построить достаточно простую прикладную теорию. Впрочем, в таком учете, осуществленном, в частности, в работе [19], нет необходимости — деформация сдвига, как правило, является второстепенным эффектом, учет которого лишь уточняет в большей или меньшей степени соотношения (2.41), (2.42), полученные при условии $k_G = 0$ (или $e_{xz} = 0$). Для приближенного учета деформации e_{xz} необходимо ввести дополнительную гипотезу. Имея в виду, что толщина стенки сравнительно мала, естественным обобщением условия $e_{xz} = 0$ представляется осреднение e_{xz} по толщине, т. е. замена истинной деформации $e_{xz}(x, z)$ некоторой осредненной по толщине деформацией сдвига

$$\psi_x(x) = \int_0^1 e_{xz}(x, z) dz. \quad (2.45)$$

Осуществляя такую замену в первом уравнении (2.36) и полагая во втором $E_z \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = h\psi_x - \frac{h}{a} \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2.46)$$

Второе равенство (2.46) дает $u_z = w(x)$, где w — прогиб балки, а в результате интегрирования первого уравнения получим

$$u_x = u(x) + zh\theta_x(x), \quad (2.47)$$

где

$$\theta_x = - \left(\frac{w'}{a} - \psi_x \right) \quad (2.48)$$

и $u(x) = u_x(x, z=0)$. Линейное по высоте балки распределение продольных перемещений (2.47) обобщает распределение (2.41),

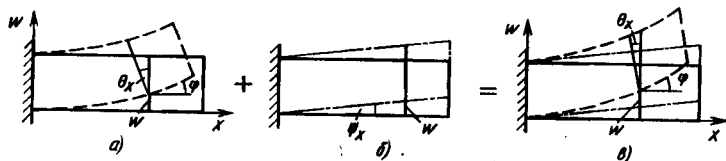


Рис. 2.6. Смещения сечения балки, вызванные изгибом (а), сдвигом (б), изгибом и сдвигом (в)

которое следует из него при отсутствии деформации сдвига, т. е. при $\psi_x = 0$. Распределение (2.47) так же, как и (2.41), соответствует закону плоских сечений, однако сечения в этом случае уже не остаются перпендикулярными к упругой линии балки $w(x)$. Рассмотрим рис. 2.6. Перемещения, описываемые соотношениями (2.41), показаны на рис. 2.6, а, где угол поворота сечения θ_x равен углу $\varphi \approx \tan \varphi = (w'/a)$, что полностью соответствует равенствам (2.41). При учете деформации сдвига (рис. 2.6, в) для определения угла поворота сечения θ_x из угла $\varphi \approx \tan \varphi = (w'/a)$ необходимо вычесть угол сдвига ψ_x , поскольку при сдвиге, показанном на рис. 2.6, б, прогиб балки не сопровождается поворотом ее сечений. Эта операция и отражается равенством (2.48). Отметим, что это равенство, играющее важную роль при построении уточненных теорий изгиба балок, пластин и оболочек, было впервые получено в 1921 г. С. П. Тимошенко из геометрических соображений [91].

Интегрируя первое и второе соотношения (2.35) с учетом (2.47) и граничных условий $\tau_{xz}(z=0) = 0$, $\sigma_z(z=0) = 0$, получим следующие выражения для напряжений:

$$\tau_{xz} = -\frac{hE_x}{a^3} z \left(u'' + \frac{z}{2} h \theta_x'' \right); \quad \sigma_z = \frac{h^3 E_x}{2a^3} z^2 \left(u''' + \frac{z}{3} h \theta_x''' \right). \quad (2.49)$$

Из равенств (2.47)—(2.49) следует, что искомые перемещения и напряжения выражаются в силу принятых гипотез через три функции — $u(x)$, $w(x)$, $\psi_x(x)$. Для того чтобы найти эти функции, необходимо составить три уравнения. Первые два следуют из граничных условий на поверхности $z = 1$, где $\sigma_z = \rho$ и $\tau_{xz} = 0$. С учетом соотношений (2.49), получим

$$u''' + \frac{h}{3} \theta_x''' = \frac{2\rho a^3}{E_x h^3}; \quad u'' + \frac{h}{2} \theta_x'' = 0. \quad (2.50)$$

Из этих уравнений можно найти $u(x)$ и $\theta_x(x)$. Для получения ψ_x воспользуемся соотношением (2.45), которое с учетом закона Гука для касательных напряжений

$$\tau_{xz} = G_{xz} e_{xz} \quad (2.51)$$

запишем в виде

$$\psi_x = \frac{1}{G_{xz}} \int_0^1 \tau_{xz} dz. \quad (2.52)$$

Преобразуем далее первое равенство (2.49), исключив из него u'' с помощью второго уравнения (2.50). Имеем

$$\tau_{xz} = \frac{E_x h^3}{2a^3} \theta_x'' z (1 - z). \quad (2.53)$$

Введем равнодействующую касательных напряжений — поперечную силу

$$Q_x = h \int_0^1 \tau_{xz} dz.$$

Подставляя сюда τ_{xz} согласно (2.53), найдем

$$Q_x = \frac{E_x h^3}{12a^3} \theta_x''. \quad (2.54)$$

Исключая с помощью этого равенства θ_x'' из соотношения (2.53), получим параболическое распределение касательных напряжений по толщине балки, соответствующее известной формуле Д. И. Журавского

$$\tau_{xz} = \frac{6Q_x}{h} z (1 - z). \quad (2.55)$$

С помощью равенств (2.52), (2.55) можно записать следующее физическое соотношение, связывающее поперечную силу с осредненной деформацией сдвига:

$$Q_x = K_x \psi_x, \quad (2.56)$$

где

$$K_x = G_{xz} h \quad (2.57)$$

— сдвиговая жесткость балки.

Сделаем здесь одно важное для дальнейшего замечание. Соотношение (2.51), связывающее τ_{xz} и e_{xz} , показывает, что операцию осреднения e_{xz} по толщине балки естественно продолжить, осреднив и τ_{xz} , т. е. подставив в (2.52) вместо (2.55) среднее значение τ_{xz} , равное Q_x/h . При этом из (2.52) снова следует соотношение (2.56), в котором $K_x = G_{xz} h$, что совпадает с (2.57). Однако это совпадение является случайным — оно имеет место только для материала, модуль сдвига которого G_{xz} не зависит от z . В теории слоистых композитных систем, которая будет построена далее в § 2.3, сочетание операций осреднения как по деформациям, так и по напряжениям позволит существенно упростить получаемые уравнения.

Имея решения уравнений (2.50), определяющие функции $u(x)$, $\theta_x(x)$ и соотношения (2.48), (2.54), (2.56), можно записать последнее уравнение, позволяющее найти прогиб балки $w(x)$. Под-

ставляя в (2.56) Q_x из (2.54), а полученное выражение для ψ_x — в равенство (2.48), будем иметь

$$w' = \frac{E_x h^3}{12 K_x a} \theta_x' - a \theta_x.$$

Для рассматриваемой в качестве примера консольной балки (рис. 2.5) окончательные выражения для перемещений имеют вид ($\rho = 0$)

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{6 P a^3}{E_x h^3} x \left(1 - \frac{x}{2}\right) (1 - 2z); \\ u_z &= \frac{6 P a^3}{E_x h^3} x \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{E_x h^3}{G_{xz} a^3}\right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

При $G_{xz} \rightarrow \infty$ равенства (2.58) переходят в (2.43).

Попытаемся оценить погрешность, вносимую осреднением деформации сдвига по толщине. С этой целью, сохраняя в разложениях (2.38) условие $k_E = 0$, удержим все члены, включающие k_G (нижний индекс для упрощения записи далее опускается). Введем символическое обозначение для производной, полагая $d = d/dx$, $d^2 = d^2/(dx)^2$ и т. д. Тогда, суммируя формально ряды (2.38), получим

$$\begin{aligned} L_{xx} &= 1 - \frac{z^2}{2!} k d^2 + \frac{z^4}{4!} k^2 d^4 - \frac{z^6}{6!} k^3 d^6 + \dots = \cos t; \\ L_{xz} &= \frac{h}{a} \left(-z d + \frac{z^3}{3!} k d^3 - \frac{z^5}{5!} k^2 d^5 + \dots\right) = -\frac{h}{a \sqrt{k}} \sin t; \\ L_{zx} &= 0; \quad L_{zz} = 1; \\ L_{\tau x} &= \frac{h E_x}{a^3} \left(-z d^2 + \frac{z^3}{3!} k d^4 - \frac{z^5}{5!} k^2 d^6 + \dots\right) = -\frac{h E_x d}{a \sqrt{k}} \sin t; \\ L_{\tau z} &= L_{\sigma z} = \frac{h^2 E_x}{a^3} \left(\frac{z^2}{2!} d^3 - \frac{z^4}{4!} k d^5 + \frac{z^6}{6!} k^2 d^7 - \dots\right) = \\ &= -\frac{h^2 E_x d}{a^3 k} (\cos t - 1); \\ L_{\sigma z} &= \frac{h^3 E_x}{a^4} \left(-\frac{z^3}{3!} d^4 + \frac{z^5}{5!} k d^6 - \dots\right) = \frac{h^3 E_x d}{a^4 \sqrt{k^3}} (\sin t - t), \end{aligned}$$

где $t = z \sqrt{k} d$.

Уравнения (2.40) с учетом обозначений $u_x^0 = u$, $u_z^0 = w$ принимают вид

$$L_{\sigma x}^{(1)}(u) + L_{\sigma z}^{(1)}(w) = p, \quad L_{\tau x}^{(1)}(u) + L_{\tau z}^{(1)}(w) = 0, \quad (2.59)$$

где

$$\begin{aligned} L_{\sigma x}^{(1)} &= L_{\tau z}^{(1)} = -\frac{h^3 E_x d}{a^3 k} [\cos(\sqrt{k} d) - 1]; \\ L_{\sigma z}^{(1)} &= \frac{h^3 E_x d}{a^4 \sqrt{k^3}} [\sin(\sqrt{k} d) - \sqrt{k} d]; \\ L_{\tau x}^{(1)} &= -\frac{h E_x d}{a \sqrt{k}} \sin(\sqrt{k} d). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Учитывая далее, что дифференциальные операторы (2.60) имеют постоянные коэффициенты и, следовательно, их произведение обладает свойством коммутативности, умножим формально первое уравнение (2.59) на $L_{xx}^{(1)}$, второе — на $L_{\sigma x}^{(1)}$ и вычтем второе уравнение из первого. Такая операция позволяет исключить u . Принимая дополнительно для упрощения анализа $p = 0$, получим

$$[L_{xx}^{(1)} L_{\sigma x}^{(1)} - L_{\sigma x}^{(1)} L_{xx}^{(1)}](w) = 0. \quad (2.61)$$

Будем искать решения этого уравнения в виде $w = Ce^{s x}$. Тогда после некоторых преобразований с учетом (2.60) характеристическое уравнение, соответствующее (2.61), можно записать в форме

$$s^2 \sin \lambda (\operatorname{tg} \lambda - \lambda) = 0, \quad (2.62)$$

$$\text{где} \quad \lambda^2 = \frac{k s^2}{4} = \frac{E_x h^2}{4 G_{xx} a^2} s^2. \quad (2.63)$$

Уравнение (2.62) имеет четыре нулевых корня, которые определяют полиномиальное решение, соответствующее равенствам (2.58), и счетное множество действительных корней, определяющих экспоненциальные решения. Опуская несущественные для настоящего раздела и приведенные в работе [19] преобразования, запишем окончательные выражения для перемещений консольной балки, показанной на рис. 2.5 ($p = 0$),

$$u_x = \frac{6Pa^3}{E_x h^3} \left[x \left(1 - \frac{x}{2} \right) (1 - 2z) - \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n (1 - 2z)}{s_n^2 \sin \lambda_n} e^{-s_n x} \right]; \quad (2.64)$$

$$u_z = \frac{6Pa^3}{E_x h^3} \left[x \left(x - \frac{x^2}{3} + \frac{E_x h^2}{G_{xx} a^2} \right) + \frac{4E_x h^2}{3G_{xx} a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-s_n x} - 1}{\lambda_n^2 s_n} \right]. \quad (2.65)$$

Здесь s_n определяется равенством (2.63), а λ_n — ненулевые корни уравнения $\operatorname{tg} \lambda_n = \lambda_n$, имеющие асимптотическое представление $\lambda_n \sim (2n + 1) \pi/2$.

Рассмотрим соотношения (2.64), (2.65). Они отличаются от равенств (2.58), полученных в результате осреднения деформации сдвига по толщине балки, наличием сумм, включающих члены с экспоненциальными множителями $e^{-s_n x}$, быстро убывающими при удалении от закрепленного края $x = 0$. Напряженное состояние, определяемое этими членами, соответствует так называемому погранслою, который в отличие от основного состояния (полиномиальная часть решения) существует лишь вблизи края $x = 0$. Следует отметить, что в равенстве (2.65) под знаком суммы имеется член, не убывающий при увеличении x и отражающий влияние податливости балки, учитываемой погранслоем, на ее прогиб вдали от заделки. Для того чтобы осуществить приближенную количественную оценку, найдем с помощью равенства (2.65) прогиб балки на свободном конце $x = 1$ и запишем его в виде

$$u_s(x = 1) = w_s(1 + \Delta w + \delta w),$$

где w_1 — прогиб, соответствующий решению (2.43), которое вообще не учитывает сдвиг; Δw и δw — поправки, вызванные соответственно учетом осредненной деформации сдвига и погранслоя. Для балки с относительной толщиной $h/a = 0,1$ в случае $E_x/G_{xz} = 1$ получим $\Delta w = 1,5 \times 10^{-2}$; $\delta w = 1,2 \times 10^{-5}$, а при $E_x/G_{xz} = 100$ — $\Delta w = 1,5$; $\delta w = 1,2 \times 10^{-2}$. Таким образом, в зависимости от параметров балки учет осредненной деформации сдвига может играть малую или решающую роль, а уточнение, вносимое учетом погранслоя, вдали от заделки является, как правило, незначительным. Остановимся теперь на анализе влияния погранслоя на напряженно-деформированное состояние вблизи края, в окрестности которого он локализован. Решения (2.43) или (2.58), соответствующие закону плоских сечений, предполагают закрепление опорного сечения балки (рис. 2.5) от смещений и поворота и не зависят от того, каким конкретным конструктивным способом это закрепление осуществлено. Учет погранслоя в принципе расширяет класс граничных условий, которым можно подчинить решение; однако, как правило, появляющихся при этом возможностей оказывается все-таки недостаточно для удовлетворительного описания реального конструктивного оформления заделки или другого вида закрепления. В соединениях композитных элементов друг с другом и с металлическими элементами обычно присутствуют дополнительные детали (болты, заклепки, штифты, упругие прокладки) и местные усиления, имеют место нарушения сплошности, однородности или структуры материала, плохо поддающиеся формализации и математическому моделированию. Таким образом, учет погранслоя вносит в расчет скорее формальные, чем фактические уточнения. Более того, строгое решение уравнений типа (2.59), в принципе более точных, чем уравнения типа (2.50), может привести к ситуации, которая может быть проиллюстрирована на примере рассматривавшейся выше балки (рис. 2.5). Запишем соотношение упругости для касательных напряжений:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (2.66)$$

Полученные решения (2.64), (2.65) обеспечивает выполнение условий жесткой заделки края $x = 0$, т. е. на этом краю $u_x = 0$ и $u_z = 0$. Поскольку отсюда следует, что при $x = 0$ и $\partial u_x / \partial z = 0$, а функция u_z вообще не зависит от z , равенство (2.66) показывает, что $\tau_{xz} = \text{const}$ при $x = 0$. Т. е. в заделке касательные напряжения равномерно распределяются по толщине балки. Однако на поверхностях $z = 0$ и $z = 1$ $\tau_{xz} = 0$, т. е. в силу свойства парности касательных напряжений в угловых точках $x = 0$, $z = 0$ и $x = 0$, $z = 1$ должно выполняться условие $\tau_{xz} = 0$. Итак, при $x = 0$ и $0 < z < 1$ $\tau_{xz} = \text{const} \neq 0$ (иначе в заделке поперечная сила окажется равной нулю), а в точках края $z = 0$ и $z = 1$ $\tau_{xz} = 0$. Таким образом, касательные напряжения в этих точках терпят разрыв, а нормальные напряжения σ_x , как следует из

первого уравнения (2.35), имеют в этих точках особенность, т.е. обращаются в бесконечность.

Учет деформации e_z и коэффициентов Пуассона μ_{xz} , μ_{zx} не улучшает положения — особенность в угловых точках закрепленного края сохраняется, и при получении регулярных решений типа (2.64), (2.65) ее необходимо предварительно выделять [20]. Очевидно, что появление бесконечно больших напряжений в расчетной модели элементов, которые длительно и успешно эксплуатируются, свидетельствует о недостаточной степени адекватности модели и реальной конструкции. Расчет рассматриваемой балки на основе модели, учитывающей среднюю деформацию сдвига и игнорирующей погранслои, для практических целей дает более реалистические результаты. Отметим, что такой подход не исключает детального анализа зоны соединения. Действительно, отделив ее некоторым сечением $x = c$ (рис. 2.5), где c больше зоны распространения погранслоя, можно исследовать эту область со всеми конструктивными особенностями узла соединения более строгими аналитическими или, что более вероятно, дискретными численными и экспериментальными методами. Определив расчетным или экспериментальным путем жесткость опорного узла по отношению к смещению и повороту, можно далее описать напряженно-деформированное состояние балки с помощью уравнений, основанных на введенных выше гипотезах.

В заключение отметим, что в количественном отношении результаты проведенного выше анализа, естественно, справедливы только для рассмотренной балки, однако в качественном отношении сделанные выводы можно распространить на другие граничные условия, случаи нагружения и расчетные модели, в частности, на композитные панели и оболочки, рассматриваемые ниже.

§ 2.3. Уравнения строительной механики тонкостенных композитных систем

Используем теперь сформулированные выше гипотезы для упрощения приведенных в § 2.1 соотношений и вывода уравнений прикладной теории композитных стержней, пластин и оболочек. Рассмотрим некоторый элемент слоистого материала, отнесенный к ортогональной системе криволинейных координат α , β , γ (рис. 2.7). Совместим оси α и β с главными направлениями, а ось γ — с наружной нормалью к некоторой начальной поверхности $\gamma = 0$ (ее называют также поверхностью приведения), которая отстоит от внутренней поверхности на величину e (рис. 2.7). Постоянная e будет выбираться далее в соответствии с характером расположения слоев по толщине материала, а пока является произвольной. Для начальной поверхности равенства (2.1) принимают вид $ds_\alpha^2 = A_1 d\alpha^2$; $ds_\beta^2 = A_2 d\beta^2$, где $A_1(\alpha, \beta) = H_1(\alpha, \beta, \gamma = 0)$; $A_2(\alpha, \beta) = H_2(\alpha, \beta, \gamma = 0)$ — коэффици-

енты первой квадратичной формы начальной поверхности. Для некоторой поверхности, эквидистантной начальной и отстоящей от нее на величину γ (см. рис. 2.7), будем иметь

$$ds_\alpha = \frac{A_1 d\alpha}{R_1} (R_1 + \gamma) \quad (1, 2). \quad (2.67)$$

Напомним, что символ (1,2) обозначает, что из записанного равенства, соответствующего переменной α , можно получить еще одно для переменной β , если заменить α на β , β на α , 1 на 2 и 2 на 1. В формулах (2.67) R_1 (R_2) — главные радиусы кривизны начальной поверхности. Сопоставляя равенства (2.1) и (2.67) и учитывая, что $ds_\gamma = d\gamma$, получим выражения для коэффициентов Ламе, определяющих метрические свойства рассматриваемого тела,

$$H_1 = A_1 \left(1 + \frac{\gamma}{R_1} \right) \quad (1, 2), \quad H_3 = 1. \quad (2.68)$$

С учетом (2.68) уравнения Ламе (2.4) позволяют записать важное для дальнейшего геометрическое соотношение. Из второго уравнения (2.4) при $H_3 = 1$ получим

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \beta \partial \gamma} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \quad (1, 2).$$

Или с учетом первого равенства (2.68)

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) = \frac{A_2}{H_2 R_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta}.$$

Ввиду того, что это соотношение справедливо при $\gamma = 0$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad (1, 2). \quad (2.69)$$

Введем первую гипотезу, т. е. будем считать материал недеформируемым в направлении координаты γ . Физически это означает, что изменение толщины h материала (рис. 2.7) в процессе его деформирования при построении теории не учитывается. Формально следует принять деформацию $e_\gamma = 0$. Поскольку нет никаких оснований считать равными нулю напряжения, из равенства

$$e_\gamma = \frac{1}{E_\gamma} \sigma_\gamma - \mu_{\gamma\alpha} \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \mu_{\gamma\beta} \frac{\sigma_\beta}{E_\beta}$$

следует, что $E_\gamma \rightarrow \infty$ и $\mu_{\gamma\alpha} = \mu_{\alpha\gamma} = 0$. Посмотрим, к каким упрощениям приводит принятая гипотеза. Прежде всего из физических соотношений (2.7) при $E_\gamma \rightarrow \infty$ имеем

$$e_\alpha = \frac{1}{E_\alpha} \sigma_\alpha - \mu_{\alpha\beta} \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} \quad (1, 2). \quad (2.70)$$

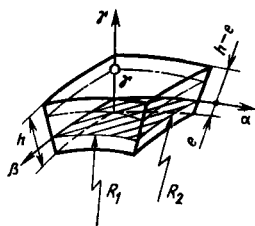


Рис. 2.7. Элемент слоистого материала, отнесенный к криволинейной системе координат

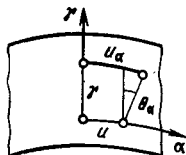


Рис. 2.8. Составляющие смещения точки в направлении оси α

Таким образом, физический закон для нормальных деформаций принимает форму, характерную для плоского напряженного состояния. Однако более существенным является упрощение, вытекающее из выражения (2.10) для e_γ , которое с учетом (2.68) имеет вид $e_\gamma = \partial u_\gamma / \partial \gamma$. Отсюда при $e_\gamma = 0$ имеем $u_\gamma = w(\alpha, \beta)$. Функция $w(\alpha, \beta)$, определяющая постоянное по толщине нормальное к поверхностям слоев перемещение точек материала, называется нормальным прогибом.

Введем вторую гипотезу. В равенствах (2.10), которые в рассматриваемом случае дают

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + H_1 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\alpha}{H_1} \right) \quad (1, 2), \quad (2.71)$$

осредним деформацию сдвига $e_{\alpha\gamma}$ по толщине материала. Осреднения по граням элемента, показанного на рис. 2.7:

$$\frac{d\alpha}{h} \int_{-e}^{h-e} e_{\alpha\gamma} H_1 d\gamma = \psi_\alpha(\alpha, \beta) A_1 d\alpha,$$

получим

$$\psi_\alpha = \frac{1}{hA_1} \int_{-e}^{h-e} e_{\alpha\gamma} H_1 d\gamma. \quad (2.72)$$

Отсюда следует, что в соотношениях (2.71) $e_{\alpha\gamma}(\alpha, \beta, \gamma)$ следует заменить на $\psi_\alpha(\alpha, \beta) A_1 / H_1$, а $e_{\beta\gamma}(\alpha, \beta, \gamma)$ — на $\psi_\beta(\alpha, \beta) A_2 / H_2$. При такой замене уравнения (2.72) удовлетворяются тождественно. Осуществляя указанную замену и интегрируя соотношения (2.71) по γ , можно записать следующие важные соотношения, определяющие линейное распределение перемещений по толщине материала:

$$u_\alpha = u(\alpha, \beta) + \gamma \theta_\alpha(\alpha, \beta); \quad u_\beta = v(\alpha, \beta) + \gamma \theta_\beta(\alpha, \beta), \quad (2.73)$$

где $u = u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma = 0)$; $v = u_\beta(\alpha, \beta, \gamma = 0)$ — перемещения точек начальной поверхности в направлениях α и β , а

$$\theta_\alpha = \psi_\alpha + \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \theta_\beta = \psi_\beta + \frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (2.74)$$

— углы поворота нормали к начальной поверхности.

Соотношения (2.73), (2.74) допускают простую геометрическую интерпретацию. Из рис. 2.8 следует, что перемещение точки,

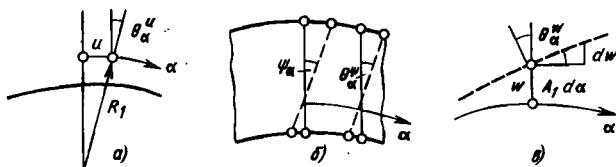


Рис. 2.9. Составляющие угла поворота нормали, связанные с тангенциальным смещением (а), сдвигом (б) и изгибом (в)

лежащей на поверхности $\gamma = \text{const}$, $u_\alpha = u + \gamma\theta_\alpha$, что соответствует равенствам (2.73), а рис. 2.9 позволяет получить составляющие угла поворота нормали:

$$\theta_\alpha = \theta_\alpha^u + \theta_\alpha^\psi - \theta_\alpha^w;$$

$$\theta_\alpha^u = \frac{u}{R_1}; \quad \theta_\alpha^\psi = \psi_\alpha; \quad \theta_\alpha^w = \frac{1}{A_1} \frac{dw}{d\alpha},$$

соответствующие равенствам (2.74). Таким образом, принятые гипотезы позволяют вместо трех перемещений u_α , u_β , u_γ , зависящих от трех переменных α , β , γ , отыскивать пять функций u , v , w , θ_α , θ_β , зависящих от двух переменных, что значительно упрощает задачу определения напряженно-деформированного состояния исследуемых далее элементов и конструкций.

Получим выражения для относительных деформаций e_α , e_β , $e_{\alpha\beta}$. Подставляя равенства (2.73) в геометрические соотношения (2.10), после некоторых преобразований с учетом (2.69) будем иметь

$$e_\alpha = \frac{A_1}{H_1} (e_\alpha + \gamma\kappa_\alpha) \quad (1, 2);$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{A_1}{H_1} (e_{\alpha\beta} + \gamma\kappa_{\alpha\beta}) + \frac{A_2}{H_2} (e_{\beta\alpha} + \gamma\kappa_{\beta\alpha}), \quad (2.75)$$

где

$$e_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1} \quad (1, 2);$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad (1, 2); \quad (2.76)$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\theta_\beta}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad (1, 2);$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\theta_\alpha}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad (1, 2). \quad (2.77)$$

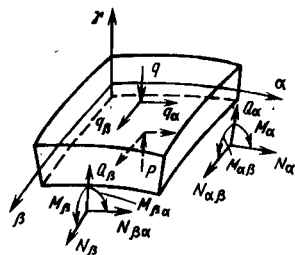
Символ (1,2) здесь и далее предполагает, что из записанного соотношения можно получить еще одно заменой α на β , β на α , 1 на 2, 2 на 1, u на v и v на u . Таким образом, получены геометрические соотношения рассматриваемой теории.

Запишем теперь физические соотношения. С учетом принятых гипотез, деформации связаны с напряжениями соотношениями (2.8) и (2.70). Разрешая их относительно напряжений и выражая упругие постоянные E_α , E_β , $G_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$, $\mu_{\beta\alpha}$ через коэффициенты

Рис. 2.10. Усилия и моменты, действующие на элемент слоистого материала

жесткости армированного слоя A_{mn} (см. § 1.4, 1.5) с помощью формул (1.29), получим равенства, аналогичные (1.27):

$$\sigma_\alpha = A_{11}e_\alpha + A_{12}e_\beta \quad (1, 2); \quad \tau_{\alpha\beta} = A_{33}e_{\alpha\beta}. \quad (2.78)$$



Здесь считается, что коэффициенты A_{mn} являются некоторыми гладкими или ступенчато изменяющимися (для слоистого материала) функциями переменной γ . Если подставить деформации (2.75) в соотношения (2.78), то напряжения σ_α , σ_β и $\tau_{\alpha\beta}$ можно выразить через восемь функций переменных α и β : e_α , e_β , $e_{\alpha\beta}$, $e_{\beta\alpha}$, κ_α , κ_β , $\kappa_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\beta\alpha}$, представляющих собой некоторые обобщенные деформационные характеристики. Однако для описания напряженного состояния представляется более естественным ввести аналогичные этим характеристикам обобщенные силовые факторы — усилия и моменты, показанные на рис. 2.10. Осуществляя интегрирование по граням элемента, показанного на рис. 2.2 или 2.7, и относя усилия и моменты к единице длины линий, ограничивающих элемент начальной поверхности (рис. 2.7), будем иметь

$$N_\alpha = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \sigma_\alpha H_2 d\gamma; \quad N_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{\alpha\beta} H_2 d\gamma \quad (1, 2); \quad (2.79)$$

$$M_\alpha = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \sigma_\alpha H_2 \gamma d\gamma; \quad M_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{\alpha\beta} H_2 \gamma d\gamma \quad (1, 2).$$

Подставляя в (2.79) напряжения (2.78) и учитывая соотношения (2.75), окончательно получим

$$N_\alpha = B_{11}e_\alpha + B_{12}e_\beta + C_{11}\kappa_\alpha + C_{12}\kappa_\beta \quad (1, 2);$$

$$N_{\alpha\beta} = B_{33}^{11}e_{\alpha\beta} + B_{33}^{12}e_{\beta\alpha} + C_{33}^{11}\kappa_{\alpha\beta} + C_{33}^{12}\kappa_{\beta\alpha} \quad (1, 2); \quad (2.80)$$

$$M_\alpha = C_{11}e_\alpha + C_{12}e_\beta + D_{11}\kappa_\alpha + D_{12}\kappa_\beta \quad (1, 2);$$

$$M_{\alpha\beta} = C_{33}^{11}e_{\alpha\beta} + C_{33}^{12}e_{\beta\alpha} + D_{33}^{11}\kappa_{\alpha\beta} + D_{33}^{12}\kappa_{\beta\alpha} \quad (1, 2).$$

Здесь

$$B_{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} A_{11} d\gamma, \quad C_{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} A_{11} \gamma d\gamma,$$

$$D_{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} A_{11} \gamma^2 d\gamma \quad (1, 2);$$

$$\begin{aligned}
B_{12} = B_{21} &= \int_{-e}^{h-e} A_{12} d\gamma, \quad C_{12} = C_{21} = \int_{-e}^{h-e} A_{12} \gamma d\gamma, \\
D_{12} = D_{21} &= \int_{-e}^{h-e} A_{12} \gamma^2 d\gamma \quad (1, 2); \\
B_{33}^{11} &= \int_{-e}^{h-e} K_{12} A_{33} d\gamma, \quad C_{33}^{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} A_{33} \gamma d\gamma, \\
D_{33}^{11} &= \int_{-e}^{h-e} K_{12} A_{33} \gamma^2 d\gamma \quad (1, 2); \\
B_{33}^{12} = B_{33}^{21} &= \int_{-e}^{h-e} A_{33} d\gamma, \quad C_{33}^{12} = C_{33}^{21} = \int_{-e}^{h-e} A_{33} \gamma d\gamma, \\
D_{33}^{12} = D_{33}^{21} &= \int_{-e}^{h-e} A_{33} \gamma^2 d\gamma \quad (1, 2)
\end{aligned}
\tag{2.81}$$

и

$$K_{12} = (A_1 H_2) / (A_2 H_1) \quad (1, 2). \tag{2.82}$$

Эти выражения, определяющие мембранные B , изгибные D и смешанные C жесткости материала, будут подробно рассмотрены в § 2.5. Получим физические соотношения для поперечных усилий Q_α и Q_β (см. рис. 2.10), являющихся равнодействующими трансверсальных касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ (см. рис. 2.2), т. е.

$$Q_\alpha = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{\alpha\gamma} H_2 d\gamma \quad (1, 2). \tag{2.83}$$

Трансверсальные касательные напряжения связаны с соответствующими деформациями законом Гука (2.8), т. е.

$$e_{\alpha\gamma} = \tau_{\alpha\gamma} / G_{\alpha\gamma} \quad (1, 2). \tag{2.84}$$

Предполагается, что модули сдвига $G_{\alpha\gamma}$ и $G_{\beta\gamma}$, которые для армированного слоя определяются равенствами (1.36), являются функциями переменной γ . Подставляя (2.84) в выражение для средней деформации сдвига (2.72), получим

$$\psi_\alpha = \frac{1}{h A_1} \int_{-e}^{h-e} \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} H_1 d\gamma \quad (1, 2). \tag{2.85}$$

Сделаем здесь одно важное замечание. Функция ψ_α получена в результате осреднения деформации $e_{\alpha\gamma}$ по толщине материала. Учитывая наличие связи (2.84), представляется последовательным использовать в (2.85) операцию осреднения и для $\tau_{\alpha\gamma}$. В соответствии с равенством (2.83) (оно при таком осреднении удовлет-

воряется тождественно) заменим в подынтегральном выражении $\tau_{\alpha\gamma}$ на $A_2 Q_\alpha / H_2 h$. В результате можно записать следующие соотношения, связывающие поперечные усилия со средними деформациями сдвига:

$$Q_\alpha = K_\alpha \psi_\alpha \quad (1, 2). \quad (2.86)$$

Или, выражая деформацию сдвига через угол поворота нормали и перемещения с помощью равенств (2.74), получим

$$Q_\alpha = K_\alpha \left(\theta_\alpha - \frac{u}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \quad (1, 2), \quad (2.87)$$

где

$$K_\alpha = h^2 \left(\int_{-e}^{h-e} K_{21} \frac{d\gamma}{G_{\alpha\gamma}} \right)^{-1} \quad (1, 2) \quad (2.88)$$

— жесткость материала при трансверсальном сдвиге. Коэффициент K_{21} определяется формулой (2.82). Таким образом, равенства (2.80) и (2.86) или (2.87) определяют физические соотношения рассматриваемой теории.

Для вывода завершающей группы уравнений рассмотрим уравнения равновесия (2.5). Принимая в них $H_3 = 1$ и преобразуя операторы L_α (2.6) с учетом свойства парности касательных напряжений, получим

$$L_\alpha^{(1)}(\sigma) + F_\alpha H_1 H_2 = 0 \quad (1, 2); \quad L_\gamma^{(1)}(\sigma) + F_\gamma H_1 H_2 = 0, \quad (2.89)$$

где

$$L_\alpha^{(1)}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_\alpha) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) - \sigma_\beta \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} +$$

$$+ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1^2 H_2 \tau_{\alpha\gamma}) \quad (1, 2); \quad (2.90)$$

$$L_\gamma^{(1)}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \sigma_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \tau_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 \tau_{\beta\gamma}) -$$

$$- H_2 \sigma_\alpha \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - H_1 \sigma_\beta \frac{\partial H_3}{\partial \gamma}.$$

По внутренней и внешней поверхностям композитной стенки в направлении координатных осей действуют касательные силы, а также внутреннее p и наружное q давления (см. рис. 2.10). Тогда статические граничные условия на этих поверхностях можно записать в виде (см. рис. 2.2, 2.10):

$$\tau_{\alpha\gamma} = -p_\alpha, \quad \tau_{\beta\gamma} = -p_\beta, \quad \sigma_\gamma = -p \quad \text{при } \gamma = -e; \quad (2.91)$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = q_\alpha, \quad \tau_{\beta\gamma} = q_\beta, \quad \sigma_\gamma = -q \quad \text{при } \gamma = h - e.$$

Проинтегрируем первое уравнение (2.89) по γ . Выражая из полученного соотношения $\tau_{\alpha\gamma}$ и учитывая условия (2.91) для поверхности $\gamma = -e$, будем иметь

$$H_1^2 H_2 \tau_{\alpha\gamma} = - \int_{-e}^{\gamma} \left[H_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) - \right. \\ \left. - H_1 \sigma_\beta \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + F_\alpha H_1^2 H_2 \right] d\gamma - B_1^2 B_2 p_\alpha \quad (1, 2), \quad (2.92)$$

где

$$B_1 = A_1 \left(1 - \frac{e}{R_1} \right) \quad (1, 2). \quad (2.93)$$

Удовлетворим теперь граничному условию (2.91) на поверхности $\gamma = h - e$. Полагая в (2.92) $\gamma = h - e$ и вводя обозначения

$$C_1 = A_1 \left(1 + \frac{h-e}{R_1} \right) \quad (1, 2), \quad (2.94)$$

получим

$$\int_{-e}^{h-e} \left[H_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) - H_1 \sigma_\beta \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + F_\alpha H_1^2 H_2 \right] d\gamma + C_1^2 C_2 q_\alpha + B_1^2 B_2 p_\alpha = 0 \quad (1, 2). \quad (2.95)$$

Преобразуем входящие сюда интегралы с учетом равенств (2.68), (2.69) и выражений для усилий и моментов (2.79):

$$\int_{-e}^{h-e} H_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_\alpha) d\gamma = A_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_{-e}^{h-e} H_2 \sigma_\alpha d\gamma \right) + \\ + \frac{A_1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_{-e}^{h-e} H_2 \sigma_\alpha \gamma d\gamma \right) = \\ = A_1 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 N_\alpha) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 M_\alpha) \right]; \\ \int_{-e}^{h-e} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) d\gamma = \int_{-e}^{h-e} H_1 \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 \tau_{\alpha\beta}) d\gamma + \\ + \int_{-e}^{h-e} H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \tau_{\alpha\beta} d\gamma = A_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{-e}^{h-e} H_1 \tau_{\alpha\beta} d\gamma \right) + \\ + \frac{A_1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{-e}^{h-e} H_1 \tau_{\alpha\beta} \gamma d\gamma \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \left(\int_{-e}^{h-e} H_2 \tau_{\alpha\beta} d\gamma + \right. \\ \left. (2.96)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R_1} \int_{-e}^{h-e} H_2 \tau_{\alpha\beta} \gamma d\gamma \Big) = A_1 \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 N_{\beta\alpha}) + \right. \\
& + \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 M_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \left(N_{\alpha\beta} + \frac{1}{R_1} M_{\alpha\beta} \right) \Big]; \\
& \int_{-e}^{h-e} H_1 \sigma_\beta \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} d\gamma = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} \int_{-e}^{h-e} H_1^2 \sigma_\beta d\gamma = \\
& = \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} \left(\int_{-e}^{h-e} H_1 \sigma_\beta d\gamma + \frac{1}{R_1} \int_{-e}^{h-e} H_1 \sigma_\beta \gamma d\gamma \right) = \\
& = A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} \left(N_\beta + \frac{M_\beta}{R_1} \right); \\
& \int_{-e}^{h-e} F_\alpha H_1^2 H_2 d\gamma = A_1 \left(\int_{-e}^{h-e} F_\alpha H_1 H_2 d\gamma + \frac{1}{R_1} \int_{-e}^{h-e} F_\alpha \gamma H_1 H_2 d\gamma \right).
\end{aligned}$$

В результате уравнения (2.95) принимают вид

$$L_\alpha(N) + \frac{1}{R_1} L_\alpha(M) + f_\alpha + \frac{m_\alpha}{R_1} = 0 \quad (1, 2), \quad (2.97)$$

где

$$\begin{aligned}
L_\alpha(\Phi) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 \Phi_\alpha) - \\
&- \Phi_\beta \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 \Phi_{\beta\alpha}) + \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad (1, 2); \quad (2.98)
\end{aligned}$$

$$f_\alpha = \int_{-e}^{h-e} F_\alpha H_1 H_2 d\gamma + B_1 B_2 p_\alpha + C_1 C_2 q_\alpha \quad (1, 2);$$

$$m_\alpha = \int_{-e}^{h-e} F_\alpha H_1 H_2 \gamma d\gamma + (h - e) C_1 C_2 q_\alpha - e B_1 B_2 p_\alpha \quad (1, 2). \quad (2.99)$$

Равенства (2.99) определяют равнодействующие сил и моментов нагрузок, действующих на элемент, показанный на рис. 2.10. Функции B_1 , B_2 и C_1 , C_2 , задаваемые формулами (2.93) и (2.94), являются коэффициентами первой квадратичной формы внутренней и наружной поверхностей стенки.

Для того чтобы упростить уравнения равновесия (2.97), получим выражения для поперечных усилий Q_α и Q_β , подставив касательные напряжения (2.92) в равенства (2.83), т. е.

$$\begin{aligned}
Q_\alpha = - \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \frac{d\gamma}{H_1^2} \left\{ \int_{-e}^{\gamma} \left[H_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) - H_1 \sigma_\beta \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
\left. \left. + F_\alpha H_1^2 H_2 \right] d\gamma + B_1^2 B_2 p_\alpha \right\} \quad (1, 2). \quad (2.100)
\end{aligned}$$

Преобразуем входящие сюда интегралы с помощью операции интегрирования по частям. Учитывая, что

$$\int_{-e}^{\gamma} \frac{d\gamma}{H_1^2} = \frac{1}{A_1} \left(\frac{\gamma}{H_1} + \frac{e}{B_1} \right),$$

и принимая во внимание равенства (2.68), (2.69), получим

$$\begin{aligned} \int_{-e}^{h-e} \frac{d\gamma}{H_1^2} \int_{-e}^{\gamma} H_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_{\alpha}) d\gamma &= \left(\int_{-e}^{h-e} \frac{d\gamma}{H_1^2} \right) \left[\int_{-e}^{h-e} H_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_{\alpha}) d\gamma \right] - \\ &- \int_{-e}^{h-e} \left(\int_{-e}^{\gamma} \frac{d\gamma}{H_1^2} \right) H_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_{\alpha}) d\gamma = \frac{h-e}{A_1 C_1} \int_{-e}^{h-e} H_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_{\alpha}) d\gamma - \\ &- \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-e}^{h-e} \sigma_{\alpha} H_2 \gamma d\gamma; \\ \int_{-e}^{h-e} \frac{d\gamma}{H_1^2} \int_{-e}^{\gamma} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) d\gamma &= \frac{h-e}{A_1 C_1} \int_{-e}^{h-e} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) d\gamma - \\ &- \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_{-e}^{h-e} \tau_{\alpha\beta} H_1 \gamma d\gamma - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \int_{-e}^{h-e} \tau_{\alpha\beta} H_2 \gamma d\gamma; \quad (2.101) \\ \int_{-e}^{h-e} \frac{d\gamma}{H_1^2} \int_{-e}^{\gamma} H_1 \sigma_{\beta} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} d\gamma &= \frac{h-e}{A_1 C_1} \int_{-e}^{h-e} H_1 \sigma_{\beta} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} d\gamma - \\ &- \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} \int_{-e}^{h-e} \sigma_{\beta} H_1 \gamma d\gamma; \\ \int_{-e}^{h-e} \frac{d\gamma}{H_1^2} \int_{-e}^{\gamma} F_{\alpha} H_1^2 H_2 d\gamma &= \frac{h-e}{A_1 C_1} \int_{-e}^{h-e} F_{\alpha} H_1^2 H_2 d\gamma - \\ &- \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} F_{\alpha} H_1 H_2 \gamma d\gamma. \end{aligned}$$

Подставляя интегралы (2.101) в равенство (2.100) и учитывая соотношения (2.96), формулы (2.79) и обозначение (2.98), имеем

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} &= -\frac{1}{A_2} \left\{ \frac{h-e}{C_1} \left[L_{\alpha}(N) + \frac{1}{R_1} L_{\alpha}(M) \right] - \frac{1}{A_1} L_{\alpha}(M) + \right. \\ &+ \frac{h-e}{C_1} \left[\int_{-e}^{h-e} F_{\alpha} H_1 H_2 d\gamma + \frac{1}{R_1} \int_{-e}^{h-e} F_{\alpha} H_1 H_2 \gamma d\gamma + \frac{B_1^2 B_2}{A_1} \rho_{\alpha} \right] - \\ &\left. - \frac{1}{A_1} \left(\int_{-e}^{h-e} F_{\alpha} H_1 H_2 \gamma d\gamma - \frac{e}{A_1} B_1 B_2 \rho_{\alpha} \right) \right\} \quad (1.2). \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание уравнения (2.97) и обозначения (2.93), (2.94), (2.99), окончательно получим следующие выражения для поперечных усилий:

$$Q_\alpha = \frac{1}{A_1 A_2} [L_\alpha(M) + m_\alpha] \quad (1, 2). \quad (2.102)$$

С учетом этих равенств уравнения (2.97) можно записать в виде

$$L_\alpha(N) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_\alpha + f_\alpha = 0 \quad (1, 2). \quad (2.103)$$

Уравнения (2.102) и (2.103) можно получить и непосредственно из условий равновесия элемента, показанного на рис. 2.10. Они представляют собой соответственно условия равенства нулю сумм моментов относительно касательных к осям α и β и сумм проекций на эти касательные сил, действующих на выделенный из материала бесконечно малый элемент.

Рассмотрим теперь последнее уравнение равновесия трехмерной теории — второе уравнение (2.89). Интегрируя его по γ с учетом граничных условий (2.91) на поверхности $\gamma = -e$ и учитывая равенства (2.68), (2.93), запишем выражение для трансверсальных нормальных напряжений:

$$H_1 H_2 \sigma_\gamma = - \int_{-e}^{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (H_1 \tau_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 \tau_{\beta\gamma}) - \frac{A_1}{R_1} H_2 \sigma_\alpha - \right. \\ \left. - \frac{A_2}{R_2} H_1 \sigma_\beta + F_\gamma H_1 H_2 \right] d\gamma - B_1 B_2 p. \quad (2.104)$$

Положим в уравнении (2.104) $\gamma = h - e$ и воспользуемся граничными условиями (2.91) для поверхности $\gamma = h - e$. С учетом обозначений (2.94) будем иметь

$$\int_{-e}^{h-e} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \tau_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 \tau_{\beta\gamma}) - \frac{A_1}{R_1} H_2 \sigma_\alpha - \frac{A_2}{R_2} H_1 \sigma_\beta + \right. \\ \left. + F_\gamma H_1 H_2 \right] d\gamma + B_1 B_2 p - C_1 C_2 q = 0.$$

Подставляя сюда выражения для τ из (2.92) и осуществляя преобразования, аналогичные (2.101), (2.96), получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A_1} L_\alpha(M) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{A_2} L_\beta(M) \right] - A_1 A_2 \left(\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} \right) + \\ + f_\gamma + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{m_\alpha}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{m_\beta}{A_2} \right) = 0, \quad (2.105)$$

где

$$f_\gamma = \int_{-e}^{h-e} F_\gamma H_1 H_2 d\gamma + B_1 B_2 p - C_1 C_2 q, \quad (2.106)$$

а операторы L определяют из равенств (2.98). Преобразуя уравнение (2.105) с помощью соотношений (2.102), окончательно будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 Q_\beta) - A_1 A_2 \left(\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} \right) + f_\gamma = 0. \quad (2.107)$$

Это уравнение можно получить непосредственно из условия равновесия элемента, показанного на рис. 2.10, в направлении оси γ . Таким образом, для этого элемента записаны традиционные пять уравнений равновесия — три уравнения (2.103), (2.107), соответствующие проекциям на касательные к осям α , β и на ось γ , а также два уравнения (2.102), соответствующие моментам относительно касательных к осям α и β . Заметим, что шестое уравнение равновесия

$$N_{\beta\alpha} - N_{\alpha\beta} + \frac{M_{\beta\alpha}}{R_2} - \frac{M_{\alpha\beta}}{R_1} = 0,$$

которое соответствует сумме моментов всех обобщенных сил, действующих на элемент, относительно оси γ , удовлетворяется автоматически, если подставить в него усилия и моменты (2.79).

Отметим, что между полученными уравнениями (2.102), (2.103), (2.107) и исходными уравнениями равновесия (2.89), (2.90) существует принципиальное различие. Исходные уравнения являются трехмерными и соответствуют элементу, ребра которого имеют бесконечно малую длину в направлении всех трех координат (см. рис. 2.2). Окончательные уравнения (2.102), (2.103), (2.107) являются двумерными и соответствуют элементу, размеры которого являются бесконечно малыми только в направлении координат α и β , а в направлении координаты γ размер элемента равен толщине стенки (см. рис. 2.10). Вывод этих уравнений непосредственно из условий равновесия элемента будет проиллюстрирован далее в § 2.6.

§ 2.4. Постановка задачи

Постановка задачи расчета конструкции или ее элемента предполагает написание полной системы уравнений, определяющих систему искомых функций и соответствующих граничных условий. Запишем основные уравнения, полученные в предыдущем разделе.

Уравнения равновесия

$$L_\alpha(N) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_\alpha + f_\alpha = 0 \quad (1, 2);$$

$$L_\alpha(M) - A_1 A_2 Q_\alpha + m_\alpha = 0 \quad (1, 2); \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 Q_\beta) - A_1 A_2 \left(\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} \right) + f_\gamma = 0.$$

Входящие сюда операторы L определяются выражением (2.98), а внешние силы и моменты f и m — равенствами (2.99), (2.106).

Физические соотношения

$$\begin{aligned} N_{\alpha} &= B_{11}e_{\alpha} + B_{12}e_{\beta} + C_{11}\kappa_{\alpha} + C_{12}\kappa_{\beta} \quad (1, 2); \\ N_{\alpha\beta} &= B_{33}^{11}e_{\alpha\beta} + B_{33}^{12}e_{\beta\alpha} + C_{33}^{11}\kappa_{\alpha\beta} + C_{33}^{12}\kappa_{\beta\alpha} \quad (1, 2); \\ M_{\alpha} &= C_{11}e_{\alpha} + C_{12}e_{\beta} + D_{11}\kappa_{\alpha} + D_{12}\kappa_{\beta} \quad (1, 2); \\ M_{\alpha\beta} &= C_{33}^{11}e_{\alpha\beta} + C_{33}^{12}e_{\beta\alpha} + D_{33}^{11}\kappa_{\alpha\beta} + D_{33}^{12}\kappa_{\beta\alpha} \quad (1, 2); \\ Q_{\alpha} &= K_{\alpha}\psi_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Коэффициенты жесткости слоистого материала B , G , D , K вычисляются по формулам (2.81), (2.88).

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} e_{\alpha} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1}; \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad (1, 2); \\ \kappa_{\alpha} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\theta_{\beta}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta}; \quad \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_{\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\theta_{\alpha}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad (1, 2); \\ \psi_{\alpha} &= \theta_{\alpha} - \frac{u}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (1, 2). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Система (2.108)–(2.110) является полной — она включает 25 уравнений и содержит 25 неизвестных — десять усилий и моментов, столько же обобщенных деформаций, три перемещения начальной поверхности и два угла поворота нормали к этой поверхности. Система имеет в совокупности десятый порядок по переменным α и β .

Важным свойством прикладной теории является ее энергетическая согласованность, т. е. возможность получения исходных уравнений как условий стационарности некоторого энергетического функционала. Запишем вариационное уравнение (2.24), соответствующее принципу Лагранжа:

$$\delta \Pi_e = \delta U - \delta A, \quad (2.111)$$

где δU — вариация потенциальной энергии (2.22), т. е.

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint (\sigma_{\alpha} \delta e_{\alpha} + \sigma_{\beta} \delta e_{\beta} + \sigma_{\gamma} \delta e_{\gamma} + \tau_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + \\ &\quad + \tau_{\alpha\gamma} \delta e_{\alpha\gamma} + \tau_{\beta\gamma} \delta e_{\beta\gamma}) H_1 H_2 d\alpha d\beta d\gamma, \end{aligned} \quad (2.112)$$

а δA — вариация работы внешних сил (2.23), т. е.

$$\begin{aligned} \delta A &= \iiint (F_{\alpha} \delta u_{\alpha} + F_{\beta} \delta u_{\beta} + F_{\gamma} \delta u_{\gamma}) H_1 H_2 d\alpha d\beta d\gamma + \\ &\quad + \iint [(p_{\alpha} \delta u_{\alpha}^e + p_{\beta} \delta u_{\beta}^e + p \delta u_{\gamma}^e) B_1 B_2 + \\ &\quad + (q_{\alpha} \delta u_{\alpha}^h + q_{\beta} \delta u_{\beta}^h - q \delta u_{\gamma}^h) C_1 C_2] d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Здесь верхние индексы e и h определяют перемещения на внутренней и наружной поверхностях материала. Преобразуем ра-

венства (2.112) и (2.113), учитывая введенные выше гипотезы и полученные с помощью этих гипотез соотношения. В частности, примем в (2.112) $e_\gamma = 0$ и заменим $\tau_{\alpha\gamma}$, $e_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$, $e_{\beta\gamma}$ соответственно на $A_2 Q_\alpha / H_2 h$, $A_1 \psi_\alpha / H_1$ и $A_1 Q_\beta / H_1 h$, $A_2 \psi_\beta / H_2$. Тогда, осуществляя интегрирование по γ и учитывая равенства (2.75) и (2.79), будем иметь

$$\delta U = \iint (N_\alpha \delta e_\alpha + N_\beta \delta e_\beta + N_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha} \delta e_{\beta\alpha} + M_\alpha \delta \kappa_\alpha + \\ + M_\beta \delta \kappa_\beta + M_{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha} \delta \kappa_{\beta\alpha} + Q_\alpha \delta \psi_\alpha + Q_\beta \delta \psi_\beta) A_1 A_2 d\alpha d\beta. \quad (2.114)$$

Выражение (2.113) с учетом равенств (2.73) и $u_\gamma = w$, а также обозначений (2.99), (2.106) принимает вид

$$\delta A = \iint (f_\alpha \delta u + f_\beta \delta v + f_\gamma \delta w + m_\alpha \delta \theta_\alpha + m_\beta \delta \theta_\beta) d\alpha d\beta. \quad (2.115)$$

Подставляя вариации (2.114), (2.115) в уравнение (2.111) и выражая вариации обобщенных деформаций δe , $\delta \kappa$, $\delta \psi$ через вариации перемещений δu , δv , δw и углов поворота $\delta \theta_\alpha$, $\delta \theta_\beta$ с помощью равенств (2.74), (2.76), (2.77) и традиционных для вариационного исчисления преобразования интегралов, получим пять уравнений равновесия (2.108).

Минимизация функционала полной энергии помимо уравнений равновесия позволяет записать естественные граничные условия на краях $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$. При $\alpha = \text{const}$ получим

$$N_\alpha \delta u = 0; \quad N_{\alpha\beta} \delta v = 0; \quad Q_\alpha \delta w = 0; \quad M_\alpha \delta \theta_\alpha = 0; \quad M_{\alpha\beta} \delta \theta_\beta = 0;$$

при $\beta = \text{const}$

$$N_\beta \delta v = 0; \quad N_{\beta\alpha} \delta u = 0; \quad Q_\beta \delta w = 0;$$

$$M_\beta \delta \theta_\beta = 0; \quad M_{\beta\alpha} \delta \theta_\alpha = 0.$$

Таким образом, для обеспечения полного закрепления края необходимо принять $u = v = w = \theta_\alpha = \theta_\beta = 0$. Из равенств (2.73) следует, что на краю $u_\alpha \equiv 0$; $u_\beta \equiv 0$; $u_\gamma \equiv 0$, т. е. все перемещения на краю тождественно равны нулю. Если край $\alpha = \text{const}$ свободен, то согласно полученным условиям на нем $N_\alpha = N_{\alpha\beta} = Q_\alpha = M_\alpha = M_{\alpha\beta} = 0$, т. е. обращаются в нуль равнодействующие краевых напряжений в отношении сил и моментов. Число граничных условий (пять в каждой точке края) находится в соответствии с десятым порядком системы уравнений (2.108)—(2.110) по переменным α и β .

Полученные выше уравнения являются достаточно универсальными — они позволяют описывать поведение композитных элементов конструкций, геометрические и структурные параметры которых изменяются в широких пределах. Выведенные применительно к статическому нагружению, эти уравнения после небольшой модификации позволяют решать задачи динамики, устойчивости и термоупругости композитных систем. Соответствующие обобщения и частные случаи рассмотрены ниже.

§ 2.5. Обобщенные жесткости слоистого материала

В § 2.3 были введены мембранные B_{mn} , смешанные C_{mn} и изгибные D_{mn} жесткости стенки, которые в общем случае определяются равенствами (2.81). В пределы интегрирования входит координата начальной поверхности e (рис. 2.7, 2.11), соответствующим выбором которой выражения для жесткостей можно существенно упростить. Прежде всего введем замену переменной, приняв $\gamma = t - e$, где новая координата t отсчитывается от внутренней (нижней) поверхности (см. рис. 2.11). Тогда жесткости (2.81) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{11} &= I_{11}^{(0)}; & B_{22} &= I_{22}^{(0)}; & B_{12} &= B_{21} = J_{12}^{(0)}; \\ C_{11} &= I_{11}^{(1)} - e I_{11}^{(0)}; & C_{22} &= I_{22}^{(1)} - e I_{22}^{(0)}; & C_{12} &= C_{21} = J_{12}^{(1)} - e J_{12}^{(0)}; \\ D_{11} &= I_{11}^{(2)} - 2e I_{11}^{(1)} + e^2 I_{11}^{(0)}; & D_{22} &= I_{22}^{(2)} - 2e I_{22}^{(1)} + e^2 I_{22}^{(0)}; \\ & D_{12} = D_{21} = J_{12}^{(2)} - 2e J_{12}^{(1)} + e^2 J_{12}^{(0)}; \\ B_{33}^{11} &= I_{33, 11}^{(0)}; & B_{33}^{22} &= I_{33, 22}^{(0)}; & B_{33}^{12} &= B_{33}^{21} = J_{33}^{(0)}; \\ C_{33}^{11} &= I_{33, 11}^{(1)} - e I_{33, 11}^{(0)}; & C_{33}^{22} &= I_{33, 22}^{(1)} - e I_{33, 22}^{(0)}; \\ & C_{33}^{12} = C_{33}^{21} = J_{33}^{(1)} - e J_{33}^{(0)}; \\ D_{33}^{11} &= I_{33, 11}^{(2)} - 2e I_{33, 11}^{(1)} + e^2 I_{33, 11}^{(0)}; & D_{33}^{22} &= I_{33, 22}^{(2)} - 2e I_{33, 22}^{(1)} + e^2 I_{33, 22}^{(0)}; \\ & D_{33}^{12} = D_{33}^{21} = J_{33}^{(2)} - 2e J_{33}^{(1)} + e^2 J_{33}^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.116)$$

где

$$\begin{aligned} I_{11}^{(r)} &= \frac{A_1}{A_2} \int_0^h \frac{H_2}{H_1} A_{11} t^r dt; & I_{22}^{(r)} &= \frac{A_2}{A_1} \int_0^h \frac{H_1}{H_2} A_{22} t^r dt; \\ I_{33, 11}^{(r)} &= \frac{A_1}{A_2} \int_0^h \frac{H_2}{H_1} A_{33} t^r dt; & I_{33, 22}^{(r)} &= \frac{A_2}{A_1} \int_0^h \frac{H_1}{H_2} A_{33} t^r dt; \\ J_{12}^{(r)} &= \int_0^h A_{12} t^r dt; & J_{33}^{(r)} &= \int_0^h A_{33} t^r dt, \end{aligned} \quad (2.117)$$

где $r = 0, 1, 2$.

Рассмотрим прежде всего случай, когда необходимо учитывать изменение метрических свойств по толщине материала, т. е. отношения γ/R_1 и γ/R_2 ($-e \leq \gamma \leq h - e$) нельзя считать малыми по сравнению с единицей. Тогда наиболее простые выражения для жесткостей получаются, если принять $e = 0$ или $\gamma = t$, т. е. совместить начальную поверхность с внутренней (нижней, см. рис. 2.11)

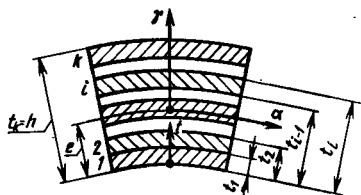


Рис. 2.11. Координаты слоев

поверхностью материала. Равенства (2.116) при этом упрощаются:

$$\begin{aligned} B_{11} &= I_{11}^{(0)}; & B_{22} &= I_{22}^{(0)}; & B_{12} &= B_{21} = J_{12}^{(0)}; \\ C_{11} &= I_{11}^{(1)}; & C_{22} &= I_{22}^{(1)}; & C_{12} &= C_{21} = J_{12}^{(1)}; \\ D_{11} &= I_{11}^{(2)}; & D_{22} &= I_{22}^{(2)}; & D_{12} &= D_{21} = J_{12}^{(2)}; \\ B_{33}^{11} &= I_{33, 11}^{(0)}; & B_{33}^{22} &= I_{33, 22}^{(0)}; & B_{33}^{12} &= B_{33}^{21} = J_{33}^{(0)}; \\ C_{33}^{11} &= I_{33, 11}^{(1)}; & C_{33}^{22} &= I_{33, 22}^{(1)}; & C_{33}^{12} &= C_{33}^{21} = J_{33}^{(1)}; \\ D_{33}^{11} &= I_{33, 11}^{(2)}; & D_{33}^{22} &= I_{33, 22}^{(2)}; & D_{33}^{12} &= D_{33}^{21} = J_{33}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Для слоистого материала, коэффициенты жесткости которого являются кусочно-постоянными функциями переменной t , интегрируя по участкам (см. рис. 2.11) и представляя получающиеся в результате интегрирования логарифмические функции степенными рядами, вместо (2.117) можно записать

$$\begin{aligned} I_{11}^{(2)} &= \sum_{i=1}^k A_{11}^{(i)} \left[\frac{1}{r+1} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) + F_i^{(i)} \right]; \\ I_{22}^{(r)} &= \sum_{i=1}^k A_{22}^{(i)} \left[\frac{1}{r+1} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) + \Phi_i^{(i)} \right]; \\ I_{33, 11}^{(r)} &= \sum_{i=1}^k A_{33}^{(i)} \left[\frac{1}{r+1} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) + F_i^{(i)} \right]; \\ I_{33, 22}^{(r)} &= \sum_{i=1}^k A_{33}^{(i)} \left[\frac{1}{r+1} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) + \Phi_i^{(i)} \right]; \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$J_{12}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{12}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}); \quad J_{33}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{33}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}).$$

Здесь A_{mn} — коэффициенты жесткости слоя, определяемые равенствами, аналогичными (1.12), т. е.

$$\begin{aligned} A_{11}^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} \cos^4 \varphi_i + \bar{E}_2^{(i)} \sin^4 \varphi_i + 2 [\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i; \\ A_{12}^{(i)} &= A_{21}^{(i)} = \bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + [\bar{E}_1^{(i)} + \bar{E}_2^{(i)} - 2\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} - 4G_{12}^{(i)}] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i; \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$A_{22}^{(i)} = \bar{E}_1^{(i)} \sin^4 \varphi_i + \bar{E}_2^{(i)} \cos^4 \varphi_i + 2 [\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i;$$

$$A_{33}^{(i)} = [\bar{E}_1^{(i)} + \bar{E}_2^{(i)} - 2\bar{E}_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)}] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^{(i)} \cos^2 2\varphi_i.$$

В случае, если среди слоев, образующих стенку, есть изотропные, например металлические, в выражениях (2.120) при-

нмают $\bar{E}_1^{(i)} = \bar{E}_2^{(i)} = \bar{E}^{(i)}$, $\mu_{12}^{(i)} = \mu_{21}^{(i)} = \mu^{(i)}$; $G_{12}^{(i)} = G^{(i)}$,
причем

$$\bar{E}^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{1 - [\mu^{(i)}]^2}; \quad G^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{2[1 + \mu^{(i)}]}.$$

Тогда из (2.120) следует $A_{11}^{(i)} = A_{22}^{(i)} = \bar{E}^{(i)}$; $A_{12}^{(i)} = A_{21}^{(i)} = \bar{E}^{(i)}\mu^{(i)}$; $A_{33}^{(i)} = G^{(i)}$. В равенствах (2.119) принято также $t_0 = 0$; $t_k = h$ и

$$F_r^{(i)} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (t_i^{j+r+1} - t_{i-1}^{j+r+1})}{R_1^{j-1} (j+r+1)};$$

$$\Phi_r^{(i)} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (t_i^{j+r+1} - t_{i-1}^{j+r+1})}{R_2^{j-1} (j+r+1)}.$$

Выражения (2.119) для I можно упростить, если не учитывать изменение координаты t в пределах i -го слоя, приняв в выражениях для H_1 и H_2 $t = (t_{i-1} + t_i)/2$. Тогда получим

$$I_{11}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{11}^{(i)} H_2^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1});$$

$$I_{22}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{22}^{(i)} H_1^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1});$$

$$I_{33, 11}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{33}^{(i)} H_2^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1});$$

$$I_{33, 22}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{33}^{(i)} H_1^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}),$$
(2.121)

где $H_{1,2}^{(i)} = \left(1 + \frac{t_i + t_{i-1}}{2R_{1,2}} \right) / \left(1 + \frac{t_i + t_{i-1}}{2R_{2,1}} \right)$.

Аналогичным образом преобразуются и сдвиговые жесткости (2.88). Равенства, аналогичные (2.119) и (2.121), имеют вид

$$K_{\alpha} = h^2 \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{1}{G_{\alpha\gamma}^{(i)}} [t_i - t_{i-1} + \Phi_1^{(i)}] \right\}^{-1};$$

$$K_{\beta} = h^2 \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{1}{G_{\beta\gamma}^{(i)}} [t_i - t_{i-1} + F_1^{(i)}] \right\}^{-1},$$

или

$$K_{\alpha} = h^2 \left[\sum_{i=1}^k \frac{H_1^{(i)}}{G_{\alpha\gamma}^{(i)}} (t_i - t_{i-1}) \right]^{-1}; \quad K_{\beta} = h^2 \left[\sum_{i=1}^k \frac{H_2^{(i)}}{G_{\beta\gamma}^{(i)}} (t_i - t_{i-1}) \right]^{-1},$$
(2.122)

где $G_{\alpha\gamma}^{(i)}$, $G_{\beta\gamma}^{(i)}$ — модули упругости i -го слоя при трансверсальном сдвиге, определяемые равенствами (1.36), т. е.

$$G_{\alpha\gamma}^{(i)} = G_{13}^{(i)} \cos^2 \varphi_i + G_{23}^{(i)} \sin^2 \varphi_i; \quad G_{\beta\gamma}^{(i)} = G_{13}^{(i)} \sin^2 \varphi_i + G_{23}^{(i)} \cos^2 \varphi_i.$$

Для изотропного или трансверсально изотропного слоя $G_{13}^{(i)} = G_{23}^{(i)} = G^{(i)}$ и $G_{\alpha\gamma}^{(i)} = G_{\beta\gamma}^{(i)} = G^{(i)}$.

Для однородного по толщине материала в записанных выше соотношениях следует принять $t_0 = 0$; $t_1 = h$; $t_i = 0$ ($i \geq 2$), т. е. получим

$$\begin{aligned} I_{11}^{(r)} &= A_{11} \left(\frac{h^{r+1}}{r+1} + F_r \right); & I_{22}^{(r)} &= A_{22} \left(\frac{h^{r+1}}{r+1} + \Phi_r \right); \\ I_{33, 11}^{(r)} &= A_{33} \left(\frac{h^{r+1}}{r+1} + F_r \right); & I_{33, 22}^{(r)} &= A_{33} \left(\frac{h^{r+1}}{r+1} + \Phi_r \right); \\ J_{12}^{(r)} &= A_{12} \frac{h^{r+1}}{r+1}; & J_{33}^{(r)} &= A_{33} \frac{h^{r+1}}{r+1}; \\ K_\alpha &= \frac{h^2 G_{\alpha\gamma}}{h + F_1}; & K_\beta &= \frac{h^2 G_{\beta\gamma}}{h + F_1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_r &= \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j h^{j+r+1}}{R_1^{j-1} (j+r+1)}; \\ \Phi_r &= \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j h^{j+r+1}}{R_2^{j-1} (j+r+1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда стенка настолько тонка, что отношения γ/R_1 и γ/R_2 ($-e \leq \gamma \leq h - e$) можно не учитывать, приняв $H_1 \approx A_1$ и $H_2 \approx A_2$. Для материала с произвольным характером расположения слоев по толщине жесткости определяются в общем случае равенствами (2.116), а при $e = 0$ — равенствами (2.118), в которых

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) \quad (mn = 11, 12, 22, 33); \quad (2.123)$$

$$I_{33, 11}^{(r)} = I_{33, 22}^{(r)} = J_{33}^{(r)} = I_{33}^{(r)}; \quad J_{12}^{(r)} = I_{12}^{(r)}.$$

Выражения (2.122) для сдвиговых жесткостей принимают следующий вид:

$$K_\alpha = h^2 \left[\sum_{i=1}^k \frac{t_i - t_{i-1}}{G_{\alpha\gamma}^{(i)}} \right]^{-1}; \quad K_\beta = h^2 \left[\sum_{i=1}^k \frac{t_i - t_{i-1}}{G_{\beta\gamma}^{(i)}} \right]^{-1}. \quad (2.124)$$

Отметим, что соотношения (2.123), (2.124) для плоских элементов, у которых $R_1^{-1} = R_2^{-1} = 0$, справедливы при любой толщине.

Из равенств (2.123) следует, что интегралы $I_{mn}^{(r)}$ идентично зависят от геометрических параметров слоистого пакета. В связи с этим появляется возможность упростить соотношения (2.116), в частности, возникает вопрос о таком выборе координаты поверхности отсчета e , при котором эти соотношения окажутся более простыми, чем равенства (2.118), соответствующие $e = 0$. Попробуем обратиться в ноль смешанные жесткости C . Из физических соотношений (2.109) следует, что при $C_{mn} = 0$ и $C_{mn}^{sp} = 0$ они разделяются на две независимые группы — для усилий и для моментов. Такая структура физических соотношений значительно упрощает форму записи разрешающих уравнений в общем случае и вносит принципиальные упрощения в расчет плоских элементов — уравнения, описывающие их деформирование в своей плоскости, отделяются от уравнений, описывающих изгиб.

Допустим, что смешанные жесткости, определяемые равенствами (2.116), обратились в ноль. С учетом (2.123) получим

$$I_{mn}^{(1)} - e I_{mn}^{(0)} = 0. \quad (2.125)$$

Здесь следует поочередно принять $mn = 11; 22; 12; 33$, т. е. имеется четыре уравнения (2.125) относительно одного искомого значения e . Естественно, что в общем случае эти уравнения являются несовместными, т. е. для произвольной структуры слоистого материала нельзя ввести единую поверхность отсчета так, чтобы все смешанные жесткости одновременно обратились в ноль. Очевидно, такая возможность существует, если все четыре уравнения (2.125) дают одно и то же значение e . В этом случае равенства (2.116) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} B_{11} &= I_{11}^{(0)}; & B_{22} &= I_{22}^{(0)}; & B_{12} &= B_{21} = I_{12}^{(0)}; \\ B_{33}^{11} &= B_{33}^{22} = B_{33}^{12} = B_{33}^{21} = I_{33}^{(0)}; \\ C_{11} &= C_{22} = C_{12} = C_{21} = C_{33}^{11} = C_{33}^{22} = C_{33}^{12} = C_{33}^{21} = 0; \\ D_{11} &= I_{11}^{(2)} - \frac{[I_{11}^{(1)}]^2}{I_{11}^{(0)}}; & D_{22} &= I_{22}^{(2)} - \frac{[I_{22}^{(1)}]^2}{I_{22}^{(0)}}; \\ D_{12} &= D_{21} = I_{12}^{(2)} - \frac{[I_{12}^{(1)}]^2}{I_{12}^{(0)}}; \\ D_{33}^{11} &= D_{33}^{22} = D_{33}^{12} = D_{33}^{21} = I_{33}^{(2)} - \frac{[I_{33}^{(1)}]^2}{I_{33}^{(0)}}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Рассмотрим структуры, для которых справедливы равенства (2.125), (2.126).

Пусть стенка однородна по толщине. Тогда в рассматриваемом случае (отношения γ/R_1 и γ/R_2 малы по сравнению с единицей), полагая $t_0 = 0$, $t_1 = h$, $t_i = 0$ ($i \geq 2$) в равенствах (2.123), (2.124), получим

$$\begin{aligned} I_{mn}^{(r)} &= \frac{A_{mn} h^{r+1}}{r+1} \quad (mn = 11, 12, 22, 33); \\ K_\alpha &= G_\alpha \gamma h; & K_\beta &= G_\beta \gamma h. \end{aligned} \quad (2.127)$$

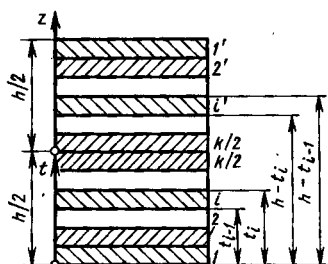


Рис. 2.12. Координаты слоев, расположенных симметрично относительно срединной поверхности

Подставляя (2.127) в уравнения (2.125), найдем $e = h/2$. Т. е. начальная поверхность совпадает со срединной поверхностью, которая разделяет толщину пополам.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае, когда слои расположены симметрично относительно срединной поверхности. Пронумеруем слои так, как показано на рис. 2.12, т. е. будем отсчитывать их от внутренней (нижней) поверхности с номерами 1, 2, ... (k/2) и от наружной поверхности с номерами 1', 2' ... (k/2). Очевидно, что каждому слою с номером i будет соответствовать такой же слой с номером i' , а число слоев, расположенных по обе стороны от срединной поверхности $t = h/2$, будет одинаковым (в случае нечетного числа слоев срединный слой условно разделяется срединной поверхностью на два слоя). Тогда из равенств (2.123) получим (см. рис. 2.12)

$$\begin{aligned}
 I_{mn}^{(0)} &= \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1'}^{k/2} A_{mn}^{(i')} [(h - t_{i-1}) - (h - t_i)] = \\
 &= 2 \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (t_i - t_{i-1}); \\
 I_{mn}^{(1)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (t_i^2 - t_{i-1}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1'}^{k/2} A_{mn}^{(i')} [(h - t_{i-1})^2 - (h - t_i)^2] = \\
 &= h \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (t_i - t_{i-1}); \quad (2.128) \\
 I_{mn}^{(2)} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (t_i^3 - t_{i-1}^3) + \frac{1}{3} \sum_{i=1'}^{k/2} A_{mn}^{(i')} [(h - t_{i-1})^3 - (h - t_i)^3] = \\
 &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (t_i^3 - t_{i-1}^3) - h \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (t_i^2 - t_{i-1}^2) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (t_i - t_{i-1}).
 \end{aligned}$$

Из уравнений (2.125) найдем $e = h/2$. Вводя координату $z = t - (h/2)$, отсчитываемую от срединной поверхности (см.

рис. 2.12), и подставляя выражения (2.128) в равенства (2.126), будем иметь

$$B_{mn} = 2 \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (z_i' - z_{i-1}); \quad C_{mn} = 0; \quad (2.129)$$

$$D_{mn} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (z_i^3 - z_{i-1}^3).$$

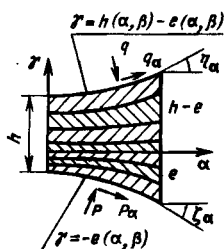
В равенствах (2.129) суммы включают слои, лежащие по одну сторону от срединной поверхности, и координаты слоев, отсчитываемые от этой поверхности.

§ 2.6. Уравнения статики слоистых элементов переменной толщины

Полученные выше уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние элементов конструкций из слоистых композитов, были выведены в предположении, что толщина h не зависит от переменных α и β . Однако на практике композитные элементы часто имеют переменную толщину, например, толщина оболочки вращения, образованной укладкой вдоль ее меридианов армированных лент постоянного сечения, будет увеличиваться по направлению к вершине. Более того, возможность сравнительно просто управлять законом изменения толщины в процессе изготовления конструкции является существенным преимуществом композитов по сравнению с металлами. Таким образом, представляется целесообразным распространить полученные ранее соотношения на случаи, когда толщина слоистого материала является переменной. Из вывода геометрических, физических и статических соотношений (см. § 2.3) можно заключить, что первые две группы — физические и геометрические соотношения — справедливы при любом законе изменения толщины и сохраняют прежнюю форму (2.109), (2.110). Условие постоянства толщины материала было использовано только при выводе уравнений равновесия. В частности, в граничных условиях (2.91) предполагается, что наружная ($\gamma = h - e$) и внутренняя ($\gamma = -e$) поверхности эквидистантны начальной поверхности $\gamma = 0$, а в процессе преобразований (2.96) и (2.101) производные по α и β выносятся за знак интеграла по γ от $-e$ до $(h - e)$, что неправомерно, если эти пределы зависят от α и β .

Выведем уравнения равновесия, учитывая сделанные выше замечания. Рассмотрим слоистую стенку, ограниченную поверхностями $\gamma = h(\alpha, \beta) - e(\alpha, \beta)$ и $\gamma = -e(\alpha, \beta)$ (рис. 2.13). Будем считать;

Рис. 2.13. Геометрические параметры слоистой стенки переменной толщины



что функции $h(\alpha, \beta)$ и $e(\alpha, \beta)$ изменяются достаточно медленно, т. е. что их производные малы по сравнению с единицей, и можно, например, принять (см. рис. 2.13) $\operatorname{tg} \eta_\alpha \approx \sin \eta_\alpha \approx \eta_\alpha$, $\operatorname{tg} \zeta_\alpha \approx \sin \zeta_\alpha \approx \zeta_\alpha$ и $\cos \eta_\alpha \approx 1$, $\cos \zeta_\alpha \approx 1$. Тогда

$$\eta_\alpha = \frac{1}{C_1} \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha} - \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right); \quad \zeta_\alpha = \frac{1}{B_1} \frac{\partial e}{\partial \alpha} \quad (1, 2). \quad (2.130)$$

Здесь B_1 и C_1 — коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей $\gamma = -e$ и $\gamma = h - e$, определяемые равенствами (2.93), (2.94), а символ (1, 2), как и ранее, обозначает, что заменой α на β , β на α , 1 на 2 и 2 на 1 можно получить аналогичные равенства для направления β . Для того чтобы записать на поверхностях $\gamma = -e$ и $\gamma = h - e$ статические граничные условия, аналогичные (2.91), необходимо воспользоваться соотношениями (2.12), связывающими напряжения в теле с компонентами нагрузки $t_\alpha, t_\beta, t_\gamma$, действующей по его поверхности, которая определяется направляющими косинусами нормали $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$. Для поверхности $\gamma = -e$ имеем (см. рис. 2.13)

$$l_\alpha = -\zeta_\alpha; \quad l_\beta = -\zeta_\beta; \quad l_\gamma = -1;$$

$$t_\alpha = p_\alpha + p\zeta_\alpha; \quad t_\beta = p_\beta + p\zeta_\beta; \quad t_\gamma = p - p_\alpha\zeta_\alpha - p_\beta\zeta_\beta,$$

а для поверхности $\gamma = h - e$

$$l_\alpha = -\eta_\alpha; \quad l_\beta = -\eta_\beta; \quad l_\gamma = 1;$$

$$t_\alpha = q_\alpha + q\eta_\alpha; \quad t_\beta = q_\beta + q\eta_\beta; \quad t_\gamma = -q + q_\alpha\eta_\alpha + q_\beta\eta_\beta.$$

В результате, согласно (2.12), получим следующие статические граничные условия:

при $\gamma = -e$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma}^e + \sigma_\alpha^e \zeta_\alpha + \tau_{\alpha\beta}^e \zeta_\beta &= -(p_\alpha + p\zeta_\alpha) \quad (1, 2); \\ \sigma_\gamma^e + \tau_{\alpha\gamma}^e \zeta_\alpha + \tau_{\beta\gamma}^e \zeta_\beta &= -p + p_\alpha\zeta_\alpha + p_\beta\zeta_\beta; \end{aligned} \quad (2.131)$$

при $\gamma = h - e$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma}^h - \sigma_\alpha^h \eta_\alpha - \tau_{\alpha\beta}^h \eta_\beta &= q_\alpha + q\eta_\alpha \quad (1, 2); \\ \sigma_\gamma^h - \tau_{\alpha\gamma}^h \eta_\alpha - \tau_{\beta\gamma}^h \eta_\beta &= -q + q_\alpha\eta_\alpha + q_\beta\eta_\beta. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Верхние индексы e и h определяют напряжения, соответствующие координатам $\gamma = -e$ и $\gamma = h - e$. В случае постоянной толщины, т. е. при $\zeta_\alpha = \zeta_\beta = 0$ и $\eta_\alpha = \eta_\beta = 0$, условия (2.131) и (2.132) переходят в (2.91).

Для вывода уравнений равновесия может быть использована последовательность операций интегрирования трехмерных уравнений (2.89) и удовлетворения граничных условий (2.131), (2.132), осуществленная в § 2.3. Однако представляется целесообразным реализовать здесь другой способ вывода, приводящий к тому же результату и позволяющий более просто учесть изменение толщины. Как уже отмечалось в заключительной части

§ 2.3, уравнения (2.102), (2.103), (2.107) или эквивалентные им (2.108) являются условиями равновесия элемента, показанного на рис. 2.10. Для получения этих уравнений воспользуемся, как и ранее, трехмерными исходными уравнениями равновесия бесконечно малого элемента (2.89) и перейдем от напряжений к равнодействующим усилиям и моментам, приложенным к начальной поверхности $\gamma = 0$. Проинтегрируем первое уравнение (2.89) по толщине материала (см. рис. 2.13), т. е.

$$\int_{-e}^{h-e} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_\alpha) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) - \sigma_\beta \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1^2 H_2 \tau_{\alpha\gamma}) + F_\alpha H_1 H_2 \right] d\gamma = 0 \quad (1, 2). \quad (2.133)$$

Уравнения (2.133) устанавливают равенство нулю суммы проекций действующих сил на оси α и β (см. рис. 2.10). Преобразуем интегралы, входящие в (2.133), с помощью правила дифференцирования по параметру интеграла, подынтегральное выражение и пределы которого зависят от этого параметра, и формул (2.68), (2.69), (2.79), (2.83), (2.93), (2.94), (2.130):

$$\int_{-e}^{h-e} \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_\alpha) d\gamma = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-e}^{h-e} H_2 \sigma_\alpha d\gamma - \frac{\partial}{\partial \alpha} (h - e) C_2 \sigma_\alpha^h + \\ + \frac{\partial}{\partial \alpha} (-e) B_2 \sigma_\alpha^e = \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 N_\alpha) - \eta_\alpha C_1 C_2 \sigma_\alpha^h - \xi_\alpha B_1 B_2 \sigma_\alpha^e; \\ \int_{-e}^{h-e} \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) d\gamma = \int_{-e}^{h-e} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 \tau_{\alpha\beta}) d\gamma + \int_{-e}^{h-e} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \tau_{\alpha\beta} d\gamma = \\ = \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 N_{\beta\alpha}) - \eta_\beta C_1 C_2 \tau_{\alpha\beta}^h - \zeta_\beta B_1 B_2 \tau_{\alpha\beta}^e + \frac{\partial A_1}{\partial \beta} N_{\alpha\beta}; \\ \int_{-e}^{h-e} \sigma_\beta \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} d\gamma = \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} N_\beta; \\ \int_{-e}^{h-e} \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1^2 H_2 \tau_{\alpha\gamma}) d\gamma = \int_{-e}^{h-e} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \tau_{\alpha\gamma}) d\gamma + \\ + \int_{-e}^{h-e} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} \tau_{\alpha\gamma} d\gamma = C_1 C_2 \tau_{\alpha\gamma}^h - B_1 B_2 \tau_{\alpha\gamma}^e + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_\alpha.$$

В результате, с учетом обозначения (2.98) и граничных условий (2.131), (2.132), уравнение (2.133) принимает вид

$$L_\alpha(N) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_\alpha + f_\alpha = 0 \quad (1, 2), \quad (2.134)$$

где

$$f_{\alpha} = \int_{-e}^{h-e} F_{\alpha} H_1 H_2 d\gamma + B_1 B_2 (p_{\alpha} + p_{\zeta\alpha}) + C_1 C_2 (q_{\alpha} + q\eta_{\alpha}) \quad (1, 2). \quad (2.135)$$

Для получения уравнений моментов умножим первое уравнение (2.89) на γ и проинтегрируем по толщине:

$$\int_{-e}^{h-e} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \sigma_{\alpha}) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1^2 \tau_{\alpha\beta}) - \sigma_{\beta} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \right. \quad (2.136)$$

$$\left. + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1^2 H_2 \tau_{\alpha\gamma}) + F_{\alpha} H_1 H_2 \right] \gamma d\gamma = 0 \quad (1, 2).$$

Входящие сюда интегралы преобразуются так же, как и ранее. Пояснений требует только член, включающий $\tau_{\alpha\gamma}$, для преобразования которого используется операция интегрирования по частям:

$$\int_{-e}^{h-e} \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1^2 H_2 \tau_{\alpha\gamma}) \gamma d\gamma = \int_{-e}^{h-e} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \tau_{\alpha\gamma}) \gamma d\gamma +$$

$$+ \int_{-e}^{h-e} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} \tau_{\alpha\gamma} \gamma d\gamma = (h-e) C_1 C_2 \tau_{\alpha\gamma}^h + e B_1 B_2 \tau_{\alpha\gamma}^e -$$

$$- \int_{-e}^{h-e} H_1 H_2 \tau_{\alpha\gamma} d\gamma + \frac{A_1}{R_1} \int_{-e}^{h-e} H_2 \tau_{\alpha\gamma} d\gamma = (h-e) C_1 C_2 \tau_{\alpha\gamma}^h +$$

$$+ e B_1 B_2 \tau_{\alpha\gamma}^e - A_1 A_2 Q_{\alpha}.$$

Окончательно, учитывая условия (2.131), (2.132), вместо (2.136) получим

$$L_{\alpha}(M) - A_1 A_2 Q_{\alpha} + m_{\alpha} = 0 \quad (1, 2), \quad (2.137)$$

где

$$m_{\alpha} = \int_{-e}^{h-e} F_{\alpha} H_1 H_2 \gamma d\gamma + (h-e) C_1 C_2 (q_{\alpha} + q\eta_{\alpha}) - e B_1 B_2 (p_{\alpha} + p_{\zeta\alpha}) \quad (1, 2). \quad (2.138)$$

И наконец, для того чтобы вывести последнее уравнение, соответствующее сумме проекций всех сил на ось γ , проинтегрируем по толщине второе уравнение (2.89):

$$\int_{-e}^{h-e} \left[\frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \sigma_{\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \tau_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 \tau_{\beta\gamma}) - H_2 \sigma_{\alpha} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - \right.$$

$$\left. - H_1 \sigma_{\beta} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} + F_{\gamma} H_1 H_2 \right] d\gamma = 0.$$

Отсюда после уже описанных преобразований имеем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 Q_\beta) - A_1 A_2 \left(\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} \right) + f_\gamma = 0, \quad (2.139)$$

где

$$f_\gamma = \int_{-e}^{h-e} F_\gamma H_1 H_2 d\gamma + B_1 B_2 (p - \zeta_\alpha p_\alpha - \zeta_\beta p_\beta) - C_1 C_2 (q - \eta_\alpha q_\alpha - \eta_\beta q_\beta). \quad (2.140)$$

Уравнения (2.134), (2.137) и (2.139) отличаются от соответствующих уравнений (2.103), (2.102) и (2.107), при выводе которых толщина считалась постоянной, только выражениями для нагрузок f_α , m_α и f_γ . Структура уравнений полностью сохраняется, что становится очевидным, если учесть, что, по существу, обе группы уравнений являются условиями равновесия элемента начальной поверхности $\gamma = 0$ (см. рис. 2.7), к которой приведены усилия, моменты и нагрузка. В этом отношении элемент с переменной толщиной отличается от элемента с постоянной толщиной только тем, что у первого граничные поверхности, по которым действуют нагрузки p и q , не эквидистантны начальной. Именно это различие и учитывается в равенствах (2.135), (2.138), (2.140), определяющих приведенные нагрузки.

Таким образом, композитные конструкции с переменной толщиной стенки описываются уравнениями (2.108), (2.109), (2.110), в которых f_α , m_α , f_γ определяются равенствами (2.135), (2.138), (2.140). Естественно, что при вычислении жесткостей, входящих в физические соотношения (2.109) и определяемых формулами, которые были приведены в § 2.5, необходимо учитывать, что h , e и координаты слоев t_i являются функциями переменных α и β .

§ 2.7. Уравнения термоупругости

Помимо объемных и поверхностных нагрузок, на конструкции из композитных материалов могут воздействовать температурные поля, вызывающие изменение свойств материала, появление температурных деформаций и напряжений. Отметим, что полимерные композиты обладают, как правило, низкой теплопроводностью и могут быть использованы в конструкциях, подвергающихся кратковременному поверхностному нагреву, без дополнительной теплозащиты. Некоторые материалы, например композиты на основе углеродной и керамической матриц, специально предназначены для работы в условиях интенсивного нагрева, другие — на основе минеральных волокон, служат в качестве теплозащитных покрытий. Таким образом, температурное воздействие является одним из расчетных условий работы конструкций из композиционных материалов и, следовательно, должно отражаться в уравнениях, описывающих их напряженно-деформированное состояние.

Для вывода таких уравнений достаточно вместо обобщенного закона Гука (2.78) воспользоваться физическими соотношениями термоупругости, т. е. принять в соответствии с (1.27)

$$\sigma_{\alpha} = A_{11}e_{\alpha} + A_{12}e_{\beta} - A_{1T}T \quad (1, 2); \quad \tau_{\alpha\beta} = A_{22}e_{\alpha\beta}.$$

Коэффициенты A_{1T} и A_{2T} определяют из равенств типа (1.12), т. е.

$$A_{1T} = \bar{E}_1(\alpha_1 + \mu_{12}\alpha_2) \cos^2 \varphi + \bar{E}_2(\alpha_2 + \mu_{21}\alpha_1) \sin^2 \varphi;$$

$$A_{2T} = \bar{E}_1(\alpha_1 + \mu_{12}\alpha_2) \sin^2 \varphi + \bar{E}_2(\alpha_2 + \mu_{21}\alpha_1) \cos^2 \varphi.$$

В результате в соотношениях упругости (2.80) появляются температурные составляющие:

$$\begin{aligned} N_{\alpha}^T &= N_{\alpha} - B_{1T}; & N_{\alpha\beta}^T &= N_{\alpha\beta} \quad (1, 2); \\ M_{\alpha}^T &= M_{\alpha} - D_{1T}; & M_{\alpha\beta}^T &= M_{\alpha\beta} \quad (1, 2). \end{aligned} \quad (2.141)$$

Здесь N_{α} , $N_{\alpha\beta}$, M_{α} и $M_{\alpha\beta}$ связаны с обобщенными деформациями равенствами (2.80), а температурные коэффициенты аналогичны (2.81), т. е.

$$B_{1T} = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} A_{1T} T H_2 d\gamma; \quad D_{1T} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} A_{1T} T H_2 \gamma d\gamma \quad (1, 2). \quad (2.142)$$

Итак, в задачах термоупругости физические соотношения (2.109) для усилий N и моментов M заменяются равенствами (2.141); уравнения равновесия (2.108) модифицируют следующим образом:

$$L_{\alpha}(N^T) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_{\alpha} + f_{\alpha} = 0 \quad (1, 2);$$

$$L_{\alpha}(M^T) - A_1 A_2 Q_{\alpha} + m_{\alpha} = 0 \quad (1, 2);$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 Q_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 Q_{\beta}) - A_1 A_2 \left(\frac{N_{\alpha}^T}{R_1} + \frac{N_{\beta}^T}{R_2} \right) + f_{\gamma} = 0,$$

а геометрические соотношения (2.110) остаются без изменения.

Преобразуем температурные коэффициенты (2.142). В соответствии с изложенным в § 2.5 введем замену $\gamma = t - e$ (см. рис. 2.11). Тогда

$$B_{1T} = I_{1T}^{(0)}; \quad D_{1T} = I_{1T}^{(1)} - e I_{1T}^{(0)} \quad (1, 2),$$

где

$$I_{1T}^{(r)} = \frac{1}{A_2} \int_0^h A_{1T} T H_2 t^r dt \quad (1, 2); \quad (2.143)$$

$r = 0, 1$. Для слоистого материала (см. рис. 2.11), у которого A_{1T} и температуру T можно считать постоянными в пределах i -го слоя, интегралы (2.143) вычисляются по формулам

$$I_{1T}^{(r)} = \sum_{i=1}^k A_{1T}^{(i)} T^{(i)} \left[\frac{1}{r+1} \left(1 - \frac{e}{R_2} \right) (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) + \frac{1}{R_2(r+2)} (t_i^{r+2} - t_{i-1}^{r+2}) \right] \quad (1, 2).$$

Если температуру считать линейно изменяющейся по толщине i -го слоя (см. рис. 2.11), т. е.

$$T^{(i)} = T_{i-1} + \frac{T_i - T_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (t - t_{i-1}),$$

получим

$$I_{1T}^{(r)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_{1T}^{(i)}}{t_i - t_{i-1}} \left\{ (T_{i-1} t_i - t_{i-1} T) \left[\frac{1}{r+1} \left(1 - \frac{e}{R_2} \right) (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) + \frac{1}{R_2(r+2)} (t_i^{r+2} - t_{i-1}^{r+2}) \right] + (T_i - T_{i-1}) \left[\frac{1}{r+2} \left(1 - \frac{e}{R_2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (t_i^{r+2} - t_{i-1}^{r+2}) + \frac{1}{R_2(r+3)} (t_i^{r+3} - t_{i-1}^{r+3}) \right] \right\} \quad (1, 2).$$

Эти равенства можно упростить, если при вычислении интегралов (2.143) пренебречь в выражениях для H_1 и H_2 изменением t по толщине i -го слоя, приняв $t = (t_{i-1} + t_i)/2$. Тогда

$$I_{1T}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{1T}^{(i)} T^{(i)} \left(1 + \frac{t_{i-1} + t_i - 2e}{2R_2} \right) (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) \quad (1, 2)$$

и

$$I_{1T}^{(r)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_{1T}^{(i)}}{t_i - t_{i-1}} \left(1 + \frac{t_{i-1} + t_i - 2e}{2R_2} \right) \times \\ \times \left[(T_{i-1} t_i - t_{i-1} T_i) \frac{t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}}{r+1} + (T_i - T_{i-1}) \frac{t_i^{r+2} - t_{i-1}^{r+2}}{r+2} \right] \quad (1, 2).$$

Пренебрегая здесь членами, содержащими R_1 и R_2 , малыми по сравнению с единицей, можно получить выражения, соответствующие тонкой стенке.

В заключение напомним, что уравнения, приведенные в § 2.3, 2.4, основаны на предположении, что деформация в направлении нормали к начальной поверхности отсутствует, т. е. соответствующие уравнения термоупругости, рассматриваемые в настоящем разделе, не учитывают температурной деформации в этом направлении. Отметим также, что соответствующим заданием коэффициентов жесткости A_{mn} в физических соотношениях можно учесть зависимость механических характеристик и температурных коэффициентов линейного расширения материала от температуры.

§ 2.8. Нелинейные уравнения

Представленный выше вывод некоторых вариантов уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние композитных элементов конструкций, не учитывал нелинейных эффектов, в частности, связанных с изменением геометрических параметров конструкции в процессе деформирования. При выводе статических, геометрических и физических соотношений эти параметры соответствовали исходной геометрии конструкции. Однако для решения ряда важных практических задач (например, задач устойчивости и анализа несущей способности сжатых тонкостенных элементов) требуется привлечение геометрически нелинейных соотношений, учитывающих изменение исходных геометрических параметров в процессе нагружения конструкции. Геометрически нелинейной теории оболочек посвящены работы [27, 37, 55, 76], композитные и ортотропные оболочки рассматриваются в работах [14, 28, 32, 38, 83, 94, 97, 103], обзор зарубежных работ представлен в докладе [102]. В настоящем разделе будут построены простейшие нелинейные уравнения, позволяющие учесть основные нелинейные эффекты.

В качестве исходных воспользуемся уравнениями нелинейной теории упругости, приведенными в работе [64]. Предварительно сделаем некоторые замечания. Задачи, рассматриваемые в геометрически нелинейной постановке, учитывающей отклонения геометрических параметров конструкции от исходных, можно разделить на две основные группы. К первой группе можно отнести анализ процессов и конструкций, для которых геометрическая нелинейность непосредственно связана с их природой. Например, при расчете трансформируемых конструкций, принимающих окончательную форму в результате деформирования (изгибания, растяжения, раскрытия), определении упругих характеристик чувствительных элементов измерительных устройств, а также при исследовании процессов формообразования оболочек сложной формы из листовых заготовок простой формы необходимо учитывать изменение геометрических параметров в процессе деформирования. Уравнения, которые будут приведены ниже, не предназначены для решения подобных задач. Они служат в основном для решения задач второй группы, т. е. для анализа напряженно-деформированного состояния несущих элементов конструкций, обладающих, как правило, не только достаточной прочностью, но и высокой жесткостью. Последнее исключает появление больших упругих перемещений, но, к сожалению, не исключает необходимости привлечения нелинейных соотношений, которые, являясь более сложными, чем линейные, позволяют рассматривать важные и уже упоминавшиеся выше задачи устойчивости и несущей способности композитных элементов. Однако отмеченные особенности задач второй группы позволяют ввести следующие существенные упрощения в исходные нелинейные уравнения.

1. Мембранные жесткости рационально спроектированных композитных конструкций определяются в основном жесткостью волокон, а их предельные деформации для существующих композитов лежат в диапазоне 0,005—0,025. Таким образом, нелинейными членами, содержащими квадраты и произведения малых деформаций e_α , e_β , $e_{\alpha\beta}$, можно пренебречь по сравнению с линейными.

2. В нелинейные соотношения теории упругости помимо деформаций входят нелинейные члены, содержащие углы поворота бесконечно малого элемента (показанного, например, на рис. 2.1) относительно осей α , β , γ — Ω_α , Ω_β , Ω_γ . В силу уже отмечавшейся высокой мембранной жесткости оболочки представляется естественным отбросить нелинейные члены, содержащие угол поворота относительно нормали к начальной поверхности Ω_γ .

3. Как уже отмечалось, трансверсальные деформации играют в обсуждаемой теории второстепенную роль. При выводе основных уравнений в § 2.3 нормальная деформация в направлении оси γ принималась равной нулю, а функции деформаций межслоевого сдвига осреднялись по толщине материала. Учитывая второстепенный характер этих деформаций, представляется целесообразным сохранить для них прежние формулы, соответствующие линейному приближению.

4. Ввиду того, что осреднение деформаций межслоевого сдвига по толщине, т. е. введение функций ψ_α (α , β) и ψ_β (α , β) лишь уточняет напряженно-деформированное состояние по отношению к решениям, основанным на классических теориях изгиба балок, пластин и оболочек, где эти деформации полагаются равными нулю, можно ограничиться этим уточнением только в основных, т. е. в линейных членах, а в нелинейных членах принять $\psi_\alpha \equiv 0$, $\psi_\beta \equiv 0$.

В нелинейной теории упругости важную роль играют комбинации малых деформаций e (2.10) и углов поворота

$$\Omega_\alpha = \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (H_3 \mu_\gamma) - \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_3 \mu_\beta) \right] \quad (1, 2, 3) \quad (2.144)$$

бесконечно малого элемента относительно осей α , β , γ . Введем для этих комбинаций следующие обозначения:

$$\frac{1}{2} e_{\alpha\beta} + \Omega_\gamma = \eta_{\alpha\beta, \gamma}; \quad \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} - \Omega_\gamma = \lambda_{\alpha\beta, \gamma} \quad (1, 2, 3), \quad (2.145)$$

которые, очевидно, симметричны по первым двум индексам, т. е. $\eta_{\alpha\beta, \gamma} = \eta_{\beta\alpha, \gamma}$; $\lambda_{\alpha\beta, \gamma} = \lambda_{\beta\alpha, \gamma}$. Тогда компоненты конечных деформаций выражаются следующим образом:

$$\Delta_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2} (e_\alpha^2 + \eta_{\alpha\beta, \gamma}^2 + \lambda_{\alpha\gamma, \beta}^2) \quad (1, 2, 3); \quad (2.146)$$

$$\Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + e_\alpha \lambda_{\alpha\beta, \gamma} + e_\beta \eta_{\alpha\beta, \gamma} + \lambda_{\alpha\gamma, \beta} \eta_{\beta\gamma, \alpha} \quad (1, 2, 3).$$

На основании гипотез 1 и 2 здесь можно отбросить члены, включающие e_α^2 , $\eta_{\alpha\beta}$, γ , $\lambda_{\alpha\beta}$, γ , и переписать равенства (2.146) в виде

$$\Delta_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\gamma}^2 \beta; \quad \Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\gamma} \beta \eta_{\beta\gamma} \alpha \quad (1, 2). \quad (2.147)$$

Кроме того, согласно гипотезе 3, для трансверсальных деформаций сохраняются линейные соотношения, т. е. можно принять

$$\Delta_\gamma = e_\gamma; \quad \Delta_{\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma} \quad (1, 2). \quad (2.148)$$

Поскольку трансверсальные деформации (2.148) определяются линейными выражениями (2.10), справедливы и кинематические соотношения (2.73), (2.74), полученные в § 2.3, т. е.

$$u_\alpha = u + \gamma \theta_\alpha; \quad \theta_\alpha = \psi_\alpha + \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (1, 2), \quad (2.149)$$

а также выражения для обобщенных деформаций ε и κ (2.76), (2.77). Преобразуя с помощью равенств (2.149) углы поворота (2.144), выражения (2.145) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} \gamma &= \frac{A_1}{H_1} (\varepsilon_{\alpha\beta} + \gamma \kappa_{\alpha\beta}); & \lambda_{\alpha\beta} \gamma &= \frac{A_2}{H_2} (\varepsilon_{\beta\alpha} + \gamma \kappa_{\beta\alpha}); \\ \eta_{\alpha\gamma} \beta &= \theta_\alpha; & \lambda_{\alpha\gamma} \beta &= \frac{A_1}{H_1} \psi_\alpha - \theta_\alpha; \\ \eta_{\beta\gamma} \alpha &= \frac{A_2}{H_2} \psi_\beta - \theta_\beta; & \lambda_{\beta\gamma} \alpha &= \theta_\beta. \end{aligned} \quad (2.150)$$

В соответствии с гипотезой 4 пренебрежем здесь осредненными деформациями поперечного сдвига, приняв $\psi_\alpha = 0$ и $\psi_\beta = 0$ как в равенствах (2.150), так и в углах поворота θ_α , θ_β (2.149). Тогда получим

$$\eta_{\alpha\gamma} \beta = \lambda_{\alpha\gamma} \beta = \omega_\alpha; \quad \lambda_{\beta\gamma} \alpha = -\eta_{\beta\gamma} \alpha = \omega_\beta, \quad (2.151)$$

где

$$\omega_\alpha = \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (1, 2). \quad (2.152)$$

Подставляя (2.151) в равенства (2.147), запишем деформации в виде

$$\Delta_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2} \omega_\alpha^2 \quad (1, 2); \quad \Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \omega_\alpha \omega_\beta, \quad (2.153)$$

где в соответствии с (2.75)

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \frac{A_1}{H_1} (\varepsilon_\alpha + \gamma \kappa_\alpha) \quad (1, 2); \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{A_1}{H_1} (\varepsilon_{\alpha\beta} + \gamma \kappa_{\alpha\beta}) + \frac{A_2}{H_2} (\varepsilon_{\beta\alpha} + \gamma \kappa_{\beta\alpha}). \end{aligned} \quad (2.154)$$

Равенства (2.153) являются традиционной формой записи нелинейных геометрических соотношений, учитывающих большие

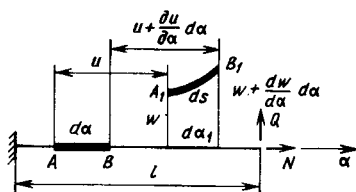


Рис. 2.14. Перемещения элемента упругой линии балки

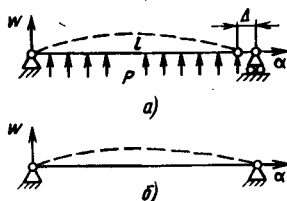


Рис. 2.15. Прогибы балки со свободно (а) и неподвижно (б) опертыми концами

прогибы балки, пластины или оболочки. Для иллюстрации их физического смысла рассмотрим деформацию бесконечно малого элемента упругой линии стержня, показанного на рис. 2.14. Из равенств (2.153), (2.152) при $A_1 = H_1 = 1$, $R_1 \rightarrow \infty$ и $\gamma = 0$ имеем

$$\Delta\alpha = \epsilon_\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2. \quad (2.155)$$

Пусть теперь в результате действия сил N и Q элемент оси стержня AB занял положение A_1B_1 . Тогда удлинение этого элемента будет

$$\Delta\alpha = \frac{ds - d\alpha}{d\alpha}. \quad (2.156)$$

Но из рис. 2.14 следует, что

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2 + d\alpha_1^2}; \quad d\alpha_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) d\alpha. \quad (2.157)$$

Деформацию элемента без учета его перемещения w , вызванного изгибом, определяют традиционным выражением

$$\epsilon_\alpha = \frac{d\alpha_1 - d\alpha}{d\alpha}. \quad (2.158)$$

Тогда согласно (2.157)

$$d\alpha_1 = (1 + \epsilon_\alpha) d\alpha;$$

$$ds = d\alpha \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + 1 + 2\epsilon_\alpha + \epsilon_\alpha^2}.$$

Отсюда, используя формулы для приближенного вычисления корня, найдем

$$ds = \left[1 + \epsilon_\alpha + \frac{1}{2} \epsilon_\alpha^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha$$

и с помощью равенства (2.156) получим

$$\Delta\alpha = \epsilon_\alpha + \frac{1}{2} \epsilon_\alpha^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2. \quad (2.159)$$

Если теперь считать, что деформация ϵ_α является малой, и пренебречь членом, включающим ϵ_α^2 , получим соотношение (2.155), вытекающее из (2.153). Из вывода равенства (2.159) следует, что

квадрат производной от прогиба (или квадрат угла поворота элемента A_1B_1 по отношению к AB) определяет изменение длины $d\alpha_1$ за счет изгиба стержня. Очевидно, что это изменение является существенным, если производная от прогиба достаточно велика.

В качестве примера рассмотрим балку, показанную на рис. 2.15, прогиб которой

$$w = \frac{p}{24D} (\alpha^4 - 2l\alpha^3 + l^3\alpha),$$

где D — изгибная жесткость.

Введем следующие обозначения:

$$\delta = \int_0^l \Delta_\alpha d\alpha; \quad \Delta = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha.$$

Тогда, интегрируя равенство (2.155), получим

$$\delta = \epsilon_\alpha l + \Delta. \quad (2.160)$$

Согласно соотношениям (2.156) и (2.158), δ определяет изменение длины упругой оси балки, а $\epsilon_\alpha l$ — изменение длины ее проекции на ось α (см. рис. 2.15). Исследуем теперь случаи закрепления, показанные на рис. 2.15, *а*, *б*. Если один из концов балки может свободно смещаться (рис. 2.15, *а*), длина ее упругой оси при изгибе не изменяется, т. е. $\delta = 0$, и из (2.160) имеем

$$\epsilon_\alpha l = -\Delta = -1,32 \cdot 10^{-4} \frac{p^2 l^7}{D^2} = -0,78 \frac{w_m^2}{l},$$

где $w_m = w(\alpha = l/2)$ — максимальный прогиб.

Таким образом, относительное смещение конца балки $(\Delta/l) = 0,78 (w_m/l)^2$ и при $w_m = 0,1l$ оно составляет 0,78 %, т. е. даже значительный прогиб не вносит заметных изменений в основной геометрический параметр. Если оба конца балки закреплены (рис. 2.15, *б*), то в равенстве (2.160) следует принять $\epsilon_\alpha = 0$, и оно определяет относительное удлинение оси $(\delta/l) = 0,78 (w_m/l)^2$, которое вызывает соответствующее осевое усилие. При $w_m = 0,1l$ дополнительная (к изгибу) упругая деформация составляет 0,78 %, т. е. имеет достаточно большое значение. При уменьшении прогиба это значение быстро убывает, и при малых прогибах (меньших толщины балки) упругую деформацию уже обычно не учитывают.

Обобщая полученные результаты, можно отметить, что нелинейные члены ω_α^2 , ω_β^2 и $\omega_\alpha \omega_\beta$, входящие в геометрические соотношения (2.153), являются существенными при больших прогибах и специальных условиях закрепления. Исключая пока из рассмотрения эти специальные случаи (они будут особо оговариваться в дальнейшем) и ограничиваясь построением уравнений, описывающих жесткие несущие конструкции, не допускающие больших перемещений, пренебрежем в соотношениях (2.153) нелинейными членами по сравнению с линейными и представим их в виде

$$\Delta_\alpha = e_\alpha (1, 2); \quad \Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}. \quad (2.161)$$

Таким образом, геометрические соотношения оказываются линейными, а следовательно, остаются справедливыми все основанные на них результаты, полученные в § 2.3. В частности, вводя усилия и моменты по формулам (2.79) и учитывая равенства (2.154), (2.161), можно получить физические соотношения в форме (2.80), (2.86).

Рассмотрим уравнения равновесия, которые в линейной теории записывались в виде (2.5). Уравнения (2.5) являются условиями равновесия бесконечно малого криволинейного параллелепипеда, выделенного из тела и показанного на рис. 2.2. В результате деформации с этим параллелепипедом произойдут следующие изменения. Во-первых, он сместится и повернется относительно начального положения; во-вторых, его ребра изменят свою длину, а углы между ними будут отличаться от прямых. Однако выше уже было принято, что все относительные деформации, как линейные, так и сдвиговые, малы по сравнению с единицей, т. е. можно считать, что в результате деформирования форма и размеры криволинейного параллелепипеда не изменяются. Тогда уравнения его равновесия в проекциях на оси координат α, β, γ , связанные с исходной поверхностью приведения, имеют вид [64]

$$L_{\alpha}(s) + F_{\alpha}H_1H_2H_3 = 0 \quad (1, 2, 3). \quad (2.162)$$

Операторы $L_{\alpha}(s)$ определяют из равенств (2.6), в которых напряжения σ и τ следует заменить на некоторые значения s , связанные с σ и τ следующим образом:

$$\begin{aligned} s_{\alpha} &= \sigma_{\alpha}(1 + e_{\alpha}) + \tau_{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta, \gamma} + \tau_{\alpha\gamma}\eta_{\alpha\gamma, \beta} \quad (1, 2, 3); \\ s_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\beta}(1 + e_{\beta}) + \sigma_{\alpha}\eta_{\alpha, \beta, \gamma} + \tau_{\alpha\gamma}\lambda_{\beta\gamma, \alpha} \quad (1, 2, 3); \\ s_{\beta\alpha} &= \tau_{\alpha\beta}(1 + e_{\alpha}) + \sigma_{\beta}\lambda_{\alpha\beta, \gamma} + \tau_{\beta\gamma}\eta_{\alpha\gamma, \beta} \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.163)$$

Вводя в равенствах (2.163) упрощения, аналогичные тем, которые были сделаны при выводе соотношений (2.153) из (2.147), получим

$$\begin{aligned} s_{\alpha} &= \sigma_{\alpha} + \tau_{\alpha\gamma}\omega_{\alpha}; & s_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\gamma}\omega_{\beta} \quad (1, 2); \\ s_{\alpha\gamma} &= \tau_{\alpha\gamma} - \sigma_{\alpha}\omega_{\alpha} - \tau_{\alpha\beta}\omega_{\beta}; & s_{\gamma\alpha} &= \tau_{\alpha\gamma} + \sigma_{\gamma}\omega_{\alpha} \quad (1, 2); \\ s_{\gamma} &= \sigma_{\gamma} - \tau_{\alpha\gamma}\omega_{\alpha} - \tau_{\beta\gamma}\omega_{\beta}. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Сделаем теперь последнее предположение, существенно упрощающее результат. При подстановке (2.164) в уравнения (2.162) последние будут включать два вида нелинейных членов — произведения производных от напряжений на углы поворота ω и произведения напряжений на производные от углов поворота. Но при переходе от равенств (2.153) к (2.161) были отброшены нелинейные члены, включающие углы поворота, поскольку было принято, что эти углы малы. Естественно пренебречь такими членами и в уравнениях равновесия, сохранив только те из нелинейных составляющих, которые содержат производные от углов поворота.

Отметим, что малость углов поворота, очевидно, не влечет за собой малости их производных, которые могут оказаться значительными.

Итак, подставляя (2.164) в уравнения (2.162) и отбрасывая отмеченные выше малые члены, получим

$$\begin{aligned} L_{\alpha}^{(1)}(\sigma) + H_2 \tau_{\alpha\gamma} \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \alpha} + H_1 \tau_{\beta\gamma} \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \beta} + H_1 H_2 F_{\alpha} &= 0 \quad (1, 2); \\ L_{\gamma}^{(1)}(\sigma) - H_2 \sigma_{\alpha} \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \alpha} - \tau_{\alpha\beta} \left(H_2 \frac{\partial \omega_{\beta}}{\partial \alpha} + H_1 \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \beta} \right) - \\ - H_1 \sigma_{\beta} \frac{\partial \omega_{\beta}}{\partial \beta} + H_1 H_2 F_{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Здесь использовано свойство парности касательных напряжений и учтено, что $H_3 = 1$. Операторы L определяются выражениями (2.90), соответствующими линейным уравнениям (2.89).

Дальнейшее преобразование уравнений (2.165) осуществляют по схеме, описанной в § 2.6 и реализованной там применительно к линейным уравнениям. В частности, интегрирование их по γ дает три уравнения в проекциях на оси α , β , γ , а умножение первых двух уравнений (2.165) на γ и интегрирование по γ позволяют записать уравнения моментов. Окончательно получим:

$$\begin{aligned} L_{\alpha}(N) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_{\alpha} + A_2 Q_{\alpha} \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \alpha} + A_1 Q_{\beta} \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \beta} + f_{\alpha} &= 0 \quad (1, 2); \\ L_{\alpha}(M) - A_1 A_2 Q_{\alpha} + m_{\alpha} &= 0 \quad (1, 2); \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 Q_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 Q_{\beta}) - A_1 A_2 \left[N_{\alpha} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \alpha} \right) + \right. \\ \left. + N_{\alpha\beta} \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_{\beta}}{\partial \alpha} + N_{\beta\alpha} \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \beta} + N_{\beta} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_{\beta}}{\partial \beta} \right) \right] + f_{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Здесь оператор L определяют равенством (2.98). Заметим, что при выводе уравнений моментов были отброшены нелинейные члены, включающие интегралы от поперечных касательных напряжений, которые с учетом осреднения последних допускают следующую оценку, обосновывающую обсуждаемое упрощение:

$$\int_{-e}^{h-e} \tau_{\alpha\gamma} H_2 \gamma d\gamma = A_2 Q_{\alpha} \left(\frac{h}{2} - e \right). \quad (2.167)$$

Действительно, при принятом законе осреднения $\tau_{\alpha\gamma}$ интеграл (2.167) обращается в нуль при $e = h/2$, причем закон осреднения всегда можно подобрать так, что этот интеграл будет равен нулю. Очевидно, в рассматриваемой теории малые члены, значения которых определяются только способом осреднения касательных напряжений по толщине, должны быть отброшены.

Таким образом, уравнения равновесия рассматриваемой нелинейной теории определяются равенствами (2.166), а физические (2.109) и геометрические (2.110) соотношения остаются такими же,

как в линейной теории. Полученная система уравнений отличается от соответствующей линейной системы только тем, что в уравнениях равновесия учитывается изменение радиусов кривизны в процессе деформирования. Рассматриваются жесткие элементы, у которых градиенты перемещений малы по сравнению с единицей.

Получим вариационное уравнение, обобщающее уравнение (2.111). Вариация потенциальной энергии в нелинейной теории упругости имеет вид [64]

$$\delta U_H = \int \int \int (s_\alpha \delta e_\alpha + s_\beta \delta e_\beta + s_\gamma \delta e_\gamma + s_{\alpha\beta} \delta \eta_{\alpha\beta, \gamma} + s_{\beta\alpha} \delta \lambda_{\alpha\beta, \gamma} + s_{\alpha\gamma} \delta \lambda_{\alpha\gamma, \beta} + s_{\gamma\alpha} \delta \eta_{\alpha\gamma, \beta} + s_{\beta\gamma} \delta \eta_{\beta\gamma, \alpha} + s_{\gamma\beta} \delta \lambda_{\beta\gamma, \alpha}) H_1 H_2 d\alpha d\beta d\gamma.$$

Сюда можно подставить упрощенные выражения для s (2.164), однако геометрические соотношения для η и λ следует использовать полные, т. е. в форме (2.150). В результате получим

$$\delta U_H = \delta U + \delta \bar{U},$$

где δU — вариация потенциальной энергии деформации, которая соответствует линейной теории и определяется равенством (2.112), а

$$\begin{aligned} \delta \bar{U} = & \int \int \int \left[\tau_{\alpha\gamma} \omega_\alpha \delta e_\alpha + \tau_{\beta\gamma} \omega_\beta \delta e_\beta - (\tau_{\alpha\gamma} \omega_\alpha + \tau_{\beta\gamma} \omega_\beta) \delta e_\gamma + \right. \\ & + \tau_{\alpha\gamma} \omega_\beta \frac{A_1}{H_1} (\delta e_{\alpha\beta} + \gamma \delta \kappa_{\alpha\beta}) + \tau_{\beta\gamma} \omega_\alpha \frac{A_2}{H_2} (\delta e_{\beta\alpha} + \gamma \delta \kappa_{\beta\alpha}) - \\ & - (\sigma_\alpha \omega_\alpha + \tau_{\alpha\beta} \omega_\beta) \delta \left(\frac{A_1}{H_1} \psi_\alpha - \theta_\alpha \right) - (\sigma_\beta \omega_\beta + \tau_{\alpha\beta} \omega_\alpha) \times \\ & \left. \times \delta \left(\frac{A_2}{H_2} \psi_\beta - \theta_\beta \right) + \sigma_\gamma (\omega_\alpha \delta \theta_\alpha + \omega_\beta \delta \theta_\beta) \right] H_1 H_2 d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned}$$

Здесь следует принять в соответствии с общей схемой построения двумерной теории $e_\gamma = 0$ и учесть, во-первых, гипотезы, введенные при формулировке нелинейной задачи; во-вторых, малость членов типа (2.167), и, в-третьих, то, что при выводе уравнений (2.166) удерживались только те нелинейные члены, которые включают производные от углов поворота. С учетом изложенного после интегрирования по γ окончательно получим

$$\begin{aligned} \delta \bar{U} = & \int \int (Q_\alpha \omega_\alpha \delta \bar{e}_\alpha + Q_\beta \omega_\beta \delta \bar{e}_\beta + Q_\alpha \omega_\beta \delta \bar{e}_{\alpha\beta} + Q_\beta \omega_\alpha \delta \bar{e}_{\beta\alpha} - \\ & - N_\alpha \omega_\alpha \delta \bar{\omega}_\alpha - N_{\alpha\beta} \omega_\beta \delta \bar{\omega}_\alpha - N_{\beta\alpha} \omega_\alpha \delta \bar{\omega}_\beta - N_{\beta\beta} \omega_\beta \delta \bar{\omega}_\beta) A_1 A_2 d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (2.168)$$

где

$$\bar{e}_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha}; \quad \bar{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha}; \quad \bar{\omega}_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (1, 2).$$

Заметим, что коль скоро при выводе уравнений (2.166) члены вида $A_2 (\partial Q_\alpha / \partial \alpha) \omega_\alpha$, $Q_\alpha (\partial A_2 / \partial \alpha) \omega_\alpha$ отбрасывались по сравнению

с $A_2 Q_\alpha (\partial \omega_\alpha / \partial \alpha)$, при осуществлении варьирования в (2.168) следует ввести соответствующие упрощения, например,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Q_\alpha \omega_\alpha \delta \bar{e}_\alpha A_1 A_2 d\alpha = [Q_\alpha \omega_\alpha A_2 \delta u]_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_\alpha \omega_\alpha A_2) \delta u d\alpha \approx$$

$$\approx [Q_\alpha \omega_\alpha A_2 \delta u]_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Q_\alpha \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \alpha} A_2 \delta u d\alpha.$$

Таким образом, вариационное уравнение, соответствующее принципу Лагранжа и обобщающее соответствующий результат линейной теории (2.111), может быть записано следующим образом:

$$\delta \Pi_e = \delta U + \delta \bar{U} - \delta A. \quad (2.169)$$

Здесь δU и δA — вариации энергии и работы, определяемые соотношениями (2.114), (2.115), а $\delta \bar{U}$ имеет форму (2.168). Минимизация функционала полной энергии позволяет получить нелинейные уравнения равновесия (2.166) и следующие граничные условия:

при $\alpha = \text{const}$

$$(N_\alpha + Q_\alpha \omega_\alpha) \delta u = 0; \quad (N_{\alpha\beta} + Q_\alpha \omega_\beta) \delta v = 0; \quad M_\alpha \delta \theta_\alpha = 0;$$

$$M_{\alpha\beta} \delta \theta_\beta = 0; \quad (Q_\alpha - N_\alpha \omega_\alpha - N_{\alpha\beta} \omega_\beta) \delta w = 0;$$

при $\beta = \text{const}$

$$(N_\beta + Q_\beta \omega_\beta) \delta v = 0; \quad (N_{\beta\alpha} + Q_\beta \omega_\alpha) \delta u = 0; \quad M_\beta \delta \theta_\beta = 0;$$

$$M_{\beta\alpha} \delta \theta_\alpha = 0; \quad (Q_\beta - N_\beta \omega_\beta - N_{\beta\alpha} \omega_\alpha) \delta w = 0.$$

В заключение рассмотрим особенности расчета гибких элементов, для которых нелинейные члены в геометрических соотношениях (2.153) являются существенными. Такие элементы, как правило, обладают малой относительной толщиной, и, удерживая нелинейные члены в (2.153), для них можно ввести другое упрощение — пренебречь изменением радиусов кривизны по толщине, приняв $H_1 \approx A_1$, $H_2 \approx A_2$. Тогда основная система уравнений может быть записана следующим образом.

Уравнения равновесия определяются равенствами (2.166), в которых

$$N_\alpha = \int_{-e}^{h-e} \sigma_\alpha d\gamma; \quad N_{\alpha\beta} = \int_{-e}^{h-e} \tau_{\alpha\beta} d\gamma; \quad M_\alpha = \int_{-e}^{h-e} \sigma_\alpha \gamma d\gamma;$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-e}^{h-e} \tau_{\alpha\beta} \gamma d\gamma \quad (1, 2).$$

Физические соотношения (2.80) принимают вид

$$\begin{aligned} N_{\alpha} &= B_{11}\xi_{\alpha} + B_{12}\xi_{\beta} + C_{11}\kappa_{\alpha} + C_{12}\kappa_{\beta} \quad (1, 2); \\ N_{\alpha\beta} &= N_{\beta\alpha} = B_{33}\xi_{\alpha\beta} + C_{33}\kappa_{\alpha\beta}; \\ M_{\alpha} &= C_{11}\xi_{\alpha} + C_{12}\xi_{\beta} + D_{11}\kappa_{\alpha} + D_{12}\kappa_{\beta} \quad (1, 2); \\ M_{\alpha\beta} &= M_{\beta\alpha} = C_{33}\xi_{\alpha\beta} + D_{33}\kappa_{\alpha\beta}; \\ Q_{\alpha} &= K_{\alpha}\psi_{\alpha} \quad (1, 2), \end{aligned} \quad (2.170)$$

где

$$\xi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} + \frac{1}{2} \omega_{\alpha}^2 \quad (1, 2); \quad \xi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} + \omega_{\alpha}\omega_{\beta}. \quad (2.171)$$

Компоненты деформации ε и κ определяются равенствами (2.76), (2.77); углы поворота θ и ω — формулами (2.149), (2.152), а коэффициенты жесткости B, C, D, K — соотношениями (2.116), (2.123), (2.124).

Распространенной расчетной моделью является тонкая безмоментная оболочка, воспринимающая только мембранные усилия $N_{\alpha}, N_{\beta}, N_{\alpha\beta}$. Уравнения безмоментной теории можно получить, если принять изгибные (D) и смешанные (C) коэффициенты жесткости равными нулю. В результате из (2.170) получим $M_{\alpha} = M_{\beta} = M_{\alpha\beta} = 0$, а уравнения равновесия (2.166) при $m_{\alpha} = m_{\beta} = 0$ дают $Q_{\alpha} = Q_{\beta} = 0$ и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} L_{\alpha}(N) + f_{\alpha} &= 0 \quad (1, 2); \\ N_{\alpha} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \alpha} \right) + N_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_{\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \beta} \right) + \\ &+ N_{\beta} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_{\beta}}{\partial \beta} \right) = \frac{f_{\gamma}}{A_1 A_2}. \end{aligned}$$

Если градиенты перемещений малы по сравнению с единицей, можно воспользоваться линейными геометрическими соотношениями $\xi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}$ (1, 2), $\xi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}$ и записать равенства (2.170) в виде

$$\begin{aligned} N_{\alpha} &= B_{11}\varepsilon_{\alpha} + B_{12}\varepsilon_{\beta} \quad (1, 2); \\ N_{\alpha\beta} &= N_{\beta\alpha} = B_{33}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}). \end{aligned}$$

Существенно, что за счет нелинейных членов, входящих в уравнение равновесия, полученная система имеет шестой порядок по переменным α и β . В результате она позволяет (в отличие от линейной системы, имеющей, как известно, четвертый порядок) записывать граничные условия не только для тангенциальных перемещений u и v , но и для прогиба w . Эти условия, например для края $\alpha = \text{const}$, имеют следующий вид:

$$N_{\alpha} \delta u = 0; \quad N_{\alpha\beta} \delta v = 0; \quad (N_{\alpha}\omega_{\alpha} + N_{\alpha\beta}\omega_{\beta}) \delta w = 0.$$

Для решения полученных нелинейных уравнений может быть использован итерационный процесс последовательного уточнения усилий, входящих в нелинейные члены. Непосредственные рас-

четы показывают, что для получения удовлетворительных результатов достаточно уже первого приближения, при построении которого усилия, входящие в нелинейные члены, задают в соответствии с решением линейной задачи.

§ 2.9. Линеаризованные уравнения устойчивости

Как известно, стержневые и тонкостенные элементы конструкций при нагружении сжимающими силами могут терять устойчивость. Например, прямолинейный стержень, сжатый осевой силой, при достижении этой силой некоторого значения, называемого критическим, искривляется и при дальнейшем возрастании силы практически перестает работать. Прямоугольная плоская пластина при сжатии до определенного уровня приобретает криволинейную форму и сопротивляется дальнейшему нагружению значительно хуже, чем плоская. Определение критических нагрузок, при которых возможна потеря устойчивости стержневых и тонкостенных элементов, является важной практической задачей применительно к конструкциям как из традиционных, так и композиционных материалов.

Наиболее распространенным критерием, дающим конструктивное определение критической нагрузки для покоящейся упругой системы, является статический критерий Эйлера. Согласно этому критерию, под критическим понимается наименьшее значение нагрузки, при котором кроме исходного состояния равновесия системы существует близкое к нему возмущенное состояние. Таким образом, при одной и той же нагрузке в критическом состоянии существуют две формы равновесия — исходная и возмущенная. Отметим, что эта ситуация вполне аналогична ситуации, возникающей при интуитивном подходе к устойчивости: для того, чтобы выявить, устойчиво ли равновесие вызывающего сомнение в этом отношении сооружения, необходимо приложить к нему дополнительное воздействие (т. е. создать возмущенное состояние) и посмотреть, как оно будет реагировать на это воздействие. В критерии предполагается, что возмущенное состояние является близким к исходному, т. е. возмущения считаются малыми. Эта оговорка является существенной, поскольку система, ведущая себя как устойчивая при слабом дополнительном воздействии, может утратить это свойство при сильном воздействии. Заметим, что статический критерий устанавливает лишь нагрузку, при которой оказываются возможными две формы равновесия, не давая ответа на вопрос о том, какая из них устойчива. Однако в упругих системах, монотонно деформирующихся в процессе возрастания нагрузки, появление смежной формы равновесия практически всегда свидетельствует о неустойчивости исходной формы. Более подробное обсуждение проблемы устойчивости упругих систем представлено в работе [5]. Вопросы сведения

трехмерных уравнений к двумерным в задачах устойчивости рассматриваются в работе [13].

Итак, рассмотрим элемент конструкции, находящийся под действием заданных нагрузок в некотором исходном или так называемом докритическом состоянии. Параметры, относящиеся к этому состоянию, будем отмечать верхним индексом 0. Будем также считать, что перемещения элемента настолько малы, что он может быть описан системой линейных уравнений, приведенных в § 2.4. Опираясь для сокращения записи только первыми уравнениями систем (2.108), (2.109), (2.110), для исходного состояния получим:

$$L_{\alpha}(N^0) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_{\alpha}^0 + f_{\alpha} = 0;$$

$$N_{\alpha} = B_{11} \varepsilon_{\alpha}^0 + B_{12} \varepsilon_{\beta}^0 + C_{11} \kappa_{\alpha}^0 - C_{12} \kappa_{\beta}^0; \quad (2.172)$$

$$\varepsilon_{\alpha}^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u^0}{\partial \alpha} + \frac{v^0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{w^0}{R_1}.$$

Для определенности предположим, что на краях действуют только мембранные усилия, т. е.

при $\alpha = \text{const}$

$$N_{\alpha}^0 = -T_{\alpha}; \quad N_{\alpha\beta}^0 = -T_{\alpha\beta}; \quad M_{\alpha}^0 = 0; \quad M_{\alpha\beta}^0 = 0; \quad Q_{\alpha}^0 = 0; \quad (2.173)$$

при $\beta = \text{const}$

$$N_{\beta}^0 = -T_{\beta}; \quad N_{\beta\alpha}^0 = -T_{\beta\alpha}; \quad M_{\beta}^0 = 0; \quad M_{\beta\alpha}^0 = 0; \quad Q_{\beta}^0 = 0.$$

Здесь через T обозначены заданные усилия, а знак минус свидетельствует о том, что нормальные усилия являются сжимающими.

Выполнение уравнений (2.172) и условий (2.173) обеспечивает существование исходной формы равновесия. Добавим к исходному состоянию некоторые перемещения u , v , w , т. е. запишем суммарные перемещения в следующем виде:

$$u^c = u^0 + u; \quad v^c = v^0 + v; \quad w^c = w^0 + w. \quad (2.174)$$

Сделаем здесь два замечания. Введение возмущений u , v , w является чисто формальным приемом, связанным с тем, что рассматривается идеальная система и идеальные условия нагружения. В реальных условиях всегда существует система малых дополнительных воздействий, которая непрерывно «пробует» исходное состояние на устойчивость. Второе замечание связано с тем, что для анализа возмущенного состояния системы даже при малых возмущениях необходимо использовать уравнения, учитывающие влияние упругих перемещений на форму конструкции. Решение уравнений (2.172) является единственным, и попытка записать их и для возмущенного состояния неизбежно приведет к единственной исходной форме равновесия. Таким образом, следует

воспользоваться геометрически нелинейными уравнениями (2.166), учитывающими изменение геометрии системы, вызванное перемещениями u^c, v^c, w^c . Согласно результатам, полученным в § 2.8, будем иметь

$$L_\alpha(N^c) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_\alpha^c + A_2 Q_\alpha^c \frac{\partial \omega_\alpha^c}{\partial \alpha} + A_1 Q_\beta^c \frac{\partial \omega_\beta^c}{\partial \alpha} + f_\alpha = 0;$$

$$N_\alpha^c = B_{11} e_\alpha^c + B_{12} e_\beta^c + C_{11} \kappa_\alpha^c + C_{12} \kappa_\beta^c; \quad (2.175)$$

$$e_\alpha^c = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u^c}{\partial \alpha} + \frac{v^c}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{w^c}{R_1}.$$

Соответствующие граничные условия для краев $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$, нагруженных в соответствии с (2.173) усилиями $T_\alpha, T_\beta, T_{\alpha\beta}, T_{\beta\alpha}$, имеют вид:

$$\begin{aligned} N_\alpha^c &= -T_\alpha, \quad N_{\alpha\beta}^c = -T_{\alpha\beta}, \quad M_\alpha^c = 0, \quad M_{\alpha\beta}^c = 0, \quad Q_\alpha^c = 0; \\ N_\beta^c &= -T_\beta, \quad N_{\beta\alpha}^c = -T_{\beta\alpha}, \quad M_\beta^c = 0, \quad M_{\beta\alpha}^c = 0, \quad Q_\beta^c = 0. \end{aligned} \quad (2.176)$$

Отметим, что поскольку возмущение осуществляется при неизменных условиях нагружения, в равенства (2.172), (2.173) и (2.175), (2.176) входят одни и те же внешние силы.

Подставим в уравнения (2.175) и условия (2.176) суммы типа (2.174) и вычтем из них уравнения (2.172) и условия (2.173), соответствующие исходному состоянию. Учитывая линейность операторов L_α, L_β , получим

$$\begin{aligned} L_\alpha(N) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_\alpha + A_2 \left(Q_\alpha^0 \frac{\partial \omega_\alpha^0}{\partial \alpha} + Q_\alpha^0 \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \alpha} + Q_\alpha \frac{\partial \omega_\alpha^0}{\partial \alpha} + Q_\alpha \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \alpha} \right) + \\ + A_1 \left(Q_\beta^0 \frac{\partial \omega_\beta^0}{\partial \alpha} + Q_\beta^0 \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \alpha} + Q_\beta \frac{\partial \omega_\beta^0}{\partial \alpha} + Q_\beta \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \alpha} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$N_\alpha = B_{11} e_\alpha + B_{12} e_\beta + C_{11} \kappa_\alpha + C_{12} \kappa_\beta; \quad (2.177)$$

$$e_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1}.$$

При $\alpha = \text{const}$

$$N_\alpha = 0, \quad N_{\alpha\beta} = 0, \quad M_\alpha = 0, \quad M_{\alpha\beta} = 0, \quad Q_\alpha = 0; \quad (2.178)$$

при $\beta = \text{const}$

$$N_\beta = 0, \quad N_{\beta\alpha} = 0, \quad M_\beta = 0, \quad M_{\beta\alpha} = 0, \quad Q_\beta = 0.$$

Из равенств (2.177) следует, что физические и геометрические соотношения включают члены, соответствующие возмущению, а уравнения равновесия включают также члены, соответствующие

исходному, докритическому состоянию системы. Эти последние уравнения можно существенно упростить. Действительно, члены типа $Q_\alpha^0 (\partial \omega_\alpha^0 / \partial \alpha)$ и $Q_\alpha (\partial \omega_\alpha^0 / \partial \alpha)$ могут быть отброшены, поскольку они учитывают изменение формы конструкции в исходном состоянии, а это изменение, как уже было оговорено, является несущественным. Кроме того, можно пренебречь нелинейными членами вида $Q_\alpha (\partial \omega_\alpha / \partial \alpha)$, так как возмущения считаются малыми. Таким образом, в уравнениях равновесия из нелинейных членов остаются члены вида $Q_\alpha^0 (\partial \omega_\alpha / \partial \alpha)$, т. е. произведения усилий исходного состояния на производные от углов поворота, соответствующих возмущению. Поскольку усилия исходного состояния удовлетворяют уравнениям (2.172) и являются известными, уравнения, получаемые в результате, оказываются линейными относительно усилий, деформаций и перемещений, соответствующих возмущению. Процесс их получения, связанный с отбрасыванием малых произведений вида $Q_\alpha (\partial \omega_\alpha / \partial \alpha)$, называется линейризацией, соответственно и получаемые в результате уравнения называются линейризованными уравнениями устойчивости. Тем самым подчеркивается, что, с одной стороны, они являются линейными, а с другой — что они могут быть получены только из нелинейных уравнений. Приведем полную систему линейризованных уравнений устойчивости.

Уравнения равновесия

$$L_\alpha(N) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_\alpha + A_2 Q_\alpha^0 \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \alpha} + A_1 Q_\beta^0 \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \alpha} = 0 \quad (1, 2);$$

$$L_\alpha(M) - A_1 A_2 Q_\alpha = 0 \quad (1, 2);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 Q_\beta) - A_1 A_2 \left(\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} + N_\alpha^0 \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + N_{\alpha\beta}^0 \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \alpha} + N_{\beta\alpha}^0 \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta} + N_\beta^0 \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \beta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.179)$$

Физические соотношения

$$N_\alpha = B_{11} \varepsilon_\alpha + B_{12} \varepsilon_\beta + C_{11} \kappa_\alpha + C_{12} \kappa_\beta \quad (1, 2);$$

$$N_{\alpha\beta} = B_{33}^{11} \varepsilon_{\alpha\beta} + B_{33}^{12} \varepsilon_{\beta\alpha} + C_{33}^{11} \kappa_{\alpha\beta} + C_{33}^{12} \kappa_{\beta\alpha} \quad (1, 2);$$

$$M_\alpha = C_{11} \varepsilon_\alpha + C_{12} \varepsilon_\beta + D_{11} \kappa_\alpha + D_{12} \kappa_\beta \quad (1, 2); \quad (2.180)$$

$$M_{\alpha\beta} = C_{33}^{11} \varepsilon_{\alpha\beta} + C_{33}^{12} \varepsilon_{\beta\alpha} + D_{33}^{11} \kappa_{\alpha\beta} + D_{33}^{12} \kappa_{\beta\alpha} \quad (1, 2);$$

$$Q_\alpha = K_\alpha \psi_\alpha \quad (1, 2).$$

Геометрические соотношения

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1} \quad (1, 2),$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad (1, 2); \quad (2.181)$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\theta_\beta}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\theta_\alpha}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad (1, 2);$$

$$\theta_\alpha = \psi_\alpha + \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \omega_\alpha = \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (1, 2).$$

Уравнения (2.179)—(2.181) являются однородными, т. е. в совокупности с граничными условиями (2.178) всегда допускают нулевое решение типа $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, соответствующее исходному положению равновесия системы. Если при некоторых значениях усилий Q_α^0 , N_α^0 , $N_{\alpha\beta}^0$ (1, 2) существует и ненулевое решение, то нагрузка, при которой впервые реализуются эти усилия, согласно критерию Эйлера соответствует критической. Отметим, что отсутствие такого решения свидетельствует о невозможности статической формы потери устойчивости. При этом не исключается потеря устойчивости в результате перехода системы в движение; однако такие случаи являются нетипичными для упругих конструкций и возникают только при специальных условиях нагружения, которые далее рассматриваться не будут.

В заключение приведем энергетический функционал, минимизация которого позволяет получить линейаризованные уравнения устойчивости (2.179). Рассмотрим возмущенное состояние, определяемое суммами типа (2.174), и запишем вариацию полной энергии, используя в качестве возможных перемещений возмущения u , v , w и сохраняя неизменными внешние силы. Тогда согласно (2.169), а также (2.115), (2.114) и (2.168)

$$\delta\Pi_e = \delta U + \delta\bar{U} - \delta A = 0, \quad (2.182)$$

где $\delta U = \int \int [(N_\alpha^0 + N_\alpha) \delta e_\alpha + \dots] A_1 A_2 d\alpha d\beta$;

$$\delta\bar{U} = \int \int [(Q_\alpha^0 + Q_\alpha) (\omega_\alpha^0 + \omega_\alpha) \delta \bar{e}_\alpha + \dots] A_1 A_2 d\alpha d\beta;$$

$$\delta A = \int \int (f_\alpha \delta u + \dots) A_1 A_2 d\alpha d\beta.$$

Ввиду того, что исходное состояние является равновесным, равенство (2.182) для него, естественно, справедливо, т. е.

$$\delta\Pi_e^0 = \int \int [(N_\alpha^0 \delta e_\alpha + \dots) + (Q_\alpha^0 \delta \omega_\alpha^0 \delta \bar{e}_\alpha + \dots) - (f_\alpha \delta u + \dots)] A_1 A_2 d\alpha d\beta = 0. \quad (2.183)$$

Преобразуем теперь выражение для $\delta\bar{U}$ в (2.182), учитывая упрощения, осуществленные выше при линейаризации уравнений (2.177). В частности, отбросим члены, включающие произведения типа $Q_\alpha \omega_\alpha^0$, так как они учитывают изменение формы поверхности в исходном состоянии, а это изменение считается несущественным, и члены типа $Q_\alpha \omega_\alpha$, являющиеся малыми, поскольку возмущения считаются малыми. Вычитая из полученного в результате этих упрощений уравнения (2.182) равенство (2.183), окончательно будем иметь

$$\delta\Pi_e = \delta U + \delta\bar{U} = 0, \quad (2.184)$$

где δU определяется выражением (2.114), и в соответствии с (2.168)

$$\delta\bar{U} = \int \int (Q_\alpha^0 \omega_\alpha \delta \bar{e}_\alpha + Q_\beta^0 \omega_\beta \delta \bar{e}_\beta + Q_\alpha^0 \omega_\beta \delta \bar{e}_{\alpha\beta} + Q_\beta^0 \omega_\alpha \delta \bar{e}_{\beta\alpha} - N_\alpha^0 \omega_\alpha \delta \bar{\omega}_\alpha - N_{\alpha\beta}^0 \omega_\beta \delta \bar{\omega}_\alpha - N_{\beta\alpha}^0 \omega_\alpha \delta \bar{\omega}_\beta - N_{\beta\beta}^0 \omega_\beta \delta \bar{\omega}_\beta) A_1 A_2 d\alpha d\beta.$$

При осуществлении варьирования здесь необходимо ввести дополнительные упрощения, обсуждавшиеся выше применительно к соотношению (2.168). В результате получим

$$\delta \bar{U} \approx \int \int \left[\left(A_2 Q_\alpha^0 \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \alpha} + A_1 Q_\beta^0 \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \alpha} \right) \delta u + \left(A_1 Q_\beta^0 \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \beta} + A_2 Q_\alpha^0 \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta} \right) \delta v - \left(A_2 N_\alpha^0 \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \alpha} + A_2 N_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \alpha} + A_1 N_{\beta\alpha}^0 \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta} + A_1 N_\beta^0 \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \beta} \right) \delta w \right] d\alpha d\beta. \quad (2.185)$$

Вариационное уравнение (2.184) с учетом (2.185) эквивалентно уравнениям (2.179).

§ 2.10. Уравнения динамики

Согласно принципу Даламбера, уравнения движения можно получить из уравнений равновесия, если добавить к ним инерционные члены. Предположим, что на рассматриваемую конструкцию действуют силы, зависящие от времени t . Тогда в уравнениях (2.89) объемные силы F_α , F_β , F_γ следует заменить на $F_\alpha + F_\alpha^n$, $F_\beta + F_\beta^n$, $F_\gamma + F_\gamma^n$, где инерционные составляющие имеют вид

$$F_\alpha^n = -\rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}; \quad F_\beta^n = -\rho \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}; \quad F_\gamma^n = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

а ρ — плотность материала. Подставляя сюда перемещения (2.73) и учитывая, что $u_\gamma = w(\alpha, \beta)$, получим

$$F_\alpha^n = -\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial^2 \theta_\alpha}{\partial t^2} \right) \quad (1, 2); \quad F_\gamma^n = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Дальнейшие преобразования по схеме, описанной в § 2.3, позволяют записать следующие уравнения движения, которые в задачах динамики заменяют уравнения равновесия (2.108):

$$L_\alpha(N) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_\alpha - A_1 A_2 \left(B_\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_\rho \frac{\partial^2 \theta_\alpha}{\partial t^2} \right) + f_\alpha = 0 \quad (1, 2);$$

$$L_\alpha(M) - A_1 A_2 Q_\alpha - A_1 A_2 \left(C_\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D_\rho \frac{\partial^2 \theta_\alpha}{\partial t^2} \right) + m_\alpha = 0 \quad (1, 2);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_2 Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_1 Q_\beta) - A_1 A_2 \left(\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} \right) - \\ - A_1 A_2 B_\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f_\gamma = 0. \end{aligned}$$

Физические и геометрические соотношения (2.109), (2.110) остаются без изменения.

Инерционные свойства характеризуются следующими коэффициентами:

$$B_\rho = J_\rho^{(0)}; \quad C_\rho = J_\rho^{(1)}; \quad D_\rho = J_\rho^{(2)},$$

где

$$J_{\rho}^{(r)} = \frac{1}{A_1 A_2} \int_{-e}^{h+e} H_1 H_2 \rho \gamma^r d\gamma \quad (r = 0, 1, 2).$$

Вводя координату $t = \gamma + e$ (см. рис. 2.11), получим

$$B_{\rho} = I_{\rho}^{(0)}; \quad C_{\rho} = I_{\rho}^{(1)} - e I_{\rho}^{(0)}; \quad D_{\rho} = I_{\rho}^{(2)} - 2e I_{\rho}^{(1)} + e^2 I_{\rho}^{(0)}, \quad (2.186)$$

где

$$I_{\rho}^{(r)} = \frac{1}{A_1 A_2} \int_0^h H_1 H_2 \rho t^r dt \quad (r = 0, 1, 2).$$

Так же как и в § 2.5, в общем случае, когда нельзя пренебречь изменением коэффициентов Ламе H_1, H_2 по толщине стенки, примем $e = 0$. Тогда для слоистого материала можно записать следующие соотношения, аналогичные (2.118), (2.119):

$$B_{\rho} = I_{\rho}^{(0)}; \quad C_{\rho} = I_{\rho}^{(1)}; \quad D_{\rho} = I_{\rho}^{(2)},$$

где

$$I_{\rho}^{(r)} = \sum_{i=1}^k \rho_i \left[\frac{t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}}{r+1} + \frac{1}{r+2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (t_i^{r+2} - t_{i-1}^{r+2}) + \frac{1}{(r+3) R_1 R_2} (t_i^{r+3} - t_{i-1}^{r+3}) \right]. \quad (2.187)$$

Для однородного по толщине материала (при $t_0 = 0, t_1 = h, t_i = 0, i \geq 2$) найдем

$$I_{\rho}^{(r)} = \rho h^{r+1} \left[\frac{1}{r+1} + \frac{h}{r+2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{h^2}{(r+3) R_1 R_2} \right].$$

Если коэффициенты H_1, H_2 считать постоянными в пределах i -го слоя, выражение (2.187) упрощается и принимает вид

$$I_{\rho}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k \rho_i \left(1 + \frac{t_{i-1} + t_i}{2R_1} \right) \left(1 + \frac{t_{i-1} + t_i}{2R_2} \right) (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}).$$

И наконец, если пренебречь изменением H_1, H_2 по толщине стенки, то в равенствах (2.186) можно принять

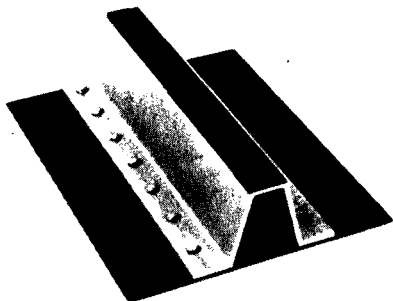
$$I_{\rho}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k \rho_i (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}).$$

§ 2.11. Особенности описания подкрепленных, трехслойных и сетчатых конструкций

Композитные материалы часто используют в подкрепленных тонкостенных конструкциях для изготовления слоистой обшивки или усиления элементов подкрепляющего набора (рис. 2.16). Перспективная конструктивная схема подкрепленной конструк-

Рис. 2.16. Элемент подкрепленной композитной панели

ции представляет собой систему из совместно отформованных и связанных без использования дополнительных механических элементов (заклепок, винтов и т. д.) листов обшивки и тонкостенных профилей. Применение такой конструктивной схемы позволяет получать заметный выигрыш в массе (порядка 20 % при замене алюминиевых сплавов на углепластик) при сохранении традиционных методов проектирования и сборки.



Если элементы подкрепляющего набора одинаковы и часто расположены, их можно приближенно заменить системой условных сплошных слоев (рис. 2.17). При этом естественно предположить, что ребра работают только в осевом направлении. Тогда остаются в силе выражения для мембранных, смешанных и изгибных жесткостей слоистого материала, полученные в § 2.5. При этом в членах, которые соответствуют условным слоям, моделирующим отдельные элементы ребер (полки, стенки и т. д.), не будут фигурировать жесткости с индексами 12, 21, 33 (они соответствуют эффекту Пуассона и сдвигу в плоскости обшивки), а в остальных членах упругие характеристики элементов ребер умножаются на редуцированные коэффициенты, равные отношению размеров этих элементов к расстоянию между ребрами. Например, пусть ось двутаврового профиля, показанного на рис. 2.18, направлена вдоль оси α . Тогда в соотношениях (2.120), (2.121) следует принять:

$$0 \leq t \leq t_1 \quad A_{11}^{(1)} = E^{(1)}d/a, \quad G_{\alpha\gamma}^{(1)} = G^{(1)}d/a;$$

$$t_1 \leq t \leq t_2 \quad A_{11}^{(2)} = E^{(2)}c/a, \quad G_{\alpha\gamma}^{(2)} = G^{(2)}c/a;$$

$$t_2 \leq t \leq t_3 \quad A_{11}^{(3)} = E^{(3)}b/a, \quad G_{\alpha\gamma}^{(3)} = G^{(3)}b/a$$

и $A_{12}^{(i)} = A_{22}^{(i)} = A_{33}^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Через $E^{(i)}$ и $G^{(i)}$ обозначены модуль упругости и модуль сдвига соответствующих элементов ребра. Если полки ребра сами являются неоднородными по толщине и слоистыми, число

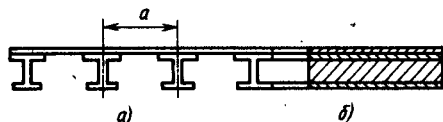


Рис. 2.17. Замена подкрепленной системы (а) условной слоистой системой (б)

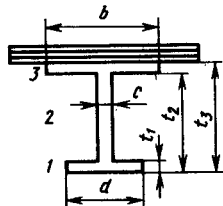


Рис. 2.18. Геометрические параметры обшивки и ребра

Рис. 2.19. Элемент трехслойной панели с композитными несущими слоями и сотовым наполнителем



условных слоев, соответствующих этому ребру, может быть увеличено.

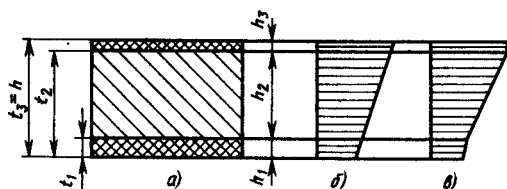
Таким образом, подкрепленная конструкция приводится к условной гладкой, а по най-

денным деформациям последней с помощью закона Гука для элементов набора могут быть определены действующие в них напряжения. Отметим, что такое приведение может быть осуществлено только для регулярно подкрепленных систем. Если элементы набора неодинаковы или расположены редко, необходимо решать задачу о сопряжении отдельных ребер между собой и с обшивкой [8, 18, 43].

Широкое применение в настоящее время находят трехслойные элементы конструкций, образованные из тонких несущих слоев и легкого заполнителя (рис. 2.19). Эффективность трехслойных конструкций можно проиллюстрировать следующими простыми оценками. Момент инерции стенки с толщиной h равен $h^3/12$, а масса единицы поверхности — ρh . Если теперь два листа с толщиной $h/2$ каждый расположить на расстоянии H и соединить заполнителем с малой плотностью ρ_0 , то при $H \gg h$ получим момент инерции $hH^2/4$ и массу $\rho h + \rho_0 H$. Отсюда следует, что, например, при $h = 0,1H$, $\rho_0 = 0,1\rho$ момент инерции возрастает в 300 раз, а масса всего в 2 раза. Заметим, что реальный наполнитель обладает сравнительно низкой сдвиговой жесткостью, что снижает фактический выигрыш в изгибной жесткости трехслойной стенки, однако получаемый результат вполне компенсирует усложнение технологии при замене гладких и подкрепленных панелей трехслойными. Отмеченные технологические трудности связаны в основном с необходимостью точного обеспечения зазора между несущими слоями. Они характерны для панелей одинарной и двойной кривизны с металлическими слоями и исчезают при переходе на композитные слои, обладающие в состоянии переработки высокой деформативностью.

Типовой технологический процесс изготовления трехслойных конструкций с композитными несущими слоями предусматривает намотку или выкладку внутреннего несущего слоя, установку на него заранее подготовленного сотового заполнителя или блоков пенопласта, намотку или выкладку наружного несущего слоя и последующее отверждение композита. Сочетание хорошей технологичности и прочности композитов с высокой изгибной жесткостью, характерной для трехслойной стенки, определяет широкие перспективы применения трехслойных элементов с композитными несущими слоями в различных областях техники.

Рис. 2.20. Распределения перемещений по толщине трехслойной стенки (а), соответствующие гипотезам прямой (б) и ломаной (в) линий



Отметим, что полученные в § 2.3 уравнения могут быть распространены на трехслойные конструкции с некоторыми оговорками. Дело в том, что при их выводе осуществлялось осреднение деформаций поперечного сдвига по толщине, которое привело к линейному распределению перемещений по нормальной координате (2.73). Такое распределение, соответствующее так называемой гипотезе прямой линии (рис. 2.20, б), достаточно хорошо отражает реальное деформированное состояние тонкостенных слоистых элементов, если различие в трансверсальной сдвиговой жесткости отдельных слоев не слишком велико. Однако в трехслойных системах модули сдвига несущих слоев и заполнителя могут отличаться на несколько порядков, и для них более естественной является гипотеза ломаной линии, приводящая, с одной стороны, к более реалистическому распределению перемещений (рис. 2.20, в), а с другой — существенно повышающая порядок системы уравнений [33]. Различие между результатами, основанными на гипотезах прямой и ломаной линии, уменьшается при уменьшении толщины и модуля поперечного сдвига несущих слоев. Как показывают расчеты, для композитных несущих слоев, толщина которых, как правило, мала, а модуль сдвига значительно меньше соответствующей характеристики металлических слоев, использование более простых соотношений, соответствующих гипотезе прямой линии, позволяет получить удовлетворительные результаты. Отметим, что теория композитных трехслойных пластин и оболочек, основанная на этой гипотезе, изложена в книге [56].

Коэффициенты жесткости трехслойной стенки получаются из общих соотношений, приведенных в § 2.5, если пренебречь влиянием заполнителя на усилия и моменты с индексами α и β и влиянием несущих слоев на деформации сдвига с индексами $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$. При этом в соотношениях § 2.5 для заполнителя следует принять $A_{mn} = 0$ ($mn = 11, 12, 22, 33$), а для несущих слоев $G_{\alpha\gamma} \rightarrow \infty$, $G_{\beta\gamma} \rightarrow \infty$. Например, для тонкой стенки, геометрические параметры которой приведены на рис. 2.20, а, равенства (2.116), (2.123), (2.124) принимают следующий вид:

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}, \quad C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - e I_{mn}^{(0)}, \quad D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - 2e I_{mn}^{(1)} + e^2 I_{mn}^{(0)};$$

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1} [A_{mn}^{(1)} t_1^{r+1} + A_{mn}^{(3)} (t_3^{r+1} - t_2^{r+1})];$$

$$K_\alpha = h^2 G_{\alpha\gamma}^{(2)} / (t_2 - t_1); \quad K_\beta = h^2 G_{\beta\gamma}^{(2)} / (t_2 - t_1).$$

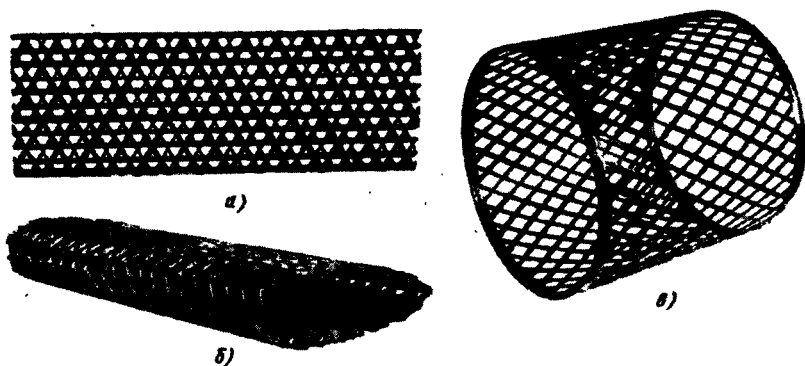


Рис. 2.21. Композитные панель (а), стержень (б) и оболочка (в) сетчатой структуры

Или через толщины слоев (см. рис. 2.20, а):

$$I_{mn}^{(0)} = A_{mn}^{(1)} h_1 + A_{mn}^{(3)} h_3;$$

$$I_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} [A_{mn}^{(1)} h_1^2 + A_{mn}^{(3)} h_3 (h_3 + 2h_1 + 2h_2)];$$

$$I_{mn}^{(2)} = \frac{1}{3} \{ A_{mn}^{(1)} h_1^3 + A_{mn}^{(3)} h_3 [3(h_1 + h_2)^2 + h_3(h_3 + 3h_1 + 3h_2)] \};$$

$$K_\alpha = \frac{h^3}{h_2} G_{\alpha\gamma}^{(2)}; \quad K_\beta = \frac{h^3}{h_2} G_{\beta\gamma}^{(2)}.$$

Увеличения изгибной жесткости стейки можно добиться также при использовании сетчатой структуры, показанной на рис. 2.21 [22, 72, 100]. Такая структура образуется способами выкладки или намотки, при которых в отличие от соответствующих традиционных процессов лента следующего слоя укладывается на ленту предыдущего слоя, а не рядом с ней. Рассматриваемые структуры могут быть использованы для образования сетчатых элементов конструкций или в качестве несущего заполнителя в слоистых системах в комбинации с одной или двумя обшивками.

Ввиду того, что сетчатая структура представляет собой регулярную систему часто расположенных ребер, естественно попытаться заменить ее условным сплошным слоем, обладающим некоторыми эффективными жесткостями. С этой целью могут быть использованы соотношения, приведенные в § 1.4, однако здесь будет реализован другой, более общий метод, основанный на смешанном вариационном принципе, изложенном в § 2.1.

Рассмотрим семейство ребер, составляющих углы φ , с осью α и характеризующихся геометрическими параметрами δ , и a , (рис. 2.22). Нормальные σ_j и касательные τ_j напряжения в ребрах (см. рис. 2.22) могут быть приведены к некоторым условным

напряжениям $\sigma_\alpha^*, \sigma_\beta^*, \tau_{\alpha\beta}^*, \tau_{\alpha\gamma}^*, \tau_{\beta\gamma}^*$ в координатах α, β, γ с помощью формул, аналогичных (1.9):

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^* &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \sigma_j \delta_j \cos^2 \varphi_j; & \sigma_\beta^* &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \sigma_j \delta_j \sin^2 \varphi_j; \\ \tau_{\alpha\beta}^* &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \sigma_j \delta_j \sin \varphi_j \cos \varphi_j; & \tau_{\alpha\gamma}^* &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \tau_j \delta_j \cos \varphi_j; \\ \tau_{\beta\gamma}^* &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \tau_j \delta_j \sin \varphi_j.\end{aligned}\quad (2.188)$$

Здесь n — число семейств ребер. Например, структура, показанная на рис. 2.22, содержит три таких семейства с углами наклона по отношению к оси α : $+\varphi$, $-\varphi$ и 90° . Введем теперь расширенную функцию потенциальной энергии деформации типа (2.27), т. е.

$$\begin{aligned}\Pi &= U + e_\alpha (\sigma_\alpha - \sigma_\alpha^*) + e_\beta (\sigma_\beta - \sigma_\beta^*) + e_{\alpha\beta} (\tau_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}^*) + \\ &+ e_{\alpha\gamma} (\tau_{\alpha\gamma} - \tau_{\alpha\gamma}^*) + e_{\beta\gamma} (\tau_{\beta\gamma} - \tau_{\beta\gamma}^*).\end{aligned}\quad (2.189)$$

Здесь

$$U = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_j} \left(\frac{\sigma_j^2 \delta_j}{E_j} + \frac{\tau_j^2 \delta_j}{G_j} \right)$$

— потенциальная энергия слоя ребер единичной толщины; E_j и G_j — модуль упругости и модуль сдвига материала ребер.

В равенстве (2.189) через e обозначены деформации условной однородной среды, играющие роль множителей Лагранжа, с помощью которых вводятся условия статической эквивалентности напряжений в этой среде σ и τ и напряжений, определяемых формулами (2.188). Минимизация Π по напряжениям в ребрах σ_j , τ_j с учетом (2.188) дает

$$\begin{aligned}\sigma_j &= E_j (e_\alpha \cos^2 \varphi_j + e_\beta \sin^2 \varphi_j + e_{\alpha\beta} \sin \varphi_j \cos \varphi_j); \\ \tau_j &= G_j (e_{\alpha\gamma} \cos \varphi_j + e_{\beta\gamma} \sin \varphi_j).\end{aligned}\quad (2.190)$$

Подставляя напряжения (2.190) в равенства (2.188) и отбрасывая звездочки, получим

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= A_{11} e_\alpha + A_{12} e_\beta \quad (1, 2); \\ \tau_{\alpha\beta} &= A_{23} e_{\alpha\beta}; \\ \tau_{\alpha\gamma} &= G_{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma}; \\ \tau_{\beta\gamma} &= G_{\beta\gamma} e_{\beta\gamma},\end{aligned}$$

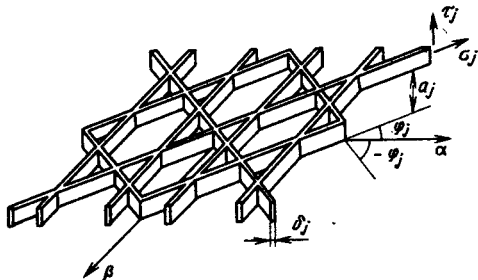


Рис. 2.22. Геометрические параметры сетчатой структуры

где

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j \delta_j \cos^4 \varphi_j; & A_{22} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j \delta_j \sin^4 \varphi_j; \\
 A_{12} &= A_{21} = A_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j \delta_j \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j; \\
 G_{\alpha\gamma} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} G_j \delta_j \cos^2 \varphi_j; & G_{\beta\gamma} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} G_j \delta_j \sin^2 \varphi_j.
 \end{aligned}
 \tag{2.191}$$

Равенства (2.191) определяют искомые эффективные упругие постоянные сетчатой структуры. Отметим, что структура считается симметричной: системе ребер с углами $+\varphi_j$ должна соответствовать такая же система с углами $-\varphi_j$.

Глава 3

Композитные балки и стержни

В настоящей главе рассматриваются композитные балки и стержни, т. е. элементы, имеющие одну общую особенность — один из их размеров (длина) значительно превосходит остальные (размеры поперечного сечения). Рассмотренные выше (см. гл. 2) особенности структуры и геометрических параметров композитных конструкций позволили значительно упростить исходные трехмерные уравнения механики деформируемого тела и привести их к двумерным уравнениям. Отмеченная особенность элементов, рассматриваемых в этой главе, позволяет продолжить эти упрощения. Подобно тому как при выводе общих уравнений в § 2.3 была принята система предположений, в совокупности позволившая задать характер распределения перемещений и напряжений по толщине стенки, можно сформулировать систему гипотез, определяющих распределение перемещений и напряжений по сечению. В результате общие уравнения, полученные в гл. 2, включающие две независимые переменные, сводятся к одномерным, включающим только одну продольную координату.

§ 3.1. Композитные балки

Высокомодульные композиты на основе углеродных и борных волокон успешно применяют для изготовления балочных элементов конструкций и для увеличения жесткости металлических балок (рис. 3.1). Уравнения теории изгиба композитных балок постоянной ширины (рис. 3.1, а) могут быть получены непосредственно из общих уравнений, приведенных в § 2.3. Однако, учитывая, что ширина может изменяться по высоте балки (рис. 3.1, в), представляется целесообразным привести краткий вывод уравнений, основанных на гипотезах, подробно описанных в § 2.2.

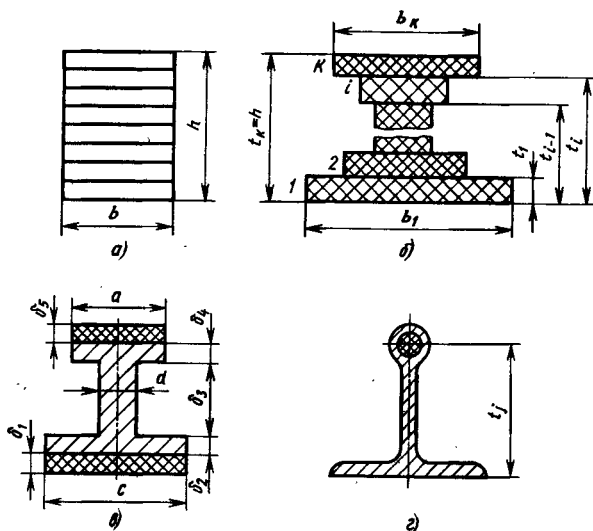


Рис. 3.1. Сечения балок, образованных из одинаковых (а) и разнородных (б) слоев; металлических профилей, усиленных композитными накладками (в) и жгутами (г)

Рассмотрим балку, показанную на рис. 3.2. Выделяя из нее элемент (рис. 3.3) и записывая условия его равновесия, получим

$$b\tau_{xy} + \int_0^y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} b dy = 0; \quad (3.1)$$

$$b\sigma_y + b_1 p + \int_0^y \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} b dy = 0. \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1), (3.2) учитывают статические граничные условия на поверхности $y = 0$, т. е. $\sigma_y(y = 0) = -p$, $\tau_{xy}(y = 0) =$

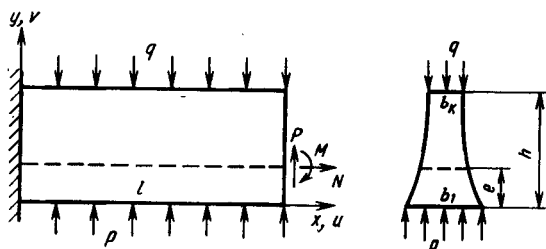


Рис. 3.2. Характер нагружения балки

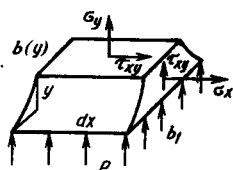


Рис. 3.3. Напряжения, действующие на элемент балки

$= 0$. Напряжения σ_y и τ_{xy} должны удовлетворять также граничным условиям на поверхности $y = h$ (см. рис. 3.2):

$$\sigma_y(y = h) = -q; \quad \tau_{xy}(y = h) = 0. \quad (3.3)$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy} \frac{\sigma_y}{E_y}; \quad e_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yx} \frac{\sigma_x}{E_x}; \quad (3.4)$$

$$e_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}, \quad (3.5)$$

а деформации выражаются через перемещения следующим образом:

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Для вывода уравнений прикладной теории изгиба композитных балок воспользуемся гипотезами, сформулированными в § 2.2, 2.3. Прежде всего введем гипотезу недеформируемости материала в направлении оси y , приняв $e_y = 0$. Поскольку напряжения σ_x и σ_y в общем случае отличны от нуля, из второго равенства (3.4) следует, что необходимо принять $E_y \rightarrow \infty$, $\mu_{yx} = 0$. Тогда это равенство удовлетворяется тождественно, а первое принимает вид

$$\sigma_x = E_x e_x. \quad (3.7)$$

Из второго геометрического соотношения (3.6) при $e_y = 0$ получим

$$u_y = v(x), \quad (3.8)$$

где $v(x)$ — прогиб балки. Введем осредненную по высоте сечения деформацию сдвига:

$$\psi = \frac{1}{h} \int_0^h e_{xy} dy \quad (3.9)$$

и в силу малости h приближенно заменим в третьем соотношении (3.6) $e_{xy}(x, y)$ на $\psi(x)$. Интегрируя полученное равенство по y и учитывая (3.8), будем иметь

$$u_x = u(x) + \bar{y}\theta(x); \quad \bar{y} = y - e; \quad \theta = \psi - v', \quad (3.10)$$

где $u = u_x(y = e)$ — смещение точек нейтральной оси $y = e$ (см. рис. 3.2) в направлении оси x ; θ — угол поворота сечения; штрихом обозначена производная по x .

Распределение перемещений в форме (3.8), (3.10) соответствует гипотезе плоских сечений, широко используемой при расчете балок. Подставляя перемещение (3.10) в первое равенство (3.6), а полученную деформацию e_x — в закон Гука (3.7), найдем

$$\sigma_x = E_x (u' + \bar{y}\theta'). \quad (3.11)$$

Это напряжение может быть выражено и через две другие функции переменной x — осевую силу и изгибающий момент относительно нейтральной оси:

$$N = \int_0^h \sigma_x b \, dy; \quad M = \int_0^h \sigma_x b \bar{y} \, dy.$$

Подставляя сюда напряжение (3.11), получим

$$N = Bu' + C\theta'; \quad M = Cu' + D\theta', \quad (3.12)$$

где

$$B = I_0, \quad C = I_1 - eI_0, \quad D = I_2 - 2eI_1 + e^2I_0 \quad (3.13)$$

— обобщенные жесткости, которые выражаются через интегралы

$$I_n = \int_0^h b E_x y^n \, dy \quad (n = 0, 1, 2). \quad (3.14)$$

Для слоистой балки (см. рис. 3.1, б) интегралы (3.14) выражают через характеристики и координаты слоев:

$$I_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^k b_i E_x^{(i)} (t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}). \quad (3.15)$$

Положение нейтральной оси найдем, приняв смешанную жесткость $C = 0$. Тогда из второго равенства (3.13) имеем

$$e = I_1/I_0, \quad (3.16)$$

и соотношения (3.12) принимают следующий вид:

$$N = Bu', \quad M = D\theta'. \quad (3.17)$$

Здесь с учетом равенств (3.13) и (3.16)

$$B = I_0; \quad D = I_2 - \frac{I_1^2}{I_0}. \quad (3.18)$$

Таким образом, для определения жесткостей балки необходимо найти суммы (3.15) и воспользоваться формулами (3.18).

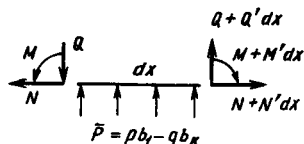
Например, для металлического двутаврового профиля, усиленного композитными накладками (см. рис. 3.1, в), в (3.15) следует принять $k = 5$. Имеем $b_1 = c$, $t_0 = 0$, $t_1 = \delta_1$, $E_x^{(1)} = E_k$; $b_2 = c$, $t_2 = \delta_1 + \delta_2$, $E_x^{(2)} = E_m$; $b_3 = d$, $t_3 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$, $E_x^{(3)} = E_m$; $b_4 = a$, $t_4 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$, $E_x^{(4)} = E_m$; $b_5 = a$, $t_5 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5$, $E_x^{(5)} = E_k$ (индекс m соответствует металлу, k — композиту).

Выражая из соотношений (3.17) u' и θ' и подставляя в (3.11), найдем

$$\sigma_x = E_x \left(\frac{N}{B} + \frac{M}{D} \bar{y} \right). \quad (3.19)$$

Рис. 3.4. Элемент нейтральной оси балки

Для получения напряжений τ_{xy} и σ_y воспользуемся уравнениями равновесия (3.1) и (3.2). Подставляя напряжение (3.19) в уравнение (3.1), выразим τ_{xy} , т. е.



$$\tau_{xy} = -\frac{1}{b} \left(\frac{N'}{B} \int_0^y E_x b \, dy + \frac{M'}{D} \int_0^y E_x b \bar{y} \, dy \right). \quad (3.20)$$

Удовлетворим граничное условие (3.3) $\tau_{xy}(y = h) = 0$. Учитывая, что $\bar{y} = y - e$ и равенство (3.14), получим

$$\frac{N'}{B} I_0 + \frac{M'}{D} (I_1 - e I_0) = 0.$$

Отсюда, поскольку второе слагаемое в силу условия (3.16) равно нулю, имеем

$$N' = 0. \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) может быть получено непосредственно из условия равновесия элемента нейтральной оси, к которой приведены силы и моменты (рис. 3.4). Оно соответствует сумме проекций всех действующих на элемент сил на ось x . С учетом уравнения (3.21) выражение для касательных напряжений (3.20) принимает вид

$$\tau_{xy} = -\frac{M'}{bD} \int_0^y E_x b \bar{y} \, dy. \quad (3.22)$$

Введем поперечную силу

$$Q = \int_0^h b \tau_{xy} \, dy. \quad (3.23)$$

Подставляя в (3.23) касательные напряжения (3.22) и преобразуя двукратный интеграл по частям с учетом равенств (3.13), (3.16) и (3.18), получим

$$\begin{aligned} \int_0^h dy \int_0^y E_x b (y - e) \, dy &= h \int_0^h E_x b y \, dy - \int_0^h E_x b y^2 \, dy - \\ &- e \left(h \int_0^h E_x b \, dy - \int_0^h E_x b y \, dy \right) = -D. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Окончательно имеем

$$Q = M'. \quad (3.25)$$

Это уравнение может быть получено как уравнение моментов из условия равновесия элемента оси балки, показанного на рис. 3.4.

Таким образом, выражение для касательных напряжений (3.22) преобразуется с учетом (3.25) следующим образом:

$$\tau_{xy} = -\frac{Q}{Db(y)} \int_0^y E_x b \bar{y} dy. \quad (3.26)$$

Рассмотрим уравнение равновесия (3.2). Выражая из него σ_y и подставляя τ_{xy} согласно (3.26), получим

$$\sigma_y = \frac{1}{b} \left(\frac{Q'}{D} \int_0^y dy \int_0^y E_x b \bar{y} dy - p b_1 \right). \quad (3.27)$$

Удовлетворим граничное условие (3.3) $\sigma_y(y=h) = -q$. Используя преобразование (3.24) для двукратного интеграла, будем иметь

$$Q' + \bar{p} = 0, \quad (3.28)$$

где $\bar{p} = p b_1 - q b_h$.

Уравнение (3.28) соответствует сумме проекций сил, действующих на элемент оси балки (рис. 3.4), на ось y . Учитывая это уравнение, запишем равенство (3.27) в виде

$$\sigma_y = -\frac{1}{b(y)} \left(\frac{\bar{p}}{D} \int_0^y dy \int_0^y E_x b \bar{y} dy + p b_1 \right). \quad (3.29)$$

Для завершения рассматриваемой прикладной теории изгиба композитных балок остается связать поперечную силу Q с осредненной по высоте балки деформацией сдвига ψ . С этой целью заменим в (3.9) деформацию сдвига через касательные напряжения с помощью закона Гука (3.5):

$$\psi = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} dy \quad (3.30)$$

и подставим сюда τ_{xy} согласно (3.26). Окончательно получим

$$Q = K\psi, \quad (3.31)$$

где

$$K = -Dh \left(\int_0^h \frac{dy}{bG_{xy}} \int_0^y E_x b \bar{y} dy \right)^{-1} \quad (3.32)$$

— сдвиговая жесткость балки. Как отмечалось в § 2.2, выражение (3.32) можно упростить, если в равенстве (3.30) осреднить τ_{xy} по высоте балки. Действительно, в равенство (3.30) входит ψ — осредненная по высоте деформация сдвига e_{xy} . Поскольку последняя в силу соотношения (3.5) отличается от τ_{xy} только конечным

множителем, естественно осреднить в (3.30) и τ_{xy} , приняв $\tau_{xy} = Q/bh$. Тогда вместо (3.32) будем иметь

$$K = h^3 \left(\int_0^h \frac{dy}{bG_{xy}} \right)^{-1}. \quad (3.33)$$

Сопоставление формул (3.32) и (3.33) проведено ниже.

Таким образом, основные уравнения рассматриваемой теории получены. Они допускают общее решение, которое строится последовательным интегрированием. Интегрируя уравнения (3.21) и (3.28), найдем

$$N = N_0; \quad (3.34)$$

$$Q = Q_0 - \int_0^x \bar{p} dx. \quad (3.35)$$

Подставляя Q согласно (3.35) в уравнение (3.25), после интегрирования получим

$$M = M_0 + Q_0 x - \int_0^x dx \int_0^x \bar{p} dx. \quad (3.36)$$

С учетом (3.34) и (3.36), интегрируя равенства (3.17), имеем

$$u = u_0 + \frac{N_0}{B} x; \quad (3.37)$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{M_0}{D} x + \frac{Q_0}{2D} x^2 - \frac{1}{D} \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \bar{p} dx. \quad (3.38)$$

Для того чтобы найти прогиб v , воспользуемся последней формулой (3.10). Подставляя в нее ψ согласно (3.31) и учитывая соотношения (3.35), (3.38), в результате интегрирования получим

$$v = v_0 + \frac{1}{K} \left(Q_0 x - \int_0^x dx \int_0^x \bar{p} dx \right) - \left(\theta_0 x + \frac{M_0}{2D} x^2 + \frac{Q_0}{6D} x^3 + \frac{1}{D} \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \bar{p} dx \right). \quad (3.39)$$

Напряжения определяют из равенств (3.19), (3.26), (3.29). В решение (3.34)–(3.39) входят параметры N_0 , Q_0 , M_0 и u_0 , θ_0 , v_0 , представляющие собой значения осевой силы, поперечной силы, изгибающего момента и осевого перемещения, угла поворота сечения, прогиба в сечении $x = 0$ (см. рис. 3.2). Значения этих

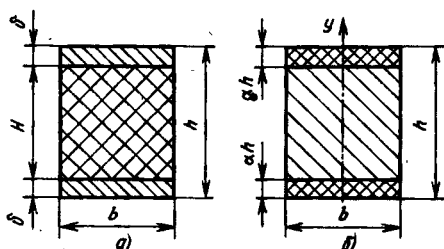


Рис. 3.5. Сечения трехслойной балки с легким заполнителем (а) и металлической балки, усиленной композитными накладками (б)

параметров определяют из граничных условий, для вывода которых воспользуемся вариационным принципом Лагранжа.

Вариация полной энергии (2.111) для балки, нагруженной давлением $\bar{p}$, имеет следующий вид:

$$\delta\Pi = \int_0^l (N\delta u' + M\delta\theta' + Q\delta\psi - \bar{p}\delta v) dx. \quad (3.40)$$

Учитывая, что $\psi = \theta + v'$ и осуществляя в (3.40) варьирование по u , v , θ , из условия $\delta\Pi = 0$ можно получить уравнения равновесия (3.21), (3.25), (3.28) и естественные граничные условия:

$$N\delta u = 0; Q\delta v = 0; M\delta\theta = 0. \quad (3.41)$$

Отсюда следует, что для защемленного края $u = v = \theta = 0$. Отметим, что в силу равенств (3.8), (3.10) перемещения на этом краю тождественно обращаются в нуль, т. е. $u_x = 0$, $u_y = 0$. Для свободного края $N = Q = M = 0$, причем согласно формулам (3.19), (3.26) при этом на краю $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = 0$. В случае шарнирно опертого края $N = 0$ (или $u = 0$), $v = 0$, $M = 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о степени соответствия результатов, получаемых на основе двух приведенных выше формул для сдвиговой жесткости (3.32) и (3.33). В случае однородной балки (см. рис. 3.1, а), т. е. когда $b = \text{const}$, $E_x = \text{const}$, $G_{xy} = \text{const}$ и согласно (3.16) $e = h/2$, эти формулы дают одинаковый результат — $K = bhG_{xy}$. Отсюда можно заключить, что максимальное различие следует ожидать в случае наибольшего перепада сдвиговой жесткости по высоте балки. Такая ситуация имеет место в трехслойных системах с легким заполнителем (рис. 3.5, а), у которых для несущих слоев можно считать $G_{xy} \rightarrow \infty$, а для заполнителя $E_x = 0$. Особенности описания трехслойных конструкций были изложены в § 2.11. Учитывая сделанные там выводы, для трехслойной балки, имеющей металлические несущие слои с толщиной δ и легкий заполнитель с толщиной H (см. рис. 3.5, а), по формулам (3.32) и (3.33) получим соответственно

$$K = Gbh \frac{1 + 4\eta + \frac{4}{3}\eta^2}{1 + \eta}; \quad K = Gbh(1 + 2\eta),$$

где $\eta = \delta/H$.

3.1. Относительные прогибы трехслойных балок, соответствующие различным теориям

№ балки	δ 10^{-3} , м	H 10^{-3} , м	l , м	G , МПа	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$\bar{v}_3$	$\bar{v}_4$	$k_G = \frac{D}{Kl^3}$
1	0,7	3,7	0,28	55,7	0,990	1,027	0,994	0,992	0,0004
2	0,7	4,8	0,48	915	0,969	1,020	0,985	0,983	0,0015
3	0,7	5,1	0,28	915	0,856	1,033	0,980	0,986	0,015
4	1,0	17	0,28	38,5	0,329	0,985	0,923	0,923	0,182
5	2,4	18,8	0,28	38,5	0,171	1,053	0,895	0,921	0,427

В табл. 3.1 представлены результаты определения максимального прогиба шарнирно опертой трехслойной балки с пролетом l , одинаковыми несущими слоями из алюминиевого сплава с модулем упругости $E = 70$ ГПа и заполнителем из пенопласта, нагруженной давлением, распределенным по закону $\bar{p} = p_0 \sin(\pi x/l)$. В таблице показаны отношения $\bar{v}_i$ теоретических значений максимального прогиба, соответствующих различным теориям, к экспериментальным результатам, приведенным в работе [3]. Значения $\bar{v}_1$ соответствуют классической теории изгиба балок, т. е. случаю $K \rightarrow \infty$; значения $\bar{v}_2$ — наиболее точной прикладной теории трехслойных систем, основанной на гипотезе ломаной линии [33] (см. § 2.11); $\bar{v}_3$ и $\bar{v}_4$ — рассматриваемой теории композитных балок при сдвиговой жесткости, найденной по формулам (3.32) и (3.33). В последнем столбце таблицы приведены значения параметра k_G (см. § 2.2), по значению которого можно судить о необходимости учета деформации сдвига. Из таблицы следует, что построенная теория с коэффициентом сдвиговой жесткости в форме записи (3.33) ($\bar{v}_4$) удовлетворительно согласуется как с экспериментальными результатами, так и с расчетом на основе более сложной модели трехслойной балки ($\bar{v}_3$). Отметим, что балка № 5, имеющая отношение модулей сдвига несущего слоя и заполнителя порядка 10^3 , иллюстрирует наиболее неблагоприятное для рассматриваемой теории сочетание параметров. В композитных системах, даже включающих металлические слои, это отношение не превышает 10^2 .

В качестве примера рассмотрим металлическую балку прямоугольного сечения, усиленную накладками из композита (см. рис. 3.5, б). Жесткости такой балки при растяжении и изгибе а также масса имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 B &= E_m b h \left[1 + 2\alpha \left(\frac{E_R}{E_m} - 1 \right) \right]; \\
 D &= E_m b \frac{h^3}{12} \left[1 + 2\alpha \left(\frac{E_R}{E_m} - 1 \right) (4\alpha^3 - 6\alpha + 3) \right]; \quad (3.42) \\
 g &= \rho_m b h \left[1 - 2\alpha \left(1 - \frac{\rho_R}{\rho_m} \right) \right],
 \end{aligned}$$

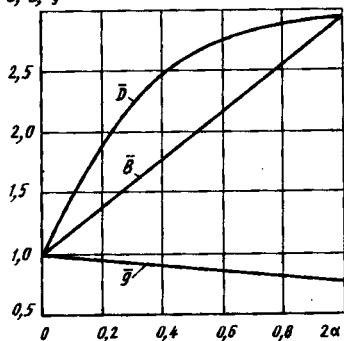
$\bar{D}, \bar{B}, \bar{g}$ 

Рис. 3.6. Зависимость относительных изгибной ($\bar{D}$), продольной ($\bar{B}$) жесткости и погонной массы ($\bar{g}$) металлической балки от относительной толщины композитных накладок

где E_m , ρ_m — соответственно модуль упругости и плотность металла, а E_k , ρ_k — соответствующие характеристики композита.

При $\alpha = 0$, т. е. при отсутствии композитных накладок, имеем $B_m = E_m b h$, $D_m = E_m b h^3 / 12$, $g_m = \rho_m b h$. На рис. 3.6 приведены зависимости $\bar{B} = B/B_m$, $\bar{D} = D/D_m$, $\bar{g} = g/g_m$ от параметра 2α , иллю-

стрирующие эффективность усиления балки из алюминиевого сплава накладками из боропластика. Предположим, что балка с параметрами (3.42) закреплена консольно и нагружена на свободном конце силой P (см. рис. 3.2). Тогда в общем решении (3.34)–(3.39) следует принять $\bar{p} = 0$, $u_0 = v_0 = \theta_0 = 0$ и найти N_0 , Q_0 и M_0 из условий $N(x=l) = 0$, $Q(x=l) = P$, $M(x=l) = 0$. В результате получим

$$N = 0; Q = P; M = -P(l-x); u = 0;$$

$$\theta = -\frac{Px}{D} \left(l - \frac{x}{2} \right); v = \frac{Px^2}{2D} \left(l - \frac{x}{3} \right) + \frac{Px}{K}.$$

Максимальный прогиб балки можно записать в виде

$$v(x=l) = v_m (1 + \Delta),$$

где $v_m = Pl^3/(3D)$ — максимальный прогиб, найденный без учета сдвига, а $\Delta = 3D/(Kl^3)$ — поправка, связанная с учетом сдвига.

Для чисто металлической ($\alpha = 0$) балки с относительной длиной $l/h = 10$ получим $\Delta = 0,0065$, а для чисто композитной $\Delta = 0,085$. Напряжения определяют из равенств (3.19) и (3.26), т. е. в рассматриваемом случае (см. рис. 3.5, б)

при $0 < y < \alpha h$ и $h - \alpha h < y < h$

$$\sigma_x = \frac{PE_k}{D} (l-x) \left(\frac{h}{2} - y \right); \tau_{xy} = \frac{PE_k}{2D} y (h-y),$$

при $\alpha h < y < h - \alpha h$

$$\sigma_x = \frac{PE_m}{D} (l-x) \left(\frac{h}{2} - y \right); \tau_{xy} = \frac{P}{2D} \times$$

$$\times [h^3 \alpha (1 - \alpha) (E_k - E_m) + E_m y (h - y)].$$

На рис. 3.7 показаны распределения по высоте сечения $x = 0$ нормальных и касательных напряжений, отнесенных к максимальному значению соответствующих напряжений в металлической балке, при различной относительной толщине композитного слоя α . Отметим, что для расчета рассматриваемой балки на проч-

ность необходимо сравнивать с допускаемыми значениями не только нормальные напряжения σ_x , но и касательные напряжения τ_{xy} , действующие на поверхности контакта композита и металла.

Композитный материал иногда используется в виде однонаправленных жгутов, усиливающих металлический профиль. Как правило, профили из алюминиевых сплавов усиливают жгутами из боропластика, обладающего высоким модулем упругости (см. рис. 3.1, г). В этом случае формула (3.15) обобщается следующим образом ($n = 0, 1, 2$):

$$I_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^k b_i E_x^{(i)} (t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}) + \sum_{j=1}^m E_j F_j t_j^n.$$

Здесь m — число композитных жгутов; E_j , F_j — соответственно модуль упругости и площадь сечения j -го жгута; t_j — расстояние от грани $y = 0$ до центра тяжести j -го включения. Жесткости усиленного профиля при растяжении и изгибе находят из формул (3.18).

Рассмотрим задачу устойчивости слоистого стержня, сжатого осевой силой T (рис. 3.8). В исходном докритическом (прямолинейном) состоянии в стержне действует только осевая сила, т. е. согласно обозначениям, введенным в § 2.9, где были получены уравнения устойчивости, $N^{(0)} = -T$, $M^{(0)} = 0$, $Q^{(0)} = 0$. Уравнения устойчивости типа (2.179)–(2.181) в рассматриваемом случае имеют вид (отметим, что в отличие от § 2.9 здесь прогиб обозначаем через v)

$$N' = 0; Q = M'; Q' - N^{(0)}\omega' = 0; \omega = -v' \quad (3.43)$$

и отличаются от (3.21), (3.25), (3.28) только наличием в третьем уравнении члена, включающего докритическую осевую силу. Из первого уравнения следует, что $N = 0$. Заметим, что это не

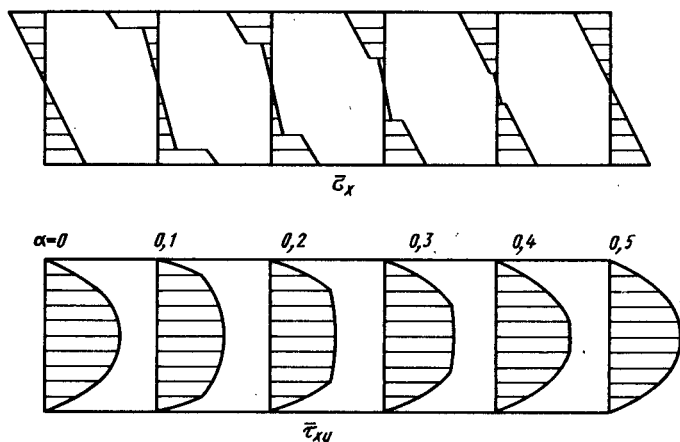


Рис. 3.7. Распределение относительных нормальных ($\bar{\sigma}_x$) и касательных ($\bar{\tau}_{xy}$) напряжений по высоте и длине металлической балки, усиленной композитными накладками

противоречит условиям нагружения, показанным на рис. 3.8. В уравнение (3.43) входят силы и моменты, соответствующие изгибному возмущению, которое согласно равенствам (2.174) накладывается на исходное состояние. Поэтому поскольку в исходном состоянии $N^{(0)} = -T$, т. е. заданная осевая сила полностью уравновешивается, то возмущение должно удовлетворять условию $N = 0$. С учетом этого условия и равенств (3.17), (3.31) получим следующие уравнения устойчивости сжатого стержня:

$$M' = Q; Q' - Tv'' = 0; M = D\theta'; Q = K(\theta + v'). \quad (3.44)$$

Проведем некоторые преобразования. Исключая из первого и последнего уравнений (3.44) поперечную силу Q с помощью второго уравнения, получим

$$M'' - Tv'' = 0; \quad (3.45)$$

$$\theta' = -(1 - \lambda) v'', \quad (3.46)$$

где $\lambda = T/K$.

С учетом (3.46) третье равенство (3.44) принимает вид

$$M = -D(1 - \lambda) v''. \quad (3.47)$$

Подставляя изгибающий момент (3.47) в уравнение (3.45), окончательно будем иметь следующее уравнение устойчивости сжатого стержня:

$$v^{IV} + k^2 v'' = 0, \quad (3.48)$$

где $k^2 = \frac{T}{D(1 - \lambda)}$.

Общее решение уравнения (3.48)

$$v = C_1 x + C_2 + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx. \quad (3.49)$$

Из равенства (3.47), а также первого и последнего соотношений (3.44) найдем

$$M = Dk^2(1 - \lambda)(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx); \quad (3.50)$$

$$Q = Dk^2(1 - \lambda)(C_3 \cos kx - C_4 \sin kx);$$

$$\theta = kC_3 \left[\frac{D}{K} k^2(1 - \lambda) - 1 \right] \cos kx - kC_4 \times \\ \times \left[\frac{D}{K} k^2(1 - \lambda) - 1 \right] \sin kx - C_1.$$

Общая схема определения критической нагрузки заключается в следующем. Решение (3.48), (3.49) должно удовлетворять четырем граничным условиям типа (2.178) или (3.41) на торцах $x = 0$ и $x = l$ (рис. 3.8).

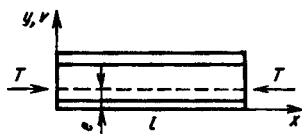


Рис. 3.8. Слонный стержень, сжатый осевыми силами

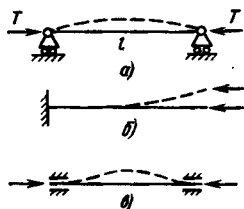


Рис. 3.9. Формы потерн устойчивости свободно опертого (а), консольного (б) и защемленного (в) стержней

Эти условия являются однородными, т. е. для постоянных $C_1 \div C_4$ получается однородная система четырех линейных алгебраических уравнений. Как известно, такая система имеет ненулевые решения (нулевое решение $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ соответствует исходной форме равновесия $v = 0$), если ее определитель равен нулю. Из этого условия находим параметр k и затем силу T , наименьшее значение которой и является критическим.

В качестве примера рассмотрим стержень, торцы которого $x = 0$ и $x = l$ (рис. 3.9, а) шарнирно оперты, т. е. на торцах $v = 0$ и $M = 0$. Подставляя в эти условия решение (3.49)–(3.50), получим упоминавшуюся выше однородную систему линейных алгебраических уравнений для постоянных $C_1 \div C_4$:

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0; \\ C_1 l + C_2 + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl &= 0; \\ C_4 &= 0; \\ C_3 \sin kl + C_4 \cos kl &= 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Отсюда следует $C_2 = C_4 = 0$, т. е.

$$C_1 l + C_3 \sin kl = 0; \quad C_3 \sin kl = 0. \quad (3.52)$$

Очевидно, что если $C_3 = 0$, то и $C_1 = 0$ и $v = 0$, что соответствует исходной прямолинейной форме равновесия. Для существования изгибной формы равновесия согласно второму равенству (3.52) должно выполняться условие $\sin kl = 0$, т. е. $kl = n\pi$, где $n = 1, 2, 3 \dots$. Тогда из первого равенства (3.52) следует $C_1 = 0$, и будем иметь

$$T = D \left(1 - \frac{T}{K} \right) \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad v = C_3 \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.53)$$

Из первого равенства (3.53) найдем

$$T = \frac{n^2 \pi^2 D}{l^2 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 D}{K l^2} \right)}. \quad (3.54)$$

Если не учитывать сдвиговую податливость стержня, положив $K \rightarrow \infty$, из формулы (3.54) следует, что минимальное значение T реализуется при $n = 1$. В результате получается известная формула Эйлера

$$T_0 = \frac{\pi^2 D}{l^2}. \quad (3.55)$$

С учетом (3.55) равенство (3.54) принимает вид

$$T = \frac{n^2 T_0}{1 + \frac{n^2 T_0}{K}}.$$

Покажем, что минимальному значению T снова соответствует $n = 1$. Действительно, неравенство $T(n) \geq T(n = 1)$ может быть

приведено к виду $n^2 \geq 1$, т. е. всегда справедливо. Следовательно, критическая сила

$$T_k = \frac{T_0}{1 + (T_0/K)}. \quad (3.56)$$

Равенство (3.56) может быть использовано и при других условиях опирания стержня — достаточно подставить в него соответствующее значение T_0 . В частности, для консольного (см. рис. 3.9, б) и заделанного по концам (см. рис. 3.9, в) стержня соответственно следует подставить

$$T_0 = \frac{\pi^2 D}{4l^2}; \quad T_0 = \frac{4\pi^2 D}{l^2}.$$

Сделаем здесь два замечания. Первое связано со вторым равенством (3.53), которое позволяет найти прогиб только с точностью до множителя C_2 , остающегося неопределенным. Такая ситуация характерна для линейаризованной постановки задачи устойчивости, обсуждавшейся в § 2.9. Действительно, поскольку определитель системы типа (3.51) равен нулю, то по крайней мере одно из этих уравнений является следствием других. В результате уравнений оказывается меньше, чем неизвестных, и все постоянные можно выразить через одну, которая остается неопределенной. Заметим, что эта неопределенность позволяет формально обосновать операцию линейаризации — обсуждаемую константу, очевидно, всегда можно считать достаточно малой для того, чтобы отбросить члены нелинейные относительно возмущения (в рассматриваемом случае прогиба v).

Второе замечание связано со случаем $\lambda = 1$, т. е. $T = T_0 = K$. В некоторых теориях устойчивости стержней, учитывающих деформацию сдвига, это условие определяет критическую силу T_c , при которой потеря устойчивости происходит в результате чистого сдвига. Этот вопрос подробно обсуждается в работе [87]. В рамках рассматриваемой теории при $\lambda = 1$ получим

$$v = C_1 x + C_2; \quad M = 0; \quad Q = 0; \quad \theta = -C_1.$$

Постоянные C_1, C_2 соответствуют смещениям стержня как твердого тела. Закрепляя его от этих перемещений, т. е. полагая, например (см. рис. 3.9, а) $v(0) = v(l) = 0$, имеем $C_1 = C_2 = 0$ и $v = 0$, т. е. исходную прямолинейную форму. Таким образом, рассматриваемая теория не позволяет трактовать силу $T_0 = K$ как критическую. Заметим, что независимо от того, как истолковывается эта сила, она всегда больше, чем T_k , поскольку неравенство $T_0 > T_k$ равносильно очевидному условию $K > 0$.

В заключение получим уравнения динамики слоистых балок и стержней. Уравнения движения, обобщающие (3.1), (3.2), имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(b\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(b\tau_{xy}) - \rho b \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0; \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(b\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(b\sigma_y) - \rho b \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0. \quad (3.58)$$

Здесь $\rho(y)$ — плотность материала. Подставляя в уравнения (3.57), (3.58) перемещения (3.8), (3.10), осуществим операции, описанные в § 2.6, т. е. проинтегрируем уравнение (3.57) по y от 0 до h , затем умножим это уравнение на $\bar{y}$ и проинтегрируем и, наконец, проинтегрируем по y от 0 до h уравнение (3.58). Учитывая граничные условия типа (3.3) и обозначения для сил и моментов, получим уравнения движения, соответствующие уравнениям равновесия (3.21), (3.25), (3.28):

$$\frac{\partial N}{\partial x} = B_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \quad (3.59)$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} - C_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \bar{p} = B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (3.61)$$

где

$$B_p = J_0; \quad C_p = J_0(e_p - e); \quad e_p = J_1/J_0;$$

$$D_p = J_2 - eJ_1 + e^2J_0 \quad (3.62)$$

и

$$J_n = \int_0^h b \rho y^n dy \quad (n = 0, 1, 2). \quad (3.63)$$

Для слоистой балки интеграл (3.63) определяется равенством, аналогичным (3.15), т. е.

$$J_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^h b_i \rho_i (t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}).$$

В уравнениях (3.59), (3.60) введен параметр e_p (3.62), аналогичный координате нейтральной оси e (3.16) и в общем случае с ней не совпадающий, поскольку интегралы I_n (3.14) зависят от распределения модуля упругости, а интегралы J_n (3.63) — от распределения плотности по высоте сечения.

Рассмотрим прежде всего случаи, когда выполняется условие $e = e_p$, справедливое для однородных балок и для балок, структура которых симметрична относительно средней линии $y = h/2$.

В первом случае

$$e = e_p = \int_0^h b y dy / \int_0^h b dy,$$

а во втором $e = e_p = h/2$. Тогда в уравнениях (3.59), (3.60) следует принять $C_p = 0$, и с учетом соотношений (3.10), (3.17),

(3.31) уравнения (3.59), (3.60) будут иметь следующий вид:

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = B_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (3.64)$$

$$K \left(\theta + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - D_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \quad (3.65)$$

$$K \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \bar{p} = B_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Уравнение (3.64) описывает продольные колебания стержня и подробно исследовано в работе [91]. В частности, если концы стержня допускают свободное смещение в осевом направлении (см. рис. 3.9, а при $T = 0$), то можно задать осевое смещение в виде

$$u(x, t) = A \cos \lambda_m x \sin \omega_m t, \quad (3.66)$$

где $\lambda_m = m\pi/l$. Тогда из уравнения (3.64) получим следующую формулу для квадрата частоты свободных продольных колебаний:

$$\omega_m^2 = \frac{B}{B_0} \lambda_m^2. \quad (3.67)$$

Уравнения (3.65) соответствуют изгибным колебаниям. Исключая из них угол поворота θ , получим

$$L_v(v) = L_p(\bar{p}), \quad (3.68)$$

где

$$L_v = D \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + B_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{DB_0}{K} + D_0 \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{D_0 B_0}{K} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4}; \quad (3.69)$$

$$L_p = \bar{p} - \frac{1}{K} \left(D \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} - D_0 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} \right).$$

Уравнение (3.68) для однородного стержня было получено С. П. Тимошенко [91]. Члены, содержащие D_0 , учитывают инерционную составляющую, связанную с поворотом сечения, а члены, содержащие K , влияние деформации сдвига. Оценки, полученные в работе [91] для изотропных, а в работе [87] — для композитных балок, показывают, что инерция поворота мало влияет на их динамическое поведение, и можно приближенно принять $D_0 = 0$. Тогда уравнение (3.68) упрощается следующим образом:

$$D \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + B_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{DB_0}{K} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} = \bar{p} - \frac{D}{K} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2}. \quad (3.70)$$

Для определения частоты свободных колебаний здесь следует принять $\bar{p} = 0$ и

$$v(x, t) = v_m(x) \sin \omega_m t. \quad (3.71)$$

Подставляя перемещение (3.71) в уравнение (3.70), получим

$$Dv_m^{IV} + \frac{DB_p}{K} \omega_m^2 v_m - B_p \omega_m^2 v_m = 0. \quad (3.72)$$

Решение этого уравнения включает четыре произвольные постоянные, для которых может быть записана система четырех однородных алгебраических уравнений типа (3.51), следующая из граничных условий, заданных на концах балки. Для существования ненулевого решения этой системы ее определитель должен быть равен нулю — это условие и определяет уравнение для собственных частот ω . Для шарнирно опертой балки (см. рис. 3.9, а при $T = 0$) форма колебаний может быть записана в виде

$$v(x, t) = A_1 \sin \lambda_m x \sin \omega_m t, \quad (3.73)$$

где $\lambda_m = m\pi/l$. Тогда из уравнения (3.72) найдем

$$\omega_m^2 = \frac{D\lambda_m^4}{B_p \left(1 + \frac{D}{K} \lambda_m^2\right)}. \quad (3.74)$$

Если не учитывать деформацию сдвига, приняв $K = \infty$, получим

$$\omega_m^2 = \frac{D\lambda_m^4}{B_p}. \quad (3.75)$$

Из формулы (3.74) следует, что деформация сдвига снижает частоту собственных колебаний тем больше, чем выше тон колебаний, определяемый числом m . Форма прогиба так же, как и в рассматривавшейся ранее задаче устойчивости, определяется с точностью до неопределенного множителя A_1 , входящего в равенство (3.73).

О необходимости учета влияния деформации сдвига на частоты свободных колебаний композитных балок можно судить, сравнивая параметр $D\lambda_m^2/K$ с единицей.

В общем случае при $e \neq e_p$ продольные колебания не отделяются от изгибных. Исключая из уравнений (3.59)–(3.61) θ и u , окончательно получим

$$\begin{aligned} B \frac{\partial^2 L_v(v)}{\partial x^2} - B_p \frac{\partial^2 L_v(v)}{\partial t^2} + C_p^2 \left(\frac{B_p}{K} \frac{\partial^2 v}{\partial t^4} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial t^4} \right) = \\ = B \frac{\partial^2 L_p(\bar{p})}{\partial x^2} - B_p \frac{\partial^2 L_p(\bar{p})}{\partial t^2} + \frac{C_p}{K} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^4}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Здесь операторы L_v и L_p определяются равенствами (3.69). Для оценки влияния параметра C_p , который связывает продольные и изгибные колебания, пренебрежем инерцией поворота и деформацией сдвига, приняв $D_p = 0$, $K \rightarrow \infty$. Тогда уравнение (3.76) при $\bar{p} = 0$ упрощается следующим образом:

$$\left(B \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(D \frac{\partial^2 v}{\partial x^4} + B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) - C_p^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial t^4} = 0. \quad (3.77)$$

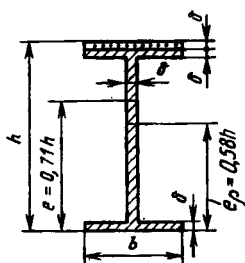


Рис. 3.10. Геометрические параметры двутаврового профиля, усиленного накладкой из боралялюминия

Для шарнирно опертой балки зададим прогиб в форме (3.73). Заметим, что такому прогибу соответствует продольное перемещение в форме (3.66). Тогда уравнение (3.78) принимает вид

$$(B\lambda_m^2 - B_p\omega_m^2)(D\lambda_m^4 - B_p\omega_m^2) - C_p\lambda_m^2\omega_m^4 = 0. \quad (3.78)$$

Если $C_p = 0$, из уравнения (3.78) следуют формулы (3.67) и (3.75) для продольных и изгибных колебаний. Если $C_p \neq 0$, это уравнение, учитывая, что согласно (3.62) $C_p = B_p(e_p - e)$, можно переписать в форме

$$\omega_m^4 B_p^2 [1 - \lambda_m^2(e_p - e)^2] - B_p\lambda_m^2\omega_m^2(D\lambda_m^2 + B) + BD\lambda_m^6 = 0.$$

Отсюда следует, что о необходимости учета связанного характера продольных и изгибных колебаний слоистых балок можно судить по значению параметра $\lambda_m^2(e_p - e)^2$, сравнивая его с единицей.

В качестве примера рассмотрим алюминиевый двутавровый профиль, усиленный с одной стороны боралюминием (рис. 3.10), со следующими параметрами: $h/l = 0,1$; $b/h = 0,5$; $\delta/h = 0,05$. Результаты расчета:

$$\frac{D}{K}\lambda_m^2 = 0,103m^2; \lambda_m^2(e_p - e)^2 = 0,0016m^2.$$

Отсюда можно заключить, что деформация сдвига является существенной, а коэффициентом связанности при определении первых частот можно пренебречь.

§ 3.2. Тонкостенные стержни с замкнутым контуром поперечного сечения

Одна из наиболее перспективных областей применения композитов в силовых конструкциях связана с тонкостенными стержнями (рис. 3.11), которые изготавливают намоткой или выкладкой однонаправленной или тканой ленты под различными углами к продольной оси стержня и используют в качестве элементов ферм, подкосов, лонжеронов винтов самолетов и вертолетов, карданных валов автомобилей и т. д.

Типовая расчетная модель стержня показана на рис. 3.12 и

Рис. 3.11. Композитные стержни

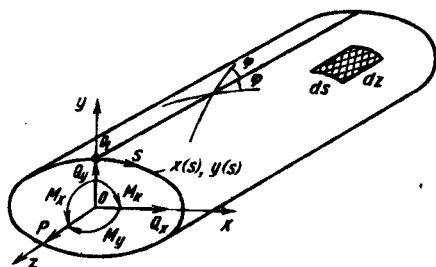


Рис. 3.12. Геометрические параметры и характер нагружения композитного стержня

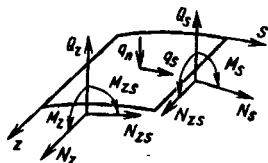


Рис. 3.13. Элемент тонкостенного стержня

представляет собой цилиндрическую оболочку, образованную из слоев композита с углами армирования $\pm \varphi_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) и толщинами h_i , причем длина этой оболочки значительно больше размеров ее сечения, а последние значительно больше толщины стенки.

Рассматриваемый стержень может быть описан уравнениями (2.108)—(2.110), упрощенными с учетом особенностей его формы и условий нагружения. Введем продольную координату z , отсчитываемую вдоль образующей или оси стержня, и контурную координату s , отсчитываемую от некоторой точки O_1 (рис. 3.12). Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности в этих координатах согласно рис. 3.12 имеют вид $A_1 = A_2 = 1$. Считая стенку тонкой, не будем учитывать изменение метрических свойств слоев по ее толщине, т. е. примем $H_1 = H_2 = 1$. Заменяя в уравнениях (2.108)—(2.110) α на z и β на s и полагая дополнительно $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 = R_s$, получим:

уравнения равновесия (рис. 3.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial N_{sz}}{\partial s} &= 0; \quad \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{zs}}{\partial z} + \frac{Q_s}{R_s} + q_s = 0; \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{\partial M_{sz}}{\partial s} - Q_z &= 0; \quad \frac{\partial M_s}{\partial z} + \frac{\partial M_{zs}}{\partial z} - Q_s = 0; \\ \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} - \frac{N_s}{R_s} - q_n &= 0; \end{aligned} \quad (3.79)$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} N_z &= B_{11}\varepsilon_z + B_{12}\varepsilon_s + C_{11}\kappa_z + C_{12}\kappa_s; \\ N_s &= B_{21}\varepsilon_z + B_{22}\varepsilon_s + C_{21}\kappa_z + C_{22}\kappa_s; \\ N_{zs} &= N_{sz} = B_{33}\gamma_{zs} + C_{33}\chi_{zs}; \\ M_z &= C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_s + D_{11}\kappa_z + D_{12}\kappa_s; \\ M_s &= C_{21}\varepsilon_z + C_{22}\varepsilon_s + D_{21}\kappa_z + D_{22}\kappa_s; \\ M_{zs} &= M_{sz} = C_{33}\gamma_{zs} + D_{33}\chi_{zs}; \\ Q_z &= K_z\psi_z; \quad Q_s = K_s\psi_s. \end{aligned} \quad (3.80)$$

и геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{R_s}; \quad \gamma_{zs} = \varepsilon_{zs} + \varepsilon_{sz} = \frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z}; \\ \kappa_z &= \frac{\partial \theta_z}{\partial z}; \quad \kappa_s = \frac{\partial \theta_s}{\partial s}; \quad \chi_{zs} = \kappa_{zs} + \kappa_{sz} = \frac{\partial \theta_z}{\partial s} + \frac{\partial \theta_s}{\partial z}; \quad (3.81) \\ \theta_z &= \psi_z - \frac{\partial u_n}{\partial z}; \quad \theta_s = \psi_s + \frac{u_s}{R_s} - \frac{\partial u_n}{\partial s}, \end{aligned}$$

где u_z , u_s , u_n — смещения точки средней линии контура сечения соответственно в направлениях оси z , касательной и нормали к контуру.

Продолжим упрощение исходных уравнений. В качестве конструктивного элемента стержень работает на растяжение, сжатие, кручение и общий изгиб. При этом в его поперечных сечениях действуют осевая сила P , изгибающие моменты M_x , M_y , крутящий момент M_k и поперечные силы Q_x , Q_y (см. рис. 3.12), которые в общем случае являются равнодействующими мембранных и поперечных усилий (N_z , N_{zs} , Q_z), а также изгибающего (M_z) и крутящего (M_{zs}) моментов (3.80). Ввиду того, что мембранная жесткость тонкой стенки значительно больше ее изгибной и крутильной жесткости, будем учитывать только мембранные усилия N_z и N_{zs} , приближенно считая изгибные, крутильные и соответствующие смешанные жесткости для направления z равными нулю, т. е. $D_{11} = 0$, $D_{12} = D_{21} = 0$, $D_{33} = 0$, $C_{11} = 0$, $C_{12} = C_{21} = 0$, $C_{33} = 0$. Тогда из равенств (3.80) и из третьего уравнения (3.79) получим $M_z = 0$, $M_{zs} = 0$, $Q_z = 0$.

Введем еще одно существенное упрощение. Как отмечалось ранее, относительно малые размеры сечения позволяют принять некоторые гипотезы, определяющие распределение перемещений по его контуру. В теории изгиба и кручения стержней, как правило, не учитывается деформация контура сечения в своей плоскости, т. е. полагается $B_{22} \rightarrow \infty$, $C_{22} \rightarrow \infty$, $D_{22} \rightarrow \infty$, $K_s \rightarrow \infty$. В результате из равенств (3.80) следует $\psi_s = 0$, $\varepsilon_s = 0$, $\kappa_s = 0$, а из геометрических соотношений (3.81) получим

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{R_s} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_s}{R_s} - \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) = 0. \quad (3.82)$$

Решение уравнений (3.82) определяет искомое распределение перемещений по контуру сечения. Однако это распределение можно установить и не решая этих уравнений — жесткий в своей плоскости контур может лишь поступательно смещаться и поворачиваться в этой плоскости. Введем радиус-вектор ρ точки A и нормаль к касательной к контуру BA в точке A (рис. 3.14). Тогда имеют место следующие геометрические соотношения:

$$x = \rho \cos \alpha; \quad y = \rho \sin \alpha; \quad \frac{1}{R_s} = \frac{d\beta}{ds}; \quad (3.83)$$

$$\sin \beta = -\frac{dy}{ds} = -\dot{y}; \quad \cos \beta = \frac{dx}{ds} = \dot{x}.$$

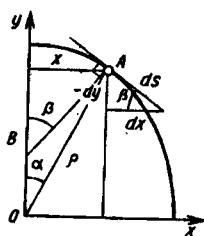


Рис. 3.14. Геометрические параметры сечения тонкостенного стержня

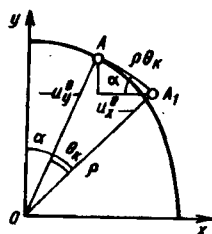


Рис. 3.15. Смещение точек контура при повороте сечения

В соответствии с рис. 3.15 перемещения точки A в направлениях x и y можно записать в виде $u_x = u + u_x^\theta$, $u_y = v - u_y^\theta$, где $u(z)$ и $v(z)$ — перемещения начала координат O , а $u_x^\theta = \rho \theta_k \cos \alpha$ и $u_y^\theta = \rho \theta_k \sin \alpha$ — перемещения, вызванные поворотом сечения вокруг точки O на угол $\theta_k(z)$. С учетом равенств (3.83) получим

$$u_x = u + y\theta_k, \quad u_y = v - x\theta_k. \quad (3.84)$$

Найдем смещения u_s и u_n по касательной и по нормали к контуру (рис. 3.16). Имеем $u_s = u_x \cos \beta - u_y \sin \beta$, $u_n = u_x \sin \beta + u_y \cos \beta$. Подставим сюда перемещения (3.84). С учетом равенств, следующих из рис. 3.16:

$$\begin{aligned} r &= x \sin \beta + y \cos \beta; \\ \eta &= y \sin \beta - x \cos \beta \end{aligned} \quad (3.85)$$

и соотношений (3.83) получим

$$\begin{aligned} u_s &= u \cos \beta - v \sin \beta + r\theta_k = u\dot{x} + v\dot{y} + r\theta_k; \\ u_n &= u \sin \beta + v \cos \beta + \eta\theta_k = -u\dot{y} + v\dot{x} + \eta\theta_k. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Подстановкой перемещений (3.86) в уравнения (3.82) можно убедиться в том, что эти уравнения удовлетворяются тождественно.

Таким образом, после сделанных допущений исходная система уравнений (3.79)–(3.81) значительно упрощается. Из уравнений равновесия (3.79) существенным для дальнейшего является только первое, т. е.

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial N_{zs}}{\partial s} = 0. \quad (3.87)$$

Третье уравнение (3.79) удовлетворяется тождественно, а три оставшиеся (в которых $M_{zs} = 0$, $Q_z = 0$) при необходимости позволяют определить усилия N_s , Q_s и момент M_s , обеспечивающие недеформируемость контура сечения, т. е. выполнение условий (3.82). Однако, как правило, такой необходимости не возникает, и эти уравнения опускаются. В связи с тем, что контур поперечного сечения стержня является абсолютно жестким в своей плоскости, действующие в этой плоскости усилия N_{zs} и нагрузки

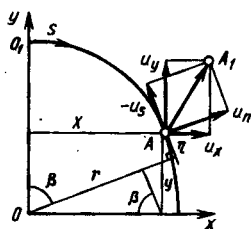


Рис. 3.16. Составляющие смещения точки контура сечения

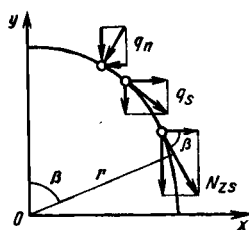


Рис. 3.17. Составляющие поверхностных нагрузок и касательного усилия

q_s и q_n (см. рис. 3.13) можно привести к равнодействующим (рис. 3.17), т. е.

$$Q_x = \oint N_{zs} \cos \beta \, ds = \oint N_{zs} \dot{x} \, ds;$$

$$Q_y = -\oint N_{zs} \sin \beta \, ds = \oint N_{zs} \dot{y} \, ds; \quad (3.88)$$

$$M_K = \oint N_{zs} r \, ds;$$

$$F_x = \oint p_x \, ds, \quad F_y = \oint p_y \, ds, \quad m_K = \oint (p_x y - p_y x) \, ds;$$

$$p_x = q_s \cos \beta - q_n \sin \beta = q_s \dot{x} + q_n \dot{y}; \quad (3.89)$$

$$p_y = -(q_s \sin \beta + q_n \cos \beta) = q_s \dot{y} - q_n \dot{x}.$$

Здесь были использованы формулы (3.83). В равенствах (3.88), (3.89) через Q_x , Q_y , M_K обозначены поперечные силы и крутящий момент, действующие в сечении (см. рис. 3.12), а через F_x , F_y , m_K — равнодействующие силы и момент поверхностных нагрузок q_s и q_n . Интегралы в (3.88), (3.89) вычисляются по замкнутому контуру (по средней линии) сечения. Приведенные к оси стержня силы Q_x , Q_y , F_x , F_y и моменты M_K , m_K должны быть связаны уравнениями, вытекающими из условий равновесия элемента оси (рис. 3.18):

$$Q'_x + F_x = 0; \quad Q'_y + F_y = 0; \quad M'_K + m_K = 0. \quad (3.90)$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по осевой координате z . Заметим, что из рис. 3.18 следуют еще три уравнения для продольной силы P и моментов M_x , M_y . Они являются следствиями уравнения (3.87) и будут получены далее. Решение уравнений (3.90) имеет следующий вид:

$$Q_x = Q_x^0 - \int_0^z F_x \, dz; \quad Q_y = Q_y^0 - \int_0^z F_y \, dz; \quad M_K = M_K^0 - \int_0^z m_K \, dz. \quad (3.91)$$

Здесь верхним индексом 0 обозначены силы и моменты, действующие в некотором начальном сечении $z = 0$.

Итак, уравнения равновесия (3.79) применительно к обсуждаемому стержню сводятся к равенствам (3.87), (3.91).

Рассмотрим физические соотношения (3.80). В силу принятых выше гипотез имеем

$$N_z = B_{11}e_z; N_{zs} = B_{33}\gamma_{zs}, \quad (3.92)$$

где для слоистого материала, образованного из k слоев с углами армирования $\pm \varphi_i$ и толщинами h_i в соответствии с результатами, полученными в § 1.5,

$$B_{11} = \sum_{i=1}^k A_{11}^{(i)} h_i; B_{33} = \sum_{i=1}^k A_{33}^{(i)} h_i \quad (3.93)$$

— жесткости соответственно при растяжении-сжатии в продольном направлении и сдвиге. Коэффициенты $A_{11}^{(i)}$, $A_{33}^{(i)}$ определяются равенствами (2.120).

И наконец, из геометрических соотношений (3.81) в соответствии с (3.92) существенными являются только первое и третье, т. е.

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \gamma_{zs} = \frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z}. \quad (3.94)$$

Продолжим построение теории тонкостенных композитных стержней и введем еще одну, последнюю гипотезу. Предположим, что продольная деформация e_z распределяется по сечению по закону плоскости, т. е. она линейно зависит от координат x , y (см. рис. 3.12):

$$e_z = w' + \theta_x' y + \theta_y' x. \quad (3.95)$$

Подставим e_z согласно (3.95) в первое соотношение (3.94) и, проинтегрировав его по z , найдем осевое перемещение

$$u_z = w(z) + \theta_x(z)y + \theta_y(z)x + f(x, y). \quad (3.96)$$

Из равенства (3.96) и рис. 3.12 можно заключить, что w определяет поступательное продольное смещение сечения, а θ_x и θ_y являются его углами поворота относительно осей Ox и Oy . Положительные углы соответствуют направлениям моментов M_x и M_y , показанным на рис. 3.12. Важную роль для оценки области применимости рассматриваемой теории играет произвольная функция

$f(x, y)$, которая появляется в результате интегрирования и определяет отклонение сече-

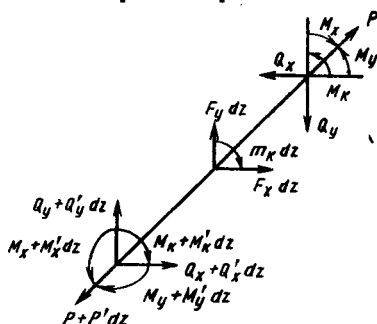


Рис. 3.18. Элемент оси стержня

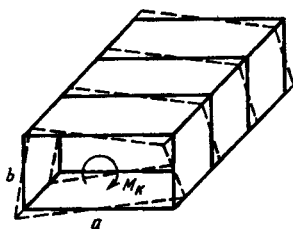


Рис. 3.19. Деформация сечений при кручении призматического тонкостенного стержня

ния от плоскости (закон плоских сечений соответствует в выражении для u_z трем первым членам). Такое отклонение называется депланацией сечения. Пример депланации сечений при кручении (при таком нагружении она, как правило, и проявляется) приведен на рис. 3.19.

Из равенства (3.96) следует, что отклонение от плоскости не зависит от координаты z , т. е. одинаково для всех сечений. Такая депланация называется свободной — согласно равенствам (3.92), (3.95) она не влияет на напряженное состояние. Однако, если закрепить сечение, устранив депланацию, в окрестности этого сечения возникают дополнительные напряжения. Эти напряжения не могут быть выявлены в рамках рассматриваемой здесь теории тонкостенных стержней, которая позволяет закрепить сечение только в отношении перемещений u , v , w и углов поворота θ_x , θ_y , θ_z . Оставляя обсуждение этого вопроса на дальнейшее (см. § 3.3), вернемся к соотношениям (3.92), (3.95), которые позволяют определить распределение продольных нормальных усилий по сечению, т. е.

$$p = N_z = B (w' + \theta'_x y + \theta'_y x), \quad (3.97)$$

где $B = B_{11}$.

Заменим функции w' , θ'_x , θ'_y , входящие в равенство (3.97), соответствующими обобщенными силовыми факторами — осевой силой P и изгибающими моментами M_x , M_y (см. рис. 3.12):

$$P = \oint p \, ds; \quad M_x = \oint p y \, ds; \quad M_y = \oint p x \, ds. \quad (3.98)$$

Подставляя в (3.98) напряжения (3.97), получим

$$\begin{aligned} P &= S w' + S_x \theta'_x + S_y \theta'_y; \\ M_x &= S_x w' + D_x \theta'_x + D_{xy} \theta'_y; \\ M_y &= S_y w' + D_{xy} \theta'_x + D_y \theta'_y, \end{aligned} \quad (3.99)$$

где

$$\begin{aligned} S &= \oint B \, ds; \quad S_x = \oint B y \, ds; \quad S_y = \oint B x \, ds; \\ D_x &= \oint B y^2 \, ds; \quad D_y = \oint B x^2 \, ds; \quad D_{xy} = \oint B xy \, ds. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Параметр S является осевой жесткостью стержня, а параметры S_x , S_y и D соответствуют статическим моментам и моментам инерции сечения. В частности, если по формулам

$$x_0 = S_y / S, \quad y_0 = S_x / S$$

ввести параметры, аналогичные координатам центра тяжести сечения, то из первого равенства (3.99) найдем

$$w' = \frac{P}{S} - (y_0 \theta'_x + x_0 \theta'_y). \quad (3.101)$$

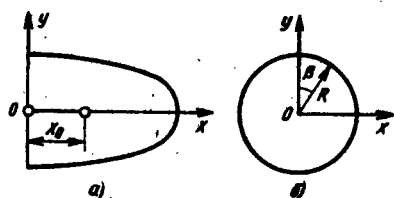


Рис. 3.20. Сечение с одной (а) и двумя осями симметрии (б)

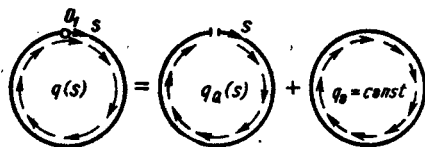


Рис. 3.21. Составляющие потока касательных напряжений

Подставляя (3.101) в последние два соотношения (3.99), разделим их относительно θ'_x и θ'_y , т. е.

$$\theta'_x = \frac{k}{D_x^0} (\bar{M}_x - n_y \bar{M}_y); \quad \theta'_y = \frac{k}{D_y^0} (\bar{M}_y - n_x \bar{M}_x). \quad (3.102)$$

В равенствах (3.102) введены следующие обозначения:

$$k = \frac{1}{1 - n_x n_y}, \quad n_x = \frac{D_{xy}^0}{D_x^0}, \quad n_y = \frac{D_{xy}^0}{D_y^0}; \quad (3.103)$$

$$\bar{M}_x = M_x - y_0 P, \quad \bar{M}_y = M_y - x_0 P;$$

$$D_x^0 = D_x - y_0^2 S, \quad D_y^0 = D_y - x_0^2 S, \quad D_{xy}^0 = D_{xy} - x_0 y_0 S. \quad (3.104)$$

Равенства (3.104) аналогичны формулам для моментов инерции сечения относительно центральных осей. Окончательно с учетом (3.101), (3.102) выражение для продольных усилий (3.97) принимает вид

$$p = B(s) \left[\frac{P}{S} + k \left(\frac{\bar{M}_x}{D_x^0} \bar{y} + \frac{\bar{M}_y}{D_y^0} \bar{x} \right) \right], \quad (3.105)$$

где

$$\bar{x} = x - x_0 - n_x (y - y_0); \quad \bar{y} = y - y_0 - n_y (x - x_0). \quad (3.106)$$

Полученные результаты соответствуют общей форме сечения. Если оно имеет одну ось симметрии, например ось Ox (рис. 3.20, а), интегралы (3.100), включающие y в первой степени, обращаются в нуль, т. е. $S_x = 0$, $D_{xy} = 0$. Тогда $y_0 = 0$, $D_{xy}^0 = 0$, $D_x^0 = D_x$, $n_x = n_y = 0$, $k = 1$, и равенство (3.105) упрощается следующим образом:

$$p = B \left[\frac{P}{S} + \frac{M_x}{D_x} y + \frac{\bar{M}_y}{D_y^0} (x - x_0) \right].$$

Для сечения, имеющего две оси симметрии (рис. 3.20, б), дополнительно $S_y = 0$, $x_0 = 0$, $D_y^0 = D_y$ и

$$p = B \left(\frac{P}{S} + \frac{M_x}{D_x} y + \frac{M_y}{D_y} x \right).$$

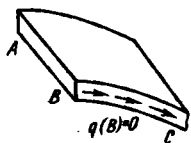


Рис. 3.22. Элемент стержня со свободным продольным краем

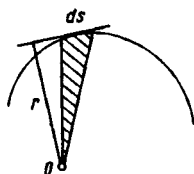


Рис. 3.23. К определению секториальной площади

В частности, для круглого стержня (см. рис. 3.20, б) при $B = \text{const}$ имеем $x = R \sin \beta$, $y = R \cos \beta$, $S = 2\pi BR$, $D_x = D_y = \pi BR^3$ и

$$p = \frac{1}{2\pi R} \left[P + \frac{2}{R} (M_x \cos \beta + M_y \sin \beta) \right].$$

Рассмотрим определение касательных усилий N_{zs} (см. рис. 3.13). В теории тонкостенных стержней по традиции эти усилия обозначаются через q и называются потоком касательных напряжений. Как будет видно из дальнейшего (см. § 3.4), это название имеет определенный физический смысл. Обозначая в уравнении равновесия (3.87) $N_z = p$, $N_{zs} = q$ и интегрируя его по s , получим

$$q = - \int_0^s \frac{\partial p}{\partial z} ds + q_0(z). \quad (3.107)$$

Здесь $q_0 = q(s=0)$. Ввиду того, что контур сечения является замкнутым, для вычисления интеграла в формуле (3.107) необходимо выбрать начало отсчета координаты s (рис. 3.21), причем произвольность выбора этой точки компенсируется потоком q_0 . Выражение (3.107) может быть переписано в виде

$$q = q_Q + q_0, \quad (3.108)$$

где

$$q_Q = - \int_0^s \frac{\partial p}{\partial z} ds. \quad (3.109)$$

Поскольку $q_Q(s=0) = 0$, а q_0 не зависит от s , равенство (3.108) допускает полезную физическую интерпретацию, иллюстрируемую на рис. 3.21 и основанную на том, что в стержне с продольным разрезом поток касательных напряжений на краю сечения обращается в нуль. Действительно, в силу парности касательных напряжений поток, действующий по краю BC (рис. 3.22), равен нулю в точке B , если продольный край AB свободен от нагрузки. Таким образом, при вычислении потока q_Q удобно считать, что контур условно разрезан в точке O_1 (см. рис. 3.21). Тогда постоянный поток q_0 можно считать компенсирующим этот условный разрез.

Найдем поток q_Q . Прежде всего, в силу отмеченного выше, при полном обходе контура он должен обратиться в нуль в точке O_1 (см. рис. 3.21), т. е.

$$\oint \frac{\partial p}{\partial z} ds = 0.$$

Подставляя сюда p (3.105) и учитывая, что согласно равенствам (3.104), (3.106)

$$\oint B \bar{y} ds = \oint B \bar{x} ds = 0,$$

получим

$$P' = 0. \quad (3.110)$$

Это уравнение может быть также получено как условие равновесия элемента оси стержня (см. рис. 3.18) в продольном направлении. С учетом (3.110) результат подстановки (3.105) в (3.109) можно записать в виде

$$q_Q = -k \left[\frac{M'_x}{D^0_x} \bar{S}_x(s) + \frac{M'_y}{D^0_y} \bar{S}_y(s) \right], \quad (3.111)$$

где

$$\bar{S}_x(s) = \int_0^s B \bar{y} ds; \quad \bar{S}_y(s) = \int_0^s B \bar{x} ds.$$

Функции $\bar{S}_x(s)$ и $\bar{S}_y(s)$ соответствуют статическим моментам части сечения, отсекаемой от разреза (см. рис. 3.21), относительно осей Ox и Oy . Найдем поперечные силы (3.88). Учитывая (3.108), а также очевидные равенства $\oint \dot{x} ds = \oint \dot{y} ds = 0$, получим

$$Q_x = \oint q \dot{x} ds = \oint q_Q \dot{x} ds;$$

$$Q_y = \oint q \dot{y} ds = \oint q_Q \dot{y} ds.$$

Подставляя сюда q_Q из выражения (3.111), используя операцию интегрирования по частям и формулы (3.103), т. е.

$$\oint \dot{x} ds \int_0^s B \bar{y} ds = - \oint B x \bar{y} ds = - (D^0_{xy} - n_y D^0_y) = 0;$$

$$\oint \dot{x} ds \int_0^s B \bar{x} ds = - \oint B x \bar{x} ds = - D^0_y (1 - n_x n_y),$$

окончательно получим

$$Q_x = M'_y; \quad Q_y = M'_x. \quad (3.112)$$

Уравнения (3.112) следуют также и из условий равновесия элемента оси стержня (см. рис. 3.18). Интегрируя их, найдем

$$M_y = M^0_y + \int_0^z Q_x dz; \quad M_x = M^0_x + \int_0^z Q_y dz. \quad (3.113)$$

Здесь индексом 0 отмечены моменты, действующие в некотором начальном сечении $z = 0$, а поперечные силы определяются равенствами (3.91).

С учетом уравнений (3.112) выражение (3.111) принимает вид

$$q_Q = -k \left[\frac{Q_y}{D_x^0} \bar{S}_x(s) + \frac{Q_x}{D_y^0} \bar{S}_y(s) \right]. \quad (3.114)$$

Таким образом, составляющая q_Q порождается поперечными силами, которые определяются выражениями (3.91). Поток q из (3.108) в сечении должен сводиться также к крутящему моменту (3.88), т. е.

$$M_K = \oint q r ds.$$

Здесь r определяется первой формулой (3.85). Подставляя поток (3.108), получим

$$M_K = q_0 \oint r ds + \oint q_Q r ds. \quad (3.115)$$

Первый интеграл здесь находится с помощью рис. 3.23. Величина $d\omega = r ds$ называется элементарной секториальной площадью, которая равна удвоенной площади заштрихованного треугольника. При полном обходе замкнутого контура найдем

$$\oint r ds = 2F,$$

где F — площадь, ограниченная контуром сечения (его средней линией). Из равенства (3.115) получаем

$$q_0 = \frac{1}{2F} (M_K - \oint q_Q r ds). \quad (3.116)$$

Рассмотрим один частный случай — чистое кручение тонкостенного стержня с замкнутым контуром сечения. Принимая $Q_x = Q_y = 0$, из равенств (3.114) и (3.116) имеем: $q_Q = 0$ и

$$q_0 = M_K / 2F. \quad (3.117)$$

Эта формула известна в строительной механике как формула Р. Бредта. Она позволяет определить поток касательных напряжений при свободном кручении стержня с произвольным замкнутым контуром сечения. Например, в горизонтальных панелях и вертикальных стенках кессона, показанного на рис. 3.19, будет действовать поток $q_0 = M_K / 2ab$. Окончательно из равенств (3.108), (3.114) и (3.116) получим следующее выражение для потока касательных напряжений:

$$q = Q_x F_x(s) + Q_y F_y(s) + \frac{M_K}{2F}, \quad (3.118)$$

где

$$F_x(s) = -\frac{k}{D_y^0} \left[\bar{S}_y(s) - \frac{1}{2F} \oint \bar{S}_y(s) r ds \right];$$

$$F_y(s) = -\frac{k}{D_x^0} \left[\bar{S}_x(s) - \frac{1}{2F} \oint \bar{S}_x(s) r ds \right].$$

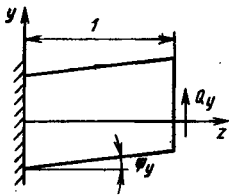


Рис. 3.24. Сдвиг элемента стержня единичной длины

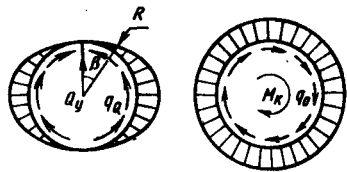


Рис. 3.25. Составляющие потока касательных напряжений, действующих в сечении круглого стержня

Деформация сдвига определяется из закона Гука (3.92), который представим в виде

$$\gamma_{zs} = q/C, \quad (3.119)$$

где $C = B_{33}$ — сдвиговая жесткость стенки. Отметим, что деформация сдвига может быть найдена и из второго геометрического соотношения (3.94). Подставляя в него перемещения (3.86), (3.96), получим

$$\gamma_{zs} = \dot{x}(u' + \theta_y) + \dot{y}(v' + \theta_x) + r\dot{\theta}_K + \dot{f}(x, y). \quad (3.120)$$

В связи с тем, что при построении теории были использованы некоторые дополнительные предположения о распределении перемещений по контуру сечения, деформация (3.120) в общем случае не совпадает с (3.119). Такое противоречие является вполне естественным, оно проявлялось и при построении общей теории в § 2.3, где частично устранилось осреднением сдвиговых напряжений и деформаций по толщине материала. Используем и здесь этот прием, введя операцию энергетического осреднения по сечению. Заметим, что если исключить из рассмотрения функцию $\dot{f}(x, y)$, соответствующую, как было показано выше, деформации сечения и не определяемую в рамках обсуждаемой теории, то деформация (3.120) выражается через три функции переменной z . Две из них

$$\psi_x = u' + \theta_y, \quad \psi_y = v' + \theta_x \quad (3.121)$$

являются средними углами сдвига и аналогичны углу ψ , входящему в равенства (3.10), которые определяли распределение продольного перемещения по высоте балки, рассматривавшейся в § 3.1. Третья функция — $\dot{\theta}_K$ соответствует углу поворота сечения (приходящемуся на единицу длины) вокруг продольной оси. Запишем потенциальную энергию деформаций сдвига элемента стержня единичной длины (рис. 3.24)

$$U = \frac{1}{2} \oint q \gamma_{zs} ds = \frac{1}{2} \oint \frac{q^2}{C} ds. \quad (3.122)$$

В результате подстановки потока (3.118) в правую часть (3.122) энергию U можно выразить через Q_x , Q_y и M_K . Как известно, согласно теореме Кастильяно производная от потенциальной

энергии деформации по обобщенной силе равна соответствующему обобщенному перемещению, т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial Q_x} = \psi_x; \quad \frac{\partial U}{\partial Q_y} = \psi_y; \quad \frac{\partial U}{\partial M_K} = \theta'_K.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}\psi_x &= c_x Q_x + c_{xy} Q_y + c_{xK} M_K; \\ \psi_y &= c_{yx} Q_x + c_y Q_y + c_{yK} M_K; \\ \theta'_K &= c_{Kx} Q_x + c_{Ky} Q_y + c_K M_K,\end{aligned}\tag{3.123}$$

$$\text{где } c_x = \oint F_x^2 \frac{ds}{C}; \quad c_{xy} = c_{yx} = \oint F_x F_y \frac{ds}{C}; \quad c_y = \oint F_y^2 \frac{ds}{C}; \quad c_{xK} = c_{Kx} = \frac{1}{2F} \oint F_x \frac{ds}{C}; \quad c_{yK} = c_{Ky} = \frac{1}{2F} \oint F_y \frac{ds}{C}; \quad c_K = \frac{1}{4F^2} \oint \frac{ds}{C}.$$

Если сечение имеет одну ось симметрии, например Ox (см. рис. 3.20, а), то $c_{xy} = c_{yx} = 0$ и $c_{xK} = c_{Kx} = 0$, а при наличии двух осей симметрии (см. рис. 3.20, б) дополнительно $c_{yK} = c_{Ky} = 0$, и равенства (3.123) принимают следующий вид:

$$\psi_x = c_x Q_x; \quad \psi_y = c_y Q_y; \quad \theta'_K = c_K M_K.$$

В частности, для круглого стержня, нагруженного силой Q_y или крутящим моментом M_K (рис. 3.25), $r = R$, $F = \pi R^2$, $\bar{S}_x = BR^3 \sin \beta$ и

$$q_Q = -\frac{Q_y}{\pi R} \sin \beta, \quad q_0 = \frac{M_K}{2\pi R^3}, \quad \psi_y = \frac{Q_y}{\pi RC}, \quad \theta'_K = \frac{M_K}{2\pi R^3 C}.\tag{3.124}$$

Потоки касательных напряжений q_Q и q_0 показаны на рис. 3.25. Заметим, что в стержне с круговым сечением депланация отсутствует и равенства (3.119), (3.120) дают для деформации сдвига один и тот же результат $\gamma_{zs} = -\psi_y \sin \beta + R\theta'_K$. В общем случае, как уже отмечалось, эти результаты не совпадают, и при расчетах следует руководствоваться формулой (3.119).

Таким образом, обсуждаемая теория тонкостенных композитных стержней в основном построена. Соотношения (3.91), (3.110), (3.113) позволяют найти силы и моменты, действующие в сечении (заметим, что условия закрепления и нагружения стержня по концам, как правило, таковы, что величины с индексом 0 являются известными), равенства (3.105) и (3.118) определяют нормальные и касательные усилия p и q , формулы (3.95), (3.119) — продольную и сдвиговую относительные деформации ϵ_z и γ_{zs} . В результате интегрирования по z соотношений (3.101), (3.102) и последнего равенства (3.123) можно найти осевое смещение w и углы поворота θ_x , θ_y , θ_K сечения. Подстановка ψ_x и ψ_y из первых двух равенств

Рис. 3.26. К определению центра изгиба сечения

(3.123) в соотношения (3.121) и их интегрирование по z позволяет получить прогибы оси стержня $u(z)$ и $v(z)$ в плоскостях xz и yz .

Для оценки прочности стержня необходимо знать напряжения в слоях композита.

Для этого следует воспользоваться результатами, полученными в § 1.5, в частности, по формулам, аналогичным (1.26), определяются деформации слоя:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(i)} &= \varepsilon_z \cos^2 \varphi_i \pm \gamma_{zs} \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\ \varepsilon_2^{(i)} &= \varepsilon_z \sin^2 \varphi_i \mp \gamma_{zs} \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\ \varepsilon_{12}^{(i)} &= \mp \varepsilon_z \sin 2\varphi_i + \gamma_{zs} \cos 2\varphi_i \end{aligned} \quad (3.125)$$

(знаки $\pm$ относятся к симметричным элементарным слоям с углами $\pm \varphi_i$).

С помощью закона Гука находятся напряжения в слоях:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(i)} &= \bar{E}_1^{(i)} [\varepsilon_1^{(i)} + \mu_{12}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)}]; \\ \sigma_2^{(i)} &= \bar{E}_2^{(i)} [\varepsilon_2^{(i)} + \mu_{21}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)}]; \\ \tau_{12}^{(i)} &= G_{12}^{(i)} \varepsilon_{12}^{(i)}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

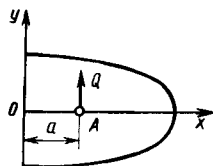
Установим положение одной важной точки сечения — центра изгиба, который обладает следующим свойством: если поперечная сила проходит через центр изгиба, стержень не закручивается. Пусть точка A есть центр изгиба (рис. 3.26). Тогда $\theta_k = 0$ и (см. рис. 3.12) $Q_y = Q$, $Q_x = 0$, $M_k = -aQ$. В результате из третьего равенства (3.123) найдем координату центра изгиба

$$a = 2F \oint \frac{F_y}{C} ds / \oint \frac{ds}{C}.$$

Полученные выше соотношения могут быть использованы для расчета стержней, подкрепленных продольными ребрами (рис. 3.27, а). В этом случае коэффициенты жесткости типа (3.100) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} S_p &= S + \sum_{j=1}^m \Delta B_j; \quad S_{xp} = S_x + \sum_{j=1}^m \Delta B_j y_j; \\ S_{yp} &= S_y + \sum_{j=1}^m \Delta B_j x_j; \quad D_{xp} = D_x + \sum_{j=1}^m \Delta B_j y_j^2; \\ D_{yp} &= D_y + \sum_{j=1}^m \Delta B_j x_j^2; \quad D_{xyp} = D_{xy} + \sum_{j=1}^m \Delta B_j x_j y_j. \end{aligned}$$

Здесь первые слагаемые соответствуют обшивке и вычисляются согласно (3.100); m — число ребер; x_j , y_j — координаты сечений



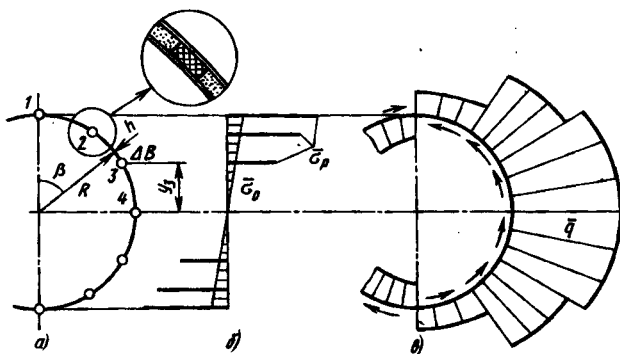


Рис. 3.27. Распределение относительных нормальных $\bar{\sigma}$ (б) и потока касательных $\bar{q}$ (в) напряжений по контуру сечения (а) подкрепленного стержня

ребер (см. рис. 3.27); $\Delta B_j = f_j E_j$ — жесткости ребер (f_j — площадь сечения, E_j — модуль упругости). Напряжения в ребрах определяются равенством, аналогичным (3.105):

$$\sigma_r^I = E_j \left[\frac{P}{S_p} + k \left(\frac{\bar{M}_x}{D_{xp}^0} \bar{y} + \frac{\bar{M}_y}{D_{yp}^0} \bar{x} \right) \right].$$

Для потока касательных напряжений в обшивке сохраняются формулы (3.118), только при вычислении функций $\bar{S}_x(s)$, $\bar{S}_y(s)$, входящих в (3.111), учитываются приращения жесткостей ΔB_j .

В качестве примера рассмотрим подкрепленную цилиндрическую оболочку (см. рис. 3.27, а) радиуса $R = 0,1$ м, образованную из трехслойной обшивки с легким заполнителем и несущими слоями из углепластика (см. табл. 1.4), каждый из которых состоит из спиральных слоев с углами армирования $\pm 45^\circ$ и суммарной толщиной $0,6 \times 10^{-3}$ м и кольцевых слоев с толщиной $0,3 \times 10^{-3}$ м. Оболочка усилена 12-ю одинаковыми ребрами из боропластика с площадью сечения $f = 10^{-4}$ м². В рассматриваемом сечении действуют изгибающий момент $M_x = M$ и поперечная сила $Q_y = Q$ (см. рис. 3.12). В результате расчета получаем $B = 65,5 \times 10^{-3}$ ГПа·м и $C = 58,9 \times 10^{-3}$ ГПа·м, $D_{xp}^0 = 1,84 \times 10^{-3}$ ГПа·м⁴ и следующие выражения для напряжений в обшивке и ребрах:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{pR^3}{hM} = 0,198 \cos \beta; \quad \bar{\sigma}_r^I = \frac{\sigma_p^I R^3}{M} = 1,14 \cos \beta_j.$$

Распределение напряжений по сечению показано на рис. 3.27, б. Найдем поток касательных напряжений. Функции $\bar{S}_{xp}(s)$ на участках сечения вычисляются по формулам (координата s отсчитывается по часовой стрелке от точки 1, причем для правой части

контура в силу симметрии учитывается половина жесткости ребра, проходящего через точку 1):

$$\bar{S}_{xp} (0 = \beta_1 < \beta < \beta_2) = BR^2 \sin \beta + \frac{1}{2} \Delta B y_1;$$

$$\bar{S}_{xp} (\beta_2 < \beta < \beta_3) = BR^2 \sin \beta + \Delta B \left(\frac{1}{2} y_1 + y_2 \right);$$

$$\bar{S}_{xp} (\beta_3 < \beta < \beta_4 = 90^\circ) = BR^2 \sin \beta + \Delta B \left(\frac{1}{2} y_1 + y_2 + y_3 \right).$$

В результате получим

$$\bar{q} = \frac{qR}{Q} = - \frac{R}{D_{xp}^0} \bar{S}_{xp}.$$

Знак минус свидетельствует о том, что направление потока противоположно направлению отсчета $\bar{S}_{xp}$. Распределение потока по контуру сечения рассматриваемой оболочки показано на рис. 3.27, в.

В заключение сделаем одно замечание. Построенная выше теория, по существу, основывается на двух основных гипотезах — гипотезе о недеформируемости контура сечения, определяющей распределение перемещений в виде (3.84), и предположении о распределении продольных деформаций по закону плоскости (3.95). Если вторая гипотеза является традиционной для рассматриваемых элементов, то первая нуждается в дополнительном обсуждении. Ее правомерность представляется несомненной только в тех случаях, когда жесткость контура сечения обеспечивается специальными конструктивными элементами — стенками, нервюрами, шпангоутами и другими элементами поперечного набора, а также сплошным легким заполнителем (он может быть использован в качестве оправки при изготовлении композитных стержней малого диаметра). Если стержень представляет собой гладкую и тонкую цилиндрическую оболочку, то предположение о бесконечно большой кольцевой изгибной жесткости стенки представляется не вполне обоснованным. В связи с этим рассмотрим другой крайний случай и вместо условий, приводящих к равенствам (3.82), примем $D_{22} = 0$, т. е. будем считать, что контур сечения может свободно изгибаться в своей плоскости. Если сохранить все предшествующие упрощения, касающиеся продольных жесткостей, то исходные уравнения (3.79), (3.80), (3.81) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial N_{sz}}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{zs}}{\partial z} = 0; \quad \frac{N_s}{R_s} = 0; \quad (3.127)$$

$$N_z = B_{11}e_z + B_{12}e_s; \quad N_s = B_{21}e_z + B_{22}e_s; \quad N_{zs} = N_{sz} = B_{33}\gamma_{zs}; \quad (3.128)$$

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad e_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{R_s}; \quad \gamma_{zs} = \frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z}. \quad (3.129)$$

Ввиду того, что контур сечения не обладает изгибной жесткостью, поверхностные нагрузки приняты равными нулю. Урав-

$B/h, \text{ГПа}$

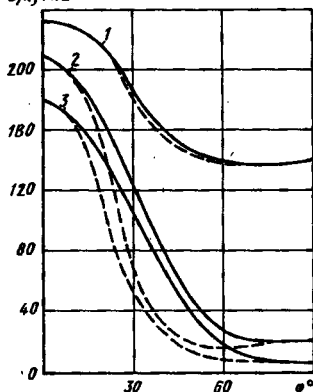


Рис. 3.28. Зависимость продольной жесткости стенки от угла армирования для стержней из бороалюминия (1), боропластика (2) и углепластика (3) с абсолютно жестким (сплошные линии) и абсолютно гибким (пунктирные линии) контуром сечения

нения (3.127)–(3.129) соответствуют безмоментной теории цилиндрических оболочек и будут рассматриваться далее в гл. 5. Остановимся здесь только на особенностях, отличающих их от предшествующих уравнений. Из второго и третьего равенств (3.127) следует $N_s = 0$ и $N_{zs} = N_{zs}(s)$, что является следствием отсутствия поверхностных нагрузок. Физические соотношения (3.128) при $N_s = 0$ позволяют получить

$$N_z = \left(B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}} \right) \varepsilon_z; \quad \varepsilon_s = -\frac{B_{21}}{B_{22}} \varepsilon_z; \quad N_{zs} = B_{23} \gamma_{zs}. \quad (3.130)$$

Сравнивая (3.130) с (3.92), можно заключить, что учет податливости контура снижает продольную жесткость и не изменяет сдвиговую. Принимая далее распределение (3.95) для ε_z , можно получить прежнее выражение (3.105) для продольных усилий, в котором следует принять

$$B = B_{11} - (B_{12}^2/B_{22}). \quad (3.131)$$

Выражая из первого уравнения равновесия (3.127) сдвиговое усилие, можно получить также формулу (3.118) для потока касательных напряжений. И наконец, из третьего геометрического соотношения, куда подставляется γ_{zs} согласно (3.130), а u_z из (3.96), находится контурное перемещение u_s , а из второго — нормальное перемещение u_n .

Таким образом, основное отличие рассматриваемого варианта теории заключается в том, что вместо $B = B_{11}$ используется соотношение (3.131). Если ввести упругие постоянные — модуль упругости и коэффициенты Пуассона и воспользоваться формулами (1.29), получим

$$B_{11} = \frac{E_z}{1 - \mu_{zs}\mu_{sz}}; \quad B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}} = E_z. \quad (3.132)$$

В металлических стержнях, у которых $\mu^2 = 0,09$, различия между формулами (3.132), определяющими верхнюю и нижнюю границы жесткости реального стержня, как правило, вообще не делается. Однако у композитных материалов произведение коэффициентов Пуассона, а следовательно, и различие между жесткостями, соответствующими абсолютно жесткому и абсолютно гибкому контуру сечения, может оказаться значительным, что и показано на рис. 3.28. Следует отметить, что в стержнях, предназна-

ченных для восприятия осевых усилий, углы армирования не превосходят $10-15^\circ$, а для таких углов различие между сплошными и штриховыми линиями невелико.

Приведем результаты расчета и экспериментального исследования тонкостенных стержней с круговым сечением, изготовленных из стеклопластика и образованных из спиральных слоев с углами армирования $\pm 36^\circ$ и суммарной толщиной $0,62 \times 10^{-3}$ м и кольцевых слоев с толщиной $0,6 \times 10^{-3}$ м. Радиус стержня $R = 0,1$ м. Стержень нагружался осевой сжимающей силой и крутящим моментом. Диаграммы деформирования при осевом сжатии приведены на рис. 3.29. Теоретические результаты, соответствующие жесткому (сплошные линии) и гибкому (штриховые линии) контуру, получены по формулам (3.95), (3.101), (3.130) (при $\theta'_x = \theta'_y = 0$ и замене P на $-P$). Из графика следует, что в рассматриваемом тонкостенном стержне решение, основанное на предположении о малой изгибной жесткости контура сечения, лучше согласуется с экспериментом, чем результат, соответствующий гипотезе о жестком контуре. В случае кручения решение определяется последним равенством (3.124) и хорошо подтверждается экспериментальными результатами (рис. 3.30).

Если учитывается податливость контура сечения стержня, формулы (3.125) необходимо заменить на следующие:

$$\varepsilon_1^{(i)} = \varepsilon_z \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_s \sin^2 \varphi_i \pm \gamma_{zs} \sin \varphi_i \cos \varphi_i;$$

$$\varepsilon_2^{(i)} = \varepsilon_z \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_s \cos^2 \varphi_i \mp \gamma_{zs} \sin \varphi_i \cos \varphi_i;$$

$$\varepsilon_{12}^{(i)} = \pm (\varepsilon_s - \varepsilon_z) \sin 2\varphi_i + \gamma_{zs} \cos 2\varphi_i.$$

Здесь деформация ε_s определяется вторым равенством (3.130). Напряжения в слоях находятся с помощью закона Гука (3.126).

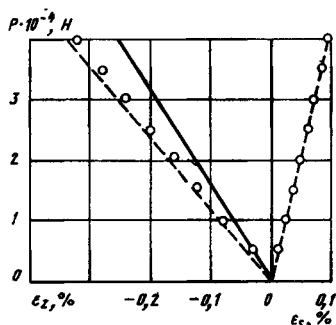


Рис. 3.29. Зависимость осевой (ε_z) и контурной (ε_s) деформации круглого стержня от осевой сжимающей силы P : — — — решение, соответствующее жесткому контуру; - - - решение, соответствующее гибкому контуру; O — результаты измерений

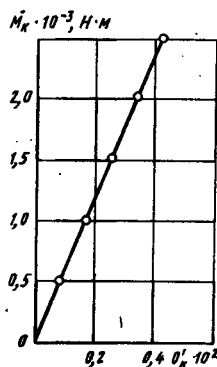


Рис. 3.30. Сравнение теоретической диаграммы деформирования стержня при кручении (—) с экспериментальными результатами (O)

§ 3.3. Особенности расчета тонкостенных стержней с открытым контуром сечения

Композиты являются перспективными материалами для изготовления профилей — тонкостенных стержней с открытым контуром сечения. Они получают, как отмечалось в § 1. 2, методом протяжки (пултрузии) или формованием из элементов, изготовленных выкладкой или намоткой. На рис. 3.31 показаны сечения профилей, получаемых из намотанной заготовки квадратного сечения.

В предыдущем разделе были рассмотрены стержни с замкнутым контуром поперечного сечения, причем это свойство сечения было впервые упомянуто при выводе выражения (3.107) для потока касательных напряжений. Все предшествующие результаты, включая формулу (3.105) для нормальных напряжений, остаются справедливыми. Итак, начнем анализ особенностей поведения стержней с открытым контуром сечения с равенства (3.107). Ввиду того, что рассматриваемый стержень имеет свободный продольный край (см. рис. 3.22), на котором отсутствуют касательные напряжения, поместим начало отсчета координаты s на этом краю. Тогда $q(s=0) = 0$, и в равенстве (3.107) $q_0 = 0$. Таким образом, согласно (3.108) $q = q_0$, и, как следует из соотношения (3.114), в открытом контуре

$$q_0 = -k \left[\frac{Q_y}{D_x^0} \bar{S}_x(s) + \frac{Q_x}{D_y^0} \bar{S}_y(s) \right]. \quad (3.133)$$

Причем интегрирование в формулах (3.100) и других, предполагавших интегрирование по замкнутому контуру, теперь осуществляется в пределах от 0 до s_1 (рис. 3.32). Таким образом, в открытом контуре отсутствует поток q_0 , определявшийся в замкнутом контуре равенствами (3.116) или (3.117), вытекающими из условия статической эквивалентности потока касательных напряжений крутящему моменту M_k . Т. е. в рамках рассматриваемой теории крутящий момент не может быть уравновешен потоком касательных напряжений, который согласно (3.133) однозначно определяется поперечными силами Q_x и Q_y . Более того, направления этих сил должны проходить через вполне определенную точку, которая называется центром изгиба и определяется из уравнения моментов. Рассмотрим стержень, нагруженный силой Q_y , проходящей через центр изгиба — точку А (рис. 3.32). Крутящий момент, создаваемый потоком касатель-

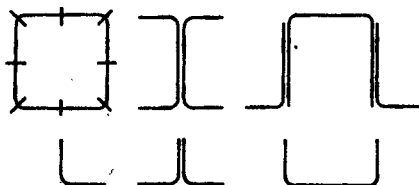


Рис. 3.31. Сечения стержней, которые могут быть получены из композитной заготовки, образованной методом намотки

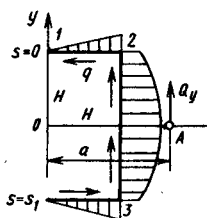


Рис. 3.32. Стержень с открытым контуром сечения

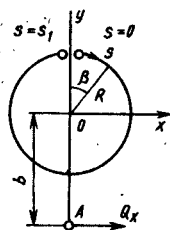


Рис. 3.33. Сечение круглого стержня с продольным разрезом

ных напряжений (3.133), определяется согласно (3.88) следующим образом (при $Q_x = 0$):

$$M_K = \int_0^{s_1} q r ds = -k \frac{Q_y}{D_x^0} \int_0^{s_1} \bar{S}_x(s) r ds. \quad (3.134)$$

С другой стороны, сила Q_y создает момент $M_K = -aQ_y$ (см. рис. 3.12, 3.32). Таким образом, из равенства (3.134) имеем

$$a = \frac{k}{D_x^0} \int_0^{s_1} \bar{S}_x(s) r ds. \quad (3.135)$$

В частности, для контура, показанного на рис. 3.32, имеем $r = H$, $D_x^0 = 2,67BH^3$ и на участках 1—2 и 2—3

$$\bar{S}_x = BHx, \quad \bar{S}_x = B(3H^2 - y^2)/2.$$

Из формулы (3.135) получим $a = 1,375H$. Аналогичным образом определяется и другая координата центра изгиба. Например, для контура, показанного на рис. 3.33,

$$M_K = -k \frac{Q_x}{D_y^0} \int_0^{s_1} \bar{S}_y(s) r ds = -Q_x b.$$

Отсюда

$$b = \frac{k}{D_y^0} \int_0^{s_1} \bar{S}_y(s) r ds. \quad (3.136)$$

Для рассматриваемого контура имеем: $k = 1$; $r = R$; $D_y^0 = \pi BR^3$;

$$\bar{S}_y = \int_0^s Bx ds = BR^2 \int_0^\beta \sin \beta d\beta = BR^2 (1 - \cos \beta)$$

и согласно (3.136) $b = 2R$. Центр изгиба открытого профиля всегда находится за пределами контура сечения или на контуре. Если этот контур имеет ось симметрии, то центр изгиба располагается

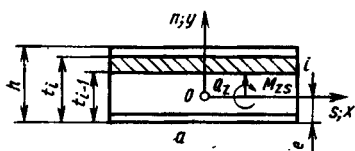


Рис. 3.34. Слоистый стержень прямоугольного сечения

на этой оси (но не совпадает с центром тяжести), а при двух осях симметрии он совпадает с точкой их пересечения (т. е. с центром тяжести).

Если сила не проходит через центр изгиба, уравнение моментов удовлетворить не удастся. Таким образом, изложенная выше теория не позволяет рассчитать стержень с открытым контуром сечения на

кручение. Тем не менее реальный стержень, естественно, может воспринимать крутящий момент, однако это связано с двумя эффектами — неравномерным распределением касательных напряжений по толщине стенки, вызывающим крутящие моменты, и возможным стеснением деформации сечения, которые эта теория не учитывает. Ниже обсуждается соответствующая модификация теории, позволяющая описать отмеченные эффекты.

Рассмотрим сначала свободное кручение, при котором условия закрепления стержня не препятствуют деформации его сечений. Из рис. 3.13 следует, что помимо касательных усилий N_{zs} , не уравновешивающих, как было показано выше, осевой крутящий момент, в сечении действуют еще два силовых фактора — крутящий момент M_{zs} и поперечная сила Q_z , которые и следует учесть, рассматривая кручение стержня с открытым контуром сечения. Как известно, в теории упругости крутильная жесткость тонкостенного стержня с открытым контуром сечения определяется на основе решения задачи о кручении полосы с сечением в форме вытянутого прямоугольника. Имея в виду использование этого приема, рассмотрим кручение слоистого стержня прямоугольного сечения (рис. 3.34). Основные уравнения могут быть получены из общих уравнений (3.79)—(3.81), упрощенных с учетом особенностей геометрии и поведения обсуждаемого стержня. Прежде всего, поскольку исследуется свободное кручение, примем равными нулю осевые нормальные напряжения. Тогда $N_z = 0$ и $M_z = 0$ (см. рис. 3.13). Из первого уравнения (3.79) при этом следует $N_{sz} = N_{sz}(z)$, и поскольку на продольных краях $N_{sz} = 0$ (см. рис. 3.34), то $N_{sz} = N_{zs} = 0$, т. е. касательные усилия в стержне отсутствуют. Будем считать контур сечения недеформируемым, т. е. положим $\varepsilon_s = 0$ и $\kappa_s = 0$. Тогда перемещения u_s и u_n (см. рис. 3.34) определяются равенствами (3.86), которые в данном случае ($x = s, y = 0, \dot{x} = 1, r = 0, \eta = -x$) принимают форму

$$u_s = u; u_n = v - \theta_r x. \quad (3.137)$$

В результате сделанных предположений первое уравнение равновесия (3.79) удовлетворяется тождественно, из второго, четвертого и пятого при необходимости можно определить N_s , M_s и Q_s (согласно рассматриваемым условиям нагружения в этих

уравнениях следует принять $q_s = q_n = 0$), а третье принимает вид

$$\frac{dM_{zs}}{dx} - Q_z = 0. \quad (3.138)$$

Для того чтобы обеспечить выполнение принятых гипотез, в физических соотношениях (3.80) следует принять $\varepsilon_z = 0$, $\kappa_z = 0$, $B_{zs} \rightarrow \infty$, $D_{zs} \rightarrow \infty$, $K_s \rightarrow \infty$. Тогда из последнего равенства (3.80) следует, что $\psi_s = 0$; существенными для дальнейшего являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} N_{zs} &= B_{zs}\gamma_{zs} + C_{zs}\chi_{zs} = 0; \\ M_{zs} &= C_{zs}\gamma_{zs} + D_{zs}\chi_{zs}; \\ Q_z &= K_z\psi_z. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Геометрические соотношения (3.81) в результате принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} u_z &= u_z(s); \quad \gamma_{zs} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_s}{\partial z}; \quad \chi_{zs} = \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + \frac{\partial \theta_s}{\partial z}; \\ \theta_z &= \theta_z(s) = \psi_s - \frac{\partial u_n}{\partial z}; \quad \theta_s = -\frac{\partial u_n}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Итак, обсуждаемая задача сводится к уравнениям (3.138)–(3.140).

Рассмотрим физические соотношения (3.139), в которых согласно равенствам (2.116), (2.123) и рис. 3.34 имеем:

$$\begin{aligned} B_{33} &= I_{33}^{(0)}; \quad C_{33} = I_{33}^{(1)} - eI_{33}^{(0)}; \quad D_{33} = I_{33}^{(2)} - 2eI_{33}^{(1)} + e^2I_{33}^{(0)}; \\ I_{33}^{(r)} &= \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{33}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) \quad (r = 0, 1, 2); \\ K_z &= h^3 \left[\sum_{i=1}^k \frac{t_i - t_{i-1}}{G_{zn}^{(i)}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Зададим координату поверхности приведения e из условия $C_{33} = 0$. Тогда из (3.141) получим:

$$B_{33} = I_{33}^{(0)}; \quad C_{33} = 0; \quad D_{33} = I_{33}^{(2)} - \frac{[I_{33}^{(1)}]^2}{I_{33}^{(0)}}. \quad (3.142)$$

В результате физические соотношения (3.139) дают

$$\gamma_{zs} = 0; \quad M_{zs} = D_{33}\chi_{zs}; \quad Q_z = K_z\psi_z. \quad (3.143)$$

Полагая во втором равенстве (3.140) $\gamma_{zs} = 0$, подставляя в него u_s согласно (3.137) и интегрируя по x , получим следующее распределение осевых перемещений:

$$u_s = w - u'x.$$

Из первого равенства (3.140) можно заключить, что w и u' не зависят от z , причем первый параметр определяет осевое смещение, а второй — поворот относительно оси y стержня как твердого тела. Закрепляя одно из сечений стержня, положим $w = 0$, $u' = 0$. Отсюда следует, что $u = \text{const}$, причем константа соответствует смещению стержня вдоль оси x , а v во втором равенстве (3.137) — смещению вдоль оси y . Закрепляя стержень от этих смещений, примем $u = 0$ и $v = 0$. Таким образом, перемещения точек оси x (или s) сечения стержня имеют вид

$$u_s = 0; u_n = -\theta_k x; u_z = 0. \quad (3.144)$$

Найдем продольные перемещения точек сечения, не лежащих на его оси. С этой целью подставим равенства (3.144) в выражения для углов поворота (3.140):

$$\theta_z = \psi_z + \theta'_k x; \theta_s = \theta_k. \quad (3.145)$$

Распределение осевого перемещения по толщине стенки определяется общими формулами (2.73), т. е. при $u = 0$, заменяя u_α на f и γ на y , получим

$$f = \theta_z y = (\psi_z + \theta'_k x) y. \quad (3.146)$$

Эта функция описывает свободную деформацию сечения. Подставляя углы поворота (3.145) в формулу для кручения χ_{zs} (3.140) и далее в (3.139), с учетом (3.142) запишем следующие соотношения упругости:

$$M_{zs} = D_{33} (\psi_z + 2\theta'_k x); Q_z = K_z \psi_z. \quad (3.147)$$

Здесь θ_k — угол закручивания. При подстановке (3.147) в уравнение равновесия (3.138) имеем:

$$\ddot{\psi}_z - k^2 \psi_z = 0,$$

где

$$k^2 = K_z / D_{33}. \quad (3.148)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\psi_z = C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx.$$

Ввиду того, что продольные края $x = \pm a/2$ свободны от касательных напряжений, на них должно выполняться условие $M_{zs} = 0$. Окончательно согласно равенствам (3.147) получим

$$M_{zs} = 2D_{33}\theta'_k \left(1 - \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} \lambda}\right); Q_z = -\frac{2K_z \operatorname{sh} kx}{k \operatorname{ch} \lambda} \theta'_k, \quad (3.149)$$

где $\lambda = ka/2$. Найдем суммарный осевой момент, создаваемый моментом и усилим из (3.149). Согласно рис. 3.12 и 3.34 имеем:

$$M_M = \int_{-a/2}^{a/2} M_{zs} dx = 2D_{33}a\theta'_k \left(1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda\right);$$

$$M_Q = - \int_{-a/2}^{a/2} Q_z x dx = -\frac{2}{k^3} K_z a \theta'_k \left(1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda\right).$$

С учетом обозначения (3.148)

$$M = M_M + M_Q = D_f \theta'_k, \quad (3.150)$$

где

$$D_f = 4D_{33}a \left(1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda\right) \quad (3.151)$$

— жесткость при свободном кручении. Для однородного (однослойного) стержня в выражении (3.141) для $I_{33}^{(r)}$ следует принять $t_0 = 0$, $t_1 = h$, $t_i = 0$ ($i \geq 2$). Тогда, учитывая, что $A_{33} = G_{zs}$, $D_{33} = G_{zs}h^3/12$, $K_z = G_{zn}h$, получим

$$D_f = cG_{zs}ah^3; \quad c = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda\right); \quad \lambda = \frac{a}{h} \sqrt{\frac{3G_{zn}}{G_{zs}}}.$$

Отметим, что задача о кручении однородного стержня прямоугольного сечения допускает точное решение [59], от которого приближенное решение, полученное выше, отличается тем, что при выводе исходных уравнений в § 2.3 осуществлялось осреднение деформации сдвига e_{zn} по толщине стенки. Это различие проявляется в выражении для коэффициента c , который в точном решении имеет следующий вид [59]:

$$c = \frac{32d^2}{\pi^4} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n^4} \left(1 - \frac{2d}{n\pi} \operatorname{th} \frac{n\pi}{2d}\right),$$

$$\text{где } d = \frac{a}{h} \sqrt{\frac{G_{zn}}{G_{zs}}}.$$

На рис. 3.35 представлено сравнение точных (точки) и приближенных (сплошные линии) зависимостей c от относительной толщины h/a и отношения $n = G_{zn}/G_{zs}$. Погрешность приближенного решения, равная для изотропного стержня квадратного сечения (т. е. при $n = 1$, $h/a = 1$) 7,8 %, быстро убывает при увеличении a/h и n . В частности, при $n = 1$ и $a/h > 2,5$ она не превышает 3 %, а при $a/h > 5$ — 1 %. Осевое смещение (3.146) с учетом полученного решения для ψ_z принимает вид

$$f = \theta'_k \left(\frac{2 \operatorname{sh} kx}{k \operatorname{ch} \lambda} + x \right) y.$$

Распределение f по сечению, M_{zs} и Q_z — по x для стержня с параметрами $n = 1$, $a/h = 5$ показано на рис. 3.36.

Для тонкостенного стержня, у которого $\lambda \gg 1$, вторым членом в скобках равенства (3.151) можно пренебречь, так как его значение мало по сравнению с единицей, и записать следующее приближенное выражение для крутильной жесткости:

$$D_f = 4D_{33}a. \quad (3.152)$$

В работе [59] получено точное решение для тонкостенного трехслойного стержня, состоящего из изотропных слоев с толщи-

ной h , причем крайние слои имеют модуль сдвига G_1 , а средний — G_2 . Соответствующее выражение для жесткости имеет вид

$$D_f = \frac{1}{3} (26G_1 + G_2) h^3. \quad (3.153)$$

Согласно равенствам (3.141) при $t_0 = 0$, $t_1 = h$, $t_2 = 2h$, $t_3 = 3h$ получим:

$$I_{33}^{(0)} = h(2G_1 + G_2); \quad I_{33}^{(1)} = \frac{3h^3}{2} (2G_1 + G_2); \quad I_{33}^{(2)} = \frac{h^3}{3} (20G_1 + 7G_2);$$

$$D_{33} = \frac{h^3}{12} (26G_1 + G_2).$$

Результат подстановки в (3.152) в точности совпадает с (3.153).

Из рис. 3.36 следует, что при переходе от формулы (3.151) к приближенному выражению (3.152) краевой эффект вблизи свободных продольных кромок стержня не учитывается, что соответствует предположению о равномерном распределении крутящего момента M_{zs} по координате x . Если контур сечения тонкостенного стержня представляет собой систему m прямых линий, то, пренебрегая аналогичным образом краевыми эффектами в местах сопряжения участков, можно обобщить равенство (3.152) следующим образом:

$$D_f = 4 \sum_{j=1}^m D_{33}^{(j)} a_j. \quad (3.154)$$

Здесь $D_{33}^{(j)}$ и a_j — жесткость стенки на j -м участке контура и его длина. Например, для стержня, сечение которого показано на рис. 3.32, имеем: $a_1 = H$, $a_2 = 2H$, $a_3 = H$ и $D_f = 16D_{33}H$. Формулу (3.154) можно далее обобщить на криволинейный открытый контур:

$$D_f = 4 \int D_{33}(s) ds. \quad (3.155)$$

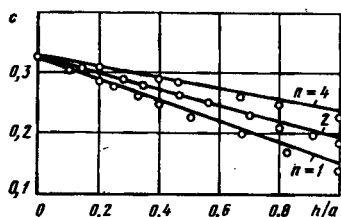


Рис. 3.35. Точные (○) и приближенные (—) зависимости коэффициента s крутильной жесткости от относительной толщины стержня и параметра $n = G_{zn}/G_{zs}$

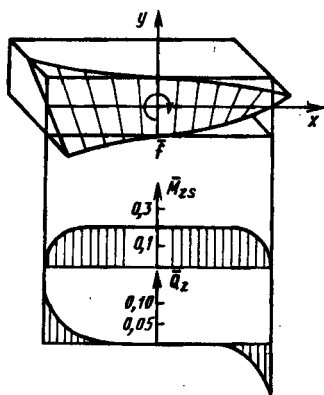


Рис. 3.36. Характер деформации сечения и распределении крутящего момента $\bar{M}_{zs}$ и поперечной силы $\bar{Q}_z$ по ширине стержня прямоугольного сечения ($\bar{f} = \frac{f}{ah\theta'_h}$, $\bar{M}_{zs} = \frac{M_{zs}}{D_{33}\theta'_h}$, $\bar{Q}_z = \frac{Q_z}{K_z a \theta'_h}$)

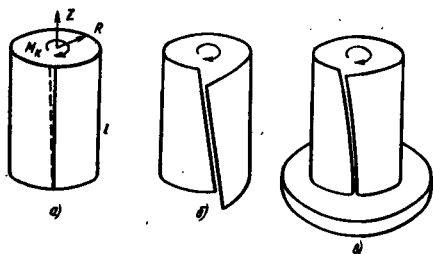


Рис. 3.37. Деформации круглого стержня с замкнутым (а) и открытым (б, в) контурами сечения при свободном (б) и стесненном (в) кручении

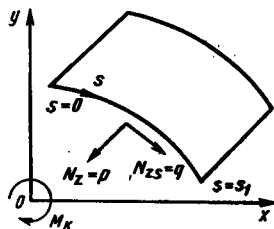


Рис. 3.38. Элемент стержня с открытым контуром сечения

Здесь интеграл распространяется на всю длину контура. Например, для контура, показанного на рис. 3.33, получим $D_f = 8\pi R D_{33}$. Для стержня из однородного материала с модулем сдвига G_{zs} при толщине стенки h имеем $D_{33} = G_{zs} h^3 / 12$ и $D_f = 2\pi G_{zs} R h^3 / 3$. Для трубы без разреза из последнего равенства (3.124) при $C = G_{zs} h$ крутильная жесткость $D = 2\pi G_{zs} R^3 h$, т. е. $D_f / D = h^3 / 3R^3$. Таким образом, крутильная жесткость тонкостенных профилей с открытым контуром сечения значительно меньше жесткости стержней такой же массы с замкнутым контуром сечения. Различие в поведении сравниваемых стержней иллюстрируется рис. 3.37.

Рассмотрим теперь стесненное кручение, при котором условия закрепления стержня препятствуют свободной деформации его сечений (см. рис. 3.37, в). В результате в стержне возникают осевые нормальные усилия, поток касательных напряжений (рис. 3.38) и, как следствие, повышается его крутильная жесткость. Для получения соответствующих расчетных соотношений сохраним гипотезы о недеформируемости контура сечения ($\epsilon_s = 0$, $\kappa_s = 0$) и отсутствии деформации сдвига ($\gamma_{zs} = 0$), принятые выше при анализе свободного кручения, и учтем дополнительно осевые усилия N_z , которые в задаче о свободном кручении считались равными нулю. Перемещения жесткого контура должны удовлетворять уравнениям (3.82), т. е. иметь форму (3.86):

$$u_s = u\dot{x} + v\dot{y} + r\dot{\theta}_K; \quad u_n = -u\dot{y} + v\dot{x} + \eta\dot{\theta}_K, \quad (3.156)$$

а условие отсутствия деформации сдвига согласно (3.94) дает

$$\frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial s} = 0.$$

Подставляя сюда u_s с помощью (3.156) и интегрируя по s , получим

$$u_s = w(z) - u'x - v'y - \theta_K' \int_0^s r ds. \quad (3.157)$$

Учитывая использованную выше в равенстве (3.115) элементарную секториальную площадь $d\omega = rds$, введем секториальную характеристику сечения

$$\omega = \int_0^s r ds. \quad (3.158)$$

Распределение продольных перемещений (3.157) аналогично обсуждавшемуся ранее распределению (3.96) — функция $w(z)$ определяет осевое перемещение сечения, а функции $(-u')$ и $(-v')$ соответствуют углам поворота сечения относительно осей y и x (см. рис. 3.12). Последнее следует из равенств (3.121). Принимая в них $\psi_x = 0$, $\psi_y = 0$ (деформация сдвига стенки не учитывается), получим $\theta_x = -v'$, $\theta_y = -u'$. В результате соотношение (3.157) принимает вид

$$u_z = w + x\theta_y + y\theta_x - \theta'_k \omega(s). \quad (3.159)$$

Произведение $\theta'_k \omega$ аналогично функции f в равенстве (3.96), т. е. определяет депланацию сечения, которая пропорциональна углу закручивания θ'_k . Например, для контура, изображенного на рис. 3.33, $d\omega = R^2 d\beta$ и $\omega = R^2 \beta$. Соответствующая депланация сечения показана на рис. 3.37, б. Продольная деформация согласно равенствам (3.94) и (3.159) имеет вид

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = w' + x\theta'_y + y\theta'_x - \theta''_k \omega. \quad (3.160)$$

Дальнейшие преобразования аналогичны проведенным в § 3.2 при выводе формулы (3.105) для нормальных усилий. Сравнивая равенства (3.95) и (3.160), можно воспользоваться полученными в § 3.2 результатами, если заменить e_z на $e_z + \theta''_k \omega$ и, поскольку рассматривается чистое кручение (см. рис. 3.38), принять $P = M_x = M_y = 0$. Окончательно получим следующие выражения, аналогичные (3.101), (3.102), (3.105):

$$w' = \frac{S_\omega}{S} \theta''_k - (y_0 \theta'_x + x_0 \theta'_y); \quad (3.161)$$

$$\theta'_x = k \frac{1}{D_x^0} (S_{\omega x}^0 - n_y S_{\omega y}^0) \theta''_k; \quad \theta'_y = k \frac{1}{D_y^0} (S_{\omega y}^0 - n_x S_{\omega x}^0) \theta''_k;$$

$$p_\omega = B(s) \left(\frac{S_\omega}{S} + k \frac{S_{\omega x}^0}{D_x^0} \bar{y} + k \frac{S_{\omega y}^0}{D_y^0} \bar{x} - \omega \right) \theta''_k. \quad (3.162)$$

Здесь S , D_x^0 , D_y^0 вычисляются по формулам (3.100), (3.104), только интегрирование по замкнутому контуру заменяется интегрированием от $s = 0$ до $s = s_1$ (см. рис. 3.38); параметр k и обобщенные координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ определяются равенствами (3.103), (3.106);

$$S_\omega = \int_0^{s_1} B \omega ds; \quad S_{\omega x} = \int_0^{s_1} B \omega y ds; \quad S_{\omega y} = \int_0^{s_1} B \omega x ds;$$

$$S_{\omega x}^0 = S_{\omega x} - y_0 S_\omega; \quad S_{\omega y}^0 = S_{\omega y} - x_0 S_\omega$$

и ω выражается формулой (3.158). Интегрирование соотношений (3.161) и последующая подстановка в равенство (3.159) дают

$$u_z = w(0) + x\theta_y(0) + y\theta_x(0) + \frac{kx}{D_y^0} (S_{\omega y}^0 - n_x S_{\omega x}^0) \theta'_k + \\ + \frac{ky}{D_x^0} (S_{\omega x}^0 - n_y S_{\omega y}^0) \theta'_k. \quad (3.163)$$

Здесь $w(0)$, $\theta_y(0)$, $\theta_x(0)$ являются осевым смещением и углами поворота некоторого начального сечения.

Поток касательных напряжений находится из уравнения равновесия (3.87). Учитывая наличие свободного продольного края (т. е. $q_0 = 0$), с помощью (3.162) можно получить следующее равенство, аналогичное (3.114):

$$q_\omega = -C_\omega \theta''_k, \quad (3.164)$$

где

$$C_\omega = \frac{S_\omega}{S} \bar{S}(s) - \bar{S}_\omega(s) + k \frac{S_{\omega x}^0}{D_x^0} \bar{S}_x(s) + k \frac{S_{\omega y}^0}{D_y^0} \bar{S}_y(s).$$

Функции $\bar{S}_x(s)$ и $\bar{S}_y(s)$ были введены при выводе формулы (3.114):

$$\bar{S}(s) = \int_0^s B ds, \quad \bar{S}_\omega(s) = \int_0^s B \omega ds.$$

Ввиду того, что $\bar{S}(s_1) = S$ и $\bar{S}_x(s_1) = \bar{S}_y(s_1) = 0$, поток (3.164) удовлетворяет условию на втором свободном краю (рис. 3.38): $q_\omega(s = s_1) = 0$. Непосредственной проверкой можно также убедиться в том, что его равнодействующие по осям x и y равны нулю. Поток q_ω статически эквивалентен крутящему моменту:

$$M_\omega = \int_0^{s_1} q_\omega r ds = -D_\omega \theta''_k, \quad (3.165)$$

где

$$D_\omega = \int_0^{s_1} C_\omega r ds, \quad (3.166)$$

а r было введено ранее (см. рис. 3.16) и определяется первым равенством (3.85).

Суммарный крутящий момент, очевидно, складывается из момента, аналогичного (3.150):

$$M = D_f \theta'_k,$$

соответствующего свободному кручению, и момента (3.165), вызванного стеснением деформации сечений:

$$M_k = D_f \theta'_k - D_\omega \theta''_k$$

или

$$\theta''_k - m^2 \theta'_k = -\frac{M_k}{D_\omega},$$

где

$$m^2 = D_I/D_\omega. \quad (3.167)$$

Для случая $M_K = \text{const}$ решение этого уравнения имеет вид

$$\theta_K = \frac{M_K z}{D_I} + C_1 \text{sh } mz + C_2 \text{ch } mz + C_3.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий.

Рассмотрим в качестве примера стержень, жестко закрепленный в сечении $z = 0$ и нагруженный в сечении $z = l$ крутящим моментом M_K (см. рис. 3.37, в, обозначения показаны на рис. 3.37, а). Тогда при $z = 0$ должны обращаться в нуль перемещения u_x, u_y (3.156) и u_z (3.163), т. е. при $z = 0$ следует принять $u = v = w(0) = 0, \theta_x(0) = \theta_y(0) = 0, \theta_K = \theta'_K = 0$. При $z = l$ должно обращаться в нуль нормальное усилие (3.162), т. е. $\theta'_K = 0$. Итак, постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из условий $\theta_K(0) = \theta'_K(0) = \theta'_K(l) = 0$. В результате получим

$$\theta_K = \frac{M_K}{m D_I} [mz - \text{sh } mz + (\text{ch } ml - 1) \text{th } ml].$$

Для круглого тонкостенного стержня с продольным разрезом (см. рис. 3.33, 3.37, в) имеем:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad \bar{x} = x; \quad \bar{y} = y; \quad \omega = R^2 \beta;$$

$$S = 2\pi B R; \quad S_\omega = 2\pi^2 B R^3; \quad S_{\omega x}^0 = 0; \quad S_{\omega y}^0 = -2\pi B R^4; \quad k = 1;$$

$$D_x^0 = D_y^0 = \pi B R^3,$$

т. е. согласно равенству (3.162)

$$p_\omega = B R^2 (\pi - 2 \sin \beta - \beta) \theta'_K$$

и

$$\bar{S}(s) = B R \beta; \quad \bar{S}_\omega(s) = \frac{1}{2} B R^3 \beta^2;$$

$$\bar{S}_x(s) = B R^3 \sin \beta, \quad \bar{S}_y(s) = B R^3 (1 - \cos \beta),$$

т. е. на основании формулы (3.164)

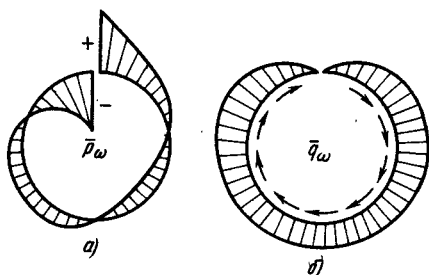
$$q_\omega = -C_\omega \theta''_K,$$

где $C_\omega = B R^3 \left(\pi \beta - \frac{1}{2} \beta^2 - 2 + 2 \cos \beta \right)$.

Распределение нормальных и касательных усилий по контуру сечения показано на рис. 3.39, а, б. Жесткости D_I и D_ω выражаются следующим образом:

$$D_I = \frac{2}{3} \pi C R h^3; \quad D_\omega = \frac{2}{3} (\pi^2 - 6) \pi B R^5.$$

Рис. 3.39. Распределение относительных нормальных ($\bar{p}_\omega$) и потока касательных ($\bar{q}_\omega$) напряжений при стесненном кручении круглого стержня с открытым контуром сечения



Для исследования влияния эффекта стеснения деформации сечения на крутильную жесткость рассмотрим стержень из углепластика (свойства материала приведены в табл. 1.4), стенка которого образована из слоев с углами армирования $\varphi = \pm 45^\circ$ и толщиной $1,2 \times 10^{-3}$ м и продольных ($\varphi = 0$) слоев с толщиной $1,2 \times 10^{-3}$ м. Радиус сечения $R = 0,1$ м, длина $l = 20R$. Запишем соотношение, связывающее крутящий момент M_k с углом закручивания сечения $z = l$ по отношению к сечению $z = 0$ — $\Delta\theta_k = \theta_k(l) - \theta_k(0)$, т. е.

$$M_k = D \Delta\theta_k,$$

где для стержня без разреза (см. рис. 3.37, а)

$$D_1 = \frac{2\pi}{l} CR^3;$$

для стержня с разрезом при свободной деформации сечения (см. рис. 3.37, б)

$$D_2 = \frac{Dl}{l} = \frac{2\pi}{3l} CRh^3$$

и для стержня с разрезом при стеснении деформации сечения $z = 0$ (см. рис. 3.37, в)

$$D_3 = \frac{Dl}{l \left(1 - \frac{\text{th } ml}{ml}\right)}.$$

Учитывая, что ml имеет малое значение (в рассматриваемом случае $ml = 0,0577$), разложим $\text{th } ml$ в степенной ряд. В результате с учетом (3.167) получим следующую приближенную формулу:

$$D_3 = \frac{2Dl}{m^2 l^3} = \frac{2D_\omega}{l^3}. \quad (3.168)$$

Для рассматриваемого стержня имеем $D_1 = 195$ кН·м, $D_2 = 0,038$ кН·м, $D_3 = 5,6$ кН·м. Таким образом, стеснение деформации сечения приводит к значительному (примерно в 150 раз) увеличению жесткости разрезанного стержня, которая тем не менее остается существенно (в 35 раз) меньшей жесткости неразрезанного стержня. Поскольку из формулы (3.168) формально следует, что $D_3 \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow 0$, заметим, что построенная выше теория стесненного кручения справедлива для стержней, длина которых значительно больше размеров поперечного сечения. При

кручении коротких стержней существенными оказываются деформация сдвига и искажение формы контура сечения, которые при построении теории не учитывались.

В заключение отметим, что если помимо крутящего момента в сечении действуют изгибающие моменты, продольная и поперечные силы, то нормальные усилия складываются из p (3.105) и p_ω (3.162), а поток касательных напряжений — из q_0 (3.133) и q_ω (3.164). При этом поперечные силы переносятся в центр изгиба, а полученные в результате этого переноса крутящие моменты алгебраически суммируются с заданным.

§ 3.4. Особенности расчета тонкостенных балок с многозамкнутым контуром сечения

Рассмотренную в § 3.2 расчетную модель широко используют для анализа тонкостенных балок большого удлинения, работающих на общий изгиб и кручение и имеющих сложную многозамкнутую форму поперечного сечения. На рис. 3.40 в качестве примеров показаны схематические сечения крыла большого удлинения, фюзеляжа, самолета и кессонной конструкции. Одна из возможных композитных конструкций такого рода представлена на рис. 3.41. Она состоит из трех тонкостенных балок прямоугольного сечения, которые изготовлены методом намотки под углами $\varphi = \pm 45^\circ$ к оси, усилены по горизонтальным полкам продольно армированными ($\varphi = 0$) слоями и соединены поперечно армированными ($\varphi = 90^\circ$) слоями, уложенными методом намотки. Такая конструктивная схема является перспективной для многолонжеронного композитного крыла летательного аппарата [67].

Воспользуемся принятыми в § 3.2 гипотезами о недеформируемости контура сечения и линейном изменении продольных деформаций (3.95) по координатам x и y (см. рис. 3.41). Тогда для рассматриваемой тонкостенной балки справедливы все результаты § 3.2, связанные с определением нормальных напряжений, и, в частности, формула (3.105) для продольных усилий p .

В качестве примера рассмотрим конструкцию, показанную на рис. 3.41. Примем, что она изготовлена из углепластика, свойства

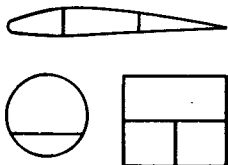


Рис. 3.40. Сечения тонкостенных стержней с многозамкнутым контуром

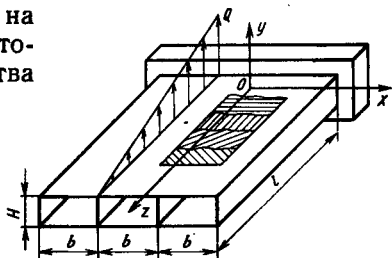
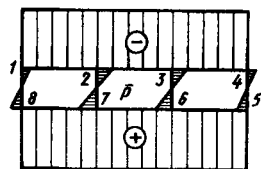


Рис. 3.41. Прямоугольный консольный кессон с трехзамкнутым контуром сечения

Рис. 3.42. Распределение относительных нормальных напряжений по контуру сечения кессона



которого приведены в табл. 1.4, причем толщина слоев с углами армирования $\pm 45^\circ$ составляет $0,6 \times 10^{-3}$ м, а толщина продольных и поперечных слоев соответственно $1,2 \times 10^{-3}$ м и $0,3 \times 10^{-3}$ м. Тогда для панелей 1—4 и 8—5, включающих слои с углами $\pm 45^\circ$, 0 и 90° (см. рис. 3.42), получим продольную жесткость $B = 249 \text{ МПа} \cdot \text{м}$ и сдвиговую жесткость $C = 35,4 \text{ МПа} \cdot \text{м}$. Для крайних стенок 1—8 и 4—5, состоящих из слоев с углами $\pm 45^\circ$ и 90° , $B = 32,8 \text{ МПа} \cdot \text{м}$, $C = 29,4 \text{ МПа} \cdot \text{м}$ и для средних стенок 2—7, 3—6, включающих слои с углами $\pm 45^\circ$ удвоенной по сравнению с крайними стенками толщины $B = 61,9 \text{ МПа} \cdot \text{м}$, $C = 55,9 \text{ МПа} \cdot \text{м}$. Поперечная сила, изгибающий и крутящий моменты, действующие в сечении $z = \text{const}$, согласно схеме нагружения, показанной на рис. 3.41, имеют следующий вид:

$$Q_y = \frac{Q}{2l} (l - z)^2; \quad M_x = \frac{Q}{6l} (l - z)^3; \quad M_{\kappa} = \frac{Qb}{4l} (l - z)^2.$$

В заделке ($z = 0$), т. е. в сечении, где действуют максимальные сила и моменты, и которое будет далее рассматриваться,

$$Q_y = \frac{Ql}{2}; \quad M_x = \frac{Ql^2}{6}; \quad M_{\kappa} = \frac{Qbl}{4} = \frac{Q_y b}{2}. \quad (3.169)$$

Продольные усилия определяются равенством (3.105), в котором следует принять $P = 0$, $M_y = 0$, $k = 1$, $\bar{y} = y$, т. е.

$$p = B(s) \frac{M_x}{D_x^0} y,$$

где $D_x^0 = 762 \text{ Н}^3 \text{ МПа} \cdot \text{м}^4$ и принято $b = 2H$. Характер распределения относительных усилий $p = \rho H^2 / M_x$ в сечении $z = 0$ показан на рис. 3.42.

Основные особенности расчета тонкостенной балки с многосвязным контуром поперечного сечения проявляются при определении потока касательных напряжений, для которого справедливы равенство (3.108), т. е. $q = q_0 + q_0$, и формула (3.114) для q_0 . Как уже отмечалось в § 3.2, для определения потока q_0 необходимо выбрать начало отсчета контурной координаты s , причем удобно вводить в этой точке условный разрез контура сечения, который компенсируется постоянным вдоль контура потоком q_0 . В случае многозамкнутого сечения необходимо сделать столько таких разрезов, сколько в нем замкнутых контуров, и соответственно ввести столько же неизвестных потоков q_0 . Например, в трехзамкнутом контуре, показанном на рис. 3.43, необходимо сделать три условных разреза и ввести три потока q_{01} , q_{02} , q_{03} . Для записи суммарного потока касательных напряжений удобно

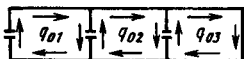


Рис. 3.43. Поток касательных напряжений, компенсирующие условные разрезы

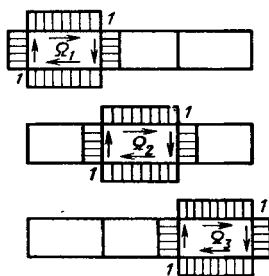


Рис. 3.44. Вспомогательные функции Ω_i

использовать функции Ω_i (рис. 3.44), равные единице на участках контура сечения, где действует поток q_{0i} , и нулю на остальных участках. Тогда

$$q = q_0 + \sum_{i=1}^m q_{0i} \Omega_i. \quad (3.170)$$

Здесь m — число контуров. Отметим, что q_{0i} обозначают здесь амплитудные значения, а зоны действия направления потоков определяются функциями Ω_i .

Для полученного в результате введения условных разрезов открытого контура необходимо построить функции $\bar{S}_x(s)$ и $\bar{S}_y(s)$, входящие в равенство (3.114). В частности, для рассматриваемого примера имеем

$$q_0 = -\frac{Q_y}{D_x^0} \bar{S}_x(s).$$

Распределение $\bar{S}_x(s)$ показано на рис. 3.45. Заметим, что для определения направления $\bar{S}_x(s)$ и, следовательно, q_0 можно руководствоваться аналогией с потоком жидкости, текущей по каналу в форме контура сечения. С этой аналогией и связано название «поток касательных напряжений».

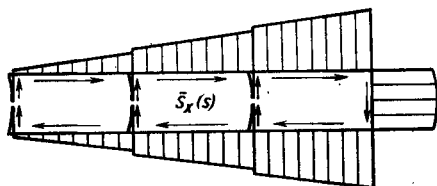
Поток q должен сводиться к заданным в сечении поперечным силам Q_x и Q_y , что обеспечивается составляющей q_0 (3.114), а также к заданному крутящему моменту M_k . Для выполнения последнего условия необходимо составить уравнение моментов относительно оси Oz (см. рис. 3.41), которое с учетом формулы Бредта (3.117), определяющей момент, создаваемый постоянным потоком q_0 , имеет вид

$$L(q) = \int r q_0 r ds + 2 \sum_{i=1}^m q_{0i} F_i = M_k. \quad (3.171)$$

Здесь интеграл распространяется на все участки контура, по которым действует поток q_0 ; r определяется первым равенством (3.85), а F_i — площадь, ограниченная средней линией i -го контура сечения.

Итак, коль скоро поток q_0 известен, остается найти m потоков q_{0i} , связанных одним уравнением (3.171). Ввиду того, что все

Рис. 3.45. Распределение статического момента отсеченной части сечения по его контуру



уравнения статики для усилий, действующих в плоскости недеформируемого сечения, удовлетворены, можно заключить, что рассматриваемая система является статически неопределимой, причем степень статической неопределимости равна $m - 1$, где m — число замкнутых контуров. При $m = 1$ единственный неизвестный поток q_{01} находится из уравнения моментов (3.171), что и было сделано в § 3.2. Для решения задачи необходимо привлечь уравнения совместности деформаций, которые могут быть получены с помощью вариационных принципов, рассмотренных в § 2.1. Запишем потенциальную энергию участка тонкостенной балки единичной длины (вдоль оси Oz). Учитывая равенство (3.170), имеем

$$U = \int \frac{q^2}{2C} ds = \int \left(q_0^2 + 2q_0 \sum_{i=1}^m q_{0i} \Omega_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m q_{0i} q_{0j} \Omega_i \Omega_j \right) \frac{ds}{2C}. \quad (3.172)$$

Согласно принципу минимума потенциальной энергии деформации (2.26), уравнения совместности деформации могут быть получены в результате минимизации U по q_{0i} . Предварительно необходимо учесть, что потоки q_{0i} связаны уравнением моментов (3.171). С помощью этого уравнения один из потоков можно исключить из энергии (3.172), однако лучше воспользоваться методом условной минимизации функционала и построить расширенный функционал типа (2.27)

$$\Pi = U + \theta'_k [M_k - L(q)].$$

Здесь θ'_k — множитель Лагранжа, с помощью которого вводится условие $M_k - L(q) = 0$. В соответствии со смешанным вариационным принципом, обсуждавшимся в § 2.1, этот множитель является обобщенным перемещением (в данном случае углом закручивания). Минимизируя Π по q_{0i} , т. е. записывая условия $\partial \Pi / \partial q_{0i} = 0$, получим

$$\frac{1}{2F_i} \left(\int \frac{1}{C} q_0 \Omega_i ds + \sum_{j=1}^m q_{0j} \int \frac{1}{C} \Omega_i \Omega_j ds \right) = \theta'_k. \quad (3.173)$$

Здесь $i = 1, 2, 3, \dots, m$, т. е. число уравнений (3.173) совпадает с числом искомых потоков q_{0i} . Эти уравнения допускают простую физическую интерпретацию. Их левые части являются углами закручивания отдельных контуров, которые в соответствии с (3.173) должны быть равны общему углу закручивания сечения θ'_k . Этот

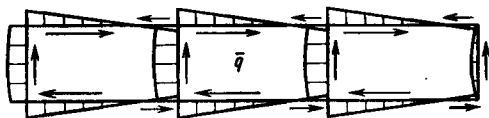


Рис. 3.46. Распределение относительного потока касательных напряжений по контуру сечения кессона

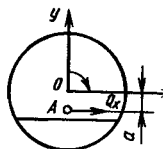


Рис. 3.47. К определению центра изгиба

результат становится очевидным, если учесть, что сечение является недеформируемым в своей плоскости и при кручении поворачивается как жесткий диск. Уравнения (3.173) можно разрешить относительно q_{0i} , т. е.

$$q_{0i} = Q_x R_x^{(i)} + Q_y R_y^{(i)} + \theta'_k R_\theta^{(i)}. \quad (3.174)$$

Здесь учтено выражение (3.114) для q_Q , а через R обозначены коэффициенты, включающие жесткостные и геометрические характеристики сечения. Подставляя потоки (3.174) в уравнение моментов (3.171), найдем угол закручивания

$$\theta'_k = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^m R_\theta^{(i)} F_i} \left[\frac{1}{2} (M_k - \int q_Q r ds) - Q_x \sum_{i=1}^m R_x^{(i)} F_i - Q_y \sum_{i=1}^m R_y^{(i)} F_i \right].$$

После определения θ'_k равенства (3.174) позволяют вычислить потоки q_{0i} , а формула (3.170) — получить суммарный поток касательных напряжений.

Для рассматриваемой в качестве примера балки с трехзамкнутым контуром сечения (рис. 3.41) уравнения (3.171), (3.174) имеют следующий вид:

$$-6,05 Q_y H + 4 H^3 (q_{01} + q_{02} + q_{03}) = M_k;$$

$$q_{01} = 0,168 \frac{Q_y}{H} + 27,9 \cdot 10^6 H \theta'_k;$$

$$q_{02} = 0,5 \frac{Q_y}{H} + 33,7 \cdot 10^6 H \theta'_k;$$

$$q_{03} = 0,5 \frac{Q_y}{H} + 29 \cdot 10^6 H \theta'_k.$$

Для закрепленного сечения ($z = 0$) с учетом связи (3.169) между M_k и Q_y отсюда получим $\theta'_k = 0,28 \cdot 10^{-9} Q_y / H^2$ и $q_{01} = 0,25 Q_y / H$, $q_{02} = 0,59 Q_y / H$, $q_{03} = 0,92 Q_y / H$. Суммарный поток касательных напряжений показан на рис. 3.46.

Рассмотрим определение центра изгиба сечения. Пусть $Q_y = 0$, а сила Q_x проходит через центр изгиба A (рис. 3.47). Тогда, по

определению центра изгиба, угол закручивания равен нулю. Принимая в равенствах (3.174) $Q_y = 0$, $\theta'_k = 0$, получим

$$\bar{q}_{0i} = Q_x R_x^{(i)}.$$

Здесь $\bar{q}_{0i}$ — потоки q_{0i} , соответствующие силе, приложенной в центре изгиба. Координата центра изгиба a (см. рис. 3.47) определяется из уравнения моментов (3.171), если принять в нем $M_k = -Q_x a$ и $q_{0i} = \bar{q}_{0i}$. Учитывая, что согласно (3.114)

$$q_Q = -k \frac{Q_x}{D_y^0} \bar{S}_y(s),$$

найдем

$$a = \frac{k}{D_y^0} \int \bar{S}_y(s) r ds - 2 \sum_{i=1}^m R_x^{(i)} F_i.$$

Расчет стержней без учета эффекта стеснения деформации сечения рассматривается в работах [79, 84, 92], теория стесненного кручения стержней с открытым контуром сечения изложена в [9, 25], теория стесненного кручения и изгиба тонкостенных балок с многозамкнутым контуром сечения представлена в работах [25, 65].

Композитные панели и пластины

Плоские прямоугольные панели и пластины других форм, образованные из совокупности различным образом ориентированных композитных слоев, обладают высокой удельной прочностью и жесткостью, используются в качестве элементов обшивки самолетов, кораблей и других конструкций. Отметим, что пластины из анизотропных материалов — фанеры, дельта-древесины, текстолита, а также подкрепленные панели, часто рассматриваемые как конструктивно анизотропные, являются традиционными элементами конструкций самого различного назначения и подробно описаны в работах [3, 4, 7, 12, 53, 56, 58, 73, 87]. В настоящей главе основное внимание уделяется особенностям практического расчета композитных панелей.

§ 4.1. Уравнения теории слоистых пластин

Плоские панели предназначены для восприятия нормальных и сдвигающих усилий, приложенных вдоль контура, а также нормального давления, распределенного по поверхности (рис. 4.1). Введем систему координат x, y, z (рис. 4.1) и запишем исходную систему уравнений (2.108)–(2.110), в которых следует принять $A_1 = A_2 = 1$, $H_1 = H_2 = 1$, $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow \infty$ и заменить α, β, γ на x, y, z . Уравнения равновесия (2.108), физические (2.109) и геометрические (2.110) соотношения записываются следующим образом;

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0; \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \bar{p} = 0; \quad \bar{p} = p - q; \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11}e_x + B_{12}e_y + C_{11}\kappa_x + C_{12}\kappa_y; \\ N_y &= B_{21}e_x + B_{22}e_y + C_{21}\kappa_x + C_{22}\kappa_y; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$N_{xy} = B_{33}\gamma_{xy} + C_{33}\chi_{xy}; \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} M_x &= C_{11}\epsilon_x + C_{12}\epsilon_y + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y; \\ M_y &= C_{21}\epsilon_x + C_{22}\epsilon_y + D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_y; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= C_{33}\gamma_{xy} + D_{33}\chi_{xy}; \\ Q_x &= K_x\psi_x; \quad Q_y = K_y\psi_y; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (4.7)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \quad (4.8)$$

$$\theta_x = \psi_x - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = \psi_y - \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Обобщенные жесткости слоистой панели определяются равенствами (2.116), (2.123), (2.124), т. е.

$$\begin{aligned} B_{mn} &= I_{mn}^{(0)}; \quad C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - eI_{mn}^{(0)}; \\ D_{mn} &= I_{mn}^{(2)} - 2eI_{mn}^{(1)} + e^2I_{mn}^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где (см. рис. 2.11)

$$I_{mn}^{(r)} = \int_0^h A_{mn} t^r dt = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) \quad (r = 0, 1, 2)$$

и

$$K_x = h^3 \left[\sum_{i=1}^k \frac{t_i - t_{i-1}}{G_{xz}^{(i)}} \right]^{-1}; \quad K_y = h^3 \left[\sum_{i=1}^k \frac{t_i - t_{i-1}}{G_{yz}^{(i)}} \right]^{-1}$$

Граничные условия обсуждались в § 2.4. Статические условия предполагают задание на краю $x = \text{const}$ усилий и моментов N_x , N_{xy} , Q_x , M_x , M_{xy} , а на краю $y = \text{const}$ — усилий и моментов N_y , N_{xy} , Q_y , M_y , M_{xy} , геометрические условия записываются через перемещения u , v , w начальной плоскости $z = 0$ и углы поворота нормали к ней θ_x , θ_y . Рассмотрим подробнее условия,

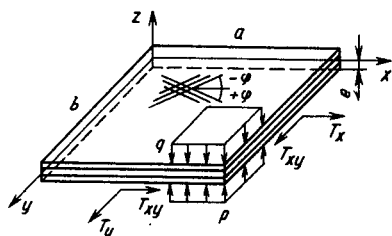


Рис. 4.1. Прямоугольная слоистая панель

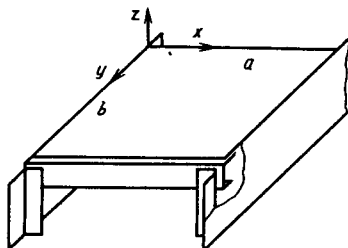


Рис. 4.2. Схема опирания панели об шпунн

предполагающие отсутствие прогиба и смещений вдоль края и свободное смещение поперек края, т. е.

при $x = \text{const}$

$$w = 0, \quad v = 0, \quad \theta_y = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0;$$

при $y = \text{const}$

$$w = 0, \quad u = 0, \quad \theta_x = 0, \quad N_y = 0, \quad M_y = 0. \quad (4.10)$$

Условия (4.10) имеют две особенности: во-первых, они допускают представление решения уравнений (4.1)–(4.8) в двойных тригонометрических рядах, каждый член которых удовлетворяет этим условиям, что принципиально упрощает решение, и, во-вторых, они хорошо моделируют распространенные схемы закрепления панелей. Рассмотрим в связи с этим рис. 4.2, на котором показана схема типовой панели обшивки крыла самолета. Поперечные кромки $x = 0$ и $x = a$ опираются на тонкие стенки (нервюры), жесткие в своей плоскости (что обеспечивает выполнение условий $w = v = \theta_y = 0$) и податливые при нагружении в направлении оси x (т. е. можно принять $N_x = M_x = 0$). Продольные кромки опираются на ребра (стрингеры), обладающие высокой изгибной жесткостью в плоскости xz и низкой (см. § 3.3) крутильной жесткостью, что также обеспечивает приближенное выполнение условий (4.10).

Система (4.1)–(4.8) включает 21 уравнение, является полной (т. е. содержит столько же неизвестных) и может быть приведена к двум группам уравнений, соответствующим задачам о нагружении панели в своей плоскости и изгибе. Для получения первого из этих уравнений введем функцию напряжений Эри $F(x, y)$:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (4.11)$$

Подстановка усилий (4.11) в уравнения равновесия (4.1) приводит к их тождественному удовлетворению. Для определения функции $F(x, y)$ необходимо в соответствии с общей схемой решения плоской задачи теории упругости в напряжениях воспользоваться уравнением совместности деформации, которое следует из геометрических соотношений (4.7):

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.12)$$

Выразим из физических соотношений (4.4) деформации e_x, e_y, γ_{xy} . Учитывая равенства (4.11) и формулы (4.8), будем иметь:

$$\begin{aligned} e_x &= c_x \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - c_{xy} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - B_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - B_{xy} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \\ e_y &= c_y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - c_{yx} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - B_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - B_{yx} \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \\ \gamma_{xy} &= -c \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - C \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$c_x = \frac{B_{22}}{B}; \quad c_y = \frac{B_{11}}{B}; \quad c_{xy} = c_{yx} = \frac{B_{12}}{B}; \quad c = \frac{1}{B_{33}}; \quad (4.14)$$

$$B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2;$$

$$B_x = \frac{1}{B}(B_{22}C_{11} - B_{12}C_{12}); \quad B_y = \frac{1}{B}(B_{11}C_{22} - B_{12}C_{12});$$

$$B_{xy} = \frac{1}{B}(B_{22}C_{12} - B_{12}C_{22}); \quad (4.15)$$

$$B_{yx} = \frac{1}{B}(B_{11}C_{12} - B_{12}C_{11}); \quad C = \frac{C_{33}}{B_{33}}.$$

Подставляя деформации (4.13) в уравнение (4.12), запишем первое уравнение разрешающей системы

$$c_y \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (c - 2c_{xy}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + c_x \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} =$$

$$= B_{yx} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + (B_x + C) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + (B_y + C) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + B_{xy} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3}. \quad (4.16)$$

Исключим теперь деформации (4.13) из физических соотношений (4.5). Вводя следующие обозначения:

$$C_x = c_x \left(C_{11} - \frac{c_{yx}}{c_x} C_{12} \right); \quad C_y = c_y \left(C_{22} - \frac{c_{xy}}{c_y} C_{12} \right);$$

$$C_{xy} = c_y \left(C_{12} - \frac{c_{xy}}{c_y} C_{11} \right); \quad C_{yx} = c_x \left(C_{12} - \frac{c_{yx}}{c_x} C_{22} \right); \quad (4.17)$$

$$D_x = D_{11} - C_{11}B_x - C_{12}B_{yx}; \quad D_y = D_{22} - C_{22}B_y - C_{12}B_{xy};$$

$$D_{xy} = D_{12} - C_{11}B_{xy} - C_{12}B_y; \quad D_{yx} = D_{12} - C_{22}B_{yx} - C_{12}B_x;$$

$$D = \frac{1}{B_{33}}(D_{33}B_{33} - C_{33}^2),$$

окончательно получим

$$M_x = D_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + C_x \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + C_{xy} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3};$$

$$M_y = D_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{yx} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + C_y \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + C_{yx} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}; \quad (4.18)$$

$$M_{xy} = -C \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right).$$

Рассмотрим уравнения равновесия (4.2), (4.3). Из уравнений (4.2) имеем

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.19)$$

Подставим эти выражения в уравнение (4.3)

$$\frac{\partial^3 M_x}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 M_y}{\partial y^3} + \bar{p} = 0. \quad (4.20)$$

С помощью соотношений (4.18), (4.20) можно записать второе уравнение разрешающей системы

$$D_x \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + (2D + D_{yx}) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + (2D + D_{xy}) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \\ + D_y \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + C_{xy} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (C_x + C_y - 2C) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + C_{yx} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \bar{p} = 0. \quad (4.21)$$

И наконец, два последних уравнения получим, если подставим в равенства (4.19) поперечные усилия, записанные с помощью формул (4.6), (4.8), в виде

$$Q_x = K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad Q_y = K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

и моменты согласно (4.18). В результате будем иметь:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{1}{K_x} \left[D_x \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + (D + D_{xy}) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial y^3} + \right. \\ \left. + C_{xy} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + (C_x - C) \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{1}{K_y} \left[D_y \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + (D + D_{yx}) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^3} + \right. \\ \left. + C_{yx} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + (C_y - C) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \right]. \quad (4.22)$$

Таким образом, теория композитных панелей сводится к уравнениям (4.16), (4.21), (4.22), включающим в качестве неизвестных функцию напряжений F , углы поворота нормали θ_x , θ_y и прогиб w . Если эти функции найдены, то по формулам (4.13) и (4.8) определяются деформации и кривизны начальной плоскости $z = 0$ и с помощью равенств, аналогичных (2.75), т. е.

$$e_x = \varepsilon_x + z\kappa_x; \quad e_y = \varepsilon_y + z\kappa_y; \quad e_{xy} = \gamma_{xy} + z\chi_{xy} \quad (4.23)$$

может быть получено распределение деформаций по толщине панели. Далее соотношения типа (1.26) (знаки $\pm$ соответствуют слоям с углами армирования $\pm \varphi$, рис. 4.1)

$$e_1 = e_x \cos^2 \varphi + e_y \sin^2 \varphi \pm e_{xy} \sin \varphi \cos \varphi; \\ e_2 = e_x \sin^2 \varphi + e_y \cos^2 \varphi \mp e_{xy} \sin \varphi \cos \varphi; \\ e_{12} = \pm (e_y - e_x) \sin 2\varphi + e_{xy} \cos 2\varphi \quad (4.24)$$

позволяют найти деформации в слоях, а закон Гука

$$\sigma_1 = \bar{E}_1 (e_1 + \mu_{12} e_2); \quad \sigma_2 = \bar{E}_2 (e_2 + \mu_{21} e_1); \\ \tau_{12} = G_{12} e_{12} \quad (4.25)$$

— определить напряжения, по которым можно судить о прочности отдельных слоев и панели в целом. Ввиду того, что одной из возможных форм разрушения композитных панелей является расслоение от касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} , запишем соответствующие выражения, вытекающие из равенств (2.78), (2.92) и (4.23):

$$\tau_{xz} = - \int_{-e}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz = - \left(\bar{B}_{11} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \bar{C}_{11} \frac{\partial \kappa_x}{\partial x} + \right. \\ \left. + \bar{B}_{12} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \bar{C}_{12} \frac{\partial \kappa_y}{\partial x} + \bar{B}_{33} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \bar{C}_{33} \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial y} \right); \quad (4.26)$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-e}^z \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz = - \left(\bar{B}_{21} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \bar{C}_{21} \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} + \right. \\ \left. + \bar{B}_{22} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \bar{C}_{22} \frac{\partial \kappa_y}{\partial y} + \bar{B}_{33} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \bar{C}_{33} \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial x} \right),$$

где

$$\bar{B}_{mn} = \bar{B}_{nm} = \int_{-e}^z A_{mn} dz; \quad \bar{C}_{mn} = \bar{C}_{nm} = \int_{-e}^z A_{mn} z dz.$$

Приведем также выражение для вариации полной энергии, которое понадобится в дальнейшем. Согласно равенствам (2.111), (2.114), (2.115) в рассматриваемом случае получим

$$\delta \Pi_e = \delta U - \delta A, \quad (4.27)$$

где

$$\delta U = \iint (N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy} + M_x \delta \kappa_x + \\ + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \chi_{xy} + Q_x \delta \psi_x + Q_y \delta \psi_y) dx dy; \quad (4.28)$$

$$\delta A = \iint \bar{p} \delta w dx dy. \quad (4.29)$$

Уравнения (4.16), (4.21), (4.22) соответствуют общей расчетной модели композитной панели и учитывают как возможную несимметричность в расположении слоев по толщине, так и деформации межслоевого сдвига. На практике необходимость в одновременном учете этих эффектов возникает довольно редко. Одним из немногих примеров такой ситуации является расчет трехслойных панелей, в которых необходимость учета деформаций сдвига вызывается наличием легкого и податливого на сдвиг заполнителя (см. § 2.11), а несимметричность структуры связана со специальными (например, теплозащитными) требованиями, в силу которых несущие слои должны иметь различную структуру и толщину. Как правило, существенным является лишь один из этих эффектов —

несимметричность структуры или деформации сдвига, поэтому исходные уравнения можно упростить.

Наибольшее упрощение достигается, если структура панели симметрична относительно срединной плоскости или такова, что в равенствах (4.9) смешанные жесткости $C_{mn} = 0$ ($mn = 11, 12, 22, 33$) (см. § 2.5). Тогда согласно соотношениям (4.15) $B_x = B_y = B_{xy} = B_{yx} = C = 0$, и уравнение (4.16) принимает вид

$$c_y \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (c - 2c_{xy}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + c_x \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (4.30)$$

Это уравнение описывает плоское напряженное состояние панели, при котором она деформируется под действием контурных усилий T_x, T_y, T_{xy} (см. рис. 4.1) без изгиба. Типовым случаем такого нагружения является воздействие, при котором перечисленные усилия равномерно распределены по сторонам панели, т. е. являются постоянными. При этом функция напряжений может быть выбрана в виде полинома

$$F = \frac{1}{2} (T_x y^2 + T_y x^2) - T_{xy} xy,$$

который тождественно удовлетворяет уравнению (4.30). Из равенств (4.11) $N_x = T_x, N_y = T_y, N_{xy} = T_{xy}$, т. е. получим однородное (не зависящее от координат) напряженное состояние. Деформации выражаются через заданные усилия с помощью равенств (4.13), которые упрощаются следующим образом:

$$\epsilon_x = c_x T_x - c_{xy} T_y; \quad \epsilon_y = c_y T_y - c_{yx} T_x; \quad \gamma_{xy} = c T_{xy}. \quad (4.31)$$

Напряжения в слоях определяются соотношениями (4.24), (4.25), в которых согласно (4.23) $e_x = \epsilon_x, e_y = \epsilon_y, e_{xy} = \gamma_{xy}$. В равенства (4.31) входят средние модули упругости и коэффициенты Пуассона $E_x, E_y, G_{xy}, \mu_{xy}, \mu_{yx}$. Они выражаются через коэффициенты податливости (4.14):

$$E_x = \frac{1}{c_x h}; \quad E_y = \frac{1}{c_y h}; \quad G_{xy} = \frac{1}{ch}; \quad \mu_{xy} = \frac{c_{xy}}{c_y};$$

$$\mu_{yx} = \frac{c_{yx}}{c_x} \quad (4.32)$$

(h — толщина панели) и далее через мембранные жесткости B_{mn} (4.9), которые не зависят от порядка расположения слоев, т. е. равенства (4.32) справедливы для панелей с любой структурой.

Итак, для пластин с симметричным расположением слоев уравнение (4.30), описывающее плоское напряженное состояние, отделяется от уравнений (4.21), (4.22), описывающих изгиб. Согласно формулам (4.17) в рассматриваемом случае $C_x = C_y = C_{xy} = C_{yx} = 0; D_x = D_{11}; D_y = D_{22}; D_{xy} = D_{yx} = D_{12}; D = D_{33}$.

результате уравнения (4.21), (4.22) принимают следующий вид:

$$D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + (D_{12} + 2D_{33}) \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\ + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \bar{p} = 0;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{1}{K_x} \left[D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right]; \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{1}{K_y} \left[D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right].$$

Если не учитывать также деформацию поперечного сдвига, приняв $K_x \rightarrow \infty$, $K_y \rightarrow \infty$, то из двух последних уравнений (4.33) имеем

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (4.34)$$

а первое уравнение после подстановки (4.34) определяет прогиб

$$L(w) = \bar{p}, \quad (4.35)$$

где

$$L(w) = D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}; \quad D_1 = D_{11}; \quad D_2 = D_{22}; \quad D_3 = D_{12} + 2D_{33}. \quad (4.36)$$

Уравнение (4.35) является классическим уравнением теории изгиба ортотропных пластин.

Рассмотрим теперь уравнения, учитывающие несимметричный характер расположения слоев по толщине и не учитывающие деформации поперечного сдвига. При $K_x \rightarrow \infty$ и $K_y \rightarrow \infty$ из общих соотношений (4.22) следуют равенства (4.34). В результате уравнения (4.16) и (4.21) принимают следующий вид:

$$c_y \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (c - 2c_{xy}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + c_x \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \\ + B_{yx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (B_x + B_y - 2C) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0; \quad (4.37)$$

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(2D + D_{xy} + D_{yx}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - C_{xy} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - (C_x + C_y - 2C) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - C_{yx} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \bar{p}. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.37) описывает плоское напряженное состояние, а уравнение (4.38) — изгиб. Существенно, что в первое уравнение

входит прогиб, а во второе — функция напряжений, т. е. при несимметричном расположении слоев по толщине нагружение панели в ее плоскости сопровождается изгибом, а нормальное давление в общем случае вызывает появление мембранных усилий. В случае симметричного расположения слоев уравнения (4.37), (4.38) переходят соответственно в (4.30), (4.35).

Выше были получены общие уравнения теории композитных панелей и их различные упрощенные варианты, которые используются в зависимости от особенностей структуры конкретных панелей, рассматриваемых в следующих разделах.

§ 4.2. Гладкие слоистые панели с симметричным расположением слоев

Выше при обсуждении уравнений (4.37), (4.38) отмечалось, что при произвольном характере расположения слоев по толщине плоское напряженное состояние сопровождается изгибом. Такое свойство панели, усложняющее ее поведение под нагрузкой и увеличивающее трудоемкость расчетов, трудно признать достоинством. Более того, можно показать, что при прочих равных условиях панель с симметричным расположением слоев обладает большей изгибной жесткостью (мембранная жесткость от порядка расположения слоев не зависит). Действительно, рассмотрим, например, коэффициент D_{11} , определяемый равенством (4.9). Для получения собственной изгибной жесткости стенки найдем e из условия $C_{11} = 0$. В результате получим

$$D_{11} = I_{11}^{(2)} - [I_{11}^{(1)}]^2 / I_{11}^{(0)}. \quad (4.39)$$

При вычислении интегралов $I_{11}^{(r)}$ перейдем к координате $z_1 = t - (h/2)$, отсчитываемой от срединной плоскости $t = h/2$. Тогда D_{11} определяется равенством (4.39), в котором

$$I_{11}^{(r)} = \int_{-h/2}^{h/2} A_{11} z_1^r dz_1.$$

Разложим функцию $A_{11}(z_1)$ на симметричную и обратносимметричную составляющие (относительно срединной плоскости), т. е. $A_{11} = f_c(z_1) + f_o(z_1)$. Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} I_{11}^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} f_c dz_1; & I_{11}^{(1)} &= \int_{-h/2}^{h/2} f_o z_1 dz_1; \\ I_{11}^{(2)} &= \int_{-h/2}^{h/2} f_c z_1^2 dz_1. \end{aligned}$$

Из формулы (4.39) следует, что жесткость D_{11} будет максимальной, если $I_{11}^{(1)} = 0$, т. е. если $f_o(z_1) = 0$ и функция $A_{11}(z_1)$ симметрична относительно срединной плоскости.

Итак, при формировании структуры композитной панели слои следует располагать симметрично относительно срединной плоскости. Отметим, что если отсутствуют специальные требования, определяющие порядок расположения слоев, то структура, как правило, может быть сделана симметричной, так как толщина элементарного композитного слоя весьма мала. Пусть, например, панель должна включать традиционный набор слоев углепластика с углами $\pm 45^\circ$, 0 и 90° , а толщина элементарного однонаправленного слоя составляет $0,1 \times 10^{-3}$ м. Тогда толщина рассматриваемой комбинации слоев составляет $0,4 \times 10^{-3}$ м, а толщина пакета с симметричной структурой должна быть вдвое больше, т. е. $0,8 \times 10^{-3}$ м. Следовательно, симметричная структура может быть реализована в рассматриваемом примере, если расчетная толщина панели не меньше $0,8 \times 10^{-3}$ м. Жесткости слоистого материала с симметричной структурой определяются равенствами (2.129):

$$B_{mn} = 2 \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (z_i - z_{i-1}); \quad C_{mn} = 0; \quad (4.40)$$

$$D_{mn} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (z_i^3 - z_{i-1}^3).$$

Координата z здесь отсчитывается от срединной плоскости ($e = h/2$), а суммы включают слои, лежащие по одну сторону от этой плоскости.

Частным случаем симметричной структуры является однородная, для которой соотношения (4.40) дают:

$$B_{11} = \bar{E}_x h; \quad B_{12} = B_{21} = \mu_{xy} \bar{E}_x h; \quad B_{22} = \bar{E}_y h;$$

$$B_{33} = G_{xy} h; \quad C_{mn} = 0; \quad D_{11} = \bar{E}_x \frac{h^3}{12}; \quad D_{12} = D_{21} = \mu_{xy} \bar{E}_x \frac{h^3}{12};$$

$$D_{22} = \bar{E}_y \frac{h^3}{12}; \quad D_{33} = G_{xy} \frac{h^3}{12}; \quad \bar{E}_{x,y} = E_{x,y} / (1 - \mu_{xy} \mu_{yx}). \quad (4.41)$$

Отметим, что слоистая структура, как правило, не является строго однородной, однако при малой относительной толщине элементарного слоя и большом числе их регулярно чередующихся комбинаций формулы (4.41) иногда обладают приемлемой для практических расчетов точностью. В качестве примера рассмотрим продольно-поперечную структуру, образованную из чередующихся элементарных слоев углепластика с толщиной $0,1 \times 10^{-3}$ м и углами 90° и 0° (к срединной плоскости примыкают с обеих сторон слои с углами 90° , далее слои с углами 0° , затем 90° и т. д.). На рис. 4.3 (кривая 1) показано изменение погрешности Δ в определении изгибной жесткости по формулам (4.41) по отношению к формулам (4.40) в зависимости от числа слоев. Из графика следует, что в случае большой разницы в свойствах регулярно укладываемых слоев

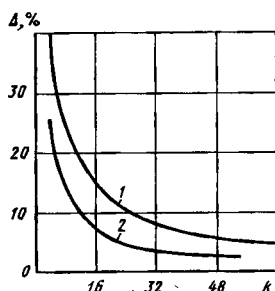


Рис. 4.3. Изменение погрешности, получаемой при вычислении изгибной жесткости слоистой пластины на основе модели однородного материала, в зависимости от числа слоев:

1 — для углепластика 0/90; 2 — для углепластика 0 и органопластика 0.

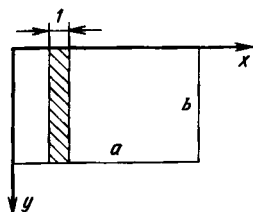


Рис. 4.4. Геометрические параметры прямоугольной пластины

(4.41) следует пользоваться с большой осторожностью — погрешность становится меньше 5 % при $k \geq 56$ и при дальнейшем увеличении числа слоев убывает очень медленно. Она уменьшается при выравнивании жесткостей слоев — кривая 2 на рис. 4.3 соответствует чередующимся продольным слоям углепластика ($E_x = 180$ ГПа) и органопластика ($E_x = 72$ ГПа). Если структура образована из одинаковых слоев, формулы (4.40) совпадают с (4.41) и $\Delta = 0$. Действительно, из (4.40) следует, что

(в рассматриваемом случае у продольных слоев $E_x = E_1 = 180$ ГПа, а у поперечных $E_x = E_2 = 6,2$ ГПа) соотношениями

$$B_{mn} = 2A_{mn} \sum_{i=1}^{k/2} (z_i - z_{i-1}) = 2A_{mn} \frac{h}{2} = \bar{E}_x h;$$

$$D_{mn} = \frac{2}{3} A_{mn} \sum_{i=1}^{k/2} (z_i^3 - z_{i-1}^3) = \frac{2}{3} A_{mn} \left(\frac{h}{2} \right)^3 = \bar{E}_x \frac{h^3}{12}.$$

При расчете тонких композитных панелей, которые не содержат слоев из пенопласта, резины и других материалов, обладающих низкой сдвиговой жесткостью, учет деформаций поперечного сдвига, как правило, не вносит существенных уточнений. В результате панель с симметричной структурой пакета может быть описана уравнением (4.35). Рассмотрим на основе этого уравнения изгиб гладких прямоугольных пластин (рис. 4.4) с различными условиями закрепления.

Предположим, что пластина свободно оперта по всем сторонам, т. е. в соответствии с равенствами (4.10) на краях прогиб и изгибающие моменты обращаются в нуль. Изгибающие моменты со-

гласно (4.5), (4.8), (4.34) и (4.40) выражаются через прогиб следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x &= D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y; \quad M_y = D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_y; \\ M_{xy} &= D_{33}\chi_{xy}; \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Зададим прогиб в виде двойного тригонометрического ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \quad (4.43)$$

где w_{mn} — постоянные; $\lambda_m = \pi m/a$; $\lambda_n = \pi n/b$. Каждый член ряда (4.43) удовлетворяет условиям отсутствия прогиба и изгибающих моментов на опорном контуре. Для определения искоемых постоянных w_{mn} представим нагрузку $\bar{p}$, входящую в уравнение (4.35), рядом, аналогичным (4.43):

$$\bar{p}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \quad (4.44)$$

где

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{p}(x, y) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y dx dy.$$

Для наиболее распространенного случая воздействия равномерного давления $\bar{p} = p_0 = \text{const}$ имеем

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \quad (m, n = 1, 3, 5 \dots); \\ p_{mn} &= 0 \quad (m, n = 2, 4, 6 \dots). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Подставляя ряды (4.43), (4.44) в уравнение (4.35) и приравнявая коэффициенты при одинаковых комбинациях тригонометрических функций в левой и правой части, получим

$$w_{mn} L_{mn} = p_{mn}, \quad (4.46)$$

где

$$L_{mn} = D_1 \lambda_m^4 + 2D_3 \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D_2 \lambda_n^4. \quad (4.47)$$

Окончательно для случая равномерного давления равенства (4.43)—(4.47) позволяют записать решение в виде

$$w(x, y) = \frac{16p_0 b^4}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m x \sin \lambda_n y}{mn \left[D_1 \left(\frac{mb}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mb}{a} \right)^2 n^2 + D_2 n^4 \right]}. \quad (4.48)$$

Для оценки степени сходимости ряда (4.48) рассмотрим в качестве примера квадратную ($a = b$) пластину, состоящую из слоев

бороалюминия с углами армирования $\pm 45^\circ$. Для такой пластины $D_1 = D_2 = D$, $D_3 = 1,38D$, а максимальный прогиб может быть записан следующим образом:

$$w\left(x = \frac{b}{2}, y = \frac{b}{2}\right) = \frac{16\rho_0 b^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} w_m, \quad (4.49)$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= 2,1 \cdot 10^{-1} - 3,1 \cdot 10^{-3} + 2,9 \cdot 10^{-4} - 5,6 \cdot 10^{-5} + \dots; \\ w_3 &= -3,1 \cdot 10^{-3} + 2,9 \cdot 10^{-4} - 5,1 \cdot 10^{-5} + 1,3 \cdot 10^{-5} - \dots; \\ w_5 &= 2,9 \cdot 10^{-4} - 5,1 \cdot 10^{-5} + 1,3 \cdot 10^{-5} - 4,4 \cdot 10^{-6} + \dots; \\ w_7 &= -5,6 \cdot 10^{-5} + 1,3 \cdot 10^{-5} - 4,4 \cdot 10^{-6} + 1,1 \cdot 10^{-6} - \dots \end{aligned}$$

Можно заключить, что ряд (4.49) сходится настолько быстро, что для определения максимального прогиба достаточно учесть только первый член. Погрешность при этом составляет 0,55 %. Однако для вычисления напряжений в соответствии с равенствами (4.23)—(4.25) необходимо определить кривизны деформированной поверхности, т. е. согласно формулам (4.42) — вторые производные от прогибов. Для квадратной пластины, рассматриваемой в качестве примера, найдем

$$\kappa_x\left(x = \frac{b}{2}, y = \frac{b}{2}\right) = -\frac{16\rho_0 b^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \kappa_m, \quad (4.50)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 2,1 \cdot 10^{-1} - 3,1 \cdot 10^{-3} + 2,9 \cdot 10^{-4} - 5,6 \cdot 10^{-5} + \dots; \\ \kappa_3 &= -2,8 \cdot 10^{-2} + 2,6 \cdot 10^{-3} - 4,5 \cdot 10^{-4} + 1,1 \cdot 10^{-4} - \dots; \\ \kappa_5 &= 7,2 \cdot 10^{-3} - 1,2 \cdot 10^{-3} + 3,3 \cdot 10^{-4} - 1,1 \cdot 10^{-4} + \dots; \\ \kappa_7 &= -2,7 \cdot 10^{-3} + 6,4 \cdot 10^{-4} - 2,2 \cdot 10^{-4} + 5,4 \cdot 10^{-5} - \dots \end{aligned}$$

Ряд (4.50), полученный в результате двукратного дифференцирования прогиба, сходится медленнее, чем разложение (4.49). Его первый член определяет кривизну с ошибкой в 13,1 %, удерживание членов с номерами, включающими $m = 3$, $n = 3$, снижает эту погрешность до 2,3 %, а сохранение членов с номерами $m = 5$, $n = 5$ доводит ее до 1 %.

Сходимость рассматриваемых рядов существенно ухудшается для удлиненных панелей, у которых $b/a < 1$ (см. рис. 4.4). Формально причиной этого эффекта является наличие в коэффициентах ряда (4.48) параметра mb/a , который при $b/a < 1$ возрастает медленнее m . Если принять, что в случае квадратной пластины для вычисления прогиба и кривизны можно ограничиться членами, включающими соответственно $m = 1$ и $m = 5$, то можно определить число членов ряда, которые следует учитывать при $b/a < 1$. Например, для пластины с отношением $b/a = 0,5$ при вычислении прогиба $m = 3$, а при определении кривизны $m = 11$. Для рассматриваемой в качестве примера пластины из бороалюминия при

$b/a = 0,5$ коэффициенты ряда типа (4.50) с индексами 3,1; 5,1; 7,1; 9,1; 11,1 составляют от первого (1,1) соответственно 43 %; 15 %, 6,7 %; 3,4 %, 1,9 %. С физической стороны ухудшение сходимости рядов при $b/a < 1$ связано с тем, что в удлиненной пластине прогиб в средней части практически не изменяется по продольной координате, а разложение константы в ряд Фурье по синусам требует большого числа членов. Предельным случаем является бесконечно длинная панель, у которой $b/a = 0$. При этом разложение (4.48) преобразуется следующим образом:

$$\omega = \frac{16\rho_0 b^4}{\pi^6 D_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \lambda_m x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \lambda_n y = \frac{\rho_0}{24 D_2} (y^4 - 2by^3 + b^3 y). \quad (4.51)$$

Заметим, что (4.51) является решением уравнения (при $\bar{p} = \rho_0$)

$$D_2 \frac{d^4 \omega}{dy^4} = \bar{p}, \quad (4.52)$$

которое следует из (4.35), если считать, что ω не зависит от x , и определяет прогиб полоски единичной ширины, показанной на рис. 4.4. Зависимость относительного максимального прогиба $\bar{\omega}_m = \omega_m D / (\rho_0 b^4)$ от b/a для пластины из бoroалюминия показана на рис. 4.5. Из графика следует, что при $a \geq 5b$ пластину можно рассчитывать по формулам типа (4.51), соответствующим бесконечно большому удлинению.

В диапазоне $0,2 < b/a < 1$ решение (4.48) в форме двойного тригонометрического ряда эффективно только для определения прогиба. Вычисление кривизн и тем более их производных, требуемых согласно равенствам (4.26) для получения межслоевых касательных напряжений, связано с учетом в рассматриваемых рядах большого числа членов. Следует отметить, что эта операция не представляет затруднений при использовании вычислительной техники, а простота выражений для коэффициентов рядов типа (4.48) позволяет реализовать ее даже на микрокалькуляторе. В связи с этим решения в двойных тригонометрических рядах будут неоднократно строиться и рекомендоваться для практических расчетов в дальнейшем. Однако

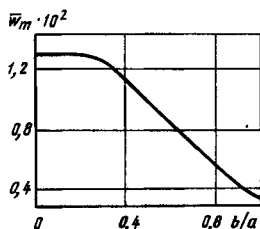


Рис. 4.5. Зависимость относительного максимального прогиба от отношения сторон пластины, нагруженной равномерным давлением

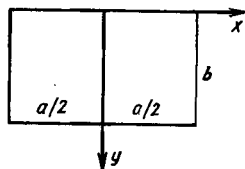


Рис. 4.6. Система координат для прямоугольной пластины

для столь простой задачи, как изгиб панели, рассматриваемой в упрощенной постановке, желательно получить замкнутое решение, обладающее достаточной степенью точности во всем диапазоне изменения геометрических параметров и справедливое не только для свободного опирания, но и для жесткого закрепления краев.

Для расчета прямоугольных пластин обычно рекомендуется решение в одинарных тригонометрических рядах вида

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \sin \lambda_n y.$$

При этом на краях $y = 0$, $y = b$ обеспечивается выполнение условий свободного опирания, а функции $W_n(x)$ находятся в результате решения обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка и позволяют удовлетворить любые граничные условия на краях $x = 0$, $x = a$. Многочисленные примеры таких решений приведены в работе [58]. Одинарные ряды сходятся значительно быстрее двойных, однако, во-первых, они могут быть построены только для пластин со специальными граничными условиями, во-вторых, для ортотропных пластин выражения для коэффициентов этих рядов оказываются настолько громоздкими, что вычисление даже нескольких первых членов трудно признать более простой операцией, чем суммирование медленно сходящихся двойных рядов.

В связи с изложенным выше воспользуемся методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям (метод В. З. Власова и Л. В. Канторовича), эффективность которого для приближенного решения задач изгиба пластин показана в работах [9, 65]. Рассмотрим пластину, у которой $a \geq b$ (рис. 4.6), и представим ее прогиб в виде

$$w(x, y) = W(x) f(y), \quad (4.53)$$

где $f(y)$ — функция, выбранная так, чтобы были удовлетворены по крайней мере геометрические граничные условия на продольных краях $y = 0$ и $y = b$. В качестве такой функции можно принять решение уравнения (4.52), определяющее, как уже отмечалось, прогиб полосы единичной ширины (см. рис. 4.4). Если продольные края свободно оперты, т. е. $f(0) = f''(0) = f(b) = f''(b) = 0$, то в соответствии с (4.51)

$$f = y^4 - 2by^3 + b^3y. \quad (4.54)$$

Для защемленных продольных краев, т. е. при $f(0) = f'(0) = f(b) = f'(b) = 0$,

$$f = y^2(b - y)^2. \quad (4.55)$$

Для определения функции $W(x)$ воспользуемся вариационным принципом Лагранжа (см. § 2.1). Вариация полной энергии

(4.27)—(4.29) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \Pi_0 = & \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^b \left[\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & + \left(D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \times \\ & \times \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \bar{p} \delta w \Big] dx dy = 0. \end{aligned}$$

Подставив сюда $w(x, y)$ согласно (4.53), получим

$$\begin{aligned} & \int_{-a/2}^{a/2} (D_{11}c_1 W'' \delta W'' + D_{12}c_2 (W'' \delta W + W \delta W'') + \\ & + D_{22}c_3 W \delta W + 4D_{33}c_4 W' \delta W' - c_p \delta W) dx = 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

где

$$c_1 = \int_0^b f^2 dy; \quad c_2 = \int_0^b f'' f dy; \quad c_3 = \int_0^b (f'')^2 dy; \quad c_4 = \int_0^b (f')^2 dy; \quad (4.57)$$

$$c_p = \int_0^b \bar{p} f dy.$$

Для пластин с закрепленными продольными сторонами $f(0) = f(b) = 0$ в результате интегрирования по частям

$$c_2 = \int_0^b f'' f dy = - \int_0^b (f')^2 dy = -c_4. \quad (4.58)$$

Используя свойство коммутативности операций варьирования и дифференцирования и формулу интегрирования по частям, например

$$\begin{aligned} & \int_{-a/2}^{a/2} W'' \delta W'' dx = \int_{-a/2}^{a/2} W'' (\delta W)'' dx = [W'' \delta W']_{-a/2}^{a/2} - \\ & - \int_{-a/2}^{a/2} W''' (\delta W)' dx = [W'' \delta W']_{-a/2}^{a/2} - [W''' \delta W]_{-a/2}^{a/2} + \\ & + \int_{-a/2}^{a/2} W^{IV} \delta W dx, \end{aligned}$$

из соотношения (4.56) можно получить следующее вариационное уравнение

$$D_{11}c_1 W^{IV} - 2(D_{12} + 2D_{33})c_4 W'' + D_{22}c_3 W = c_p \quad (4.59)$$

и естественные граничные условия на краях $x = \pm a/2$:

$$\begin{aligned}(D_{11}c_1 W'' - D_{12}c_4 W) \delta W' &= 0; \\ (D_{11}c_1 W''' - D_{12}c_4 W' + 4D_{33}c_4 W') \delta W &= 0.\end{aligned}\quad (4.60)$$

Если эти края свободно оперты, условия (4.60) выполняются в результате того, что на таких краях $W = W'' = 0$. В случае жесткой заделки $W = W' = 0$. И наконец, для свободных краев в (4.60) обращаются в нуль выражения в круглых скобках, первое из которых в силу равенств (4.42), (4.53), (4.57), (4.58) соответствует моменту M_x , а второе — приведенной поперечной силе

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y},$$

которая вводится в классической теории изгиба пластин и подробно обсуждается в работе [9]. С учетом обозначений (4.36) уравнение (4.59) можно записать в виде

$$W^{IV} - 2k_1^2 W'' + k_2^4 W = k_p,$$

где $k_1^2 = \frac{D_2 c_4}{D_1 c_1}$; $k_2^4 = \frac{D_2 c_3}{D_1 c_1}$; $k_p = \frac{c_p}{D_1 c_1}$.

Решение этого уравнения

$$W = W_0 + \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_m(x) \quad (4.61)$$

включает частное решение $W_0(x)$ и функции $\Phi_m(x)$, форма записи которых зависит от соотношения между k_1^2 и k_2^2 . Если $k_1^2 < k_2^2$, то

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \operatorname{ch} rx \cos tx; & \Phi_2 &= \operatorname{sh} rx \sin tx; \\ \Phi_3 &= \operatorname{ch} rx \sin tx; & \Phi_4 &= \operatorname{sh} rx \cos tx,\end{aligned}$$

где $r = \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2 + k_1^2)}$; $t = \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2 - k_1^2)}$.

Для функций Φ_i можно записать следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned}\Phi_1' &= r\Phi_4 - t\Phi_3; & \Phi_2' &= r\Phi_3 + t\Phi_4; \\ \Phi_3' &= r\Phi_2 + t\Phi_1; & \Phi_4' &= r\Phi_1 - t\Phi_2; \\ \Phi_1'' &= (r^2 - t^2)\Phi_1 - 2rt\Phi_2; & \Phi_2'' &= (r^2 - t^2)\Phi_2 + 2rt\Phi_1; \\ \Phi_3'' &= (r^2 - t^2)\Phi_3 + 2rt\Phi_4; & \Phi_4'' &= (r^2 - t^2)\Phi_4 - 2rt\Phi_3; \\ \Phi_1''' &= r(r^2 - 3t^2)\Phi_4 + t(t^2 - 3r^2)\Phi_3; \\ \Phi_2''' &= r(r^2 - 3t^2)\Phi_3 - t(t^2 - 3r^2)\Phi_4; \\ \Phi_3''' &= r(r^2 - 3t^2)\Phi_2 - t(t^2 - 3r^2)\Phi_1; \\ \Phi_4''' &= r(r^2 - 3t^2)\Phi_1 + t(t^2 - 3r^2)\Phi_2.\end{aligned}$$

При $k_1^2 > k_2^2$

$$\Phi_1 = \operatorname{ch} r_1 x; \quad \Phi_2 = \operatorname{ch} r_2 x; \quad \Phi_3 = \operatorname{sh} r_1 x; \quad \Phi_4 = \operatorname{sh} r_2 x,$$

$$\text{где } r_{1,2} = \sqrt{k_1^2 \mp \sqrt{k_1^4 - k_2^4}}.$$

В дальнейшем будем рассматривать только равномерное давление $\bar{p} = p_0$ и симметричное относительно оси y (см. рис. 4.6) закрепление. Тогда в решении (4.61) следует принять $C_3 = C_4 = 0$ (прогиб должен быть четной функцией от x), т. е. получим

$$W = W_0 + C_1 \Phi_1(x) + C_2 \Phi_2(x),$$

где

$$W_0 = p_0 c / (D_2 c_2); \quad c = \int_0^b f dy. \quad (4.62)$$

Постоянные C_1, C_2 находятся из граничных условий на поперечных краях $x = \pm a/2$.

Приведем окончательные выражения для четырех основных случаев закрепления.

Если продольные края свободно оперты, в качестве аппроксимирующей функции f используется функция (4.54), коэффициенты c_i (4.57), (4.58), (4.62) имеют следующие значения:

$$c_1 = 0,04921b^9; \quad c_4 = -c_2 = 0,48571b^7; \quad c_3 = 4,8b^5; \quad c = 0,2b^5.$$

Для свободно опертых поперечных краев (т. е. если на краях $W = W'' = 0$) получим

$$w(x, y) = W_0 [1 - F_1(x)] (y^4 - 2by^3 + b^3y), \quad (4.63)$$

где

$$F_1(x) = \frac{\Phi_1(x) \overline{\Phi_2''} - \Phi_2(x) \overline{\Phi_1''}}{\overline{\Phi_1} \overline{\Phi_2''} - \overline{\Phi_2} \overline{\Phi_1''}}. \quad (4.64)$$

Здесь верхней чертой отмечены значения соответствующих функций и их производных при $x = a/2$. Для квадратной ($a = b$) пластины из бороалюминия с углами армирования $\pm 45^\circ$, которая рассматривалась выше в качестве примера,

$$w = 0,042 \frac{p_0}{D} \left[1 - \frac{r_2^2 \operatorname{ch} r_1 x \operatorname{ch} \lambda_2 - r_1^2 \operatorname{ch} r_2 x \operatorname{ch} \lambda_1}{(r_2^2 - r_1^2) \operatorname{ch} \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2} \right] \times \\ \times (y^4 - 2by^3 + b^3y),$$

где $r_1 = 4,8/b$; $r_2 = 2,06/b$; $\lambda_1 = r_1 a/2$, $\lambda_2 = r_2 a/2$.

Максимальные значения прогиба и продольной кривизны

$$w\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0,0034 \frac{p_0 b^4}{D}, \quad \kappa_x\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0,031 \frac{p_0 b^3}{D} \quad (4.65)$$

совпадают (при принятой точности вычислений) с точными значениями. При увеличении удлинения пластины (прогиб всегда

аппроксимируется функцией f вдоль короткой стороны), точность построенного решения увеличивается, а при $b/a = 0$ оно совпадает с точным решением. Максимальная погрешность проявляется, если сравнить кривизны κ_x и κ_y в центре квадратной пластины. Эти величины должны быть одинаковы, однако, рассматриваемое приближенное решение — несимметричное в отношении координат x и y — дает различные результаты — κ_x определяется вторым равенством (4.65), а $\kappa_y = 0,033p_0b^2/D$.

Если продольные края свободно оперты, а поперечные защемлены (т. е. на них $W = W' = 0$), выражение, аналогичное (4.63), имеет вид

$$w(x, y) = W_0 [1 - F_2(x)] (y^4 - 2by^3 + b^2y),$$

где

$$F_2(x) = \frac{\Phi_1(x)\bar{\Phi}_2' - \Phi_2(x)\bar{\Phi}_1'}{\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2' - \bar{\Phi}_2\bar{\Phi}_1'} \quad (4.66)$$

В случае защемленных продольных краев аппроксимирующая функция f принимается в форме (4.55) и коэффициенты c_i (4.57), (4.58), (4.62) имеют следующие значения:

$$c_1 = 0,001587b^3; \quad c_4 = -c_2 = 0,01905b^2;$$

$$c_3 = 0,8b^4; \quad c = 0,03333b^5.$$

Прогибы, соответствующие свободно опертым и защемленным поперечным краям, определяются следующими выражениями:

$$w(x, y) = W_0 [1 - F_1(x)] y^2 (b - y)^2;$$

$$w(x, y) = W_0 [1 - F_2(x)] y^3 (b - y)^3.$$

Здесь F_1 и F_2 соответствуют равенствам (4.64), (4.66), а частное решение W_0 имеет форму записи (4.62).

Отметим, что решения для консольных ортотропных пластин, полученное рассматриваемым методом, приведены в работе [65].

Традиционной формой нагружения панелей, работающих в качестве элементов тонкостенных конструкций, является воздействие нормальных сжимающих или касательных усилий, вызывающих потерю устойчивости плоской формы равновесия (рис. 4.7). Рассмотрим в линеаризованной постановке (см. § 2.9) задачу устойчивости композитных панелей с симметричным расположе-

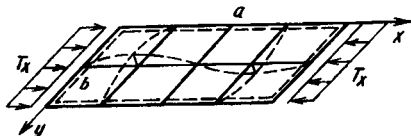
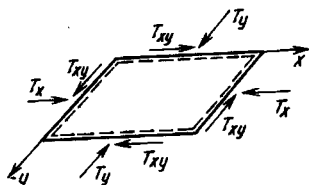


Рис. 4.7. Прямоугольная пластина, нагруженная усилиями, действующими в ее плоскости

Рис. 4.8. Форма потери устойчивости пластины, сжатой в одном направлении

нием слоев по толщине. Для этого необходимо записать уравнения устойчивости (2.179)–(2.181), учитывающие докритические усилия $N_x^0 = -T_x$, $N_y^0 = -T_y$, $N_{xy}^0 = -T_{xy}$ (см. рис. 4.7) в условиях равновесия. Эти уравнения формально совпадают с уравнениями (4.1)–(4.8), если в уравнении (4.3) ввести некоторое условное давление

$$\bar{p} = - \left(T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (4.67)$$

Подставляя $\bar{p}$ согласно (4.67) в уравнения (4.21), (4.33), (4.35), (4.38), можно записать общие уравнения устойчивости, а также уравнения, соответствующие различным упрощенным вариантам теории, рассмотренным в § 4.1. В частности, если структура панели симметрична по толщине, а деформации межслоевого сдвига не учитываются, с помощью равенств (4.35), (4.67) получим классическое уравнение устойчивости

$$L(w) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (4.68)$$

Задачи устойчивости ортотропных пластин, описываемые уравнением (4.68), подробно обсуждаются в работе [58].

Рассмотрим наиболее распространенный расчетный случай — одноосное сжатие свободно опертой пластины (рис. 4.8). Полагая $T_y = T_{xy} = 0$, перепишем уравнение (4.68) в виде

$$L(w) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (4.69)$$

Необходимо найти минимальное значение T_x , при котором уравнение (4.69) имеет ненулевое решение $w(x, y)$. Для свободно опертой по всем сторонам пластины это решение может быть задано в форме двойного тригонометрического ряда (4.43). Подставляя его в уравнение (4.69), можно заключить, что при $w_{mn} \neq 0$ оно удовлетворяется, если

$$L_{mn} - \lambda_m^2 T_x = 0,$$

где L_{mn} определяется равенством (4.47). Выражая T_x , получим

$$T_x = \frac{\pi^2}{b^2} K_{mn}, \quad (4.70)$$

где

$$K_{mn} = D_1 \lambda + 2D_3 n^2 + D_2 \frac{n^4}{\lambda} \quad (4.71)$$

и $\lambda = (mb/a)^2$. Таким образом, усилие T_x , при котором существует искривленная форма равновесия пластины, зависит от чисел полуволи деформированной поверхности m и n . Например, на рис. 4.8 показана такая поверхность для $m = 2$ и $n = 1$. Найдем m и n , соответствующие минимальному значению T_x . Из (4.71) следует, что $n = 1$, а зависимости K_{mn} от удлинения пластины,

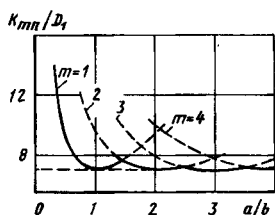


Рис. 4.9. Зависимость коэффициента устойчивости K_{mn} от числа m полуволи и удлинения пластины, сжатой в одном направлении

соответствующие различным значениям m и позволяющие осуществить минимизацию функции $K_{mn}(m)$ при заданном удлинении, представлены на рис. 4.9.

Кривые построены для пластины из углепластика с углами армирования $\pm 45^\circ$. Минимальным значениям K_{mn} соответствуют сплошные участки кривых. Координаты точек пересечения кривых находятся из условий $K_{mn}(m-1) = K_{mn}(m)$ и $K_{mn}(m) = K_{mn}(m+1)$. С помощью (4.71) можно получить следующее неравенство, позволяющее найти m для пластины с заданными геометрическими и жесткостными параметрами:

$$m(m-1) < \frac{a^2}{b^2} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} < m(m+1).$$

Пусть, например, $D_2 = D_1$ и $a/b = 1,75$. Очевидно, неравенство $m(m-1) < 3,06 < m(m+1)$ выполняется только при $m = 2$, что соответствует рис. 4.9. Для получения приближенного и более простого результата осуществим минимизацию K_{mn} (4.71) согласно условию $\partial K_{mn}/\partial \lambda = 0$. В результате получим

$$\lambda^2 = \frac{D_2}{D_1}; \quad K_{mn} = 2(\sqrt{D_1 D_2} + D_2). \quad (4.72)$$

Это значение K_{mn} соответствует на рис. 4.9 штриховой горизонтальной линии ($K_{mn}/D_1 = 7,22$). Из графика следует, что такая приближенная минимизация позволяет получить приемлемый для практических расчетов результат, если $a/b \geq 2$. Подстановка K_{mn} в равенство (4.70) дает следующее приближенное выражение для критического усилия:

$$T_k = \frac{2\pi^2}{b^3} \sqrt{D_1 D_2} \left(1 + \frac{D_2}{\sqrt{D_1 D_2}}\right). \quad (4.73)$$

Для однородной по толщине пластины с учетом равенств (4.41) получим

$$T_k = \frac{\pi^2 h^3}{6b^3} \left(\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} + \bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy}\right). \quad (4.74)$$

Эта формула позволяет проиллюстрировать эффективность использования композитов в сжатых панелях. Рассмотрим, например, уже обсуждавшуюся выше пластину из углепластика с углами армирования $\pm 45^\circ$, у которой (см. табл. 1.4) $\bar{E}_x = \bar{E}_y = 51,5$ ГПа, $\mu_{xy} \bar{E}_x = 41,5$ ГПа, $G_{xy} = 46,5$ ГПа и $\rho = 1,5 \times 10^3$ кг/м³, и сравним ее с пластинами из стали ($\bar{E} = 210$ ГПа, $\rho = 7,85 \times 10^3$ кг/м³) и алюминиевого сплава ($\bar{E} = 72$ ГПа, $\rho = 2,7 \times 10^3$ кг/м³). При одинаковой массе толщина пластины из угле-

пластика будет в 5,2 раза больше, чем у стальной, и в 1,8 раза больше, чем у алюминиевой, и поскольку формула (4.74) включает h^3 , критическое усилие у композитной пластины будет в 63 раза больше, чем у стальной, и в 7,5 раза больше, чем у алюминиевой.

При выводе формулы (4.73) предполагалось, что при сжатии пластины в направлении оси x ее продольные кромки $y = 0$ и $y = b$ (см. рис. 4.8) могут свободно смещаться в направлении оси y . Однако в реальных конструкциях этому смещению препятствуют опорные ребра или смежные панели. Рассмотрим в связи с этим устойчивость пластины, продольные кромки которой закреплены от поперечных перемещений. Примем в соотношениях (4.31) $e_y = 0$. Из этих соотношений следует, что при сжатии пластины усилиями T_x в ней возникают (также сжимающие) усилия $T_y = c_{yx}T_x/c_y$, т. е. по существу за счет эффекта Пуассона ($c_{yx}/c_y = \mu_{yx}$) пластина находится в условиях двухосного сжатия. Уравнение устойчивости (4.68) имеет вид

$$L(w) + T_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

где $\mu = c_{yx}/c_y$. По аналогии с выводом формулы (4.70) получим

$$K_{mn} = \frac{n^2}{1 + \frac{\mu}{\lambda}} \left(D_1 \lambda + 2D_3 + D_2 \frac{1}{\lambda} \right), \quad (4.75)$$

где $\lambda = (mb/na)^2$. В металлических пластинах эффект закрепления продольных кромок обычно не учитывают, однако у композитных пластин коэффициент Пуассона зависит от структуры материала, и обсуждаемый эффект может оказаться существенным. В частности, для пластины из углепластика с углами армирования $\pm 45^\circ$, рассматривавшейся выше в качестве примера, $\mu = 0,805$; зависимости $K_{mn}(a/b)$, соответствующие равенству (4.75), показаны на рис. 4.10. Из графика следует, что эти зависимости монотонны и минимальным значениям K_{mn} соответствует $m = 1$ и $n = 1$. Однако такая ситуация характерна для больших значений μ . При малых μ (например, для пластины из углепластика с углами армирования 0 и 90° $\mu = 0,016$) $n = 1$, а зависимости $K_{mn}(a/b)$ соответствуют рис. 4.9. Для получения приближенных формул, аналогичных (4.72), (4.73), примем в (4.75) $n = 1$ и воспользуемся условием минимума $\partial K_{mn}/\partial \lambda = 0$. В результате найдем

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + \frac{D_2 - 2D_3\mu}{D_1}} - \mu. \quad (4.76)$$

Для существования действительных и положительных значений λ необходимо выполнение условия

$$\mu < D_2/2D_3. \quad (4.77)$$

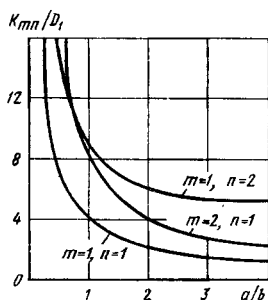


Рис. 4.10. Зависимость коэффициента устойчивости K_{mn} от чисел m, n полуволи и удлинения пластины, сжатой в двух направлениях

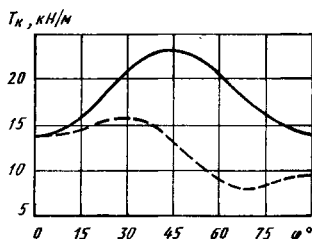


Рис. 4.11. Зависимость критического усилия от угла армирования для композитной пластины со свободно смещающимися (сплошная линия) и закрепленными (пунктирная линия) продольными кромками

Если условие (4.77) нарушается, то $m = 1$, $\lambda = (b/a)^2$, и согласно равенствам (4.70), (4.75) при $\mu > D_2/2D_3$ получим

$$T_K = \frac{\pi^2}{b^2 + \mu a^2} \left[D_1 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 2D_3 + D_2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right].$$

Если условие (4.77) выполняется, то λ определяется равенством (4.76). При малых μ в результате приближенного вычисления корня будем иметь

$$\lambda = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} - \mu \left(1 + \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} \right);$$

$$T_K = \frac{2\pi^2}{b^2} \sqrt{D_1 D_2} \left(1 + \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} \right) \left[1 + \mu \frac{D_3}{D_2} - \right.$$

$$\left. - \mu \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \left(1 + \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} \right) \right].$$

Рис. 4.11 иллюстрирует влияние обсуждаемого эффекта на критические усилия квадратных пластин из углепластика с углами армирования $\pm \phi$. Решение, соответствующее неподвижным продольным кромкам, удовлетворительно подтверждается экспериментальными результатами (табл. 4.1).

В заключение остановимся на задаче динамики композитных панелей. Рассматривая только изгибные колебания и пренебрегая деформациями поперечного сдвига и инерционными членами, связанными с поворотом нормали (см. § 2.10, 3.1), запишем уравнение движения, учитывающее растягивающие постоянные мембранные усилия T_x и T_y (см. рис. 4.1):

$$L(w) - T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \bar{p}(x, y, t). \quad (4.78)$$

Здесь оператор L определяется равенством (4.36), и согласно результатам, полученным в § 2.10, аналогично (4.40) имеем

$$B_p = 2 \sum_{i=1}^{k/2} \rho_i (z_i - z_{i-1}).$$

Для свободно опертой пластины прогиб может быть задан в форме разложения типа (4.43), т. е.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \sin \omega_{mn} t.$$

Подставляя это разложение в уравнение (4.78) и принимая $p = 0$, получим частоты свободных колебаний

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{1}{B_p} (L_{mn} + T_x \lambda_m^2 + T_y \lambda_n^2)}. \quad (4.79)$$

Здесь L_{mn} имеет форму записи (4.47). Из формулы (4.79) следует, что предварительное растяжение увеличивает ω_{mn} , а сжатие уменьшает. Комбинация сжимающих усилий T_x , T_y , при которой выражение в круглых скобках обращается в нуль, является критической и соответствует статической потере устойчивости пластины.

§ 4.3. Особенности расчета подкрепленных, трехслойных и сетчатых панелей

Характерной особенностью подкрепленных панелей (см. рис. 2.17) является одностороннее расположение элементов подкрепляющего набора, что, как правило, исключает использование результатов, полученных в § 4.2 и относящихся к пластинам с симметричной структурой. Согласно § 2.11 панели, подкрепленные часто расположенными одинаковыми ребрами, рассматриваются как условно однородные и слоистые. Если не учитывать обычно несущественные деформации поперечного сдвига, то для описания поведения таких панелей можно воспользоваться уравнениями (4.37), (4.38). Однако более простые результаты получаются, если решать эту задачу не в смешанной форме, приводящей к уравнениям (4.37), (4.38), а в перемещениях. При этом разрешающих уравнений будет три, т. е. на одно больше, но их коэффициенты оказываются значительно проще коэффициентов уравнений (4.37), (4.38), что снижает вероятность ошибки при расчете.

Для записи соответствующих уравнений следует исключить из системы (4.1) — (4.3) поперечные силы Q_x , Q_y , заменить в получаю-

4.1. Расчетные и экспериментальные значения критического усилия для композитных пластин

h/b	Угол армирования, ...°	T_p	T_v
		кН	
0,006	0;45	1,07	1,06
	0;90	1,95	1,86
0,009	45	3,28	3,04
	0;45; 90	2,45	2,45

щихся в результате трех уравнения равновесия усилия и моменты через деформации и кривизны с помощью физических соотношений (4.4), (4.5) и воспользоваться геометрическими соотношениями (4.7), (4.8), приняв в них $\psi_x = \psi_y = 0$. Окончательно получим

$$L_{1u}^{(1)}(u) + L_{1v}^{(1)}(v) + L_{1w}^{(1)}(w) = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (4.80)$$

$$L_{3u}^{(1)}(u) + L_{3v}^{(1)}(v) + L_{3w}^{(1)}(w) = \bar{p},$$

где

$$L_{1u}^{(1)} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{1v}^{(1)} = L_{2u}^{(1)} = (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

$$L_{1w}^{(1)} = L_{3u}^{(1)} = -C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (C_{12} + 2C_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

$$L_{2v}^{(1)} = B_{33} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{2w}^{(1)} = L_{3v}^{(1)} = -C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (C_{12} + 2C_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

$$L_{3w}^{(1)} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Для свободной оперттой панели перемещения и нагрузка представляются в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y; \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ \bar{p} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \end{aligned} \quad (4.81)$$

где $\lambda_m = \pi m/a$, $\lambda_n = \pi n/b$. Подстановка рядов (4.81) в уравнения (4.80) приводит к системе алгебраических уравнений относительно u_{mn} , v_{mn} , w_{mn} , решение которой имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{mn} &= \frac{p_{mn}}{A} (a_{13}a_{23} - a_{13}a_{23}); \quad v_{mn} = \frac{p_{mn}}{A} (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}); \\ w_{mn} &= \frac{p_{mn}}{A} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \end{aligned} \quad (4.82)$$

где

$$A = a_{33} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23};$$

$$a_{11} = B_{11}\lambda_m^2 + B_{33}\lambda_n^2; \quad a_{12} = (B_{12} + B_{33})\lambda_m\lambda_n;$$

$$a_{22} = B_{33}\lambda_m^2 + B_{22}\lambda_n^2;$$

$$a_{13} = C_{11}\lambda_m^3 + (C_{12} + 2C_{33})\lambda_m\lambda_n^2;$$

$$a_{23} = C_{22}\lambda_n^3 + (C_{12} + 2C_{33})\lambda_m^2\lambda_n;$$

$$a_{33} = D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{33})\lambda_m^2\lambda_n^2 + D_{22}\lambda_n^4.$$

По найденным перемещениям с помощью геометрических соотношений (4.7), (4.8) можно определить обобщенные деформации и далее, согласно равенствам (4.23)—(4.25) — деформации и напряжения в обшивке и ребрах.

Рассмотрим устойчивость подкрепленной панели, сжатой усилиями T_x (см. рис. 4.8). На основании соотношения (4.67) для постановки задачи устойчивости достаточно ввести условную нагрузку

$$\bar{p} = -T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.83)$$

или с учетом (4.81) $p_{mn} = T_x \lambda_m^2 w_{mn}$. Тогда из равенства (4.82) получим

$$T_x = \frac{1}{\lambda_m^2} \left(a_{33} - \frac{a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right). \quad (4.84)$$

Критическое значение усилия находится в результате минимизации (4.84) по параметрам λ_m и λ_n .

Равенство (4.84) определяет критическую нагрузку панелей с произвольной структурой материала по толщине и может быть значительно упрощено для одной из наиболее распространенных конструктивных форм подкрепленных панелей — обшивки, усиленной в одном направлении параллельными ребрами. Для иллюстрации такого упрощения рассмотрим панель, подкрепленную в направлении оси x регулярной системой ребер, сечение которых показано на рис. 4.12. Предположим, что панель является квадратной в плане со сторонами $a = b = 0,4$ м, состоит из обшивки с толщиной $\delta = 2 \times 10^{-3}$ м, образованной из чередующихся слоев углепластика с углами армирования $\pm 45^\circ$ и 90° (по отношению к направлению нагружения), и ребер из углепластика с продольным армированием. Параметры ребер $b_1 = 0,02$ м, $t = 2 \times 10^{-3}$ м; расстояние между ребрами $a_1 = 0,08$ м. Используя схему определения жесткостей, описанную в § 2.11, получим:

$$B_{11} = 229; B_{12} = 41,5; B_{22} = 231;$$

$$B_{33} = 51,5 \text{ МН/м};$$

$$C_{11} = 1,38; C_{12} = 0,0415;$$

$$C_{22} = 0,231; C_{33} = 0,0515 \text{ МН};$$

$$D_{11} = 16,79; D_{12} = 0,0554;$$

$$D_{22} = 0,309; D_{33} = 0,0687 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

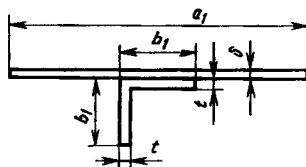


Рис. 4.12. Геометрические параметры обшивки и ребер подкрепленной панели

4.2. Точные и приближенные значения относительного критического усилия для пластин из углепластика

Структура	$\bar{T}_T$	$\bar{T}_M$	Погрешность Δ , %
0/90	4,449	4,449	0,0
0/45	7,870	7,769	-1,3
45/90	7,714	7,251	-6,0
0/45/90	13,41	17,66	+31
0/90/45	41,99	28,48	-32
45/0/90	40,13	27,30	-32
0/45/90/0	58,71	56,24	-4,2
90/0/45/90	58,71	56,24	-4,2
90/45/0/45	96,81	93,26	-3,7
90/45/0/45/0	131,8	145,4	+10
0/90/45/90/45	205,1	171,9	-16
0/90/45/0/90/45	362,8	335,8	-7,4

Отсюда следует, что смешанные и изгибные жесткости с индексом 11 (продольные) значительно превосходят соответствующие жесткости с индексами 22 (поперечные) и 33 (сдвиговые). Учитывая, что продольная жесткость создается ребрами, а поперечная и сдвиговая — обшивкой, можно попытаться условно ввести для каждого направления свою нейтральную плоскость, приняв вместо равенств (4.9)

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}; \quad C_{mn} = 0; \quad e_{mn} = \frac{I_{mn}^{(1)}}{I_{mn}^{(0)}}; \quad D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - \frac{[I_{mn}^{(1)}]^2}{I_{mn}^{(0)}}.$$

Эта операция является приближенной, однако расчет при этом существенно упрощается. При $C_{mn} = 0$ критическая нагрузка может быть найдена по формулам (4.70) или (4.73), соответствующим пластине с симметричной структурой. Обсуждаемый прием был предложен в работах [49, 50], где назван методом минимальных жесткостей (изгибные жесткости при этом для каждого направления являются минимальными). Для рассматриваемой панели точное решение, основанное на соотношении (4.84), дает значение $T_K = 562$ кН/м, а приближенное — $T_K = 536$ кН/м, т. е. отличается от точного всего на 4,6 %, причем в меньшую сторону, что повышает запас по устойчивости.

Отметим, что применительно к гладким пластинам, у которых жесткости в различных направлениях соизмеримы между собой, метод минимальных жесткостей следует использовать с осторожностью. В табл. 4.2 представлены точные ($\bar{T}_T$) и приближенные ($\bar{T}_M$), следующие из этого метода, относительные значения критического усилия для пластин из углепластика с удлинением $a/b = 2$ и с различной структурой. Во втором столбце приведен порядок чередования слоев, начиная от поверхности пластины.

Рассмотрим теперь общие уравнения (4.16), (4.21), (4.22), учитывающие несимметричность пакета по толщине и деформации поперечного сдвига. Для случая свободного опирания решение этих уравнений и внешняя нагрузка представляются в следующем виде:

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y;$$

$$\theta_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_x^{mn} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y;$$

$$\theta_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_y^{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y; \quad (4.85)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y;$$

$$\bar{p} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y.$$

Подставляя ряды (4.85) в исходные уравнения и приравнявая коэффициенты при одинаковых комбинациях тригонометрических функций, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} F_{mn} b_{11} + \theta_x^{mn} b_{12} + \theta_y^{mn} b_{13} + w_{mn} b_{14} &= 0; \\ F_{mn} b_{21} + \theta_x^{mn} b_{22} + \theta_y^{mn} b_{23} + w_{mn} b_{24} &= 0; \\ F_{mn} b_{31} + \theta_x^{mn} b_{32} + \theta_y^{mn} b_{33} + w_{mn} b_{34} &= 0; \end{aligned} \quad (4.86)$$

где

$$\begin{aligned} F_{mn} b_{41} + \theta_x^{mn} b_{42} + \theta_y^{mn} b_{43} + p_{mn} &= 0, \\ b_{11} &= c_y \lambda_m^4 + (c - 2c_{xy}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + c_x \lambda_n^4; \\ b_{12} &= -B_{yx} \lambda_m^3 - (B_x + C) \lambda_m \lambda_n^2; \\ b_{13} &= -B_{xy} \lambda_n^3 - (B_y + C) \lambda_m^2 \lambda_n; \quad b_{14} = 0; \\ b_{21} &= \frac{1}{K_x} [C_{xy} \lambda_m^3 + (C_x - C) \lambda_m \lambda_n^2]; \\ b_{22} &= \frac{1}{K_x} (D_x \lambda_m^2 + D \lambda_n^2) + 1; \\ b_{23} &= \frac{1}{K_x} (D + D_{xy}) \lambda_m \lambda_n; \quad b_{24} = \lambda_m; \\ b_{31} &= \frac{1}{K_y} [C_{yx} \lambda_n^3 + (C_y - C) \lambda_m^2 \lambda_n]; \\ b_{32} &= \frac{1}{K_y} (D + D_{yx}) \lambda_m \lambda_n; \\ b_{33} &= \frac{1}{K_y} (D_y \lambda_n^2 + D \lambda_m^2) + 1; \quad b_{34} = \lambda_n; \\ b_{41} &= C_{xy} \lambda_m^4 + (C_x + C_y - 2C) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + C_{yx} \lambda_n^4; \\ b_{42} &= D_x \lambda_m^3 + (2D + D_{yx}) \lambda_m \lambda_n^2; \\ b_{43} &= D_y \lambda_n^3 + (2D + D_{xy}) \lambda_m^2 \lambda_n. \end{aligned}$$

Решение уравнений (4.86) можно записать в следующей форме:

$$F_{mn} = \frac{p_{mn}}{A} [b_{12} (b_{23}b_{34} - b_{24}b_{33}) - b_{13} (b_{22}b_{34} - b_{23}b_{34})];$$

$$\theta_x^{mn} = -\frac{p_{mn}}{A} [b_{11} (b_{23}b_{34} - b_{24}b_{33}) - b_{13} (b_{21}b_{34} - b_{24}b_{31})];$$

$$\theta_y^{mn} = \frac{p_{mn}}{A} [b_{11} (b_{22}b_{34} - b_{24}b_{32}) - b_{12} (b_{21}b_{34} - b_{24}b_{31})]; \quad (4.87)$$

$$w_{mn} = -\frac{p_{mn}}{A} [b_{11} (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - b_{12} (b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + \\ + b_{13} (b_{21}b_{32} - b_{23}b_{31})],$$

где $A = b_{24} [b_{11} (b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42}) - b_{12} (b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41}) + b_{13} \times \\ \times (b_{31}b_{42} - b_{33}b_{41})] - b_{34} [b_{11} (b_{21}b_{43} - b_{23}b_{41}) - b_{12} (b_{21}b_{43} - \\ - b_{41}b_{23}) + b_{13} (b_{21}b_{42} - b_{23}b_{41})]$.

Для определения критического усилия необходимо воспользоваться формулой (4.83) для условий поперечной нагрузки. С учетом последнего равенства (4.87) получим

$$T_x^{(1)} = -\frac{A}{\lambda_m^2} [b_{11} (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - b_{12} (b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + \\ + b_{13} (b_{21}b_{32} - b_{23}b_{31})]^{-1}. \quad (4.88)$$

Решение (4.87), (4.88) соответствует общей расчетной модели и в частных случаях значительно упрощается.

Для пластин, структура которых симметрична относительно срединной плоскости, $B_x = B_y = B_{xy} = B_{yx} = C = 0$; $C_x = C_y = C_{xy} = C_{yx} = 0$; $D_x = D_{11}$, $D_y = D_{22}$; $D_{xy} = D_{yx} = D_{12}$; $D = D_{33}$ и $b_{12} = b_{21} = b_{13} = b_{31} = b_{41} = 0$. В результате решения (4.87), (4.88) принимают следующий вид:

$$F_{mn} = 0;$$

$$\theta_x^{mn} = -\frac{p_{mn}}{A} (b_{23}b_{34} - b_{24}b_{33});$$

$$\theta_y^{mn} = \frac{p_{mn}}{A} (b_{22}b_{34} - b_{24}b_{32}); \quad (4.89)$$

$$w_{mn} = -\frac{p_{mn}}{A} (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})$$

и

$$T_x^{(2)} = \frac{A}{\lambda_m^2 (b_{23}b_{32} - b_{22}b_{33})}, \quad (4.90)$$

где $A = b_{24} (b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42}) - b_{34} (b_{22}b_{43} - b_{23}b_{42})$.

Запишем равенство (4.90) в развернутом виде:

$$T_x^{(2)} = \frac{L_{mn} + \left(\frac{\lambda_m^2}{K_y} + \frac{\lambda_n^2}{K_x} \right) (D_{mn}D_{nm} - D_k^2 \lambda_m^2 \lambda_n^2)}{\lambda_m^2 \left[1 + \frac{1}{K_x K_y} (D_{mn}D_{nm} - D_k^2 \lambda_m^2 \lambda_n^2) + \frac{D_{mn}}{K_x} + \frac{D_{nm}}{K_y} \right]}, \quad (4.91)$$

где $D_{mn} = D_{11}\lambda_m^2 + D_{33}\lambda_n^2$; $D_{nm} = D_{22}\lambda_m^2 + D_{33}\lambda_n^2$; $D_k = D_{12} + D_{33}$; $L_{mn} = D_{mn}\lambda_m^2 + D_{nm}\lambda_n^2 + 2D_k\lambda_m^2\lambda_n^2$.

Если не учитываются также деформации поперечного сдвига, т. е. принимается $K_x \rightarrow \infty$, $K_y \rightarrow \infty$, то $b_{33} = b_{32} = 0$, $b_{22} = b_{33} = 1$, и равенства (4.89), (4.91) принимают следующий вид:

$$\theta_x^{mn} = -\lambda_m w_{mn}; \quad \theta_y^{mn} = -\lambda_n w_{mn}; \quad w_{mn} = \frac{P_{mn}}{L_{mn}}$$

и

$$T_x^{(3)} = L_{mn}/\lambda_m^2, \quad (4.92)$$

где $L_{mn} = D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{33})\lambda_m^2\lambda_n^2 + D_{22}\lambda_n^4$. Полученные результаты совпадают с решениями (4.46), (4.70).

Оценим влияние деформации поперечного сдвига на критическое усилие сжатой панели. На рис. 4.13 представлены зависимости относительного критического усилия $\bar{T}_k = T_k^{(2)}/T_k^{(3)}$, где $T_k^{(2)}$ и $T_k^{(3)}$ определялись в результате минимизации по λ_m и λ_n выражений (4.91) и (4.92), от параметров η , характеризующих сдвиговую податливость материала, для квадратной ($a = b$) трансверсально изотропной пластины. Кривая 1 соответствует однородной пластине, для которой $\eta_1 = Eh^2/Ga^2$, где E — модуль упругости в плоскости xy , а G — модуль сдвига в плоскостях xz , yz . Для сплошных композитных панелей $\eta_1 \approx 0,05$, т. е. деформации поперечного сдвига при проведении практических расчетов, как правило, можно не учитывать и использовать для решения задач устойчивости равенство (4.84), а для задач изгиба — решения (4.81), (4.82). Кривая 2 соответствует трехслойной панели, для которой $\eta_2 = E\delta H/Ga$, где E и δ — модуль упругости и толщина

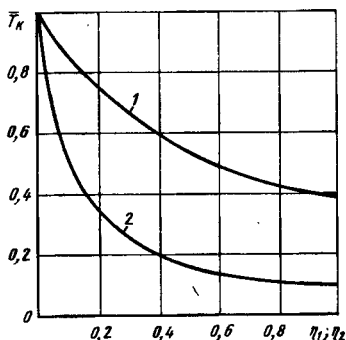


Рис. 4.13. Зависимость относительного критического усилия от параметров η , характеризующих сдвиговую жесткость однородной (1) и трехслойной (2) панелей

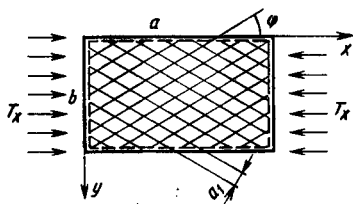


Рис. 4.14. Сетчатая композитная панель

несущих слоев, а G и H — модуль сдвига и толщина заполнителя. Из рис. 4.13 следует, что при расчете трехслойных панелей с жесткими несущими слоями и легким заполнителем (при этом параметр $\eta_2 \approx 0,5$) деформацию сдвига заполнителя необходимо учитывать. В случае несимметричной структуры пакета можно воспользоваться решениями (4.85), (4.87), (4.88) и формулами для жесткостей, приведенными в § 2.11 (см. рис. 2.20), а при одинаковых несущих слоях — равенствами (4.89), (4.91). Заметим, что при соответствующем задании координаты плоскости приведения эти равенства описывают поведение трехслойных панелей, несущие слои которых имеют одинаковую структуру, но различную толщину. В частности, для трехслойной стенки, показанной на рис. 2.20,

$$e = \frac{1}{2(h_1 + h_2)} [h_1^2 + h_2(h_3 + 2h_1 + h_2)].$$

Рассмотрим особенности расчета сетчатых композитных панелей (рис. 4.14), описанных в § 2.11. На основании равенств (2.191), (4.9) при $e = h/2$ имеем

$$B_{11} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j F_j \cos^4 \varphi_j; \quad B_{12} = B_{21} = B_{23} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j F_j \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j;$$

$$B_{22} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j F_j \sin^4 \varphi_j; \quad C_{11} = C_{12} = C_{21} = C_{22} = C_{23} = 0;$$

$$D_{11} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j J_j \cos^4 \varphi_j;$$

$$D_{12} = D_{21} = D_{22} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j J_j \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j;$$

$$D_{23} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} E_j J_j \sin^4 \varphi_j; \quad K_x = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} G_j F_j \cos^2 \varphi_j;$$

$$K_y = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} G_j F_j \sin^2 \varphi_j,$$

где n — число семейств ребер с углами $\pm \varphi_j$; $F_j = h \delta_j$; $J_j = h^3 \delta_j / 12$ — площадь сечения и момент инерции ребра j -го семейства. На рис. 4.15 приведены результаты, иллюстрирующие

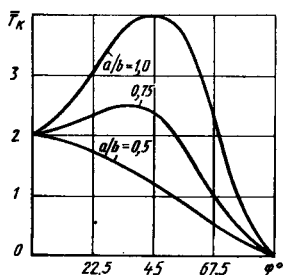


Рис. 4.15. Зависимость относительного критического усилия от угла армирования и удлинения сетчатой пластины

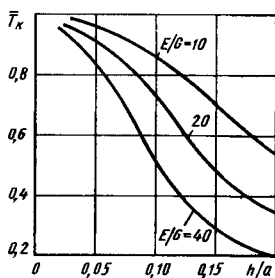


Рис. 4.16. Зависимость относительного критического усилия от высоты и сдвиговой жесткости ребер сетчатой панели

зависимость относительного критического усилия $\bar{T}_K = (T_K a_1 a^2) / (\pi^2 E J)$ от угла φ и от удлинения a/b для панели, показанной на рис. 4.14. Зависимости, приведенные на рис. 4.16, соответствующие случаю $a/b = 1$ и $\varphi = 45^\circ$, позволяют заключить, что при расчете сетчатых панелей следует учитывать деформации поперечного сдвига. Рис. 4.17 иллюстрирует эффективность усиления квадратных панелей с ребрами, расположенными под углами $\pm\varphi$, дополнительными продольными ребрами. При этом материал распределяется между ребрами с углами $\pm\varphi$ и 0° так, что масса панели остается постоянной, причем случай $k = 1$ соответствует панели без продольных ребер, а случай $k = 0$ — системе продольных ребер. Огибающие аналогичных кривых для панелей с удлинением $a/b = 4$ представлены на рис. 4.18.

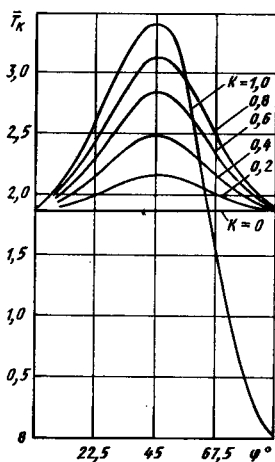


Рис. 4.17. Зависимость относительного критического усилия от конструктивных параметров квадратной сетчатой панели

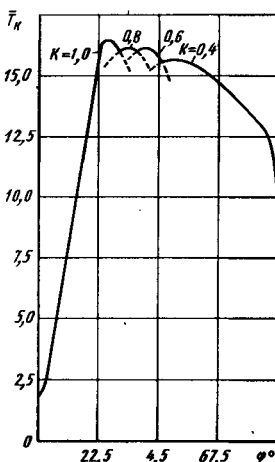


Рис. 4.18. Зависимость относительного критического усилия от конструктивных параметров сетчатой композитной панели при $a/b = 4$

§ 4.4. Закритическая деформация и несущая способность сжатых композитных панелей

Сжатые прямоугольные панели, закрепленные по контуру, воспринимают нагрузку и после потери устойчивости. Характер распределения усилий по ширине панели показан на рис. 4.19. До потери устойчивости это распределение является равномерным (рис. 4.19, б), а после потери устойчивости при дальнейшем возрастании T_x усилия N_x в средней части панели остаются близкими к критическим, а в окрестности опорного контура (N_0) возрастают (рис. 4.19, в). В строительной механике самолета и корабля [69, 84] при оценке несущей способности сжатых пластин широко используются понятия приведенной ширины пластины $b_{пр}$ (рис. 4.19, г) и редуционного коэффициента k , позволяющие записать выражение для силы, воспринимаемой пластиной следующим образом:

$$P = \int_0^b N_x dy = N_0 b_{пр} = k b N_0. \quad (4.93)$$

Таким образом, предполагается, что в средней части пластины усилия равны нулю, а в опорных зонах на ширине $b_{пр}$ они постоянны и равны N_0 . Из равенств (4.93) имеем

$$k = \frac{b_{пр}}{b} = \frac{1}{b N_0} \int_0^b N_x dy, \quad (4.94)$$

т. е. для определения редуционного коэффициента необходимо знать распределение усилий по ширине пластины в закритическом состоянии. Если, кроме того, известно предельное значение N_0 , которое для панели, состоящей из обшивки и продольных опорных ребер (см. рис. 4.2), определяется условиями прочности обшивки или устойчивости (общей или местной) опорных ребер, то по формулам (4.93), (4.94) может быть найдена предельная нагрузка, воспринимаемая обшивкой.

Закритическое поведение сжатых пластин описывается геометрически нелинейными уравнениями А. Феппля и Т. Кармана,

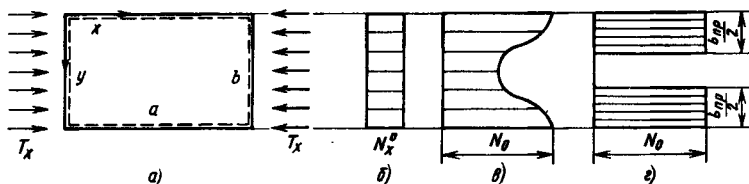


Рис. 4.19. Распределение продольных усилий по ширине сжатой прямоугольной панели (а) до потери устойчивости (б), после потери устойчивости (в) и в соответствии с расчетной моделью метода редуционных коэффициентов (г)

которые могут быть получены из уравнений (2.166), (2.170), (2.171) в результате некоторых дополнительных упрощений. Отбрасывая в уравнениях (2.166) нелинейные члены, включающие поперечные силы, не учитывая деформации поперечного сдвига и ограничиваясь слоистыми пластинами, структура которых симметрична относительно срединной плоскости, получим:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0; \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - N_x \kappa_x - N_{xy} \chi_{xy} - N_y \kappa_y = 0;$$

$$N_x = B_{11} \xi_x + B_{12} \xi_y; \quad N_y = B_{21} \xi_x + B_{22} \xi_y; \quad N_{xy} = B_{33} \xi_{xy};$$

$$M_x = D_{11} \kappa_x + D_{12} \kappa_y; \quad M_y = D_{21} \kappa_x + D_{22} \kappa_y; \quad M_{xy} = D_{33} \chi_{xy}; \quad (4.97)$$

$$\xi_x = \varepsilon_x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \xi_y = \varepsilon_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2;$$

$$\xi_{xy} = \gamma_{xy} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.98)$$

Здесь ε_x , ε_y , γ_{xy} и κ_x , κ_y , χ_{xy} определяются соотношениями (4.7), (4.8).

Представим прогиб свободно опертой пластины (см. рис. 4.19, а) в виде ($\lambda_m = \pi m/a$, $\lambda_n = \pi n/b$)

$$w = w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y. \quad (4.99)$$

Здесь w_{mn} , m , n — постоянные, подлежащие определению. Найдем перемещения u и v . Подставляя в уравнения равновесия (4.95) усилия (4.97) и выражая деформации через перемещения с помощью равенств (4.98), (4.7), получим

$$B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad (4.100)$$

$$B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$$

$$+ (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения прогиб (4.99) и отыскивая перемещения u и v в форме комбинаций степенных и тригонометриче-

ских функций с неопределенными коэффициентами, найдем

$$\begin{aligned} u &= C_1 x - \frac{w_{mn}^2}{16\lambda_m} \left[\lambda_m^2 (1 - \cos 2\lambda_n y) - \frac{B_{11}}{B_{11}} \lambda_n^2 \right] \sin 2\lambda_m x; \\ v &= C_2 y - \frac{w_{mn}^2}{16\lambda_n} \left(\lambda_n^2 (1 - \cos 2\lambda_m x) - \frac{B_{11}}{B_{11}} \lambda_m^2 \right) \sin 2\lambda_n y. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Заметим, что перемещения (4.101) удовлетворяют условиям сохранения прямолинейности опорных кромок пластины при нагружении. Действительно, при $x = 0$ и $x = a$ имеем $u = 0$ и $u = C_1 a$, а при $y = 0$ и $y = b$ — $v = 0$ и $v = C_2 b$. Постоянные C_1 и C_2 определяются из статических условий (см. рис. 4.19, а):

$$\begin{aligned} \int_0^b N_x dy &= -bT_x \quad \text{при } x = 0, x = a; \\ \int_0^a N_y dx &= 0 \quad \text{при } y = 0, y = b. \end{aligned} \quad (4.102)$$

В результате, используя соотношения (4.97), получим

$$C_1 = -\frac{B_{11}}{B} T_x - \frac{\lambda_m^2}{8} w_{mn}^2; \quad C_2 = \frac{B_{11}}{B} T_x - \frac{\lambda_n^2}{8} w_{mn}^2,$$

где $B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2$. Если продольные края $y = 0$ и $y = b$ при нагружении не смещаются в поперечном направлении, то к первому условию (4.102) добавляются равенства $u(0) = u(b) = 0$. В дальнейшем будем рассматривать одноосное сжатие, соответствующее условиям (4.102).

Перемещения (4.99), (4.101), естественно, не удовлетворяют оставшимся уравнениям равновесия (4.96). Для построения приближенного решения воспользуемся вариационным принципом Лагранжа (см. § 2.1), согласно которому минимизация полной энергии соответствует удовлетворению уравнениям равновесия. Вариация полной энергии (2.169)

$$\delta\Pi_* = \delta U + \delta\bar{U} - \delta A = 0, \quad (4.103)$$

где δU определяется равенством (4.28) при $\psi_x = \psi_y = 0$; нелинейная составляющая (2.168)

$$\begin{aligned} \delta\bar{U} &= \int_0^a \int_0^b \left\{ N_x \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + N_{xy} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy; \end{aligned}$$

вариация работы внешних сил

$$\delta A = -T_x \int_0^a \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

Записывая равенство (4.103) через w_{mn} с помощью соотношений (4.97), (4.98), (4.99), (4.101) и осуществляя варьирование по w_{mn} , окончательно получим

$$w_{mn}^2 = \frac{16B_{11}B_{22}\lambda_m^2}{B(B_{11}\lambda_m^4 + B_{22}\lambda_n^4)} (T_x - T_{mn}), \quad (4.104)$$

где

$$T_{mn} = \frac{1}{\lambda_m^2} (D_1\lambda_m^4 + 2D_3\lambda_m^2\lambda_n^2 + D_2\lambda_n^4). \quad (4.105)$$

Сопоставляя равенства (4.105) и (4.70), можно заключить, что минимальное (по m и n) значение T_{mn} определяет критическое значение сжимающего усилия T_k , которое было установлено в § 4.2. Из соотношения (4.104) следует, что искривленная форма равновесия пластины существует, если $T_x > T_k$.

Определение амплитуды прогиба u_{mn} по формуле (4.104) осложняется тем, что при возрастании T_x параметры m и n не сохраняются на уровнях, соответствующих критической нагрузке, — в процессе нагружения деформированная поверхность пластины может скачкообразно перестраиваться [26] и числа полуволн m и n могут увеличиваться. Для определения m и n , соответствующих заданному значению T_x , рассмотрим изменение полной энергии, которая может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \Pi_0 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (M_{xx}u_{xx} + M_{yy}u_{yy} + M_{xy}u_{xy} + N_{xx}u_x + \\ + N_{yy}u_y + N_{xy}u_{xy}) dx dy + T_x \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx \end{aligned}$$

и для рассматриваемой задачи с учетом решения (4.104) записывается в форме

$$\Pi_0 = \frac{T_x B_{33} ab}{2B} \left[1 + \frac{2B_{11}\lambda_m^2\lambda_n^4}{B_{11}\lambda_m^4 + B_{22}\lambda_n^4} \left(1 - \frac{T_{mn}}{T_x} \right)^2 \right].$$

На рис. 4.20 показана зависимость $\Pi_0(T_x)$ для сжатой пластины. Кривая 1 соответствует плоской форме равновесия. При $T_x = T_k$ происходит потеря устойчивости и при $T_k < T_x < T_1$ реализуется участок кривой 2, а m и n соответствуют форме, при которой пластина теряет устойчивость. При $T_x = T_1$, $T_x = T_2$ и т. д. деформированная поверхность перестраивается и соответственно изменяются m и n . Из рис. 4.20 следует, что из кривых, пересекающих линию уровня полной энергии $\Pi_0 = \text{const}$, в дей-

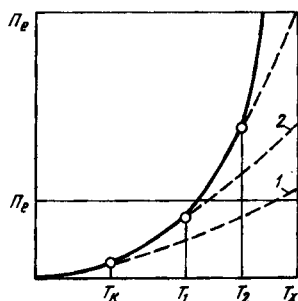


Рис. 4.20. К определению параметров волнообразования сжатой панели

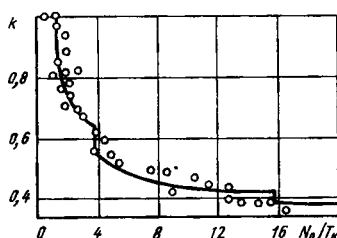


Рис. 4.21. Сравнение расчетных (—) и экспериментальных (o) значений редукционного коэффициента

ствительности реализуется та, для которой T_x имеет наименьшее значение. Соответствующие этой кривой значения m и n и следует подставить в формулу (4.104) для рассматриваемого этапа нагружения.

Для пластин, сжатых в одном направлении, как правило, $n = 1$, а значение T_x , соответствующее точке пересечения кривых $\Pi_e(T_x, m)$ и $\Pi_e(T_x, m + 1)$, можно найти из условия

$$\frac{T_x + T_{(m+1)n}}{T_x + T_{mn}} = \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \sqrt{\frac{B_{11}\lambda_{m+1}^4 + B_{22}\lambda_n^4}{B_{11}\lambda_m^4 + B_{22}\lambda_n^4}}.$$

В работе [41] приводится найденный методом конечных разностей результат $T_1 = 3,28T_k$, определяющий усилие, соответствующее первой перестройке деформированной поверхности изотропной пластины (см. рис. 4.20). Описанный выше способ дает $T_1 = 3,08T_k$. Отметим, что предлагаемый способ [2] выбора m и n не является единственно возможным. В работе [104] для этой цели используется условие минимума нагрузки, обеспечивающей заданное сближение нагруженных кромок пластины.

Таким образом, изложенный способ определения m и n , а также равенства (4.99), (4.101), (4.104), (4.105) позволяют найти перемещения u , v , w , соответствующие заданной сжимающей нагрузке T_x . Геометрические соотношения (4.98), (4.7), (4.8) определяют деформации и кривизны; по формулам, аналогичным (4.23):

$$e_x = \bar{e}_x + \alpha x; \quad e_y = \bar{e}_y + \alpha y; \quad e_{xy} = \bar{e}_{xy} + \alpha x y$$

находятся деформации в слоях в координатах x , y , и, наконец, с помощью равенств (4.24), (4.25) могут быть получены деформации и напряжения в координатах $1, 2$, связанных с направлением армирования слоя.

Для того чтобы найти редукционный коэффициент, запишем выражение для продольного усилия

$$N_x = - \left(T_x + \frac{B w_{mn}^2}{8 B_{22}} \lambda_m^2 \cos 2 \lambda_n y \right). \quad (4.106)$$

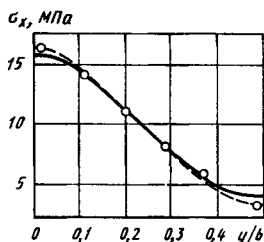


Рис. 4.22. Распределение продольного напряжения по ширине панели после потери устойчивости:

— — — решение первого приближения;
 — — — уточненное решение; ○ — экспериментальные результаты

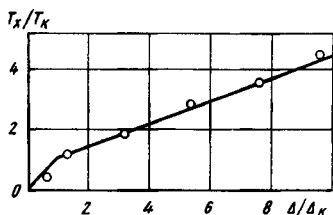


Рис. 4.23. Сравнение расчетной диаграммы деформирования сжатой панели (—) с экспериментальными результатами (○)

Тогда равенство (4.94) дает

$$k = \frac{1}{3 + \eta} \left(1 + \eta + 2 \frac{T_{\pi}}{N_0} \right), \quad (4.107)$$

где $\eta = B_{22} \lambda_n^4 / (B_{11} \lambda_m^4)$. В работе [26] приведены результаты экспериментального определения редуцированного коэффициента для изотропных пластин. На рис. 4.21 эти результаты (точки) сопоставляются с формулой (4.107). Вертикальные разрывы на расчетной кривой соответствуют усилиям T_1 и T_2 (см. рис. 4.20). В работе [98] представлены результаты экспериментального исследования однородной по толщине композитной пластины с параметрами $h = 2,506 \times 10^{-3}$ м; $E_x = 28,06$ ГПа; $E_y = 5,3$ ГПа; $G_{xy} = 2,16$ ГПа; $\mu_{yx} = 0,33$.

На рис. 4.22 показано распределение нормальных напряжений $\sigma_x = N_x/h$ на половине ширины такой пластины, сжатой усилиями $T_x = 2T_K$. Сплошная линия соответствует формуле (4.106), точки — результатам измерения. Рис. 4.23 иллюстрирует зависимость сжимающего усилия от относительного сближения нагруженных кромок Δ (индекс к соответствует критической нагрузке).

Представленное на рис. 4.21—4.23 сопоставление расчетных и экспериментальных результатов свидетельствует о том, что построенное приближенное решение удовлетворительно описывает закритическое поведение сжатой пластины. Это обстоятельство позволяет воспользоваться методом возмущений и построить решение, близкое к точному. С этой целью представим прогиб пластины в виде $w = w_0 + w_1$, где w_0 — уже найденное опорное решение (4.99), (4.104), а w_1 — дополнительный прогиб, который считается малым по сравнению с w_0 и представляется для свободной опертой пластины двойным тригонометрическим рядом

$$w_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \sin \lambda_i x \sin \lambda_j y, \quad (4.108)$$

где $\lambda_i = \pi i/a$; $\lambda_j = \pi j/b$. Предположение о малости w_1 позволяет осуществить линеаризацию геометрических соотношений (4.98) и записать их в следующем виде:

$$\begin{aligned}\xi_x &= \varepsilon_x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x}; \\ \xi_y &= \varepsilon_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial y}; \\ \xi_{xy} &= \gamma_{xy} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial x}.\end{aligned}$$

Определение дополнительного состояния сводится к решению линейной задачи, которое строится следующим образом. Аналогично прогибу перемещения u и v также представляются в виде сумм $u = u_0 + u_1$, $v = v_0 + v_1$, и из уравнений равновесия (4.100) дополнительные перемещения u_1 и v_1 выражаются через известное опорное решение u_0 , v_0 , w_0 и дополнительный прогиб w_1 (4.108). Осуществляя в вариационном уравнении (4.103) варьирование по коэффициентам ряда (4.108) A_{ij} , можно получить для них линейную систему алгебраических уравнений, решение которой определяет w_1 , и далее u_1 и v_1 . Не останавливаясь на подробном изложении этих достаточно громоздких операций, отметим, что для композитных пластин амплитуда прогиба w_1 составляет 2—5 % от амплитуды прогиба w_0 [1]. При этом для определения w_1 в разложении (4.108) достаточно учесть четыре первых члена. На рис. 4.22 уточненному решению, полученному методом возмущений, соответствует штриховая линия. Из рис. 4.22, 4.23 следует, что для практических расчетов можно ограничиться приближенным решением (4.99), (4.101), (4.104).

Полученные выше результаты относились к пластинам с симметричной структурой материала по толщине. В случае произвольного расположения слоев равенство (4.104) обобщается следующим образом:

$$t_1 w_{mn}^3 + t_2 w_{mn}^3 + t_3 w_{mn} + t_4 = 0, \quad (4.109)$$

где

$$\begin{aligned}t_1 &= \frac{B\lambda_n^2}{16B_{22}} \left(\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} + \frac{B_{22}\lambda_n^2}{B_{11}\lambda_m^2} \right); \\ t_2 &= -\frac{1}{ab} \left\{ \frac{B\lambda_m}{B_{33}\lambda_n} \left(l_1 + \frac{B_{22}\lambda_n^4}{B_{11}\lambda_m^4} l_2 \right) - \left[(C_{11} - B_{11}l_1) \frac{\lambda_m}{\lambda_n} + \right. \right. \\ &\quad \left. + (C_{12} - B_{12}l_2) \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \right] \left(1 - \frac{B_{12}\lambda_n^2}{B_{11}\lambda_m^2} \right) - \left[(C_{22} - B_{22}l_2) \frac{\lambda_n}{\lambda_m} + \right. \\ &\quad \left. + (C_{12} - B_{12}l_1) \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \right] \left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} - \frac{B_{12}}{B_{33}} \right) \Big\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_3 = & -(T_x - T_{mn}) + \lambda_n^2 \{ (l_1 + l_2) [B_{33} (l_1 + l_2) - 2C_{33}] - \\
& - \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} l_1 \left[C_{11} - B_{11} l_1 + (C_{12} - B_{12} l_2) \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \right] - \\
& - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} l_2 \left[C_{22} - B_{22} l_2 + (C_{12} - B_{12} l_1) \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} \right] \}; \\
t_4 = & - \frac{8T_x B_{33}}{B \lambda_m^2 ab} \left[\left(C_{11} - C_{22} \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) \frac{\lambda_m}{\lambda_n} + \left(C_{12} - C_{22} \frac{B_{12}}{B_{22}} \right) \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \right]; \\
l_1 = & \frac{C_{11} \left(B_{22} + B_{33} \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} \right) - B_{12} (C_{12} + 2C_{33}) - \\
& - [C_{12} (B_{12} + B_{33}) - B_{23} (C_{13} + 2C_{33})] \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}}{B_{33} \left(B_{11} \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} + B_{22} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} - 2B_{12} \right) + B}; \\
l_2 = & \frac{C_{22} \left(B_{11} + B_{33} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \right) - B_{12} (C_{12} + 2C_{33}) - \\
& - [C_{12} (B_{12} + B_{33}) - B_{11} (C_{12} + 2C_{33})] \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2}}{B_{33} \left(B_{11} \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} + B_{22} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} - 2B_{12} \right) + B}.
\end{aligned}$$

Решение уравнения (4.109) определяет амплитуду прогиба, соответствующего приближенному решению (4.99). Уточнение этого решения методом возмущений показывает, что для получения дополнительного прогиба w_1 в разложении (4.108) необходимо учесть 16 первых членов. Для типовых композитных пластин погрешность приближенного решения по максимальному прогибу составляет 5—7 %, а по продольному усилию N_x — 5—10 %. В качестве

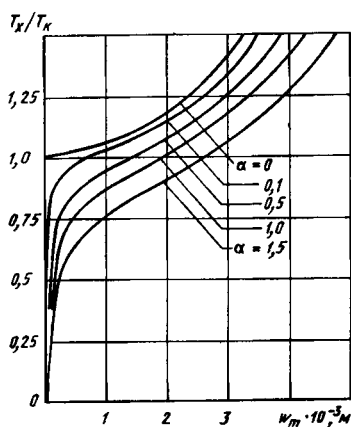


Рис. 4.24. Зависимость максимального прогиба от относительной величины сжимающего усилия для композитных пластин с различным расположением слоев по толщине

примера рассмотрим квадратную пластину из углепластика, образованную из пяти слоев со следующими углами армирования и толщинами: $\varphi_1 = 0$, $h_1 = 2 \times 10^{-3}$ м; $\varphi_2 = 90^\circ$, $h_2 = 4 \times 10^{-4}$ м; $\varphi_3 = 0$, $h_3 = 1 \times 10^{-3}$ м; $\varphi_4 = 90^\circ$, $h_4 = 6 \times 10^{-4}$ м; $\varphi_5 = \pm 45^\circ$, $h_5 = 8 \times 10^{-4}$ м. Для этой пластины был проведен параметрический анализ, предусматривавший изменение смешанных жесткостей пропорционально параметру α . На рис. 4.24 показаны соответствующие зависимости максимального прогиба w_m от отношения действующего усилия к его критическому значению для симметричного пакета. Кривая $\alpha = 0$ соответствует пластине с симметричным расположением слоев относительно срединной плоскости, а кривая $\alpha = 1$ — исходной пластине, структура которой была приведена выше.

Цилиндрические оболочки

Цилиндрическая оболочка является одной из наиболее распространенных расчетных моделей тонкостенных несущих конструкций, изготовленных как из традиционных, так и композиционных материалов и служащих в качестве резервуаров, баллонов давления, трубопроводов, корпусов летательных аппаратов и кораблей. Широкое использование тонкостенных конструкций цилиндрической формы в различных областях техники, удачно сочетающееся с относительной простотой уравнений, описывающих цилиндрические оболочки, послужило причиной их длительного и интенсивного исследования, завершившегося разработкой эффективных прикладных теорий и методов расчета. В настоящей главе обсуждаются особенности реализации этих методов применительно к цилиндрическим оболочкам из слоистых композитов.

§ 5.1. Уравнения теории ортотропных слоистых цилиндрических оболочек

Рассмотрим цилиндрическую оболочку радиуса R , отнесенную к координатам x, y (рис. 5.1) и нагруженную внутренним p и внешним q давлением. Полагая $A_1 = A_2 = 1$, $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$, запишем для этой оболочки нелинейные уравнения равновесия (2.166), учитывающие изменение кривизны начальной поверхности в процессе деформации:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + Q_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = 0; \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{Q_y}{R} + Q_y \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + Q_x \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = 0; \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0; \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - N_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} - N_{xy} \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - N_{yx} \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - N_y \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) + \bar{p} = 0; \quad \bar{p} = p - q; \quad (5.4)$$

физические соотношения (2.109):

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11}e_x + B_{12}e_y + C_{11}\kappa_x + C_{12}\kappa_y \quad (1, 2); \\ N_{xy} &= B_{33}^{11}e_{xy} + B_{33}^{12}e_{yx} + C_{33}^{11}\kappa_{xy} + C_{33}^{12}\kappa_{yx} \quad (1, 2); \\ M_x &= C_{11}e_x + C_{12}e_y + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y \quad (1, 2); \\ M_{xy} &= C_{33}^{11}e_{xy} + C_{33}^{12}e_{yx} + D_{33}^{11}\kappa_{xy} + D_{33}^{12}\kappa_{yx} \quad (1, 2); \\ Q_x &= K_x\psi_x \quad (1, 2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

и геометрические соотношения (2.110), (2.152) для малых деформаций и перемещений:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad e_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \kappa_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \quad \kappa_{yx} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y}; \end{aligned} \quad (5.6)$$

(5.7)

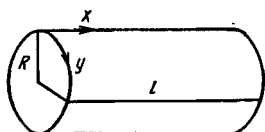
$$\theta_x = \psi_x + \omega_x; \quad \theta_y = \psi_y + \omega_y; \quad \omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \omega_y = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Напомним, что символ (1,2) в равенствах (5.5) означает, что из записанного соотношения может быть получено еще одно заменой x на y , y на x , 1 на 2 и 2 на 1. Мембранные, смешанные, изгибные и сдвиговые жесткости B , C , D , K определяются формулами (2.116), (2.121), (2.122).

Отметим, что в уравнения равновесия (5.1)–(5.4) входят нелинейные члены, включающие поперечные (Q_x , Q_y) и мембранные (N_x , N_y , N_{xy} , N_{yx}) усилия. В связи с тем, что первые, как правило, значительно меньше вторых (соответствующие оценки для напряжений обсуждались в § 2.2), нелинейные члены, содержащие Q_x и Q_y , можно не учитывать и записать уравнения (5.1), (5.2) в более простой форме:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{Q_y}{R} = 0. \quad (5.8)$$

Если отбросить и оставшиеся нелинейные члены, которые входят в уравнение (5.4), т. е. принять его в виде



$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_y}{R} + \bar{p} = 0, \quad (5.9)$$

Рис. 5.1. Цилиндрическая оболочка

то уравнения (5.2), (5.8), (5.9) и (5.5)–(5.7) будут соответствовать линейной теории цилиндрических оболочек. Линеаризован-

ные уравнения устойчивости могут быть получены, если в соответствии с равенствами (2.179) принять

$$\bar{p} = - \left(N_x^0 \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + N_{xy}^0 \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + N_{yx}^0 \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right). \quad (5.10)$$

Предполагается, что докритическое напряженное состояние является безмоментным и определяется усилиями N_x^0 , N_{xy}^0 , N_{yx}^0 , N_y^0 .

Распространенной расчетной моделью является безмоментная оболочка, воспринимающая только мембранные усилия. Принимая в исходных уравнениях (5.1)–(5.7) изгибные D и смешанные C жесткости равными нулю, получим $M_x = M_y = 0$, $M_{xy} = M_{yx} = 0$, $Q_x = Q_y = 0$ и следующие статические и физические соотношения:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (5.11)$$

$$N_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + N_y \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) = \bar{p}; \quad (5.12)$$

$$N_x = B_{11} \varepsilon_x + B_{12} \varepsilon_y; \quad N_{xy} = B_{33}^{11} \varepsilon_{xy} + B_{33}^{12} \varepsilon_{yx} \quad (1, 2). \quad (5.13)$$

Для тонкой оболочки $B_{33}^{11} = B_{33}^{22} = B_{33}^{12} = B_{33}^{21}$ и $N_{yx} = N_{xy}$. Геометрические соотношения имеют форму (5.6). Добавляя к (5.11) уравнение

$$N_y = \bar{p} R, \quad (5.14)$$

полученное из (5.12) в результате отбрасывания нелинейных членов, будем иметь систему уравнений равновесия линейной безмоментной теории.

В следующих разделах записанные выше уравнения будут использованы для решения задач статики и устойчивости цилиндрических оболочек.

§ 5.2. Расчет безмоментных цилиндрических оболочек

Как отмечалось выше, безмоментная оболочка воспринимает только мембранные усилия и является абсолютно податливой при изгибе стенки. В физических соотношениях (5.5) в связи с этим формально следует принять изгибные D и смешанные C жесткости равными нулю, а для реальной оболочки считать члены, содержащие эти жесткости, малыми по сравнению с членами, включающими мембранные жесткости B . Для получения качественных оценок рассмотрим однородную по толщине оболочку, жесткости которой определяются равенствами (2.127), и введем безразмерные координаты $\alpha = x/R$, $\beta = y/R$. Тогда в исходных уравнениях мембранные жесткости будут пропорциональны относительной толщине $\bar{h} = h/R$, а смешанные и изгибные жест-

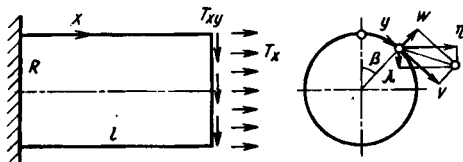


Рис. 5.2. Консольная цилиндрическая оболочка

ходимые для того чтобы растянуть или изогнуть тонкий лист. Однако для того чтобы отбросить в соотношениях (5.5) соответствующие члены, этого недостаточно — необходимо, чтобы деформации и изменения кривизн, являющиеся множителями при обсуждаемых коэффициентах, не изменяли установленных выше соотношений. Действительно, можно создать такие условия нагружения, при которых деформации ϵ окажутся равными нулю, а изменения кривизн κ — отличными от нуля. Естественно, что в этом случае в физических соотношениях (5.5) сохраняются только члены, включающие изгибные жесткости. Таким образом, реализацию безмоментного напряженного состояния оболочки (или, точнее, состояния, близкого к безмоментному) связана с выполнением некоторых условий, накладываемых на характер ее нагружения и закрепления. Формулированию таких условий, по которым можно было бы до расчета оболочки судить о возможности привлечения уравнений безмоментной теории, в свое время уделялось большое внимание. Основные результаты, полученные в этом направлении, обсуждаются, в частности, в работах [30, 63].

Отметим, что на практике простота уравнений безмоментной теории оболочек, как правило, позволяет судить о приемлемости безмоментной модели непосредственно по результатам расчета, с помощью которых можно, во-первых, сразу выявить, какие из заданных условий нагружения и закрепления оболочки могут быть выполнены в рамках безмоментной расчетной модели, а какие не выполняются, и, во-вторых, провести оценку величины отброшенных ранее членов. Существенной также является информация о том, какие конструктивные мероприятия следует осуществить для того чтобы оболочка была близка к безмоментной. Как известно, именно в таких условиях тонкостенные конструкции работают наиболее эффективно. Рассматриваемые ниже вопросы иллюстрируются на примере цилиндрической оболочки.

Рассмотрим оболочку, показанную на рис. 5.2. Предположим, что она нагружена равномерным внутренним давлением p , а также краевыми нормальными и касательными усилиями. Последовательное интегрирование линейных уравнений равновесия (5.11)

кости соответственно пропорциональны h^2 и h^3 . Если учесть, что для тонкой оболочки $h \ll 1$, то можно заключить, что мембранные жесткости значительно превосходят смешанные и изгибные. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно сопоставить усилия, необ-

с учетом (5.14) и граничных условий $N_x(x=l) = T_x$, $N_{xy}(x=l) = T_{xy}$ (см. рис. 5.2) дает (при $N_{xy} = N_{yx}$)

$$N_y = pR; \quad N_{xy} = T_{xy}; \quad N_x = T_x + (l-x)T'_{xy}. \quad (5.15)$$

Штрихом обозначена производная по y .

Из равенств (5.15) следует первая основная особенность безмоментной теории оболочек: три усилия N_x , N_y , N_{xy} связаны тремя уравнениями равновесия, и при задании нормальных и касательных усилий на краю $x=l$ они однозначно определяются на всей поверхности оболочки независимо от ее деформаций. Существенно, что равенства (5.15) позволяют найти усилия и на краю $x=0$ (см. рис. 5.2), поэтому расчет оболочек с заданными усилиями на краях $x=0$ и $x=l$ формально может быть осуществлен в рамках безмоментной теории только тогда, когда эти усилия удовлетворяют соотношениям (5.15). В действительности даже выполнение этих соотношений не всегда гарантирует правильность результата.

Если оболочка имеет большую длину, то ее напряженное состояние в средней части, очевидно, практически не зависит от распределения усилий по контурам торцовых сечений. А из равенств (5.15) следует, что это распределение полностью определяет усилия в любом сечении. Таким образом, область применения безмоментной теории цилиндрических оболочек ограничивается сравнительно короткими оболочками. Более подробно этот вопрос излагается в работе [9].

Перейдем к определению деформаций и напряжений. Заметим, что равенств (5.15), определяющих напряжения $\sigma_x = N_x/h$, $\sigma_y = N_y/h$, $\tau_{xy} = N_{xy}/h$ в однородных оболочках, для расчета слоистых оболочек недостаточно и необходимо привлечь геометрические соотношения. Прежде всего, подставив решение (5.15) в физические соотношения (5.13), найдем деформации. Учитывая, что безмоментная теория используется для расчета тонких оболочек и привлекая равенства (5.6), получим

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{B_{22}}{B} [T_x + T'_{xy}(l-x)] - \frac{B_{12}}{B} pR; \quad (5.16)$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} = \frac{B_{11}}{B} pR - \frac{B_{12}}{B} [T_x + T'_{xy}(l-x)]; \quad (5.17)$$

$$\gamma_{xy} = e_{xy} + e_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{T_{xy}}{B_{33}}, \quad (5.18)$$

где $B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2$; $B_{33} = B_{33}^{11} = B_{33}^{22} = B_{33}^{12} = B_{33}^{21}$. Для определения продольного перемещения проинтегрируем уравнение (5.16):

$$u = u_0(y) + \frac{B_{22}}{B} \left[T_x x + T'_{xy} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{B_{12}}{B} pR x \right]. \quad (5.19)$$

Здесь $u_0 = u(x=0)$. Подставив u из (5.19) в (5.18), в результате интегрирования найдем кольцевое перемещение

$$v = v_0(y) - u'_0 x + \frac{T_{xy}}{B_{33}} x - \frac{B_{22}x^2}{2B} \left[T'_x + T'_{xy} \left(l - \frac{x}{3} \right) \right], \quad (5.20)$$

где $v_0 = v(x=0)$. И наконец, из равенств (5.17), (5.20) получим прогиб

$$w = \frac{B_{11}}{B} p R^2 - \frac{B_{12}R}{B} [T_x + T'_{xy}(l-x)] - R \left\{ v'_0 - u'_0 x + \frac{T_{xy}}{B_{33}} x - \frac{B_{22}x^2}{2B} \left[T'_x + T'_{xy} \left(l - \frac{x}{3} \right) \right] \right\}. \quad (5.21)$$

Теперь с помощью выражений (2.75), в которых следует принять $H_1 \approx A_1$ и $H_2 \approx A_2$, и геометрических соотношений (5.7) (при $\psi_x = \psi_y = 0$) можно найти распределения деформаций по толщине оболочки. В результате придем к равенствам (4.23) для e_x , e_y , e_{xy} , в которых e_x , e_y , χ_{xy} имеют форму записи (5.16)—(5.18) и

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \chi_{xy} &= \kappa_{xy} + \kappa_{yx} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные таким образом деформации e_x , e_y , e_{xy} в геометрические соотношения (4.24), можно определить деформации во всех слоях оболочки, а по формулам (4.25) найти напряжения. Заметим, что при расчете оболочек по безмоментной теории деформации соответствующие записанным выше изменениям кривизн поверхности κ_x , κ_y , χ_{xy} , как правило, не учитываются.

Рассмотрим равенства (5.19)—(5.21). Входящие в (5.19) и (5.20) функции u_0 и v_0 являются перемещениями точек сечения $x=0$. Для оболочки, показанной на рис. 5.2, $u_0 = v_0 = 0$. Решение (5.15)—(5.21) справедливо и в том случае, когда закреплены оба торца оболочки $x=0$ и $x=l$. При этом функции $T_x(y)$ и $T_{xy}(y)$ являются уже неизвестными и определяются из геометрических граничных условий на краю $x=l$.

Равенства (5.19)—(5.21) иллюстрируют вторую основную особенность безмоментной теории оболочек: в отличие от u и v определение w не сопровождается интегрированием и, следовательно, появлением соответствующей произвольной функции. Поэтому в рамках безмоментной теории нельзя наложить граничные условия на прогиб оболочки.

Таким образом, безмоментная теория цилиндрических оболочек обладает двумя недостатками, существенно ограничивающими область применения соответствующих уравнений: во-первых, задание усилий на одном краю полностью определяет (при отсутствии поверхностной нагрузки) усилия во всех сечениях; во-вторых, в рамках безмоментной теории невозможно наложить ограничения

на прогиб оболочки. Эти недостатки устраняются в более сложных приближенных вариантах теории цилиндрических оболочек — в полубезмоментной (см. § 5.6) и в нелинейной безмоментной (см. § 5.3, 5.4). Естественно, что общая теория цилиндрических оболочек, описываемая уравнениями (5.1)–(5.7), также свободна от этих недостатков.

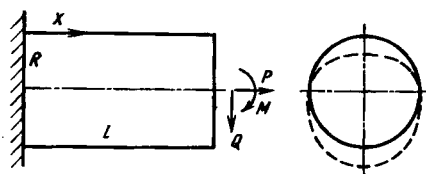


Рис. 5.3. Изгиб и растяжение консольной цилиндрической оболочки

Возвращаясь к безмоментной теории, рассмотрим один важный и достаточно общий случай нагружения цилиндрической оболочки, для анализа которого применимость этой теории является несомненной. Предположим, что нормальные и касательные усилия распределены по контуру сечения $x = l$ (см. рис. 5.2) так, что они сводятся только к осевой силе P , поперечной силе Q и изгибающему моменту M (рис. 5.3). Эта задача в общих чертах уже обсуждалась в заключительной части § 3.2, где рассматривались стержни, контур сечения которых не обладает изгибной жесткостью. В соответствии с решением задачи о растяжении и изгибе круглого стержня, приведенным в § 3.2, примем:

$$T_x = \frac{1}{2\pi R} \left(P + \frac{2M}{R} \cos \beta \right); \quad T_{xy} = \frac{Q}{\pi R} \sin \beta. \quad (5.22)$$

Эти усилия статически эквивалентны силам и моменту, показанным на рис. 5.3. Равенства (5.15) с учетом (5.22) дают:

$$\begin{aligned} N_y &= pR; \quad N_{xy} = \frac{Q}{\pi R} \sin \beta; \\ N_x &= \frac{P}{2\pi R} + \frac{\cos \beta}{\pi R^2} [M + Q(l - x)]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Эти соотношения можно обобщить, если учесть, что P , Q и $M + Q(l - x)$ являются силами и моментом, действующими в некотором сечении x оболочки. Если по длине оболочки заданы распределения давления $p(x)$, осевой силы $P(x)$, поперечной силы $Q(x)$ и изгибающего момента $M(x)$, то в любом сечении

$$\begin{aligned} N_y &= p(x)R; \quad N_{xy} = \frac{Q(x)}{\pi R} \sin \beta; \\ N_x &= \frac{P(x)}{2\pi R} + \frac{M(x)}{\pi R^2} \cos \beta. \end{aligned}$$

Вернемся к оболочке, показанной на рис. 5.3, и найдем перемещения. Подставляя усилия (5.22) в равенства (5.19)—(5.21) и принимая в них $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, получим:

$$\begin{aligned} u &= \frac{B_{22}x}{\pi BR} \left\{ \frac{P}{2} + \frac{\cos \beta}{R} [M + Q(l - \frac{x}{3})] \right\} - \frac{B_{12}}{B} pRx; \\ v &= \frac{Qx \sin \beta}{\pi RB_{22}} + \frac{B_{22}x^3 \sin \beta}{2\pi BR^3} [M + Q(l - \frac{x}{3})]; \\ w &= \frac{B_{11}}{B} pR^3 - \frac{B_{12}}{\pi B} \left\{ \frac{P}{2} + \frac{\cos \beta}{R} [M + Q(l - x)] \right\} - \\ &\quad - \frac{x \cos \beta}{\pi R} \left\{ \frac{Q}{B_{22}} + \frac{B_{22}x}{2\pi BR^3} [M + Q(l - \frac{x}{3})] \right\}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Рассмотрим нагружение равномерным внутренним давлением и осевой силой. При $Q = M = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{P}{2\pi R}; \quad N_y = pR; \quad N_{xy} = 0; \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{B} \left(\frac{B_{22}P}{2\pi R} - B_{12}pR \right); \quad v = 0; \\ w &= R\epsilon_y = \frac{1}{B} \left(B_{11}pR^3 - \frac{B_{12}P}{2\pi R} \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Для цилиндрического баллона давления, торцы которого закрыты днищами, $P = p\pi R^2$ и

$$\begin{aligned} N_x &= 0,5pR; \quad N_y = pR; \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{pR}{2B} (B_{22} - 2B_{12}); \quad w = R\epsilon_y = \frac{pR^3}{2B} (2B_{11} - B_{12}). \end{aligned}$$

Рассмотрим изгиб консольной цилиндрической оболочки. Примем в равенствах (5.24) $P = 0$, $p = 0$ и найдем горизонтальное и вертикальное смещения ее точек (см. рис. 5.2):

$$\begin{aligned} \eta &= v \cos \beta + w \sin \beta = -\frac{B_{12}}{\pi BR} [M + Q(l - x)] \sin \beta \cos \beta; \\ \lambda &= v \sin \beta - w \cos \beta = \frac{B_{22}x^3}{2\pi BR^3} [M + Q(l - \frac{x}{3})] + \\ &\quad + \frac{Qx}{\pi B_{22}R} + \frac{B_{12}}{\pi BR} [M + Q(l - x)] \cos^3 \beta. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Первое и второе слагаемые в равенстве (5.26) определяют прогиб оси оболочки, связанный с изгибом и сдвигом, а третье слагаемое и перемещение η — деформацию контура за счет эффекта Пуассона (штриховая линия на рис. 5.3).

§ 5.3. Цилиндрические оболочки, напряженно-деформированное состояние которых не зависит от продольной координаты

Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую оболочку, нагруженную равномерно распределенными по образующей и самоуравновешенными в каждом сечении давлениями p , q и тангенциальными силами q_y (рис. 5.4). На практике такая расчетная модель часто используется для анализа напряжений и деформаций, возникающих в средней части нагруженных указанным выше образом длинных оболочек (т. е. в местах, на которые условия закрепления краев не оказывают влияния), а также для исследования круговых колец (шпаугоутов), деформирующихся в своей плоскости. Напряженно-деформированное состояние рассматриваемой оболочки не зависит от координаты x (см. рис. 5.1) и определяется усилиями N_y , Q_y , изгибающим моментом M_y , обобщенными деформациями ε_y , κ_y , ψ_y и перемещениями v и w , являющимися функциями переменной y . Уравнения (5.1)–(5.7), в которых отброшены нелинейные члены и дополнительно учитывается тангенциальная нагрузка q_y (см. рис. 5.4), имеют следующий вид:

$$N'_y + \frac{Q_y}{R} + q_y = 0; \quad M'_y - Q_y = 0; \quad Q'_y - \frac{N_y}{R} + \bar{p} = 0; \quad (5.27)$$

$$N_y = B_{22}\varepsilon_y + C_{22}\kappa_y; \quad M_y = C_{22}\varepsilon_y + D_{22}\kappa_y; \quad Q_y = K_y\psi_y; \quad (5.28)$$

$$\varepsilon_y = v' + \frac{w}{R}; \quad \kappa_y = \theta'_y; \quad \theta_y = \psi_y + \frac{v}{R} - w'. \quad (5.29)$$

Штрихом обозначена производная по y . Обобщенные жесткости определяются равенствами (2.116), т. е.

$$B_{22} = I_{22}^{(0)}; \quad C_{22} = I_{22}^{(1)} - eI_{22}^{(0)}; \quad D_{22} = I_{22}^{(2)} - 2eI_{22}^{(1)} + e^2I_{22}^{(0)}, \quad (5.30)$$

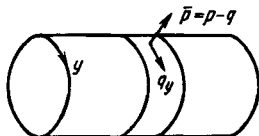
где согласно (2.121)

$$I_{22}^{(r)} = \frac{2R}{r+1} \sum_{t=1}^k A_{22}^{(t)} \frac{t_{t-1}^{r+1} - t_{t-1}^{r+1}}{2R + t_t + t_{t-1}} \quad (r = 0, 1, 2). \quad (5.31)$$

Сдвиговая жесткость (2.122) имеет вид

$$K_y = h^3 \left[\sum_{t=1}^k \frac{2R + t_t + t_{t-1}}{2G_{yy}^{(t)} R} (t_t - t_{t-1}) \right]^{-1}. \quad (5.32)$$

Рис. 5.4. Схема нагружения бесконечно длинной цилиндрической оболочки



Зададим координату начальной поверхности e так, чтобы смешанная жесткость C_{22} обращалась в нуль. Тогда из формулы (5.30)

$$B_y = B_{22} = I_{22}^{(0)}; \quad C_{22} = 0;$$

$$e = \frac{I_{22}^{(1)}}{I_{22}^{(0)}}; \quad D_y = D_{22} = I_{22}^{(2)} - \frac{[I_{22}^{(1)}]^2}{I_{22}^{(0)}}. \quad (5.33)$$

В результате соотношения (5.28), (5.29) можно записать следующим образом:

$$N_y = B_y \left(v' + \frac{w}{R} \right); \quad M_y = D_y \theta_y'; \quad Q_y = K_y \left(\theta_y - \frac{v}{R} + w' \right). \quad (5.34)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к уравнениям (5.27), (5.34), причем три уравнения (5.27) позволяют определить усилия N_y , Q_y и момент M_y , а уравнения (5.34) — найти затем перемещения v , w и угол поворота θ_y . Рассмотрим уравнения равновесия (5.27). Из первого уравнения имеем

$$Q_y = -RN_y' - Rq_y. \quad (5.35)$$

Подставляя поперечное усилие (5.35) в третье уравнение, получим

$$N_y'' + \lambda^2 N_y = \bar{p}/R,$$

где $\lambda = 1/R$; $\bar{p} = \bar{p} - Rq_y'$. Используя для нахождения частного решения этого уравнения метод вариации произвольных постоянных, окончательно будем иметь

$$N_y = C_1 \sin \lambda y + C_2 \cos \lambda y +$$

$$+ \sin \lambda y \int_0^y \bar{p} \cos \lambda y dy - \cos \lambda y \int_0^y \bar{p} \sin \lambda y dy. \quad (5.36)$$

Сложим первые два уравнения (5.27). Интегрируя результат, найдем

$$M_y = C_3 - \int_0^y q_y dy - RN_y. \quad (5.37)$$

Таким образом, усилия и момент определяются равенствами (5.35)—(5.37). Выражая постоянные C_1 , C_2 , C_3 через начальные значения усилий и момента $N_0 = N_y(y=0)$, $Q_0 = Q_y(y=0)$, $M_0 = M_y(y=0)$, запишем окончательные выражения:

$$N_y = N(y) \cos \lambda y - Q(y) \sin \lambda y;$$

$$Q_y = Q(y) \cos \lambda y + N(y) \sin \lambda y - Rq_y; \quad (5.38)$$

$$M_y = M_0 + RN_0 + RQ(y) \sin \lambda y - RN(y) \cos \lambda y - R \int_0^y q_y dy,$$

где $N(y) = N_0 - \int_0^y \bar{p} \sin \lambda y dy$; $Q(y) = Q_0 + Rq_0 - \int_0^y \bar{p} \cos \lambda y dy$;
 $q_0 = q_y(y=0)$.

Отметим, что для замкнутой оболочки должны выполняться следующие условия периодичности усилий и момента: $N_y(y = 2\pi R) = N_0$; $Q_y(y = 2\pi R) = Q_0$; $M_y(y = 2\pi R) = M_0$. В результате с помощью равенств (5.38) можно записать следующие условия, обеспечивающие самоуравновешенность внешней нагрузки:

$$\int_0^{2\pi R} \bar{p} \sin \lambda y dy = 0; \quad \int_0^{2\pi R} \bar{p} \cos \lambda y dy = 0; \quad \int_0^{2\pi R} q_y dy = 0.$$

Для определения перемещений v , w и угла поворота θ_y можно воспользоваться соотношениями (5.34). Из первого и третьего равенств найдем

$$w = \frac{RN_y}{B_y} - Rv'; \quad \theta_y = \frac{Q_y}{K_y} + \frac{v}{R} - w'. \quad (5.39)$$

Подставив эти выражения во второе соотношение (5.34), получим

$$v'' + \lambda^2 v' = \frac{M_y}{RD_y} - \frac{Q'_y}{RK_y} + \frac{N'_y}{B_y}.$$

Исключив отсюда производные от усилий с помощью уравнений (5.27), будем иметь

$$v'' + \lambda^2 v' = \lambda^2 F(y),$$

$$\text{где } F(y) = \frac{RM_y}{D_y} - (N_y - \bar{p}R) \left(\frac{1}{B_y} + \frac{1}{K_y} \right) - \frac{q'_y R^2}{B_y}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v = C_4 + C_5 \sin \lambda y + C_6 \cos \lambda y + \\ + \int_0^y F(y) dy - \sin \lambda y \int_0^y F(y) \sin \lambda y dy - \cos \lambda y \int_0^y F(y) \cos \lambda y dy. \quad (5.40)$$

Таким образом, перемещения и угол поворота определяются равенствами (5.39), (5.40), в которые входят усилия и момент (5.38). Выражая постоянные $C_4 - C_6$ через начальные значения $w_0 = w(y=0)$, $v_0 = v(y=0)$, $\theta_0 = \theta_y(y=0)$, окончательно найдем

$$v = V(y) \cos \lambda y - W(y) \sin \lambda y + R\Theta(y); \\ w = \frac{R}{B_y} N_y + W(y) \cos \lambda y + V(y) \sin \lambda y; \quad (5.41) \\ \theta_y = \Theta(y) + Q_y \left(\frac{1}{B_y} + \frac{1}{K_y} \right) + \frac{Rq_y}{B_y},$$

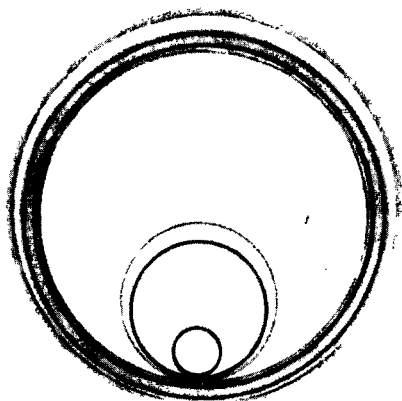


Рис. 5.5. Композитные кольца

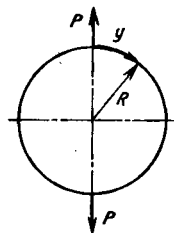


Рис. 5.6. Кольцо, нагруженное диаметрными силами



Рис. 5.7. Сечения композитных колец

где
$$V(y) = v_0 - RC_0 - \int_0^y F(y) \cos \lambda y dy; \quad W(y) = w_0 - \frac{RN_0}{B_y} +$$

$$+ \int_0^y F(y) \sin \lambda y dy; \quad \Theta(y) = C_0 + \frac{1}{R} \int_0^y F(y) dy; \quad C_0 = \theta_0 - Q_0 \left(\frac{1}{B_y} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{K_y} \right) - \frac{Rq_0}{B_y}.$$

Как уже отмечалось, полученное решение может быть использовано для расчета круговых колец и шпангоутов из композитных материалов (рис. 5.5). Жесткости кольца, сечение которого показано, например, на рис. 3.1, б, определяются равенствами (5.31) — (5.33), где следует принять $A_{22}^{(i)} = E_i b_i$, $G_{yy}^{(i)} = G_i b_i$, где E_i , b_i и G_i — модуль упругости, ширина и модуль сдвига i -го слоя кольца.

В качестве примера рассмотрим кольцо, нагруженное двумя диаметрально приложенными силами (рис. 5.6). Принимая в равенствах (5.38), (5.41) в соответствии с условиями симметрии задачи $N_0 = 0$, $Q_0 = -P/2$, $v_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ и $v(y = \pi R/2) = 0$, $\theta_y(y = \pi R/2) = 0$, получим

$$N_y = \frac{P}{2} \sin \lambda y; \quad Q_y = -\frac{P}{2} \cos \lambda y; \quad M_y = M_0 - \frac{PR}{2} \sin \lambda y;$$

$$M_0 = \frac{PR}{2}; \quad w_0 = 0,0745 \frac{PR^3}{D_y} \left[1 + 5,3 \frac{D_y}{R} \left(\frac{1}{B_y} + \frac{1}{K_y} \right) \right].$$

Для однородного сечения (рис. 5.7, сечение 1) с малой относительной толщиной $D_y = Ebh^3/12$, $B_y = Ebh$, $K_y = Gbh$, перемещение точки приложения силы

$$w_0 = 0,0745 \frac{PR^3}{D_y} \left[1 + 0,44 \frac{h^3}{R^3} \left(1 + \frac{E}{G} \right) \right]. \quad (5.42)$$

Первое слагаемое в круглых скобках учитывает растяжение нейтральной оси кольца, которое в рассматриваемых задачах обычно не учитывается. Возможность такого упрощения подтверждается равенством (5.42): при $h/R \ll 0,1$ погрешность, вызванная неучетом обсуждаемого члена, не превышает 0,5 %. Вводя условие нестяжимости нейтральной оси кольца, примем в соотношениях (5.41) $B_v \rightarrow \infty$. В результате эти соотношения упрощаются следующим образом:

$$\begin{aligned} v &= V(y) \cos \lambda y - W(y) \sin \lambda y + R\Theta(y); \\ w &= W(y) \cos \lambda y + V(y) \sin \lambda y; \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\theta_v = \Theta(y) + \frac{Q_v}{K_v},$$

где
$$\begin{aligned} V(y) &= v_0 - R\theta_0 + \frac{RQ_0}{K_v} - \int_0^y F(y) \cos \lambda y dy; \quad W(y) = w_0 + \\ &+ \int_0^y F(y) \sin \lambda y dy; \quad \Theta(y) = \theta_0 - \frac{Q_0}{K_v} + \frac{1}{R} \int_0^y F(y) dy; \quad F(y) = \frac{RM_v}{D_v} - \\ &- \frac{1}{K_v} (N_v - \bar{p}R). \end{aligned}$$

Слагаемое (E/G) равенства (5.42) учитывает деформацию сдвига, влияние которой зависит от относительной толщины кольца и механических свойств материала. Для тонких композитных колец деформацию сдвига можно не учитывать, приняв в равенствах (5.43) $K_v \rightarrow \infty$. Построенное решение удовлетворительно подтверждается результатами экспериментального исследования композитных колец. На рис. 5.7 показаны сечения колец из стеклоткани 1, усиленные слоями углепластика 2, 3, с параметрами: $h/R = 0,105$; $b/h = 1,5$, а на рис. 5.8 — соответствующие расчетные зависимости точки приложения силы (см. рис. 5.6) от нагрузки (сплошные линии) и результаты измерения этого перемещения (точки).

Рассмотрим еще одну интересную в прикладном отношении задачу — бесконечно длинную пологую цилиндрическую оболочку (рис. 5.9), нагруженную равномерным внутренним давлением и моделирующую, например, панель обшивки гермокабины самолета [84]. Такая панель характеризуется соотношениями $b/R \ll 1$; $h/R \ll 1$, позволяющими ввести в исходные уравнения некоторые упрощения. В частности, в первом уравнении (5.27) и в третьем уравнении (5.29) можно отбросить малые члены Q_v/R и v/R и, пренебрегая деформацией сдвига, принять в соотношениях (5.28), (5.29) $K_v \rightarrow \infty$, $\psi_v = 0$. С другой стороны, малая изгибная жесткость стенки позволяет предположить, что в третьем уравнении равновесия (5.27) может оказаться существенным неучтенный в нем и входящий в исходное уравнение (5.4) нелинейный член

$N_y (\partial \omega_y / \partial y)$. В результате исходная система уравнений принимает следующий вид:

$$N'_y = 0; \quad M'_y - Q_y = 0; \quad Q'_y - N_y \left(\frac{1}{R} - w'' \right) + p = 0; \quad (5.44)$$

$$N_y = B_y \left(v' + \frac{w}{R} \right); \quad M_y = -D_y w''. \quad (5.45)$$

Отметим, что рассматриваемая задача подробно исследована применительно к металлическим панелям [26], причем первое равенство (5.45) обычно записывается в более сложной форме. Оно учитывает геометрическую нелинейность, связанную с большим прогибом, и имеет структуру, получающуюся применительно к рассматриваемой задаче из общих соотношений (2.170), (2.171), т. е.

$$N_y = B_y \left[v' + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (w')^2 \right]. \quad (5.46)$$

В соответствии с изложенным в § 2.8 будем считать, что в рассматриваемой панели по условиям ее проектирования не допускаются большие, в частности соизмеримые с ее толщиной, прогибы и примем для усилия N_y линейное соотношение упругости (5.45). Рассматриваемая задача иллюстрирует приложения нелинейных уравнений первого приближения (2.166), (2.109), (2.110), полученных в § 2.8. Сравнивая уравнения (5.44), (5.45) с линейными уравнениями (5.27), (5.34), можно отметить, что отличие первых от вторых в отношении нелинейных членов заключается в учете производных углов поворота $\omega'_y = -w''$, т. е. по существу, в учете в условиях равновесия изменения радиуса кривизны в процессе деформации.

Получим решение уравнений (5.44), (5.45). Из первого уравнения (5.44) следует $N_y = N = \text{const}$, что принципиально

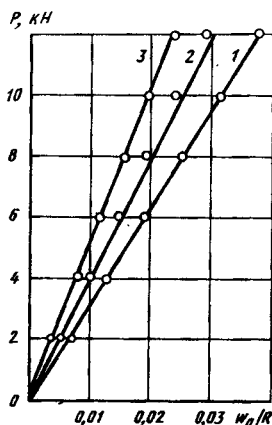


Рис. 5.8. Теоретические (—) и экспериментальные (о) диаграммы деформирования композитных колец (номера прямых соответствуют сечениям, показанным на рис. 5.7)

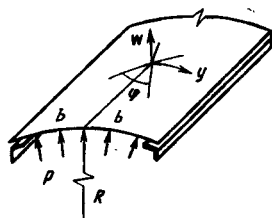


Рис. 5.9. Бесконечно длинная цилиндрическая панель

упрощает задачу и позволяет построить точное решение. Исключая из третьего уравнения (5.44) поперечную силу Q_y , с помощью второго уравнения, а изгибающий момент M_y и усилие N_y — с помощью соотношений (5.45), запишем разрешающее уравнение

$$\omega^{IV} - m^2 \omega'' = \frac{p}{D_y} (1 - \eta), \quad (5.47)$$

где $m^2 = N/D_y$; $\eta = N/(pR)$.

Параметр η характеризует отличие N от безмоментного усилия (5.23). Общее решение уравнения (5.47) имеет вид

$$\omega = C_1 + C_2 y + C_3 \operatorname{sh} my + C_4 \operatorname{ch} my - \frac{y^2 (1 - \eta)}{R\eta}.$$

Учитывая условия симметрии задачи (см. рис. 5.9), здесь следует принять $C_2 = C_3 = 0$, т. е.

$$\omega = C_1 + C_4 \operatorname{ch} my - \frac{y^2 (1 - \eta)}{R\eta}.$$

Это решение включает три постоянные величины C_1 , C_4 и N или η , которые определяются из граничных условий при $y = \pm b$ (см. рис. 5.9). В частности, если продольные края шарнирно оперты, т. е. при $y = \pm b$, $\omega = \omega' = 0$, получим

$$\omega = \frac{1 - \eta}{R\eta} \left[\frac{1}{2} (b^2 - y^2) - \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} mb} (\operatorname{ch} mb - \operatorname{ch} my) \right]. \quad (5.48)$$

Для защемленных продольных краев, т. е. если при $y = \pm b$ $\omega = \omega' = 0$, будем иметь

$$\omega = \frac{1 - \eta}{R\eta} \left[\frac{1}{2} (b^2 - y^2) - \frac{b}{m \operatorname{sh} mb} (\operatorname{ch} mb - \operatorname{ch} my) \right]. \quad (5.49)$$

Перемещение v может быть найдено в результате интегрирования первого соотношения (5.45). Учитывая, что $N_y = N$ и $v(y = 0) = 0$, найдем

$$v = \frac{Ny}{B_y} - \frac{1}{R} \int_0^y \omega dy.$$

Используя условия закрепления продольных кромок $v(y = \pm b) = 0$, получим следующее уравнение для N :

$$\frac{Nb}{B_y} = \eta \frac{pRb}{B_y} = \frac{1}{R} \int_0^b \omega dy. \quad (5.50)$$

Подставляя в (5.50) выражения для прогиба (5.48) или (5.49), запишем уравнения для панели с шарнирно опертыми продольными краями

$$\frac{\eta N}{B_y (1 - \eta)} - \frac{b^2}{3R^2} = \frac{1}{m^2 R^2} \left(\frac{1}{mb} \operatorname{th} mb - 1 \right);$$

с заземленными продольными краями

$$\frac{\eta N}{B_y(1-\eta)} - \frac{b^2}{3R^2} = \frac{b}{mR^2} \left(\frac{1}{mb} - \operatorname{cth} mb \right). \quad (5.51)$$

Для проведения численного анализа рассмотрим заземленную панель, описываемую уравнениями (5.49), (5.51) (в реальных условиях панель, показанная на рис. 5.9, соединяется по продольным кромкам со смежными панелями и в результате симметрии при $y = \pm b$ $w' = 0$, что соответствует жесткому заземлению). Предположим, что панель образована из слоев углепластика с углами армирования $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$ (см. рис. 5.9) и с толщиной соответственно $0,8 \times 10^{-3}$ м и $1,6 \times 10^{-3}$ м. Геометрические параметры панели: $h/R = 1,2 \times 10^{-3}$, $b/R = 0,075$. На рис. 5.10 показано изменение относительного прогиба $\bar{w} = w/w_0$, где $w_0 = \rho R^2/B_y$ — прогиб безмоментной оболочки. Кривая 1 соответствует решению (5.49). Заметим, что, несмотря на то, что прогиб рассматриваемой панели не превосходит $0,7h$, неучет нелинейного члена в уравнениях (5.44) приводит к результату, значительно отличающемуся от полученного. Действительно, отбросим в третьем уравнении (5.44) слагаемое $N_y w''$. Тогда уравнение (5.47) упрощается следующим образом:

$$w^{IV} = \frac{p}{D_y} (1 - \eta),$$

и его решение, удовлетворяющее граничным условиям $w(\pm b) = w'(\pm b) = 0$, имеет вид

$$w = \frac{(1-\eta)p}{24D_y} (b^3 - y^3)^2. \quad (5.52)$$

Из условия (5.50) при этом можно получить

$$N = \frac{\rho R^2}{1 + \frac{45D_y R^2}{B_y b^4}}.$$

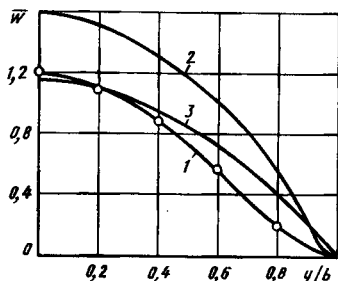


Рис. 5.10. Распределение относительного прогиба по ширине панели, вычисленного по формулам (5.49) (кривая 1), (5.52) (кривая 2), (5.53) (кривая 3), и точное решение (о)

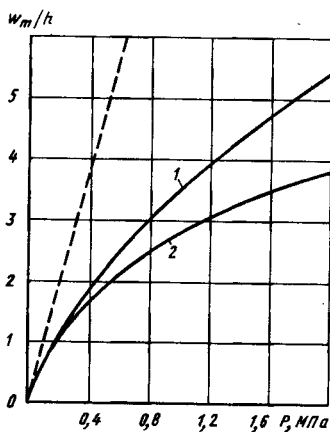


Рис. 5.11. Зависимости максимального прогиба панели от давления, соответствующие нелинейным (сплошные линии) и линейному (пунктирная прямая) решениям

Решению (5.52) на рис. 5.10 соответствует кривая 2, значительно отличающаяся от кривой 1. Учитывая отмеченное влияние нелинейной составляющей решения, сравним полученные результаты с решением, основанным на нелинейных уравнениях безмоментной теории (5.11)—(5.13). Принимая в исходных уравнениях (5.44), (5.45), $D_y = 0$, получим

$$w'' = -\frac{1-\eta}{R\eta}.$$

Решение этого уравнения позволяет удовлетворить граничные условия только для прогиба. Полагая $w(\pm b) = 0$, окончательно найдем

$$w = \frac{1-\eta}{2\eta R} (b^2 - y^2). \quad (5.53)$$

Равенство (5.50) с учетом (5.53) приводит к квадратному уравнению

$$\eta^2 = a(1-\eta), \quad (5.54)$$

где $a = \frac{B_y b^2}{3\rho R^2}$.

Решение уравнений (5.54) дает

$$\eta = \frac{N}{\rho R} = \frac{1}{2} [\sqrt{a(a+4)} - a].$$

На рис. 5.10 прогибу (5.53) соответствует кривая 3.

Сравним полученные результаты с традиционным нелинейным решением [26], основанным на соотношении упругости (5.46). Выражения для прогиба (5.48), (5.49) остаются без изменения, а уравнение (5.50) для усилия N обобщается следующим образом:

$$\frac{Nb}{B_y} = \frac{1}{R} \int_0^b w dy + \frac{1}{2} \int_0^b (w')^2 dy. \quad (5.55)$$

Для рассмотренного выше примера решение, получаемое из этого уравнения, отличается от решения более простого уравнения (5.50) на 0,6 %. Соответственно практически не отличаются и прогибы (кривая 1 и точки на рис. 5.10). При возрастании прогиба более точное решение, основанное на соотношении (5.55), естественно, уже не будет совпадать с приближенным, однако, как показано в работе [99], при прогибах больших толщины удовлетворительные результаты позволяет получить безмоментное решение типа (5.53), в котором параметр η определяется из уравнения (5.55), принимающего следующий вид:

$$\eta^3 = \frac{a}{2} (1 - \eta^2). \quad (5.56)$$

На рис. 5.11 представлены зависимости максимального отнесенного прогиба от давления, соответствующие упрощенному уравнению (5.54) (кривая 1) и точному уравнению (5.56) (кривая 2). Штриховая прямая соответствует линейному решению.

Таким образом, при малых прогибах решение определяется равенствами (5.49), (5.51), а при больших — соотношениями (5.53), (5.56).

§ 5.4. Осесимметричная деформация цилиндрических оболочек

Рассмотрим еще один широко распространенный класс одномерных задач — осесимметричные задачи для замкнутых цилиндрических оболочек, нагруженных давлением $\bar{p} = p - q$ и осевыми усилиями N (рис. 5.12), не изменяющимися по координате y . В таких оболочках имеют место только осевые перемещения u и прогиб w , зависящие от осевой координаты x (см. рис. 5.12). Запишем исходные уравнения. Полагая в уравнениях (5.1)–(5.7) $u = u(x)$, $v = 0$, $w = w(x)$ и пренебрегая в первом уравнении нелинейным членом, содержащим поперечную силу, т. е. записывая его в форме (5.8), получим

$$N'_x = 0; \quad M'_x - Q_x = 0; \quad Q_x + N_x w'' - \frac{N_y}{R} + \bar{p} = 0; \quad (5.57)$$

$$N_x = B_{11}e_x + B_{12}e_y + C_{11}\kappa_x; \\ N_y = B_{21}e_x + B_{22}e_y + C_{21}\kappa_x; \quad (5.58)$$

$$M_x = C_{11}e_x + C_{12}e_y + D_{11}\kappa_x; \\ Q_x = K_x \psi_x; \quad (5.59)$$

$$e_x = u'; \quad e_y = \frac{w}{R}; \quad \kappa_x = \theta'_x; \quad \theta_x = \psi_x - w'.$$

Штрихом обозначена производная по x . В физических соотношениях (5.58) согласно равенствам (2.116), (2.119), (2.121), (2.122)

$$B_{11} = I_{11}^{(0)}; \quad B_{12} = B_{21} = I_{12}^{(0)}; \quad B_{22} = I_{22}^{(0)}; \\ C_{11} = I_{11}^{(1)} - eI_{11}^{(0)}; \quad C_{12} = C_{21} = I_{12}^{(1)} - eI_{12}^{(0)}; \quad (5.60) \\ D_{11} = I_{11}^{(2)} - 2eI_{11}^{(1)} + e^2I_{11}^{(0)};$$

$$I_{11}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{11}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) \left(1 + \frac{t_i + t_{i-1}}{2R}\right) \quad (r = 0, 1, 2); \quad (5.61)$$

$$I_{12}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{12}^{(i)} (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}) \quad (r = 0, 1);$$

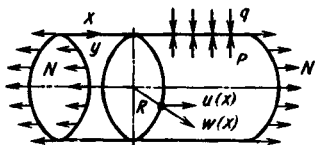


Рис. 5.12. Осесимметричное нагружение цилиндрической оболочки

$$I_{22}^{(0)} = 2R \sum_{i=1}^k A_{22}^{(i)} \frac{t_i - t_{i-1}}{2R + t_i + t_{i-1}};$$

$$K_x = h^2 \left[\sum_{i=1}^k \frac{2R(t_i - t_{i-1})}{G_{xy}^{(i)}(2R + t_i + t_{i-1})} \right]^{-1}. \quad (5.62)$$

Для упрощения дальнейших преобразований зададим координату начальной поверхности e так, чтобы смешанная жесткость C_{11} обращалась в нуль. Тогда из равенств (5.60) получим

$$\begin{aligned} B_{11} &= I_{11}^{(0)}; \quad B_{12} = B_{21} = I_{12}^{(0)}; \quad B_{22} = I_{22}^{(0)}; \quad C_{22} = 0; \\ e &= \frac{I_{11}^{(1)}}{I_{11}^{(0)}}; \quad C_{12} = C_{21} = I_{12}^{(1)} - \frac{1}{I_{11}^{(0)}} I_{11}^{(1)} I_{12}^{(0)}; \quad D_x = D_{11} = I_{11}^{(2)} - \frac{[I_{11}^{(1)}]^2}{I_{11}^{(0)}}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

В результате соотношения (5.58), (5.59) можно записать следующим образом:

$$N_x = B_{11}u' + B_{12}\frac{w}{R}; \quad (5.64)$$

$$N_y = B_{21}u' + B_{22}\frac{w}{R} + C_{12}(\psi_x - w''); \quad (5.65)$$

$$M_x = C_{12}\frac{w}{R} + D_x(\psi_x - w''); \quad (5.66)$$

$$Q_x = K_x\psi_x. \quad (5.67)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к уравнениям (5.57), (5.64)–(5.67). Из первого уравнения (5.57) с учетом условий нагружения, показанных на рис. 5.12, получим $N_x = N$. Тогда из (5.64) найдем

$$u' = \frac{1}{B_{11}} \left(N - B_{12}\frac{w}{R} \right). \quad (5.68)$$

Заменим в третьем уравнении (5.57) Q_x с помощью соотношения (5.67) и найдем ψ_x

$$\psi_x = \frac{1}{K_x} \left(\frac{N_y}{R} - Nw'' - \bar{p} \right).$$

С учетом равенств (5.65) и (5.68) окончательно имеем

$$\psi_x = \frac{1}{RK_x b} \left[\frac{1}{B_{11}} \left(B_{12}N + B\frac{w}{R} \right) - (C_{12} + RN)w'' - \bar{p}R \right], \quad (5.69)$$

где $b = 1 - (C_{12}/RK_x)$; $B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2$.

Подставим теперь M_x и Q_x из (5.66), (5.67), во второе уравнение (5.57), продифференцируем его и с помощью равенства (5.69) исключим ψ_x . В результате получим следующее основное уравнение осесимметричной задачи для цилиндрической оболочки:

$$w^{IV} - 2k_1^2 w'' + k_2^4 w = k_p(x), \quad (5.70)$$

где

$$k_1^2 = \frac{1}{2Rbd} \left[C_{12}(1+b) + RN + \frac{BDx}{RB_{11}K_x} \right]; \quad k_2^4 = \frac{B}{R^3 B_{11}bd};$$

$$k_p(x) = \frac{1}{bd} \left(\bar{p}' - \frac{B_{12}N}{B_{11}R} - \frac{D_x}{K_x} \bar{p}'' \right); \quad d = D_x \left(1 + \frac{C_{12} + RN}{RbK_x} \right).$$

Уравнение типа (5.70) обсуждалось в § 4.2, и его решение имеет форму (4.61), т. е.

$$w = w_0 + \sum_{m=1}^4 C_m^1 \Phi_m(x), \quad (5.71)$$

где w_0 — частное решение, которое для наиболее распространенного случая нагружения равномерным внутренним давлением ($\bar{p} = p = \text{const}$) имеет вид

$$w_0 = \frac{R}{B} (pRB_{11} - NB_{12}), \quad (5.72)$$

а форма записи функций $\Phi_m(x)$ зависит от соотношения между параметрами k_1^2 и k_2^2 . В § 4.2 были представлены выражения для $\Phi_m(x)$, которые включали гиперболические функции. Эти выражения удобны для расчета коротких оболочек, края которых влияют друг на друга, и для упрощения решения могут быть использованы условия симметрии относительно среднего сечения оболочки [9].

Для расчета длинных оболочек, края которых практически не влияют друг на друга, используется запись через экспоненциальные функции. В частности, при $k_1^2 < k_2^2$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= e^{-rx} \cos tx; & \Phi_2 &= e^{-rx} \sin tx; \\ \Phi_3 &= e^{rx} \cos tx; & \Phi_4 &= e^{rx} \sin tx, \end{aligned} \quad (5.73)$$

где

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2 + k_1^2)}; \quad t = \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2 - k_1^2)}. \quad (5.74)$$

Для функций Φ_1 и Φ_2 можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi_1' &= -(t\Phi_2 + r\Phi_1); & \Phi_2' &= t\Phi_1 - r\Phi_2; \\ \Phi_1'' &= (r^2 - t^2)\Phi_1 + 2rt\Phi_2; & \Phi_2'' &= (r^2 - t^2)\Phi_2 - 2rt\Phi_1; \\ \Phi_1''' &= -r(r^2 - 3t^2)\Phi_1 + t(t^2 - 3r^2)\Phi_2; & \Phi_2''' &= -r(r^2 - 3t^2)\Phi_2 - \\ & & - t(t^2 - 3r^2)\Phi_1. \end{aligned}$$

Решения (5.73) справедливы и в случае, когда уравнение (5.70) имеет вид

$$w^{IV} + 2k_3^2 w'' + k_2^4 w = k_p(x).$$

Здесь $k_3^2 = -k_1^2$, и вместо (5.74) будем иметь

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2 - k_3^2)}; \quad t = \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2 + k_3^2)}.$$

При $k_1^2 > k_2^2$

$$\Phi_1 = e^{-r_1 x}; \quad \Phi_2 = e^{-r_2 x}; \quad \Phi_3 = e^{r_1 x}; \quad \Phi_4 = e^{r_2 x},$$

где

$$r_{1,2} = \sqrt{k_1^2 \mp \sqrt{k_1^4 - k_2^4}}. \quad (5.75)$$

Итак, прогиб оболочки определяется решением (5.71). Осевое перемещение можно найти интегрированием равенства (5.68), т. е.

$$u = \frac{1}{B_{11}} \left[Nx - \frac{B_{12}}{R} \left(\int w_0 dx + \sum_{m=1}^4 C_m \int \Phi_m dx \right) \right] + C_8. \quad (5.76)$$

Постоянная C_8 здесь соответствует осевому смещению оболочки как твердого тела. Средний угол сдвига ψ_x может быть получен из равенств (5.67), (5.57), (5.71), (5.69)

$$\psi_x = \frac{1}{K_x} \left\{ \frac{1}{R} \left(C_{12} + \frac{BD_x}{RB_{11}K_{xb}} \right) \left(w'_0 + \sum_{m=1}^4 C_m \Phi'_m \right) - D_x \left[1 + \frac{1}{RK_{xb}} (C_{12} + RN) \right] \left(w''_0 + \sum_{m=1}^4 C_m \Phi''_m \right) - \frac{D_x}{K_{xb}} \bar{p}' \right\}. \quad (5.77)$$

Геометрические соотношения (5.59) после подстановки выражений (5.71), (5.76), (5.77) определяют деформации и изменение кривизны образующей, а формулы (4.23)—(4.25) позволяют найти деформации и напряжения во всех слоях оболочки.

Постоянные интегрирования, входящие в решение (5.71), (5.76), (5.77), определяются из граничных условий на торцах $x = \text{const}$. С учетом результатов, представленных в § 2.8, и сделанных выше упрощений получим

$$N_x \delta u = 0; \quad M_x \delta \theta_x = 0; \quad (Q_x + N_x w') \delta w = 0. \quad (5.78)$$

Уравнение (5.70) учитывает ортотропию и слоистую структуру стенки, деформацию поперечного сдвига и нелинейный эффект, связанный с изменением кривизны меридиана в процессе нагружения. Отметим, что задача об осесимметричной деформации цилиндрической композитной оболочки неоднократно обсуждалась ранее. Анализ влияния ортотропии материала и деформации поперечного сдвига на поведение оболочки представлен в работах [6, 12, 42, 56, 70, 73, 87]. Решение этой задачи в рамках классической теории изотропных оболочек подробно описано в работах [9, 90, 96].

Рассмотрим особенности поведения композитной цилиндрической оболочки, связанные со слоистой структурой стенки и с изменением кривизны ее меридиана, т. е. с наличием в коэффициенте k_1 уравнения (5.70) члена, включающего осевое усилие N . В качестве примера рассмотрим цилиндрическую оболочку, изготовленную методом намотки и состоящую из чередующихся спиральных ($\varphi = 36^\circ$) и кольцевых ($\varphi = 90^\circ$) слоев стеклопластика. Относительная толщина оболочки $h/R = 0,021$, т. е. деформация сдвига в ней является незначительной, и можно принять $K_x \rightarrow \infty$. Остальные параметры следующие: $B_{11} = 0,213$ ГПа·м; $B_{12} =$

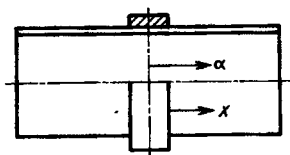
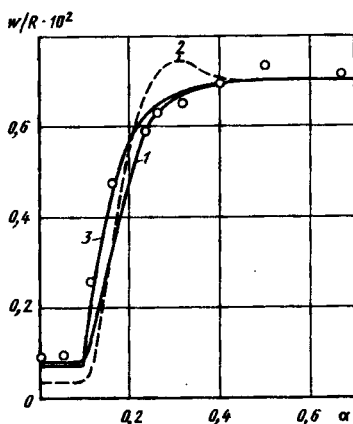


Рис. 5.13. Цилиндрическая оболочка, усиленная упругим кольцом

Рис. 5.14. Распределение прогиба по образующей, соответствующее нелинейному (1), линейному (2), нелинейному безмоментному (3) решениям и результатам эксперимента (○)



$= 0,112 \text{ ГПа} \cdot \text{м}$; $B_{22} = 0,56 \text{ ГПа} \cdot \text{м}$; $C_{12} = 0$; $D_x = 2,55 \times 10^{-6} \text{ ГПа} \cdot \text{м}^3$. Оболочка радиуса $R = 0,1 \text{ м}$ усилена стальным кольцом, толщина которого $h_k = 4 \times 10^{-3} \text{ м}$, ширина $a_k = 18 \times 10^{-3} \text{ м}$ (рис. 5.13), нагружена равномерным внутренним давлением $p = 4,7 \text{ МПа}$, торцы закрыты днищами, т. е. $N = 0,5pR$.

Считая оболочку длинной и рассматривая ее поведение в окрестности кольца, примем в решении (5.71) $C_3 = C_4 = 0$, т. е. будем учитывать только затухающую по x часть решения. Постоянные C_1 и C_2 найдем из следующих условий при $x = 0$ (см. рис. 5.12):

$$\theta_x = -w' = 0, \quad w = w_k. \quad (5.79)$$

Предполагается, что сечение кольца является жестким и не учитывается деформация сдвига оболочки. Радиальное перемещение кольца (см. рис. 5.13), нагруженного внутренним давлением и в соответствии с граничными условиями (5.78) краевыми усилиями ($Q_x + Nw'$), определяется равенством

$$w_k = \frac{R^2}{B_k} [pa_k + 2Q_x(0) + Nw'(0)], \quad (5.80)$$

где $B_k = (E_k h_k + B_{22} h) a_k$ — жесткость кольца с учетом соприкасающейся с ним части оболочки и

$$Q_x = M'_x = -D_x w''.$$

Здесь учтены равенства (5.57), (5.66) и принято $C_{12} = 0$, $\psi_x = 0$. Окончательно, используя граничные условия (5.79), получим:

$$\text{при } N < \frac{2}{R} \sqrt{\frac{BD_x}{B_{11}}} \\ w = w_0 - \frac{w_0 - \frac{pa_k R^2}{B_k}}{1 + \frac{4R^2 D_x}{B_k} r(r^2 + t^2)} e^{-rx} \left(\cos tx + \frac{r}{t} \sin tx \right); \quad (5.81)$$

$$\text{при } N > \frac{2}{R} \sqrt{\frac{BD_x}{B_{11}}}$$

$$w = w_0 - \frac{\left(w_0 - \frac{pa_K R^2}{B_K}\right) \left(e^{-r_1 x} - \frac{r_1}{r_2} e^{-r_2 x}\right)}{1 - \frac{r_1}{r_2} + \frac{2R^2 D_x}{B_K} r_1 (r_2^2 - r_1^2)}. \quad (5.82)$$

Здесь r , t определяются равенствами (5.74), а r_1 , r_2 — формулой (5.75). Рассматриваемая в качестве примера оболочка описывается решением (5.82), где $r_1 = 17,7/R$; $r_2 = 25,1/R$. Этому решению соответствует кривая 1 на рис. 5.14.

Если в уравнении (5.70) не учитывать нелинейные эффекты, то в выражениях для k_1 и d следует отбросить члены, содержащие осевое усилие. В результате получим

$$w^{IV} - 2k_1^2 w'' + k_2^4 w = k_p(x), \quad (5.83)$$

где

$$k_1^2 = \frac{1}{2Rbd} \left[C_{12}(1+b) + \frac{BD_x}{RB_{11}K_x} \right]; \quad k_2^4 = \frac{B}{R^2 B_{11} b d};$$

$$k_p(x) = \frac{1}{bd} \left(\bar{p} - \frac{B_{12}N}{B_{11}R} - \frac{D_x}{K_x} \bar{p}'' \right);$$

$$b = 1 - \frac{C_{12}}{RK_x}; \quad d = D_x \left(1 + \frac{C_{12}}{RK_x b} \right).$$

Граничные условия (5.78) упрощаются следующим образом:

$$N_x \delta u = 0; \quad M_x \delta \theta_x = 0; \quad Q_x \delta w = 0.$$

Если не учитывать также деформацию поперечного сдвига, т. е. принять $K_x \rightarrow \infty$, получим соотношения классической теории краевого эффекта в слоистых цилиндрических оболочках:

$$\begin{aligned} w^{IV} - 2k_1^2 w'' + k_2^4 w &= k_p(x); \\ k_1^2 &= \frac{C_{12}}{RD_x}; \quad k_2^4 = \frac{B}{R^2 B_{11} D_x}; \quad k_p(x) = \frac{1}{D_x} \left(\bar{p} - \frac{B_{12}N}{B_{11}R} \right); \\ w &= w_0 + C_1 \Phi_1(x) + C_2 \Phi_2(x); \\ M_x &= C_{12} \frac{w}{R} - D_x w''; \\ Q_x &= M'_x = C_{12} \frac{w'}{R} - D_x w'''. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Для рассматриваемой в качестве примера оболочки $C_{12} = 0$ прогиб определяется равенством (5.81) при $r = t = 14,9/R$. Распределение прогиба по образующей показано на рис. 5.14 штриховой линией 2. Из решения (5.81) следует, что при $x \rightarrow \infty$ $w \rightarrow w_0$, а из последних двух равенств (5.84), учитывая, что $w_0 = \text{const}$ и $C_{12} = 0$, можно заключить, что при $x \rightarrow \infty$ $M_x \rightarrow 0$ и $Q_x \rightarrow 0$. Таким образом, при удалении от закрепленного края $x = 0$ (см. рис. 5.13) состояние оболочки приближается

к безмоментному, которому соответствует прогиб w_0 (5.72), совпадающий с (5.25) при $N = P/2\pi R$. Изгибающие моменты и поперечные силы при этом существуют лишь вблизи закрепленного края, где имеет место изгибный краевой эффект. Отметим, что в общем случае при $C_{12} \neq 0$ из выражения (5.84) для изгибающего момента следует, что при $x \rightarrow \infty$ $M_x \rightarrow C_{12}w_0/R$, т. е. в слоистой оболочке изгибный краевой эффект возникает в окрестности не только закрепленного, но и свободного края оболочки. Действительно, для свободного края оболочки $N_x = N = 0$, $M_x = 0$, $Q_x = 0$; из соотношений (5.84) имеем

$$w = w_0 \left\{ 1 - \frac{C_{12}e^{-rx} (\cos tx + c \sin tx)}{E [C_{12} - D_x (r^2 - t^2) + 2rtcD_x]} \right\},$$

$$\text{где } w_0 = \frac{pR^3 B_{11}}{B}; \quad c = \frac{r [C_{12} - RD_x (r^2 - 3t^2)]}{t [C_{12} + RD_x (t^2 - 3r^2)]}.$$

Смешанная жесткость C_{12} может быть как больше, так и меньше нуля, т. е. свободный край слоистой оболочки при действии равномерного внутреннего давления изгибается в направлении, зависящем от структуры материала.

Рассмотрим еще одну упрощенную модель — безмоментную оболочку, описываемую нелинейными уравнениями типа (5.11)—(5.13). Принимая в исходных соотношениях (5.57)—(5.59) $D_x = 0$, $C_{12} = 0$, получим: $M_x = 0$; $Q_x = 0$; $N_x = N$;

$$Nw'' - \frac{N_y}{R} + \bar{p} = 0;$$

$$N = B_{11}u' + B_{12}\frac{w}{R}; \quad N_y = B_{21}u' + B_{22}\frac{w}{R}.$$

Эта система сводится к следующему уравнению [21]:

$$w'' - k^2 w = k_{1p}, \quad (5.85)$$

$$\text{где } k^2 = \frac{B}{R^2 B_{11} N}; \quad k_{1p} = \frac{B_{12}}{R B_{11}} - \frac{\bar{p}}{N}.$$

Решение уравнения (5.85) имеет вид

$$w = w_0 + C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx},$$

где w_0 — частное решение, определяемое равенством (5.72). Для рассматриваемой в качестве примера оболочки с кольцом (см. рис. 5.13) $C_2 = 0$ и $w(0) = w_k$, где w_k — радиальное перемещение кольца, соответствующее равенству (5.80), в котором следует принять $Q_x(0) = 0$. Окончательно получим

$$w = w_0 - \frac{\left(w_0 - \frac{p a_k R^3}{B_k}\right) e^{-kx}}{1 + \frac{2R^2 N k}{B_k}}, \quad (5.86)$$

где $k = 14,4/R$. Решение (5.86) определяет нелинейный безмоментный краевой эффект, которому на рис. 5.14 соответствует кривая 3. Точками показаны результаты измерения прогиба. Из рис. 5.14

следует, что исследуемый нелинейный эффект оказывает заметное влияние на прогиб композитной оболочки. Отметим, что уравнение типа (5.85) приведено в работе [9] применительно к анализу малых деформаций мягких оболочек, предварительно нагруженных внутренним давлением.

§ 5.5. Общий случай нагружения цилиндрических оболочек — решения в двойных тригонометрических рядах

Выше в § 5.3 и 5.4 были рассмотрены одномерные задачи, соответствующие некоторым частным условиям нагружения. В общем случае замкнутая или открытая цилиндрическая оболочка может быть нагружена сосредоточенными и распределенными поверхностными силами, вызывающими напряженно-деформированное состояние, изменяющееся как в продольном, так и в кольцевом направлении. Такая оболочка может быть описана общими уравнениями (5.1)—(5.7), которые упрощаются с учетом ее структуры, условий закрепления и нагружения.

Рассмотрим тонкие гладкие слоистые и регулярно подкрепленные оболочки, нагруженные нормальным давлением. При расчете таких оболочек можно не учитывать изменение радиуса кривизны по толщине и деформации поперечного сдвига. В результате уравнения (5.1)—(5.7), в которых сохраняются только линейные члены, принимают следующий вид:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{Q_y}{R} = 0; \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0; \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_y}{R} + \bar{p} = 0; \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11}e_x + B_{12}e_y + C_{11}\kappa_x + C_{12}\kappa_y; \\ N_y &= B_{21}e_x + B_{22}e_y + C_{21}\kappa_x + C_{22}\kappa_y; \\ N_{xy} &= B_{33}\gamma_{xy} + C_{33}\chi_{xy}; \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} M_x &= C_{11}e_x + C_{12}e_y + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y; \\ M_y &= C_{21}e_x + C_{22}e_y + D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_y; \\ M_{xy} &= C_{33}\gamma_{xy} + D_{33}\chi_{xy}; \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (5.92)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \quad (5.93)$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.94)$$

Обобщенные жесткости, входящие в физические соотношения (5.90), (5.91), определяются равенствами (4.9), записанными в § 4.1 для слоистых пластины. Заметим, что уравнения (5.87)—(5.94) отличаются от соответствующих уравнений для пластин наличием дополнительных членов, включающих радиус R . В связи с этим дальнейшее изложение будет строиться в форме непосредственного обобщения решений, полученных в гл. 4. Это позволит существенно сократить как вывод, так и запись соответствующих результатов.

Получим систему уравнений в перемещениях, аналогичную системе (4.80). Для этого выразим из уравнений (5.88) поперечные силы

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (5.95)$$

и, подставив их в уравнения (5.87), (5.89), получим

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = 0; \quad (5.96)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_y}{R} + \bar{p} = 0. \quad (5.97)$$

Таким образом, пять исходных уравнений равновесия (5.87)—(5.89) приведены к трем — (5.96), (5.97). Выражая в них усилия и моменты через обобщенные деформации с помощью физических соотношений (5.90), (5.91), а деформации — через перемещения согласно равенствам (5.92)—(5.94), окончательно получим

$$L_{iu}(u) + L_{iv}(v) + L_{iw}(w) = 0 \quad (i = 1, 2); \\ L_{3u}(u) + L_{3v}(v) + L_{3w}(w) = \bar{p}, \quad (5.98)$$

где

$$L_{ju} = L_{ju}^{(1)} + L_{ju}^{(2)}; \quad L_{jv} = L_{jv}^{(1)} + L_{jv}^{(2)}; \\ L_{jw} = L_{jw}^{(1)} + L_{jw}^{(2)} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Операторы с верхним индексом (1) соответствуют пластине и уже были приведены в пояснениях к уравнениям (4.80), а дополнительные операторы с индексом (2) имеют следующий вид:

$$L_{1u}^{(2)} = 0; \quad L_{1v}^{(2)} = L_{2u}^{(2)} = \frac{1}{R} (C_{12} + C_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\ L_{1w}^{(2)} = L_{3u}^{(2)} = \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x}; \\ L_{2v}^{(2)} = \frac{1}{R} (2C_{33} + \frac{D_{33}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R} (2C_{22} + \frac{D_{22}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ L_{2w}^{(2)} = L_{3v}^{(2)} = \frac{1}{R} (B_{22} + \frac{C_{22}}{R}) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{D_{12} + 2D_{33}}{R} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \\ - \frac{D_{22}}{R} \frac{\partial^3}{\partial y^3}; \\ L_{3w}^{(2)} = \frac{B_{22}}{R^2} - \frac{2}{R} (C_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}). \quad (5.99)$$

Рассмотрим замкнутую оболочку, свободно опертую по торцам $x = 0$ и $x = l$ (см. рис. 5.1). Условия свободного опирания подробно рассмотрены в § 4.1 (см. рис. 4.2). Применительно к цилиндрическим оболочкам они предполагают отсутствие на торцах прогиба w , кольцевого перемещения v , осевого усилия N_x , изгибающего момента M_x и приближенно моделируют опирание края оболочки на шпангоут, жесткий в своей плоскости и податливый при кручении и изгибе из плоскости. Решение, соответствующее условиям свободного опирания, может быть представлено в виде двойных тригонометрических рядов типа (4.81), т. е.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y; \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y, \end{aligned} \quad (5.100)$$

где для замкнутой оболочки следует принять $\lambda_m = \pi m/l$, $\lambda_n = n/R$. В результате представления нагрузки аналогичным рядом

$$\bar{p} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y \quad (5.101)$$

и подстановки разложений (5.100), (5.101) в уравнения (5.98) можно получить решение, аналогичное (4.82), т. е.

$$\begin{aligned} u_{mn} &= \frac{p_{mn}}{D} (d_{13}d_{22} - d_{12}d_{23}); \quad v_{mn} = \frac{p_{mn}}{D} (d_{12}d_{13} - d_{11}d_{23}); \\ w_{mn} &= \frac{p_{mn}}{D} (d_{11}d_{22} - d_{12}^2), \end{aligned} \quad (5.102)$$

где $d_{ij} = a_{ij} + c_{ij}$, причем a_{ij} уже были записаны при выводе решения (4.82) для пластины, а c_{ij} и D имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0; \quad c_{12} = \frac{1}{R} (C_{12} + C_{33}) \lambda_m \lambda_n; \quad c_{13} = \frac{B_{13}}{R} \lambda_m; \\ c_{22} &= \frac{1}{R} \left(2C_{33} + \frac{D_{33}}{R} \right) \lambda_m^2 + \frac{1}{R} \left(2C_{22} + \frac{D_{33}}{R} \right) \lambda_n^2; \\ c_{23} &= \left(B_{22} + \frac{C_{33}}{R} \right) \frac{\lambda_n}{R} + \frac{1}{R} (D_{12} + 2D_{33}) \lambda_m \lambda_n + \frac{D_{23}}{R} \lambda_n^3; \\ c_{33} &= \frac{B_{33}}{R^2} + \frac{2}{R} (C_{12} \lambda_m^2 + C_{22} \lambda_n^2); \\ D &= d_{33} (d_{11}d_{22} - d_{12}^2) - d_{11}d_{23}^2 - d_{22}d_{13}^2 + 2d_{12}d_{13}d_{23}. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Уравнения (5.98) и решение (5.102) соответствуют общей классической теории ортотропных слоистых оболочек. В прикладных

расчетах часто используется так называемая техническая теория цилиндрических оболочек [23], уравнения которой следуют из (5.87)—(5.94) в результате отбрасывания двух, как правило, несущественных членов: Q_y/R во втором уравнении равновесия (5.87) и v/R во втором геометрическом соотношении (5.94). Таким образом, в технической теории вместо уравнений (5.87) и (5.94) используются следующие выражения:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (5.104)$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.105)$$

В результате операторы L (5.99) и коэффициенты c (5.103) существенно упрощаются и принимают вид

$$L_{1u}^{(2)} = 0; \quad L_{1v}^{(2)} = L_{2u}^{(2)} = 0; \quad L_{1w}^{(2)} = \frac{B_{11}}{R} \frac{\partial}{\partial x};$$

$$L_{2v}^{(2)} = 0; \quad L_{2w}^{(2)} = L_{3v}^{(2)} = \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial y};$$

$$L_{3w}^{(2)} = \frac{B_{22}}{R^2} - \frac{2}{R} \left(C_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

и

$$c_{11} = 0; \quad c_{12} = 0; \quad c_{13} = \frac{B_{11}}{R} \lambda_m; \quad c_{22} = 0;$$

$$c_{23} = \frac{B_{22}}{R} \lambda_n; \quad c_{33} = \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{2}{R} (C_{12} \lambda_m^2 + C_{22} \lambda_n^2).$$

Многочисленные расчеты изотропных и ортотропных оболочек показывают, что введенные упрощения не вносят заметных погрешностей в решение. В связи с этим естественно попытаться использовать допущения технической теории при анализе цилиндрических оболочек, податливых при межслоевом сдвиге. Итак, в качестве уравнений равновесия примем приближенные (5.104) и точные (5.95), (5.97) уравнения. Физические соотношения для усилий и моментов сохраняются в форме (5.90), (5.91), и к ним добавляются соотношения (5.5) для поперечных сил, т. е.

$$Q_x = K_x \psi_x; \quad Q_y = K_y \psi_y. \quad (5.106)$$

Сдвиговые жесткости K_x и K_y определяются формулами, приведенными в § 4.1. Геометрические соотношения (5.92), (5.93) остаются без изменения, а равенства (5.105) обобщаются следующим образом:

$$\theta_x = \psi_x - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = \psi_y - \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.107)$$

Сравнивая полученную систему с уравнениями (4.1)—(4.8) для пластины, можно заключить, что она отличается от этих уравнений только равенством (5.92) для v_y , которое содержит слагае-

мое w/R , и уравнением равновесия (5.97), которое включает член N_y/R . В связи с этим воспроизведем здесь вывод уравнений (4.16), (4.21), (4.22), полученных в § 4.1 для слоистых пластин. В частности, с помощью формул (4.11) введем функцию напряжений $F(x, y)$, позволяющую тождественно удовлетворить уравнения равновесия (5.104). Из геометрических соотношений (5.92) при этом следует уравнение совместности деформаций, обобщающее (4.12):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

и позволяющее записать с помощью равенств (4.13) первое уравнение основной системы, аналогичное уравнению (4.16):

$$\begin{aligned} c_y \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (c - 2c_{xy}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + c_x \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \\ = B_{yx} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + (B_x + C) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + (B_y + C) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \\ + B_{xy} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Все обозначения в следующих ниже соотношениях соответствуют приведенным § 4.1. Подставляя моменты из (4.18) и усилие N_y из (4.11) в уравнение равновесия (5.97), получим второе уравнение основной системы, аналогичное (4.21):

$$\begin{aligned} D_x \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + (2D + D_{yx}) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + (2D + D_{xy}) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \\ + D_y \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + C_{xy} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (C_x + C_y - 2C) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + C_{yx} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \bar{p} = 0. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Два последних уравнения основной системы, следующие из равенств (5.95), (5.106) и (5.107), полностью совпадают с уравнениями (4.22) и здесь не воспроизводятся. Таким образом, рассматриваемая оболочка описывается уравнениями (5.108), (5.109), (4.22).

Для свободно опертой по торцам $x = 0$ и $x = l$ замкнутой оболочки (см. рис. 5.1) решение может быть представлено в виде двойных тригонометрических рядов типа (4.85), т. е.

$$\begin{aligned} F &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y; \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_x^{mn} \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y; \\ \theta_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_y^{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y, \end{aligned} \quad (5.110)$$

где $\lambda_m = \pi m/l$; $\lambda_n = n/R$. Подставляя разложения (5.101) и (5.110) в исходные уравнения, получим решение, аналогичное (4.87), т. е.

$$\begin{aligned} F_{mn} &= \frac{p_{mn}}{E} [e_{13} (e_{23}e_{34} - e_{24}e_{33}) - e_{13} (e_{22}e_{34} - e_{32}e_{24}) + \\ &\quad + e_{14} (e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32})]; \\ \theta_z^{mn} &= -\frac{p_{mn}}{E} [e_{11} (e_{23}e_{34} - e_{24}e_{33}) - e_{13} (e_{21}e_{34} - e_{24}e_{31}) + \\ &\quad + e_{14} (e_{21}e_{33} - e_{23}e_{31})]; \\ \theta_y^{mn} &= \frac{p_{mn}}{E} [e_{11} (e_{24}e_{33} - e_{22}e_{34}) - e_{12} (e_{24}e_{31} - e_{21}e_{34}) + \\ &\quad + e_{14} (e_{22}e_{31} - e_{21}e_{32})]; \\ w_{mn} &= -\frac{p_{mn}}{E} [e_{11} (e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}) - e_{13} (e_{21}e_{33} - e_{23}e_{31}) + \\ &\quad + e_{13} (e_{21}e_{32} - e_{22}e_{31})], \end{aligned} \quad (5.111)$$

где $E = e_{34} [e_{11} (e_{32}e_{43} - e_{33}e_{42}) - e_{12} (e_{31}e_{43} - e_{33}e_{41}) + e_{13} \times$
 $\times (e_{31}e_{42} - e_{32}e_{41})] - e_{34} [e_{11} (e_{22}e_{43} - e_{23}e_{42}) - e_{12} (e_{21}e_{43} -$
 $- e_{41}e_{23}) + e_{13} (e_{21}e_{42} - e_{22}e_{41})] - e_{14} [e_{21} (e_{32}e_{43} - e_{33}e_{42}) -$
 $- e_{33} (e_{31}e_{43} - e_{32}e_{41}) + e_{23} (e_{31}e_{42} - e_{32}e_{41})]$ и $e_{ij} = b_{ij} + k_{ij}$, причем b_{ij} были приведены в пояснениях к уравнениям (4.86), а из дополнительных коэффициентов k_{ij} отличны от нуля только

$$k_{14} = k_{41} = \frac{\lambda_m^2}{R}.$$

Если структура стенки оболочки симметрична относительно срединной поверхности, т. е. обобщенные жесткости определяются равенствами (4.40), в решении (5.111) следует принять $e_{12} = e_{21} = e_{13} = e_{31} = 0$, после чего оно имеет вид:

$$\begin{aligned} F_{mn} &= \frac{p_{mn}\lambda_m^2}{RE} (e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}); \\ \theta_z^{mn} &= \frac{p_{mn}}{E} c_{mn} (\lambda_m e_{33} - \lambda_n e_{23}); \\ \theta_y^{mn} &= \frac{p_{mn}}{E} c_{mn} (\lambda_m e_{32} - \lambda_n e_{22}); \\ w_{mn} &= -\frac{p_{mn}}{E} c_{mn} (e_{22}e_{32} - e_{23}e_{32}), \end{aligned} \quad (5.112)$$

где

$$E = c_{mn} [\lambda_m (e_{32}e_{43} - e_{23}e_{42}) - \lambda_n (e_{22}e_{43} - e_{23}e_{42})] - \frac{\lambda_m^4}{R^2} (e_{22}e_{33} - e_{32}e_{23})$$

и

$$\begin{aligned} c_{mn} &= c_y \lambda_m^4 + (c - 2c_{xy}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + c_x \lambda_n^4; \\ e_{22} &= 1 + \frac{1}{K_x} (D_{11} \lambda_m^2 + D_{33} \lambda_n^2); \end{aligned}$$

$$e_{33} = 1 + \frac{1}{K_y} (D_{22}\lambda_n^2 + D_{33}\lambda_m^2);$$

$$e_{33} = \frac{\lambda_m\lambda_n}{K_x} (D_{13} + D_{33}); \quad e_{33} = \frac{\lambda_m\lambda_n}{K_y} (D_{13} + D_{33});$$

$$e_{42} = D_{11}\lambda_m^3 + (D_{12} + 2D_{33})\lambda_m\lambda_n^2;$$

$$e_{43} = D_{22}\lambda_n^3 + (D_{12} + 2D_{33})\lambda_m^2\lambda_n.$$

Если дополнительно не учитывать деформации поперечного сдвига, приняв $K_x \rightarrow \infty$, $K_y \rightarrow \infty$, то равенства (5.112) упрощаются следующим образом:

$$F_{mn} = -\frac{\lambda_m^2 w_{mn}}{R c_{mn}}; \quad \theta_x^{mn} = -\lambda_m w_{mn};$$

$$\theta_y^{mn} = \lambda_n w_{mn}; \quad w_{mn} = p_{mn} \left(L_{mn} + \frac{\lambda_m^4}{R^2 c_{mn}} \right), \quad (5.113)$$

где L_{mn} определяется равенством (4.47).

В качестве примера рассмотрим однородную по толщине цилиндрическую оболочку, обобщенные жесткости которой определяются (4.41). Оболочка изготовлена из стеклотекстолита, имеет следующие параметры: $E_x = 19,6$ ГПа, $E_y = 30,5$ ГПа, $G_{xy} = 4,75$ ГПа, $G_{xy} = G_{yy} = 2,06$ ГПа, $\mu_{xy} = 0,14$, длину $l = 2,37R$, относительную толщину $h/R = 0,03156$; свободно оперта по торцам и нагружена посередине пролета радиальной сосредоточенной силой P (рис. 5.15). Коэффициенты ряда (5.101) для нагрузки имеют следующий вид:

$$p_{m0} = (-1)^{\frac{m+3}{2}} \frac{P}{\pi R l} \quad (m = 1, 3, 5 \dots);$$

$$p_{mn} = (-1)^{\frac{m+3}{2}} \frac{2P}{\pi R l} \quad \left(\begin{matrix} m = 1, 3, 5 \dots \\ n = 1, 2, 3 \dots \end{matrix} \right).$$

Распределение прогиба вдоль образующей $y = 0$ показано на рис. 5.16 ($R = 0,112$ м, $P = 980$ Н). Кривая 1 соответствует реше-

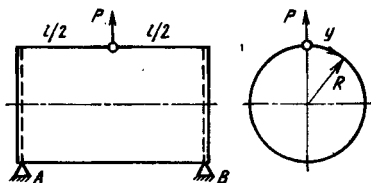


Рис. 5.15. Цилиндрическая оболочка, нагруженная сосредоточенной силой

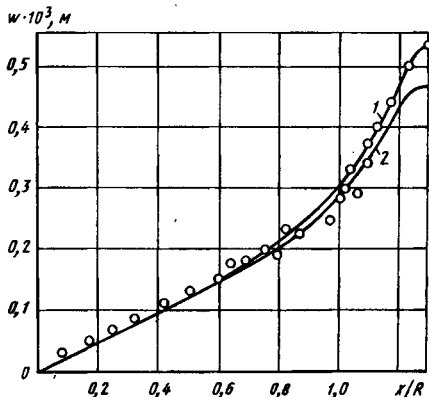


Рис. 5.16. Распределение прогиба по образующей, полученное с учетом (1) и без учета (2) деформации поперечного сдвига, и результаты измерения прогиба (о)

нию (5.112), учитывающему деформации поперечного сдвига, кривая 2 — решению (5.113), не учитывающему эти деформации; точками отмечены результаты измерения прогиба.

Решения в двойных тригонометрических рядах, построенные выше, описывают поведение оболочек, характер закрепления которых соответствует условиям свободного опирания. Эти условия, как уже отмечалось, моделируют широкий класс реальных конструктивных схем соединения оболочек, а соответствующие решения вследствие своей относительной простоты используются для практических расчетов даже тогда, когда эти условия выполняются лишь частично. Характерным примером в этом отношении является показанная на рис. 5.15 оболочка, напряженное состояние которой в окрестности точки приложения силы мало зависит от способа закрепления краев. На краях $x = 0$ и $x = l$ существенными являются условия $w = 0$, $v = 0$, обеспечивающие недеформируемость опорных сечений, а замена условий $N_x = M_x = 0$ (свободное опирание) на условия $u = \theta_x = 0$ (жесткая заделка) вдали от краев практически не повлияет на результат. Однако, если убрать кольца или стенки, обеспечивающие жесткость опорных сечений, и закрепить оболочку со свободными торцами в точках A и B (см. рис. 5.15), то ее прогиб будет значительно отличаться от показанного на рис. 5.16, а сечения — от круговых. Прикладная теория, предназначенная для решения подобных, а также других задач расчета цилиндрических оболочек, в которых большую роль играет деформация контура сечения, будет изложена в следующем разделе.

§ 5.6. Полубезмоментная теория композитных цилиндрических оболочек

Как уже отмечалось, полубезмоментная теория позволяет описывать цилиндрические оболочки, условия закрепления которых отличаются от свободного опирания, что исключает использование двойных тригонометрических рядов типа (5.100) или (5.110). Типовая задача, решение которой может быть построено с помощью полубезмоментной теории, иллюстрируется рис. 5.17, где показана длинная оболочка, усиленная в средней части кольцом, на которое передаются сосредоточенные силы. Для этой задачи, естественно, можно привлечь общие уравнения типа (5.1)—(5.7), решение которых может быть представлено тригонометрическими рядами по кольцевой координате, включающими неизвестные амплитудные функции, зависящие от продольной координаты x . Для этих амплитудных функций может быть получена си-

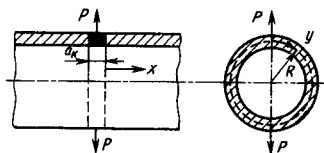


Рис. 5.17. Трехслойная цилиндрическая оболочка с кольцом, нагруженная диаметрными силами

стема обыкновенных дифференциальных уравнений, причем она будет иметь в совокупности десятый порядок, что, как правило, исключает построение аналитического решения. Однако исследование напряженно-деформированного состояния систем, аналогичных показанной на рис. 5.17, позволяет заключить, что взаимодействие кольца и оболочек осуществляется в основном за счет мембранных усилий, а изгибающие моменты, крутящие моменты и поперечные силы, действующие в сечении $x = \text{const}$, можно не учитывать.

Таким образом, в привлечении уравнений общей теории цилиндрических оболочек нет необходимости. С другой стороны, наиболее простых уравнений, соответствующих безмоментной теории, рассмотренной в § 5.2, здесь недостаточно. Как видно из равенств (5.15), касательные усилия N_{xy} , следующие из уравнений безмоментной теории, не изменяются по длине оболочки и в любом сечении системы, показанной на рис. 5.17, будут такими же, как и в сечении $x = 0$. Ясно, что в реальной конструкции эти усилия по мере удаления от кольца затухают, т. е. для длинных оболочек уравнения безмоментной теории, как уже отмечалось в § 5.2, могут привести к результату, противоречащему физической природе описываемого явления.

Заметим, что если кольцо соединено со смежными или опорными кольцами короткими оболочками, то это противоречие не проявляется, и при расчете таких конструкций оболочки часто описываются уравнениями безмоментной теории.

Полубезмоментная теория была построена В. З. Власовым на основе системы физических гипотез, которые наглядно иллюстрируются расчетной моделью, показанной на рис. 5.18 [23]. Оболочка условно считается состоящей из системы колец, которые обладают конечной изгибной жесткостью, равной кольцевой изгибной жесткости стенки, и системы стержней, которые соединяют кольца и передают осевые и сдвигающие усилия N_x , N_{xy} . Осевые изгибающие моменты M_x , соответствующие поперечные силы Q_x и крутящие моменты M_{xy} принимаются равными нулю. Кроме того, не учитывается эффект Пуассона, кольцевая деформация ε_y и деформация сдвига γ_{xy} (5.92) принимаются равными нулю. Перечисленные

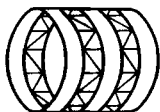


Рис. 5.18. Полубезмоментная расчетная модель цилиндрической оболочки

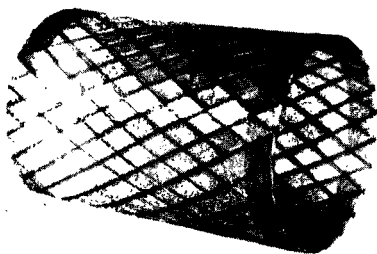


Рис. 5.19. Композитная оболочка, структура которой соответствует полубезмоментной расчетной модели

гипотезы позволяют, с одной стороны, снизить порядок уравнений по переменной x до четырех, а с другой стороны получить решение, затухающее в осевом направлении, т. е. описывающее поведение длинных оболочек.

Многочисленные исследования и приложения полубезмоментной теории к расчету цилиндрических оболочек позволяют сделать следующие важные замечания. Прежде всего установлено [30, 63], что для получения уравнений полубезмоментной теории перечисленные выше гипотезы можно заменить одним формальным предположением — считать, что изменение любой функции f , определяющей деформации или напряжения в оболочке, в осевом направлении происходит значительно медленнее, чем в кольцевом. В частности, в работе [9] обсуждаемая теория построена на предположении о том, что

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|.$$

Далее показано [48, 61], что полубезмоментная теория позволяет получать удовлетворительные результаты при решении широкого класса задач статики и устойчивости цилиндрических оболочек. Существенным для композитных оболочек является также следующее обстоятельство. Несмотря на то, что В. З. Власов назвал полубезмоментную теорию теорией ортотропных оболочек [23], она предназначалась для описания изотропных оболочек, а ортотропия, т. е. заложенная в теорию различная сопротивляемость стенки воздействиям в осевом и кольцевом направлениях, была связана не со свойствами материала, а с анализом вклада соответствующих напряжений в восприятие внешней нагрузки. Применительно к композитным оболочкам гипотезы полубезмоментной теории часто получают и физическое обоснование, связанное со структурой материала. Например, сетчатая цилиндрическая оболочка, состоящая из ребер, образованных методом намотки, и обшивки, армированной в кольцевом направлении (рис. 5.19), по соотношению жесткостных параметров практически полностью соответствует гипотезам полубезмоментной теории (рис. 5.18).

Имея в виду отмеченное соответствие, будем строить полубезмоментную теорию композитных оболочек на основе физических гипотез, учитывающих как особенности ожидаемого решения, так и особенности структуры композита.

Рассмотрим рис. 5.18 и общие уравнения (5.1)—(5.7), в которых отбросим все нелинейные члены. Как отмечалось в § 2.2, гипотезы целесообразно вводить, принимая допущения относительно значений коэффициентов жесткости, входящих в физические соотношения (5.5).

Итак, предположим в соответствии с основной гипотезой полубезмоментной теории, что стенка не обладает жесткостью при изгибе в осевом направлении и кручении, т. е. примем $D_{11} =$

$= C_{11} = 0, D_{33}^{11} = D_{33}^{12} = D_{33}^{21} = D_{33}^{22} = 0, C_{33}^{11} = C_{33}^{12} = C_{33}^{21} = C_{33}^{22} = 0$. Кроме того, пренебрежем эффектом Пуассона, принимая $B_{12} = B_{21} = 0, C_{12} = C_{21} = 0, D_{12} = D_{21} = 0$. Тогда из равенств (5.5) следует, что $M_x = 0, M_{xy} = M_{yx} = 0$, а из первого уравнения (5.3), что $Q_x = 0$.

Как уже отмечалось в § 5.3, учет деформации оси кольца (см. рис. 5.18) не вносит в его расчет существенных уточнений. В связи с этим введем условие нерастяжимости контура сечения. Предварительно зададим такую координату начальной поверхности, чтобы смешанная жесткость C_{33} обращалась в нуль. Тогда из (5.5) имеем $N_y = B_y e_y, M_y = D_y \kappa_y$, где B_y и D_y определяются равенствами (5.33). При $B_y \rightarrow \infty$ получим $e_y = 0$, и согласно второму равенству (5.6)

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} = 0. \quad (5.114)$$

При построении полубезмоментной теории обычно вводится условие отсутствия деформации сдвига, что соответствует бесконечно большой сдвиговой жесткости. Учитывая, что сдвиговая жесткость композитных оболочек может быть малой (например, оболочки, армированные в осевом и кольцевом направлениях, обладают низкой жесткостью при кручении), воздержимся от этой гипотезы. Однако, для упрощения вывода при вычислении соответствующих коэффициентов не будем учитывать изменения радиуса по толщине, т. е. примем $B_{33}^{11} = B_{33}^{12} = B_{33}^{21} = B_{33}^{22} = B_{33}$. Тогда из (5.5) следует, что $N_{xy} = N_{yx}$.

Окончательно, с учетом сделанных предположений система уравнений (5.1)—(5.7), в которую дополнительно включена нагрузка q_y (см. рис. 5.4), сводится к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{Q_y}{R} + q_y = 0; \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0; \quad \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_y}{R} + \bar{p} = 0; \end{aligned} \quad (5.115)$$

$$N_x = B_x e_x; \quad N_{xy} = B_{33} \gamma_{xy}; \quad M_y = D_y \kappa_y; \quad Q_y = K_y \psi_y; \quad (5.116)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (5.117)$$

Система из 12 уравнений (5.114)—(5.117) включает 12 неизвестных функций и учитывает деформации сдвига γ_{xy} и ψ_y , обычно принимаемые равными нулю. Для слоистой оболочки сдвиговая жесткость K_y определяется равенством (5.32); $B_x = B_{11}$ соответствует первой формуле (5.63) и (см. § 2.5)

$$B_{33} = \sum_{i=1}^k A_{33}^{(i)} (t_i - t_{i-1}).$$

Приведем систему (5.114)—(5.117) к одному уравнению. Для замкнутой оболочки представим искомые функции и нагрузку в виде следующих тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u, & w \\ N_x, & N_y, & M_y \\ e_x, & \kappa_y \end{Bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_n(x), & w_n(x) \\ N_{xn}(x), & N_{yn}(x), & M_{yn}(x) \\ e_{xn}(x), & \kappa_{yn}(x) \end{Bmatrix} \cos \lambda_n y; \\ \begin{Bmatrix} v \\ N_{xy}, & Q_y \\ \gamma_{xy}, & \psi_y \end{Bmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} v_n(x) \\ N_{xyn}(x), & Q_{yn}(x) \\ \gamma_{xyn}(x), & \psi_{yn}(x) \end{Bmatrix} \sin \lambda_n y; \end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\bar{p} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \cos \lambda_n y; \quad q_y = \sum_{n=1}^{\infty} q_{yn}(x) \sin \lambda_n y,$$

где $\lambda_n = n/R$. Заметим, что ряды (5.118) включают члены, соответствующие $n = 0$, т. е. осесимметричной составляющей нагрузки. Ввиду того, что в дальнейшем будет использована операция деления на λ_n , выделим состояние, соответствующее $n = 0$, и построим его непосредственно с помощью уравнений (5.114)—(5.117). Полагая, что входящие в них функции не зависят от y , получим

$$\begin{aligned} N_{x0} &= \frac{P}{2\pi R}; \quad N_{y0} = pR; \quad M_{y0} = 0; \\ e_{x0} &= \frac{P}{2\pi R B_x}; \quad \kappa_{y0} = 0; \quad \frac{du_0}{dx} = e_{x0}; \quad w_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Здесь P — осевая сила (см. рис. 5.3). Решение (5.119) может быть получено из уравнений безмоментной теории (см. § 5.2). В частности, для оболочки, показанной на рис. 5.3, оно совпадает с осесимметричной составляющей решения (5.23), (5.24), если принять в последнем $B_{zz} \rightarrow \infty$.

В дальнейшем будем считать, что $n \geq 1$. Подставляя разложения (5.118) в уравнения (5.114)—(5.117), запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\lambda_n v_n + \frac{w_n}{R} = 0; \quad (5.120)$$

$$N'_{xn} + \lambda_n N_{xyn} = 0; \quad (5.121)$$

$$N'_{xyn} - \lambda_n N_{yn} + \frac{Q_{yn}}{R} + q_{yn} = 0; \quad (5.122)$$

$$\lambda_n M_{yn} + Q_{yn} = 0; \quad (5.123)$$

$$\lambda_n Q_{yn} - \frac{N_{yn}}{R} + p_n = 0; \quad (5.124)$$

$$N_{xn} = B_x u'_n; \quad (5.125)$$

$$N_{yn} = B_{33}(v'_n - \lambda_n u_n); \quad (5.126)$$

$$M_{yn} = D_y \lambda_n \left(\psi_{yn} + \frac{v_n}{R} + \lambda_n w_n \right); \quad (5.127)$$

$$Q_{yn} = K_y \psi_{yn}. \quad (5.128)$$

Штрихом обозначена производная по x . Из равенства (5.120) имеем

$$v_n = -w_n / R \lambda_n. \quad (5.129)$$

Рассмотрим соотношения (5.123), (5.127) и (5.128). Исключая из (5.127) ψ_{yn} с помощью (5.128), а Q_{yn} с помощью (5.123) и учитывая формулу (5.129), можно выразить сначала M_{yn} , а затем Q_{yn} и ψ_{yn} через w_n и получить следующие зависимости:

$$M_{yn} = D_n w_n; \quad Q_{yn} = -\lambda_n D_n w_n; \quad \psi_{yn} = -\frac{\lambda_n D_n}{K_y} w_n, \quad (5.130)$$

где

$$D_n = \frac{D_y (n^2 - 1)}{R^2 \left(1 + \frac{\lambda_n^2 D_y}{K_y} \right)}. \quad (5.131)$$

Из уравнения (5.124) с учетом (5.130) найдем

$$N_{yn} = R (p_n - \lambda_n^2 D_n w_n), \quad (5.132)$$

а из уравнения (5.122), исключая Q_{yn} и N_{yn} с помощью равенств (5.130), (5.132), будем иметь

$$N'_{xn} = \lambda_n R \left(\bar{p}_n - \frac{n^2 - 1}{R^2} D_n w_n \right), \quad (5.133)$$

где $\bar{p}_n = p_n - \frac{q_{yn}}{\lambda_n R}$.

Продифференцируем соотношение (5.126), подставим в него v'_n и N'_{xn} согласно (5.129) и (5.133) и найдем

$$u'_n = \frac{R}{B_{33}} \left(\frac{n^2 - 1}{R^2} D_n w_n - \bar{p}_n \right) - \frac{w''_n}{R \lambda_n^2}. \quad (5.134)$$

Тогда формула (5.125) с учетом (5.134) дает

$$N_{xn} = \frac{R B_x}{B_{33}} \left(\frac{n^2 - 1}{R^2} D_n w_n - \bar{p}_n \right) - \frac{B_x}{R \lambda_n^2} w''_n. \quad (5.135)$$

Разрешающее уравнение может быть получено в результате дифференцирования уравнения (5.121) и подстановки в него равенств (5.133), (5.135), т. е.

$$w_n^{IV} - 2k_1^2 w''_n + k_2^4 w_n = k_p, \quad (5.136)$$

где

$$k_1^2 = \frac{\lambda_n^2 (n^2 - 1) D_n}{2 B_{33}}; \quad k_2^4 = \frac{D_n}{B_x} \lambda_n^4 (n^2 - 1);$$

$$k_p = \frac{n^4}{R^2 B_x} \bar{p}_n - \frac{n^2}{B_{33}} \bar{p}_n''.$$

Рассмотрим сначала случай $n = 1$, которому соответствуют $k_1 = k_2 = 0$ и следующее решение уравнения (5.136):

$$w_1 = \int dx \int dx \int dx \int \left(\frac{\bar{p}_1}{R^3 B_x} - \frac{\bar{p}'_1}{B_{33}} \right) dx + \\ + C_1^{(1)} x^3 + C_2^{(1)} x^2 + C_3^{(1)} x + C_4^{(1)}. \quad (5.137)$$

Решение (5.137) описывает изгиб оболочки с нерастяжимым контуром сечения как тонкостенного стержня, деформации которого соответствуют закону плоских сечений, и может быть получено методом, изложенным в § 3.2, или с помощью уравнений безмоментной теории (см. § 5.2). В частности, для консольной оболочки, показанной на рис. 5.3, решение (5.137) совпадает с решением (5.24), если в последнем отбросить осесимметричную составляющую ($n = 0$), которая в рассматриваемом случае определяется соотношениями (5.119), и принять $B_{33} \rightarrow \infty$. Таким образом, составляющие решения, соответствующие членам с индексами $n = 0$ и $n = 1$ в рядах (5.118), могут быть построены отдельно с помощью достаточно простых уравнений безмоментной теории цилиндрических оболочек.

При $n \geq 2$ решение уравнения (5.136) имеет вид

$$w_n = w_{n0} + \sum_{m=1}^4 C_m^{(n)} \Phi_m^{(n)}(x), \quad (5.138)$$

где w_{n0} — частное решение. Уравнение (5.136) уже дважды встречалось ранее — в § 4.2 и в § 5.4, где и приведены выражения для функций $\Phi_m^{(n)}(x)$. Для сравнительно коротких оболочек обычно используются формы, содержащие гиперболические функции (см. § 4.2), а для длинных — выражения (5.73), включающие экспоненциальные функции. Постоянные $C_m^{(n)}$ определяются из граничных условий, для постановки которых необходимо получить выражения для сдвиговых усилий и осевых перемещений. Усилие N_{xy} выражается через прогиб с помощью равенств (5.121) и (5.135), которые дают

$$N_{xy} = \frac{B_x}{R^2 \lambda_n^3} w_n''' - \frac{R B_x}{\lambda_n B_{33}} \left(\frac{n^2 - 1}{R^2} D_n w_n' - \bar{p}'_n \right). \quad (5.139)$$

Продольное перемещение можно найти, если подставить усилие (5.139) и кольцевое перемещение (5.129) в соотношение (5.126), т. е.

$$u_n = \frac{R B_x}{\lambda_n^2 B_{33}^2} \left(\frac{n^2 - 1}{R^2} D_n w_n' - \bar{p}'_n \right) - \frac{B_x w_n''}{R \lambda_n^4 B_{33}} - \frac{w_n'}{R \lambda_n^2}. \quad (5.140)$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки в рамках полубезмоментной теории определяется соотношениями (5.118), (5.119), (5.129), (5.130), (5.132), (5.135), (5.137)—(5.140).

Для того чтобы придать дальнейшему изложению конкретный характер, проведем его на примере трехслойной оболочки, усиленной упругим кольцом (см. рис. 5.17). Для анализа кольца могут быть использованы соотношения, полученные в § 5.3, однако учитывая, что уравнения (5.27)–(5.29) для кольца являются частной формой записи уравнений полубезмоментной теории (5.115)–(5.116), удобнее воспользоваться результатами настоящего раздела. Считая кольцо короткой оболочкой, напряженно-деформированное состояние которой не зависит от продольной координаты x , из уравнения (5.136) получим

$$w_n^{(\kappa)} = \frac{R^3}{D_n^{(\kappa)}(n^2 - 1)} \left[p_n^{(\kappa)} - \frac{\bar{q}_{yn}^{(\kappa)}}{R\lambda_n} \right]. \quad (5.141)$$

Здесь и далее верхним индексом (κ) отмечены параметры, относящиеся к кольцу. Тангенциальное перемещение, изгибающий момент, поперечное и кольцевое усилия в кольце определяются равенствами (5.129), (5.130), (5.132). Отметим, что при $n = 1$ согласно формуле (5.131) $D_n = 0$ и из уравнения (5.133) следует условие равновесия кольца как твердого тела $p_1 = q_{y1}$. Таким образом, в формуле (5.141) при $n = 1$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Из исходных уравнений при этом получим $w_1 = v_1 = C$, где C соответствует смещению кольца как твердого тела. Для рассматриваемого кольца (см. рис. 5.17) $C = 0$, т. е. $w_1 = 0$ и $v_1 = 0$. Условия статической эквивалентности поверхностных нагрузок, коэффициенты разложения которых входят в равенство (5.141), и действующих на рассматриваемое кольцо внешних и контактных сил (см. рис. 5.17) имеют следующий вид:

$$a_{\kappa} p_n^{(\kappa)} = q_n; \quad a_{\kappa} q_{yn}^{(\kappa)} = 2N_{xy n} \quad (x = 0).$$

Здесь q_n — коэффициенты разложения в ряд Фурье локальных нагрузок, показанных на рис. 5.17;

$$q_0 = \frac{P}{\pi R}; \quad q_n = \frac{2P}{\pi R} (n = 2, 4, 6, \dots); \quad q_n = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

а $N_{xy} (x = 0)$ — усилия взаимодействия между кольцом и оболочками, коэффициенты разложения которых определяются равенством (5.139) при $x = 0$. Таким образом, формула (5.141) принимает вид

$$w_n^{(\kappa)} = \frac{2R}{D_n^{(\kappa)} a_{\kappa} (n^2 - 1)} \left[\frac{P}{\pi} - \frac{1}{\lambda_n} N_{xy n} (x = 0) \right], \quad (5.142)$$

где $n = 2, 4, 6, \dots$

Рассмотрим теперь соединенные с кольцом оболочки, причем вследствие симметрии можно ограничиться обсуждением части конструкции, соответствующей $0 \leq x \leq \infty$ (см. рис. 5.17). Из решения (5.119) для $n = 0$ следует, что $w_0 = 0$. В решении (5.137) для $n = 1$ примем $p_1 = 0$ и учтем, что при $x \rightarrow \infty$ прогиб должен стремиться к нулю. В результате получим $C_i^{(1)} = 0$ ($i = 1, 2$,

3, 4) и $w_1 = 0$, что очевидно, поскольку прогиб w_1 соответствует изгибаемому стержню, а на рассматриваемую систему действует самоуравновешенная система сил. Итак, прогиб оболочки определяется равенством (5.138), в котором в силу условия $\bar{p}_n = 0$ следует принять $w_{n0} = 0$ и сохранить функции, затухающие при увеличении x . С учетом формул (5.73) получим $C_3^{(n)} = C_4^{(n)} = 0$ и

$$w_n = e^{-rx} [C_1^{(n)} \cos tx + C_2^{(n)} \sin tx]. \quad (5.143)$$

Здесь $n \geq 2$, а r и t находятся по формулам (5.74). Для определения $C_1^{(n)}$ и $C_2^{(n)}$ рассмотрим условия сопряжения оболочки с кольцом. Поскольку кольцо деформируется только в своей плоскости, осевое перемещение при $x = 0$ обращается в нуль (см. рис. 5.17), т. е. с учетом равенства (5.140)

$$u_n = -\frac{1}{R\lambda_n^2} \left\{ \left[1 - (n^2 - 1) \frac{B_x D_n}{B_{33}^2} \right] w_n'(0) + \frac{B_x w_n'''(0)}{\lambda_n^2 B_{33}} \right\} = 0. \quad (5.144)$$

Подставляя сюда решение (5.143), получим $C_2 = cC_1$, где

$$c = \frac{r \left[1 - (n^2 - 1) \frac{B_x D_n}{B_{33}^2} - (3t^2 - r^2) \frac{B_x}{\lambda_n^2 B_{33}} \right]}{t \left[1 - (n^2 - 1) \frac{B_x D_n}{B_{33}^2} + (3r^2 - t^2) \frac{B_x}{\lambda_n^2 B_{33}} \right]}.$$

Второе граничное условие потребует более подробного рассмотрения. Строго говоря, в рамках полубезмоментной теории на поперечных кромках оболочки можно наложить ограничения только на тангенциальные перемещения u и v , т. е. такие же, как и в безмоментной теории. Однако, если прогиб, соответствующий безмоментной теории, в задачах сопряжения получается, как правило, разрывным, то решение уравнений полубезмоментной теории оказывается непрерывным по прогибу. Причина такого различия связана с условием нерастяжимости контура сечения (5.114). Действительно, из эквивалентного ему равенства (5.129) следует, что непрерывность перемещения $v_n(x)$ обеспечивает непрерывность прогиба $w_n(x)$. Таким образом, рассматривая сопряжение оболочки с кольцом (см. рис. 5.17), необходимо выполнить условия $v_n(0) = v_n^{(\kappa)}$. Однако учитывая, что для кольца и для оболочки справедливо равенство (5.129), это условие можно заменить следующим: $w_n(0) = w_n^{(\kappa)}$. Подставляя сюда прогиб оболочки (5.143) и прогиб кольца (5.142) и учитывая, что согласно соотношениям (5.139) и (5.144) при $\bar{p}_n = 0$ и $x = 0$

$$N_{xy n} = \frac{B_x}{R\lambda_n^3} w_n'',$$

окончательно получим

$$C_1 = \frac{2PR}{\pi \left\{ D_n^{(\kappa)} a_n (n^2 - 1) + \frac{2B_x}{\lambda_n^4} [r(3t^2 - r^2) + ct(3r^2 - t^2)] \right\}}.$$

Итак, постоянные найдены, и следовательно, построено решение рассматриваемой задачи. В развернутой форме оно оказывается довольно громоздким, поэтому здесь не приводится.

Как уже отмечалось, описанный выше вариант полубезмоментной теории отличается от традиционного тем, что при его построении учитываются сдвиговые жесткости K_y и B_{33} . Если структура материала позволяет пренебречь деформацией сдвига γ_{xy} (например, оболочка содержит слои с углами армирования $\pm 45^\circ$, которые обладают высокой сдвиговой жесткостью), то можно принять $B_{33} \rightarrow \infty$, что существенно упрощает расчетные соотношения. Равенства (5.129)–(5.132) остаются при этом без изменения, а соотношения (5.135), (5.139), (5.140) принимают следующий вид:

$$N_{xn} = -\frac{B_x}{R\lambda_n^2} w_n''; \quad N_{xyn} = \frac{B_x}{R\lambda_n^3} w_n''; \quad u_n = -\frac{w_n'}{R\lambda_n^2}.$$

В уравнении (5.136) исчезают средний член в левой части ($k_1 = 0$) и второе слагаемое в правой части. Для рассматриваемой в качестве примера оболочки (см. рис. 5.17) решение этого уравнения (5.143) может быть записано в явной форме

$$w_n = \frac{2PR e^{r_n x} (\cos r_n x + \sin r_n x)}{\pi (n^2 - 1) \left[D_n^{(\kappa)} a_\kappa + \frac{2D_n}{r_n} \right]},$$

$$\text{где } r_n = \lambda_n \sqrt[4]{\frac{(n^2 - 1) D_n}{4B_x}}.$$

Полагая здесь $x = 0$ и подставляя полученные коэффициенты в ряд (5.118) для w , запишем выражение для прогиба кольца

$$w_\kappa = \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{2PR \cos \lambda_n y}{\pi (n^2 - 1) \left[D_n^{(\kappa)} a_\kappa + \frac{2D_n}{r_n} \right]}. \quad (5.145)$$

Здесь первое слагаемое знаменателя учитывает жесткость самого кольца, а второе — увеличение жесткости за счет оболочек. Принимая в равенстве (5.145) $y = 0$, $D_n = 0$ и учитывая формулу (5.131), получим прогиб свободного кольца в месте приложения силы (см. рис. 5.6):

$$w_0 = \frac{2PR^3}{\pi D_y^{(\kappa)} a_\kappa} \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \left[1 + \frac{n^2 D_y^{(\kappa)}}{R^2 K_y^{(\kappa)}} \right].$$

Учитывая, что $D_y^{(\kappa)} = Eh^3/12$, $K_y^{(\kappa)} = Gh$ и

$$\sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}; \quad \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16},$$

найдем

$$w_0 = 0,0745 \frac{PR^3}{D_y^{(\kappa)} a_\kappa} \left(1 + 0,44 \frac{Eh^4}{GR^3} \right),$$

что совпадает с формулой (5.42), если учесть, что в ней a_n включено в D_y , и отбросить член, соответствующий деформации оси кольца, которая в настоящем разделе принята равной нулю.

Если дополнительно не учитывать деформацию поперечного сдвига, приняв $K_y \rightarrow \infty$, придем к традиционному варианту полу-безмоментной теории цилиндрических оболочек [9]. Заметим, что получаемые при этом упрощения в формуле (5.131) являются несущественными.

§ 5.7. Устойчивость цилиндрических оболочек

Рассмотрим задачи устойчивости, общая постановка которых обсуждалась в § 2.9. Пусть цилиндрическая оболочка нагружена осевыми сжимающими усилиями T и внешним давлением q (рис. 5.20), при совместном или раздельном действии которых она может терять устойчивость. Считая докритическое состояние оболочки безмоментным и полагая в равенствах (5.25) $P = -2\pi RT$, $p = -q$, получим в обозначениях § 2.9

$$N_x^0 = -T, \quad N_y^0 = -qR, \quad N_{xy}^0 = 0. \quad (5.146)$$

Как уже отмечалось в § 5.1, линеаризованные уравнения устойчивости могут быть формально получены из линейных уравнений статики, если подставить в них нормальное давление в форме записи (5.10), т. е. с учетом равенств (5.7) и (5.146)

$$\bar{p} = -T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + qR \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

При решении прикладных задач это соотношение, как правило, несколько упрощается. Потеря устойчивости при воздействии внешнего давления сопровождается появлением системы продольных волн, т. е. прогибом, быстро изменяющимся по координате y . В результате первое слагаемое в круглых скобках оказывается малым по сравнению со вторым и может быть отброшено. Тогда

$$\bar{p} = - \left(T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + qR \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (5.147)$$

Сделанное упрощение соответствует технической теории цилиндрических оболочек, обсуждавшейся в § 5.5. Типовыми случаями нагружения цилиндрической оболочки являются осевое сжатие ($q = 0$), боковое внешнее давление ($T = 0$) и всестороннее внешнее давление ($T = 0,5qR$), которые и рассматриваются ниже.

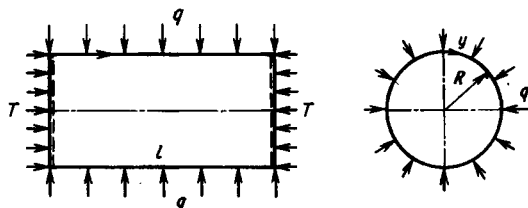


Рис. 5.20. Цилиндрическая оболочка, нагруженная внешним давлением и осевыми сжимающими усилиями

В случае одноосного осевого сжатия в равенствах (5.146), (5.147), следует принять $q = 0$, т. е.

$$N_x^0 = -T; \quad N_y^0 = N_{xy}^0 = 0; \quad \bar{p} = -T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (5.148)$$

Исследуем сначала осесимметричную форму потери устойчивости, при которой образующиеся в результате потери устойчивости перемещения не зависят от координаты y . Линеаризованное уравнение устойчивости может быть записано с помощью линейного уравнения осесимметричной задачи (5.83), если принять в нем $N = 0$ и подставить $\bar{p}$ согласно последней формуле (5.148), т. е.

$$D_x \left(1 - \frac{T}{K_x}\right) w^{IV} + \left[T - \frac{C_{12}}{R} \left(2 - \frac{C_{12}}{RK_x}\right) + \frac{BD_x}{R^2 B_{11} K_x}\right] w'' + \frac{B}{R^2 B_{11}} w = 0. \quad (5.149)$$

Считая, что оболочка свободно оперта по торцам $x = 0$ и $x = l$ (см. рис. 5.20), представим прогиб в виде ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \lambda_m x,$$

где $\lambda_m = \pi m/l$. Подставляя это разложение в уравнение (5.149), получим

$$T = \frac{\lambda_m^4 D_x + \frac{\lambda_m^2}{R} \left[C_{12} \left(2 - \frac{C_{12}}{RK_x}\right) + \frac{BD_x}{RB_{11}K_x} \right] + \frac{B}{R^2 B_{11}}}{\lambda_m^2 \left(1 + \frac{D_x}{K_x} \lambda_m^2\right)}. \quad (5.150)$$

Критическое усилие определяется в результате минимизации выражения (5.150) по λ_m . В общем случае такая минимизация осуществляется перебором m от 1 до значения, при котором T достигает минимума. Для тонкой оболочки, не содержащей податливых при сдвиге слоев легкого заполнителя, деформацией поперечного сдвига можно пренебречь, приняв $K_x \rightarrow \infty$. Тогда равенство (5.150) упрощается:

$$T = \lambda_m^2 D_x + \frac{2C_{12}}{R} + \frac{1}{\lambda_m^2} \frac{B}{R^2 B_{11}} \quad (5.151)$$

и допускает приближенную минимизацию, основанную на замене дискретного параметра λ_m некоторым непрерывным аргументом функции $T(\lambda_m)$. Используя условие минимума $\partial T / \partial \lambda_m = 0$, получим

$$\lambda_m^3 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{B}{B_{11} D_x}}. \quad (5.152)$$

Подставляя это выражение в равенство (5.151), найдем

$$T_k = \frac{2}{R} \left(\sqrt{\frac{B D_x}{B_{11}}} + C_{12} \right). \quad (5.153)$$

Отметим, что формула (5.152) в общем случае дает значение m , отличающееся от целого числа, т. е. эта формула так же, как и (5.153), является приближенной. В принципе выражение (5.152) может быть использовано для точного определения критической нагрузки по формуле (5.151) подстановкой в нее целых значений m , близких к найденному из (5.152), и последующим выбором минимального значения T . Однако на практике эта операция, как правило, оказывается излишней, так как формула (5.153) для не слишком коротких оболочек обладает удовлетворительной точностью.

Для иллюстрации полученных соотношений рассмотрим однослойную по толщине оболочку, для которой $D_x = \bar{E}_x h^3 / 12$, $B/B_{11} = E_y h$, $\bar{E}_x = E_x / (1 - \mu_{xy} \mu_{yx})$, $C_{12} = 0$, и равенства (5.151), (5.152), (5.153) имеют вид

$$T = \frac{\pi^2 \bar{E}_x h^3 m^2}{12 l^2} + \frac{E_y h l^2}{\pi^2 R^2 m^2}; \quad (5.154)$$

$$m^2 = \frac{2\pi l^2}{Rh} \sqrt{\frac{3E_y}{\bar{E}_x}}; \quad T_k = \frac{h^2}{R\sqrt{3}} \sqrt{\bar{E}_x E_y}. \quad (5.155)$$

Заметим, что выражение (5.154) позволяет выявить механизм сопротивления оболочки потере устойчивости при осевом сжатии: первое слагаемое в правой части при $m = 1$ соответствует критической нагрузке продольной полосы единичной ширины, рассматриваемой как шарнирно опертый стержень, а второе — кольцевым усилиям, препятствующим изгибу этой полосы. В качестве примера рассмотрим оболочку из стеклопластика, параметры которой были приведены в § 5.5 ($E_x = 19,6$ ГПа; $E_y = 30,5$ ГПа; $G_{xy} = 4,75$ ГПа; $\mu_{xy} = 0,14$; $G_{xy} = G_{yx} = 2,06$ ГПа; $l/R = 2,37$; $h/R = 0,03156$). По формулам (5.155) получим ($\bar{T} = T/h$) $m = 8,76$; $\bar{T}_k = 0,448$ ГПа. Принимая $m = 8$; 9; 10, с помощью равенства (5.154) найдем соответственно $\bar{T}_k = 0,459$; 0,452; 0,467 ГПа. Таким образом, точное значение $\bar{T}_k = 0,452$ ГПа соответствует $m = 9$ и лишь на 0,9 % отличается от результата, следующего из (5.155) или (5.153).

Существенно, что формула (5.152) позволяет приближенно оценить и в дальнейшем уточнить значение m для оболочки, рассчитываемой с учетом деформации поперечного сдвига, т. е. осуществить минимизацию усилия T (5.150). Для рассмотренного выше примера при $m = 8,76$ получим $\bar{T}_k = 0,426$ ГПа, а при $m = 8$; 9; 10 соответственно 0,459; 0,427; 0,430 ГПа. Таким образом, точное значение $\bar{T}_k = 0,427$ ГПа отличается от приближенного, соответствующего равенству (5.152), на 0,2 %.

Приведенные выше результаты относились к осесимметричной форме потери устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Как известно, в случае изотропного материала расшире-

ние спектра форм потери устойчивости, т. е. исследование неосесимметричных форм, не приводит к снижению расчетного критического усилия. Известно также, что для ортотропных оболочек форма потери устойчивости и критическое усилие существенно зависят от соотношения жесткостей стенки при растяжении, сжатии, изгибе в главных направлениях и сдвиге.

Прежде чем перейти к анализу неосесимметричной формы потери устойчивости, отметим, что соответствующие выражения для критических усилий, как будет видно из дальнейшего, позволяют провести только численное исследование влияния параметров оболочки на критические усилия. Такой параметрический анализ будет осуществляться далее на оболочках из углепластика, образованных из двух или трех слоев с толщиной $0,2 \times 10^{-3}$ м с углами армирования 0, 45° и 90°. Приведенные в табл. 5.1 18 структур подобраны так, чтобы отразить реальный диапазон соотношений жесткостей композитных оболочек. Радиус оболочек $R = 0,1$ м, а длина $l = (2; 4; 6) R$. В табл. 5.1 представлены суммы, через которые вычисляются мембранные, смешанные и изгибные жесткости стенки. Результаты расчетов сведены в табл. 5.2. Столбец 9 этой таблицы определяет критические усилия (5.153), соответствующие исследованной выше осесимметричной форме потери устойчивости.

Рассмотрим тонкие гладкие слоистые и подкрепленные оболочки, при анализе которых можно не учитывать изменение радиуса кривизны по толщине и деформации поперечного сдвига. Линеаризованные уравнения устойчивости таких оболочек могут быть получены с помощью уравнений статики (5.98), если заменить в них давление $\bar{p}$ в соответствии с равенством (5.147), т. е.

$$L_{iu}(u) + L_{iv}(v) + L_{iw}(w) = 0 \quad (i = 1, 2);$$

$$L_{zu}(u) + L_{zv}(v) + L_{zw}(w) + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + qR \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (5.156)$$

Для свободно опертой оболочки перемещения могут быть представлены тригонометрическими рядами (5.100), и для решения задачи устойчивости может быть использовано решение задачи статики (5.102). При этом в соответствии с равенствами (5.156) и (5.100), (5.101) достаточно подставить в последнюю формулу (5.102)

$$p_{mn} = (T\lambda_m^2 + qR\lambda_n^2) w_{mn}.$$

В результате получим

$$T\lambda_m^2 + qR\lambda_n^2 = d_{33} - \frac{d_{11}d_{23}^2 + d_{22}d_{13}^2 - 2d_{12}d_{13}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}. \quad (5.157)$$

В случае осевого сжатия ($q = 0$) критическое усилие определяется путем минимизации T по параметрам $\lambda_m = \pi m/l$ и $\lambda_n = n/R$, которые входят в коэффициенты d_{st} . Результаты такой минимизации методом последовательного перебора m ; $n = 1, 2, 3 \dots$ приведены в столбцах 3—5 табл. 5.2.

№	Структура	$I_{sf}^{(0)} \cdot 10^6, \text{ ГПа} \cdot \text{м}$				$I_{sf}^{(1)} \cdot 10^6, \text{ ГПа} \cdot \text{м}^2$				$I_{sf}^{(2)} \cdot 10^6, \text{ ГПа} \cdot \text{м}^3$			
		sf=11	sf=12	sf=22	sf=33	sf=11	sf=12	sf=22	sf=33	sf=11	sf=12	sf=22	sf=33
1	0/90	3,724	0	3,724	0,2	3,972	0	10,924	0,4	5,957	0	33,765	1,067
2	90/0	3,724	0	3,724	0,2	10,924	0	3,972	0,4	33,765	0	5,957	1,067
3	45/90	1,155	0,831	4,631	1,031	1,403	0,831	11,831	1,231	2,532	1,108	34,974	2,175
4	90/45	1,155	0,831	4,631	1,031	3,217	2,493	6,693	2,893	9,788	7,756	14,423	8,823
5	0/45	4,631	0,831	1,155	1,031	6,693	2,943	3,217	2,893	14,423	7,756	9,788	8,823
6	45/0	4,631	0,831	1,155	1,031	11,831	0,831	1,403	1,231		1,103	2,532	2,175
7	0/45/0	8,231	0,831	1,279	1,131	24,693	2,493	3,387	3,393	105,622	7,756	12,929	11,356
8	45/0/45	5,662	1,662	2,186	1,962	16,986	4,986	6,558	5,886	61,093	22,160	28,650	25,760
9	45/90/45	2,186	1,662	5,662	1,962	6,558	4,986	16,986	5,886	23,651	28,160	61,093	25,760
10	90/45/90	1,279	0,831	8,231	1,131	3,837	2,193	21,692	3,393	12,929	7,756	105,622	11,356
11	90/0/90	3,848	0	7,324	0,3	11,544	0	21,972	0,9	36,906	0	97,157	3,60
12	0/90/0	7,324	0	3,848	0,3	21,972	0	11,544	0,9	97,157	0	36,907	3,40
13	0/45/90	4,755	0,831	4,755	1,131	7,313	2,193	21,217	3,393	17,564	7,756	100,987	11,356
14	0/90/45	4,755	0,831	4,755	1,131	9,127	4,155	16,079	5,055	32,076	21,052	59,884	24,652
15	45/0/90	4,755	0,831	4,755	1,131	12,451	0,831	19,403	1,731	38,116	1,108	93,732	4,708
16	45/90/0	4,755	0,831	4,755	1,131	19,403	0,831	12,451	1,731	93,732	1,108	38,116	4,708
17	90/0/45	4,755	0,831	4,755	1,131	16,079	4,155	9,127	5,055	59,384	21,052	32,076	24,652
18	90/45/0	4,755	0,831	4,755	1,131	21,817	2,493	7,313	3,393	100,987	7,756	17,564	11,356

Остановимся на результатах расчета оболочек 6, 8 и 15, для которых критическое усилие реализуется при $n = 1$. Как уже отмечалось в § 5.2, 5.6, это значение n соответствует общему изгибу оболочки как стержня. Критическая нагрузка при этом определяется равенством типа (3.54), имеющим в рассматриваемом случае вид

$$T = \frac{\pi^2 m^2 R^2 B}{2l B_{22} \left(1 + \frac{\pi^2 m^2 R^2 B}{l^2 B_{22} B_{33}} \right)}. \quad (5.158)$$

Величина m находится из условия минимума T и зависит от условий закрепления оболочки как стержня. В частности, при шарнирном опирании (торцовые сечения могут свободно поворачиваться) $m = 1$, а при заделке (торцовые сечения неподвижны) $m = 2$. Стержневая форма потери устойчивости реализуется только в длинных оболочках. В частности, для оболочки 6 критическое усилие, определяемое по формуле (5.158), оказывается меньше приведенного в табл. 5.2 при $l > 100R$. Из табл. 5.2 следует, что оболочки 6, 8, 15 теряют устойчивость по осесимметричной форме, соответствующей $n = 0$ (столбец 9). Для остальных оболочек соотношение (5.157) дает меньшее по сравнению с формулой (5.153) значение критического усилия.

Рассмотрим теперь общую расчетную модель цилиндрической оболочки, учитывающую изменение радиуса по толщине и деформации поперечного сдвига. Для того чтобы получить формулу, аналогичную (5.157), достаточно воспользоваться при ее выводе решением (5.111) вместо (5.102). Получим

$$T\lambda_m^2 + qR\lambda_n^2 = -E [e_{11}(e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}) - e_{12}(e_{21}e_{33} - e_{23}e_{31}) + e_{13}(e_{21}e_{32} - e_{22}e_{31})]^{-1}. \quad (5.159)$$

Для оболочки, стенка которой симметрична относительно срединной поверхности, может быть использовано решение (5.112), и выражение (5.159) упрощается следующим образом:

$$T\lambda_m^2 + qR\lambda_n^2 = \frac{\lambda_m^4}{R^2 c_{mn}} + \frac{\lambda_m (e_{33}e_{42} - e_{32}e_{43}) + \lambda_n (e_{22}e_{43} - e_{23}e_{42})}{e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}}. \quad (5.160)$$

Если дополнительно не учитывать деформации поперечного сдвига, то с помощью решения (5.113) получим

$$T\lambda_m^2 + qR\lambda_n^2 = L_{mn} + \frac{\lambda_m^4}{R^2 c_{mn}}. \quad (5.161)$$

Равенства (5.159)—(5.161) соответствуют технической теории цилиндрических оболочек (см. § 5). Соотношение (5.161) является частным случаем решения (5.157). Оно получено в рамках упрощенного варианта теории и не учитывает смешанных жесткостей.

5.2. Результаты расчета композитных цилиндрических оболочек на устойчивость

№ *	$\frac{l}{R}$	Осевое сжатие $T_K \cdot 10^4$, ГПа·м						Вокровое внешнее давление $q_K \cdot R \cdot 10^4$, ГПа·м						Всестороннее внешнее давление $q_K \cdot R \cdot 10^4$, ГПа·м					
		Формула						Формула						Формула					
		(5.157)			(5.175)			(5.157)			(5.175)			(5.157)			(5.175)		
		T_K	m	n	T_K	m	n	$q_K R$	n	$q_K R$	$q_K R$	n	$q_K R$	$q_K R$	n	$q_K R$	$q_K R$	n	n
1	2	17,9	9	14	16,1	9	15	1,59	8	1,60	8	1,59	8	1,82	8	1,56	8	1,56	8
	4	17,9	18	14	16,1	19	15	0,82	6	0,84	6	0,84	6	0,91	6	0,81	6	0,83	6
	6	17,9	27	14	16,1	28	15	0,54	5	0,57	5	0,57	5	0,61	5	0,54	5	0,56	5
2	2	18,0	9	14	16,1	9	15	1,60	8	1,60	8	1,59	8	1,82	8	1,57	8	1,56	8
	4	18,0	18	14	16,1	19	15	0,82	6	0,84	6	0,84	6	0,91	6	0,81	6	0,83	6
	6	18,0	27	14	16,1	28	15	0,55	5	0,57	5	0,57	5	0,61	5	0,55	5	0,56	5
3	2	19,6	1	6	33,7	16	20	1,35	6	2,86	7	2,86	7	2,91	6	1,30	6	2,79	7
	4	18,4	1	4	33,6	33	20	0,71	4	1,42	5	1,42	5	1,45	4	0,70	4	1,41	5
	6	19,1	2	5	33,6	49	20	0,45	4	0,93	4	0,93	4	0,97	4	0,44	4	0,93	4
4	2	31,1	19	16	33,7	16	20	3,86	7	2,86	7	2,86	7	2,91	7	3,77	7	2,79	7
	4	31,1	39	16	33,6	33	20	1,91	5	1,42	5	1,42	5	1,45	6	1,88	6	1,41	5
	6	31,1	58	16	33,6	49	20	1,25	4	0,93	4	0,93	4	0,97	4	1,24	4	0,93	4
5	2	31,0	5	16	31,3	6	19	1,14	10	1,08	10	1,08	10	1,11	10	1,12	10	1,06	10
	4	30,9	11	16	31,3	12	19	0,56	7	0,54	7	0,54	7	0,55	7	0,55	7	0,57	7
	6	30,9	16	16	31,3	18	19	0,37	6	0,36	6	0,36	6	0,37	6	0,37	6	0,36	6
6	2	18,0	14	1	31,3	6	19	1,12	10	1,08	10	1,08	10	1,11	10	1,11	10	1,06	10
	4	17,9	27	1	31,3	12	19	0,51	7	0,54	7	0,54	7	0,55	7	0,51	7	0,54	7
	6	17,9	41	1	31,3	18	19	0,33	6	0,36	6	0,36	6	0,37	6	0,33	6	0,36	6

7	2	64,7	1	8	57,4	3	14	1,94	10	1,85	10	1,83	10	1,92	10	1,81	10
	4	63,4	1	6	57,4	6	14	0,93	7	0,93	7	0,93	7	0,96	7	0,92	7
	6	62,7	1	5	57,1	8	13	0,61	6	0,63	6	0,62	6	0,64	6	0,62	6
8	2	83,4	13	1	102,0	8	16	7,51	7	6,87	8	6,86	8	6,97	7	6,73	8
	4	83,4	26	1	101,9	17	16	3,38	5	3,50	5	3,43	5	3,49	5	3,45	5
	6	83,4	39	1	101,9	25	16	2,17	4	2,40	4	2,40	4	2,32	4	2,38	4
9	2	98,2	1	6	83,1	6	13	6,73	6	5,97	7	5,96	7	6,02	6	5,81	7
	4	84,2	1	4	83,1	12	13	3,01	5	2,97	5	2,97	5	3,01	5	2,93	5
	6	84,5	1	3	83,1	17	13	1,85	4	1,94	4	1,94	4	2,01	4	1,92	4
10	2	64,7	27	10	70,7	20	16	11,63	5	12,24	5	12,24	5	12,34	5	11,64	5
	4	64,7	54	10	70,7	40	16	5,51	4	5,95	4	5,95	4	6,17	4	5,83	4
	6	64,7	81	10	70,7	60	16	3,43	3	3,96	3	3,96	3	4,11	3	3,89	3
11	2	45,5	14	11	44,5	13	11	13,33	6	13,69	6	13,68	6	16,13	6	13,22	6
	4	45,5	29	11	44,5	29	12	6,78	4	7,24	4	7,24	4	8,07	4	7,01	4
	6	45,5	43	11	44,5	40	11	4,95	4	5,30	4	5,30	4	5,38	4	5,26	4
12	2	45,4	3	10	41,9	3	11	2,38	9	2,33	9	2,31	9	2,66	9	2,27	9
	4	45,4	6	10	41,6	7	11	1,21	6	1,23	6	1,23	6	1,33	6	1,22	6
	6	45,4	9	10	41,5	10	11	0,81	5	0,84	5	0,83	5	0,88	5	0,83	5
13	2	63,7	7	15	67,0	9	16	3,96	7	4,95	8	4,94	8	5,13	7	4,85	8
	4	63,6	15	15	67,0	18	16	1,95	5	2,58	6	2,58	6	2,56	5	2,56	6
	6	63,6	22	15	67,0	27	16	1,31	4	1,74	5	1,74	5	1,71	4	1,73	5
14	2	65,7	6	12	74,4	6	14	5,01	8	4,45	8	4,44	8	4,63	8	4,35	8
	4	65,7	12	12	74,4	12	14	2,59	6	2,30	6	2,30	6	2,31	6	2,28	6
	6	65,7	17	12	74,3	17	14	1,72	5	1,55	5	1,55	5	1,54	5	1,54	5

№ *	Осевое сжатие $T_K \cdot 10^4$, ГПа.м						Боковое внешнее давление $q_K R \cdot 10^4$, ГПа.м						Всестороннее внешнее давление $q_K R \cdot 10^4$, ГПа.м					
	Формула						Формула						Формула					
	(5.157)		(5.175)		(5.153)		(5.157)		(5.175)		(5.178)		(5.181)		(5.157)		(5.178)	
	T_K	m	n	T_K	m	n	T_K	n	$q_K R$	n	$q_K R$	n	$q_K R$	n	$q_K R$	n	$q_K R$	n
15	2	74,3	19	1	83,5	11	15	73,9	7,41	7	9,07	7	9,59	7	7,22	7	8,83	7
	4	74,3	39	1	83,5	22	15	73,9	3,42	5	4,59	5	4,80	5	3,38	5	4,53	5
	6	74,3	58	1	83,5	34	15	73,9	2,14	4	3,05	4	3,20	4	2,12	4	3,02	4
16	2	88,8	1	7	74,4	6	14	112,6	4,14	8	4,45	8	4,63	8	4,06	8	4,35	8
	4	79,1	1	5	74,4	12	14	112,6	1,94	6	2,30	6	2,31	6	1,93	6	2,28	6
	6	74,4	1	4	74,3	17	14	112,6	1,26	5	1,55	5	1,54	5	1,25	5	1,54	5
17	2	65,9	10	12	83,5	11	15	127,7	10,21	7	9,07	7	9,59	7	9,96	7	8,83	7
	4	65,9	20	12	83,5	22	15	127,7	5,27	5	4,59	5	4,80	5	5,21	5	4,53	5
	6	65,9	30	12	83,5	34	15	127,7	3,50	4	3,05	4	3,20	4	3,47	4	3,02	4
18	2	64,2	12	15	67,0	9	16	83,6	5,66	8	4,95	8	5,13	8	5,56	8	4,85	8
	4	64,2	24	15	67,0	18	16	83,6	2,88	6	2,58	6	2,56	6	2,86	6	2,56	6
	6	64,2	37	15	67,0	27	16	83,6	1,91	5	1,74	5	1,71	5	1,90	5	1,73	5

* Номера структур соответствуют табл. 5.1.

С учетом обозначений, введенных в § 4.1, 4.2, 5. 5, равенство (5.161) может быть записано в развернутой форме:

$$T\lambda_m^2 + qR\lambda_n^2 = D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{33})\lambda_m^2\lambda_n^2 + D_{22}\lambda_n^4 + \frac{B\lambda_m^4}{R^2 \left[B_{11}\lambda_m^4 + \left(\frac{B}{B_{33}} - 2B_{12} \right) \lambda_m^2\lambda_n^2 + B_{22}\lambda_n^4 \right]}. \quad (5.162)$$

Здесь, как и ранее, $B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2$, $\lambda_m = \pi m/l$, $\lambda_n = \pi n/R$, а жесткости B_{st} и D_{st} для симметричного пакета определяются формулами (2.129). Для однородной по толщине оболочки $D_{11} = \bar{E}_x h^3/12$,

$$\begin{aligned} D_{12} &= \mu_{xy} \bar{E}_x h^3/12; \quad D_{22} = \bar{E}_y h^3/12; \quad D_{33} = G_{xy} h^3/12; \\ B_{11} &= \bar{E}_x h; \quad B_{12} = \mu_{xy} \bar{E}_x h; \quad B_{33} = \bar{E}_y h; \quad B_{22} = G_{xy} h; \\ \bar{E}_{x,y} &= E_{x,y}/(1 - \mu_{xy}\mu_{yx}), \end{aligned}$$

и равенство (5.162) принимает вид

$$T\lambda_m^2 + qR\lambda_n^2 = \frac{h^2}{12} [\bar{E}_x \lambda_m^4 + 2(\mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \bar{E}_y \lambda_n^4] + \frac{\lambda_m^4 h}{R^2 \left[\frac{\lambda_m^4}{\bar{E}_y} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{\bar{E}_y} \right) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \frac{\lambda_n^4}{\bar{E}_x} \right]}. \quad (5.163)$$

Вернемся к общей расчетной модели оболочки, учитывающей несимметричность в расположении слоев по толщине и деформации поперечного сдвига. Соотношение (5.159), определяющее критические значения нагрузок, в развернутой форме оказывается слишком громоздким для практических расчетов и нуждается в упрощении. Для получения более простых приближенных соотношений воспользуемся обобщенным вариантом полубезмоментной теории цилиндрических оболочек, изложенной в § 5.6. Необходимость в обобщении связана с тем, что полубезмоментная теория, как отмечалось в § 5.6, справедлива, если в продольном направлении решение изменяется значительно медленнее, чем в кольцевом, т. е. в рассматриваемой здесь задачи устойчивости должно выполняться условие $\lambda_n^2 \gg \lambda_m^2$. Однако, как следует из табл. 5.2, при осевом сжатии параметры m и n являются соизмеримыми и указанное неравенство не выполняется. Это означает, что при выводе разрешающего уравнения типа (5.136) необходимо учитывать продольный изгибающий момент M_x и поперечную силу Q_x . Такой учет может быть осуществлен на основе физически обусловленной расчетной модели, показанной на рис. 5.18, которая позволяет модифицировать полубезмоментную теорию путем введения дополнительных предположений о жесткости элементов модели. В частности, будем считать, что осевые стержни,

соединяющие кольца, обладают изгибной жесткостью. Существование, что при этом изгибные деформации стержней можно считать независимыми от деформаций колец, т. е. по существу ввести для стержней и колец различные поверхности отсчета и разделить соответствующие физические соотношения.

В результате учета изгибной жесткости осевых стержней уравнения (5.114)—(5.117) полубезмоментной теории дополняются следующими уравнениями общей теории, упрощенными с помощью гипотез, сформулированных при выводе (5.114)—(5.117):

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0; \quad M_x = D_x \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad Q_x = K_x \psi_x.$$

Здесь D_x и K_x определяются равенствами (5.61)—(5.63). Кроме того, последнее уравнение (5.115) заменяется следующим:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_y}{R} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - qR \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

а во втором уравнении (5.115) следует принять $q_y = 0$.

Для свободно опертой оболочки представим перемещения, усилия, моменты и средние деформации сдвига в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} w \\ N_x, N_y \\ M_x, M_y \end{Bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{Bmatrix} w_{mn} \\ N_x^{mn}, N_y^{mn} \\ M_x^{mn}, M_y^{mn} \end{Bmatrix} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y;$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ \psi_x, Q_x \end{Bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{Bmatrix} u_{mn} \\ \psi_x^{mn}, Q_x^{mn} \end{Bmatrix} \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y;$$

$$\begin{Bmatrix} v \\ \psi_y, Q_y \end{Bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{Bmatrix} v_{mn} \\ \psi_y^{mn}, Q_y^{mn} \end{Bmatrix} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y;$$

$$N_{xy} = \sum_m \sum_n N_{xy}^{mn} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y.$$

В результате система уравнений полубезмоментной теории (5.120)—(5.128) заменяется следующей системой:

$$\lambda_n v_{mn} + \frac{w_{mn}}{R} = 0; \quad (5.164)$$

$$\lambda_m N_x^{mn} + \lambda_n N_{xy}^{mn} = 0; \quad \lambda_n N_y^{mn} + \lambda_m N_{xy}^{mn} - \frac{Q_y^{mn}}{R} = 0; \quad (5.165)$$

$$\lambda_m M_x^{mn} - Q_x^{mn} = 0; \quad \lambda_n M_y^{mn} + Q_y^{mn} = 0; \quad (5.166)$$

$$\lambda_n Q_y^{mn} - \lambda_m Q_x^{mn} - \frac{N_y^{mn}}{R} + T \lambda_m^2 w_{mn} + qR \lambda_n \left(\lambda_n w_{mn} + \frac{v_{mn}}{R} \right) = 0; \quad (5.167)$$

$$N_x^{mn} = -B_x \lambda_m u_{mn}; \quad N_{xy}^{mn} = B_{33} (\lambda_m v_{mn} - \lambda_n u_{mn}); \quad (5.168)$$

$$M_x^{mn} = \lambda_m D_x (\lambda_m w_{mn} - \psi_x^{mn}); \quad (5.169)$$

$$M_y^{mn} = \lambda_n D_y \left(\lambda_n w_{mn} + \frac{v_{mn}}{R} + \psi_y^{mn} \right);$$

$$Q_x^{mn} = K_x \psi_x^{mn}; \quad Q_y^{mn} = K_y \psi_y^{mn}. \quad (5.170)$$

Осуществим преобразования, аналогичные проведенным в § 5.6. Прежде всего из уравнений (5.164), (5.166), (5.169) и (5.170) получим следующие соотношения, аналогичные равенствам (5.130), (5.131):

$$Q_x^{mn} = \lambda_m D_m w_{mn}; \quad Q_y^{mn} = -\lambda_n D_n w_{mn}, \quad (5.171)$$

где

$$D_m = \frac{D_x \lambda_m^2}{1 + \frac{\lambda_m^2 D_x}{K_x}}; \quad D_n = \frac{D_y (n^2 - 1)}{R^2 \left(1 + \frac{\lambda_n^2 D_y}{K_y} \right)}. \quad (5.172)$$

Из уравнений (5.164), (5.165) и (5.168) найдем

$$N_y^{mn} = \frac{\lambda_m^4 w_{mn}}{R \lambda_n^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{B_x} + \frac{\lambda_m^2}{B_{33}} \right)} + \frac{Q_y^{mn}}{R \lambda_n}. \quad (5.173)$$

Подставляя усилия (5.171), (5.173) в уравнение (5.167) и учитывая равенство (5.164), окончательно получим

$$T \lambda_m^2 + q R \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right) = \lambda_m^2 D_m + \frac{D_n}{R^2} (n^2 - 1) + \frac{\lambda_m^4}{n^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{B_x} + \frac{\lambda_m^2}{B_{33}} \right)}. \quad (5.174)$$

Если пренебречь деформацией поперечного сдвига, приняв в формулах (5.172) $K_x \rightarrow \infty$, $K_y \rightarrow \infty$, соотношение (5.174) записывается в виде

$$T \lambda_m^2 + q R \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right) = D_x \lambda_m^4 + \frac{D_y}{R^4} (n^2 - 1)^2 + \frac{\lambda_m^4}{n^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{B_x} + \frac{\lambda_m^2}{B_{33}} \right)}. \quad (5.175)$$

Напомним, что жесткости B_x , D_x , D_y определяются равенствами (5.33), (5.63), т. е. соотношениями (5.175) в отличие от (5.162) приближенно учитывает несимметричность в расположении слоев по толщине. С другой стороны, в соответствии с гипотезами полубезмоментной теории оно игнорирует жесткость стенки при кручении ($D_{33} = 0$), эффект Пуассона ($B_{12} = D_{12} = 0$) и растяжимость контура сечения ($B_{22} \rightarrow \infty$).

Рассмотрим осевое сжатие ($q = 0$). Заметим, что при $n = 0$ критическое усилие определяется равенством (5.150), а при $n =$

$= 1$ — формулой (5.158), т. е. в соотношениях (5.174), (5.175) $n \geq 2$. Результаты минимизации T (5.175) методом перебора значений m и n представлены в столбцах 6—8 табл. 5.2. Сравнение этих результатов с точными значениями, приведенными в столбцах 3—5, показывает, что формулы (5.174), (5.175) в среднем обладают удовлетворительной точностью. Значительное расхождение имеет место лишь для двухслойных оболочек 3 и 6 со структурами 45/90 и 45/0. Заметим, что для оболочек 4 и 5, отличающихся от оболочек 3 и 6 только порядком расположения слоев, погрешность решения (5.175) не превышает 10 %. В рассматриваемых оболочках слой с углом армирования 45° является основным, а формула (5.175) не учитывает его расположение по толщине. Это и отражается результатами, представленными в табл. 5.2. Завершая анализ устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии, сделаем одно замечание, связанное с критерием оценки точности расчетных соотношений. Как известно, для металлических оболочек расчетные значения критического усилия превышают экспериментальные в 3—4 раза. Это различие в основном связано с отклонениями формы реальных оболочек от строго цилиндрической и подробно рассмотрено в работе [5]. Композитные оболочки находятся в этом отношении в более благоприятных условиях. Как известно, в композитах даже при сравнительно высоких уровнях нагружения остаточные деформации не появляются, и, следовательно, дополнительные воздействия на композитные оболочки, возможные в процессе сборки, транспортирования и эксплуатации конструкции, не вызывают необратимых искажений формы. Тем не менее отличие расчетных критических нагрузок от экспериментальных и в этом случае оказывается значительным: для реальных гладких и подкрепленных композитных оболочек отношение этих нагрузок составляет в среднем 1,7 при коэффициенте вариации 0,3. Имея в виду эту оценку, погрешность результатов расчета, приведенных в табл. 5.2, достигающую 30 %, можно признать приемлемой.

Рассмотрим устойчивость композитных цилиндрических оболочек при действии бокового внешнего давления. Критическое значение давления может быть найдено для оболочек с различной структурой стенки с помощью равенств (5.157), (5.159)—(5.163), (5.174), (5.175), если принять в них $T = 0$, $m = 1$ и осуществить минимизацию по параметру n . Результаты расчета оболочек, свойства которых приведены в табл. 5.1, иллюстрируются табл. 5.2. Столбцы 10 и 11 соответствуют полному решению (5.157), а столбцы 12, 13 — решению (5.175), основанному на обобщенной полубезмоментной теории цилиндрических оболочек, которое, как следует из таблицы, в среднем удовлетворительно согласуется с более точным. Исключение составляет оболочка 3, рассмотренная выше. Ввиду того, что в рассматриваемом случае $m = 1$, т. е. прогиб медленно изменяется в продольном направлении, естественно попытаться использовать для расчета уравнение

полубезмоментной теории (5.136), не учитывающее продольную изгибную жесткость стенки. Принимая в нем применительно к задаче устойчивости

$$q_{yn} = 0; \quad p_n = -T w_n'' + qR \lambda_n \left(\frac{v_n}{R} + \lambda_n w_n \right)$$

и учитывая равенство (5.129), получим

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{T n^2}{B_{33}} \right) w_n^{IV} + \left[\frac{T n^4}{R^2 B_x} - \frac{n^2 - 1}{B_{33}} \lambda_n^2 (D_n - qR) \right] w_n'' + \\ + \frac{\lambda_n^4}{B_x} (n^2 - 1) (D_n - qR) w_n = 0. \end{aligned} \quad (5.176)$$

Это уравнение позволяет решать задачи устойчивости цилиндрических оболочек при боковом ($T = 0$) и всестороннем ($T = 0,5qR$) внешнем давлении и произвольных граничных условиях на торцах $x = 0$ и $x = l$. Соответствующие результаты, следующие из уравнения (5.176), записанного в рамках традиционной полубезмоментной теории цилиндрических оболочек (т. е. при $B_{33} \rightarrow \infty$, $K_y \rightarrow \infty$), приведены в работе [5].

Для случая свободного опирания краев форма записи прогиба

$$w_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \quad (5.177)$$

($\lambda_m = \pi m/l$) приводит к решению, совпадающему с (5.174), если принять в последнем $D_m = 0$, т. е.

$$T \lambda_m^2 + qR \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right) = \frac{D_n}{R^2} (n^2 - 1) + \frac{\lambda_m^4}{n^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{B_x} + \frac{\lambda_m^2}{B_{33}} \right)}. \quad (5.178)$$

Критические значения давления, найденные из этого равенства (при $T = 0$), приведены в столбцах 14, 15 табл. 5.2. Как и следовало ожидать, они практически не отличаются от результатов, следующих из формулы (5.175), которая учитывает продольную изгибную жесткость стенки.

Как уже отмечалось в § 5.6, в традиционном варианте полубезмоментной теории деформации сдвига не учитываются. Принимая в соответствии с этой гипотезой $B_{33} \rightarrow \infty$, $K_y \rightarrow \infty$ и полагая в равенстве (5.178) $T = 0$, $\lambda_m = \pi/l$, $\lambda_n = n/R$, получим

$$qR = \frac{D_y}{R^2} (n^2 - 1) + \frac{\pi^4 B_x R^4}{l^4 n^4 (n^2 - 1)}. \quad (5.179)$$

Если считать здесь n настолько большим, что можно пренебречь единицей, по сравнению с n^2 , то можно осуществить приближенную минимизацию, используя условие $dq/dn = 0$. Окончательно получим

$$n^2 = \frac{\pi R}{l} \sqrt[4]{\frac{3 B_x R^3}{D_y}} \quad (5.180)$$

$$q_R R = \frac{4\pi}{l} \sqrt[4]{\frac{B_x D_y^3}{27R^2}}. \quad (5.181)$$

Результаты расчета по формуле (5.181) приведены в столбце 16 табл. 5.2.

Равенство (5.180), являющееся приближенным, поскольку следующие из него значения n в общем случае отличаются от целых чисел, может быть использовано для оценки n и уточненного определения критического давления по формулам (5.178), (5.179). В частности, для цилиндрической оболочки из стеклопластика, которая рассматривалась выше в качестве примера при анализе формулы (5.153), равенства (5.180) и (5.181) дают $n = 4,05$; $\bar{q}_R = q_R R/h = 0,055$ ГПа. По формуле (5.179) при $n = 3; 4; 5$ соответственно имеем $\bar{q}_R = 0,11; 0,054; 0,065$ ГПа. Таким образом, $n = 4$ и $\bar{q}_R = 0,054$ ГПа, что отличается от приближенного решения (5.181) на 1,8 %. Отметим, что рассматриваемая оболочка обладает сравнительно низкими жесткостями при сдвиге в плоскости слоев ($E_x/G_{xy} = 4,13$) и межслоевом сдвиге ($E_y/G_{yy} = 14,8$). Расчет по формуле (5.178) при $K_y \rightarrow \infty$ и конечном значении B_{33} дает $n = 4$, $\bar{q}_R = 0,049$ ГПа. И наконец, из полного равенства (5.178) при конечном значении K_y получим $n = 4$, $\bar{q}_R = 0,048$ ГПа.

Из табл. 5.2 следует, что критическое давление при увеличении длины оболочки снижается. При $l \rightarrow \infty$ оно стремится к значению, которое может быть найдено из равенства (5.174) при $\lambda_m = 0$ и с учетом второй формулы (5.172) записано в виде

$$q = \frac{D_y (n^2 - 1)}{R^3 \left(1 + \frac{n^2 D_y}{R^2 K_y}\right)}. \quad (5.182)$$

Это выражение определяет критическое давление для бесконечно длинной оболочки или кругового кольца единичной ширины. Значение $n = 1$ соответствует члену разложения (5.177), определяющему смещение кольца как твердого тела, т. е. в равенстве (5.182) $n \geq 2$. Если деформация поперечного сдвига не учитывается ($K_y \rightarrow \infty$), минимальное значение q реализуется при $n = 2$, т. е.

$$q_R = 3D_y/R^3.$$

В общем случае минимизация q (5.182) осуществляется перебором $n = 2, 3, \dots$

Четыре последние столбца табл. 5.2 содержат результаты расчета цилиндрических оболочек на устойчивость при всестороннем внешнем давлении ($T = 0,5qR$). Результаты, представленные в столбцах 17, 18, соответствуют полному решению (5.157), а в столбцах 19, 20 — приближенному решению (5.178).

Список литературы

1. Азиков Н. С., Васильев В. В. Исследование закритического деформирования и несущей способности сжатых пластин из композиционных материалов // Механика конструкций из композиционных материалов: Сб. трудов IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск, Наука, 1984. С. 110—114.
2. Азиков Н. С., Васильев В. В. О редуцированном коэффициенте для сжатых ортотропных прямоугольных пластин // Механика композитных материалов. Рига, Рижский политехнический институт, 1982. С. 73—82.
3. Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Куршин Л. М., Прусаков А. П. Расчет трехслойных пластин. М., Оборонгиз, 1960. 272 с.
4. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М., Машиностроение, 1984. 446 с.
5. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М., Машиностроение, 1978. 312 с.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., Наука, 1974. 446 с.
7. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М., Наука, 1967. 266 с.
8. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев, Наукова думка, 1980. 248 с.
9. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М., Машиностроение, 1977. 488 с.
10. Боголюбов В. С. Формообразующая оснастка из полимерных материалов. М., Машиностроение, 1979. 183 с.
11. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М., Мир, 1964. 517 с.
12. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М., Машиностроение, 1980. 375 с.
13. Болотин В. В. О сведении трехмерных задач теории упругой устойчивости к одномерным и двумерным задачам // Проблемы устойчивости в строительной механике. М., Стройиздат, 1965. С. 166—179.
14. Бужков И. А. Нелинейные уравнения теории типа Тимошенко многослойных анизотропных оболочек // Механика композитных материалов. 1979. № 3. С. 501—507.
15. Вагин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев, Наукова думка, 1985. 302 с.
16. Вагин Г. А., Семенюк Н. П., Емельянов Р. Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. Киев, Наукова думка, 1978. 212 с.
17. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов. Киев, Наукова думка, 1971. 232 с.

18. Васильев В. В., Лопатин А. В. Теория сетчатых и подкрепленных композитных оболочек//Механика конструкций из композиционных материалов: Сб. трудов IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск, Наука, 1984. С. 31—36.
19. Васильев В. В., Лурье С. А. Вариант уточненной теории изгиба балок из слоистых пластмасс//Механика полимеров. 1972. № 4. С. 674—681.
20. Васильев В. В., Лурье С. А. Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы//Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1984. № 5. С. 125—135.
21. Васильев В. В. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки из стеклопластика//Изв. вузов, Сер. Авиационная техника. 1969. № 1. С. 8—13.
22. Васильев В. В., Пичхадзе Г. П. Оболочки и пластины из композиционного материала с пространственной схемой армирования//Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. М., ЦАГИ, 1982. С. 83—90.
23. Власов В. З. Избранные труды. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
24. Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М., Стройиздат, 1975. 224 с.
25. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М., Физматгиз, 1959. 566 с.
26. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. М., ГИТТЛ, 1956. 419 с.
27. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, Казанский ун-т, 1975. 326 с.
28. Ганеева М. С. Основные нелинейные соотношения уточненной теории многослойных ортотропных нетонких оболочек//Статика и динамика оболочек. 1977. Вып. 8. С. 19—31.
29. Гольденблат И. И., Копиов В. А. Критерии прочности и пластичности конструктивных материалов. М., Машиностроение, 1968. 191 с.
30. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостеориздат, 1953. 544 с.
31. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек//Прикладная механика. 1972. Т. 8. № 6. С. 3—18.
32. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Вариант нелинейной теории упругих многослойных пологих оболочек//Механика композитных материалов. 1985. № 5. С. 856—860.
33. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., Машиностроение, 1973. 170 с.
34. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Паикратова Н. Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев. Вища школа, 1985. 190 с.
35. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев, Наукова думка, 1981. 543 с.
36. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев, Наукова думка, 1973. 228 с.
37. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев, Вища школа, 1983. 286 с.
38. Григоренко Я. М., Тимонин А. М. Напряженное состояние слоистых оболочек вращения с учетом геометрической нелинейности и сдвига//Деп. в АН УССР. Сер. А. 1980., № 9. С. 46—49.
39. Гуляев Г. М. Структура и свойства полимерных волокнистых композитов. М., Химия, 1981. 232 с.
40. Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки//Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 15. М., ВИНТИ, 1983. С. 3—68.
41. Евстратов А. А. Об исследовании работы гибких пластинок методом конечных разностей//Изв. высш. учеб. заведений. Строительство и архитектура. 1977. № 5. С. 39—44.
42. Елпатьевский А. Н., Васильев В. В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М., Машиностроение, 1972. 168 с.
43. Еиджиевский Л. В. Нелинейные деформации ребристых оболочек. Красноярск, Изд-во Красноярского ун-та 1982. 296 с.

44. Жигун И. Г., Поляков В. А. Свойства пространственно-армированных пластиков. Рига, Зинатне, 1978. 215 с.
45. Заболоцкий А. А., Варшавский В. Я. Композиционные материалы. Т. 2//Итоги науки и техники. М., ВИНТИ, 1984. 104 с.
46. Заболоцкий А. А. Композиционные материалы. Т. 1//Итоги науки и техники. М., ВИНТИ, 1979. 106 с.
47. Зинovieв П. А. Расчет конструкций из композиционных материалов. М., МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1982. 63 с.
48. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М., Машиностроение, 1966. 508 с.
49. Кармишин А. В. Потенциальная энергия деформации непологой ортотропной оболочки неоднородного строения//Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 4. С. 183—185.
50. Кармишин А. В. Уравнения неоднородных тонкостенных элементов на основе минимальных жесткостей//Прикладная механика. Т. 10. Вып. 6. 1974. С. 34—42.
51. Келли А. Высокопрочные материалы. М., Мир, 1976. 261 с.
52. Композиционные материалы в конструкции летательных аппаратов/Под ред. А. Л. Абибова. М., Машиностроение, 1975. 272 с.
53. Композиционные материалы. Т. 7//Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока//Анализ и проектирование конструкций. М., Машиностроение, 1978. 342 с.
54. Композиционные материалы. Т. 3//Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока//Применение композиционных материалов в технике. М., Машиностроение, 1978. 510 с.
55. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М., Наука, 1964. 192 с.
56. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М., Машиностроение, 1965. 272 с.
57. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М., Мир, 1982. 334 с.
58. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 1957. 463 с.
59. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., Наука, 1971. 240 с.
60. Назаров Г. И., Сушкин В. В., Дмитриевская Л. В. Конструкционные пластмассы. М., Машиностроение, 1973. 191 с.
61. Нерубайло Б. В. Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М., Машиностроение, 1983. 248 с.
62. Нильсен Л. Механические свойства полимеров и полимерных композиций. М., Химия, 1978. 310 с.
63. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962. 431 с.
64. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958. 370 с.
65. Образцов И. Ф. Варнационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкций. М., Машиностроение, 1966. 392 с.
66. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М., Машиностроение, 1977. 144 с.
67. Основы проектирования и изготовления конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов/В. В. Васильев, А. А. Добряков, А. А. Дудченко и др. М., МАИ, 1985. 218 с.
68. Палый О. М., Спиро В. Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Л., Судостроение, 1977. 392 с.
69. Панкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля. Т. 4. Л., Судпромгиз, 1963. 551 с.
70. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев, Наукова думка, 1973. 248 с.
71. Пиккуль В. В. Общая техническая теория тонких упругих пластин и оболочек. М., Наука, 1977. 151 с.
72. Пичхадзе Г. П. Исследование механических характеристик композиционного материала с объемной структурой // Механика полимеров. 1978. № 4. С. 621—624.

73. Пластинки и оболочки из стеклопластиков/В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, В. А. Копиов и др. М., Высшая школа, 1970. 407 с.
74. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М., МГУ, 1984. 336 с.
75. Портной К. И., Салибеков С. Е., Светлов И. Л., Чубаров В. М. Структура и свойства композиционных материалов. М., Машиностроение, 1979. 255 с.
76. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига, Зинатие, 1974. 310 с.
77. Рогинский С. Л., Канович М. З., Колтунова М. А. Высокопрочные стеклопластики. М., Химия, 1979. 143 с.
78. Родионова В. А. Теория тонких анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия. Л., ЛГУ, 1983. 116 с.
79. Ромашевский А. Ю., Климов В. И. Строительная механика самолета. М., МАИ, 1965. 298 с.
80. Роуландс Р. Течение и потери несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных//Неупругие свойства композиционных материалов. М., Мир, 1978. С. 140—179.
81. Скудра А. М., Булавс Ф. Я. Прочность армированных пластиков. М., Химия, 1982. 214 с.
82. Скудра А. М., Булавс Ф. Я. Структурная теория армированных пластиков. Рига, Зинатие, 1978. 192 с.
83. Спиро В. Е. Вариант геометрически нелинейной теории анизотропных оболочек, учитывающей поперечный сдвиг//Механика полимеров. 1969. № 5. С. 863—871.
84. Стригунов В. М. Расчет на прочность фюзеляжей и герметических кабин самолетов. М., Машиностроение, 1974. 287 с.
85. Тамуж В. П., Куксенко В. А. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига, Зинатие, 1978. 284 с.
86. Тарнопольский Ю. М., Кирицис Т. Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. М., Химия, 1981. 272 с.
87. Тарнопольский Ю. М., Розе А. В. Особенности расчета деталей из армированных пластмасс. Рига, Зинатие, 1969. 274 с.
88. Тетерс Г. А. Пластинки и оболочки из полимерных и композиционных материалов. Обзор//Механика полимеров. 1977. № 4. С. 486—492.
89. Тетерс Г. А., Рикардс Р. Б., Нарусберг В. Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига, Зинатие, 1978. 238 с.
90. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963. 635 с.
91. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., Наука, 1963. 444 с.
92. Фигуровский В. И. Расчет на прочность беспилотных летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1973. 359 с.
93. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М., Мир, 1982. 232 с.
94. Хома И. Ю. Нелинейные уравнения обобщенной теории упругих оболочек//Прикладная механика. 1984. Т. 20. № 1. С. 43—49.
95. Цай С., Хан Х. Анализ разрушения композитов//Неупругие свойства композиционных материалов. М., Мир, 1978. С. 104—139.
96. Чернина В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М., Наука, 1968. 455 с.
97. Шановалов Л. А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек//Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1968. № 1. С. 56—62.
98. Banks W. M., Harvey J. M. Experimental study of stability problems in composite materials//Stab. Probl. Eng. Struct. and Components, Cardiff, 1979. London, 1979. 1—22.
99. Boltnott B. L., Johnson E. R., Starness J. H. A nonlinear analysis of infinitely long graphite—epoxy cylindrical panels loaded with internal pressure//

26 th Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Orlando, Fla, Apr. 15—17, 1985, Pt. 1 Coll. Techn. Pap. New York, N. Y., 1985. 593—604.

100. Dobyns A., Avery I., Blaisdell R., Figger I. E. Advanced composite lattice structure for improved structural integrity//AIAA Pap. 1974. D 357. 36—44.

101. Mileiko S. T. Mechanics of metal—matrix fibrous composites//Mechanics of Composites. Moscow Mir Publishers, 1982. 129—165.

102. Schmidt R. A current trend in shell theory: constrained geometrically nonlinear Kirchhoff—Love type theories based on polar decomposition of strains and rotations//Comput. and Struct. 1985. 20. N 1—3. 265—275.

103. Stein M. Nonlinear theory for laminated and thick plates and shells including the effects of transverse shearing//26 th Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Orlando, Fla, Apr. 15—17, 1985. Pt. 1. Coll. Techn. Pap. New York, N. Y., 1985. 259—266.

104. Stein M. Postbuckling of orthotropic composite plates loaded in compression//AIAA Journal. 1983. 21. N 12. 1729—1735.

ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ИЗДАНИЕ

Васильев Валерий Витальевич

**МЕХАНИКА КОНСТРУКЦИЙ
ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Редактор Т. Н. Леденева
Художественный редактор С. С. Водчанин
Технический редактор И. В. Малыгина
Корректоры Т. В. Багдасарян, И. М. Ворейша

ИБ № 5371

Сдано в набор 23.02.87. Подписано в печать 23.06.87. Т-14846.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 17,0. Усл. кр.-отт. 17,0. Уч.-изд. л. 17,43.
Тираж 7 200 экз. Заказ 47. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение»,
107076, Москва, Строминский пер., 4

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.
193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.