

21 4
2 69
БИБЛИОТЕКА

РАСЧЕТЧИКА

Г. Д. ДЕЛЬ

Технологическая
механика

БИБЛИОТЕКА

РАСЧЕТЧИКА

Г.Д.ДЕЛЬ

Технологическая механика

Редакционная
коллегия:
лауреат Ленинской премии,
заслуженный деятель науки
и техники РСФСР,
д-р техн. наук проф.
С. Д. ПОНОМАРЕВ
(председатель);
д-р техн. наук
проф. Н. А. АЛФУТОВ;
лауреат Ленинской премии,
д-р техн. наук
проф. В. Л. БИДЕРМАН;
д-р техн. наук
проф. В. П. КОГАЕВ;
лауреат Ленинской премии,
заслуженный деятель науки
и техники РСФСР,
д-р техн. наук
проф. Н. Н. МАЛИНИН;
д-р техн. наук
проф. В. А. СВЕТЛИЦКИЙ



МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1978

Предисловие

Рецензент В. Л. Данилов

Д29 Дель Г. Д.
Технологическая механика. М., «Машиностроение», 1978. — 174 с. с ил. (Б-ка расчетчика).

В книге излагаются методы исследования устойчивости пластического деформирования, оценки деформируемости металлов при их механической обработке, вопросы, связанные с технологической наследственностью, некоторые экспериментальные методы определения напряжений и кинематики пластического деформирования.

Книга предназначена для инженеров-конструкторов и расчетчиков машиностроительных проектно-конструкторских организаций и научно-исследовательских институтов. Она будет также полезна инженерно-техническим работникам, специализирующимся в области технологии металлообработки.

Д 31301-027
038(01)-78 27-78

6П5.1

© Издательство «Машиностроение», 1978 г.

В последнее время резко возросла роль расчетов в проектировании технологических процессов. В связи с быстрым развитием техники, появлением новых методов обработки металлов технологи уже не располагают временем для накопления данных практики. Реализация проектируемых процессов в лабораторных условиях оказывается подчас весьма дорогостоящей, тем более, когда она не подкреплена соответствующими расчетами. В связи с автоматизацией технологических процессов остро встала проблема их оптимизации. Поэтому от технолога, проектирующего процесс, который связан с пластическим деформированием металла, часто требуется не только расчетная оценка энергосиловых параметров, знание которых необходимо для подбора и расчета на прочность и жесткость технологического оборудования, но и оценка деформируемости металла, устойчивости его пластического деформирования. Важное значение придается вопросам технологической наследственности: остаточные напряжения, механические свойства материала, точность изделия в значительной мере определяют его качество.

Перечисленные задачи объединяет то, что они решаются методами механики деформируемых твердых тел. Цель книги — изложение методов решения такого рода технологических задач аппаратом механики деформируемых твердых тел. Для решения указанных задач требуется знание напряженно-деформированного состояния в процессе пластического деформирования обрабатываемого металла. Теоретическим методам его определения посвящена обширная литература, экспериментальные и экспериментально-расчетные методы освещены в литературе сравнительно слабо. Между тем в связи с серьезными математическими и вычислительными трудностями при использовании теоретических методов, недостаточным знанием граничных условий роль экспериментальных методов остается весьма важной. В связи с этим одна из глав книги посвящена экспериментально-расчетным методам определения напряженно-деформированного состояния в пластической области. При написании этого раздела автор стремился концентрировать внимание на

задачах, связанных с расшифровкой экспериментальных данных, представляющих собой весьма своеобразный класс задач механики. В других главах излагаются методы решения различных технологических задач: исследования устойчивости пластического деформирования, оценки деформируемости, а также некоторые вопросы, касающиеся влияния технологии изготовления деталей на их качество.

В книге не рассмотрены методы оценки энергосиловых параметров при различных технологических операциях, поскольку им посвящена обширная литература.

Рассматриваемые в книге технологические задачи близки ко многим задачам в области прочности деталей машин и элементов конструкций. Экспериментальные методы исследования пластических деформаций деталей машин и обрабатываемого материала имеют много общего. Результаты исследований устойчивости пластического деформирования и деформируемости могут в некоторых случаях быть основой для определения разрушающих нагрузок.

Название книги заимствовано у П. Людвига. Его известная монография «Основы технологической механики» была издана в 1913 г. и лишь недавно переведена на русский язык. В 1969—1970 гг. примерно одновременно проф. Н. Н. Малининым и автором книги был прочитан курс лекций под тем же названием. При этом была выработана отраженная в этой книге точка зрения на предмет и содержание технологической механики.

Глава I

Основы теории пластичности

§ 1. Теория напряженного состояния

Выделим в произвольном сечении тела бесконечно малую площадку dS . Пусть на ней действует распределенная внутренняя сила с равнодействующей $d\vec{P}$. Полное напряжение определяется путем предельного перехода $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{P}}{dS}$.

В дальнейшем наряду с привычным обозначением координат через x, y, z будем пользоваться их обозначением через x_1, x_2, x_3 или x_i ($i=1, 2, 3$).

Поместим начало координат в напряженную точку A (рис. 1). Каждому направлению, заданному единичным вектором μ , соответствует бесконечно малая площадка BCD площадью dS , на которой действует полное напряжение $\vec{\sigma}_\mu$. Направлению x_1 соответствует площадка dS_{μ_1} и полное напряжение $\vec{\sigma}_1$, направлению x_2 — dS_{μ_2} и $\vec{\sigma}_2$ и т. д. (на рисунке показаны векторы полного напряжения, соответствующие направлениям $-x_1, -x_2, -x_3$). Условие равновесия призмы $ABCD$ можно записать в виде

$$\vec{\sigma}_\mu dS - \vec{\sigma}_1 dS_{\mu_1} - \vec{\sigma}_2 dS_{\mu_2} - \vec{\sigma}_3 dS_{\mu_3} = 0 \quad (1.1)$$

или

$$\vec{\sigma}_\mu = \vec{\sigma}_i \mu_i.$$

Здесь и в дальнейшем повторяющаяся буква индекса указывает на то, что имеется в виду сумма из всех членов, получаемых при приписывании индексу значений 1, 2, 3. Такой индекс называется немой. Очевидно, что немые индексы можно заменять любым другим обозначением. Этой возможностью приходится часто пользоваться, поскольку в каждом одночлене немой индекс может встречаться только 2 раза.

Проецируя векторы $\vec{\sigma}_i$ на координатные оси, получаем девять компонент тензора напряжений σ_{ij} . Смысл обозначений ясен из рис. 2. Напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ называют нормальными, а напряжения $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \dots$ — касательными. На рис. 2 все напряжения положительные.

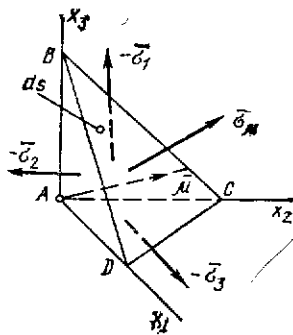


Рис. 1. К выводу уравнений равновесия

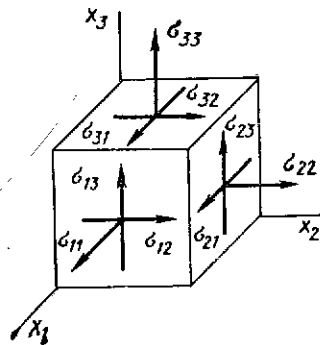


Рис. 2. Обозначение напряжений

Приравняв нулю суммы моментов всех сил, действующих на элементарный параллелепипед, изображенный на рис. 2, получаем закон парности касательных напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, указывающий на то, что тензор напряжений является симметричным.

Проецируя векторное равенство (1.1) на координатные оси, получаем уравнения Коши

$$(\bar{\sigma}_\mu)_i \equiv p_i = \sigma_{ij} \mu_j, \quad (1.2)$$

где p_j — проекция интенсивности поверхностных сил на координатные оси.

Если совместить направление $\bar{\mu}$ с положительным направлением оси x'_h некоторой «новой» системы прямоугольных координат, то согласно (1.1) $\bar{\sigma}'_h = c_{ik} \bar{\sigma}_i$, где $\bar{\sigma}'_h$ — полное напряжение, действующее на площадку, перпендикулярной к оси x'_h ; c_{ik} — косинус угла между осями x_i и x'_h «старой» и «новой» систем координат.

Проецируя вектор $\bar{\sigma}'_h$ на ось x'_h , получаем

$$\sigma'_{hi} = c_{ik} (\bar{\sigma}_i)'_h = c_{ik} c_{jl} \sigma_{ij}, \quad (1.3)$$

где $(\sigma_i)'_h$ — проекции вектора $\bar{\sigma}_i$ на ось x'_h . Здесь применено правило преобразования проекций вектора на координатные оси при преобразовании координат.

Таким образом, при преобразовании координат компоненты тензора напряжений преобразуются по формуле (1.3).

Направление μ называется главным, если на перпендикулярной к нему элементарной площадке не действует касательное напряжение. В силу этого вектор полного напряжения направлен вдоль μ , а его проекции на координатные оси x_j равны $\sigma_{ij} \mu_j$, где σ_i — модуль этого вектора. Из (1.1) следует, что те же проекции равны: $(\bar{\sigma}_\mu)_j = \sigma_{ij} \mu_i$.

Таким образом, для главного направления $\sigma_{ij} \mu_i = \sigma_i \mu_j$ или

$$(\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij}) \mu_j = 0, \quad (1.4)$$

где δ_{ij} — символ (или дельта) Кронекера, свойства которого определяются соотношением

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Поскольку

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1, \quad (1.5)$$

составляющие μ_i не могут одновременно быть равными нулю, поэтому нулю должен быть равен определитель системы уравнений (1.4):

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_i) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma_i) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma_i) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.6)$$

Решением этого уравнения, получаются напряжения, действующие на главных площадках, их называют главными.

Раскрыв определитель (1.6), получаем характеристическое уравнение

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 - I_2 \sigma_i - I_3 = 0, \quad (1.7)$$

где I_1 — сумма диагональных элементов тензора напряжений,

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \quad (1.8)$$

I_2 — сумма миноров диагональных элементов тензора, взятых с обратным знаком,

$$I_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2; \quad (1.9)$$

I_3 — детерминант матрицы,

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Коэффициенты уравнения (1.7) I_1, I_2, I_3 называются основными инвариантами тензора напряжений.

Таким образом, если в какой-либо прямоугольной системе координат заданы компоненты тензора напряжений σ_{ij} , то можно, вычислив предварительно по формулам (1.8) — (1.10) основные инварианты этого тензора, решением уравнения (1.7) определить главные напряжения. Главные направления находятся решением системы уравнений (1.4), (1.5), в которые вместо σ_i подставляют соответствующее главное напряжение.

В системе координатных осей, совмещенных с главными направлениями, матрица тензора напряжений является диагональной

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

В любой иной прямоугольной системе координат в соответствии с (1.3)

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 \mu_i^I \mu_j^I + \sigma_2 \mu_i^{II} \mu_j^{II} + \sigma_3 \mu_i^{III} \mu_j^{III}. \quad (1.11)$$

В системе осей x_i , совмещенных с главными направлениями, рассмотрим бесконечно малую площадку с внешней нормалью, направляющие косинусы которой равны ϑ_i . Совместим с этой нормалью ось x'_1 новой системы координат. Согласно (1.3) на рассматриваемой площадке действует нормальное напряжение

$$\sigma_v = \sigma'_{11} = \vartheta_1^2 \sigma_1 + \vartheta_2^2 \sigma_2 + \vartheta_3^2 \sigma_3.$$

Или, поскольку $\vartheta_3^2 = 1 - \vartheta_1^2 - \vartheta_2^2$,

$$\sigma_v = (\sigma_1 - \sigma_3) \vartheta_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) \vartheta_2^2 + \sigma_3. \quad (1.12)$$

В соответствии с (1.2) проекции полного напряжения на рассматриваемой площадке $p_1 = \sigma_1 \vartheta_1$; $p_2 = \sigma_2 \vartheta_2$; $p_3 = \sigma_3 \vartheta_3$. Полное же напряжение $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$. Следовательно, квадрат касательного напряжения на этой же площадке

$$\tau^2 = p^2 - \sigma_v^2 = \vartheta_1^2 (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) + \vartheta_2^2 (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) + \sigma_3^2 - [\vartheta_1^2 (\sigma_1 - \sigma_3) + \vartheta_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_3]^2. \quad (1.13)$$

Исследуя выражение (1.12), легко установить, что стационарными нормальными напряжениями (т.е. напряжениями, соответствующими ϑ_i , для которых производные $\partial \sigma / \partial \vartheta_i$ равны нулю) являются главные напряжения. Поэтому одно из главных напряжений является максимальным и одно — минимальным из всех нормальных напряжений, действующих на площадках, которые проходят через рассматриваемую точку.

Исследование выражения (1.13) приводит к следующим стационарным значениям полного касательного напряжения:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3); \quad \tau_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Если же вместо ϑ_3^2 исключить ϑ_1^2 или ϑ_2^2 , то получим $\tau_3 = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$.

Эти касательные напряжения возникают на площадках, равнонаклонных к главным осям:

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2^2 = \vartheta_3^2 = \frac{1}{2}; \quad \vartheta_2 = 0, \quad \vartheta_1^2 = \vartheta_3^2 = \frac{1}{2};$$

$$\vartheta_3 = 0, \quad \vartheta_1^2 = \vartheta_2^2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (1.14)$$

Напряженное состояние в точке называется линейным, если только одно из главных напряжений отлично от нуля, и плоским, если по крайней мере одно из главных напряжений равно нулю. Пусть в последнем случае $\sigma_3 = 0$. Совместим ось x_3 с главным направлением μ^{III} , тогда

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0; \quad I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}; \quad I_2 = \sigma_{12}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22}; \quad I_3 = 0.$$

Из (1.7) находим главные напряжения

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}. \quad (1.15)$$

Обозначим угол между первым главным направлением μ^I и осью x_1 через α . Тогда $\mu_1^I = \cos \alpha$; $\mu_2^I = \sin \alpha$; $\mu_3^I = 1$. Запишем теперь систему уравнений (1.4) в виде

$$(\sigma_{11} - \sigma_1) \cos \alpha + \sigma_{12} \sin \alpha = 0;$$

$$\sigma_{12} \cos \alpha + (\sigma_{22} - \sigma_1) \sin \alpha = 0.$$

Из этой системы находим

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \pm \frac{\pi n}{2}. \quad (1.16)$$

Часто бывает необходимо разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор. Шаровым называют тензор, получаемый умножением единичного тензора δ_{ij} на среднее нормальное напряжение σ , определяемое равенством

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}. \quad (1.17)$$

Девиатор напряжений получается вычитанием шарового тензора из тензора напряжений:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}. \quad (1.18)$$

Главные компоненты девиатора $s_i = \sigma_i - \sigma$, а в соответствии с (1.8) — (1.10) основные инварианты равны $I_1' = 0$,

$$I_2' = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)];$$

$$I_3' = \begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix}.$$

В теории пластичности играют важную роль характеристики напряженного состояния, пропорциональные квадратному корню из второго инварианта девиатора напряжений. Это прежде всего интенсивность напряжений

$$\sigma_0 = \sqrt{3I_2'} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_{ij} s_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)} \quad (1.19)$$

и интенсивность касательных напряжений

$$k = \sqrt{I_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0. \quad (1.20)$$

Напряжения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия, которые при отсутствии массовых сил имеют в декартовой системе координат вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0. \quad (1.21)$$

§ 2. Кинематика деформирования

В дальнейшем под точкой будем понимать точку пространства, а под частицей — материальную точку сплошной среды. Деформирование будем рассматривать в декартовой системе координат.

Обозначим координаты частицы до деформирования (начальные координаты) через a_i , а координаты частицы в процессе деформирования (текущие координаты) — через x_i . Тогда можно описать движение сплошной среды уравнениями

$$x_i = x_i(a_i, t) \quad (1.22)$$

что соответствует лагранжеву способу описания движения или

$$a_i = a_i(x_i, t), \quad (1.23)$$

что соответствует эйлерову способу описания движения среды.

При деформировании тела изменяются расстояния между его частицами. Квадраты расстояний между двумя соседними частицами до и в рассматриваемый момент деформирования можно записать в виде $ds_0^2 = da_i da_i$; $ds^2 = dx_i dx_i$.

Выразим разность

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - da_i da_i. \quad (1.24)$$

Определив из уравнений (1.23) дифференциалы $da_k = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i$, подставим их в соотношение (1.24)

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= dx_i dx_i - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i \frac{\partial a_k}{\partial x_j} dx_j = \\ &= dx_i dx_j \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь учтено, что $dx_i = dx_j \delta_{ij}$, и обозначено

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right). \quad (1.26)$$

Полученный тензор называют эйлеровым тензором деформации.

Исключим теперь из соотношения (1.24) дифференциалы dx_i , выразив их с помощью уравнений (1.22) через da_j :

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j.$$

В результате получим

$$ds^2 - ds_0^2 = 2l_{ij} da_i da_j, \quad (1.27)$$

где

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_m}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) - \quad (1.28)$$

компоненты лагранжева тензора деформации.

Выразим компоненты полученных тензоров деформации через перемещения. Поскольку компоненты перемещения $u_i = x_i - a_i$ и, следовательно, $\frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \delta_{ik} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$, из соотношений (1.25) получаем

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (1.29)$$

Аналогично

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right). \quad (1.30)$$

Компоненты эйлерова тензора деформации можно определить, если перемещения заданы в зависимости от текущих координат, а компоненты лагранжева тензора — если переме-

шения заданы в зависимости от начальных координат. Выясним физический смысл компонент тензора ε_{ij} .

Пусть отрезок ds совмещен с осью x_1 , тогда $dx_1 = ds$. Из соотношения (1.25) получаем $ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{11}ds^2$ или

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(1 + \Delta_{11})^2} \right], \quad (1.31)$$

где $\Delta_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$ — относительное удлинение связанного с мате-

риалом бесконечно малого отрезка, параллельного в деформированном состоянии оси x_1 . Аналогично получаются и два других подобных соотношения.

Рассмотрим теперь два пересекающихся бесконечно малых отрезка длиной dx_1, dx_2 , параллельных в деформированном состоянии осям x_1, x_2 . Определим косинус угла между единичными векторами $\bar{i}, \bar{j}$, задающими их направление до деформирования.

Как известно, $\cos(\bar{i}, \bar{j}) = i_{kj}j_k$, где $i_{kj}j_k$ — проекции единичных векторов на координатные оси. Согласно (1.23) проекции рассматриваемых отрезков на координатные оси (проекции второго из них отмечены штрихами) до деформирования равны

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_1} dx_1; \quad da'_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_2} dx_2.$$

Поскольку

$$i_k = \frac{da_k}{ds_0}; \quad j_k = \frac{da'_k}{ds'_0},$$

где ds_0, ds'_0 — длины рассматриваемых отрезков до деформирования,

$$(\cos \bar{i}, \bar{j}) = \frac{1}{ds_0 ds'_0} \frac{\partial a_i}{\partial x_1} dx_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_2} dx_2 = -2\varepsilon_{12} (1 + \Delta_{11}) (1 + \Delta_{22}).$$

Обозначив происходящее в процессе деформирования уменьшение углов между рассматриваемыми линейными элементами через φ_{12} , получаем

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sin \varphi_{12}}{2(1 + \Delta_{11})(1 + \Delta_{22})}. \quad (1.32)$$

Таким образом, при $i=j$ деформации ε_{ij} характеризуют относительные удлинения волокон, параллельных в рассматриваемом деформированном состоянии координатным осям, а при $i \neq j$ они связаны с изменением углов между отрезками, параллельными в деформированном состоянии осям x_i, x_j .

Совместив отрезок ds_0 с осью x_1 получаем из соотношения (1.27)

$$l_{11} = \frac{1}{2} [(1 + \delta'_{11})^2 - 1], \quad (1.33)$$

где δ'_{11} — относительное удлинение бесконечно малого отрезка, до деформирования параллельного оси x_1 .

Рассмотрев искажение угла между двумя отрезками, параллельными до деформирования координатным осям x_1, x_2 , получим

$$l_{12} = \frac{1}{2} (1 + \delta'_{11})(1 + \delta'_{22}) \sin \gamma_{12}, \quad (1.34)$$

где γ_{12} — происходящее при деформировании уменьшение угла между указанными отрезками; $\delta'_{11}, \delta'_{22}$ — соответственно относительное удлинение этих отрезков.

Поскольку рассматриваемые тензоры симметричны, они приводятся к главным осям, в системе которых смешанные компоненты этих тензоров равны нулю. Из соотношений (1.32), (1.34) следует, что в каждой точке деформируемого тела существуют три взаимно перпендикулярных «материальных» отрезка, которые были взаимно перпендикулярными и до деформирования. Соответствующие этим отрезкам направления являются главными и для тензора ε_{ij} , и для тензора l_{ij} .

Главные компоненты рассмотренных тензоров деформации связаны с относительными удлинениями δ_i бесконечно малых отрезков, совмещенных с главными направлениями:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(1 - \delta_i)^2} \right]; \quad l_i = \frac{1}{2} [(1 + \delta_i)^2 - 1]. \quad (1.35)$$

П. Людви́к [29] предложил меры деформации

$$e_i = \frac{1}{2} \ln(1 - 2\varepsilon_i) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2l_i) = \ln(1 + \delta_i), \quad (1.36)$$

называемые главными логарифмическими деформациями. Из последнего равенства следует, что

$$e_i = \ln \frac{ds}{ds_0}, \quad (1.37)$$

где ds_0, ds — соответственно длина линейного элемента, ориентированного в главном направлении, до и после деформации.

Введем тензор логарифмических деформаций

$$e_{ij} = e_1 \mu_i^I \mu_j^I + e_2 \mu_i^{II} \mu_j^{II} + e_3 \mu_i^{III} \mu_j^{III}, \quad (1.38)$$

где $\mu_i^I, \mu_i^{II}, \mu_i^{III}$ — направляющие косинусы главных направлений тензора ε_{ij} , если тензор e_{ij} относится к деформированному состоянию, и направляющие косинусы тензора главных направлений l_{ij} , если тензор e_{ij} относится к недеформированному состоянию.

Соотношение (1.37) справедливо только для главных компонент тензора логарифмических деформаций и в общем случае несправедливо для его компонент e_{11}, e_{22}, e_{33} .

Компоненты тензора e_{ij} следующим образом выводятся из поля перемещений. Если перемещения заданы как функции текущих координат x_i , то по соотношениям (1.29) определяются компоненты тензора ε_{ij} . Стандартным методом, изложенным в § 1, определяются главные компоненты и главные направления этого тензора. По соотношениям (1.36) определяем главные логарифмические деформации, а по (1.38) — компоненты тензора e_{ij} . Если перемещения заданы в зависимости от начальных координат, то e_{ij} определяются аналогичным образом через компоненты тензора l_{ij} .

При малых деформациях и углах поворота приведенные ранее соотношения, определяющие различные тензоры деформации, приводятся к форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.39)$$

При этом безразлично, что понимается под x_i — текущие или начальные координаты.

Тензор ε_{ij} называют тензором малых деформаций.

Шесть составляющих тензора ε_{ij} связаны с тремя компонентами перемещения u_i соотношениями (1.39). Следовательно, деформации ε_{ij} не являются независимыми. Связь между ними можно получить перекрестным дифференцированием соотношений (1.39). В результате получим известные уравнения совместности деформаций e_{ij}

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (1.40)$$

Заметим, что аналогичные уравнения совместности справедливы и относительно деформаций ε_{ij} , l_{ij} .

Необходимо иметь в виду, что из 81 уравнения (1.40) независимы лишь три.

Пусть частицы деформируемого тела движутся со скоростью, составляющие которой равны v_i . Перемещения этих частиц за бесконечно малый промежуток времени

$$du_i = v_i dt. \quad (1.41)$$

Подставив (1.41) в (1.39), получаем приращения деформаций, произошедшие за этот промежуток времени,

$$de_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dt + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} du_i + \frac{\partial}{\partial x_i} du_j \right). \quad (1.42)$$

Следовательно, скорости деформации

$$\dot{e}_{ij} = \frac{de_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.43)$$

Компоненты тензора скорости деформации удовлетворяют уравнениям совместности, аналогичным уравнениям (1.40).

Рассмотрим однородное растяжение цилиндра вдоль его оси, совпадающей с осью x_1 (рис. 3). В этом случае

$$du_1 = \frac{dh}{h} x_1; \quad de_{11} = \frac{dh}{h}, \quad (1.44)$$

где h — текущая длина цилиндра. Суммированием получаем логарифмическую деформацию

$$e_1 = \int_{h_0}^h \frac{dh}{h} = \ln \frac{h}{h_0}, \quad (1.45)$$

где h_0 — начальная длина цилиндра.

Если при деформировании главные оси не поворачиваются, то главные логарифмические деформации

$$e_i = \int de_i, \quad (1.46)$$

в общем же случае $e_i \neq \int de_i$.

При развитых пластических деформациях можно с достаточной точностью считать металлы несжимаемыми. Рассмотрим ограничения, накладываемые на кинематику деформирования несжимаемостью материала.

Объем бесконечно малого параллелепипеда, ребра которого da_1 , da_2 , da_3 в недеформированном состоянии параллельны координатным осям, в деформированном состоянии равен

$$V = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} da_1 & 0 & 0 \\ 0 & da_2 & 0 \\ 0 & 0 & da_3 \end{vmatrix}.$$

При деформировании несжимаемого материала $V = da_1 da_2 da_3$, поэтому условие несжимаемости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} = 1 \quad (1.47)$$

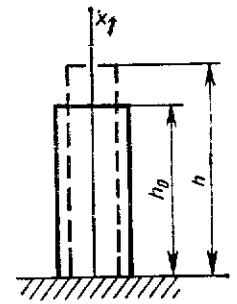


Рис. 3. Схема растяжения стержня

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 1, \quad (1.48)$$

Рассмотрим теперь элементарный параллелепипед, ребра ds_1, ds_2, ds_3 которого в деформированном состоянии ориентированы вдоль главных осей деформации. Если длина этих ребер до деформации составляла ds_1^0, ds_2^0, ds_3^0 , то можно записать условие несжимаемости в виде

$$\frac{ds_1}{ds_1^0} \frac{ds_2}{ds_2^0} \frac{ds_3}{ds_3^0} = 1.$$

Учитывая соотношение (1.37), получаем

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0. \quad (1.49)$$

Принимая далее во внимание зависимости (1.36), перепишем уравнение (1.49) в виде

$$(1 - 2\varepsilon_1)(1 - 2\varepsilon_2)(1 - 2\varepsilon_3) = 1; \quad (1.50)$$

$$(1 + 2l_1)(1 + 2l_2)(1 + 2l_3) = 1. \quad (1.51)$$

Поскольку сумма логарифмических удлинений инвариантна к преобразованию координат, перепишем условие (1.49) еще в следующей форме: $e_{ii} = 0$.

При малых деформациях

$$e_{ii} = 0. \quad (1.52)$$

В приращениях и скоростях деформации условие несжимаемости имеет вид

$$de_{ii} = 0; \quad \dot{e}_{ii} = 0. \quad (1.53)$$

§ 3. Ассоциированный закон пластического течения

Введем девятимерные пространства напряжений P_σ и деформаций P_ε . В пространстве P_σ напряженное состояние некоторой частицы нагруженного тела изображается в виде точки с координатами σ_{ij} . В процессе нагружения тела эта точка описывает некоторую кривую, называемую траекторией нагружения. В пространстве P_ε деформированное состояние рассматриваемой частицы изображается в виде точки с координатами ε_{ij} . В процессе деформирования тела эта точка описывает кривую, называемую траекторией деформирования.

Поверхность, ограничивающую область пространства напряжений, в пределах которой деформация является упругой, называют поверхностью нагружения. Если точка, изображающая напряженное состояние частицы, расположена внутри поверхности нагружения Σ , то каким бы ни был вектор догрузки $d\sigma_{ij}$, он приводит только к упругим деформациям. Если же эта точка лежит на поверхности нагружения, то вектор догрузки $d\sigma_{ij}$, направленный внутрь этой поверхности, приводит к разгрузке, сопровождающейся упругим деформированием. Вектор $d\sigma_{ij}$, направленный наружу по отношению к поверхности Σ , вызывает приращение пластических деформаций. Если же этот вектор направлен по касательной к поверхности Σ , происходят так называемые нейтральные изменения, сопровождающиеся только упругим деформированием. У идеально пластических материалов поверхность Σ фиксирована и обычно называется поверхностью текучести, у упрочняющихся материалов в процессе пластического деформирования поверхность нагружения перемещается и деформируется.

На рис. 4 показана схематизированная диаграмма растяжения пластического материала. Пусть материал нагружен до напряжения σ_A и затем разгружен до напряжения σ_0 . Рассмотрим далее процесс нагружения до σ_B и последующей разгрузки до σ_0 . Очевидно, что если при этом произошла пластическая деформация, то добавочные напряжения $\sigma - \sigma_0$ совершают при этом цикле нагружения и разгрузки положительную работу, численно равную площади криволинейного четырехугольника $OABC$: $\int (\sigma - \sigma_0) d\varepsilon > 0$. Полная деформация складывается из упругой и пластической ($\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$), поэтому

$$\int (\sigma - \sigma_0) (d\varepsilon^e + d\varepsilon^p) = \int (\sigma - \sigma_0) d\varepsilon^e + \int (\sigma - \sigma_0) d\varepsilon^p > 0.$$

Работа добавочных напряжений на упругих деформациях для полного цикла нагружения и разгрузки равна нулю. Вследствие этого

$$\int (\sigma - \sigma_0) d\varepsilon^p > 0. \quad (1.54)$$

Постулат Друкера обобщает этот достаточно очевидный факт.

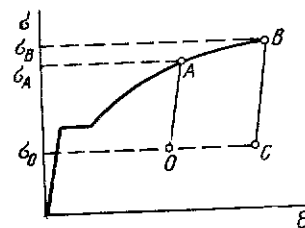


Рис. 4. Диаграмма растяжения

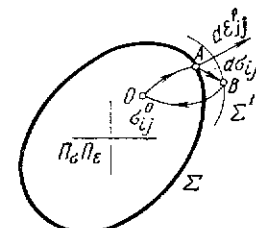


Рис. 5. К постулату Друкера

Пусть на рис. 5 O — точка, изображающая в пространстве напряжений напряженное состояние (σ_{ij}^0) некоторой частицы сплошной среды. Рассмотрим нагрузку вдоль некоторой траектории $O—A—B$ и последующую разгрузку $B—O$. При этом будем считать, что точка A соответствует переходу материала в пластическое состояние, т.е. лежит на поверхности нагружения Σ . После перехода в пластическое состояние производим бесконечно малую догрузку $d\sigma_{ij}$, сопровождающуюся бесконечно малыми приращениями пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$. Постулируется, что за рассмотренный цикл нагружения и разгрузки добавочные напряжения совершают положительную работу:

$$\int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p > 0.$$

Далее, учитывая, что для полного цикла нагружения и разгрузки работа добавочных напряжений на упругих деформациях равна нулю, получаем неравенство, обобщающее неравенство (1.54) на случай пространственного напряженного состояния:

$$\int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p > 0.$$

Пластическая деформация происходит только на бесконечно малом участке $A—B$, поэтому можно записать это неравенство в виде

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p > 0. \quad (1.55)$$

Отсюда следует, что поверхность нагружения является выпуклой (т.е. целиком располагается по одну сторону от любой касательной гиперплоскости) и что в совмещенных пространствах напряжений и деформаций вектор приращения пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$ направлен по нормали к поверхности нагружения.

Действительно, сумму $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p$ можно рассматривать как скалярное произведение векторов $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)$ и $d\varepsilon_{ij}^p$. Положительность этого произведения означает, что угол между указанными векторами является острым. Только при выпуклой поверхности нагружения Σ и перпендикулярности вектора $d\varepsilon_{ij}^p$ к Σ этот угол будет острым при любом положении точки O . На рис. 6, а эти условия выполнены, а на рис. 6, б и в — нарушены.

Заметим, что вектор $d\varepsilon_{ij}^p$ зависит от геометрии поверхности нагружения и положения точки A на ней, но не от положения точки O и траектории нагружения OA (так как деформирование на этом участке является упругим).

Пусть поверхность нагружения описывается уравнением

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (1.56)$$

Тогда направляющие косинусы нормали к этой поверхности, а следовательно, и вектора $d\varepsilon_{ij}^p$ будут пропорциональны произ-

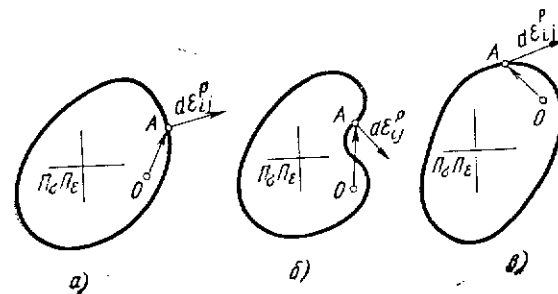


Рис. 6. Схемы поверхностей нагружения

водимым $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$. Поэтому условие перпендикулярности вектора $d\varepsilon_{ij}^p$ к поверхности нагружения можно записать в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.57)$$

Закон течения, выражаемый соотношениями (1.57), называют ассоциированным (с уравнением поверхности нагружения).

Если материал несжимаем, то $d\varepsilon_{ii}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} = 0$. Как видим,

у такого материала уравнение поверхности нагружения не зависит от первого инварианта тензора напряжений. Это позволяет записать уравнение поверхности нагружения следующим образом:

$$f(s_{ij}) = 0, \quad (1.58)$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений. Ассоциированный закон пластического течения при этом записывается в форме

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}. \quad (1.59)$$

Разделив левую и правую части этого равенства на дифференциал времени (или заменяющего его параметра), получаем аналогичные соотношения для скоростей пластических деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \mu \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}. \quad (1.60)$$

§ 4. Поверхность нагружения при изотропном упрочнении

Рассмотрим начальную поверхность нагружения металла, не подвергавшегося ранее пластическому деформированию.

Уравнение этой поверхности обычно называют условием пластичности.

Предложено достаточно много различных условий пластичности. Рассмотрим широко используемое и в теоретических и в прикладных исследованиях и достаточно хорошо согласующееся с экспериментальными данными относительно широкого круга изотропных металлов условие пластичности Губера — Мизеса. Запишем его в главных напряжениях:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2, \quad (1.61)$$

где σ_T — предел текучести материала, устанавливаемый обычно испытанием на растяжение.

В пространстве главных напряжений условию (1.61) соответствует круговой цилиндр с радиусом $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sigma_T$ и осью, равнонаклоненной к координатным осям. При двухосном напряженном состоянии ($\sigma_3 = 0$) условие (1.61) изображается в координатах σ_1, σ_2 эллипсом. Сопоставляя (1.61) с (1.19), видим, что это условие можно также записать следующим образом:

$$s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_T^2. \quad (1.62)$$

Р. Хилл обобщил условия текучести (1.61), (1.62) на случай начальной анизотропии

$$H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N\tau_{xy}^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 = 1. \quad (1.63)$$

Здесь оси x, y, z совмещены с главными осями анизотропии. Если обозначить через $\sigma_{tx}, \sigma_{ty}, \sigma_{tz}$ пределы текучести при растяжении вдоль этих осей, а через $\sigma_{txy}, \tau_{txz}, \tau_{tyz}$ — пределы текучести при сдвиге по отношению к главным осям анизотропии, то легко получить следующие выражения коэффициентов уравнения (1.63) через указанные пределы текучести:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{ty}^2} + \frac{1}{\sigma_{tz}^2} - \frac{1}{\sigma_{tx}^2} \right), \quad L = \frac{1}{2\tau_{tyz}^2}; \\ G &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{tz}^2} + \frac{1}{\sigma_{tx}^2} - \frac{1}{\sigma_{ty}^2} \right), \quad M = \frac{1}{2\tau_{txz}^2}; \\ H &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{tx}^2} + \frac{1}{\sigma_{ty}^2} - \frac{1}{\sigma_{tz}^2} \right), \quad N = \frac{1}{2\tau_{txy}^2}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

При пластическом деформировании металлы упрочняются, поверхность нагружения при этом расширяется, перемещается в пространстве напряжений и деформируется. Наиболее простая модель упрочняющегося тела получается, если предположить, что поверхность нагружения только расширяется, оста-

ваясь подобной начальной поверхности нагружения. Такое упрочнение называют изотропным.

Ограничимся рассмотрением материала, у которого поверхность нагружения не зависит от скорости деформации.

Пусть упрочнение характеризуется параметром q . Тогда уравнение (1.61) следующим образом обобщается на случай изотропного упрочнения:

$$s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_0^2(q). \quad (1.65)$$

Уравнение поверхности нагружения можно записать в виде

$$f(s_{ij}) = \frac{1}{2} \left[s_{ij}s_{ij} - \frac{2}{3} \sigma_0^2(q) \right] = 0.$$

Согласно ассоциированному закону пластического течения (1.59) *

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda s_{ij}. \quad (1.66)$$

Образум сумму

$$d\epsilon_{ij}d\epsilon_{ij} = d\lambda^2 s_{ij}s_{ij}.$$

Величину

$$\bar{d\epsilon}_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} (d\epsilon_{ij}d\epsilon_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad (1.67)$$

называют интенсивностью приращений пластических деформаций. Учитывая (1.65) и (1.67), получаем $d\lambda = \frac{3}{2} \frac{\bar{d\epsilon}_0}{\sigma_0}$.

Таким образом,

$$d\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\bar{d\epsilon}_0}{\sigma_0} s_{ij}. \quad (1.68)$$

В качестве параметра упрочнения q часто используют работу пластической деформации $W = \int \sigma_{ij}d\epsilon_{ij}$. Вследствие несжимаемости материала можно записать, что

$$W = \int s_{ij}d\epsilon_{ij} = \int \sigma_0 \bar{d\epsilon}_0. \quad (1.69)$$

Таким образом, предполагается существование единой для различных напряженных состояний и историй деформирования диаграммы деформирования в координатах $\sigma_0 - W$. В силу равенства (1.69) из этого предположения следует существование единой кривой течения в координатах $\sigma_0 - \bar{\epsilon}_0$, где

$$\bar{\epsilon}_0 = \int \bar{d\epsilon}_0 \quad (1.70)$$

* В дальнейшем индекс p в обозначении пластических деформаций опускается.

называют накопленной пластической деформацией или параметром Удквиста.

При неизменных главных направлениях и изменении приращений деформаций пропорционально одному параметру $\bar{e}_0 = e_0$, где e_0 — интенсивность логарифмических деформаций,

$$e_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} (e_{ij} e_{ij})^{\frac{1}{2}}. \quad (1.71)$$

Интегрирование в (1.69), (1.70) выполняется по всему времени деформирования, начиная с наступления пластического состояния.

Кривая течения материала $\sigma_0(\bar{e}_0)$ может быть построена по результатам испытания на растяжение. Если образец, расчетная длина которого составляла до испытания l_0 , растянут усилием P до длины l , то

$$\sigma_0 = \frac{P}{F}; \quad \bar{e}_0 = \ln \frac{l}{l_0}, \quad (1.72)$$

где F — площадь поперечного сечения деформированного образца. При больших деформациях растяжение становится неустойчивым, у образца образуется так называемая шейка, напряженное состояние становится объемным, а вследствие этого формулы (1.72) оказываются неточными. Для построения кривой течения при больших пластических деформациях обычно испытывают цилиндрические (реже — призматические) образцы на сжатие. При сжатии

$$\sigma_0 = \frac{P}{F}; \quad \bar{e}_0 = \ln \frac{l_0}{l}. \quad (1.73)$$

Обозначения те же, что в формулах (1.72).

Недостатком этого вида испытаний является искажающее напряженное состояние влияние трения на торцах. Для его уменьшения сжатие образцов часто производят со смазкой торцов.

Рассмотрим, следуя Р. Хиллу, уравнение поверхности нагружения изотропно упрочняющегося начально анизотропного материала с условием текучести (1.63). Поскольку в этом случае в процессе деформирования состояние анизотропии не изменяется, пределы текучести по мере упрочнения растут пропорционально одному параметру. Удовлетворяя этому условию, запишем уравнение поверхности нагружения в виде

$$2f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2(F+G+H)} [F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2] - \bar{\sigma}^2(W) = 0, \quad (1.74)$$

где $\bar{\sigma}$ — эквивалентное напряжение. Параметры анизотропии $F, G, \dots$ — определяются через начальные пределы текучести по соотношениям (1.64).

Применяя ассоциированный закон пластического течения (1.59), получаем

$$\begin{aligned} d\epsilon_x &= d\lambda \frac{3}{2(F+G+H)} [H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)]; \\ d\epsilon_y &= d\lambda \frac{3}{2(F+G+H)} [H(\sigma_y - \sigma_x) + F(\sigma_y - \sigma_z)]; \\ d\epsilon_z &= d\lambda \frac{3}{2(F+G+H)} [G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)]; \\ d\epsilon_{xy} &= d\lambda \frac{3N}{2(F+G+H)} \tau_{xy}; \\ d\epsilon_{xz} &= d\lambda \frac{3M}{2(F+G+H)} \tau_{xz}; \\ d\epsilon_{yz} &= d\lambda \frac{3L}{2(F+G+H)} \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Приращение пластической работы

$$dW = \sigma_x d\epsilon_x + \dots + 2\tau_{xy} d\epsilon_{xy} = \bar{\sigma}^2 d\lambda. \quad (1.76)$$

Здесь учтены уравнения (1.75). Определим теперь эквивалентное приращение пластических деформаций $d\bar{\epsilon}$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$dW = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}. \quad (1.77)$$

Из (1.76), (1.77) следует, что

$$d\lambda = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}^2}. \quad (1.78)$$

Выразив из (1.75) напряжения через приращения деформаций и подставив полученный результат в (1.74), получаем с учетом (1.78), что

$$\bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \left\{ \frac{2}{3} (F+G+H) \left[F \left(\frac{G d\epsilon_y - H d\epsilon_z}{FG+GH+HF} \right)^2 + \dots + \frac{2 d\epsilon_{yz}^2}{L} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.79)$$

Наряду с пределами текучести механической характеристикой рассматриваемого материала является кривая течения, которая одина для различных напряженных состояний и историй деформирования как в координатах $\bar{\sigma} - W$, так и в координатах $\bar{\sigma} - \int d\bar{\epsilon}$ и может быть построена испытанием материала на осевое растяжение или сжатие вдоль оси x . В этом случае получаем из соотношений (1.74), (1.79), что

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{G+H}{F+G+H}} |\sigma_x|, \quad \bar{\epsilon} = \int d\bar{\epsilon} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} \frac{F+G+H}{G+H}} |e_x|. \quad (1.80)$$

Из уравнений состояния (1.75) следует, что при чистом растяжении вдоль оси x

$$d\varepsilon_x : d\varepsilon_y : d\varepsilon_z = (G+H) : (-H) : (-G). \quad (1.81)$$

Это соотношение несколько облегчает определение параметров анизотропии. Так, при определении параметров анизотропии листовых материалов, чаще всего вызываемой прокаткой, испытывают на растяжение образцы, вырезанные в направлениях, образующих с направлением прокатки x углы α , равные 0, 45 и 90°. Параметры анизотропии определяют по величине предела текучести в направлении, перпендикулярном направлению прокатки σ_{90} , и по отношениям r деформации образцов по ширине к деформации по толщине:

$$F = \frac{1}{\sigma_{90} \left(1 + \frac{H}{F}\right)}; \quad \frac{H}{F} = r_{90}; \quad \frac{G}{H} = \frac{r_{90}}{r_0};$$

$$\frac{N}{F} = \left(r_{45} + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{r_{90}}{r_0}\right). \quad (1.82)$$

§ 5. Анизотропное упрочнение

Рассмотренная модель изотропно упрочняющегося материала не описывает эффект Баушингера, поскольку согласно этой модели после пластического деформирования и разгрузки пределы текучести в прямом и обратном направлениях нагружения оказываются равными. В силу этого теория пластичности изотропно упрочняющегося материала оказывается непригодной для количественного описания многих процессов немонокотного деформирования. Но дело не только в этом. Многие особенности поведения материалов при сложном нагружении можно рассматривать как проявление некоторого обобщенного эффекта Баушингера. Для учета этих особенностей необходимы соответствующие изменения уравнения поверхности нагружения.

Наиболее простое уравнение поверхности нагружения, учитывающее анизотропию деформационного упрочнения, получается, если исходить из предположения о жестком смещении поверхности нагружения в направлении деформирования. Однако эта схема находится в удовлетворительном соответствии с экспериментальными данными лишь при малых пластических деформациях. Значительно лучшее согласование с экспериментом в области больших пластических деформаций достигается, если допустить, что поверхность нагружения испытывает перенос и одновременно расширяется равномерно во всех направ-

лениях. Если эта поверхность в начальном состоянии описывается уравнением (1.62), то ее изменение в процессе деформирования можно описать уравнением

$$2f(s_{ij}) = (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{2}{3} \bar{\sigma}_0^2 (\bar{e}_0) = 0, \quad (1.83)$$

где α_{ij} — добавочные напряжения или смещения центра поверхности нагружения в пространстве девиатора напряжений; $\bar{\sigma}_0$ — эквивалентное напряжение, связанное с параметром упрочнения $\bar{e}_0$ зависимостью, единой для различных напряженных состояний и видов нагружения.

Согласно ассоциированному закону пластического течения (1.59)

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda (s_{ij} - \alpha_{ij}). \quad (1.84)$$

Образовав сумму

$$d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} = d\lambda^2 (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}),$$

находим

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{e}_0}{\bar{\sigma}_0}.$$

Это позволяет записать уравнения состояния рассматриваемого материала в виде

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{e}_0}{\bar{\sigma}_0} (s_{ij} - \alpha_{ij}). \quad (1.85)$$

Диаграмма деформирования $\bar{\sigma}_0(\bar{e}_0)$ является характеристикой материала и устанавливается экспериментально. Для этого обычно испытывают материал на одноосное растяжение и последующее сжатие. Образцы растягивают до различных значений $\bar{e}_0$ и затем разгружают. Затем из них вырезают образцы на сжатие таким образом, чтобы сжатие происходило в направлении предшествовавшего растяжения. При испытании на сжатие определяют условный предел текучести σ_0' (обычно при допуске на интенсивность пластической деформации 0,002).

Для достаточно точного определения σ_0' рекомендуется производить испытание с использованием механических тензометров.

Записав согласно уравнениям (1.85) приращение продольной деформации при осевом растяжении вдоль оси x_1 , получаем

$$\sigma_0' - \frac{3}{2} \alpha_{11} = \bar{\sigma}_0. \quad (1.86)$$

При последующем сжатии вдоль той же оси до наступления пластического состояния α_{ij} не изменяются, поэтому из уравнений (1.85) следует, что

$$\sigma_0'' + \frac{3}{2} \alpha_{11} = \bar{\sigma}_0. \quad (1.87)$$

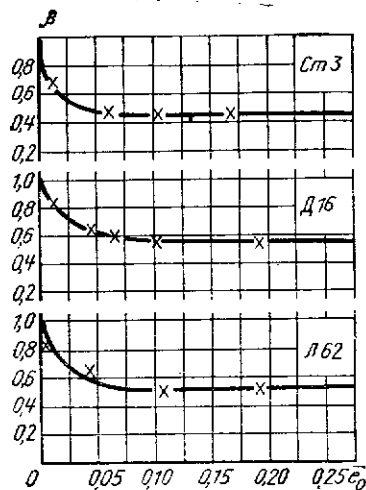


Рис. 7. Зависимость коэффициента β от пластической деформации

ние, определить эквивалентное напряжение σ_0 , соответствующее накопленной пластической деформации $\bar{\epsilon}_0$, и построить диаграмму деформирования $\sigma(\bar{\epsilon}_0)$.

Предложены различные уравнения, определяющие тензор α_{ij} .

По Кадашевичу Ю. И. и Новожилову В. В.,

$$\alpha_{ij} = g(\alpha_0) e_{ij}, \quad (1.89)$$

где $\alpha_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \alpha_{ij} \alpha_{ij}}$ — интенсивность добавочных напряжений.

Обобщая это соотношение на область больших пластических деформаций, запишем

$$\alpha_{ij} = \varphi(\bar{\epsilon}_0) e_{ij}, \quad (1.90)$$

где e_{ij} — логарифмические деформации, определенные соотношениями (1.38). Подставив (1.90) в (1.86), (1.87) и учитывая, что при растяжении $e_{11} = \bar{\epsilon}_0$, получаем

$$\varphi = \frac{1-\beta}{3} \frac{\sigma'_0}{\epsilon_0} = \frac{2}{3} \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\epsilon}_0}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{ij} = \frac{1-\beta}{3} \frac{\sigma'_0}{\epsilon_0} e_{ij} = \frac{2}{3} \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\epsilon}_0} e_{ij}. \quad (1.91)$$

Приведенные соотношения не описывают с достаточной точностью изменения поверхности нагружения при циклическом

Из уравнений (1.86), (1.87) находим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_0 &= \frac{1+\beta}{2} \sigma'_0; \quad \alpha_{11} = \\ &= \frac{1-\beta}{3} \sigma'_0, \end{aligned} \quad (1.88)$$

где $\beta = \sigma'_0 / \sigma'_0$ — отношение предела текучести на сжатие после растяжения до интенсивности напряжений σ'_0 к σ'_0 ($0 < \beta \leq 1$).

На рис. 7 приведены графики $\beta(\epsilon_0)$ для ряда материалов. Как видно, при $\bar{\epsilon}_0 > 0,03$ можно считать, что $\beta = \text{const}$.

Соотношение (1.88) позволяет по кривой течения $\sigma'_0(\bar{\epsilon}_0)$, построенной испытанием материала на растяже-

деформировании, поскольку при полном цикле изменения деформации добавочные напряжения α_{ij} по этим соотношениям оказываются равными нулю, что не согласуется с экспериментом.

В связи с этим были предложены дифференциальные зависимости для приращений $d\alpha_{ij}$. Так Р. А. Арутюнин и А. А. Вакуленко предложили вместо зависимости (1.89) следующую:

$$d\alpha_{ij} = A(\sigma_0) d\epsilon_{ij}. \quad (1.92)$$

Аналогичные соотношения использованы в работе Г. Бакхауза [41]

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\bar{\epsilon}_0} B(\bar{\epsilon}_0^*) \frac{d\epsilon_{ij}}{d\bar{\epsilon}_0^*} d\bar{\epsilon}_0^*. \quad (1.93)$$

Из уравнений (1.86), (1.87), (1.93) получаем

$$B = \frac{1}{3} \frac{d}{d\bar{\epsilon}_0} [\sigma'_0 (1-\beta)]. \quad (1.94)$$

В. Л. Данилов [9] предложил следующие соотношения, определяющие смещения центра поверхности нагружения:

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{3} \alpha \int \frac{d\sigma_0}{d\bar{\epsilon}_0} d\epsilon_{ij}, \quad (1.95)$$

где α — параметр, характеризующий склонность материала к упрочнению. Интегрирование в соотношениях (1.93), (1.95) производится от момента наступления пластического состояния до рассматриваемого деформированного состояния.

$$\text{При растяжении } \alpha_{11} = \frac{2}{3} \alpha \int_{\sigma_T}^{\sigma'_0} d\sigma_0 = \frac{2}{3} \alpha (\sigma'_0 - \sigma_T),$$

где σ_T — предел текучести материала.

Подставив эту зависимость в (1.86), (1.87), получим

$$\alpha = 0,5 \frac{1-\beta}{1-\gamma}, \quad (1.96)$$

где $\gamma = \sigma_T / \sigma'_0$.

В работах [9, 42] предпринята попытка наряду с расширением и перемещением поверхности нагружения учесть ее поворот в процессе деформирования материала и изменение отношения ее полуосей. В статье А. Балтова и А. Савчука [42] предложено следующее уравнение поверхности нагружения:

$$2\Phi = N_{ijkl} (s_{ij} - \alpha_{ij}) (s_{kl} - \alpha_{kl}) - \frac{2}{3} \sigma_T^2 = 0. \quad (1.97)$$

Здесь N_{ijkl} — тензор текущих параметров анизотропии, который определяется соотношением

$$N_{ijkl} = \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{2} \delta_{jk} \delta_{il} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (1.98)$$

где α — постоянная материала, определяемая экспериментально. Добавочные напряжения α_{ij} определяются зависимостью, предложенной А. Ю. Ишлинским:

$$\alpha_{ij} = c \varepsilon_{ij}, \quad (1.99)$$

где c — характеристика материала.

Следующее из (1.97) уравнение кривой течения справедливо лишь для ограниченного круга материалов. По предложению В. Л. Данилова [9] тензор N_{ijkl} представляется в виде

$$N_{ijkl} = I(\bar{e}_0) \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \int_0^{\bar{e}_0} A(\bar{e}_0^*) \left(\frac{d\varepsilon_{ij}}{d\bar{e}_0^*} \frac{d\varepsilon_{kl}}{d\bar{e}_0^*} \right) d\bar{e}_0^*, \quad (1.100)$$

а смещения α_{ij} центра поверхности нагружения определяются соотношением, аналогичным зависимости (1.93):

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_T \int_0^{\bar{e}_0} B(\bar{e}_0^*) \left(\frac{d\varepsilon_{ij}}{d\bar{e}_0^*} \right) d\bar{e}_0^*. \quad (1.101)$$

Функции $I(\bar{e}_0)$, $A(\bar{e}_0)$, $B(\bar{e}_0)$ определяют экспериментально. Их можно, в частности, определить путем испытания материала на растяжение, в результате чего устанавливается функция $f = \frac{\sigma_0}{\sigma_T} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3} \tau_T}$, и закручивания ряда тонкостенных трубчатых образцов с последующей разгрузкой и определением предела текучести при их кручении в обратном направлении. При этом определяются функции $g^+ = \frac{\tau^+}{\tau_T}$, $g^- = -\frac{\tau^-}{\tau_T}$, где σ_T — начальный предел текучести при растяжении; τ_T — начальный предел текучести при сдвиге; τ^+ — касательное напряжение перед разгрузкой трубки; τ^- — предел текучести при закручивании трубки в обратном направлении.

Записав уравнение (1.97) для кручения в прямом и обратном направлении, а также для растяжения до той же интенсивности деформации, получаем систему трех уравнений, из которой следует

$$I(\bar{e}_0) = \frac{2g^+g^-}{f^2(g^+ + g^-)}; \quad A(\bar{e}_0) = \frac{8}{3} \frac{d}{d\bar{e}_0} \frac{f^2 - g^+g^-}{f^2(g^+ + g^-)^2}; \\ B(\bar{e}_0) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\bar{e}_0} (g^+ - g^-). \quad (1.102)$$

Для экспериментальной проверки некоторых следствий из этих теорий были проведены испытания цилиндрических образцов из стали Ст3 и алюминиевого сплава Д16 на осевое растяжение и последующее сжатие, а также на кручение в прямом и обратном направлении*.

Испытывали цилиндрические образцы диаметром 18 мм. Несколько образцов из одного материала растягивали до различной величины осевой деформации $\bar{e}_2 = \bar{e}_0$ и напряжения $\bar{\sigma}_0'$. Из растянутых стержней вырезали цилиндрические образцы, подвергавшиеся сжатию в направлении предшествующего растяжения. При этом механическими тензометрами измеряли осевую деформацию и при допуске 0,2% на пластическую деформацию определяли предел текучести на сжатие $\bar{\sigma}_0''$. По этим данным рассчитывали $\beta = \bar{\sigma}_0''/\bar{\sigma}_0'$. Полученная зависимость β от $\bar{e}_0$ представлена на рис. 9 кривыми 1.

Другую партию образцов закручивали до различной величины накопленной пластической деформации $\bar{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma$, где

γ — сдвиг на поверхности образца. После частичной разгрузки устанавливали индикаторное устройство для измерения угла закручивания. После полной разгрузки стержни нагружали моментом обратного направления и записывали диаграмму кручения до пластического сдвига γ в обратном направлении в 0,3%. Величину касательного напряжения перед разгрузкой определяли обычными приемами. Для расчета напряжений при пластическом кручении в обратном направлении рассмотрим два состояния: I — перед разгрузкой и II — после частичной разгрузки и последующего кручения в обратном направлении (см. рис. 8). Соответствующие крутящие моменты

$$M^I = 2\pi \int_0^R \tau^I r^2 dr; \quad M^{II} = 2\pi \int_0^R \tau^{II} r^2 dr,$$

где R — радиус образца. Разность

$$M^I - M^{II} = 2\pi \int_0^R \bar{\tau} r^2 dr = \frac{2\pi R^3}{\gamma_n^3} \int_0^{\gamma_n} \bar{\tau} \bar{\gamma}^2 d\bar{\gamma},$$

где $\bar{\tau} = \tau^I - \tau^{II}$, $\bar{\gamma}$ — сдвиг в обратном направлении. Индексом n

* Опыты выполнены С. П. Поповым и Д. В. Хваном.

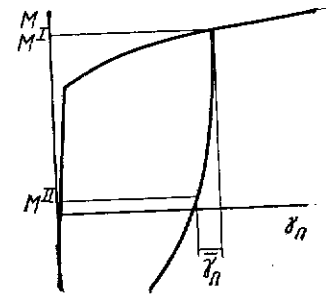


Рис. 8. Диаграмма кручения в прямом и обратном направлениях

отмечены величины, относящиеся к поверхности образца. В формулах учтено, что $r = \frac{R}{\gamma_n} \bar{\gamma}$. Дифференцируя полученное выражение по $\bar{\gamma}_n$, получаем

$$\tau_n^{\text{II}} = \tau_n^{\text{I}} + \frac{3}{2\pi R^3} \left(M^{\text{II}} - M^{\text{I}} + \frac{\bar{\gamma}_n}{3} \frac{dM^{\text{II}}}{d\bar{\gamma}_n} \right).$$

Заметим, что здесь $\gamma_n > 0$, $dM^{\text{II}}/d\bar{\gamma}_n < 0$, после полной разгрузки $M^{\text{II}} < 0$.

Значение $|\tau_n^{\text{II}}|$ при допуске 0,3% на пластический сдвиг в обратном направлении принимали за предел текучести на сдвиг в этом направлении τ' и определяли $\beta' = \tau'/\tau^{\text{I}}$.

Пусть поверхность нагружения описывается уравнением (1.83). Как будет показано в следующем параграфе, и в случае анизотропного упрочнения можно с высокой степенью точности принять, что при кручении сплошных круглых стержней и соответствующем выборе координатных направлений $s_{12} = s_{21} = \tau$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha$, а все прочие компоненты девиаторов s_{ij} , α_{ij} равны нулю.

Следовательно, непосредственно перед разгрузкой после монотонного кручения $2(\tau^{\text{I}} - \bar{\alpha})^2 = \frac{2}{3} \bar{\sigma}_0^2$. При последующем кручении в обратном направлении до наступления пластического состояния $s_{12} = s_{21} = -\tau'$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \bar{\alpha}$, и поэтому $2(\tau' + \bar{\alpha})^2 = \frac{2}{3} \bar{\sigma}_0^2$.

$$\text{Таким образом, } \tau^{\text{I}} + \tau' = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma}_0.$$

Сопоставляя полученное отношение с (1.88), видим, что если перед разгрузкой накопленная пластическая деформация при испытании на растяжение и кручение одинакова, то независимо от того, как определяются добавочные напряжения, β и β' связаны соотношением

$$\beta = (1 + \beta') \frac{\sqrt{3} \tau^{\text{I}}}{\bar{\sigma}_0} - 1. \quad (1.103)$$

Результаты расчета β по формуле (1.103), в которую подставляли величину β' , определенную испытанием на кручение в прямом и обратном направлении, представлены на рис. 9 кривыми 2.

Вернемся теперь к рассмотрению теории, представленной соотношениями (1.97), (1.100), (1.101). Результаты испытаний на растяжение и кручение с последующим кручением в обратном направлении позволили по (1.102) определить функции $I(\bar{e}_0)$, $A(\bar{e}_0)$, $B(\bar{e}_0)$, а по ним рассчитать β .

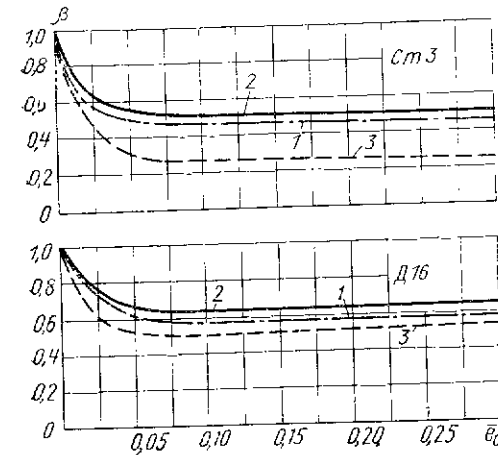


Рис. 9. Сравнение результатов экспериментальной проверки уравнений поверхности нагружения с расчетом:

1 — эксперимент; 2, 3 — расчет

Расчет выполнялся следующим образом. Согласно уравнению (1.97) условие пластичности материала после растяжения вдоль оси x имеет вид

$$\begin{aligned} & N_{1111}(s_{11} - \alpha_{11})^2 + N_{2222}(s_{22} - \alpha_{22})^2 + N_{3333}(s_{33} - \alpha_{33})^2 + \\ & + 2N_{1122}(s_{11} - \alpha_{11})(s_{22} - \alpha_{22}) + 2N_{1133}(s_{11} - \alpha_{11})(s_{33} - \alpha_{33}) + \\ & + 2N_{2233}(s_{22} - \alpha_{22})(s_{33} - \alpha_{33}) + 4N_{1212}s_{12}^2 + 4N_{1313}s_{13}^2 + \\ & + 4N_{2323}s_{23}^2 = \frac{2}{3} \sigma_T^2, \end{aligned}$$

$$\text{где } N_{2222} = N_{3333}, \quad N_{1122} = N_{1133}, \quad N_{1212} = N_{2323} = N_{1313}, \\ \alpha_{11} = -2\alpha_{22} = -2\alpha_{33} = \bar{\alpha}.$$

При сжатии этого материала вдоль оси x пластическое состояние наступит при напряжении

$$\sigma_0'' = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_T}{\sqrt{\frac{4}{3} I(\bar{e}_0) + \int_0^{\bar{e}_0} A(\bar{e}_0^*) d\bar{e}_0^*}} - \frac{3}{2} \bar{\alpha}, \quad (1.104)$$

где

$$\bar{\alpha} = \frac{3}{2} \sigma_T \int_0^{\bar{e}_0} B(\bar{e}_0^*) d\bar{e}_0^*.$$

Вычислив по формуле (1.104) σ'_0 , определяли $\beta = \sigma'_0 / \sigma_0$. Полученная таким образом зависимость $\beta(\bar{e}_0)$ представлена на рис. 9 кривыми 3. Как видим, результаты расчета по условию пластичности (1.83) находятся в несколько лучшем соответствии с экспериментом, чем результаты, следующие из условия пластичности (1.97).

Для экспериментальной проверки приведенных зависимостей, определяющих тензор добавочных напряжений α_{ij} , выясним, с какой точностью рассмотренные теории описывают диаграмму сжатия растянутого материала. Ограничимся сопоставлением с экспериментом результатов, получаемых по различным вариантам теории, основанным на уравнении поверхности нагружения (1.83).

Пусть добавочные напряжения определены соотношением (1.91). Если образец растянут до интенсивности деформации $\bar{e}_0$ и в последующем пластически сжат до величины добавочной интенсивности деформации $\Delta \bar{e}_0$ (рис. 10), то компоненты тензора логарифмической деформации $e_{11} = -2e_{22} = -2e_{33} = \bar{e}_0 - \Delta \bar{e}_0$, $e_{12} = e_{23} = e_{13} = 0$. Поэтому из (1.85), (1.88), (1.91) получаем следующую зависимость для интенсивности напряжений при сжатии:

$$\sigma_c = \sigma'_0 \left(\frac{1+\beta}{2} - \frac{1-\beta}{2} \frac{\bar{e}_0 - \Delta \bar{e}_0}{\bar{e}_0 + \Delta \bar{e}_0} \right). \quad (1.105)$$

При $\Delta \bar{e}_0 = 0$ $\sigma_c = \beta \sigma'_0$, при $\Delta \bar{e}_0 \gg \bar{e}_0$ $\sigma_c = \sigma'_0$.

Обратившись далее к соотношению (1.94), получаем, что при сжатии растянутых образцов

$$\alpha_{11} = -2\alpha_{22} = -2\alpha_{33} = \frac{1}{3} \int_0^{(1-\beta)\sigma_p} d[(1-\beta)\sigma'_0] -$$

$$- \frac{1}{3} \int_{(1-\beta)\sigma_p}^{(1-\beta)\sigma'_0} d[(1-\beta)\sigma'_0] = \frac{1-\beta}{3} (2\sigma_p - \sigma'_0),$$

где σ_p — напряжение перед разгрузкой после растяжения. Из уравнения (1.83)

$$\sigma_c = \sigma'_0 - (1-\beta)\sigma_p. \quad (1.106)$$

Как видим, в этом случае $\sigma'_0 - \sigma_c = \text{const}$. Аналогично на основе зависимости (1.95) получаем

$$\sigma_c = \sigma'_0 - 2\alpha(\sigma_p - \sigma_T). \quad (1.107)$$

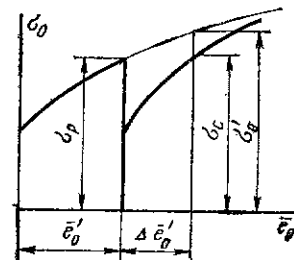


Рис. 10. К эффекту Баушингера

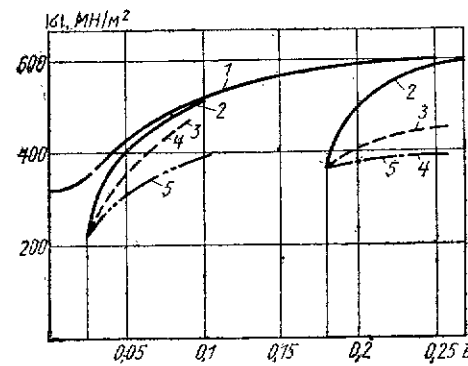


Рис. 11. Сравнение экспериментальных и расчетных диаграмм деформирования растянутого материала:

1 — растяжение (эксперимент); 2 — сжатие после растяжения (эксперимент); расчетные диаграммы при определении добавочных напряжений: 3 — по (1.90); 4 — по (1.95); 5 — по (1.93)

На рис. 11 результаты расчетов по соотношениям (1.105) — (1.107) сопоставлены с экспериментальными данными. Приведенные данные позволяют заключить, что уравнение (1.105) находится в несколько лучшем соответствии с экспериментом, чем уравнения (1.106), (1.107). С возрастанием деформации перед разгрузкой точность этого уравнения уменьшается. Во всех случаях напряжение σ_c , рассчитанное по полученным зависимостям, ниже действительного.

Согласование с экспериментом улучшается, если уравнения смещений поверхности нагружения записываются в виде

$$\alpha_{ij} = f(\bar{e}_0) \int_0^{\bar{e}_0^*} F(\bar{e}_0, \bar{e}_0^*) \frac{de_{ij}}{d\bar{e}_0^*} d\bar{e}_0^*.$$

Выразив таким образом величину α_{11} при осевом растяжении, получаем с учетом (1.88)

$$f(\bar{e}_0) = \frac{(1-\beta)\sigma'_0}{3 \int_0^{\bar{e}_0^*} F(\bar{e}_0, \bar{e}_0^*) d\bar{e}_0^*}.$$

Экспериментальная проверка, выполненная испытанием на сжатие образцов из сталей Ст3,20 и алюминия АМГ, растянутых до деформации $0,025 \leq \bar{e}_0 \leq 0,18$, показала, что вполне удовлетворительна аппроксимация

$$F(\bar{e}_0, \bar{e}_0^*) = (\bar{e}_0^*)^{30\bar{e}_0}.$$

Тогда при сжатии растянутого материала

$$\sigma_c = \sigma'_0 \left[1 - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{e}_0}{e_0} \right)^{3\beta \bar{e}_0 + 1} \right].$$

Предложены также варианты теории анизотропно упрочняющихся материалов, учитывающие начальную анизотропию. Однако далеко не все предпосылки этих теорий проверены экспериментально.

В рассмотренных уравнениях поверхности нагружения анизотропно упрочняющихся тел в качестве параметра упрочнения использована накопленная пластическая деформация (параметр Удквиста). Поскольку материал при деформировании становится анизотропным, такое определение параметра упрочнения, при котором все приращения деформаций «равноправны», представляется необоснованным. Физически более оправдан выбор в качестве этого параметра работы пластической деформации, но это обычно ведет к значительному усложнению расчетов.

При простом деформировании, когда приращения деформаций изменяются пропорционально одному параметру, т. е. при $\frac{de_{ij}}{de_0} = \text{const}$, все рассмотренные уравнения состояния начально изотропного материала сводятся к так называемым уравнениям деформационной теории пластичности

$$e_{ij} = \frac{3}{2} \frac{e_0}{\sigma_0} s_{ij}. \quad (1.108)$$

§ 6. Кручение круглых стержней из анизотропно упрочняющегося материала

Ниже дана приближенная оценка осевых напряжений, возникающих при стесненном пластическом кручении, а также удлинений при свободном кручении круглых стержней из анизотропно упрочняющегося материала.

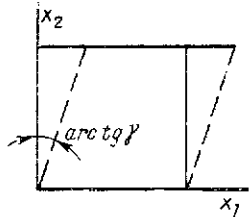


Рис. 12. Схема деформации на поверхности закручиваемого стержня

На рис. 12 показана деформация элементарного прямоугольника на поверхности закручиваемого без удлинения стержня (ось x_1 совмещена с осевым направлением). Предполагая деформацию в пределах прямоугольника однородной, выразим перемещения u_i через текущие координаты x_i : $u_1 = \gamma x_2$; $u_2 = u_3 = 0$. Здесь γ — сдвиг, $\gamma = \theta r$, где θ — относительный угол закручивания; r — радиус.

Определим компоненты эйлера тензора деформации:

$$e_{11} = e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0, \quad e_{22} = -\frac{1}{2} \gamma^2, \quad e_{12} = \frac{1}{2} \gamma.$$

Главные компоненты этого тензора

$$e_{1,2} = \frac{1}{4} \gamma^2 \pm \frac{1}{4} \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}, \quad e_3 = 0.$$

Главное направление, соответствующее деформации e_1 , образует с осью x_1 угол

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{\gamma}. \quad (1.109)$$

Определим главные логарифмические деформации:

$$e_{1,2} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2e_{1,2}) = \pm \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{1}{2} \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4} \right). \quad (1.110)$$

Будем исходить из теории пластичности, представленной уравнениями (1.83), (1.90).

Согласно ассоциированному закону пластического течения приращения пластических деформаций

$$de_{ij} = \frac{3}{1 + \beta} \frac{de_0}{\sigma'_0} \left[s_{ij} - \frac{1 - \beta}{3} \frac{\sigma'_0}{e_0} e_{ij} \right]. \quad (1.111)$$

Здесь σ'_0 — интенсивность напряжений при осевом растяжении материала до интенсивности деформации e_0 .

При кручении $\bar{e}_0 = \gamma/\sqrt{3}$, а интенсивность логарифмических деформаций $e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(1 + \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{1}{2} \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4} \right)$. При $\gamma \ll 1$ отличие $\bar{e}_0$ от e_0 не превышает 4%. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что $\bar{e}_0 = e_0$. Ограничившись рассмотрением развитых пластических деформаций, примем также, что $\beta = \text{const}$.

Рассмотрим стесненное кручение круглого стержня, при котором длина стержня остается постоянной. В цилиндрической системе координат r, φ, z логарифмические деформации

$$e_\varphi = e_1 \cos^2 \alpha + e_2 \sin^2 \alpha, \quad e_z = e_1 \sin^2 \alpha + e_2 \cos^2 \alpha; \quad e_r = 0. \quad (1.112)$$

Поскольку $e_1 = -e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_0$; $d\varepsilon_z = d\varepsilon_r = d\varepsilon_\varphi = 0$,

из (1.11) следует, что $s_\varphi = -s_z = \frac{1-\beta}{2\sqrt{3}} \sigma'_0 \cos 2\alpha$; $s_r = 0$.

Из уравнения $\sigma_0^2 = (s_\varphi - s_z)^2 + 3\tau^2$,

полагая, что $\sigma_0 \approx \sigma'_0$, найдем с учетом (1.109) интенсивность напряжений:

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{1 - \frac{(1-\beta)^2}{3} \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \frac{2}{\gamma}}}. \quad (1.113)$$

Чаще всего конструкция машин для испытаний на кручение такова, что кручение является стесненным. Из (1.113) следует, что в этом случае интенсивность напряжений, определяемая без учета деформационной анизотропии ($\sigma_0 = \sqrt{3}\tau$) несколько занижается. При $\beta = 0,4$ (наименьшее из приведенных выше экспериментальных значений β) погрешность может достигать 6%.

Для определения нормальных напряжений необходимо найти гидростатическое давление σ . Поскольку оно равно радиальному, напряжению σ_r , определим его из уравнения равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{s_r - s_\varphi}{r} = 0. \quad (1.114)$$

На поверхности стержня при $r=R$ $\sigma_r=0$, поэтому

$$\sigma = \frac{1-\beta}{2\sqrt{3}} \int_r^R \sigma'_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{2}{\gamma} \frac{dr}{r}.$$

Нормальные напряжения $\sigma_\varphi = s_\varphi + \sigma$; $\sigma_z = s_z + \sigma$.

Осевое усилие (распор)

$$P = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} (1-\beta) \int_0^R r \left(\int_0^R \sigma'_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{2}{\gamma} \frac{dr}{r} + \sigma'_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{2}{\gamma} \right) dr. \quad (1.115)$$

При свободном кручении ($P=0$) стержень в соответствии с (1.111), (1.112) удлиняется. Однако, как будет показано да-

лее, это удлинение примерно на два порядка меньше e_0 , поэтому можно принять, что по-прежнему

$$e_1 = -e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_0;$$

$$d\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} d\gamma. \quad (1.116)$$

Вследствие несжимаемости материала

$$d\varepsilon_z = -2d\varepsilon_\varphi = -2d\varepsilon_r = d\varepsilon. \quad (1.117)$$

В дальнейшем будем полагать, что стержень достаточно длинный, и поэтому $d\varepsilon$ не зависит от значений r .

Из (1.111), (1.112) получаем

$$s_z = \left(\frac{1+\beta}{r} \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \frac{1-\beta}{2} \cos 2\alpha \right) \frac{\sigma'_0}{\sqrt{3}};$$

$$s_\varphi = - \left(\frac{1+\beta}{2r} \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \frac{1-\beta}{2} \cos 2\alpha \right) \frac{\sigma'_0}{\sqrt{3}}; \quad (1.118)$$

$$s_r = - \frac{1+\beta}{2r} \frac{d\varepsilon}{d\theta} \frac{\sigma'_0}{\sqrt{3}}.$$

Учитывая, что $\sigma_r = \sigma + s_r$, из уравнения равновесия (1.114) определяем гидростатическое давление

$$\sigma = - \frac{1-\beta}{2\sqrt{3}} \frac{d\varepsilon}{d\theta} \int_r^R \left(\frac{1}{r} \frac{d\sigma'_0}{dr} - \frac{\sigma'_0}{r^2} \right) dr - \frac{1-\beta}{2\sqrt{3}} \int_r^R \frac{\sigma'_0 \cos 2\alpha}{r} dr.$$

Далее из условия $P = 2\pi \int_0^R \sigma_z r dr = 0$ находим

$$\varepsilon = \frac{1-\beta}{1+\beta} \int_0^\theta d\theta \frac{\int_0^R r dr \left[\int_r^R \frac{\sigma'_0}{r} \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{2}{\gamma} dr + \sigma'_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{2}{\gamma} \right]}{\int_0^R r dr \left[\int_r^R \left(\frac{\sigma'_0}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d\sigma'_0}{dr} \right) dr + \frac{2\sigma'_0}{r} \right]}. \quad (1.119)$$

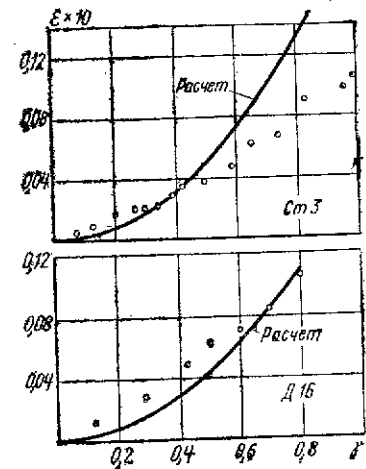


Рис. 13. Удлинение закручиваемого стержня

Для получения более простой формулы аппроксимируем функции $\sigma'_0(\gamma)$ и $\cos \arctg \frac{2}{\gamma}$ зависимостями $\sigma'_0 = A\gamma^m$ и $\cos \arctg \frac{2}{\gamma} = 0,45\gamma$.

Погрешность последней не превышает 10% при $\gamma \leq 1,5$. В результате получаем $\epsilon = \frac{0,67(1-\beta)(m+1)}{(1+\beta)(m+3)(5-m)} \gamma_n^2$,

где γ_n — сдвиг на поверхности стержня.

На рис. 13 результаты расчета удлинения по формуле (1.119) сопоставлены с экспериментальными данными. Как видим, совпадение их для дюралюминия Д16 удовлетворительное, а для стали Ст3 результаты, полученные в области больших деформаций, значительно разошлись с расчетными.

Глава II

Экспериментально-расчетные методы исследования напряженно-деформированного состояния в пластической области

§ 7. Определение пластических деформаций

Наиболее просто пластические деформации определяются методом делительных сеток. Чаще всего применяют сетки из систем окружностей и прямоугольные сетки. Предложено много различных способов нанесения сеток. Их наносят типографским, фотографическим способами, травлением, напылением и т.д. Простота технологии нанесения и высокая точность отличают способ нанесения сеток царапанием. Обычно сетку наносят с помощью инструментального микроскопа. Образец устанавливают на предметном столике микроскопа, на окуляре закрепляется корундовая или алмазная игла. Предметный столик с продольной и поперечной подачей позволяет с высокой точностью выдерживать базу сетки.

Прецизионные прямоугольные сетки можно также наносить на установках для скрайбирования, применяемых в электронной промышленности для разделения пластин полупроводниковых материалов на кристаллы [28]. Так, установка скрайбирования «Алмаз» позволяет наносить сетки с базой от 0,05 до 6 мм с дискретностью настройки базы 0,05 мм. Точность нанесения рисок $\pm 0,005$ мкм. Ширина рисок около 0,01 мм. Нанесение сеток с помощью этой установки отличается высокой производительностью: число двойных ходов алмазного резца в минуту достигает 50.

Предложены также установки для нанесения царапанием сеток из системы окружностей.

Пусть первоначальная окружность радиуса r деформирована в эллипс с полуосями l, h (рис. 14). Исходя из зависимостей (1.31), (1.33), (1.37), находим главные деформации

$$\epsilon_1 = \frac{l^2 - r^2}{2l^2}; \quad \epsilon_2 = \frac{h^2 - r^2}{2h^2}; \quad (2.1)$$

$$l_1 = \frac{l^2 - r^2}{2r^2}; \quad l_2 = \frac{h^2 - r^2}{2r^2}; \quad (2.2)$$

$$e_1 = \ln \frac{l}{r}; \quad e_2 = \ln \frac{h}{r}. \quad (2.3)$$

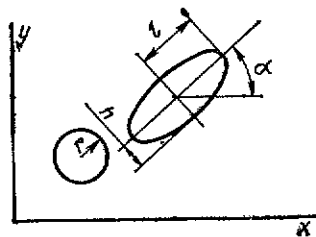


Рис. 14. Схема искажения элемента делительной сетки из системы окружностей

Главные направления, отнесенные к деформированному состоянию (главные направления тензора ε_{ij}) совпадают с главными осями эллипса. Для определения главных направлений тензора ε_{ij} требуются дополнительные условия.

Третью главную деформацию обычно определяют из условия несжимаемости (1.49) — (1.51). В некоторых случаях эта деформация известна или может быть определена каким-либо иным способом. Например, при плоской деформации $\varepsilon_3 = 0$, при осесимметричной деформации окружную деформацию можно определить по изменению удаления рассматриваемой частицы от оси симметрии и т. д. В этих случаях условие несжимаемости можно использовать для повышения точности определения главных деформаций.

Пусть точность определения деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ характеризуется дисперсиями p_1^2, p_2^2, p_3^2 . Обозначим полученные результаты через $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$. Определим еще одно значение деформации ε_1 из условия несжимаемости $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3$. Дисперсия этой величины равна $p_2^2 + p_3^2$. Уточненное значение деформации ε_1 найдем как результат двух неравноточных измерений

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + n_2 + n_3} [\varepsilon'_1 (n_2 + n_3) - \varepsilon'_2 - \varepsilon'_3] \quad (2.4)$$

и аналогично

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{1 + n_2 + n_3} [\varepsilon'_2 (1 + n_3) - (\varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) n_3];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{1 + n_2 + n_3} [\varepsilon'_3 (1 + n_2) - (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) n_2],$$

$$\text{где } n_2 = \frac{p_2^2}{p_1^2}; \quad n_3 = \frac{p_3^2}{p_1^2}.$$

Если принять $p_3^2 = 0, p_1^2 = p_2^2$, то вместо соотношений (2.3) получим: при плоской деформации

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \ln \sqrt{\frac{l}{h}}; \quad (2.5)$$

при осесимметричной деформации

$$\varepsilon_1 = \ln \sqrt{\frac{lr_0}{hr}}, \quad \varepsilon_2 = \ln \sqrt{\frac{hr_0}{lr}}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_\varphi = \ln \frac{r}{r_0}. \quad (2.6)$$

Здесь r_0, r — удаление частицы от оси симметрии до рассматриваемого момента деформирования и в этот момент.

При соответствующем выборе координатной системы линии деформированной прямоугольной сетки являются изолиниями начальных координат $a = \text{const}, b = \text{const}$. Аппроксимируем зависимость начальных координат от текущих полиномами

$$a = \sum_{i,j} A_{ij} x^i y^j; \quad b = \sum_{i,j} B_{ij} x^i y^j. \quad (2.7)$$

Измерив координаты различных точек линий $a = \text{const}$ и $b = \text{const}$ (этими точками, в частности, могут быть узлы сетки), получим системы уравнений

$$a_k = \sum_{i,j} A_{ij} x_k^i y_k^j; \quad b_k = \sum_{i,j} B_{ij} x_k^i y_k^j, \quad (2.8)$$

где k — номер точки. Очевидно, что число уравнений относительно A_{ij} (или B_{ij}) не должно быть меньше числа неизвестных коэффициентов.

Решим полученные системы уравнений методом наименьших квадратов. Для этого образуем сумму

$$\sum_k \left[\left(\sum_{i,j} A_{ij} x_k^i y_k^j - a_k \right)^2 + \left(\sum_{i,j} B_{ij} x_k^i y_k^j - b_k \right)^2 \right].$$

Минимизируя эту сумму, получим замкнутые системы уравнений относительно коэффициентов A_{ij}, B_{ij} :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} A_{ij} \alpha_{ij, nm} - c_{nm} &= 0; \\ \sum_{i,j} B_{ij} \alpha_{ij, rq} - d_{rq} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь nm, rq образуют такие же сочетания чисел, как и индексы при A, B , соответственно

$$\alpha_{ij, nm} = \sum_k x_k^{i+n} y_k^{j+m}; \quad c_{nm} = \sum_k a_k x_k^n y_k^m; \quad (2.10)$$

$$d_{rq} = \sum_k b_k x_k^r y_k^q.$$

Из уравнения (2.9) находим

$$A_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}; \quad B_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\delta}, \quad (2.11)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{01,01} & \alpha_{10,01} & \dots & \alpha_{ij,01} & \dots & \dots \\ \alpha_{01,10} & \alpha_{10,10} & \dots & \alpha_{ij,10} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_{ij} получим, заменив столбец $\alpha_{ij, nm}$ определителя Δ столбцом c_{nm} . Определители δ, δ_{ij} определяются так же, как и определители Δ, Δ_{ij} , но, во-первых, при вычислении определителя δ_{ij} столбец $\alpha_{ij, nm}$ заменяется столбцом d_{nm} , а,

во-вторых, в этом случае могут встречаться другие сочетания индексов.

Подставив зависимости (2.7) в соотношения (1.26), получаем компоненты тензора эйлеровых деформаций в точке $x=y=0$:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (1 - A_{10}^2 - B_{10}^2); \quad \varepsilon_{12} = -\frac{1}{2} (A_{10}A_{01} + B_{10}B_{01}); \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} (1 - A_{01}^2 - B_{01}^2).$$

Главные компоненты этого тензора

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{4} (2 - A_{10}^2 - B_{10}^2 - A_{01}^2 - B_{01}^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (A_{10}^2 + B_{10}^2 - A_{01}^2 - B_{01}^2)^2 + (A_{10}A_{01} + B_{10}B_{01})^2}. \quad (2.13)$$

Угол α между первым главным направлением и осью x можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(A_{10}A_{01} + B_{10}B_{01})}{A_{01}^2 + B_{01}^2 - A_{10}^2 - B_{10}^2}. \quad (2.14)$$

Аналогично тому, как определяется зависимость начальных координат от текущих, можно определить и зависимость текущих координат от начальных:

$$x = \Sigma X_{ij} a^i y^j; \quad y = \Sigma Y_{ij} a^i y^j. \quad (2.15)$$

При определении коэффициентов X_{ij} , Y_{ij} обычно используют лишь результаты измерений координат узлов сетки.

Компоненты лагранжева тензора деформаций в точке $a = b = 0$.

$$l_{11} = \frac{1}{2} (X_{10}^2 + Y_{10}^2 - 1); \quad l_{12} = (X_{10}X_{01} + Y_{10}Y_{01}); \quad (2.16)$$

$$l_{22} = \frac{1}{2} (X_{01}^2 + Y_{01}^2 - 1).$$

Главные компоненты тензора l_{ij}

$$l_{1,2} = \frac{1}{4} (X_{10}^2 + Y_{10}^2 + X_{01}^2 + Y_{01}^2 - 2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (X_{10}^2 + Y_{10}^2 - X_{01}^2 - Y_{01}^2)^2 + (X_{10}X_{01} + Y_{10}Y_{01})^2}. \quad (2.17)$$

Угол β между первым главным направлением этого тензора и осью x определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2(X_{10}X_{01} + Y_{10}Y_{01})}{X_{01}^2 + Y_{01}^2 - X_{10}^2 - Y_{10}^2}. \quad (2.18)$$

Главные логарифмические деформации в точке $x=y=a=b=0$, т. е. в начале подвижной системы координат, равны

$$\begin{aligned} e_{1,2} = & -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} [A_{10}^2 + B_{10}^2 + A_{01}^2 + B_{01}^2] \pm \\ & \pm \sqrt{(A_{10}^2 - B_{10}^2 - A_{01}^2 - B_{01}^2)^2 + 4(A_{10}A_{01} + B_{10}B_{01})^2} = \\ & = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} [X_{10}^2 + Y_{10}^2 + X_{01}^2 + Y_{01}^2] \pm \\ & \pm \sqrt{(X_{10}^2 + Y_{10}^2 - X_{01}^2 - Y_{01}^2)^2 + 4(X_{10}X_{01} + Y_{10}Y_{01})^2}. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Главные деформации ε_3 , l_3 , e_3 можно определить из условия несжимаемости.

Приняв линейную связь между начальными и текущими координатами, что равносильно предположению об однородности деформации в окрестности рассматриваемой точки, т. е.

$$a = A_{10}x + A_{01}y; \quad b = B_{10}x + B_{01}y, \quad (2.20)$$

получаем

$$A_{10} = W\Delta_{10}; \quad A_{01} = W\Delta_{01}; \quad B_{10} = W\delta_{10}; \quad B_{01} = W\delta_{01}. \quad (2.21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W = & 1 / \left[\sum_k x_k^2 \sum_k y_k^2 - \left(\sum_k x_k y_k \right)^2 \right]; \\ \Delta_{10} = & \sum_k y_k^2 \sum_k a_k x_k - \sum_k x_k y_k \sum_k a_k y_k; \\ \Delta_{01} = & \sum_k x_k^2 \sum_k a_k y_k - \sum_k x_k y_k \sum_k a_k x_k; \\ \delta_{10} = & \sum_k y_k^2 \sum_k b_k x_k - \sum_k x_k y_k \sum_k b_k y_k; \\ \delta_{01} = & \sum_k x_k^2 \sum_k b_k y_k - \sum_k x_k y_k \sum_k b_k x_k. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Приняв линейную зависимость текущих координат от начальных

$$\begin{aligned} x = & X_{10}a + X_{01}b; \\ y = & Y_{10}a + Y_{01}b, \end{aligned} \quad (2.23)$$

получаем

$$\begin{aligned} X_{10} = & W'\Delta'_{10}; \quad X_{01} = W'\Delta'_{01}; \\ Y_{10} = & W'\delta'_{10}; \quad Y_{01} = W'\delta'_{01}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь отмеченные штрихами величины определяются по соотношениям (2.22), в которых x_k , y_k , a_k , b_k заменяются соответственно a_k , b_k , x_k , y_k .

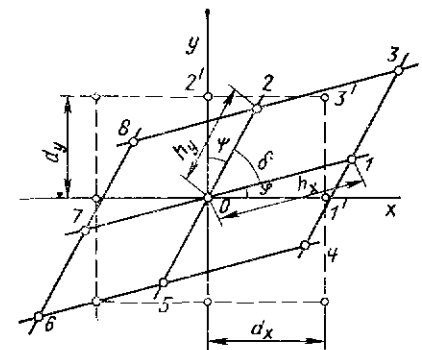


Рис. 15. Схема искажения элемента прямоугольной делительной сетки

На рис. 15 штриховыми линиями изображена недеформированная сетка, а сплошными — деформированная. Связав начало подвижной системы координат с точкой O , определим деформации в этой точке по результатам измерений координат точек 1, 2. Подставив в приведенные выше соотношения $a_1 = d_x$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = d_y$, найдем главные логарифмические деформации:

$$e_{1,2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \left[\frac{x_1^2 + y_1^2}{d_x^2} + \frac{x_2^2 + y_2^2}{d_y^2} \pm \sqrt{\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{d_x^2} - \frac{x_2^2 + y_2^2}{d_y^2} \right)^2 + 4 \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}{d_x^2 d_y^2}} \right]. \quad (2.25)$$

Угол α между первым главным направлением и осью x удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(d_x^2 x_2 y_2 + d_y^2 x_1 y_1)}{d_x^2 (y_2^2 - x_2^2) + d_y^2 (y_1^2 - x_1^2)}, \quad (2.26)$$

вытекающему из уравнения (2.14).

Если в эти соотношения подставить $x_1 = h_x \cos \varphi$; $y_1 = h_x \sin \varphi$; $x_2 = h_y \sin \varphi$; $y_2 = h_y \cos \varphi$ (обозначения по рис. 15), то получим известные формулы

$$e_{1,2} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\eta_x^2 - \eta_y^2)^2}{4} \pm \eta_x^2 \eta_y^2 \cos^2 \delta} \right]; \quad (2.27)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\eta_x^2 \sin 2\varphi + \eta_y^2 \sin 2\psi}{\eta_y^2 \cos 2\varphi - \eta_x^2 \cos 2\psi}, \quad (2.28)$$

где $\eta_x = h_x/d_x$; $\eta_y = h_y/d_y$.

В некоторых случаях можно, исходя из условия несжимаемости, уточнить полученные деформации. Так, при плоской деформации можно записать условия несжимаемости (1.47), (1.48) в виде

$$\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} = 1$$

или

$$\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a} = 1.$$

Отсюда следует, что коэффициенты полиномов (2.7) (2.15) должны удовлетворять условиям

$$A_{10}B_{01} - A_{01}B_{10} = 1; \quad (2.29)$$

$$X_{10}Y_{01} - X_{01}Y_{10} = 1. \quad (2.30)$$

При осесимметричном деформировании аналогичные уравнения записываются в виде

$$A_{10}B_{01} - A_{01}B_{10} = r/r_0; \quad (2.31)$$

$$X_{10}Y_{01} - X_{01}Y_{10} = r_0/r. \quad (2.32)$$

Уравнения (2.29) — (2.32) позволяют уточнить коэффициенты полиномов (2.7), (2.15), а следовательно, и деформации. Рассмотрим методику уточнения этих коэффициентов на примере плоской деформации.

Пусть одним из рассмотренных выше способов определены приближенные значения коэффициентов $\bar{A}_{ij}$, $\bar{B}_{ij}$. Определим поправки ΔA_{ij} , ΔB_{ij} , при которых коэффициенты $A_{ij} = \bar{A}_{ij} + \Delta A_{ij}$, $B_{ij} = \bar{B}_{ij} + \Delta B_{ij}$ удовлетворяют условию несжимаемости, а сумма квадратов поправок минимальна. Полагая поправки малыми по сравнению с самими коэффициентами, получаем из уравнения (2.29)

$$\bar{B}_{01}\Delta A_{10} + \bar{A}_{10}\Delta B_{01} - \bar{B}_{10}\Delta A_{01} - \bar{A}_{01}\Delta B_{10} = L,$$

где $L = 1 - \bar{A}_{10}\bar{B}_{01} + \bar{A}_{01}\bar{B}_{10}$.

Выразим из этого уравнения одну из поправок, например ΔA_{10} :

$$\Delta A_{10} = \frac{1}{\bar{B}} (L - \bar{A}_{10}\Delta B_{01} + \bar{B}_{10}\Delta A_{01} + \bar{A}_{01}\Delta B_{10})$$

и подставим ее в сумму квадратов поправок $\sum_{ij} (\Delta A_{ij}^2 + \Delta B_{ij}^2)$:

$$(\bar{B}_{10}\Delta A_{01} + \bar{A}_{01}\Delta B_{10} - \bar{A}_{10}\Delta B_{01} + L)^2 + \bar{B}_{01}^2 \Delta A_{01}^2 + \bar{B}_{01}^2 \Delta B_{10}^2 + \bar{B}_{01}^2 \Delta B_{01}^2.$$

Здесь удержаны лишь поправки коэффициентов при линейных членах полиномов.

Взяв частные производные по ΔA_{01} , ΔB_{10} , ΔB_{01} и приравняв их нулю, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (\bar{B}_{01}^2 + \bar{B}_{10}^2) \Delta A_{01} + \bar{A}_{01} \bar{B}_{10} \Delta B_{10} - \bar{A}_{10} \bar{B}_{10} \Delta B_{01} &= -\bar{B}_{01}^2 \bar{B}_{10} L; \\ \bar{A}_{01} \bar{B}_{10} \Delta A_{01} + (\bar{A}_{01}^2 + \bar{B}_{01}^2) \Delta B_{10} - \bar{A}_{10} \bar{A}_{01} \Delta B_{01} &= -\bar{B}_{01}^2 \bar{A}_{01} L; \\ \bar{A}_{10} \bar{B}_{10} \Delta A_{01} + \bar{A}_{01} \bar{A}_{10} \Delta B_{10} - (\bar{A}_{10}^2 + \bar{B}_{01}^2) \Delta B_{01} &= -\bar{B}_{01}^2 \bar{A}_{10} L. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Решением этой системы найдем ΔA_{01} , ΔB_{10} , ΔB_{01} и по формуле (2.33) вычислим поправку ΔA_{10} . Прибавив полученные поправки к коэффициентам $\bar{A}_{ij}$, $\bar{B}_{ij}$, получим уточненные значения этих коэффициентов.

Таким образом, для определения деформаций изложенным способом необходимо в какой-либо системе координатных осей, параллельных линиям недеформированной сетки, измерить координаты x_k , y_k различных точек линий деформированной

сетки (и, в частности, ее узлов). Для определения деформаций в точке с координатами x_0, y_0 необходимо определить координаты точек окрестности этой точки во вспомогательной системе осей:

$$x'_k = x_k - x_0; \quad y'_k = y_k - y_0; \quad a'_k = a_k - a_0; \quad b'_k = b_k - b_0.$$

Дальнейший расчет производится по приведенным ранее зависимостям.

Наряду с такого рода «локальным» определением деформаций возможно и определение деформаций как непрерывных функций координат. Для этого полиномы типа (2.7), (2.15) строят на достаточно большой области, а затем по формулам (1.26), (1.28), (1.38) рассчитывают деформации.

Деформированное состояние достаточно крупных образцов и моделей можно определять выявлением волокнистой макроструктуры. Преимуществом этого метода по сравнению с методом делительных сеток является возможность определения деформаций во внутренних областях тела без нарушения его сплошности. Однако точность этого метода определения деформаций обычно значительно ниже точности метода делительных сеток. Кроме того, выявлением волокнистой макроструктуры можно определять деформации лишь материалов, обладающих так называемой строчечной структурой, обусловленной предшествующей пластической деформацией, например при волочении.

Для выявления волокнистой макроструктуры готовят макрошлиф, плоскость которого совмещается с направлением волокон. Эта плоскость после соответствующей механической обработки травится в нагретом состоянии водным раствором смеси соляной и серной кислот.

Выявлением волокнистой макроструктуры определяют деформации в сечениях, остающихся плоскими в процессе деформирования.

Для получения двух семейств линий деформированной сетки необходимо испытывать две модели тела, изготовленные таким образом, чтобы при одинаковой их установке до испытания волокна одной из них были перпендикулярными волокнам второй модели. На поверхности моделей на части контура рассматриваемого сечения, где волокна пересекают поверхность тела, через равные промежутки наносят метки. Если, например, исследуется процесс осесимметричной осадки цилиндра, то изготавливают два цилиндрических образца. У одного из них волокна ориентируют вдоль оси, а у второго — в перпендикулярном к оси направлении. У первого образца метки наносят в различных точках радиуса торца, а у второго — в различных точках образующей, лежащей в плоскости, в которой волокна совпадают с радиусом цилиндра.

Совмещая в последующем изображения выделенных метками волокон двух моделей, получаем искаженную прямоугольную сетку, по которой можно определить деформации изложенными ранее приемами.

Если часть деформируемого тела остается в упругом состоянии, то волокна, образующие сетку, выбирают таким образом, чтобы в упругой области расстояние между ними было равно шагу делительной сетки.

Если при плоской или осесимметричной деформации известно начальное расстояние между волокнами одного семейства, то можно из условия несжимаемости определить расстояние между волокнами второго семейства. Так, при плоской деформации недостающий размер можно определить из условия $h_x h_y \sin \delta = d_x d_y$ (обозначения по рис. 15). При осесимметричной деформации $rh_x h_y \sin \delta = r_0 d_x d_y$. В последнем случае должно быть известным расстояние между волокнами, параллельными оси симметрии z .

При плоском и осесимметричном деформировании возможно определение деформированного состояния по одному семейству волокон.

Совместив ось y с направлением волокон до деформации (при осесимметричной деформации волокна в недеформированном состоянии ориентируются вдоль оси симметрии), получаем в результате измерения координат x, y различных точек волокон в деформированном состоянии функции $a(x, y)$, поскольку каждое волокно является изолинией $a = \text{const}$. Условие несжимаемости (1.48) запишем в виде

$$\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} = f, \quad (2.34)$$

где $f=1$ при плоской деформации и $f=r/r_0$ при осесимметричной деформации.

Перепишем это уравнение в виде

$$-p \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = F, \quad (2.35)$$

где $p = \frac{\partial a}{\partial y} / \frac{\partial a}{\partial x}$; $F = \frac{f}{\frac{\partial a}{\partial x}}$ — известные функции.

Уравнение (2.35) сравнительно просто решается методом характеристик. Стандартным методом [45] находим направления характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{p} = -\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}}. \quad (2.36)$$

На волокнах справедливо равенство

$$da = \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy = 0.$$

Следовательно, тангенс угла между осью x и касательной к волокну

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}}. \quad (2.37)$$

Сопоставляя (2.37) с (2.36), видим, что характеристики уравнения (2.35) совпадают с волокнами.

Вдоль характеристик справедливы соотношения

$$p db + F dx = 0 \quad (2.38)$$

или

$$-db + F dy = 0. \quad (2.39)$$

Поскольку элемент длины, отсчитываемой вдоль волокна, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, перепишем уравнения (2.38), (2.39) в виде

$$db = \pm \frac{F}{\sqrt{p^2 + 1}} ds = \pm \frac{f ds}{\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2}}. \quad (2.40)$$

Но $\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2} = \frac{\partial a}{\partial n}$ — градиент скалярной функции $a(x, y)$. Поэтому

$$b_B = b_A \pm \int_A^B \frac{f}{\frac{\partial a}{\partial n}} ds, \quad (2.41)$$

где A — точка волокна, в которой координата b известна; B — точка, в которой определяется эта координата. Интегрирование выполняется вдоль волокна. Значения подынтегральной функции в различных точках волокна можно приближенно определить следующим образом. Пусть требуется определить эту функцию в точке C волокна, вдоль которого $a = a_2$. Обозначим через $\Delta a = a_3 - a_1$ ($a_3 > a_1$) разность значений a на двух соседних волокнах, а расстояние между этими волокнами, измеренное по нормали к касательной к рассматриваемому волокну в точке C , через l . Тогда $\frac{\partial a}{\partial n} \approx \frac{\Delta a}{l}$.

В силу этого при плоской деформации $f / \frac{\partial a}{\partial n} \approx \frac{l}{\Delta a}$.

При осесимметричной деформации $f / \frac{\partial a}{\partial n} \approx \frac{rl}{r_0 \Delta a}$,

где r_0, r — соответственно расстояние от точки C волокна до оси симметрии в недеформированном и в деформированном состоянии.

Выбор знака в (2.41) затруднений не вызывает.

Если соединить точки различных волокон, в которых одинакова координата $b = m h_y$, где m — целое число, получаем второе семейство линий деформированной прямоугольной сетки.

В последние годы в исследованиях пластических деформаций находит широкое применение метод муара. Не останавливаясь на технике эксперимента, подробно изложенной в книгах [17, 33], рассмотрим некоторые вопросы, связанные с расшифровкой экспериментальных данных этого метода.

В классическом варианте этого метода на плоскую поверхность исследуемого тела до его деформации наносят два линейных раstra с взаимно перпендикулярными, ориентированными вдоль координатных осей x, y линиями (рабочие растры). В последующем эти растры механическим или оптическим методом совмещаются с аналогичным недеформированным, эталонным растром. Возникающие при этом полосы являются изолиниями перемещения в направлении, перпендикулярном линиям рабочего раstra. Так, при совмещении эталонного раstra, линии которого параллельны оси x , с рабочим растром, линии которого до деформирования также параллельны оси x , возникает картина полос, на которых перемещение вдоль оси y $v = \text{const}$. Величину этого перемещения определяют по формуле $v = n p$, где n — порядок полосы; p — шаг раstra. Аналогично определяется перемещение u вдоль оси x .

Таким образом, метод позволяет получить в табличной форме зависимость перемещений u, v от текущих координат. Аппроксимируем эту зависимость полиномами

$$u = \sum_{i,j} U_{ij} x^i y^j; \quad v = \sum_{i,j} V_{ij} x^i y^j.$$

Коэффициенты U_{ij}, V_{ij} можно определить тем же способом, каким ранее определялись коэффициенты A_{ij}, B_{ij} . Полученные при этом коэффициенты U_{ij}, V_{ij} можно уточнить, используя условие несжимаемости.

Подставив в уравнение (2.34)

$$a = x - u; \quad b = y - v, \quad (2.42)$$

получаем условие несжимаемости в форме

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \psi, \quad (2.43)$$

где $\psi = 0$ при плоской деформации и $\psi = 1 - \frac{r}{r_0}$ при осесимметричной деформации.

Следовательно, в точке $x=y=0$

$$U_{10} + V_{01} - U_{10}V_{01} + U_{01}V_{10} = \psi.$$

На основе этого уравнения можно уточнить коэффициенты U_{ij} , V_{ij} , так же как выше уточнялись коэффициенты A_{ij} , B_{ij} .

В дальнейшем можно определить компоненты эйлерова тензора деформаций (1.29):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2} (2U_{10} - U_{10}^2 - V_{10}^2); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2} (2V_{01} - U_{01}^2 - V_{01}^2); \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} (U_{01} + V_{10} - U_{10}U_{01} - V_{10}V_{01}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Чтобы определить лагранжевы деформации, необходимо в таблицах функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ с помощью соотношений (2.42) заменить значения координат x, y значениями начальных координат a, b . Определив затем коэффициенты полиномов

$$u = \sum_{ij} \bar{U}_{ij} a^i b^j; \quad v = \sum_{ij} \bar{V}_{ij} a^i b^j,$$

можно вычислить лагранжевы деформации в точке $a=b=0$:

$$\begin{aligned} l_x &= \frac{1}{2} (2\bar{U}_{10} + \bar{U}_{10}^2 + \bar{V}_{10}^2); \\ l_y &= \frac{1}{2} (2\bar{V}_{01} + \bar{U}_{01}^2 + \bar{V}_{01}^2); \\ l_{xy} &= \frac{1}{2} (\bar{U}_{01} + \bar{V}_{10} + \bar{U}_{10}\bar{U}_{01} + \bar{V}_{10}\bar{V}_{01}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

В этом случае условие несжимаемости (1.47) записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial v}{\partial a} = \varphi,$$

где $\varphi=0$ при плоской деформации и $\varphi = \frac{r_0}{r} - 1$ при осесимметричной деформации. И, следовательно, в точке $a=b=0$

$$\bar{U}_{10} + \bar{V}_{01} + \bar{U}_{01}\bar{V}_{01} - \bar{U}_{01}\bar{V}_{10} = \varphi.$$

С использованием этого уравнения можно уточнить коэффициенты $\bar{U}_{ij}$, $\bar{V}_{ij}$. Если деформированный растр, линии которого до деформации параллельны оси x , совмещается с тем же деформированным, но смещенным вдоль оси x на величину Δ растром, то возникает семейство полос, вдоль которых

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{np}{\Delta}.$$

Если же один из этих растров сместить относительно другого вдоль оси y , то можно определить производную $\frac{\partial b}{\partial y}$. Аналогично

определяются и другие производные от начальных координат по текущим координатам. Это позволяет, уточнив эти производные с помощью условия несжимаемости (2.34), определить эйлеровы деформации по формулам (1.26).

И, наконец, если картину полос $u = \text{const}$, полученную при совмещении деформированного и недеформированного растров совместить с той же картиной полос, но смещенной вдоль оси x на величину Δ , то возникают полосы, вдоль которых $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{np}{\Delta}$.

Аналогично можно определить и другие производные от компонент перемещения по текущим координатам. Уравнение (2.43) позволяет при плоской и осесимметричной деформации уточнить эти производные.

В этом случае можно непосредственно по экспериментальным данным рассчитать эйлеровы деформации по формулам (1.29).

§ 8. Определение приращений и скоростей деформации

Если методом делительных сеток исследуется нестационарный процесс пластического деформирования, то для определения приращений деформаций за некоторый достаточно малый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ достаточно знать произошедшее за это время искажение сетки. Заметим, что при исследовании процессов холодного деформирования в роли «времени» может использоваться любой параметр, монотонно изменяющийся при деформировании тела. Например, при исследовании осадки таким параметром может быть высота заготовки, при кручении — относительный угол закручивания и т. д.

Пусть измерены перемещения Δx , Δy некоторой совокупности частиц, произошедшие за время Δt в окрестности начала координат. Если делительная сетка нанесена при $t=t_1$, то можно измерить перемещение $\Delta x(\Delta y)$ в любой точке линий, параллельных оси $y(x)$, до деформирования сетки. Если же к этому моменту времени сетка уже деформирована, то приходится ограничиться измерением смещений узлов.

Аппроксимируем зависимость перемещений от текущих координат полиномами

$$\Delta x = \sum_{ij} q_{ij} x^i y^j; \quad \Delta y = \sum_{ij} p_{ij} x^i y^j. \quad (2.46)$$

Тогда в соответствии с (1.44) произошедшие за время Δt приращения деформации в начале координат будут равны

$$\Delta \varepsilon_x = q_{10}; \quad \Delta \varepsilon_y = p_{01}; \quad \Delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (q_{01} + p_{10}). \quad (2.47)$$

Промежуток времени Δt должен быть настолько малым, чтобы можно было считать произошедшие за это время приращения деформации малыми. Для того чтобы убедиться в том, что это условие выполнено, определим приращения деформации по соотношениям (1.29):

$$\Delta \varepsilon'_x = q_{10} - \frac{1}{2} q_{10}^2 - \frac{1}{2} p_{01}^2;$$

$$\Delta \varepsilon'_y = p_{01} - \frac{1}{2} q_{01}^2 - \frac{1}{2} p_{01}^2;$$

$$\Delta \varepsilon'_{xy} = \frac{1}{2} (q_{01} + p_{10} - q_{10}p_{01} - q_{01}p_{10}).$$

Далее потребуем, чтобы удовлетворялись условия

$$\left| \frac{\Delta \varepsilon'_x - \Delta \varepsilon}{\Delta \varepsilon_x} \right| < \delta; \quad \left| \frac{\Delta \varepsilon'_{xy} - \Delta \varepsilon_{xy}}{\Delta \varepsilon_{xy}} \right| < \delta; \quad \left| \frac{\Delta \varepsilon'_y - \Delta \varepsilon_y}{\Delta \varepsilon_y} \right| < \delta$$

или

$$\left| q_{10} + \frac{p_{10}^2}{q_{10}} \right| < 2\delta; \quad \left| \frac{q_{10}p_{01} + q_{01}p_{10}}{q_{01} + p_{10}} \right| < 2\delta; \quad \left| q_{01} + \frac{p_{01}^2}{q_{01}} \right| < 2\delta. \quad (2.48)$$

Здесь $\delta \ll 1$. Если условия (2.48) не удовлетворяются, необходимо уменьшить промежуток времени Δt .

Коэффициенты q_{ij} , p_{ij} можно определять способом, примененным в § 7 при определении коэффициентов A_{ij} , B_{ij} . Если, например, принять, что в окрестности начала координат перемещения линейно зависят от координат, т.е.

$$\Delta x = q_{10}x + q_{01}y; \quad \Delta y = p_{10}x + p_{01}y, \quad (2.49)$$

то эти коэффициенты можно определить по результатам измерений перемещений и координат некоторой совокупности частиц в этой окрестности по формулам (2.21), (2.22), в которых A_{10} , A_{01} , B_{10} , B_{01} , a_h , b_h заменяются соответственно q_{10} , q_{01} , p_{10} , p_{01} , Δx_h , Δy_h .

Если материал несжимаем, то целесообразно в тех случаях, когда это возможно, использовать условие несжимаемости для уточнения приращений деформаций. При плоской деформации $\Delta \varepsilon_x + \Delta \varepsilon_y = 0$. Уточним $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$ способом, изложенным в § 7. Обозначим результаты определения приращений деформаций одним из изложенных ранее способов через $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$. Определив поправки этих величин таким образом, чтобы скорректированные значения $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$ точно удовлетворяли условию несжимае-

мости, а сумма квадратов поправок была минимальной, и прибавив эти поправки к $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$, получим уточненные приращения деформаций:

$$\Delta \varepsilon_x = -\Delta \varepsilon_y = \frac{1}{2} (\bar{\Delta \varepsilon}_x - \bar{\Delta \varepsilon}_y). \quad (2.50)$$

При осесимметричной деформации условие несжимаемости имеет вид $\Delta \varepsilon_x + \Delta \varepsilon_y + \Delta \varepsilon_r = 0$, где $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$ — приращения деформаций, определяемые по искажению сетки, нанесенной в меридиональном сечении; $\Delta \varepsilon_r$ — приращение окружной деформации. Его можно определить по формуле $\Delta \varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r}$, где r — расстояние от рассматриваемой точки до оси симметрии; Δr — изменение этого расстояния за промежуток времени Δt . Будем считать, что точность определения $\Delta \varepsilon_r$ значительно выше точности определения $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$. Тогда можно определить уточненные значения приращений деформаций по соотношениям

$$\Delta \varepsilon_x = \frac{1}{2} (\bar{\Delta \varepsilon}_x - \bar{\Delta \varepsilon}_y - \Delta \varepsilon_r); \quad \Delta \varepsilon_y = \frac{1}{2} (\bar{\Delta \varepsilon}_y - \bar{\Delta \varepsilon}_x - \Delta \varepsilon_r). \quad (2.51)$$

Если приращения деформации определяют методом муара, то наносят на поверхность деформированного тела линейные растры, ориентированные вдоль координатных осей. При некотором достаточно малом приращении деформации тела эти растры искажаются. Располагая деформированными таким образом и эталонными растрами, можно способами, изложенными в § 7, определить произошедшие при этом приращения деформации.

Обычно приращения или скорости деформации определяют для последующего определения напряжений. Поскольку для определения напряжений по кинематике пластического деформирования необходимо знание накопленной деформации $\bar{\varepsilon}_0$ различных частиц, а для ее определения необходимо знать изменение интенсивности приращений деформации за весь период деформирования, целесообразно экспериментально определять функции $x = x(a, b, t)$; $y = y(a, b, t)$. Для этого обычно наносят прямоугольную сетку на ряд моделей, деформируемых затем до различной степени деформации, т.е. до различных значений t . Измерив координаты узлов полученных сеток, по методике, изложенной в § 7, определим коэффициенты X_{ij} , Y_{ij} для различных узлов этих сеток. Аппроксимируем зависимость этих коэффициентов от времени полиномами

$$X_{ij} = \sum_n X_{ijn} t^n; \quad Y_{ij} = \sum_n Y_{ijn} t^n.$$

Коэффициенты X_{ijn} , Y_{ijn} можно определить методом наименьших квадратов как решения систем уравнений

$$\sum_k [(X_{ij})_k - \sum_n X_{ijn} t_k^n] t_k^m = 0;$$

$$\sum_k [(Y_{ij})_k - \sum_n Y_{ijn} t_k^n] t_k^m = 0;$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Всегда можно выбрать такую базу сетки и окрестность точки, в которой определяются приращения деформации, при которых зависимость текущих координат от начальных достаточно близка к линейной:

$$x = a \sum_n X_{10n} t^n + b \sum_n X_{01n} t^n;$$

$$y = a \sum_n Y_{10n} t^n + b \sum_n Y_{01n} t^n.$$

С учетом соотношений (2.42) определим скорости перемещения частиц:

$$\dot{u} = a \sum_n n X_{10n} t^{n-1} + b \sum_n n X_{01n} t^{n-1};$$

$$\dot{v} = a \sum_n n Y_{10n} t^{n-1} + b \sum_n n Y_{01n} t^{n-1}. \quad (2.52)$$

Подставив в зависимости (2.52) соотношения (2.7), в которых

$$A_{10} = LY_{01}; \quad A_{01} = -LX_{01}; \quad B_{10} = -LY_{10}; \quad B_{01} = LX_{10};$$

$L = 1/(X_{10}Y_{01} - X_{01}Y_{10})$, получим зависимость скоростей $\dot{u}$, $\dot{v}$ от текущих координат. Дифференцируя их, находим скорости деформации:

$$\dot{\epsilon}_x = L \left(Y_{01} \sum_n n X_{10n} t^{n-1} - Y_{10} \sum_n n X_{01n} t^{n-1} \right);$$

$$\dot{\epsilon}_y = L \left(X_{10} \sum_n n Y_{01n} t^{n-1} - X_{01} \sum_n n Y_{10n} t^{n-1} \right); \quad (2.53)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} L \left(X_{10} \sum_n n X_{01n} t^{n-1} - X_{01} \sum_n n X_{10n} t^{n-1} \right) + \\ + Y_{01} \sum_n n Y_{10n} t^{n-1} - Y_{10} \sum_n n Y_{01n} t^{n-1}.$$

Если исследуется процесс осесимметричного деформирования, то можно определить и скорость окружной деформации. Для этого устанавливаются удаления r различных частиц от оси симметрии в зависимости от начального значения этого удаления r_0 и времени:

$$r = r(r_0, t). \quad (2.54)$$

Тогда скорость окружной деформации $\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} r(r_0, t)$.

Аппроксимируя зависимость (2.54) полиномом

$$r = \sum_i r_0^i \sum_n R_{ijn} t^n,$$

получаем

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\sum_i r_0^i \sum_n n R_{ijn} t^{n-1}}{\sum_i r_0^i \sum_n R_{ijn} t^n}.$$

Как и в прочих случаях, можно использовать условие несжимаемости для уточнения коэффициентов X_{ijn} , Y_{ijn} . Так, при плоской деформации из условия несжимаемости

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 0 \text{ следует}$$

$$\sum_n Y_{01n} t^n \sum_n n X_{10n} t^{n-1} - \sum_n Y_{10n} t^n \sum_n n X_{01n} t^{n-1} + \\ + \sum_n X_{10n} t^n \sum_n n Y_{01n} t^{n-1} - \sum_n X_{01n} t^n \sum_n n Y_{10n} t^{n-1} = 0.$$

Поскольку это уравнение должно удовлетворяться при любых значениях t из периода деформирования, коэффициенты при одинаковых степенях t необходимо положить равными нулю. Например, если зависимость коэффициентов X_{ijn} , Y_{ijn} от времени описывается полиномами второго порядка и если в начальный момент деформирования $t=0$ (и, следовательно, $X_{100} = Y_{010} = 1$, $X_{010} = Y_{100} = 0$), то получаем следующую систему уравнений:

$$X_{101} + Y_{011} = 0;$$

$$Y_{011}X_{101} + 2X_{102} - Y_{101}X_{011} + X_{101}Y_{011} + 2Y_{012} - X_{011}Y_{101} = 0;$$

$$2Y_{011}X_{102} + Y_{012}X_{101} - Y_{102}X_{011} - 2Y_{101}X_{012} + 2X_{101}Y_{012} + \\ + X_{102}Y_{011} - X_{012}Y_{101} - 2X_{011}Y_{102} = 0;$$

$$Y_{012}X_{102} - Y_{102}X_{012} + X_{102}Y_{012} - X_{012}Y_{102} = 0.$$

Используя эти уравнения, можно уточнить коэффициенты X_{ijn} , Y_{ijn} способом, примененным в § 7 для уточнения коэффициентов A_{ij} , B_{ij} .

При исследовании осесимметричной деформации аналогичные уравнения оказываются более сложными, поскольку в них наряду с коэффициентами X_{ijn} , Y_{ijn} появляются коэффициенты R_{ij} . Однако в связи с тем, что точность определения скорости окружной деформации обычно значительно выше точности определения прочих компонент тензора скоростей деформации, можно считать эти коэффициенты определенными точно и ограничиться уточнением коэффициентов X_{ijn} , Y_{ijn} .

При исследовании стационарных процессов определение приращений деформаций по искажению прямоугольной сетки зна-

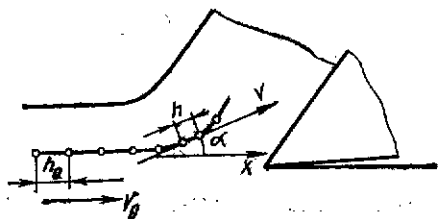


Рис. 16. К определению скоростей деформации в установившихся процессах деформирования

чительно упрощается. Сетка выставляется так, чтобы одно семейство линий было ориентировано вдоль скорости v_0 движения жесткой области относительно инструмента. В дальнейшем эти линии совпадают с линиями тока.

Поскольку модуль скорости движения частиц относительно инструмента (рис. 16) $v = v_0 \frac{h}{h_0}$, где h — расстояние между соседними узлами на линиях тока; h_0 — база сетки, составляющие этой скорости

$$v_x = v \cos \alpha = \frac{v_0}{h_0} h \cos \alpha; \quad v_y = v \sin \alpha = \frac{v_0}{h_0} h \sin \alpha.$$

Здесь α — угол наклона касательной к линии тока, отсчитываемый в положительном направлении от оси x .

Компоненты тензора скорости деформации

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{v_0}{h_0} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha - h \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right); \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{v_0}{h_0} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \sin \alpha + h \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right); \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{v_0}{h_0} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \sin \alpha + \left(\frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Скорость окружной деформации при осесимметричном деформировании

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{v_r}{r} = \frac{v_0}{h_0} \frac{h}{r} \cos \alpha.$$

Приращения деформаций за промежутки времени, в течение которого частица перемещается вдоль линии тока на расстояние h между соседними узлами, можно определить умножением скоростей деформации на $\Delta t = h_0/v_0$. В результате получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_x &= \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha - h \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x}; \\ \Delta \epsilon_y &= \frac{\partial h}{\partial y} \sin \alpha + h \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \\ \Delta \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \sin \alpha + \left(\frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \cos \alpha \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Приращение окружной деформации при осесимметричном деформировании $\Delta \epsilon_\varphi = \frac{h}{r} \cos \alpha$.

При исследовании стационарных процессов выявлением волокнистой макроструктуры можно воспользоваться следующей методикой [38]. Если в жесткой области заготовки волокна ориентированы вдоль скорости материала относительно инструмента, то по деформированным волокнам определяют направление вектора скорости частицы как тангенс угла наклона касательной к волокну. Модуль скорости v во многих случаях можно определить из условия несжимаемости.

При плоской деформации условие несжимаемости $\epsilon_x + \epsilon_y = 0$ записывается с учетом (2.55) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \alpha = v \frac{\partial \alpha}{\partial x} \sin \alpha - v \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cos \alpha. \quad (2.57)$$

Рассмотрим приемы решения этого уравнения методом характеристик. Дифференциальные уравнения характеристик $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ показывают, что характеристики совпадают с волокнами. Вдоль характеристик (т. е. вдоль волокон) справедливо соотношение

$$dv \cos \alpha = v \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cos \alpha \right) dx \quad (2.58)$$

или

$$\frac{dv}{v} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cos \alpha \right) ds,$$

где $ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$ — дифференциал длины волокна. Интегрируя вдоль волокна, получаем

$$\ln v_A = \ln v_0 + \int_0^A F(s) ds.$$

Здесь $F(s)$ — экспериментально определяемая функция координат:

$$F(s) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cos \alpha.$$

Интегрирование выполняется от частицы 0 волокна, скорость которой известна, до рассматриваемой частицы A .

Таким образом, в любой точке A пластической области

$$v_A = v_0 \exp \int_0^A F(s) ds. \quad (2.59)$$

В некоторых случаях (например, при $F \approx 0$) результаты, получаемые при использовании соотношения (2.59), оказы-

ваются недостаточно точными. В связи с этим преобразуем соотношение (2.58):

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} ds - \operatorname{ctg} \alpha d\alpha,$$

где $d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy$. Интегрируя, находим

$$v_A = v_0 \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_A} \exp \int_0^A \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} ds. \quad (2.60)$$

Аналогичным образом можно также получить

$$v_A = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{\cos \alpha_A \exp \int_0^A \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} ds}. \quad (2.61)$$

Недостаток полученных соотношений — появление особенностей, связанных с делением на нуль. Например, при углах α , близких к 0, неприменима формула (2.60), а при α , близких к $\pi/2$, неприменима формула (2.61).

Условие несжимаемости при осесимметричной деформации $\varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi = 0$ запишем в соответствии с (2.55) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial r} \cos \alpha - \frac{\partial v}{\partial z} \sin \alpha = v \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sin \alpha - v \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cos \alpha - \frac{v}{r} \cos \alpha.$$

Характеристики этого уравнения также совпадают с волокнами. Вдоль них справедливо соотношение

$$dv \cos \alpha = \left(v \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sin \alpha - v \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cos \alpha - \frac{v}{r} \cos \alpha \right) dr.$$

Интегрируя, получаем

$$v_A = \frac{v_0 r_0}{r_A} \exp \int_0^A F(s) ds; \quad (2.62)$$

$$v_A = \frac{v_0 r_0 \sin \alpha_0}{r_A \sin \alpha_A} \exp \int_0^A \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial r} ds; \quad (2.63)$$

$$v_A = \frac{v_0 r_0 \cos \alpha_0}{r_A \cos \alpha_A \exp \int_0^A \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} ds}. \quad (2.64)$$

Здесь $F(s) = \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sin \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cos \alpha$.

§ 9. Определение напряжений по кинематике деформирования

Если при исследовании напряженного состояния при развитых пластических деформациях кинематика деформирования установлена, то по уравнениям пластического состояния рассчитывают компоненты девиатора напряжений, а гидростатическое давление находят интегрированием дифференциальных уравнений равновесия.

Наиболее просто определяются компоненты девиатора напряжений по соотношениям деформационной теории пластичности. Ограничившись, как и в прочих случаях, рассмотрением процессов деформирования, при которых направление z , нормальное к плоскости ячейки делительной сетки, является главным направлением тензоров деформаций, получаем из уравнений (1.108)

$$s_x = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{e_0} e_x; \quad s_y = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{e_0} e_y; \quad (2.65)$$

$$s_z = -s_x - s_y; \quad \tau_{xy} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{e_0} e_{xy},$$

где s_x, s_y, s_z, τ_{xy} — компоненты девиатора напряжений. Компоненты тензора логарифмических деформаций определяются по соотношениям (1.38):

$$e_x = e_1 \cos^2 \alpha + e_2 \sin^2 \alpha; \quad e_y = e_1 \sin^2 \alpha + e_2 \cos^2 \alpha; \quad (2.66)$$

$$e_{xy} = (e_1 - e_2) \sin 2\alpha,$$

где α — угол между первым главным направлением тензора ε_{ij} и осью x .

Интенсивность логарифмической деформации

$$e_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_1 e_2}. \quad (2.67)$$

Интенсивность напряжений σ_0 находят по интенсивности деформации из кривой течения, построенной испытанием материала на растяжение или сжатие.

Такое определение девиатора напряжений корректно лишь при простом деформировании. Обычно это требование смягчают, полагая это определение достаточно точным при деформировании, близком к простому.

В более общем случае предпочтительней соотношения (1.68) теории пластического течения изотропно упрочняющегося материала, согласно которым

$$s_x = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\Delta e_0} \Delta e_x; \quad s_y = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\Delta e_0} \Delta e_y; \quad (2.68)$$

$$s_z = -s_x - s_y; \quad \tau_{xy} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\Delta e_0} \Delta e_{xy}$$

$$s_x = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\dot{\epsilon}_0} \dot{\epsilon}_x; \quad s_y = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\dot{\epsilon}_0} \dot{\epsilon}_y; \quad (2.69)$$

$$s_z = -s_x - s_y; \quad \tau_{xy} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\dot{\epsilon}_0} \dot{\epsilon}_{xy}.$$

Здесь

$$\overline{\Delta \epsilon_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\Delta \epsilon_x^2 + \Delta \epsilon_y^2 + \Delta \epsilon_x \Delta \epsilon_y + \Delta \epsilon_{xy}^2}; \quad (2.70)$$

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_{xy}^2}. \quad (2.71)$$

Для определения интенсивности напряжений по кривой течения материала необходимо предварительно определить накопленную деформацию $\bar{\epsilon}_0$. Если началу пластического деформирования соответствует $t=0$, то

$$\bar{\epsilon}_0 = \int_0^t \dot{\epsilon}_0(t) dt. \quad (2.72)$$

Подставив в уравнение (2.72) соотношения (2.53), (2.71), можно определить накопленную деформацию, но такое ее определение оказывается очень трудоемким. Чаше всего процесс деформирования рассматриваемой частицы разбивают на ряд этапов таким образом, чтобы можно было считать в пределах каждого этапа деформирование достаточно близким к простому, а приращения деформаций малыми. Тогда можно определить накопленную деформацию суммированием:

$$\bar{\epsilon}_0 = \sum_k (\bar{\Delta \epsilon}_0)_k. \quad (2.73)$$

По этой формуле удобно, в частности, определять накопленную деформацию в стационарных процессах пластического деформирования, понимая под $(\bar{\Delta \epsilon}_0)_k$ интенсивность приращений деформаций за время $\Delta t = h_0/v_0$. В этом случае для определения $\dot{\epsilon}_0$ в некоторой точке линии тока необходимо по формулам (2.56) определить приращения деформаций для всех узлов делительной сетки, расположенных на данной линии тока от упругой области до рассматриваемой точки. Определив далее по (2.70) интенсивность приращений деформаций во всех указанных узлах и просуммировав их, получим накопленную деформацию в рассматриваемой точке.

Если материал обладает начальной анизотропией, а последующее его деформационное упрочнение считается изотропным, то в случаях, когда ось z , направленная по нормали к

плоскости ячейки сетки, совпадает с главной осью анизотропии и деформации, в соответствии с уравнениями (1.75) компоненты девиатора напряжений в системе главных осей анизотропии равны

$$s_x = \frac{\sigma}{3} \frac{(2F+H) \Delta \epsilon_x - (G-H) \Delta \epsilon_y}{(GH+FH+GF) \bar{\Delta \epsilon}}; \quad (2.74)$$

$$s_y = \frac{\sigma}{3} \frac{(2G+H) \Delta \epsilon_y - (H-F) \Delta \epsilon_x}{(GH+FH+GF) \bar{\Delta \epsilon}};$$

$$s_z = -s_x - s_y; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma}{N \bar{\Delta \epsilon}} \frac{2 \Delta \epsilon_{xy}}{N \bar{\Delta \epsilon}}.$$

Здесь эквивалентное приращение деформации

$$\begin{aligned} \bar{\Delta \epsilon} = & \sqrt{\frac{2}{3} (F+G+H) \times} \\ & \times \sqrt{\frac{1}{(FG+GH+HF)^2} \{ [FH^2 + G(H+F)^2 + HF^2] \Delta \epsilon_x^2 + } \\ & + [F(G+H)^2 + GH^2 + HG^2] \Delta \epsilon_y^2 + 2H(GF+FH+GH) \Delta \epsilon_x \Delta \epsilon_y \} + } \\ & + \frac{2}{N} \Delta \epsilon_{xy}^2, \end{aligned}$$

Методика определения параметров анизотропии F, G, H, N изложена в § 4. Эквивалентное напряжение σ определяется по эквивалентной деформации $\bar{\epsilon}$ из диаграммы деформирования $\sigma(\bar{\epsilon})$, методика построения которой изложена в § 4. Эквивалентная деформация находится суммированием эквивалентных приращений деформаций за весь период пластического деформирования.

В случае начального изотропного, но анизотропию упрочняющегося материала определим компоненты девиатора напряжений из уравнений (1.85):

$$s_x = \alpha_x + \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\Delta \epsilon}_0} \Delta \epsilon_x; \quad s_y = \alpha_y + \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\Delta \epsilon}_0} \Delta \epsilon_y; \quad (2.75)$$

$$s_z = -s_x - s_y; \quad \tau_{xy} = \alpha_{xy} + \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\Delta \epsilon}_0} \Delta \epsilon_{xy}.$$

Эквивалентное напряжение $\bar{\sigma}_0$ определяют по величине накопленной деформации $\bar{\epsilon}_0$ из кривой $\sigma_0(\bar{\epsilon}_0)$, методика построения которой изложена в § 5.

Если принять, что добавочные напряжения α_{ij} пропорцио-

нальны логарифмическим деформациям, то из соотношений (1.88), (1.91), (2.75) получим уравнения

$$s_{ij} = \sigma'_0 \left(\frac{1+\beta}{3} \frac{d\epsilon_{ij}}{d\bar{e}_0} + \frac{1-\beta}{3} \frac{e_{ij}}{\bar{e}_0} \right), \quad (2.76)$$

где σ'_0 — напряжение при растяжении до накопленной деформации $\bar{e}_0$. В случае монотонного деформирования, когда $\bar{e}_0 \approx e_0$, получаем

$$s_{ij} \approx \frac{1+\beta}{2} s'_{ij} + \frac{1-\beta}{2} s''_{ij}, \quad (2.77)$$

где s'_{ij} , s''_{ij} — компоненты девиатора напряжений, определенные соответственно по соотношениям теории течения изотропно упрочняющегося материала (2.68), (2.69) и по соотношениям деформационной теории пластичности (2.65). При простом деформировании $s'_{ij} = s''_{ij}$ и, следовательно, $s_{ij} = s'_{ij}$.

В более общем случае

$$\begin{aligned} s_x &= \sigma'_0 \left(\frac{1+\beta}{3} \frac{\Delta \epsilon_x}{\Delta \bar{e}_0} + \frac{1-\beta}{3} \frac{e_x}{\bar{e}_0} \right); \\ s_y &= \sigma'_0 \left(\frac{1+\beta}{3} \frac{\Delta \epsilon_y}{\Delta \bar{e}_0} + \frac{1-\beta}{3} \frac{e_y}{\bar{e}_0} \right); \\ s_z &= s_x - s_y; \\ \tau_{xy} &= \sigma'_0 \left(\frac{1+\beta}{3} \frac{\Delta \epsilon_{xy}}{\Delta \bar{e}_0} + \frac{1-\beta}{3} \frac{e_{xy}}{\bar{e}_0} \right). \end{aligned}$$

При развитых пластических деформациях ($e_0 > 0,03$) в этих соотношениях можно принять $\beta = \text{const}$.

Допустим теперь, что добавочные напряжения α_{ij} описываются уравнениями (1.95), предложенными В. Л. Даниловым. Заменяя интеграл коисчной суммой, получаем

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{3} \alpha \sum_k \frac{[(\sigma'_0)_{k-1} - (\sigma'_0)_k] (\Delta \epsilon_{ij})_k}{(\Delta \bar{e}_0)_k}. \quad (2.78)$$

Здесь суммирование производится по ступеням деформирования рассматриваемой частицы. Коэффициент α находят по накопленной деформации $\bar{e}_0$ из графика $\alpha(\bar{e}_0)$, методика построения которого изложена в § 5. Напряжение σ'_0 определяют по величине $\bar{e}_0$ из кривой течения, построенной по результатам испытания материала на растяжение или сжатие.

Соотношения (2.78) можно также записать в следующей форме:

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha}{3} \sum_k \left[\left(\frac{d\sigma'_0}{d\bar{e}_0} \right)_{k-1} + \left(\frac{d\sigma'_0}{d\bar{e}_0} \right)_k \right] (\Delta \epsilon_{ij})_k. \quad (2.79)$$

Производную $\frac{d\sigma'_0}{d\bar{e}_0}$ определяют по накопленной деформации $\bar{e}_0$

из кривой течения, построенной по результатам испытания материала на растяжение или сжатие. Под $\Delta \epsilon_{ij}$, $\Delta \bar{e}_0$ в соотношениях (2.78), (2.79) подразумеваются приращения деформации за промежуток времени от t_{k-1} до t_k .

Если добавочные напряжения описываются соотношениями (1.93), то

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{1}{6} \sum_k \left\{ \left[\left(\frac{d\sigma'_0}{d\bar{e}_0} \right)_{k-1} - \left(\frac{d\sigma'_0}{d\bar{e}_0} \right)_k \right] \left(1 - \frac{\beta_{k-1} + \beta_k}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\sigma'_0)_{k-1} + (\sigma'_0)_k}{2} \left[\left(\frac{d\beta}{d\bar{e}_0} \right)_{k-1} - \left(\frac{d\beta}{d\bar{e}_0} \right)_k \right] \right\} (\Delta \epsilon_{ij})_k. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Производные $\frac{d\beta}{d\bar{e}_0}$ определяются по графику $\beta(\bar{e}_0)$ как тангенс угла

наклона касательной к этому графику в точке с соответствующим значением $\bar{e}_0$.

При развитых деформациях, когда $\beta = \text{const}$, формула (2.80) упрощается:

$$\alpha_{ij} = \frac{1-\beta}{6} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{d\sigma'_0}{d\bar{e}_0} \right)_{k-1} + \left(\frac{d\sigma'_0}{d\bar{e}_0} \right)_k \right] (\Delta \epsilon_{ij})_k. \quad (2.81)$$

Экспериментальное определение напряжений значительно облегчается, если исследуемый процесс пластического деформирования является стационарным. В § 8 изложена методика определения приращений деформаций в установившихся процессах по искажению прямоугольной делительной сетки. Компоненты девиатора определяются по приведенным выше соотношениям. При этом вместо суммирования по стадиям деформирования исследуемого тела производится суммирование по узлам сетки, расположенным на рассматриваемой линии тока, начиная с узла, расположенного в области, не деформированной ранее.

При известной кинематике деформирования не вызывает особых затруднений определение компонент девиатора напряжений и по более сложным уравнениям пластического состояния, если они разрешимы относительно компонент девиатора. В этом отношении экспериментальные методы представляют собой область, в которой могут найти приложение и те из теорий пластичности, перспективы применения которых в теоретических исследованиях вследствие их сложности остаются сомнительными, несмотря на возможности современной вычис-

лительной техники. Между тем экспериментаторы проявляют большую осторожность при выборе уравнений состояния, что в первую очередь объясняется недостаточным экспериментальным обоснованием этих теорий.

Для определения напряжений остается найти гидростатическое давление σ и прибавить его к компонентам девиатора напряжений.

Если соответствующим образом направить ось z , то при двухосном напряженном состоянии $\sigma_z = 0$. Тогда из условия $\sigma_z = s_z + \sigma = 0$ с учетом условия несжимаемости получаем $\sigma = -s_x - s_y$. Следовательно, в этом случае

$$\sigma_x = 2s_x + s_y; \quad \sigma_y = 2s_y + s_x. \quad (2.82)$$

Наиболее простые формулы для определения напряжений при двухосном напряженном состоянии следуют из соотношений деформационной теории пластичности (2.65)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (2e_x + e_y); \\ \sigma_y &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (2e_y + e_x); \quad \tau_{xy} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} e_{xy}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Считается, что они достаточно точны, если деформирование близко к простому. Однако чрезвычайно часто по этим зависимостям определяют напряжения в процессах пластического деформирования, заведомо не удовлетворяющих приведенному условию, чем вносится погрешность неопределенной величины.

Согласно теории течения изотропно упрочняющегося материала

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (2\dot{e}_x + \dot{e}_y); \quad \sigma_y = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (2\dot{e}_y + \dot{e}_x); \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \dot{e}_{xy} \end{aligned} \quad (2.84)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\Delta \epsilon_0} (2\Delta \epsilon_x + \Delta \epsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\Delta \epsilon_0} (2\Delta \epsilon_y + \Delta \epsilon_x); \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\Delta \epsilon_0} \Delta \epsilon_{xy}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

В случае начально анизотропного материала в соответствии с уравнениями (2.74)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma} \frac{(H+F) \Delta \epsilon_x - H \Delta \epsilon_y}{(HG + FH + FG) \Delta \epsilon}; \\ \sigma_y &= \bar{\sigma} \frac{(H+G) \Delta \epsilon_y - H \Delta \epsilon_x}{(HG + FH + FG) \Delta \epsilon}; \\ \tau &= \bar{\sigma} \frac{2 \Delta \epsilon_{xy}}{N \Delta \epsilon}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Напряжения при пластическом деформировании начально изотропного материала с анизотропным упрочнением можно определить исходя из соотношений (2.75):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\alpha_x + \alpha_y + \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_0}{\Delta \epsilon_0} (2\bar{\Delta \epsilon}_x + \bar{\Delta \epsilon}_y); \\ \sigma_y &= 2\alpha_y + \alpha_x + \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_0}{\Delta \epsilon_0} (2\bar{\Delta \epsilon}_y + \bar{\Delta \epsilon}_x); \quad \tau_{xy} = \alpha_{xy} + \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_0}{\Delta \epsilon_0} \bar{\Delta \epsilon}_{xy}. \end{aligned}$$

Если смещения центра поверхности нагружения принимаются пропорциональными логарифмическим деформациям e_{ij} , то

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 \left[\frac{1+\beta}{3\Delta \epsilon_0} (2\Delta \epsilon_x + \Delta \epsilon_y) + \frac{1-\beta}{3\epsilon_0} (2e_x + e_y) \right]; \\ \sigma_y &= \sigma_0 \left[\frac{1+\beta}{3\Delta \epsilon_0} (2\Delta \epsilon_y + \Delta \epsilon_x) + \frac{1-\beta}{3\epsilon_0} (2e_y + e_x) \right]; \\ \tau_{xy} &= \sigma_0 \left(\frac{1+\beta}{3} \frac{\Delta \epsilon_{xy}}{\Delta \epsilon_0} + \frac{1-\beta}{3} \frac{e_{xy}}{\epsilon_0} \right). \end{aligned} \quad (2.87)$$

При плоской деформации несжимаемого материала невозможно определить напряжения непосредственно по кинематике деформирования. В этом случае гидростатическое давление определяют интегрированием дифференциальных уравнений равновесия, которые можно записать в виде

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0. \quad (2.88)$$

Здесь мы вновь встречаемся с характерной для экспериментально расчетных методов ситуацией, когда число уравнений превышает число неизвестных. В связи с этим рассмотрим некоторые приемы решения переопределенных систем уравнений.

Пусть требуется определить в узлах некоторой сетки неизвестные X_i . Пусть далее в результате эксперимента получены приближенные значения N функций от этих неизвестных

$$f_j(X_i) \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.89)$$

В частности, это могут быть приближенные равенства типа $X_i - \bar{X}_i \approx 0$, где $\bar{X}_i$ — измеренное значение неизвестной величины X_i .

Будем считать, что задано некоторое число «теоретических» уравнений относительно X_i . Если некоторые из этих уравнений являются дифференциальными или интегральными, то, записав их в конечных разностях, получим систему алгебраических уравнений

$$F_j(X_i) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (2.90)$$

В числе этих уравнений могут быть и уравнения типа $X_i - \bar{X}_i = 0$, где $\bar{X}_i$ — значения неизвестных X_i , заданные в некоторых узлах сетки. Сумма $N+M$ превосходит число неизвестных.

Естественное требование к результатам определения X_i — наибольшая их близость (скажем, в смысле метода наименьших квадратов) к действительным значениям соответствующих величин. Сразу же заметим, что из этого требования в общем случае не следует необходимость точного удовлетворения каких-либо из рассматриваемых уравнений, даже если эти уравнения являются точными. А поскольку уравнения удовлетворяются лишь приближенно, число этих уравнений можно неограниченно расширить. Действительно, если, например, главные скорости деформации при плоском деформировании достаточно точно удовлетворяют условию несжимаемости $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$, то еще не очевидно, что они так же хорошо удовлетворяют условию

$$\frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_1 + \epsilon_2) = 0.$$

Все это позволяет осуществлять расшифровку экспериментальных данных самыми различными способами. Причем при выборе способа приходится считаться не только с точностью вычислений, но и принимать во внимание, каковы необходимый для расшифровки набор граничных условий и трудоемкость расшифровки.

Наиболее простой способ заключается в том, что система уравнений (2.89) замыкается некоторыми из уравнений (2.90). Таким путем, например, обычно выполняют расшифровку данных метода фотоупругости.

Можно из системы (2.89), (2.90) выделить уравнения, которыми целесообразно удовлетворить точно, исключить с помощью этих уравнений соответствующее число неизвестных и решить оставшиеся уравнения методом наименьших квадратов, предполагая их равноточными. Пример такого решения приведен в § 7.

Вероятно, наиболее высокая точность может быть достигнута при совместном решении уравнений (2.89), (2.90) с учетом их точности, но для этого требуются детальные исследования точности раз-

личных экспериментальных методов, точности «теоретических» уравнений, скажем, уравнений состояния.

При интегрировании уравнений (2.88) приходится считаться с тем, что чаще всего гидростатическое давление σ можно определить лишь на части границы тела. Пусть в точке A границы тела (рис. 17) известна нормальная составляющая распределенной нагрузки σ_n . Подставив в известную формулу

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_y \sin^2 \psi + \tau_{xy} \sin 2\psi,$$

где ψ — угол между внешней нормалью к контуру и осью x , соотношения

$$\sigma_x = s_x + \sigma, \quad \sigma_y = s_y + \sigma, \quad (2.91)$$

получаем

$$\sigma = \sigma_n - s_x \cos^2 \psi - \sigma_y \sin^2 \psi - \tau_{xy} \sin 2\psi. \quad (2.92)$$

Если контур свободен от сил трения, то нормальные напряжения σ_n и σ_t , направленные вдоль контура, будут главными. Третье главное напряжение $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t) = \sigma$. Поскольку интенсивность напряжений

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2},$$

получаем $\sigma_n - \sigma_t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0$.

Следовательно,

$$\sigma = \sigma_n \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0. \quad (2.93)$$

Знак плюс соответствует случаю, когда в рассматриваемой точке контур удлиняется, знак минус — случаю, когда контур укорачивается.

Во многих случаях определение граничных условий, необходимых для интегрирования дифференциальных уравнений равновесия, оказывается затруднительным. На рис. 18 схематично показан процесс плоского прессования. К верхней границе листа, на которой задана нагрузка, примыкает упругая область, в которой нельзя определить деформации методом делительных сеток. Получим необходимое для расшифровки экспериментальных данных граничное условие из интегрального уравнения равновесия, записанного для луча AB :

$$P = 2l \int_0^a \sigma_y dx = 2l \int_0^a (\sigma + s_y) dx,$$

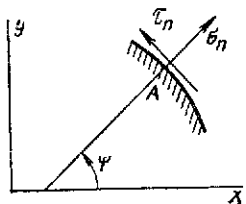


Рис. 17. Напряжения на границе тела

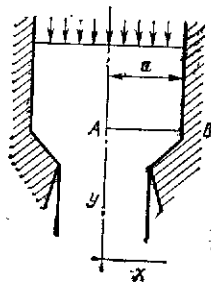


Рис. 18. К определению постоянной интегрирования уравнений равновесия

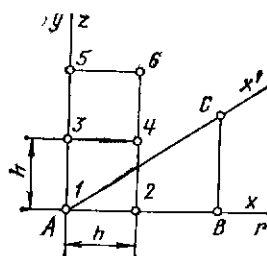


Рис. 19. Расчетная сетка

где l — ширина листа. Откуда находим гидростатическое давление в точке A :

$$\sigma_A = \frac{P}{2al} - \frac{1}{a} \int_0^a (\sigma' + s_y) dx,$$

где

$$\sigma' = \sigma - \sigma_A = - \int_0^x \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dx.$$

Гидростатическое давление в точке C исследуемой пластической области (рис. 19) можно определить по формуле

$$\sigma_C = \sigma_A - \int_A^B \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dx - \int_B^C \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} \right) dy \quad (2.94)$$

или

$$\sigma_C = \sigma_A - \int_A^C \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} \right) \sin \alpha \right] dx'. \quad (2.95)$$

Здесь

$$\alpha = \arctg \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A},$$

где x_A, y_A, x_C, y_C — координаты точек A, C .

Точность расчетов по формуле (2.95) несколько выше точности расчетов по формуле (2.94), поскольку в этом случае путь интегрирования короче, но расчеты по формуле (2.95) более трудоемкие.

Иногда целесообразно выполнять расшифровку экспериментальных данных по следующей методике. Определив гидростатическое давление в точке A , вычисляем по формуле (2.91)

напряжение в этой точке. Из уравнений равновесия следует что

$$(\sigma_x)_B = (\sigma_x)_A - \int_A^B \frac{d\tau_{xy}}{dy} dy. \quad (2.96)$$

Затем находим

$$(\sigma_y)_B = (\sigma_x)_B - (s_x)_B + (s_y)_B;$$

$$(\sigma_y)_C = (\sigma_y)_B - \int_B^C \frac{d\tau_{xy}}{dx} dx; \quad (2.97)$$

$$(\sigma_x)_C = (\sigma_y)_C - (s_y)_C + (s_x)_C.$$

Приведем также способ определения напряжений, при котором удовлетворяются все уравнения равновесия. Пусть вдоль координатных осей x, y (рис. 19) напряжения известны. Записав дифференциальные уравнения равновесия в конечных точках, получим в точке 4

$$\sigma + s_x + \tau_{xy} = F_1, \quad \sigma + s_y + \tau_{xy} = F_2,$$

где

$$F_1 = (\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_2 + (\sigma_x)_3 + (\tau_{xy})_1 + (\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_3;$$

$$F_2 = (\sigma_y)_1 + (\sigma_y)_2 - (\sigma_y)_3 + (\tau_{xy})_1 - (\tau_{xy})_2 + (\tau_{xy})_3.$$

Обозначим определенные в результате предшествующих исследований компоненты девиатора напряжений через $\bar{s}_x, \bar{s}_y, \bar{\tau}_{xy}$. Пусть $s_x = \bar{s}_x + \Delta s_x$; $s_y = \bar{s}_y + \Delta s_y$; $\tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} + \Delta \tau_{xy}$. Определим поправки $\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta \tau_{xy}$ таким образом, чтобы точно удовлетворялись уравнения равновесия, записанные в конечных точках:

$$\sigma + \Delta s_x + \Delta \tau_{xy} = f_1; \quad \sigma + \Delta s_y + \Delta \tau_{xy} = f_2, \quad (2.98)$$

где $f_1 = F_1 - \bar{s}_x - \bar{\tau}_{xy}$; $f_2 = F_2 - \bar{s}_y - \bar{\tau}_{xy}$, и условие несжимаемости, из которого при $\bar{s}_x = -\bar{s}_y$ следует, что

$$\Delta s_x = -\Delta s_y. \quad (2.99)$$

Потребуем также, чтобы было приближенно удовлетворено условие пластичности (1.65), из которого следует, что

$$(\bar{s}_x - \bar{s}_y) (\Delta s_x - \Delta s_y) + 4\bar{\tau}_{xy} \Delta \tau_{xy} = 0. \quad (2.100)$$

Из системы уравнений (2.98) — (2.100) находим

$$\Delta s_x = -\Delta s_y = \frac{1}{2} (f_1 - f_2); \quad \Delta \tau_{xy} = -\frac{\bar{s}_x \Delta s_x}{\bar{\tau}_{xy}};$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (f_1 + f_2) - \Delta \tau_{xy}.$$

Следовательно, напряжения в точке 4 равны

$$\sigma_x = \sigma + \bar{s}_x + \Delta s_x; \quad \sigma_y = \sigma + \bar{s}_y + \Delta s_y; \quad \tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} + \Delta \tau_{xy}.$$

Аналогично, зная напряжения в точках 3, 4, 5, можно определить их в точке 6 и т. д.

Главный недостаток рассмотренного способа — необходимость знания напряжений на значительной части границы тела (рассмотренные ранее способы требуют знания напряжений лишь в одной точке границы). Следует, однако, заметить, что определение напряжений приведенным способом возможно и в случае, если напряжения заданы вдоль двух произвольных пересекающихся линий. В этом случае необходимо перейти к криволинейным координатам, как это сделано в работе [33].

При осесимметричной деформации гидростатическое давление также определяется интегрированием дифференциальных уравнений равновесия, которые при отсутствии кручения (т. е. при отсутствии крутящего момента в сечениях $z = \text{const}$), записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (2.101)$$

Для этого необходимо знать σ хотя бы в одной точке исследуемой области. Гидростатическое давление на границе определяется по формуле, аналогичной (2.92):

$$\sigma = \sigma_n - s_r \cos^2 \psi - s_z \sin^2 \psi - \tau_{rz} \sin 2\psi. \quad (2.102)$$

Как и при плоской деформации, возможно определение гидростатического давления на границе из интегрального уравнения равновесия

$$P = 2\pi \int_0^R \sigma_z r dr, \quad (2.103)$$

где R — радиус деформируемого тела. Усилie P измеряется в процессе деформирования исследуемого тела. В случае необходимости учитывают силы трения.

Подставив в уравнение (2.103) $\sigma_z = s_z + \sigma_r - s_r$,

$$\sigma_r = (\sigma_r)_A + \int_r^R \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{s_r - s_\varphi}{r} \right) dr,$$

где $(\sigma_r)_A$ — радиальное напряжение в точке A границы, получаем

$$(\sigma_r)_A = \frac{1}{\pi R^2} \left[P - \int_0^R (s_z - s_r - \sigma_r') r dr \right]. \quad (2.104)$$

Здесь

$$\sigma_r' = (\sigma_r)_A - \sigma_r = - \int_r^R \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{s_r - s_\varphi}{r} \right) dr.$$

Гидростатическое давление в точке A

$$\sigma_A = (\sigma_r)_A - (s_r)_A. \quad (2.105)$$

В произвольной точке C пластической области (см. рис. 19)

$$\begin{aligned} \sigma_C = \sigma_A - \int_A^B \left(\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{s_r - s_\varphi}{r} \right) dr - \\ - \int_B^C \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right) dz. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Напряжения в этой точке можно также определить следующим образом:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_B &= (\sigma_r)_A - \int_A^B \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{s_r - s_\varphi}{r} \right) dr; \\ (\sigma_z)_B &= (\sigma_r)_B - (s_r)_B + (s_z)_B; \\ (\sigma_z)_C &= (\sigma_z)_B - \int_B^C \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right) dz; \\ (\sigma_r)_C &= (\sigma_z)_C - (s_z)_C + (s_r)_C. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Если интегрирование выполняется вдоль луча AC , т. е. по минимальному пути интегрирования, то

$$\begin{aligned} \sigma_C = \sigma_A - \int_A^C \left[\left(\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \right) + \frac{s_r - s_\varphi}{r} \right] \cos \alpha + \\ + \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right) \sin \alpha dx'. \end{aligned} \quad (2.108)$$

При таком определении напряжений одно из дифференциальных уравнений равновесия остается неудовлетворенным. Если известны необходимые граничные условия, то нетрудно скорректировать компоненты девиатора напряжений таким образом, чтобы удовлетворить оба уравнения равновесия.

Пусть вдоль осей r, z (см. рис. 19) напряжения известны. Тогда в точке 4

$$\sigma + s_r + \tau_{rz} = \Phi_1; \quad \sigma + s_z + \tau_{rz} = \Phi_2, \quad (2.109)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= (\sigma_r)_1 - (\sigma_r)_2 + (\sigma_r)_3 + (\tau_{rz})_1 + (\tau_{rz})_2 - (\tau_{rz})_3 - \\ &\quad - 2h \frac{(\sigma_r)_2 + (\sigma_r)_3 - (\sigma_\varphi)_2 - (\sigma_\varphi)_3}{r_2 + r_3}; \\ \Phi_2 &= (\sigma_z)_1 + (\sigma_z)_2 - (\sigma_z)_3 + (\tau_{rz})_1 - (\tau_{rz})_2 + (\tau_{rz})_3 - \\ &\quad - 2h \frac{(\tau_{rz})_2 + (\tau_{rz})_3}{r_2 + r_3}.\end{aligned}$$

Если принять, что точность определения окружной компоненты девиатора напряжений s_φ значительно выше точности определения остальных компонент девиатора, то последующий расчет мало отличается от аналогичного расчета в случае плоской деформации. В результате получаем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma + \bar{s}_r + \Delta s_r; \quad \sigma_z = \sigma + \bar{s}_z + \Delta s_z; \\ \sigma_\varphi &= \sigma + \bar{s}_\varphi; \quad \tau_{rz} = \bar{\tau}_{rz} + \Delta \tau_{rz},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta s_r &= -\Delta s_z = \Phi_1 - \Phi_2 - 2\bar{s}_r; \quad \Delta \tau_{rz} = -\frac{s_r \Delta s_r}{\tau_{rz}}; \\ \sigma &= \frac{1}{2} (\Phi_1 + \Phi_2 + s_\varphi) - \tau_{rz} - \Delta \tau_{rz}.\end{aligned}$$

Через $\bar{s}_r$, $\bar{s}_z$, $\bar{s}_\varphi$, $\bar{\tau}_{rz}$, как и прежде, обозначены полученные в результате предшествующего исследования компоненты девиатора напряжений. Предполагается, что они точно удовлетворяют условию несжимаемости.

Если же целесообразна и корректировка s_φ , то наряду с уравнениями (2.109), которые перепишем в виде

$$\sigma + \Delta s_r + \Delta \tau_{rz} = \varphi_1; \quad \sigma + \Delta s_z + \Delta \tau_{rz} = \varphi_2, \quad (2.110)$$

где

$$\varphi_1 = \Phi_1 - \bar{s}_r - \bar{\tau}_{rz}; \quad \varphi_2 = \Phi_2 - \bar{s}_z - \bar{\tau}_{rz},$$

имеем условие несжимаемости, из которого следует, что

$$\Delta s_r + \Delta s_z + \Delta s_\varphi = 0, \quad (2.111)$$

и уравнение, вытекающее из условия пластичности,

$$s_r \Delta s_r + s_z \Delta s_z + \bar{s}_\varphi \Delta s_\varphi + 2\bar{\tau}_{rz} \Delta \tau = 0. \quad (2.112)$$

Определим поправки Δs_r , Δs_z , Δs_φ , $\Delta \tau_{rz}$ таким образом, чтобы сумма их квадратов была минимальной:

$$\Delta s_r^2 + \Delta s_z^2 + \Delta s_\varphi^2 + \Delta \tau_{rz}^2 = \min. \quad (2.113)$$

Из уравнений (2.110) — (2.112) находим

$$\Delta s_r = \Delta s_z + \varphi_1 - \varphi_2; \quad \Delta s_\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\Delta s_z; \quad \Delta \tau = A \Delta s_z = B,$$

где

$$A = \frac{3\bar{s}_\varphi}{2\bar{\tau}_{rz}}; \quad B = \frac{(\bar{s}_\varphi - \bar{s}_r)(\varphi_1 - \varphi_2)}{2\bar{\tau}_{rz}}.$$

Подставив эти соотношения в (2.113) и приравняв нулю производную от полученной суммы по Δs_z , получаем уравнение, из которого находим

$$\Delta s_z = \frac{3(\varphi_2 - \varphi_1) - AB}{6 + A^2}.$$

Гидростатическое давление

$$\sigma = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta s_\varphi) - \Delta \tau_{rz}.$$

Напряжения в точке 4 можно теперь определить по соотношениям

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma + \bar{s}_r + \Delta s_r; \quad \sigma_z = \sigma + \bar{s}_z + \Delta s_z; \\ \sigma_\varphi &= \sigma + \bar{s}_\varphi + \Delta s_\varphi; \quad \tau_{rz} = \bar{\tau}_{rz} + \Delta \tau_{rz}.\end{aligned}$$

В качестве примера приведем результаты исследования напряженного состояния при листовой прокатке [12].

На лабораторном стане дуо с валками из хромистой стали диаметром 500 мм и клетки промышленного стана с валками диаметром 200 мм с малой скоростью прокатывали медные, стальные, дюралюминиевые и свинцовые полосы с прямоугольными пазами, симметрично расположенными относительно средней линии полосы. В пазы с небольшим натяжением вставляли одинаковые пластины так, чтобы плоскости их разреза совпадали с осью симметрии полосы.

Плоскости разреза пластин были тщательно полированы, и на одной из них с помощью специального приспособления, установленного на измерительном микроскопе, корундовой иглой нанесена прямоугольная сетка с базой 0,2 и 0,4 мм. Ширина царапины в среднем составляла 0,005 мм. Ширина полосы превышала ее толщину не менее чем в 4 раза. Когда валки достигали половины длины вкладышей, прокатка прекращалась, полосы разрезали и на вкладышах с помощью измерительного микроскопа определяли расстояние между узлами деформированной сетки h и углы наклона касательных к траекториям α . Компоненты тензора приращений деформаций рассчитывали по формулам (2.56). Компоненты девиатора напряжений определяли по соотношениям теории течения изотропно упрочняющегося материала. При этом интенсивность напряжений определяли путем измерения твердости (см. § 12, свинец рассматривали как идеально пластический материал). Для этого в различных точках полированной после деформации поверхности вкладышей измеряли твердость HV по Виккерсу.

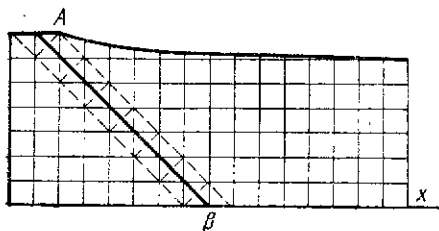


Рис. 20. Схема к определению напряжений при листовой прокатке

стом), затем вдоль оси x и, наконец, вдоль линий $x = \text{const}$ расчетной сетки. Усилие, действующее на валки, определяли с помощью проволочных датчиков, наклеенных на ослабленное сечение станины. Интегральная проверка нормальных напряжений в области контакта по величине усилия показала, что ошибка определения находится в пределах 15%.

Полученные эпюры (рис. 21—23) показывают, что градиент напряжений в месте контакта высокий. В приконтактной области материал находится в условиях, близких к всестороннему сжатию. Этим объясняется то, что рабочие напряжения значительно превышают предел текучести.

В значительной части продольных сечений полос напряжения σ_x являются растягивающими, что подтверждает результаты исследования, полученные Н. А. Чельшевым.

При прокатке с одинаковыми параметрами полос из меди, свинца, стали и дюралюминия упрочняемость материала вызывает рост напряжений (рис. 21) и менее благоприятное их распределение, увеличивая гидростатическое давление. К таким же качественным результатам приводит уменьшение исходной толщины прокатываемой полосы δ (рис. 22) и уменьшение степени деформации ϵ (рис. 23).

§ 10. Определение напряжений по теореме о разгрузке

Как следует из этой теоремы напряжения в пластической области

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma^0_{ij}, \quad (2.114)$$

где σ'_{ij} — напряжения, снимаемые при разгрузке, в дальнейшем они называются разгрузочными напряжениями; σ^0_{ij} — остаточные напряжения.

Чаще всего разгрузка сопровождается чисто упругими деформациями. В этих случаях можно определять разгрузочные напряжения методом фотоупругости или электротензометриро-

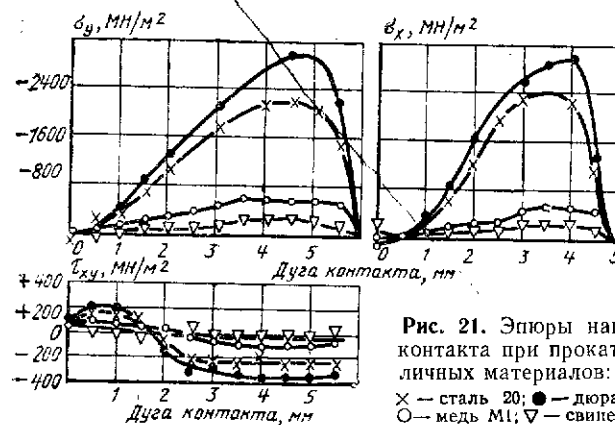


Рис. 21. Эпюры напряжений по дуге контакта при прокатке листов из различных материалов:

× — сталь 20; • — дюралюминий; ○ — медь М1; ▽ — свинец; $\epsilon = 10\%$, $\delta = 6$ мм

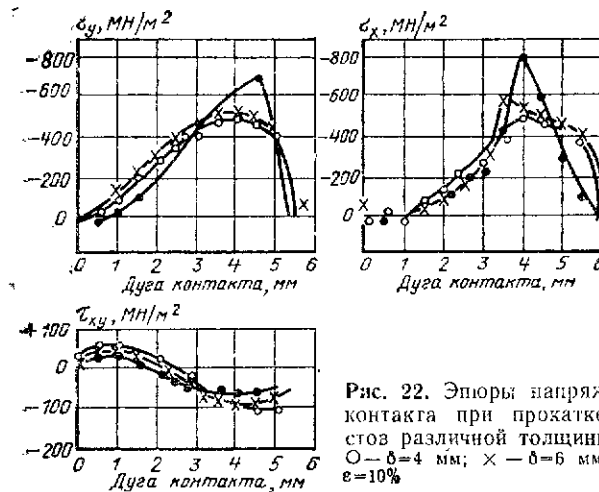


Рис. 22. Эпюры напряжений по дуге контакта при прокатке медных листов различной толщины: ○ — $\delta = 4$ мм; × — $\delta = 6$ мм; • — $\delta = 8$ мм; $\epsilon = 10\%$

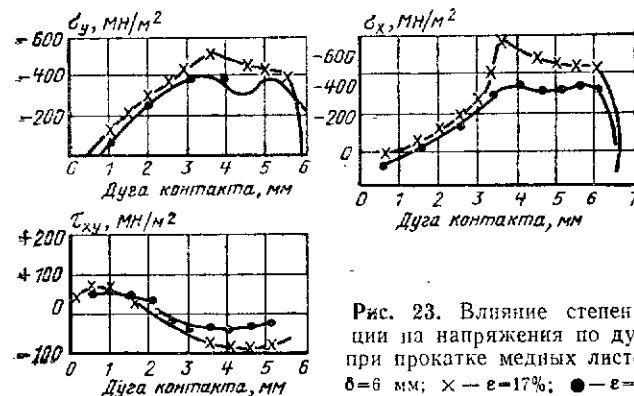


Рис. 23. Влияние степени деформации на напряжения по дуге контакта при прокатке медных листов: $\delta = 6$ мм; × — $\epsilon = 17\%$; • — $\epsilon = 18\%$

ванием. В некоторых случаях их удается рассчитать методами теории упругости или сопротивления материалов. Для определения остаточных напряжений к настоящему времени разработаны достаточно эффективные методы.

Исходя из уравнения поверхности нагружения (1.83), запишем условие чисто упругого деформирования при разгрузке в виде

$$(s_{ij}^0 - \alpha_{ij})(s_{ij}^0 - \alpha_{ij}) < (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij})$$

или

$$(\sigma_0^0)^2 - 3\alpha_{ij}s_{ij}^0 < \sigma_0^2 - 3\alpha_{ij}s_{ij}, \quad (2.115)$$

где σ_0^0 — интенсивность остаточных напряжений.

Если принять, что состояние анизотропии в исследуемом случае слабо отличается от состояния анизотропии при простом нагружении до σ_{ij} , то можно на основании (2.115), (1.91), (1.108) записать условие чисто упругого деформирования при разгрузке следующим образом:

$$(\sigma_0^0)^2 - \frac{3}{2}(1 - \beta)s_{ij}^0s_{ij} < \beta\sigma_0^2. \quad (2.116)$$

Вероятно, впервые рассматриваемый метод исследования напряжений в пластической области был использован Н. Н. Давиденковым с сотрудниками для экспериментального определения напряженного состояния при пластическом кручении круглых стержней. В работе [11] этим методом исследовано плоское напряженное состояние, возникающее при радиальном сжатии диска.

Диск из стали Ст3 диаметром 100 и толщиной 26 мм был сжат в радиальном направлении на 20%. После разгрузки диск был подторцован и отшлифован. Деформирующее усилие, пересчитанное на новую площадь сечения $y=0$ (рис. 24), составило $P=120$ тс. В различных точках осей симметрии торцов,

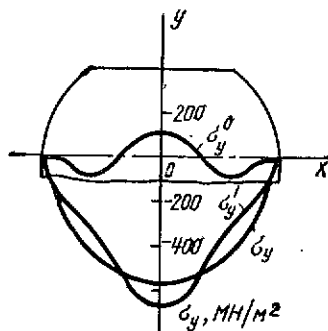


Рис. 24. Эпюры напряжений при радиальном сжатии диска

перпендикулярных направлению сжатия, были наклеены проволоочные датчики. Для определения разгрузочных напряжений диск сжали усилием P . По показаниям датчиков определяли возникшие при этом напряжения σ_y' . Это позволило рассчитать разгрузочные напряжения $\sigma_y' = \frac{P}{P'} \sigma_y''$.

Затем сострогали верхнюю половину диска. По произошедшим при этом изменениям показаний датчиков определили остаточные напряжения σ_y^0 . Напряжения σ_y при

пластическом сжатии диска определили по (2.114). Полученные результаты приведены на рис. 24.

В работе [1] напряжения в пластической области определены по теореме о разгрузке с использованием оптически активных покрытий.

Изложенным методом можно определять напряженное состояние и в условиях ползучести. Имеется также принципиальная возможность определения напряжений в случаях, когда разгрузка сопровождается пластическим деформированием. Однако необходимость учета деформационной анизотропии, а также неизбежной релаксации остаточных напряжений чрезвычайно усложняет методику определения напряжений в этих случаях.

§ 11. Метод догрузки

Пусть материал нагружен до интенсивности напряжений σ_0 , превышающей начальный предел текучести (рис. 25). Если после разгрузки произвести нагружение при некотором ином напряженном состоянии, то в силу эффекта Баушингера интенсивность напряжений в момент наступления состояния текучести меньше σ_0 . Однако при последующем пластическом деформировании кривая течения 2 быстро приближается к кривой течения 1, соответствующей монотонному деформированию. Расхождение этих кривых незначительно, если приращение накопленной интенсивности деформации $\Delta\bar{\epsilon}_0 > \delta\bar{\epsilon}_0$, где $\delta\bar{\epsilon}_0$ — деформация Баушингера (деформация обратного направления, при которой достигается величина интенсивности напряжений перед разгрузкой).

На рис. 26 сопоставлены кривые течения стали Ст3 при растяжении (кривая 1) и сжатии образцов, предварительно растянутых до различной интенсивности деформации. На рис. 27 показана полученная в этих опытах зависимость деформации Баушингера от предварительной деформации, а на рис. 28 представлена зависимость отношения $\frac{\Delta\sigma_0}{\sigma_0}$ (см. рис. 25), характеризующего различие в кривых течения при монотонном и немонотонном деформировании, от величины предварительной деформации $\bar{\epsilon}_0$ и приращения этой деформации после изменения направления деформирования $\Delta\bar{\epsilon}_0$.

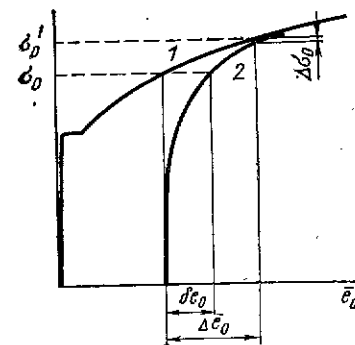


Рис. 25. К определению напряжений методом догрузки

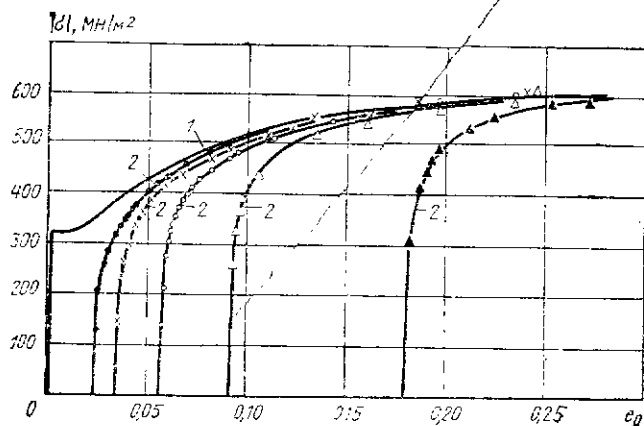


Рис. 26. Кривые течения при сжатии растянутого материала:
1 — при растяжении; 2 — при сжатии после растяжения

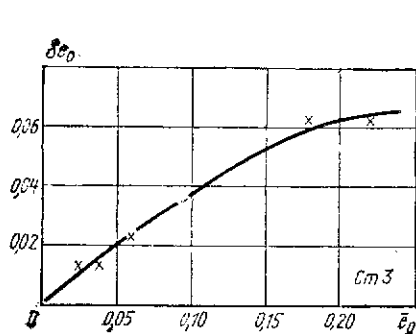


Рис. 27. Зависимость деформации Баушингера от предварительной деформации

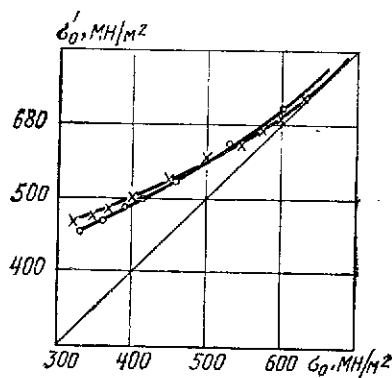


Рис. 29. Тарировочные графики:
 $\Delta \epsilon_0 = 0,05$; x — сталь Ст3; o — сталь 10Г2С1

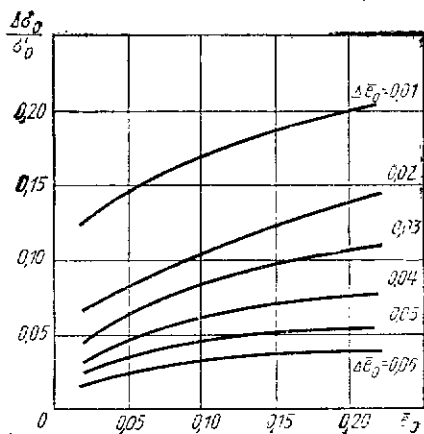


Рис. 28. Зависимость точности определения напряжения методом догрузки от предварительной и дополнительной деформации

Как видим, отношение $\frac{\Delta \sigma_0}{\sigma_0} \leq 0,1$, если $\Delta \epsilon_0 > 0,035$.

На основании изложенного можно предложить следующий метод определения интенсивности напряжений в различных точках пластически деформируемого тела.

Располагая кривой течения материала, построим тарировочный график, связывающий интенсивность напряжений σ_0 при деформации ϵ_0 с интенсивностью напряжений σ'_0 при деформации $\epsilon_0 + \Delta \epsilon_0$ (обозначения по рис. 25). Дополнительную деформацию $\Delta \epsilon_0$ выбираем таким образом, чтобы она превышала максимальное для данного материала значение деформации Баушингера.

На рис. 29 приведен тарировочный график, построенный для стали Ст3 при $\Delta \epsilon_0 = 0,05$. Поскольку с возрастанием σ_0 упругость материала уменьшается, тарировочная кривая приближается к прямой $\sigma'_0 = \sigma_0$, соответствующей идеально пластическому материалу.

Разгрузив исследуемое тело после пластического деформирования, вырежем в различных его точках достаточно малые образцы для испытания на растяжение или сжатие и в результате их испытания определим напряжение σ'_0 , при котором деформация образца составит $\Delta \epsilon_0$. С помощью тарировочного графика $\sigma_0 - \sigma'_0$ определим по величине σ'_0 интенсивность напряжений σ_0 в точке, в окрестности которой вырезали образец.

Изложенным методом определено, например, напряженное состояние при пластическом деформировании многослойного цилиндра*. Указанный цилиндр с центральной трубой, изготовленной из стали Ст3, спиральной навивкой из листа стали 10Г2С1 толщиной 6 мм и наружным кожухом из той же листовой стали был испытан в Иркутске в НИИ химического машиностроения до разрушения. Из разрушенного цилиндра были вырезаны ориентированные в осевом направлении образцы для испытания на растяжение. Поскольку в рассматриваемом случае изменения деформированного состояния до и после разгрузки (осевое растяжение после «плоского» растяжения) не очень значительны, можно утверждать, что приведенные на рис. 29 тарировочные графики при $\Delta \epsilon_0 = 0,05$ позволяют достаточно точно установить распределение интенсивности напряжений по толщине стенки цилиндра.

На рис. 30 показано полученное распределение σ'_0 и σ_0 по толщине цилиндра, а на рис. 31 — распределение σ_0 , установленное методом измерения твердости (см. § 12). Полученное

* Исследование выполнено С. П. Поповым.

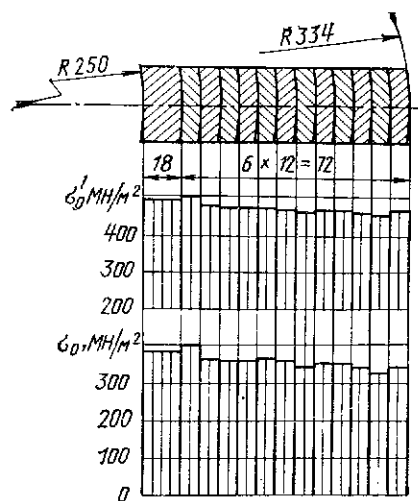


Рис. 30. Эпюра распределения интенсивности напряжений при разрыве рулонированного сосуда, определенная методом догрузки

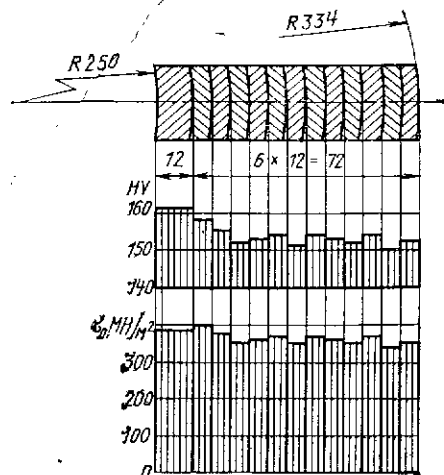


Рис. 31. Эпюра распределения интенсивности напряжений при разрыве рулонированного сосуда, определенная методом измерения твердости

двумя методами распределение интенсивности напряжений оказалось весьма близким.

По распределению интенсивности напряжений, полученному методом догрузки, предполагая деформацию цилиндра плоской и осесимметричной, рассчитали напряжения к моменту разрушения:

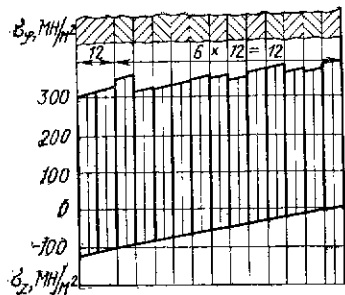


Рис. 32. Эпюры напряжений при разрыве рулонированного сосуда

Полученные эпюры представлены на рис. 32. Радиальное напряжение на внутренней поверхности оказалось равным 121 МН/м². При испытании сосуда зафиксировано разрушающее давление 115 МН/м². Погрешность эксперимента составила, таким образом, 5%.

§ 12. Связь между твердостью и интенсивностью напряжений

Зависимость между твердостью деформированного металла и интенсивностью напряжений при пластическом деформировании положена в основу метода определения напряженного состояния в пластической области по распределению твердости, представляющего собой безобразцовый вариант метода догрузки.

Исследованием связи между твердостью, измеренной различными методами, и напряжением при испытании на сжатие широкого круга материалов установлено, что графики твердость — интенсивность напряжений, построенные для различных металлов, не совпадают. Однако все они имеют общую для данного способа измерения твердости огибающую, соответствующую связь между твердостью и пределом текучести идеально пластических материалов. Объясняется это уменьшением упругости металлов с возрастанием деформации.

Если измеряют твердость по Бринеллю, по Виккерсу и микротвердость, огибающая является прямой. При измерении твердости по Роквеллу — это кривая. Многочисленные эксперименты показали, что при измерении твердости по Бринеллю огибающая с достаточной точностью описывается уравнением

$$\sigma_0 = (0,32 + 0,37) HB. \quad (2.117)$$

Это уравнение находится в хорошем соответствии с решением А. Ю. Ишлинского задачи о внедрении сферического штампа в изотропное идеально пластическое полупространство. Согласно этому решению

$$\sigma_T = 0,383 HB, \quad (2.118)$$

где σ_T — предел текучести материала. Некоторое различие в этих двух зависимостях может объясняться тем, что в экспериментах, несмотря на большие деформации, не достигалась идеальная пластичность.

В целом, как уже указывалось, тарировочные графики различных материалов не совпадают. Поэтому при определении напряжений по распределению твердости необходимо предварительно по результатам испытаний материала на растяжение, сжатие или кручение и измерений твердости на различных стадиях деформирования строить тарировочный график для каждого из исследуемых материалов.

Главным в экспериментальном обосновании метода является вопрос о существовании единой для различных напряженных состояний и историй пластического деформирования кривой, связывающей твердость с интенсивностью напряжений. Боль-

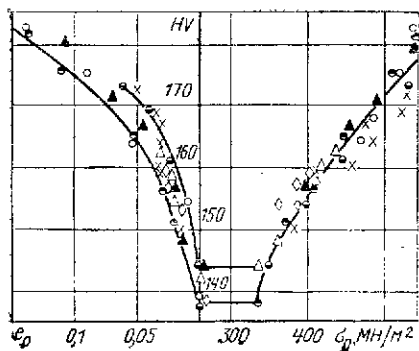


Рис. 33. Результаты экспериментальной проверки предположения о существовании единой кривой твердость — интенсивность напряжений: $\bullet$ — 1; $\circ$ — 2; Δ — 3; $\blacktriangle$ — 4; $\circ$ — 5; $\times$ — 6.

стой стали 20. Образцы 1—4 испытывались при постоянном отношении главных напряжений σ_2/σ_1 , которое у указанных образцов составило соответственно 0, —1, —0,5, +0,5. Образец № 5 нагружался таким образом, что в процессе деформирования отношение σ_2/σ_1 изменилось от 1 до 0. У образца № 6 это отношение изменилось на каждой ступени деформирования от 1 до 0.

Как видим, экспериментальные точки, полученные при различных напряженных состояниях и историях деформирования, расположились достаточно близко у кривой интенсивность напряжений σ_0 — твердость HV , построенной по результатам испытания материала на растяжение.

Расхождение кривых интенсивность деформаций ϵ_0 — твердость HV объясняется главным образом некоторым различием начальной твердости.

Аналогичные результаты были получены и при испытаниях трубчатых образцов из других материалов, а также при испытаниях сплошных цилиндрических образцов из стали на совместное кручение и растяжение.

Существование единой для различных напряженных состояний кривой интенсивность напряжений — твердость при вдавливании объясняется следующим.

Возьмем, например, два образца, изготовленных из одного материала и деформированных при различных однородных напряженных состояниях, но таким образом, чтобы максимальное значение интенсивности напряжений в обоих случаях было одинаковым. Различие в свойствах этих двух образцов сводится к различию в состоянии деформационной анизотропии. Поэтому при измерении твердости этих образцов, т. е. при вне-

стижение опытов, поставленных с целью выяснения этого вопроса, было проведено посредством испытания тоикостенных трубчатых образцов из стали, меди и латуни при совместном действии растягивающего усилия, крутящего момента и внутреннего давления. После каждой ступени деформирования образец разгружался и в 10 различных точках его боковой поверхности измерялась твердость по Виккерсу HV . На рис. 33 показаны результаты испытания образцов из малоуглеродистого

рени в них, например, сферического штампа, поведение их материала будет различным. Однако, как было показано в § 11 различие будет существенным лишь при сравнительно малых деформациях (до 2—3%). При испытаниях же на твердость происходят настолько большие пластические деформации, что этим различием в окрестностях отпечатка можно пренебречь. В силу этого в окрестности отпечатков на указанных двух образцах распределение интенсивности напряжений будет практически одинаковым, а следовательно, будет примерно одинаково среднее контактное давление при внедрении штампа, т. е. твердость этих образцов.

Подтверждением слабого влияния деформационной анизотропии на связь между твердостью и интенсивностью напряжений является и достаточно хорошее совпадение соотношений (2.117), (2.118).

Значительно более сложным является вопрос о влиянии истории деформирования на связь между твердостью и напряжениями. Наиболее важные в этом отношении результаты были получены при испытании тоикостенных образцов из стали, меди и латуни на кручение. По результатам испытания образца № 1 на кручение была построена диаграмма $\sigma_0 - HV - \epsilon_0$. На рис. 34 приведены результаты испытания образцов из стали 20. Образец № 2 вначале закручивали в одном направлении, затем его разгружали и в дальнейшем закручивали в противоположном направлении. На первой стадии закручивания результаты, полученные при испытании второго образца, естественно, совпадали с результатами испытания первого образца. После разгрузки и изменения направления деформирования предел текучести вследствие эффекта Баушингера понижается. Однако пластическая деформация в новом направлении не приводила

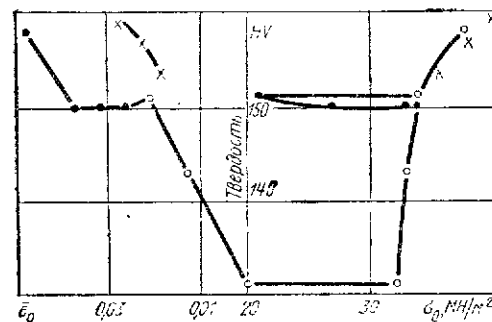


Рис. 34. Связь между твердостью, напряжением и деформацией при реверсивном кручении:

$\circ$ — кручение в прямом направлении; $\bullet$ — кручение в обратном направлении; $\times$ — тарировочная кривая

к изменению твердости до тех пор, пока интенсивность напряжений не достигала величины интенсивности перед разгрузкой. После этого кривая σ_0-HV совпадает с кривой, полученной при монотонном деформировании. Кривые же $\bar{\epsilon}_0-HV$ не совпали с тарировочной кривой, построенной в условиях монотонного деформирования.

Аналогичные результаты были получены при сжатии после растяжения, при кручении после растяжения, при сжатии цилиндрических образцов, выточенных в поперечном направлении из осажженных цилиндров.

Результаты проведенных экспериментов позволяют с достаточной для инженерных исследований точностью принять, что твердость пластически деформированного металла связана с максимальной за всю историю пластического деформирования интенсивности напряжений зависимостью, единой для различных напряженных состояний и историй пластического деформирования.

Для выяснения возможности определения напряженного состояния в процессах пластического деформирования, протекающих при повышенной температуре, методом измерения твердости была исследована связь между интенсивностью напряжений при повышенной температуре и твердостью остывшего металла.

На рис. 35 показана зависимость диаграмм $\sigma_0-HV-\bar{\epsilon}_0$ стали 20 от температуры [16]. Проведенные исследования показывают, что для определения напряжений при повышенных температурах (которые, разумеется, не должны быть выше температуры рекристаллизации) необходимо строить тарировочные графики по результатам испытаний материала при температуре исследуемого процесса пластического деформирования.

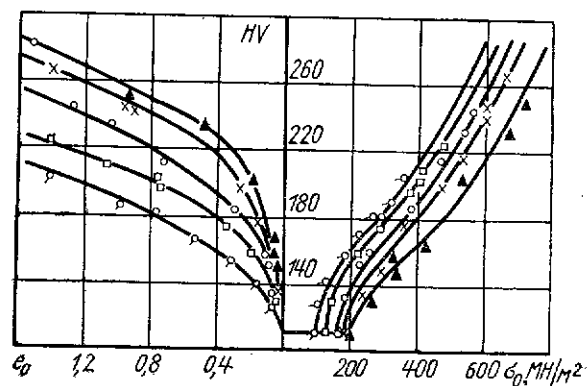


Рис. 35. Зависимость тарировочных кривых от температуры:

▲ — 300° С; × — 400° С; ○ — 450° С; □ — 500° С; ◇ — 530° С

Испытания тонкостенных трубчатых образцов из ряда материалов под действием осевой силы и внутреннего давления показали, что при повышенной температуре диаграмма σ_0-HV не зависит от вида напряженного состояния.

Рассмотренная зависимость диаграмм σ_0-HV и $\bar{\epsilon}_0-HV$ от температуры дает возможность определять температурные поля в некоторых процессах пластического деформирования. Если, например, методом делительных сеток определен параметр упрочнения $\bar{\epsilon}_0$ в различных точках тела, деформированного при повышенной температуре, то можно, располагая диаграммами $\sigma_0-HV-\bar{\epsilon}_0$ при различных температурах, определить по $\bar{\epsilon}_0$ и твердости распределение температуры, по температуре и твердости — распределение интенсивности напряжений при пластическом деформировании. Этим методом установлено распределение температуры при осадке нагретого цилиндра и «теплом» прессования.

Влияние остаточных напряжений на твердость незначительно. Это также объясняется большими пластическими деформациями при внедрении индентора. Поэтому возможно исследование напряжений при неоднородном пластическом деформировании без предварительной разрезки исследуемого тела для его разгрузки от остаточных напряжений.

Таким образом, если по результатам испытания материала на растяжение, сжатие или кручение и измерений твердости H на различных ступенях деформирования построить тарировочные графики σ_0-H , то можно по распределению твердости исследуемого пластически деформированного тела установить распределение интенсивности напряжений. Интенсивность деформаций можно определить по твердости лишь в случае, если кривая течения в исследуемом процессе совпадает с кривой течения в процессе испытания, по результатам которого построен тарировочный график. Но и в этом случае точность определения интенсивности деформации невысока. Зависимость точности определения $\bar{\epsilon}_0$ по твердости от величины деформации представлена схематично на рис. 36. При малых деформациях точность низкая вследствие того, что мала деформация $\bar{\epsilon}_0$, при больших деформациях — вследствие того, что низка упрочняемость.

Зависимость точности определения интенсивности напряжений по твердости от величины деформации незначительна. Наибольшая точность обычно достигается при измерениях твердости по Бринеллю под достаточно большой нагрузкой. При измерении твердости по Виккерсу точность обыч-

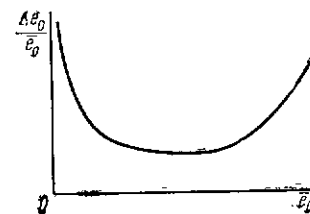


Рис. 36. Зависимость точности определения интенсивности деформации по твердости от деформации

но ниже. Наиболее низкой является точность определения напряжений при измерении микротвердости. Точность, естественно, зависит и от свойств материала, числа изменений твердости и т. д.

Установив измерением твердости распределение интенсивности напряжений, можно в ряде случаев определить напряженное состояние интегрированием дифференциальных уравнений равновесия. Весьма часто имеет смысл определять интенсивность напряжений по твердости и в случае определения напряженного состояния по кинематике деформирования. Целесообразность такого сочетания экспериментальных методов обусловлена следующим.

Для определения интенсивности напряжений по кинематике деформирования необходимо определить накопленную деформацию. Определение этой деформации, в особенности при нестационарном деформировании, оказывается весьма трудоемким. Так, если методом делительных сеток на основе теории пластического течения требуется определить напряженное состояние на некоторой стадии деформирования тела, то для определения приращений деформаций достаточно получить деформированную сетку на двух достаточно близких к рассматриваемой стадиях деформирования, а для определения накопленной деформации необходимо получить деформированную сетку на различных стадиях пластического деформирования, предшествовавших рассматриваемой (их число определяется главным образом кривизной траектории деформирования и во многих случаях оказывается достаточно большим).

Далее, серьезным источником погрешности определения напряжений по кинематике деформирования, в особенности при определении граничных условий из интегральных уравнений равновесия, является начальная неоднородность исследуемых тел, от которой не всегда удается избавиться даже при тщательной термической обработке. При определении интенсивности напряжений измерением твердости эти ошибки значительно ниже. Если начальная неоднородность вызвана пластическим деформированием (скажем, при изготовлении модели), она по понятным причинам вообще не приводит к ошибкам определения напряжений. Если же она обусловлена термической обработкой, то уменьшение, например, предела текучести в некоторой зоне приводит и к аналогичному снижению твердости, тем самым связь между твердостью и интенсивностью напряжений не очень искажается.

Анализ результатов экспериментальной проверки гипотез о существовании единой кривой течения и единой кривой твердость-интенсивность напряжений приводит к выводу, что погрешности определения интенсивности напряжений, связанные с этими гипотезами, примерно одинаковы.

§ 13. Определение напряженного состояния по распределению интенсивности напряжений

Если на рассматриваемой ступени деформирования исследуемого тела в некоторой его точке изменяется твердость, то можно по твердости с помощью тарировочного графика установить функцию $\sigma_0(x_i, q)$:

$$\frac{3}{2} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \sigma_{ij} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) = \sigma_0^2(x_i, q),$$

где параметр q характеризует общую деформацию исследуемого тела. Например, при исследовании осесимметричной осадки роль этого параметра может играть высота цилиндра или ее изменение. В каждом конкретном случае $q = \text{const}$, вследствие этого задача расшифровки экспериментальных данных совпадает с задачей теории неоднородных идеально пластических тел.

Другой метод экспериментального определения функции $\sigma_0(x_i, q)$ изложен в § 7.

В общем случае определение напряженного состояния по этой информации требует применения уравнений состояния и сопряжена с большими математическими трудностями. Поэтому ограничимся рассмотрением статически определимых задач.

1. При кручении стержней постоянного сечения

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2(x, y); \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Если положить, что

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad (2.119)$$

то в случае односвязного контура решение этой задачи можно получить следующим образом. Вдоль границы можно положить $F=0$. Если теперь вдоль нормалей к границе отложить отрезки длиной $\Delta h = \Delta F \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0}$, то их концы образуют кривую, вдоль которой $F = \Delta F$. Аналогичным образом можно построить кривую, вдоль которой $F = 2\Delta F$ и т. д. Определив функцию $F(x, y)$, можно по соотношениям (2.119) найти напряжения.

2. При плоском напряженном состоянии с осевой симметрией окружное σ_ϕ и радиальное σ_r напряжения связаны уравнением $\sigma_r^2 + \sigma_\phi^2 - \sigma_r \sigma_\phi = \sigma_0^2(r)$. Если добавить к этому уравнению дифференциальное уравнение равновесия, то получаем замкнутую систему двух уравнений с двумя неизвестными, которую легко решить методом конечных разностей.

3. При формообразовании тонкостенных осесимметричных

безмоментных оболочек* можно, пренебрегая касательными напряжениями, записать уравнение интенсивности напряжений в виде

$$(\sigma_m - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_m)^2 = 2\sigma_0^2, \quad (2.120)$$

где σ_m , σ_t — соответственно меридиональное и тангенциальное напряжения; σ_z — нормальное напряжение, направленное по нормали к срединной поверхности. Это напряжение изменяется от $-q$ на наружной поверхности до $-q'$ на внутренней поверхности. Примем, что на срединной поверхности

$$\sigma_z = -q - \frac{p}{2}, \text{ где } p = q' - q.$$

Это позволяет переписать уравнение (2.120) в виде

$$(\sigma_m - \sigma_t)^2 + \left(\sigma_t + \frac{p}{2} + q\right)^2 + \left(\frac{p}{2} + q + \sigma_m\right)^2 = 2\sigma_0^2. \quad (2.121)$$

Уравнения равновесия можно представить в форме

$$\frac{d}{dr}(\sigma_m h r) - \sigma_t h - \frac{f r}{\cos \alpha} p = 0; \quad (2.122)$$

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} - \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}, \quad (2.123)$$

где h — толщина оболочки в рассматриваемой точке на данной стадии деформирования; ρ_m — радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности; ρ_t — радиус кривизны сечения, перпендикулярного к дуге меридиана; α — угол между нормалью к срединной поверхности и осью симметрии; r — расстояние от рассматриваемой точки срединной поверхности до оси симметрии; f — коэффициент трения.

Пусть радиусы кривизны ρ_m , ρ_t , толщина h , интенсивность напряжений σ_0 и внешнее давление q являются экспериментально определенными функциями радиуса r . Тогда решением системы уравнений (2.121) — (2.123) можно определить напряжения σ_m , σ_t и давление q' на внутренней поверхности.

Из уравнений (2.121), (2.123) находим

$$p = \frac{1}{2a_1} \left[\sigma_m a_3 - q a_2 + \sqrt{(\sigma_m a_3 - q a_2)^2 - 4a_1 (q^2 - \sigma_0^2 + \sigma_m^2 a_4 + \sigma_m a_5 q)} \right], \quad (2.124)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{4} + \frac{\rho_t^2}{h^2} + \frac{\rho_t}{2h}; \quad a_2 = 1 + \frac{\rho_t}{h}; \quad a_3 = \frac{2}{h} \frac{\rho_t^2}{\rho_m} + \frac{\rho_t}{h} + \frac{1}{2} \frac{\rho_t}{\rho_m} - \frac{1}{2}; \quad a_4 = 1 + \frac{\rho_t^2}{\rho_m^2} + \frac{\rho_t}{\rho_m}; \quad a_5 = 1 - \frac{\rho_t}{\rho_m}.$$

Обозначив $\sigma_m h r = \psi$, получим из уравнений (2.122) — (2.124)

$$\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r} \frac{\rho_m}{\rho_t} \psi - \frac{1}{2a_1} \left(\rho_t + \frac{r t}{\cos \alpha} \right) \left[\frac{\psi}{h r} a_3 - q a_2 + \sqrt{\left(\frac{\psi}{h r} a_3 - q a_2 \right)^2 - 4a_1 \left(q^2 - \sigma_0^2 + \frac{\psi}{h^2 r^2} a_4 + \frac{\psi}{h r} q a_5 \right)} \right]. \quad (2.125)$$

Учитывая, что при $r=0$, $\psi=0$, численным решением уравнения (2.125) определяем ψ , а следовательно, и σ_m в различных точках меридиана. Далее по формуле (2.124) и из уравнения (2.123) находим p и σ_t .

Заметим, что по изложенной методике можно определять напряжения и при формообразовании многослойных оболочек в случаях, когда слои могут рассматриваться как тонкостенные безмоментные оболочки. При этом расчет начинают с наружного слоя (внешнее давление на этот слой предполагается заданным). Полученное при этом внутреннее давление является внешним для второго слоя. Это позволяет рассчитать напряжения во втором слое и т. д.

4. Наибольшее практическое значение имеет возможность определения напряжений при плоской деформации. В этом случае напряжения определяются решением системы уравнений

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2(x, y);$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

$$\text{где } k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0.$$

С помощью известной подстановки

$$\sigma_x = \sigma - k \sin 2\theta; \quad \sigma_y = \sigma + k \sin 2\theta; \quad \tau_{xy} = k \cos 2\theta, \quad (2.126)$$

где σ — гидростатическое давление; θ — угол между касательной к линии скольжения семейства α и осью x (линии скольжения семейств α и β образуют правую систему, в которой касательное напряжение положительно), получаем систему двух квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2k \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \sin 2\theta \frac{\partial k}{\partial x} - \cos 2\theta \frac{\partial k}{\partial y}; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2k \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\cos 2\theta \frac{\partial k}{\partial y} - \sin 2\theta \frac{\partial k}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Эта система уравнений была получена и исследована А. И. Кузнецовым при решении задачи о плоской деформации

* Излагаемая методика разработана совместно с С. П. Поповым.

неоднородных идеально пластических тел. Она относится к системам гиперболического типа, ее характеристики совпадают с линиями скольжения.

Вдоль линий скольжения α , β соответственно

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta, \quad d\sigma - 2kd\theta = \frac{\partial k}{\partial x} dy - \frac{\partial k}{\partial y} dx; \quad (2.128)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \theta, \quad d\sigma + 2kd\theta = -\frac{\partial k}{\partial x} dy + \frac{\partial k}{\partial y} dx. \quad (2.129)$$

Если на границе заданы нормальная и касательная составляющие распределенной нагрузки σ_n , τ_n , то вдоль этой границы, как и у неупрочняющегося материала [45],

$$\theta = \varphi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\tau_n}{k} + m\pi; \quad (2.130)$$

$$\sigma = \sigma_n \pm \sqrt{k^2 - \tau_n^2},$$

где под $\arccos$ понимается его главное значение; φ — угол между нормалью к контуру и осью x ; m — произвольное целое число. При выборе решения для θ и σ на границе следует иметь в виду, что угол между волокнами, совмещенными с линиями скольжения α , β , должен уменьшаться.

Если на границе тела заданы нагрузки, то напряженное состояние обычно определяется решением ряда краевых задач. Рассмотрим приемы численного решения основных из этих задач.

Начальная характеристическая задача. Требуется найти решение системы уравнений (2.127), если на отрезках линий скольжения oA , oB (рис. 37) заданы σ и θ , удовлетворяющие уравнениям (2.128), (2.129). Решение существует и единственно в области четырехугольника $oACB$, ограниченного линиями скольжения.

Пусть в различных точках этой области определены значения интенсивности касательных напряжений k . Разобьем рассматриваемую область на ряд подобластей таким образом, чтобы не менее чем в 15—20 точках каждой из них было известно k . В пределах каждой подобласти аппроксимируем зависимость k от координат полиномами (скажем, второй степени) так, чтобы на границах подобластей были непрерывны функция $k(x, y)$ и ее производные по координатам. В дальнейшем по коэффициентам этих полиномов можно определить значения k , $\frac{\partial k}{\partial x}$, $\frac{\partial k}{\partial y}$ в любой точке исследуемой области.

Разделим линии скольжения oA , oB на достаточно малые части. Определим координаты узла с сетки характеристик и значения σ и θ в нем по значениям этих величин, заданным в узлах o , a , b (рис. 37). Записав дифференциальные уравнения

характеристик (2.128), (2.129) в конечных разностях, получаем систему уравнений относительно координат x_c , y_c :

$$y_c - y_a + y_b - y_0 = (x_c - x_a + x_b - x_0) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\theta_a + \theta_b);$$

$$y_c - y_b + y_a - y_0 = (x_c - x_b + x_a - x_0) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\theta_a + \theta_b).$$

Следовательно,

$$x_c = x_0 + (x_a - x_b) \cos (\theta_a + \theta_b) + (y_a - y_b) \sin (\theta_a + \theta_b); \quad (2.131)$$

$$y_c = y_0 + (y_b - y_a) \cos (\theta_a + \theta_b) + (x_a - x_b) \sin (\theta_a + \theta_b).$$

Записав далее в конечных разностях соотношения на характеристиках (2.128), (2.129), получаем

$$\theta_c = \frac{\sigma_a - \sigma_b + \theta_a (k_a + k_c) + \theta_b (k_b + k_a) + \eta_{ac} - \eta_{bc}}{k_a + 2k_c + k_b}; \quad (2.132)$$

$$\sigma_c = \sigma_b + (k_b + k_c) (\theta_c - \theta_b) + \eta_{bc}^*.$$

где

$$\eta_{bc} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)_b + \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)_c \right] (y_c - y_b) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)_b + \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)_c \right] (x_c - x_b);$$

$$\eta_{ac} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)_a + \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)_c \right] (y_c - y_a) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)_a + \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)_c \right] (x_c - x_a). \quad (2.133)$$

Аналогично по информации относительно узлов a , c , d определяем x , y , σ , θ в узле e и т. д. во всей области $oACB$.

Рассмотрим вырожденный случай этой задачи, когда отрезок линии скольжения oB стягивается в точку o (рис. 38). Заданы σ и θ на отрезке линии скольжения oA , удовлетворяющие уравнениям (2.128), и угол раствора AOC . Решение су-

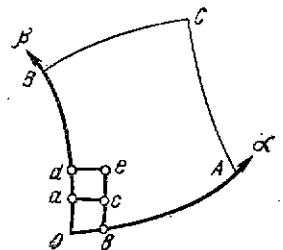


Рис. 37. — К решению начальной характеристической задачи

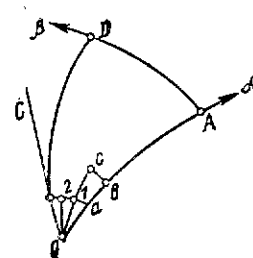


Рис. 38. Вырожденный случай начальной характеристической задачи

существует и единственно в области криволинейного треугольника AoD .

Разделим отрезок oA на ряд малых частей точками $a, b, \dots$. Разделим далее угол AoD на ряд малых углов $\Delta\alpha$ лучами $o1, o2, \dots, on, \dots$. Соответствующие этим лучам значения угла θ в точке o определим по соотношению

$$\theta_{on} = \theta_0 + \Delta\alpha n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где θ_0 — величина угла θ , заданная в точке o линии скольжения oA .

Гидростатическое давление σ , как и θ , разрывно в точке o . Ограничившись рассмотрением случая, когда производные $\frac{\partial k}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y}$ конечны, получим из соотношения (2.129) на β -линии значения σ в точке o , соответствующие лучам $o1, o2, \dots$:

$$(\sigma)_{on} = (\sigma)_o - 2k\Delta\alpha n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.134)$$

Здесь $(\sigma)_o$ — гидростатическое давление в точке o линии скольжения oA .

Координаты точки 1 и значения σ и θ в ней определяем по формулам (2.131), (2.132), подставив в них вместо x, y, θ, σ в точках o, a, b, c те же величины соответственно в точках $o, a, o1, 1$. Аналогично выполняется расчет в точках $2, 3, \dots$. В дальнейшем задачу решают так же, как в общем случае начальной характеристической задачи.

Если в точку стягивается отрезок линии скольжения α , то вместо уравнения (2.134) имеем

$$(\sigma)_{on} = (\sigma)_o + 2k\Delta\alpha n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Задача Коши. Функции σ и θ , непрерывные вместе с первыми производными по координатам, заданы на дуге гладкой кривой AB , ни в одной точке не касающейся площади максимального касательного напряжения и пересекаемой каждой характеристикой только один раз. Эта задача является практически наиболее важной. Ее решением, например, определяют напряжения в области, примыкающей к свободному контуру. Искомое решение существует и единственно в треугольной области, ограниченной дугой AB и линиями скольжения α, β , исходящими из ее концов (рис. 39).

Сгладив результаты измерений k изложенным выше способом, разделим дугу AB на ряд достаточно малых частей точками $a, b, \dots$. Координаты узла d найдем по приближенным формулам

$$\begin{aligned} x'_d &= \frac{y_b - y_a + x_a \operatorname{tg} \theta_a + x_b \operatorname{ctg} \theta_b}{\operatorname{tg} \theta_a + \operatorname{ctg} \theta_b}; \\ y'_d &= y_a + (x_d - x_a) \operatorname{tg} \theta_a. \end{aligned} \quad (2.135)$$

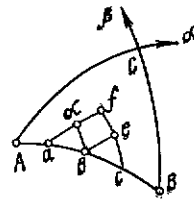


Рис. 39. К решению задачи Коши

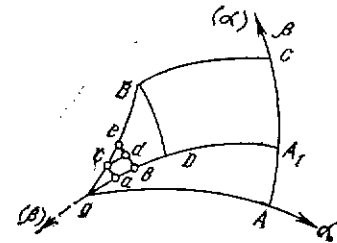


Рис. 40. К решению смешанной задачи

Затем по соотношению, аналогичному (2.132), определим σ_d, θ'_d и уточним положение этого узла, подставив в (2.135) вместо θ_a, θ_b соответственно $\frac{1}{2}(\theta_a + \theta'_d), \frac{1}{2}(\theta_b + \theta'_d)$. После этого по формулам, подобным (2.132), рассчитывали σ и θ в этом узле. Аналогично выполняется расчет во всех узлах первого ряда. В дальнейшем решение не отличается от решения начальной характеристической задачи.

Смешанная задача заключается в отыскании решения системы уравнений (2.127), если σ и θ заданы вдоль отрезка линии скольжения oA , а вдоль гладкой кривой oB , не имеющей характеристических направлений, задан угол θ . Решение задачи существует и единственно в области $oABC$ (рис. 40).

По величине угла θ в точке O отрезков oA и oB определяем угол раствора AoA_1 , который предполагается острым. Решение в области AoA_1 находим, как в вырожденном случае начальной характеристической задачи.

Затем делим отрезок oB на ряд достаточно малых частей. Построение начинаем с точки a . Решением системы уравнений

$$\begin{aligned} y'_c - y_a &= (x'_c - x_a) \operatorname{ctg} \theta_a, \\ y &= y(x), \end{aligned} \quad (2.136)$$

где $y(x)$ — уравнение кривой oB , находим координаты x'_c, y'_c точки c в первом приближении. В этой точке угол θ известен.

Подставив в (2.136) вместо θ_a средний угол $\frac{1}{2}(\theta_a + \theta'_c)$,

найдем уточненное положение точки a и т. д., пока различие между двумя последовательными значениями координат не окажется достаточно малым. Если θ не изменяется вдоль oB , то координаты точки c сразу же определяются из системы уравнений (2.136), в которую вместо θ_a подставляют $\frac{1}{2}(\theta_a + \theta_c)$.

Гидростатическое давление в точке c определяют по формуле

$$\sigma_c = \sigma_a - (k_a + k_c)(\theta_c - \theta_a) + \eta_{ac}, \quad (2.137)$$

где η_{ac} см. (2.133).

Весьма часто на отрезке oB известен не угол θ , а коэффициент трения по Кулону

$$f = \frac{\tau_n}{\sigma_n}. \quad (2.138)$$

В этом случае расчет выполняется следующим образом. Вначале определяются координаты точки c и гидростатическое давление в этой точке σ'_c при $f=0$. Затем из уравнения (2.130) при $\tau_n=0$ находят σ'_n , а из уравнений (2.130), (2.138) определяют θ'_c первого приближения. Повторив расчет с учетом полученного значения θ , находят σ'_n и т. д., пока различие в двух последовательных σ_n не окажется достаточно малым.

Затем по формулам, аналогичным (2.131), (2.132), находят координаты узла d и значения σ , θ в этом узле. Точка e определяется так же, как и точка c , т. е. во всей области oBD . В области A_1CBD решают начальную характеристическую задачу.

Изменение расчета при ином направлении характеристик (оно показано на рис. 40 пунктиром) незначительно. В этом случае вместо первого из уравнений (2.136) имеем

$$y'_c - y_a = (x_c - x_a) \operatorname{tg} \theta_a,$$

а вместо уравнения (2.137)

$$\sigma_c = \sigma_a + (k'_a + k'_c)(\theta_c - \theta_a) + \eta_{ac}.$$

Определив в исследуемой области σ и θ , по формулам (2.126) вычисляют напряжения.

По изложенной методике определено, в частности, напряженное состояние при резании закаленных сталей*. Методика эксперимента была следующей.

Зафиксированные при заданной скорости резания корни стружек шлифовали и тщательно полировали. В различных точках среднего по толщине корня сечения измеряли твердость. Результаты измерений предварительно сглаживали проведением изолиний. На рис. 41 приведено полученное в одном из исследованных случаев распределение интенсивности касательных напряжений.

Тарировочные графики строили по результатам испытаний цилиндрических образцов на осевое сжатие со смазкой. По распределению твердости с помощью этих графиков находили распределение интенсивности касательных напряжений.

* Исследование выполнено совместно с В. А. Кондратьевым и Н. А. Новиковым.

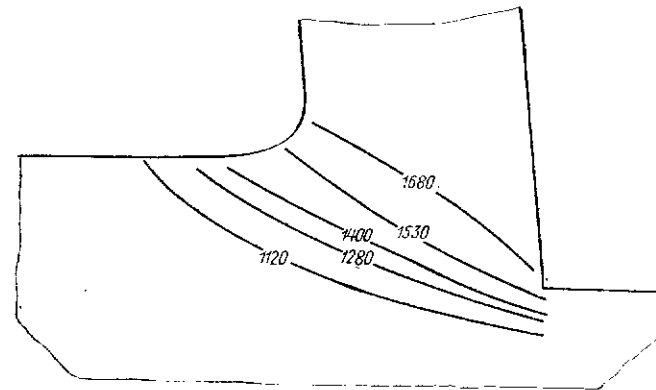


Рис. 41. Распределение интенсивности касательных напряжений в МН/м² при резании стали 30ГСНА резцом с передним углом $\gamma = -6^\circ$ со скоростью 40 м/мин и подачей 0,15 мм/об

В области ABC (рис. 42) напряжения определяли решением задачи Коши. Однако эта область охватывает лишь небольшую часть зоны стружкообразования и незначительный отрезок линии OK . С тем чтобы определить напряжения вдоль всей линии OK , дальнейшую расшифровку экспериментальных данных производили в предположении, что, начиная с некоторого удаления от свободной границы, эта линия совпадает с линией скольжения. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что это предположение приемлемо.

В сетке линий скольжения, полученной решением задачи Коши, находили α -линию, пересекающую прямую OK под прямым углом. Начиная с этой точки (точки N на рис. 42) в области $C'NOD$ решали начальную характеристическую задачу.

Напряжения определены при резании закаленных сталей 30ХГСНА и 38ХМЮА резцами из эльбора с различными передними углами γ (+5, -6, -31°). Скорость резания изменялась от 40 до 120 м/мин.

На рис. 43 приведены полученные эпюры напряжений вдоль линии OK . Касательные напряжения распре-

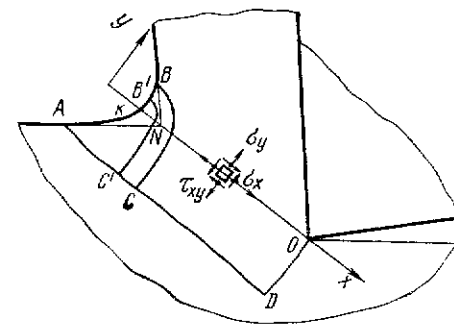


Рис. 42. К определению напряжений при резании

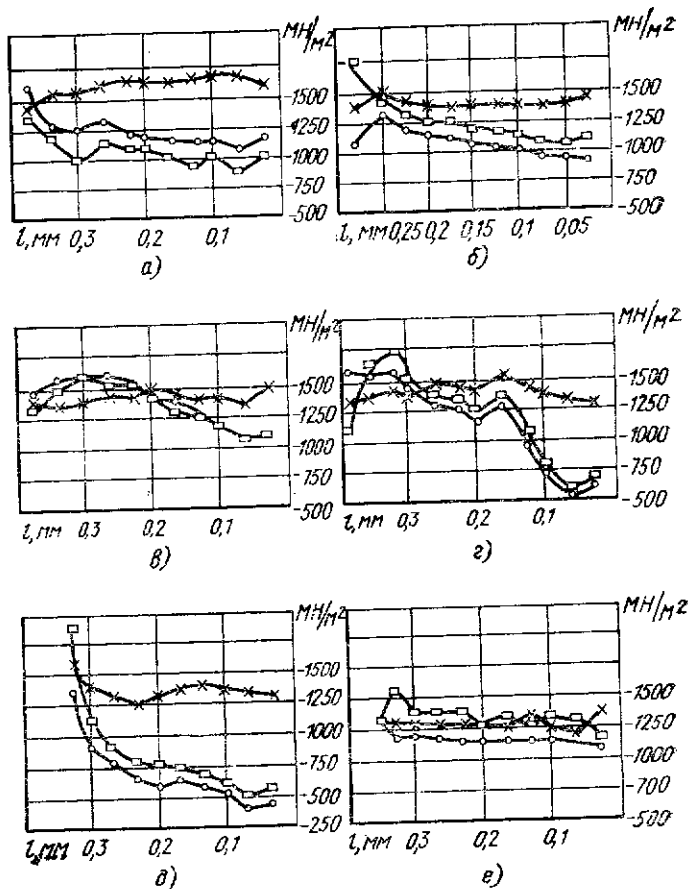


Рис. 43. Эпюры напряжения при резании закаленных сталей:
 —○— σ_x —□— σ_y —×— τ_{xy} сталь 30ХГСА: а — $\gamma = -6^\circ$, $v = 40$ м/мин; б — $\gamma = -6^\circ$, $v = 60$ м/мин; в — $\gamma = -6^\circ$, $v = 120$ м/мин;
 г — $\gamma = -31^\circ$, $v = 60$ м/мин; сталь 38ХМЮА: д — $\gamma = 5^\circ$, $v = 60$ м/мин;
 е — $\gamma = 6^\circ$, $v = 60$ м/мин

лены вдоль этой линии достаточно равномерно. Нормальные напряжения возрастают в направлении к свободной поверхности. Уменьшение переднего угла резца приводит к возрастанию всех напряжений. Обращает на себя внимание высокий уровень гидростатического давления в исследованных случаях, что, по-видимому, является следствием невысокой упрочняемости исследованных сталей.

Высокое гидростатическое давление обеспечивает благоприятные условия для деформирования. Этим объясняется тот факт, что при резании сравнительно хрупких сталей 30ХГСА

и 38ХМЮА образуется элементарно-сливная, а во многих случаях и сливная стружка. Понижением гидростатического давления у вершины резца объясняется появление трещин вблизи этой вершины при больших отрицательных передних углах.

§ 14. Определение напряженного состояния при осесимметричной деформации по волокнистой макроструктуре и распределению твердости

Во многих случаях эффективно сочетание различных экспериментальных методов. Примером тому может служить излагаемый далее экспериментально-расчетный метод.

Исходными экспериментальными данными для определения напряжений являются распределения окружных деформаций, интенсивности напряжений и интенсивности деформаций в пластической области. Распределение окружных деформаций может быть получено выявлением волокнистой макроструктуры деформированного тела. Если волокно в недеформированном состоянии параллельно оси z , то после пластического деформирования можно определить окружную деформацию e_ϕ в любой его точке по формуле (2.6).

Распределение интенсивности напряжений и деформаций определяется измерением твердости. С этой целью путем испытания образцов из исследуемого материала на растяжение или сжатие с промежуточными разгрузками для измерения твердости строится тарировочный график, связывающий интенсивность напряжений, твердость и интенсивность деформаций (см. § 12).

Измерив твердость в различных точках деформированного тела, определяют по тарировочному графику распределение интенсивности напряжений σ_0 и, исходя из предположения о единой кривой течения, соответствующее распределение интенсивности деформации e_0 .

Обозначим через σ_1 , σ_ϕ , σ_3 главные напряжения. Подставив выражение гидростатического давления $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_\phi + \sigma_3}{3}$ в соотношение деформационной теории пластичности

$$\sigma_\phi - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{e_0} e_\phi, \text{ получим}$$

$$\sigma_\phi = p + f, \quad (2.139)$$

$$\text{где } p = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; f = \frac{\sigma_0}{e_0} e_\phi.$$

Функция f определяется непосредственно по экспериментальным данным.

Из выражения интенсивности напряжений

$$(\sigma_1 - \sigma_3^2) + (\sigma_3 - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_1 - \sigma_\varphi)^2 = 2\sigma_0^2(r, z)$$

и соотношения (2.139) при $\sigma_1 > \sigma_3$ получаем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tilde{\sigma}_0(r, z), \quad (2.140)$$

где

$$\tilde{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{e_\varphi}{e_0}\right)^2}. \quad (2.141)$$

Подставив соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta = p - \frac{\tilde{\sigma}_0}{2} \sin 2\theta; \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta = p + \frac{\tilde{\sigma}_0}{2} \sin 2\theta; \\ \tau_{rz} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta = \frac{\tilde{\sigma}_0}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2.142)$$

в дифференциальные уравнения равновесия (2.101), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} - \tilde{\sigma}_0 \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} - \tilde{\sigma}_0 \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} \sin 2\theta - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial z} \cos 2\theta + \frac{\tilde{\sigma}_0}{2r} \sin 2\theta + \frac{f}{r}; \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \tilde{\sigma}_0 \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} + \tilde{\sigma}_0 \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} \cos 2\theta - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial z} \sin 2\theta - \frac{\tilde{\sigma}_0}{2r} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Неизвестными в этих уравнениях являются p и θ — угол между касательной к линии скольжения семейства α и радиусом r . Линии скольжения α, β в каждой своей точке образуют углы соответственно $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ с направлением главного напряжения σ_1 . Их направления фиксированы таким образом, чтобы они образовали правую систему координат, в которой касательное напряжение положительно.

Анализ полученной системы уравнений показывает, что она относится к классу гиперболических, ее характеристики взаимно ортогональны и совпадают с линиями скольжения.

Вдоль линий скольжения α, β

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \theta;$$

$$dp - \tilde{\sigma}_0 d\theta = \left(\frac{f}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial z} \right) dr + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0}{r} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} \right) dz; \quad (2.144)$$

$$\frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \theta;$$

$$dp + \tilde{\sigma}_0 d\theta = \left(\frac{f}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial z} \right) dr - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0}{r} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} \right) dz. \quad (2.145)$$

Нормальная и касательная составляющие напряжений на контуре σ_n, τ_n связаны с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_z \sin^2 \varphi + \tau_{rz} \sin 2\varphi; \\ \tau_n &= \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_z) \sin 2\varphi + \tau_{rz} \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (2.146)$$

где φ — угол между радиусом и нормалью к контуру.

Подставив соотношения (2.142) в (2.146), получаем

$$\sigma_n = p - \frac{\tilde{\sigma}_0}{2} \sin 2(\theta - \varphi); \quad \tau_n = \tilde{\sigma}_0 \cos 2(\theta - \varphi),$$

откуда

$$\theta = \varphi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{2\tau_n}{\tilde{\sigma}_0} + m\pi; \quad p = \sigma_n + \frac{\tilde{\sigma}_0}{2} \sin 2(\theta - \varphi). \quad (2.147)$$

Если контур свободен от нагрузки ($\sigma_n = 0, \tau_n = 0$), то соотношения (2.147) упрощаются:

$$\theta = \varphi \pm \frac{\pi}{4} + m\pi; \quad p = \pm \frac{\tilde{\sigma}_0}{2}. \quad (2.148)$$

Выбор решения осуществляется так же, как и при исследовании плоской деформации (§ 13).

Таким образом, по соотношениям (2.147), (2.148) можно определить p и θ на границе исследуемой области, если на ней заданы нагрузки σ_n и τ_n . Дальнейшая расшивка экспериментальных данных связана с решением различных краевых задач и выполняется примерно так же, как и при исследовании плоской деформации измерением твердости. При этом остаются справедливыми все конечноразностные формулы, приведенные в § 13, если в них заменить x, y, σ, k на $r, z, p, \frac{1}{2} \sigma_0$ соответственно, за исключением формул (2.133). Вместо последних имеем

$$\begin{aligned} \eta_{bc} &= \frac{1}{4} \left[2 \left(\frac{f_b}{r_b} + \frac{f_c}{r_c} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial z} \right)_b - \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial z} \right)_c \right] (r_c - r_b) + \\ &+ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\tilde{\sigma}_0}{r_b} \right)_b + \left(\frac{\tilde{\sigma}_0}{r_c} \right)_c + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} \right)_b + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} \right)_c \right] (z_c - z_b); \end{aligned}$$

$$\vartheta_{ac} = \frac{1}{4} \left[2 \left(\frac{f_a}{r_a} + \frac{f_c}{r_c} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial z} \right)_a + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial z} \right)_c \right] (r_c - r_a) - \\ - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\tilde{\sigma}_0}{r_a} \right)_a + \left(\frac{\tilde{\sigma}_0}{r_c} \right)_c + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} \right)_a + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} \right)_c \right] (z_c - z_a).$$

Предварительному сглаживанию подвергаются в этом случае функции σ_0 и f .

Если положить $e_\varphi = \pm \frac{e_0}{2}$, то из (2.144), (2.145) следуют соотношения на характеристиках при определении напряженного состояния в случае осесимметричного деформирования по известному распределению интенсивности напряжений в предположении Хаара-Кармана о равенстве окружного и радиального напряжений [11]. Если к тому же положить, что $\sigma_0 = \text{const}$, то получим соответствующие соотношения теории идеальной пластичности. При $r \rightarrow \infty$ и $e_\varphi = 0$ получаем из (2.144), (2.145) соотношения (2.128), (2.129). И, наконец, если положить, что $r \rightarrow \infty$, $e_\varphi = 0$, $\sigma_0 = \text{const}$, то получаем соотношения на линиях скольжения при плоской деформации идеально пластических тел. Это позволило положить изложенную методику в основу алгоритма и программы для ЦВМ, реализующей решение всех перечисленных задач.

На рис. 44 приведены результаты, полученные Н. А. Новиковым по указанной программе при обработке экспериментальных данных исследования внедрения сферического штампа диаметром 30 мм в плоскую поверхность образца из стали 15Х,

выполненного К. Н. Цукублиной. При этом исходили из следующих граничных условий. Граница AB (ее аппроксимировали прямой) свободна от нагрузки, коэффициент трения на AF принят равным 0,1, как это наблюдается в подобных условиях при осадке. В области ABC решали задачу Коши, в области ACD — начальную характеристическую задачу и в области ADE — смешанную задачу.

На рис. 44 показаны сетка линий скольжения и напряжения на поверхности сферического отпечатка диаметром 15,7 мм. Равнодействующая σ_z отличалась от усилия вдавливания, измеренного при внедрении, на 12%.

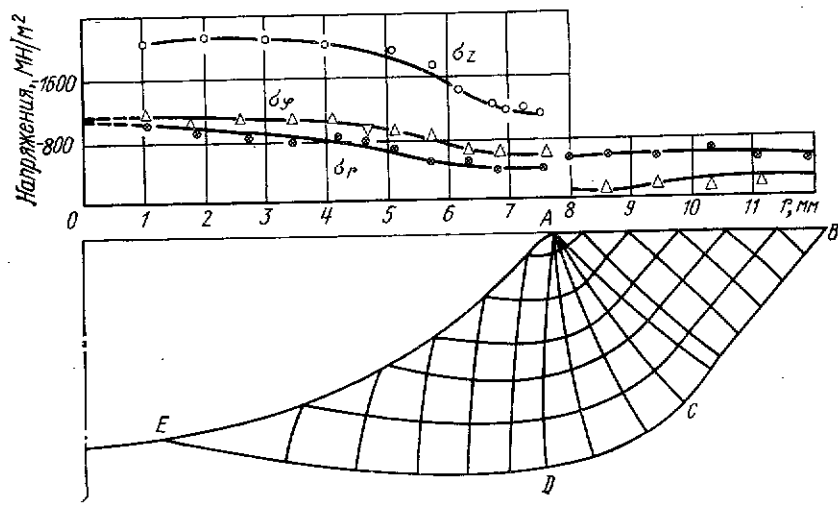


Рис. 44. Эпюры напряжений при внедрении сферического штампа в сталь 15Х

Глава III

Устойчивость

пластического деформирования

§ 15. Инженерные критерии

Практическая важность проблемы устойчивости пластического деформирования обусловлена в первую очередь тем, что в результате ее решения удастся оценить предельную (или критическую) деформацию при многочисленных процессах обработки металлов давлением в зависимости от напряженного состояния и свойств материала. Превышение этой деформации приводит к потере устойчивости пластического деформирования, выражающейся в образовании складок, хлопнунов, местных утонений, по которым затем происходит разрыв материала, и т. д., и является часто причиной брака, в особенности при листовой штамповке.

В теории пластичности получили некоторое развитие методы оценки устойчивости упругопластического равновесия элементов конструкций, основанные главным образом на критериях устойчивости, хорошо зарекомендовавших себя в упругой области. Однако применение этих критериев при решении технологических задач обычно сопряжено с большими математическими трудностями, обусловленными тем, что при обработке металлов давлением и резанием возникают большие деформации и перемещения. В связи с этим получила распространение инженерная теория устойчивости пластического деформирования, исходящая из приближенных критериев.

Внимание к феномену неустойчивости пластического деформирования было привлечено явлением образования шейки при растяжении стержня [29]. Основываясь на многочисленных наблюдениях, показавших, что при отсутствии ползучести шейка у растягиваемого стержня появляется при максимальной нагрузке, Г. Закс и Д. Лубан предположили, что и в более общем случае пластическое деформирование становится неустойчивым при достижении одной из нагрузок экстремального значения. Согласно этому критерию пластическое деформирование устойчиво, если положительны добавочные нагрузки

$$d|P_i| > 0. \quad (3.1)$$

С использованием этого критерия решены многочисленные задачи, касающиеся главным образом устойчивости пластического деформирования листовых материалов [36, 44].

В последнее время опубликован ряд работ [46, 31], в которых при исследовании устойчивости пластического деформирования исходят из критерия, согласно которому пластическое деформирование устойчиво, если положительна работа добавочных нагрузок:

$$\sum_i dP_i dl_i > 0. \quad (3.2)$$

Здесь l_i — обобщенные перемещения, на которых совершают работу обобщенные силы P_i . Например, если под P_i понимать внешний момент, то l_i представляет собой угловое перемещение в точке приложения момента по направлению момента.

Такой подход к решению проблемы впервые использован Б. Старкерсом [46], исследовавшим устойчивость тонкостенных трубок, нагружаемых осевой силой и крутящим моментом.

В случае пропорционального нагружения, когда силы P_i изменяются пропорционально некоторому параметру, критерии (3.1) и (3.2) совпадают, поскольку в этом случае в критическом состоянии одновременно все $dP_i = 0$.

Рассмотрим, например, устойчивость пластического растяжения стержня. Наблюдения показывают, что при осевом растяжении стержня постоянного поперечного сечения он до некоторой деформации сохраняет первоначальную геометрическую форму. При достижении критического удлинения пластическая деформация локализуется вблизи некоторого сечения, образуется так называемая шейка, по которой в дальнейшем происходит разрыв стержня. Иногда образуются одновременно две или даже три шейки.

Основываясь на критерии устойчивости (3.1), определим величину критической деформации стержня из несжимаемого материала с чисто деформационным упрочнением.

Нагрузка при растяжении $P = \sigma_0 F$, где F — площадь поперечного сечения стержня. Согласно критерию (3.1) условие устойчивого деформирования запишется в виде

$$dP = \sigma_0 dF + F d\sigma_0 > 0. \quad (3.3)$$

$$\text{Поскольку } \frac{dF}{F} = -\frac{dl}{l} = -\overline{de}_0,$$

где l — длина стержня в рассматриваемый момент деформирования, можно переписать условие (3.3) в виде

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} > 1. \quad (3.4)$$

Из этого условия, взятого со знаком равенства, можно определить критическую деформацию.

В момент начала образования шейки

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon_0} = \frac{1}{Z} = 1,$$

где Z — подкасательная кривой течения материала (см. рис. 45). Таким образом, начало образования шейки соответствует точке кривой течения, в которой подкасательная $Z=1$.

Если аппроксимировать кривую течения уравнением

$$\sigma_0 = Ae_0^n, \quad (3.5)$$

то из условия (3.4) получаем $e_{кр} = n$.

При выполнении условия (3.4) со знаком равенства нагрузка P достигает максимального значения и происходит спонтанное удлинение стержня. В этом смысле его равновесие неустойчиво, и если речь идет о некотором элементе конструкции, то его несущая способность исчерпана. Но для технологических процессов характерно, что обычно заданы не нагрузки на заготовку, а кинематика пластического деформирования. Технологические машины за редким исключением способны работать как при возрастающей, так и при понижающейся нагрузке. В связи с этим при исследовании технологических процессов интересуются не пластической неустойчивостью, выражающейся в том, что малое изменение нагрузки вызывает большое изменение деформации, а неустойчивостью, приводящей к недопустимому изменению геометрической формы заготовки (например, если прямой при устойчивом деформировании стержень после потери устойчивости становится кривым; если у растягиваемого листа появляется локальное утонение и т. д.). В дальнейшем рассматривается локализация пластической деформации. В связи с этим важно выяснить, насколько надежно предсказывает рассматриваемые критерии неустойчивость именно этого типа. Проведенный анализ растяжения стержня имеет для нас смысл, лишь поскольку согласно наблюдениям в этом случае оба типа неустойчивости оказываются совмещенными. Объясняется это следующим.

Вследствие неизбежных неточностей изготовления образца площадь его поперечного сечения переменная. Пусть на рис. 46

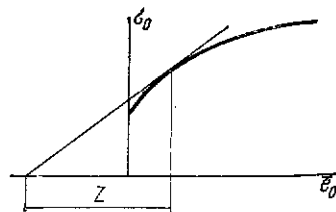


Рис. 45. К определению подкасательной

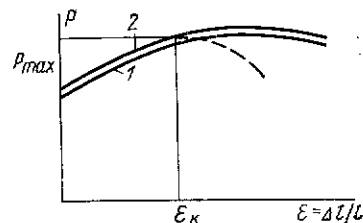


Рис. 46. Критическая деформация при растяжении

кривые 1 и 2 изображают соответственно диаграммы растяжения стержней постоянного сечения с площадью, равной минимальной и средней площади поперечного сечения рассматриваемого образца, рассчитанные по кривой течения материала при условии устойчивого деформирования. При деформации $\varepsilon < \varepsilon_k$ диаграмма растяжения образца следует кривой 2. При деформации $\varepsilon > \varepsilon_k$ усилие в наименьшем сечении уменьшается, а это означает, что прочные области разгружаются. Пластическая деформация локализуется в окрестности наименьшего сечения, образуется шейка. Диаграмма растяжения образца при этом соответствует штриховой линии на рис. 46. Аналогичным образом может привести к локализации деформации и неоднородность свойств материала стержня.

Заметим, что если материал обладает не только деформационным, но и скоростным упрочнением, т. е. если $\sigma_0 = \sigma_0(\bar{\varepsilon}_0, \dot{\varepsilon}_0)$, то локализация деформации приведет к возрастанию скорости деформации в наименьшем сечении, материал упрочнится, в силу этого нагрузка, воспринимаемая этим сечением, возрастет и может происходить дальнейшая пластическая деформация всего образца.

Однако и при чисто деформационном упрочнении возникновение местных утонений при максимальной нагрузке в более общем случае далеко не очевидно.

Приведем результаты экспериментальной проверки указанных критериев, выполненной совместно с Л. К. Спиридоновым испытанием сплошных цилиндрических образцов на совместное растяжение и кручение по методике, подробно рассматриваемой в следующей главе. Образцы деформировали таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{d\gamma'}{d\varepsilon_z} = c \approx \text{const}, \quad (3.6)$$

где $d\varepsilon_z$ — приращение осевой деформации; $d\gamma'$ — приращение сдвига на поверхности ($d\gamma = 2 d\varepsilon_{\phi z}$, штрихами здесь и в дальнейшем отмечаются напряжения и деформации у поверхности образца). Нагружение, таким образом, можно считать близким к простому.

Согласно критерию положительности добавочных нагрузок потеря устойчивости деформирования таких образцов произойдет при выполнении одного из условий

$$dP = 0 \quad (3.7)$$

или

$$dM = 0. \quad (3.8)$$

Приращение осевой силы

$$dP = 2\pi \int_0^R d\sigma_z r dr + [2\pi \sigma'_z R dR, \quad (3.9)$$

где R — радиус образца. Из (3.7) следует, что при критической деформации

$$\int_0^R d\sigma_z r dr + \sigma'_z R dR = 0. \quad (3.10)$$

Пренебрегая влиянием деформационной анизотропии, запишем в соответствии с (2.85)

$$\sigma_z = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{d\epsilon_0} (2d\epsilon_z + d\epsilon_\varphi), \quad (3.11)$$

где $d\epsilon_\varphi$ — приращение окружной деформации.

Учитывая, что на поверхности образца $d\epsilon_z = -2d\epsilon_\varphi$, получаем

$$\sigma_z = \frac{\sigma_0}{d\epsilon_0} d\epsilon_z. \quad (3.12)$$

Поскольку в процессе деформирования $\frac{d\epsilon_z}{d\epsilon_0} \approx \text{const}$;

$$d\sigma_z = \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} d\epsilon_z. \quad (3.13)$$

Подставив (3.13) в (3.10) и учитывая, что $d\epsilon_z$ не зависит от радиуса r , а

$$dR = -\frac{1}{2} R d\epsilon_z, \quad (3.14)$$

получаем

$$\sigma'_z = \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} r dr. \quad (3.15)$$

Поскольку $\tau' = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{d\epsilon_0} d\gamma$,

из (3.12) следует, что

$$\frac{\tau'}{\sigma'_z} = \frac{1}{3} \frac{d\gamma'}{d\epsilon_z} = \frac{1}{3} c. \quad (3.16)$$

Следовательно,

$$\sigma'_0 = \sqrt{(\sigma'_z)^2 + 3(\tau')^2} = \sigma'_z \sqrt{1 + \frac{c^2}{3}}. \quad (3.17)$$

Учитывая это, получаем из (3.15), что $dP=0$ при

$$\sigma'_0 = \frac{2}{R^2} \sqrt{1 + \frac{c^2}{3}} \int_0^R \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} r dr. \quad (3.18)$$

Деформацию, при которой $dP=0$, определяли с помощью соотношения (3.18) следующим образом. Распределение накоп-

ленной интенсивности деформации вдоль радиуса описывается уравнением

$$\bar{e}_0 = \bar{e}'_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{c^2}{3} \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{c^2}{3}}}. \quad (3.19)$$

Задаваясь c и различными значениями накопленной интенсивности деформации на поверхности $\bar{e}'_0$, по (3.19) находили соответствующие распределения $\bar{e}_0$ вдоль радиуса образца; по ним и кривой течения материала находили распределение производной $\frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0}$ и посредством графического интегрирования определяли по (3.18) σ'_0 в зависимости от e'_0 . Координаты пересечения графика этой зависимости с кривой течения материала и определяют при заданном c величину деформации, при которой $dP=0$.

Обратимся теперь к условию (3.8). Приращение крутящего момента

$$\frac{1}{2\pi} dM = \int_0^R d\tau r^2 dr + \tau R^2 dR = 0. \quad (3.20)$$

Аналогично (3.13)

$$d\tau = \frac{1}{3} \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} d\gamma. \quad (3.21)$$

Учитывая линейное распределение сдвигов вдоль радиуса и используя выражение (3.21), преобразуем зависимость (3.20) к виду

$$\frac{c}{3} \int_0^R \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} r^3 dr = \frac{1}{2} R^4 \tau'. \quad (3.22)$$

Из уравнений (3.16), (3.17), (3.22) находим интенсивность напряжений, при которой $dM=0$:

$$\sigma'_0 = \frac{2}{R^4} \sqrt{1 + \frac{c^2}{3}} \int_0^R \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} r^3 dr. \quad (3.23)$$

Деформацию, при которой $dM=0$, определяем с помощью уравнения (3.23), как и в предыдущем случае.

Согласно критерию положительности работы добавочных нагрузок потеря устойчивости деформирования образца произойдет при выполнении условия

$$dP dl + dM d\varphi = 0, \quad (3.24)$$

где dl , $d\varphi$ — приращения длины образца и угла закручивания.

$$dl = l d\epsilon_z; \quad (3.25)$$

$$d\varphi = d\left(\frac{l\gamma'}{R}\right) = \frac{l}{R} d\gamma' + \frac{\gamma'}{R} dl - \frac{l\gamma'}{R^2} dR. \quad (3.26)$$

Используя соотношения (3.17), (3.25), (3.26), преобразуем условие (3.21) к виду

$$RdP + \left(c + \frac{3}{2}\gamma'\right) dM = 0. \quad (3.27)$$

Из этого уравнения после несложных преобразований находим интенсивность напряжений при выполнении условия (3.24)

$$\sigma'_0 = \frac{2\sqrt{1+\frac{c^2}{3}}}{R^2\left[1+\frac{c}{3}\left(c+\frac{3}{2}\gamma'\right)\right]} \int_0^R \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} \left[R + \left(c + \frac{3}{2}\gamma'\right) \frac{r}{3} c\right] r dr. \quad (3.28)$$

Критическую деформацию определяли согласно этому уравнению приемами, аналогичными изложенным ранее.

При экспериментальной проверке рассматриваемых критериев устойчивости пластического деформирования испытывали образцы из стали 30ХМА, ШХ15, латуни Л62 и меди М1. Образцы каждого материала были изготовлены из одного прутка. После механической обработки их подвергали рекристаллизационному отжигу.

После появления шейки образцы разгружали и на удалении от нее измеряли диаметр D и угол α между риской, проведенной до испытания параллельно оси, и образующей цилиндра.

Докритические деформации в исследованных случаях были сравнительно небольшими, поэтому критическую деформацию с погрешностью, не превышающей 10%, определяли по приближенной формуле

$$\bar{\epsilon}_0 \approx \sqrt{\epsilon_z^2 + \frac{1}{3}(\gamma')^2}. \quad (3.29)$$

Здесь

$$\epsilon_z = 2 \frac{D_0 - D}{D_0}, \quad \gamma' = \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.30)$$

где D_0 — начальный диаметр образца.

На рис. 47 сопоставлены экспериментальные значения критической деформации (для получения каждой точки испытывали по три образца) с расчетными, полученными согласно критериям (3.1), (3.2). Кривые 1, 2, 3 соответствуют условиям (3.7), (3.8), (3.24). Критерий положительности работы добавочных

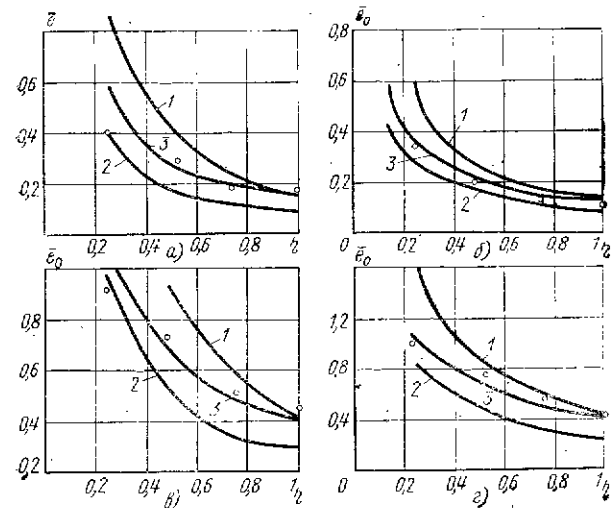


Рис. 47. Результаты экспериментальной проверки инженерных критериев устойчивости

$\eta = \frac{\sigma'_z}{\sigma_0}$; а — ШХ15; б — 30ХМА; в — Л62; г — М1

нагрузок находится в лучшем соответствии с экспериментальными данными, чем критерий положительности добавочных нагрузок.

§ 16. Двухосное растяжение листа

Прямоугольный лист из несжимаемого материала растягивается напряжениями σ_x , σ_y (рис. 48). Обозначим текущие размеры листа в направлениях осей x , y , z через l_x , l_y , h . Пусть

$$l_x h = F_y; \quad l_y h = F_x; \quad \sigma_y = m \sigma_x; \quad m \leq 1. \quad (3.31)$$

Нагрузки на лист $P_x = \sigma_x F_x$; $P_y = \sigma_y F_y$.

Из условия положительности добавочных нагрузок

$$\begin{aligned} dP_x &= \sigma_x dF_x + F_x d\sigma_x > 0; \\ dP_y &= \sigma_y dF_y + F_y d\sigma_y > 0 \end{aligned}$$

получаем условия устойчивости деформирования

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x} > d\epsilon_x; \quad \frac{d\sigma_y}{\sigma_y} > d\epsilon_y. \quad (3.32)$$

При плоском напряженном состоянии листа из изотропного материала

$$\sigma_0 = \sigma_x \sqrt{1 - m + m^2}; \quad (3.33)$$

$$d\epsilon_x = \frac{2 - m}{2 \sqrt{1 - m + m^2}} d\bar{\epsilon}_0; \quad d\epsilon_y = \frac{2m - 1}{2 \sqrt{1 - m + m^2}} d\bar{\epsilon}_0. \quad (3.34)$$

Подставив соотношения (3.33), (3.34) в неравенство (3.32), получаем условия устойчивости растяжения листа в виде

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\bar{\epsilon}_0} > \frac{2 - m}{2 \sqrt{1 - m + m^2}} + \frac{2m - 1}{2(1 - m + m^2)} \frac{dm}{d\bar{\epsilon}_0}; \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\bar{\epsilon}_0} > \frac{2m - 1}{2 \sqrt{1 - m + m^2}} + \frac{m - 2}{2m(1 - m + m^2)} \frac{dm}{d\bar{\epsilon}_0}. \quad (3.36)$$

Если к моменту наступления критического состояния нагружения простое, т. е. $m = \text{const}$, то первым нарушается условие (3.35). Соответствующая критическая деформация была определена Г. Заксом и Д. Лубаном. Она находится из условия

$$Z_{кр} = \sigma_0 \frac{d\bar{\epsilon}_0}{d\sigma_0} = \frac{2 \sqrt{1 - m + m^2}}{2 - m}. \quad (3.37)$$

Если кривая течения аппроксимируется степенной функцией (3.5), то $Z_{кр} = e_{кр}/n$.

Г. Свифт определил критическую деформацию листа в предположении, что деформирование становится неустойчивым, если

$$dP_x = dP_y = 0, \quad (3.38)$$

т. е. если одновременно нарушаются условия (3.35), (3.36).

Из равенства (3.38) следует, что к моменту потери устойчивости деформирования $\frac{P_y}{P_x} = m \frac{F_y}{F_x} = \text{const}$. Дифференцируя это соотношение, находим

$$dm = m(d\epsilon_y - d\epsilon_x). \quad (3.39)$$

Подставив полученное выражение в условие (3.35) или (3.36), взятое со знаком равенства, получаем

$$Z_{кр} = \sigma_0 \frac{d\bar{\epsilon}_0}{d\sigma_0} = \frac{4(1 - m + m^2)^{1/2}}{4 - 3m - 3m^2 + 4m^3}. \quad (3.40)$$

Заметим, что это условие можно также получить, исключив dm из неравенств (3.35), (3.36).

На рис. 49 приведены зависимости $Z_{кр}$ от m , определенные по уравнениям (3.37), (3.40).

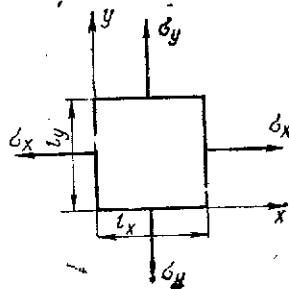


Рис. 48. Схема двухосного растяжения листа

И уравнение (3.37) и уравнение (3.40) получены для частных случаев нагружения. Причем, как следует из рис. 49, сравнительно слабое изменение вида нагружения от $m = \text{const}$ до $m \frac{F_y}{F_x} = \text{const}$ приводит к заметному изменению критической деформации. Поэтому в общем случае следует определять критическую деформацию из условий (3.35), (3.36).

Рассмотрим далее устойчивость двухосного растяжения листов из ортотропного материала, поведение которого описывается теорией пластичности Р. Хилла (см. § 4). Пусть лист растягивается вдоль главных осей анизотропии. Обозначив

$$R_x = \frac{H}{G} = \frac{1 + a^2 - b^2}{1 - a^2 + b^2}; \quad R_y = \frac{H}{F} = \frac{1 + a^2 - b^2}{a^2 + b^2 - 1}; \quad a = \sigma_{my}/\sigma_{mx};$$

$$b = \sigma_{mz}/\sigma_{mx}; \quad a_x = \frac{3(R_x + 1)R_y}{2(R_x + R_x R_y + R_y)};$$

$$a_y = \frac{3R_x(R_y + 1)}{2(R_x + R_x R_y + R_y)}; \quad a_{xy} = \frac{3R_x R_y}{2(R_x + R_x R_y + R_y)}, \quad (3.41)$$

запишем уравнения (1.74), (1.75) в виде

$$\bar{\sigma} = \sigma_x \sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}; \quad (3.42)$$

$$d\epsilon_x = \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}} d\bar{\epsilon};$$

$$d\epsilon_y = \frac{a_y m - a_{xy}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}} d\bar{\epsilon}. \quad (3.43)$$

Подставив соотношения (3.42), (3.43) в неравенства (3.32), получим

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} > \frac{a_y m - a_{xy}}{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2} \frac{dm}{d\bar{\epsilon}} + \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}; \quad (3.44)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} > \frac{a_{xy}m - a_x}{m(a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2)} \frac{dm}{d\bar{\epsilon}} + \frac{a_y m - a_{xy}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}. \quad (3.45)$$

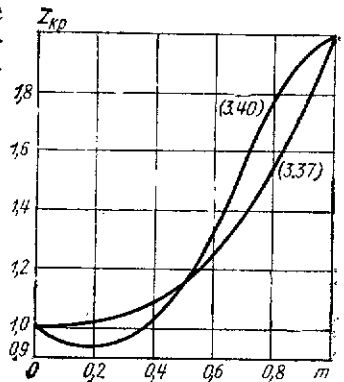


Рис. 49. Критические значения подкаспательной при растяжении изотропных листов

При простом нагружении ($\frac{dm}{d\epsilon} = 0$) эти неравенства упрощаются:

$$Z = \bar{\sigma} \frac{d\epsilon}{d\sigma} < \frac{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}{a_x - a_{xy}m}; \quad (3.46)$$

$$Z = \bar{\sigma} \frac{d\epsilon}{d\sigma} < \frac{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}{a_y m - a_{xy}}. \quad (3.47)$$

Критической является наименьшая из деформаций $\int d\epsilon$, удовлетворяющих условиям (3.46), (3.47), взятым со знаком

равенства. Следовательно, при $m \leq \frac{a_x + a_{xy}}{a_y + a_{xy}} = \frac{2 + \frac{1}{R_x}}{2 + \frac{1}{R_y}}$

критическую деформацию следует определять из условия (3.46), в противном случае из условия (3.47).

Исключив из неравенств (3.44), (3.45) $\frac{dm}{d\epsilon}$, получим уравнение подкасательной к кривой $\bar{\sigma} - \int d\epsilon$ в точке, соответствующей критическому состоянию, обобщающее решение Г. Свифта (3.39) на случай ортотропного материала:

$$Z_{кр} = \bar{\sigma} \frac{d\epsilon}{d\sigma} = \frac{(a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2)^{3/2}}{(a_x - a_{xy}m)^2 + m(a_y m - a_{xy})^2}. \quad (3.48)$$

Условия устойчивости (3.46), (3.47) получены В. Д. Головлевым [5], а условие (3.48) Н. Н. Малининым [31] на основе критерия положительности работы добавочных нагрузок и позднее В. Д. Головлевым [5] на основе критерия положительности добавочных нагрузок ($dP_x = dP_y = 0$).

Согласно критерию положительности работы добавочных нагрузок (3.2) деформирование листа устойчиво, если выполняется условие

$$dP_x dl_x + dP_y dl_y > 0.$$

Поскольку $P_x = \sigma_x l_y h$; $P_y = \sigma_y l_x h$,

можем переписать это неравенство в виде

$$d\sigma_x d\epsilon_x + d\sigma_y d\epsilon_y > \sigma_x d\epsilon_x^2 + \sigma_y d\epsilon_y^2. \quad (3.49)$$

При растяжении изотропного листа левая часть равенства (3.49) преобразуется к виду

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = d\sigma_0 d\epsilon_0. \quad (3.50)$$

Подставив в условие (3.49) соотношения (3.31), (3.33), (3.34), (3.50) получим уравнение, совпадающее с решением Г. Свифта (3.40), поскольку последнее получено исходя из пред-

положения о пропорциональном изменении нагрузок к моменту потери устойчивости.

Необходимо, однако, заметить, что если соотношение (3.40), полученное на основе критерия положительности добавочных нагрузок, согласно этому критерию справедливо лишь в частном случае нагружения, то это же соотношение (3.40) согласно критерию положительности работы добавочных нагрузок справедливо в общем случае нагружения.

Н. Н. Малинин [31] на основе критерия положительности работы добавочных нагрузок исследовал устойчивость двухосного растяжения анизотропных листов. Не останавливаясь на условии устойчивости, следующем из теории пластичности Р. Хилла, поскольку оно, как уже указывалось, совпадает с условием (3.48), рассмотрим, следуя Н. Н. Малинину, устойчивость деформирования листа, растягиваемого вдоль главных осей анизотропии, на основе теории пластичности, развитой Д. Чэкрэбберти [43].

Уравнение поверхности нагружения записывается в виде

$$\sigma_x^2 - 2c\sigma_x\sigma_y + e\sigma_y^2 = \sigma_{экр}^2 \left(\int d\epsilon_{экр} \right), \quad (3.51)$$

где

$$d\epsilon_{экр} = f(d\epsilon_x^2 + d\epsilon_y^2 + d\epsilon_x d\epsilon_y)^{1/2};$$

$$c = \frac{R_x}{R_x + 1}; \quad e = \frac{R_x(R_y + 1)}{R_y(R_x + 1)}; \quad f = \frac{1 + R_x}{\sqrt{1 + R_x + R_x^2}}. \quad (3.52)$$

По ассоциированному закону пластического течения

$$d\epsilon_x = d\lambda(\sigma_x - c\sigma_y) = d\lambda\sigma_x(1 - cm); \quad (3.53)$$

$$d\epsilon_y = d\lambda(e\sigma_y - c\sigma_x) = d\lambda\sigma_x(em - c).$$

Из уравнения (3.51) находим,

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{экр}}{\sqrt{1 - 2cm + em^2}}. \quad (3.54)$$

Подставив полученные уравнения в соотношение (3.52), найдем

$$d\lambda = \frac{(1 - 2cm + em^2)^{\frac{1}{2}}}{f[(1 - cm)^2 + (em - c)^2 + (1 - cm)(em - c)]^{\frac{1}{2}}} \frac{d\epsilon_{экр}}{\sigma_{экр}}. \quad (3.55)$$

При одноосном растяжении полосы в направлении x

$$\sigma_{экр} = \sigma_x; \quad \int d\epsilon_{экр} = f(1 - c + c^2)^{\frac{1}{2}} \epsilon_x. \quad (3.56)$$

Формулы (3.56) позволяют по диаграмме растяжения материала в направлении оси x и параметру анизотропии R_x построить кривую течения материала $\sigma_{экр}(\int d\epsilon_{экр})$.

Рассмотрим левую часть неравенства (3.49). Записав уравнения (3.51), (3.53) в компактной форме

$$a_{ij}s_{ik}s_{jk} = \sigma_{\text{эKB}}^2; \quad d\epsilon_{ij} = d\lambda a_{ik}s_{jk},$$

получим

$$d\sigma_{ij}d\epsilon_{ij} = ds_{ij}d\epsilon_{ij} = d\lambda\sigma_{\text{эKB}}d\sigma_{\text{эKB}}. \quad (3.57)$$

С учетом соотношений (3.54), (3.55), (3.57) находим из условия устойчивости (3.49), что

$$Z_{\text{кр}} = \sigma_{\text{эKB}} \frac{d\epsilon_{\text{эKB}}}{d\sigma_{\text{эKB}}} = \frac{f[(1-2cm+em^2)][(1-cm)^2 + (em-c)^2 + (1-cm)(em-c)]^{\frac{1}{2}}}{(1-cm)^2 + m(em-c)^2}. \quad (3.58)$$

В случае изотропного материала ($R_x=R_y=1$) уравнения (3.48), (3.58) сводятся к уравнению (3.39).

На рис. 50 приведена зависимость $Z_{\text{кр}}$ от m , определенная из условия устойчивости (3.46) и из уравнений (3.48), (3.58) для титанового сплава ОТ4, у которого $R_x=3,4$, $R_y=7,16$ [31]. Как видим, различие в критических деформациях, определенных по рассматриваемым условиям устойчивости, существенно.

Предполагается [36], что рассмотренные условия устойчивости можно, пренебрегая влиянием градиента напряжений и деформаций, использовать для оценки устойчивости формообразования различного рода пологих оболочек двухосным растяжением. Для этого необходимо предварительно определить зависимость накопленной деформации и отношения главных на-

пряжений m в различных точках оболочки от параметра λ , характеризующего деформацию оболочки в целом. Если это исследование выполняется методом делительных сеток, то, определив приемы, описанными в § 8, приращения или скорости деформаций и вычислив их отношение $\alpha = d\epsilon_y : d\epsilon_x = \epsilon_y : \epsilon_x$, можно в случае изотропного материала определить отношение напряжений по формуле

$$m = \frac{2\alpha + 1}{2 + \alpha}, \quad (3.59)$$

следующей из уравнений (3.34). Для ортотропного материала справедлива формула

$$m = \frac{R_y[R_x(1+\alpha) + \alpha]}{R_x[R_y(1+\alpha) + 1]}, \quad (3.60)$$

следующая и из уравнений (3.43) и из уравнений (3.53).

Значение параметра λ , при котором хотя бы в одной точке оболочки накопленная деформация оказывается равной критической, считается критическим.

§ 17. Двухосное растяжение тонкостенной цилиндрической оболочки

Рассмотрим деформирование тонкостенной цилиндрической оболочки с днщами внутренним давлением q и растягивающим усилием P . Обозначим текущую длину, средний радиус и толщину оболочки через l , ρ и h .

Согласно критерию положительности добавочных нагрузок деформирование оболочки устойчиво, если

$$dq > 0; \quad (3.61)$$

$$dP_z = d(P + \pi\rho^2q) > 0. \quad (3.62)$$

Предполагается, что при нарушении условия (3.61) образуется продольная шейка, а при нарушении условия (3.62) — кольцевая.

Поскольку в цилиндрической системе координат

$$q = \frac{h}{\rho} \sigma_\varphi; \quad P + \pi\rho^2q = 2\pi\rho h\sigma_z;$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = d\epsilon_\varphi; \quad \frac{dh}{h} = d\epsilon_z, \text{ перепишем неравенства (3.61), (3.62) в виде}$$

$$\frac{d\sigma_\varphi}{\sigma_\varphi} > d\epsilon_\varphi - d\epsilon_z; \quad (3.63)$$

$$\frac{d\sigma_z}{\sigma_z} > d\epsilon_\varphi - d\epsilon_z. \quad (3.64)$$

При растяжении оболочки из несжимаемого изотропного материала

$$\sigma_0 = \sigma_z \sqrt{1-m+m^2}; \quad d\epsilon_\varphi = \frac{2m-1}{2\sqrt{1-m+m^2}} d\epsilon_0; \quad d\epsilon_z = \frac{m-1}{2\sqrt{1-m+m^2}} d\epsilon_0, \quad (3.65)$$

где $m = \sigma_\varphi/\sigma_z$. Следовательно, деформирование такой оболочки устойчиво, если

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{d\epsilon_0} > \frac{3m}{2\sqrt{1-m+m^2}} - \frac{2-m}{2(1-m+m^2)m} \frac{dm}{d\epsilon_0}; \quad (3.66)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} > \frac{2-m}{2\sqrt{1-m+m^2}} + \frac{2m-1}{2(1-m+m^2)} \frac{dm}{d\epsilon_0}. \quad (3.67)$$

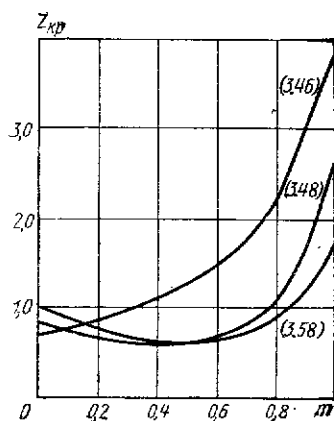


Рис. 50. Критические значения подкасательной при растяжении анизотропных листов

Если к моменту потери устойчивости оболочка нагружается таким образом, что отношение напряжений m остается постоянным, а постоянным оно будет, если нагрузки изменяются в соответствии с уравнением

$$\frac{q}{P} = \frac{\text{const}}{\rho^2}, \quad (3.68)$$

то условие устойчивости можно записать в виде

$$Z = \sigma_0 \frac{\bar{d}\epsilon_0}{d\epsilon_0} < \frac{2\sqrt{1-m+m^2}}{3m}; \quad (3.69)$$

$$Z = \sigma_0 \frac{\bar{d}\epsilon_0}{d\epsilon_0} < \frac{2\sqrt{1-m+m^2}}{2-m}. \quad (3.70)$$

При $m \geq \frac{1}{2}$ критическую деформацию находят из условия (3.69), при $m < \frac{1}{2}$ ее определяют из условия (3.70). Условия устойчивости деформирования (3.69), (3.70) были получены В. Ланкфордом и Е. Зейбелем.

В работе [45] дополнительно к рассмотренным записывается условие положительности приращения усилия, растягивающего оболочку в окружном направлении:

$$dP_t = d(2plq) > 0 \quad (3.71)$$

или

$$\frac{d\sigma_\varphi}{\sigma_\varphi} > d\epsilon_\varphi. \quad (3.72)$$

Подставив соотношения (3.65) в это неравенство, получаем

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} > \frac{2m-1}{2\sqrt{1-m+m^2}} + \frac{m-2}{2(1-m+m^2)m} \frac{dm}{d\epsilon_0}. \quad (3.73)$$

При $m = \text{const}$

$$Z = \sigma_0 \frac{\bar{d}\epsilon}{\sigma_0} < \frac{2\sqrt{1-m+m^2}}{2m-1}. \quad (3.74)$$

Заметим, что условия (3.67), (3.74) совпадают с условиями устойчивости двухосного растяжения листа (3.35), (3.36).

Г. Свифт получил условие устойчивости двухосного растяжения оболочки, исходя из предположения, что в критическом состоянии одновременно с условием (3.61) нарушается условие

$$dP > 0. \quad (3.75)$$

Поскольку $P = \pi r h \sigma_z (2-m)$,

из неравенства (3.75) следует, что

$$\frac{d\sigma_z}{\sigma_z} - \frac{dm}{2-m} > -d\epsilon_r - d\epsilon_\varphi. \quad (3.76)$$

Подставив в это неравенство соотношения (3.65), запишем его в виде

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} > \frac{2-m}{2\sqrt{1-m+m^2}} + \frac{3m}{2(2-m)(1-m+m^2)} \frac{dm}{d\epsilon_0}. \quad (3.77)$$

Исключая из неравенств (3.66), (3.67) $\frac{dm}{d\epsilon_0}$, получаем

$$Z_{кр} = \sigma_0 \frac{\bar{d}\epsilon_0}{d\sigma} = \frac{4(1-m+m^2)^{1/2}}{4-6m+3m^2+4m^3}. \quad (3.78)$$

В. Купер определил критическую деформацию оболочки, исходя из предположения, что при потере устойчивости одновременно нарушаются условия (3.62), (3.71). Следующее из этого предположения условие устойчивости совпадает с условием устойчивости двухосного растяжения листа (3.40), полученным Г. Свифтом.

В работе [45] устойчивость растяжения оболочки исследована при допущении, что в критическом состоянии одновременно нарушаются условия (3.61), (3.62). Соответствующее условие устойчивости можно получить, исключив из неравенств (3.66), (3.67) $\frac{dm}{d\epsilon_0}$,

$$Z_{кр} = \sigma_0 \frac{\bar{d}\epsilon_0}{d\sigma} = \frac{4(1-m+m^2)^{1/2}}{(2-m)^2 + 3m^2(2m-1)}. \quad (3.79)$$

Переходя к рассмотрению устойчивости растяжения оболочек из ортотропного материала, примем, что главные оси анизотропии x, y совпадают соответственно с осевым и окружным направлениями цилиндрической оболочки.

Подставив соотношения (3.42), (3.43) в условие (3.63), получаем неравенство, соответствующее условию устойчивости $dq > 0$:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\epsilon} > \frac{a_y m - a_{xy}}{a_x - 2a_{xy} + a_y m^2} \frac{dm}{d\epsilon} - \frac{2a_y m - a_{xy}(2+m) + a_x}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}. \quad (3.80)$$

Неравенство, соответствующее условию $dP_z > 0$, совпадает с неравенством (3.44) с тем лишь различием, что в данном случае $0 \leq m \leq \infty$.

Из условия $dP_t > 0$ следует неравенство (3.45).

Из условия $dP > 0$ следует, что

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\epsilon} > \frac{2a_y m - a_{xy}(2+m) + a_x}{(2-m)(a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2)} \frac{dm}{d\epsilon} + \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}. \quad (3.81)$$

Согласно критерию положительности работы добавочных нагрузок условие устойчивости деформирования рассматриваемой оболочки записывается в виде

$$dPd\ell + \pi r^2 dqd\ell + 2\pi r l dqd\ell > 0 \quad (3.82)$$

или

$$d\sigma_\varphi d\varepsilon_\varphi + d\sigma_z d\varepsilon_z > \sigma_z d\varepsilon_z^2 + 2\sigma_\varphi d\varepsilon_\varphi (d\varepsilon_z + d\varepsilon_\varphi). \quad (3.83)$$

Используя соотношения (3.43), (3.44), следующие из теории пластичности Р. Хилла, приведем это неравенство к виду

$$Z_{кр} = \frac{\bar{\sigma}}{d\bar{\sigma}} = \frac{(a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2)^{1/2}}{(a_x - a_{xy}m)^2 + 2m(a_y m - a_{xy})[a_x - a_{xy}(m+1) + a_y m]}. \quad (3.84)$$

Уравнение (3.84) опубликовано в работе [31]. В этой же работе получено условие устойчивости для оболочки из ортотропного материала, поверхность нагружения которого описывается уравнением (3.51), предложенным Д. Чэкрэбертн. С учетом соотношений (3.53)–(3.59) получаем из неравенства (3.83), что

$$Z_{кр} = \sigma_{кр} \frac{d\varepsilon_{кр}}{d\sigma_{кр}} = \frac{f(1-2cm+em^2)[(1-cm)^2+(em-c)^2+(1-cm)(em-c)]^{1/2}}{(1-cm)^2+2m(em-c)[1+m(e-c)-c]}. \quad (3.85)$$

В случае изотропного материала ($a_x = a_y = 2a_{xy} = 1$; $e = 2c = 1$; $f = 2\sqrt{3}$) из уравнений (3.83), (3.84) следует уравнение (3.78).

На рис. 51 рассчитанные по формулам (3.84), (3.85) зависимости $Z_{кр}(m)$ титанового сплава ОТ4 ($R_x = 3,4$, $R_y = 7,16$ [31]) сопоставлены с графиком уравнения (3.82) изотропного ма-

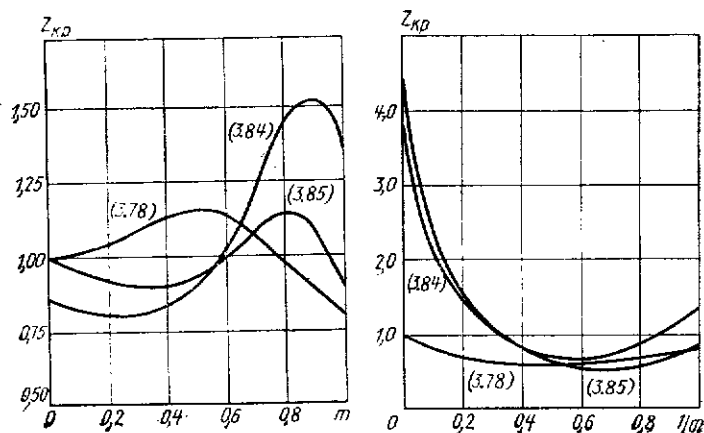


Рис. 51. Критические значения подкасательной при двухосном растяжении цилиндрических оболочек

териала. Как видим, анизотропия свойств оказывает заметное влияние на критическую деформацию.

Целесообразность рассмотрения устойчивости двухосного растяжения цилиндрических оболочек обусловлена главным образом возможностью экспериментальной проверки получаемых при этом оценок критической деформации путем испытания толстоственных трубчатых образцов, нагружаемых внутренним давлением и осевой силой. К настоящему времени опубликовано достаточно много результатов таких экспериментов. В работе [45] приведен анализ результатов испытаний трубчатых образцов, выполненных различными авторами. На основе этого анализа сделаны следующие выводы.

В соответствии с условиями устойчивости (3.69), (3.70) экспериментальные значения критической деформации в области $\sigma_z > \sigma_\varphi$ выше, чем в области $\sigma_\varphi > \sigma_z$. Согласно теории критическая деформация при $\sigma_\varphi = 1/2\sigma_z$ выше, чем при чистом продольном растяжении оболочки. Этот вывод эксперименты не подтверждают. По условию устойчивости (3.78) Г. Свифта критическая деформация при чистом растяжении в окружном направлении и при чистом растяжении в осевом направлении одинакова. Как уже указывалось, эксперименты этот вывод не подтверждают.

В целом, условия типа $dq=0=dP$; $dq=0=dP_z$ оказались в худшем соответствии с экспериментальными данными, чем условия $dq=0$ или $dP_z=0$. В области $\sigma_\varphi > \sigma_z$ экспериментальные данные находятся в качественном соответствии с условием устойчивости $dq > 0$. Однако в области $\sigma_z > \sigma_\varphi$ такое соответствие с условием $dP_z > 0$ не наблюдалось.

Как видим, обсуждается лишь качественное соответствие экспериментов теории. Количественное же соответствие экспериментальных данных теоретическим оценкам обычно неудовлетворительное. На рис. 52 приведены результаты испытаний трубчатых образцов из меди М1, проведенных совместно с С. С. Одином. Диаметр трубок составлял 30 мм, толщина — 1 мм, изменения толщины допускались в пределах $\pm 0,02$ мм. Испытания производили на машине ЗДМУ-30 при простом нагружении. Критическое значение окружной деформации определяли по длине дуги окружности в месте разрыва трубки. При этом исходили из предположения, что за критическую пластическую деформация на удалении от шейки незначительна; это подтверждено испытанием цилиндрических образцов на растяжение. Критическое значе-

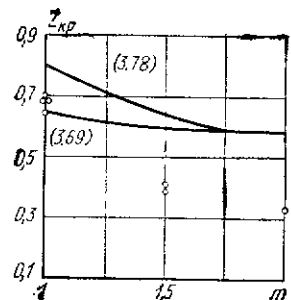


Рис. 52. Результаты экспериментальной проверки условий устойчивости деформирования цилиндрических оболочек

ние подкасательно определяли, основываясь на соотношении (3.59). Наибольшее расхождение расчетных и экспериментальных значений $Z_{кр}$ в 43% получено при $m=2$.

§ 18. Вопросы устойчивости деформирования в состоянии сверхпластичности

Под сверхпластичностью обычно понимают нелинейно-вязкое поведение ряда сплавов, обладающих сверхтонкой зернистой макроструктурой. Для состояния сверхпластичности, наблюдаемого в сравнительно узком интервале температур, близких к половине температуры плавления сплава по абсолютной шкале, характерны высокий уровень скоростного упрочнения, низкое сопротивление деформации при малых скоростях последней, высокая устойчивость пластического деформирования в определенных интервалах скоростей деформирования, вследствие чего равномерное удлинение при испытании на растяжение в отдельных случаях достигает 2000%. Последние два обстоятельства особенно важны с технологической точки зрения. Предложен ряд процессов обработки металлов в состоянии сверхпластичности, некоторые из них уже внедрены в производство.

Экспериментальные исследования [32] показали, что в состоянии сверхпластичности материалы обладают весьма низким деформационным упрочнением, вместе с тем наблюдается резкая зависимость напряжений от скорости деформации, что дает основание использовать в качестве феноменологической модели сверхпластичности модель вязкопластического материала.

А. Ю. Ишлинский [23] решил задачу об устойчивости пластического растяжения круглого стержня из вязкопластического материала, у которого максимальное касательное напряжение связано единой кривой с максимальной скоростью сдвига. Далее излагается решение той же задачи, полученное в соответствующем экспериментальным данным о сверхпластичности [32] исходя из предположения, что интенсивность напряжений является функцией интенсивности скоростей деформации*. Скорости деформации считаются пропорциональными компонентам девиатора напряжений s_{ij} :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_0}{\sigma_0} s_{ij}. \quad (3.86)$$

Как и в работе [23], потери устойчивости трактуются как нарушение равномерности пластического деформирования, выражающееся в появлении местного утонения в виде шейки. При этом компоненты девиатора напряжений и тензора скоростей

* Исследование выполнено совместно с Н. Н. Малининым и А. П. Громовым.

деформации изменяются на бесконечно малые величины δs_{ij} , $\delta \epsilon_{ij}$, удовлетворяющие уравнениям равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r} (\delta s_r + \delta \sigma) + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{rz} + \frac{1}{r} (\delta s_r - \delta s_\varphi) = 0; \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\delta s_z + \delta \sigma) + \frac{\partial}{\partial r} \delta \tau_{rz} + \frac{1}{r} \delta \tau_{rz} = 0;$$

кинематическим уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\delta \epsilon}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \delta v_r; \quad \dot{\delta \epsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \delta v_r; \\ \dot{\delta \epsilon}_z &= \frac{\partial}{\partial z} \delta v_z; \quad \dot{\delta \epsilon}_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \delta v_r + \frac{\partial}{\partial r} \delta v_z \right), \end{aligned} \quad (3.88)$$

где δv_r , δv_z — дополнительные компоненты скоростей перемещений в радиальном и осевом направлении цилиндрической системы координат r, φ, z ;

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta v_z + \frac{\partial}{\partial r} \delta v_r + \frac{1}{r} \delta v_r = 0; \quad (3.89)$$

уравнениям состояния, следующим из (3.86),

$$\delta s_{ij} = \frac{2}{3k} \left[\dot{\delta \epsilon}_{ij} + \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^0}{\dot{\epsilon}_0^0} (k\eta - 1) \dot{\delta \epsilon}_0 \right], \quad (3.90)$$

где $k = \frac{\dot{\epsilon}_0^0}{\sigma_0^0}$, а кружочком сверху помечены величины, соответствующие невозмущенному состоянию.

Уравнения (3.90) получены, исходя из предположения, что в окрестности рассматриваемой точки функцию $\sigma_0(\epsilon_0)$ можно линеаризовать и принять

$$\delta \sigma_0 = \eta \dot{\delta \epsilon}_0, \quad \eta = \left. \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_0} \right|_{\dot{\epsilon}_0 = \dot{\epsilon}_0^0}.$$

Поскольку при растяжении круглого стержня в невозмущенном состоянии

$$\dot{\epsilon}_r^0 = \dot{\epsilon}_\varphi^0 = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_z^0 = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_0^0,$$

а остальные компоненты тензора скоростей деформации равны нулю, $\delta \varepsilon_0 = -\delta \varepsilon_r - \delta \varepsilon_\varphi$, то уравнения состояния (3.90) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \delta s_r &= \frac{2}{3k} \left[\delta \dot{\varepsilon}_r + \frac{k\eta - 1}{2} (\delta \dot{\varepsilon}_r + \delta \dot{\varepsilon}_\varphi) \right]; \\ \delta s_\varphi &= \frac{2}{3k} \left[\delta \dot{\varepsilon}_\varphi + \frac{k\eta - 1}{2} (\delta \dot{\varepsilon}_\varphi + \delta \dot{\varepsilon}_r) \right]; \quad \delta s_z = -\frac{2}{3} \eta \times \\ &\times (\delta \dot{\varepsilon}_r + \delta \dot{\varepsilon}_\varphi); \quad \delta \tau_{rz} = \frac{2}{3k} \delta \dot{\varepsilon}_{rz}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Подставляя в уравнения (3.131) соотношения (3.132), (3.135) и используя равенство (3.133), получим уравнение

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} \left[\frac{3}{r^2} + (1 - 3k\eta) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left[\frac{3}{r^3} - (1 - 3k\eta) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial}{\partial r} + \left[\frac{\partial^4}{\partial z^4} + (1 - 3k\eta) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{3}{r^4} \right] \right\} \delta v_r = 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Опишем возмущенную поверхность стержня уравнением

$$r = r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos n\lambda z, \quad (3.93)$$

где r_0 — радиус стержня в соответствующем невозмущенном состоянии; δ_n — малые величины; λ — параметр, характеризующий протяженность шейки.

Учитывая (3.93), найдем решение уравнения (3.92) в виде

$$\delta v_r = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\lambda z. \quad (3.94)$$

Как следует из уравнения (3.92), функции $R_n(r)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} R_n^{IV} - \frac{2}{r} R_n''' + \left[\frac{3}{r^2} + n^2 \lambda^2 (1 - 3k\eta) \right] R_n'' - \frac{1}{r} \left[\frac{3}{r^2} + \right. \\ \left. + n^2 \lambda^2 (1 - 3k\eta) \right] R_n' + n^4 \lambda^4 R_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.95)$$

Следуя работе [23], представим эти уравнения в виде произведения двух коммутативных дифференциальных операторов

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \mu_n^2 \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \bar{\mu}_n^2 \right) R_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.96)$$

где $\mu_n, \bar{\mu}_n$ — комплексные сопряженные числа,

$$\mu_n = \frac{n\lambda}{2} (\sqrt{3(1 - k\eta)} + i\sqrt{1 + 3k\eta}).$$

Решением n -го уравнения $R_n(r)$ будет сумма общих решений $R_{1n}(r)$ и $R_{2n}(r)$ системы уравнений

$$\begin{aligned} R_{1n}'' - \frac{1}{r} R_{1n}' + \mu_n^2 R_{1n} &= 0; \\ R_{2n}'' - \frac{1}{r} R_{2n}' + \bar{\mu}_n^2 R_{2n} &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

которые с помощью замены переменной приводятся к уравнениям Бесселя.

Таким образом,

$$R_n(r) = r [\bar{C}_n I_1(\mu_n r) + C_n I_1(\bar{\mu}_n r)], \quad (3.97)$$

где $I_1(\mu_n r), I_1(\bar{\mu}_n r)$ — функция Бесселя первого рода; $C_n, \bar{C}_n$ — комплексные сопряженные постоянные, определяемые из граничных условий, которые с точностью до малых порядка выше первого запишутся в виде

$$\sigma_z^0 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n n \lambda \sin n\lambda z - \delta \tau_{rz} = 0; \quad \delta \sigma + \delta s_r = 0. \quad (3.98)$$

Дополнительные компоненты девиатора напряжений определяем из (3.88), (3.89), (3.91), (3.94):

$$\begin{aligned} \delta s_r &= \frac{1}{3k} \left[(1 + k\eta) \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} R_n' - \frac{2}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} R_n \right] \cos n\lambda z; \\ \delta s_\varphi &= -\frac{1}{3k} \left[(1 - k\eta) \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} R_n' - \frac{2}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} R_n \right] \cos n\lambda z; \\ \delta s_z &= -\frac{2k\eta}{3k} \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} R_n' \cos n\lambda z; \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\delta \tau_{rz} = \frac{1}{3k n \lambda} \left(-\frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} R_n'' + \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} R_n' - \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda^2 R_n \right) \sin n\lambda z.$$

Для определения дополнительного гидростатического давления $\delta\sigma$ интегрируем второе уравнение равновесия по длине стержня при $r=r_0$:

$$\delta\sigma = \delta\sigma^* - \int_0^z \left[\frac{\partial}{\partial z} \delta s_z + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \delta s_{rz} \right] dz, \quad (3.100)$$

где $\delta\sigma^*$ — дополнительное гидростатическое давление в точке $r=r_0$, $z=0$.

Учитывая, что уравнения (3.98) должны удовлетворяться при любом z , и выражая их через (3.99), (3.100), получим

$$R_n'' - \frac{1}{r} R_n' + n^2 \lambda^2 R_n + 3\delta_n n^2 \lambda^2 \varepsilon_0^0 r = 0; \quad (3.101)$$

$$R_n''' - \frac{1}{r} R_n'' + \left(\frac{1}{r^2} - 3n^2 \lambda^2 k\eta \right) R_n' + 2n^2 \lambda^2 \frac{1}{r} R_n = 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Используя соотношения (3.97) и выражение

$$R_n' - \frac{1}{r} R_n = -(\mu_n^2 R_{1n} + \bar{\mu}_n^2 R_{2n}), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

преобразуем систему уравнений (3.101). В результате получим систему $2n$ уравнений для определения коэффициентов C_n и $\bar{C}_n$:

$$\bar{C}_n a_{1n} + C_n \bar{a}_{1n} = b_{1n}; \quad (3.102) \\ \bar{C}_n a_{2n} + C_n \bar{a}_{2n} = b_{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где a_{1n} и $\bar{a}_{1n}$, a_{2n} и $\bar{a}_{2n}$ — комплексно-сопряженные числа,

$$a_{1n} = \mu_n r (\mu_n^2 + 3n^2 \lambda^2 k\eta) I_0(\mu_n r) - 2n^2 \lambda^2 I_1(\mu_n r); \quad a_{2n} = (\mu_n^2 - n^2 \lambda^2) \times \\ \times I_1(\mu_n r); \quad b_{1n} = 0, \quad b_{2n} = 3\delta_n n^2 \lambda^2 \varepsilon_0^0.$$

По правилу Крамера

$$\bar{C}_n = - \frac{\bar{a}_{1n} b_{2n}}{a_{1n} \bar{a}_{2n} - a_{2n} \bar{a}_{1n}}; \quad C_n = \frac{a_{1n} b_{2n}}{a_{1n} \bar{a}_{2n} - a_{2n} \bar{a}_{1n}}. \quad (3.103)$$

Подставляя (3.103) в (3.97), получим

$$R_n = \frac{3}{2} r \varepsilon_0^0 \delta_n \frac{U_n (\sin 3\varphi + 3a\eta \sin \varphi) - V_n (\cos 3\varphi + 3k\eta \cos \varphi)}{[(U_{1n}^2 + V_{1n}^2) \cos \varphi - V_n \sin 2\varphi - U_n (3k\eta + \cos 2\varphi)] \sin \varphi}, \quad (3.104)$$

$$\text{где } \varphi = \arctg \sqrt{\frac{1+3k\eta}{3(1-k\eta)}};$$

$$U_n = U_{0n} U_{1n} + V_{0n} V_{1n}; \quad V_n = U_{0n} V_{1n} - V_{0n} U_{1n};$$

$$U_{0n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n\lambda r)^{2m}}{4^m (m!)^2} \cos 2m\varphi; \quad V_{0n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n\lambda r)^{2m}}{4^m (m!)^2} \sin 2m\varphi;$$

$$U_{1n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n\lambda r)^{2m}}{4^m m! (m+1)!} \cos (2m+1)\varphi; \quad V_{1n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \times \\ \times \frac{(n\lambda r)^{2m}}{4^m m! (m+1)!} \sin (2m+1)\varphi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Следуя работам [20, 23], запишем условие устойчивости деформирования в виде $\delta v_r > 0$ при $z=0$, $r=r_0$.

С учетом (3.138), (3.148) получаем условие устойчивости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{U_n (\sin 3\varphi + 3k\eta \sin \varphi) - V_n (\cos 3\varphi + 3k\eta \cos \varphi)}{[(U_{1n}^2 + V_{1n}^2) \cos \varphi - V_n \sin 2\varphi - U_n (3k\eta + \cos 2\varphi)] \sin \varphi} > 0. \quad (3.105)$$

В выражении (3.149) не определены коэффициенты δ_n . Для их определения необходимо знать уравнение возмущенной границы.

В соответствии с результатами экспериментальных исследований закрывающей деформации холодных металлов опишем контур шейки уравнением

$$r = r_0 - \delta e^{-\left(\frac{\lambda z}{2}\right)^2}$$

и разложим приведенную функцию в ряд Фурье в интервале $[-\pi/\lambda, \pi/\lambda]$:

$$r = r_0 - \delta \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n' \cos n\lambda z, \quad (3.106)$$

где

$$\delta_n' = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\pi/\lambda}^{\pi/\lambda} e^{-\left(\frac{\lambda z}{2}\right)^2} \cos n\lambda z dz, \quad n = 1, 2, \dots$$

определяются численно. Например, $\delta_1' = 0,43913$, $\delta_2' = 0,00625$, $\delta_3' = 0,00827 \dots$

Условие устойчивости можно теперь записать в виде

$$\delta v_r' = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n' \frac{U_n (\sin 3\varphi + 3k\eta \sin \varphi) - V_n (\cos 3\varphi + 3k\eta \cos \varphi)}{[(U_{1n}^2 + V_{1n}^2) \cos \varphi - V_n \sin 2\varphi - U_n (3k\eta + \cos 2\varphi)] \sin \varphi} > 0. \quad (3.107)$$

Численное решение выполнено на ЭВМ М-222 с удержанием десяти членов ряда (3.107). На рис. 53 приведена полученная зависимость δv_r^t от λr_0 для фиксированных значений параметра $k\eta$.

В работах [6, 23] параметр λ определялся, исходя из предположения, что на длине стержня укладывается целое число полуволи.

Более близко к действительности предположение о том, что поверхность стержня имеет множество различных возмущений с $0 < \lambda < \infty$. Однако в этом случае оказывается, что согласно принятому критерию устойчивости деформирование стержня всегда неустойчиво, поскольку для любых $k\eta$ имеются такие λr_0 , при которых $\delta v_r^t < 0$. Этот результат согласуется с наблюдениями. Эксперименты показывают, что при растяжении образца в состоянии сверхпластичности по существу в любой момент времени имеются одна или несколько шеек, которые развиваются, исчезают, появляются в новом месте. В литературе это явление получило название «бегущей шейки». Поскольку,

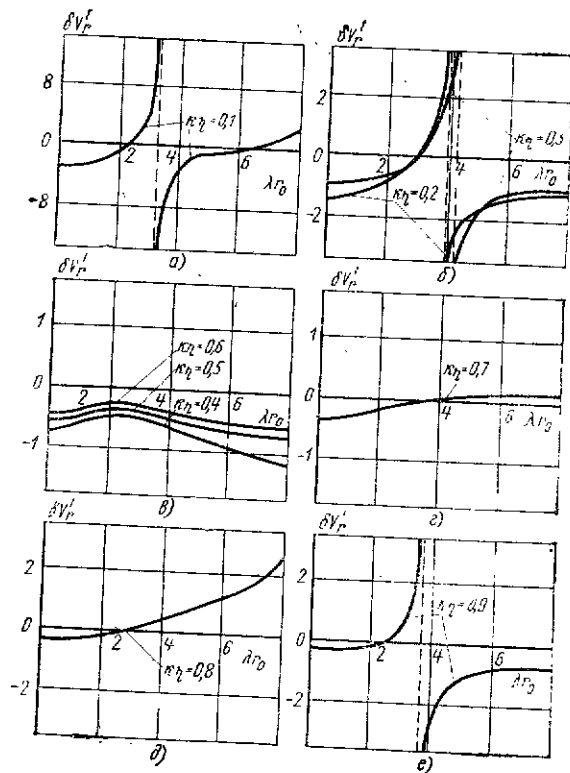


Рис. 53. Связь между параметрами δv_r и λr_0 при различных значениях $k\eta$

несмотря на указанное обстоятельство, в состоянии сверхпластичности достигают весьма значительных удлинений без разрушения, представляется целесообразным изменить критерий устойчивости. Испытания ряда металлов в холодном состоянии показали, что в процессе локализации деформации параметр λr_0 возрастает [15]. В связи с этим примем, что при $\delta v_r^t > 0$ λr_0 уменьшается, а при $\delta v_r^t < 0$ λr_0 возрастает, и будем считать деформирование устойчивым, если при неограниченном возрастании времени t для любого начального (т.е. при $t=0$) значения λr_0 $\delta v_r^t \rightarrow 0$. Согласно этому критерию растяжение стержня устойчиво при $0 < k\eta < 0,15$; $0,66 < k\eta < 0,82$. Действительно, если в этих случаях (см. рис. 53, а, г, д) начальное λr_0 меньше λr_0 при $\delta v_r^t = 0$, то возмущение границы усиливается, и наоборот. При этом соответственно λr_0 возрастает и убывает, стремясь к значению λr_0 при $\delta v_r^t = 0$, при достижении которого скорость δv_r^t оказывается равной нулю и развитие шейки прекращается.

Для всех прочих $k\eta$ существуют такие начальные λr_0 , при которых происходит неограниченная локализация деформации. Заметим еще, что в полном соответствии с наблюдениями, описанными в работе [47], в случае неустойчивого деформирования могут наблюдаться как шейки, развитие которых может прекратиться (например, при $k\eta = 0,3$ на рис. 53, б это возмущение с $\lambda r_0 < 3,8$), так и шейки, развивающиеся вплоть до разрушения (при $k\eta = 0,3$ это возмущение с $\lambda r_0 > 3,8$).

Полученный результат согласуется с экспериментальными данными. Обычно функцию $\sigma_0(\epsilon_0)$ аппроксимируют уравнением

$\sigma_0 = a \epsilon_0^m$. Если параметры материала a , m не зависят от скорости деформации, то $\eta k = m$. В работе [22] указано, что если преобладает скоростное упрочнение, то устойчивая деформация сплава ВТ6 наблюдается при $m = 0,7 \div 0,8$. В работе [32] приведен более широкий интервал устойчивого деформирования $0,35 \leq m \leq 0,8$, что можно объяснить зависимостью m от ϵ_0 . На рис. 54 показана приведенная в этой работе зависимость m от ϵ_0 , по ней нами получены функции $\frac{\sigma_0}{a}(\epsilon_0)$

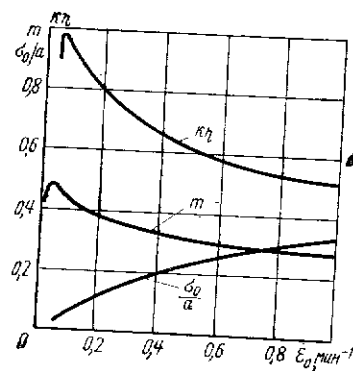


Рис. 54. Зависимость напряжения, показателя упрочнения m и параметра $k\eta$ от скорости деформации

и $k\eta(\epsilon_0)$, при построении которых не приняты во внимание участки

кривых, соответствующие $k\eta \leq 0$. Как видим, полученные $k\eta$ достаточно близки к значениям из интервала устойчивости $[0,66; 0,82]$.

Области устойчивости $0 < k\eta < 0,15$ могут соответствовать процессы деформирования с очень малыми скоростями (если при $\varepsilon_0 \approx 0$ $\sigma_0 \neq 0$) или высокоскоростные процессы, при которых согласно работе [47] $d\sigma_0/d\varepsilon_0 = 0$. Этой же области может соответствовать устойчивость деформирования при ползучести материалов, у которых $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon_0)$.

Полученное решение позволяет оценить критическую деформацию, если задана функция $\varepsilon_0^0(t)$. По этой функции и характеристике материала $\sigma_0(\varepsilon_0)$ находим зависимость $k\eta(t)$ и определяем момент времени $t_{кр}$, при котором параметр $k\eta$ выходит за пределы указанных областей устойчивости. Критическая де-

формация $\varepsilon_{кр} = \int_0^{t_{кр}} \varepsilon_0^0(t) dt$. Если коэффициенты аппроксимации

$\sigma_0 = a\varepsilon_0^m$ не зависят от скорости деформации, то независимо от этой скорости деформирование либо устойчиво (если m изменяется в указанных выше для $k\eta$ пределах), либо неустойчиво. Критическая деформация в этом случае равна соответственно либо бесконечности, либо нулю. В первом случае деформация ограничивается пластичностью материала.

Условия (температура, скорость деформации), при которых наблюдается сверхпластичность, по существу являются условиями наиболее устойчивого осевого растяжения, поскольку о пластичности судят по относительному удлинению при испытаниях на растяжение. В общем случае нельзя считать эти условия оптимальными для различных операций листовой штамповки, так как в этих процессах условия устойчивости могут оказаться иными.

Деформируемость металлов при их обработке

§ 19. Общие замечания

Возможности пластического формоизменения металлов ограничены. Очень часто необходимые для реализации технологического процесса деформации превышают пластичность материала — степень деформации, при которой образуется трещина, видимая невооруженным глазом и являющаяся браковочным признаком. Расчетная оценка деформируемости, т.е. способности заготовки выдерживать ту или иную технологическую операцию, не разрушаясь, на стадии проектирования технологического процесса способствует его интенсификации и значительной экономии, связанной с уменьшением объема экспериментальных исследований.

Задачу оценки деформируемости следует отнести к классу задач теории разрушения. В настоящее время общепринят следующий механизм разрушения. Нагружение тела сопровождается перемещением, образованием и исчезновением дислокаций. Объединение некоторого числа дислокаций может привести к зарождению микротрещины. Объединение микротрещин приводит к появлению макротрещины (магистральной трещины), в результате развития которой тело разрушается. При оценке деформируемости необходимо определение деформаций, при которых образуется магистральная трещина, в зависимости от свойств материала, напряженного состояния, истории деформирования, температурно-скоростных условий. Очевидно, что такое определение на «дислокационном» уровне сейчас невозможно. Известно, например, что при сжимающих напряжениях вследствие снижения потенциальных барьеров подвижность дислокаций повышается, облегчается их объединение, но вместе с тем облегчается и распад этих объединений. При этом (по сравнению с растяжением) изменяется и число дислокаций, которые, объединившись, могут привести к образованию микротрещины (оно, вероятно, возрастает), может измениться и характер этой трещины (например, вместо трещины отрыва образуется скалывающая трещина). Отсюда, как видим, даже не следует однозначный вывод о повышении пластичности при сжатии по сравнению с растяжением.

В механике разрушения ограничиваются рассмотрением раз-

вития трения в идеально упругом или упругопластическом материале, когда основной объем материала находится в упругом состоянии и лишь вблизи вершины трещины материал деформируется пластически.

Приведем некоторые результаты экспериментального исследования условий зарождения макротрещины в пластичном материале в напряженно-деформированном состоянии в привершинной области развивающейся трещины*.

Исследована предельная деформация на контуре центрального кругового отверстия в растягиваемых пластинах шириной 55 мм и толщиной 2 мм из стали Ст.3, латуни ЛС59-1 и алюминия. Поверхности пластин полировали. Затем на нее алмазной иглой с помощью инструментального микроскопа наносили поперечные риски с шагом 0,1 мм. Глубина риска составляла не более 0,005 мм, а ширина — не более 0,01 мм. Пластины растягивали ступенчато возрастающей нагрузкой. На каждой ступени деформирования после разгрузки на инструментальном микроскопе измеряли расстояние между рисками и определяли продольную деформацию ϵ_y в различных точках опасного сечения.

На рис. 55 представлена полученная зависимость предельной деформации $\epsilon_{пр}$ от относительного градиента деформации $q = \frac{d\epsilon_y}{dx} \frac{1}{(\epsilon_y)_{max}}$, приближенно равного в рассматриваемом случае относительному градиенту накопленной деформации. Различные значения градиента q получали, изменяя диаметры отверстий. Прерывистой линией приведены результаты испытания полос без отверстий. Как видим, с возрастанием градиента деформации предельная деформация возрастает. Однако при $q < 0,25$ 1/мм возрастание предельной деформации под влиянием градиента не превышает 10%.

Исследования напряженного состояния в привершинной области развивающейся трещины выполнены измерением микротвердости. В § 12 приведены экспериментальные данные, подтверждающие существование единой для различных напряженных состояний связи между твердостью и интенсивностью напряжений при пластическом деформировании. Пусть, например, материал имеет две структурные составляющие с микротвердостью H_1, H_2 . Предположим, что макротвердость H следующим образом связана с микротвердостью структурных составляющих:

$$H = \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + c, \quad (4.1)$$

где α_1, α_2, c — постоянные, не зависящие от $\bar{\epsilon}_0$. На рис. 56 приведены данные, свидетельствующие о том, что принятая линей-

* Исследования выполнены совместно с Б. Д. Чебаевским и А. С. Соляником.

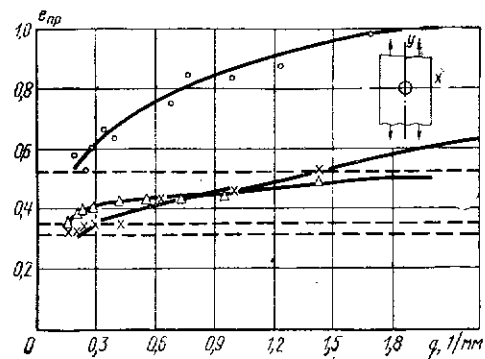


Рис. 55. Зависимость предельной деформации от градиента деформации:
○ — Ст.3; × — алюминий; △ — ЛС59-1

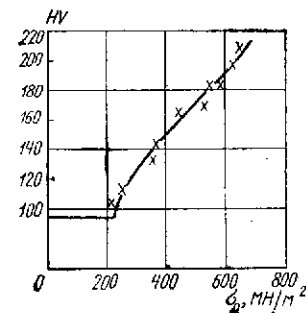


Рис. 56. Результаты экспериментальной проверки линейной модели макротвердости:
× — расчет по формуле (4.1)

ная модель согласуется с экспериментом. У сжатых до разной деформации образцов из стали Ст.3 измеряли микротвердость зерен перлита H_2 и феррита H_1 под нагрузкой 0,1 Н и 0,5 Н соответственно. Твердость по Вickers измеряли под нагрузкой 300 Н. Крестиками показаны результаты расчета макротвердости по уравнению (4.1) при $\alpha_1 = 1,0656$, $\alpha_2 = -0,065883$, $c = 5,8$.

Если справедливо соотношение (4.1), то из существования единой для различных напряженных состояний связи между макротвердостью и интенсивностью напряжений в пластической области следует существование единой связи между микротвердостью отдельной структурной составляющей и σ_0 . Разумеется, при определении интенсивности напряжений измерением микротвердости возникают некоторые затруднения, связанные с анизотропией механических свойств зерен. Однако, как показал подробный статистический анализ, выполненный Б. П. Чебаевским и А. С. Соляником, достаточно сравнительно небольшого числа измерений микротвердости структурной составляющей для стабилизации арифметического среднего этих измерений.

В области центра тяжести прямоугольной пластины размером $2,85 \times 60,1 \times 150$ мм из стали 10Г2С1 электронным способом наносили трещину — щель, ширина которой не превышала 0,1 мм. Щель располагали таким образом, что при последующем растяжении пластины плоскость щели была перпендикулярна направлению растягивающего усилия. Пластины нагружали усилием, при котором почти по всему опасному сечению материал переходил в пластическое состояние. Затем из нее вырезали участок с щелью, его поверхность шлифовали и полировали вначале механически, затем электролитически до пол-

ного снятия слоя, упрочняющего предшествующей обработкой. О снятии этого слоя судили, сравнивая результаты замера твердости по Виккерсу и микротвердости при нагрузке 0,1 Н. Приборы были оттарированы таким образом, что их показания на эталонах совпадали. Поэтому совпадение показаний приборов при измерении твердости исследуемого образца свидетельствовало о снятии наклепанного слоя.

На рис. 57 показаны изолинии интенсивности напряжений в привершинной области трещины при испытании пластины из малоуглеродистой стали Ст.3 и легированной стали 10Г2С1.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что если трещина развивается после достижения значительных пластических деформаций, то изолинии интенсивности напряжений геометрически подобны принятой в теории трещин форме границы пластической области вблизи трещины при упругопластическом разрушении.

В рассмотренных случаях напряженное состояние в окрестности вершины трещины было близко к плоскому. Плоское деформированное состояние исследовали испытанием на изгиб прямоугольного бруса размером $82 \times 82 \times 900$ мм из стали 1Х2М1, в средней части которого наносили исходящий от наружной поверхности острый надрез. На пульсаторе при нагрузках, вызывающих чисто упругие деформации, надрез развивали до усталостной трещины. Затем брус нагружали статически до страгивания трещины. Вероятно, в среднем по толщине бруса

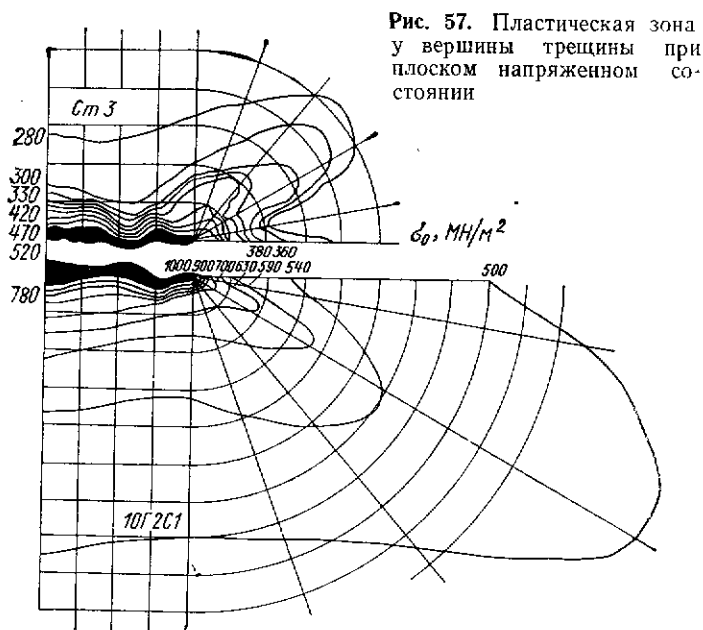


Рис. 57. Пластическая зона у вершины трещины при плоском напряженном состоянии

сечении деформация в окрестности вершины трещины близка к плоской.

На рис. 58 приведены изолинии микротвердости на поверхности бруса и на разном удалении z от этой поверхности. В соответствии с теорией разрушения по мере удаления от поверхности размеры пластической области и величины деформации в окрестности вершины трещины уменьшаются.

При больших пластических деформациях и сжимающих напряжениях наряду с зарождением и развитием дефектов происходит их «залечивание». Экспериментальные данные о «залечивании» дефектов при различных напряженных состояниях и историях деформирования чрезвычайно ограничены.

Как видим, задача оценки деформируемости металлов при их обработке обладает целым рядом особенностей, и нет оснований для оптимистичных прогнозов относительно развития методов ее решения аппаратом механики разрушения.

Вероятно, как и в развитии расчетов на прочность, интенсивному проникновению в эту область методов теории разрушения будет предшествовать достаточно длительный период преобладания инженерных методов, основанных на критериях деформируемости, роль которых аналогична роли критериев прочности в прочностных расчетах. Ясно, что от этих методов нельзя ожидать высокой точности. Полученные на их основе расчетные зависимости могут быть использованы лишь для весьма приближенных оценок деформируемости, точность и на-

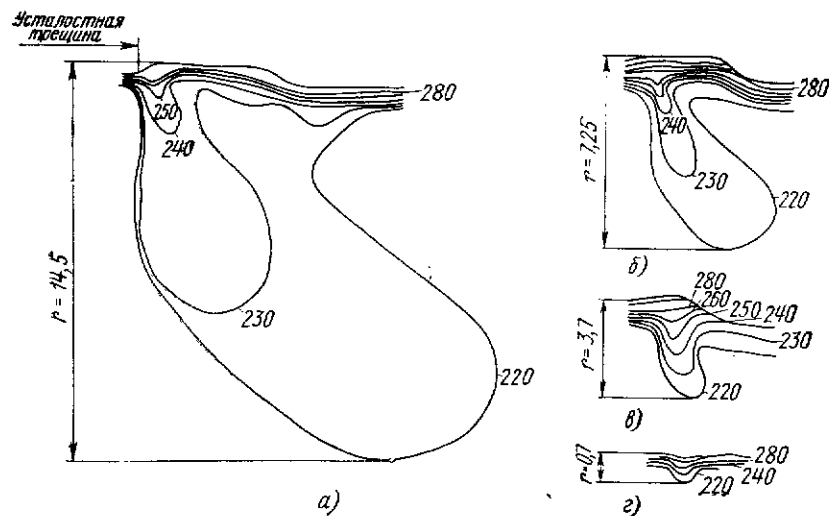


Рис. 58. Изолинии микротвердости H_{30} у вершины трещины при удалении от поверхности:

а — $z=0,4$ мм; б — $z=4$ мм; в — $z=8$ мм; г — $z=40$ мм

дежность которых можно со временем повысить, согласовывая их с экспериментом, с практикой, вводя соответствующие коэффициенты запаса и т. д.

§ 20. Диаграмма пластичности

Под пластичностью в дальнейшем понимается накопленная к моменту разрушения пластическая деформация (или параметр Удквиста). Зависимость пластичности от вида напряженного состояния характеризуется диаграммой пластичности, являющейся механической характеристикой материала. Диаграмму пластичности обычно строят в координатах коэффициент жесткости (или вида) напряженного состояния η — пластичность $e_{пр}$. Предполагается, что диаграмма пластичности, построенная в указанных координатах, является единой для различных напряженных состояний.

Предложены различные выражения коэффициента жесткости напряженного состояния через напряжения. Так, по Я. Б. Фридману,

$$\eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sigma_1 - 2\mu(\sigma_2 - \sigma_3)}, \quad (4.2)$$

где μ — коэффициент Пуассона, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$; по С. И. Губкину,

$$\eta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3[\sigma_{max}]} \quad (4.3)$$

или

$$\eta = 1 - \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2|\sigma_{max}|}. \quad (4.4)$$

М. А. Зайков предложил следующее выражение:

$$\eta = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}. \quad (4.5)$$

Последние два выражения имеют очевидный недостаток. Из формулы (4.4) следует, что пластичность материала одинакова при всех напряженных состояниях, при которых $\sigma_{min} = 0$, например при двухосном растяжении с различным соотношением напряжений, что, разумеется, не согласуется с экспериментом. Аналогично из соотношения (4.5) следует, что при двухосном сжатии пластичность не зависит от соотношения напряжений.

Наиболее часто в современной литературе используется выражение коэффициента жесткости напряженного состояния, предложенное В. А. Бабичковым. При этом различные авторы [27, 34] используют это выражение с разными значениями постоянного множителя, что, конечно, не имеет принципиального значения. Следуя В. А. Бабичкову, будем в дальнейшем считать, что

$$\eta = \frac{3\sigma}{\sigma_0}. \quad (4.6)$$

Заметим попутно, что полученные к настоящему времени экспериментальные данные, относящиеся главным образом к области двухосного напряженного состояния, не позволяют считать такой выбор выражения η обоснованным. С равным основанием можно, например, принять, что

$$\eta = \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\tau_{max}}. \quad (4.7)$$

Для более обоснованного выбора выражения η через напряжения (если только существует коэффициент жесткости напряженного состояния, который позволил бы получить единую для различных напряженных состояний диаграмму пластичности) необходимы результаты испытаний материалов при объемном напряженном состоянии.

А. А. Лабутин [34] строил диаграммы пластичности по результатам испытания материала на растяжение, сжатие, изгиб и кручение. Были испытаны образцы из двенадцати сталей. Полученные диаграммы аппроксимированы зависимостью

$$l_{пр} = 2e_p e^{-0.72\eta}, \quad (4.8)$$

где e_p — пластичность при растяжении.

В работах В. Л. Колмогорова и его сотрудников, помимо указанных испытаний, производились растяжение образца с выточкой, растяжение и сжатие с наложением гидростатического давления, выдавливание образцов жидкостью высокого давления.

Диаграммы пластичности можно строить путем испытания сплошных цилиндрических образцов на растяжение (сжатие) с кручением. Рассмотрим деформацию на поверхности такого образца.

Из условия несжимаемости следует, что

$$\ln \frac{l}{l_0} = -2 \ln \frac{r}{r_0}, \quad (4.9)$$

где l_0 , r_0 — расчетная длина и радиус образца до деформирования; l , r — те же размеры в рассматриваемый момент деформирования. На рис. 59 показана деформация квадрата на поверхности растягиваемого и закручиваемого стержня (ось x совмещена с осью стержня, ось y — с осевым направлением).

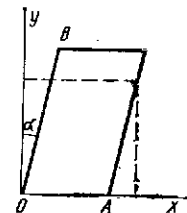


Рис. 59. Схема деформации на поверхности круглого стержня при совместном растяжении и кручении

Пусть до деформирования длина стороны квадрата равнялась единице. Тогда в деформированном состоянии

$$x_A = e^{-\frac{\varepsilon}{2}}, \quad y_A = 0, \quad x_B = e^{\varepsilon} \gamma, \quad y_B = e^{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = \ln l/l_0$, $\gamma = \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно,

$$dx_A = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}} d\varepsilon, \quad dy_A = 0, \quad dx_B = e^{\varepsilon} \gamma d\varepsilon + e^{\varepsilon} d\gamma, \quad dy_B = e^{\varepsilon} d\varepsilon.$$

По формулам (2.47) получаем, что

$$d\varepsilon_x = -\frac{1}{2} d\varepsilon, \quad d\varepsilon_y = d\varepsilon, \quad d\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(d\gamma + \frac{3}{2} \gamma d\varepsilon \right). \quad (4.10)$$

С учетом несжимаемости материала можно записать

$$\begin{aligned} \bar{d\varepsilon}_0 &= \sqrt{d\varepsilon_x^2 + \frac{4}{3} d\varepsilon_{xy}^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\gamma' + \frac{3}{2} \gamma \right)^2} |d\varepsilon| = \\ &= \sqrt{(\varepsilon')^2 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \gamma \varepsilon' \right)^2} |d\gamma|, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{d\varepsilon}; \quad \varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{d\gamma}.$$

Накопленная деформация

$$\begin{aligned} \bar{e}_0 &= \int_0^{|e|} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\gamma' + \frac{3}{2} \gamma \right)^2} |d\varepsilon| = \\ &= \int_0^{|e|} \sqrt{(\varepsilon')^2 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \gamma \varepsilon' \right)^2} |d\gamma|. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Согласно (2.87) на поверхности образца

$$\eta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_0} = \frac{1+\beta}{\bar{d\varepsilon}_0} (d\varepsilon_x + d\varepsilon_y) + \frac{1-\beta}{\bar{e}_0} (e_x + e_y).$$

Поскольку $e_x + e_y = -e$, $\ln x_A y_B = \frac{\varepsilon}{2}$, то с учетом (4.10) получаем

$$\eta = \frac{1+\beta}{2} \frac{d\varepsilon}{\bar{d\varepsilon}_0} + \frac{1-\beta}{2} \frac{\varepsilon}{\bar{e}_0}. \quad (4.13)$$

Решением уравнений (4.11), (4.13) можно рассчитать программу деформирования образца $\gamma(\varepsilon)$ для реализации требуемой истории деформирования $\bar{e}_0(\eta)$.

При построении диаграммы пластичности реализуется простое нагружение $\eta = \text{const}$. Из (4.13) следует, что достаточным

условием для этого является $\frac{d\varepsilon}{\bar{d\varepsilon}_0} = \frac{\varepsilon}{\bar{e}_0} = \text{const}$. В этом случае в соответствии с (4.11) (4.13) программа деформирования находится решением дифференциального уравнения

$$\gamma' + \frac{3}{2} \gamma = \sqrt{3 \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right)}. \quad (4.14)$$

Учитывая, что при $\varepsilon = 0$ $\gamma = 0$, получаем

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} (1 - e^{-\frac{3}{2} \varepsilon}). \quad (4.15)$$

Поскольку

$$\gamma = \frac{\varphi r}{l}, \quad r = r_0 \sqrt{\frac{l_0}{l}},$$

где φ — абсолютный угол закручивания на длине l в радианах,

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{l}{r_0} \sqrt{\frac{l}{l_0}} \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \left[1 - \left(\frac{l_0}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.16)$$

При испытании стержня связь между φ и l должна соответствовать уравнению (4.16).

На рис. 60 приведены диаграммы пластичности ряда материалов, построенные по изложенной методике Л. К. Спиридоновым.

К недостаткам изложенной методики построения диаграммы пластичности в первую очередь относятся использование уравнений состояния при расчете программы деформирования и определении результатов испытания, а также неоднородность напряженно-деформированного состояния.

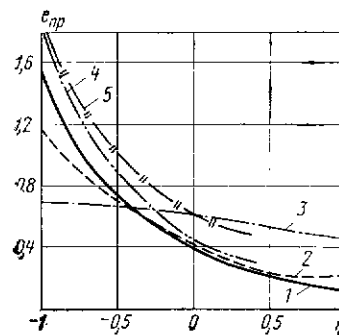


Рис. 60. Диаграммы пластичности:

1 — дюралюминий Д16; 2 — сталь Р18; 3 — латунь ЛС59-1; 4 — сталь 30ХМА; 5 — сталь ШХ15

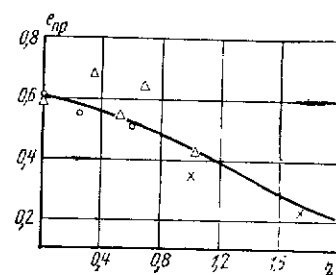


Рис. 61. Сопоставление предельной деформации, определенной по различным методикам:

× — испытанием трубчатых образцов; ○ — по предлагаемой методике; △ — по методике В. И. Максакса.

Наибольший градиент деформаций возникает при чистом кручении. Согласно данным, приведенным в § 19, при выполнении условия

$$q = \frac{d\bar{e}_0}{dr} \frac{1}{(\bar{e}_0)_{\max}} = \frac{d\gamma}{dr} \frac{1}{\gamma_n} = \frac{1}{r} < 0,25 \text{ 1/мм,}$$

т.е. при радиусе образца, превышающем 4 мм, влияние градиента на предельную деформацию несущественно.

На рис. 61 приведены результаты испытаний латуни ЛС59-1, проведенных совместно с Л. К. Спиридоновым по трем различным методикам. В области $\eta > 0$ диаграмма пластичности построена по результатам испытания тонкостенных трубчатых образцов, нагружаемых осевой силой и внутренним давлением. В области $1 > \eta > 0$ испытывали сплошные цилиндрические образцы по изложенной выше методике, а также по методике, предложенной В. И. Максакон. Согласно последней два цилиндрических образца разных диаметров нагружают осевой силой P и крутящим моментом M таким образом, чтобы отношение P/M у образцов было одинаковым. По результатам испытания строят графики зависимости крутящего момента и осевого усилия от сдвига на поверхности или удлинения. Затем, вычитая из крутящего момента и осевого усилия, приложенных к образцу большего диаметра, соответствующие нагрузки, действовавшие на меньший образец в момент, когда деформации на поверхности стержней одинаковы, определяют нагрузки M' , P' на условную трубку, дополняющую образец меньшего диаметра до большего образца. Если различие в диаметрах образцов незначительно, то напряжения в этой трубке можно определить по M' и P' так же, как и при испытании трубчатых образцов.

Как видим, результаты испытания сплошных образцов по разным методикам оказались достаточно близкими.

Вернемся теперь к вопросу об аппроксимации диаграмм пластичности. Практическая важность этого вопроса очевидна: при достаточно обоснованной и надежной аппроксимации диаграмм пластичности число испытаний материала для определения зависимости пластичности от вида напряженного состояния может быть сведено к минимуму. Кроме того, эти испытания могут оказаться весьма упрощенными. Так, если принять уравнение (4.8), то для построения диаграммы пластичности достаточно испытать материал на растяжение. Однако уравнение (4.8) сравнительно плохо согласуется с экспериментальными данными.

Значительно лучше описывает экспериментальные данные аппроксимация, предложенная Г. Д. Козловым:

$$\text{при } \eta \geq 0 \quad e_{\text{пр}} = A + B\eta + C\eta^2; \quad (4.17)$$

$$\text{при } \eta \leq 0 \quad e_{\text{пр}} = e_k e^{a\eta} \quad (4.18)$$

$$\text{или при } -1,73 < \eta < 3,46 \quad e_{\text{пр}} = A + B\eta + C\eta^2 + D\eta^3, \quad (4.19)$$

где A, B, C, D, a — коэффициенты аппроксимации; e_k — пластичность при кручении. Однако использование этих уравнений затруднено необходимостью испытания материала при сложном напряженном состоянии (простейшие испытания на растяжение, сжатие, кручение не позволяют определить все коэффициенты этих уравнений).

Очевидны следующие недостатки рассмотренных аппроксимаций.

Во-первых, многие материалы способны претерпевать при испытании на осевое сжатие сколь угодно большие деформации без разрушения, что противоречит уравнению (4.8).

Во-вторых, при испытании многих материалов на растяжение разрушению предшествует потеря устойчивости пластического деформирования, выражающаяся в образовании шейки и сопровождающаяся аномальным возрастанием пластичности. При общей тенденции уменьшения пластичности с возрастанием η очень часто оказывается, что пластичность, определяемая как деформация в шейке разрушенного образца, выше пластичности при кручении. Поэтому нецелесообразно использовать пластичность при осевом растяжении в качестве параметра уравнения, аппроксимирующего диаграмму пластичности.

Эта аномалия, вероятно, объясняется следующим. Как уже указывалось, под пластичностью понимается накопленная деформация в момент появления макротрещины. Если разрушению стержня, подвергаемого совместному распрямлению и кручению, не предшествует потеря устойчивости деформирования, то макротрещина зарождается на поверхности, и последующий процесс разрушения не сопровождается заметным возрастанием деформаций на поверхности, что позволяет определять пластичность по деформациям на удалении от места разрушения. Если же разрушению предшествует потеря устойчивости деформирования, то наиболее опасная область смещается к оси стержня. Процесс развития зарождающейся в этой области трещины может сопровождаться значительным возрастанием деформаций на поверхности в месте разрушения, в силу этого определенная по ним пластичность оказывается завышенной. Определить пластичность по деформациям на удалении от места разрушения также нельзя, поскольку они характеризуют лишь критическую деформацию. В связи с этим нами принимались во внимание лишь результаты испытаний стержней, у которых не наблюдалась шейка. Это позволяло не учитывать изменение напряженного состояния в процессе разрушения.

Приведенные на рис. 60 диаграммы пластичности с удовлетворительной точностью описываются уравнением

$$e_{\text{пр}} = \frac{e_c e_k}{e_c + \eta(e_c - e_k)} e^{-\eta}, \quad (4.20)$$

где e_c — пластичность при сжатии со смазкой. Это уравнение применимо лишь при $e_c > e_{ек}$. Указанному условию не удовлетворяет диаграмма пластичности латуни ЛС59-1 (см. рис. 60). При $e_c \rightarrow \infty$ уравнение (4.20) преобразуется к виду

$$e_{np} = \frac{e_{ек}}{1 + \eta} e^{-\eta}. \quad (4.21)$$

Экспериментальные данные, на основе которых получено уравнение (4.20), принадлежат интервалу $-1 \leq \eta \leq +1$, поэтому маловероятно, чтобы это уравнение с удовлетворительной точностью описывало пластичность за пределами указанной области, скажем, при двухосном растяжении.

§ 21. Критерии деформируемости

Методы оценки деформируемости получили свое развитие главным образом в работах Л. Д. Соколова, Г. А. Смирнова-Аляева, В. Л. Колмогорова. Наиболее простой метод заключается в следующем. Предполагается, что деформирование происходит без разрушения, если накопленная деформация удовлетворяет неравенству

$$\bar{e}_0 < e_{np}(\eta), \quad (4.22)$$

где e_{np} — пластичность, зависящая от вида напряженного состояния, температуры, скорости деформации. Обычно предполагается, что она не зависит от градиента напряжений и деформаций и истории деформирования.

Укажем на близость условия (4.22) к критерию прочности Шлехтера—Надаи. Согласно этому критерию интенсивность напряжений при разрушении есть определенная для данного материала функция гидростатического давления

$$(\sigma_0)_p = f(\sigma). \quad (4.23)$$

Если исходить из гипотезы о единой кривой течения в координатах $\sigma_0 - \bar{e}_0$, то из условия (4.23) следует, что накопленная деформация к моменту разрушения это некоторая определенная для данного материала, но единая для различных напряженных состояний и истории деформирования функция коэффициента жесткости напряженного состояния η , что и соответствует условию (4.22).

Оценка деформируемости по критерию (4.22) производится следующим образом.

Пусть известно напряженно-деформированное состояние при некоторой технологической операции. Вычислим в различных точках заготовки $\bar{e}_0$ (часто ее можно считать равной интенсивности логарифмических деформаций e_0) и η и представим полученные результаты в виде некоторой совокупности точек на плоскости $\bar{e}_0 - \eta$. Эта совокупность (рис. 62) образует область,

верхнюю границу которой (кривая 1) назовем необходимой пластичностью e'_0 . Необходимая пластичность является функцией технологических параметров и свойств материала. Если она располагается под диаграммой пластичности (кривая 2), то материал способен выдержать данную технологическую операцию без разрушения. В противном случае необходимо либо повысить пластичность материала (например, нагревом), либо изменить необходимую пластичность. Последнее достигается, например, наложением дополнительного гидростатического давления.

В связи с тем, что гидростатическое давление сравнительно слабо влияет на кинематику процессов деформирования, можно легко определить необходимую пластичность при дополнительном гидростатическом давлении σ' . Если при наложении отрицательного σ' поле интенсивности деформации не изменяется, то все точки кривой 1 смещаются по горизонтали влево. Если исходить из гипотезы о единой кривой течения, то можно считать неизменяющимся и поле интенсивности напряжений. Коэффициент жесткости напряженного состояния при дополнительном давлении определяется равенством $\eta' = \eta + \frac{3\sigma'}{\sigma_0}$, где η — коэффициент жесткости напряженного состояния до наложения дополнительного давления.

Для того чтобы рассчитать смещение некоторой точки А кривой 1 (рис. 64) при наложении давления σ' , необходимо по ее ординате e_0 из кривой течения найти σ_0 . Сместив точку кривой 1 влево на величину $3\sigma'/\sigma_0$, получаем необходимую пластичность при дополнительном давлении σ' (кривая 1').

В. Л. Колмогоров [27] предложил следующий критерий деформируемости без разрушения:

$$\psi = \int_0^t E(t - \tau) B(\tau) \frac{\dot{\bar{e}}_0(\tau)}{e_{np}(\tau)} d\tau < 1, \quad (4.24)$$

где ψ — величина, характеризующая использование ресурса пластичности; τ , t — время или некоторый заменяющий его параметр; $E(t - \tau)$ — коэффициент, учитывающий самозалечивание дефектов при высоких температурах и монотонно убывающий от 1 до 0 с увеличением аргумента; B — коэффициент, учитывающий историю деформирования.

Использование этого критерия затруднено тем, что в литературе не приводятся данные о коэффициентах E и B при различных процессах пластического деформирования. Поэтому эти коэффициенты обычно принимают равными единице. Тогда критерий (4.24) можно переписать в виде

$$\int_0^{\bar{e}_0} \frac{d\bar{e}_0}{e_{np}(\bar{e}_0)} < 1. \quad (4.25)$$

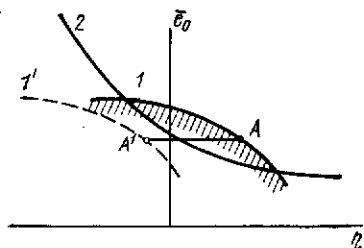


Рис. 62. К оценке деформируемости по критерию (4.22)

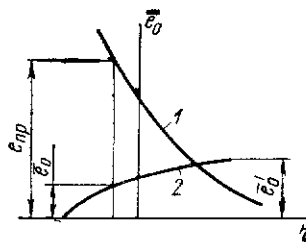


Рис. 63. К оценке деформируемости по критерию (4.25)

Отметим аналогию между приведенным условием деформируемости и линейным законом суммирования повреждений [44] в условиях ползучести и при циклических нагружениях.

Если в процессе деформирования $\eta = \text{const}$, то условие (4.25) сводится к условию (4.22). В более общем случае по заданной функции $\bar{\epsilon}_0(\eta)$ и диаграмме пластичности можно установить зависимость $\epsilon_{\text{пр}}(\bar{\epsilon}_0)$, и, выполнив интегрирование в (4.25), произвести оценку деформируемости.

На рис. 63 кривая 1 — диаграмма пластичности, а кривая 2 — изменение накопленной интенсивности деформации $\bar{\epsilon}_0$ в зависимости от η у некоторой частицы обрабатываемого металла. Пусть для реализации процесса накопленная интенсивность деформации должна достигнуть величины $\bar{\epsilon}'_0$. Определяя для различных значений $\eta\bar{\epsilon}_0$ и $\epsilon_{\text{пр}}$, строим график изменения $1/\epsilon_{\text{пр}}$ в зависимости от $\bar{\epsilon}_0$. Если площадь, заключенная под этим графиком на участке $0 \leq \bar{\epsilon}_0 \leq \bar{\epsilon}'_0$, меньше единицы, условие (4.25) выполнено.

Для проверки и обоснования критериев деформируемости необходимы экспериментальные данные о зависимости пластичности металлов от историй деформирования. Разделим их условно на две группы — на монотонное и немонотонное деформирование. Немонотонным будем называть пластическое деформирование, прерываемое промежуточными разгрузками с изменением направления деформирования. Во всех прочих случаях будем называть деформирование монотонным. Изложенная в § 20 методика испытания сплошных цилиндрических образцов позволяет исследовать зависимость пластичности от истории деформирования при монотонном пластическом деформировании.

Пусть история деформирования задана уравнением

$$\eta = f(\bar{\epsilon}_0). \quad (4.26)$$

Поскольку $d\bar{\epsilon}_0 = d\epsilon$, решением уравнения (4.13) получаем соответствующую зависимость между ϵ и $\bar{\epsilon}_0$:

$$\epsilon = \frac{2}{(1+\beta)\epsilon_0^{1+\beta}} \int_0^{\bar{\epsilon}_0} f(\bar{\epsilon}_0) \bar{\epsilon}_0^{1+\beta} d\bar{\epsilon}_0. \quad (4.27)$$

Здесь учтено, что при $\bar{\epsilon}_0 = 0$ $\epsilon = 0$. Разрешив это уравнение относительно $\bar{\epsilon}_0$, получаем

$$\bar{\epsilon}_0 = \Phi(\epsilon). \quad (4.28)$$

Далее, из (4.11) следует уравнение

$$\gamma' + \frac{3}{2}\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{d\Phi}{d\epsilon}\right)^2 - 1}.$$

Поскольку при $\epsilon = 0$ $\gamma = 0$, записываем решение этого уравнения в виде

$$\gamma = \sqrt{3} e^{-\frac{3}{2}\epsilon} \int_0^{\epsilon} \sqrt{\left(\frac{d\Phi}{d\epsilon}\right)^2 - 1} e^{\frac{3}{2}\epsilon} d\epsilon \equiv F(\epsilon). \quad (4.29)$$

Теперь легко получить зависимость между рабочей длиной образца l и соответствующим ей углом закручивания φ , при которой реализуется история деформирования (4.26):

$$\varphi = \frac{l}{r_0} \sqrt{\frac{l}{l_0}} F\left(\ln \frac{l}{l_0}\right).$$

Пусть, например, уравнение (4.26) задано в виде

$$\eta = f(\bar{\epsilon}_0) = C\bar{\epsilon}_0^k.$$

Тогда из (4.27) получаем

$$\epsilon = \frac{2C}{2+k(1+\beta)} \bar{\epsilon}_0^{k+1}.$$

Следовательно,

$$\bar{\epsilon}_0 = \Phi(\epsilon) = \left[\frac{2+k(1+\beta)}{2C} \epsilon \right]^{\frac{1}{k+1}}.$$

Из уравнения (4.29) при этом следует, что

$$\gamma = \sqrt{3} e^{-\frac{3}{2}\epsilon} \int_0^{\epsilon} \sqrt{\left[\frac{2+k(1+\beta)}{2C} \right]^{\frac{2}{k+1}} \frac{1}{(k+1)^2 \epsilon^{\frac{2k}{k+1}}} - 1} e^{\frac{3}{2}\epsilon} d\epsilon.$$

В частности, при $k = 1$

$$\gamma = \sqrt{3} e^{-\frac{3}{2}\epsilon} \int_0^{\epsilon} \sqrt{\frac{3+\beta}{8C\epsilon} - 1} e^{\frac{3}{2}\epsilon} d\epsilon.$$

На рис. 64, 65 приведены результаты испытания образцов из сталей P12, P18 в отожженном состоянии [13]. Как видно, ес-

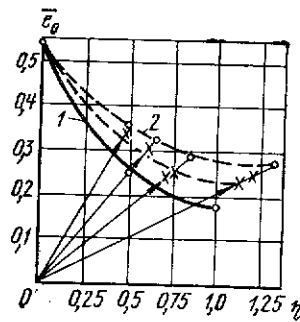


Рис. 64. Зависимость пластичности стали Р18 от истории деформирования:
1 — диаграмма пластичности;
2 — расчет по критерию (4.25)

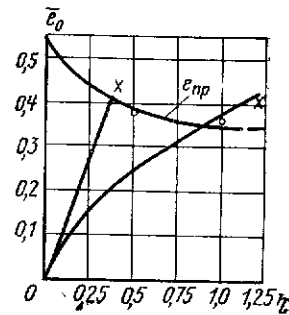


Рис. 65. Зависимость пластичности стали Р12 от истории деформирования

ли в процессе деформирования $\frac{d\bar{e}_0}{d\eta} \geq 0$, то разрушение происходит при деформации $\bar{e}_0 \geq e_{np}$ (e_{np} — определяемая по диаграмме пластичности предельная деформация, соответствующая значению η в момент разрушения при сложном нагружении).

Если же в процессе деформирования $\frac{d\bar{e}_0}{d\eta} \leq 0$, то при разрушении $\bar{e}_0 \leq e_{np}$.

На рис. 64 сопоставлена деформация к моменту разрушения при деформировании по программе $\eta = C\bar{e}_0$, определенная по критерию (4.22) (ей соответствует диаграмма пластичности 1) и по критерию (4.25) (кривая 2), с фактической. Приведенные результаты показывают, что рассмотренные критерии деформируемости предсказывают деформацию к моменту разрушения примерно с одинаковой точностью. По критерию (4.22) эта деформация оказывается заниженной, а по критерию (4.25) завышенной. Тем не менее в связи с естественным разбросом результатов испытаний при построении диаграммы пластичности, нестабильностью свойств материала, недостаточной точностью информации о истории деформирования и т. д. в большинстве случаев точность этих критериев вполне достаточна. Однако при проектировании процессов обработки металлов с достаточно стабильными свойствами желательно исходить из более точного критерия деформируемости. Есть некоторое основание считать, что таковым является критерий, опубликованный в работе [13] и полученный, исходя из следующих соображений.

Следуя работе [21], введем понятие трещиноватости — положительной, возрастающей со временем функции Φ . Функция трещиноватости в данный момент времени зависит от всей предшествующей истории деформирования. Запишем ее в виде

$$\Phi = \int_0^{e'_{np}} \psi(\bar{e}_0, e_{np}) d\bar{e}_0 = 1,$$

где e'_{np} — накопленная интенсивность деформации к моменту разрушения.

Результаты изложенных экспериментов позволяют предположить, что функция трещиноватости может быть представлена в виде

$$\Phi = \int_0^{e'_{np}} \frac{F(\bar{e}_0)}{e_{np}^n} d\bar{e}_0 = 1, \quad (4.30)$$

где $n = n\left(\frac{d\eta}{d\bar{e}_0}\right)$.

В случае, когда $\eta = \text{const}$, соотношение (4.30) приобретает вид

$$\int_0^{e'_{np}} F(\bar{e}_0) d\bar{e}_0 = \bar{e}_{np}^n.$$

Отсюда следует, что

$$F(\bar{e}_0) = n\bar{e}_0^{n-1}.$$

Следовательно, критерий деформируемости при заданной зависимости $\bar{e}_0(\eta)$ можно записать следующим образом:

$$\Psi = \int_0^{e'_0} n(\bar{e}_0) \frac{\bar{e}_0^{n(\bar{e}_0)-1}}{\bar{e}_{np}^{n(\bar{e})}(\bar{e}_0)} d\bar{e}_0 \leq 1.$$

Для выявления вида функции $n = n\left(\frac{d\eta}{d\bar{e}_0}\right)$ обработаны данные экспериментов (рис. 65), в которых реализовали сложное нагружение по программам $\eta = C\bar{e}_0$, где $C = \frac{d\eta}{d\bar{e}_0} = \text{const}$. В этом случае

$$\int_0^{\eta'} \frac{\eta^{\eta-1}}{e_{np}^n(\eta)} d\eta = \frac{C^n}{n}, \quad (4.31)$$

где η' — значение параметра η к моменту разрушения. Задавшись различными значениями n , строили график зависимости левой и правой части уравнения (4.31) от n . Фактическому n для данной программы деформирования соответствует точка пересечения указанных графиков. Полученная функция $n = n\left(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{e}_0}\right)$ линеаризована (рис. 66):

$$n = 1 + a \frac{\partial\eta}{\partial\bar{e}_0}.$$

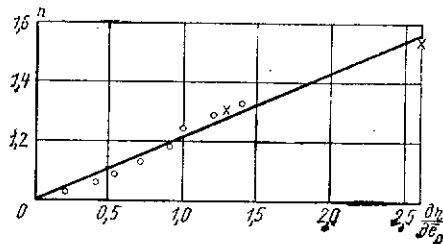


Рис. 66. Экспериментальное определение параметра a :
○ — сталь Р18; × — латунь ЛС59-1

Окончательно критерий деформируемости записывается в виде

$$\Psi = \int_0^{\bar{e}_0} \left(1 + a \frac{d\eta}{d\bar{e}_0}\right) \frac{\bar{e}_{00}^a \frac{d\eta}{d\bar{e}_0}}{\{e_{пр}(\bar{e}_0)\}^{1+a \frac{d\eta}{d\bar{e}_0}}} d\bar{e}_0 \leq 1. \quad (4.32)$$

Константа a оказалась равной 0,2. Для того чтобы выяснить, зависит ли эта константа от материала, были аналогичным образом обработаны результаты испытаний образцов из латуни ЛС59-1. На рис. 66 показаны точки, соответствующие этим результатам. Они позволяют предположить, что a слабо зависит от свойств материала.

Для проверки критерия (4.32) при $\frac{d\eta}{d\bar{e}_0} \neq \text{const}$ испытали образец из стали Р12 по программе $\eta = 7,71\bar{e}_0^2$. Коэффициент 7,71 выбран так, чтобы соответствующая этой программе кривая $\bar{e}_0 = \bar{e}_0(\eta)$ пересекла диаграмму пластичности в точке, соответствующей линейному растяжению. Фактическая величина $e_{пр}$ составила 0,4, расчетная — 0,395.

§ 22. Деформируемость при раздаче трубы

Рассмотрим, например, раздачу толстостенной трубы под действием внутреннего и внешнего давления. Трубу с начальными внутренним и наружным радиусами a_0, b_0 необходимо раздать до внутреннего радиуса a . Требуется определить внешнее давление, при котором труба в процессе раздачи не разрушится. Деформацию будем считать плоской и устойчивой.

Начнем с рассмотрения деформированного состояния. В силу осевой симметрии окружная, радиальная и осевая деформация являются главными. Окружная логарифмическая деформация

$$e_\varphi = \ln \frac{r}{r_0}, \quad (4.33)$$

где r_0, r — соответственно радиус до рассматриваемого момента деформирования и в этот момент.

Радиальная деформация

$$e_r = \ln \frac{dr}{dr_0}. \quad (4.34)$$

Поскольку деформация плоская, осевая деформация $e_z = 0$. Из уравнений (4.33), (4.34) получаем, что

$$r \frac{de_\varphi}{dr} = 1 - e^{e_\varphi - e_r}. \quad (4.35)$$

Из условия несжимаемости $e_r = -e_\varphi$. В связи с этим переписываем уравнение (4.35)

$$r \frac{de_\varphi}{dr} + e^{2e_\varphi} - 1 = 0.$$

Полученное уравнение подстановкой $t = e^{-2e_\varphi}$ приводится к линейному. Его общее решение запишется в виде

$$e_\varphi = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{C}{r^2}\right).$$

Постоянную интегрирования C определяем, исходя из условия, что

$$\text{при } r = a_0 \quad e_\varphi = e'_\varphi = \ln \frac{a}{a_0}.$$

В результате получаем

$$e_\varphi = -\frac{1}{2} \ln \left[1 + (e^{-2e'_\varphi} - 1) \frac{a^2}{r^2}\right].$$

Интенсивность приращений деформаций

$$d\bar{e}_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} de_\varphi.$$

Интегрируя, получаем накопленную интенсивность деформаций

$$\bar{e}_0 = \int d\bar{e}_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_\varphi$$

(так как главные оси тензора деформации зафиксированы, $d\bar{e}_0 = de_\varphi$).

Интенсивность логарифмических деформаций

$$e_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_\varphi.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\bar{e}_0 = e_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left[1 + (e^{-2e'_\varphi} - 1) \frac{a^2}{r^2}\right]. \quad (4.36)$$

Коэффициент жесткости напряженного состояния определяем из дифференциального уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{2} = 0. \quad (4.37)$$

Окружное напряжение

$$\sigma_\varphi = \sigma + \frac{2}{3} \sigma_0 \frac{d\varepsilon_\varphi}{d\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{3} (\eta + \sqrt{3}) \quad (4.38)$$

и аналогично

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{3} (\eta - \sqrt{3}). \quad (4.39)$$

Подставив соотношения (4.38), (4.39) в уравнение (4.37), получаем

$$r \frac{d\eta}{dr} + \frac{r}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{dr} (\eta - \sqrt{3}) - 2\sqrt{3} = 0.$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$\eta = \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\sigma_0} \int_a^r \frac{\sigma_0}{r} dr + \frac{L}{\sigma_0}. \quad (4.40)$$

Пусть внешнее давление $p = \sigma_{0H} a$, где σ_{0H} — интенсивность напряжений на наружной поверхности трубы. Тогда при

$$r = b \quad \eta = \eta_H = \sqrt{3} - 3\alpha.$$

По этому условию можно определить постоянную интегрирования L . Наружный радиус трубы находим из условия несжимаемости

$$b = \sqrt{a^2 - a_0^2 + b_0^2}.$$

Задавая различные значения r ($a \leq r \leq b$), по соотношению (4.36) находим распределение $\bar{\varepsilon}_0$ вдоль радиуса. По кривой течения находим соответствующее распределение σ_0 . Приняв, что $p=0$, из уравнения (4.40) находим L , а затем по этому же уравнению определяем η в различных точках. Из диаграммы пластичности материала трубы по величине η определяем соответствующие различным точкам значения $\varepsilon_{пр}$. Если в каждой точке выполняется условие (4.22), то можно производить раздачу трубы при $p=0$. В противном случае задаемся $p>0$, и повторяем расчет до тех пор, пока условие (4.22) не окажется выполненным.

Полученное решение позволяет также произвести оценку деформируемости по критериям (4.25), (4.32). Для этого необходимо для различных значений окружной деформации на внутренней поверхности ε_{φ} ($0 \leq \varepsilon_{\varphi} < \varepsilon'_\varphi$) получить связь меж-

ду начальными и текущими значениями радиусов

$$r_0 = r \sqrt{1 + (e^{-2\varepsilon_{\varphi}} - 1) \frac{a_1^2}{r^2}}, \quad (4.41)$$

где $a_1 = a_0 e^{\varepsilon_{\varphi}}$. Далее для различных частиц (им соответствуют различные r_0) по формуле (4.41) определяем функции $r(\varepsilon_{\varphi})$, по соотношению (4.36) для данной частицы находим функцию $\bar{\varepsilon}_0(\varepsilon_{\varphi})$ (при этом полагаем, что $\varepsilon'_\varphi = \varepsilon_{\varphi}$, $a = a_1$), а по уравнению (4.40) — зависимость $\eta(\varepsilon_{\varphi})$. По диаграмме пластичности определяем зависимость $1/\varepsilon_{пр}$ от $\bar{\varepsilon}_0$ и производим оценку деформируемости по условию (4.25).

При использовании критерия (4.32) необходимо дополнительно, располагая функциями $\bar{\varepsilon}_0(\varepsilon_{\varphi})$ и $\eta(\varepsilon_{\varphi})$, определять производную $d\eta/d\bar{\varepsilon}_0$.

§ 23. Вероятность разрушения обрабатываемого металла

Обобщая рассмотренные в § 21 критерии деформируемости, запишем их в виде $\psi \leq 1$, где ψ — параметр, характеризующий использование ресурса пластичности и определяемый по диаграмме пластичности $\varepsilon_{пр}(\eta)$, истории деформирования $\bar{\varepsilon}_0(\eta)$ и необходимой пластичности $\bar{\varepsilon}'_0$ посредством некоторого оператора L :

$$\psi = L\{\varepsilon_{пр}(\eta); \bar{\varepsilon}_0(\eta), \bar{\varepsilon}'_0\}. \quad (4.42)$$

Все параметры и функции, которые необходимо знать для оценки деформируемости, являются случайными. Случайность диаграммы пластичности очевидна. Случайность истории деформирования и необходимой пластичности связана со случайностью параметров технологических процессов (с неточностью инструмента и заготовок, нестабильностью смазки и т. д.) и случайностью свойств заготовки. Поэтому целесообразна статистическая оценка деформируемости. Значения, принимаемые случайными функциями $\varepsilon_{пр}(\eta)$, $\bar{\varepsilon}_0(\eta)$ и величинам $\bar{\varepsilon}'_0$, ψ , будем соответственно обозначать в дальнейшем $x(\eta)$, $y(\eta)$, u , z .

Пусть известна плотность распределения параметра $\psi f(z)$. Тогда вероятность разрушения обрабатываемого металла можно, как это принято в теории надежности, определить соотношением

$$P = \int_0^\infty f(z) dz. \quad (4.43)$$

Таким образом, задача оценки вероятности разрушения металла при его обработке сводится к следующей. Даны случайные функции $\bar{\varepsilon}_0(\eta)$, $\varepsilon_{пр}(\eta)$ и случайная величина $\bar{\varepsilon}'_0$ со всеми статистическими характеристиками. Требуется оценить плотность

распределения параметра ψ , определенного уравнением (4.42). Решение столь общей задачи сопряжено с большими математическими трудностями, поэтому ограничимся рассмотрением приближенных методов оценки вероятности разрушения.

Пусть диаграмма пластичности случайна, а история деформирования и необходимая пластичность не случайны. Если известна плотность распределения пластичности $f_1(x)$ при различных значениях η , то по условию $P_i = \int_0^{x_i} f_1(x) dx$ можно опре-

делить деформацию x_i , соответствующую заданной вероятности разрушения P_i при различных значениях η .

Если закон распределения пластичности при фиксированном η близок к нормальному, то $P_i = \Phi^* \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_{(x)}} \right)$, где x_i , $\sigma_{(x)}$ —

арифметическое среднее и среднеквадратическое отклонение пластичности при данном η ; Φ^* — стандартная функция распределения, таблицы этой функции приводятся в учебниках по теории вероятностей.

Кривая $x_i(\eta)$ представляет собой диаграмму пластичности при вероятности разрушения P_i . Таким образом, можно построить семейство диаграмм пластичности, соответствующих различной вероятности разрушения.

Для оценки вероятности разрушения металла при какой-либо технологической операции на основе критерия деформируемости (4.22) теперь достаточно в плоскости $\bar{e}_0$ — η сопоставить с указанными диаграммами точку с координатами $\bar{e}'_0$ — η .

Если же оценка деформируемости производится по критерию (4.25), то по условию $\int_0^{\bar{e}'_0} \frac{d[\bar{e}_0(\eta)]}{x_i[y(\eta)]} = 1$, где функция

$x_i[y(\eta)]$ определяется по диаграмме пластичности при вероятности разрушения P_i , можно определить пластичность $\bar{e}_{0i}$, соответствующую при заданной истории деформирования вероятности разрушения P_i . Выполнив расчет при различных значениях P_i , можно построить график $\bar{e}_{0i}(P_i)$, из которого по значению необходимой пластичности $\bar{e}'_0$ можно определить вероятность разрушения металла при рассматриваемой операции.

Аналогично оценивается вероятность разрушения по критерию (3.32).

Рассмотрим теперь простое нагружение $\eta = \text{const}$, при котором все рассмотренные критерии деформируемости сводятся к условию (4.22). Будем считать, что η — неслучайный параметр, а пластичность $e_{пр}$ и необходимая пластичность $\bar{e}'_0$ — случайные величины с плотностью распределения соответственно $f_1(x)$ и $f_2(u)$.

Поскольку в рассматриваемом случае

$$\psi = \frac{\bar{e}'_0}{e_{пр}}, \quad (4.44)$$

причем $\bar{e}'_0 \geq 0$, $e_{пр} \geq 0$, получаем следующую плотность распределения ψ :

$$f(z) = \int_0^\infty x f_1(x) f_2(zx) dx. \quad (4.45)$$

В работах [4, 7] показано, что деформация разрушения вязких материалов при одинаковых условиях нагружения распределена по закону, близкому к нормальному. Это же относится и к необходимой пластичности. Следовательно, плотности вероятности случайных величин $\bar{e}'_0$ и $e_{пр}$ (при $\eta = \text{const}$ $e_{пр}(\eta)$ — случайная величина) соответственно могут быть представлены в виде

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{(x)}} \exp \left\{ -\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_{(x)}^2} \right\};$$

$$f_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{(u)}} \exp \left\{ -\frac{(u - \bar{u})^2}{2\sigma_{(u)}^2} \right\};$$

где $\sigma_{(u)}$, $\sigma_{(x)}$ и $\bar{u}$, $\bar{x}$ — соответственно среднеквадратические отклонения и математические ожидания случайных величин $\bar{e}'_0$ и $e_{пр}$.

Подставив эти соотношения в уравнение (4.45), получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_{(x)}\sigma_{(u)}} \int_0^\infty x \exp \left\{ -\frac{(zx - \bar{u})^2}{2\sigma_{(u)}^2} - \frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_{(x)}^2} \right\} dx. \quad (4.46)$$

Здесь учтено, что $u = zx$. Интегрируя (4.46), получаем

$$f(z) = \frac{\sigma_{(u)}\sigma_{(x)}}{2\pi\sigma_{(x)}^2\sigma_{(u)}^2} \{ \exp[-\varphi(z)] + \sqrt{\pi} \varphi(z) [1 + \text{erf}[\varphi(z)]] \} T(z), \quad (4.47)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{\sigma_{(x)}^2 \bar{z}z + \sigma_{(u)}^2}{\sqrt{2} \sigma_{(x)}\sigma_{(u)}\sigma_{(z)}}; \quad T(z) = \exp \left\{ -\frac{(z - \bar{z})^2}{2\sigma_{(z)}^2} \right\};$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{x}}; \quad \sigma_{(z)} = \frac{\sqrt{\sigma_{(x)}^2 \bar{z}^2 + \sigma_{(u)}^2}}{\bar{x}}; \quad \text{erf} \varphi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varphi e^{-t^2} dt.$$

В дальнейшем расчет сводится к определению численных характеристик $\bar{e}_{пр}$ и $\bar{e}'_0$ и функции (4.47), вероятность разрушения оценивается по соотношению (4.43).

В более общем случае, когда необходимо считаться со случайностью истории деформирования, необходимой пластичности, диаграммы пластичности, можно оценить вероятность разрушения приближенным численным методом*. Будем оценивать вероятность разрушения на основе критерия деформируемости (4.25). Для этого разобьем отрезок $0, \bar{e}'_0$ (здесь $\bar{e}'_0$ — математическое ожидание необходимой пластичности) на n интервалов таким образом, чтобы с достаточной точностью можно было записать

$$\psi = \sum_{i=1}^n \Delta\psi_i = \sum_{i=1}^n \frac{(\bar{e}_0)_i - (\bar{e}_0)_{i-1}}{e_{np}(\eta_i)}, \quad (4.48)$$

где $(\bar{e}_0)_{i-1}$, $(\bar{e}_0)_i$ — соответственно накопленная интенсивность деформаций в начале и в конце i -того интервала, причем $(\bar{e}_0)_0 = 0$, $(\bar{e}_0)_n = \bar{e}_0$.

Примем далее, что в каждом интервале случайные функции $e_{np}(\eta)$ и $\bar{e}_0(\eta)$ можно представить в виде

$$e_{np}(\eta) = (n_i\eta + m_i) + A_i(c_i\eta + 1); \quad (4.49)$$

$$\bar{e}_0(\eta) = (a_i\eta + b_i) + B_i(d_i\eta + 1), \quad (4.50)$$

где A_i , B_i — случайные коэффициенты, остальные коэффициенты неслучайные. Коэффициенты n_i , m_i , a_i , b_i определяются при линеаризации математических ожиданий функций $e_{np}(\eta)$, $\bar{e}_0(\eta)$ в i -том интервале. Если принять, что распределения e_{np} и $\bar{e}_0$ при фиксированном η подчиняются нормальному закону, то можно определить коэффициенты c_i , d_i по величине среднеквадратических отклонений e_{np} и $\bar{e}_0$ в начале и в конце интервала:

$$c_i = \frac{\sigma_{(x)i} - \sigma_{(x)i-1}}{\eta_i \sigma_{(x)i-1} - \eta_{i-1} \sigma_{(x)i}}; \quad d_i = \frac{\sigma_{(y)i} - \sigma_{(y)i-1}}{\eta_i \sigma_{(y)i-1} - \sigma_{(y)i} \eta_{i-1}},$$

где $\sigma_{(x)}$, $\sigma_{(y)}$ — соответственно среднеквадратические отклонения e_{np} и $\bar{e}_0$ при фиксированном η . Предполагается, что в пределах каждого интервала зависимости $\sigma_{(x)}$, $\sigma_{(y)}$ от η близки к линейным.

Математические ожидания коэффициентов A_i и B_i равны нулю, а их среднеквадратические отклонения можно определить по соотношениям

$$\sigma_{(A)i} = \frac{\sigma_{(x)i-1} \eta_i - \sigma_{(x)i} \eta_{i-1}}{\eta_i - \eta_{i-1}}; \quad \sigma_{(B)i} = \frac{\sigma_{(y)i-1} \eta_i - \sigma_{(y)i} \eta_{i-1}}{\eta_i - \eta_{i-1}}.$$

Приращение параметра ψ на i -том интервале деформирования определяется теперь соотношением

* Разработан совместно с В. Г. Нахайчуком.

$$\Delta\psi_i = \frac{R_i}{Q_i}, \quad (4.51)$$

где

$$R_i = a_i(\eta_i - \eta_{i-1}) + 2B_i(d_i\eta_i + 1); \\ Q_i = n_i\eta_i + m_i + A_i(c_i\eta_i + 1). \quad (4.52)$$

Из соотношений (4.49), (4.50), (4.52) следует, что случайные величины Q_i и R_i распределены по нормальному закону, статистические характеристики этих величин определяются соотношениями

$$\bar{R}_i = a_i(\eta_i - \eta_{i-1}); \quad \bar{Q}_i = n_i\eta_i + m_i;$$

$$\sigma_{(R)i} = 2\sigma_{(B)i}(d_i\eta_i + 1); \quad \sigma_{(Q)i} = (c_i\eta_i + 1)\sigma_{(A)i}.$$

Среднеквадратические отклонения $\sigma_{(R)i}$ и $\sigma_{(Q)i}$ в полученных соотношениях рассматриваются только на i -том интервале, поэтому для упрощения записи в дальнейшем будем, опуская индекс i , писать $\sigma_{(R)}$, $\sigma_{(Q)}$. Плотности вероятности случайных величин Q_i и R_i можно записать в виде

$$f_3(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{(Q)}} \exp \left\{ -\frac{(q - \bar{Q}_i)^2}{2\sigma_{(Q)}^2} \right\};$$

$$f_4(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{(R)}} \exp \left\{ -\frac{(r - \bar{R}_i)^2}{2\sigma_{(R)}^2} \right\},$$

где q и r — соответственно текущие значения, принимаемые случайными величинами Q_i и R_i . Так как Q_i и R_i независимы, а случайная величина $\Delta\psi_i$ определяется по формуле (4.51), то плотность вероятности $\Delta\psi_i$ выразится уравнением

$$f_i(z) = \int_1^\infty q f_4(rq) f_3(q) dq. \quad (4.53)$$

здесь учтено, что $r = zq$, индекс i означает, что плотность вероятности $\Delta\psi$ определена на i -том интервале.

Интегрируя (4.53), получим

$$f_i(z) = \frac{\sigma_{(R)}\sigma_{(Q)}}{2\pi\sigma_{(z)}^2 Q_i^2} \{ \exp[-\varphi_i(z)^2] + \sqrt{\pi} \varphi_i(z) [1 + \operatorname{erf}[\varphi_i(z)]] \} T_i(z), \quad (4.54)$$

где

$$\varphi_i(z) = \frac{\sigma_{(Q)}^2 \bar{z}_i z + \sigma_{(R)}^2}{\sqrt{2} \sigma_{(Q)} \sigma_{(R)} \sigma_{(z)}}; \quad \bar{z}_i = \frac{\bar{R}_i}{\bar{Q}_i}; \quad (4.55)$$

$$T_i(z) = \exp \left\{ - \frac{(z - \bar{z}_i)^2}{2\sigma_{(i)}^2} \right\}. \quad (4.56)$$

$$\sigma_{(i)} = \frac{\sqrt{\sigma_{(Q)}^2 \bar{z}_i^2 + \sigma_{(R)}^2}}{\bar{Q}_i}. \quad (4.57)$$

В соотношениях (4.53)–(4.57) z — текущее значение ψ , из области $0 < z \leq 1$, где функция $f_i(z)$ отлична от нуля. Анализируя эти соотношения, отметим, что функция (4.57) в интервале слабо зависит от z , поэтому с достаточной степенью точности можно заменить z усредненным $\bar{z}$ в интервале. Функция $\varphi_i(z) \gg 1$, следовательно, $\exp \{-\varphi_i(z)^2\} \approx 0$, $\operatorname{erf}[\varphi_i(z)] \approx 1$, и уравнение (4.54) сводится к уравнению нормального закона распределения

$$f_i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{(i)}} \exp \left\{ - \frac{(z - \bar{z}_i)^2}{2\sigma_{(i)}^2} \right\}, \quad (4.58)$$

где $\sigma_{(i)} = \frac{\sqrt{\sigma_{(Q)}^2 \bar{z}_i^2 + \sigma_{(R)}^2}}{\bar{Q}_i}$ — среднее квадратическое отклонение.

Случайная величина ψ связана с $\Delta\psi_i$ зависимостью (4.48); определим ее плотность вероятности $f(z)$ через $f_i(z)$, используя преобразование Фурье. Применяя его к соотношению (4.58), получим характеристическую функцию случайной величины $\Delta\psi_i$

$$E_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itz) f_i(z) dz = \exp(i\bar{z}_i t) - \frac{1}{2} \sigma_{(i)}^2 t^2.$$

Характеристическая функция суммы случайных величин определяется из выражения

$$E(t) = \prod_{i=1}^n E_i(t) \exp(i\bar{z}t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2, \quad (4.59)$$

где $\bar{z} = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i$; $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_{(i)}$.

Применив обратное преобразование Фурье к соотношению (4.59), найдем плотность вероятности ресурса пластичности

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ - \frac{(z - \bar{z})^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (4.60)$$

где σ и $\bar{z}$ — соответственно среднее квадратическое отклонение и математическое ожидание ресурса пластичности. Подставляя уравнение (4.60) в (4.43), получим выражение для определения вероятности разрушения металла при его обработке

$$P(1 < \psi < \infty) = \int_1^{\infty} f(z) dz = \Phi \left(\frac{\infty - \bar{z}}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{1 - \bar{z}}{\sigma} \right) = \\ = 1 - \Phi \left(\frac{1 - \bar{z}}{\sigma} \right),$$

где $\Phi(s)$ — нормальная функция распределения.

Технологическая наследственность

§ 24. О прочности изделия, получаемого пластическим деформированием

Механический наклеп, неоднородность свойств, обусловленная в первую очередь неравномерным распределением накопленной деформации, деформационная анизотропия, остаточные макронапряжения могут либо повысить, либо понизить прочность изделия в тех случаях, когда оно не подвергается термической обработке после холодного пластического деформирования.

Едва ли не важнейшими по влиянию на прочность из перечисленных факторов являются остаточные макронапряжения. Расчет остаточных напряжений производят по теореме о разгрузке, согласно которой остаточные напряжения после пластического деформирования равны разности напряжений при пластическом деформировании и так называемых разгрузочных напряжений, от которых материал освобождается при разгрузке. Если при разгрузке происходят чисто упругие деформации, то можно определять разгрузочные напряжения методами теории упругости. В работе [26] сформулирован и доказан вариационный принцип относительно остаточных напряжений, однако, насколько нам известно, он не нашел практического применения.

Анизотропия свойств деформированного материала может быть оценена на основе соотношений, приведенных в § 5.

После обработки давлением детали или заготовки часто подвергаются отжигу для снятия внутренних напряжений и улучшения структуры металла. Размеры зерен в различных областях отожженной детали могут оказаться различными. В областях, где пластическая деформация была близкой к критической, происходит интенсивный рост зерен. Такой металл обладает низкими механическими характеристиками, поэтому при проектировании технологических процессов необходимо выбирать такие режимы деформирования, при которых исключается область деформаций, вызывающих интенсивный рост зерен.

Для оценки критической деформации строят диаграмму рекристаллизации растянутого (или сжатого) металла. В процессах же обработки металлов давлением напряженное состояние и нагружение могут быть сложными. В связи с этим возник

кает вопрос о возможности оценки критической деформации в таких процессах по диаграмме рекристаллизации растянутого металла.

Вопрос, является ли указанная диаграмма единой для различных напряженных состояний и путей нагружения, интересен и в следующем отношении. В некоторых работах зависимость размера зерна от предшествовавшей отжигу пластической деформации использована для экспериментального определения величины этой деформации. При этом диаграмма рекристаллизации растянутого материала использована в качестве градуировочного графика. Для того чтобы такое определение деформации было обоснованным, необходимо убедиться в универсальности указанной диаграммы.

Для выяснения этого вопроса испытывали круглые сплошные образцы, изготовленные из стали Ст3*. Образцы диаметром 20 мм после механической обработки резанием отжигали при температуре 840°С в течение 3 ч с последующим медленным охлаждением. Затем их пластически деформировали до различных степеней деформаций и подвергали рекристаллизационному отжигу при температуре 700°С. Механическим путем приготавливали шлиф, который для лучшего выявления структуры подвергали электрополированию.

Было замечено, что размеры зерен у поверхности отожженного образца и на удалении от нее резко различны, что объясняется, по-видимому, неодинаковыми условиями роста зерен на поверхности и внутри образцов. При этом у некоторых образцов вблизи поверхности расположены более крупные зерна, у других образцов — менее крупные зерна. В связи с этим в процессе приготовления шлифа удаляли слой металла толщиной 2—3 мм.

На рис. 67 приведена диаграмма рекристаллизации при осевом растяжении и совместном кручении и растяжении. По вертикальной оси отложен параметр d — средний условный диаметр зерна. По горизонтальной оси отложена интенсивность логарифмической деформации. Для большей достоверности размер зерна определяли в трех взаимно перпендикулярных плоскостях: в поперечном и двух меридиональных сечениях. Размер зерна подсчитывали как среднееарифметическое полученных результатов. Диаграммы рекристаллизации, построенные по результатам измерений в различных плоскостях, практически совпали.

Интенсивность логарифмической деформации

$$\epsilon_0 = \sqrt{\epsilon_z^2 + \frac{1}{3} \gamma^2}.$$

* Исследования выполнены совместно с И. Н. Темник и Б. П. Чебаевским.

В этой формуле $e_z = \ln \frac{h}{h_0}$ — продольная деформация. Здесь h_0, h — соответственно рабочая длина до и после деформирования; $\gamma = \frac{\varphi r}{h}$ — относительный сдвиг, где r — расстояние от рассматриваемой точки сечения до оси образца; φ — угол закручивания в радианах. Заметим, что в области критических деформаций различие между логарифмическими и относительными деформациями несущественно.

Испытания производили на машине ZDMU-30. Отношение сдвига на поверхности γ_n к продольной деформации выдерживали примерно постоянным ($\gamma_n/e_z \approx 7$). При этом отношение главных напряжений

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \approx \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{9} (\gamma/e_z)^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{9} (\gamma/e_z)^2}}$$

остаётся постоянным в процессе деформирования, но изменяется вдоль радиусов образца.

Для каждого деформированного образца строили зависимость размера зерна от радиуса. Результаты, относящиеся к фиксированному радиусу, соответствуют определённому отношению γ/e_z , а следовательно, и определённому значению σ_2/σ_1 .

На рис. 68 приведены аналогичные результаты, полученные при испытании меди М1. Как видим, диаграмма рекристаллизации, построенные в координатах размер зерна — интенсивность логарифмической деформации (или, что в данном случае то же

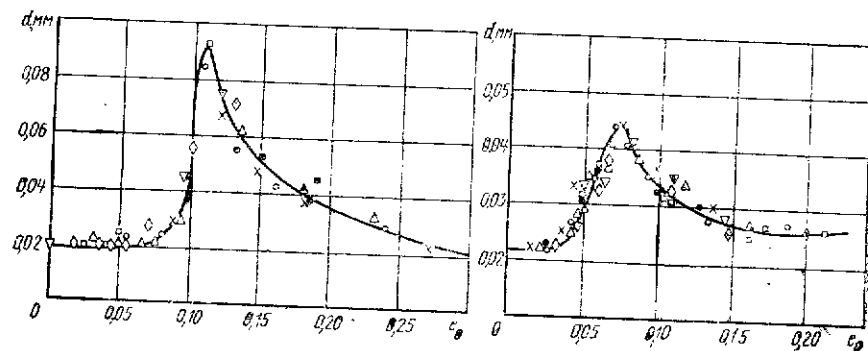


Рис. 67. Диаграмма рекристаллизации стали Ст3:

Δ — $\gamma/e_z = 0$; $\diamond$ — $\gamma/e_z = 0,7$; $\square$ — $\gamma/e_z = 2,1$;
 $\triangle$ — $\gamma/e_z = 3,7$; $\bullet$ — $\gamma/e_z = 4,6$; $\times$ — $\gamma/e_z = 5,6$

Рис. 68. Диаграмма рекристаллизации меди:

$\times$ — $\gamma/e_z = 1$; ∇ — $\gamma/e_z = 1,25$; $\triangle$ — $\gamma/e_z = 1,5$;
 $\circ$ — $\gamma/e_z = 1,75$; $\bullet$ — $\gamma/e_z = 2,25$;
 $\square$ — $\gamma/e_z = 2,5$

самое, накопленная деформация), совпадают при различных напряженных состояниях.

Чтобы оценить влияние немоноотонности процесса на размеры зерна, из растянутых стальных образцов вырезали образцы на сжатие. Для исключения бочкообразности при осадке применяли смазку из коллоидного графита с глицерином с использованием свинцовой фольги в качестве прокладок. После сжатия в направлении предшествовавшего растяжения образцы отжигали.

Полученные результаты показали, что при немоноотонном деформировании размер зерна не определяется суммарной деформацией. Какие-либо более полезные закономерности установить не удалось.

Таким образом, если есть основание считать деформирование при исследуемой технологической операции близким к простому, то для исключения интенсивного роста зерна необходимо, чтобы удовлетворялось условие $e_0 \leq e_{\min}$ или $e_0 \leq e_{\max}$, где $e_{\min}, e_{\max}$ — определяемая по диаграмме рекристаллизации, построенной испытанием материала на растяжение или сжатие, минимальная и максимальная интенсивность деформации, при которой размер зерна равен допускаемому значению этого размера.

Например, в случае раздачи толстостенной трубы (см. § 22) размер зерна после отжига не будет превышать допускаемого значения, если окружная деформация на внутренней поверхности

удовлетворяет условию $e'_\varphi \leq \frac{\sqrt{3}}{2} e_{\min}$ или

$$e'_\varphi \geq -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{b^2}{a^2} (e^{-\sqrt{3} e_{\max}} - 1) \right].$$

§ 25. Оценка точности деталей методом малого параметра

Окончательные размеры изделия, получаемого холодной обработкой давлением, формируются при разгрузке от деформирующих нагрузок. Этим обусловлено большое практическое значение оценок деформаций при разгрузке, во многих случаях определяющих точность получаемой детали. Примером такого рода задач является известная задача о пружинении при формообразовании изделий из листовых материалов.

В некоторых случаях оценка деформаций при разгрузке и точности получаемой детали может быть выполнена методом малого параметра [19]. Приведем пример такой оценки*.

* Исследование выполнено совместно с А. П. Харченко и С. А. Вульман.

В последние годы получил широкое применение способ обработки цилиндрических отверстий деформирующим протягиванием (или дорированием), заключающийся в проталкивании пологого конуса вдоль цилиндрического канала. Способ отличается высокой производительностью и экономичностью, однако при обработке этим способом деталей с переменной толщиной стенки радиальные перемещения на обработанной поверхности при разгрузке оказываются переменными, и в силу этого получаемая поверхность отличается от круговой цилиндрической. Поскольку инструмент (дорн) обладает высокой жесткостью и точностью, указанное отличие поверхности отверстия от цилиндрической определяет точность изделия.

Ограничимся рассмотрением деталей, наружный контур которых мало отличается от окружности. Пусть $D/2$ и $B/2$ соответственно максимальное и минимальное удаление точек наружного контура от оси отверстия. Обозначим $\delta = (D-B)/(D+B)$. Решение рассматриваемой упругопластической задачи теории идеальной пластичности будем искать в виде рядов по степеням малого параметра δ :

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n N^{(n)}, \quad (5.1)$$

где N — любая из величин, входящих в уравнения равновесия, условие пластичности, уравнения состояния, граничные условия и условия сопряжения решений в упругой и пластической областях; $N^{(n)}$ — приближенная этих величин (нулевое, первое, второе и т. д.).

Как показали экспериментальные исследования, начиная с некоторого удаления от обрабатываемой поверхности, напряженно-деформированное состояние трубы, обрабатываемой дорированием при натяге 2Δ , практически совпадает с напряженно-деформированным состоянием трубы, растягиваемой внутренним давлением в условиях плоской поверхности до той же окружной деформации на внутренней поверхности. Поскольку радиальные перемещения на внутренней поверхности являются интегральными величинами, зависящими от деформаций по всей толщине стенки, влияние деформированного состояния в сравнительно тонком приконтактном слое на эти перемещения незначительно. В связи с этим будем считать, что рассматриваемая деталь раздается на величину 2Δ в условиях плоской деформации. Величина натяга такова, что у внутренней поверхности радиусом a возникает пластическая зона. С тем чтобы в дальнейшем оперировать только безразмерными величинами, отнесем все напряжения к пределу текучести на сдвиг k , а все линейные размеры и перемещения — к радиусу r_s^0 пластической зоны детали с постоянной толщиной стенки, равной максимальной толщине рассматриваемой детали. Ограничимся решением задачи в первом приближении.

Будем считать, что внешний контур детали с достаточной точностью описывается уравнением

$$\rho_n = \beta + \delta \sum_{m=1}^i \psi_m \cos m\theta, \quad (5.2)$$

где β, ψ_m — отнесенные к r_s^0 постоянные, получаемые при разложении уравнения внешнего контура в ряд Фурье.

Подставив разложения (5.1) в уравнения, описывающие плоскую деформацию несжимаемого упруго-жесткопластического материала, и приравняв члены при одинаковых степенях δ , получаем системы линейаризованных уравнений относительно различных приближений в пластической области. Для напряжений и перемещений в упругой области, примыкающей к внешнему контуру, имеется общее решение [3]. Граничными условиями являются отсутствие нагрузок на внешнем контуре (5.2) и условия сопряжения решений на упругопластической границе [19].

Для нулевого приближения получаем систему уравнений, описывающую плоскую задачу толстостенной трубы, решение которой записывается в виде

$$\sigma_{\rho}^{0e} = 2C'_{01} - \frac{C'_{02}}{\rho^2}; \quad \sigma_{\rho}^{0p} = -g + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha};$$

$$\sigma_{\theta}^{0e} = 2C'_{01} + \frac{C'_{02}}{\rho^2}; \quad \sigma_{\theta}^{0p} = -q + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha} \right);$$

$$\tau_{\rho\theta}^{0e} = 0; \quad \tau_{\rho\theta}^{0p} = 0; \quad (5.3)$$

$$u^{0e} = \frac{k(1+\mu)}{E} \left[2C'_{01}(1-2\mu)\rho + C'_{02} \frac{1}{\rho} \right]; \quad v^{0e} = 0;$$

$$u^{0p} = \frac{C}{\rho}, \quad v^{0p} = 0.$$

Здесь

$$\rho = \frac{r}{r_s^0}; \quad \alpha = \frac{a}{r_s^0}; \quad q = \frac{q_0}{k}; \quad C'_{01} = \frac{1}{2} (1 - q - 2 \ln \alpha);$$

$$C'_{02} = \beta^2 (1 - q - 2 \ln \alpha); \quad C' = \frac{k(1+\mu)}{E} (1 - 2\mu + \beta^2)(1 - q - 2 \ln \alpha);$$

$$r_s^0 = \alpha e^{\frac{1}{2} \left(-1 + q + \frac{1}{\beta^2} \right)};$$

q_0 — давление на внутренней поверхности трубы; u , v — соответственно перемещения в радиальном и окружном направлении, отнесенные к r_s^0 . Нижние индексы при обозначениях напряжений изменены с тем, чтобы подчеркнуть, что речь идет о напряжениях без размерности.

Поскольку при $\rho = \alpha$ $u^0 = \frac{\Delta}{r_s^0}$, можем записать

$$\frac{\Delta a}{r_s^0} = \frac{k(1+\mu)}{E} \left(1 - 2\mu + \frac{d}{r_s^0}\right) \left(1 - \frac{q_0}{k} - 2 \ln \frac{a}{r_s^0}\right);$$

$$r_s^0 = a \exp \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{q_0}{k} + \left(\frac{r_s^0}{d}\right)^2 \right],$$

где $d = \beta r_s^0$ — первый член разложения внешнего контура в ряд Фурье. Решение приведенной системы уравнений запишется в виде

$$r_s^0 = 2 \left[\frac{k}{\Delta a G} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8(1-2\mu)\Delta a G}{k d^3}}\right) \right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$q = 1 - \frac{1}{\beta^2} - \ln \frac{ak(1-2\mu+\beta^2)}{2\beta^2 \Delta G},$$

где G — модуль сдвига.

Сообразуясь с уравнением внешнего контура (5.2), представим распределение контактных напряжений на внутренней поверхности обрабатываемой детали в форме

$$\sigma_n = q + \delta \sum_{m=0}^i d_m \cos m\theta;$$

$$\tau_n = 0. \quad (5.4)$$

Определим уравнение границы пластической области и значения компонент напряжений и перемещений в первом приближении.

В упругой области компоненты напряжений и перемещений равны [3]:

$$\sigma_\rho^e = 2C_{01} - \frac{C_{02}}{\rho^2} + 2(-C_{11}\rho^{-3} + C_{12}\rho) \cos \theta +$$

$$+ \sum_{m=2}^i (-\gamma_{m1} C_{m1} \rho^{m-2} - \gamma_{m2} C_{m2} \rho^{-m-2} - \gamma_{m3} C_{m3} \rho^m - \gamma_{m4} C_{m4} \rho^{-m}) \cos m\theta;$$

$$\sigma_\theta^e = 2C_{01} + \frac{C_{02}}{\rho^2} + 2(C_{11}\rho^{-3} + 3C_{12}\rho) \cos \theta +$$

$$+ \sum_{m=2}^i (\gamma_{m1} C_{m1} \rho^{m-2} + \gamma_{m2} C_{m2} \rho^{-m-2} + \gamma_{m3} C_{m3} \rho^m + \gamma_{m4} C_{m4} \rho^{-m}) \cos m\theta;$$

$$\tau_{\rho\theta}^e = 2(-C_{11}\rho^{-3} + C_{12}\rho) \sin \theta + \sum_{m=2}^i (\gamma_{m1} C_{m1} \rho^{m-2} - \gamma_{m2} C_{m2} \rho^{-m-2} +$$

$$+ \gamma_{m3} C_{m3} \rho^m - \gamma_{m4} C_{m4} \rho^{-m}) \sin m\theta;$$

$$\frac{Eu^e}{(1-\mu^2)kr_s^0} = 2C_{01} \frac{1-2\mu}{1-\alpha} \rho + C_{02} \frac{1}{(1-\mu)\rho} +$$

$$+ \left[\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) C_{11} \rho^{-2} + \left(1 - 3\frac{\mu}{1-\mu}\right) C_{12} \rho^2 \right] \cos \theta +$$

$$+ \sum_{m=2}^i \left[-m \left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) C_{m1} \rho^{m-1} + m \left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) C_{m2} \rho^{-m-1} - \right.$$

$$\left. - \left(m - 2 - \frac{(m+2)\mu}{1-\mu}\right) C_{m3} \rho^{m+1} + \right.$$

$$\left. + \left(m + 2 + \frac{(m-2)\mu}{1-\mu}\right) C_{m4} \rho^{-m+1} \right] \cos m\theta; \quad (5.5)$$

$$\frac{Ev^e}{(1-\mu^2)kr_s^0} = \left[\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) C_{11} \rho^{-2} + \left(5 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) C_{12} \rho^2 \right] \sin \theta +$$

$$+ \sum_{m=2}^i \left[m \left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) C_{m1} \rho^{m-1} + m \left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) C_{m2} \rho^{-m-1} + \right.$$

$$\left. + \left(m + 4 + \frac{\mu m}{1-\mu}\right) C_{m3} \rho^{m+1} + \left(m - 4 + \frac{\mu m}{1-\mu}\right) C_{m4} \rho^{-m+1} \right] \sin m\theta;$$

где

$$\gamma_{m1} = m(m-1); \quad \gamma_{m2} = m(m+1); \quad \gamma_{m3} = (m+1)(m-2);$$

$$\gamma_4 = (m-1)(m+2); \quad \gamma_{m5} = (m+1)(m+2); \quad \gamma_{m6} = (m-1)(m-2)$$

В пластической области в первом приближении компоненты напряжений равны [19]:

$$\begin{aligned} \sigma_{1\rho} &= 2a_{02} + \frac{a_{12}}{\rho} \cos \theta + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2}^i \{ [a_{m1}(1-m^2) - \omega a_{m2}] \sin(\omega \ln \rho) + \\ &+ [a_{m2}(1-m^2) + \omega a_{m1}] \cos(\omega \ln \rho) \} \cos m\theta; \\ \sigma_{\theta\rho} &= 2a_{02} + \frac{a_{12}}{\rho} \cos \theta + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2}^i \omega [(a_{m1} - \omega a_{m2}) \cos(\omega \ln \rho) - \\ &- (a_{m2} + \omega a_{m1}) \sin(\omega \ln \rho)] \cos m\theta; \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\rho} &= \frac{a_{12}}{\rho} \sin \theta + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2}^i m\omega [a_{m1} \cos(\omega \ln \rho) - a_{m2} \sin(\omega \ln \rho)] \sin m\theta \\ &(\omega = \sqrt{m^2 - 1}). \end{aligned}$$

а компоненты перемещений определяются из соотношения [37]

$$\begin{aligned} u^{1\rho} &= \frac{\bar{C}_{01}}{\rho} (\bar{C}_{11} \ln \rho + \bar{C}_{12}) \cos \theta + \sum_{m=2}^i [(\bar{C}_{m1} \cos(\omega \ln \rho) + \\ &+ \bar{C}_{m2} \sin(\omega \ln \rho)) \cos m\theta; \\ v^{1\rho} &= -[\bar{C}_{11}(1 + \ln \rho) + \bar{C}_{12}] \sin \theta + \sum_{m=2}^i \left[-\frac{1}{m} \{ \omega [\bar{C}_{m2} \cos(\omega \ln \rho) - \right. \\ &\left. - \bar{C}_{m1} \sin(\omega \ln \rho)] + \bar{C}_{m1} \cos(\omega \ln \rho) + \bar{C}_{m2} \sin(\omega \ln \rho) \} \sin m\theta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Условия сопряжения напряжений σ_ρ , σ_θ , $\tau_{\theta\rho}$ при $\rho = 1$ имеют вид [19]

$$\sigma_\rho^{1e} = \sigma_\rho^{1\rho}; \quad \sigma_\theta^{1e} - \sigma_\theta^{1\rho} = 4\rho_{1s}; \quad \tau_{\theta\rho}^{1e} = \tau_{\theta\rho}^{1\rho}. \quad (5.8)$$

Граничные условия на внешнем контуре $\rho = \beta$ запишем в форме [19]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{1e} + \frac{d\sigma_\rho^{0e}}{d\rho} \sum_{m=0}^i \psi_m \cos m\theta &= 0; \\ \tau_{\theta\rho}^{1e} + (\sigma_\theta^{0e} - \sigma_\rho^{0e}) \frac{1}{\beta} \sum_{m=0}^i m\psi_m \sin m\theta &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Выразим коэффициенты решения (5.5), (5.6) через коэффициенты рядов (5.2), (5.4). Для этого воспользуемся условиями сопряжения напряжений σ_ρ и $\tau_{\theta\rho}$ на окружности $\rho = 1$ и граничными условиями на окружностях $\rho = \beta$ и $\rho = \alpha$.

В случае $m=0$ получим

$$2C_{01} - C_{02} = 2a_{02}; \quad 2C_{01} - \frac{C_{02}}{\beta^2} = -\frac{2}{\beta^3} \psi_0; \quad 2a_{02} = d_0. \quad (5.10)$$

В случае, когда $m=1$,

$$-2C_{11} + 2C_{12} = a_{12}; \quad -2C_{11}\beta^{-3} + 2C_{12}\beta = -\frac{2}{\beta^3} \psi_1; \quad a_{12} = \alpha d_1, \quad (5.11)$$

а в случае, когда $m \geq 2$, для определения коэффициентов необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} -\gamma_{m1}C_{m1} - \gamma_{m2}C_{m2} - \gamma_{m3}C_{m3} - \gamma_{m4}C_{m4} &= a_{m2}(1-m^2) - \omega a_{m1}; \\ \gamma_{m1}C_{m1} - \gamma_{m2}C_{m2} + \gamma_{m3}C_{m3} + \gamma_{m4}C_{m4} &= \omega a_{m1}; \\ -\gamma_{m1}C_{m1}\beta^{m-2} - \gamma_{m2}C_{m2}\beta^{-m-2} - \gamma_{m3}C_{m3}\beta^m - \gamma_{m4}C_{m4}\beta^{-m} &= -\frac{2}{\beta^3} \psi_m; \\ -\gamma_{m1}C_{m1}\beta^{m-2} - \gamma_{m2}C_{m2}\beta^{-m-2} + \gamma_{m3}C_{m3}\beta^m + \gamma_{m4}C_{m4}\beta^{-m} &= -\frac{2}{\beta^3} m\psi_m; \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{\alpha} \{ [a_{m1}(1-m^2) - \omega a_{m2}] \sin(\omega \ln \alpha) + [a_{m2}(1-m^2) + \omega a_{m1}] \times$$

$$\times \cos(\omega \ln \alpha) \} = d_m;$$

$$\frac{1}{\alpha} \omega_m [a_{m1} \cos(\omega \ln \alpha) - a_{m2} \sin(\omega \ln \alpha)] = d_m, \quad m = 2, 3, 4.$$

Решения систем (5.10)–(5.12) позволяют выразить коэффициенты C_{01} , C_{02} и a_{02} через неизвестный параметр d_0 , коэффициенты C_{11} , C_{12} , a_{12} — через d_1 , коэффициенты C_{m1} , C_{m2} , C_{m4} , a_{m1} и a_{m2} — через неизвестные параметры d_m .

Границу пластической области находим из выражения (5.8)

$$\begin{aligned} 4\rho_{1s} &= 2C_{01} + C_{02} - 2a_{02} + (2C_{11} + 6C_{12} - a_{12}) \cos \theta + \\ &+ \sum_2 [\gamma_{m1}C_{m1} + \gamma_{m2}C_{m2} + \gamma_{m3}C_{m3} + \gamma_{m4}C_{m4} - \omega(a_{m1} - \omega a_{m2})] \cos m\theta. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Условия сопряжения перемещений u и v в упругой зоне (5.5) и тех же перемещений в пластической зоне (5.7) при $\rho = 1$

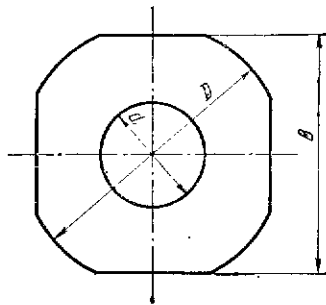


Рис. 69. Поперечное сечение детали, обрабатываемой дорнованием

в первом приближении приводятся к виду [69]

$$\begin{aligned} u^{1e} + \left(\frac{du^{0e}}{d\rho} - \frac{d u^{ap}}{d\rho} \right) \rho_{1s} = \\ = \bar{C}_{01} + \bar{C}_{12} \cos \theta + \\ + \sum_{m=2}^i \bar{C}_{m1} \cos m\theta; \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$v^{1e} = -(\bar{C}_{11} + \bar{C}_{12}) \sin \theta -$$

$$- \sum_{m=2}^i \frac{1}{m} (\omega \bar{C}_{m2} + \bar{C}_{m1}) \sin m\theta.$$

Воспользовавшись соотношениями (5.3), (5.5), (5.13), получим системы уравнений для определения коэффициентов. Для этого необходимо сравнивать аналогичные выражения при одинаковых значениях m :

$$\begin{aligned} \bar{C}_{01} &= f_0(d_0); \\ \bar{C}_{12} &= f_1(d_1); \\ -(\bar{C}_{11} + \bar{C}_{12}) &= f_1^*(d_1); \\ \bar{C}_{m1} &= f_m(d_m); \\ -\frac{1}{m} (\omega \bar{C}_{m2} + \bar{C}_{m1}) &= f_m^*(d_m). \end{aligned} \quad (5.15)$$

И, наконец, условие $u^{(n)p} = 0$ на контуре $\rho = \alpha$ позволяет определить значения параметров d_0 , d_1 , d_m . Для этого необходимо приравнять нулю каждый член решения (5.7) с коэффициентами (5.18) при одинаковых значениях m . Таким образом, решается задача о напряженно-деформированном состоянии детали при ее раздаче.

Перемещения при упругой разгрузке определяют из решения (5.5). Нулевое приближение (5.4) находим при граничных условиях: при $\rho = \alpha$ $\sigma_r^{0e} = q$ и при $\rho = \beta$ $\sigma_r^{0e} = 0$. Затем находим

$$2C_{01} = -\frac{1}{\beta} \frac{q\alpha^2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2}; \quad C_{02} = \frac{q\alpha^2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (5.16)$$

Для определения констант в выражениях напряжений (5.5) в упругой области необходимо воспользоваться новыми граничными условиями и значениями параметров d_0 , d_1 и d_m , вычисленных по приведенной выше методике. Полученные константы

дадут возможность определять перемещения (5.5) при разгрузке детали.

По приведенной методике рассчитали координаты точек внутренней поверхности деталей из стали 45, поперечное сечение которых показано на рис. 69. Внутренний диаметр деталей составлял 37 мм, размер B изменялся от 40 до 69 мм, D — от 40 до 80 мм соответственно, натяг составлял 0,3 и 0,6 мм. Внешний контур сечения описывался уравнением

$$\rho = \beta + \delta \frac{D-B}{4r_s^0} \cos 4\theta.$$

Расчетную оценку некруглости отверстия

$$\Delta_{\text{некр}} = \rho_{\text{max}} - \rho_{\text{min}},$$

где ρ_{max} , ρ_{min} — соответственно наибольшее и наименьшее значения радиуса r точек обработанной поверхности, сопоставили с определенной экспериментально по круглограмме отверстия, снятой на профилографе. Расхождение этих оценок не превышало 17%. Обычно такие ошибки в оценке точности допустимы.

Список литературы

1. Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М., «Наука», 1973. 576 с.
2. Андреев Л. С. О неустойчивости пластического деформирования при двухосном растяжении. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1965, № 1, с. 51—57.
3. Бидено К. Б., Гриммель Р. Техническая динамика, т. I. М., Гостехтеоретиздат, 1950. 900 с.
4. Богатов А. А., Брылунов Г. И., Мижирицкий О. И. Определение предельных деформаций из условия разрушения с учетом статистических свойств пластичности металла. — В сб.: Обработка металлов давлением. Свердловск, 1974, с. 36—39.
5. Головлев В. Д. Расчеты процессов листовой штамповки. М., «Машиностроение», 1974. 136 с.
6. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Кнев, «Наукова думка», 1971. 276 с.
7. Гун Г. Я., Полухин П. И. К применению методов математической теории надежности для расчета вероятности разрушения металлов при обработке давлением. — «Известия высших учебных заведений. Черная металлургия», 1971, № 9, с. 63—66.
8. Гуляев Б. А., Максак В. И. Особенности разрушения трубчатых образцов при одноосном растяжении. — «Проблемы прочности», 1974, № 2, 103 с.
9. Данилов В. Л. К формулировке закона деформационного упрочнения. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1971, № 6, с. 146—150.
10. Дегтярев В. П. О деформационных критериях разрушения при простых и сложных нагружениях. — «Проблемы прочности», 1972, № 7, с. 22—25.
11. Дель Г. Д. Определение напряжений в пластической области по распределению твердости. М., «Машиностроение», 1971. 200 с.
12. Дель Г. Д., Зима Н. Ф., Дель В. Д. Исследование напряжений в полосе при листовой прокатке. — «Известия высших учебных заведений. Черная металлургия», 1971, № 8, с. 90—94.
13. Дель Г. Д., Огородников В. А., Нахайчук В. Г. Критерий деформируемости металлов при обработке давлением. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1975, № 4.
14. Дель Г. Д., Одинг С. С. Устойчивость пластического деформирования тонкостенной трубы под действием внутреннего давления. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1975, № 12, с. 30—35.
15. Дель Г. Д., Одинг С. С. Устойчивость двухосного пластического растяжения изотропного листа. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1976, № 3, с. 97—101.
16. Дель Г. Д., Томилов Ф. Х. Связь между напряженностью, твердостью и пластической деформацией при повышенных температурах. — «Известия АН СССР. Металлы», 1970, № 1, с. 144—149.

17. Деформации и напряжения при обработке металлов давлением. М., «Металлургия», 1974. 336 с. Авт.: П. И. Полухин, В. К. Воронцов, А. Б. Кудрин и др.
18. Жуков А. М. Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии. — «Инженерный сборник», т. 20, 1954, с. 37—46.
19. Ивлев Д. Д. Приближенное решение методом малого параметра плоских упругопластических задач теории идеальной пластичности. — «Вестник МГУ. Математика. Механика. Физика», 1957, № 5, с. 17—26.
20. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластического тела. — «Ученые записки МГУ. Механика», 1940, вып. 39, с. 3—81.
21. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термо-вязкоупругости. М., «Наука», 1970. 280 с.
22. Исследование процесса получения заготовок растяжением в состоянии сверхпластичности. — «Кузнечно-штамповочное производство», 1975, № 7, с. 3—4. Авт.: О. М. Смирнов, Я. М. Охрименко, В. Е. Шкляев и др.
23. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прутка. — «Прикладная математика и механика», 1943, т. 7, вып. 2, с. 109—130.
24. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М., «Наука», 1974. 312 с.
25. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969. 420 с.
26. Койтер В. Общие теоремы теории упругопластических сред. М., ИЛ, 1961. 80 с.
27. Колмогоров В. Л. Напряжения. Деформация. Разрушение. М., «Машиностроение», 1970. 232 с.
28. Комплект оборудования для ориентированного разделения пластин на кристаллы. — «Электронная техника». Серия 7, «Технология, организация производства и оборудование». Вып. 5 (57), 1973, с. 48—50. Авт.: В. А. Назаров, А. Я. Новак, В. И. Анисимов и др.
29. Людвик П. Основы технологической механики. — В сб.: Расчеты на прочность, вып. 15. М., «Машиностроение», 1970, с. 130—166.
30. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., «Машиностроение», 1975. 400 с.
31. Малинин Н. Н. Устойчивость двухосного пластического растяжения анизотропных листов и цилиндрических оболочек. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1971, № 2, с. 115—118.
32. Рагаб А. Р., Дункан Дж. Л. Сверхпластичность: определяющие уравнения и проблемы формоизменения. — В кн.: Механика. М., «Мир», 1973, № 4 (140), с. 121—132.
33. Сегал В. М., Макушок Е. М., Резников В. И. Исследование пластического формоизменения металлов методом муара. М., «Металлургия», 1974. 200 с.
34. Смирнов-Аляев Г. А. Механические основы пластической обработки металлов. Л., «Машиностроение», 1968. 272 с.
35. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969. 608 с.
36. Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. М., «Металлургия», 1972. 408 с.
37. Харченко А. П. Распределение перемещений около эллиптического (кругового) отверстия упругопластического тела. — В сб. трудов Воронежского политехнического института: Исследования механизмов и металлических конструкций, вып. 3. Воронеж, 1972, с. 172—181.
38. Цеханов Ю. А., Дель Г. Д. Определение поля скоростей в установившихся процессах пластического деформирования по волокнистой макро-структуре. — В сб.: Технология машиностроения. Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Изд. Тульского политехнического института, 1973, вып. 29, с. 77—84.
39. Шевелев В. В., Яковлев С. П. Анизотропия листовых материалов и ее влияние на вытяжку. М., «Машиностроение», 1972. 136 с.

40. Щеглов Б. А., Гловацкий Е. Д., Голованов В. М. Механические свойства тонких листов и труб из стали X18H10T в условиях одноосного и двухосного растяжений.— В сб.: Исследование процессов пластического течения металлов. М., «Наука», 1971, с. 76—85.

41. Backhaus G. Zur analytischen Darstellung des Materialverhaltens im plastischen Bereich.—ZAMM, 51, 1971, S. 471—477.

42. Baltov A., Savezuk A. A rule of anisotropic hardening — «Acta Mech.», 1965, Vol. 1, N 2.

43. Chakrabarty J. A hypothesis of strain-hardening in anisotropic plasticity.—«Internat. J. Mech. Sci.», 1970, Vol. 12, N 2, p. 169—176.

44. Marciniak Z. Odsztafcenia graniczne przy tloczeniu blach. Warszawa, Wydawnictwo naukowo — techniczne, 1971, 232 s.

45. Shawki G. S. A., Pankin W. Plastische Instabilität rotationssymmetrischer Schalen bei zweiachsiger Zugbeanspruchung.— «Werkstoff und Betrieb», 105, 1972, N 4, p. 260—278.

46. Storakes B. Plastic and visko-plastic instability of a thin tube under internal pressure, torsion and axial tension—JJMS, 1968, Vol. 10, N 6, p. 510—529.

47. Wry P. I. Tensile Plastic Instability at an Elevated Temperature and Its Dependence upon Strain Rate — «Journal of Applied Physics», V. 41, N 8, July, 1970, p. 3347—3352.

Оглавление

Предисловие	5
Глава I. Основы теории пластичности	7
§ 1. Теория напряженного состояния	7
§ 2. Кинематика деформирования	12
§ 3. Ассоциированный закон пластического течения	18
§ 4. Поверхность нагружения при изотропном упрочнении	21
§ 5. Анизотропное упрочнение	26
§ 6. Кручение круглых стержней из анизотропно упрочняющегося материала	36
Глава II. Экспериментально-расчетные методы исследования напряженно-деформированного состояния в пластической области.	41
§ 7. Определение пластических деформаций	41
§ 8. Определение приращений и скоростей деформации	53
§ 9. Определение напряжений по кинематике деформирования	61
§ 10. Определение напряжений по теореме о разгрузке	76
§ 11. Метод догрузки	79
§ 12. Связь между твердостью и интенсивностью напряжений	83
§ 13. Определение напряженного состояния по распределению интенсивности напряжений	89
§ 14. Определение напряженного состояния при осесимметричной деформации по волокнистой макроструктуре и распределению твердости	99
Глава III. Устойчивость пластического деформирования	104
§ 15. Инженерные критерии	104
§ 16. Двухосное растяжение листа	111
§ 17. Двухосное растяжение тонкостенной цилиндрической оболочки	117
§ 18. Вопросы устойчивости деформирования в состоянии сверхпластичности	122
Глава IV. Деформируемость металлов при их обработке	131
§ 19. Общие замечания	131
§ 20. Диаграмма пластичности	136

§ 21. Критерии деформируемости	142
§ 22. Деформируемость при раздаче трубы	148
§ 23. Вероятность разрушения обрабатываемого металла	151
Глава V. Технологическая наследственность	158
§ 24. О прочности изделия, получаемого пластическим деформированием	158
§ 25. Оценка точности деталей методом малого параметра	161
Список литературы	170

ИБ № 1720

Г а р р и
Д а н и л о в и ч
Д Е Л Ь

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Редактор издательства
И. С. Форстен
Технический редактор
Л. А. Макарова
Переплет художника
А. Я. Михайлова
Корректор
О. Е. Мишина

Сдано в набор 24/V—77 г.
Подписано к печати 25/XI—77 г.
Т-16292. Формат 60×90¹/₁₆.
Бумага типографская № 2.
Литературная гарнитура. Печать высокая.
Усл. печ. л. 11,0. Уч.-изд. л. 11,15.
Тираж 15 000 экз. Зак. 472. Цена 90 к.

Издательство «Машиностроение»,
107885, Москва, Б-78, 1-й Басманный пер., д. 3.

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательства,
полиграфии и книжной торговли.
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.