

БИБЛИОТЕКА

РАСЧЕТЧИКА

И.В.ДЕМЬЯНУШКО

И.А.БИРГЕР

Расчет на прочность
вращающихся
дисков

БИБЛИОТЕКА

РАСЧЕТЧИКА

РАСЧЕТ
НА ПРОЧНОСТЬ
ВРАЩАЮЩИХСЯ
ДИСКОВ



Редакционная
коллегия:

лауреат Ленинской премии,
заслуженный деятель науки
и техники РСФСР,

д-р техн. наук
проф. С. Д. ПОНОМАРЕВ
(председатель);

д-р техн. наук
проф. Н. А. АЛФУТОВ;

лауреат Ленинской премии,
д-р техн. наук
проф. В. Л. БИДЕРМАН;

д-р техн. наук
проф. В. П. КОГАЕВ;

лауреат Ленинской премии,
заслуженный деятель науки
и техники РСФСР,

д-р техн. наук
проф. Н. Н. МАЛИНИН;

д-р техн. наук проф.
В. А. СВЕТЛИЦКИЙ

И.В.ДЕМЬЯНУШКО

И.А.БИРГЕР

Расчет на прочность вращающихся дисков

ББК 34.41

Д30

УДК 621.81 $\triangle$ 539.4.013 (02)

Рецензенты д-р техн. наук проф. Н. Н. МАЛИНИН,
канд. техн. наук Г. М. ХАЖИНСКИЙ

Демьянушко И. В., Биргер И. А.
Д30 Расчет на прочность вращающихся дисков. —
М. : Машиностроение, 1978. — 247с., ил. — (Б-ка
расчетчика).

В пер.: 1 р. 20 к.

В книге изложены современные методы расчета на прочность вращающихся дисков. Рассмотрены вопросы растяжения и изгиба дисков при стационарных и меняющихся во времени нагрузках, неравномерном нагреве, учете пластичности и ползучести; кинетики напряженно-деформированного состояния; для расчета пространственного напряженного состояния использован метод конечных элементов. Даны расчет дисков радиальных колес с учетом взаимодействия несущих дисков и лопаток и оценка прочности и долговечности дисков в условиях неизотермического и циклического нагружения. Приведены методы оптимального машинного проектирования дисков с использованием аппарата математического программирования. Приложения содержат основные программы, написанные на языке Алгол. Книга предназначена для инженеров-конструкторов и расчетчиков машиностроительных, проектно-конструкторских и научно-исследовательских организаций.

Д $\frac{31301-028}{038(01)-78}$ 28-78

ББК 34.41
6П5.3

Введение

Вращающиеся диски являются важнейшим элементом многих машин. Прочность и долговечность дисков определяют возможность получения высоких параметров работы машин, обеспечивают необходимый срок их службы. Развитие вычислительной техники, оснащение конструкторских бюро и исследовательских организаций ЭВМ позволяют внедрить более современные методы расчета дисков, производить уточненные расчеты.

Основными нагрузками, действующими на диски, являются центробежные силы, возникающие при вращении. Определение напряжений и деформаций от центробежных сил — главный этап расчета дисков на прочность. Неравномерный нагрев приводит к возникновению температурных напряжений, которые могут оказаться существенными, особенно при нестационарных режимах работы машин. Равномерно нагретые по толщине, симметричные относительно плоской срединной поверхности диски достаточно рассчитывать только на растяжение. Для дисков сложной формы с изогнутой срединной поверхностью при неравномерном нагреве по толщине или осевых нагрузках и моментах во время расчета следует учитывать изгиб.

Диски постоянной толщины встречаются редко, однако замкнутые решения, полученные для них, необходимы для контроля расчетов, упрощенных оценок и обоснования результатов, получаемых при использовании численных методов.

В некоторых случаях искривленные или нагруженные осевыми силами и моментами диски изготавливают тонкими для экономии материала. Тогда поперечные прогибы могут быть достаточно большими. Особое значение имеет учет восстанавливающего эффекта, возникающего при действии растягивающих сил; с целью уменьшения напряжений изгиба диски часто конструируют с криволинейным меридианом.

В большинстве современных турбомашин диски работают в условиях повышенной нагруженности, приводящей к возникновению пластических деформаций. Турбинные диски и диски компрессоров высокого давления подвергаются воздействию высоких

температур, с чем связано появление деформаций ползучести. Наиболее распространенным в инженерных расчетах является учет пластичности и ползучести с помощью соответствующих деформационных теорий и использование итерационных процедур последовательного решения упругих задач. Однако это не позволяет достаточно подробно исследовать кинетику напряженно-деформированного состояния дисков, работающих в процессе эксплуатации на различных режимах, при циклически меняющихся нагрузках. В этих случаях необходим учет истории нагружения, что приводит к созданию более сложных методов расчета дисков в приращениях деформаций и сил с использованием теорий пластического течения и аналогичных теорий ползучести, учитывающих историю деформирования.

Критериями оценки конструкций дисков являются коэффициенты запасов по различным параметрам, определяющим их напряженность, деформативность, несущую способность и долговечность. Важной характеристикой является долговечность диска. Повышение ресурсов работы приводит к резкому увеличению как длительности действия нагрузок, так и числа повторений (циклов) нагружений для некоторых машин. Накопление длительных статических и малоцикловых повреждений в материале может привести к преждевременному разрушению дисков. Расчет долговечности должен быть основан на точной оценке напряжений и деформаций, учете концентрации напряжений, знании свойств материала в аналогичных условиях нагружения и использовании современных представлений о накоплении повреждений.

В конструкциях встречаются диски значительной толщины, иногда соизмеримой с радиусом. Для них методы расчета, использующие гипотезы плоского напряженного состояния и жесткой нормали, не пригодны. Расчет пространственного напряженного состояния стал возможен в связи с разработкой метода конечных элементов (МКЭ), позволяющего реализовать хорошо разработанные процедуры решения упругопластической задачи, и внедрением ЭВМ достаточно большой эффективности. При расчете центробежных колес турбомашин (крыльчаток) необходимо учитывать взаимодействие лопаток и несущих дисков. Для этой цели разработаны уточненные методы расчета, реализуемые на ЭВМ.

При проектировании дисков конструктор опирается на свой опыт, создавая новую или модифицируя известную конструкцию, а затем осуществляет поверочный расчет на прочность. Это приводит к многократному повторению расчетов и требует значительных затрат при выборе наилучшего варианта. Разработка методов оптимального проектирования диска с учетом условий работы и требований прочности, реализованная в виде системы автоматического проектирования на ЭВМ, является актуальной задачей. Решение этой задачи позволяет выявить взаимосвязь различных требований, предъявляемых к прочности, долговечности, рабочим параметрам конструкции и к характеристикам материала при

оптимальном проектировании. Проектирование предполагает учет не только статических, но и динамических характеристик диска с отстройкой от опасных частот в рабочем диапазоне частот вращения. В связи с этим необходимо проводить расчет на колебания с учетом взаимодействия диска с лопатками.

Значительное место в оценке прочности дисков занимают экспериментальные методы исследований. Основными являются испытания дисков на разгонных стендах. Современные разгонные стенды оснащены таким образом, чтобы имитировать большую часть нагрузок, действующих на диск в эксплуатации (вращение, нагрев). Системы автоматического управления стендами позволяют создать циклические нагрузки, что дает возможность исследовать долговечность конструкций. Такие испытания требуют проведения дополнительных расчетов, связанных с определением типа цикла нагружения, числа циклов, запасов прочности и т. п.

Общие вопросы прочности дисков рассмотрены многими специалистами, использовавшими различные методы расчета в зависимости от целей исследования и возможностей вычислительных средств [54, 55, 63, 68, 72, 87, 91, 93, 102, 106, 137]. Подробное описание наиболее широко применяющихся методов расчета дисков приведено в работах [54, 87].

В предлагаемой книге освещены все перечисленные проблемы. Известные методы расчета приведены либо в кратком изложении, либо дана ссылка на работы, где они описаны подробно. Некоторые методы, требующие использования ЭВМ, кроме описания алгоритма, сопровождаются приложениями, содержащими текст программы на языке Алгол с описанием и примерами для контроля расчета.

Гл. 1 (за исключением § 3, 4) и гл. 2 (за исключением § 6) написаны д-ром техн. наук проф. И. А. Биргером; § 3, 4 гл. 1, § 8 гл. 3 и § 17 гл. 6 написаны авторами совместно. Остальные главы книги написаны канд. техн. наук И. В. Демьянушко.

Авторы выражают глубокую благодарность В. И. Венедиктову, Ю. М. Темису и Е. Ф. Королевой за помощь при выполнении некоторых расчетов.

Напряжения и деформации при осесимметричном растяжении дисков

§ 1. Основные уравнения растяжения

Рассмотрим диск (рис. 1.1), симметричный относительно своей срединной поверхности. Толщину h предполагаем малой по сравнению с наружным радиусом $r = b$. Силы, действующие на диск, в том числе центробежные силы от вращения, направлены радиально и равномерно распределены в окружном направлении. Диск неравномерно нагрет по радиусу. Температуру предполагаем постоянной по толщине.

Напряженное состояние в диске считаем двухмерным и осесимметричным (напряжениями в площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрегаем); напряжения равномерно распределены по толщине. Принятые гипотезы о напряженном состоянии упрощают расчет, но вместе с тем вносят некоторые погрешности в его результаты (см. гл. 5). Эти погрешности тем меньше, чем меньше толщина диска по сравнению с его диаметром и чем плавнее она меняется в зависимости от радиуса.

Рассмотрим элемент диска, показанный на рис. 1.2. На этот элемент кроме окружных σ_θ и радиальных σ_r напряжений, распределенных по граням, действуют объемные силы q_r . Условие равновесия элемента

$$\frac{1}{h} \frac{d}{dr} (\sigma_r r h) - \sigma_\theta + q_r r = 0. \quad (1.1)$$

Если объемная нагрузка вызвана действием центробежных сил, то $q_r = \rho \omega^2 r$, где ρ — плотность материала диска; ω — угловая скорость вращения.

Уравнение (1.1) может быть представлено в виде

$$\frac{r}{h} \frac{d}{dr} (\sigma_r h) - (\sigma_\theta - \sigma_r) + q_r r = 0 \quad (1.2)$$

или

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{h} \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + q_r = 0. \quad (1.3)$$

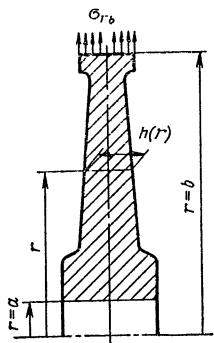


Рис. 1.1

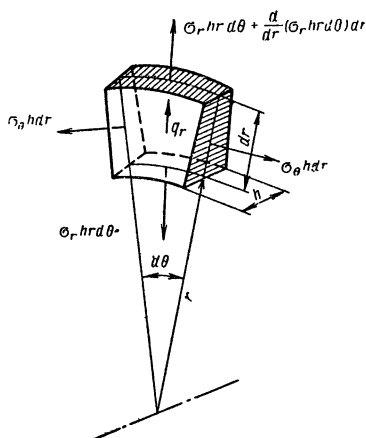


Рис. 1.2

Рассмотрим уравнение равновесия элемента в силах; получим

$$\frac{d}{dr}(N_r r) - N_\theta + q_r r h = 0, \quad (1.4)$$

где N_r и N_θ — суммарные силы в сечениях диска (соответственно в цилиндрическом и меридиональном), отнесенные к единице длины сечения;

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = \sigma_r h, \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = \sigma_\theta h. \quad (1.5)$$

Обозначим перемещение диска в радиальном направлении $u(r)$. Деформации в радиальном и окружном направлениях соответственно равны

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (1.6)$$

При упругом поведении материала связь между деформациями и напряжениями выражается с помощью закона Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu \sigma_\theta) + \alpha T, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu \sigma_r) + \alpha T \quad (1.7)$$

или

$$\varepsilon_r = \frac{1}{Eh}(N_r - \mu N_\theta) + \alpha T, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh}(N_\theta - \mu N_r) + \alpha T,$$

где $E = E(r)$ — модуль упругости материала диска; $\mu = \mu(r)$ — коэффициент Пуассона; $T = T(r)$ — температура диска; $\alpha = \alpha(r)$ — коэффициент линейного расширения материала.

Из (1.6) и (1.7) следует

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right] - \frac{E\alpha T}{1-\mu}; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right] - \frac{E\alpha T}{1-\mu}.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Уравнение совместности деформаций для диска

$$\frac{d}{dr} (\varepsilon_\theta r) = \varepsilon_r. \quad (1.9)$$

С учетом (1.7) из (1.9), получим

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r) + r\alpha T \right] = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha T. \quad (1.10)$$

Основное дифференциальное уравнение растяжения диска в перемещениях получим подстановкой (1.8) в (1.3)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{r h E}{1-\mu^2} \right) \frac{du}{dr} + \left[\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{r h E}{1-\mu^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right] u = f(r),\end{aligned}\quad (1.11)$$

$$\text{где } f(r) = (1+\mu)\alpha T \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{r h E}{1-\mu^2} \right) + \frac{d}{dr} [(1+\mu)\alpha T] - \frac{(1+\mu)\alpha T}{r} - q_r \frac{1-\mu^2}{E},$$

$$\text{здесь } \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{r h E}{1-\mu^2} \right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} + \frac{1}{E} \frac{dE}{dr} + \frac{2\mu}{1-\mu^2} \frac{d\mu}{dr}.$$

В общем случае (1.11) — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. С учетом граничных условий для функции $u(r)$ на контурах $r = b$ и $r = a$ оно легко может быть решено численным методом при использовании ЭВМ. Для диска постоянной толщины при постоянных параметрах упругости и в некоторых других случаях это уравнение имеет замкнутое решение. Дифференциальные уравнения растяжения диска в напряжениях представляют собой систему двух уравнений относительно σ_r и σ_θ — уравнения совместности деформаций (1.10) и уравнения равновесия (1.3).

Граничные условия на контуре диска могут быть заданы в перемещениях или в силах. На рис. 1.3 показаны различные варианты граничных условий, которые встречаются наиболее часто. На наружном контуре диска ($r = b$) могут быть заданы радиальные напряжения или силы

$$\sigma_r(b) = \sigma_{rb}, \quad N_r(b) = N_{rb} = \sigma_{rb} h_b. \quad (1.12)$$

Эти величины связаны с суммарной силой C_{rb} от лопаток и разрезанной замковой части обода, равномерно распределенной

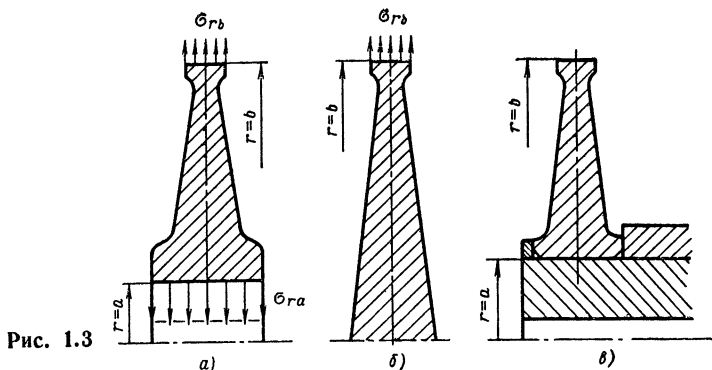


Рис. 1.3

по площади цилиндрической поверхности на наружном контуре радиуса $r = b$ диска (рис.1.3, а):

$$\sigma_{rb} = \frac{Crb}{2\pi b h_b} = \frac{N_{rb}}{h_b}.$$

При отсутствии лопаток или других внешних воздействий на наружном контуре $\sigma_{rb} = 0$. Граничные условия на внутреннем контуре радиуса $r = a$ диска зависят от условий его закрепления. Если диск свободно посажен на вал или центральное отверстие свободно, то

$$\sigma_{ra} = 0, N_{ra} = 0. \quad (1.13)$$

Если диск посажен на вал с диаметральным натягом δ и этот натяг достаточен, чтобы при вращении он не исчезал, то граничным условием является условие совместности деформаций диска и вала (рис. 1.3, в)

$$u_a^d - u^b = \frac{1}{2} \delta, \quad (1.14)$$

где u_a^d и u^b — радиальные перемещения диска и вала под действием всех факторов (посадки, температуры, центробежных сил).

Во многих случаях напряжение или силу на внутреннем контуре удобно считать заданными, т. е.

$$\sigma_r(a) = \sigma_{ra}, N_r(a) = N_{ra}. \quad (1.15)$$

Например, если при плотной посадке диска на вал требуется сохранить в рабочих условиях давление p на контактной поверхности, то при расчете диска принимают $\sigma_r(a) = -p$. Требуемый натяг находят из последующего расчета. Условия (1.15) содержат условия (1.13) как частный случай.

Иногда диски выполняют без центрального отверстия (рис. 1.3, б). В этом случае условие при $r = 0$ следует из равен-

ства нулю радиального перемещения в центре диска [$u(0) = 0$]. Разлагая радиальное перемещение в ряд по радиусу в окружности нуля

$$u = a_1 r + a_2 r^2 + \dots, \quad (1.16)$$

при $r \rightarrow 0$ получим, что деформации в центре диска равны и конечны, т. е.

$$\varepsilon_{r0} = \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0} = \varepsilon_{\theta 0} = \left(\frac{u}{r} \right)_{r=0} = a_1; \quad (1.17)$$

отсюда

$$\sigma_{r0} = \sigma_{\theta 0}, \quad N_{r0} = N_{\theta 0}. \quad (1.18)$$

На внутреннем контуре диска могут быть заданы также кинематические граничные условия; например, если диск в центральной части соединен с цапфой или ступицей, радиальные перемещения в месте соединения находят из условия совместности деформаций диска и присоединенной детали.

При расчетах, чтобы избежать необходимости раскрытия неопределенностей при $r = 0$, считают, что для дисков без центрального отверстия (1.18) справедливы на некотором малом радиусе $r = a$ [обычно $a \approx (0,01 \div 0,05) b$]: $\sigma_{ra} = \sigma_{\theta a}$, $N_{ra} = N_{\theta a}$.

Ниже приведены некоторые особенности напряженного состояния вращающегося диска, которые непосредственно следуют из (1.11) и граничных условий.

1. Увеличение толщины диска по всем радиусам в одинаковое число раз не изменяет напряженного состояния диска, если контурные нагрузки остаются без изменения. Это непосредственно следует из (1.11), коэффициенты которого при этом не изменяются.

2. Если увеличить угловую скорость вращения (или частоту вращения диска) в k раз, то напряжения от центробежных сил возрастут в k^2 раз.

3. Если модуль упругости одинаковый для всех точек диска, то напряжения не зависят от его величины.

4. Температурные напряжения, согласно принципу независимости действия сил, в упругом диске можно определять, не рассматривая силовые нагрузки. В равномерно нагретом диске температурные напряжения отсутствуют. При изменении температуры по всем радиусам диска на одну и ту же величину температурные напряжения не изменяются. При возрастании температуры по всем радиусам в k раз напряжения увеличатся соответственно в k раз.

5. Напряжения в диске от центробежных сил пропорциональны квадрату скорости на ободе диска (при одинаковых законах распределения толщины, упругости и плотности вдоль радиуса).

§ 2. Точные решения основного дифференциального уравнения

Уравнение (1.11) представляет собой линейное дифференциальное неоднородное уравнение с переменными коэффициентами. Обозначим линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (1.11), через $u_1(r)$ и $u_2(r)$; тогда общее решение однородного уравнения

$$u = K_1 u_1(r) + K_2 u_2(r), \quad (1.19)$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения

$$u = K_1 u_1(r) + K_2 u_2(r) + u^*(r), \quad (1.20)$$

где $u^*(r)$ — частное решение, которое может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

По этому методу частное решение (1.11) ищется в виде (1.19); при этом $K_1 = K_1(r)$ и $K_2 = K_2(r)$ — искомые функции от r , для которых

$$u = K_1(r) u_1(r) + K_2(r) u_2(r); \quad (1.21)$$

при добавочном условии

$$K_1'(r) u_1(r) + K_2'(r) u_2(r) = 0. \quad (1.22)$$

Дифференцируя дважды (1.21) с учетом (1.22) и подставляя в (1.11), получим систему уравнений для определения $K_1(r)$ и $K_2(r)$:

$$\left. \begin{aligned} K_1'(r) u_1(r) + K_2'(r) u_2(r) &= 0; \\ K_1(r) u_1'(r) + K_2(r) u_2'(r) &= f(r). \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Ввиду линейной независимости решений $u_1(r)$ и $u_2(r)$ определитель этой системы не обращается в ноль, т. е.

$$W(r) = u_1 u_2' - u_2 u_1' \neq 0, \quad (1.24)$$

и она может быть разрешена относительно $K_1'(r)$ и $K_2'(r)$.

Интегрируя, найдем $K_1(r)$ и $K_2(r)$ и, подставляя в (1.21), получим решение уравнения (1.11) в виде

$$u(r) = [K_1^* - F_1(r)] u_1(r) + [K_2^* + F_2(r)] u_2(r), \quad (1.25)$$

где $F_1(r) = \int_a^r \frac{1}{W(r)} u_2(r) f(r) dr$;

$$F_2(r) = \int_a^r \frac{1}{W(r)} u_1(r) f(r) dr; \quad (1.26)$$

K_1^* и K_2^* — постоянные интегрирования.

Продифференцировав (1.25) с учетом (1.23) и подставив выражения для $u(r)$ и $u'(r)$ в (1.8), получим напряжения в диске в общем виде

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\mu^2} [(K_1^* - F_1(r))(u_1' + \mu u_1/r) + (K_2^* + F_2(r))(u_2' + \mu u_2/r)] - \frac{\alpha TE}{1-\mu}; \quad (1.27)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1-\mu^2} [(K_1^* - F_1(r))(u_1/r + \mu u_1') + (K_2^* + F_2(r))(u_2/r + \mu u_2')] - \frac{\alpha TE}{1-\mu}. \quad (1.28)$$

Произвольные постоянные K_1^* и K_2^* можно выразить через радиальные напряжения σ_{ra} и σ_{rb} на внешних контурах диска.

Введем некоторые обозначения для сокращения записи (1.27) и (1.28)

$$\sigma_r = K_1^* L_{11}(r) + K_2^* L_{12}(r) - H_r(r); \quad (1.29)$$

$$\sigma_\theta = K_1^* L_{21}(r) + K_2^* L_{22}(r) - H_\theta(r),$$

$$\text{где } L_{11}(r) = \frac{E}{1-\mu^2}(u_1' + \mu u_1/r); \quad L_{12}(r) = \frac{E}{1-\mu^2}(u_2' + \mu u_2/r);$$

$$L_{21}(r) = \frac{E}{1-\mu^2}(u_1/r + \mu u_1'); \quad L_{22}(r) = \frac{E}{1-\mu^2}(u_2/r + \mu u_2'); \quad (1.30)$$

$$H_r(r) = F_1(r) L_{11}(r) - F_2(r) L_{12}(r) + T(r);$$

$$H_\theta(r) = F_1(r) L_{21}(r) - F_2(r) L_{22}(r) + T(r)$$

$$\text{и } T(r) = \frac{E\alpha T}{1-\mu}. \quad (1.31)$$

Подставив в (1.29) граничные условия для диска с центральным отверстием $\sigma_r(a) = \sigma_{ra}$ и $\sigma_r(b) = \sigma_{rb}$, получим

$$\sigma_r = \sigma_{ra} A_r(r) + \sigma_{rb} B_r(r) + H_r(b) B_r(r) - H_r(r); \quad (1.32)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{ra} A_\theta(r) + \sigma_{rb} B_\theta(r) + H_r(b) B_\theta(r) - H_\theta(r),$$

где

$$A_r(r) = \frac{L_{12}(b) L_{11}(r) - L_{11}(b) L_{12}(r)}{L_{11}(a) L_{12}(b) - L_{11}(b) L_{12}(a)};$$

$$B_r(r) = \frac{L_{11}(a) L_{12}(r) - L_{12}(a) L_{11}(r)}{L_{11}(a) L_{12}(b) - L_{11}(b) L_{12}(a)};$$

$$A_\theta(r) = \frac{L_{12}(b) L_{21}(r) - L_{11}(b) L_{22}(r)}{L_{11}(a) L_{12}(b) - L_{11}(b) L_{12}(a)};$$

$$B_\theta(r) = \frac{L_{11}(a) L_{22}(r) - L_{12}(a) L_{21}(r)}{L_{11}(a) L_{12}(b) - L_{11}(b) L_{12}(a)}.$$

Для диска без центрального отверстия граничные условия имеют вид (1.12) и (1.18), т. е. $\sigma_r(b) = \sigma_{rb}$, $\sigma_\theta(0) = \sigma_r(0)$. Для определения напряжений используем только одно решение однородного уравнения, обозначенное $u_1(r)$, конечное при $r \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_{rb} B_r(r) + H_r(b) B_r(r) - H_r(r); \\ \sigma_\theta &= \sigma_{rb} B_\theta(r) + H_r(b) B_\theta(r) - H_\theta(r),\end{aligned}\quad (1.33)$$

где $B_r(r) = \frac{L_{11}(r)}{L_{11}(b)}$; $B_\theta(r) = \frac{L_{21}(r)}{L_{21}(b)}$;

$$H_r(r) = F_1(r) L_{11}(r) + T(r); \quad H_\theta(r) = F_1(r) L_{21}(r) + T(r), \quad (1.34)$$

причем $H_r(a) = 0$, $H_\theta(a) = 0$.

Уравнения (1.32) и (1.33) по известному решению однородного уравнения позволяют определить напряжения в диске при произвольном распределении температуры и радиальных сил вдоль радиуса. Решения однородного уравнения для дисков, профиль которых описывается простыми функциями, могут быть легко найдены.

Точные решения, приведенные ниже для дисков постоянной толщины гиперболического и конического профилей, получены в предположении постоянства параметров упругости E и μ .

Диск гиперболического профиля. Толщина диска гиперболического профиля изменяется вдоль радиуса по уравнению

$$h = \frac{m}{r^n}, \quad (1.35)$$

где m и n — некоторые постоянные. Для дисков турбомашин $n \geq 0$, причем $n = 0$ соответствует диску постоянной толщины.

Если изменение толщины диска в зависимости от радиуса на некоторой протяженности полотна можно аппроксимировать прямой линией в логарифмических координатах ($\lg h$, $\lg r$), то профиль диска на этом участке можно приближенно считать гиперболическим.

Тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс будет равен показателю n со знаком минус.

Уравнение (1.11) для диска гиперболического профиля имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1-n}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1+\mu n}{r^2} u &= -\frac{n(1+\mu)\alpha T}{r} + \\ &+ (1+\mu) \frac{d(\alpha T)}{dr} - q_r \frac{1-\mu^2}{E}.\end{aligned}\quad (1.36)$$

Решения однородного уравнения

$$u_1 = r^{c_1}; \quad u_2 = r^{c_2}, \quad (1.37)$$

где $c_1 = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + 1 + \mu n}$; $c_2 = \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + 1 + \mu n}$.

Для диска постоянной толщины $c_1 = 1$, $c_2 = -1$.
В соответствии с (1.24)

$$W(r) = (c_2 - c_1) r^{c_1 + c_2 - 1}. \quad (1.38)$$

Из (1.26) и (1.36) функции

$$F_1(r) = F_{1\omega}(r) + F_{1T}(r); \quad F_2(r) = F_{2\omega}(r) + F_{2T}(r), \quad (1.39)$$

где $F_{1T}(r) = \frac{(1+\mu)}{c_2 - c_1} \int_a^r \frac{1}{r_1^{c_1-1}} \left[\frac{d(\alpha T)}{dr} - \frac{n\alpha T}{r_1} \right] dr_1;$

$$F_{2T}(r) = \frac{(1+\mu)}{c_2 - c_1} \int_a^r \frac{1}{r_1^{c_2-1}} \left[\frac{d(\alpha T)}{dr} - \frac{n\alpha T}{r_1} \right] dr_1;$$

$$F_{1\omega}(r) = - \frac{1 - \mu^2}{E(c_2 - c_1)} \int_a^r \frac{q_r(r_1)}{r_1^{c_1-1}} dr_1;$$

$$F_{2\omega}(r) = - \frac{1 - \mu^2}{E(c_2 - c_1)} \int_a^r \frac{q_r(r_1)}{r_1^{c_2-1}} dr_1.$$

В соответствии с (1.27) напряжения в диске гиперболического профиля

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} [(K_1^* - F_1(r)) (c_1 + \mu) r^{c_1-1} + \\ &+ (K_2^* + F_2(r)) (c_2 + \mu) r^{c_2-1}] - \frac{E\alpha T}{1 - \mu}; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \mu^2} [(K_1^* - F_1(r)) (1 + c_1\mu) r^{c_1-1} + \\ &+ (K_2^* + F_2(r)) (1 + c_2\mu) r^{c_2-1}] - \frac{E\alpha T}{1 - \mu}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

При записи (1.40) в форме (1.29)

$$\begin{aligned} L_{11}(r) &= \frac{E}{1 - \mu^2} (c_1 + \mu) r^{c_1-1}; \quad L_{12}(r) = \frac{E}{1 - \mu^2} (c_2 + \mu) r^{c_2-1}; \\ L_{21}(r) &= \frac{E}{1 - \mu^2} (1 + c_1\mu) r^{c_1-1}; \quad L_{22}(r) = \frac{E}{1 - \mu^2} (1 + c_2\mu) r^{c_2-1}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Величины $H_r(r)$ и $H_\theta(r)$ определяют по (1.31). Произвольные постоянные K_1^* и K_2^* находят из граничных условий, как и в предыдущем случае.

Диск постоянной толщины. Для диска постоянной толщины и постоянных параметров упругости (1.11) имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1 + \mu) \frac{d(\alpha T)}{dr} - \frac{(1 - \mu^2)}{E} q_r. \quad (1.42)$$

Решения соответствующего однородного уравнения по (1.37)
 $u_1 = r$, $u_2 = 1/r$.

Определитель по (1.24) $W(r) = -\frac{2}{r}$.

Общее решение для напряжений в диске постоянной толщины
 может быть получено из (1.40) при $c_1 = 1$ и $c_2 = -1$:

$$\sigma_r(r) = K_1^* - \frac{K_2^*}{r^2} - \frac{E}{r^2} \int_a^r r \alpha T dr - \frac{1}{2} \left[(1 + \mu) \int_a^r q_r(r) dr + \right. \\ \left. + (1 - \mu) \frac{1}{r^2} \int_a^r r^2 q_r(r) dr \right]; \quad (1.43)$$

$$\sigma_\theta(r) = K_1^* + \frac{K_2^*}{r^2} + E \left[\frac{1}{r^2} \int_a^r r \alpha T dr - \alpha T \right] - \\ - \frac{1}{2} \left[(1 + \mu) \int_a^r q_r(r) dr - (1 - \mu) \frac{1}{r^2} \int_a^r r^2 q_r(r) dr \right], \quad (1.44)$$

K_1^* и K_2^* — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Если диск нагружен центробежными силами, то из (1.43) и (1.44)

$$\sigma_r(r) = K_1^* - \frac{K_2^*}{r^2} - E \theta(r) - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 r^2; \\ \sigma_\theta(r) = K_1^* + \frac{K_2^*}{r^2} + E [\theta(r) - \alpha T] - \frac{1 + 3\mu}{8} \rho \omega^2 r^2. \quad (1.45)$$

$$\text{где } \theta(r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r r \alpha T dr; \quad (1.46)$$

Для диска с центральным отверстием напряжения

$$\sigma_r(r) = \sigma_{rb} A_1 + \sigma_{ra} B_1 + \Omega_1 + \theta_1^*; \\ \sigma_\theta(r) = \sigma_{rb} A_2 + \sigma_{ra} B_2 + \Omega_2 + \theta_2^*, \quad (1.47)$$

где

$$A_1 = \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right); \quad B_1 = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right); \\ A_2 = \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right); \quad B_2 = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right); \quad (1.48)$$

$$\Omega_1 = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 \left[b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right]; \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 \left[b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right]; \\ \theta_1^* &= E \left[\theta(b) \frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \theta(r) \right]; \\ \theta_2^* &= E \left[\theta(b) \frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \theta(r) - \alpha T \right].\end{aligned}\quad (1.50)$$

Перемещения в диске с отверстием определяют из (1.6) с учетом (1.7) подстановкой $\sigma_r(r)$ и $\sigma_\theta(r)$ из (1.47):

$$\begin{aligned}u(r) &= \sigma_{rb} \frac{r}{E} (A_2 - \mu A_1) + \sigma_{ra} \frac{r}{E} (B_2 - \mu B_1) + \\ &+ \frac{r}{E} (\Omega_2 - \mu \Omega_1) + \frac{r}{E} (\theta_2^* - \mu \theta_1^* + E \alpha T).\end{aligned}\quad (1.51)$$

На наружном контуре при $r = b$

$$\begin{aligned}u(b) &= u_b = \sigma_{rb} \frac{b}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \mu \right) - \sigma_{ra} \frac{b}{E} \frac{2a^2}{b^2 - a^2} + \\ &+ \frac{\rho \omega^2}{4} \frac{b}{E} [b^2 (1 - \mu) + a^2 (3 + \mu)] + \theta(b) b \frac{2b^2}{b^2 - a^2}.\end{aligned}\quad (1.52)$$

На рис. 1.4, а в относительных координатах показаны эпюры напряжений в диске постоянной толщины с центральным отверстием. Сплошными линиями показаны напряжения $\sigma_{r\omega}$ и $\sigma_{\theta\omega}$ от центробежных сил, штриховыми линиями — напряжения σ_{rT} и $\sigma_{\theta T}$ от распределенной по радиусу температуры, а суммарные напряжения $\sigma_{r\Sigma}$, $\sigma_{\theta\Sigma}$ (при одновременном действии температуры и центробежных сил от вращения диска) — штрихпунктирными линиями.

Радиальные напряжения при $r = a$ и $r = b$ соответствуют граничным условиям (здесь принято $\sigma_{rb} \neq 0$, $\sigma_{ra} = 0$). Распределение температур по радиусу диска показано на том же рисунке.

Для сплошного диска (без центрального отверстия, рис. 1.4, б) граничные условия имеют вид $\sigma_r(b) = \sigma_{rb}$, $\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0)$. Из последнего равенства, а также из условия, что напряжения в центре диска должны быть конечными, следует, что

$$K_2^* = 0. \quad (1.53)$$

В соответствии с этим для сплошного диска (1.47) сохраняются, однако в этом случае

$$A_1 = A_2 = 1; \quad B_1 = B_2 = 0, \quad (1.54)$$

$$\Omega_1 = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2); \quad \Omega_2 = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right); \quad (1.55)$$

$$\theta_1^* = E [\theta(b) - \theta(r)]; \quad \theta_2^* = E [\theta(b) + \theta(r) - \alpha T], \quad (1.56)$$

$$\text{где } \theta(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r \alpha T dr.$$

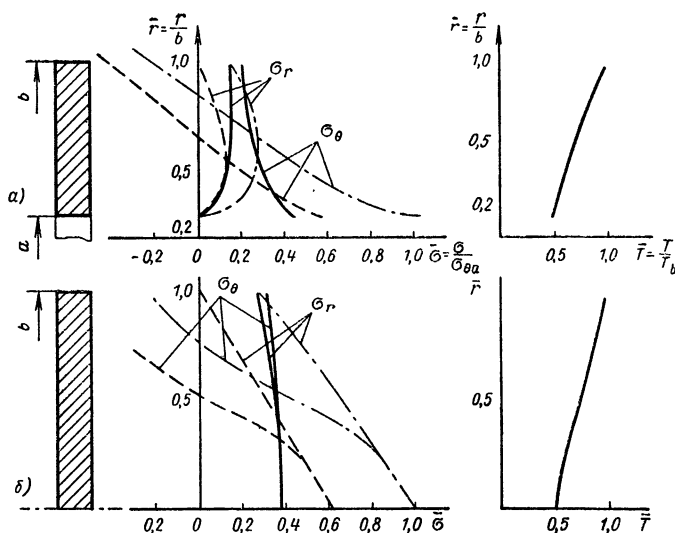


Рис. 1.4

При $r \rightarrow 0$

$$\theta(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \theta(r) = \frac{1}{2} \alpha_0 T_0. \quad (1.57)$$

Для перемещений в сплошном диске справедливо (1.51), если положить $a = 0$.

На наружном контуре при $r = b$ перемещение в сплошном диске

$$u(b) = u_b = \sigma_{rb} \frac{b}{E} (1 - \mu) + \frac{\rho \omega^2}{4} \frac{b^3}{E} (1 - \mu) + 2b\theta(b). \quad (1.58)$$

Если центральное отверстие в диске бесконечно мало ($r_a = a \rightarrow 0$), то из (1.47)–(1.50)

$$\sigma_\theta(a) = 2\sigma_{rb} + \frac{3 + \mu}{4} \rho \omega^2 b^2 + 2E \left[\theta(b) - \frac{\alpha_0 T_0}{2} \right]. \quad (1.59)$$

Напряжения в центре сплошного диска из (1.54)–(1.56)

$$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0) = \sigma_{rb} + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 b^2 + E \left[\theta(b) - \frac{\alpha_0 T_0}{2} \right]. \quad (1.60)$$

Из (1.59) и (1.60) напряжения $\sigma_\theta(0)$ в диске с бесконечно малым отверстием в 2 раза превышают соответствующие напряжения в сплошном диске (рис. 1.5), т. е. коэффициент упругой концен-

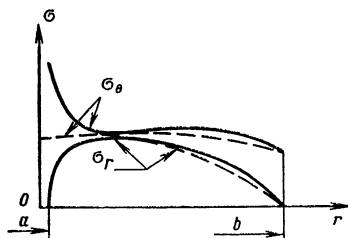


Рис. 1.5

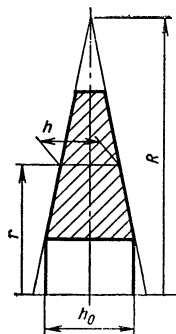


Рис. 1.6

трации напряжений в центральном круглом отверстии в диске равен двум. Однако местное превышение напряжений не влияет на общее распределение напряжений.

Диск конического профиля. Толщина диска на произвольном радиусе

$$h = h_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (1.61)$$

где R — радиус вершины конуса (рис. 1.6).

Уравнение (1.11) для конического диска

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R-r}\right) \frac{du}{dr} - \left[\frac{\mu}{(R-r)r} + \frac{1}{r^2}\right] u = f(r), \quad (1.62)$$

$$\text{где } f(r) = \alpha T (1 + \mu) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R-r}\right) + \frac{d}{dr} [\alpha T (1 + \mu)] - \frac{\alpha T (1 + \mu)}{r} - q_r(r) \frac{1 - \mu^2}{E}. \quad (1.63)$$

Уравнение (1.62) может быть приведено к обычной форме гипергеометрического уравнения введением безразмерной переменной $\bar{r} = \frac{r}{R}$ и подстановкой $u(r) = u^*(\bar{r}) \bar{r}$

$$\frac{d^2 u^*}{d\bar{r}^2} + \frac{4\bar{r} - 3}{\bar{r}(\bar{r} - 1)} \frac{du^*}{d\bar{r}} + \frac{1 + \mu}{\bar{r}(\bar{r} - 1)} u^* = \bar{f}(\bar{r}). \quad (1.64)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего (1.64), выражается с помощью гипергеометрических рядов [56].

Другие точные решения. Некоторые немногочисленные примеры точных решений (1.11) были получены при специальных законах изменения толщины диска [56]. Практическое значение точных решений снижается ввиду того, что толщины реальных дисков обычно не следуют одному уравнению, резко изменяясь в областях ступицы и обода.

§ 3. Применение точных решений для приближенного расчета дисков переменной толщины

Часто встречаются диски, состоящие из отдельных участков постоянной толщины, конического или гиперболического профилей. На рис. 1.7 показан диск, выполненный из трех элементов — ступицы, полотна и обода, каждый из которых имеет постоянную толщину. В некоторых случаях таким представлением удобно воспользоваться для диска переменной толщины (рис. 1.8), когда необходимо быстро выполнить поверочный расчет.

Рассмотрим процедуру численного расчета составного диска, для кольцевых элементов которого имеются аналитические решения, основанную на методе начальных параметров. Примем, что диск состоит из элементов постоянной толщины с постоянными по элементу параметрами E , μ , α . Таким образом, можно схематизировать практически любой диск переменной толщины. Аналогичные решения даны в работах [22, 69].

Примем в качестве основных переменных окружную деформацию $\varphi_1 = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ и радиальную силу в безразмерной форме $\varphi_2 = N_r/E_0 h_0$, где E_0 и h_0 — некоторые постоянные (например, значение E и h в начальном сечении). Такой выбор обеспечивает непрерывность этих переменных в радиальном направлении.

Из (1.45) и (1.6) окружная деформация в произвольном сечении элемента постоянной толщины выражается через произвольные постоянные K_1 и K_2 в виде

$$\varphi_1 = \varepsilon_\theta = K_1 + \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{1}{r^2} K_2 + (1+\mu)\theta - \frac{1-\mu^2}{8E} \rho \omega^2 r^2. \quad (1.65)$$

Безразмерная радиальная сила из (1.46) с учетом (1.5)

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \frac{N_r}{E_0 h_0} = & \frac{Eh}{E_0 h_0 (1-\mu)} K_1 - \frac{Eh}{E_0 h_0 (1-\mu)} \frac{1}{r^2} K_2 - \\ & - \frac{Eh}{E_0 h_0} \theta - \frac{3+\mu}{8E_0 h_0} h \rho \omega^2 r^2. \end{aligned} \quad (1.66)$$

В формулах (1.65) и (1.66) K_1 и K_2 соответствуют значениям этих произвольных постоянных в (1.45) с множителем $\frac{E}{1-\mu}$, определяемых из граничных условий для элемента.

Запишем (1.65) и (1.66) в матричной форме. Для i -го радиуса i -го элемента безразмерный вектор состояния $\bar{\varphi}_i$

$$\bar{\varphi}_i = A_i \bar{K}_i + \bar{V}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.67)$$

где i — номер элемента, соответствует его начальному радиусу; $(i+1)$ — внешний радиус элемента; $\bar{\varphi}_i = \begin{bmatrix} \varphi_1(r_i) \\ \varphi_2(r_i) \end{bmatrix}$, $\bar{K}_i =$

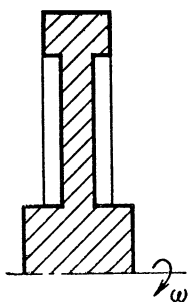


Рис. 1.7

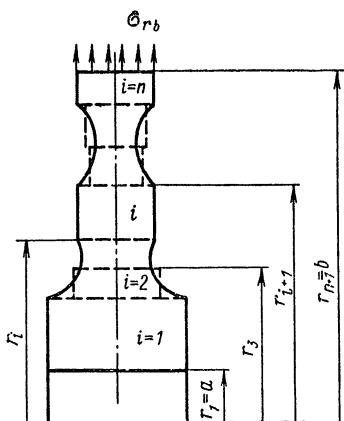


Рис. 1.8

$= \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix}$ — столбец произвольных постоянных для i -го элемента; элементы квадратной матрицы A_i

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 + \mu_i}{1 - \mu_i} \frac{1}{r_i^2} \\ \frac{E_i h_i}{E_0 h_0 (1 - \mu_i)} & -\frac{E_i h_i}{E_0 h_0 (1 - \mu_i)} \frac{1}{r_i^2} \end{bmatrix}. \quad (1.68)$$

Вектор $\bar{V}_i$ зависит от нагрузки (в данном случае учитываются только центробежные силы) и распределения температуры по элементу

$$\bar{V}_i = \begin{bmatrix} (1 + \mu_i) \theta_i - \frac{1 - \mu_i}{8E_i} \rho_i \omega^2 r_i^2 \\ -\frac{E_i h_i}{E_0 h_0} \theta_i - \frac{3 + \mu}{8E_0 h_0} h_i \rho_i \omega^2 r_i^2 \end{bmatrix}. \quad (1.69)$$

Для внутреннего i -го сечения i -го элемента в (1.69) входят значения r_i ; для наружного сечения i -го элемента с радиусом $(i + 1)$ в (1.68) и (1.69) следует подставлять вместо r_i величину r_{i+1} , и (1.67) запишется как

$$\bar{\varphi}_{i+1} = A_{i, i+1} \bar{K}_i + \bar{V}_{i, i+1}, \quad (1.70)$$

где $A_{i, i+1}$ и $\bar{V}_{i, i+1}$ определяются по (1.68) и (1.69) с заменой r_i на r_{i+1} . Величина температурной функции θ_i для внутреннего радиуса r_i равна нулю; для r_{i+1} в $V_{i, i+1}$ значение $\theta_{i, i+1}$ находится по (1.46) интегрированием внутри элемента от r_i до r_{i+1} . Из соотношений (1.66) и (1.70) найдем связь между параметрами внешнего и внутреннего радиусов элемента

$$\bar{\varphi}_{i+1} = A_{i, i+1} A_i^{-1} (\bar{\varphi}_i - \bar{V}_i) + \bar{V}_{i, i+1}. \quad (1.71)$$

Для диска с центральным отверстием вектор состояния на внутреннем контуре первого элемента

$$\bar{\varphi}_1 = A_1 \bar{K}_1 + \bar{V}_1.$$

Матрица-столбец произвольных постоянных для первого элемента

$$K_1 = A_1^{-1} \{\bar{\varphi}_1 - \bar{V}_1\},$$

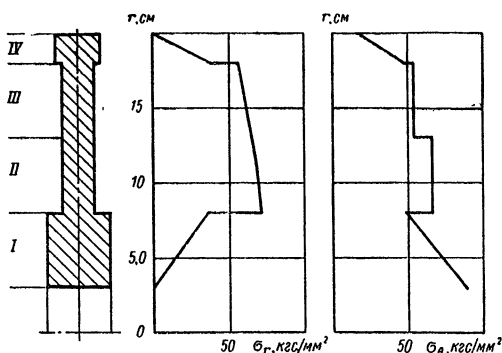


Рис. 1.9

где A_1^{-1} — обращенная матрица A_1^* . Вектор состояния на радиусе r_2 выразим через параметры 1-го элемента по (1.70)

$$\bar{\varphi}_2 = A_{1,2} \bar{K}_1 + \bar{V}_{1,2},$$

откуда с учетом (1.71)

$$\bar{\varphi}_2 = B_1 \{\bar{\varphi}_1 - \bar{V}_1\} + \bar{V}_{1,2}; \quad B_1 = A_{1,2} A_1^{-1}. \quad (1.72)$$

На радиусе r_3

$$\bar{\varphi}_3 = B_2 \{\bar{\varphi}_2 - \bar{V}_2\} + \bar{V}_{2,3}; \quad B_2 = A_{2,3} A_2^{-1} \quad (1.73)$$

или с учетом (1.72)

$$\bar{\varphi}_3 = R_2 \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_3^*, \quad (1.74)$$

где $R_2 = B_2 B_1$ — матрица перехода; $\bar{\varphi}_3^*$ — частное решение;

$$\bar{\varphi}_3^* = -R_2 \bar{V}_1 + B_2 (\bar{V}_{1,2} - \bar{V}_2) + \bar{V}_{2,3}.$$

Для n -го радиуса диска r_n вектор состояния

$$\bar{\varphi}_n = R_n \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_n^*, \quad (1.75)$$

где матрица перехода $R_n = B_n B_{n-1} \dots B_2 B_1$. Соотношение (1.75) позволяет осуществить переход от параметров $\bar{\varphi}_1$ на внутреннем контуре диска к параметрам на наружном контуре.

Для сплошного диска $K_2 = 0$ и в (1.71) вектор $\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Пример 1.1. На рис. 1.9 показан диск с отверстием, состоящий из четырех участков постоянной толщины, причем внутренние и наружные части диска изготовлены из различного материала. Основные данные для расчета, а также напряжения, возникающие в диске при вращении, приведены в табл. 1.1; частота вращения диска 10 000 об/мин, плотность материала диска $8 \cdot 10^{-3}$ кгс/см³.

* Основные сведения о простейших матричных преобразованиях, используемых в этом параграфе и в дальнейшем, можно найти в работах [4, 111].

1.1. Данные расчета диска

Номер элемента	r	h	μ	σ_r	σ_θ
	см			кгс/мм ²	
I	3 8	4	0,5	0 36	88 49
II	8 13	2		72 66	67 66
III	13 18		0,3	66 57	53 54
IV	18 20	3		37 0	48 18

На рис. 1.9 показаны эпюры напряжений σ_r и σ_θ в этом диске.

Использование такого подхода удобно для расчета роторных конструкций. Расчет не изменится, если на некоторых участках использовать элементы гиперболического профиля. То же относится и к коническим участкам.

§ 4. Растяжение дисков произвольного профиля

До внедрения ЭВМ в расчетную практику широкое распространение получили графические методы расчета дисков [81, 121, 120, 137]. Одновременно разрабатывались методы, основанные на замене профиля диска произвольного очертания ступенчатым, состоящим из участков — колец, для которых имеются аналитические решения — метод двух расчетов [121], претерпевший различные модификации [63, 69, 119, 120] и др.

С появлением ЭВМ громоздкие графические и табличные расчеты уступили место различным численным методам решения дифференциальных уравнений — методу конечных разностей [16], численному интегрированию с помощью стандартных процедур. Методы дискретизации, которые также используются наряду с предыдущими, переводятся на язык программ с использованием матричных схем, как это было показано в § 3.

В предлагаемой книге применяются методы интегральных уравнений, развитые для подобных задач в работах [9 и 12], преимущества которых заключаются в отсутствии необходимости дифференцирования переменных физических и геометрических параметров, что доставляет особые удобства при проведении упругопластических расчетов.

Рассмотрим растяжение дисков переменной толщины при произвольной растягивающей нагрузке, переменной вдоль радиуса температуре и параметрах упругости E и μ .

Обозначим радиальные и окружные силы в цилиндрическом сечении диска, приходящиеся на единицу длины окружности,

$$N_r = \sigma_r h, \quad N_\theta = \sigma_\theta h, \quad (1.76)$$

Проинтегрировав уравнение равновесия элемента (1.4), получим

$$N_r = \frac{1}{r} \int_a^r N_\theta dr - \frac{1}{r} \int_a^r q_r r h dr + \frac{a}{r} N_{ra}. \quad (1.77)$$

Для общности рассмотрим также возможность воздействия на диск растягивающих сил, распределенных вдоль окружности. Представим выражение для распределенной нагрузки следующим образом:

$$q_r(r)h = \tilde{q}_r(r)h + \sum_{j=1}^m P_{rj} \delta(r - r_j), \quad (1.78)$$

где $\tilde{q}_r$ — распределенные силы, являющиеся непрерывными функциями радиуса; P_{rj} — радиальные силы, распределенные вдоль окружности радиуса r_j ; $\delta(r - r_j)$ — дельта-функция [5].

При интегрировании в пределах от a до r

$$\int_a^r q_r(r_1) h dr_1 = \int_a^r \tilde{q}_r(r_1) h dr_1 + \sum_{j=1}^m P_{rj} S(r - r_j), \quad (1.79)$$

где

$$S(r - r_j) = \begin{cases} 0 & r < r_j \\ 1 & r \geq r_j \end{cases} -$$

единичная функция.

Аналогично (1.77) из (1.4) получим

$$N_r = \int_a^r \frac{1}{r} (N_\theta - N_r) dr - \int_a^r q_r h dr + N_{ra}. \quad (1.80)$$

Уравнение совместности аналогично (1.10) запишем в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r}{Eh} (N_\theta - \mu N_r) + r \alpha T \right] = \frac{1}{Eh} (N_r - \mu N_\theta) + \alpha T. \quad (1.81)$$

При $\frac{N_\theta r}{Eh} = Y(r)$ уравнение первого порядка представим в виде

$$\frac{d}{dr} (Y) + \frac{\mu}{r} Y = p, \quad (1.82)$$

где

$$p = \frac{N_r}{Eh} + \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu r N_r}{Eh} \right) + \alpha T \frac{d}{dr} (r \alpha T). \quad (1.83)$$

Обозначив

$$\chi = \chi(r) = \exp \left[\int_a^r \frac{\mu}{r} dr \right], \quad (1.84)$$

запишем общее решение (1.82) в виде

$$Y = \frac{N_\theta r}{Eh} = \frac{1}{\chi} \left[\int_a^r p \chi dr + Y_a \right]. \quad (1.85)$$

Подставив в (1.85) значение p из (1.83) и интегрируя по частям, найдем

$$\begin{aligned} N_\theta - N_r = & -(1 - \mu) N_r + \frac{A(1 - \mu^2)}{r\chi} \int_a^r \frac{1}{A} \chi N_r dr + \psi_T + \\ & + \frac{A(1 - \mu^2)}{r\chi} u_a, \end{aligned} \quad (1.86)$$

где

$$\psi_T = \frac{A(1 - \mu^2)}{r\chi} \left[\int_a^r \alpha T(1 + \mu) \chi dr - r \alpha T \chi \right]; \quad (1.87)$$

$$u_a = \frac{a}{A_a(1 - \mu_a^2)} (N_{\theta a} - \mu_a N_{ra}) + a \alpha_a T_a \quad (1.88)$$

и $A = A(r) = \frac{Eh}{1 - \mu^2}$ — цилиндрическая жесткость на растяжение сечения радиуса r . Подставив N_θ из (1.86) в (1.77), получим интегральное уравнение растяжения диска относительно радиальной силы

$$N_r(r) = LN_r(r) + u_a F_1(r) + N_{ra} F_2(r) + F_q(r) + F_T(r), \quad (1.89)$$

где интегральная операция от $N_r(r)$

$$LN_r(r) = \frac{1}{r} \int_a^r \mu N_r dr + \frac{1}{r} \int_a^r \xi_1 \int_a^r \frac{1}{A} \chi N_r dr_2 dr_1; \quad (1.90)$$

$$F_1(r) = \frac{1}{r} \int_a^r \xi_1 dr; \quad F_2 = \frac{a}{r}; \quad (1.91)$$

$$F_q(r) = - \frac{1}{r} \int_a^r q_r r h dr;$$

$$F_T(r) = \int_a^r \frac{1}{r} \psi_T dr; \quad \xi_1 = \frac{A(1 - \mu^2)}{r\chi}.$$

Уравнение (1.89) представляет собой линейное неоднородное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода (с переменной областью интегрирования $[a, r] = var$). Решение таких уравнений методом последовательных приближений или линейной аппроксимацией подробно изложено в работе [12], где приведено также доказательство сходимости.

Ниже покажем процедуру метода последовательных приближений.

Решение (1.89) имеет вид

$$N_r = u_a \Phi_1(r) + N_{ra} \Phi_2(r) + \Phi_q(r) + \Phi_T(r), \quad (1.92)$$

где Φ_i ($i = 1, 2, \dots$) — фундаментальные функции — решения однородного уравнения, соответствующего (1.89); Φ_q, Φ_T — частные решения.

Функции Φ_i являются решениями уравнений

$$N_r = LN_r + F_i \quad (i = 1, 2), \quad (1.93)$$

и функции Φ_q, Φ_T удовлетворяют уравнению

$$N_r = LN_r + F_{q, T}. \quad (1.94)$$

Если N_{rj} представляет собой j -е приближение значений функций $N_r = \Phi_1$ при решении (1.93) и $i = 1$, то $(j + 1)$ -е приближение находим по формуле

$$N_{r(j+1)} = LN_{r(j)} + F_1. \quad (1.95)$$

Приняв нулевое приближение

$$N_{r(0)} = \Phi_{1(0)} = 0, \quad (1.96)$$

получим в качестве первого приближения из (1.95)

$$N_{r(1)} = \Phi_{1(1)} = F_1. \quad (1.97)$$

Далее

$$\Phi_{1(2)} = N_{r(2)} = LN_{r(1)} + F_1 = F_1 + LF_1; \quad (1.98)$$

$$\Phi_{1(3)} = L\Phi_{1(2)} + F_1 = F_1 + LF_1 + L(LF_1). \quad (1.99)$$

Расчет оканчивается при достаточной близости двух соседних приближений j и $j + 1$, так что

$$\|N_r(r)_j - N_r(r)_{j-1}\| \leq \delta \|N_r(r)_j\|, \quad (1.100)$$

где δ — заданная точность, тогда $\Phi_1 \approx \Phi_{1(j+1)}$ является решением однородного уравнения (1.89).

Аналогичным образом определяются и остальные решения Φ_2, Φ_q, Φ_T .

Вычисление интегралов (1.90)—(1.91) производится численным методом. Диск разбивают на участки, причем наиболее удобно выбирать интервалы между соседними радиусами различной длины (см. ниже пример 1.2). При этом более точно описывать профиль

диска в местах резкого изменения толщины, где расчетные сечения следует располагать чаще. Интегралы с переменным верхним пределом можно определять по правилу трапеций и другими известными способами.

Для вычисления интеграла

$$y = \int_a^r f(r) dr \quad (1.101)$$

по правилу трапеций значение интеграла на $(n + 1)$ -м шаге y_{n+1} выражается через значение на n -м шаге y_n

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta nr}{2} (f_{n+1} + f_n). \quad (1.102)$$

Процесс последовательных приближений для уравнений типа (1.89) всегда является сходящимся [12]. Однако при неплавном изменении профиля диска по радиусу или при резком изменении параметров упругости или температуры процесс может сходиться медленно. В качестве практического приема для улучшения процесса сходимости может быть рекомендовано увеличение числа расчетных сечений, уменьшение интервалов между расчетными сечениями в этих местах, а также в краевых областях.

Краевые условия. Диск может быть закреплен различно. В связи с этим будут и различные краевые условия.

Для решения уравнения растяжения диска (1.89) необходимо знать u_a и N_{ra} , которые определяются из известных краевых условий (N_{rb} , u_b , u_a , N_{ra}) с помощью (1.5), (1.6), (1.86), (1.87) и (1.92).

Для диска с отверстием:

1. Известны N_{ra} и N_{rb} . Тогда из (1.92) при $r = b$

$$u_a = \frac{1}{\Phi_{1b}} (N_{rb} - N_{ra}\Phi_{2b} - \Phi_{qb} - \Phi_{Tb}). \quad (1.103)$$

2. Известны u_a и N_{rb} (натяг и контурная нагрузка). Тогда из уравнения (1.92) при $r = b$

$$N_{ra} = \frac{1}{\Phi_{2b}} [N_{rb} - u_a\Phi_{1b} - \Phi_{qb} - \Phi_{Tb}]. \quad (1.104)$$

3. Известны u_a и u_b . Тогда

$$N_{ra} = \left[u_b\chi(b) - u_a \left(\int_a^b \frac{\Phi_1}{A} \chi dr + 1 \right) - \int_a^b \frac{\Phi_T(r)}{A} \chi dr - \int_a^b \alpha T \chi (1 + \mu(r)) dr + r\alpha T \chi - \int_a^b \frac{\Phi_q}{A} \chi dr \right] \frac{1}{\int_a^b \frac{\Phi_2}{A} \chi dr}. \quad (1.105)$$

4. Известны N_{ra} и u_b . Тогда

$$u_a = \left[u_b \chi(b) - N_{ra} \int_a^b \frac{\Phi_r}{A} \chi dr - \int_a^b \frac{\Phi_q}{A} \chi dr - \int_a^b \alpha T \chi (1 + \mu(r)) dr - \int_a^b \frac{\Phi_T}{A} \chi dr + r \alpha T \chi \right] \frac{1}{\int_a^b \frac{\Phi_{11}}{A} \chi dr + 1}. \quad (1.106)$$

Для диска без отверстия:

На малом радиусе $r = a$ можно считать

$$N_{ra} \simeq N_{\theta a}. \quad (1.107)$$

5. Известно N_{rb} . Тогда

$$N_{ra} = \frac{1}{\frac{a\Phi_{1b}}{A_a(1+\mu_a)} + \Phi_{2b}} [N_{rb} - \Phi_{Tb} - a\alpha_a T_a \Phi_{1b} - \Phi_{qb}]; \quad (1.108)$$

$$u_a = a [N_{ra}/A_a (1 + \mu_a) + \alpha_a T_a]. \quad (1.109)$$

6. Известно u_b . Тогда

$$N_{ra} = \left(u_b \chi_b - \int_a^b \frac{\Phi_q}{A} \chi dr - \int_a^b \frac{\Phi_T}{A} \chi dr - \int_a^b \alpha T \chi (1 + \mu) dr - a T_a \alpha_a \times \right. \\ \left. \times \left(\int_a^b \frac{\Phi_1}{A} (\chi dr + 1) \right) \right) \left(a \left(\int_a^b \frac{\Phi_1}{A} \chi dr + 1 \right) \frac{1}{A_a (1 + \mu_a)} + \right. \\ \left. + \int_a^b \frac{\Phi_2}{A} \chi dr \right). \quad (1.110)$$

Для расчета дисков на растяжение можно использовать малые и средние ЭВМ.

В приложении 1 помещена программа на языке Алгол, составленная для ЭВМ типа БЭСМ-6 в соответствии с изложенным выше алгоритмом. Эта программа легко может быть использована и для других машин типа М-220, БЭСМ-3 и др.

Пример 1.2. На рис. 1.10, а показано сечение диска первой ступени турбины из сплава ХН77ТЮР, нагруженного центробежными силами, распределенной растягивающей силой на наружном контуре и неравномерно нагретого вдоль

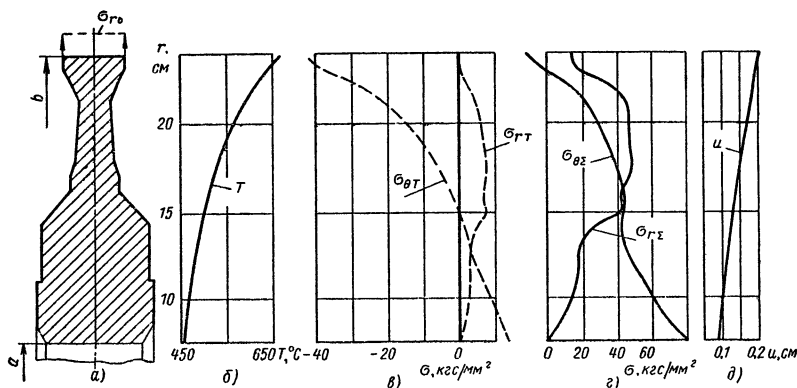


Рис. 1.10

1.2. Геометрические размеры диска

r	h	$T, ^\circ\text{C}$	r	h	$T, ^\circ\text{C}$
см			см		
7,65	5,40	455	15,05	2,67	496
8,30	6,70	458	16,00	2,65	504
9,25	6,70	461	17,50	2,10	520
10,00	6,70	464	19,00	1,98	540
10,00	6,50	464	21,00	1,80	576
11,50	6,50	471	22,40	2,45	612
13,00	6,50	480	22,80	2,98	624
13,70	5,15	484	23,15	3,50	638
14,25	4,10	488	23,79	3,50	662

радиуса. Геометрические размеры диска, температуры и нагрузки, физические и механические характеристики даны в табл. 1.2 и 1.3.

Краевые условия $N_{ra} = 0$; $N_{rb} = 5296$ кг/см; частота вращения диска 11 620 об/мин; плотность материала 8,2 г/см³.

На рис. 1.10, б—г показано распределение температуры и температурных напряжений σ_{rT} и $\sigma_{\theta T}$ (штриховые линии) в этом диске, возникающих из-за неравномерного поля температур в радиальном направлении.

При повышающейся температуре от центра к периферии диска окружные температурные напряжения $\sigma_{\theta T}$ изменяют знак. В центральной части диска напряжения растягивающие, а на ободе сжимающие; так как при рассмотре-

нии только температурных напряжений силы на наружных контурах диска равны нулю, то радиальные температурные напряжения σ_{rT} также равны нулю при $r = a$ и $r = b$. На этом же рисунке сплошными линиями показаны суммарные напряжения $\sigma_{r\Sigma}$ и $\sigma_{\theta\Sigma}$ от неравномерного нагрева, центробежных сил диска и нагрузки от лопаток на наружном контуре. На рис. 1.10, д даны радиальные перемещения в диске при воздействии всех нагрузок.

1.3. Характеристика материала

$T, ^\circ\text{C}$	$E \cdot 10^{-6}$ кгс/см ²	$\alpha \cdot 10^6$ град ⁻¹
450	1,9	16,78
550	1,8	18,17
650	1,7	19,92
700	1,55	21,20

Напряжения и деформации при изгибе дисков

§ 5. Основные уравнения осесимметричного изгиба

На рис. 2.1 показан диск, нагруженный поперечными силами $Q(r)$, распределенной по поверхности нагрузкой $q_z(r)$ и изгибающими моментами M_{rb} и M_{ra} на наружных контурах. Диск может быть также неравномерно нагрет по толщине и по радиусу ($T_1(r)$, $T_2(r)$ — температуры на поверхности диска). Все нагрузки и температура постоянны вдоль дуг окружности. В соответствии с этим напряжения и деформации также не зависят от угловой координаты.

В результате действия перерезывающих сил и моментов полотно диска смещается в осевом направлении на величину прогиба $w(r)$. Радиальные силы на этих смещениях создают изгибающие моменты, являющиеся функцией прогибов.

Взаимное влияние изгибающих и растягивающих сил, а также необходимость учета этого влияния в различных случаях будут рассмотрены в последующих параграфах. Данный параграф посвящен расчету жестких дисков с профилем, симметричным относительно срединной плоской поверхности; расчет осуществляют независимо от расчета на растяжение. Соответствующие напряжения и деформации затем суммируют. Для отдельного рассмотрения необходимо также соблюдение условия постоянства коэффициента Пуассона μ по толщине, однако в большинстве практических задач этим можно пренебречь.

Рассмотрим деформацию срединной плоской поверхности диска в результате изгиба (рис. 2.2); u_0 — радиальное смещение в срединной плоскости. Считаем, что нормаль к плоскости остается прямолинейной после деформации (гипотеза Кирхгофа). Угол поворота этой нормали в результате деформации обозначим ϑ .

Величина ϑ считается достаточно малой, так что

$$\cos \vartheta \approx 1. \quad (2.1)$$

Смещение в радиальном направлении из-за поворота нормали

$$u(r, z) = \vartheta(r) z. \quad (2.2)$$

Рис. 2.1

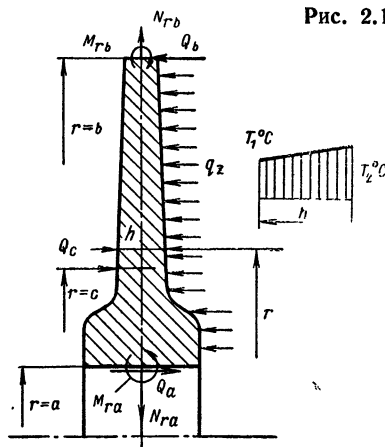
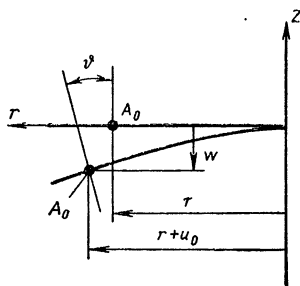


Рис. 2.2



Деформации изгиба в радиальном и окружном направлениях

$$\varepsilon_r = z \frac{d\vartheta}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = z \frac{\vartheta}{r}. \quad (2.3)$$

Формулы связи между напряжениями изгиба и деформациями (коэффициент Пуассона $\mu = \mu(r)$ постоянен по толщине)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) - \frac{E(1+\mu)(\alpha T - \alpha_c T_c)}{1-\mu^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) - \frac{E(1+\mu)(\alpha T - \alpha_c T_c)}{1-\mu^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\alpha_c T_c = \alpha_c T_c(r)$ — средние по толщине температурные деформации, вызывающие температурные напряжения в срединной плоскости диска. Изгибающие моменты, отнесенные к единице длины окружности, действующие в радиальном и окружном направлениях,

$$M_r = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz, \quad M_\theta = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz. \quad (2.5)$$

Подставив в (2.5) формулы (2.4), получим

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) + S_T; \\ M_\theta &= -D \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) + S_T; \\ \frac{d\vartheta}{dr} &= - \frac{1}{(1-\mu^2)D} (M_r - \mu M_\theta) + \frac{S_T}{(1+\mu)D}; \\ \frac{\vartheta}{r} &= - \frac{1}{(1-\mu^2)D} (M_\theta - \mu M_r) + \frac{S_T}{(1+\mu)D}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{Здесь } D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1-\mu^2} dz —$$

цилиндрическая жесткость сечения на изгиб.
Величина

$$S_T = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(1+\mu)}{1-\mu^2} (\alpha T - \alpha_c T_c) z dz \quad (2.7) \quad \text{Рис. 2.3}$$

или при постоянном μ

$$S_T = \frac{1}{1-\mu} \int_{-h/2}^{h/2} E \alpha T z dz. \quad (2.8)$$

При линейном изменении температуры по толщине диска

$$\Delta(\alpha T) = \alpha_2 T_2 - \alpha_1 T_1, \quad S_T = \frac{D(1+\mu)}{h} \Delta(\alpha T).$$

Уравнения равновесия элемента при изгибе с учетом упрощающих предположений об отсутствии взаимовлияния растягивающих и изгибающих нагрузок (рис. 2.3) имеют вид

$$\frac{d(Qr)}{dr} + q_z r = 0; \quad (2.9)$$

$$\frac{d(M_r)}{dr} - M_\theta - Qr = 0. \quad (2.10)$$

Здесь Q — погонные перерезывающие силы, действующие в цилиндрическом сечении; q_z — интенсивность внешней нагрузки, нормальной к срединной плоскости диска; в частности, если $p(r)$ — давление внешней среды на поверхности диска, то

$$q_z = p(r). \quad (2.11)$$

Интегрируя уравнение (2.10) в пределах от a до r , получим

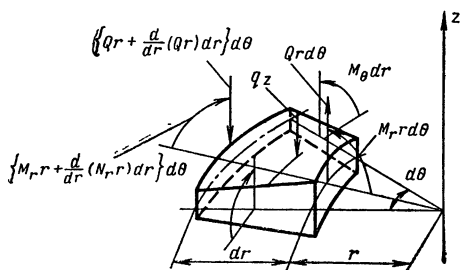
$$Q = -\frac{1}{r} \int_a^r q_z r dr + \frac{a}{r} Q_a. \quad (2.12)$$

Представим (2.10) в виде

$$\frac{dM_r}{dr} - \frac{1}{r} (M_\theta - M_r) - Q = 0. \quad (2.13)$$

Проинтегрировав (2.13) в тех же пределах, получим

$$M_r = \int_a^r \frac{1}{r} (M_\theta - M_r) dr + \int_a^r Q dr + M_{ra}. \quad (2.14)$$



Подставив в (2.14) формулу (1.12), находим

$$M_r = \int_a^r \frac{1}{r} (M_\theta - M_r) dr + \int_a^r Q dr + M_{ra} - \int_a^r \frac{1}{r} \int_a^r q_z r dr dr + a Q_a \ln \frac{r}{a}. \quad (2.15)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\vartheta}{r} r \right) \quad (2.16)$$

и используя соответствующие выражения для деформаций из (2.6), получим уравнение совместности для изгиба

$$M_\theta - \mu M_r = \frac{D(1-\mu^2)}{r\chi} \int_a^r \frac{\chi}{D} M_r dr + \psi_T - \frac{D(1-\mu^2)}{r\chi} \vartheta_a. \quad (2.17)$$

$$\text{Здесь } \psi_T = -\frac{D(1-\mu^2)}{r\chi} \left(\int_a^r \frac{S_T}{D} \chi dr - r \frac{S_T}{D} \frac{\chi}{1+\mu} \right); \quad (2.18)$$

$$\chi = \exp \int_a^r \frac{\mu}{r} dr; \quad (2.19)$$

$$\vartheta_a = -\frac{a}{D_a(1-\mu_a^2)} (M_{\theta a} - \mu M_{ra}) + a \frac{S_{Ta}}{D(1+\mu_a)}. \quad (2.20)$$

Подставив (2.17) в (2.15), получим интегральное уравнение изгиба диска, аналогичное (1.89):

$$M_r = L M_r + \vartheta_a F_1(r) + M_{ra} F_2(r) + F_q(r) + F_T(r), \quad (2.21)$$

где $L M_r$ — интегральная операция от M_r ;

$$L M_r = - \int_a^r \frac{1-\mu}{r} M_r dr + \int_a^r \frac{D(1-\mu^2)}{r^2 \chi} \int_a^r \frac{\chi}{D} M_r dr dr. \quad (2.22)$$

Функции $F_1(r)$ и $F_2(r)$ при начальных параметрах имеют следующий вид:

$$F_1 = - \int_a^r \frac{D(1-\mu^2)}{r^2 \chi} dr; \quad F_2 = 1. \quad (2.23)$$

Функции нагрузки и температуры

$$F_q = - \int_a^r \frac{1}{r} \int_a^r q_z r dr dr + a Q_a \ln \frac{r}{a}; \quad (2.24)$$

$$F_T = \int_a^r \frac{1}{r} \psi_T dr. \quad (2.25)$$

Решение неоднородного интегрального уравнения (2.21) строится так же точно, как и уравнения растяжения диска (1.76):

$$M_r = \vartheta_a \Phi_1(r) + M_{ra} \Phi_2(r) + \Phi_q(r) + \Phi_T(r). \quad (2.26)$$

Фундаментальные функции $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$ — решения однородного уравнения, соответствующего (2.26), и частные решения $\Phi_q(r)$, $\Phi_r(r)$ также могут быть определены методом последовательных приближений, процедура которого описана в § 4 гл. 1.

Крайевые условия. В (2.26) входят параметры ϑ_a и M_{ra} , которые могут быть определены из краевых условий. Если на контурах диска заданы силовые условия — изгибающие моменты или перерезывающие силы, решение легко находится при подстановке соответствующих силовых факторов в (2.26) и решении алгебраических уравнений для определения недостающих параметров. В частности, если известно M_{rb} и M_{ra} из (2.26), то

$$\vartheta_a = \frac{1}{\Phi_{1b}} M_{rb} - \frac{\Phi_{2b}}{\Phi_{1b}} M_{ra} - \frac{\Phi_{qb}}{\Phi_{1b}} - \frac{\Phi_{Tb}}{\Phi_{1b}}, \quad (2.27)$$

и изгибающие моменты на любом радиусе диска в радиальном направлении

$$M_r = \frac{\Phi_1}{\Phi_{1b}} M_{rb} - \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_{1b}} \Phi_{2b} + \Phi_2 \right) M_{ra} - \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_{1b}} \Phi_{qb} + \Phi_q \right) - \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_{1b}} \Phi_{Tb} + \Phi_T \right). \quad (2.28)$$

При сопряжении с валом, оболочкой и т. п. обычно известен коэффициент податливости упругой заделки λ , например

$$\vartheta_a = \lambda M_{ra}. \quad (2.29)$$

Из (2.26)

$$M_r = (\lambda \Phi_1 + \Phi_2) M_{ra} + \Phi_q + \Phi_T. \quad (2.30)$$

После определения M_r во всех расчетных сечениях деформации, перемещения и напряжения легко находятся из (2.17) и из (2.6), (2.4) и (2.3).

Изгиб диска постоянной толщины. Полагая параметры упругости постоянными, легко получить уравнение изгиба диска постоянной толщины, которое аналогично соответствующему уравнению растяжения, представленному в гл. 1. Внесем выражения для моментов (2.6) в уравнение равновесия (2.10), откуда

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} = -\frac{Q}{D} + \frac{1}{D} \frac{dS_T}{dr}, \quad (2.31)$$

где S_T и Q определяют по (2.8) и (2.12) соответственно. Так же, как и (1.42), это дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение может быть найдено с помощью того же приема, что и для (1.42).

Рассмотрим другой способ. Представим (2.31) в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right] = -\frac{Q}{D} + \frac{1}{D} \frac{dS_T}{dr}. \quad (2.32)$$

Проинтегрировав дважды от a до r , находим

$$\vartheta = -\frac{1}{rD} \int_a^r \int_a^r Q dr dr + \frac{1}{rD} \int_a^r r S_T dr + K_1 r + \frac{K_2}{r}; \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dr} = & -\frac{1}{D} \int_a^r Q dr + \frac{1}{r^2 D} \int_a^r \int_a^r Q dr dr + \frac{S_T}{D} - \\ & - \frac{1}{r^2 D} \int_a^r r S_T dr + K_1 - \frac{K_2}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Подставив (2.33) и (2.34) в (2.6) и проведя интегрирование по частям, получим

$$M_r = K_1^* - \frac{K_2^*}{r^2} + \frac{1+\mu}{2} \int_a^r Q dr + \frac{1-\mu}{2r^2} \int_a^r r^2 Q dr + \frac{(1+\mu)}{r^2} \int_a^r r S_T dr; \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} M_\theta = & K_1^* + \frac{K_2^*}{r^2} + \frac{1+\mu}{2} \int_a^r Q dr - \frac{1-\mu}{2r^2} \int_a^r r^2 Q dr - \\ & - (1-\mu) \left[\frac{1}{r^2} \int_a^r r S_T dr - S_T \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

где K_1^* и K_2^* — произвольные постоянные, образованные умножением K_1 и K_2 на константы.

Для диска постоянной толщины с отверстием при известных моментах на наружном M_{rb} и внутреннем M_{ra} контурах моменты в произвольном сечении

$$\begin{aligned} M_r = & M_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - M_{ra} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \\ & - [\Phi_{1b} + \Phi_{2b}] \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \\ & + \Phi_1 + \Phi_2 - \psi_b \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \psi; \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} M_\theta = & M_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - M_{ra} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \\ & - [\Phi_{1b} + \Phi_{2b}] \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \\ & + \Phi_1 - \Phi_2 - \psi_b \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \psi + (1-\mu) S_T, \end{aligned} \quad (2.38)$$

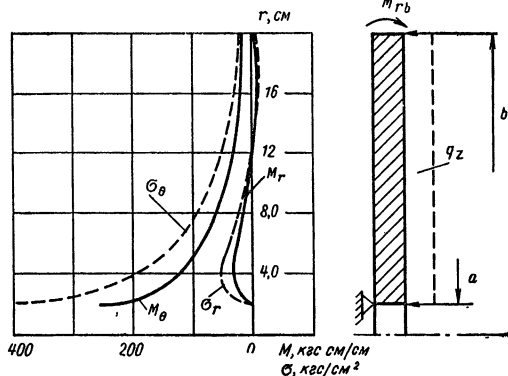


Рис. 2.4

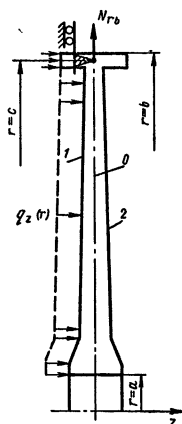


Рис. 2.5

где

$$\Phi_1 = \frac{1+\mu}{2} \int_a^r Q dr; \quad \Phi_2 = \frac{1-\mu}{2r^2} \int_a^r r^2 Q dr; \quad (2.39)$$

$\psi = \frac{1-\mu}{r^2} \int_a^r r S_T dr$, а $Q(r)$ определяется по (2.12).

Напряжения изгиба определяются с учетом (2.4), (2.33) и (2.34) по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{Ez}{(1-\mu^2)D} M_r + \frac{Ez}{(1-\mu^2)D} S_T - \frac{E(\alpha T - \alpha_c T_c)}{1-\mu}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{Ez}{(1-\mu^2)D} M_\theta + \frac{Ez}{(1-\mu^2)D} S_T - \frac{E(\alpha T - \alpha_c T_c)}{1-\mu}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Для диска постоянной толщины без отверстия краевые условия имеют вид

$$M_{r0} = M_{\theta 0}; \quad M_r(b) = M_{rb}, \quad (2.41)$$

при этом

$$M_r = M_{rb} - \Phi_{1b} - \Phi_{2b} + \Phi_1 + \Phi_2 - \psi_b + \psi, \quad (2.42)$$

причем Φ_1 , Φ_2 и ψ определяют из (2.39) при $a = 0$; в центре диска

$$\Phi_{10} = 0, \quad \Phi_{20} = 0, \quad \psi_0 = \frac{1-\mu}{2} S_{T0}. \quad (2.43)$$

Изгибающие напряжения и прогибы в дисках постоянной толщины при различных краевых условиях могут быть определены по соответствующим решениям, полученным для круглых пластинок [86, 105 и др.]

Пример 2.1. На рис. 2.4 показано распределение изгибающих моментов и напряжений в диске постоянной толщины с центральным отверстием, опер-

2.1. Геометрические размеры диска, температуры поверхностей

r	h	T_1	T_2
см		°C	
2,40	3,40	530	550
3,40	3,40	540	560
4,65	1,90	548	568
5,50	1,65	555	575
13,00	1,46	612	632
20,92	1,30	672	692
22,00	1,30	680	700
23,30	1,30	710	730
23,30	4,40	710	730
23,54	4,40	710	730
24,00	4,40	710	730

2.2. Модуль упругости и коэффициент линейного расширения для некоторых температур

$T, ^\circ\text{C}$	$E \cdot 10^{-6}, \text{кгс/см}^2$	$\alpha \cdot 10^6, 1/^\circ\text{C}$
20	2,23	12,60
500	1,80	13,20
600	1,70	13,40
750	1,50	14,00

тым по внутреннему контуру и нагруженным изгибающими моментами M_{rb} по наружному контуру и равномерно распределенной нагрузке q_z , нормальной к поверхности. Наружный радиус диска $b = 20$ см, внутренний радиус $a = 2$ см, толщина $h = 2$ см, $q_z = 0,5 \text{ кгс/см}^2$, $M_{rb} = 3 \text{ кгс}\cdot\text{см/см}$, $\mu = 0,3$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$.

Пример 2.2. Рассмотрим диск газовой турбины, нагруженный центробежными силами, распределенной поперечной нагрузкой ($q_z = -14,34 \text{ кгс/см}^2$ при $2,4 \text{ см} \leq r \leq 20,92 \text{ см}$; $q_z = -15,08 \text{ кгс/см}^2$ при $r \geq 22,0 \text{ см}$) и неравномерно нагретый по толщине и по радиусу (рис. 2.5 и табл. 2.1). Изменение температуры по толщине диска линейное, разность температур 20°C . На наружном контуре приложены радиальные растягивающие силы.

Частота вращения диска $n = 8400 \text{ об/мин}$, растягивающие силы на наружном радиусе $N_{rb} = 4250 \text{ кгс/см}$. Материал диска сплав ХН73МБТЮ-ВД, плотность $\gamma = 8,32 \text{ г/см}^3$ (табл. 2.2). Эти константы для расчетных температур на соответствующих радиусах определяют методом линейной интерполяции. Рассматриваемый диск имеет скользящую опору по окружности радиуса $r = c = 23,54 \text{ см}$, как показано на рис. 2.5, имитирующую взаимодействие с барабаном ротора.

Напряжения и перемещения в этом диске при действии центробежных сил, а также нагрузки на наружном контуре и температура, линейно меняющаяся по толщине диска, приведены на рис. 2.6, а, б. В этом расчете полагали $q_z(r) = 0$. Напряжения растяжения от N_{rb} и центробежных сил (σ_r^0 и σ_θ^0)

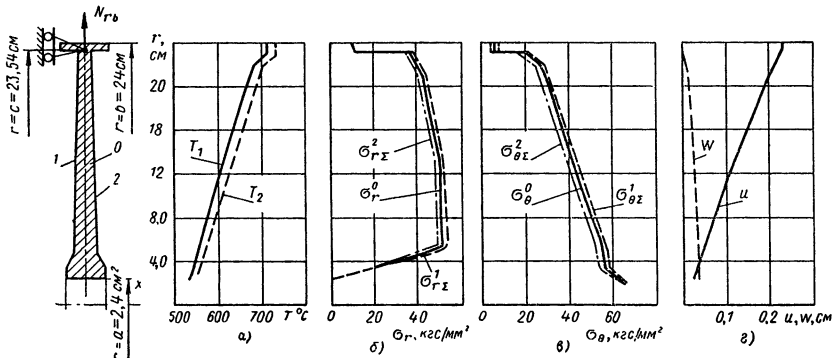


Рис. 2.6

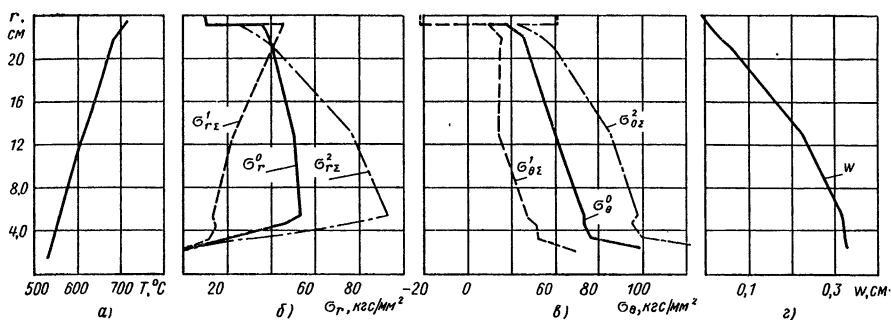


Рис. 2.7

определены по формулам § 4 гл. 1 и показаны на рис. 2.6, б, в сплошными линиями. При рассмотрении симметричного диска без учета взаимного влияния растягивающих и изгибающих сил эти напряжения действуют в срединной плоскости диска. Суммарные напряжения изгиба и растяжения $\sigma_{r\Sigma}^1$, $\sigma_{\theta\Sigma}^1$ и $\sigma_{r\Sigma}^2$, $\sigma_{\theta\Sigma}^2$ на левой и правой боковых поверхностях в соответствии со схемой сечения диска, показанной на рис. 2.6, представлены на рис. 2.6, б и в соответственно штриховыми и штрихпунктирными линиями¹. Напряжения изгиба равны разности суммарных и растягивающих напряжений. Прогибы и радиальные перемещения срединной плоскости диска показаны на рис. 2.6, г. На радиусе опоры прогибы равны нулю ($w_c = 0$). Напряжения изгиба при линейном законе изменения температуры и параметров E и α по толщине возникают только в диске переменной толщины (в случае плоской срединной поверхности), что подтверждается формулами (2.38)—(2.40). В диске постоянной толщины напряжения изгиба при линейном законе изменения αT отсутствуют.

Результаты расчета того же диска при изгибе поперечными силами $q_z(r)$ представлены на рис. 2.7. Поле температур постоянно по толщине и меняется только в радиальном направлении [рис. 2.7, а; $T(r, z) = T_1(r)$]. Растягивающие напряжения σ_r^0 и σ_θ^0 совпадают с напряжениями предыдущего варианта нагружения. Суммарные напряжения при совместном действии изгиба от сил $q_z(r)$ и растяжения показаны на рис. 2.7, б и в. Прогибы представлены на рис. 2.7, г.

Расчет проведен по программе, текст которой с соответствующими пояснениями представлен в приложении 2. Программа основана на уравнениях § 6, в которых учитывается совместное действие растяжения и изгиба, в соответствии с методикой, изложенной там же, и позволяет в частном случае проводить расчет при независимом действии растяжения и изгиба (для «жесткого» диска) по формулам § 5.

§ 6. Учет больших прогибов

Напряжения и деформации. Уравнения равновесия и совместности. При рассмотрении дисков, имеющих плоскую срединную поверхность, взаимным влиянием растягивающих и изгибающих сил пренебрегали. Однако в некоторых случаях диски выполняют несимметричными, искривленными не только для лучшей компоновки, но также для использования восстанавливающего эффекта центробежных сил и уменьшения напряжений изгиба. Несимме-

¹ Верхний индекс при σ показывает, к какой поверхности относится напряжение.

тричными относительно меридиональной плоскости делают теплозащитные экраны (дефлекторы дисков). Широкое применение находят тонкие диски, прогибы которых достаточно велики, так что работу растягивающих сил на этих прогибах следует принимать во внимание. Для гибких вращающихся дисков, нагруженных изгибной и растягивающей нагрузками, основные уравнения соответствуют нелинейным уравнениям неравномерно нагретой пологой оболочки при учете больших прогибов, нагруженной осесимметричными изгибающими и растягивающими силами.

В большинстве работ, посвященных теории больших прогибов, рассматриваются оболочки и пластинки постоянной толщины при упругих деформациях. В этих работах использованы вариационные методы (метод Бубнова—Галеркина, метод Ритца и др.) [76, 80, 104]. Для решения при нагрузках различного вида и граничных условиях необходим большой объем вычислений. Разложение функции прогиба в ряд и удержание ограниченного числа членов приводит к потере точности. Для расчета пологой оболочки переменной толщины при произвольной осесимметричной нагрузке следует применять численные методы. В настоящем параграфе алгоритм расчета строится на методе интегральных уравнений. Параметры упругости полагаются переменными, что позволяет в дальнейшем использовать это решение для рассмотрения упругопластического состояния материала диска.

Используем основные гипотезы теории тонких оболочек (гипотезу недеформируемой нормали Кирхгофа, гипотезу «ненадавливания слоев»). Толщину оболочки — диска считаем достаточно малой по сравнению с наружным радиусом. Положение поверхности отсчета осевой координаты z (основной поверхности) оболочки до деформации показано на рис. 2.8 сплошной линией, а после деформации — штриховой. Для угла подъема φ оболочки до деформирования и в деформированном состоянии ($\varphi + \vartheta$) принимаются обычные ограничения

$$\begin{aligned}\sin(\varphi + \vartheta) &\approx \operatorname{tg}(\varphi + \vartheta) \approx \varphi + \vartheta; \\ \cos(\varphi + \vartheta) &\approx \cos \varphi \approx \cos \vartheta \approx 1,\end{aligned}\tag{2.44}$$

где ϑ — изменение угла подъема в результате деформации.

Считая модуль упругости E в общем случае переменным по толщине, определим положение основной поверхности из условия

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z \, dz = 0,\tag{2.45}$$

где δ_1 и δ_2 — расстояние до наружных поверхностей оболочки (рис. 2.9). Определение величины δ_1 указано в § 1 гл. 1.

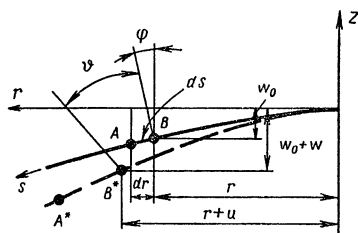


Рис. 2.8

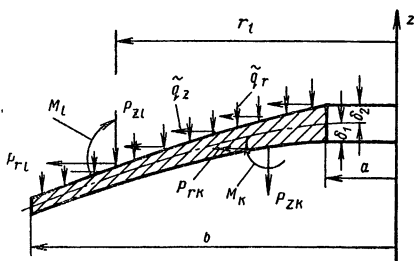


Рис. 2.9

Положение отрезка меридиана срединной поверхности до деформирования AB и после деформирования A^*B^* показано на рис. 2.8. Первоначальный прогиб обозначен w_0 и прогиб в результате деформации w .

При учете квадратичных членов деформация в направлении меридиан

$$\varepsilon_{s0} = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dw}{dr} \frac{dw_0}{dr}. \quad (2.46)$$

Деформация в окружном направлении

$$\varepsilon_{\theta 0} = \frac{u}{r}. \quad (2.47)$$

В случае, если прогибы диска w или первоначальные прогибы w_0 малы по сравнению с толщиной h , то соответствующими квадратичными членами в (2.46) можно пренебречь.

Так как производные от первоначального прогиба w_0 и прогиба w равны углам подъема

$$\frac{dw}{dr} = \vartheta; \quad \frac{dw_0}{dr} = \varphi, \quad (2.48)$$

то выражения для деформаций основной поверхности в направлении меридиана и в окружном имеют вид

$$\varepsilon_{s0} = \frac{du}{dr} + \varphi\vartheta + \frac{1}{2} \vartheta^2; \quad \varepsilon_{\theta 0} = \frac{u}{r}. \quad (2.49)$$

Для полой оболочки в силу (2.44) можно считать

$$dr \approx ds. \quad (2.50)$$

Деформации в слое, отстоящем на расстоянии z от нейтральной поверхности (рис. 2. 9),

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{s0} + z \frac{d\vartheta}{dr}; \quad \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta 0} + z \frac{\vartheta}{r}. \quad (2.51)$$

Уравнения упругости имеют следующий вид:

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \varphi\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta^2 + \mu \frac{u}{r} \right) + \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right] - \frac{E}{1-\mu} \alpha T; \quad (2.52)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} + \mu\varphi\vartheta + \frac{1}{2}\mu\vartheta^2 \right) + \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right] - \frac{E}{1-\mu} \alpha T. \quad (2.53)$$

Обозначив, как и в предыдущих случаях, цилиндрические жесткости на растяжение и изгиб

$$A = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu^2} dz; \quad D = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu^2} z^2 dz, \quad (2.54)$$

температурные функции

$$\frac{1}{A} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu^2} \alpha T dz = T_1;$$

$$\frac{1}{D} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu^2} \alpha T z dz = T_2, \quad (2.55)$$

считая коэффициент Пуассона μ постоянным по толщине, получим из (2.52—2.53)

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{A(1-\mu^2)} (N_\theta - \mu N_s) + T_1; \quad (2.56)$$

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\vartheta^2 + \varphi\vartheta = \frac{1}{A(1-\mu^2)} (N_s - \mu N_\theta) + T_1; \quad (2.57)$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{1}{D(1-\mu^2)} (M_s - \mu M_\theta) + T_2; \quad (2.58)$$

$$\frac{\vartheta}{r} = -\frac{1}{D(1-\mu^2)} (M_\theta - \mu M_s) + T_2, \quad (2.59)$$

где N_s , N_θ , M_s , M_θ — силы и моменты, распределенные по длине окружности радиуса r (рис. 2.10).

Проектируя все силы, действующие на элемент пологой поверхности, на радиальное направление и на ось вращения, получим уравнения равновесия

$$\frac{d(N_sr)}{dr} - N_\theta - \frac{d}{dr} [Qr(\varphi + \vartheta)] + q_r r = 0; \quad (2.60)$$

$$\frac{d(Qr)}{dr} + \frac{d}{dr} [N_s r(\varphi + \vartheta)] + q_z r = 0. \quad (2.61)$$

Условие равновесия моментов

$$\frac{d(M_s r)}{dr} - M_\theta - Qr + m_s r = 0, \quad (2.62)$$

где m_s — момент, распределенный по окружности.

Уравнение (2.61) отличается от обычно используемых в теории гибких оболочек [10, 76] наличием члена $d/dr [Qr (\varphi + \vartheta)]$, выражающего влияние перерезывающих сил на распределение растягивающих сил. Для общности рассмотрим также возможность воздействия на оболочку сил, распределенных вдоль окружности. Учет таких воздействий представляет интерес при рассмотрении гибких наклонных дисков компрессоров и турбин и других элементов [29, 33].

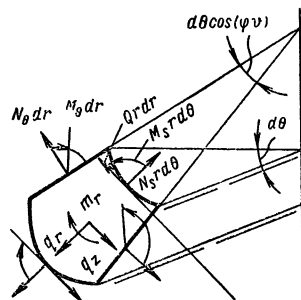


Рис. 2.10

В соответствии с этим в уравнениях (2.60)—(2.62) представим распределенную нагрузку следующим образом:

$$q_r(r) = \tilde{q}_r(r) + \sum_{i=1}^m P_{ri} \delta(r - r_i); \quad (2.63)$$

$$q_z(r) = \tilde{q}_z(r) + \sum_{i=1}^m P_{zi} \delta(r - r_i);$$

$$m_s(r) = \tilde{m}_s(r) + \sum_{i=1}^m M_i \delta(r - r_i). \quad (2.64)$$

Здесь $\tilde{q}_r$, $\tilde{q}_z$, $\tilde{m}_s$ — распределенные силы и моменты, являющиеся непрерывными функциями радиуса; P_{ri} , P_{zi} , M_i — распределенные вдоль окружности радиуса $r = r_i$ радиальные и осевые силы и моменты (см. рис. 2.9); $\delta(r - r_i)$ — дельта-функция [5].

Уравнения совместности деформаций запишем в виде

$$\frac{d}{dr} (\epsilon_{\theta\theta} r) = \epsilon_{s0} - \frac{1}{2} \vartheta^2 - \vartheta \varphi; \quad (2.65)$$

$$\frac{d}{dr} (\vartheta / r \cdot r) = \frac{d\vartheta}{dr}. \quad (2.66)$$

Подставив в (2.65) выражения (2.56)—(2.59), получим

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{N_\theta r}{A(1 - \mu^2)} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{N_\theta r}{A(1 - \mu^2)} = p, \quad (2.67)$$

где

$$p = N_s / (1 - \mu^2) A + \frac{d}{dr} \left[\frac{\mu r N_s}{A(1 - \mu^2)} \right] + T_1 - \frac{d}{dr} [r T_1] - \left(\frac{1}{2} \vartheta^2 + \vartheta \varphi \right). \quad (2.68)$$

Уравнение (2.67) решается относительно $\frac{N_{\theta r}}{A(1-\mu^2)}$, как в § 5:

$$N_{\theta} = \mu N_s + \frac{A(1-\mu^2)}{r\chi} \int_a^r \frac{1}{A} \chi N_s dr + \\ + \frac{A(1-\mu^2)}{r\chi} \int_a^r \left(\frac{1}{2} \vartheta^2 + \varphi \vartheta \right) \chi dr + \psi_{1r} + \frac{A(1-\mu^2)}{r\chi} \cdot u_a. \quad (2.69)$$

Здесь a — начальный радиус оболочки; $\chi(r) = (r/a)$ — безразмерная переменная.

$$\psi_{1r} = A \frac{(1-\mu^2)}{\chi} \left(\int_a^r T_1 (1+\mu) \chi dr - r T_1 \chi \right). \quad (2.70)$$

Из равенств (2.58), (2.66) получим

$$M_{\theta} = \mu M_s + \frac{D(1-\mu^2)}{r\chi} \int_a^r \frac{\chi}{D} M_s dr + \psi_{2r} - \frac{D(1-\mu^2)}{r\chi} \vartheta_a, \quad (2.71)$$

$$\text{где } \psi_{2r} = - \frac{D(1-\mu^2)}{r\chi} \left(\int_a^r T_2 (1+\mu) \chi dr - r T_2 \chi \right). \quad (2.72)$$

Разрешающие уравнения и решение методом последовательных приближений. Проинтегрируем уравнение (2.60) от a до r

$$N_s = \frac{1}{r} \int_a^r N_{\theta} dr + Q(\varphi + \vartheta) - \frac{1}{r} \int_a^r \tilde{q}_r r dr - \\ - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m r_i P_{ri} S(r-r_i) + \frac{a}{r} N_{sa} - \frac{a}{r} Q_a(\varphi_a + \vartheta_a). \quad (2.73)$$

Здесь единичная функция

$$S(r-r_i) = \begin{cases} 0 & r < r_i; \\ 1 & r \geq r_i. \end{cases}$$

Таким образом, поперечные силы, распределенные вдоль окружности радиуса $r = r_i$, учитываются в выражении (2.73) только при $r > r_i$, что и означает символическая запись с помощью $S(r-r_i)$. Из (2.61)

$$Qr = -N_s r(\varphi + \vartheta) + a N_{sa}(\varphi_a + \vartheta_a) + Q_r^*, \quad (2.74)$$

где

$$Q^* = -\frac{1}{r} \int_a^r \tilde{q}_r r dr - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m P_{zi} r_i S(r-r_i) + \frac{a}{r} Q_a. \quad (2.75)$$

Из равенств (2.59) и (2.71) угол поворота выражается через $M_s(r)$ следующим образом:

$$\vartheta(r) = -\frac{1}{\chi} \int_a^r \frac{\chi}{D} M_s dr + \frac{1}{\chi} \vartheta_a - \frac{r}{D(1-\mu^2)} \psi_{2T} + rT_2. \quad (2.76)$$

Подставляя (2.74) в (2.73) и пренебрегая квадратами $(\varphi + \vartheta)^2$ по сравнению с единицей, получим первое разрешающее интегральное уравнение

$$N_s = L_{11}N_s + L_{12}M_s + L_{13}\vartheta^2 + u_a F_{11} + N_{sa}F_{12} + F_{1\varphi} + F_{1\vartheta} + F_{1q} + F_{1T}. \quad (2.77)$$

Здесь

$$L_{11}N_s = \frac{1}{r} \int_a^r \mu N_s dr + \frac{1}{r} \int_a^r \zeta_1 \int_a^r \frac{1}{A} \chi N_s dr_2 dr_1 - \quad (2.78)$$

интегральный оператор, описывающий растяжение пологой оболочки как пластинки;

$$L_{12}M_s = -\frac{1}{r} \int_a^r \zeta_1 \int_a^r \chi \varphi \vartheta dr_2 dr_1, \text{ где } \zeta_1 = \frac{A(1-\mu^2)}{r\chi} - \quad (2.79)$$

оператор, характеризующий влияние деформаций изгиба на силы в срединной поверхности; оператор

$$L_{13}\vartheta^2 = -\frac{1}{r} \int_a^r \zeta_1 \int_a^r \frac{1}{2} \chi \vartheta^2 dr_2 dr_1 \quad (2.80)$$

учитывает большие прогибы.

Функции при начальных параметрах u_a и N_{sa} равны соответственно

$$F_{11} = \frac{1}{r} \int_a^r \zeta_1 dr; \quad F_{12} = \frac{a}{r}. \quad (2.81)$$

Функции $F_{1\varphi}$ и $F_{1\vartheta}$ связаны с учетом влияния перерезывающих сил на распределение растягивающих сил при малых и больших прогибах оболочки и имеют следующий вид:

$$F_{1\varphi} = Q^*\varphi - Q_a \frac{a}{r} \varphi_a; \quad F_{1\vartheta} = Q^*\vartheta - Q_a \frac{a}{r} \vartheta_a. \quad (2.82)$$

Функции нагрузки и температуры

$$F_{1q} = -\frac{1}{r} \int_a^r \tilde{q}_r r dr - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m P_{ri} r_i S(r-r_i); \quad (2.83)$$

$$F_{1T} = \frac{1}{r} \int_a^r \psi_{1T} dr.$$

Второе разрешающее уравнение получается подстановкой в (2.62) выражения для Qr из (2.74) и последующим интегрированием

$$M_s = L_{21}N_s + L_{22}M_s + L_{23}N_s\vartheta + \vartheta_a F_{21} + M_{sa}F_{22} + F_{2\varphi} + F_{2\vartheta} + F_{2q} + F_{2T}. \quad (2.84)$$

В этом уравнении интегральный оператор

$$L_{21}N_s = -\frac{1}{r} \int_a^r \varphi N_s r dr_1 \quad (2.85)$$

связан с учетом эффекта оболочки;

оператор, описывающий изгиб оболочки как пластинки,

$$L_{22}M_s = \frac{1}{r} \int_a^r \mu M_s dr + \frac{1}{r} \int_a^r \zeta_2 \int_a^r \frac{\chi}{D} M_s dr_2 dr_1; \quad (2.86)$$

оператор, характеризующий влияние сил в срединной поверхности на прогибы и учитывающий их только при больших прогибах,

$$L_{23}N_s\vartheta = -\frac{1}{r} \int_a^r r N_s \vartheta dr. \quad (2.87)$$

Функции при начальных параметрах φ_a и M_{sa} равны соответственно

$$F_{21} = \frac{1}{r} \int_a^r \zeta_2 dr; \quad F_{22} = \frac{a}{r}, \quad (2.88)$$

где $\zeta_2 = \frac{D(1-\mu^2)}{r\chi}$;

$F_{2\varphi}$ и $F_{2\vartheta}$ связаны с учетом первоначального прогиба и упругого прогиба:

$$F_{2\varphi} = N_{sa} \frac{a}{r} (r-a) \varphi_a; \quad (2.89)$$

$$F_{2\vartheta} = N_{sa} \frac{a}{r} (r-a) \vartheta_a.$$

Функции нагрузки и температуры

$$F_{2q} = \frac{1}{r} \int_a^r Q^* r dr - \frac{1}{r} \int_a^r \tilde{m}_s r dr - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m M_i r_i S(r - r_i); \quad (2.90)$$

$$F_{2T} = \frac{1}{r} \int_a^r \psi_{2T} dr. \quad (2.91)$$

Уравнения (2.77) и (2.84) представляют собой систему двух нелинейных интегральных уравнений деформации гибкой оболочкой относительно двух неизвестных — силы и момента в цилиндрическом сечении¹ [10, 29, 33]. Отметим следующие частные случаи [33].

1. Если положить $L_{12}M_s = 0$, $L_{13}\vartheta^2 = 0$, $F_{1\varphi} = 0$, $F_{1\vartheta} = 0$, $F_{2\vartheta} = 0$, $L_{21}N_s = 0$, $L_{23}N_s\vartheta = 0$, $F_{2\varphi} = 0$, из (2.77) и (2.84) получим два обычных независимых линейных уравнения растяжения и изгиба круглой пластинки в предположении малых прогибов, совпадающие с уравнениями § 4 и 5.

2. Считая равными нулю только члены с индексом φ , получим уравнения для круглой пластинки с большими прогибами, которые, если пренебречь величиной $F_{1\vartheta}$ и считать модуль упругости и толщину постоянными, являются интегральным вариантом уравнений Кармана [101].

Система уравнений (2.77) и (2.84) решается методом последовательных приближений (см. с. 50). В каждом линейном приближении фундаментальные функции-решения обозначим Φ .

Начальные параметры, входящие в (2.77) и (2.84), определяют из граничных условий. При задании силовых условий иногда удобно представить начальные силовые параметры как скачок внешней нагрузки в начальном сечении. Внешняя нагрузка в этом случае может быть представлена в соответствии с равенствами (2.63)—(2.64)

$$q_r(r) = \tilde{q}_r(r) + \sum_{i=0}^m P_{ri} \delta(r - r_i); \quad q_z(r) = \tilde{q}_z(r) + \sum_{i=0}^m P_{zi} \delta(r - r_i);$$

$$m_s(r) = \tilde{m}_s(r) + \sum_{i=0}^m M_i \delta(r - r_i), \quad (2.92)$$

где $r_a = a$ и P_{r0} , P_{z0} , M_0 — начальные граничные условия.

Для оболочки с центральным отверстием при известных N_{sa} , N_{sb} , M_{sa} , M_{sb} из уравнений (2.77) и (2.84) имеем

$$u_a = \frac{1}{\Phi_{11}(b)} (N_{sb} - N_{sa}\Phi_{12}(b) - \Phi_{1q}(b) - \Phi_{1T}(b) -$$

$$- \Phi_{1\varphi}(b) - \Phi_{1\vartheta}(b) - L_{12}M_s(b) - L_{13}\vartheta^2(b); \quad (2.93)$$

¹ Угол упругого поворота $\vartheta(r)$ выражается через $M_s(r)$ по (2.76).

$$\begin{aligned}
\vartheta_a = & \frac{1}{\Phi_{21}(b)} (M_{sb} - M_{sa}\Phi_{22}(b) - \Phi_{2q}(b) - \Phi_{2T}(b) - \\
& - \Phi_{2\varphi}(b) - \Phi_{2\vartheta}(b) - L_{22}M_s(b) - L_{2\vartheta}(b)); \quad (2.94) \\
& \Phi_{11}(r), \Phi_{12}(r), \Phi_{1q}(r), \Phi_{1T}(r), \Phi_{1\varphi}(r), \Phi_{1\vartheta}(r), \\
& \Phi_{21}(r), \Phi_{22}(r), \Phi_{2q}(r), \Phi_{2T}(r), \Phi_{2\varphi}(r), \Phi_{2\vartheta}(r)
\end{aligned}$$

— фундаментальные функции решения интегральных уравнений (2.77) и (2.84).

При известных u_a , u_b , ϑ_a , ϑ_b из (2.56)—(2.59), (2.69), (2.79), (2.77), (2.84) следует

$$\begin{aligned}
N_{sa} = & \frac{1}{\int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{12}(r) dr} \left[u_b \chi_b - T_{1b} b \chi_b - u_a \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{11}(r) dr - \right. \\
& - \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{1T}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{1q}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{A} L_{12} M_s(r) dr - \\
& - \int_a^b \frac{\chi}{A} L_{1\vartheta}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{1\varphi}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{1\vartheta}(r) dr + \\
& \left. + \int_a^b \left(\frac{1}{2} \vartheta^2 + \varphi \vartheta \right) \chi dr - \frac{\chi b b}{A_b (1 - \mu^2)} \psi_{1T}(b) \right]; \quad (2.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{sa} = & \frac{1}{\int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{22}(r) dr} \left[-\vartheta_b \chi_b - \vartheta_a \left(\int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{21}(r) - 1 \right) + \right. \\
& + \int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{2q}(r) dr + \int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{2T}(r) dr + \int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{2\vartheta}(r) dr + \\
& + \int_a^b \frac{\chi}{D} L_{22} M_s(r) dr + \int_a^b \frac{\chi}{D} L_{12\vartheta}(r) dr + \\
& \left. + \int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{2\varphi}(r) dr + \frac{b \chi b}{D_b (1 - \mu^2)} \psi_{2T}(b) - T_{2b} b \chi_b \right]. \quad (2.96)
\end{aligned}$$

Для оболочки без центрального отверстия принимаем, что на малом радиусе $r = a$ ($a \approx 0,01b$)

$$N_{sa} = N_{\theta a}; \quad (2.97)$$

$$M_{sa} = M_{\theta a}; \quad (2.98)$$

тогда по известным N_{sb} и M_{sb} из (2.56)—(2.59), (2.69), (2.71), (2.77), (2.84) и (2.98) имеем

$$N_{sa} = \frac{1}{\frac{a}{A_a(1+\mu)} \Phi_{11}(b) + \Phi_{12}(b)} [N_{sb} - \Phi_{1q}(b) - \Phi_{1T}(b) - \Phi_{1\varphi}(b) - \Phi_{1\theta}(b) - L_{12}M_s(b) - L_{13}\vartheta^2(b) - T_{1a}a\Phi_{11}(b)]; \quad (2.99)$$

$$u_a = \frac{a}{A_a(1+\mu)} N_{sa} + T_{1a}a; \quad (2.100)$$

$$M_{sa} = \frac{1}{\frac{a}{D(1+\mu)} \Phi_{21}(b) + \Phi_{22}(b)} [M_{sb} - \Phi_{2q}(b) - \Phi_{2T}(b) - \Phi_{2\varphi}(b) - \Phi_{2\theta}(b) - L_{22}M_s(b) - L_{2\theta}(b) - T_{2a}a\Phi_{21}(b)]; \quad (2.101)$$

$$\vartheta_a = \frac{a}{D_a(1+\mu)} M_{sa} + T_{2a}a. \quad (2.102)$$

Если известны u_b и ϑ_b ,

$$\begin{aligned} N_{sa} = & \frac{1}{\frac{a}{A_a(1+\mu)} \left(\int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{11}(r) dr + 1 \right) + \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{12}(r) dr} \times \\ & \times \left[u_b \chi_b - T_{1a}a \left(\int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{11}(r) dr + 1 \right) - \right. \\ & - \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{1q}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{1T}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{A} L_{12}M_s(r) dr - \\ & - \int_a^b \frac{\chi}{A} L_{13}\vartheta^2(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{1\varphi}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{A} \Phi_{1\theta}(r) dr + \\ & \left. + \int_a^b \left(\frac{1}{2} \vartheta^2 + \varphi\vartheta \right) \chi dr - T_{1b}b\chi_b \right]; \quad (2.103) \end{aligned}$$

u_a определяют по (2.100)

$$M_{sa} = \frac{1}{\frac{a}{D_a(1+\mu)} \left(\int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{21} dr - 1 \right) + \int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{22}(r) dr} \times \\ \times \left[\vartheta_b \chi_b + T_{2a} a \left(\int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{21}(r) dr - 1 \right) - \right. \\ \left. - \int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{2q}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{2T}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{D} L_{22} M_s(r) dr - \right. \\ \left. - \int_a^b \frac{\chi}{D} L_{2\vartheta}(r) dr - \int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{2\varphi}(r) dr - \right. \\ \left. - \int_a^b \frac{\chi}{D} \Phi_{2\vartheta}(r) dr - T_{2b} b \chi_b \right]; \quad (2.104)$$

ϑ_a определяют по (2.102).

Система интегральных уравнений (2.77) и (2.84) является нелинейной, в связи с чем прямое ее решение затруднительно. Для решения можно использовать метод последовательных приближений.

В первом приближении рассмотрим задачу растяжения жесткой оболочки без учета влияния изгиба. При этом члены L_{12} , M_s , $L_{1\vartheta}$, $F_{1\vartheta}$ в (2.77) положим равными нулю и в первом приближении решим уравнение вида

$$N_{s(1)} = L_{11} N_s + u_a F_{11} + N_{sa} F_{12} + F_{1\varphi} + F_{1q} + F_{1T}. \quad (2.105)$$

Для его решения используем метод последовательных приближений, описанный в § 4. Полученное значение $N_{s(1)}(r)$ используем как параметр при получении первого приближения для $M_{s(1)}(r)$ из (2.84).

Во втором приближении решаем полное уравнение (2.77), причем полагаем, что $M_s(r) = M_{s(1)}(r)$ и $\vartheta(r) = \vartheta_{(1)}(r)$ определены в первом приближении из (2.84), и находим новое значение $N_{s(2)}(r)$, которое подставляем в (2.84) для нахождения $M_{s(2)}(r)$. Частным случаем является решение для слабоизогнутой пластинки с учетом влияния растягивающих сил в срединной поверхности на изгиб. В этом случае (2.77) и (2.84) имеют вид

$$N_s = L_{11} N_s + u_a F_{11} + N_{sa} F_{12} + F_{1\varphi} + F_{1q} + F_{1T}; \quad (2.106)$$

$$M_s = L_{21} N_s + L_{22} M_s + \vartheta_a F_{21} + M_{sa} F_{22} + F_{2\varphi} + F_{2q} + F_{2T} \quad (2.107)$$

и решаются как линейные. Это решение является первым приближением для гибкой пологой оболочки.

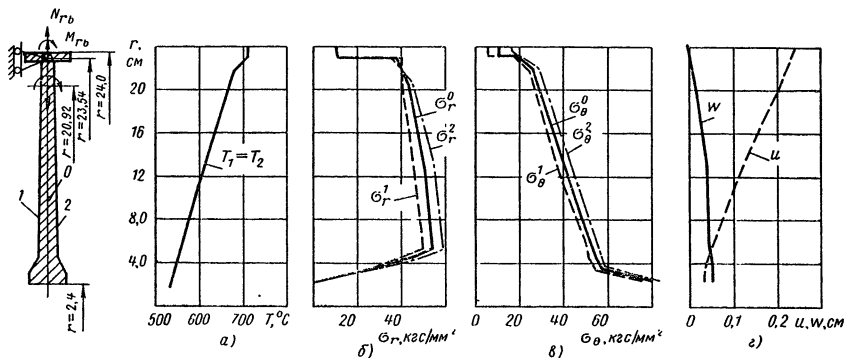


Рис. 2.11

Ниже даны примеры расчета дисков, проведенных при использовании программы, составленной на основе описанного алгоритма. Линейные и нелинейные решения для пластинок и оболочек, полученные с помощью этой программы, приведены в работах [29, 33].

В приложении 2 приведен один из вариантов программы, который позволяет осуществить расчет на растяжение и изгиб жестких дисков, искривленных дисков, учесть восстанавливающий эффект растягивающих сил. Программа составлена на основании алгоритма, изложенного в § 6. В реализованном в программе алгоритме пренебрегаем нелинейными квадратичными членами φ^2 и $\frac{1}{2}\vartheta^2$ в выражении для деформаций (2.53); в уравнениях равновесия (2.61)—(2.63) нелинейность сохраняется только учетом влияния растягивающих сил на изгиб, а членом $\frac{d}{dr} [Qr (\varphi + \vartheta)]$ пренебрегаем. Программа позволяет проводить расчет диска на изгиб при упругом поведении материала и упругопластический расчет. Алгоритм упругопластического расчета методом переменных параметров упругости рассмотрен в § 8. Приведенные в примерах этого параграфа результаты получены при упругом расчете.

Пример 2.1. Рассмотрим расчет диска газовой турбины. Результаты расчета диска без учета больших прогибов от растягивающих сил и изгиба приведены в примере 2.2. На рис. 2.6 и 2.7 показаны напряжения растяжения в диске от действия центробежных сил, растягивающей нагрузки N_{rb} на наружном контуре и неравномерного нагрева вдоль радиуса. Суммарные напряжения с учетом изгиба от действия распределенной поперечной нагрузки $q_z(r)$ и неравномерного нагрева по толщине также соответственно показаны на рис. 2.6 и 2.7. В данном случае уравнения (2.77) и (2.84) решаются как линейные; при этом полагается $L_{12}M_s = 0$, $L_{13}\vartheta^2 = 0$, $F_{1\varphi} = 0$, $F_{1\vartheta} = 0$, $F_{21}N_s = 0$, $L_{23}N_s\vartheta = 0$, $F_{2\varphi} = 0$, что соответствует случаю 1 (см. стр. 47).

Напряжения изгиба в этом же диске от действия сил и моментов, приложенных вдоль окружностей с соответствующими радиусами (табл. 2.3), а также центробежных сил и переменной по радиусу температуры (рис. 2.11, а) приведены на рис. 2.11.

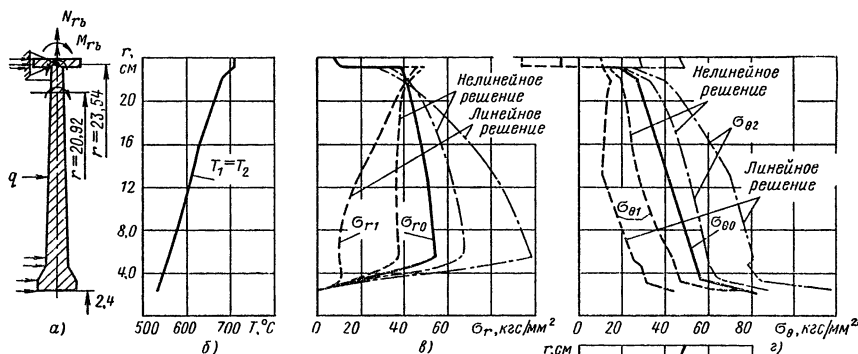


Рис. 2.12

Напряжения растяжения в срединной плоскости диска σ_r^0 и σ_θ^0 показаны на рис. 2.11, б и в сплошными линиями; суммарные напряжения растяжения и изгиба на поверхностях 1 и 2 диска показаны штриховыми и штрихпунктирными линиями соответственно. Радиальные перемещения и прогибы в сечениях диска приведены на рис. 2.11, г.

Напряжения в диске (рис. 2.12, а) при одновременном действии всех нагрузок (распределенных поперечных сил, распределенных вдоль окружностей радиальных и перерезывающих сил и моментов) и неравномерном нагреве по радиусу (рис. 2.12, б) показаны на рис. 2.12, в и г. Уравнения растяжения и изгиба решались как линейные, и все члены, связанные с большими прогибами и влиянием растягивающих напряжений на изгиб, полагались равными нулю (линейное решение). Результаты расчета диска с учетом влияния растягивающих сил на изгиб (восстанавливающего эффекта) и с учетом нелинейных членов уравнений (2.77) и (2.84) показаны на этом же рисунке (нелинейное решение). Учет работы растягивающих сил на упругих прогибах меняет картину напряженного состояния. Расчет диска как жесткого обуславливает в этом случае большие напряжения изгиба и большие прогибы (рис. 2.12, д).

2.3. Силы и моменты, действующие на диск

r , CM	N_s	Q	M_s , KGC
	KGC/CM		
20,92	—67,20	—61,60	177,0
23,54	168,7	0	—101,7
24,00	4250	—27,70	97,00

§ 7. Общий случай изгиба дисков

В некоторых случаях может встретиться неосесимметричное нагружение диска переменным в окружном направлении полем температур или силами, изменяющимися вдоль дуги окружности.

Неосесимметричный изгиб имеет место при гироскопических нагрузках на вращающихся дисках.

Основные уравнения. На рис. 2.13 показана система координат, принятая при рассмотрении изгиба. Силы, действующие на диск, зависят от координат r и θ . Температурное поле диска предполагаем функцией координат r и θ и линейно меняющимся по толщине диска. Однако изменение температуры по толщине и по углу θ считается достаточно малым, так что параметры упругости E и μ , а также коэффициент линейного расширения α считаем постоянным.

Нормаль к срединной плоскости в результате деформации наклонена в радиальном направлении на угол φ и в окружном направлении на угол ψ . Прогиб $w(r, \theta)$ считаем положительным, если он совпадает с положительным направлением оси z .

Имеем

$$\varphi = -\frac{\partial w}{\partial r}; \quad \psi = -\frac{\partial w}{r \partial \theta}. \quad (2.108)$$

Перемещения некоторой точки, отстоящей от срединной плоскости на расстоянии z , будут равны:

в радиальном направлении (направлении r)

$$u = \varphi z = -z \frac{\partial w}{\partial r}; \quad (2.109)$$

в окружном направлении (направлении θ)

$$v = \psi z = -z \frac{\partial w}{r \partial \theta}. \quad (2.110)$$

Относительные деформации в слое, отстоящем на расстоянии z от срединной плоскости, определяем по формулам для составляющих деформаций в цилиндрических координатах [104]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (2.111)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad (2.112)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (2.113)$$

Здесь ε_r , ε_θ — деформации в радиальном и окружном направлениях; $\varepsilon_{r\theta}$ — угол сдвига между указанными направлениями.

Подставив u и v из (2.109) и (2.110), получим

$$\varepsilon_r = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad (2.114)$$

$$\varepsilon_\theta = -z \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right); \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\theta} &= -z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] = \\ &= -2z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.116)$$

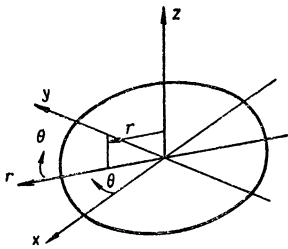


Рис. 2.13

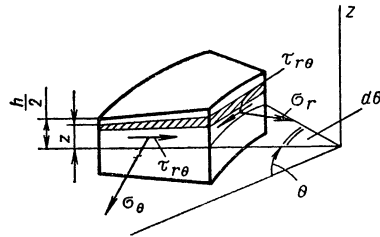


Рис. 2.14

Деформации ε_r , ε_θ , $\varepsilon_{r\theta}$ связаны с напряжениями в рассматриваемом слое (рис. 2.14) по закону Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta) + \alpha T; \quad (2.117)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r) + \alpha T; \quad (2.118)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta}. \quad (2.119)$$

Напряжениями σ_z для тонкого диска можно пренебречь. Из (2.117)—(2.119) получим

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta] - \frac{\alpha T E}{1-\mu}; \quad (2.120)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r] - \frac{\alpha T E}{1-\mu}; \quad (2.121)$$

$$\tau_{r\theta} = G \varepsilon_{r\theta}. \quad (2.122)$$

Подставив ε_r , ε_θ и $\varepsilon_{r\theta}$ из (2.114)—(2.116), находим

$$\sigma_r = -z \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] - \frac{\alpha T E}{1-\mu}; \quad (2.123)$$

$$\sigma_\theta = -z \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] - \frac{\alpha T E}{1-\mu}; \quad (2.124)$$

$$\tau_{r\theta} = -z \frac{E}{1+\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (2.125)$$

Изгибающие и крутящий моменты в сечении на единицу длины будут равны (рис. 2.15)

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz; \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz; \quad M_{r\theta} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} z dz. \quad (2.126)$$

Подставив в (2.126) σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ из (2.123)—(2.125), получим

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] - (1+\mu) \frac{\alpha \Delta T D}{h}; \quad (2.127)$$

$$M_{\theta} = -D \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] - (1 + \mu) \frac{\alpha \Delta T D}{h}; \quad (2.128)$$

$$M_{r\theta} = D(1 - \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = D(1 - \mu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \quad (2.129)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$ — «жесткость на изгиб»; ΔT — разность температур по толщине (распределение температур предполагается линейным).

Силовые факторы, действующие на элемент диска¹, изображены на рис. 2.15. Так как напряжения изгиба σ_r , σ_{θ} и $\tau_{r\theta}$ распределяются линейно по толщине диска, то

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} z; \quad \sigma_{\theta} = \frac{12M_{\theta}}{h^3} z; \quad \tau_{r\theta} = \frac{12M_{r\theta}}{h^3} z. \quad (2.130)$$

Положительные направления для векторов напряжений и направления действия моментов показаны на рис. 2.14 и рис. 2.15.

При $z = \pm h/2$ наибольшие напряжения

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2}; \quad \sigma_{\theta} = \frac{6M_{\theta}}{h^2}; \quad \tau_{r\theta} = \frac{6M_{r\theta}}{h^2}. \quad (2.131)$$

Уравнения равновесия для моментов в проекциях на радиальное и окружное направления соответственно, а также для перерезывающих сил представим в следующем виде:

$$\frac{\partial (M_{r\theta} r)}{\partial r} + M_{r\theta} - \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta} r = 0; \quad (2.132)$$

$$\frac{\partial (M_r r)}{\partial r} - M_{\theta} - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + Q_r r = 0; \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial (Q_r r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} + q r = 0. \quad (2.134)$$

Подставив Q_{θ} и $Q_r r$ из (2.132) и (2.133) в (2.134), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (M_r r)}{\partial r^2} - \frac{\partial M_{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right) - \\ & - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 M_{\theta}}{\partial \theta^2} \right) - \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = q r. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Введем понятие приведенной перерезывающей силы V_r (рис. 2.16), заменив по Кирхгофу действие крутящих моментов

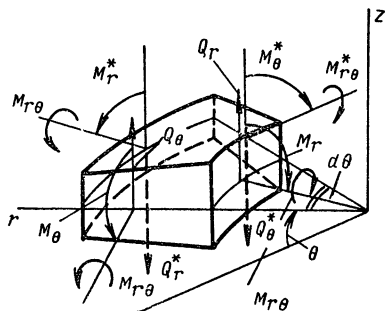


Рис. 2.15

¹ На рис. 2.15 звездочкой отмечены силовые факторы с учетом приращения.

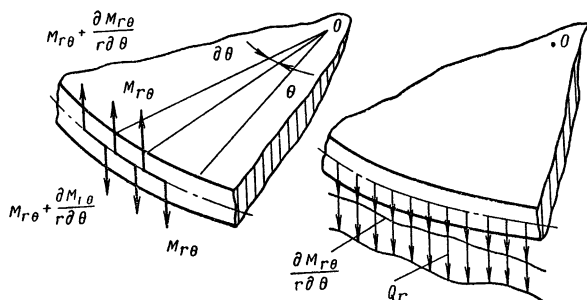


Рис. 2.16

в цилиндрическом сечении статически эквивалентными перерезывающими силами $\frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta}$:

$$V_r = Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} \quad (2.136)$$

или, учитывая равенство (2.133),

$$V_r = \frac{1}{r} \left(M_\theta + 2 \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial (M_{rr})}{\partial r} \right). \quad (2.137)$$

Проинтегрировав уравнение (2.135) дважды в пределах от r до b , получим

$$\begin{aligned} M_r = & -\frac{1}{r} \int_r^b \left(M_\theta + 2 \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right) dr_1 + \\ & + \frac{1}{r} \int_r^b \int_{r_1}^b \frac{1}{r_2} \left(2 \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} \right) dr_2 dr_1 + \frac{1}{r} \int_r^b \int_{r_1}^b q r_2 dr_2 dr_1 + \\ & + V_{rb} \frac{b}{r} (b-r) + \frac{b}{r} M_{rb}, \end{aligned} \quad (2.138)$$

где
$$V_{rb} = \frac{1}{b} \left(M_\theta + 2 \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial (M_{rr})}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} \quad (2.139)$$

представляет собой полную перерезывающую силу на наружном контуре. Уравнение (2.138) — уравнение равновесия в интегральной форме. Внося в (2.135) M_r , M_θ и $M_{r\theta}$ из (2.127)—(2.129), после преобразований получим

$$\begin{aligned} DV^4 w + \frac{dD}{dr} \left[2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2+\mu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right] + \\ + \frac{d^2 D}{dr^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = -q - \nabla^2 \Theta. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Уравнение (2.140) — основное дифференциальное уравнение изгиба диска. В этом уравнении $\nabla^4 w$ — бигармонический оператор в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned}\nabla^4 w &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \\ &+ \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2}; \quad (2.141) \\ \nabla^2 \Theta &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}; \\ \Theta &= (1 + \mu) \frac{\alpha \Delta T}{h} D.\end{aligned}$$

Уравнение (2.140) справедливо при переменных параметрах упругости вдоль радиуса, однако величины E , μ и α предполагаются постоянными по толщине диска, а температура линейно изменяющейся по толщине диска. Поперечные нагрузки на диск могут быть произвольными.

Если определена функция $w(r, \theta)$, удовлетворяющая уравнению (2.140) и граничным условиям, то изгибающий и крутящий моменты определяют согласно (2.127)—(2.129), а перерезывающие силы в сечениях

$$\begin{aligned}Q_r &= D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + \frac{dD}{dr} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial \Theta}{\partial r}; \\ Q_\theta &= D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) + \frac{1-\mu}{r} \frac{dD}{dr} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}.\end{aligned} \quad (2.142)$$

Произвольную нагрузку $q(r, \theta)$ на срединную плоскость диска можно представить в виде ряда Фурье по переменной θ :

$$q(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(r) \cos n\theta + \psi_n(r) \sin n\theta]. \quad (2.143)$$

Коэффициенты ряда определяются равенствами

$$\begin{aligned}f_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \theta) d\theta; \\ f_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \cos n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty); \\ \psi_n(r) &= 0; \quad \psi_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \sin n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty).\end{aligned} \quad (2.144)$$

Аналогичным образом может быть представлена функция $\Delta T(r, \theta)$. Согласно принципу независимости действия сил, справедливому для линейных упругих систем, действие каждой «элементарной нагрузки» можно рассматривать независимо от других. Также

можно определять раздельно напряжения от внешних сил и температурные напряжения.

В дальнейшем наиболее важным случаем будет действие на диск внешней поперечной нагрузки

$$q(r, \theta) = q_n(r) \cos n\theta. \quad (2.145)$$

Аналогично решается задача и при $q(r, \theta) = \psi_n(r) \sin n\theta$. Решение рассматриваемой задачи позволяет охватить и общий случай, когда $q(r, \theta)$ выражается рядом (2.143).

В основное дифференциальное уравнение (2.140) относительно w входят только четные производные по θ , поэтому можно установить общий вид его решения при $q(r, \theta)$ по (2.145)

$$w(r, \theta) = w(r) \cos n\theta. \quad (2.146)$$

Подставляя (2.146) в основное уравнение, получим дифференциальное уравнение 4-го порядка с переменными коэффициентами.

Из (2.146), (2.127)—(2.129) и (2.142) следует, что силовые факторы в сечениях диска в этом случае могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_r(r, \theta) &= M_r(r) \cos n\theta; & M_\theta(r, \theta) &= M_\theta(r) \cos n\theta; \\ M_{r\theta}(r, \theta) &= M_{r\theta}(r) \sin n\theta; & V_r(r, \theta) &= V_r(r) \cos n\theta. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Таким образом, задача сводится к определению «амплитудных» значений силовых факторов $[M_r(r), M_\theta(r)$ и т. п.], зависящих только от радиуса.

Краевые условия. При расчете диска в случае неосесимметричного изгиба могут быть различные варианты граничных условий. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся. В случае свободного контура (при отсутствии опирания и внешних сил)

$M_{rb} = 0, V_{rb} = 0$ при $r = b$

или $M_{ra} = 0, V_{ra} = 0$ при $r = a$.

При свободном опирании на контуре (например, при $r = a$) $w_a = 0, M_{ra} = 0$.

При заделке $w_a = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_a = 0$ при $r = a$

или $w_b = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_b = 0$ при $r = b$.

В случае приложения поперечных сил P_j в нескольких точках по контуру, например $r = b$, интенсивность сил $Q(\theta)$ в некоторой точке контура, определяемой углом θ , равна

$$V_{rb}(\theta) = \sum_1^j \frac{P_j}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta_j \right),$$

где $\theta_j = \theta - \gamma_j$ — угол, определяющий положение силы P_j (рис. 2.17).

Расчет диска при действии гироскопических сил. Пусть диск вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω и, кроме того,

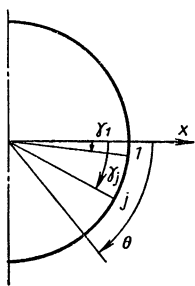


Рис. 2.17

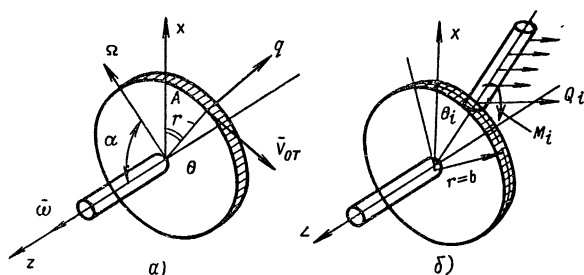


Рис. 2.18

вся система вращается с угловой скоростью Ω . Ось x расположена в плоскости, проходящей через векторы ω и Ω (рис. 2.18, а). Силы инерции, связанные с относительным движением, расположены в плоскости диска и учитываются при расчете диска на растяжение.

Ускорениями в переносном движении можно пренебречь, так как Ω обычно мало (0,5—3 рад/с). Гироскопические силы, связанные с кориоллисовым ускорением, действующим на элемент массы диска, $j = 2 [\bar{\Omega}, \bar{V}_{от}]$ вызывают появление сил, перпендикулярных плоскости диска, $q = 2\Omega \sin \alpha \omega r \cos \theta \rho h$, где ρ — плотность материала диска; h — толщина диска. Значение q будет наибольшим при $\alpha = \pi/2$. В этом случае $q = 2\rho\Omega\omega hr \cos \theta$.

В результате действия гироскопических сил для облопаченного диска от i -й лопатки на обод действует перерезывающая сила (рис. 2.18, б)

$$Q_i = 2\rho\Omega\omega \cos \theta_i \int_b^R F(r) dr \quad (2.148)$$

и изгибающий момент

$$M_i = 2\rho\Omega\omega \cos \theta_i \int_b^R F(r) r (r - b) dr, \quad (2.149)$$

где $F(r)$ — площадь поперечного сечения лопатки на радиусе r ; b — внешний радиус диска; R — внешний радиус лопатки.

Так как наружный радиус диска принимают по основанию впадин замков, то замочные части лопатки и диска считают продолжением профильной части лопатки. При большом числе лопаток можно считать, что они вызывают равномерно распределенные нагрузки на ободе диска.

Так как перерезывающие силы лопаток создают полную перерезывающую силу на ободе, то

$$V_{rb}(\theta) = \frac{Q_i z}{2\pi b} = \frac{z}{\pi} \rho\Omega\omega \frac{1}{b} \int_b^R F(r) r dr \cos \theta, \quad (2.150)$$

где z — число лопаток.

Изгибающий момент на единицу длины обода

$$M_{rb}(b, \theta) = \frac{M_{iz}}{2\pi b} = \frac{z}{\pi} \rho \Omega \omega \frac{1}{b} \int_b^R F(r) r (r - b) dr \cos \theta. \quad (2.151)$$

Выражения представим так:

$$q(r, \theta) = q(r) \cos \theta; \quad V_{rb}(\theta) = V_{rb} \cos \theta; \quad M_{rb}(\theta) = M_{rb} \cos \theta, \quad (2.152)$$

где
$$q(r) = 2\rho\Omega\omega hr; \quad V_{rb} = \frac{z}{\pi} \rho \Omega \omega \frac{1}{b} \int_b^R F(r) r dr;$$

$$M_{rb} = \frac{z}{\pi} \rho \Omega \omega \frac{1}{b} \int_b^R F(r) r (r - b) dr.$$

Так как диск вращается с угловой скоростью ω , то указанные нагрузки вызывают переменные напряжения в диске, изменяющиеся с угловой частотой ω .

Проводя статический расчет на изгиб, т. е. предполагая, что векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}$ не изменяют своего положения в пространстве, определяют амплитуды этих напряжений. В этом случае считаем, что диск нагружен распределенной нагрузкой $q(r, \theta)$ и контурными силами $V_{rb}(\theta)$ и $M_{rb}(\theta)$, неподвижными в пространстве.

В некоторых частных случаях уравнение (2.140) может иметь точное решение [105]. Для диска постоянной толщины при рассмотрении квазистатического нагружения гироскопическими силами уравнение (2.140) будет иметь следующий вид:

$$\nabla^4 w = -\frac{2\rho\Omega\omega h}{D} r \cos \theta. \quad (2.153)$$

Решение этого уравнения представим в форме

$$w(r, \theta) = f(r) \cos \theta. \quad (2.154)$$

Тогда для функции $f(r)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{3}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{3}{r^4} f = -r \frac{2\rho\Omega\omega h}{D}. \quad (2.155)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано численно или, так как оно принадлежит к уравнениям типа Эйлера, может быть приведено подстановкой $r = e^\xi$ к уравнению с постоянными коэффициентами и с помощью достаточно громоздких выкладок решено точно.

Учитывая равенства

$$\frac{df}{dr} = \frac{df}{d\xi} e^{-\xi};$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \left(\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{df}{d\xi} \right) e^{-2\xi}; \quad \frac{d^3 f}{dr^3} = \left(\frac{d^3 f}{d\xi^3} - 3 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + 2 \frac{df}{d\xi} \right) e^{-3\xi};$$

$$\frac{d^4 f}{dr^4} = \left(\frac{d^4 f}{d\xi^4} - 6 \frac{d^3 f}{d\xi^3} + 11 \frac{d^2 f}{d\xi^2} - 6 \frac{df}{d\xi} \right) e^{-4\xi}, \quad (2.156)$$

из уравнения (2.155) получим

$$\frac{d^4 f}{d\xi^4} - 4 \frac{d^3 f}{d\xi^3} + 2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + 4 \frac{df}{d\xi} - 3f = -\frac{2\rho\Omega\omega h}{D} e^{5\xi}. \quad (2.157)$$

Решение ищем в виде

$$f(\xi) = ce^{\lambda\xi}. \quad (2.158)$$

Дальнейший ход решения не вызывает принципиальных затруднений.

На рис. 2.19 показаны напряжения в диске постоянной толщины, заделанном по контуру внутреннего отверстия ($r = a = 4$ см) и свободного на наружном контуре ($r = b = 20$ см) толщиной $h = 2$ см. Угловые скорости соответственно равны $\omega = 1500$ рад/с и $\Omega = 3$ рад/с. Плотность материала диска $\rho = 8 \cdot 10^{-6}$ кгс·с²/см⁴.

С учетом граничных условий из точного решения определяем, что максимальными являюся радиальные напряжения на внутреннем контуре, равные

$$\sigma_{\max} = \sigma_{r \max} = \frac{6\rho\omega\Omega b^3}{h} K, \quad (2.159)$$

$$\text{где } K = \frac{3\alpha^{-1}(3+\mu) + \kappa[(1-\mu)\kappa^6 + 6\kappa(1+\mu) - 8(2+\mu)]}{12[(3+\mu) + \kappa(1-\mu)]},$$

$\alpha = \frac{a}{b}$ — относительный радиус.

Интегральные уравнения несимметричного изгиба дисков. Представим внешнюю поперечную нагрузку в виде (2.146), а силы в виде (2.147) при соответствующих граничных условиях.

Уравнение равновесия в виде (2.138) с учетом (2.147) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} M_r(r) = & -\frac{2n}{r} \left(\int_r^b M_{r\theta} dr_1 - \int_r^b \int_{r_1}^b \frac{1}{r} M_{r\theta} dr_2 dr_1 \right) - \\ & - \frac{1}{r} \left(\int_r^b M_\theta dr_1 - n^2 \int_r^b \int_{r_1}^b \frac{1}{r} M_\theta dr_2 dr_1 \right) + \\ & + \frac{1}{r} \int_r^b \int_{r_1}^b qr dr_2 dr_1 + V_{rb} \frac{b}{r} (b-r) + M_{rb} \frac{b}{r}. \end{aligned} \quad (2.160)$$

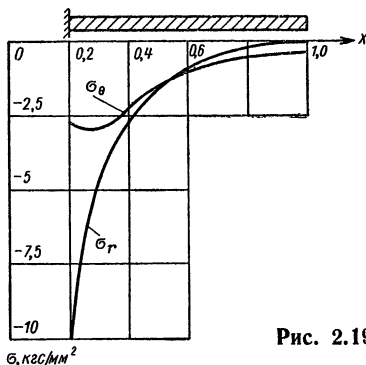


Рис. 2.19

Взяв интегралы, входящие в уравнение (2.160) по частям, получим

$$M_r(r) = -2n \int_r^b \frac{1}{r} M_{r\theta} dr - \frac{1-n^2}{r} \int_r^b M_\theta dr - n^2 \int_r^b \frac{1}{r} M_\theta dr + \\ + \frac{1}{r} \int_r^b \int_{r_1}^b q r dr_2 dr_1 + V_{rb} \frac{b}{r} (b-r) + M_{rb} \frac{b}{r}. \quad (2.161)$$

Приняв за основное неизвестное при составлении уравнения функцию

$$\varphi(r) = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad (2.162)$$

находим

$$\frac{dw}{dr} = \int_a^r \varphi dr + \frac{dw}{dr}(a); \\ w = \int_a^r \int_a^{r_1} \varphi dr_2 dr_1 + (r-a) \frac{dw}{dr}(a) + w(a). \quad (2.163)$$

Применяя интегрирование по частям из уравнений (2.127)–(2.129), с учетом (2.162) и (2.163) получим равенства при $T = \text{const}$

$$M_r(r) = -D \left\{ \varphi(r) + \frac{\mu(1-n^2)}{r} \int_a^r \varphi(r_1) dr_1 + \frac{\mu n^2}{r^2} \int_a^r r_1 \varphi(r_1) dr_1 + \right. \\ \left. + \frac{\mu(1-n^2)}{r} \frac{dw}{dr}(a) + \frac{\mu n^2}{r^2} \left[a \frac{dw}{dr}(a) - w(a) \right] \right\}; \quad (2.164)$$

$$M_\theta(r) = -D \left\{ \mu \varphi(r) + \frac{1-n^2}{r} \int_a^r \varphi(r_1) dr_1 + \frac{n^2}{r^2} \int_a^r r_1 \varphi(r_1) dr_1 + \right. \\ \left. + \frac{1-n^2}{r} \frac{dw}{dr}(a) + \frac{n^2}{r^2} \left[a \frac{dw}{dr}(a) - w(a) \right] \right\}; \quad (2.165)$$

$$M_{r\theta} = -D(1-\mu)n \left\{ \frac{1}{r^2} \int_a^r r_1 \varphi(r_1) dr_1 + \frac{1}{r^2} \left[a \frac{dw}{dr}(a) - w(a) \right] \right\}. \quad (2.166)$$

Подставив соотношения (2.164)–(2.166) в уравнение (2.161), получим интегральное уравнение

$$\varphi = K\varphi + \frac{dw}{dr}(a) F_1(r) + \left[a \frac{dw}{dr}(a) - w(a) \right] F_2(r) - \\ - V_{rb} \frac{b(b-r)}{rD} - M_{rb} \frac{b}{rD} - \frac{1}{rD} \int_r^b \int_{r_1}^b q(r_2) r_2 dr_2 dr_1, \quad (2.167)$$

где интегральная операция

$$\begin{aligned}
 K\varphi = & -\frac{\mu(1-n^2)}{r} \int_a^r \varphi(r_1) dr_1 - \frac{\mu n^2}{r^2} \int_a^r r_1 \varphi(r_1) dr_1 - \\
 & -\frac{2n^2}{D} \int_r^b \frac{D(1-\mu)}{r_1^3} \int_a^{r_1} r_2 \varphi(r_2) dr_2 dr_1 - \frac{1-n^2}{rD} \times \\
 & \times \int_r^b D \left[\mu \varphi(r_1) + \frac{1-n^2}{r_1} \int_a^{r_1} \varphi(r_1) dr_1 + \frac{n^2}{r_1^2} \int_a^{r_1} \varphi(r_2) r_2 dr_2 \right] \times \\
 & \times dr_1 - \frac{n^2}{D} \int_r^b \frac{D}{r_1} \left[\mu \varphi(r_1) + \frac{1-n^2}{r_1} \int_a^{r_1} \varphi(r_2) dr_2 + \right. \\
 & \left. + \frac{n^2}{r_1^2} \int_a^{r_1} r_2 \varphi(r_2) dr_2 \right] dr_1,
 \end{aligned} \tag{2.168}$$

а функции

$$\begin{aligned}
 F_1(r) = & -(1-n^2) \left(\frac{\mu}{r} + \frac{1-n^2}{rD} \int_r^b \frac{D}{r_1} dr_1 + \frac{n^2}{D} \int_r^b \frac{D}{r_1^2} dr_1 \right); \\
 F_2(r) = & -n^2 \left(\frac{\mu}{r^2} + \frac{1-n^2}{rD} \int_r^b \frac{D}{r_1^2} dr_1 + \frac{1}{D} \int_r^b \frac{2(1-\mu)+n^2}{r_1^3} D dr_1 \right).
 \end{aligned} \tag{2.169}$$

Уравнение (2.167) представляет собой краевое интегральное уравнение. В отличие от нормальных уравнений, полученных для симметричного случая, граничные условия считаем известными [10]; они входят в правую часть уравнения, которое имеет вид

$$\varphi = K\varphi + F. \tag{2.170}$$

Уравнение (2.170) решается аналогично нормальным уравнениям методом последовательных приближений по схеме подобной итерации

$$\varphi(i) = \frac{F}{\varphi(i-1) + K\varphi(i-1)} \varphi(i-1).$$

Нулевое приближение $\varphi(0) = F$; первое и второе приближения $\varphi(1) = \frac{F}{F+KF}$; $\varphi(2) = \frac{F}{\varphi(1)+K\varphi(1)}$ и т. д. Уравнение (2.167) при $n=1$ дает решение задачи нагружения диска гироскопическими силами.

2.4. Промежуточные результаты расчета и напряжения в диске постоянной толщины, нагруженном гироскопическим моментом

r, см	$\varphi(0) \cdot 10^6$	$\varphi(1) \cdot 10^6$	$\varphi(2) \cdot 10^6$	σ_r	σ_θ
				кгс/мм ²	
4	—721,2	—424,2	—449,6	10,06	3,02
6	—395,6	—192,4	—190,5	4,704	3,05
8	—233,4	—105,0	—101,2	2,69	2,34
10	—139,2	—58,56	—54,82	1,58	1,73
12	—79,69	—30,78	—27,37	0,893	1,26
14	—41,16	—13,73	—10,98	0,465	0,92
16	—17,16	—4,305	—2,67	0,241	0,08
18	—4,02	—0,4896	—0,1432	0,161	0,05
20	0	0	0	0,129	0,04

Расчет вращающегося диска постоянной толщины, жестко заделанного по внутреннему контуру и нагруженного гироскопическим моментом, приведен в табл. 2.4. Точное решение для этого диска при тех же нагрузках было приведено на рис. 2.19. Достаточная сходимость функции $\varphi(r)$ получена в трех приближениях.

Вариационное уравнение несимметричного изгиба диска. Уравнение (2.140) может быть получено также вариационным методом. Вариационное решение часто оказывается более удобным. Получив выражение для полной энергии диска, нагруженного в общем случае различными силами, можно использовать его для решения различных частных задач (несимметричного изгиба, о колебаниях диска), для применения вариационно-разностного метода решения и т. д. (см. гл. 6) [7].

Потенциальная энергия единицы объема диска

$$P_v = \frac{1}{2E} [\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - 2\mu\sigma_r\sigma_\theta + 2(1 + \mu)\tau_{r\theta}^2]. \quad (2.171)$$

Пусть силы в срединной плоскости отсутствуют, а напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ соответствуют напряжениям изгиба.

Интегрируя по толщине диска и выражая напряжения через моменты M_r , M_θ , $M_{r\theta}$, найдем потенциальную энергию деформации на единицу площади срединной плоскости диска

$$P_F = \frac{1}{2(1 - \mu^2)D} [M_r^2 + M_\theta^2 - 2\mu M_r M_\theta + 2(1 + \mu) M_{r\theta}^2]. \quad (2.172)$$

Потенциальная энергия деформации изгиба диска

$$\Pi = \int_a^b \int_0^{2\pi} \Pi_F r \, d\theta dr. \quad (2.173)$$

Подставив моменты из (2.127) и (2.129) в (2.172), получим

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \times \right. \\ & \times \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \Big\} r d\theta dr. \end{aligned} \quad (2.174)$$

При

$$w(r, \theta) = w(r) \cos n\theta$$

из (2.174) получим

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w(r) \right)^2 - 2(1-\mu) \times \right. \\ & \times \left[\frac{d^2 w(r)}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w(r) \right) \right] \Big\} \cos^2 n\theta r \, d\theta dr + \\ & + \int_a^b \int_0^{2\pi} D(1-\mu) \left(\frac{1}{r^2} w(r) - \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right)^2 n^2 \sin^2 n\theta r \, d\theta dr. \end{aligned}$$

Учитывая равенство

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta \, d\theta = \pi \quad (n \geq 1),$$

находим

$$\begin{aligned} \Pi = & \pi \int_a^b \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w(r) \right)^2 - 2(1-\mu) \times \right. \\ & \times \left[\frac{d^2 w(r)}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w(r) \right) - n^2 \left(\frac{1}{r^2} w(r) - \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right)^2 \right] \Big\} r \, dr. \end{aligned} \quad (2.175)$$

При $n = 0$ (осесимметричная деформация)

$$\Pi = 2\pi \int_a^b \frac{D}{2} \left\{ \left[\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right]^2 - \frac{2(1-\mu)}{r} \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \frac{dw(r)}{dr} \right\} r \, dr. \quad (2.176)$$

Если задана поперечная нагрузка на диск $q(z, \theta)$, то силовая функция этой нагрузки

$$T_1 = - \int_a^b \int_0^{2\pi} q(r, \theta) w(r, \theta) r d\theta dr. \quad (2.177)$$

Знак минус в последней формуле появляется вследствие противоположного направления положительных значений q и w . С учетом косинусоидального закона представления нагрузки и прогибов

$$T_1 = - \pi \int_a^b q(r) w(r) r dr \quad (n \geq 1)$$

и

$$T_1 = - 2\pi \int_a^b q(r) w(r) r dr \quad (n = 0). \quad (2.178)$$

Кроме распределенных по плоскости сил $q(r, \theta)$, следует учесть также контурные силовые факторы. Пусть на наружном контуре радиуса $r = b$ приложены изгибающий момент M_{rb} и полная перерезывающая сила V_{rb} . Потенциал этих сил

$$T_2 = - \int_0^{2\pi} \left(M_{rb}(b, \theta) \frac{\partial w}{\partial r}(b, \theta) + V_{rb}(b, \theta) w(b, \theta) \right) b d\theta \quad (2.179)$$

или, если принять косинусоидальный закон, то

$$T_2 = - \pi \left(M_{rb}(b) \frac{dw}{dr}(b) + V_{rb}(b) w(b) \right) b. \quad (2.180)$$

Если силы действуют также на внутреннем контуре, то

$$T_2 = - \pi \left\{ \left[M_{rb}(b) \frac{dw}{dr}(b) + V_{rb}(b) w(b) \right] b - \left[M_{ra}(a) \frac{dw}{dr}(a) + V_{ra}(a) w(a) \right] a \right\}. \quad (2.181)$$

Полная энергия системы представляет собой сумму

$$\Pi - T = \Pi - (T_1 + T_2).$$

Из условия минимума полной потенциальной энергии системы вариация этого функционала должна равняться нулю и вариационное уравнение изгиба диска будет иметь вид

$$\delta[\Pi - T] = 0. \quad (2.182)$$

Учитывая равенства (2.160), (2.175), (2.181), получим выражение функционала в виде

$$\begin{aligned} \Pi - T = \pi \int_a^b \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w(r) \right)^2 - \right. \right. \\ \left. - 2(1 - \mu) \left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} - \frac{n^2}{r} w(r) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - n^2 \left(\frac{1}{r^2} w(r) - \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right)^2 \right] + q(r) w(r) \right\} r dr + \pi b \left(M_{rb} \frac{dw}{dr}(b) + \right. \\ \left. + V_{rb} w(b) \right) - \pi a \left(M_{ra} \frac{dw}{dr}(a) - V_{ra} w(a) \right). \quad (2.183) \end{aligned}$$

Равенство (2.183) можно использовать и в случае симметричного изгиба ($n = 0$), так как изменение общего множителя (вместо π следует написать 2π) в рассматриваемой задаче несущественно.

Уравнение Эйлера для вариационного уравнения (2.182)

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) = 0.$$

Здесь F — подынтегральная функция в равенстве (2.183), а $w' = dw/dr$ и $w'' = d^2 w/dr^2$. Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением (2.140), если положить в нем $w(r, \theta) = w(r) \cos n\theta$.

Пластичность и ползучесть в дисках

В дисках современных высоконагруженных двигателей напряженно-деформированное состояние изменяется в процессе работы. Это явление связано с возникновением пластических деформаций и ползучестью. Неупругие деформации изменяют размеры дисков, влияют на их долговечность и на сопротивление материала повторным нагрузкам. В некоторых случаях до окончательной механической обработки диски подвергаются предварительному пластическому деформированию на разгонных стендах для уменьшения пластических деформаций, появляющихся в процессе работы. Деформации ползучести влияют на перераспределение напряжений в диске даже в тех случаях, когда диаметр диска увеличивается незначительно. Эти явления необходимо учитывать при расчете и оценке прочности дисков.

Основные уравнения связи между напряжениями и деформациями зависят от конкретных соотношений пластичности и ползучести, положенных в основу расчета. Наиболее разработанными и широко используемыми являются теории пластичности и ползучести деформационного типа, а также теории пластического течения и упрочнения. Основные положения этих теорий достаточно известны [49, 51, 52, 102 и др.]. В гл. 3 приведены только уравнения, необходимые для конкретных расчетов.

§ 8. Деформационные теории пластичности и ползучести.

Численные методы

Основные соотношения деформационной теории пластичности. При активном нагружении можно приближенно полагать, что компоненты напряжений в данной точке диска возрастают пропорционально одному параметру (например, квадрату частоты вращения). В этом случае реализуется так называемое «простое нагружение». Такое представление является достаточно обоснованным и удобным для дисков двигателей, не подвергающихся

многократным нагружениям, а также для предварительных расчетов и инженерных оценок. При простом нагружении различные теории пластичности приводят к одинаковым результатам. Наиболее распространенной является деформационная теория пластичности, опирающаяся на следующие гипотезы: ¹

1. Объемная деформация материала является упругой

$$\varepsilon = \frac{1-2\mu}{E} \sigma + \varepsilon_T. \quad (3.1)$$

Средняя объемная деформация и среднее напряжение соответственно будут следующие:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}); \quad \sigma = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad (3.2)$$

$$(k = 1, 2, 3);$$

компоненты тензоров деформаций и напряжений ε_{kl} и σ_{kl} ; линейное расширение $\varepsilon_T = \alpha T$; два одинаковых нижних индекса означают суммирование по этим индексам.

2. Девиатор деформаций подобен девиатору напряжений

$$e_{kl} = \lambda (\sigma_i, T) S_{kl}, \quad (3.3)$$

где компоненты девиатора $e_{kl} = \varepsilon_{kl} - \delta_{kl}\varepsilon$, $S_{kl} = \sigma_{kl} - \delta_{kl}\sigma$. Символ Кронекера (единичный тензор)

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Скалярный коэффициент, являющийся функцией интенсивности напряжений σ_i и температуры T , удобно представить в виде $\lambda = \lambda(\sigma_i, T) = \frac{\psi(\sigma_i, T)}{2G}$, где $\psi(\sigma_i, T)$ — параметр пластичности; G — модуль сдвига; в упругой области $\psi = 1$.

Основные уравнения деформационной теории пластичности можно записать следующим образом:

$$e_{kl} - \delta_{kl}\varepsilon = \frac{\psi}{2G} (\sigma_{kl} - \delta_{kl}\sigma). \quad (3.4)$$

Из уравнений (3.3) следует, что существует единая зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и деформаций ε_i , которая реализуется в виде $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$. Интенсивность напряжений $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}$. В развернутом виде, проводя суммирование по повторяющимся индексам, получим $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} (S_{11}^2 + S_{22}^2 +$

$+ S_{33}^2 + 2S_{12}^2 + 2S_{23}^2 + 2S_{31}^2)^{1/2}$. Учитывая, что $S_{11} = \sigma_{11} - \sigma$, $S_{31} = \sigma_{31}$, ..., после преобразований получим

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]^{1/2}. \quad (3.5)$$

Интенсивность деформаций $\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} e_{kl} e_{kl}}$ или $\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)]^{1/2}$.

Если для описания деформации сдвига используют обычные угловые деформации $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$, $\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$, $\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$,

$$\text{то} \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2)]^{1/2}. \quad (3.6)$$

Величины σ_i и ε_i с точностью до числовых коэффициентов выражаются вторыми инвариантами соответствующих девиаторов. При двухосном напряженном состоянии в дисках, когда $\sigma_{11} = \sigma_r$, $\sigma_{22} = \sigma_\theta$, $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0$, $\sigma_z = 0$, $\sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = 0$, интенсивность напряжений и деформаций

$$\sigma_i = (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta)^{1/2}$$

$$\text{и} \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 - (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2]^{1/2}. \quad (3.7)$$

С учетом (3.3), (3.4)—(3.6)

$$\varepsilon_i = \frac{\psi}{3G} \sigma_i. \quad (3.8)$$

Компоненты тензора пластической деформации

$$\varepsilon_{kl}^p = e_{kl} - e_{kl}^e = \frac{\psi - 1}{2G} S_{kl}. \quad (3.9)$$

На основании (3.1) интенсивность пластической деформации

$$\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{kl}^p} = \frac{\psi - 1}{3G} \sigma_i, \quad (3.10)$$

и из (3.8) и (3.10)

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^p + \frac{\sigma_i}{3G} = \varepsilon_i^p + \frac{2(1 + \mu)}{3E} \sigma_i. \quad (3.11)$$

При одноосном напряженном состоянии (растяжение σ_0 , ε_0) связь между напряжениями и деформациями характеризуется (рис. 3.1, а) кривой деформирования $\sigma_0 = f(\varepsilon_0)$. Кривая деформирования определяется при соответствующей температуре. Опыты на растяжение (получение диаграммы растяжения) про-

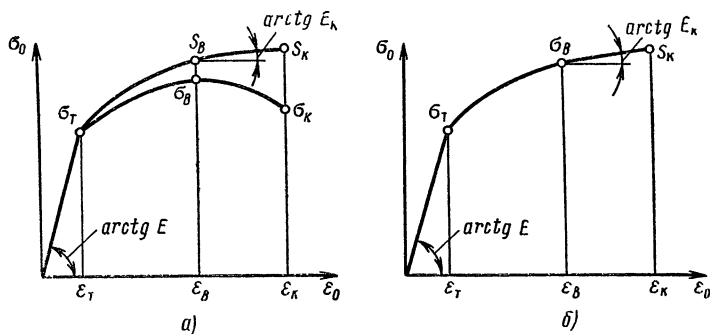


Рис. 3.1

водят при постоянной температуре и тепловое расширение исключают из рассмотрения. Напряжения могут быть представлены в условных или истинных величинах, и диаграмма соответственно называется условной или истинной.

Условная диаграмма относится к номинальным напряжениям и деформациям $\sigma = \frac{P}{F_1}$, $\epsilon_0 = \frac{l - l_1}{l_1}$, где P — растягивающая сила; F_1 , l_1 — первоначальные площадь сечения и полная длина образца.

При построении истинной диаграммы растяжения напряжение относится к фактической площади сечения в данный момент деформирования $\sigma_0 = \frac{P}{F}$. После образования шейки ($\sigma \approx \sigma_b$) при растяжении образцов из пластичных материалов σ_0 относится к поперечному сечению в шейке. При больших деформациях ϵ_0 находят по поперечному сужению ψ .

Деформация растяжения в истинных диаграммах

$$\epsilon_0 = \int_{l_1}^{l_k} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_k}{l_1}, \quad (3.12)$$

где l_k — конечная длина участка образца, для которого определяют деформацию.

На рис. 3.2 показаны условная и истинная диаграммы для сплава ХН77ТЮР, при различных температурах (сплошная и штриховая кривые) от предела текучести до разрушения.

Из (3.12) получаем

$$\epsilon_0 = \ln \frac{1}{1 - \psi}, \quad (3.13)$$

где $\psi = \frac{F_1 - F}{F_1}$ — поперечное сужение.

Для практических расчетов при небольшом уровне пластической деформации (до 1—2%) можно пользоваться условной

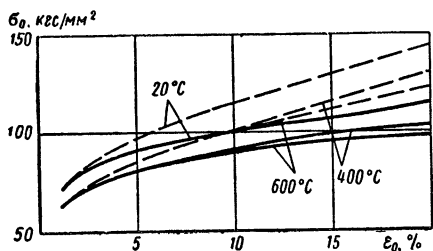


Рис. 3.2

диаграммой, так как на этом участке она практически совпадает с истинной. При значительной пластической деформации, в частности при расчетах несущей способности дисков (см. гл. 4), рекомендуется пользоваться истинной диаграммой.

При построении схематизированной истинной диаграммы от предела прочности

σ_b до разрыва в большинстве случаев можно принимать прямолинейный участок (см. рис. 3.1, б) с наклоном E_k (касательный модуль диаграммы)

$$E_k = \frac{S_k - S_b}{\epsilon_k - \epsilon_b} \text{ или } E_k = \frac{S_b - \sigma_T}{\epsilon_b - \epsilon_T}. \quad (3.14)$$

Здесь $S_b \approx \sigma_b (1 + \epsilon_b)$ — предел прочности в истинных напряжениях; $S_k \approx \frac{\sigma_b}{1 - \psi_k^*}$ — истинное напряжение при разрыве;

соответствующие относительные удлинения ϵ_b и $\epsilon_k \approx \ln \frac{1}{1 - \psi_k^*}$,

ψ_k^* — сужение в шейке при разрушении.

Обозначим секущий модуль диаграммы растяжения

$$E_c = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}. \quad (3.15)$$

Пластическая деформация

$$\epsilon_0^p = \epsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E}. \quad (3.16)$$

Из (3.15) и (3.16)

$$\epsilon_0^p = \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) \sigma_0. \quad (3.17)$$

Интенсивности напряжений и пластической деформации для случая растяжения

$$\sigma_i = \sigma_0; \quad \epsilon_i^p = \epsilon_0^p. \quad (3.18)$$

Интенсивность деформаций из (3.11)

$$\epsilon_i = \epsilon_0^p + \frac{2(1 + \mu)}{3} \frac{\sigma_0}{E} \quad (3.19)$$

или с учетом (3.16)

$$\epsilon_i = \epsilon_0 - \frac{1 - 2\mu}{3} \frac{\sigma_0}{E}. \quad (3.20)$$

Последние зависимости позволяют получить из диаграммы растяжения обобщенную диаграмму деформирования, однако в расчетах более удобно пользоваться обычной диаграммой растяжения, находя эквивалентное значение ϵ_0 из (3.20) при $\sigma_0 = \sigma_i$.

Параметр пластичности может быть получен из (3.10) и (3.17)

$$\psi = 1 + \frac{3}{2(1+\mu)} \left(\frac{E}{E_c} - 1 \right). \quad (3.21)$$

Полагая $\mu = 0,5$, приближенно можно считать

$$\psi \approx \frac{E}{E_c}. \quad (3.22)$$

Численные методы упругопластических расчетов при использовании деформационной теории пластичности. Рассматриваемые методы основаны на сведениях физически нелинейной задачи расчета деталей при упругопластических деформациях к последовательности линейных задач с переменными параметрами упругости или дополнительными деформациями [29, 49]. Эти методы являются удобными для практических расчетов дисков.

Метод переменных параметров упругости. Из (3.1) и (3.4) уравнения деформационной теории могут быть представлены в виде

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{E} \{ (1 + \mu) \psi \sigma_{kl} - [(1 + \mu) \psi - (1 - 2\mu)] \delta_{kl} \sigma \} + \delta_{kl} \epsilon_T \quad (3.23)$$

или с учетом (3.21)

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2E_c} \left\{ \left[3 - (1 - 2\mu) \frac{E_c}{E} \right] \sigma_{kl} - 3 \left[1 - (1 - 2\mu) \frac{E_c}{E} \right] \delta_{kl} \sigma \right\} + \delta_{kl} \epsilon_T. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) можно представить в форме обычных уравнений упругости

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{E^*} [(1 + \mu^*) \sigma_{kl} - 3\mu^* \delta_{kl} \sigma] + \delta_{kl} \epsilon_T, \quad (3.25)$$

где E^* и μ^* — переменные параметры, которые в отличие от упругих параметров E и μ зависят от напряженно-деформированного состояния в точке.

Сравнив (3.23) и (3.25), получим выражения для переменных параметров упругости

$$E^* = \frac{3E}{2(1+\mu)\psi + 1 - 2\mu} \quad (3.26)$$

и

$$\mu^* = \frac{(1+\mu)\psi - 1 + 2\mu}{2(1+\mu)\psi + 1 - 2\mu} \quad (3.27)$$

или, заменив ψ по (3.21) в (3.26) и (3.27), получим

$$E^* = E_c; \quad \mu^* = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2\mu) \frac{E_c}{E} \right]. \quad (3.28)$$

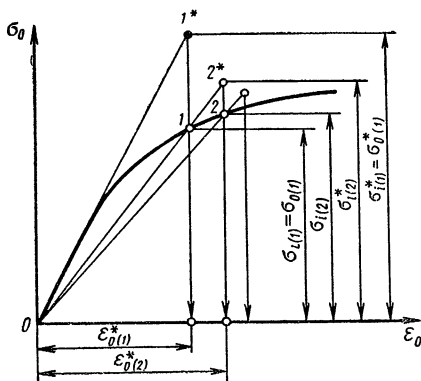


Рис. 3.3

Напомним, что $E_c = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ —

секущий модуль диаграммы растяжения. Уравнения связи между напряжениями и деформациями диска (см. § 3) при использовании метода переменных параметров упругости сохраняют тот же вид¹

$$\epsilon_r = \frac{1}{E^*} (\sigma_r - \mu^* \sigma_\theta) + \alpha T;$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E^*} (\sigma_\theta - \mu^* \sigma_r) + \alpha T. \quad (3.29)$$

Используя (3.29) и диаграмму растяжения, можно произвести упругопластический расчет, применяя процедуру последовательных приближений. Принимаем в первом приближении, что материал деформируется упруго и $E^{*(0)} = E$, $\mu^{*(0)} = \mu$, т. е. модуль упругости и коэффициент Пуассона зависят в первом приближении только от температуры и совпадают с первоначальными упругими значениями. Из решения упругой задачи находим напряжения и деформации $\sigma_r^{*(1)}$, $\sigma_\theta^{*(1)}$, $\epsilon_r^{(1)}$, $\epsilon_\theta^{(1)}$ в каждой точке диска, а интенсивность напряжений $\sigma_{i(1)}^*$ по (3.7). Эта величина изображается на диаграмме растяжения (рис. 3.3), соответствующей температуре в данной точке тела, точкой 1^* . Опустив перпендикуляр на ось деформаций, находим на его пересечении с кривой деформирования в точке 1 секущий модуль $E^* = E_c^{(1)} = E^{(1)}$ первого приближения и напряжение $\sigma_{i(1)} = \sigma_{0(1)}$, соответствующие эквивалентной деформации $\epsilon_{0(1)}^* = \sigma_{i(1)}^*/E^{*(0)}$. Вычисляем первое приближение $\mu^{*(1)} = \mu^{(1)}$ по (3.28). Подставив $E^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$ в расчетные уравнения вместо упругих параметров, получим решение для второго приближения (точка 2^* и 2 на диаграмме) — новые значения $E^{(2)}$ и $\mu^{(2)}$. Дальнейшая процедура последовательных приближений очевидна. Расчет заканчивается, когда секущие модули предыдущего и последующего приближений будут отличаться менее чем на малую наперед заданную величину.

Если принять $\mu = 0,5$, что часто делается в инженерных исследованиях, то расчет упрощается, так как для всех приближений $\mu^{(k)} = 0,5$. В случае переменного температурного поля по радиусу диаграмма деформирования задается для нескольких

¹ При проведении упругопластических расчетов индекс * у параметров часто будем опускать, договорившись, что параметры упругости в этом случае являются функциями напряженно-деформированного состояния.

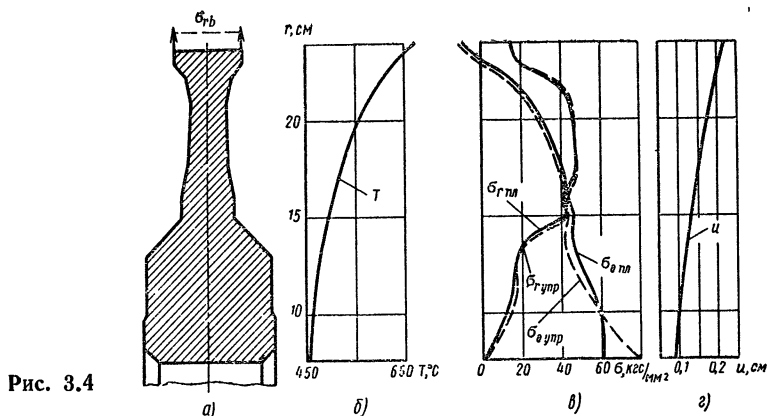


Рис. 3.4

температур, включая максимальную и минимальную. Точки диаграмм, соответствующие промежуточным температурам, находим интерполяцией. Процесс последовательных приближений в методе переменных параметров упругости во всех практических случаях хорошо сходится. Приведенная в приложении программа расчета диска на растяжение позволяет проводить упругопластический расчет на основе метода переменных параметров упругости по вышеизложенному алгоритму.

Пример 3.1. На рис. 3.4, в и г сплошными линиями и также в табл. 3.3 дано распределение напряжений и перемещений в диске, полученных при учете пластических деформаций методом переменных параметров упругости. Расчет этого диска в упругой области дан в примере 1.2. Кривые деформирования материала — напряжения и деформации для некоторых температур приведены в табл. 3.1. Промежуточные значения определяются методом линейной интерполяции. Поперечное сечение диска и распределение температуры показаны на рис. 3.4, а и б. Геометрические характеристики и другие параметры диска приведены в § 4 (пример 1.2). На рис. 3.4, в штриховыми линиями для сравнения показаны напряжения упругого расчета. Учет пластических деформаций может существенно изменить распределение напряжений по сечениям диска. Возникновение пластических деформаций в зоне внутреннего отверстия изменяет также картину перемещений в диске. При упругопластическом расчете

3.1. Напряжения по кривым деформирования σ , кгс/мм²

ε , %	T , °C			ε , %	T , °C		
	20	600	700		20	600	700
0,18	36,00	30,7	27,9	0,48	66,00	58,3	57,15
0,22	43,9	37,5	34,1	0,51	66,5	59,15	57,8
0,26	50,8	44,1	39,95	0,54	67,0	59,6	58,35
0,30	56,2	49,3	44,95	0,57	67,4	60,0	58,80
0,34	60,0	52,95	49,10	0,60	67,6	60,3	59,55
0,38	62,6	55,25	52,5	0,80	68,4	61,8	60,00
0,42	64,35	56,8	55,0	1,00	68,5	62,0	60,00
0,45	65,25	57,75	56,3				

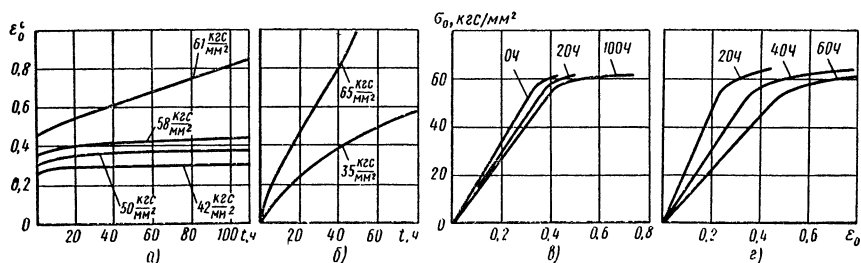


Рис. 3.5

в рассматриваемом примере число приближений $N = 20$ при заданной относительной погрешности совпадения секущего модуля предыдущего и последующего приближений $\delta = 10^{-3}$.

Программа расчета диска на совместное действие растяжения и изгиба, приведенная в приложении 2 к гл. 2, также содержит процедуру упругопластического расчета, составленную на основе метода переменных параметров упругости аналогичным образом. Программа позволяет рассчитывать диски на растяжение и изгиб с учетом действия растягивающих сил на изгиб в упругой и упругопластической области.

Деформационная теория ползучести. Наиболее простой теорией, позволяющей определить напряженное состояние диска, изменяющееся по времени в связи с возникновением деформаций ползучести, является деформационная теория ползучести. В ее основе лежит предположение о связи между деформациями ползучести ϵ_{kl}^c и напряжениями S_{kl} :

$$\epsilon_{kl}^c = \lambda S_{kl}, \quad (3.30)$$

где $\lambda = \lambda(\sigma_i, T, t)$ — скалярный параметр.

Для практических расчетов удобно использовать деформационную теорию ползучести в формулировке Ю.Н. Работнова [89] (теория старения). Основное допущение теории старения состоит в том, что зависимости деформаций ползучести от времени справедливы при меняющихся напряжениях, хотя исходные кривые ползучести получены при постоянных напряжениях.

Обычные кривые ползучести, например, для материала ХН77ТЮР при 600°C (рис. 3.5, а и б) строят в координатах ϵ_0^c, t при различных фиксированных напряжениях и температурах. В соответствии с теорией старения семейство таких кривых может быть представлено в форме кривых растяжения (σ_0, ϵ_0) для различных температуры и времени (рис. 3.5, в и г соответственно) $\epsilon_0 = f(\sigma_0, T, t)$, т. е. в виде изохронных кривых ползучести. Кривые, соответствующие $t = 0$ (нулевому времени), представляют собой диаграмму растяжения. Обобщение на сложное напряженное состояние производится аналогично тому, как это делалось

3.2. Параметры изохронных кривых ползучести

$\varepsilon, \%$	$T, ^\circ\text{C}$			$\varepsilon, \%$	$T, ^\circ\text{C}$		
	20	300	700		20	300	700
0,18	36,0	24,8	24,8	0,48	66,0	59,2	37,6
0,22	43,9	30,8	27,8	0,51	66,5	59,8	38,4
0,26	50,8	36,0	30,0	0,54	67,0	60,2	39,2
0,30	56,2	42,0	31,6	0,57	67,4	60,4	40,0
0,34	60,0	46,2	33,2	0,60	67,6	60,6	41,1
0,38	62,6	51,0	34,4	0,80	68,4	61,2	44,0
0,42	64,4	57,6	35,6	1,00	68,5	61,4	46,0
0,45	65,2	58,4	36,6				

в деформационной теории пластичности — предполагается существование единой поверхности деформирования $F(\sigma_i; \varepsilon_i^e, T, t) = 0$ для каждого значения времени.

Процедура расчета диска на ползучесть по теории старения не отличается от упругопластического расчета методом переменных параметров упругости. В первом приближении проводят расчет в упругой области, находят σ_i в каждой точке диска, по изохронным кривым ползучести определяют секущий модуль $E_s^{(1)} = f(\sigma_i^{(0)})$ первого приближения для каждой точки и $\mu^{(1)}$ и далее проводят обычную процедуру метода переменных параметров, описанную выше.

Пример 3.2. В табл. 3.2 в табличной форме приведены изохронные кривые ползучести, соответствующие длительности работы 300 ч. Напряжения σ кгс/мм² находят на пересечении соответствующих значений $\varepsilon\%$ и $T^\circ\text{C}$.

Диск рассчитывают по той же программе, которая дана в приложении 1 для упругопластического расчета, методом переменных параметров упругости. Напряжения и перемещения в диске при учете ползучести и результаты упругопластического расчета приведены для сравнения в табл. 3.3.

Основной недостаток теории старения, так же как и деформационной теории пластичности, состоит в неучете истории нагружения. Они приспособлены для описания монотонно возрастающего нагружения (силового и теплового) при отсутствии явлений разгрузки. Однако во многих практических задачах расчет по деформационным теориям пластичности и ползучести дает хорошие результаты и вполне пригоден для сравнительной оценки прочности дисков.

Метод дополнительных деформаций. Наряду с методом переменных параметров упругости метод дополнительных деформаций представляет собой удобный прием численного решения задач пластичности и ползучести; использовать его особенно эффективно для задач, имеющих аналитическое упругое решение. Преобразуем (3.4) для деформаций в упругопластическом теле с учетом (3.1) следующим образом:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{\psi}{E} (1 + \mu) (\sigma_{kl} - \delta_{kl} \sigma) + \delta_{kl} \varepsilon. \quad (3.31)$$

3.3. Результаты расчетов

r, см	Расчет с учетом ползучести			Упругопластический расчет		
	σ_r	σ_θ	u, см	σ_r	σ_θ	u, см
	кгс/мм ²			кгс/мм ²		
7,65	0	60,82	0,087013	0	60,82	0,0870132
8,30	3,75	61,09	0,090165	3,75	61,09	0,090165
9,25	8,63	60,61	0,095321	8,63	60,61	0,095321
10,00	11,60	59,19	0,09975	11,60	59,19	0,097499
10,01	11,99	59,28	0,099811	11,99	59,28	0,0998108
11,5	15,88	53,99	0,10928	15,88	53,99	0,10928
13,0	17,72	47,25	0,11949	17,72	47,25	0,119491
13,7	22,65	45,75	0,12453	22,65	45,75	0,124528
14,25	28,29	45,17	0,128699	28,29	45,17	0,128699
15,05	42,44	46,04	0,135302	42,44	46,04	0,13302
16,0	40,09	42,96	0,14364	41,09	42,96	0,143641
17,5	48,13	40,38	0,15745	48,13	40,38	0,157453
19,0	46,71	34,77	0,17210	46,71	34,77	0,172102
21,0	44,54	24,86	0,19273	44,54	24,86	0,192726
22,4	28,35	9,98	0,20767	28,35	9,98	0,207669
22,8	22,38	4,64	0,21194	22,38	4,64	0,21194
23,15	17,57	—1,01	0,21569	17,57	—1,01	0,215695
23,79	15,13	—8,63	0,22276	15,13	—8,63	0,222755

Деформации в упругом теле ε_{kl}^* при тех же значениях напряжений получим из (3.31), положив параметр пластичности $\psi = 1$

$$\varepsilon_{kl}^* = \frac{1}{E} (1 + \mu) (\sigma_{kl} - \delta_{kl} \sigma) + \delta_{kl} \varepsilon. \quad (3.32)$$

Деформации в упругопластическом теле можно представить в виде суммы

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^* + \varepsilon_{kl}^0, \quad (3.33)$$

где ε_{kl}^0 — тензор дополнительных пластических деформаций в упругопластическом теле.

Из (3.33) и (3.32)

$$\varepsilon_{kl}^0 = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) (\varepsilon_{kl} - \delta_{kl} \varepsilon). \quad (3.34)$$

Расчет диска методом дополнительных деформаций. Метод дополнительных деформаций [11, 102] состоит в том, что упругопластическое тело рассматриваем как упругое тело при наличии дополнительных деформаций. Простейший пример таких деформаций — температурные. Пластические деформации рассматриваем как неизвестные дополнительные деформации, определяемые с помощью процедуры последовательных приближений.

Рассмотрим процедуру метода дополнительных деформаций на примере решения задачи растяжения диска. В соответствии

с (3.33) уравнения для деформаций в диске будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{Eh} (N_r - \mu N_\theta) + \alpha T + \varepsilon_r^0, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{Eh} (N_\theta - \mu N_r) + \alpha T + \varepsilon_\theta^0.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Уравнение совместности деформаций аналогично уравнению (1.81)

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r}{Eh} (N_\theta - \mu N_r) + r\alpha T + r\varepsilon_\theta^0 \right] = \frac{1}{Eh} (N_r - \mu N_\theta) + \alpha T + \varepsilon_r^0. \quad (3.36)$$

По аналогии с (1.97)—(1.101) получим

$$\begin{aligned}N_\theta - N_r &= -(1 - \mu) N_r + \frac{A(1 - \mu^2)}{r\chi} \int_a^r \frac{1}{A} \chi N_r dr + \varphi_T + \varphi^0 + \\ &+ \frac{A(1 - \mu^2)}{r\chi} u_a,\end{aligned}\quad (3.37)$$

где функция дополнительных деформаций, имеющая ту же структуру, что и φ_T ,

$$\varphi^0 = \frac{A(1 - \mu^2)}{r\chi} \left[\int_a^r (\varepsilon_r^0 + \mu \varepsilon_\theta^0) \chi dr - r\varepsilon_\theta^0 \chi \right]. \quad (3.38)$$

Интегральное уравнение растяжения диска

$$N_r(r) = LN_r(r) + u_a F_1(r) + N_{ra} F_2(r) + F_q(r) + F^0(r). \quad (3.39)$$

Оно отличается от (1.104) наличием функции дополнительных деформаций $F^0(r) = \int_a^r \frac{1}{r} \varphi^0 dr$. Решение его имеет вид, аналогичный (1.110),

$$N_r = u_a \Phi_1(r) + N_{ra} \Phi_2(r) + \Phi_q(r) + \Phi_T(r) + \Phi^0(r), \quad (3.40)$$

где $\Phi^0(r)$ — фундаментальная функция дополнительных деформаций — частное решение (3.39), определяемое рядом $\Phi_{(j)}^0 = F^0(r) + L F^0(r) + L^2 F^0(r) + \dots + L^{j-1} F^0(r)$.

В первом приближении дополнительные деформации полагаются отсутствующими ($F_1^0(r) = 0$) и решается уравнение (3.39), причем $\Phi_{(1)}^0(r) = 0$. По решению определяют напряжения и деформации первого приближения при условии $\varepsilon_{r(1)}^0 = 0$ и $\varepsilon_{\theta(1)}^0 = 0$. Далее определяют интенсивность деформаций первого приближения

$$\varepsilon_{i(1)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{r(1)} - \varepsilon_{\theta(1)})^2 + (\varepsilon_{\theta(1)} - \varepsilon_{z(1)})^2 + (\varepsilon_{z(1)} - \varepsilon_{r(1)})^2}. \quad (3.41)$$

По диаграмме деформирования

$$\psi_1 = \frac{3}{2(1+\mu)} E \frac{\varepsilon_{i(1)}}{\sigma_{i(1)}}. \quad (3.42)$$

Дополнительные деформации первого приближения найдем из (3.34)

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^0(1) &= \left(1 - \frac{1}{\psi_1}\right) (\varepsilon_r(1) - \varepsilon_{(1)}); & \varepsilon_\theta^0(1) &= \left(1 - \frac{1}{\psi_1}\right) (\varepsilon_\theta(1) - \varepsilon_{(1)}); \\ \varepsilon_z^0(1) &= \left(1 - \frac{1}{\psi_1}\right) (\varepsilon_z(1) - \varepsilon_{(1)}); & \varepsilon_{(1)} &= \frac{1}{3} (\varepsilon_r(1) + \varepsilon_\theta(1) + \varepsilon_z(1)). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Функции дополнительных деформаций определяем в соответствии с (3.37)

$$\varphi_{(2)}^0 = \frac{A(1-\mu^2)}{r\chi} \left[\int_a^r (\varepsilon_r^0(1) + \mu \varepsilon_\theta^0(1)) \chi dr - r \varepsilon_\theta^0(1) \chi \right] \quad (3.44)$$

и находим $F_1^0(r)$.

Частное решение $\Phi_2^0(r)$ для второго приближения вычисляем по (3.40).

С учетом граничных условий и (3.40) определяем силы и деформации второго приближения по (3.35):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(2) &= \frac{1}{Eh} (N_r(2) - \mu N_\theta(2)) + \alpha T + \varepsilon_r^0(1); \\ \varepsilon_\theta(2) &= \frac{1}{Eh} (N_\theta(2) - \mu N_r(2)) + \alpha T + \varepsilon_\theta^0(1); \\ \varepsilon_z(2) &= \frac{1}{Eh} (N_r(2) + N_\theta(2)) + \alpha T + \varepsilon_z^0(1). \end{aligned} \quad (3.45)$$

В дальнейшем процедура расчета повторяется от определения интенсивности деформаций второго приближения до нахождения дополнительных деформаций и полных деформаций третьего приближения и так далее.

Расчет в упругой области проводят один раз и все решения (3.40), кроме $\Phi^0(r)$, определяют только один раз.

Замкнутые решения для дисков постоянной толщины по методу дополнительных деформаций. В тех случаях, когда задача в упругой области имеет точное решение, можно построить точное решение при произвольных дополнительных деформациях.

Для дисков постоянной толщины дифференциальные уравнения растяжения и изгиба с дополнительными деформациями будут иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{A} q_r + \frac{1}{A} \frac{d\zeta_{1T}}{dr} + \frac{1}{A} \frac{dN_r^0}{dr} + \frac{1}{rA} (N_r^0 - N_\theta^0); \quad (3.46)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} = -\frac{Q}{D} + \frac{1}{D} \frac{d\zeta_{2T}}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dM_r^0}{dr} + \frac{1}{rD} (M_r^0 - M_\theta^0). \quad (3.47)$$

Эти уравнения отличаются от обычных уравнений растяжения (1.42) и изгиба (2.31) членами, зависящими от дополнительных деформаций

$$N_r^0 = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r^0 + \mu \varepsilon_\theta^0) dz; \quad N_\theta^0 = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta^0 + \mu \varepsilon_r^0) dz; \quad (3.48)$$

$$M_r = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r^0 + \mu \varepsilon_\theta^0) z dz; \quad M_\theta = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta^0 + \mu \varepsilon_r^0) z dz, \quad (3.49)$$

и величины

$$\zeta_{1T} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu} \alpha T dz; \quad \zeta_{2T} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu} \alpha T z dz. \quad (3.50)$$

Положение основной поверхности выбираем при предположении переменного модуля упругости $E = E(z, r)$ по радиусу и толщине диска [см. условие (2.45)]; коэффициент Пуассона μ принимаем постоянным, не зависящим от координат. Силы связаны с перемещениями следующими выражениями:

$$N_r = A \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) - \zeta_{1T} - N_r^0; \quad (3.51)$$

$$N_\theta = A \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right) - \zeta_{1T} - N_\theta^0;$$

$$M_r = -D \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) + \zeta_{2T} + M_r^0; \quad (3.52)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) + \zeta_{2T} + M_\theta^0,$$

где значения A , D и другие параметры указаны ранее (см. гл. 1).

Из (3.46) и (3.47), аналогично представленному в § 2 и 6, можно получить решения для сил и моментов в сечениях диска в аналитической форме при заданных граничных условиях.

Для дисков без центрального отверстия

$$N_r(r) = N_{rb} + \Phi_{11b} + \Phi_{12b} - \Phi_{11}(r) - \Phi_{12}(r) + \Phi_{17b} - \Phi_{17}(r) + \\ + \Phi_{11b}^0 - \Phi_{11}^0(r) + \Phi_{12b}^0 - \Phi_{12}^0(r) - \Phi_{13b}^0 + \Phi_{13}^0(r); \quad (3.53)$$

$$N_\theta(r) = N_{rb} + \Phi_{11b} + \Phi_{12b} - \Phi_{11}(r) + \Phi_{12}(r) + \Phi_{17b} + \\ + \Phi_{17}(r) - (1-\mu) \zeta_{1T} + \Phi_{11b}^0 - \Phi_{11}^0(r) + \Phi_{12b}^0 - \Phi_{12}^0(r) - \Phi_{13b}^0 + \\ + \Phi_{13}^0(r) + \mu N_r^0 - N_\theta^0;$$

$$M_r(r) = M_{rb} - \Phi_{21b} - \Phi_{22b} + \Phi_{21}(r) + \Phi_{22}(r) - \Phi_{27b} + \\ + \Phi_{27}(r) - \Phi_{21b}^0 + \Phi_{21}^0(r) - \Phi_{22b}^0 + \Phi_{22}^0(r) + \Phi_{23b}^0 - \Phi_{23}^0(r); \quad (3.54)$$

$$M_{\theta}(r) = M_{rb} - \Phi_{21b} - \Phi_{22b} + \Phi_{21}(r) - \Phi_{22}(r) - \Phi_{2Tb} - \\ - \Phi_{2T}(r) + (1 - \mu) \zeta_{2T} + \Phi_{21b}^0 - \Phi_{21}^0(r) - \Phi_{22b}^0 + \\ + \Phi_{22}^0(r) + \Phi_{23b}^0 - \Phi_{23}^0(r) - \mu M_r^0 + M_{\theta}^0.$$

Здесь функции $\Phi_{ij}(r)$ и $\Phi_{ij}^0(r)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(r) &= \frac{1+\mu}{2} \int_0^r q_r dr; & \Phi_{12}(r) &= \frac{1-\mu}{2r^2} \int_0^r r^2 q_r dr; \\ \Phi_{1T}(r) &= \frac{1-\mu}{r^2} \int_0^r r \zeta_{1T} dr; \\ \Phi_{21}(r) &= \frac{1+\mu}{2} \int_0^r Q dr; & \Phi_{22}(r) &= \frac{1-\mu}{2r^2} \int_0^r r^2 Q dr; \\ \Phi_{2T}(r) &= \frac{1-\mu}{r^2} \int_0^r r \zeta_{2T} dr; \\ \Phi_{11}^0(r) &= \frac{1-\mu}{r^2} \int_0^r r N_r^0 dr; & \Phi_{12}^0(r) &= \frac{1-\mu}{2r^2} \int_0^r r (N_r^0 - N_{\theta}^0) dr; \\ \Phi_{13}^0(r) &= \frac{1+\mu}{2} \int_0^r \frac{1}{r} (N_r^0 - N_{\theta}^0) dr; & \Phi_{21}^0(r) &= \frac{1-\mu}{r^2} \int_0^r M_r^0 dr; \\ \Phi_{22}^0(r) &= \frac{1-\mu}{2r^2} \int_0^r r (M_r^0 - M_{\theta}^0) dr; \\ \Phi_{23}^0(r) &= \frac{1+\mu}{2} \int_0^r \frac{1}{r} (M_r^0 - M_{\theta}^0) dr, \end{aligned} \tag{3.55}$$

причем по формулам предельного перехода

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(0) &= 0, & \Phi_{12}(0) &= 0, & \Phi_{1T}(0) &= \frac{1-\mu}{2} \zeta_{1T}(0), \\ \Phi_{21}(0) &= 0, & \Phi_{22}(0) &= 0, & \Phi_{2T}(0) &= \frac{1-\mu}{2} \zeta_{2T}(0). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Учитывая, что в центре диска силы и моменты $N_{r0}^0 = N_{\theta0}^0$ и $M_{r0}^0 = M_{\theta0}^0$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^0(0) &= \frac{1-\mu}{2} N_r^0, & \Phi_{12}^0(0) &= 0, & \Phi_{13}^0(0) &= 0, \\ \Phi_{21}^0(0) &= \frac{1-\mu}{2} N_r^0, & \Phi_{22}^0(0) &= 0, & \Phi_{23}^0(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.57}$$

3.4. Напряжения в неравномерно нагретом диске постоянной толщины, кгс/мм²

$r, \text{ см}$	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
1,0	33,5	33,5	32,5	32,5	31,6	31,6	31,3	31,3
1,5	33,2	33,4	32,2	32,4	31,3	31,5	31,0	31,2
2,0	32,8	33,2	31,8	31,7	31,0	31,7	30,6	31,0
2,5	32,3	32,8	31,3	31,8	30,5	31,1	30,2	30,8
3,0	31,6	32,3	30,7	31,5	29,9	30,8	29,6	30,5
4,0	29,9	31,3	29,1	30,7	28,4	30,4	28,1	29,7
5,0	27,8	29,9	27,1	29,6	26,5	29,3	26,3	28,9
6,0	25,2	28,6	24,6	28,4	24,2	28,2	24,0	28,0
7,0	22,1	26,6	22,0	26,8	21,4	27,0	21,2	27,0
8,0	18,6	24,5	18,3	25,0	18,1	25,4	17,9	25,4
9,0	14,5	22,2	14,4	22,8	14,3	23,4	14,2	24,0
10,0	10,0	19,2	10,0	20,7	10,0	21,2	10,0	21,6

Аналогичные результаты легко получить для диска с отверстием. Напряжения в сплошном диске

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{N_r}{A} - z \frac{M_r}{D} + \frac{\xi_{1T}}{A} + z \frac{\xi_{2T}}{D} - (1+\mu) \alpha T \right] + \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{N_r^0}{A} + z \frac{M_r^0}{D} - (\epsilon_r^0 + \mu \epsilon_\theta^0) \right]; \quad (3.58)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{N_\theta}{A} - z \frac{M_\theta}{D} + \frac{\xi_{1T}}{A} + z \frac{\xi_{2T}}{D} - (1+\mu) \alpha T \right] + \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{N_\theta^0}{A} + z \frac{M_\theta^0}{D} - (\epsilon_\theta^0 + \mu \epsilon_r^0) \right]. \quad (3.59)$$

Пример 3.3. В табл. 3.4 для демонстрации процесса сходимости упругопластического решения методом дополнительных деформаций приведены результаты расчета четырех приближений для задачи о неравномерном нагреве круглого сплошного вращающегося диска постоянной толщины. Табличные значения кривой деформирования материала приведены ниже:

$\epsilon, \%$	...	0,0	0,2	0,4	0,6	1,0	1,5	6,0	10
$\sigma, \text{ кгс/мм}^2$	..	0	14,0	20,3	23,0	24,8	25,8	28,0	31,0

Размеры пластинки (диска): наружный радиус $b = 10$ см, толщина $h = 1$ см, линейный перепад температур между центром и периферией составляет 300°C , на наружном контуре задано растягивающее напряжение $\sigma_{rb} = 10 \text{ кг/мм}^2$, частота вращения диска $25\,000$ об/мин.

§ 9. Учет истории нагружения

Для учета истории нагружения необходимо использовать не конечные уравнения связи между напряжениями и деформациями, а уравнения в приращениях; такой подход положен в основу теории течения [51, 102].

При расчете дисков учесть историю нагружения сложно из-за необходимости иметь исчерпывающую информацию по нагрузкам за период эксплуатации и особенно определения механических свойств материала диска в условиях, подобных рабочим. Для расчета необходимо применять ЭВМ с достаточным объемом памяти.

Чтобы определить полные деформации, возникающие в диске за суммарно малый этап нагружения, воспользуемся допущением о суммировании деформаций упругости, пластичности и ползучести.

Для деформаций в радиальном r , окружном θ и осевом z направлениях будем иметь

$$\begin{aligned} d\epsilon_r &= d\epsilon_r^e + d\epsilon_r^p + d\epsilon_r^c; \\ d\epsilon_\theta &= d\epsilon_\theta^e + d\epsilon_\theta^p + d\epsilon_\theta^c; \\ d\epsilon_z &= d\epsilon_z^e + d\epsilon_z^p + d\epsilon_z^c. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Величина $d\epsilon_z^c$, как будет ясно из дальнейшего, не влияет на распределение напряжений, но оказывается необходимой для вычисления интенсивности деформаций.

В (3.60) $d\epsilon^e$ — приращения упругих деформаций; $d\epsilon^p$ — приращение пластических деформаций; $d\epsilon^c$ — приращения деформаций ползучести в направлениях r , θ и z . Приращения упругих деформаций имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d\epsilon_r^e &= \frac{1}{E} (d\sigma_r - \mu d\sigma_\theta) - \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} (\sigma_r - \mu\sigma_\theta) dT - \\ &\quad - \frac{1}{E} \frac{d\mu}{dT} dT \sigma_\theta + \frac{d(\alpha T)}{dT} dT; \\ d\epsilon_\theta^e &= \frac{1}{E} (d\sigma_\theta - \mu d\sigma_r) - \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r) dT - \\ &\quad - \frac{1}{E} \frac{d\mu}{dT} dT \sigma_r + \frac{d(\alpha T)}{dT} dT; \\ d\epsilon_z^e &= -\frac{\mu}{E} (d\sigma_r + d\sigma_\theta) - \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} (-\mu\sigma_r - \mu\sigma_\theta) dT - \\ &\quad - \frac{1}{E} \frac{d\mu}{dT} dT (\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{d(\alpha T)}{dT} dT. \end{aligned} \quad (3.61)$$

В последнем соотношении учтено, что напряженное состояние диска считается двухосным, а напряжение σ_z отсутствует.

Определение приращений пластических деформаций. Для определения приращений пластических деформаций используем теорию неизотермического пластического течения. Закономерности теории пластического течения при использовании в условиях неизотермического деформирования описаны в работах [17, 38, 83, 102 и др.]. В данном случае будут пояснены только основ-

ные положения, которые окажутся необходимыми для дальнейшего.

В теории пластического течения предполагается следующая связь между тензором приращений пластической деформации и тензором-девиатором напряжений:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij}. \quad (3.62)$$

Скалярный параметр $d\lambda$ будет определен в дальнейшем.

Поверхность деформирования представляет собой гиперповерхность в пространстве тензоров напряжений и деформаций, ограничивающую область значений, при которых материал находится в упругом состоянии. Уравнение этой поверхности

$$f = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k, \kappa) = 0, \quad (3.63)$$

где k и κ — структурные параметры, характеризующие действие температуры и истории деформирования соответственно. В наиболее разработанном и применимом для конкретных расчетов варианте неизотермической теории изотропного пластического течения [17, 83, 102] поверхность деформирования представим в виде функции второго инварианта тензора напряжений (интенсивности напряжений σ_i), температуры T и пластической деформации:

$$f = f(\sigma_i, T, \epsilon_{i*}^p) = 0. \quad (3.64)$$

Накопленная пластическая деформация

$$\epsilon_{i*}^p = \int d\epsilon_{i*}^p = \int_0^t \frac{\partial \epsilon_{i*}^p}{\partial t} dt. \quad (3.65)$$

В форме (3.64) поверхность деформирования упрощенно может быть представлена как поверхность, образованная совокупностью диаграмм деформирования,

$$f = \sigma_i^2 - \sigma_\tau^2(\epsilon_0^p, T) = 0, \quad (3.66)$$

где $\sigma_\tau(\epsilon_0^p, T)$ — мгновенные значения пределов текучести. Условия нагружения имеют следующий вид [17, 61]:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \sigma_i = \sigma_\tau \text{ и } d\sigma_i > \frac{\partial \sigma_\tau}{\partial T}(\epsilon_{i*}^p) dT & \text{— активное нагружение;} \\ 2) \quad \sigma_i < \sigma_\tau \text{ и } \sigma_i = \sigma_\tau, d\sigma_i \leq \frac{\partial \sigma_\tau}{\partial T}(\epsilon_{i*}^p) dT & \text{— разгрузка или} \\ & \text{нейтральное деформирование.} \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

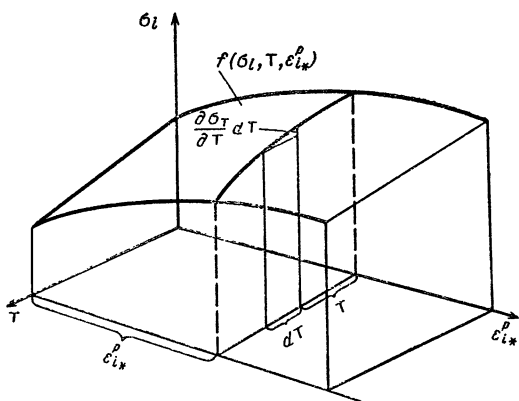


Рис. 3.6

Величина $\frac{\partial \sigma_i}{\partial T}(\epsilon_{i*}^p)$ представляет собой угол наклона касательной к кривой, выражающей зависимость мгновенных пределов текучести от температуры при фиксированной накопленной пластической деформации. На рис. 3.6 в координатах σ_i , T и ϵ_{i*}^p построена поверхность деформирования, образованная совокупностью обобщенных кривых деформирования при различных температурах, и показана величина $\frac{\partial \sigma_i}{\partial T} dT$. Ординаты этой поверхности и представляют собой мгновенные пределы текучести. Если принять [17] концепцию существования поверхности деформирования в виде (3.66), то для неизотермического нагружения коэффициент может быть представлен как

$$d\lambda = F_\sigma(\sigma_i, T) d\sigma_i + F_T(\sigma_i, T) dT; \quad (3.68)$$

функции F_σ и F_T определяют из опытных данных.

Для нахождения F_σ рассмотрим простое изотермическое растяжение (σ_0 , ϵ_0). Полагая $d\epsilon_{11} = d\epsilon_0$ для совместной деформации упругости и пластичности, приращения полных деформаций в этом случае

$$d\epsilon_0 = d\epsilon_0^e + d\epsilon_0^p = \frac{d\sigma_0}{E(T)} + F_\sigma(\sigma_0, T) d\sigma_0 \frac{2}{3} \sigma_0, \quad (3.69)$$

$$\text{откуда } F_\sigma = \frac{3}{2\sigma_0} \left(\frac{d\epsilon_0}{d\sigma_0} - \frac{1}{E} \right) = \frac{3}{2\sigma_0} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right). \quad (3.70)$$

Здесь E_k — касательный модуль кривой деформирования (3.14).

Для сложного напряженного состояния

$$F_\sigma(\sigma_i, T) = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right). \quad (3.71)$$

Для определения $F_T(\sigma_i, T)$ рассмотрим растяжение при переменной температуре и $\sigma_0 = \text{const}$.

$$d\varepsilon_0 = -\frac{\sigma_0}{E^2} \frac{dE}{dT} dT + F_T(\sigma_0, T) dT - \frac{2}{3} \sigma_0 + \frac{d(\alpha T)}{dT} dT, \quad (3.72)$$

$$\text{откуда } F_T(\sigma_0, T) = \frac{\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T} - \frac{d(\alpha T)}{dT} + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_0}{\frac{2}{3} \sigma_0}. \quad (3.73)$$

Для сложного напряженного состояния

$$F_T = (\sigma_i, T) = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{d\varepsilon_0}{dT} - \frac{d(\alpha T)}{dT} + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right). \quad (3.74)$$

Обозначим

$$\frac{d\varepsilon_0}{dT} - \frac{d(\alpha T)}{dT} = \beta. \quad (3.75)$$

Коэффициент β легко определить по кривым деформирования.
Окончательно

$$F_T(\sigma_i, T) = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\beta + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right). \quad (3.76)$$

При изотермическом нагружении

$$F_T(\sigma_i) = 0. \quad (3.77)$$

Для диска с учетом (3.71), (3.76), (3.69) и (3.62) получим

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r^p &= \left\{ \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i + \right. \\ &+ \left. \left(\beta + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right) dT \right\} \frac{1}{\sigma_i} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right); \\ d\varepsilon_\theta^p &= \left\{ \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i + \right. \\ &+ \left. \left(\beta + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right) dT \right\} \frac{1}{\sigma_i} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Приращение интенсивности напряжений с учетом, что

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta},$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} d\sigma_i &= \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_r} d\sigma_r + \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_\theta} d\sigma_\theta = \\ &= \frac{1}{\sigma_i} \left[\left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) d\sigma_r + \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right) d\sigma_\theta \right]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Окончательно приращения пластической деформации в соответствии с теорией течения

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_r^p &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right)^2 d\sigma_r + \\
 &+ \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right) d\sigma_\theta + \\
 &+ \left(\beta + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right) \frac{1}{\sigma_i} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) dT; \\
 d\varepsilon_\theta^p &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right) d\sigma_r + \\
 &+ \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right)^2 d\sigma_\theta + \\
 &+ \left(\beta + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right) \frac{1}{\sigma_i} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right) dT.
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Выражения (3.80) имеют смысл при соблюдении условий нагрузки (3.67), в противном случае при разгрузке или нейтральном нагружении следует принимать

$$d\varepsilon_r^p = 0; \quad d\varepsilon_\theta^p = 0. \tag{3.81}$$

Все предыдущие соотношения получены для наиболее разработанного и распространенного в практических расчетах варианта теории пластического течения при гипотезе изотропного упрочнения [17]. При этом предполагается, что поверхность нагружения непрерывно расширяется в пространстве напряжений, причем изотропно во всех направлениях. Обнаруженный в опытах на растяжение-сжатие эффект уменьшения предела текучести (эффект Баушингера) свидетельствует о приближенности этой теории. Кроме того, в опытах на неизотермическое нагружение обнаружена зависимость предела текучести от температуры в процессе нагружения и другие эффекты.

Эти эффекты описать математически достаточно сложно. Разработаны варианты теории течения, в которых сделаны попытки учета этих эффектов. Для учета анизотропии упрочнения введены понятия «микронапряжений», или добавочных напряжений, характеризующих сопротивление остаточным деформациям, и активных напряжений, определяющих нагружение. В простейшем случае трансляционной анизотропии уравнение поверхности деформирования (3.66) представляется в виде

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (S_{ij} - a_{ij}) (S_{ij} - a_{ij}) - \sigma_\tau^2 = 0, \tag{3.82}$$

где a_{ij} — компоненты девиатора микронапряжений, являющиеся координатами центра поверхности пластичности. Предложены различные зависимости для a_{ij} , определяющие кинематику поверхности деформирования. В наиболее простом виде, предложенном А. Ю. Ишлинским, $a_{ij} = c \varepsilon_{ij}^p$, где c — константа для материала.

Для неизотермического нагружения аналогично (3.62) приращения пластических деформаций с учетом (3.82) [17]

$$d\varepsilon_{ij}^p = [F_\sigma d\sigma_i^* + F_T dT] (S_{ij} - a_{ij}),$$

где $\sigma_i^* = \sqrt{\frac{3}{2} (S_{ij} - a_{ij})(S_{ij} - a_{ij})}$ — интенсивность активных напряжений.

Связь девиатора активных и полных напряжений зависит от принятых гипотез упрочнения, различные варианты которых рассмотрены в работах [79, 112 и др.]. Обобщение этих гипотез можно найти в работах [17 и 38]. Как показали расчеты, уточненный учет упрочнения более важен при оценке деформированного состояния. Напряженное состояние в диске достаточно хорошо описывается с помощью простых гипотез, изложенных выше, за исключением особых случаев возникновения пластической деформации противоположного знака. Учет в этих случаях более сложных законов упрочнения, как показано в работе [38], не меняет общего алгоритма решения задачи и принципиального характера результатов. Учет анизотропии упрочнения, за исключением простейших кинематических гипотез, требует постановки специальных опытов и накопления соответствующих экспериментальных данных для материалов, особенно при повышенных температурах.

Приращения деформаций ползучести. Из наиболее разработанных теорий, описывающих процессы ползучести при изменяющихся нагрузках и температуре во времени, наиболее близкие к эксперименту результаты дает теория упрочнения [52, 89, 102]. Теория ползучести подобно теории пластического течения связывает на основе феноменологических данных скорости деформаций ползучести с напряжениями через скалярный коэффициент. Этот коэффициент в свою очередь является функцией накопленной деформации ползучести и температуры. Таким образом, теория упрочнения инвариантна к отсчету времени. Закон ползучести имеет вид

$$d\varepsilon_{ij}^c = d\lambda^c S_{ij}, \quad (3.83)$$

где $d\varepsilon_{ij}^c$ — тензор деформаций ползучести.

Скалярная функция

$$d\lambda^c = \Phi(\sigma_*, T, \varepsilon_{*}^c) dT \quad (3.84)$$

зависит от интенсивности напряжений, температуры и накопленной деформации ползучести. Накопленная деформация ползучести (параметр Удквиста [89]) определяется как

$$\varepsilon_{i*}^c = \int d\varepsilon_{i*}^c = \int_0^t \frac{\partial \varepsilon_{i*}^c}{\partial t} dt. \quad (3.85)$$

Применяя (3.83) для простого растяжения, получим

$$\frac{d\varepsilon_0^c}{dt} = \xi_0(\varepsilon_0^c) = \Phi(\sigma_0, T, \varepsilon_0^c) 2/3\sigma_0, \quad (3.86)$$

где $\xi_0(\varepsilon_0^c)$ — скорость ползучести, зависящая от деформации ползучести. Обобщая эти соотношения на сложное напряженное состояние, получим

$$\Phi(\sigma_i, T, \varepsilon_{i*}^c) = \frac{3}{2\sigma_i} \xi_0(\varepsilon_{i*}^c). \quad (3.87)$$

Величина $\xi_0(\varepsilon_{i*}^c) = \frac{d\varepsilon_0^c}{dt}$ может быть найдена по кривым ползучести (см. рис. 3.5) для соответствующей интенсивности напряжений $\sigma_i = \sigma_0$ и температуры T при $\varepsilon_0^c = \varepsilon_{i*}^c$.

В соответствии с (3.84) и (3.87) приращения деформаций ползучести в диске могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r^c &= \frac{1}{\sigma_i} \xi_0(\varepsilon_{0*}^c) \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) dt; \\ d\varepsilon_\theta^c &= \frac{1}{\sigma_i} \xi_0(\varepsilon_{i*}^c) \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right) dt. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Общие соотношения между деформациями и напряжениями диска в приращениях. Представим соотношения между напряжениями и деформациями в диске в радиальном и окружном направлениях в следующей общей форме [29, 102]:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r &= c_{11} d\sigma_r + c_{12} d\sigma_\theta + d\varepsilon_{rT} + d\varepsilon_{rc}; \\ d\varepsilon_\theta &= c_{21} d\sigma_r + c_{22} d\sigma_\theta + d\varepsilon_{\theta T} + d\varepsilon_{\theta c}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Здесь c_{ij} ($i, j = 1, 2$) — переменные параметры; $d\varepsilon_{rT}$, $d\varepsilon_{\theta T}$ — дополнительные температурные деформации; $d\varepsilon_{rc}$, $d\varepsilon_{\theta c}$ — дополнительные деформации ползучести, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$d\varepsilon_r^T = \varphi_r^T dT; \quad d\varepsilon_\theta^T = \varphi_\theta^T dT; \quad d\varepsilon_r^c = \varphi_r^c dt; \quad d\varepsilon_\theta^c = \varphi_\theta^c dt, \quad (3.90)$$

где T — температура, t — время. Выражения для параметров c_{ij} и функций φ_{rT} , $\varphi_{\theta T}$, φ_{rc}^c , $\varphi_{\theta c}^c$ будут приведены в дальнейшем.

Изменение температуры на ободе и в центре диска турбины, а также относительной частоты вращения $n/n_{\max}$ за один цикл непрерывной работы двигателя от запуска до останова приве-

дено на рис. 3.7. Время работы за цикл следует разбить на ряд этапов [32]. На рис. 3.7 показано такое разбиение; $\Delta T_{(n)}$ и $\Delta n_{(n)}$ — соответствующие приращения температуры и частоты вращения на n -м этапе нагружения. Для малого этапа нагружения (3.89) можно представить в конечной форме

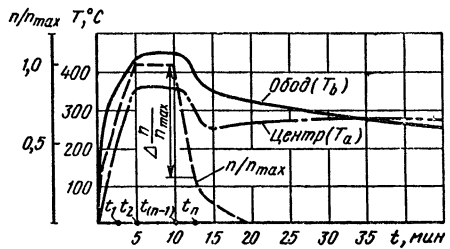


Рис. 3.7

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_r &= \langle c_{11} \rangle \Delta \sigma_r + \langle c_{12} \rangle \Delta \sigma_\theta + \Delta \varepsilon_{rT} + \Delta \varepsilon_{rc}; \\ \Delta \varepsilon_\theta &= \langle c_{21} \rangle \Delta \sigma_r + \langle c_{22} \rangle \Delta \sigma_\theta + \Delta \varepsilon_{\theta T} + \Delta \varepsilon_{\theta c}.\end{aligned}\quad (3.91)$$

Угловые скобки означают, что берутся постоянные значения параметров на данном этапе нагружения:

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_{rT} &= (\langle \varphi_{rT}^e \rangle + \langle \varphi_{rT}^p \rangle) \Delta T; & \Delta \varepsilon_{\theta T} &= (\langle \varphi_{\theta T}^e \rangle + \langle \varphi_{\theta T}^p \rangle) \Delta T; \\ \Delta \varepsilon_{rc} &= \langle \varphi_{rc}^e \rangle \Delta t; & \Delta \varepsilon_{\theta c} &= \langle \varphi_{\theta c}^e \rangle \Delta t.\end{aligned}\quad (3.92)$$

Величины $\Delta \sigma$, $\Delta \varepsilon$ представляют собой соответствующие приращения на данном малом этапе. В дальнейшем изложении угловые скобки опускаем, подразумевая под c_{ij} — постоянные значения, о нахождении которых будет сказано ниже.

Соотношения (3.91) удобно представить в матричной форме

$$\bar{\Delta}_\varepsilon = \mathbf{C} \bar{\Delta}_\sigma + \bar{\Delta}_T + \bar{\Delta}_c, \quad (3.93)$$

где $\mathbf{C}$ — матрица параметров c_{ij} ($i, j = 1, 2$) второго порядка; $\bar{\Delta}_T = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{rT} \\ \Delta \varepsilon_{\theta T} \end{bmatrix}$ и $\bar{\Delta}_c = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{rc} \\ \Delta \varepsilon_{\theta c} \end{bmatrix}$ — векторы-столбцы соответствующих дополнительных деформаций.

Напряжения в диске

$$\bar{\Delta}_\sigma = \mathbf{C}^{-1} [\bar{\Delta}_\varepsilon - \bar{\Delta}_T - \bar{\Delta}_c], \quad (3.94)$$

где $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{G}$ — обратная матрица.

Перемещение точки, отстоящей на расстоянии z от срединной поверхности диска в соответствии с гипотезой жесткой нормали, см. гл. 2, § 5 (диск считаем жестким с плоским или пологим меридианом),

$$u_z(r, z) = u(r) + \vartheta(r) z, \quad (3.95)$$

где $u(r)$ — радиальное перемещение точек срединной поверхности; $\vartheta(r)$ — угол поворота нормали к срединной поверхности диска.

Приращения деформаций выражаются через приращения перемещений на этапе нагружения следующим образом:

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{d}{dr} (\Delta u) + z \frac{d}{dr} (\Delta \vartheta); \quad \Delta \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \Delta u + z \frac{1}{r} \Delta \vartheta. \quad (3.96)$$

Приращения сил в поперечном сечении диска в радиальном и окружном направлениях

$$\begin{aligned} \Delta N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_r dz; & \Delta N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_\theta dz; \\ \Delta M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_r z dz; & \Delta M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_\theta z dz. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Приращения сил и моментов можно выразить через приращения перемещений с учетом (3.94), (3.96), (3.97) в виде [29]

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_r &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{V}}' + \frac{1}{r} \mathbf{B} \bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{T}}_I - \bar{\mathbf{C}}_I; \\ \bar{\mathbf{R}}_\theta &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{V}}' + \frac{1}{r} \mathbf{D} \bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{T}}_{II} - \bar{\mathbf{C}}_{II}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\text{где } \bar{\mathbf{R}}_r = \begin{bmatrix} \Delta N_r \\ -\Delta M_r \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}}_\theta = \begin{bmatrix} \Delta N_\theta \\ -\Delta M_\theta \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad (3.99)$$

Штрих в верхнем индексе в (3.98) обозначает дифференцирование элементов матрицы по r . Матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ — симметричные, их элементы

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} G_{11} dz, & A_{12} &= A_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{11} z dz, & A_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} G_{11} z^2 dz; \\ B_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} G_{12} dz, & B_{12} &= B_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{12} z dz, & B_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} G_{12} z^2 dz; \\ D_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} G_{22} dz, & D_{12} &= D_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{22} z dz, & D_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} G_{22} z^2 dz. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Элементы векторов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{C}$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} G_{11} \Delta \varepsilon_{rT} dz + \int_{-h/2}^{h/2} G_{12} \Delta \varepsilon_{\theta T} dz; \\ T_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} G_{11} \Delta \varepsilon_{rT} z dz + \int_{-h/2}^{h/2} G_{11} \Delta \varepsilon_{\theta T} z dz; \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$T_{111} = \int_{-\hbar/2}^{\hbar/2} G_{21} \Delta \varepsilon_{rT} dz + \int_{-\hbar/2}^{\hbar/2} G_{22} \Delta \varepsilon_{\theta T} dz. \quad (3.102)$$

$$T_{112} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{21} \Delta \varepsilon_{rT} z \, dz + \int_{-h/2}^{h/2} G_{22} \Delta \varepsilon_{\theta T} z \, dz;$$

$$C_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{11} \Delta \varepsilon_{rc} dz + \int_{-h/2}^{h/2} G_{12} \Delta \varepsilon_{\theta c} dz;$$

[illegible]

$$C_{II2} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{21} \Delta \varepsilon_{rc} z dz + \int_{-h/2}^{h/2} G_{22} \Delta \varepsilon_{\theta c} z dz.$$

Уравнения равновесия в приращениях сил для элемента диска аналогичны уравнениям для изгиба диска § 5 гл. 2:

$$\frac{d(\Delta N_{rr})}{dr} - \Delta N_{\theta} + \Delta q_r r = 0; \quad (3.104)$$

$$\frac{d(\Delta Qr)}{dr} + \frac{d}{dr} [\Delta N_r r \varphi] + \Delta q_z r = 0; \quad (3.105)$$

$$\frac{d(\Delta M_r r)}{dr} - \Delta M_\theta - \Delta Q r = 0. \quad (3.106)$$

Уравнение (3.105) отличается от (3.9) дополнительным членом, учитывающим влияние растягивающих сил на изгиб из-за начального искривления срединной поверхности; φ — угол подъема срединной поверхности.

Основные расчетные уравнения. Проинтегрировав (3.105) в пределах от a до r и подставив ΔQ в (3.106) из (3.104) и (3.105), получим следующее матричное равенство:

$$\frac{d}{dr}(r\bar{\mathbf{R}}_r) - \bar{\mathbf{R}}_\theta + r\varphi \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta N_r \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{S}}_q = 0, \quad (3.107)$$

где $\bar{S}_a$ — вектор нагрузки, элементы которого

$$S_{q1} = r \Delta q_r, \quad S_{q2} = - \int_a^r \Delta q_2 r dr - a \varphi_a \Delta N_{ra} + a \Delta Q_a. \quad (3.108)$$

Подставив в (3.107) выражения для сил (3.98); получим дифференциальное уравнение растяжения и изгиба диска

$$\frac{d}{dr}(r\bar{A}\bar{V}') + \frac{d}{dr}(\bar{B}\bar{V}) - K\bar{V}' - \bar{P}\bar{V} + \bar{S}_q + \bar{S}_c + \bar{S}_T = 0, \quad (3.109)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{B} + r\varphi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \frac{1}{r} \mathbf{D} + \varphi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} \end{bmatrix}; \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_T &= -\frac{d}{dr} (r\mathbf{T}_1) + \mathbf{T}_{11} + r\varphi \begin{bmatrix} 0 \\ T_{11} \end{bmatrix}; \\ \bar{S}_c &= -\frac{d}{dr} (r\mathbf{C}_1) + \mathbf{C}_{11} + r\varphi \begin{bmatrix} 0 \\ C_{11} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Разрешающее интегральное уравнение, соответствующее уравнению (3.109), с учетом зависимости

$$\bar{\mathbf{V}} = \int_a^r \bar{\mathbf{V}}'(r) dr + \bar{\mathbf{V}}(a) \quad (3.112)$$

будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}'(r) &= \mathbf{L}\bar{\mathbf{V}}'(r) + \mathbf{X}(r)\bar{\mathbf{V}}(a) + \mathbf{Y}(r)\bar{\mathbf{V}}'(a) + \\ &+ \bar{\Psi}_q(r) + \bar{\Psi}_T(r) + \bar{\Psi}_c(r), \end{aligned} \quad (3.113)$$

где $\mathbf{L}\bar{\mathbf{V}}'(r)$ — интегральная операция от $\bar{\mathbf{V}}'$.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\bar{\mathbf{V}}'(r) &= \frac{1}{r} \mathbf{A}^{-1}(r) \left\{ -\mathbf{B}(r) \int_a^r \bar{\mathbf{V}}'(r) dr + \int_a^r \mathbf{K}(r_1) \bar{\mathbf{V}}'(r_1) dr + \right. \\ &\left. + \int_a^r \mathbf{P}(r_1) \int_a^{r_1} \bar{\mathbf{V}}'(r_2) dr_2 dr_1 \right\}; \end{aligned} \quad (3.114)$$

$\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — матрицы коэффициентов при начальных параметрах

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(r) &= \frac{1}{r} \mathbf{A}^{-1}(r) \left\{ \int_a^r \mathbf{P}(r_1) dr_1 + \mathbf{B}(a) - \mathbf{B}(r) \right\}; \\ \mathbf{Y}(r) &= \frac{a}{r} \mathbf{A}^{-1}(r) \mathbf{A}(a). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Выражения для векторов, зависящих от внешней нагрузки, нагрева и дополнительных деформаций ползучести, приведены ниже.

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_q &= -\frac{1}{r} \mathbf{A}^{-1} \int_a^r \bar{S}_q(r_1) dr_1; \quad \bar{\Psi}_T = -\frac{1}{r} \mathbf{A}^{-1} \int_a^r \bar{S}_T(r_1) dr_1; \\ \bar{\Psi}_c &= -\frac{1}{r} \mathbf{A}^{-1} \int_a^r \bar{S}_c(r_1) dr_1. \end{aligned}$$

Решение линейного интегрального уравнения (3.109) представим следующим образом:

$$\bar{\mathbf{V}}'(r) = \Phi(r)\bar{\mathbf{V}}'(a) + \mathbf{F}(r)\bar{\mathbf{V}}(a) + \bar{\mathbf{Z}}(r). \quad (3.116)$$

Здесь $\Phi(r)$, $F(r)$ — матрицы фундаментальных функций — решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.116); $\bar{Z}(r)$ — столбец частных решений, отвечающих нулевым начальным условиям: $\bar{V}'(a) = 0$ и $\bar{V}(a) = 0$. Решения уравнения — столбцы матриц Φ , F и $\bar{Z}$ — могут быть найдены известными методами, в частности методом последовательных приближений. Ниже кратко изложен алгоритм процесса последовательных приближений для решения матричного уравнения.

Для определения матрицы — столбца фундаментальных функций решения, например,

$$\bar{\Phi}_{(1)} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{bmatrix},$$

применяют метод последовательных приближений, с помощью которого следует решить уравнение

$$\bar{V}'(r) = L\bar{V}' + Y_{(1)}, \quad \text{где } Y_{(1)} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \end{bmatrix}. \quad (3.117)$$

Это уравнение получим, если в (3.113) положим равным нулю начальные параметры $u(a)$, $\vartheta(a)$ и $\vartheta'(a)$, а $u'(a) = 1$. За нулевое приближение принимаем $\bar{V}'(0) = 0$; первое приближение $\bar{V}'_{(1)} = Y_{(1)}(r)$; второе приближение $\bar{V}'_{(2)} = LY_{(1)}(r) + Y_{(1)}$; k -е приближение

$$\bar{V}'_{(k)} = L\bar{V}'_{(k-1)}(r) + Y_{(1)}. \quad (3.118)$$

Процесс считаем законченным, если какое-либо m -е приближение отличается от $(m-1)$ -го менее чем на некоторое наперед заданное δ . Тогда решение имеет вид $\bar{V}'(m) \approx \bar{\Phi}_1$. Аналогичным способом находим и другие фундаментальные функции и частное решение. Для отыскания частного решения решаем уравнение

$$\bar{V}'(r) = L\bar{V}'(r) + \bar{\Psi}(r), \quad (3.119)$$

где $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_q + \bar{\Psi}_T + \bar{\Psi}_c$.

Краевые условия. На наружных контурах диска обычно задаются радиальные силы и моменты при $r = a$ и $r = b$:

$$\bar{R}_r(a) = A(a)\bar{V}'(a) + \frac{1}{a}B(a)\bar{V}(a) - \bar{T}_1(a) - \bar{C}_1(a); \quad (3.120)$$

$$\bar{R}_r(b) = A(b)\bar{V}'(b) + \frac{1}{b}B(b)\bar{V}(b) - \bar{T}_1(b) - \bar{C}_1(b). \quad (3.121)$$

Из (3.116) получим

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{V}}'(b) &= \Phi(b) \bar{\mathbf{V}}'(a) + \mathbf{F}(b) \bar{\mathbf{V}}(a) + \bar{\mathbf{Z}}(b); \\ \bar{\mathbf{V}}(b) &= \left\{ \int_a^b \Phi(r_1) dr_1 \right\} \bar{\mathbf{V}}'(a) + \\ &+ \left\{ \int_a^b \mathbf{F}(r_1) dr_1 + \mathbf{E} \right\} \bar{\mathbf{V}}(a) + \int_a^r \bar{\mathbf{Z}}(r_1) dr_1,\end{aligned}\quad (3.122)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица второго порядка.

Подставив в (3.121) равенства (3.122), получим

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}}_r(b) &= \left\{ \mathbf{A}(b) \Phi(b) + \frac{1}{b} \mathbf{B}(b) \left[\int_a^b \Phi(r_1) dr_1 \right] \right\} \bar{\mathbf{V}}'(a) + \\ &+ \left\{ \mathbf{A}(b) \mathbf{F}(b) + \frac{1}{b} \mathbf{B}(b) \left[\int_a^b \mathbf{F}(r_1) dr_1 + \mathbf{E} \right] \right\} \bar{\mathbf{V}}(a) - \bar{\mathbf{T}}_I(b) - \bar{\mathbf{C}}_I(b).\end{aligned}\quad (3.123)$$

Для диска с отверстием решение алгебраической системы двух матричных уравнений (3.120) и (3.123) при известных силах на контурах при $r = a$ и $r = b$ позволяет определить начальные параметры $\bar{\mathbf{V}}(a)$ и $\bar{\mathbf{V}}'(a)$.

Для диска без отверстия в центре вследствие симметрии

$$\bar{\mathbf{R}}_r(0) = \bar{\mathbf{R}}_\theta(0).$$

В практических расчетах считаем это справедливым на некотором малом радиусе $r = a$. Принимаем $r = a = (0,05 \div 0,01)b$.

Условие в центре сплошного диска будет иметь вид:

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}(a) - \mathbf{B}(a)] \bar{\mathbf{V}}'(a) + \frac{1}{r} [\mathbf{B}(a) - \mathbf{D}(a)] \bar{\mathbf{V}}(a) - [\bar{\mathbf{T}}_I(a) - \bar{\mathbf{T}}_{II}(a)] - \\ - [\bar{\mathbf{C}}_I(a) - \bar{\mathbf{C}}_{II}(a)] = 0.\end{aligned}$$

Равенства (3.123) и (3.98) позволяют определить $\bar{\mathbf{V}}(a)$ и $\bar{\mathbf{V}}'(a)$ для диска без внутреннего отверстия.

Определение параметров c_{ij} и дополнительных деформаций. Ниже приведены формулы для определения параметров c_{ij} и дополнительных деформаций $\Delta \varepsilon_{rT}$, $\Delta \varepsilon_{\theta T}$, $\Delta \varepsilon_{rc}$, $\Delta \varepsilon_{\theta c}$.

Параметры c_{ij} ($i, j = 1, 2$) и дополнительные температурные деформации $\Delta \varepsilon_{rT}$, $\Delta \varepsilon_{\theta T}$ представлены в виде суммы параметров, связанных с упругими и пластическими деформациями соответственно:

$$c_{ij} = c_{ij}^e + c_{ij}^p; \quad \Delta \varepsilon_{rT} = \Delta \varepsilon_{rT}^e + \Delta \varepsilon_{rT}^p; \quad \Delta \varepsilon_{\theta T} = \Delta \varepsilon_{\theta T}^e + \Delta \varepsilon_{\theta T}^p. \quad (3.124)$$

Упругие составляющие [см. (3.61)]

$$c_{11}^e = \frac{1}{E}, \quad c_{12}^e = -\frac{\mu}{E}, \quad c_{21}^e = \frac{1}{E}, \quad c_{22}^e = -\frac{\mu}{E}. \quad (3.125)$$

Упругие температурные составляющие в (3.92)

$$\begin{aligned} \varphi_{rT}^e &= -\frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta) - \frac{1}{E} \frac{d\mu}{dT} \sigma_\theta + \frac{d(\alpha T)}{dT}; \\ \varphi_{\theta T}^e &= -\frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r) - \frac{1}{E} \frac{d\mu}{dT} \sigma_r + \frac{d(\alpha T)}{dT}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Пластические деформации появляются только при выполнении условий нагружения (3.67), которые для малого конечного n -го этапа определяются следующим образом:

$$\sigma_{i(n-1)} = \sigma_T(T_{(n-1)}, \varepsilon_{i*}^p{}_{(n-1)}); \quad \Delta \sigma_{i(n)} > f_{T(n-1)} \Delta T_{(n)}. \quad (3.127)$$

При этом $\Delta \varepsilon_{i*}^p{}_{(n)} \neq 0$.

В этих формулах индекс $(n-1)$ относится к величинам, характеризующим конец предыдущего и соответственно начало n -го этапа нагружения; $\Delta \sigma_{i(n)}$ и $\Delta T_{(n)}$ — приращения интенсивности напряжений и температуры на n -м этапе. Величину $f_{T(n-1)} = \frac{\partial \sigma_T}{\partial T}(\varepsilon_{i*}^p{}_{(n-1)})$ берем соответствующей накопленной пластической деформации к началу n -го этапа. Аналогично для разгрузки

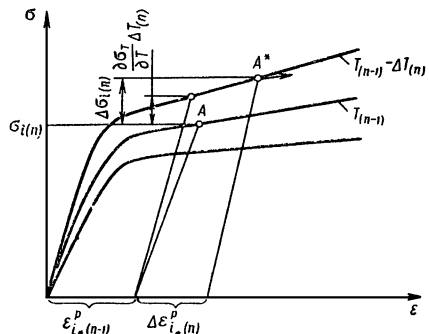
$$\Delta \sigma_{i(n)} \leq f_{T(n-1)} \Delta T_{(n)}, \text{ откуда } \varepsilon_{i*}^p{}_{(n)} = 0. \quad (3.128)$$

Состояние материала в точке диска характеризуется при расчете определенной точкой на диаграмме растяжения.

Рис. 3.8 иллюстрирует использование условий нагружения с помощью кривых деформаций. Точка A характеризует состояние материала в рассматриваемой точке диска к началу n -го этапа нагружения. Точка A^* соответствует концу этапа. Рассмотрен один из вариантов нагружения при одинаковых знаках приращения $\Delta \sigma_{i(n)}$ и $\Delta T_{(n)}$. При этих рассмотрениях предполагалось, что в конце $(n-1)$ -го этапа состояние материала характеризуется точкой A , расположенной на кривой деформирования при температуре $T_{(n-1)}$. Однако если на $(n-1)$ -м этапе происходил процесс разгрузки, то точка A может располагаться ниже кривой деформирования.

В таком случае, если

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{i(n)} &> \sigma_T(T_{(n)}, \\ \varepsilon_{i*}^p{}_{(n-1)}) - \sigma_{i(n-1)}, \end{aligned} \quad (3.129) \quad \text{Рис. 3.8}$$



то следует выбрать меньшую продолжительность этапа $\Delta t_{(n)}$, и если

$$\Delta \sigma_{i(n)} \leq \sigma_T(T_{(n)}, \varepsilon_{i*}^p(n-1)) - \sigma_{i(n-1)}, \quad (3.130)$$

то $\Delta \varepsilon_{i*}^p(n) = 0$. Расчет осуществляют без учета соотношений пластичности; при этом пластические составляющие параметров пластичности c_{ij}^p и φ_{rT}^p , $\varphi_{\theta T}^p$ полагают равными нулю.

При нагружке

$$\begin{aligned} c_{11}^p &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right)^2; \\ c_{12}^p &= c_{21}^p = \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right); \\ c_{22}^p &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right)^2; \\ \varphi_{rT}^p &= \left(\beta + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right) \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right); \\ \varphi_{\theta T}^p &= \left(\beta + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right) \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right). \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} c_{11}^p &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right)^2; \\ c_{12}^p &= c_{21}^p = \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right); \\ c_{22}^p &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right)^2; \\ \varphi_{rT}^p &= \left(\beta + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right) \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right); \\ \varphi_{\theta T}^p &= \left(\beta + \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \sigma_i \right) \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Дополнительные деформации ползучести при расчете в соответствии с (3.84)–(3.88)

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_r^c &= \frac{1}{\sigma_i} \xi_0(\varepsilon_{i*}^c) \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) \Delta t = \varphi_r \Delta t; \\ \Delta \varepsilon_\theta^c &= \frac{1}{\sigma_i} \xi_0(\varepsilon_{i*}^c) \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right) \Delta t = \varphi_\theta \Delta t. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Расчет на растяжение. В гл. 2 уже перечислялись случаи, когда нет необходимости проводить сложный расчет дисков на совместное действие изгиба и растяжения и достаточно расчета только на растяжение [31, 61]. В связи с этим рассмотрим расчет дисков на растяжение с учетом истории нагружения, который существенно проще реализовать в виде программы.

Приращения деформаций при растяжении

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{d}{dr} (\Delta u); \quad \Delta \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \Delta u. \quad (3.134)$$

Из (3.91) с учетом (3.134), не применяя матричной записи, получим

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_r &= \frac{1}{B} \left[c_{22} \Delta u' - \frac{1}{r} c_{12} \Delta u - (c_{22} \Delta \varepsilon_{rT} - c_{12} \Delta \varepsilon_{\theta T}) - \right. \\ &\quad \left. - (c_{22} \Delta \varepsilon_{rc} - c_{12} \Delta \varepsilon_{\theta c}) \right]; \\ \Delta \sigma_\theta &= \frac{1}{B} \left[\frac{1}{r} c_{11} \Delta u - c_{21} \Delta u' - \right. \\ &\quad \left. - (c_{11} \Delta \varepsilon_{\theta T} - c_{21} \Delta \varepsilon_{rT}) - (c_{11} \Delta \varepsilon_{\theta c} - c_{21} \Delta \varepsilon_{rc}) \right], \end{aligned} \quad (3.135)$$

где c_{ij} ($i, j = 1, 2$) — элементы матрицы C .

Из (3.97) получим

$$\Delta N_r = \Delta \sigma_r h(r), \quad \Delta N_\theta = \Delta \sigma_\theta h(r). \quad (3.136)$$

Подставим в (3.136) равенства (3.135)

$$\begin{aligned} \Delta N_r &= \Delta u' f_{22} - \frac{1}{r} \Delta u f_{12} - T_r - c_r; \\ \Delta N_\theta &= \Delta u f_{22} + \frac{1}{r} \Delta u f_{11} - T_\theta - c_\theta. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Здесь $f_{11} = \frac{c_{11}}{B} h$; $f_{12} = f_{21} = -\frac{c_{12}}{B} h$; $f_{22} = \frac{c_{22}}{B} h$;

$$T_r = \frac{h}{B} (c_{22} \Delta \varepsilon_{rT} - c_{12} \Delta \varepsilon_{\theta T}); \quad T_\theta = \frac{h}{B} (c_{11} \Delta \varepsilon_{\theta T} - c_{21} \Delta \varepsilon_{rT});$$

$$c_r = \frac{h}{B} (c_{22} \Delta \varepsilon_{rc} - c_{12} \Delta \varepsilon_{\theta c}); \quad c_\theta = \frac{h}{B} (c_{11} \Delta \varepsilon_{\theta c} - c_{21} \Delta \varepsilon_{rc}).$$

Из (3.137) следует

$$\begin{aligned} \Delta u' &= \frac{1}{A_r} (\Delta N_r - g_\theta \Delta N_\theta) + \Delta \varepsilon_{rT} + \Delta \varepsilon_{rc}; \\ \frac{1}{r} u &= \frac{1}{A_\theta} (\Delta N_\theta - g_r \Delta N_r) + \Delta \varepsilon_{\theta T} + \Delta \varepsilon_{\theta c}, \end{aligned} \quad (3.138)$$

здесь $A_r = \frac{1}{f_{11}} (f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}) = \frac{h}{c_{11}}$;

$$A_\theta = \frac{1}{f_{22}} (f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}) = \frac{h}{c_{22}};$$

$$g_\theta = \frac{f_{12}}{f_{11}} = -\frac{c_{12}}{c_{11}}; \quad g_r = \frac{f_{21}}{f_{22}} = -\frac{c_{21}}{c_{22}}.$$

Уравнение совместности деформаций

$$\Delta \varepsilon_r = (\Delta \varepsilon_\theta)' \quad (3.139)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\frac{1}{A_\theta} (\Delta N_\theta - g_r \Delta N_r) + \Delta \varepsilon_{\theta T} + \Delta \varepsilon_{\theta c} \right] \right\} = \\ = \frac{1}{A_r} \Delta N_r - g_\theta \Delta N_\theta + \Delta \varepsilon_{rT} + \Delta \varepsilon_{rc}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Известным приемом это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \Delta N_\theta &= g_r \Delta N_r + \frac{A_\theta}{r \chi_a} \int_a^r \frac{1 - g_r g_\theta}{A_r} \chi \Delta N_r dr + \psi_t + \psi_c + \\ &+ \frac{A_\theta}{r \chi} \frac{a}{A_{\theta a}} (\Delta N_{\theta a} - g_{ra} \Delta N_{ra}), \end{aligned} \quad (3.141)$$

где $\psi_r = \frac{A_\theta}{r \chi} \left[\int_a^r \left(\Delta \varepsilon_{rT} + \frac{g_\theta A_\theta}{A_r} \Delta \varepsilon_{\theta T} \right) \chi dr - (r \Delta \varepsilon_{\theta T} \chi - a \Delta \varepsilon_{\theta T}^a) \right];$

$$\psi_c = \frac{A_\theta}{r\chi} \left[\int_a^r \left(\Delta \varepsilon_{rc} + \frac{g_\theta A_\theta}{A_r} \Delta \varepsilon_{\theta c} \right) \chi dr - (r \Delta \varepsilon_{\theta c} \chi - a \Delta \varepsilon_{\theta c}^a) \right];$$

$$\chi = \exp \int_a^r \frac{g_\theta A_\theta}{r A_r} dr.$$

Индекс a у функций как верхний, так и нижний означает, что имеется в виду значение функции при $r = a$.

Уравнение равновесия при растяжении

$$\frac{d(\Delta N_r)}{dr} - \frac{1}{r} (\Delta N_\theta - \Delta N_r) + \Delta q_r = 0, \quad (3.142)$$

где Δq_r — приращение внешних растягивающих сил. Если рассматривать только центробежные нагрузки, то

$$\Delta q_r = \Delta(\omega^2) \rho h r, \quad (3.143)$$

где ρ — плотность материала диска; ω — угловая скорость вращения.

Проинтегрировав (3.142) по радиусу, получим

$$\Delta N_r = \int_a^r \frac{1}{r} (\Delta N_\theta - \Delta N_r) dr - \int_a^r \Delta q_r dr + \Delta N_{ra}. \quad (3.144)$$

После подстановки в (3.144) выражения для $\Delta N_\theta - \Delta N_r$ из (3.141) получим интегральное уравнение растяжения диска

$$N_r(r) = L \Delta N_r(r) + \Delta N_{\theta a} F_1(r) + \Delta N_{ra} F_2(r) + F_q(r) + F_T(r) + F_c(r). \quad (3.145)$$

Здесь интегральная операция над ΔN_r

$$L \Delta N_r(r) = - \int_a^r \frac{1 - g_r}{r} \Delta N_r dr + \int_a^r m \int_a^{r_1} \frac{1 - g_r g_\theta}{A_r} \chi \Delta N_r dr_2 dr_1 \quad (3.146)$$

и функции

$$F_1(r) = \frac{a}{A_{\theta a}} \int_a^r m dr; \quad F_2(r) = 1 - \frac{a \chi_a g_{ra}}{A_{\theta a}} \int_a^r m dr;$$

$$F_q(r) = - \int_a^r \Delta q_r dr; \quad F_T(r) = \int_a^r \frac{1}{r} \psi_T dr; \quad (3.147)$$

$$F_c(r) = \int_a^r \frac{1}{r} \psi_c dr; \quad m = m(r) = \frac{A_\theta}{r^2 \chi}.$$

Получим разрешающее интегральное уравнение для диска с отверстием. При $r = b$ из (3.145) получим

$$\Delta N_r(b) = L \Delta N_r(b) + \Delta N_{\theta a} F_1(b) + \Delta N_{ra} F_2(b) + F_q(b) + F_T(b) + F_c(b), \quad (3.148)$$

откуда находим

$$\Delta N_r(r) = K_1 \Delta N_r(r) + \Delta N_{rb} \Phi_1 + \Delta N_{ra} \Phi_2 + \Phi_{1q} + \Phi_{1T} + \Phi_{1c}. \quad (3.149)$$

Здесь $\Delta N_r(b) = \Delta N_{rb}$;

$$K_1 \Delta N_r(r) = L \Delta N_r(r) - \frac{F_1(r)}{F_1(b)} L \Delta N_r(b);$$

$$\Phi_1 = \frac{F_1(r)}{F_1(b)}; \quad \Phi_2 = F_2(r) - \frac{F_1(r)}{F_1(b)} F_2(b);$$

$$\Phi_{1q} = F_q(r) - \frac{F_1(r)}{F_1(b)} F_q(b); \quad \Phi_{1T} = F_T(r) - \frac{F_1(r)}{F_1(b)} F_T(b);$$

$$\Phi_{1c} = F_c(r) - \frac{F_1(r)}{F_1(b)} F_c(b).$$

Для сплошного диска на малом радиусе a

$$\Delta N_{ra} = \Delta N_{\theta a}. \quad (3.150)$$

Из (3.145)

$$\Delta N_r = K_2 \Delta N_r(r) + \Delta N_{rb} \Phi(r) + \Phi_{2q} + \Phi_{2T} + \Phi_{2c}, \quad (3.151)$$

где $K_2 \Delta N_r(r) = L \Delta N_r - \frac{F_1(r) + F_2(r)}{F_1(b) + F_2(b)} L \Delta N_r(b)$;

$$\Phi(r) = \frac{F_1(r) + F_2(r)}{F_1(b) + F_2(b)}; \quad \Phi_{2q} = F_q(r) - \Phi(r) F_q(b);$$

$$\Phi_{2T} = F_T(r) - \Phi(r) F_T(b); \quad \Phi_{2c} = F_c(r) - \Phi(r) F_c(b).$$

Уравнения (3.149) и (3.151) решаются методом последовательных приближений, так же как и аналогичные уравнения гл. 1 § 4.

Последовательность и особенности расчета на ЭВМ. На рис. 3.9 в качестве примера приведена структурная схема программы для численного расчета дисков на растяжение с учетом истории нагружения. Как уже указывалось при описании алгоритма расчета, счет ведется этапами. Цикл работы двигателя разбивается на ряд этапов по времени. В конце каждого расчетного этапа фиксируются частота вращения, температуры диска на ободе и в центре. Задается температурное поле (обычно в табличной форме) в конце каждого n -го расчетного этапа, а также растягивающие силы на внутреннем и наружном контурах. Ниже перечислен остальной исходный числовой материал, не меняющийся обычно в процессе расчета.

Характеристика материала: γ — плотность, кг/см³; μ — коэффициент Пуассона; $\alpha = \alpha(T)$ — зависимость коэффициента линейного расширения от температуры; T — ряд температур (°C), включающих максимальную и минимальную температуры диска, для которых задаются значения $\alpha(T)$ и кривые деформирования; $f(\sigma_0, \epsilon_0, T)$ — кривые деформирования материала диска; задаются в табличной форме; $f_c(\epsilon_c, t, \sigma_i, T) = 0$ — кривые ползучести для материала диска; задаются в табличной форме; $\sigma_b = \sigma_b(T)$ — зависимость пре-

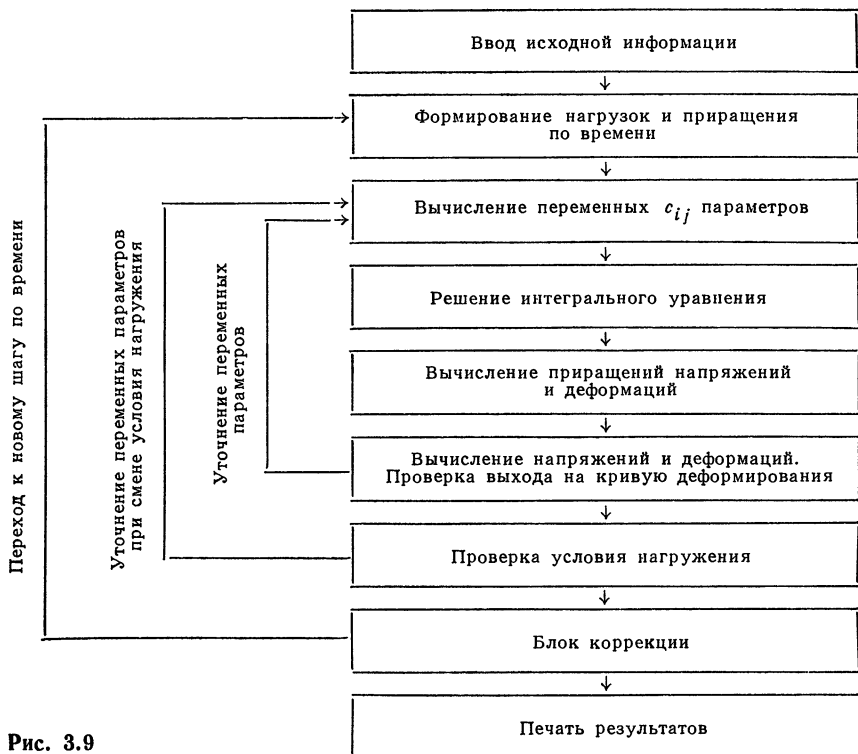


Рис. 3.9

дела прочности материала от температуры. Геометрические характеристики: r — текущий радиус диска, см; $h = h(r)$ — толщина диска, см.

Порядок счета следующий. Вводится перечисленный выше числовой материал. Открывается цикл по этапам, и на отведенное место оперативной памяти вводится числовой материал n -го этапа нагружения. Вычисляются коэффициенты c_{ij} , τ_{rT} , $\Phi_{\theta T}$, Φ_r и Φ_{θ} по напряженному состоянию конца $(n-1)$ -го этапа. Эти параметры в структурной схеме имеют индекс $(n-1)$, $c_{ij}(n-1)$.

С помощью линейной интерполяции вычисляются текущие значения E , $\frac{dE}{dT}$, $\frac{d(\alpha T)}{dT}$.

Для вычисления Φ_{rT}^p и $\Phi_{\theta T}^p$ необходимо подсчитать коэффициент β температурной податливости, определяемый по кривым деформирования линейной интерполяцией по двум параметрам σ_i и T .

Для вычисления Φ_r^c и Φ_{θ}^c определяют скорость ξ^c ползучести по кривым ползучести линейной интерполяцией по параметрам T , σ_i , τ . Из-за недостатка опытных данных по ползучести материала при низких температурах (например, для сплава ХН77ТЮР до 500—600°С) считаем, что $\xi^c = 0$ до некоторого значения. Это значение также задается в исходной информации. После вычисления коэффициентов c_{ij} ($i, j = 1, 2$), Φ_{rT} , $\Phi_{\theta T}$, Φ_{rc} , $\Phi_{\theta c}$ расчет ведется по приведенным выше формулам. Интегральное уравнение растяжения диска решается методом последовательных приближений. Точность расчета задается. После нахождения решения интегрального уравнения, например $\Delta N_r(r)$ при расчете на растяжение, определяют значения $\Delta N_{\theta}(r)$, а затем вычисляют прира-

щения напряжений $\Delta\sigma_{in}$. Далее по (3.127) и (3.130) проверяют условия нагружения. При этом мгновенный предел текучести $\sigma_T = f(e_{*}^p)$ определяют по кривым деформирования методом линейной интерполяции. Близость найденного значения σ_i к значению σ_T определяют допуском погрешностей.

В машинном представлении условия нагрузки реализуются следующим образом:

$$\frac{[\sigma_T(e_{*n}^p, T_n) - \sigma_{in}]}{\sigma_{in}} \leq \vartheta;$$

$$\Delta\sigma_{in} > \frac{[\sigma_T(e_{*n}^p, T_l) - \sigma_T(e_{*n}^p, T_{l-1})] \Delta T_n}{T_l - T_{l-1}} \quad (3.152)$$

— активное нагружение;

$$\Delta\sigma_{in} \leq \frac{[\sigma_T(e_{*n}^p, T_l) - \sigma_T(e_{*n}^p, T_{l-1})] \Delta T_n}{T_l - T_{l-1}} \quad (3.153)$$

— разгрузка.

Здесь l и $l-1$ — номера соседних кривых деформирований, между которыми предполагается линейная зависимость $\sigma_T(e_{*}^p > T)$ от температуры; ΔT_n — изменение температуры за шаг по времени Δt_n . Если в каком-либо расчетном сечении диска происходит изменение ранее принятого условия (3.152) на (3.153) или наоборот, то расчет для t_n повторяется с учетом информации о разгрузке или нагрузке.

В случае разгрузки или нейтрального нагружения расчет следует повторить, положив пластические составляющие коэффициентов равными $c_{ij}^p = 0$ и $e_{rT}^p, e_{\theta T}^p = 0$. Суммированием вычисляются напряжения в конце n -го этапа

$$\sigma_{rn} = \sigma_{rn-1} + \Delta\sigma_{rn}; \quad \sigma_{\theta n} = \sigma_{\theta n-1} + \Delta\sigma_{\theta n}. \quad (3.154)$$

Далее вычисляют интенсивность напряжений в конце n -го этапа и приращения деформаций

$$\varepsilon_{rn} = \varepsilon_{rn-1} + \Delta\varepsilon_{rn}; \quad \varepsilon_{\theta n} = \varepsilon_{\theta n-1} + \Delta\varepsilon_{\theta n}. \quad (3.155)$$

По окончании расчета в запоминающем устройстве ЭВМ фиксируются величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние точки в конце n -го этапа нагружения, и начинается расчет следующего $(n+1)$ -го этапа. В программе должна быть предусмотрена передача управления на ввод исходных данных для расчета нового этапа и повторение счета. По окончании расчета полного цикла нагружения диска предусматривается выдача на печать результатов расчета (напряжений, полных деформаций, накопленной пластической деформации, перемещений). При расчете следующего цикла нагружения делают отметку в исходной информации о необходимости повторения циклов расчета и количества повторений.

Накопление ошибки счета. В процессе шагового расчета накапливаются ошибки счета, которые, если не принимать специальных мер, могут привести к существенному искажению или даже к полностью неверным результатам. Накопление ошибки связано с рядом причин. Составляющими ошибки счета являются погрешности аппроксимации при решении интегральных задач. Если при рассмотрении стационарного процесса, расчете дисков с использованием конечных соотношений упругости и деформационных теорий пластичности и ползучести задание определенной точности решения дает удовлетворительные результаты при сходящемся процессе, то при повторении этих погрешностей на расчетных этапах и последующем суммировании результатов при шаговом расчете нестационарного процесса накапливается существенная погрешность.

Оценим эту погрешность при расчете растяжения диска [37]. Итерационный процесс последовательных приближений при решении уравнения (3.145) сводится в каждом j -м приближении к решению уравнения типа

$$[\Delta N_r(r)]_j = L \{ \Delta N_r(r) \}_{j-1} + \Delta F_1 \quad (3.156)$$

аналогично уравнению (1.113). Сходимость считается достаточной при условии, аналогичном (1.118)

$$\| [\Delta N_r]_j - [\Delta N_r]_{j-1} \| \leq \delta \| [\Delta N_r]_j \| \quad (3.157)$$

в каждом сечении, и обеспечивается выполнение соотношения

$$\| [\Delta N_r]_j - [\Delta N_r]_{j-1} \| \leq \frac{\| [\Delta N_r]_j - [\Delta N_r]_{j-1} \|}{1 - g}, \quad (3.158)$$

где $g = \| \alpha \| < 1$ — норма интегрального оператора.

На каждом n -м шаге шагового расчета пластического течения в диске погрешность

$$v_n \leq \frac{\delta \| \Delta N_{rk} \|_n}{1 - g_n}, \quad (3.159)$$

где k — число итераций на n -м шаге.

Погрешность за n шагов составит

$$\sum_n v_n \leq \delta \sum_n \frac{\| \Delta N_{rk} \|_n}{1 - g_n}. \quad (3.160)$$

Зависимость (3.160) иллюстрирует процесс накопления данной составляющей ошибки. Другая составляющая является функцией ошибок округления, матричных преобразований, погрешностей схемы линеаризации физической нелинейности, и оценка ее еще более затруднена. Приближенный метод частичного устранения погрешностей, связанных в основном с использованием явной схемы шагового расчета, предложенный Ю. М. Темисом, легко реализуется и опробован на практике [37]. Метод состоит в следующем. На наружном контуре обычно заданы краевые условия. На каждом шаге, например при расчете диска на растяжение, задают значение $\Delta N_{rb} = f(t)$ в виде функции от времени. В процессе счета эти величины также определяют из решения самой задачи уже с соответствующими погрешностями. Далее предполагают, что в каждом расчетном сечении радиуса r_i погрешность аппроксимации пропорциональна величине самой определяемой функции. Так, ошибки при определении радиальных сил

$$v_{nr}(r_i) = \Delta N_r(r_i) \frac{|\Delta N_{rb} - f_b(t_n)|}{|f_b(t_n)|}, \quad (3.161)$$

и для окружных сил

$$v_{n\theta}(r_i) = \Delta N_\theta(r_i) \frac{|\Delta N_{rb} - f_b(t_n)|}{|f_b(t_n)|}. \quad (3.162)$$

При решении упругой задачи напряжения и деформации в диске в начале и конце циклов нагружения с последующей разгрузкой должны совпадать. Однако при численной реализации шагового расчета без учета коррекции накапливаемая ошибка в упругом решении составляет 1% максимального размаха напряжений за 100 шагов, соответствующих одному циклу [для сетки с равномерным шагом $\Delta r = 0,04 (r_b - r_a)$ и точностью $\delta = 10^{-3}$]. * Использование фильтра, построенного на основе зависимостей (3.161) и (3.162), привело к тому, что результаты расчетов в упругой области за 100 шагов отличались в девятом-десятом знаках разрядной сетки. Применение коррекции ошибок позволило получить достаточно хорошие решения и для нелинейных задач.

Существенными также при таких расчетах оказываются вопросы устойчивости счета. Шаг по времени Δt_n выбирается в программе автоматически таким образом, чтобы условия нагружения (3.127) и (3.128) за время Δt_n не изменялись. Явление неустойчивости счета связано с выбранными соотношениями шагов по сетке радиусов и по времени. Соотношения, обеспечивающие устойчивый счет, удается подобрать путем пробных расчетов нескольких первых циклов, и на величину Δt_n при постоянной сетке по времени накладывается условие $\Delta t_n \leq \Delta t_{\max}$, где $\Delta t_{\max}$ — выбранное значение максимального шага, обеспечивающее устойчивый счет задачи на постоянной сетке с минимальным шагом.

Использование линейной аппроксимации для определения переменных параметров $c_{ij}(e_{ij}^p)$ вносит также погрешность. Можно использовать более сложные методы аппроксимации, требующие, однако, увеличения объема хранимой в памяти машины информации и увеличивающие время счета.

§ 10. Кинетика напряженно-деформированного состояния

Программа расчета, основанная на теории течения, позволяет исследовать кинетику напряженно-деформированного состояния диска в процессе его работы, что является важным для последующей оценки его долговечности [31]. Такая программа является по существу математической моделью диска, позволяющей проследить изменения напряжений и деформаций в процессе нагружения¹.

Пример 3.4. Рассмотрим процесс деформирования диска газовой турбины, расчет которого приведен в § 8 (пример 3.1) для демонстрации использования деформационных теорий пластичности и ползучести. Геометрические размеры диска приведены в приложении 1. Для удобства сравнения результатов с расчетом по деформационным теориям приняты те же расчетные сечения, что и в предыдущих примерах. В табл. 3.5—3.9 приведены исходные данные, использованные в расчете истории деформирования диска.

На рис. 3.10 показано изменение частоты вращения и температуры T_b на ободе диска при $r = b = 23,79$ см и T_a в районе центрального отверстия при $r = a = 7,65$ см в процессе нагружения в течение одного цикла работы, что соответствует данным табл. 3.6.

Режим максимальной частоты вращения совпадает с режимом максимальной разницы температуры обода и центра (режим 4). Режимы с 8 по 10 являются стационарными наибольшей продолжительности.

На рис. 3.11—3.18 приведены результаты расчета 150 циклов нагружения диска по данной программе. На рис. 3.11 показано распределение напряжений в диске на режиме 4 (максимальный режим) в первом цикле нагружения и при числе циклов $N = 150$. После определенного числа циклов напряжения меняются существенно в районе центрального отверстия и по периферийной области диска. В центральной зоне напряжения уменьшаются за счет пластической деформации. Развитие деформаций ползучести в периферийной обла-

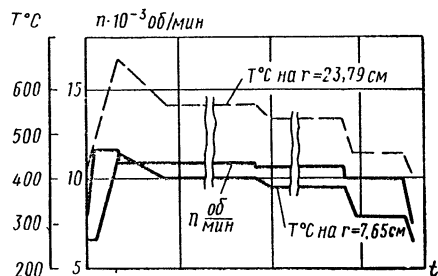


Рис. 3.10

¹ Расчеты, приведенные в этом параграфе, выполнены по программе, составленной Ю. М. Темисом.

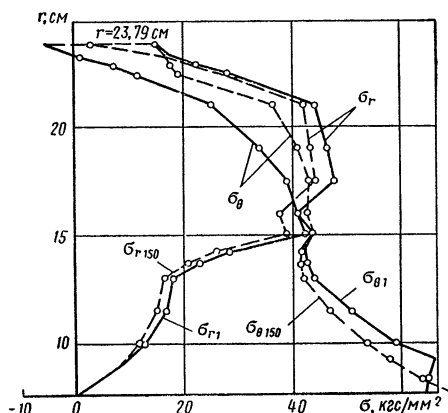


Рис. 3.11

3.5. Геометрические характеристики диска, см

r	h	r	h
7,65	5,40	15,05	2,67
8,30	6,70	16,00	2,65
9,25	6,70	17,50	2,10
10,00	6,70	19,00	1,98
10,00	6,50	21,00	1,80
11,50	6,50	22,40	2,45
13,00	6,50	22,80	2,93
13,70	5,15	23,15	3,50
14,25	4,10	23,79	3,50

3.6. Характеристики цикла нагружения

№ режима	$t, \text{ ч}$	$n, \text{ об/мин}$	Температура $T, ^\circ\text{C}$						
			7,65	8,30	9,25	10,00	10,00	11,50	13,00
1	0,000	720	260	260	262	264	264	268	276
2	0,010	11 620	260	260	262	264	264	268	276
3	0,035	11 620	456	458	461	464	464	471	480
4	0,036	10 880	456	458	461	464	464	471	480
5	0,086	10 880	400	400	404	405	405	410	418
6	0,370	10 880	400	400	404	405	405	410	418
7	0,371	10,630	400	400	404	405	405	410	418
8	0,421	10 630	380	380	382	384	384	388	396
9	1,204	10 630	380	380	382	384	384	388	396
10	1,205	9 920	380	380	382	384	384	388	396
11	1,255	9 920	312	312	314	316	316	320	328
12	1,538	9 920	312	312	314	316	316	320	328
13	1,588	7 200	260	260	262	264	264	268	276

сти приводит к изменению знака окружных напряжений. Напряженное состояние в первом цикле близко к напряженному состоянию, полученному при использовании деформационных теорий и приведенным в § 8. Таким образом, напряжения в последующих циклах нагружения отличаются от напряжений, определенных обычно принятым методом, и при достаточно точных исследованиях этот эффект должен быть учтен.

3.7. Характеристики материала ХН77ТЮР-ВД

$T, ^\circ\text{C}$	$E \cdot 10^{-4}, \text{ кгс/мм}^2$	$\alpha \cdot 10^6, \text{ 1/град}$
20	2,00	12,90
600	1,71	14,60
700	1,55	15,10

На рис. 3.12 и 3.13 в координатах σ_r, σ_θ и $\epsilon_r, \epsilon_\theta$ показаны пути нагружения и деформирования соответственно для точки на ободе диска в сечении на радиусе $r = b$. Размахи компонент напряжений и деформаций ($\Delta\sigma_r, \Delta\sigma_\theta$ и $\Delta\epsilon_r, \Delta\epsilon_\theta$) практически не изменяются от цикла к циклу, так как

напряженное состояние в этой точке остается упругим. Однако за счет перераспределения напряжений, связанного с возникновением пластических деформаций в центральной зоне и деформаций ползучести в области обода, меняются средние напряжения σ_{mr} и $\sigma_{m\theta}$ не только по величине, но и по знаку, и все петли смещаются. Аналогичная картина наблюдается для деформаций (см. рис. 3.12). Напряжения и деформации изменяются при максимальном режиме в периферийном сечении диска в зависимости от номера цикла (рис. 3.14 и 3.15 соответственно).

На рис. 3.16 приведены аналогичные зависимости для полотна диска ($r = 17,5$ см), а на рис. 3.17 и 3.18 изменение напряжения и деформации в центральной зоне ($r = 8,3$ см).

Приведенные выше результаты позволяют оценить изменение напряженно-деформированного состояния в процессе работы диска. Изменение формы цикла от цикла сжатия к циклу растяжения может сказаться на результатах последующей оценки долговечности. Изменения амплитуды цикла в центральной зоне диска и в полотне, а также статической составляющей цикла

($N_{rb} = 39,218$ кгс/см; $n = 1000$ об/мин)

при r , см											
	13,70	14,25	15,05	16,00	17,50	19,00	21,00	22,40	22,80	23,15	23,79
	280	283	288	296	310	325	352	378	388	396	410
	280	283	288	296	310	325	352	378	388	396	410
	484	488	496	504	520	540	576	612	624	638	662
	484	488	496	504	520	540	576	612	624	638	662
	422	426	432	440	452	470	500	525	536	544	564
	422	426	432	440	452	470	500	525	536	544	564
	422	426	432	440	452	470	500	525	536	544	564
	400	403	408	416	430	445	472	498	508	516	530
	400	403	408	416	430	445	472	498	508	516	530
	400	403	408	416	430	445	472	498	508	516	530
	332	335	340	348	362	377	394	420	430	438	452
	332	335	340	348	362	377	394	420	430	438	452
	280	283	288	296	310	325	352	378	388	396	410

тоже влияют на оценку долговечности. Напряженное состояние и форма цикла устанавливаются постепенно. С заданной точностью можно выделить номер цикла, с которого начинается установившееся состояние; назовем этот цикл установившимся. Установившийся цикл соответствует моменту, когда пластическое деформирование практически прекращается, а ползучесть переходит в установившуюся стадию. В различных материалах при различных уровнях нагрузок и температуры эти процессы могут протекать по-разному. При значительной пластической деформации и склонности материала к разупрочнению, при развитой ползучести в третьей стадии установившееся состояние может не наступать. Отсутствие стабильного состояния характерно также для дисков с несколькими пластическими зонами.

3.8. Табличные значения напряжений по диаграммам деформирования материала ХН77ТЮР-ВД для различных температур кгс/мм²

T, °C	ε, %					
	0	0,26	0,30	0,34	0,38	0,42
20	0	50,8	56,20	60,00	62,60	64,35
600	0	44,1	39,30	52,95	55,25	56,80
700	0	39,95	44,95	49,10	52,50	55,00

T, °C	ε, %					
	0,45	0,48	0,51	0,57	0,80	25,0
20	65,25	66,00	66,50	67,40	68,4	116,00
600	57,75	58,50	59,15	60,0	61,80	98,00
700	56,30	57,15	57,80	58,8	60,00	77,00

Пример 3.5. Рассмотрим результаты расчета диска газовой турбины, диаметрального сечения которого показано на рис. 3.19. Материал диска — сплав ХН77ТЮР. Программа нагружения диска показана на рис. 3.20. Напряженное состояние в диске в конце этапа с максимальной частотой вращения ($\frac{n}{n_{\max}} = 1$, $\Delta T = T_b - T_a = \max$) показано на рис. 3.19 для первого и десятого циклов. Напряженное состояние десятого цикла с определенной точностью можно считать установившимся. Напряжения в одних и тех же сечениях в этих циклах различаются существенно, причем на наружном контуре диска (обода) при $r = b$ напряжения меняют знак. Расчет по деформационным теориям здесь, как и в первом примере, дает результаты, близкие к результатам, получившимся для максимального режима первого цикла.

3.9. Скорости установившегося участка ползучести $\dot{\epsilon}^0 \cdot 10^6 (t = 1000 \text{ ч})$

σ, кгс/мм ²	T, °C	
	600	670
20	0,033	1,181
30	0,387	9,168
40	2,228	39,10
50	8,667	118,1
60	34,84	296,6

Примечание. При 400° С $\dot{\epsilon}^0 = 0$.

Проследим кинетику напряжений и деформаций в диске, рассчитанную без учета ползучести. На рис. 3.21, б показано развитие пластических зон в диске, для чего построено распределение накопленной пластической деформации ϵ_{ip} в зависимости от номеров циклов, отмеченных цифрами. На рис. 3.21, а дана расчетная схема диска и указаны радиусы и номер зон. Максимальные пластические деформации от цикла к циклу развиваются в трех зонах. Наибольшие пластические деформации у внутреннего контура диска, причем (см. рис. 3.21, б) за семь циклов и далее пластические деформации не стабилизируются и продолжают накапливаться в отмеченных трех зонах. На рис. 3.22 показан путь деформирования при циклическом нагружении диска в координатах ϵ_r и ϵ_θ

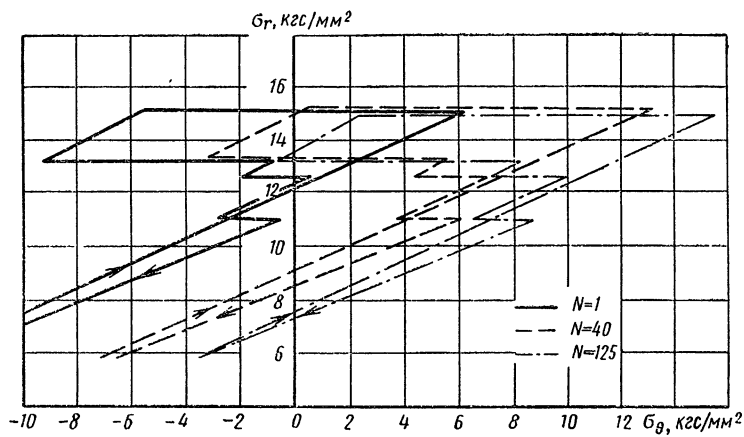


Рис. 3.12

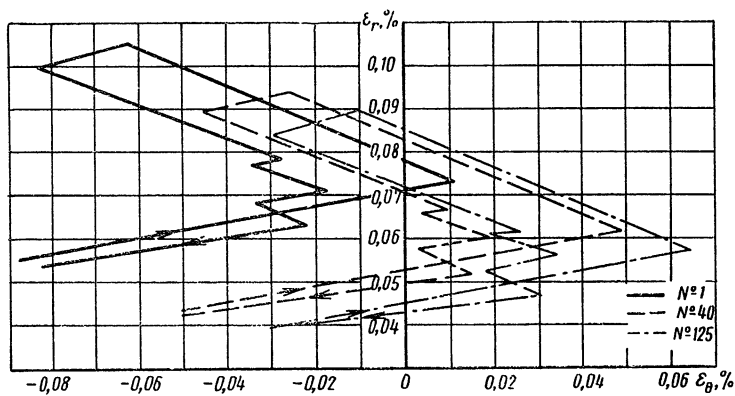


Рис. 3.13

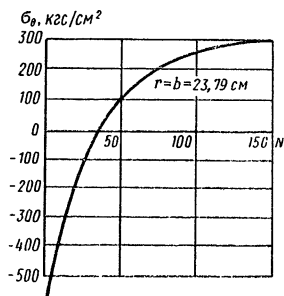


Рис. 3.14

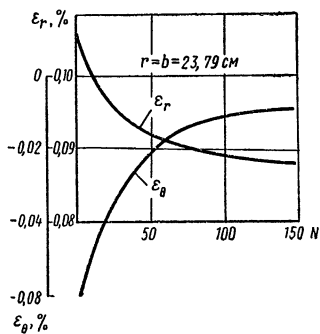


Рис. 3.15

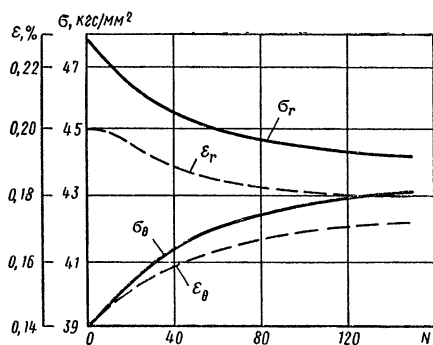


Рис. 3.16

деленных при учете деформаций ползучести при той же программе нагружения. На рис. 3.21, в показано развитие пластической деформации в диске. Из сравнения с предыдущими результатами следует, что ползучесть заметно влияет на накопление пластической деформации. По всему полотну диска пластическая деформация меньше, чем деформация, определенная без учета ползучести, и к четвертому циклу ее накопление прекращается. В области шейки происходит более интенсивное накопление пластической деформации, вызванное перераспределением напряжений по полотну диска из-за ползучести.

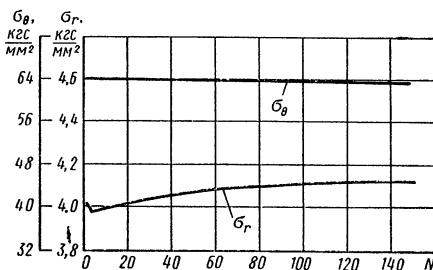


Рис. 3.17

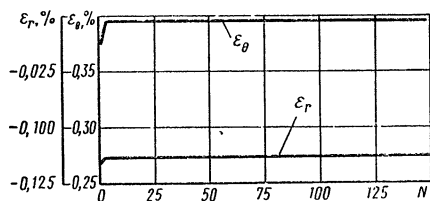


Рис. 3.18

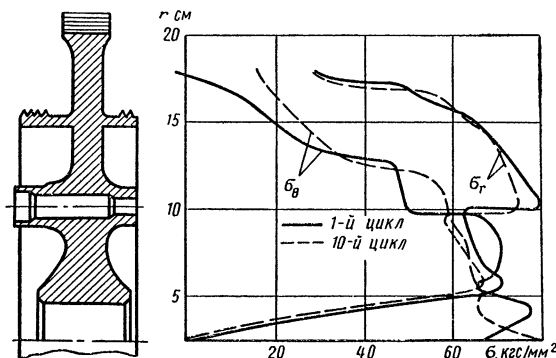


Рис. 3.19

для расчетной точки, расположенной на радиусе $r = 10$ см (точка 3 на рис. 3.21, а). Компоненты пластической деформации получают наибольшее приращение в первом цикле нагружения; накапливаемые в последующих циклах деформации меняются менее резко (см. рис. 3.21, б и 3.22). Изменение напряженного состояния в этой же точке при пластическом деформировании в координатах σ_r и σ_θ показано на рис. 3.23. Нагружение диска в первом цикле существенно отличается от простого. В последующих циклах нагружение становится практически близким к простому.

Рассмотрим кинетику напряжений и деформаций в этом диске, опре-

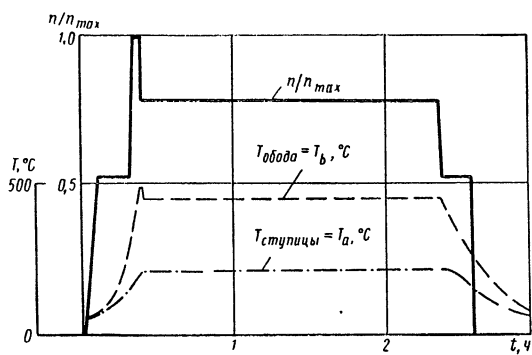


Рис. 3.20

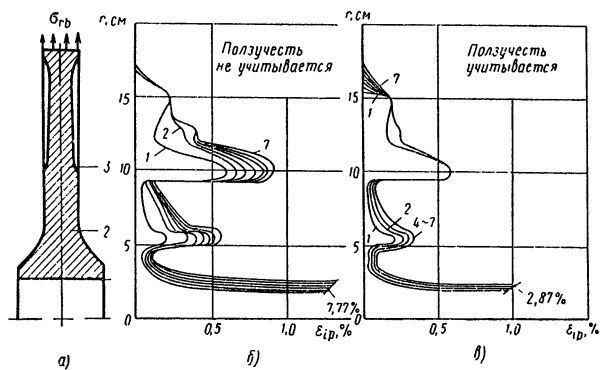


Рис. 3.21

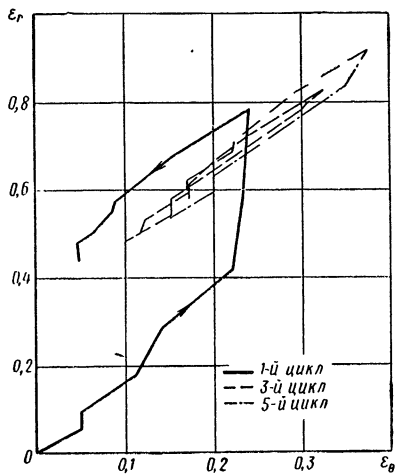


Рис. 3.22

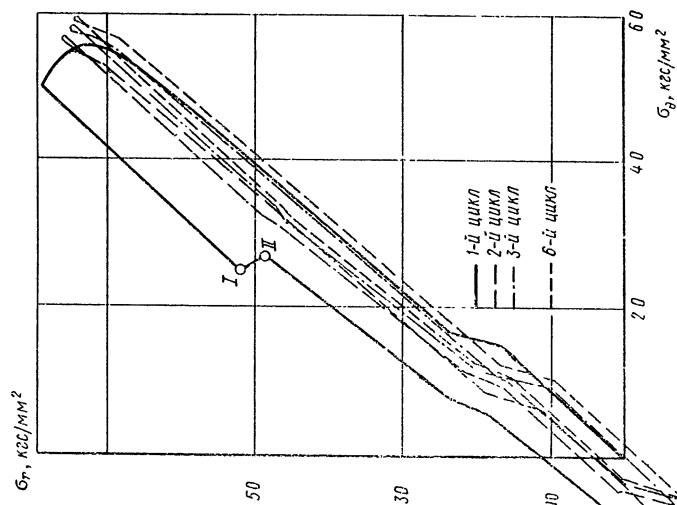


Рис. 3.25

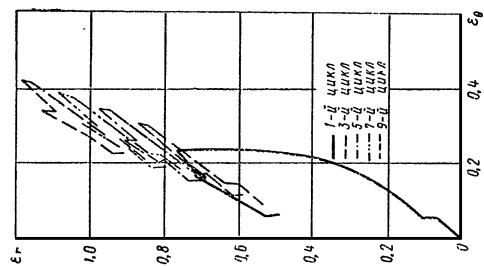


Рис. 3.24

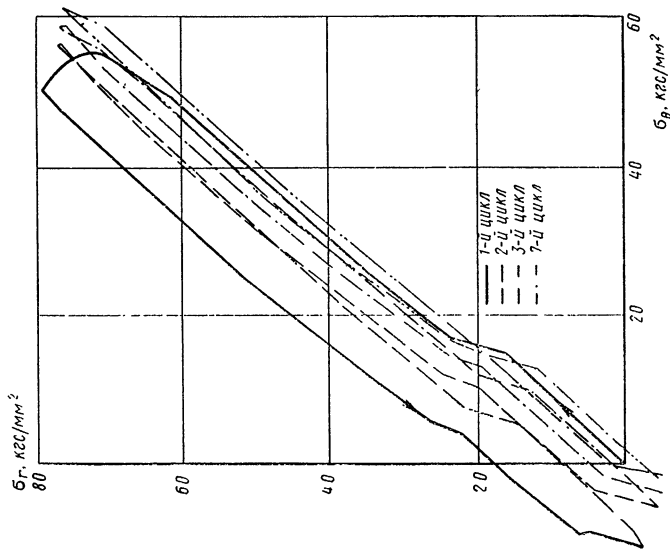


Рис. 3.23

Пути деформирования (для точки $3\ r = 10\text{ см}$), построенные в координатах $(\epsilon_r, \epsilon_\theta)$, показаны на рис. 3.24; постоянное накопление остаточных деформаций в точке вызвано ползучестью. На рис. 3.25 показано изменение напряжений σ_r, σ_θ . Участок $I—I'$ соответствует изменению напряжений в результате ползучести на стационарном этапе работы диска. Таким образом, ползучесть может существенно изменить путь нагружения. Петли на диаграмме $(\sigma_r, \sigma_\theta)$, начиная с шестого цикла, совпадают; петли $(\epsilon_r, \epsilon_\theta)$, показанные на рис. 3.24 для пятого и девятого циклов, также одинаковы и сдвинуты относительно друг друга на величину накопленной за цикл деформации ползучести. Таким образом, наступает установившееся состояние.

Результаты расчетов позволяют сделать вывод о влиянии развитой ползучести на протекание пластического деформирования и изменении зон появления неупругих деформаций в зависимости от того, каким образом учитываются в расчете эти деформации. Таким образом, расчеты, сделанные по программе, алгоритм которой учитывает историю нагружения, позволяют получить новые эффекты, не описываемые обычным расчетом и существенные для дальнейшей оценки прочности и долговечности.

Методы расчетной оценки прочности и долговечности дисков

§ 11. Запасы статической прочности

С помощью расчетных методов, изложенных в предыдущих главах, определяют напряжения и деформации в дисках, которые служат для оценки прочности и надежности работы диска в течение требуемого времени (ресурса). Напряжения и деформации сравнивают с предельными значениями, допустимыми для материала (пределами прочности и т. п.). Отношение предельного значения любого из этих параметров к действующему в конструкции представляет собой коэффициент запаса k_p [102] по данному параметру (или просто запас по параметру).

В результате разрушения дисков образуются куски — фрагменты, обладающие значительной кинетической энергией. Запасы прочности дисков регламентируются специальными нормами.

При оценке прочности запасы сравнивают с минимально допустимой величиной.

Должно быть

$$k_p \geq k_{pN}, \quad (4.1)$$

где k_p — коэффициент запаса по рассматриваемому параметру; k_{pN} — минимально допустимый нормированный запас.

При назначении допустимых запасов для дисков учитывают неточность метода расчета, отличия принятых характеристик материала от действительных, масштабный фактор, отклонения в допусках на геометрические параметры, возможные отклонения нагрузок и температур от расчетных и другие факторы. Так как все отклонения носят случайный характер, то наиболее обоснованный подход к назначению допустимого запаса в диске должен быть вероятностным [8]. Однако получение статистических данных по рассеянию характеристик материала, перенос этих результатов на натурные диски с достаточной достоверностью требуют большого количества экспериментов. Особые затруднения при статистической оценке запасов вызывает учет отклонений рабочих параметров (нагрузок, температур) в пределах допуска и случайных выпадов из-за возникающих неисправностей.

В инженерной практике коэффициенты запасов для дисков устанавливают на основе сопоставления расчетных и экспериментальных значений со значениями, полученными при эксплуатации, отражающими все указанные выше случайные отклонения (детерминированные запасы прочности).

Запас прочности по напряжениям в диске

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{экв}}}, \quad (4.2)$$

где $\sigma_{\text{пр}}$ — предельное напряжение, являющееся характеристикой материала; $\sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентное напряжение в рассматриваемой точке.

Выбор характеристик для определения $\sigma_{\text{пр}}$ и $\sigma_{\text{экв}}$ и регламентируемые запасы зависят от сложившейся практики. Обычно нормы при таких расчетах устанавливают применительно к дискам определенных конструкций, предназначенным для работы в определенных условиях и изготовленных из материалов данного типа. В этом случае коэффициенты запасов представляют собой своеобразные критерии подобия конструкций и их можно устанавливать в зависимости от результатов испытаний дисков рассматриваемого типа. При расчете коэффициента запаса по разрушению для кратковременно работающих конструкций в качестве предельного напряжения принимают предел прочности σ_b , а эквивалентное напряжение подсчитывают в соответствии с теорией Мора

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \lambda \sigma_3, \quad (4.3)$$

где σ_1 — максимальное напряжение; σ_3 — минимальное напряжение; коэффициент $\lambda = \sigma_{b, \text{раст}} / \sigma_{b, \text{сж}}$ представляет собой отношение пределов прочности при растяжении и сжатии; для малопластичных материалов $\lambda < 1$.

Так как в дисках напряжения в окружном и радиальном направлениях обычно растягивающие, а напряжения, нормальные к срединной поверхности, в большинстве случаев малы, то

$$\sigma_{\text{экв}} \approx \sigma_{\text{max}}; \quad (4.4)$$

запас прочности

$$k_{\sigma} = \sigma_b / \sigma_{\text{max}}. \quad (4.5)$$

Предел прочности σ_b является условной величиной, относящейся к начальной площади сечения образца F_1 (см. § 8 гл. 3). Однако большинство экспериментальных исследований [55, 58, 87 и др.], а также наш опыт оправдывают определение k_{σ} по (4.5). Допустимая величина k_{σ} зависит от условий эксплуатации диска, необходимой надежности, точности оценки напряжений, действующих в конструкции, и регламентируется в пределах 1,3—1,8.

Для обеспечения работы материала в упругой области вводят запас по текучести, который определяют по формуле

$$k_{\sigma} = \sigma_T / \sigma_{\text{эKB}}. \quad (4.6)$$

При этом эквивалентное напряжение принимают равным интенсивности напряжений

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sigma_i, \quad (4.7)$$

что соответствуют энергетическому критерию пластичности [91].

В тонких дисках гладкой формы наибольшие напряжения возникают в центральной зоне и в подобных сечениях, где имеет место двухосное растяжение. В этих случаях критерий интенсивности напряжений мало отличается от максимального нормального напряжения и запас по текучести

$$k_{\sigma} = \sigma_T / \sigma_{\text{max}}. \quad (4.8)$$

Если напряженное состояние в диске объемное, например в утолщенной ступице (см. гл. 5), следует использовать формулу (4.3).

Известны более сложные зависимости для определения эквивалентных напряжений, лучше согласующиеся с экспериментом [18], однако их применение связано с необходимостью проведения специальных исследований, в частности на прочность при кручении и сжатии.

Запас прочности определяется как по результатам упругого, так и упругопластического расчета. Точки, в которых запас прочности минимален, могут в этих случаях не совпадать из-за перераспределения напряжений в результате пластической деформации и ползучести. Это следует учитывать при оценке запаса и сравнении его с нормативными величинами.

В условиях повышенной температуры свойства материала меняются в процессе действия нагрузки. В этом случае действующие напряжения следует сравнивать с пределом длительной прочности материала $\sigma_{\text{дл}}$, и запас по напряжениям

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{дл}}}{\sigma_{\text{эKB}}}. \quad (4.9)$$

Предел длительной прочности выбирают соответствующим рассматриваемому времени работы t и температуре материала. Обычно используют полученные экспериментально кривые длительной прочности, которые в двойных логарифмических координатах имеют вид ломаных, состоящих из отрезков прямых (рис. 4.1). Каждый из отрезков описывается уравнением

$$\sigma^m t = \text{const}. \quad (4.10)$$

Показатель степени m различен для различных участков и является характеристикой потери прочности материала [102]; обычно $m = 4 \div 16$. Каждому значению температуры соответствует

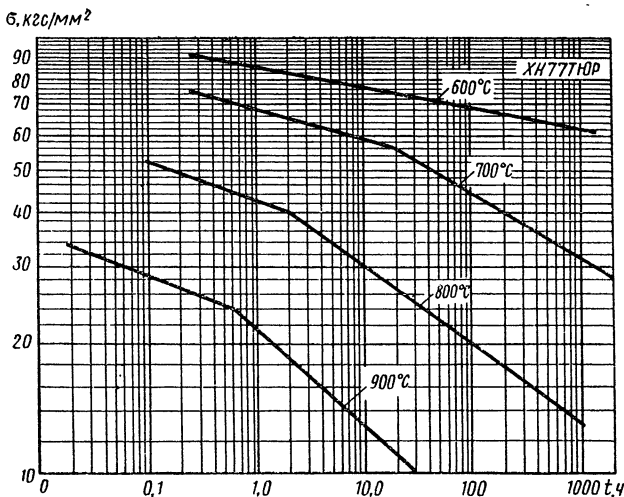


Рис. 4.1

своя кривая. На рис. 4.1 показаны кривые длительной прочности сплава ХН77ТЮР.

Эквивалентные напряжения в формуле (4.9) также определяют в соответствии (с 4.3). Принимают

$$\lambda = \frac{\sigma_{\text{дл. раст}}}{\sigma_{\text{дл. сж}}} \quad (4.11)$$

Иногда используют и другие значения коэффициентов λ , полученные экспериментально [102]. При отсутствии надежного эксперимента принимают $\lambda = 1/2$. Так как в процессе длительного нагружения при повышенных температурах материалы склонны к уменьшению пластичности, то критерий (4.7) мало пригоден. Определение запасов прочности по напряжениям включено в программу расчета дисков на растяжение, которая приведена в приложении 1, и на растяжение с изгибом (приложение 2).

Пример 4.1. Результаты расчета напряжений в диске турбины из сплава ХН77ТЮР-ВД приведены в контрольном расчете к программе и анализируются в гл. 1 § 4 (упругий расчет см. рис. 1.10) и в гл. 3 § 8 (упругопластический расчет см. рис. 3.4). В программе имеется автономная процедура «Запас», по которой вычисляются запасы по напряжениям. Описание этой процедуры см. также в приложении 1. Если проводят упругий расчет, то в исходной информации в табличной форме задают пределы прочности материала для нескольких температур диска, или если учитывают длительность работы, то задают пределы длительной прочности. Промежуточные пределы прочности для всех температур в расчетных точках определяются путем интерполяции. Результаты расчета выдаются на печать в виде запасов по напряжениям k_{σ} ,

обозначенных по радиальным напряжениям $k_{\sigma} = k_{M_r} = \frac{\sigma_b}{\sigma_r}$ или $k_{M_r} = \frac{\sigma_{\text{дл}}}{\sigma_r}$ и по окружным напряжениям $k_{\sigma} = k_{M_{\theta}} = \sigma_b/\sigma_{\theta}$ или $k_{M_{\theta}} = \sigma_{\text{дл}}/\sigma_{\theta}$ для каждой расчетной точки. В конце печати результатов расчета приводятся минималь-

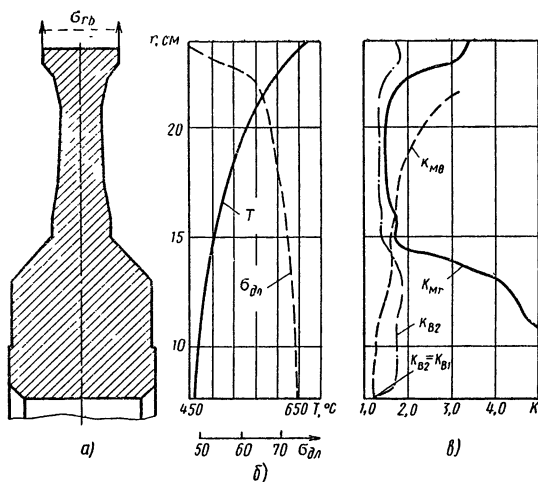


Рис. 4.2

ные значения $k_{Mr \min}$ и $k_{M\theta \min}$ с указанием радиусов соответствующих расчетных точек.

Если проводится упругопластический расчет, то последовательно выдаются результаты упругого и упругопластического расчетов. Запасы прочности по напряжениям упругопластического расчета для расчетных радиусов того же диска турбины (рис. 4.2, а) показаны на рис. 4.2, в. На рис. 4.2, б показано меридиональное сечение диска, распределение температуры в зависимости от радиуса и пределов длительной прочности в кгс/мм². Напряжения упругопластического расчета в этом диске приведены на рис. 3.4.

Иногда нужно определить коэффициент запаса по долговечности. При работе на одном режиме запас по долговечности находят по кривым длительной прочности (рис. 4.3)

$$k_t = \frac{t^* (\sigma_{\text{ЭКВ}})}{t}, \quad (4.12)$$

где t^* ($\sigma_{\text{ЭКВ}}$) — время до разрушения при напряжении, равном эквивалентному, и температуре $T^\circ \text{C}$; t — время работы диска (ресурс).

Запас прочности по напряжениям связан с запасом по долговечности

$$k_t = \frac{t^* (\sigma_{\text{ЭКВ}})}{t} = \left(\frac{\sigma_{\text{ДЛ}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}} \right)^m = (k_\sigma)^m. \quad (4.13)$$

Для сплавов дисков турбин при обычных температурах (для сплава ХН77ТЮР при температуре до 600—650°С или для сплава ХН73МБТЮ при 650—700°С) показатель степени $m = 8 \div 15$, и запас по долговечности получается большим. Обычно $k_t > 10$. С повышением температуры запас по долговечности резко уменьшается.

При вариантных расчетах, особенно в процессе проектирования, приходится решать следующую задачу: насколько можно изменить температуру диска за счет некоторого изменения запаса прочности при сохранении неизменными величин напряжений и времени работы. В этом случае удобно использовать запас по температуре

$$k_T = T^* C - T^0 C, \quad (4.14)$$

где $T^* C$ — температура в опасной точке, при которой произойдет разрушение при том же напряжении $\sigma_{\text{экв}}$ и времени t (см. рис. 4.3). Запас дисков по температуре обычно составляет $70\text{—}120^\circ \text{C}$.

Турбомашины имеют несколько режимов работы, различающихся нагрузками и температурами. Во время запуска повышенные температурные градиенты приводят к высокому уровню суммарных напряжений. Запасы прочности на нестационарных режимах из-за больших напряжений могут оказаться сравнимыми с запасами прочности на менее напряженных режимах большой продолжительности. Таким образом, повреждение в дисках, связанное с процессами ползучести, является суммой повреждений, накопленных на различных режимах, и в таких случаях запас прочности следует определять с учетом повреждений на всех режимах, вклад которых в повреждение существен.

Эквивалентный запас прочности $k_{\sigma_{\text{экв}}}$ находят приведением всех режимов к одному наиболее тяжелому, которым считают режим с минимальным коэффициентом запаса. Это может быть как стационарный режим, так и нестационарный.

На каждом i -м режиме запас по напряжениям в расчетной точке определяется как

$$k_{\sigma_i} = \frac{\sigma_{\text{дл } i}}{\sigma_{\text{экв } i}}. \quad (4.15)$$

Здесь $\sigma_{\text{дл } i}$ соответствует температуре в рассматриваемой точке диска на i -м режиме и длительности этого режима; $\sigma_{\text{экв } i}$ — напряжения на i -м режиме.

Из формул (4.12) и (4.13) следует, что

$$\frac{\sigma_{\text{дл } i}}{\sigma_{\text{экв } i}} = \left(\frac{t_i^*}{t_i} \right)^{\frac{1}{m_i}}, \quad (4.16)$$

где t_i^* — время до разрушения, соответствующее $\sigma_{\text{экв } i}$; t_i — время работы на i -м режиме.

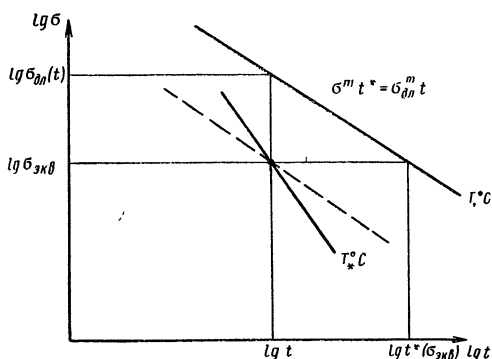


Рис. 4.3

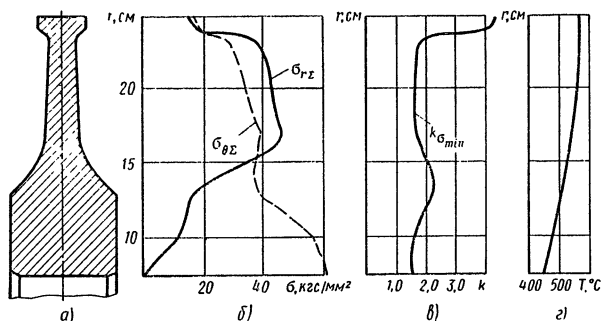


Рис. 4.4

Повреждение при длительной работе, связанное с истощением долговечности, для i -го режима

$$\Delta \Pi_i = \frac{t_i}{t_i^*}. \quad (4.17)$$

В соответствии с принятой гипотезой линейного суммирования повреждений общее повреждение в диске за n режимов

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Delta \Pi_i = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t_i^*} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_{\text{экв } i}}{\sigma_{\text{дл } i}} \right)^{m_i}. \quad (4.18)$$

Если повреждение на двух режимах одинаково, то режимы считаются эквивалентными. Таким образом, n режимов могут быть приведены к одному эквивалентному режиму с таким же повреждением диска

$$\Pi_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^n \Delta \Pi_i, \quad (4.19)$$

где

$$\Pi_{\text{экв}} = t_{\text{экв}} / t_{\text{экв}}^* \quad (4.20)$$

и $t_{\text{экв}}$ — время работы на эквивалентном режиме. Из (4.17), (4.18) и (4.20) соотношение запасов по долговечности на эквивалентном и на других режимах следующее:

$$\frac{1}{k_{l \text{ экв}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_{li}}. \quad (4.21)$$

Учитывая (4.15) и (4.16), получим соотношение запасов по напряжениям на рабочих режимах и на эквивалентном режиме

$$\frac{1}{k_{\sigma \text{ экв}}} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k_{\sigma i}} \right)^{m_i} \right)^{\frac{1}{m_{\text{экв}}}}, \quad (4.22)$$

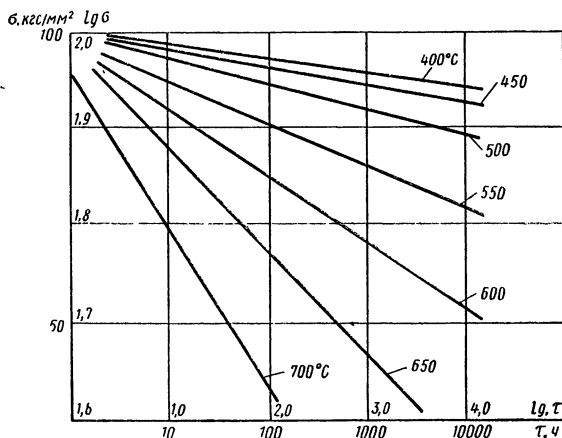


Рис. 4.5

где $m_{\text{экв}}$ — показатель степени кривой длительной прочности при температуре эквивалентного режима. Примеры приведения режимов можно найти в работах [20, 102].

Пример 4.2. На рис. 4.4, а показано меридиональное сечение диска газовой турбины. Диск изготовлен из сплава ХН77ТЮР-ВД и работает на трех режимах (табл. 4.1). Распределение температуры по радиусу диска на режиме I приведено на рис. 4.4, г, а суммарные напряжения от действия центробежных сил и нагрева на режиме I на рис. 4.4, б. Напряжения максимальны на внутреннем радиусе диска; по результатам упругопластического расчета $\sigma_{\theta a} = 61,47$ кгс/мм² на радиусе $r = 7,65$ см; запас по напряжениям с учетом длительности данного режима в этой точке $k_{\sigma} = 1,518$. Распределение $k_{\sigma \min}$ в зависимости от радиуса показано на рис. 4.4, в. На режимах II и III максимальные напряжения возникают в месте расточки; запасы k_{σ} на радиусе 7,65 см приведены в табл. 4.1. Эквивалентный коэффициент запаса по напряжениям рассчитан по (4.22), причем в качестве эквивалентного принят режим I. Кривые длительной прочности сплава ХН77ТЮР-ВД приведены на рис. 4.5. По долговечности и напряжениям на режиме II диск достаточно нагружен и этот режим влияет на суммарное повреждение; эквивалентное время на режиме II составляет примерно 30% времени на режиме I.

4.1. Режим работы дисков (при эквивалентном режиме $k_{\sigma} = 1,508$; $t_{\text{экв}} = 203,7$ ч)

Режим	t , ч	T_a	T_b	n , об/мин	$\sigma_{\theta z}$	$\sigma_{\text{дл}}$	m	k_{σ}	$t_{\text{ЭКВ}}$, ч
		°C			кгс/мм ²				
I	150	448	578	11 650	61,47	93,28	60	1,518	150
II	4200	390	500	10 875	59,57	100	50	1,679	53,68
III	1650	370	470	10 640	57,99	100	60	1,724	0,06

Для оценки долговечности, особенно при работе на различных режимах, используют обобщенные зависимости длительной прочности в виде [102]

$$\sigma_{\text{дл}} = f[P(T_{\text{абс}}, t^*)], \quad (4.23)$$

где $P(T_{\text{абс}}, t^*)$ — параметр Ларсена—Миллера; t^* — время до разрушения; $T_{\text{абс}}$ — абсолютная температура.

$$P = T_{\text{абс}} (\lg t^* + C). \quad (4.24)$$

Величина C зависит от температуры и напряжений и меняется примерно в пределах 15—30, однако приближенно принимают $C = \text{const}$. Для большинства материалов можно принять $C = 20$.

Зависимости (4.23) при различных долговечностях и напряжениях для сплава ХН77ТЮР-ВД приведены на рис. 4.6, причем график $\sigma(P)$ дан с учетом разброса свойств по большому числу экспериментальных данных. Используя совмещенный график (рис. 4.6), можно осуществить приведение режимов как по длительности, так и по температуре. Например, при напряжениях $\sigma = 50 \text{ кгс/мм}^2$ увеличение температуры с 600 до 650° С (точки 1 и 2) уменьшает долговечность с 10 000 до 500 ч. При 700° С уменьшение времени с 5000 до 500 ч (точки 3 и 4) увеличивает длительную прочность с 26 до 37 кгс/мм² или запас по напряжениям в 1,42 раза. На рис. 4.7 приведена совмещенная зависимость Ларсона—Миллера для сплава ХН73МБТЮ.

В результате необратимых процессов пластичности и ползучести деформация дисков может быть значительной и приводить к нежелательным явлениям — изменению зазоров в лабиринтных уплотнениях, короблению, изменению посадок, задеванию лопаток за корпус и т. д. Пластические деформации, появляющиеся сразу после нагружения, в дальнейшем не увеличиваются вследствие упрочнения материала, если нагрузки не превышают первоначально приложенных; это используют на практике. Для того чтобы при работе не менялись посадки и зазоры, а материал деформировался упруго, применяют технологическую операцию предварительной раскрутки диска — автофретирование. Диск, почти полностью механически обработанный, за исключением посадочных мест, раскручивается (обычно без лопаток) на специальной технологической установке при постоянной температуре, примерно соответствующей рабочей. Частоту вращения при этой операции определяют расчетным путем таким образом, чтобы напряжения в диске примерно соответствовали напряжениям упругого расчета для облопаченного диска на максимальном рабочем режиме в эксплуатации. Затем диск снимают с установки и подвергают окончательной механической обработке посадочных мест, уплотнения и т. п. В табл. 4.2 приведены остаточные удлинения дисков газовых турбин различных размеров (типов) по наружному диаметру после автофретирования и указана относи-

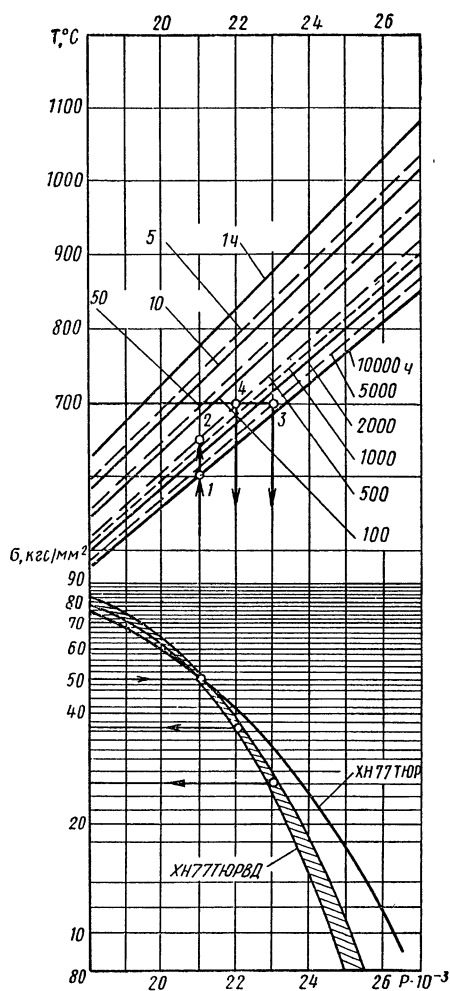


Рис. 4.6

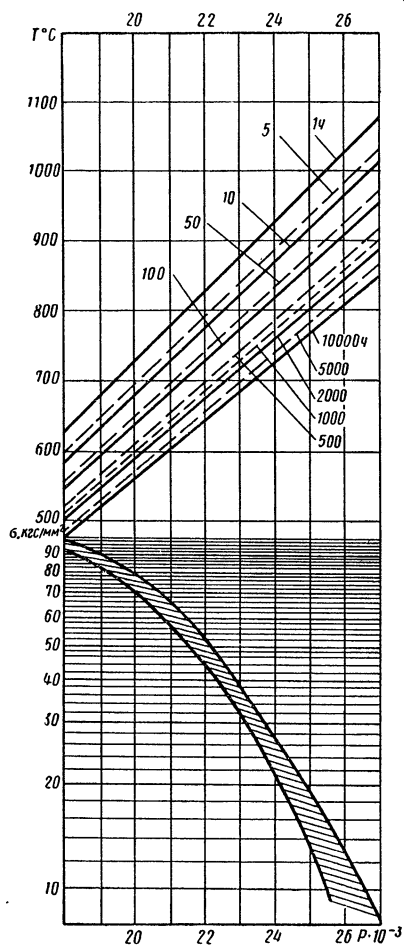


Рис. 4.7

тельная частота вращения при автофретировании, отнесенная к максимальной рабочей.

Для дисков этих же типов в табл. 4.2 приведены вытяжки, измеренные после длительной эксплуатации с различным временем работы. Все диски предварительно подвергали автофретированию. После предварительного пластического деформирования остаточные перемещения дисков в процессе длительной работы растут значительно медленнее и достаточно малы. Некоторое увеличение наружного диаметра связано с повторностью нагружения и процессами ползучести. Чрезмерная вытяжка дисков в процессе длительной работы, нарастающая по времени, свиде-

4.2. Остаточные удлинения дисков после автофреттирования и длительной работы (по данным Ю. А. Пыхтина)

Тип диска	$n_{\text{авт}}$	$2b$, мм, до авто- фреттирования	Удлинение после автофреттирования		$2b$, мм, по черте- жу	t , ч	Удлинение после длительной работы						$k\sigma$ min
			$2u_b$, мм	$2u_b$, %			$2u_b$, мм		$2u_b$, %				
I	1,15	576,32	0,12	0,0208	576,4—0,14	750	0,18	0,28	0,031	0,049	1,55		
		576,30	0,12	0,0208	0,25	0,40	0,043	0,069					
		576,35	0,09	0,0156	0,25	0,42	0,043	0,073					
II	1,12	542,4	0,01	0,00184	542,4—0,14	300	0,07	0,08	0,0129	0,0148	1,53		
		542,4	0,03	0,00552	0,06	0,1	0,011	0,0184					
		542,38	0,02	0,00369	0,09	0,12	0,0167	0,0221					
III	1,12	509,4	0,06	0,0118	509,5—0,14	300	0,37	0,19	0,0727	0,0373	1,53		
		509,44	0,06	0,0118	0,33	0,17	0,0648	0,0334					
		509,45	0,02	0,0039	0,4	0,21	0,0785	0,0412					
IV	1,22	542,36	0,05	0,0092	542,31	200	0,03	0,03	0,0055	1,51			
		542,36	0,07	0,0129	0,01	0,01	0,00184						
		542,37	0,08	0,0148	0,03	0,03	0,0055						
V	1,22	542,36	0,03	0,0055	542,4	200	0	0	0	1,51			
		542,36	0,06	0,0111	0	0	0						
		542,36	0,03	0,0055	0	0	0						

Примечание. Диски типов I—IV из сплава ХН77ГЮ-ВД, диски типа V — из сплава ХН73МБТЮ-ВД; отметки 1 и 2 удлинений после длительной работы указывают, что измерения производились входной и выходной сторон дисков соответственно.

тельствуется о происходящих процессах разупрочнения и охрупчивания. В связи с этим в дисках ответственного назначения нормируются допустимые относительные перемещения, измеряемые по принятым базовым диаметрам за ресурс работы или после определенного вида испытаний. Обычно остаточная деформация на внешнем диаметре диска не превышает $(0,6 \pm 1,0) \cdot 10^{-3}$.

§ 12. Несущая способность дисков. Запасы по разрушающим оборотам

Частота вращения диска, при достижении которой происходит разрушение, является важной характеристикой конструкции. Диск может разрушиться из-за раскрутки ротора двигателя в результате внезапного снятия нагрузки, отказа регулятора оборотов, инерционности аварийных систем защиты и др. Предельную частоту вращения дисков нормируют.

Наиболее простой способ расчетного определения предельной частоты вращения диска основан на теории предельного равновесия и подробно рассмотрен в работах [24, 102]. Теория предельного равновесия развивалась первоначально для стержневых конструкций из низкоуглеродистых сталей. Диаграмма растяжения этих материалов имеет участок текучести при постоянном напряжении, равном пределу текучести. Образование пластических шарниров при изгибе стержней, возникающих при достижении предела текучести, рассматривается как потеря несущей способности.

У сплавов, используемых для дисков турбомашин, ярко выраженный участок текучести отсутствует и при нагружении напряжения и деформации изменяются непрерывно до разрушения. Для дисков, таким образом, предполагается, что при повышении частоты вращения возникновение пластических деформаций приводит к перераспределению напряжений и постепенному выравниванию их в меридиональном сечении. Потеря несущей способности происходит при достижении нормальными (окружными) напряжениями в этом сечении предела прочности $\sigma_b(r)$. Это относится к дискам с плавно изменяющейся толщиной, не имеющим резких сужений и изменений толщины и значительной концентрации напряжений. Если окружные напряжения во всех сечениях больше радиальных, то можно считать, что в момент достижения предельного состояния

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_b(r), \quad (4.25)$$

где $\sigma_b(r)$ — предел прочности материала.

Рассмотрим предельное равновесие половины диска (рис. 4.8). На наружном контуре при достижении предельной частоты вращения действуют напряжения

$$\sigma_{rb}^* = \sigma_{rb} \frac{n_1^{*2}}{n^2}, \quad (4.26)$$

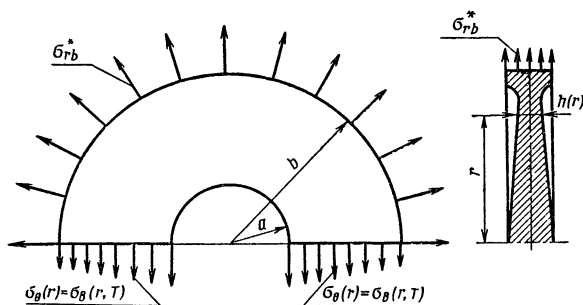


Рис. 4.8

где n_1^* — предельная частота вращения; σ_{rb} и n — напряжения и частота вращения на рабочем режиме. Напряжения на внутреннем контуре (от натяга), если они не нулевые, в диске с отверстием к моменту разрушения обычно полностью снимаются

$$\sigma_{ra}^* = 0. \quad (4.27)$$

В неравномерно нагретом диске напряжения $\sigma_{\theta}(r) = \sigma_b(r)$ в меридиональном сечении могут быть переменными вдоль радиуса. Проектируя все силы (рис. 4.8) на вертикальное направление, получим

$$\sigma_{rb} \frac{n_1^{*2}}{n^2} b h_b + \left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \rho n^{*2} J = \int_a^b \sigma_b(r) h dr, \quad (4.28)$$

где момент инерции меридионального сечения относительно оси вращения

$$J = \int_a^b r^2 h dr. \quad (4.29)$$

Из равенства (4.28)

$$n_1^* = \sqrt{\frac{\int_0^b \sigma_b(r) h dr}{\left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \rho J + \frac{1}{n^2} \sigma_{rb} b h_b}} = n \sqrt{\frac{\int_a^b \sigma_b(r) h dr}{\rho \omega^2 J + \sigma_{rb} b h_b}}. \quad (4.30)$$

Для дисков сложного ступенчатого профиля в местах резкого повышения температуры и концентрации напряжений может реализоваться другой механизм потери несущей способности. Рассмотрим перераспределение напряжений в диске, имеющем сужение под ободом («шейку»). В этой области радиальные напряжения при рабочей частоте вращения могут существенно превышать окружные. При увеличении частоты вращения пластические деформации начинаются на некотором радиусе r_c , и в дальнейшем вся область от $r = b$ до $r = r_c$ будет находиться в пластическом состоянии, так что окружные напряжения, так же как и ра-

диальные на радиусе r_c , будут равны предельным. Из-за стеснения деформации в указанной области ступичная часть диска может находиться в упругом или упругопластическом состоянии.

Предельная частота вращения n_2^* при втором механизме потери несущей способности может быть найдена аналогично предыдущему из рассмотрения предельного равновесия части диска от радиуса r_c до периферии

$$n_2^*(r_c) = \sqrt{\frac{\int_{r_c}^b \sigma_B(r) h dr + \sigma_{Bc} h_c r_c}{\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 \rho J_c + \frac{1}{n^2} \sigma_{rb} b h_b}}. \quad (4.31)$$

Индексом c отмечены величины, относящиеся к этому радиусу;

$J_c = \int_{r_c}^b r^2 h dr$ — момент инерции меридионального сечения на рис. 4.9 диска до $r = r_c$.

Причиной образования местной зоны пластического течения являются концентрично расположенные отверстия, служащие для подачи охлаждающего воздуха или для крепления диска, количество которых может быть слишком велико и тем самым ослаблять сечение, вызывая также рост радиальных напряжений. Приближенно влияние отверстий можно оценить следующим образом:

$$n_2^*(r_c) = \sqrt{\frac{\int_{r_c}^b \sigma_B(r) h dr + \sigma_{Bc} h_c \left(r_c - \frac{zd}{2\pi}\right)}{\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 \rho J_c + 1/n^2 \sigma_{rb} b h_b}}, \quad (4.32)$$

где z — число отверстий; d — диаметр.

Величину $n_2^*(r_c)$ определяют для всех расчетных сечений, начиная с $r = b$; она является непрерывной функцией радиуса, так же как и $\sigma_B(r_c) = \sigma_{Bc}$, за исключением сечения $r_c = a$ для

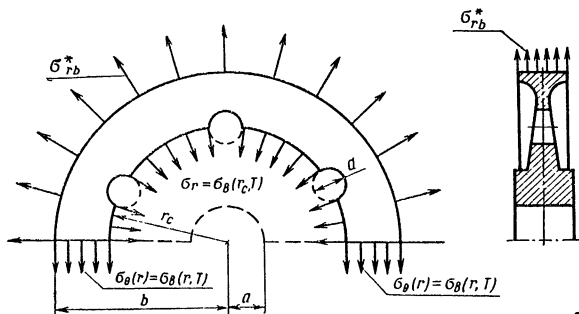


Рис. 4.9

диска с отверстием, где она претерпевает скачок в силу краевых условий при $r_c = a$ (σ_{ra} задано или равно нулю). В соответствии с этим во втором слагаемом в числителе выражения (4.32) при определении $n_2^*(r_a)$ следует полагать $\sigma_{вс} = \sigma_{ra}$; тогда $n_2^*(r_a)$ совпадает с n_1^* :

$$n_2^*(r_a) = n_1^*, \text{ если } \sigma_{ra}^* = 0. \quad (4.33)$$

Окончательная предельная частота вращения определяется как минимальная

$$n^* = \min [n_2^*(r)]. \quad (4.34)$$

Это позволяет найти запас диска по разрушающей частоте вращения как отношение разрушающей частоты к максимальной рабочей, возможной в условиях работы диска,

$$k_b = n^*/n_{\text{раб}}. \quad (4.35)$$

Запас k_b для дисков ответственного назначения, раскрутка которых выше рабочей частоты вращения и последующее разрушение недопустимы, обычно регламентируется; в частности, в энергетическом машиностроении запас k_b принимают равным 1,6—1,8, в транспортном машиностроении 1,4—1,6.

Внезапная раскрутка диска при какой-либо неисправности может возникнуть после работы в течение определенного времени и даже в самом конце выработки ресурса. При этом прочность материала на разрыв определяется пределом длительной прочности. Таким образом, для длительно работающих дисков запас по разрушающей частоте вращения следует определить, подставив в (4.30)—(4.32) предел длительной прочности вместо σ_v , который также может быть переменным вдоль радиуса:

$$k_b = \frac{n^*(\sigma_{\text{дл}})}{n_{\text{раб}}}. \quad (4.36)$$

Запас по разрушающей частоте вращения был введен в расчетную практику в 1948 г. [20] и является общепринятым для дисков газовых и паровых турбин. Иногда в практике удобно рассматривать раздельно величины k_{b1} при определении n_1^* по (4.30) и k_{b2} при определении n_2^* по (4.31) и (4.32).

Величины n^* и k_b могут быть рассчитаны, если имеются данные по геометрическим параметрам диска, нагрузкам, температуре и характеристикам прочности материала. В приложении 1 в тексте программы упругопластического расчета диска на растяжение алгоритм расчета величин k_{b1} и k_{b2} и $k_b = \min(k_{b1}, k_{b2})$ приведен в процедуре *b* — procedure запас.

Пример 4.3. Запасы по разрушающей частоте вращения для диска газовой турбины, расчет которого на растяжение приведен в гл. 3 § 8, а контрольный расчет к тексту программы в приложении 1, показаны на рис. 4.2.

Запас по разрушающей частоте вращения минимален на радиусе центрального отверстия и составляет $k_{b \min} = k_{b1} = 1,246$.

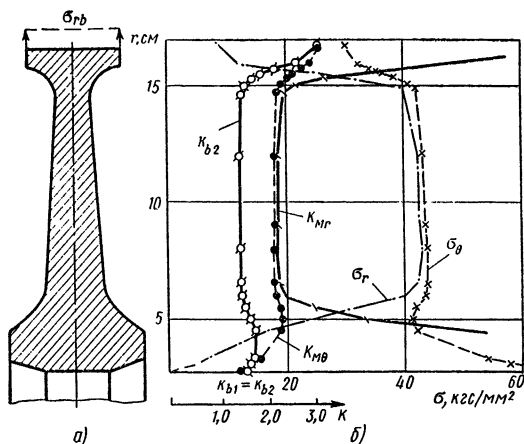


Рис. 4.10

Пример 4.4. На рис. 4.10, а показано сечение диска турбины из титанового сплава ВТЗ-1, имеющего рабочую частоту вращения $n = 24\,000$ об/мин и напряжения от разрезанной части обода на наружном контуре $\sigma_{rb} = 9,54$ кгс/мм². Температура диска $T = \text{const} = 20^\circ\text{C}$. На рис. 4.10, б показано распределение напряжений σ_r и σ_θ в этом диске и запасов по напряжениям k_{mr} и $k_{m\theta}$. Приведены также запасы по несущей частоте вращения, соответствующие различным предполагаемым радиусам разрушения. Значение k_b минимально на радиусе центрального отверстия и равно 1,5. Это соответствует характеру разрушения данного диска; он разрушился при испытаниях на разгонном стенде по меридиональному сечению (рис. 4.11); экспериментальный запас близок к расчетному ($k_{b \text{ экп}} = 1,53$).

Диск, разрушенный по меридиональному сечению, показан на рис. 4.12. Диск турбины, разрушенный после длительной наработки, приведен на рис. 4.13. Разрушение произошло по «шейке» — подобной сечению, что связано с перегревом подобной части диска.

С помощью методов теории предельного состояния можно приближенно определить разрушающую частоту вращения для дисков с несимметричным меридиональным сечением и при наличии изгибающих нагрузок [1, 73]. Однако, несмотря на некоторые допущения, расчет этими способами сложен и требует использования вычислительной техники.

Лучшие результаты обеспечивает расчет напряжений при различных значениях n^* и определение разрушающей частоты по условию [102]

$$k_\sigma(n^*) = 1, \quad (4.37)$$

что соответствует гипотезе максимальных нормальных напряжений.

Величины n^* и k_{b3} , соответствующие $k_\sigma = 1$, могут быть найдены последовательным расчетом при увеличивающихся частотах вращения или пристрелкой. Расчет напряжений и определение за-

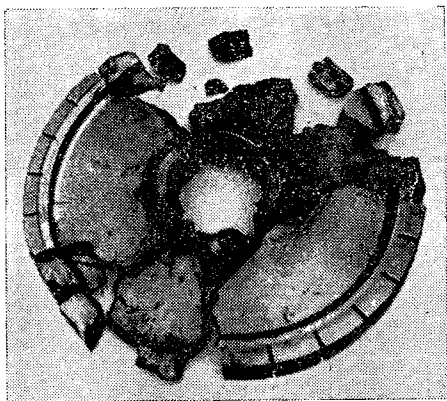


Рис. 4.11

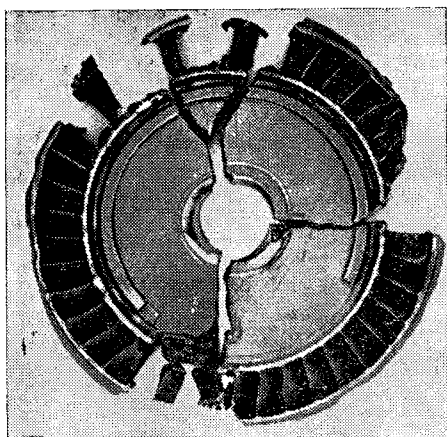


Рис. 4.12

сделанная в предположении полного перераспределения напряжений, дает завышенные результаты.

Учет частичного разрушения по формуле предельного равновесия и реального перераспределения напряжений при упруго-пластическом расчете дает близкие к экспериментальным запасы.

Для определения предельной частоты вращения диска может быть использована теория пластического течения. Расчет выполняют в соответствии с алгоритмом, описанным в § 9 гл. 3. Шаговый расчет диска проводят по программе нагружения, характеризующейся непрерывным увеличением частоты вращения диска. Распределение температуры по диску принимают соответствующим режиму максимальной температуры, а темп повышения ча-

паса по напряжениям зависят от конструкции и сил, действующих на диск. Напряжения рассчитывают с учетом пластических деформаций по деформационной теории пластичности с использованием любой расчетной схемы — растяжения или изгиба диска.

Запасы k_{b1} и k_{b2} по разрушающей частоте вращения, определенные методами теории предельного равновесия, и запасы k_{b3} для некоторых дисков, определенные расчетом по деформационной теории пластичности, приведены в табл. 4.3. Для сравнения даны запасы, определенные экспериментально, при испытаниях дисков на разгонном стенде при условиях по нагрузкам и температуре, соответствующих расчету.

При расчете запасов, представленных в табл. 4.3, использовали средние характеристики материала, приведенные в справочной литературе. Это частично объясняет значительное отличие результатов расчета от эксперимента. Однако очевидно, что оценка разрушающей частоты вращения по (4.30),

стоты вращения — возможным при раскрутке в рабочих условиях. Программу нагружения разбивают на этапы по времени точно так же, как при обычном расчете истории нагружения. Расчет прекращают при тех же условиях равенства $k_\sigma = 1$, что соответствует моменту и частоте разрушения. Запас, определенный этим методом, обозначим k_{b4} .

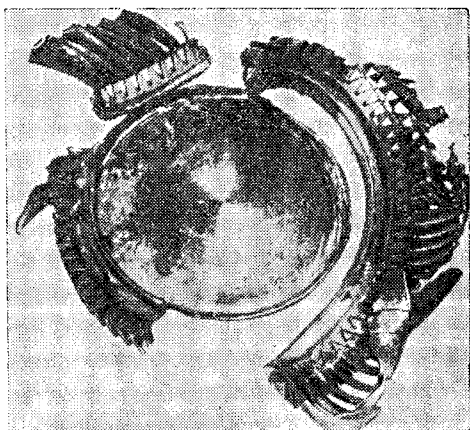


Рис. 4.13

Разрушающую частоту вращения при расчете диска по теории пластического течения определяют сравнением расчетной интенсивности максимальной полной деформации с относительным удлинением ϵ_k материала при разрыве (см. гл. 3 § 8). Это особенно существенно для оценки нижней границы разрушающей частоты, соответствующей представлению о возможной раскрутке после истощения значительной доли ресурса работы.

Пример 4.5. На рис. 4.14, а показано меридиональное сечение диска, изготовленного из сплава ХН73МБТЮ-ВД. Напряжение и разрушающая частота вращения рассчитаны для 20° С. Распределенная нагрузка на наружном контуре диска от лопаток при рабочей частоте вращения $n_{\text{раб}}$ равна $\sigma_{rb} = = 3,7 \text{ кгс/мм}^2$.

На рис. 4.14, б дано распределение напряжений в диске при $n_{\text{раб}}$. Окружные напряжения σ_θ по всему сечению значительно больше радиальных напряжений σ_r , и максимальные напряжения возникают по радиусу центрального отверстия. Такой характер напряженного состояния связан с относительно малой величиной σ_{rb} и значительным диаметром центрального отверстия.

4.3. Запасы по разрушающей частоте вращения, определенные различными методами

Диск		$T_b/T_a, ^\circ\text{C}$	Эксперимент k_b	k_{b1}	k_{b2}	k_{b3}
Материал	№					
ХН77ТЮР	1	732/403	1,26	1,27	1,17	1,15
	2	510/470	1,32	1,55	1,48	1,47
	3	480/400	1,49	1,53	1,41	1,36
20Х3МВФ	4	280	1,39	1,50	1,25	—
	5	375	1,45	1,55	1,24	—
ХН73МБТЮ-ВД	6	300/105	1,29	1,46	1,40	—

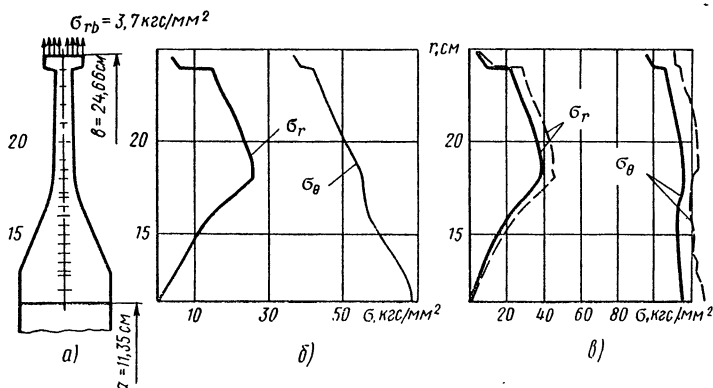


Рис. 4.14

Запасы по напряжениям k_σ , определенные в программе (приложение 1) как k_{Mr} и $k_{M\theta}$ и запасы по разрушающей частоте вращения, определенные изложенными выше методами, будут следующие: $k_{M\theta} = 1.42$ при $r = 11.35 \text{ cm}$; $k_{Mr} = 1.75$ при $r = 18 \text{ cm}$; $k_{b1} = 1.42$; $k_{b2 \text{ min}} = 1.94$; $k_{b3} = 1.407$; $k_{b4}^{(1)} = 1.44$ расчет с историей нагружения при непрерывном повышении оборотов для одного цикла; $k_{b4}^{(2)} = 1.345$ — для трех циклов, в соответствии с программой эксперимента; $k_{b \text{ экс}} = 1.26$.

При экспериментальном определении k_b диск разгонялся в три этапа: до $\frac{n}{n_{\text{раб}}} = 1.17$, до $\frac{n}{n_{\text{раб}}} = 1.26$, и на третьем этапе разрушение произошло при $k_{b \text{ экс}} = 1.26$. Поэтому расчет, учитывающий историю нагружения, проводили по обычной программе повышения частоты вращения и по программе эксперимента ($k_{b4}^{(1)}$ и $k_{b4}^{(2)}$ соответственно). Последний расчет дает наименьший запас, более близкий к экспериментальному. Имеющееся различие вызвано в значительной степени отличием характеристик материала, используемых в расчете, от реальных, свойственных испытанному диску.

На рис. 4.14, а показано перераспределение напряжений в диске к моменту разрушения, определенное по деформационной теории пластичности (сплошные кривые для k_{b3}) и по теории течения при одноэтапном нагружении (штриховые кривые). По сравнению с напряжениями, определенными при рабочей частоте вращения, здесь происходит почти полное выравнивание окружных напряжений, что и объясняет близость величин запасов k_{b1} , k_{b3} и k_{b4} .

Для проверки теоретических представлений о разрушении дисков проведены исследования, обобщенные в работах [55, 58, 87], с целью выяснения влияния пластичности материала и концентрации напряжений на несущую способность дисков. Для пластичных материалов влияние концентрации напряжений при однократном приложении нагрузки на предельную нагрузку (обороты) невелико. Учет реальных геометрических параметров и напряженного состояния в расчете упругопластического поведения материала при нагружении вплоть до разрушения обеспечивает получение результатов, достаточно близких к экспериментальным. Для хрупких и неоднородных материалов влияние концентрации напряжений даже при однократном на-

гружении может быть существенным. Определение концентрации напряжений в условиях статического нагружения представляет собой частный случай учета концентрации при циклическом упругопластическом деформировании.

§ 13. Долговечность дисков при циклическом нагружении

Условия повторного нагружения дисков в турбомашинах многократного использования, работающих на различных режимах, рассматривались в гл. 3. Диски подвергались циклическому действию температурных и механических нагрузок, причем в наиболее опасных сечениях циклическое изменение напряжений может происходить в условиях пластического деформирования при напряжениях выше предела пропорциональности. Механизм повреждения материала в этих условиях называется малоцикловой усталостью [84, 115, 130].

Разрушения дисков, вызванные малоцикловой усталостью, наблюдались как в компрессорных машинах, так и в турбинах, причем с увеличением ресурсов работы двигателей и соответственно с увеличением числа нагружений-разгрузок (циклов) эти дефекты встречаются все чаще. На рис. 4.15 показана трещина малоцикловой усталости, которая развилась в полотне диска из сплава ХН77ТЮР. Трещина началась от резьбы в отверстии под крепление балансировочного грузика в диапазоне 10^3 — 10^4 циклов работы из-за технологического дефекта. Наиболее часто трещины и последующие разрушения из-за малоцикловой усталости возникают в местах концентрации напряжений —

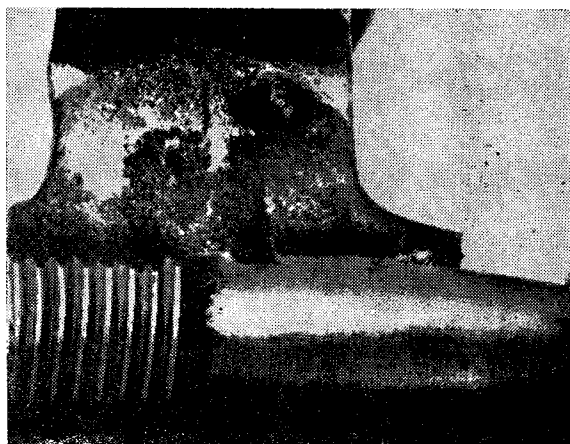


Рис. 4.15

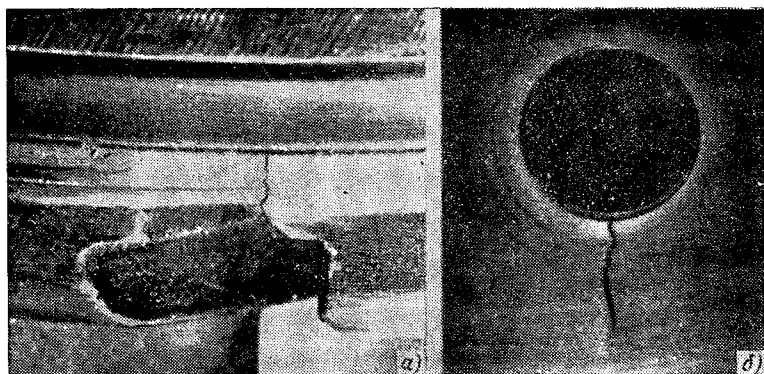


Рис. 4.16

в зоне замковых соединений, различных отверстиях, по радиусам закруглений. На рис. 4.16, а и б показаны трещины малоцикло-вой усталости, появившиеся в диске компрессора из стали 1Х15НЗВМФ при наработке 10^4 — 10^5 циклов. Трещины возникли на ободе диска у замкового выступа и около эксцентрично рас-положенных отверстий для прохода воздуха. Циклическое по-вреждение дисков оценивают на основании соотношений между размахом напряжений (или деформаций) в цикле нагружения и числом циклов до разрушения. Эти зависимости, представляемые в виде кривых усталости $\Delta\sigma$ — N или $\Delta\epsilon$ — N , могут быть получены экспериментальным путем.

Испытания материалов на повторное нагружение в зависимости от назначения получаемых характеристик проводят в различных условиях: на обычных гладких образцах, образцах с концентрацией напряжений при различной форме и асимметрии цикла и температурных условиях [102, 115, 130]. На рис. 4.17 показаны кривые усталости в полулогарифмических координатах $\Delta\sigma$ — $\lg N_f$ для сплава ВТ-8; здесь $\Delta\sigma$ — размах напряжений; $\Delta\sigma = 2\sigma_a$, где $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$ — амплитуда напряжений; N_f — число циклов до разрушения (по данным Р. Н. Сизовой). Зависимости $\Delta\sigma$ — $\lg N$ получены при пульсирующем цикле напряжений растяжения ($0 \rightarrow \sigma$, $\sigma \rightarrow 0$, мягкое нагружение) для круглых образцов гладких (кривая 2) и с надрезом ($r = 0,35$ мм, кривая 1); здесь же приведены данные для образцов с надрезом при повышенной температуре 300°C (кривая 3). На рис. 4.17 показана также полоса рассеяния характеристик малоцикло-вой усталости, обычного для этого механизма разрушения [115, 130]. Результаты, получае-мые при испытаниях в условиях постоянного размаха деформаций в цикле (жесткое нагружение), представляют в виде зависи-мости $\Delta\epsilon$ — N_f .

При оценке и прогнозировании циклической долговечности дисков возникают некоторые проблемы: а) расчетная аппроксимация кривых усталости; б) выбор критериев сложного напряженного состояния, позволяющих использовать данные о малоцикло-вой усталости, полученные при одноосном напряженном состоянии; в) учет концентрации напряжений и деформаций; г) суммирование повреждения от малоцикло-вой усталости и ползучести и учет эффектов неизотермичности нагружения; д) учет формы цикла при оценке долговечности; е) учет рассеяния характеристик малоцикло-вой усталости при прогнозировании долговечности диска. Несмотря на то, что в последнее время экспериментальные данные по малоцикло-вой усталости интенсивно накапливаются, количество их остается ограниченным. Необходимость знать соотношения между напряжениями и деформациями и числами циклов до разрушения в широком диапазоне температур и уровней напряжений (деформаций) в расчетных точках делает целесообразным аналитическое описание усталостных кривых.

Наиболее широко используемой в расчетной практике является эмпирическая формула Мэнсона [129, 130], связывающая размах полной деформации и число циклов до разрушения N_f :

$$\Delta \varepsilon = 3,5 \frac{\sigma_B}{E} N_f^a + \left(\frac{N_f}{D} \right)^b, \quad (4.38)$$

где σ_B — предел прочности; E — модуль упругости; $D = \ln \frac{1}{1-\psi}$; ψ — относительное сужение; $a = -0,12$; $b = -0,6$ (если ψ дано в %, $D = \ln \frac{100}{100-\psi}$).

Зависимость (4.38) описывает «кривую универсальных наклонов», полученную на основании экспериментальных исследований малоцикло-вой усталости 29 различных материалов при 20° С. Полная деформация $\Delta \varepsilon$ является суммой упругой и пластической составляющих, которые схематично изображены на рис. 4.18. Величины $a = -0,12$ и $b = -0,6$ для различных материалов несколько изменяются. На это следует обращать внимание, особенно при использовании расчетной зависимости в областях малых (меньше 10^2 — 10^3) и больших (больше 10^4 — 10^5) чисел циклов. Различные степени улагаемых, особенно у пластической составляющей, рекомендуемые в литературе (по Коффину [123], $b = 0,5$), частично также связаны с различными способами оценки N_f по моменту полного разрушения или моменту фиксации трещины [129].

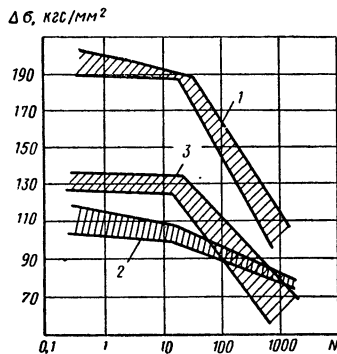


Рис. 4.17

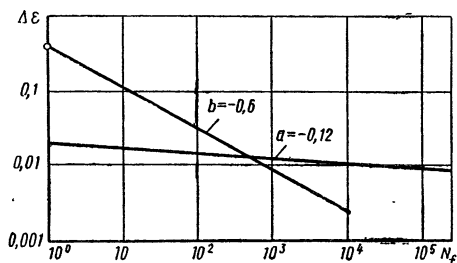


Рис. 4.18

Изменение размахов напряжений и деформаций от цикла к циклу заканчивается через сравнительно небольшое число циклов по отношению к разрушающему числу циклов, и основное уменьшение долговечности происходит при стабилизированном состоянии (постоянных размахах напряжений). Таким образом, если в рас-

поряжении имеются результаты шагового расчета, то для оценки долговечности, особенно в области больших чисел циклов, можно использовать размахи напряжений или деформаций стабилизированного состояния. Начальные неустановившиеся характеристики цикла в большинстве случаев не влияют на долговечность. Исключением могут быть особые случаи, когда нагрузки или температура значительны и долговечность исчерпывается за малое число циклов и для циклически разупрочняющихся материалов.

Существенным моментом при оценке циклической долговечности является учет неодноосности напряженно-деформированного состояния. Наибольшее количество экспериментальных данных усталости при малом числе циклов получено при повторном нагружении растягивающими силами по пульсирующему циклу. Результаты представляются в виде зависимостей амплитуды напряжений $\sigma_a = \Delta\sigma/2$ от числа циклов до разрушения. Такое представление характеристик малоциклового усталости связано с традиционным распространением методик усталостных испытаний при большом числе циклов, когда пластическая составляющая деформаций отсутствует.

В условиях неодноосного напряженного состояния в диске для определения N_f используют эквивалентное напряжение $\sigma_{эКВ}$; при этом амплитудное значение $\sigma_{a\text{ экВ}} = 1/2 \Delta\sigma_{эКВ}$.

Принимают

$$\sigma_{a\text{ экВ}} = \sigma_{ia}, \quad (4.39)$$

где $\sigma_{ia} = \frac{\Delta\sigma_i}{2}$ — амплитудная интенсивность напряжений. Если циклическое нагружение не является симметричным, то приведение к симметричному циклу производят по формуле

$$\sigma_{a\text{ экВ}} = \sigma_{ia} + \psi\sigma_{im}, \quad (4.40)$$

где σ_{im} — интенсивность средних напряжений; ψ — коэффициент влияния несимметрии цикла, приближенно определяемый как

$$\psi = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b}. \quad (4.41)$$

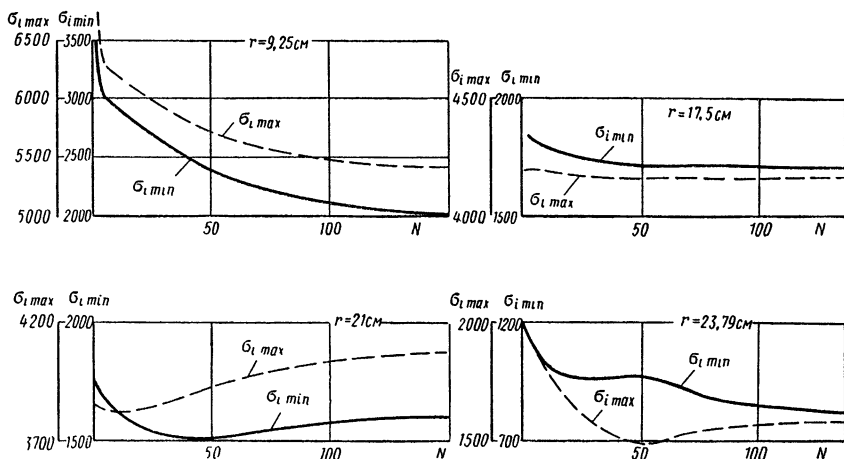


Рис. 4.19

Здесь σ_{-1} — предел выносливости материала диска при $N_f = 10^7$; σ_b — предел прочности (или длительной прочности при учете длительности циклов). При нагружении, близком к простому, σ_{ia} и σ_{im} можно вычислить как амплитуды и средние значения интенсивности напряжений.

Пример 4.6. На рис. 4.19 для диска (см. § 10, пример 3.4) показано изменение интенсивности напряжений (максимальных и минимальных за цикл) в процессе нагружения за 150 циклов. Рассмотрим точки с наибольшими напряжениями в сечениях на внутреннем радиусе 9,25 см, радиусах 17,5 и 21 см (шейка диска), а также на ободе диска, где имеет место реверс деформаций (см. рис. 3.15).

Размах напряжений в последних циклах становится практически постоянным, и, если не учитывать влияние первых неустановившихся циклов, можно оценивать долговечность по величине

$$\Delta\sigma_i = \sigma_{i \max} - \sigma_{i \min} \quad (4.42)$$

в каждой из рассмотренных точек диска.

Рассмотрим в качестве примера оценку долговечности для точки, близкой к центральному отверстию, расположенной в сечениях на радиусе 9,25 см. Максимальная интенсивность напряжений в установившемся цикле $\sigma_{i \max} = 54$ кгс/мм², минимальное значение $\sigma_{i \min} = 20,7$ кгс/мм².

Размах интенсивностей напряжений $\Delta\sigma_i = 54 - 20,7 = 33,3$ кгс/мм². Максимальная температура цикла в данной точке (см. табл. 3.5) 461°C . Соответственно $\sigma_{ia} = 16,7$ кгс/мм², $\sigma_{im} = 37,4$ кгс/мм². Для сплава ХН77ТЮР при 500°C можно принять $\sigma_{-1} = 28$ кгс/мм² (при $N_f = 10^7$ циклов), $\sigma_b = 95$ кгс/мм². Таким образом, по (4.41) коэффициент влияния несимметрии $\psi = 28/95 = 0,295$. По (4.40) $\sigma_{\text{экв}} = 16,7 + 0,295 \cdot 37,4 = 25,7$ кгс/мм². Кривая усталости гладких образцов, вырезанных из диска и испытанных при симметричном изгибе при 500°C , приведена на рис. 4.20 (по данным Т. П. Захаровой). Эти результаты, полученные при испытаниях на изгиб, дают несколько завышенную долговечность в расчете при действии растягивающих напряжений. Для механической усталости соответствующие корреляционные коэффициенты, основанные на статистическом подходе о вероятности наличия дефекта в зоне

$\sigma, \text{кгс/мм}^2$

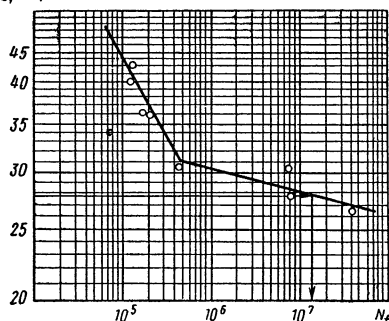


Рис. 4.20

действия максимальных напряжений, рекомендованы в работе [97]. С уменьшением числа циклов различие в долговечности при изгибе и растяжении уменьшается. Прогнозируемая циклическая долговечность для рассматриваемой расчетной точки диска $N_f = 1,5 \cdot 10^7$ циклов.

Рассмотренный пример является достаточно характерным. Общим свойством для наиболее нагруженных участков диска является большая асимметрия циклов напряжений и деформаций (см. гл. 3 § 10, а также рис. 4.17 и 4.19). Для гладких участков

диска без значительной концентрации напряжений и при умеренных температурах долговечность достаточно большая.

Формула (4.40) при использовании (4.41) для ψ предполагает линейную зависимость предела выносливости материала при несимметричном цикле от среднего напряжения

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_b} = 1. \quad (4.43)$$

В реальных сплавах, из которых изготавливают диски, указанная зависимость отличается от линейной; поэтому для более точной оценки долговечности следует иметь экспериментальные данные, полученные при соответствующей асимметрии цикла и базе испытаний. Влияние базы можно приближенно учесть следующей поправкой. После того как определена величина $N_f = N_{f1}$ при принятии σ_{-1} по базе 10^7 циклов, значение ψ подсчитывают повторно

$$\psi = \psi_2 = \frac{\sigma_{-1}(N_{f1})}{\sigma_b}; \quad (4.44)$$

далее определяют $\sigma_{\text{экр } 2} = \sigma_a + \psi_2 \sigma_m$. Второе приближение для долговечности может быть обычно принято за окончательное.

Использование деформационных критериев оценки циклической долговечности является более оправданным, что в последнее время подтверждено значительным количеством экспериментальных работ [96, 116]. В качестве критерия принимают интенсивность размахов деформации $\Delta \epsilon_{\text{экр}} = \Delta \epsilon_i$ или размах максимальных полных деформаций в цикле $\Delta \epsilon_{\text{экр}} = \Delta \epsilon_{\text{max}}$. Зависимость между размахами деформаций и долговечностью может быть получена из опытов при одноосном напряженном состоянии или расчетным путем [формула (4.38)].

Рассмотрим тот же пример для точки диска в сечении на $r = 9,25$ см. Максимальные и минимальные полные деформации в установившемся цикле $N = 150$ циклов

$$\epsilon_{r \text{ max}} = -0,034\%, \quad \epsilon_{\theta \text{ max}} = 0,354\%, \quad \epsilon_{z \text{ max}} = -0,0523\%; \quad (4.45)$$

$$\varepsilon_r \min = -0,064\%, \varepsilon_\theta \min = 0,156\%, \varepsilon_z \min = -0,1243\%.$$

Интенсивность размахов полных деформаций

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_\theta)^2 + (\Delta \varepsilon_\theta - \Delta \varepsilon_z)^2 + (\Delta \varepsilon_z - \Delta \varepsilon_r)^2}; \quad (4.46)$$

с учетом приведенных выше значений $\Delta \varepsilon_i = 0,142\% = 0,00142$. На рис. 4.21 построена кривая «универсальных наклонов» (кривая 1) по следующим параметрам: $\sigma_b = 95 \text{ кгс/мм}^2$, $E = 1,613 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$, $D = 1,18$ (относительное сужение при разрыве принято равным 15%).

При учете асимметрии, используя предположение о линейной зависимости предела выносливости от среднего напряжения, уравнение (4.38) легко привести к виду

$$\Delta \varepsilon = \frac{3,5 (\sigma_b - \sigma_m)}{E} N_f^{-0,12} + D^{0,6} N_f^{-0,6} \quad (4.47)$$

при $\sigma_m > 0$. При $\sigma_m \leq 0$ используется формула (4.38).

Подставив в (4.34) значение $\sigma_m = \sigma_{im} = 37,4 \text{ кг/мм}^2$, получим кривую 2 на рис. 4.21. Долговечность, соответствующая $\Delta \varepsilon_i = 0,0014$, равна $N_f = 6 \cdot 10^6$ циклов.

При использовании критерия размаха максимальных деформаций в цикле $\Delta \varepsilon_{\max}$ получим в рассматриваемом примере $\Delta \varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\theta \max} - \varepsilon_{\theta \min} = 0,198\% = 0,00198$ и $N_f = 2,5 \cdot 10^6$ циклов.

Сравнение циклической долговечности, определенной по напряжениям и деформациям, показывает их практическое совпадение. Критерий размаха максимальных деформаций приводит к получению более низкой долговечности по сравнению с интенсивностью размахов.

В инженерной практике применяют расчет дисков с учетом неупругих деформаций по деформационным теориям. В этом случае определяют напряжения в расчетных точках диска на максимальном режиме или нескольких тяжелых режимах. При использовании результатов такого расчета для оценки долговечности приходится считать, что напряжения и деформации в цикле меняются от нуля до максимальных значений (при учете одного режима). Эти значения и принимают за размахи соответствующих величин. Интенсивность размахов деформаций с учетом того, что для плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu^*}{E^*} (\sigma_r + \sigma_\theta) + \alpha T$$

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{2(1 + \mu^*)}{3E^*} \Delta \sigma_i. \quad (4.48)$$

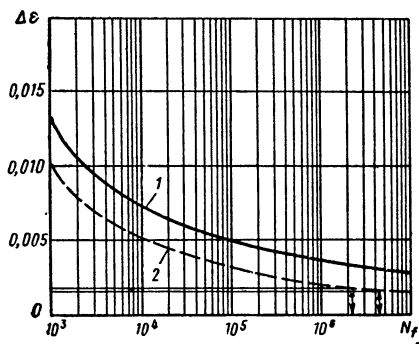


Рис. 4.21

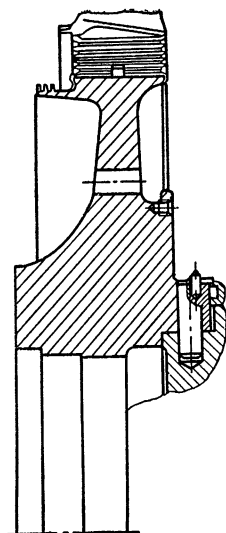


Рис. 4.22

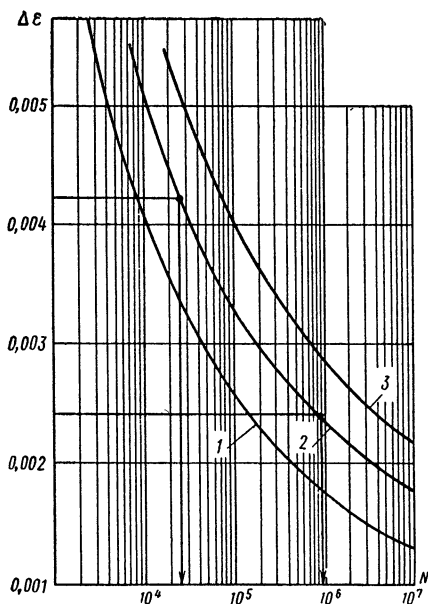


Рис. 4.23

Иногда удобнее пользоваться этим выражением в напряжениях

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{2(1 + \mu^*)}{3E^*} \sqrt{\Delta \sigma_r^2 + \Delta \sigma_\theta^2 - \Delta \sigma_r \Delta \sigma_\theta} \quad (4.49)$$

или через деформации

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{2(1 + \mu^*)}{3} \sqrt{\Delta \varepsilon_r^2 + \Delta \varepsilon_\theta^2 - \Delta \varepsilon_r \Delta \varepsilon_\theta} \quad (4.50)$$

В качестве параметров упругости, входящих в (4.48) — (4.50), используют определяемые в последнем приближении упругопластического расчета секущий модуль E^* и μ^* в каждой точке диска.

Пример 4.7. На рис. 4.22 показано меридиональное сечение диска из сплава ХН77ТЮР. В табл. 4.4 приведены температуры, характеристики прочности материала (σ_b и $\sigma_{дл}$), а также напряжения и запасы по напряжениям с учетом длительности работы на рассматриваемом режиме. Характерным для рассматриваемого диска является то, что он работает при высоких температурах. Однако общая длительность работы на указанном режиме (при максимальных температуре и напряжениях) относительно невелика и составляет $\tau_p \approx 40$ ч.

Коэффициент запаса по напряжениям $k_{Mr} = 1,3$ минимален в подобном сечении (шейке диска) на $r = 19,1$ см, что является следствием высокой температуры (658°C) и радиальных напряжений.

Оценим долговечность в этой точке. По табл. 4.5 найдем напряжения (или размахи напряжений) и параметры упругости $\Delta \sigma_r = 47,0$ кгс/мм²; $\Delta \sigma_\theta = 31,1$ кгс/мм²; $E^* = 15\,500$ кгс/мм²; $\mu^* = 0,35$. Размахи деформаций (силовые деформации без учета теплового расширения) $\Delta \varepsilon_r = \frac{1}{E^*} (\Delta \sigma_r - \mu^* \Delta \sigma_\theta) =$

$= 0,00234$; $\Delta \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E^*} (\Delta \sigma_{\theta} - \mu^* \Delta \sigma_r) = 0,00095$ (плоское напряженное состояние).

По (4.49) получим интенсивность размахов деформаций $\Delta \varepsilon_i = 0,00184$. Среднее напряжение (половина интенсивности напряжений) $\sigma_{im} = \frac{\Delta \sigma_i}{2} = \frac{55}{2} = 27,5$ кгс/мм². Кривая универсальных наклонов по (4.47) для значений σ_B и σ_{im} построена на рис. 4.23 (кривая 2). Долговечность, определенная по этой кривой, составляет $N_f = 6 \cdot 10^6$ циклов.

Долговечности в других расчетных точках диска, приведенные в табл. 4.4, оценены в примере 4.8.

Концентрация напряжений влияет на долговечность дисков при циклическом нагружении; это влияние возрастает с увеличением числа циклов. При оценке долговечности в местах концентрации напряжений в дисках (замковые выступы, отверстия, места соединений и т. п.) возникают некоторые проблемы.

Перспективным является использование численных методов расчета напряженного состояния в зонах концентрации, например, метода конечных элементов (см. гл. 5), если эти методы применяют в сочетании с соответствующими методами пластичности и ползучести, учитывающими историю нагружения. Для оценки концентрации при статическом нагружении этот метод себя оправдывает, давая достаточно хорошее совпадение с теоретическими коэффициентами концентрации [77, 113]. Однако в случае циклического нагружения, в том числе и термического, возникают трудности, связанные с выделением критической области, нелинейностью условий на границах этой области, обеспечением достаточной точности решения, выбором соответствующих критериев разрушения.

При приближенном учете концентрации напряжений для расчетов в условиях малоциклового усталости можно получить удовлетворительные результаты, используя эмпирические формулы Нейбера [77], Петерсона [132], Хэйвуда [113]. Для расчета дисков, работающих при статическом нагружении и в условиях ползучести, при учете концентрации могут быть использованы результаты

4.4. Расчетные параметры

r , см	σ_r	σ_θ	σ_i	σ_B	$\sigma_{ДЛ}$	E^*	k_m	T , °C	ψ , %	N_f , циклов
	кгс/мм ²									
8,0	0	62,6	62,6	—	84	19 500	1,34	545	13	$4 \cdot 10^8$
10,5	10,2	62,6	—	—	82	—	1,31	554	—	—
12,0	17,9	54,9	—	—	80	—	1,46	561	—	—
13,0	21,9	50,7	—	—	79	—	1,51	567	—	—
15,33	48	48,0	48	79	72	16 000	1,5	589	13	$3,5 \cdot 10^4$
19,1	47,0	31,1	41,39	75	61	15 500	1,3	658	13	$6 \cdot 10^6 (6 \cdot 10^5)$ ($r = 16$ см)
21,28	20,1	9,3	17,42	70	49	14 500	2,45	710	13	

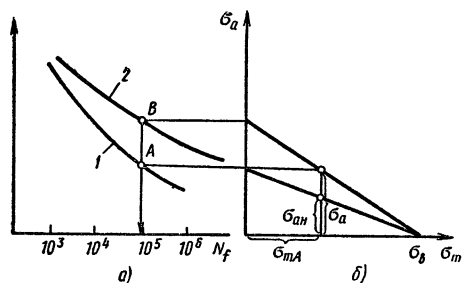


Рис. 4.24

экспериментальных исследований и расчетные зависимости, приведенные в работах [58, 59, 94, 99]. Примеры использования приближенных методов для учета упругопластического деформирования и условий упрочнения при циклических, механических и термических нагружениях приведены в работах [57, 60, 74, 136].

При оценке долговечности в месте концентрации следует использовать эффективные коэффициенты концентрации напряжений α_σ или деформаций α_ϵ , известные из опыта. Характеристики цикла определяют умножением номинальных величин на соответствующие эффективные коэффициенты концентрации. Долговечность вычисляют по кривым усталости гладких образцов или по расчетным зависимостям типа (4.47), как это было описано выше.

Эффективный коэффициент может существенно отличаться от теоретического α_T , определяемого по соотношениям теории упругости. Если теоретический коэффициент зависит только от геометрических параметров детали, концентратора, нагрузок и напряженного состояния, то эффективный коэффициент зависит от долговечности. Отличие α_σ от α_T определяется влиянием пластичности, неравномерности напряжений, масштабным фактором и чувствительностью материала к концентрации напряжений. Часто величина α_σ (или α_ϵ) не известна заранее. В этом случае может быть рекомендовано несколько упрощенных процедур [130], позволяющих получить приближенное решение. Если имеются данные испытаний образцов из материала, из которого изготовлен диск с концентрацией напряжений при том же виде нагрузки и равенстве теоретических коэффициентов концентрации образца и диска, долговечность можно определить с помощью приближенной процедуры (рис. 4.24). На рис. 4.24, б построена линейная зависимость амплитуды от среднего напряжения [аналогично (4.43)]; на рис. 4.24, а приведена зависимость σ_a — N_f для образца с концентрацией напряжений при симметричном цикле (кривая 1; точка А соответствует значению долговечности). Коэффициент концентрации учитывают при амплитуде напряжений, а среднее напряжение принимают по номинальному значению. При использовании результатов следует иметь в виду влияние масштабного фактора при несовпадении размеров концентратора образца и диска. Очевидным преимуществом является учет чувствительности к концентрации напряжений. Если α_σ известен из опыта испытаний аналогичных конструкций, то следует пользоваться кривой 2 для гладких образцов (точка В соответствует значению $\sigma_a =$

$= \alpha_\sigma \sigma_{an}$). В области $N_f \approx 10^3$ циклов кривые усталости образцов с концентрацией и гладких образцов совпадают с точностью до рассеяния данных, и эффективный коэффициент концентрации $\alpha_\sigma \approx 1$. Это свойство можно использовать для приближенных расчетов, проводя кривую усталости с учетом концентрации в логарифмических координатах через точку кривой усталости гладкого образца, соответствующую $N_f = 10^3$ циклов, и точку, ордината которой равна пределу выносливости σ_{-1} на базе $N = 10^7$ циклов, деленному на расчетное значение α_{σ_A} (эффективный амплитудный коэффициент концентрации при $N = 10^7$ циклов). Иногда упрощенно эту кривую проводят через точку с $\sigma = \sigma_{-1/\alpha_1}$.

Коэффициент α_σ может быть определен по приближенным эмпирическим зависимостям. Хэйвуд [113] рекомендует эмпирические формулы для эффективных коэффициентов концентрации, соответствующие различным долговечностям, причем вводятся значения α_{σ_a} — амплитудного и α_{σ_m} — среднего коэффициентов. При $N_f = 10^7$ циклов $\alpha_{\sigma_a} = \alpha_{\sigma_A}$;

$$\alpha_{\sigma_a} = \frac{\sigma_a}{\sigma_{an}} = \alpha_s + (\alpha_{\sigma_A} - \alpha_s) \frac{n^4}{b + n^4}; \quad (4.51)$$

$$\alpha_{\sigma_m} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{mn}} = \alpha_s + (\alpha_{\sigma_A} - \alpha_s) \left(1 - \frac{\sigma_{mn} + \sigma_{on}}{\sigma_b}\right)^2. \quad (4.52)$$

В этих формулах α_{σ_A} — эффективный амплитудный коэффициент концентрации при обычной усталости, определяемый экспериментально или по эмпирическим формулам; α_s — статический коэффициент концентрации, определяемый эмпирическими зависимостями или опытным путем (во многих случаях принимают $\alpha_s = 1$ при $N_f > 10^4$ циклов); n — логарифм числа циклов; b — эмпирический коэффициент, зависящий от σ_b и определяемый из опытов. Приближенные значения b [113] для сталей и сплавов определяются как $b = (1225/\sigma_b^2)$, для сплава Al—Zn—Mg $b = 25$, для Al—Cu $b = 60$. Так как в (4.51) и (4.52) входит логарифм числа циклов, а долговечность является неизвестной величиной, то при использовании этих зависимостей применяют метод подбора.

Эффективный коэффициент концентрации напряжений в области усталости ($N_f \approx 10^7$ циклов) можно оценить по эмпирической формуле Нейбера [77]. С некоторыми поправками [113]

$$\alpha_{\sigma_A} = \frac{\alpha_\tau}{1 + 2 \left(\frac{\alpha_\tau - 1}{\alpha_\tau} \right) \sqrt{\frac{a}{R}}}. \quad (4.53)$$

Здесь $\sqrt{a}$ — эмпирический коэффициент, отражающий чувствительность материала к концентрации напряжений; R — характерный радиус кривизны концентратора (радиус отверстия, радиус закругления паза и т. п.). Значения $\sqrt{a}$, мм^{1/2} : 1) для стали [113] $8,75/\sigma_{-1}^*$ (или $17,7/\sigma_b$, отверстие); $7,05/\sigma_{-1}$ (галтель); $5,3/\sigma_{-1}$

(выточка); 2) для сплава ХН77ТЮР $6,1/\sigma_{-1}$ (при 20°); $8,7/\sigma_{-1}$ (650°C); 3) для алюминиевых сплавов [77] $(28,8/\sigma_b)^3$, для титановых сплавов $<0,07$. Статические коэффициенты концентрации α_s для различных концентраторов, наиболее часто встречающихся в дисках, исследованы достаточно хорошо. Если чувствительность к концентрации напряжений известна из опыта, то в некоторых случаях можно использовать зависимость

$$\alpha_{\sigma A} = 1 + q(\alpha_T - 1). \quad (4.54)$$

Коэффициент q для жаропрочных никелевых сплавов и титана составляет примерно $0,5-0,8$, в частности, для сплава ХН77ТЮР $q \approx 0,7$, для титанового сплава ВТЗ-1 $q \approx 0,8 \div 0,9$ при 20°C . Чувствительность к концентрации есть функция не только свойств материала, но также и напряженного состояния, геометрических параметров, температуры и других факторов. Поэтому (4.54) может иметь ограниченное применение.

Формула, предложенная В. П. Когаевым [97],

$$\alpha_{\sigma A} = \frac{\alpha_T \varepsilon_\sigma}{F\left(\varepsilon_\infty \frac{L}{\bar{G}}, \nu_\sigma\right)} \quad (4.55)$$

учитывает геометрические факторы (коэффициент влияния абсолютных размеров ε_σ ; ε_∞ — его предельное значение при бесконечном диаметре образца; характерный размер L сечения детали в районе концентратора), характеристику напряженного состояния $\bar{G}$ (относительный градиент максимального главного напряжения), константу ν_σ , характеризующую чувствительность материала к концентрации напряжений.

Методы оценки влияния концентрации напряжений на сопротивление усталости можно найти в работе [97]. Коэффициент концентрации деформаций α_ε связан с коэффициентом концентрации напряжений формулой Нейбера

$$\alpha_\varepsilon \alpha_\sigma = \alpha_T^2. \quad (4.56)$$

Эта приближенная формула в дальнейшем уточнена [74] для различных видов упругопластического упрочнения и уровней номинальных напряжений σ_H :

$$\alpha_\varepsilon \alpha_\sigma / \alpha_T^2 = f(\bar{\sigma}_H, \alpha_\sigma, m), \quad (4.57)$$

где $\bar{\sigma}_H = \frac{\sigma_H}{\sigma_T}$ — отношение номинального напряжения к пределу текучести; m — параметр упрочнения (при степенном законе упрочнения $\varepsilon_i = A\sigma_i^m$).

Формула (4.57) принципиально позволяет производить перестройку кривой малоциклового усталости для гладких образцов [экспериментальную или расчетную, например (4.47)] в аналогичную кривую при наличии концентратора, если имеется эксперименталь-

ная диаграмма циклического деформирования материала или теоретическая формулировка гипотезы упрочнения, позволяющая определить связь между напряжениями и деформациями при данном количестве циклов нагружения. Для степенного закона упрочнения Н. А. Махутовым [74] предложен вид функции $f = 1/(\alpha_t \bar{\sigma}_n)^{0,5(1-m) \kappa}$, где $\kappa = 1 - (\bar{\sigma}_n - 1/\alpha_t)$.

Зависимости (4.56) и (4.57) позволяют определить также статический коэффициент концентрации α_s , используя обычную диаграмму деформирования однократного нагружения. Для ограниченной пластической деформации эффективный статический коэффициент концентрации, соответствующий однократному нагружению, может быть определен с помощью приближенной зависимости типа (4.54)

$$\alpha_s = 1 + E_c/E (\alpha_t - 1), \quad (4.58)$$

где E_c — секущий модуль диаграммы деформирования, определяемый в процессе упругопластического расчета (см. гл. 3); может быть принят E_c , соответствующий деформации $\varepsilon = \alpha_t \bar{\sigma}_n/E$.

Пример 4.8. Рассмотрим оценку долговечности в местах концентрации на примере расчета диска турбины, представленного на рис. 4.21 (см. пример 4.7). Диск имеет восемь эксцентрично расположенных отверстий по радиусам 16 см диаметром 13,6 мм и 16 отверстий под штифты крепления в ступичной части диска диаметром 10 мм.

Определим долговечность для области отверстий, расположенных эксцентрично по радиусу диска 16 см. Теоретический коэффициент концентрации для этих отверстий в диске достаточно точно описывается формулой И. Г. Терверовского [99]

$$\alpha_t = 3 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{d}{l}, \quad (4.59)$$

где d — диаметр отверстий; l — расстояние между контурами отверстий; σ_1 — максимальное и σ_2 — минимальное напряжения в плоском напряженном состоянии.

Напряжения по радиусу 16 см (см. табл. 4.4) $\sigma_1 = \sigma_r = 47$ кгс/мм²; $\sigma_2 = \sigma_\theta = 45$ кгс/мм². По формуле (4.59) определим $\alpha_t = 1,931$. Так как отверстия расположены на гладком участке диска и удалены друг от друга, а материал диска достаточно пластичный, то напряжения в области концентратора хорошо перераспределяются в упругопластической области, и можно считать $\alpha_s \approx 1$. По (4.53) $\alpha_{\sigma A} = 1,78$, причем принято $\sqrt{a} = 17,7 : 79 = 0,224$ (см. табл. 4.5). Далее расчет проводят следующим образом. По 4.52 определяют $\alpha_{\sigma t} = 1,128$.

Определим среднее напряжение с учетом концентрации как $\sigma_{im} = \alpha_{\sigma t} \sigma_{im}$ и построим кривую (4.47) с учетом σ_{im} для данных, соответствующих радиусу 16 см (кривая совпадает с 2 на рис. 4.23). Методом проб предположим, что $N_f = 10^6$ циклов, откуда, приняв $b = (1225/\sigma_b)^2 = (1225/79)^2$, по (4.51) получим эффективный коэффициент $\alpha_a = 1,563$.

Экспериментальным данным наиболее соответствуют критерии максимальных напряжений. Максимальные номинальные напряжения $\sigma_r = 47$ кгс/мм², а с учетом концентрации соответственно $\Delta \varepsilon_1 = \alpha_a \frac{\sigma_r}{E} = 1,563 \frac{47}{16\,000} = 0,0046$.

При кривой 2 рис. 4.23 для этого значения получим $N_f = 1,4 \cdot 10^4$ — первое приближение для долговечности. Введем поправку, определив α_a по новому значению $n_1 = \lg(1,4 \cdot 10^4) = 4,146$; $\alpha_{a(2)} = 1,435$; $\Delta \varepsilon_{(2)} = 0,00422$ и $N_{f(2)} = 3,5 \cdot 10^4$ циклов, что можно считать окончательным.

Определим долговечность для радиуса центрального отверстия диска 8 см. По этому радиусу расположены радиальные отверстия для штифтов крепления диска к цапфе вала (см. рис. 4.22). Теоретический коэффициент концентрации можно определить по радиусу центрального отверстия как в полосе [113], учитывая одноосность напряженного состояния в центре, т. е. $\alpha_T = 3$. В отличие от предыдущего в данном случае можно определить статический коэффициент, так как диск подвергался испытаниям на разгонном стенде до разрушения с имитацией температурного состояния.

Отношение расчетной разрушающей частоты вращения, определенной по (4.30), к экспериментальной $\frac{n_{расч}}{n_{эксп}} = 1,06$; при этом с некоторым приближением предполагаем, что различие частот вращения связано с неучетом концентрации.

Разрушение началось от рассматриваемых штифтовых отверстий в центре диска (разрушенный по меридиональному сечению диск показан на рис. 4.11). Предполагая линейную зависимость напряжений от квадрата частоты вращения, см. гл. 1, определим с некоторым приближением

$$\alpha_s = \left(\frac{n_{расч}}{n_{эксп}} \right)^2 = 1,12. \quad (4.60)$$

По (4.53) определим $\alpha_{\sigma A}$, приняв $\sqrt{a} = 17,7/\sigma_B = 17,7/81 = 0,218$, откуда $\alpha_{\sigma a} = 2,66$.

Эффективный коэффициент $\alpha_{\sigma a}$ определяем при $b = \left(\frac{1225}{81} \right)^2 = 228$; $\alpha_{\sigma a} = 1,92$. Номинальные напряжения по радиусу в центре диска $\sigma_0 = 62,6$ кгс/мм²; $\sigma_r = 0$. Размах деформаций с учетом концентрации $\Delta \varepsilon = \alpha_a \frac{\sigma_0}{E} = 1,92 \times \times 62,6/19\,500 = 0,00613$.

Первое приближение для числа циклов до разрушения (см. кривую 1 на рис. 4.23) составляет $N_{f(1)} = 2 \cdot 10^3$ циклов, $n_{(1)} = \lg N_{f(1)} = 3,3010$. Второе приближение для $\alpha_{a(2)} = 1,59$ и $N_{f(2)} = 4 \cdot 10^3$ циклов можно считать окончательным.

Аналогичным образом может быть проведена оценка долговечности в зоне замковых выступов диска. Кривая универсальных наклонов построена для $r = 24,28$ см по данным табл. 4.4 (кривая 3 на рис. 4.23). Теоретические коэффициенты концентрации у дна паза замка с учетом геометрических параметров замкового выступа могут быть определены по формулам работы [65]. Процедура расчета долговечности далее не будет принципиально отличаться от изложенного выше.

Для дисков, работающих при 20° С, повреждение в результате малоцикловой усталости является основным¹, и формула (4.38) позволяет оценить долговечность диска при действии квазистатических нагрузок. Долговечность определяют в циклах N_f или часах как $\tau_f = N_f \Delta \tau$, где $\Delta \tau$ — продолжительность рабочего цикла. При умеренных температурах и небольших выдержках влияние ползучести и соответствующее статическое повреждение может быть учтено с помощью «правила 10%» [128]. В соответствии с этим правилом фактическая расчетная прогнозируемая долговечность N_f составляет 0,1 долговечности, определенной по (4.38) и (4.47). То же правило можно использовать и для отдельных точек (участков) диска, если максимальная температура

¹ Не учитываются динамические нагрузки, действующие на диск.

их такова, что наклон кривой ползучести (показатель m в уравнении кривой ползучести) невелик. При расчете дисков из сплавов ХН77ТЮР и ХН73МБТЮ этот метод может быть использован для приближенной оценки в области температур 550—650° С. Так, для подободного сечения диска, рассмотренного в примере 4.7 ($r = 19,2$ см), число циклов до разрушения, определенное по кривой универсальных наклонов, составило $N_f = 9,5 \cdot 10^5$. Учитывая, что температура в этом сечении достаточно высока, то по «правилу 10%» прогнозируемая долговечность $N_f = 9,5 \cdot 10^4$ циклов. Однако указанное выше правило является приближенным, основанным на общем представлении о времени образования и развития трещин усталости в условиях высоких температур, не учитывающим такие важные при высоких температурах факторы, как частоту нагружения, выдержку при максимальной нагрузке, характер ползучести и т. п.

Совместное влияние малоциклового усталости и длительной прочности учитывается на основе линейного суммирования статической и циклической составляющих повреждений [128]

$$P_c + P_u = 1 \quad (4.61)$$

или

$$\frac{t_f}{t_f^*} + \frac{N_f}{N_f^*} = 1. \quad (4.62)$$

В (4.62) N_f — число циклов до разрушения при одновременном действии циклических нагрузок и ползучести; N_f^* — число циклов до разрушения, определенное без учета ползучести методом универсальных наклонов [по (4.38) — (4.47)].

Время длительной выдержки $t_f = \frac{k}{v} N_f$, где k — константа, учитывающая эквивалентную длительность времени, в течение которого накапливается статическое повреждение; v — частота в циклах в единицу времени.

Для приближенной оценки влияния ползучести представим кривую длительной прочности уравнением

$$\sigma^m t_f^* = (3,5\sigma_B)^m A. \quad (4.63)$$

Считая размах деформации

$$\Delta \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.64)$$

и учитывая только первый член в формуле (4.38), получим

$$t_f^* = A (N_f^*)^{0,12m}. \quad (4.65)$$

Из (4.62) и (4.65) следует

$$N_f = \frac{N_f^*}{1 + k(Av)^{-1} (N_f^*)^{1-0,12m}}. \quad (4.66)$$

Если влияние ползучести предполагается существенным, то следует суммировать статические и циклические повреждения [26] в соответствии с (4.61). Используя принцип линейного суммирования и рассматривая одинаковые установившиеся циклы нагружения, получим статическую составляющую повреждений за все время до разрушения при совместном действии повреждений

$$P_c = N_f \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t_i^*} \quad (4.67)$$

аналогично (4.18), где t_i — время работы на i -м режиме за один цикл; t_i^* — время до разрушения при напряжениях $\sigma_{эKB\ i}$. Циклическая усталостная составляющая

$$P_y = \frac{N_f}{N_f^*}, \quad (4.68)$$

где N_f — число циклов нагружения; N_f^* — число циклов до разрушения, определяемое без учета выдержек по максимальному размаху напряжений или деформаций в установившемся цикле.

Производя суммирование в соответствии с (4.61), получим, что прогнозируемая долговечность в циклах при совместном действии усталости и ползучести определяется из (4.67) и (4.68) как

$$N_f = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t_i^*} + \frac{1}{N_f^*}}. \quad (4.69)$$

Возможная ошибка при использовании линейного суммирования укладывается в полосу разброса свойств материала при малоцикловой усталости, кратного трем по долговечности, т. е. использование линейного суммирования является вполне оправданным [30].

При высоких температурах взаимодействие усталостного и статического повреждений отличается от линейного [44, 136]. При надежных экспериментальных данных, позволяющих определить дополнительные константы нелинейных эмпирических зависимостей, они дают более точные результаты.

За цикл нагружения ранее условились принимать все изменения напряжений от запуска до останова турбомашин, повторяющиеся многократно в процессе эксплуатации. Однако в некоторых случаях такой цикл может быть сложным, так что его приходится рассматривать как основной блок, состоящий из элементарных циклов. При этом вся история напряжений или деформаций представляется в виде суммы ряда этих элементарных циклов. Структура деления основного цикла на элементарные показана

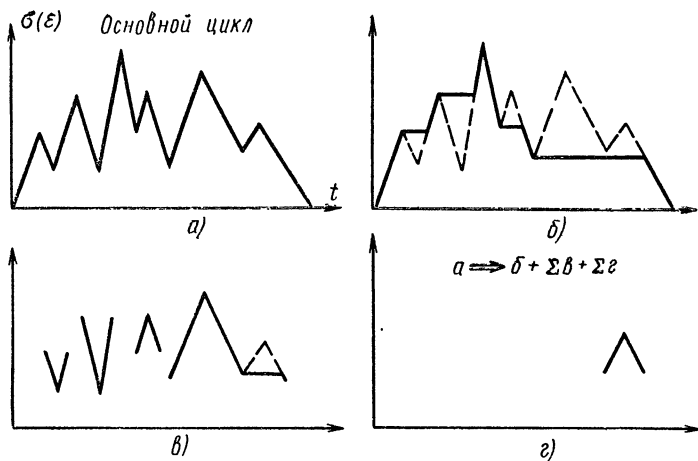


Рис. 4.25

на рис. 4.25. Повреждения за каждый k -й элементарный цикл определяют отдельно и суммируют; общее повреждение за N_f циклов

$$P_y = N_f \sum_{j=1}^m \frac{1}{N_{fj}^*}, \quad (4.70)$$

где j — номер элементарного цикла; m — число элементарных циклов в основном цикле блока; N_f — число основных циклов.

Если рассматривать историю диска, определяя напряженно-деформированное состояние в соответствии с изложенным в гл. 3, то при оценке долговечности следует выделять неустановившееся и установившееся состояние. Если обозначить время до наступления основного установившегося цикла t_s , число основных циклов N_s , неустановившегося состояния, соответствующее число расчетных шагов n_s за время t_s и число элементарных циклов в основном цикле m , то общее повреждение за неустановившиеся циклы определится как сумма статической и циклической составляющих

$$P_n = P_{cn} + P_{yn} = \sum_{n=1}^{n=n_s} \frac{\Delta t_n}{t_n^*} + \sum_{j=1}^{j=mN_s} \frac{1}{N_{fj}^*}, \quad (4.71)$$

где Δt_n — длительность расчетного шага времени; $t_n^* = t_n^*(\sigma_{э_{кв} n} T_n)$ — время до разрушения при напряжении и температуре на j -м шаге, определенное в процедуре расчета по кривым длительной прочности; N_{fj}^* — число циклов до разрушения, соответствующее размаху напряжений и температуре j -го элементарного неустановившегося цикла.

Повреждение в основных циклах установившегося состояния определяется в соответствии с (4.67) и (4.70)

$$P_s = P_{cs} + P_{ys} = (N_p - N_s) \left[\sum_{n_{s+1}}^{n_{s+k}} \frac{\Delta t_n}{t_n^*} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{N_{fj}} \right]. \quad (4.72)$$

Здесь N_p — общее количество рабочих циклов за время работы диска; k и m — число шагов и элементарных циклов в установившемся цикле соответственно.

Пример 4.9. Рассмотрим процесс накопления повреждений в диске турбины, расчет которого с учетом истории нагружения для 150 циклов проведен в примере 3.4. На рис. 4.26 показаны кривые накопления повреждений за 125 неустановившихся циклов в ступице на расчетном радиусе $r=9,25$ см; здесь $P_{ун}$ — суммарное повреждение от ползучести $P_{сн}$ и цикличности $P_{ун}$. Величина $P_{ун}$ определена в соответствии со вторым членом (4.71); величины N_{fj} подсчитывали по (4.47) по размаху полной деформации цикла с учетом асимметрии.

Для определения повреждения длительной прочности в отличие от (4.71) использовали деформационный критерий

$$P_{сн} = \frac{\epsilon_{i*}^c(t)}{\delta_c^*(\sigma_i, T)}, \quad (4.73)$$

где ϵ_{i*}^c — текущая накопленная деформация ползучести; δ_c^* — относительное удлинение при ползучести, являющееся характеристикой материала и определяющее при испытаниях на ползучесть $\delta_c^*(\sigma_i, T) = \ln \frac{1}{1 - \psi_c^*}$, где ψ_c^* — попе-

речное сужение образца при напряжениях $\sigma = \sigma_i$, определенное в опытах на длительную прочность. На рис. 4.26 показано также изменение числа циклов до разрушения N_{fj} для каждого основного цикла в зависимости от номера основного цикла.

Процесс пластического деформирования в ступичной части диска затухает в нескольких первых циклах нагружения. Этим объясняются значительные повреждения, накапливаемые в первых циклах. В последующих циклах нагружения пластическая деформация и повреждения, накапливаемые за цикл, уменьшаются. Пластические деформации в различных точках диска накапливаются неравномерно от цикла к циклу за счет перераспределения пластических деформаций. Этим объясняется, что N_f во втором цикле нагружения оказывается выше, чем в третьем цикле нагружения. Первому циклу нагружения соответствует $N_f = 1,84 \cdot 10^6$, второму $8,55 \cdot 10^5$, третьему $7,2 \cdot 10^5$.

Установившемуся напряженному состоянию в диске соответствует $N_f = 2,5 \cdot 10^6$ циклов, что совпадает с величиной, полученной в примере 4.6. Изменение N_f , $P_{сн}$ и $P_{ун}$ в ободной части диска и в области полотна в сечении радиуса 17,5 см представлено соответственно на рис. 4.27 и 4.28.

В ободной части диска напряжения σ_{rb} не меняются от цикла к циклу, так как они задаются в виде граничных условий. Напряжения $\sigma_{\theta b}$ в процессе работы диска изменяются, но их значения на максимальном режиме в установившемся цикле нагружения составляют примерно 20% максимального значения $\sigma_{rb} = 1513$ кгс/см². Таким обра-

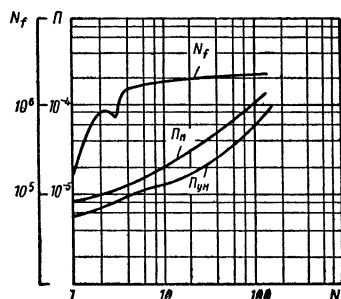


Рис. 4.26

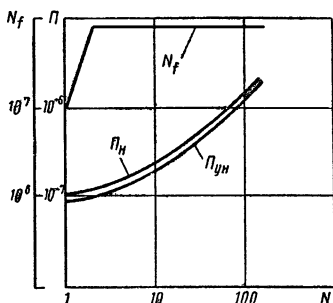


Рис. 4.27

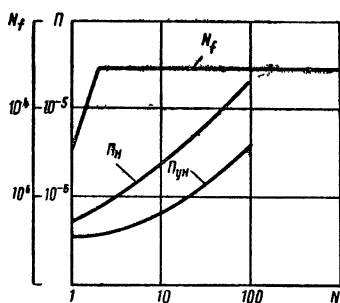


Рис. 4.28

зом, деформации ползучести практически не возникают в ободной части, в связи с чем $\Pi_{сн} \approx \Pi_{ун}$.

В полоте деформация ползучести существенна, и повреждение $\Pi_{сн}$, которое на рис. 4.28 представлено разностью между кривыми $\Pi_{сн}$ и $\Pi_{ун}$, имеет тот же порядок, что и суммарное повреждение.

На рис. 4.29 и 4.30 показано изменение повреждения, накапливаемого за каждый цикл, в зависимости от номера цикла для радиусов 9,25 и 17,5 см соответственно. При приближении к установившемуся состоянию повреждения, накапливаемого за 1 цикл, становится постоянной величиной.

Результаты расчета статической и циклической составляющих повреждения, приведенные в примере 4.9, являются достаточно типичными. В большинстве случаев доля повреждения от малоциклового усталости в дисках, особенно с учетом влияния концентрации напряжений, существенно больше, чем повреждения, связанного с механизмом истощения длительной прочности. Значительный разброс характеристик малоциклового усталости требует уточненных расчетов, значительной экспериментальной проверки и повышенных запасов по циклической долговечности.

При установлении возможной эксплуатационной долговечности или прогнозируемого ресурса диска в циклах N_3 используют коэффициент запаса по циклической долговечности, определяемый как отношение прогнозируемой долговечности N_f к N_3 ,

$$k_N = N_f / N_3. \quad (4.74)$$

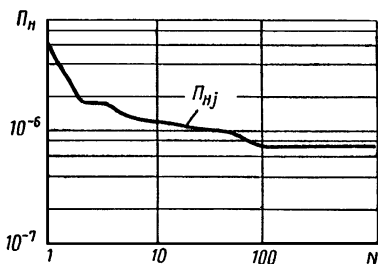


Рис. 4.29

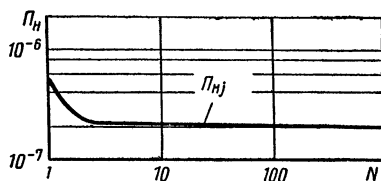


Рис. 4.30

Запас по циклической долговечности учитывает разброс характеристик малоцикловой усталости и приближенность расчетных методов, и его принимают большим, чем запас по напряжениям или несущей способности; обычно $k_N = 5 \div 12$.

Увеличение ресурсов турбомашин привело к внедрению в практику ускоренных испытаний [62] — циклических испытаний, дисков, проводимых с целью выявления действительной долговечности конструкции. Эти испытания проводят на натурной машине или на разгонном стенде, позволяющем циклировать нагрузки, действующие на диск. Для установления эквивалентности испытаний, проводимых на стенде, по условиям работы диска в эксплуатации также необходимо осуществлять расчеты на долговечность; в этих случаях рассматривают цикл нагружения диска при эксплуатации и испытаниях, проводят расчет прогнозируемых долговечностей N_f и $N_{f \text{ исп}}$ и определяют коэффициент приведения

$$\eta = \frac{N_f}{N_{f \text{ исп}}}. \quad (4.75)$$

По результатам испытаний эксплуатационная долговечность

$$N_{\text{э}} = \frac{1}{k_N} \eta N_{f \text{ исп}}. \quad (4.76)$$

Объемное напряженное состояние дисков

§ 14. Основные соотношения метода конечных элементов для диска при осесимметричной нагрузке

В большинстве случаев при расчете на прочность диски турбомашин, особенно диски компрессоров, можно рассматривать как тонкие пластины, пользуясь методами, изложенными в гл. 1—3. В утолщенных дисках, имеющих развитые ступицы, напряженное состояние будет отличаться от двухосного. Эксперименты показывают, что увеличение ширины ступицы более чем в 3 раза по сравнению со средней толщиной полотна не повышает относительную прочность диска. Решить пространственную задачу необходимо также для уточненного расчета зон концентрации напряжений.

Осесимметричное нагружение дисков рассмотрим как наиболее типичное при оценке статической прочности. В качестве расчетного метода использован метод конечных элементов (МКЭ). Это не единственный возможный метод расчета; известно применение и других методов дискретизации пространственной задачи к расчету дисков (метод конечных разностей, вариационно-разностный [2, 43, 100]). МКЭ наиболее широко применяют в прикладных задачах [47]. Можно отметить простоту формулировок основных принципов, ясность физической интерпретации, свободу размещения узловых точек, симметрию матриц жесткости элементов и системы уравнений, облегчающую контроль расчетов. При выборе в качестве неизвестных узловых перемещений матрица разрешающей системы будет симметричной, положительно определенной (при исключении перемещения диска как жесткого целого) и иметь ленточную структуру. Это способствует быстрому решению системы разрешающих уравнений прямыми или итерационными методами. Методу конечных элементов посвящено большое число работ [3, 46, 53, 114, 119]. Приведенные в гл. 4 результаты получены для простейшего кольцевого элемента треугольного сечения, однако основные соображения, использованные в решении, имеют достаточно общий характер и применимы как для плоской задачи, так и при более сложных элементах в осесимметричном случае.

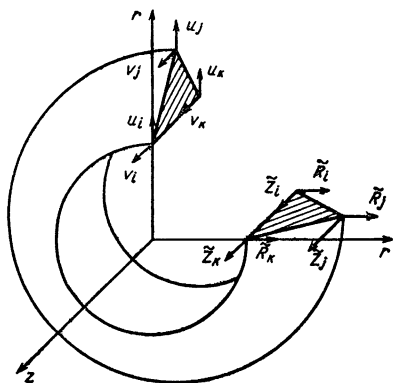


Рис. 5.1

Перемещения. Рассмотрим равновесие цилиндрического элемента треугольного сечения в цилиндрической системе координат r, θ, z (рис. 5.1). Координаты вершин треугольника соответственно r_i, r_j, r_k и z_i, z_j, z_k . Радиальные (u_i, u_j, u_k) и осевые (v_i, v_j, v_k) перемещения узлов выбраны в качестве основных неизвестных. Предположим, что радиальные и осевые поля перемещений $u(r, z)$ и $v(r, z)$ аппроксимируются внутри треугольника линейными функциями координат

$$\begin{aligned} u(r, z) &= d_1 + d_2 r + d_3 z; \\ v(r, z) &= d_4 + d_5 r + d_6 z, \end{aligned} \quad (5.1)$$

или в матричной записи $\begin{bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(r, z) \bar{\mathbf{d}}$.

Здесь матрица размерности 2×6 $\mathbf{H}(r, z) = \begin{bmatrix} 1 & r & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & z \end{bmatrix}$;

шестимерный столбец — вектор неизвестных коэффициентов $\bar{\mathbf{d}} = [d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6]'$. Условимся штрихом обозначать транспонирование матрицы¹.

Вектор перемещений узловых точек

$$\bar{\xi} = [u_i u_j u_k v_i v_j v_k]' = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{bmatrix}$ — квадратная подматрица третьего порядка.

Из (5.2) получим выражение для неизвестных коэффициентов $\bar{\mathbf{d}}$, которое содержит только координаты и перемещения узловых точек

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{Q} \bar{\xi}, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix}$ — квадратная матрица размерности 6×6 .

Подставляя (5.3) в (5.1), получим перемещения точек поперечного сечения элемента

$$\begin{bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(r, z) \mathbf{Q} \bar{\xi}. \quad (5.4)$$

¹ Сведения о матричных преобразованиях, используемых в этой главе, можно найти в работах [4, 5].

Деформации. В случае осевой симметрии вектор деформации имеет вид

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Дифференцируя соотношения (5.4), получим вектор деформации

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{B} \mathbf{Q} \bar{\xi}, \quad (5.6)$$

где прямоугольная матрица размерности 4×6

$$\mathbf{B}(r, z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/r & 1 & z/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Напряжения. Соотношения упругости (закон Гука) запишем в матричном виде

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} (\bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}}_T), \quad (5.8)$$

$$\text{где } \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} \text{ и } \bar{\mathbf{e}}_T = \begin{bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{bmatrix};$$

здесь T — температура; α — коэффициент линейного расширения.

Симметричная четвертого порядка матрица параметров упругости

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ - & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \text{symm} & - & 1 & 0 \\ - & - & - & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Подставив (5.6) в (5.8), получим для столбца напряжений $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ выражение через перемещения узлов $\bar{\xi}$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \mathbf{B}(r, z) \mathbf{Q} \bar{\xi} - \mathbf{D} \bar{\mathbf{e}}_T. \quad (5.10)$$

Предположим, что диск находится под действием центробежной нагрузки, переменного по радиусу и вдоль оси вращения температурного поля $T(r, z)$ и распределенной поверхности нагрузки $\bar{q}(r, z)$. Кроме того, на выделенный элемент от остальной части диска действуют равномерно распределенные по окружностям соответствующих радиусов $r_{i,j,k}$ радиальные $(\tilde{R}_{i,j,k})$ и осевые $(\tilde{Z}_{i,j,k})$ сосредоточенные силы, приложенные в узлах элемента (см. рис. 5.1). При выводе уравнений равновесия элемента внешние сосредоточенные силы, действующие в узлах, например реакции опор, считаются входящими в неизвестные силы в узлах элемента $\tilde{R}_{i,j,k}$ и $\tilde{Z}_{i,j,k}$.

Уравнения равновесия. Для вывода уравнений равновесия элемента используем принцип возможных перемещений. Узлам n -го элемента сообщаются произвольные малые перемещения $\bar{\xi}_n^{*'} = [u_i^* u_j^* u_k^* v_i^* v_j^* v_k^*]$. Работа, которую совершает сила в узлах элемента на перемещениях,

$$A_n^g = \bar{\xi}_n^{*'} \bar{\mathbf{g}}_n,$$

где вектор сил, приложенных в узлах элемента,

$$\bar{\mathbf{g}}_n' = [R_i R_j R_k z_i z_j z_k]_n'. \quad (5.11)$$

Работа внутренних сил (напряжений) на вариации деформаций, которая обозначена $\bar{\mathbf{e}}_n^*$,

$$U_n = \int_{v_n} \bar{\mathbf{e}}_n^{*'} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n dv_n = \int_{v_n} \bar{\mathbf{e}}_n^{*'} \mathbf{D} \mathbf{B}(r, z) \mathbf{Q}_n \bar{\xi}_n dv_n - \int_{v_n} \bar{\mathbf{e}}_n^{*'} \mathbf{D} \bar{\mathbf{e}}_T dv_n.$$

Здесь интегрирование ведется по объему v_n выделенного n -го элемента. Используя (5.6) и транспонируя обе части равенства, получим $\bar{\mathbf{e}}_n^{*'} = \bar{\xi}_n^{*'} \mathbf{Q}_n' \mathbf{B}'(r, z)$. Возможная работа внутренних сил имеет теперь вид

$$U_n = \bar{\xi}_n^{*'} \mathbf{Q}_n' \left[\int_{v_n} \mathbf{B}'(r, z) \mathbf{D} \mathbf{B}(r, z) dv_n \right] \mathbf{Q}_n \bar{\xi}_n - \bar{\xi}_n^{*'} \mathbf{Q}_n' \left[\int_{v_n} \mathbf{B}'(r, z) \mathbf{D} \bar{\mathbf{e}}_T dv_n \right]. \quad (5.12)$$

Вектор действующей на элемент центробежной нагрузки

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \rho \omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

где ρ — плотность материала диска; ω — угловая скорость вращения диска.

Работа центробежных сил на возможных перемещениях элемента с учетом (5.4)

$$A_n^p = \int_{v_n} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \rho \omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix} dv_n = \bar{\xi}_n^{*'} Q_n' \int_{v_n} H'(r, z) \bar{P} dv_n. \quad (5.14)$$

Для граничных элементов следует учесть работу распределенных поверхностных сил $q = \begin{bmatrix} q_r \\ q_z \end{bmatrix}$ на возможных перемещениях

$$A_n^q = \int_{s_n} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} q_r \\ q_z \end{bmatrix} ds = \bar{\xi}_n^{*'} Q_n' \int_{s_n} [H'(r, z)] \bar{q} ds. \quad (5.15)$$

Здесь $\int_{s_n}$ — интеграл по боковым поверхностям элемента; $[H'(r, z)]$ — значения матрицы $H'(r, z)$ на поверхностях; для внутренних элементов $\bar{q} = 0$.

Согласно принципу возможных перемещений полная работа всех сил на возможных перемещениях равна нулю

$$U_n - A_n^g - A_n^p - A_n^q = 0. \quad (5.16)$$

В силу произвольности возможных перемещений $\bar{\xi}_n^{*'}$ получим окончательно следующее матричное уравнение равновесия n -го элемента:

$$\begin{aligned} \bar{g}_n = Q_n' \left[\int_{v_n} B' DB dv_n \right] Q_n \bar{\xi}_n - Q_n' \int_{v_n} B' D \bar{\epsilon}_T dv_n - \\ - Q_n' \int_{v_n} H' \bar{m} dv_n - Q_n' \int_{s_n} [H'] \bar{q} ds_n. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Матрица жесткости элемента. Введем следующие обозначения. Квадратная матрица размерностью 6×6

$$s_n = Q_n' \left[\int_{v_n} B' DB dv_n \right] Q_n, \quad (5.18)$$

устанавливающая связь между вектором узловых сил $\bar{g}_n$ и вектором узловых перемещений $\bar{\xi}_n$ элемента, называется матрицей жесткости элемента.

Матрица жесткости элемента является симметричной, так как она образована путем умножения прямых и транспонированных матриц. В дальнейшем матрицу s_n будет удобно разбить на четыре блока третьего порядка

$$s_n = \begin{bmatrix} s_n^{11} & s_n^{12} \\ (s_n^{12})' & s_n^{22} \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Подматрицы s_n^{11} и s_n^{22} , очевидно, также являются симметричными. Столбец температурных членов представим в виде

$$\bar{f}_n^T = Q'_n \int_{v_n} B' D \varepsilon_T dv_n. \quad (5.20)$$

Векторы центробежных и поверхностных нагрузок элемента

$$\bar{f}_n^m = Q'_n \int_{v_n} H' \bar{m} dv_n; \quad \bar{f}_n^q = Q'_n \int_{s_n} [H'] \bar{q} ds_n.$$

Для дальнейшего рассмотрения шестимерные векторы $\bar{f}_n^T$, $\bar{f}_n^m$, $\bar{f}_n^q$ удобно разбить на трехмерные

$$\bar{f}_n^{Tmq} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{nR}^{Tmq} \\ \bar{f}_{nZ}^{Tmq} \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

где $\bar{f}_{nR}^{Tmq}$ состоят из первых трех компонент соответствующих векторов $\bar{f}_n^{Tmq}$, а $\bar{f}_{nZ}^{Tmq}$ — из вторых трех компонент.

Подробно компоненты матрицы жесткости элемента s_n , температурного и центробежного векторов-столбцов $\bar{f}_n^T$ и $\bar{f}_n^m$ выписаны в приложении 3. Там же приведены определенные интегралы, встречающиеся при вычислении этих компонент.

Уравнение равновесия элемента (5.17) перепишем в виде

$$\bar{g}_n = s_n \bar{s}_n - \bar{f}_n^T - \bar{f}_n^m - \bar{f}_n^q. \quad (5.22)$$

Составление уравнения равновесия для ансамбля. Допустим, что диск разбит на N конечных элементов. Уравнения, аналогичные (5.22), можно записать для каждого из элементов диска

$$\begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \\ \vdots \\ \bar{g}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & s_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \bar{s}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{f}_1^T \\ \bar{f}_2^T \\ \vdots \\ \bar{f}_N^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{f}_1^m \\ \bar{f}_2^m \\ \vdots \\ \bar{f}_N^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{f}_1^q \\ \bar{f}_2^q \\ \vdots \\ \bar{f}_N^q \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно изменить порядок уравнений в системе (5.23), выписав сначала уравнения для всех u -компонент, а затем для всех v -компонент. Система (5.23) примет вид

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ (s_{12}) & s_{22} \end{bmatrix} \bar{s} - \bar{f}^T - \bar{f}^m - \bar{f}^q; \quad (5.24)$$

здесь

$$\bar{g}' = [R_1 R_2 \dots R_{3N} Z_1 Z_2 \dots Z_{3N}]; \quad (5.25)$$

$$\bar{s}' = [u_1 u_2 \dots u_{3N} v_1 v_2 \dots v_{3N}], \quad (5.26)$$

где R_i, Z_i, u_i, v_i — неизвестные узловые силы и перемещения, пронумерованные поэлементно.

Матрицы

$$s_{11} = \begin{bmatrix} s_1^{11} & & 0 \\ & s_2^{11} & \\ 0 & & s_N^{11} \end{bmatrix} \quad s_{22} = \begin{bmatrix} s_1^{22} & & 0 \\ & s_2^{22} & \\ 0 & & s_N^{22} \end{bmatrix} \quad s_{12} = \begin{bmatrix} s_1^{12} & 0 \\ & s_2^{12} \\ 0 & s_N^{12} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

имеют блочно-диагональную структуру и составлены из блоков $s_n^{11}, s_n^{22}, s_n^{12}$ матриц жесткости отдельных элементов; $6N$ -мерные векторы правой части $\bar{f}_{R,Z}^{rmq}$ удобно разбить на два $3N$ -мерных

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_R^{rmq} \\ \bar{f}_Z^{rmq} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Тогда каждый из векторов $\bar{f}_{RZ}^{rmq}$ будет составлен из соответствующих трехмерных векторов $\bar{f}_{nR,nz}^{rmq}$ отдельных элементов.

Рассмотрим условие равенства перемещений в узлах. В силу этого условия вектор неизвестных узловых перемещений $\bar{\xi}$, соответствующий поэлементной нумерации узлов, содержит кратные компоненты, относящиеся к одному и тому же узлу, но имеющие различные номера. Кратность узла определяется числом сходящихся в этом узле элементов.

Введем сквозную по всему диску нумерацию узлов и соответствующий ей вектор узловых перемещений

$$\bar{\chi}' = [u_1, \dots, u_M, v_1, \dots, v_M], \quad (5.29)$$

где M — число узлов при данном разбиении диска на N конечных элементов. Очевидно, что между вектором узловых перемещений $\bar{\xi}$, соответствующим поэлементной нумерации узлов, и вектором $\bar{\chi}$, соответствующим сквозной нумерации, существует определенная связь

$$\bar{\xi} = K\bar{\chi}, \quad (5.30)$$

устанавливаемая прямоугольной матрицей K размерностью $6N \cdot 2M$.

Поскольку эта связь одинакова как для u -компонент, так и для v -компонент, матрица

$$K = \left[\begin{array}{c|c} K_0 & 0 \\ \hline 0 & K_0 \end{array} \right], \quad (5.31)$$

где прямоугольная матрица K_0 имеет размерность $3N \cdot M$; назовем ее ключевой матрицей (аналогичный прием используется в [82]).

Структура матрицы K_0 следующая. В каждой строке отлична от нуля только одна компонента, которая равна единице. Она стоит в столбце, номер которого равен номеру узла при сквозной нумерации. Например, пусть в i -й строке матрицы единица стоит в j -м столбце. Это значит, что узел, который при поэлементной нумерации имел номер i , при сквозной нумерации приобретает номер j . Таким образом, для определения матрицы K_0 достаточно указать для каждой строки номер столбца, где стоит «1». Из сказанного следует, что матрицу K_0 можно определить последовательностью $3N$ целых чисел.

Транспонированная к K_0 матрица K'_0 собирает в узле силы от сходящихся здесь отдельных конечных элементов. С ее помощью можно записать следующее матричное уравнение равновесия сил в узлах:

$$K'_0 \tilde{g} = \tilde{P}, \quad (5.32)$$

где в соответствии с (5.31)

$$K' = \left[\begin{array}{c|c} K'_0 & 0 \\ \hline 0 & K_0 \end{array} \right]$$

$(\tilde{g})' = [\tilde{R}_1 \dots \tilde{R}_{3N} \tilde{Z}_1 \dots \tilde{Z}_{3N}]$, $\tilde{P}$ — вектор внешних сосредоточенных в узлах нагрузок, равномерно распределенных по окружностям соответствующих радиусов. Из (5.32) следует аналогичное уравнение для векторов $\bar{g}$ и $\bar{P}$

$$K' \bar{g} = \bar{P}, \quad (5.33)$$

где $\bar{g}$ определено выражением (5.25), а $(\bar{P})' = 2\pi [r_1 R_1 \dots r_{3N} R_{3N} r_1 Z_1 \dots r_{3N} Z_{3N}]$. Уравнение (5.33) и будет использоваться в дальнейшем. Компоненты вектора $\bar{P}$ для внутренних узлов, очевидно, равны нулю. Для узлов, лежащих на поверхности диска, они могут быть отличными от нуля (например, при наличии реакций опор или каких-либо других внешних сосредоточенных нагрузок).

Матричное уравнение равновесия (5.24), уравнение неразрывности и перемещений в узлах (5.30) и уравнение равновесия сил в узлах (5.33) образуют систему $12N + 2M$ линейных алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных. Порядок этой системы можно понизить и свести до $2M$ (где M — число узлов), если исключить из нее вектор узловых сил $\bar{g}$ и узловых перемещений $\bar{\xi}$, соответствующих поэлементной нумерации узлов. Подставляя (5.30) в (5.24), а затем в (5.33), получим матричное уравнение относительно вектора узловых перемещений $\bar{\chi}$

$$A \bar{\chi} = \bar{F}^r + \bar{F}^m + \bar{F}^q + \bar{P}. \quad (5.34)$$

Матричное уравнение (5.34) является основным разрешающим уравнением задачи. Оно состоит из $2M$ линейных алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных, причем эти уравнения представляют собой уравнения равновесия узлов, записанные относительно неизвестных узловых перемещений.

Матрица жесткости системы. Квадратная матрица A имеет размерность $2M \times 2M$ и называется матрицей жесткости системы. Она по определению симметрична, поскольку матрица S симметрична. Каждый из блоков матрицы $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}$ имеет блочно-трехдиагональную структуру и в силу блочно-диагонального вида ключевой матрицы K (5.31) выражается через соответствующий блок матрицы S :

$$\begin{aligned} A_{11} &= K_0' S_{11} K_0; \\ A_{22} &= K_0' S_{22} K_0; \\ A_{12} &= K_0' S_{12} K_0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Аналогично M -мерные векторы $\bar{F}_{RZ}^{rmq}$, на которые можно разбить $2M$ -мерные векторы-столбцы,

$$[\bar{F}^{rmq}]' = [\bar{F}_R^{rmq} \ ; \ F_Z^{rmq}]' \quad (5.36)$$

выражаются через $\bar{f}_{RZ}^{rmq}$:

$$\begin{aligned} \bar{F}_R^{rmq} &= K_0' \bar{f}_R^{rmq}; \\ \bar{F}_Z^{rmq} &= K_0' \bar{f}_Z^{rmq}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Формулы (5.35) и (5.37) определяют матрицу жесткости системы A и вектор правой части $\bar{F}^{rmq}$ в основном уравнении (5.34) через соответствующие величины S_n и $\bar{f}_n^{rmq}$ для отдельных элементов.

§ 15. Решение основной системы уравнений. Структура программы. Примеры

Решение основной системы уравнений. Матричное уравнение (5.34) может быть решено с помощью различных методов в зависимости от возможностей вычислительной машины. Обычно используют прямой метод Гауса или итерационный метод Гауса—Зейделя [5, 46]. Метод исключения Гауса удобен при достаточном объеме памяти ЭВМ или при небольшом количестве элементов. Потребная память существенно зависит от структуры матрицы жесткости, т. е. от способа разбиения на элементы, нумерации узлов и т. п.

Представим (5.34) в виде

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

где $\mathbf{A}$ — симметричная матрица жесткости $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{F}}^r + \bar{\mathbf{F}}^m + \bar{\mathbf{F}}^q + \bar{\mathbf{P}}$. Разбив матрицу $\mathbf{A}$ на блоки, отличные от (5.35), получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\chi}_1 \\ \bar{\chi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{A}_{11}$ — одномерная матрица; $\mathbf{A}_{12}$ и $\mathbf{A}_{21}$ — матрицы размерности $[1 \times (2M - 1)]$ и $[(2M - 1) \times 1]$ соответственно и $\mathbf{A}_{22}$ — квадратная матрица размерности $(2M - 1) (2M - 1)$.

Уменьшая размерность матрицы $\mathbf{A}$ путем исключения первого неизвестного, получим матричное уравнение размерности $2M - 1$

$$\mathbf{A}^* \bar{\chi}_2 = \bar{\mathbf{b}},$$

где $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}$;

$$\bar{\mathbf{b}}^* = \bar{b}_2 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \bar{b}_1.$$

Повторяя процедуру исключения для (5.37), уменьшаем порядок уравнения на единицу и т. д. до получения уравнения первого порядка для нахождения последней неизвестной χ_{2M} . Используя обратную процедуру из уравнения типа $\chi_1 = \mathbf{A}_{11}^{-1} \bar{b}_1 - \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \bar{\chi}_2$, можно определить все неизвестные. Процедура Гауса является стандартной и имеется в библиотеках стандартных программ ЭВМ. Ленточная структура матрицы $\mathbf{A}$ позволяет уменьшить число операций и потребный объем памяти, что достигается упорядочением разбиения на элементы и сквозной нумерации узлов.

Итерационный метод Гауса—Зейделя удобен при ограниченных возможностях вычислительной машины. Он позволяет рассматривать уравнения системы (5.35) поочередно.

Используя симметрию матрицы $\mathbf{A}$, представим ее в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}, \quad (5.38)$$

где $\mathbf{B}$ — диагональная матрица; $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно. Итерационный процесс осуществляется по формуле

$$\mathbf{B} \bar{\chi}^{(k+1)} = -\mathbf{C} \bar{\chi}^{(k+1)} - \mathbf{D} \bar{\chi}^{(k)} + \bar{\mathbf{b}}. \quad (5.39)$$

В каждом n -м уравнении (5.39) для отыскания следующей n -й компоненты вектора $\bar{\chi}$ сразу используется найденное $(k + 1)$ -е приближение для $(n - 1)$ -й компоненты.

Из (2.39) следует

$$\chi_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} \chi_i^{(k+1)} + \sum_{j=n+1}^{2M} a_{nj} \chi_j^k - b_n \right]. \quad (5.40)$$

Для улучшения сходимости и ускорения счета используют процесс релаксации — разность между двумя итерациями умно-

жают на релаксационный коэффициент θ и каждое окончательное значение неизвестной $(k+1)$ -го приближения представляют в виде

$$\chi_n^{k+1} = \chi_n^k + \theta (\chi_n^{*(k+1)} - \chi_n^k), \quad (5.41)$$

где звездочкой отмечена величина, полученная из (5.40). Коэффициент θ рекомендуется принимать равным 1,7—1,9.

Сходимость процесса определяется относительной разностью двух последовательных приближений. Ниже отмечено удобство итерационного метода при решении нелинейных задач. Существуют и другие методы решения матричного уравнения (5.35), которые основаны на

использовании структурных особенностей матрицы жесткости.

Структура программы. Процедура расчета методом конечных элементов сводится к нескольким основным этапам. Меридиональное сечение диска разбивают на элементы и определяют координаты узловых точек, силы или перемещения, заданные в узлах и на границах (рис. 5.2). От способа разбиения области на элементы зависит вид матрицы жесткости, а следовательно, объем информации и скорость счета, поэтому он не должен быть произвольным. Существуют различные способы выделения элементов с помощью регулярных сеток, в частности использование изопараметрических элементов [3, 46]. В осесимметричной задаче наиболее простым является построение сечений кольцевых элементов путем соединения узловых точек, выделенных на прямых линиях, параллельных оси вращения. Разбиение вдоль линии делают равной длины; при необходимости неравномерного деления вводят весовой коэффициент и узловые точки нумеруют в определенной последовательности. Такой принцип позволяет осуществить автоматизацию определения геометрических параметров треугольника при задании минимальной исходной информации, например координат двух точек на границах одной прямой и числа узловых точек на этой прямой. Усилия многих исследователей направлены на создание оптимальной системы автоматического разбиения расчетной области (см., например, [23]).

Параметры упругости и механические характеристики задают в диапазоне от минимальной до максимальной температуры

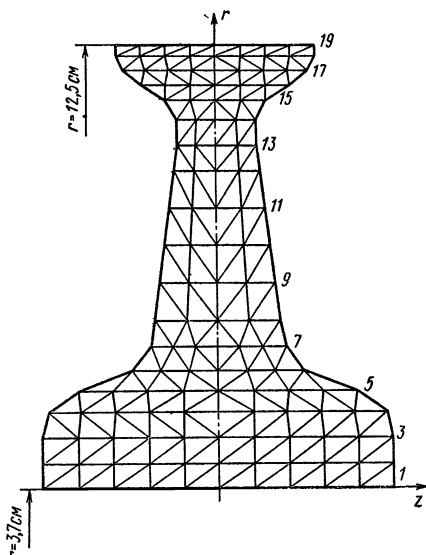


Рис. 5.2

дисков. Температуры в узловых точках либо задают в исходной информации, либо определяют интерполяцией в точках пересечения заданных изотерм и прямых разбиения. Исходная информация должна содержать известные векторы нагрузки. Первый блок программы расчета с помощью МКЭ содержит процедуру чтения и печати исходных данных; в этом случае необходима процедура проверки, связанная с большим объемом вводимой информации. Для этой цели удобно использовать устройства визуального представления — графопостроитель или дисплей.

Следующим шагом является формирование матрицы жесткости элемента, ключевой матрицы и подсчет элементов матрицы жесткости A всего ансамбля в соответствии с используемым методом решения основного матричного уравнения. Далее производится подсчет элементов столбцов правой части основного уравнения.

В качестве граничных условий могут быть заданы одно или два перемещения, отнесенные к граничным узлам, например в месте соединения диска с другими элементами ротора. В этом случае можно рекомендовать производить умножение диагонального члена матрицы жесткости в строке, соответствующей узлу, на большое число и в правой части подставлять этот же член, умноженный на известное перемещение. Можно использовать процедуру исключения соответствующего уравнения (см. [14]).

Аналогичной процедурой является приравнивание всей строки матрицы нулю, за исключением единицы в диагональном коэффициенте, и замена соответствующего элемента в правой части перемещением (при построчной итерации). Если используют итерационные методы, то начиная с блока подсчета элементов матрицы жесткости все указанные выше процедуры выполняют в цикле.

После определения неизвестных перемещений узлов по их значениям подсчитывают напряжения в соответствии с (5.10), причем матрица коэффициентов определена в блоке подсчета матрицы жесткости элемента.

На рис. 5.3 показана типовая структурная схема расчета диска с помощью МКЭ. Выбор размеров сетки элементов влияет на точность решения. Уменьшая размер сетки в осесимметричной задаче, мы приближаемся к точному решению. Однако увеличение числа узлов резко увеличивает потребную память и время счета. Поэтому к выбору густоты сетки следует подходить рационально. В местах резких градиентов (изменений нагрузки, температурного поля, геометрических параметров) сетка должна быть более густой. Обычно используют следующий прием. Проводят расчет всего диска с достаточно крупной сеткой, а затем выделяют области, требующие уточненного расчета. На внутренней границе задают граничные условия (силы или перемещения), найденные из предыдущего общего решения. Такой прием используют для расчета в местах концентрации напряжений. Этот подход позволяет, в частности, сочетать МКЭ с другими более простыми ме-

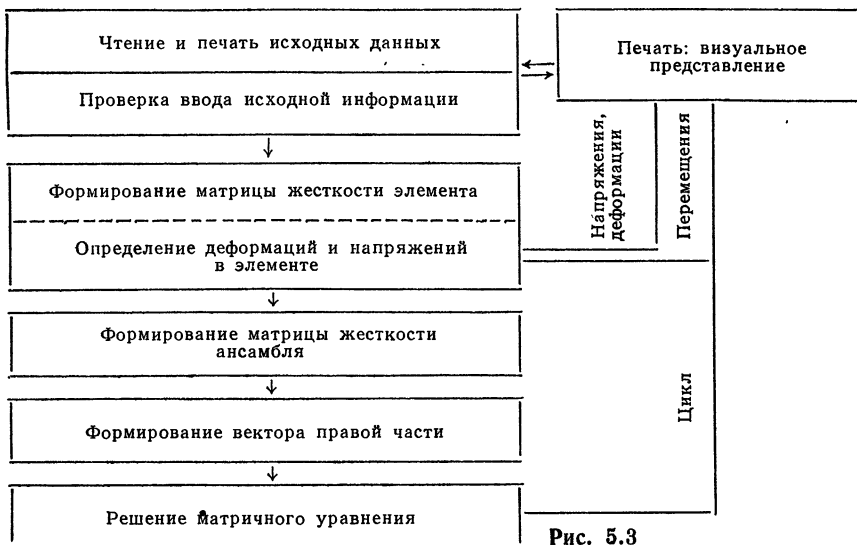


Рис. 5.3

тодами. Например, если диск имеет достаточно тонкое полотно и массивные ступицу или обод, то сначала производят общий расчет диска с использованием гипотезы жесткой нормали (по методам, рассмотренным в гл. 1 и 2). Затем массивную ступичную часть диска разбивают на элементы и рассчитывают отдельно, причем в месте соединения ступицы с полотном задают граничные условия в виде напряжений, полученных из предыдущего расчета.

Пример 5.1. На рис. 5.2 показан простейший пример разбиения меридионального сечения диска на треугольные элементы. Диск, выполненный из сплава 1Х12Н2ВМФ, находится под действием центробежной нагрузки и двухмерного поля температур. Полагали, что частота вращения диска $n = 17\,200$ об/мин, а температура одинаковая во всех точках диска и равна 100°C .

Поперечное сечение диска разбивали прямыми радиусами $r = \text{const}$ на 18 слоев. Общее число узлов разбиения 141; соответственно порядок решаемой системы равнялся 282. Число узлов на каждом радиусе разбиения (начиная со ступицы) выбирали равным соответственно 11; 11; 11; 11; 9; 7; 7; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 7; 9; 9; 9. Систему решали методом итераций Зейделя. В качестве нулевого приближения для радиальных компонент перемещений при решении системы выбирали $u_0 = 0,016$ см. Требуемую точность итераций задавали $\delta = 2 \cdot 10^{-6}$. Симметричный диск разбит на элементы несимметрично (рис. 5.3). Степень симметрии полученных радиальных перемещений точек, расположенных на одном и том же радиусе, характеризует густоту разбиения диска на элементы. В данном случае максимальное различие радиальных перемещений вследствие несимметрии разбиения не превышало 0,1%, т. е. выбранное разбиение можно считать достаточно мелким.

Полученные результаты, т. е. поля радиальных и осевых перемещений представлены на рис. 5.4, а и б. Для сравнения на рис. 5.4, а штриховыми линиями показаны радиальные перемещения точек данного радиуса, определенные по программе, в которой диск рассмотрен как тонкая пластина переменной толщины и использована соответственно гипотеза жесткой нормали (см. гл. 1 и приложение 1). Поскольку эта гипотеза основана на допущении,

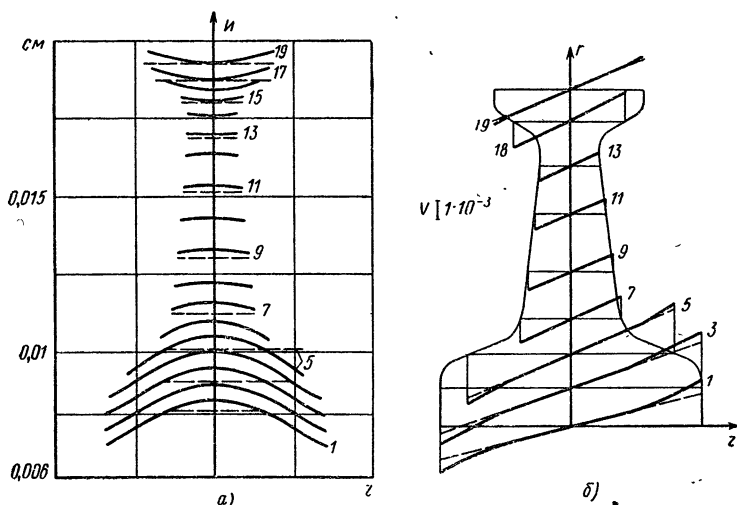


Рис. 5.4

что деформации сдвига отсутствуют и радиальные перемещения точек, расположенных на одном и том же радиусе, одинаковы, перемещения, показанные на рис. 5.4, а штриховыми линиями, относятся к случаю, когда эффектами трехмерного объемного состояния пренебрегают. Влияние объемных эффектов на распределение радиальных перемещений в радиальном направлении является значительным, особенно в области ступицы диска. В этой области, где толщина диска сравнима с его радиусом, радиальные перемещения точек, лежащих на оси симметрии сечения, превышают радиальные перемещения точек, лежащих на краях ступицы, т. е. на боковой поверхности диска, на 15—17%. Это объясняется тем, что центробежная нагрузка от остальной части диска в центре ступицы больше, чем на ее краях. Полотно диска, толщина которого мала по сравнению с радиусом, растягивается как тонкая пластинка равномерно, и разность между максимальными и минимальными радиальными перемещениями точек, лежащих на одном и том же радиусе, не превышает 1—2%.

В ободной части диска объемные эффекты в распределении радиальных перемещений по радиусу влияют противоположно влиянию в ступице. На оси симметрии, где ободная часть удерживается полотном, радиальные перемещения меньше, чем на краях обода. Такое распределение объясняется отсутствием нагрузки на наружном контуре.

Осевые перемещения точек, расположенных на одном радиусе, построены на рис. 5.4, б. Эффект объемного напряженного состояния заключается в том, что зависимость осевого смещения от осевой координаты $v(z)$ на фиксированном радиусе отклоняется от линей-

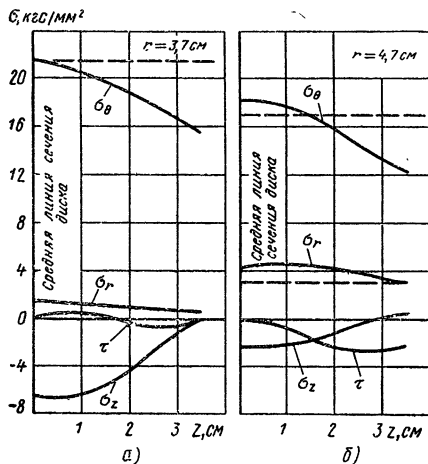


Рис. 5.5

ной. Это отклонение от линейности наиболее велико в ступице диска, тогда как в полотно оно отсутствует. Указанный эффект вызывается неравномерностью распределения напряжений и деформаций по толщине диска. Представим зависимость осевых перемещений от координаты z на каком-либо фиксированном радиусе r_i в виде

$$v_i^*(z) = v_i(z) + \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha z,$$

где составляющая $\frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha z$ вызвана неравномерным нагревом. В данном случае отклонение зависимости $v^*(z)$, вызываемое неравномерным распределением напряжений и деформаций по толщине диска, достигало в ступице 16%. На рис. 5.5 показано распределение напряжений в ступице диска — по радиусу центрального отверстия (рис. 5.5, а) $r = 3,7$ см и в сечении 3 по радиусу $r = 4,7$ см (рис. 5.5, б). Окружные напряжения σ_θ существенно меняются по толщине диска; на радиусе центрального отверстия это изменение составляет 28%. Осевые напряжения σ_z также изменяются по толщине, причем наибольшие они по внутреннему радиусу. Некоторое отличие их от нуля по радиусу центрального отверстия связано с погрешностью, которую дает метод конечных элементов, на границах — из-за поэлементного рассмотрения, однако эта погрешность незначительна и в основном связана с определением напряжений в центре тяжести элемента.

§ 16. Упругопластический расчет методом конечных элементов

Деформационные теории пластичности и ползучести. Расчет дисков в упругопластической области методом конечных элементов с применением итерационных процедур для решения нелинейных упругопластических задач не представляет принципиальных трудностей. Предложенные и развитые [13, 49] численные методы решения упругопластических задач, описанные в гл. 3, могут быть легко использованы и в случае конечно-элементного представления конструкций [14]. Принципиально близкие методы применяются в иностранных работах — метод начальных деформаций и др. [46].

В расчетах, основанных на использовании деформационных теорий пластичности и ползучести, удобным оказывается *метод дополнительных деформаций*. Экономия времени и объема памяти машины, связанная с однократным вычислением матрицы жесткости, делает его в некоторых случаях более эффективным по сравнению с методом переменных параметров упругости. Основные соотношения и алгоритм метода дополнительных деформаций изложены в гл. 3.

Представим вектор полных деформаций элемента (5.5) в виде $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^* + \bar{\epsilon}^0$, где $\bar{\epsilon}^0$ — вектор дополнительных деформаций, составленных независимыми компонентами соответствующего тензора [см. формулу (3.33)] и температурными деформациями.

Аналогично (5.8) соотношение между напряжениями и деформациями $\bar{\sigma} = \mathbf{D} (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^0)$, где $\bar{\epsilon}^0 = \bar{\epsilon}_T + \bar{\epsilon}_p$ при упругопластическом деформировании.

Столбец-вектор дополнительных деформаций пластичности в соответствии с (3.34) выражается через компоненты полной деформации и параметр пластичности ψ

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\psi} \right) \Phi \bar{\varepsilon}, \quad (5.42)$$

где матрица четвертого порядка

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \text{sim} & & 1 & 0 \\ & & & \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Все преобразования с участием вектора дополнительных деформаций при получении уравнения равновесия элемента и составления ансамбля уравнений системы производят так же, как с вектором $\bar{\varepsilon}_T$ температурных членов.

Обозначим аналогично (5.20)

$$\bar{f}_n^0 = Q_n' \int_{v_n} B D \bar{\varepsilon}_n^0 dv_n. \quad (5.44)$$

Уравнение равновесия элемента с дополнительными деформациями будет иметь вид

$$\bar{g}_n = S_n \bar{\xi}_n - \bar{f}_n^r - \bar{f}_n^m - \bar{f}_n^q - \bar{f}_n^0; \quad (5.45)$$

разрешающее матричное уравнение системы элементов (5.34)

$$A \bar{\chi} = \bar{F}^m + \bar{F}^q + \bar{P} + \bar{F}^r + \bar{F}^0, \quad (5.46)$$

где $[F^0]' = [\bar{F}_R^0; \bar{F}_Z^0]'$, $\bar{F}_R^0 = K_0' \bar{f}_R^0$,

$$\bar{F}_Z^0 = K_0' \bar{f}_Z^0. \quad (5.47)$$

Таким образом, дополнительные деформации дают еще один дополнительный столбец-вектор правых частей в (5.34) или (5.46).

Процедура решения с помощью итераций не отличается от описанной в гл. 3. В первом приближении решают матричное уравнение (5.34) и определяют перемещения в узлах. Далее определяют усредненный вектор деформаций каждого элемента $\langle \bar{\varepsilon}_n \rangle$ по перемещениям его узлов на основании (5.6), приводя значение к центру тяжести элемента

$$\bar{\varepsilon}_n = B_n Q \bar{\xi}_n, \quad (5.48)$$

где $\mathbf{B}_c$ — матрица $\mathbf{B}$ для координат центра тяжести треугольника. Средняя интенсивность деформации элемента первого приближения $\varepsilon_{in(1)}$ определяется по формуле (см. 3.6).

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2} + \frac{3}{2} \gamma_{rz}^2. \quad (5.49)$$

По диаграмме деформирования, соответствующей средней температуре элемента T_n , и по найденному значению $\varepsilon_{n(1)}$ определяют интенсивность напряжений первого приближения $\sigma_{in(1)}$ и параметр пластичности $\psi_{n(1)}$ аналогично (3.42). По (5.42) определяют вектор дополнительных деформаций элемента

$$\bar{\varepsilon}_{n(1)}^0 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\psi_{(1)}} \right) \Phi \langle \bar{\varepsilon}_{n(1)} \rangle. \quad (5.50)$$

Вектор дополнительных нагрузок элемента первого приближения $\bar{\mathbf{f}}_{n(1)}^0$ строят по (5.44).

Принимая постоянство $\bar{\varepsilon}_n^0$, получим

$$\bar{\mathbf{f}}_{n(1)}^0 = \mathbf{Q}_n' \int_{v_n} \mathbf{B}' dv_n \mathbf{D} \bar{\varepsilon}_{n(1)}^0. \quad (5.51)$$

Матричное уравнение (5.46) решают повторно с учетом дополнительного вектора в правой части $\bar{\mathbf{F}}_0$, определяемого по (5.47). В методе дополнительных деформаций матрицу жесткости и все векторы правой части, кроме вектора дополнительных деформаций, подсчитывают один раз, что обеспечивает некоторую экономию времени при реализации на ЭВМ. Наряду с этим методом может быть использован *метод переменных параметров упругости* (см. гл. 3). При использовании итерационных процедур типа метода Гаусса—Зейделя преимущества метода дополнительных деформаций по сравнению с методом переменных параметров упругости несутсущественны.

Вектор деформаций в методе переменных параметров по аналогии с записью в тензорной ∞ символике (см. гл. 3)

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{E^*} [(1 + \mu^*) \sigma_{kl} - 3\mu^* \delta_{kl} \sigma] + \delta_{kl} \alpha T$$

представляется в виде

$$\bar{\varepsilon} = \mathbf{C}^* \bar{\sigma} + \bar{\varepsilon}_T, \quad (5.52)$$

где $\mathbf{C}^* = (\mathbf{D}^*)^{-1}$ (см. 5.9) — матрица переменных параметров упругости. В этом случае также используют итерационный процесс, причем в каждом приближении решают уравнение (5.34), которое имеет вид

$$\mathbf{A}^* \bar{\chi} = \mathbf{b}. \quad (5.53)$$

Матрица жесткости $\mathbf{A}^*$ в соответствии с процедурой метода переменных параметров, изложенной в гл. 3, образуется в каждом

приближении из матриц S_n^* жесткости элементов (5.18), в которых переменной является матрица D^* :

$$S_n^* = Q_n' \left\{ \int_{v_n} B' D^* B dv_n \right\} Q_n,$$

где

$$D^* = \frac{E^* (1 - \mu^*)}{(1 + \mu^*) (1 - 2\mu^*)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu^*}{1 - \mu^*} & \frac{\mu^*}{1 - \mu^*} & 0 \\ & 1 & \frac{\mu^*}{1 - \mu^*} & 0 \\ \text{sim} & & 1 & 0 \\ & & & \frac{1 - 2\mu^*}{2(1 - \mu^*)} \end{bmatrix}.$$

В каждом приближении определяют деформации в узлах и усредняют их по аналогии с (5.48). По средним значениям $\langle \bar{\epsilon}_n \rangle$ определяют интенсивность деформаций (5.48) и по кривой деформирования, соответствующей температуре элемента, определяют секущий модуль и переменные параметры E^* и μ^* для следующего приближения по формулам (3.28) и (3.29). В первом приближении осуществляют упругий расчет. Сходимость определяют различием E_c предыдущего и последующего приближений. Ползучесть при использовании теории старения учитывают с помощью методов, описанных в гл. 3.

В литературе, посвященной методу конечных элементов, для решения физически нелинейных задач упоминается метод «начальных деформаций» и «начальных напряжений» [47]. Эти методы аналогичны методу дополнительных деформаций; во всех случаях в каждой итерации определяют дополнительный вектор правой части, а матрица жесткости ансамбля остается неизменной.

В общем виде процедура метода начальных напряжений [46] совпадает с процедурой метода дополнительных напряжений, предложенного в отечественных работах [13] в 1951 г. Процедура метода начальных деформаций несколько отличается от метода дополнительных деформаций, также предложенного в работе [13]. Если представить вектор дополнительных нагрузок $\bar{F}^0$ на основании соотношений (5.42), (5.44) и (5.48) в виде

$$\bar{F}^0 = K_a K_\psi \bar{\chi}, \quad (5.54)$$

то отличие между ними заключается в различном способе определения матрицы упругопластических констант K_ψ . Метод дополнительных деформаций обладает лучшей сходимостью при малом упрочнении или наличии площадки текучести в диаграмме деформирования.

Учет истории нагружения. Процедура шагового метода при учете истории нагружения подробно рассмотрена в § 9 гл. 3.

Вектор приращения полных деформаций элемента на малом этапе нагружения может быть аналогично (3.93) представлен в виде

$$\bar{\Delta}_\varepsilon = \mathbf{C}^* \bar{\Delta}_\varepsilon + \bar{\Delta}_\varepsilon^0. \quad (5.55)$$

В выражении (5.55)

$$\bar{\Delta}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \varepsilon_z \\ \Delta \varepsilon_\theta \\ \Delta \gamma_{rz} \end{bmatrix} \quad \bar{\Delta}_\sigma = \begin{bmatrix} \Delta \sigma_r \\ \Delta \sigma_z \\ \Delta \sigma_\theta \\ \Delta \gamma_{rz} \end{bmatrix} \quad \bar{\Delta}_\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_r^0 \\ \Delta \varepsilon_z^0 \\ \Delta \varepsilon_\theta^0 \\ \Delta \gamma_{rz}^0 \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

Параметры — элементы матрицы $\mathbf{C}^*$ и вектор дополнительных деформаций $\bar{\Delta}_\varepsilon^0$ — усредняют по элементу и считают постоянными на рассматриваемом малом этапе нагружения.

В методе переменных параметров элементы матрицы четвертого порядка $\mathbf{C}$ определяют из соотношений закона упругости (5.8) и закона пластического течения аналогично (3.124) как сумму

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^e + \mathbf{C}^p. \quad (5.57)$$

Здесь матрица упругих параметров

$$\mathbf{C}^e = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 \\ & 1 & -\mu & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{symm} & & & 2(1+\mu) \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Элементы матрицы коэффициента пластичности $\mathbf{C}^p$ при использовании формулировки изотропного упрочнения определяют как [см. (3.62)—(3.71)]

$$\mathbf{C}^p = \frac{3}{2} F_\sigma \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{S} = \left(\frac{1}{E_K} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{S}, \quad (5.59)$$

где интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2]^{1/2}; \quad (5.60)$$

матрица четвертого порядка

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} (\sigma_r - \sigma)^2 & (\sigma_r - \sigma)(\sigma_z - \sigma) & (\sigma_r - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma) & 2(\sigma_r - \sigma)\tau_{rz} \\ (\sigma_z - \sigma)(\sigma_r - \sigma) & (\sigma_z - \sigma)^2 & (\sigma_z - \sigma)(\sigma_\theta - \sigma) & 2(\sigma_z - \sigma)\tau_{rz} \\ (\sigma_\theta - \sigma)(\sigma_r - \sigma) & (\sigma_\theta - \sigma)(\sigma_z - \sigma) & (\sigma_\theta - \sigma)^2 & 2(\sigma_\theta - \sigma)\tau_{rz} \\ 2\tau_{rz}(\sigma_r - \sigma) & 2\tau_{rz}(\sigma_z - \sigma) & 2\tau_{rz}(\sigma_\theta - \sigma) & 4\tau_{rz}^2 \end{bmatrix}; \quad (5.61)$$

F_σ — функция напряжений (3.71). Вектор приращений дополнительных деформаций представляет собой сумму деформаций,

связанных с изменением температуры на этапе нагружения, и деформаций ползучести

$$\bar{\Delta}_e^0 = \bar{\Delta}_{eT} + \bar{\Delta}_{ec}.$$

Температурные деформации, упругие и пластические, определяются формулой

$$\bar{\Delta}_{eT} = \bar{\Delta}_{eT}^e + \Delta_{eT}^p = \Delta T (\bar{\varphi}_T^e + \bar{\varphi}_T^p). \quad (5.62)$$

Векторы

$$\bar{\varphi}_T^e = -\frac{1}{E} \frac{dE}{dT} (\mathbf{C}^e \bar{\sigma}) + \frac{d\mu}{dT} (\mathbf{C}^{**} \bar{\sigma}) + \left(\frac{d}{dT} \bar{\epsilon}_T \right) \quad (5.63)$$

$$\text{и } \bar{\varphi}_T^p = \frac{2}{3} F_T (\Phi^* \bar{\sigma}), \quad (5.64)$$

где F_T — функция температуры (см. 3.76) и

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{**} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ & -1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{symm} & & 2 \end{bmatrix};$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\epsilon}_T = \begin{bmatrix} \frac{d(\alpha T)}{dt} \\ \frac{d(\alpha T)}{dT} \\ \frac{d(\alpha T)}{dT} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

Вектор приращений деформаций ползучести по (3.133)

$$\Delta_{ec} = \varphi_c \Delta t, \quad (5.66)$$

где

$$\bar{\varphi}_c = \frac{2}{3} \Phi_c \{ \mathbf{N}^* \bar{\sigma} \} \quad (5.67)$$

и Φ_c — функция ползучести, определяемая по (3.87).

В методе дополнительных деформаций в матрицу $\mathbf{C}$ равенства (5.55) включена только упругая составляющая

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} = \mathbf{C}^e. \quad (5.68)$$

Вектор $\mathbf{C}^p \bar{\Delta}_\sigma$, представляющий собой приращения пластических деформаций,

$$\mathbf{C}^p \bar{\Delta}_\sigma = \bar{\Delta}_{ep}, \quad (5.69)$$

включается в дополнительные деформации, так что

$$\bar{\Delta}_\varepsilon^0 = \bar{\Delta}_{\varepsilon p} + \bar{\Delta}_{\varepsilon T} + \bar{\Delta}_{\varepsilon c}. \quad (5.70)$$

Уравнения для ансамбля элементов не отличаются по структуре; при использовании этих методов отличия будут в процедуре шагового расчета. Из (5.56) вектор приращения напряжений в элементе на этапе нагружения

$$\bar{\Delta}_\sigma = \mathbf{D}^* (\bar{\Delta}_\varepsilon - \bar{\Delta}_\varepsilon^0), \quad (5.71)$$

где $\mathbf{D}^* = \mathbf{C}^{*-1}$.

Вся процедура составления матричного уравнения для ансамбля элементов в приращениях не отличается от процедуры в конечных величинах. Основное разрешающее уравнение

$$\mathbf{A}^* \bar{\Delta}_\chi = \bar{\Delta}_F^m + \bar{\Delta}_F^q + \bar{\Delta}_p + \bar{\Delta}_F^0. \quad (5.72)$$

Здесь $\mathbf{A}^*$ — матрица жесткости, образующаяся из матриц жесткости элементов $\mathbf{S}_n^*$ по (5.53) в предположении постоянства параметров упругости и в методе переменных параметров — коэффициентов пластичности, по элементу.

При определении $\bar{\Delta}_F^0$ векторы дополнительных деформаций элементов усредняются аналогично (5.48), что фактически соответствует постоянству $\bar{\varphi}_T^e$, $\bar{\varphi}_T^p$ и $\bar{\varphi}_o$ по элементу.

Так же как и при расчете по алгоритму плоского напряженного состояния, рассмотренному в гл. 3, на расчетном шаге проверяют условия нагружения для каждого элемента. Определив на n -м шаге в предположении нагружения (наличия пластических деформаций) приращения перемещений в узлах элемента, т. е. вектор $\bar{\Delta}_\xi$, который легко образуется с помощью ключевой матрицы $\mathbf{K}_0$ из вектора $\bar{\Delta}_\chi$ — решения уравнения (5.72), найдем вектор приращений деформаций в элементе по (5.6)

$$\bar{\Delta}_\varepsilon = \mathbf{B}(r, z) \mathbf{Q} \bar{\Delta}_\xi. \quad (5.73)$$

Обычно $\bar{\Delta}_\xi$ определяют для точки центра тяжести треугольного сечения элемента, так что $\mathbf{B}(r, z) = \mathbf{B}_c$.

Из (5.71) найдем $\bar{\Delta}_\sigma$ и

$$\Delta \sigma_i = \frac{1}{\sigma_i} [\bar{\mathbf{N}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}]' \Delta \sigma. \quad (5.74)$$

Напряжения в конце этапа найдем суммированием начальных значений и приращений. Проверяем условия нагружения (3.127) и в зависимости от результата повторяем данный шаг с условием $\Delta \varepsilon_p = 0$ или рассчитываем следующий шаг.

Расчет дисков радиальных турбомашин

§ 17. Общие замечания.

Расчет колес открытого типа

Выбор расчетной схемы. Колеса турбомашин с радиальным направлением потока рабочего тела находят широкое применение в компрессоростроении и турбостроении. На рис. 6.1 показаны основные схемы меридиональных сечений радиальных колес, которые разделяют на колеса открытого типа (рис. 6.1, а), не имеющие покрывающего диска, и закрытого типа (рис. 6.1, б—е) с покрывающим диском. Основной и покрывающий диски могут быть достаточно тонкими и слабоизогнутыми (рис. 6.1, б, в) и сильноизогнутыми или утолщенными (рис. 6.1, г, д).

Лопатки могут быть радиальными или изогнутыми. Для ненагруженных колес или предварительной оценки используют метод присоединенных масс, основная идея которого заключается в представлении лопаток в виде осесимметричных распределенных боковых сил без учета изгиба основного диска [92, 107] или с учетом изгиба [56, 67]. В этом случае жесткость лопаток на растяжение не учитывают. При расчете диска на растяжение по формулам гл. 1 или при несимметричном меридиональном сечении при расчете диска на изгиб по формулам гл. 2 вводят приведенную плотность материала

$$\rho^* = \rho \left(1 + \frac{k z_n F_n(r)}{2\pi r h_1(r)} \right), \quad (6.1)$$

где k — коэффициент, зависящий от расположения лопаток ($k = 1$ при одностороннем входе; $k = 2$ — при двустороннем входе; см. рис. 6.1, а); z_n — число лопаток; $h_1(r)$ — толщина основного диска; $F_n(r)$ — площадь поперечного сечения лопатки на радиусе r (рис. 6.2).

В большинстве случаев при расчете радиальных колес напряженное состояние считается осесимметричным. При числе лопаток $z_n > 12$ допущение об осевой симметрии напряженного состояния несущих дисков не вносит большой погрешности [110].

Радиальные колеса можно рассматривать как круглые конструктивно-ортотропные пластинки [15, 27, 45, 48, 118, 124, 127]. Расчетные схемы отличаются друг от друга учетом жесткости

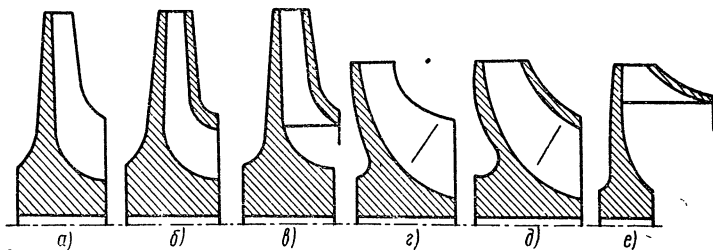


Рис. 6.1

лопаток, кривизны меридионального сечения и изгиба несущих дисков. При таком рассмотрении напряженное состояние лопаток исследуется недостаточно подробно. Однако в колесах открытого типа статическая нагруженность лопаток невелика, и приближенная оценка часто оказывается достаточной.

Для закрытых колес необходимо учитывать жесткость лопаток. Лопатки работают как жесткие связи между несущими дисками. Если диски достаточно тонкие, то колесо можно рассматривать как двухслойную плоскую или изогнутую пластинку со связями, работающими на растяжение и сдвиг [27, 30].

Более подробное исследование напряженного состояния в утолщенных дисках (см. рис. 6.1, з) может быть проведено с помощью метода конечных элементов (см. гл. 5 и § 18 гл. 6), позволяющего учесть окружающую несимметрию из-за взаимодействия с лопатками.

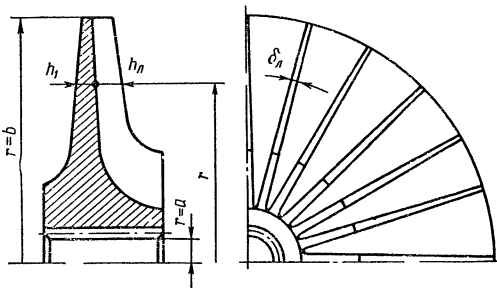
Расчет полуоткрытых колес как конструктивно-ортотропных пластин. Рассмотрим колесо как конструктивно-ортотропный слабоизогнутый диск, работающий на растяжение и изгиб. Расчет изотропных дисков на растяжение и изгиб, в том числе и с начальным искривлением (пологих оболочек) срединной поверхности, рассмотрен в гл. 2. В этом параграфе использован метод расчета конструктивно-ортотропных пластин, предложенный в работе [15].

Радиальные или слабоизогнутые лопатки образуют ортотропный слой. Изогнутость лопаток влияет на жесткость слоя; наибольшая жесткость при радиальных лопатках.

Уравнения упругости для конструктивно-ортотропного элемента с обычно принятыми допущениями [10] имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - k_\theta \mu \sigma_\theta) + \alpha T;$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - k_r \mu \sigma_r) + \alpha T,$$



(6.2) Рис. 6.2

где k_r и k_θ — коэффициенты заполнения в радиальном и окружном направлениях. Для изотропного слоя основного диска $k_r = k_\theta = 1$.

В ортотропном слое лопаток (рис. 6.2)

$$k_r = \frac{z_L F_L}{2\pi r (h - h_1)}; \quad k_\theta = 0. \quad (6.3)$$

Искривление лопаток в этом случае не учитывается. В выражении (6.3) h — общая ширина колеса по радиусу r ; h_1 — толщина основного диска.

Таким образом, уравнения упругости выписаны для общего случая. Уравнения деформаций при рассмотрении растяжения и изгиба диска без учета взаимодействия изгибающих и растягивающих сил (жесткий диск) имеют следующий вид (см. § 5 гл. 2):

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + z \frac{d\vartheta}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + z \frac{\vartheta}{r}, \quad (6.4)$$

где так же, как для изотропного диска, u — радиальное перемещение точек основной поверхности; ϑ — угол поворота нормали к ней.

С учетом (6.4) уравнения (6.2) можно записать как

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - k_r k_\theta \mu^2} \left(\frac{du}{dr} + k_\theta \mu \frac{u}{r} \right) + \frac{Ez}{1 - k_r k_\theta \mu^2} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \right. \\ &+ \left. k_\theta \mu \frac{\vartheta}{r} \right) - \frac{E(1 + k_\theta \mu)}{1 - k_r k_\theta \mu^2} \alpha_0 T_0 - \frac{E(1 + k_\theta \mu)}{1 - k_r k_\theta \mu^2} (\alpha T - \alpha_0 T_0); \quad (6.5) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - k_r k_\theta \mu^2} \left(\frac{u}{r} + k_r \mu \frac{du}{dr} \right) + \frac{Ez}{1 - k_r k_\theta \mu^2} \left(\frac{\vartheta}{r} + \right. \\ &+ \left. k_r \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) - \frac{E(1 + k_r \mu)}{1 - k_r k_\theta \mu^2} \alpha_0 T_0 - \frac{E(1 + k_r \mu)}{1 - k_r k_\theta \mu^2} (\alpha T - \alpha_0 T_0). \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_0 T_0$ — значения αT , относящиеся к основной поверхности. Силы в цилиндрическом сечении колеса, отнесенные к единице длины окружности основной поверхности по радиусу r ,

$$\begin{aligned} N_r &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \sigma_r k_r dz; \quad N_\theta = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \sigma_\theta k_\theta dz; \\ M_r &= - \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \sigma_r k_r z dz; \quad M_\theta = - \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \sigma_\theta k_\theta z dz. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Угол φ наклона нормали к основной поверхности мал, так что $N_r = N_s$ и $M_r = M_s$ (см. гл. 2). Уравнения равновесия конструктивно-ортотропного элемента в силах совпадают с уравнениями равновесия элемента изотропного жесткого диска с искрив-

ленным меридианом, т. е. с тремя уравнениями (1.4), (2.62) и (2.10) соответственно ¹:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(N_r r) - N_\theta + q_r r &= 0; \\ \frac{d(Qr)}{dr} + \frac{d}{dr}(N_r r \varphi) + q_z r &= 0; \\ \frac{d(M_r r)}{dr} - M_\theta - Qr &= 0.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Растягивающая сила в радиальном направлении от центробежных сил

$$q_r = \omega^2 r \left(\rho h_1 + \rho \frac{z_n F_n}{2\pi r} \right). \quad (6.8)$$

Выражения для сил через перемещения с учетом конструктивной ортотропии следуют из (6.5) и (6.6):

$$\begin{aligned}N_s &= \frac{du}{dr} f_{1r} + \frac{u}{r} f_2 - T_{1r} + \frac{d\vartheta}{dr} f_{3r} + \frac{\vartheta}{r} f_4 - S_{1r}; \\ N_\theta &= \frac{du}{dr} f_2 + \frac{u}{r} f_{1\theta} - T_{1\theta} + \frac{d\vartheta}{dr} f_4 + \frac{\vartheta}{r} f_{3\theta} - S_{1\theta}; \\ M_s &= -\frac{du}{dr} f_{3r} - \frac{u}{r} f_4 + T_{2r} - \frac{d\vartheta}{dr} f_{5r} - \frac{\vartheta}{r} f_6 + S_{2r}; \\ M_\theta &= -\frac{du}{dr} f_4 - \frac{u}{r} f_{3\theta} + T_{2\theta} - \frac{d\vartheta}{dr} f_6 - \frac{\vartheta}{r} f_{5\theta} + S_{2\theta}.\end{aligned}$$

В этих выражениях u — радиальное перемещение основной поверхности; ϑ — угол поворота нормали в результате деформации; упругогеометрические характеристики сечения

$$\begin{aligned}f_{1r} &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_r dz}{1 - k_r k_\theta \mu^2}; \quad f_2 = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\mu Ek_r k_\theta dz}{1 - k_r k_\theta \mu^2}; \quad f_{3r} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_r z dz}{1 - k_r k_\theta \mu^2}; \\ f_4 &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\mu Ek_r k_\theta z dz}{1 - k_r k_\theta \mu^2}; \quad f_{5r} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_r z^2 dz}{1 - k_r k_\theta \mu^2}; \quad f_6 = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\mu Ek_r k_\theta z^2 dz}{1 - k_r k_\theta \mu^2}; \\ f_{1\theta} &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_\theta dz}{1 - k_r k_\theta \mu^2}; \quad f_{3\theta} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_\theta z dz}{1 - k_r k_\theta \mu^2}; \quad f_{5\theta} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_\theta z^2 dz}{1 - k_r k_\theta \mu^2};\end{aligned}\quad (6.10)$$

¹ В (2.62) сохраняется только первоначальный угол φ подъема основной поверхности.

температурные члены

$$\begin{aligned}
 T_{1r} &= \alpha_0 T_0 \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1+k_{\theta\mu})}{1-k_r k_{\theta\mu}^2} k_r dz; & T_{1\theta} &= \alpha_0 T_0 \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1+k_r\mu)}{1-k_r k_{\theta\mu}^2} k_{\theta} dz; \\
 T_{2r} &= \alpha_0 T_0 \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1+k_{\theta\mu}) k_r z}{1-k_r k_{\theta\mu}^2} dz; & T_{2\theta} &= \alpha_0 T_0 \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1+k_r\mu) k_{\theta} z}{1-k_r k_{\theta\mu}^2} dz; \\
 S_{1r} &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1+k_{\theta\mu}) k_r}{1-k_r k_{\theta\mu}^2} (\alpha T - \alpha_0 T_0) dz; \\
 S_{1\theta} &= \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \frac{E(1+k_r\mu) k_{\theta}}{1-k_r k_{\theta\mu}^2} (\alpha T - \alpha_0 T_0) dz; \\
 S_{2r} &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1+k_{\theta\mu}) k_r z}{1-k_r k_{\theta\mu}^2} (\alpha T - \alpha_0 T_0) dz; \\
 S_{2\theta} &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1+k_r\mu) k_{\theta} z}{1-k_r k_{\theta\mu}^2} (\alpha T - \alpha_0 T_0) dz. \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

Определив из второго уравнения (6.7) Q_r и внося выражение для него в третье уравнение, получим

$$\frac{d(M_r r)}{dr} - M_{\theta} + \int_a^r q_z(r_1) r_1 dr_1 + N_r r \varphi - N_{ra} a \varphi_a - Q_a a = 0. \quad (6.12)$$

Здесь, как и раньше, нижний индекс a означает значение функции при $r = a$ внутреннего отверстия.

Если в уравнения (6.3) и (6.12) подставить равенства (6.6)–(6.9)[†] и провести интегрирование по радиусу от a до r , положив $u' = \frac{du}{dr}$, $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dr}$, то получим систему двух дифференциальных уравнений относительно неизвестных $u(r)$ и $\vartheta(r)$

$$\begin{aligned}
 r f_{1r} u' + r f_{3r} \vartheta' &= \int_a^r \frac{f_{1\theta}}{r_1} \int_a^{r_1} u' dr_2 dr_1 + \int_a^r f_{2u} u' dr_1 - f_2 \int_a^r u' dr_1 + \\
 &+ \int_a^r \frac{f_{3\theta}}{r_1} \int_a^{r_1} \vartheta' dr_2 dr_1 + \int_a^r f_{4\vartheta} \vartheta' dr_1 - f_4 \int_a^r \vartheta' dr_1 + \\
 &+ u_a \left(\int_a^r \frac{f_{1\theta}}{r_1} dr_1 - f_2 + f_{2a} \right) + u'_a a f_{1ra} + \\
 &+ \vartheta_a \left(\int_a^r \frac{f_{3\theta}}{r_1} dr_1 - f_4 + f_{4a} \right) + \vartheta'_a a f_{3ra} + \psi_{1q} + \psi_{1m}; \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r\hat{f}_{3r}u' + r\hat{f}_{5r}\vartheta' = & \int_a^r \left(\frac{\hat{f}_{3\theta}}{r} + \varphi\hat{f}_2 \right) \int_a^{r_1} u' dr_2 dr_1 + \int_a^r (\hat{f}_4 + r_1\varphi\hat{f}_{1r}) u' dr_1 - \\
& - \hat{f}_4 \int_a^r u' dr_1 + \int_a^r \left(\frac{\hat{f}_{5\theta}}{r_1} + \varphi\hat{f}_4 \right) \int_a^{r_1} \vartheta' dr_2 dr_1 + \int_a^r (\hat{f}_6 + r_1\varphi\hat{f}_{3r}) \vartheta' dr_1 - \\
& - \hat{f}_6 \int_a^r \vartheta' dr + u_a \left(\int_a^r \left(\frac{\hat{f}_{3\theta}}{r_1} + \varphi\hat{f}_2 \right) dr - \hat{f}_4 + \hat{f}_{4a} \right) + a\hat{f}_{3ra}u'_a + \vartheta_a \times \\
& \times \left(\int_a^r \left(\frac{\hat{f}_{5\theta}}{r_1} + \varphi\hat{f}_4 \right) dr - \hat{f}_6 + \hat{f}_{6a} \right) + \vartheta'_a a\hat{f}_{5ra} + \psi_{2q} + \psi_{2T}. \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Функциями ψ в (6.13), (6.14) обозначены следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\psi_{1q} = & - \int_a^r q_r(r) r dr; \quad \psi_{2q} = \int_a^r \int_a^r q_r(r) dr_2 dr_1 - a(Q_a + \varphi_a N_{ra}) \times \\
& \times (r - a); \quad \psi_{1T} = r(T_{1r} + S_{1r}) - a(T_{1ra} + S_{1ra}) - \int_a^r (T_{1\theta} + S_{1\theta}) dr_1; \quad (6.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{2T} = & r(T_{2r} + S_{2r}) - a(T_{2ra} + S_{2ra}) - \int_a^r (T_{2\theta} + S_{2\theta}) dr - \\
& - \int_a^r r\varphi(T_{1r} + S_{1r}) dr. \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Выбрав основную поверхность по аналогии с (2.45) из соотношения

$$\hat{f}_{3r} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_r z dz}{1 - k_r k_{\theta} \mu^2} = 0, \quad (6.17)$$

получим из (6.13), (6.14) систему нормальных интегральных уравнений относительно $u(r)$ и $\vartheta(r)$ в обычной форме [см., например, (1.104) в гл. 1]

$$\begin{aligned}
u' = & L_{11}u' + L_{12}\vartheta' + u_a F_{11} + u'_a F_{13} + \vartheta_a F_{12} + \\
& + \vartheta'_a F_{14} + F_{1q} + F_{1T}; \quad (6.18) \\
\vartheta' = & L_{21}u' + L_{22}\vartheta' + u_a F_{21} + u'_a F_{23} + \vartheta_a F_{22} + \\
& + \vartheta'_a F_{24} + F_{2q} + F_{2T}.
\end{aligned}$$

Здесь $L_{ij}(i, j = 1, 2)$ — нормальные интегральные операторы от u' и ϑ' , имеющие вид

$$L_{11}u' = \frac{L_{11}^*u'}{rf_{1r}}; \quad L_{12}\vartheta' = \frac{L_{12}^*\vartheta'}{rf_{1r}}; \quad (6.19)$$

$$L_{21}u' = \frac{L_{21}^*u'}{rf_{5r}}; \quad L_{22}\vartheta' = \frac{L_{22}^*\vartheta'}{rf_{5r}};$$

$$L_{11}^*u' = \int_a^r \frac{f_{1\theta}}{r_1} \int_a^{r_1} u' dr_2 dr_1 + \int_a^r f_2 u' dr - f_2 \int_a^r u' dr;$$

$$L_{12}^*\vartheta' = \int_a^r \frac{f_{3\theta}}{r_1} \int_a^{r_1} \vartheta' dr_2 dr_1 + \int_a^r f_4 \vartheta' dr - f_4 \int_a^r \vartheta' dr; \quad (6.20)$$

$$L_{21}^*u' = \int_a^r \left(\frac{f_{3\theta}}{r_1} + \varphi f_2 \right) \int_a^{r_1} u' dr_2 dr_1 + \int_a^r (f_4 + r_1 \varphi f_{1r}) u' dr - f_4 \int_a^r u' dr;$$

$$L_{22}^*\vartheta' = \int_a^r \left(\frac{f_{5\theta}}{r_1} + \varphi f_4 \right) \int_a^{r_1} \vartheta' dr_2 dr_1 + \int_a^r (f_6 + r_1 \varphi f_{3r}) \vartheta' dr - f_6 \int_a^r \vartheta' dr.$$

Функции при начальных параметрах даны ниже:

$$F_{11} = \frac{1}{rf_{1r}} \left[\int_a^r \frac{f_{1\theta}}{r_1} dr_1 - f_2 + f_{2a} \right]; \quad F_{13} = \frac{1}{rf_{1r}} (af_{1ra});$$

$$F_{12} = \frac{1}{rf_{1r}} \left[\int_a^r \frac{f_{3\theta}}{r_1} dr_1 - f_4 + f_{4a} \right]; \quad F_{14}^* = 0; \quad (6.21)$$

$$F_{21} = \frac{1}{rf_{5r}} \left[\int_a^r \left(\frac{f_{3\theta}}{r_1} \right) + \varphi f_2 dr_1 - f_4 + f_{4a} \right]; \quad F_{23}^* = 0;$$

$$F_{22} = \frac{1}{rf_{5r}} \left[\int_a^r \left(\frac{f_{5\theta}}{r_1} + \varphi f_4 \right) dr - f_6 + f_{6a} \right]; \quad F_{24} = \frac{1}{rf_{5r}} (af_{5ra}).$$

Функции нагрузки и температуры

$$F_{1q} = \frac{\psi_{1a}}{rf_{1r}}; \quad F_{2q} = \frac{\psi_{2a}}{rf_{5r}}; \quad F_{1T} = \frac{\psi_{1T}}{rf_{1r}}; \quad F_{2T} = \frac{\psi_{2T}}{rf_{5r}}. \quad (6.22)$$

Система уравнений (6.18) решается методом последовательных приближений [12], описанным в § 4 гл. 1. В связи с линейностью решение системы (6.18) имеет вид

$$u' = \Phi_{11}u_a + \Phi_{12}\vartheta_a + \Phi_{13}u'_a + \Phi_{14}\vartheta'_a + \Phi_{1q} + \Phi_{1T}; \quad (6.23)$$

$$\vartheta' = \Phi_{21}u_a + \Phi_{22}\vartheta_a + \Phi_{23}u'_a + \Phi_{24}\vartheta'_a + \Phi_{2p} + \Phi_{2T} \quad (6.24)$$

или в матричной форме

$$\bar{V}' = \Phi \bar{V}_a + \Phi \bar{V}'_a + \bar{\Phi}_q + \bar{\Phi}_T, \quad (6.25)$$

где $V = \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix}$; $\Phi = [\Phi_{ij}]$ $i, j = 1, 2$; $\bar{\Phi}_q = \begin{bmatrix} \Phi_{1q} \\ \Phi_{2q} \end{bmatrix}$; $\bar{\Phi}_T = \begin{bmatrix} \Phi_{1T} \\ \Phi_{2T} \end{bmatrix}$.
Здесь Φ_{ij} и Φ_{ik} — фундаментальные функции — решения системы однородных уравнений, соответствующих (6.18); $\bar{\Phi}_q$ и $\bar{\Phi}_T$ — векторы частных решений.

Так как решения независимы, то каждая фундаментальная функция — решение Φ , отыскивается отдельно по аналогии с (1.93). Начальные параметры в (6.23), (6.24) u_a , u'_a , ϕ_a и ϕ'_a определяются из краевых условий при $r = a$ и $r = b$ (см. рис. 6.2). Обычно в колесах открытого типа силы и моменты на наружном контуре отсутствуют, т. е. $N_{rb} = 0$ и $M_{rb} = 0$. Если основной диск имеет центральное отверстие, то силы N_{ra} и N_{rb} или равны нулю, или определяются из условий взаимодействия диска с сопряженной деталью (валом). По (6.6)—(6.9) в этом случае легко определить начальные параметры, подстановка которых в (6.23), (6.24) дает значения искомых перемещений u_r и $\phi(r)$. Краевые условия для диска без отверстия рассмотрены в § 4 гл. 1 и § 5 гл. 2. Так как $u(r)$ и $\phi(r)$, а также значения k_r и k_θ теперь известны, из (6.5) можно найти напряжения в колесе. Допущения принятой схемы таковы, что напряженное состояние более точно определяется в основном диске. Лопатки оцениваются достаточно приближенно.

Методы упругопластического расчета, описанные в § 8 гл. 3, применяют для учета пластических деформаций и ползучести колеса, и, в частности, приведенные выше уравнения, предполагающие зависимость параметров упругости E и μ от координат, позволяют реализовать метод переменных параметров упругости.

Описанный выше метод также может быть использован, если лопатки колеса слабо изогнуты. При сильноизогнутых лопатках неучтенные деформации лопаток могут дать существенную погрешность, и в этом случае следует использовать другие методы (см. § 2).

Пример 6.1. На рис. 6, 3, а показано рабочее колесо (крыльчатка) центробежного компрессора транспортного дизельного двигателя из сплава АЛ4 с радиальными лопатками, работающее при частоте вращения 17 000 об/мин. Наружный радиус $r = b = 16,5$ см, внутренний радиус $r = a = 4$ см. На рис 6.3, б даны напряжения в основной поверхности, определенные изложенным выше методом при рассмотрении лопаток как конструктивно-ортотропного слоя (сплошные линии); напряжения, определенные методом присоединенных масс (без учета жесткости лопаток), показаны штриховыми линиями. Максимальные радиальные напряжения в диске при рассмотрении лопаток как присоединенной массы [см. формулу (6.1)] получаются завышенными. Максимальные окружные напряжения практически совпадают.

Пример 6.2. На рис. 6.4 показано центробежное колесо нагнетателя 1, собранного на валу с входным направляющим аппаратом 2. Лопатки колеса нагнетателя радиальные. То же колесо с валом показано на рис. 6.5. Колесо вы-

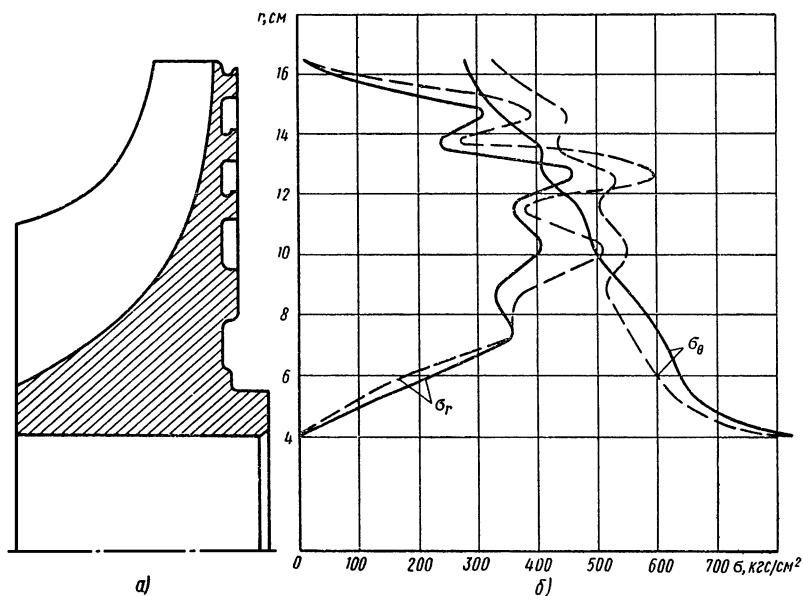


Рис. 6.3

полнено из алюминиевого сплава АК4-1, расчет проведен при частоте вращения 36 000 об/мин. На рис. 6.6, а приведены напряжения в колесе, определенные при упругом (рис. 6.6, б) и упругопластическом (рис. 6.6, в) расчетах; напряжения *I* — на задней поверхности диска; *II* — на передней поверхности диска; *III* — в средней линии лопаток. Окружные напряжения в диске показаны штриховой линией; радиальные напряжения — сплошными линиями; напряжения в лопатке — штрихпунктирной линией. Перераспределение напряжений

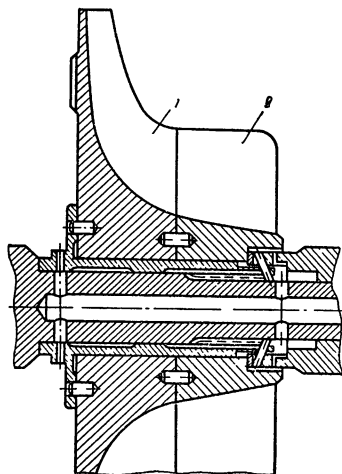


Рис. 6.4

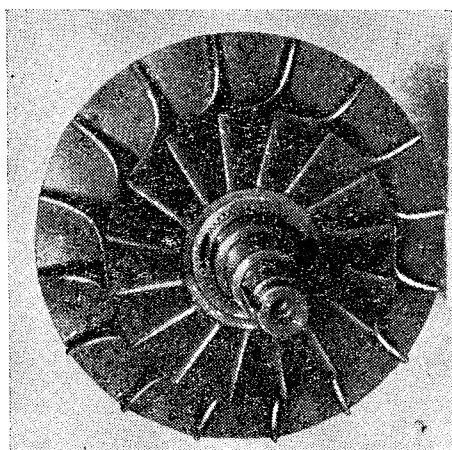


Рис. 6.5

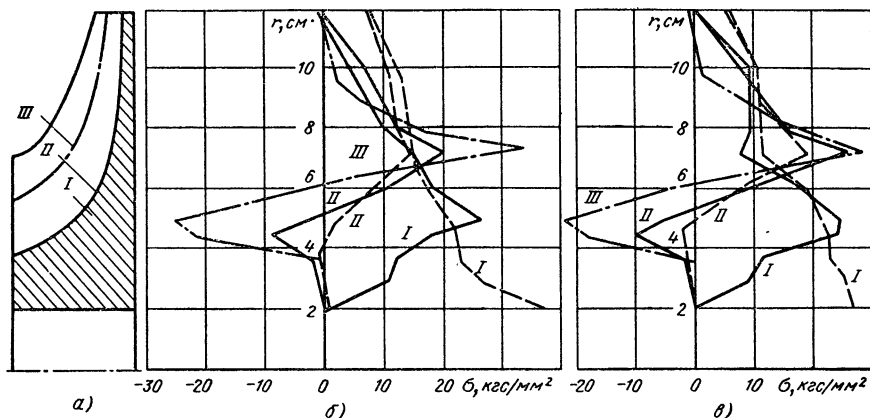


Рис. 6.6

в результате пластических деформаций значительно в области центрального отверстия. Уругопластический расчет проводится методом переменных параметров упругости.

Определение разрушающей частоты вращения. Частоту вращения открытого радиального колеса определяют методами, изложенными в § 12 гл. 4. Проведя уругопластический расчет для различной частоты вращения с использованием метода пристрелки, можно определить разрушающую частоту n^* по условию равенства эквивалентных напряжений в колесе пределу прочности σ_b материала (или пределу длительной прочности). Разрушающая частота вращения может быть также определена методами теории предельного равновесия по (4.30), (4.31), если вместо плотности материала ρ подставить величину ρ^* с учетом присоединенной массы по (6.1).

Расчетная величина n^* , определенная по (4.31) для колеса-нагнетателя (см. рис. 6.6, пример 2.2), составляет $n_{\text{расч}}^* = n_1^* = 64\,700$ об/мин. При испытаниях этого колеса, проведенных на разгонной установке, $n_{\text{эксп}}^* = 52\,000$ об/мин. Характер разрушения колеса-нагнетателя соответствует расчетному. Запас $k_{b \min} = k_{b1}$, т. е. по расчету разрушение должно происходить по меридиональному сечению колеса, что и показал эксперимент. Расчетная разрушающая частота, оцененная по (4.30), (4.31), выше экспериментальной на 10 — 20%. Оценка n^* по уругопластическому расчету дает результаты, более близкие к результатам эксперимента.

§ 18. Расчет колес с покрывающим диском

При наличии покрывающего диска из-за деформаций обоих несущих дисков в радиальных лопатках возникает более сложное напряженное состояние, и колесо закрытого типа (рис. 6.7),

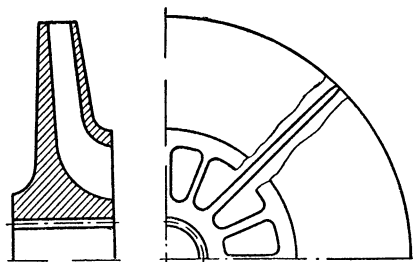


Рис. 6.7

рис. 6.8) можно рассматривать как конструктивно-ортотропный диск с учетом деформации сдвига в лопатках.

Рассмотрим центробежные колеса с малоизогнутыми достаточно тонкими дисками, которые в свою очередь можно рассчитывать на основе теории тонких пластин при учете их работы на растяжение и изгиб [27,

30]. Такую конструкцию имеют колеса нагнетателей и компрессоров ступеней низкого давления.

Напряженное состояние рабочего колеса предполагаем осесимметричным, что оправдано для колес с числом лопаток больше 12. Схему деформации дисков с лопатками принимаем аналогичной схеме деформации круглой трехслойной пластинки с упругим заполнителем. При этом для деформаций несущих слоев справедлива гипотеза Кирхгофа—Лява, а для среднего слоя (лопаток) — гипотеза о равномерном по ширине распределении деформаций сдвига. Ступичную часть колеса представим в виде кольца (при сопряжении лопаток со ступицей) или в виде изотропного диска. Основные уравнения получены вариационным методом.

На рис. 6.9 показан элемент колеса, представляющий собой трехслойный диск. Принятые гипотезы позволяют выразить деформации этого элемента через три функции перемещений: $u_1(r)$ — радиальное перемещение срединной поверхности основного диска; $w(r)$ — осевое перемещение, одинаковое для всех точек колеса, лежащих на одном радиусе (лопатку считаем нерастяжимой в осевом направлении); $\gamma(r)$ — угол сдвига лопатки.

Углы поворота касательных к срединным поверхностям дисков

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta(r) = \frac{dw}{dr}; \quad (6.26)$$

радиальное перемещение точки срединной поверхности покрывающего диска

$$u_2 = u_1 + \vartheta h_c + \gamma h_l, \quad (6.27)$$

где $h_c(r)$ — расстояние между срединными поверхностями дисков; $h_l(r)$ — ширина лопатки.

Деформации дисков в радиальном и окружном направлениях

$$\varepsilon_{r1} = \frac{du_1}{dr} + \frac{d\vartheta}{dr} z_1; \quad \varepsilon_{\theta 1} = \frac{u_1}{r} + \frac{\vartheta}{r} z_1; \quad (6.28)$$

$$\varepsilon_{r2} = \frac{du_2}{dr} + \frac{d\vartheta}{dr} z_2; \quad \varepsilon_{\theta 2} = \frac{u_2}{r} + \frac{\vartheta}{r} z_2. \quad (6.29)$$

В (6.28) и (6.29) z_1 и z_2 — координаты точек дисков, отсчитываемые от соответствующих срединных поверхностей.

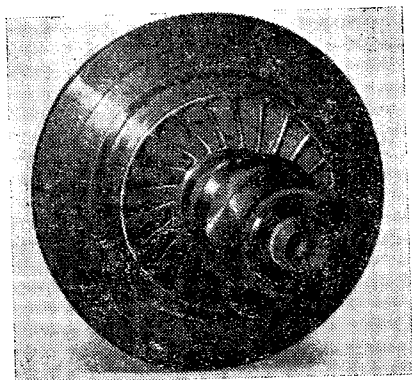


Рис. 6.8

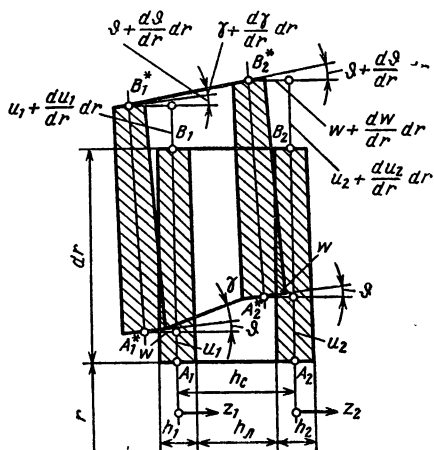


Рис. 6.9

Радиальное перемещение произвольной точки лопатки

$$u_n = u_1 + \vartheta \frac{h_1}{2} + (\vartheta + \gamma) z_n; \quad (6.30)$$

радиальная деформация лопатки

$$\epsilon_n = \frac{\partial u_n}{\partial r} = \frac{du_1}{dr} + \frac{d}{dr} \left[\vartheta \frac{h_1}{2} + (\vartheta + \gamma) z_n \right],$$

где $z_n = z_1 - \frac{h_1}{2}$.

Напряжения в дисках связаны с деформациями уравнениями упругости

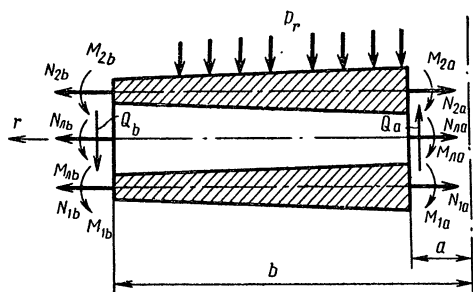
$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r + \mu \epsilon_\theta); \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_r); \quad (6.31)$$

в лопатке возникают напряжения растяжения и сдвига

$$\sigma_n = E \epsilon_n; \quad \tau_n = G \gamma. \quad (6.32)$$

Основные разрешающие уравнения можно получить вариационным методом из уравнения Лагранжа [5]. Полную потенциальную энергию системы дисков с лопатками представим в виде функционала

$$\Pi = P_1 + P_2 + P_n + A_{вн}, \quad (6.33)$$



где P_1 , P_2 , P_n — потенциальные энергии деформации основного и покрывающего дисков и лопаток; $A_{вн}$ — потенциал внешних сил, действующих на крыльчатку.

$$P_1 = \int_a^b \int_{-h_1/2}^{h_1/2} 2\pi r a_1 dz_1 dr;$$

$$P_2 = \int_a^b \int_{-h_2/2}^{h_2/2} 2\pi r a_2 dz_2 dr; \quad (6.34)$$

$$P_n = \int_a^b \int_0^{h_n} n \delta_n a_n dz_n dr.$$

В (6.34) n — число лопаток; δ_n — толщина лопатки; a_1 , a_2 , a_n — плотности энергии деформации элементов колеса;

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} (\epsilon_{r1}^2 + \epsilon_{\theta1}^2 + 2\mu\epsilon_{r1}\epsilon_{\theta1}); \\ a_2 &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} (\epsilon_{r2}^2 + \epsilon_{\theta2}^2 + 2\mu\epsilon_{r2}\epsilon_{\theta2}); \\ a_n &= \frac{1}{2} (E\epsilon_n^2 + G\gamma^2); \end{aligned} \quad (6.35)$$

$A_{вн}$ — потенциал центробежных сил и сил от воздействия на крыльчатку рабочего тела, а также сил и моментов на наружных контурах (краевых сил, рис. 6.10);

$$\begin{aligned} A_{вн} &= -2\pi \left\{ \int_a^b \rho \omega^2 h_1 u_1 r^2 dr + \int_a^b \rho \omega^2 h_2 r^2 (u_1 + \vartheta h_c + \gamma h_n) dr \right\} - \\ &- \int_a^b \rho n \delta_n \omega^2 h_n \left[u_1 + \vartheta \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_n}{2} \right) + \frac{1}{2} \gamma h_n \right] r dr - \\ &- \int_a^b 2\pi r \cdot p \omega dr - T. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Здесь ρ — плотность материала колеса; ω — угловая скорость вращения; p — разность давлений рабочего тела на наружных поверхностях основного и покрывающего дисков.

$$\begin{aligned}
 T = 2\pi r \left\{ \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{r1}(u_1 + \vartheta z_1) dz_1 + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \sigma_{r2}(u_1 + \vartheta h_c + \gamma h_{\text{л}} + \vartheta z_2) dz_2 + \right. \\
 \left. + \int_0^{h_{\text{л}}} \frac{n\delta_{\text{л}}}{2\pi r} \sigma_{\text{л}} \left[u + \vartheta \frac{h_1}{2} + (\vartheta + \gamma) z_{\text{л}} \right] dz_{\text{л}} + \right. \\
 \left. + \left(\int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tau_1 dz_1 + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \tau_2 dz_2 + \int_0^{h_{\text{л}}} \frac{n\delta_{\text{л}}}{2\pi r} \tau_{\text{л}} dz_{\text{л}} w \right) \right\} \Big|_a^b. \quad (6.37)
 \end{aligned}$$

В (6.35) σ_r , σ_{r2} , $\sigma_{\text{л}}$ — радиальные распределенные силы в дисках и лопатке; τ_1 , τ_2 , $\tau_{\text{л}}$ — перерезывающие силы, распределенные на единицу площади цилиндрического сечения диска или лопатки.

Выражение (6.37) можно представить в виде (см. рис. 6.9)

$$T = 2\pi r [Qw + Nu_1 + M_1\vartheta + M_{\text{II}}\gamma] \Big|_a^b, \quad (6.38)$$

где $N = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{r1} dz_1 + \int_0^{h_{\text{л}}} \frac{\delta_{\text{л}} n}{2\pi r} \sigma_{\text{л}} dz_{\text{л}} + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \sigma_{r2} dz_2$ — суммарная радиальная сила на контуре;

$M_1 = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{r1} z_1 dz_1 + \int_0^{h_{\text{л}}} \frac{\delta_{\text{л}} n}{2\pi r} \sigma_{\text{л}} \left(\frac{h_1}{2} + z_{\text{л}} \right) dz_{\text{л}} + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \sigma_{r2} (h_c + z_2) dz_2$ — обобщенный момент радиальных сил относительно срединной поверхности основного диска;

$$M_{\text{II}} = \int_0^{h_{\text{л}}} \frac{\delta_{\text{л}} n}{2\pi r} \sigma_{\text{л}} z_{\text{л}} dz_{\text{л}} + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \sigma_{r2} h_{\text{л}} dz_2$$

— обобщенный сдвиговый момент радиальных сил;

$$Q = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tau_1 dz_1 + \int_0^{h_{\text{л}}} \frac{\delta_{\text{л}} n}{2\pi r} \tau_{\text{л}} dz_{\text{л}} + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \tau_2 dz_2$$

— обобщенная перерезывающая сила на контуре.

Полная потенциальная энергия¹

$$\Pi = \int_a^b \theta(r, u_1, \gamma, w, u_1^{(1)}, \gamma^{(1)}, w^{(1)}, w^{(2)}) dr - T. \quad (6.39)$$

Подстановка в (6.39) выражений (6.34)–(6.36) дает для подынтегральной функции θ следующее равенство:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_n - 2\pi\omega^2 r^2 [u_1 h_1 + h_2 (u_1 + \vartheta h_c + \gamma h_n)] - \\ - \rho n \delta_n \omega^2 h_n r \left[u_1 + \vartheta \left(\frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} h_n \right) + 1/2 h_n \gamma \right] - 2\pi r p w, \quad (6.40)$$

$$\text{где } \theta_1 = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} 2\pi r a_1 dz_1; \quad \theta_2 = \int_{-h_2/2}^{h_2/2} 2\pi r a_2 dz_2; \quad \theta_n = \int_0^{h_n} \delta_n a_n dz_n.$$

Вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta \Pi = \delta \left\{ \int_a^b \theta dr - T \right\} = 0 \quad (6.41)$$

или с учетом (6.26) — (6.38)

$$\int_a^b \left\{ \left[\frac{\partial \theta}{\partial u_1} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_1^{(1)}} \right)^{(1)} \right] \delta u_1 \right\} dr + \\ + \int_a^b \left\{ \left[\frac{\partial \theta}{\partial w} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^{(1)} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta^{(1)}} \right)^{(2)} \right] \delta w \right\} dr + \\ + \int_a^b \left\{ \left[\frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \gamma^{(1)}} \right)^{(1)} \right] \delta \gamma \right\} dr + \left[\frac{\partial \theta}{\partial u_1^{(1)}} - 2\pi r N \right] \delta u_1 \Big|_a^b + \\ + \left[\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta^{(1)}} - 2\pi r M_I \right] \delta \vartheta \Big|_a^b + \left[\frac{\partial \theta}{\partial \gamma^{(1)}} - 2\pi r M_{II} \right] \delta \gamma \Big|_a^b + \\ + \left[\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta^{(1)}} \right)^{(1)} - 2\pi r Q \right] \delta w \Big|_a^b = 0. \quad (6.42)$$

Условие равенства нулю вариации (6.42) приводит к трем уравнениям Эйлера для функций

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_1} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_1^{(1)}} \right)^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta^{(1)}} \right)^{(1)} - Q(r) = 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \gamma^{(1)}} \right)^{(1)} = 0, \quad (6.43)$$

¹ В (6.39) и далее верхний индекс у переменных, стоящих в скобках, означает дифференцирование по r .

где $Q(r)$ — равнодействующая всех перерезывающих сил в сечении диска на радиусе r ;

$$Q(r) = 2\pi a Q_a - 2\pi \int_a^r p r dr. \quad (6.44)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-h_1/2}^{h_1/2} E \frac{1}{1-\mu^2} dz_1; & A_2 &= \int_{-h_2/2}^{h_2/2} E \frac{1}{1-\mu^2} dz_2; \\ A_n^* &= \int_{h_1/2}^{h_1/2+h_n} E \frac{n\delta_n}{2\pi} dz_1; & D_1 &= \int_{-h_1/2}^{h_1/2} E \frac{1}{1-\mu^2} z_1^2 dz_1; \\ D_2 &= \int_{-h_2/2}^{h_2/2} E \frac{1}{1-\mu^2} z_2^2 dz_2; & D_n^* &= \int_{h_1/2}^{h_1/2+h_n} E \frac{n\delta_n}{2\pi} z_1^2 dz_1; \\ K_1 &= \int_{-h_1/2}^{h_1/2} E \frac{1}{1-\mu^2} z_1 dz_1; & K_2 &= \int_{-h_2/2}^{h_2/2} E \frac{1}{1-\mu^2} z_2 dz_2; \\ K_n &= \int_{h_1/2}^{h_1/2+h_n} E_n \frac{n\delta_n}{2\pi} z_1 dz_1; & \frac{dh_n}{dr} &= \chi; & \frac{dh_c}{dr} &= \chi; & \frac{d(h_1/2)}{dr} &= \xi. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Уравнения (6.43) составляют систему трех дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Полученная система уравнений может быть представлена в матричном виде

$$\frac{d}{dr} (\mathbf{C}\bar{\mathbf{V}}) + \frac{d}{dr} (\mathbf{G}\bar{\mathbf{V}}^{(1)}) - \mathbf{M}\bar{\mathbf{V}} - \mathbf{C}'\bar{\mathbf{V}}^{(1)} + \bar{\mathbf{S}} = 0. \quad (6.46)$$

В этом уравнении

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \phi \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{V}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dr} \\ \frac{d\phi}{dr} \\ \frac{d\gamma}{dr} \end{bmatrix} -$$

векторы перемещений и их первых производных.

Элементы квадратных матриц третьего порядка $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{M}$ представляют собой совокупности цилиндрических жесткостей дисков и приведенных жесткостей лопаток; $\mathbf{C}'$ — матрица, транспонированная к $\mathbf{C}$; $\mathbf{S}$ — столбец функций, зависящих от внешней нагрузки на колесо; матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{M}$ являются симметричными. Элементы всех матриц даны в приложении 4.

На краях трехслойной части колеса $r = a$ и $r = b$ могут быть заданы кинематические, силовые или смешанные граничные условия. Задание кинематических условий означает, что перемещения известны и определены на контурах.

Если на краях заданы силовые условия, т. е. радиальные силы и моменты, то в этом случае граничные условия в перемещениях получаются из (6.42):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u_1^{(1)}}(a) &= 2\pi a N(a); & \frac{\partial \theta}{\partial u_1^{(1)}}(b) &= 2\pi b N(b); \\ \frac{\partial \theta}{\partial \phi^{(1)}}(a) &= 2\pi a M_I(a); & \frac{\partial \theta}{\partial \phi^{(1)}}(b) &= 2\pi b M_I(b); \\ \frac{\partial \theta}{\partial \gamma^{(1)}}(a) &= 2\pi a M_{II}(a); & \frac{\partial \theta}{\partial \gamma^{(1)}}(b) &= 2\pi b M_{II}(b). \end{aligned} \quad (6.47)$$

С учетом выражений для θ эти краевые условия можно представить в матричной форме

$$\begin{aligned} C(a) \bar{V}(a) + G(a) \bar{V}^{(1)}(a) &= a \bar{P}(a); \\ C(b) \bar{V}(b) + G(b) \bar{V}^{(1)}(b) &= b \bar{P}(b). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Здесь $C(a)$, $G(a)$, $C(b)$, $G(b)$ представляют собой те же матрицы C и G , которые входят в (6.46), причем их элементы берут при $r = a$ и $r = b$ соответственно.

Правая часть (6.48) представляет собой векторы краевой нагрузки

$$\bar{P}(a) = \begin{bmatrix} N(a) \\ M_I(a) \\ M_{II}(a) \end{bmatrix} \text{ и } \bar{P}(b) = \begin{bmatrix} N(b) \\ M_I(b) \\ M_{II}(b) \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

У рабочего колеса центробежного нагнетателя наружный контур свободен, т. е. $N(b) = 0$; $M_I(b) = 0$; $M_{II}(b) = 0$. В этом случае на контуре реализуются естественные граничные условия

$$C(b) \bar{V}(b) + G(b) \bar{V}^{(1)}(b) = 0. \quad (6.50)$$

На внутреннем контуре могут быть два варианта краевых условий.

I. Крыльчатка с лопатками, не сопряженными со ступицей. В том случае, когда лопатки рабочего колеса не связаны со ступицей, целесообразно внутреннюю (ступичную) часть колеса рассматривать как обычный диск переменной толщины, кольцо или цилиндрическую оболочку (рис. 6.11, а) в зависимости от конструктивной формы ступицы. В точке А пересечения срединной поверхности основного диска с наружной цилиндрической поверхностью ступичной части прикладываем равномерно распределенные по окружности радиуса $r = b$ силы взаимодействия X_1 и X_2 .

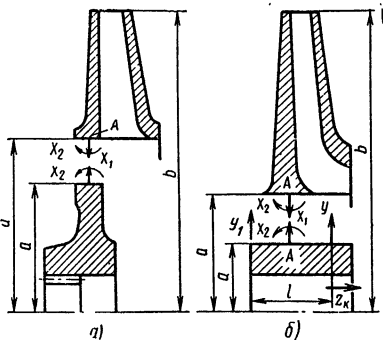
Уравнения совместности деформаций для точки A наружной и внутренней частей колеса

$$u_1(a) = u_A^{ct}; \quad \vartheta(a) = \vartheta_A^{ct}, \quad (6.51)$$

где u_A^{ct} и ϑ_A^{ct} — радиальное перемещение и угол поворота ступичной части колеса в точке A . Силы X_1 и X_2 связаны с u_A^{ct} и ϑ_A^{ct} следующими условиями:

$$u_A^{ct} = \lambda_{11}^{ct} X_1 + \lambda_{12}^{ct} X_2 + u_A^{ct*};$$

$$\vartheta_A^{ct} = \lambda_{21}^{ct} X_1 + \lambda_{22}^{ct} X_2 + \vartheta_A^{ct*}. \quad (6.52) \quad \text{Рис. 6.11}$$



Здесь λ_{ij}^{ct} ($i, j = 1, 2$) — коэффициенты податливости ступичной части, представляющие собой перемещения и углы поворота в точке A от единичной силы $X_1 = 1$ или момента $X_2 = 1$ соответственно; u_A^{ct*} , ϑ_A^{ct*} — радиальное перемещение и угол поворота ступичной части от внешней нагрузки. Определение этих коэффициентов для различных случаев сопряжения подробно изложено в работе [30].

Радиальное перемещение и угол поворота в точке A трехслойного диска соответственно

$$u_1(a) = \lambda_{11}^d X_1 + \lambda_{12}^d X_2 + u_{1*}(a);$$

$$\vartheta(a) = \lambda_{21}^d X_1 + \lambda_{22}^d X_2 + \vartheta_*(a). \quad (6.53)$$

При этом на контуре $r = a$ трехслойного диска граничные условия

$$N(a) = X_1; \quad M_1(a) = X_2; \quad M_{II}(a) = 0 \quad (6.54)$$

или

$$C(a) \bar{V}(a) + G(a) \bar{V}^{(1)}(a) = aP(a), \quad (6.55)$$

где

$$\bar{P}(a) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Все коэффициенты податливости λ_{ij}^d ($i, j = 1, 2$) и перемещения от внешней нагрузки $u_{1*}(a)$, $\vartheta_*(a)$ определяются при решении дифференциального уравнения (6.46) при граничных условиях на наружном контуре (6.50) и соответствующих граничных условиях на внутреннем контуре:

$$P(a) = \{1, 0, 0\} \text{ при определении } \lambda_{11}^d, \lambda_{21}^d;$$

$$P(a) = \{0, 1, 0\} \text{ при определении } \lambda_{12}^d, \lambda_{22}^d;$$

$$P(a) = \{0, 0, 0\} \text{ при определении перемещений от внешней нагрузки.}$$

II. Рабочее колесо с лопатками, сопряженными со ступицей. Если лопатки сопряжены со ступицей, то последнюю можно рассматривать как кольцо (рис. 6.11, б). Составление граничных условий для такой конструкции рабочего колеса показано в работе [30]. В этом случае предполагается равенство нулю угла сдвига лопатки у корня при $r = a$, $[\gamma(a) = 0]$, так как углы поворота ступицы и корневого сечения лопатки принимаются одинаковыми.

Интегральные уравнения трехслойного диска. Уравнение (6.46) преобразовывается в интегральное уравнение. При этом за основные неизвестные принимаются функции

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_a^r u_1^{(1)} dr + u_1(a); \quad \vartheta = \int_a^r \vartheta^{(1)} dr + \vartheta(a); \\ \gamma &= \int_a^r \gamma^{(1)} dr + \gamma(a) \end{aligned} \quad (6.56)$$

или

$$\bar{V} = \int_a^r \bar{V}^{(1)} dr + \bar{V}(a). \quad (6.57)$$

Основное дифференциальное уравнение (6.46) интегрируем в пределах от a до r , в результате чего получаем матричное интегральное уравнение трехслойного диска

$$\mathbf{G}\bar{V}^{(1)} = \mathbf{L}\bar{V}^{(1)} + \mathbf{B}\bar{V}(a) + \mathbf{F}\bar{V}^{(1)}(a) + \mathbf{T}. \quad (6.58)$$

В (6.58) $\mathbf{C}$ — матрица коэффициентов при основных неизвестных;

$$\mathbf{B} = -\mathbf{C}(r) + \int_a^r \mathbf{M} dr + \mathbf{C}(a); \quad (6.59)$$

$$\mathbf{F}(r) = \mathbf{G}(a) \quad (6.60)$$

— матрицы коэффициентов при начальных параметрах.

Матрица-столбец интегральных операторов в (6.58)

$$\mathbf{L}\bar{V}^{(1)} = -\mathbf{C} \int_a^r \bar{V}^{(1)} dr + \int_a^r \mathbf{C}' \bar{V}^{(1)} dr + \int_a^r \mathbf{M} \int_a^r \bar{V}^{(1)} dr_1 dr; \quad (6.61)$$

столбец функций нагрузки

$$\mathbf{T} = \int_a^r \bar{\mathbf{S}} dr. \quad (6.62)$$

Обе части (6.58) для удобства решения умножаем на обратную матрицу $\mathbf{G}^{-1}$, в результате чего последнее приводится к обычному виду интегральных уравнений

$$\bar{V}^{(1)} = \mathbf{G}^{-1} [\mathbf{L}\bar{V}^{(1)} + \mathbf{B}\bar{V}(a) + \mathbf{F}\bar{V}^{(1)}(a) + \mathbf{T}]. \quad (6.63)$$

Вследствие линейности (6.63) его решение можно представить в виде

$$\bar{V}^{(1)} = \Phi \bar{V}(a) + X \bar{V}^{(1)}(a) + Z, \quad (6.64)$$

где Φ и X — матрицы фундаментальных функций; Z — вектор частных решений, отвечающих нулевым начальным условиям.

Решения Φ , X и Z интегрального уравнения (6.63) находят методом последовательных приближений, изложенным для линейного приближения решения системы уравнений растяжения и изгиба полой пластинки в § 6 гл. 2. В [30] показано применение метода линейной аппроксимации к решению (6.63).

Подставив (6.64) в (6.57), получим перемещения трехслойной части рабочего колеса на произвольном радиусе

$$\bar{V}(r) = \left(\int_a^r \Phi dr + E \right) \bar{V}(a) + \left(\int_a^r X dr \right) \bar{V}^{(1)}(a) + \int_a^r Z dr, \quad (6.65)$$

где E — единичная матрица.

Перемещения и их производные при $r = b$ найдем из следующих выражений:

$$V(b) = \left(\int_a^b \Phi dr + E \right) \bar{V}(a) + \left(\int_a^b X dr \right) \bar{V}^{(1)}(a) + \int_a^b Z dr; \quad (6.66)$$

$$\bar{V}^{(1)}(b) = \Phi(b) \bar{V}(a) + X(b) \bar{V}^{(1)}(a) + Z(b).$$

С учетом (6.66) граничное условие (2.50) для контура $r = b$

$$\begin{aligned} & \left[C(b) \left(\int_a^b \Phi dr + E \right) + G(b) \Phi(b) \right] \bar{V}(a) + \\ & + \left[C(b) \int_a^b X dr + G(b) X(b) \right] \bar{V}^{(1)}(a) + C(b) \int_a^b \bar{Z} dr + G(b) \bar{Z}(b) = 0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Из (6.67) и (6.55), представляющих собой граничные условия для контуров $r = b$ и $r = a$, определяют неизвестные $\bar{V}(a)$ и $\bar{V}^{(1)}(a)$, т. е. начальные параметры $u_1(a)$, $\vartheta(a)$, $\gamma(a)$, $u_1^{(1)}(a)$, $\vartheta^{(1)}(a)$, $\gamma^{(1)}(a)$. Перемещения и их производные во всех точках по радиусу диска определяют из (6.65) и (6.64). Далее из (6.28) — (6.30) могут быть найдены деформации, а из (6.31) и (6.32) напряжения во всех точках трехслойной части рабочего колеса. Напряжения в ступичной части определяют по известным формулам в зависимости от принятой расчетной схемы.

Пример 6.3. На рис. 6.12, а показано меридиональное сечение крыльчатки нагнетателя с радиальными лопатками. Геометрические параметры и необходимые для расчета характеристики приведены в табл. 6.1.

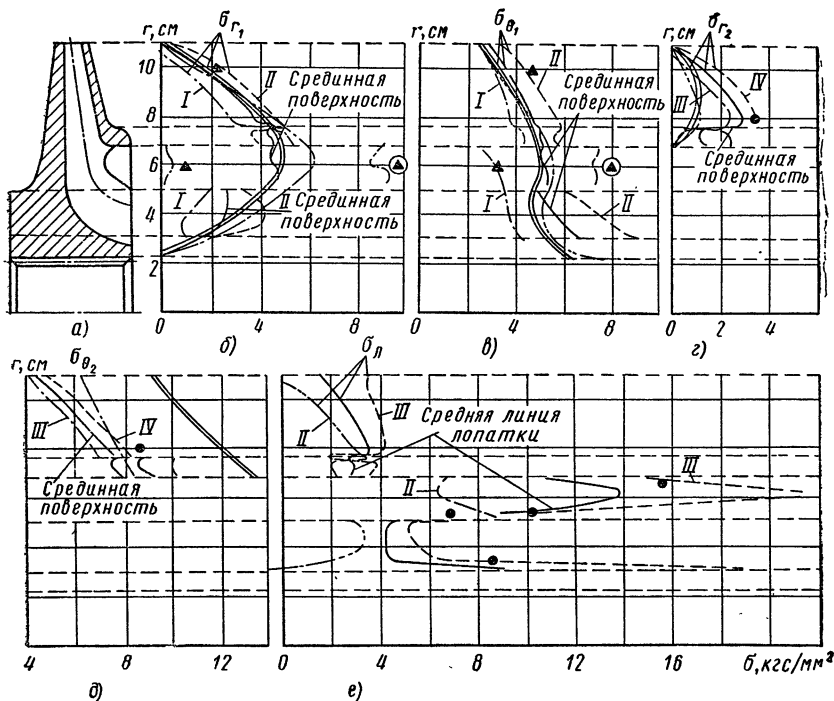


Рис. 6.12

На рис. 6.12, б—е сплошными линиями показаны напряжения в срединных поверхностях дисков и на средней линии лопатки. Штрихпунктирными линиями показаны напряжения для основного диска с наружной поверхности, для покрывающей — с внутренней и для лопатки — по границе сопряжения с основным диском. Штриховыми линиями изображены напряжения с про-

6.1. Геометрические размеры крыльчатки (к примеру 6.3), см

($a = r_0 = 2$ см; $l = 5$ см; $z_A = -0,6$ см; $z_L = 12$;
 $\rho = 0,289 \cdot 10^{-5}$ кгс/(см²·с²); $E = 0,714$ кгс/см²; $n = 25\,000$ об/мин

№ точки	r	h_1	h_2	h_L	δ_L	№ точки	r	h_1	h_2	h_L	δ_L
1	3,1	3,7	0	1,25	0,4	12	7,35	0,68	0,90	1,39	0,35
2	3,5	3,3	0	1,70	0,4	13	7,55	0,65	0,50	1,31	0,34
3	4,0	2,8	0	2,20	0,4	14	7,80	0,62	0,45	1,30	0,33
4	4,75	2,45	0	2,60	0,4	15	8,10	0,60	0,42	1,25	0,32
5	5,0	2,40	0	2,60	0,4	16	8,60	0,55	0,40	1,20	0,28
6	5,25	1,40	0	2,10	0,4	17	9,10	0,50	0,37	1,13	0,25
7	5,75	1,05	0	1,70	0,4	18	9,75	0,42	0,33	1,00	0,21
8	6,10	0,90	0	1,55	0,4	19	10,25	0,37	0,29	0,95	0,19
9	6,65	0,80	0	1,90	0,4	20	10,75	0,30	0,27	0,85	0,17
10	6,90	0,75	1,1	1,45	0,38	21	11,10	0,25	0,25	0,80	0,15
11	7,10	0,70	1,15	1,40	0,38						

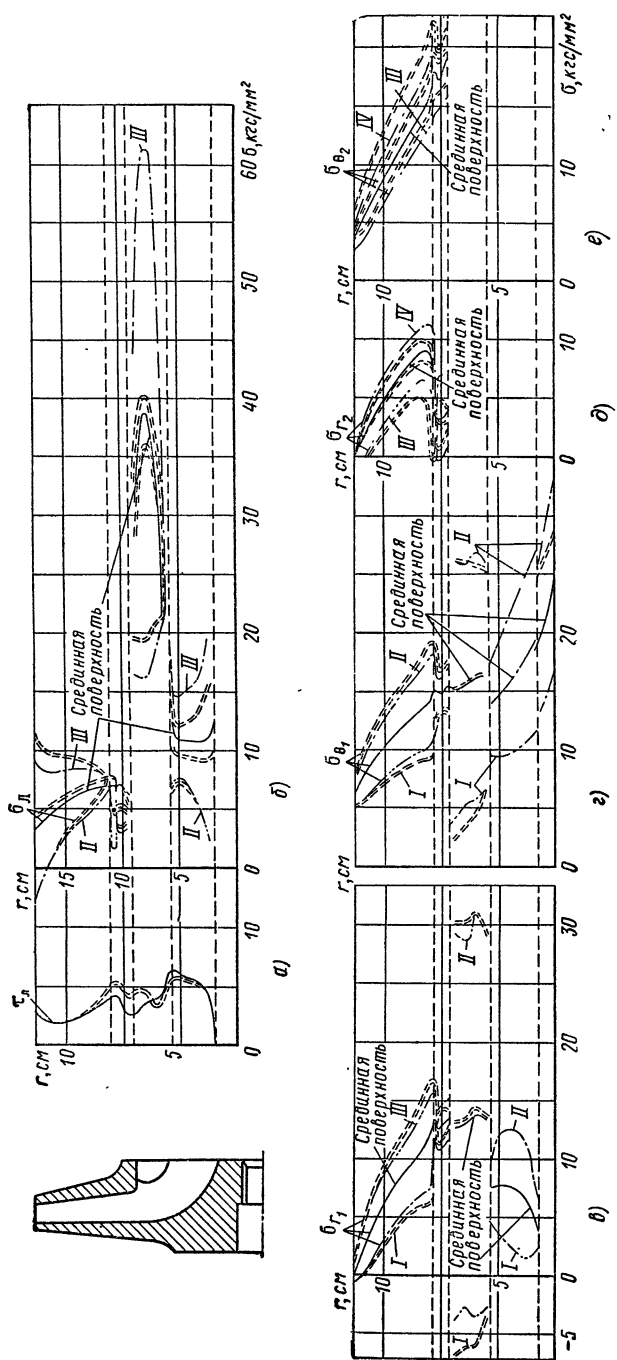


Рис. 6.13

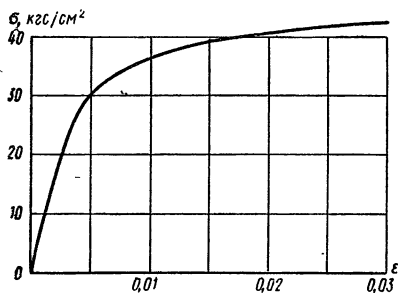


Рис. 6.14

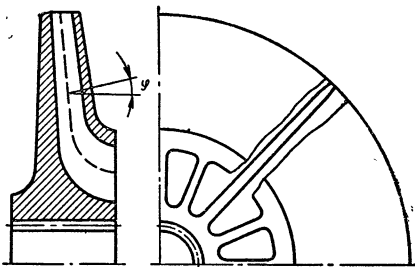


Рис. 6.15

типоволожных сторон элементов. Расчет показал, что наибольшие напряжения возникают в районе подреза входной кромки лопатки. В основном диске по тем радиусам, где отсутствует покрывающий диск и ширина лопатки резко уменьшена из-за подреза, имеют место значительные напряжения изгиба. Для сравнения на рисунке нанесены также экспериментальные точки, полученные при статическом тензометрировании. Все напряжения, полученные при исследовании, относятся только к наружным поверхностям дисков, исключение составляют точки, отмеченные кружком.

Результаты расчета согласуются с данными экспериментов. Наибольшие напряжения также получены при экспериментах в районе подреза входной кромки лопатки. На рис. 6.12 двойными линиями показаны эпюры напряжений, определенные по методу присоединенных масс, а штрихпунктирными линиями с двумя точками эпюры напряжений, определенные методом, изложенным в § 17 этой главы. Оба метода дадут удовлетворительное совпадение для напряжений срединной поверхности основного диска и недостаточно точно описывают напряженное состояние покрывающего диска и лопаток.

Упругопластический расчет. При упругопластическом расчете можно использовать итерационные методы упругопластического анализа, изложенные в гл. 3. При этом модуль упругости E полагался переменным, так что применение методов деформационных теорий, в частности метода переменных параметров упругости, не встречало затруднений.

Пример 6.4. На рис. 6.13, $a—e$ приведены результаты упругого и упругопластического расчетов крыльчатки нагнетателя, упругий расчет которой при частоте вращения 25 000 об/мин приведен в примере 6.3. Упругопластический расчет выполнен для $n = 42\,000$ об/мин, при которых пластические деформации в колесе существенны. Кривая деформирования материала колеса (алюминиевого сплава АК4-1) показана на рис. 6.14. Сплошными линиями изображены напряжения первого упругого приближения в срединных поверхностях дисков и на срединной линии лопатки. Штрихпунктирными линиями показаны напряжения на наружной поверхности основного диска, внутренней поверхности покрывающего диска и по границе сопряжения с основным диском — для лопатки. Штриховыми линиями показаны напряжения с противоположных сторон элементов. Аналогичными двойными линиями представлено распределение напряжений в элементах тех же крыльчаток, полученное в результате упругопластического расчета.

В упругопластической области напряжения существенно перераспределяются, особенно для первого и четвертого вариантов конструкций.

В крыльчатке при повышенных оборотах появляются значительные деформации (порядка 0,015—0,020) в районе входной кромки на лопатке, особенно в месте подреза кромки. Напряжения растяжения на входной кромке

лопатки, определенные в результате упругопластического расчета, значительно меньше напряжений, полученных при упругом расчете (см. рис. 6.12). В результате деформации входной кромки в основном диске в упругопластической области возрастают напряжения изгиба. Наибольшие напряжения — в лопатке, в районе подреза входной кромки.

Учет изогнутости несущих дисков. Учесть изогнутость несущих дисков, если искривление их невелико, не представляет трудностей. В этом случае трехслойную модель облопаченной части колеса рассматривают как трехслойную пологую оболочку, причем основные соотношения для напряжений и деформаций соответствуют соотношениям, приведенным в гл. 2 для варианта «жесткого» изотропного диска с начальным искривлением меридиана.

За первоначальный усредненный угол подъема φ такой оболочки принимают угол подъема средней линии лопатки (рис. 6.15). Деформации в несущих дисках

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \vartheta \varphi + z \frac{d\vartheta}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + z \frac{\vartheta}{r}; \quad (6.68)$$

деформации в лопатке

$$\varepsilon_n = \frac{du_1}{dr} + \frac{d}{dr} \left[\vartheta \frac{h_1}{2} + (\gamma + \vartheta) z_n \right] + \varphi \vartheta. \quad (6.69)$$

Ход дальнейшего решения не отличается от изложенного выше. Разрешающее матричное уравнение также будет иметь вид

$$\frac{d}{dr}(\mathbf{C}\mathbf{V}) + \frac{d}{dr}(\mathbf{G}\mathbf{V}') - \mathbf{M}\mathbf{V} - \mathbf{C}'\mathbf{V}' + \mathbf{S} = 0. \quad (6.70)$$

В (6.70) элементы матриц $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{M}$, а также векторы нагрузки отличаются от соответствующих выражений (6.46), представленных в приложении 4, полученных в предположении плоской срединной поверхности наличием членов, содержащих начальный угол подъема φ . Элементы этих матриц также даны в приложении 4. Решение уравнения аналогично предыдущему.

Расчет центробежных колес с помощью метода конечных элементов. Метод конечных элементов, использование которого для расчета пространственного напряженного состояния в осесимметричных дисках показано в гл. 5, перспективен для рассмотрения центробежных рабочих колес. Выбор соответствующих элементов позволяет достаточно подробно рассмотреть как несущие диски, так и лопатки. В работе [138] решена осесимметричная задача расчета центробежных колес. Однако основное преимущество метода, позволяющего рассмотреть реальное деформирование с помощью комбинации различных элементов [46], при этом теряется.

Для использования классической трехмерной схемы представления диска и лопаток с помощью тетраэдрических элементов требуется большая машинная память и значительные затраты времени на составление исходной информации. Результаты,

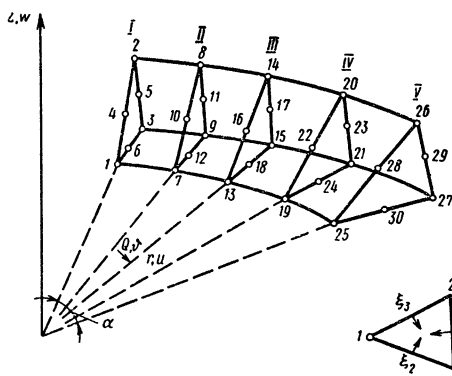


Рис. 6.16

очевидно, существенно зависят от расположения элементов. Перспективным оказывается рассмотрение радиального колеса по следующей схеме.

Осесимметричные конструкции с неосесимметричной нагрузкой удобно исследовать, используя ряды Фурье. Так как лопатки расположены дискретно, а для описания такой нагрузки число гармоник разложения должно быть велико, используют неко-

торый аналог. Так как лопатки делят диск на секции, то можно рассматривать одну из них, разбивая ее на цилиндрические секторные элементы треугольного сечения, аналогичные осесимметричным кольцевым замкнутым элементам (см. гл. 5).

Для описания перемещений в окружном направлении используют тригонометрический ряд, коэффициенты которого определяют с помощью дополнительных узловых точек. Число узловых точек зависит от необходимой точности решения и формы лопаток. При изогнутых лопатках число узловых точек, очевидно, должно быть большим. Перемещения в меридиональных треугольных сечениях описываются с помощью полинома. Если для осесимметричной задачи линейный полином (см. гл. 5) оказался достаточным, то здесь для увеличения точности решения следует брать полиномы более высоких порядков. В работе [122] такое решение предложено для колеса с радиальными лопатками. На рис. 6.16 показан секторный элемент с пятью узловыми плоскостями и шеститочечными треугольными сечениями.

Перемещение вдоль окружности в таком элементе описывается тригонометрическим рядом

$$V = b_0 + b_1 \sin \theta + b_2 \cos \theta + b_3 \sin 2\theta + b_4 \cos 2\theta, \quad (6.71)$$

где константы b_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) определяются через перемещения в пяти узловых плоскостях подстановкой соответствующих θ .

Перемещение в любом направлении в узловой плоскости, например в сечении I, описывается полиномом второго порядка в однородных координатах ξ , удовлетворяющих условию $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$.

$$u_1 = d_1 \xi_1 + d_2 \xi_2 + d_3 \xi_3 + d_4 \xi_1 \xi_2 + d_5 \xi_2 \xi_3 + d_6 \xi_3 \xi_1. \quad (6.72)$$

Величины $d_1 - d_6$ определяют через узловые перемещения $u_1 - u_6$ подстановкой соответствующих значений ξ . Выражение (6.72) справедливо для перемещений u в радиальном направлении

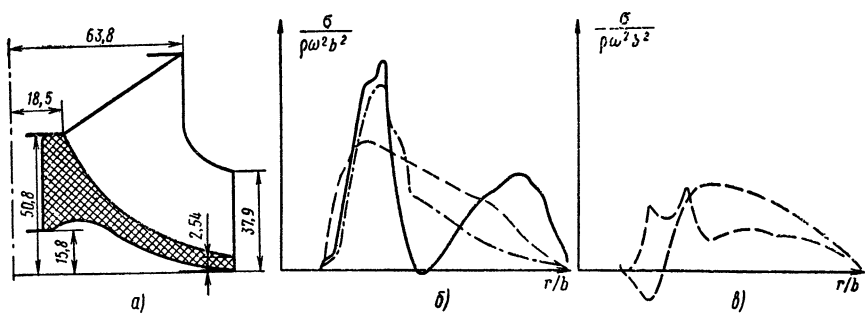


Рис. 6.17

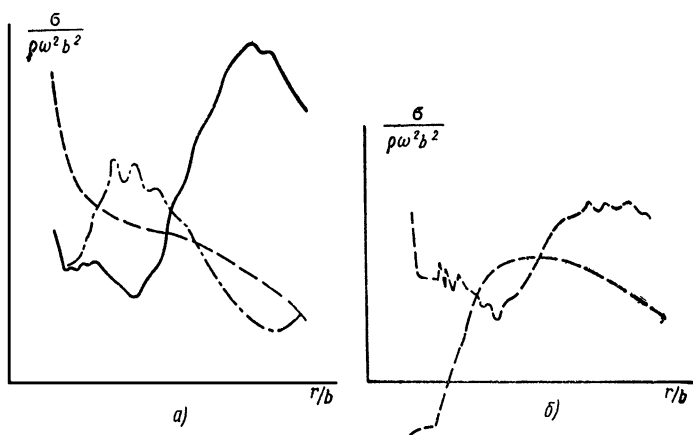


Рис. 6.18

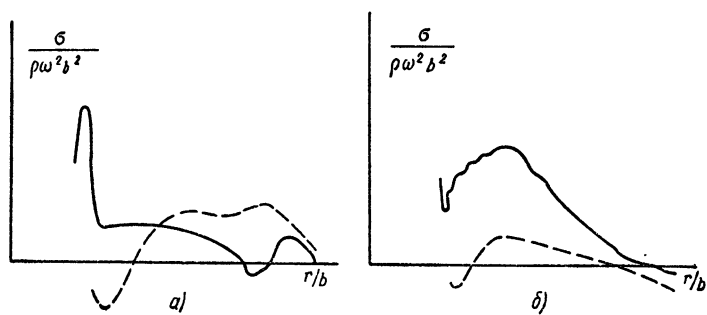


Рис. 6.19

и для перемещений w в осевом. После выбора функций перемещений (6.71) и (6.72) дальнейшая процедура сводится к определению вектора перемещений $\delta = [u \vartheta w]'$ и матрицы жесткости элемента при представлении вектора напряжений в виде $\bar{\sigma} = [\sigma_r \sigma_\theta \sigma_z \tau_{r\theta} \tau_{\theta z} \tau_{rz}]'$ и вектора деформаций $\bar{\epsilon} = [\epsilon_r \epsilon_\theta \epsilon_z \gamma_{r\theta} \gamma_{\theta z} \gamma_{rz}]'$. Эта процедура аналогична примененной в гл. 5 и не вызывает трудностей.

Для лопатки выбирают треугольные элементы, причем если предположить линейность изменения толщины этих элементов $D = h_{л1}\xi_1 + h_{л2}\xi_2 + h_{л3}\xi_3$, то соотношения для матрицы жесткости могут быть получены из уравнений для секторного элемента диска при постановке вместо элементарной длины $r d\theta$ толщины лопаточного элемента и других упрощений. Нагрузки из-за вращения учитываются так же, как и при осесимметричном нагружении. Далее составляют общую матрицу жесткости системы и решают систему линейных уравнений одним из методов, описанных в гл. 5. На рис. 6.17, а показано рабочее колесо (крыльчатка) открытого типа с радиальными лопатками, расчет которого выполнен методом, изложенным выше [122]. На рис. 6.17, б, в даны радиальные напряжения на задней и передней (со стороны лопаток) поверхностях диска, а на рис. 6.18, а и б окружные напряжения. Напряжения в лопатке показаны на рис. 6.19, а и б для входной кромки и корневых сечений соответственно. Штрихпунктирной линией обозначены напряжения, полученные в осесимметричной задаче, без учета дискретности лопаток. Сплошная линия на рис. 6.17 относится к напряжениям в диске напротив лопаток, штриховая — к напряжениям между лопатками. Проведенные сравнения с результатами исследований напряжений на фотоупругой модели крыльчатки свидетельствуют о достаточной близости результатов МКЭ и эксперимента, что объясняется малым количеством лопаток в этой крыльчатке и необходимостью учета в связи с этим дискретности нагрузки, действующей на диск. При большем числе лопаток результаты осесимметричного анализа и приведенного выше метода близки.

Оптимальное проектирование дисков

§ 19. Постановка задачи оптимального проектирования дисков

Экономия дефицитных высокопрочных материалов, создание легких конструкций дисков при обеспечении их надежной работы в условиях эксплуатации являются важной задачей проектирования большинства современных турбомашин. На практике конструктору и расчетчику приходится многократно изменять конструкцию и проводить поверочный расчет на прочность до окончательного получения проекта, удовлетворяющего различным требованиям. Автоматизация этого процесса при математической формулировке задачи оптимального проектирования [78, 95] позволяет ускорить процесс проектирования конструкции и получать проект диска, удовлетворяющий всем требованиям.

В большинстве ранних работ по профилированию (проектированию) дисков оптимальная конструкция отождествлялась с равнопрочной [54, 63, 72, 88, 106, 119]. Под равнопрочностью понимается равенство максимальных или эквивалентных напряжений, или запасов по напряжениям (см. гл. 4 § 11), т. е. равновероятность разрушения во всех расчетных сечениях. Такое требование может быть лишь приближенным и выполняется почти во всех сечениях только в сплошном равномерно нагретом диске. Соблюдение этого требования не всегда приводит к получению конструкций минимальной массы (равнонапряженная конструкция является конструкцией минимальной массы для статически определимых систем [90]). В некоторых случаях равнопрочные или равнонапряженные диски могут быть спрофилированы аналитическим путем. Если заранее предположить равенство напряжений некоторым заданным, например предельно допустимым ($\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma$), то для сплошного диска, нагруженного только силами инерции, функция зависимости толщин от радиуса будет иметь экспоненциальный характер

$$h(r) = h_c e^{\frac{\rho \omega^2}{2\sigma} (c^2 - r^2)}, \quad (7.1)$$

где h_c — некоторая фиксированная толщина, например в сечении у обода (шейке) диска; c — соответствующий радиус [20].

Некоторые аналитические решения задачи проектирования круглых пластин получены на основании теории предельного равновесия [133]. Известны попытки применения методов теории управления и принципа максимума Понтрягина для проектирования диска [25, 40, 66]. Эта задача решается в предположении, что материал подчиняется определенному критерию текучести при наложении ограничений на эту величину и определении оптимального управления (закона распределения толщин), отвечающего заданным ограничениям при минимуме массы. Перечисленные методы позволяют решать некоторые частные задачи.

Получение более общего способа оптимального проектирования диска, позволяющего учесть все возможные нагрузки и условия работы, различные критерии прочности и ограничения, возможно только при использовании методов математического программирования [35, 134 и др.]. Методы математического программирования позволяют находить экстремум функции многих переменных при наличии ограничений. Функция, или минимизируемый функционал, который называют целевой функцией, определен в области, множеством точек которой удовлетворяют всем ограничениям и представляют собой допустимые решения. Рассмотрим n переменных h_i ($i = 1, 2, \dots, n$), которые образуют $\bar{n}$ -мерный вектор; $G(\bar{h})$ — целевая функция. Область определения целевой функции ограничена. Ограничения имеют вид неравенства

$$\bar{F}(\bar{h}) \geq 0, \quad (7.2)$$

где $F(\bar{h})$ — векторная функция, компоненты которой $F_j(\bar{h}) \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

Таким образом, задача математического программирования в данном случае формулируется следующим образом: найти

$$\min \{G(\bar{h}) | F_j(\bar{h}) \geq 0, j = 1, 2, \dots, k\}. \quad (7.3)$$

Задача математического программирования однозначно может быть сформулирована как задача оптимального управления [98], в связи с чем функция цели является функцией управления, параметры напряженно-деформированного состояния — переменными состояния и т. д.

Чаще всего целевой функцией является масса диска $G(h) = \int_a^b 2\pi r h dr$ и параметрами управления — толщины диска $h(r)$

на конечной сетке радиусов расчетных сечений. Иногда при проектировании диска может ставиться и другая задача: найти такую форму начальной изогнутости срединной поверхности $\varphi(r)$ (см. гл. 2 § 6), чтобы обеспечить минимальную напряженность диска (или минимальные напряжения изгиба) [28]. В дальнейшем рассмотрим и некоторые другие возможные проблемы оптимизации дисков, возникающие в практике [36]. Чтобы задача оптимизации

проекта диска могла быть сформулирована в достаточно общем виде, используют принцип «черного ящика», представляющего собой блок общей программы, в котором производят расчет параметров состояния. В этом блоке может быть размещена принципиально любая программа расчета диска, составленная на основе алгоритмов, рассмотренных в предыдущих параграфах книги.

Конструктивные ограничения области управления зависят от компоновки, размещения крепежа, присоединенных к диску элементов ротора. Например, ограничение толщин диска в диапазоне трех фиксированных сечений, связанное с размещением в отведенном пространстве, имеет вид

$$h(r) \geq \varepsilon \quad \forall r \in [r_{i-1}, r_{i+1}]. \quad (7.4)$$

Технические ограничения могут быть заданы в виде минимально допустимой толщины диска $h(r) \geq h_{\min}$, связанной с возможностями изготовления, необходимостью выполнения радиусов в местах резкого изменения толщин (переходов от полотна к ободу диска или от полотна к ступице).

Ограничения на параметры состояния задаются в виде неравенств и носят неявный характер.

Обычно диск проектируют таким образом, чтобы запасы прочности, существенные для данной конструкции, удовлетворяли определенным требованиям (см. гл. 4).

Ограничения на параметры состояния будут в этом случае иметь следующий вид [см. (4.1)]:

$$F_p = k_{pN} - k_p \leq 0. \quad (7.5)$$

Как и в (4.1), индексом N обозначена допустимая величина запаса по рассматриваемому параметру.

Если необходимо ввести ограничения на запасы по напряжениям в соответствии с (4.2), полагаем

$$F_\sigma = k_{\sigma N} - k_\sigma \leq 0; \quad (7.6)$$

ограничения на запас по деформативности на наружном радиусе диска

$$F_u = u_{bN} - u_b \leq 0; \quad (7.7)$$

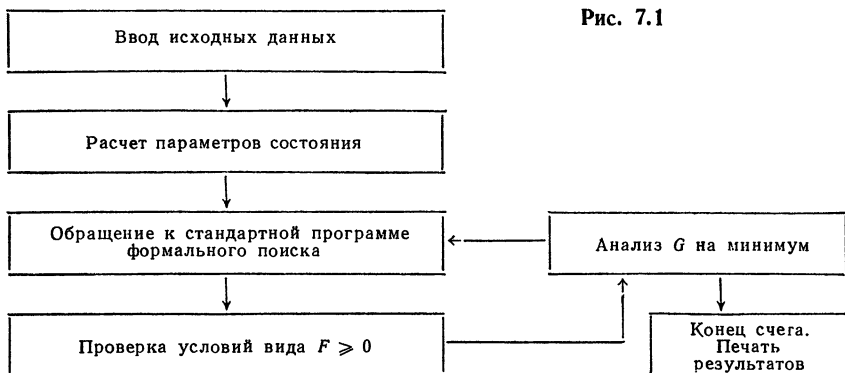
запас по несущей способности

$$F_b = k_{bN} - k_b \leq 0. \quad (7.8)$$

Аналогично вводятся ограничения и по другим параметрам, в частности по долговечности, динамическим характеристикам и т. п.

На рис. 7.1 показана общая структурная схема программы оптимального проектирования диска. Содержание каждого из блоков зависит от целей и уровня проектирования. В работе [35] рассмотрено профилирование симметричного диска минимальной

Рис. 7.1



массы при расчете на прочность с учетом растягивающих нагрузок, которое производится обычно на первоначальных этапах проектирования турбомашин. В этом случае исходной вводимой информацией служат сведения о материале диска — кривые деформирования, физические константы, характеристики прочности. При проектировании, особенно на предварительных уровнях, удобно использовать универсальные зависимости типа Ларсена — Миллера для оценки длительной прочности и формулу Мэнсона для оценки долговечности (см. гл. 4). Задается поле температур в диске как функция радиусов $T(r)$, сетка сечений или фиксированных значений радиусов и ограничения. Начальный профиль меридионального сечения в виде зависимости $h(r)$ является исходной точкой поиска и может быть задан заранее или строиться из определенных соображений. Блок «оптимизация» фактически состоит из процедуры поиска минимума целевой функции, основанной на одном из методов или комбинации методов математического программирования. Применение метода формального поиска демонстрировалось в работе [35].

Метод использован для нахождения оптимального распределения толщины $h(r)$, удовлетворяющего минимуму массы диска $G(r)$. Процедура поиска проекта минимальной массы с помощью метода формального (прямого) поиска [126] состоит в следующем: фиксируется начальное распределение толщины $h(r)$ и соответствующее значение целевой функции $G(h)$, удовлетворяющей ограничениям. Одному из независимых параметров $h(r_i)$ сообщается начальное приращение, равное заданному начальному шагу Δh . При возрастании $G(h)$ этому параметру сообщается приращение — Δh_i . Также варьируются и другие параметры $h(r)$ с проведением анализа изменения целевой функции, после чего делаются шаги сразу по всем координатам с направлениями, соответствующими удачным пробам. Следующие шаги делаются в тех же направлениях, пока не будет получено $G_{v+1}(h) > G_v(h)$, где v — номер шага. Последнее положение фиксируется, и начинается новое по координатам ощупывание — выбирается

новое направление спуска. Если вариации по всем направлениям приводят только к увеличению $G(h)$, начальный шаг дробится и пробы повторяются в том же порядке. Предварительно перед каждой пробой проводится проверка ограничений. Если граничные условия не удовлетворяются, проба считается неудачной и анализ целевой функции на минимум не производится. Процесс заканчивается при достижении начальными шагами поиска заданных конечных значений $\Delta h_{\text{кон}}(r) = \delta_{\text{кон}}(r)$. Метод формального поиска достаточно надежен, но требует большого числа проб для получения решения с заданной точностью. При упрощенных расчетах с редкой сеткой, т. е. при уменьшении числа варьируемых параметров, метод достаточно эффективен.

Вычисление переменных состояния и проверка заданных ограничений реализуются в блоке «расчет параметров состояния». При рассмотрении растяжения диска в этом блоке размещается программа расчета, приведенная вместе с описанием в приложении 1. Алгоритм упругого расчета, на основе которого составлена эта программа, изложен в § 4 гл. 1, упругопластический расчет в § 8 гл. 3 и определение запасов прочности — в § 11 и 12 гл. 4.

Современные ЭВМ позволяют использовать внешние устройства типа графопостроителей и дисплеев для анализа результатов проектирования и осуществления обратной связи.

Пример 7.1. На рис. 7.2 сплошной линией показан начальный профиль диска газовой турбины. Начальная масса диска 22,2 кг. Рабочая частота вращения диска 11 000 об/мин. Нагрузка на контуре от лопаток $\sigma_{rb} = 3,96$ кгс/мм². Диск неравномерно нагрет по радиусу, температура ступичной части $T_a = 520^\circ\text{C}$, температура обода $T_{об} = 600^\circ\text{C}$. Материал диска — сплав ХН73МБТЮ-ВД. Запасы прочности определяют исходя из длительности расчетного режима 50 ч. Отношение радиуса центрального отверстия к наружному радиусу диска $r_a/r_b = 0,248$. На рис. 7.2, а густота сетки разбиения меридионального сечения диска на расчетные сечения показана линиями, параллельными оси вращения (принято 16 расчетных сечений).

Соответствующие радиусам расчетных сечений толщины являются варьируемыми или параметрами управления. Ограничения на параметры состояния в виде заданных запасов прочности приняты равными $k_{b1N} = k_{b2N} = k_{\sigma rN} = k_{\sigma\theta N} = 1,3$, где k_{b1} , k_{b2} — запасы по разрушающей частоте вращения, определенные по формулам гл. 4 § 12; $k_{\sigma rN}$, $k_{\sigma\theta N}$ — запасы по радиальным и окружным напряжениям соответственно (см. гл. 4 § 11).

Начальные шаги поиска $\Delta h_{\text{нач}}(r)$ выбирают произвольно (от десятых долей сантиметра в ступице и полотно и до сотых долей в области шейки). Значения $\delta_{\text{кон}}(r)$ выбирают из условия целесообразной длительности счета и приемлимой гладкости контуров. Введение на последних двух радиусах нулевых значений для $\delta_{\text{кон}}$ является конструктивным ограничением, т. е. толщины профиля на этих радиусах в проекте должны совпадать с заданными в исходном варианте.

Масса диска, полученного в результате машинного профилирования, 7,48 кг. На рис. 7.2, б показано распределение радиальных и окружных напряжений в проекте диска. Счет прекращен при выполнении 500 удачных шагов. Запасы прочности окончательного варианта проекта $k_{b1} = 1,32$, $k_{b2} = 1,48$, $k_{\sigma r} = 2,05$, $k_{\sigma\theta} = 1,3$. Полученный проект удовлетворяет заданным граничным условиям, наложенным на конструкцию и напряженность. В этом примере недостаточно удачно выбрана начальная точка проектирования, что потребовало большого количества шагов.

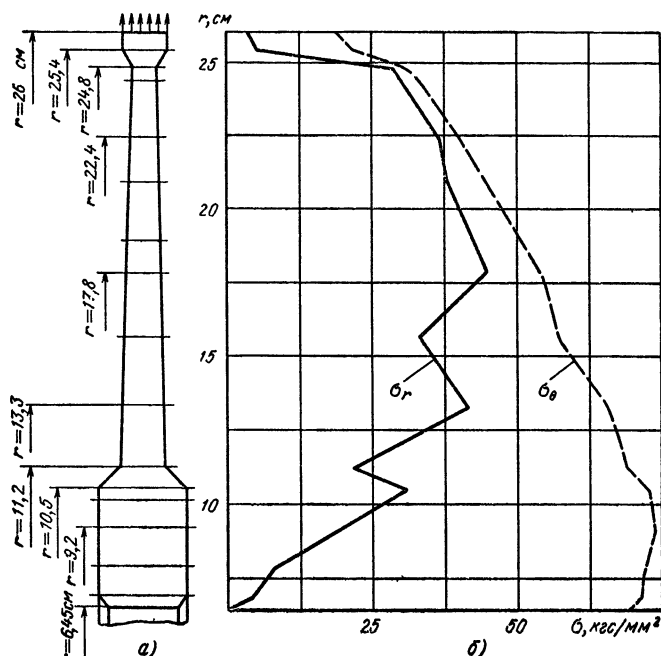


Рис. 7.2

Пример 7.2. Рассмотрим пример проектирования диска газовой турбины из сплава ХН77ТЮР. Задаваемые параметры нагрузки для наиболее тяжелого режима работы диска составляют: частота вращения 11 620 об/мин, напряжения на наружном контуре от лопаток $\sigma_{rb} = 15,13 \text{ кгс/мм}^2$, температуры $T_b = 662^\circ \text{C}$, $T_a = 456 \text{ C}$.

В табл. 7.1 приведены табличные значения кривых деформирования и изохронных кривых ползучести, соответствующие длительности работы диска на наиболее тяжелом режиме 300 ч. Запасы прочности проекта диска на этом режиме должны удовлетворять следующим требованиям: запас по радиальным напряжениям $k_{\sigma r N} = 1,3$; запас по окружным напряжениям $k_{\sigma \theta N} = 1,2$; запасы по разрушающей частоте вращения при оценке по предельному состоянию с учетом возможного разрушения при исчерпании длительной прочности $k_{b1 N} = 1,2$, $k_{b2 N} = 1,3$.

Начальная конфигурация сечения диска показана на рис. 7.3, а сплошными линиями; распределение напряжений при заданной нагрузке приведено на рис. 7.3, б также сплошными линиями. Профиль проекта диска, полученный программой при расчете напряжений, с учетом пластических деформаций, изображен штрихпунктирной линией. Запасы прочности и масса диска в проекте I даны в табл. 7.2. Диск минимальной массы получен при выполнении всех ограничений по запасам прочности, причем решение лежит на границах по k_{b1} , k_{b2} и $k_{\sigma \theta}$. Учет ползучести вносит поправку в проект (проект II, штриховые линии). Перераспределение напряжений, связанное с ползучестью, приводит

7.1. Напряжения по значениям кривых деформирования и изохронных кривых ползучести, кгс/мм²

$\varepsilon, \%$	Кривые деформирования			Изохронные кривые ползучести		
	при температуре, $T, ^\circ\text{C}$					
	20	600	700	20	600	700
0,18	36	30,7	27,9	36,0	24,8	24,8
0,22	43,9	37,5	34,1	43,9	30,8	27,8
0,26	50,8	44,1	39,95	50,8	36,0	30,0
0,30	56,2	49,3	44,95	56,2	42,0	31,6
0,34	60,0	52,95	49,1	60,0	46,2	33,2
0,38	62,6	55,25	52,5	62,6	51,0	34,4
0,42	64,4	56,8	55,0	64,4	57,6	35,6
0,48	66,0	58,55	57,15	66,0	59,2	37,6
0,54	67,0	59,6	58,35	67,0	60,2	39,2
0,60	67,6	60,3	59,5	67,6	60,6	41,0
1,00	68,5	62,0	60,0	68,5	61,4	46,0

к росту окружных напряжений в ступице и к необходимости увеличения массы при сохранении тех же ограничений. В табл. 7.2 приведены также перемещения на ободе диска в проектах I и II

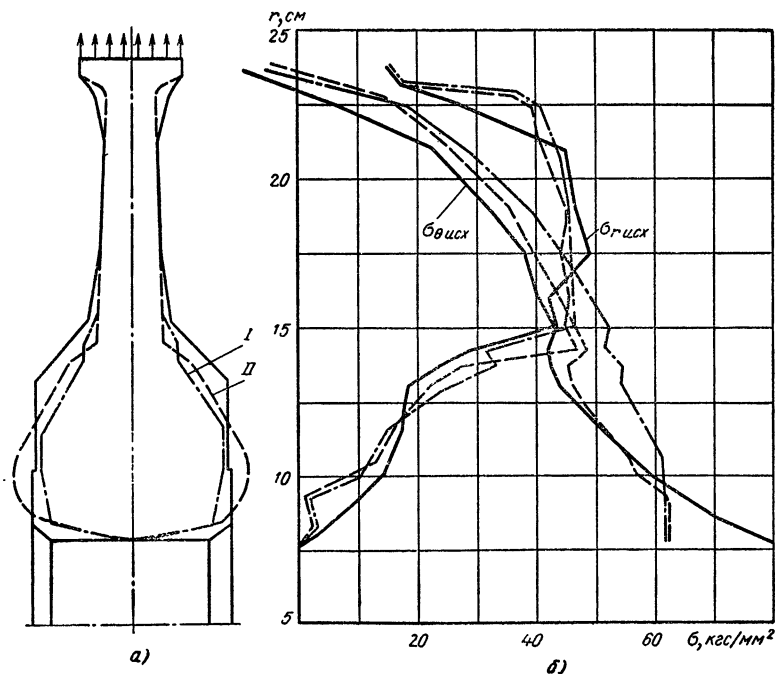


Рис 7.3

7.2. Массы и запасы прочности проектов дисков
при расчете напряжений без учета (I) и с учетом (II) ползучести

Параметр	Заданная величина	I (учет пластичности)	II (учет пластичности и ползучести)
G , кг	—	38,8	41,8
k_{b1}	1,2	1,2	1,24
k_{b2}	1,3	1,3	1,3
k_{m1}	1,3	1,52	1,52
k_{m0}	1,2	1,2	1,2
u_b , см	—	0,0228	0,0231

соответственно. Различие этих величин указывает на необходимость учета ограничений по деформативности при проектировании диска, работающего в условиях ползучести. Для симметричного диска без центрального отверстия равнопрочный проект совпадает с проектом минимальной массы. В следующем примере показано такое решение.

Пример 7.3. На рис. 7.4, *a* штриховой линией дана форма диска минимальной массы, сплошной линией — начальная конфигурация. Основные расчетные параметры: $\sigma_{rb} = 13,8$ кгс/мм², $n = 16\,500$ об/мин, $T(r) = 200^\circ = \text{const}$. Толщина обода остается постоянной (конструктивное ограничение). На рис. 7.8, *b* показаны напряжения в диске в проекте. Полученное решение достижения минимальной массы при условии равенства запасов прочности во всех сечениях полотна ($k_{\sigma rN} = k_{\sigma \theta N}$) совпадает с аналитическим, полученным по формуле (7.1), если вместо заданного напряжения σ подставить постоянные напряжения, полученные в полотно диска при машинном проектировании. Максимальное различие толщин составляет 4,5% по радиусу внутреннего отверстия. Принимают $k_{\sigma rN} = k_{\sigma \theta N} = 1,5$. Некоторые сравнения с имеющимися аналитическими решениями можно найти в работе [35].

Кроме описанного выше метода формального поиска, использовали и другие методы оптимизации с целью выбора наиболее приемлемого метода математического программирования для решения рассматриваемой задачи (см. [34]). Был рассмотрен метод вращающихся координат [108], являющийся удачной модификацией метода покоординатного спуска, метод случайного поиска и сочетание этих методов, процедуры которых содержатся в библиотеках стандартных программ ЭВМ. Если формальный поиск и процедура вращающихся координат позволяют производить оптимизацию в ограниченной области, то для учета ограничений в методе случайного поиска приходится использовать штрафные функции. Минимизируемый функционал будет иметь следующий вид:

$$G^*(h) = G(h) + \sum_{j=1}^k \lambda_j F_j(h), \quad (7.9)$$

где k — число ограничений; λ_j — весовые коэффициенты. Метод вращающихся координат с рациональным выбором направления покоординатного спуска (от обода к центру, а не наоборот) убы-

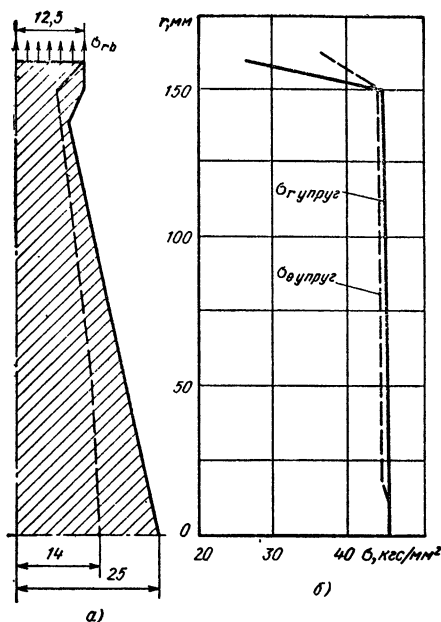


Рис. 7.4

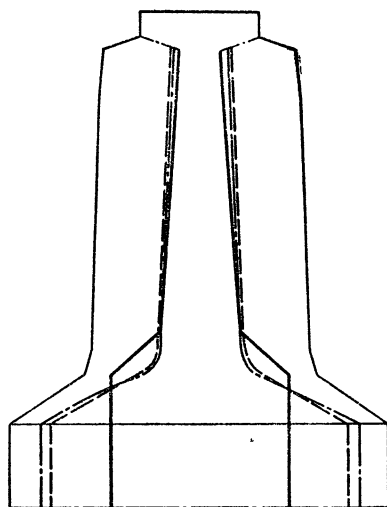


Рис. 7.5

стряет время счета. Метод случайного поиска вызывает некоторые затруднения в практической реализации в связи со сложностью подбора весовых коэффициентов λ_j для учета ограничений различного характера. Практический интерес представляют различные способы сокращения времени счета. Е. Ф. Королева предложила уменьшать число варьируемых параметров, производя замену дискретного управления $h(r)$ суммой аппроксимирующих функций.

Пример 7.4. Пример проектирования диска с центральным отверстием показан на рис. 7.5. Расчетные параметры: частота вращения 24 000 об/мин, напряжения от лопаток $\sigma_{rb} = 14,55$ кгс/мм², материал диска — титановый сплав ВТЗ-1, температура $T(r) = 20^\circ \text{C} = \text{const}$. Заданные ограничения: конструктивные — неизменяемая форма обода; по запасам прочности: $k_{b1N} = k_{b2N} = 1,4$, $k_{\sigma r N} = k_{\sigma \theta N} = 1,3$. Сплошной тонкой линией на рис. 7.5 показан произвольно выбранный исходный диск. Штрихпунктирной и штриховой линиями обозначен диск в проектах, полученных при использовании процедур формального поиска и вращающихся координат соответственно с заменой функции управления степенным полиномом.

Аналогичную оптимизацию проводили при использовании процедуры вращающихся координат с обычными параметрами управления и сохранения того же числа сечений (16 сечений) при расчете напряжений. Время поиска оптимального решения возросло практически вдвое (проект показан сплошной утолщенной линией).

§ 20. Практические примеры

Выбор оптимального первоначального искривления (упругой линии меридиана) диска для уменьшения изгибных напряжений. Восстанавливающий эффект центробежных сил для тонких дисков

влияет на напряжения изгиба. Поэтому можно так подобрать первоначальный изгиб диска, чтобы момент от совместного действия осевых сил и восстанавливающего эффекта был минимальным. Напряжения изгиба зависят не только от первоначального искривления и осевых нагрузок, но и от неравномерного нагрева диска по радиусу и толщине. Оптимальный выбор угла подъема срединной поверхности (первоначального искривления без учета деформации) осуществляется с помощью тех же методов оптимизации [28]. В качестве минимизируемого функционала — функции цели можно принять

$$G_{\min}(l) = \int_a^b |M_s(r)| dr, \quad (7.10)$$

где $M_s(r)$ — момент в цилиндрическом сечении на единицу длины окружности (см. гл. 2), $l = l(r)$ — расстояния от произвольной плоскости до одной из сторон диска на соответствующих радиусах r_i . Функция $l(r)$ представляют собой управление.

Для удобства вместо углов наклона срединной поверхности на соответствующих радиусах варьируются расстояния $l(r)$, а в программе уже по их значениям определяют углы при учете неравномерного нагрева по толщине диска.

Для расчета диска на прочность используют систему нелинейных интегральных уравнений (2.77) и (2.84). Расчет на прочность проводят на каждом шаге оптимизации (см. гл. 2 § 6). В большинстве случаев для учета восстанавливающего эффекта сил растяжения при оптимизации упругой линии меридиана диска достаточно использовать первое квазилинейное решение уравнений оболочек в больших прогибах. Ниже дан один из примеров оптимизации при изгибе.

Пример 7.5. Для диска турбины (рис. 7.6, б) подбирали первоначальный вынос (смещение) обода для уменьшения его осевого перемещения в результате деформации. На диск действуют равномерно распределенная осевая нагрузка (рис. 7.6, а) и момент на ободе; диск неравномерно нагрет по толщине (рис. 7.6, в). С помощью выноса обода удалось существенно уменьшить изгибающие нагрузки и осевое перемещение ободной части во время работы (сплошной линией даны прогибы диска без смещения обода, штриховой — прогибы при оптимальном смещении; рис. 7.6, г). В диске из-за конструктивных особенностей можно было варьировать только вынос обода диска. Получение диска минимальной массы при оптимальном угле подъема срединной линии (меридиана) профиля достигается путем последовательных расчетов. Может быть использован также метод штрафных функций.

Связь рабочих параметров с прочностью и массой диска. Минимально допустимые запасы прочности дисков в турбомашинах различного применения назначают исходя из некоторых соображений, которые рассмотрены в гл. 4. Соотношения между различными ограничениями не всегда бывают достаточно обоснованными. В частности, легко предположить, что при большом заданном запасе по несущей способности и меньшем допустимом запасе по напряжениям конструкция диска, удовлетворяющая первому

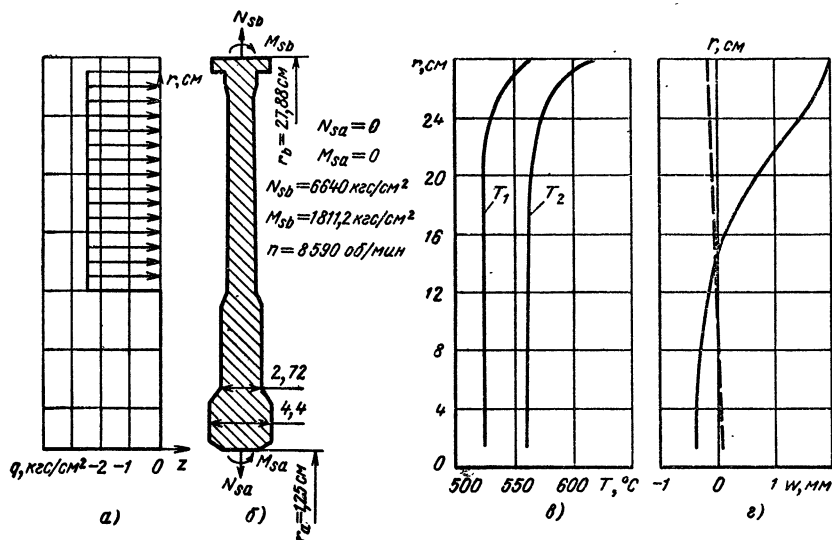


Рис. 7.6

требованию, заведомо будет удовлетворять второму и не нуждается в дополнительной проверке. Если предположить, что все рассматриваемые конструкции дисков с различными ограничениями на запасы прочности, заложенными при проектировании, оптимальны (по массе или по расходу материала), то соответствующий анализ масс дисков и фактических запасов дает возможность усмотреть некоторые общие закономерности. Во всех случаях учитывают минимальные запасы для рассматриваемой конструкции. На рис. 7.7, а показано меридиональное сечение диска турбины, выбранного для проведения такого анализа. Материал диска — жаропрочный никелевый сплав; отношение $\frac{\rho u^2}{\sigma_{rb}} = 5,69$ (u — окружная скорость на внешнем радиусе диска),

отношение $\bar{a} = \frac{a}{b} = 0,304$. Исследуемые варианты проектов представлены в табл. 7.3.

На рис. 7.7, б даны эпюры радиальных и окружных напряжений в диске (варианты 10—12); соответствующий проект показан штриховой линией. На рис. 7.8 показаны эпюры напряжений для проектов 1—3. Варианты 10—12 подтверждают предположение о том, что при задании большого требуемого запаса по разрушающей частоте вращения (здесь $k_{b1N} = 1,3$, $k_{b2N} = 1,25$) по сравнению с запасами по напряжениям ($k_{\sigma r} = 1,4 \div 1,1$, $k_{\sigma \theta} = 1,4 \div 1,1$) на результаты проектирования влияют только первые два ограничения. Все полученные решения при различных величинах $k_{\sigma r, N}$ и $k_{\sigma \theta, N}$ одинаковы; фактические запасы по напряжениям в оптимальном проекте получились большими: $k_{\sigma r} = 1,43$, $k_{\sigma \theta} = 1,44$.

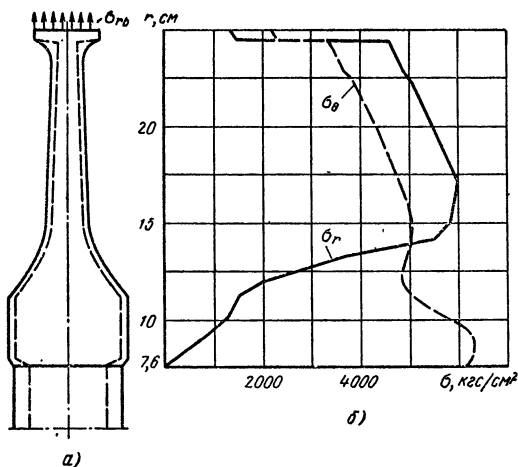


Рис. 7.7

На рис. 7.9 по данным табл. 7.3 построены следы поиска на границах параметров состояния (запасов прочности). По оси ординат отложена масса спроектированных дисков и шкала запасов по напряжениям, по оси абсцисс — шкала запаса k_b . Рис. 7.9, а построен при $k_{b1} = k_{b1N} = 1,3$ для всех вариантов. При уменьшении k_{b2N} до 1,25 величины k_{b1N} и k_{b2N} определяют вид проекта; с дальнейшим уменьшением k_{b2N} при анализируемых соотношениях оптимальное решение будет определяться запасами $k_{\sigma r N}$ и k_{b1N} , что показано утолщенной линией со стрелками. Точки на рис. 7.9 соответствуют расчетным вариантам.

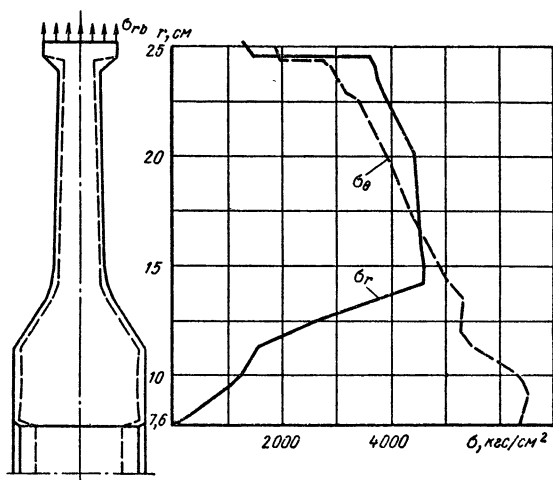


Рис. 7.8

7.3. Массы и запасы прочности проектов диска минимальной массы при различных ограничениях

№ варианта	Ограничения в программе				Фактические запасы проектов				Масса
	$k_{\sigma r N}$	$k_{\sigma \theta N}$	$k_{b1 N}$	$k_{b2 N}$	$k_{\sigma r}$	$k_{\sigma \theta}$	k_{b1}	k_{b2}	G , кг
1	1,4	1,4	1,3	1,4	1,88	1,41	1,3	1,4	35,28
2	1,25	1,25	1,3	1,4	1,88	1,41	1,3	1,4	35,28
3	1,1	1,1	1,3	1,4	1,88	1,41	1,3	1,4	35,28
4	1,4	1,4	1,2	1,4	1,8965	1,4	1,282	1,4	34,19
5	1,25	1,25	1,2	1,4	1,892	1,433	1,200	1,41	30,7
6	1,1	1,1	1,2	1,4	1,892	1,4326	1,200	1,4102	30,7
7	1,4	1,4	1,1	1,4	1,986	1,400	1,282	1,40	34,19
8	1,25	1,25	1,1	1,4	1,892	1,433	1,179	1,410	29,75
9	1,1	1,1	1,1	1,4	1,892	1,4326	1,169	1,4102	29,85
10	1,4	1,4	1,3	1,25	1,436	1,443	1,3	1,25	30,99
11	1,25	1,25	1,3	1,25	1,436	1,443	1,3	1,25	30,99
12	1,1	1,1	1,3	1,25	1,436	1,443	1,3	1,25	30,99
13	1,4	1,4	1,2	1,25	1,892	1,4325	1,249	1,4102	28,31
14	1,4	1,4	1,3	1,1	1,4	1,4459	1,3	1,2	30,405
15	1,25	1,25	1,3	1,1	1,892	1,433	1,3	1,41	29,142
16	1,3	1,3	1,3	1,3	1,55	1,43	1,3	1,3	32,24
17	1,3	1,3	1,3	1,25	1,44	1,44	1,3	1,25	30,98
18	1,3	1,3	1,35	—	1,3	1,51	1,35	1,46	31,67
19	1,4	1,4	1,25	1,2	1,4	1,40	1,25	1,202	27,65
20	1,4	1,4	1,25	—	1,4	1,41	1,25	1,47	27,47
21	1,4	1,4	1,35	—	1,4	1,5	1,35	1,51	32,60

На рис. 7.9, б аналогичные зависимости даны при условии $k_{b2} = k_{b2N} = 1,4 = \text{const}$. В этом случае до значения $k_{b1} = k_{b1N} = 1,29$ «активными» для проектирования являются ограничения k_{b1} и k_{b2} . При $k_{b2} = 1,26 \div 1,29$ оптимальный проект определяется

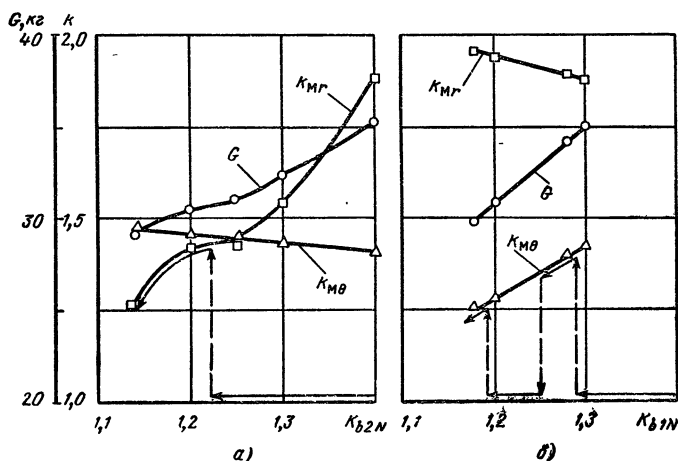


Рис. 7.9

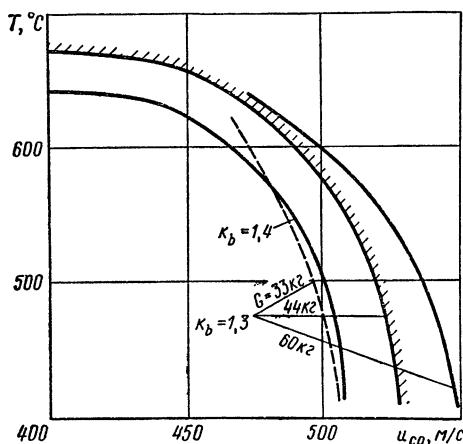


Рис 7.10

запасами k_{b2} и $k_{с0}$; при $k_{b1N} = 1,19 \div 1,16$ «активными» опять становятся запасы k_{b1} и k_{b2} . Как показали многочисленные расчеты, проведенные для различных параметров, закономерности являются общими и не зависят от размерности диска, материала и относительной нагруженности. Таким образом, если в конструкции повышенные требования предъявляются к несущей способности, то диск оптимальной конфигурации можно спроектировать,

пользуясь только расчетом запасов по несущей способности, что значительно проще и экономит время счета. Назначение регламентируемых запасов прочности также должно определяться целесообразностью соотношений их величин. Находя оптимальные решения по массе для различных рабочих параметров ступени, можно провести параметрическое исследование и получить предельные границы проектирования. На рис. 7.10 показаны зависимости окружной скорости на среднем радиусе лопатки осевой газовой турбины от температуры обода диска. Линии показывают, что при низкой температуре повышение окружной скорости может быть достигнуто некоторым усилением диска, увеличивающим его массу. Однако для каждого материала существует определенный температурный предел, когда усиление не позволяет спроектировать диск с заданными запасами прочности. Существует предельная окружная скорость, которую не удастся превысить при дальнейшем снижении температуры. Каждая точка кривой соответствует диску минимальной массы, спроектированному для заданных параметров (запасов прочности, окружной скорости, температуры и др.). Хотя результаты таких исследований представляются очевидными, автоматизация их получения с помощью программы и оптимальность каждого решения позволяют получить количественные оценки, что важно для практики,

§ 21. Оптимальное проектирование дисков с учетом требований к частоте собственных колебаний.

Если при проектировании дисков руководствоваться только обеспечением статической прочности, то, минимизируя массу (или расход материала), можно получить достаточно тонкие диски

с утоненными подобными сечениями. Утонение дисков приводит к изменению динамических характеристик — форм и частот собственных колебаний¹. Следствием является также изменение динамических характеристик связанной системы ротора.

В диске, спроектированном на основании только обеспечения статической прочности, экспериментально обнаруживаются высокие переменные напряжения или возникают усталостные дефекты. В этих случаях производят перепрофилирование дисков для уменьшения напряжений.

На стадии проектирования турбомашин возбуждающие силы, действующие на ротор, неизвестны, в связи с чем ограничения на такие параметры, как переменные напряжения или соответствующие запасы, обычно не включаются в рассмотрение. Однако имеющийся опыт по созданию и последующей работе аналогичных конструкций может служить информацией о наиболее опасных диапазонах собственных частот колебаний ротора или проектируемой ступени. В этом случае ограничения могут быть косвенными и накладываться на собственные частоты колебаний. В частности, по аналогии с ограничениями по запасам статической прочности, приведенными в § 19, может быть задано условие, чтобы частота вращения диска при колебаниях по данной форме не была ниже заданной. В роторах в основном встречаются связанные колебания систем, и, в частности, дисков с лопатками. В связи с этим при проектировании диска отстройку по частоте следует производить, учитывая этот фактор.

В предложенной ранее схеме расчет параметров состояния реализуется по принципу «черного ящика». Для рассмотрения принципиальных подходов не требуется полного усложнения расчета; поэтому ограничимся только расчетом частот изолированного диска.

Определение собственных частот колебаний диска. Задача расчета собственных частот колебаний диска подробно исследована в работах [6, 21, 42, 63]. Используем вариационный метод, который является продолжением рассмотрения общего случая изгиба диска в гл. 2 § 7. Потенциальная энергия деформации изгиба Π дана в (2.175) и (2.176). Выражения для потенциалов поперечной нагрузки и сил на контурах (силовые функции T_1 и T_2 , $T = T_1 + T_2$) (2.178) и (2.179)—(2.181). При гармонических колебаниях диска прогиб $w(r, \theta, t) = w(r) \cos n\theta \cos pt$, где n — число узловых диаметров; p — угловая частота колебаний.

Поперечная инерционная нагрузка на поверхность диска при колебаниях

$$q(r, \theta, t) = -\rho p^2 h w(r) \cos n\theta; \quad (7.11)$$

¹ Динамическая прочность дисков подробно изложена в работах [6, 21, 42, 63, 103 и др.].

потенциал инерционных сил по (2.178)

$$T_1 = \frac{\pi}{2} \rho p \int_a^b \omega^2(r) r h dr \quad (n \gg 1); \quad (7.12)$$

$$T_1 = \pi \rho p^2 \int_a^b \omega^2(r) r h dr \quad (n = 0).$$

При учете лопаток на ободе диска следует рассмотреть потенциал внешних сил T_2 . Вариационное уравнение несимметричного изгиба диска имеет вид (2.182)

$$\delta [I - T] = 0. \quad (7.13)$$

Обычный метод вариационного исчисления, при котором решается задача минимизации функционала (7.13), сводится к интегрированию дифференциальных уравнений Эйлера, как показано в гл. 2 § 7.

Большое распространение получили прямые методы и, в частности, метод Рунге [7]. Решение представляется в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i. \quad (7.14)$$

Здесь a_i — неизвестные коэффициенты; φ_i — координатные функции.

Координатные функции должны [7] удовлетворять кинематическим условиям закрепления диска, быть линейно независимыми, и система их должна обладать полнотой. Для обеспечения устойчивости решения и упрощения программирования в качестве φ_i удобно принимать ортогональные полиномы, причем, выбирая нужную степень полинома, их легко подчинить граничным условиям закрепления: $\omega = \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$ — при жестком закреплении; $\omega'' = 0$ — на свободном контуре.

Для удобства вычисления заменим координаты по радиусу, приняв вместо отрезка $[r = a, r = b]$ отрезок $[x = 0, x = 1]$. Например, при жестком закреплении $x = 0$ выбирают систему x^2, x^3 функций $f_i(x)$. Из такой системы линейно-независимых функций известными методами [12] получаем систему ортогональных полиномов φ_i . После подстановки (7.14) в (7.13) получим систему однородных уравнений из условия

$$\frac{\partial (I - T)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (7.15)$$

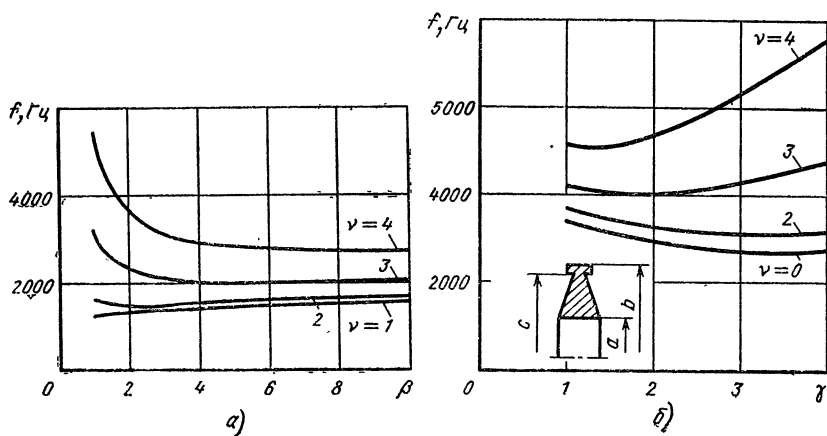


Рис. 7.11

Во вращающемся диске существен учет влияния сил растяжения в его плоскости на частоту колебаний. Работа центробежных сил в срединной плоскости диска

$$T_{1\omega} = \int_a^b \int_0^{2\pi} (\sigma_r \varepsilon_r^* + \sigma_\theta \varepsilon_\theta^*) h r d\theta dr, \quad (7.16)$$

где деформации в срединной плоскости из-за ее изгиба

$$\varepsilon_r^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2; \quad \varepsilon_\theta^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{r d\theta} \right)^2. \quad (7.17)$$

Если учесть, что амплитудный прогиб $w(r, \theta) = w(r) \cos n\theta$, то из (7.16)

$$T_{1\omega} = -\frac{\pi}{2} \int_a^b \left[\sigma_r h r \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{n^2 \sigma_\theta h}{r} w^2(r) \right] dr \quad \text{при } n \geq 1. \quad (7.18)$$

Таким образом, центробежные силы можно учесть добавлением к силовой функции $T = T_1 + T_{1\omega}$. Расчеты по программе, составленной В. Я. Братчиком на основании вышеизложенного алгоритма, показывают влияние геометрических размеров диска на его собственные частоты. Изменение параметра может по-разному отражаться на частоте в зависимости от изменения другого геометрического параметра и формы колебаний.

На рис. 7.11, а показано изменение частоты собственных колебаний конического диска без учета центробежных сил в зависимости от кону-

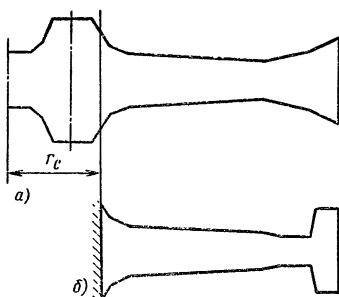


Рис. 7.12

сности, которая характеризуется отношением $\beta = \frac{h_a}{h_b}$ толщин в центральном отверстии и на периферии. Диск заделан по внутреннему контуру: отношение радиусов $\bar{d} = \frac{a}{b} = 0,2$.

При колебаниях, соответствующих формам с одним и двумя узловыми диаметрами ($n = 1, n = 2$), частота несколько возрастает с увеличением конусности; при большем числе диаметров частота резко уменьшается¹.

На рис. 7.11, б показано изменение частоты конического диска с ободом в зависимости от размеров обода γ , где $\gamma = \frac{h_b}{h_c}$; отношение $\bar{d} = \frac{a}{b} = 0,5$; $h_c = \text{const}$. Если при колебаниях по осесимметричной форме (без узловых диаметров $n = 0$) и при числе диаметров до $n = 2$ частота уменьшается с увеличением ширины обода, то для больших чисел частота растет.

На рис. 7.12, а представлено сечение диска турбины, спроектированного для заданных запасов статической прочности $k_{\sigma \min} = 1,7$; $k_{b \min} = 1,66$. Условия работы диска потребовали перепроектирования его с учетом резонансных ограничений на частоты колебаний диска; f_c не должна быть в диапазоне $220 \text{ Гц} \leq f_c \leq 240 \text{ Гц}$ при осесимметричной форме колебаний и при двух узловых диаметрах. Диск имеет болтовое соединение с другими деталями ротора и соответствующее утолщение в полоте по радиусу r_c . При статическом проектировании это обстоятельство учитывалось как конструктивное ограничение. При расчете на колебания предполагалось отсутствие осевых перемещений на радиусе крепления. Таким образом, профилированию при учете динамики в основном подвергали периферийную часть диска. Получившаяся в результате динамической оптимизации конфигурация диска показана на рис. 7.12, б. Некоторые аналогичные результаты по проектированию дисков с учетом частного ограничения можно найти в работе [41].

¹ На рис. 7.11 количество узловых диаметров обозначено ν .

Приложения

1. Программа упругопластического расчета диска на растяжение методом переменных параметров упругости

Описание программы. Программа составлена на основе формул для расчета дисков на растяжение (§ 4 гл. 1) и соотношений деформационных теорий пластичности и ползучести (§ 3 гл. 3). Для написания программы использован язык Алгол 60 применительно к ЭВМ БЭСМ-6 (транслятор системы БЭСМ—АЛГОЛ).

Программа состоит из девяти процедур. 1. Процедура интегрирования — *Procedure* INT (x, y). Здесь x — подынтегральное выражение и y — значение интеграла. 2. Процедура решения интегрального уравнения методом последовательных приближений — *procedure* FUNCTION (x, y). Здесь обозначено x — функция F_i ; y — решение Φ_i . 3. Процедура итерполяции свойств материала по фактическим температурам диска — *procedure* INTERPOLATION. 4. Процедура нахождения нового секущего модуля и коэффициента Пуассона при упругопластическом решении — *procedure* PLASTICITY. 5. Процедура нахождения граничных условий u_a и N_{ra} по известным силовым, кинематическим или смешанным граничным условиям — *procedure* граничные условия. Процедура по известным граничным условиям вычисляет неизвестные граничные условия N_{ra} или u_a по формулам § 4 гл. 1 по шести вариантам. В исходной информации задается условное число, которое определяет вид граничных условий. 6. Процедура вычисления запасов прочности и веса — *procedure* ЗАПАС. Процедура по формулам главы 4 вычисляет запасы местной статической прочности k_{M_r} , k_{M_θ} , запас по разрушающим оборотам k_{b_1} , и запас по цилиндрическому разрушению k_{b_2} . В той же процедуре выбираются минимальные запасы и соответ-

ствующий им радиус, вычисляется масса диска $G = 2\pi\gamma \int_a^b hrdr$. 7. Процедура печати исходной информации — *procedure* INFORMATION. 8. Процедура печати результатов расчета — *procedure* RESULTS. 9. Управляющая процедура расчета диска — *procedure* DISK.

Составление исходной информации. Для расчета необходимо составить исходную информацию, которая в программе имеет следующие обозначения: 1. n_1 — число разбиений по радиусу. 2. n_2 — число разбиений по кривой деформирования, включая ноль при упругопластическом расчете (при упругом расчете $n_2 = 0$). 3. n_3 — число табличных температур, при которых заданы характеристики материала α , $\sigma_{дл}$, E и кривые деформирования. 4. n_4 — число сосредоточенных нагрузок (если таковых нет, то $n_4 = 0$). 5. $l = 1 \dots 6$ — число, определяющее вид граничных условий, $l = 1$ — известны N_{ra} и N_{rb} , $l = 2$ — известны u_a и N_{rb} , $l = 3$ — известны u_a и u_b , $l = 4$ — известны N_{ra} и u_b , $l = 5$ — известно N_{rb} и $l = 6$ — известно u_b для дисков без отверстия. 6. γ , г/см³ — плотность материала. 7. n — частота вращения, об/мин. 8. δ — точность счета (0,0001). 9. u_a (см). 10. u_b (см). — граничные условия. Незвестные [граничные условия задаются нулями. 11. N_{ra} (кг/см). 12. N_{rb} (кг/см).

13. r (см) — радиусы расчетных сечений в количестве, равном $n1$. 14. h (см) — толщины диска на соответствующих радиусах. 15. T ($^{\circ}\text{C}$) — температуры диска на этих же радиусах. 16. $e1$ [$1:n3, 1:4$] — массив, в котором задаются табличные температуры e [$1, 1:n3$], охватывающие интервал температур нагрева диска, коэффициент линейного расширения (e [$2, 1:n3$]) — α ($1^{\circ}/\text{C}$) при заданных табличных температурах, предел длительной прочности (e [$3, 1:n3$]) — $\sigma_{\text{дл}}$ ($\text{кг}/\text{см}^2$) при этих же температурах, модуль Юнга (e [$4, 1:n3$]) — E ($\text{кг}/\text{см}^2$). 17. Если $n4 \neq 0$, то вводится массив сосредоточенных нагрузок $h1$ [$1:n4, 1:2$], где $h1$ [$1, 1:n4$] — радиусы, на которых заданы сосредоточенные нагрузки (эти радиусы должны совпадать с соответствующими текущими радиусами сечений массива; $r, n1$ [$2, 1:n4$] — радиальные сосредоточенные силы ($\text{кгс}/\text{см}$) на радиусах $h1$ [$1, 1:n4$]. Если проводится упругопластический расчет, то $n2 \neq 0$ и задаются еще следующие два массива. 18. e [$1:n2$] — деформации по кривой деформирования, включая ноль. 19. $e2$ [$1:n2, 1:n3$] — массив напряжений по кривым деформирования для всех $n3$ температур и $n2$ деформаций.

ALGOL—ГДР

1. 'BEGIN'
2. MB:
3. 'BEGIN' 'INTEGER' N1, N2, N3, N4; READ (N1, N2, N3, N4);
4. 'BEGIN' 'INTEGER' I, J, K, L; 'REAL' N, GAMMA, DELTA; UA, UB, NRA, NRB;
5. K1, K2, K3, K4, K5, K6, K7, K8, K9, K10, K11, K12, KMR, KMT, KB;
6. 'ARRAY' R, H, T, A, T1, F1, F2, FQ, FT, NR, NT, KB2, X1, B, EY, EP, SD, AT, MU, UR, S1, S2,
7. S3, S4, S5 [$1:N1$], E1 [$1:N3, 1:4$];
8. 'IF' N2 'NE' O 'THEN' 'BEGIN' K4 := N2; K5 := N3 'END' 'ELSE' K4 := K5 := 1;
9. 'IF' N4 'NE' O 'THEN' K3 := N4 'ELSE' K3 := 1;
10. 'BEGIN' 'ARRAY' E [$1:K4$], E2 [$1:K4, 1:K5$], H1 [$1:K3, 1:2$];
11. 'PROCEDURE' INT (X, Y);
12. 'ARRAY' X, Y; 'BEGIN' 'REAL' A, B; B := X [1]; Y [1] := 0;
13. 'FOR' I := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN' A := (R [I] - R [I - 1]) * (X [I] + B) * 0.5;
14. B := X [I]; Y [I] := Y [I - 1] + A 'END';
15. 'END' INT;
16. 'PROCEDURE' FUNCTION (X, Y);
17. 'ARRAY' X, Y; 'BEGIN' 'REAL' K1F, K2F; 'ARRAY' C1, C2 [$1:N1$]; K1F := DELTA * $\diamond$ - 3;
18. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' C1 [I] := Y [I] := X [I];
19. M1 := 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' C1 [I] : Y1 [I] * X1 [I] / A [I];
20. INT [C1, C1]; INT (C2, C2); K2F := 0;
21. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' C2 [I] := C2 [I] * B [I]; INT (C2, C2);
22. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN' C1 [I] := (MU [I] * C1 [I] + C2 [I]) / R [I];
23. Y [I] := Y [I] + C1 [I]; 'IF' ABS (C1 [I]) 'GT' K1F 'THEN' K2F := 1 'END';
24. 'IF' K2F 'NE' O 'THEN' 'GOTO' M1;
25. 'END' FUNCTION;
26. 'PROCEDURE' INTERPOLATION;
27. 'BEGIN'
28. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
29. 'FOR' J := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N3 'DO'
30. 'IF' T [I] 'LE' E1 [J, 1] 'THEN' 'BEGIN'
31. K6 := (E1 [J, 1] - T [I]) / (E1 [J, 1] - E1 [J - 1, 1]);
32. AT [I] := E1 [J, 2] - (E1 [J, 2] - E1 [J - 1, 2]) * K6;
33. SD [I] := E1 [J, 3] - (E1 [J, 3] - E1 [J - 1, 3]) * K6;
34. EY [I] := EP [I] := E1 [J, 4] - (E1 [J, 4] - E1 [J - 1, 4]) * K6;
35. 'GOTO' M1 'END';

```

35. 'PRINT' (48Н РАБОЧИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВЫХОДЯТ ЗА ПРЕДЕЛЫ
ТАБЛИЧНЫХ,
36. /7НТ РАБ. =, F5, 1, 2X, 8НТ ТАБЛ.=, F5, 1)"; T [I], E1 [J, 1];
37. STOP;
38. M1 : A [I] := ЕП [I]*H [I]/(1 - MU [I]** 2);
T1 [I] := AT [I]*(T [I] - 20) 'END';
39. 'END' INTERPOLATION;
40. 'PROCEDURE' PLASTICITY;
41. 'BEGIN'
42. 'REAL' Ж1, Ж2, Ж3, Ж4, Ж5, Ж6, Ж7, Ж8, Ж9, Ж10, Ж11;
43. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
44. S1 [I] := NR [I]/H [I]; S3 [I] := NT [I]/H [I];
45. S5 [I] := SQRT (S1 [I]*S1 [I] - S1 [I]*S3 [I] + S3 [I]*S3 [I]);
Ж1 := S5 [I]/ЕП [I];
46. 'IF' Ж1 'LE' 0.002 'THEN' 'BEGIN' Ж11 := ЕП [I]; 'GOTO' M1 'END';
47. 'FOR' J := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO'
'FOR' K := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N3 'DO'
48. 'IF' Ж1 'LE' E [J] 'AND' T [I] 'LE' E1 [K, 1] 'THEN' 'BEGIN'
49. Ж2 := E2 [J - 1, K - 1]; Ж3 := E2 [J, K - 1]; Ж4 := E2 [J - 1, K];
Ж5 := E2 [J, K];
50. Ж6 := (E [J] - Ж1)/(E [J] - E [J - 1]);
51. Ж7 := (E1 [K, 1] - T [I])/(E1 [K, 1] - E1 [K - 1, 1]);
Ж8 := Ж3 - (Ж3 - Ж2)*Ж6;
52. Ж9 := Ж5 - (Ж5 - Ж4)*Ж6; Ж10 := Ж9 + (Ж8 - Ж9)*Ж7;
53. 'GOTO' M2 'END';
54. 'PRINT' (31Н НЕХВАТАЕТ КРИВЫХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ,
55. /19Н ДЕФОРМАЦИЯ В ПРОЦ.=, 2PF6, 3, 11Н НА РАДИУСЕ,
OPF6.2)"; Ж1, R [I];
56. STOP;
57. M2 : Ж11 := Ж10/Ж1;
58. M1 : 'IF' ABS (ЕП [I] - Ж11) 'GT' ABS (DELTA*ЕП [I]) 'THEN'
59. 'BEGIN' K11 := 1; ЕП [I] := Ж11 'END'
60. MU [I] := 0.5*(1 - 0.4*ЕП [I]/EY [I];
A [I] := ЕП [I]*H [I]/(1 - MU [I]**2) 'END';
61. 'END' PLASTICITY;
62. «PROCEDURE' BOUNDARY;
63. 'BEGIN'
64. 'REAL' Ж1, Ж2, Ж3, Ж4, Ж5; 'SWITCH' D1 := D11, D12, D13, D14,
D15, D16;
65. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
66. S1 [I] := X1 [I]/A [I]; S2 [I] := F1 [I]*S1 [I]; S3 [I] := F2 [I]*S1 [I];
67. S4 [I] := FQ [I]*S1 [I]; S5 [I] := FT [I]*S1 [I];
68. S1 [I] := T1 [I]*X1 [I]*(1 + MU [I]) 'END';
69. INT (S1, S1); INT (S2, S2); INT (S3, S3); INT (S4, S4); INT (S5, S5);
70. Ж1 := S2 [N1]; Ж2 := S3 [N1]; Ж3 := S4 [N1]; Ж4 := S5 [N1];
Ж5 := S1 [N1];
71. 'GOTO' D1 [L];
72. D11 : K12 := -FT [N1]/F1 [N1];
73. UA := (NRB - NRA*F2 [N1] - FQ [N1])/F1 [N1] + K12;
'GOTO' M1;
74. D12 : K12 := -FT [N1]/F2 [N1];
75. NRA := (NRB - UA*F1 [N1] - FQ [N1])/F2 [N1] + K12;
'GOTO' M1;
76. D13 : K12 := (R [N1]*T1 [N1]*X1 [N1] - Ж4 - Ж5)/Ж2;
77. NRA := (UB*X1 [N1] - UA*Ж1 + 1) - Ж3)/Ж2 + K12;
'GOTO' M1;
78. D14 : K12 := -(Ж4 + Ж5)/(Ж1 + 1);
79. UA := (UB*X1 [N1] - NRA*Ж2 - Ж3)/(Ж1 + 1) + K12;
'GOTO' M1;
80. D15 : K12 := -(FT [N1] + R [I] T1 [I]*F1 [N1])/

```

81. $(R [1]*F1 [N1]/(A [1]*(1 + MU [1])) + F2 [N1]);$
 82. $NRA := (NRB - FQ [N1])/(R [1]*F1 [N1]/(A [1]*(1 + MU [1]))$
 $+ F2 [N1] + K12; 'GOTO' M2;$
 83. $D16 : K12 := (R [1]*T1 [1]*X1 [N1] - \mathbb{K}4 - \mathbb{K}5 - R [1]*T1 [1]*$
 $(\mathbb{K}1 + 1))/$
 84. $(R [1]*(\mathbb{K}1 + 1)/(A [1]*(1 + MU [1])) + \mathbb{K}2);$
 85. $NRA := (UB*X1 [N1] - \mathbb{K}3)/(R [1]*(\mathbb{K}1 + 1)/(A [1]*(1 + MU [1])) +$
 $+ \mathbb{K}2) + K12;$
 86. $M2 : UA := R [1]*(NRA/(A [1]*(1 + MU [1])) + T1 [1]);$
 87. $M1 : 'END' BOUNDARY;$
 88. «PROCEDURE» ЗАПАС;
 89. «BEGIN»
 90. «ARRAY» C1, C2, C3 [1 : N1];
 91. «FOR» I := 1 «STEP» 1 «UNTIL» N1 «DO» «BEGIN»
 92. $C [I] := SD [I]*H [I]; C2 [I] := R [I]*H [I]; C3 [I] := C2 [I]*R [I]; 'END';$
 93. $INT (C1, C1); INT (C2, C2); INT (C3, C3); KB := K8 := K2*C3 [N1] +$
 $ABS (NR [N1])*R [N1];$
 94. «IF» $KB = 0$ «THEN» $KB := 10$ «ELSE» $KB := \sqrt{C1 [N1]/KB};$
 95. $K10 := 6.28319*\Gamma *C2 [N1]* \diamond - 3;$
 96. «IF» $K8 = 0$ «THEN» $KB2 [N1] := 10$ «ELSE»
 97. $KB2 [N1] := \sqrt{((C1 [N1] + SD [N1]*H [N1])*R [N1]/K8);}$
 $K8 := KB2 [N1]; K9 := R [N1];$
 98. «FOR» I := 1 «STEP» 1 «UNTIL» N1 - 1 «DO» «BEGIN»
 99. «IF» $I = 1$ «THEN» $KB2 [I] := KB$ «ELSE»
 100. $KB2 [I] := \sqrt{(C1 [N1] - C1 [I] + SD [I]*H [I]*R [I])}/$
 101. $(K2*(C3 [N1] - C3 [I]) + ABS (NR [N1])*R [N1]));$
 102. «IF» $KB2 [I] < K8$ «THEN» «BEGIN» $K8 := KB2 [I]; K9 := R [I]; 'END$
 $'END';$
 103. «END» ЗАПАС;
 104. «PROCEDURE» INFORMATION;
 105. «BEGIN»
 106. «SWITCH» $D1 := D11, D12, D13, D14, D15, D16;$
 107. «PRINT» “(/, 2X, 3HN1 = ,13, X, 3HN2 = , 13, X, 3HN3 = , 12, X,
 $- 3HN4 = , 12)”,$
 108. $N1, N2, N3, N4;$
 109. «GOTO» $D1 [L];$
 110. $D11 : 'PRINT' "(4HNRA = , F7.2, 13H [KГ/CM] NRB = , F7.2,$
 $7H [KГ/CM])”, NRA, NRB;$
 111. «GOTO» $M1;$
 112. $D12 : 'PRINT' "(3HUA = , E10.3, 10H [CM] NRB = , F7.2,$
 $7H [KГ/CM])”, UA, NRB;$
 113. «GOTO» $M1;$
 114. $D13 : 'PRINT' "(3HUA = , E10.3, 9H [CM] UB = , E10.3, 4H [CM])”,$
 $UA, UB; 'GOTO' M1;$
 115. $D14 : 'PRINT' "(4HNRA = , F7.2, 12H [KГ/CM] UB = , E10.3, 4H [CM])”,$
 $NRA, UB;$
 116. «GOTO» $M1;$
 117. $D15 : 'PRINT' "(4HNRB = , F7.2, 7H [KГ/CM])”, NRB; 'GOTO' M1;$
 118. $D16 : 'PRINT' "(3HUB = , E10.3, 4H [CM])”, UB;$
 119. $M1 : 'PRINT' "(/3X, 2HN = , F7.1, 8H [ОБ/МИН])”, N;$
 120. «IF» $N4 = 0$ «THEN» «BEGIN»
 121. «PRINT» “(/15X, 5HR [CM], 4X, 5HH [CM], 4X, 6HT [↑OC]);
 122. «FOR» I := 1 «STEP» 1 «UNTIL» N1 «DO»
 123. «PRINT» “(15X, 2 (F5.2, 4X), F5.1)”, $R [I], H [I], T [I]; 'END'$
 124. «ELSE» «BEGIN»
 125. «PRINT» “(5X, 5HR [CM], 4X, 5HH [CM], 4X, 6HT [↑OC], 5X, 6HRJ [CM],
 $3X,$

126. 10HNRJ [КГ/СМ]);
 127. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N4 'DO'
 128. 'PRINT' "(5X, 2 (F5.2, 4X), 3X, F5.1, 5X. F5.2, 2X, F6.2)";
 129. R [I], H [I], T [I], H1 [I, 1], H1 [I, 2];
 130. 'FOR' I := N4 + 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
 131. 'PRINT' "(5X, 2 (F5.2, 2X), F5.1)", R [I], H [I], T [I]; 'END';
 132. 'PRINT' "(//50X, 36H ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА ...)";
 133. 'PRINT' "(/5X, 6H ГАММА =, F5.2, 8H [Г/СМ ↑ 3], 7X, 21H
 ДИТЕЛЬНОСТЬ РЕЖИМА : F5.1,
 134. 5H ЧАС.)", ГАММА, K6;
 135. 'IF' N2 = 0 'THEN' 'BEGIN'
 136. 'PRINT' "(//2X, HT, 2X, 25H АЛЬФА × 10^6 СИГМА ДЛ. Е × 10^{-6})";
 137. 'PRINT' "(5H [↑ OC], X, 27H [1/↑ OC] [КГ/ММ ↑ 2] [КГ/СМ ↑ 27])";
 138. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N3 'DO'
 139. 'PRINT' "(X, OPF4, 0, X, 6PF6.2, 3X, -2PF7.2, 5X, -6PF5.2)",
 140. E1 [I, 1], E1 [I, 2], E1 [I, 3], E1 [I, 4]; 'END'
 141. 'ELSE' 'BEGIN' 'ARRAY' A1 [2 : K4];
 142. 'PRINT' "(//2X, HT, 2X, 25H АЛЬФА × 10^6 СИГМА ДЛ. Е × 10^{-6})";
 143. 'PRINT' "(5H [↑ OC], X, 27H [1/↑ OC] [КГ/ММ ↑ 2] [КГ/СМ ↑ 2], 2X,
 144. 45H НАПРЯЖЕНИЯ ПО КРИВЫМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ [КГ/ММ ↑ 2])",
 145. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N3 'DO' 'BEGIN'
 146. 'FOR' J := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO' A1 [J] := E2 [J, I];
 147. 'PRINT' "(X, OPF4.0, X, 6PF6.2, 3X. -2PF7.2, 4X, -6PF5.2, 2X,
 16 (-2PF6.2))",
 148. E1 [I, 1], E1 [I, 2], E1 [I, 3], E1 [I, 4], A1; 'END';
 149. 'FOR' J := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO' A1 [J] := E [J];
 150. 'PRINT' "(12X, 20H ДЕФОРМАЦИЯ В ПРОЦ. 16 (2PF6.3))", A1; 'END';
 151. 'END' INFORMATION;
 152. 'PROCEDURE' DISK;
 153. 'BEGIN'
 154. M1 : K1 := K1 + 1;
 155. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' XI [I] := MU [I]/R [I];
 INT (X1, I);
 156. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN' XI [I] := EXP (X1 [I]);
 157. F2 [I] := R [I]/R [I]; B [I] := ЕП [I]*H [I]/(R [I]*XI [I]);
 158. S1 [I] := T1*(1 + MU [I])*XI [I];
 159. S2 [I] := K2*R [I]*H [I] 'END';
 160. INT (B, F1); INT (S1, S1); INT (S2, S2);
 161. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 162. F1 [I] := F1 [I]/R [I]; S1 [I] := (S1 [I] - R [I]*T1 [I]*XI [I])*B [I]
 'END'; INT (S1, S1);
 163. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 164. FQ [I] := -S2 [I]/R [I]; FT [I] := S1 [I]/R [I] 'END';
 165. 'IF' N4 'NE' 0 'THEN' 'BEGIN'
 166. 'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N4 'DO' 'FOR' I := 1 'STEP' 1
 'UNTIL' N1 'DO'
 167. 'IF' R [I] 'GE' H1 [J, 1] 'THEN'
 FQ [I] := FQ [I] - H1 [J, 1]*H1 [J, 2]/R [I] 'END';
 168. FUNCTION (F1, F1); FUNCTION (F2, F2); FUNCTION (FQ, FQ);
 FUNCTION (FT, FT);
 169. BOUNDARY;
 170. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 171. NR [I] := UA*F1 [I] + NRA*F2 [I] + FQ [I] + FT [I];
 172. S1 [I] := NR [I]*XI [I]/A [I];
 S5 [I] := T1 [I]*(1 + MU [I])*XI [I] 'END';
 173. INT (S1, S1); INT (S5, S5);
 174. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 175. NT [I] := MU [I]*NR [I] + B [I]*(S1 [I] + S5 [I] -
 R [I]*T1 [I]*XI [I] + UA);

176. $UR[I] := R[I] * ((NT[I] - MU[I] * NR[I]) / (A[I] * (1 - MU[I]**2))) + T1[I]$ 'END';
 177. 'IF' $K1 = 1$ 'THEN' 'BEGIN'
 178. 'FOR' $I := 1$ 'STEP' 1 'UNTIL' $N1$ 'DO' 'BEGIN'
 179. $S1[I] := FT[I] + K12 * F1[I]$; $S2[I] := FT[I] + K12 * F2[I]$;
 180. $S3[I] := S1[I] * XI[I] / A[I]$; $S4[I] := S2[I] * XI[I] / A[I]$ 'END';
 181. INT ($S3, S4$); INT ($S4, S4$);
 182. 'BEGIN' 'SWITCH' $D := D1, D2, D3, D4, D5, D6$;
 183. 'GOTO' $D[LI]$;
 184. $D1 : D4 : 'FOR' I := 1$ 'STEP' 1 'UNTIL' $N1$ 'DO' 'BEGIN'
 185. $S4[I] := (MU[I] * S1[I] + B[I] * (S3[I] + S5[I] - R[I] * T1[I] * XI[I] + K12)) / H[T1]$;
 186. $S2[I] := S1[I] / H[I]$ 'END'; 'GOTO' $D7$;
 187. $D2 : D3 : 'FOR' I := 1$ 'STEP' 1 'UNTIL' $N1$ 'DO' 'BEGIN'
 188. $S4[I] := (MU[I] * S2[I] + B[I] * (S4[I] + S5[I] - R[I] * T1[I] * XI[I])) / H[I]$;
 189. $S2[I] := S2[I] / H[I]$ 'END'; 'GOTO' $D7$;
 190. $D5 : D6 : 'FOR' I := 1$ 'STEP' 1 'UNTIL' $N1$ 'DO' 'BEGIN'
 191. $S1[I] := FT[I] + K + *12F2[I] + R[I] * (T1[I] + K12 / (A[I] * (1 + MU[I]))) * F1[I]$;
 192. $S2[I] := S1[I] * XI[I] / A[I]$ 'END'; INT ($S2, S2$);
 193. 'FOR' $I := 1$ 'STEP' 1 'UNTIL' $N1$ 'DO' 'BEGIN'
 194. $S4[I] := (S1[I] * MU[I] + B[I] * (S2[I] + S5[I] - R[I] * T1[I] * XI[I] + K12 / (A[I] * (1 + MU[I])))) / H[I]$;
 195. $S2[I] := S1[I] / H[I]$ 'END';
 196. $D7 : 'END' 'END'$;
 197. $K11 := 0$; 'IF' $K1 = 1$ 'THEN' 'BEGIN' ЗАПАС; RESULTS 'END';
 198. 'IF' $N2 = 0$ 'THEN' 'GOTO' $M2$;
 199. PLASTICITY;
 200. 'IF' $K11$ 'NE' 0 'THEN' 'GOTO' $M1$;
 201. $K1 := K1 + 1$;
 202. ЗАПАС;
 203. $M2 : 'END' DISK$;
 204. 'PROCEDURE' RESULTS;
 205. 'BEGIN'
 206. 'IF' $K1 = 1$ 'THEN'
 207. 'FOR' $I := 1$ 'STEP' 1 'UNTIL' $N1$ 'DO' 'BEGIN'
 208. $S1[I] := NR[I] / H[I]$; $S3[I] := NT[I] / H[I]$ 'END';
 $K7 := K6 := R[I]$;
 209. 'IF' ABS ($S1[I]$) 'LT' 0.1 'THEN' $KMR := 10$ 'ELSE'
 $KMR := ABS(SD[I] / S1[I])$;
 210. 'IF' ABS ($S3[I]$) 'LT' 0.1 'THEN' $KMT := 10$ 'ELSE'
 $KMT := ABS(SD[I] / S3[I])$;
 211. 'FOR' $I := 1$ 'STEP' 1 'UNTIL' $N1$ 'DO' 'BEGIN'
 212. 'IF' ABS ($S1[I]$) 'GT' 0.1 'THEN' $F1[I] := ABS(SD[I] / S1[I])$ 'ELSE'
 $F1[I] := 10$;
 213. 'IF' ABS ($S3[I]$) 'GT' 0.1 'THEN' $F2[I] := ABS(SD[I] / S3[I])$ 'ELSE'
 $F2[I] := 10$;
 214. 'IF' $KMR > F1[I]$ 'THEN' 'BEGIN' $KMR := F1[I]$;
 $K6 := R[I]$ 'END';
 215. 'IF' $KMT > F2[I]$ 'THEN' 'BEGIN' $KMT := F2[I]$;
 $K7 := R[I]$ 'END';
 216. 'IF' $F1[I] 'GT' \diamond 4$ 'THEN' $F1[I] := \diamond 2$; 'IF' $F2[I] 'GT' \diamond 4$
 'THEN' $F2[I] := \diamond 2$;
 217. 'IF' $KB2[I] 'GT' \diamond 4$ 'THEN' $KB2[I] := \diamond 2$ 'END';
 218. 'IF' $K1 = 1$ 'THEN' 'BEGIN'
 219. 'PRINT' '//8X, 11H РЕЗУЛЬТАТЫ, 2X,
 220. 8H 'РАСЧЕТА';
 221. 'PRINT' '//20X, 15H УПРУГИЙ РАСЧЕТ';

```

222. 'PRINT' "(/12X, 21Н НАПРЯЖЕНИЯ [КГ/ММ↑2])";
223. 'PRINT' "(11X, 10Н РАДИАЛЬНЫЕ, 8X, 8Н ОКРУЖНЫЕ,
7X, 5Н СИГМА, 5X, 5НЕ × 10-6)";
224. 'PRINT' "(X, 5HR [CM], X, 2 (17Н СУММАРН. ТЕМПЕР.),
19Н ДЛИТЕЛЬН. [КГ/CM↑2],
225. 5X, 3Н KMR, 6X, 3Н KB2, 7X, 6HUR [CM])";
226. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
227. 'PRINT' "(X, OPF6.2, X, 2 (-2PF7.2, X), 2X, 3 (-2PF7.2, X),
3X, -6PF6.3,
228. 5X, 3 (OPF6.2, 3X), E12.5)",
229. R [I], S1 [I], S2 [I], S3 [I], S4 [I], SD [I], EY [I], F1 [I], F2 [I],
KB2 [I], UR [I]; 'END'
230. 'ELSE' 'BEGIN'
231. 'PRINT' "(/12X, 21Н УПРУГО—ПЛАСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ)";
232. 'PRINT' "(9X, 20Н НАПРЯЖЕНИЯ [КГ/ММ↑2], 14X, 5НЕ × 10-6)";
233. 'PRINT' "(X, 5HR [CM], 2X, 10Н РАДИАЛЬНЫЕ, 6X, 8Н
ОКРУЖНЫЕ, 12X, 2НМУ,
234. 6X, 9Н [КГ/CM↑2], 5X, 3НКMR, 6X, 3НКMT, 6X, 3НКВ2,
7X, 6HUR [CM])";
235. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
236. 'PRINT' "(X, OPF6.2, 2X, 2 (-2PF7.2, 8X), 2X,
237. OPF7.4, 5X, -6PF6.3, 5X, 3 (OPF6.2, 3X), E12.5)";
238. R [I], S [I], S3 [I], MU [I], EP [I], F1 [I], F2 [I], KB2 [I], UR [I]; 'END';
239. 'IF' N2 = 0 'OR' K1 'NE' 1 'THEN' 'BEGIN'
240. 'PRINT' "(/15X, 11Н МИНИМАЛЬНЫЕ, 4X,
241. 16Н ЗАПАСЫ)";
242. 'PRINT' "(/2X, 4Н KMR =, OPF6.2, 7Н НА R =, F6.2,
243. 4Н KMT =, F6.2, 5Н НА R =, F6.2,
244. 4Н KB2 =, F6.2, 5Н НА R =, F6.2, 6Н KB =, F6.2)";
245. KMR, K6, KMT, K7, K8, K9, KB; K1 := K1 - 1;
246. 'PRINT' "(/8X, 10Н ВЕС ДИСКА =, F8.3, 4Н [КГ], 7X,
247. 18Н ЧИСЛО ПРИБЛИЖЕНИЙ =, 13)", K10, K1;
248. 'END';
249. 'END' RESULTS;
250. READ (L, GAMMA, N, DELTA, UA, UB, NRA, NRB, K6, R, H, T, E1);
251. 'IF' N2 'NE' 0 'THEN' READ (E, E2);
252. 'IF' N4 'NE' 0 'THEN' READ (H1);
253. K1 := 0; K2 := 1.11786209 * ◇ - 8 * N * N * GAMMA;
254. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
255. MU [I] := 0.3;
256. INFORMATION;
257. INTERPOLATION;
258. DISK;
259. 'IF' N2 'NE' 0 'THEN' RESULTS;
260. 'END' 'END' 'END';
261. 'GOTO' MB;
262. 'END'
263. 'EOP'

```

2. Программа упругопластического расчета диска на растяжение и изгиб с учетом восстанавливающего эффекта

1. Процедура интегрирования по радиусу — *procedure* INTR (*x*, *y*) аналогична процедуре INT (*x*, *y*) приложения 1. 2. Процедура интегрирования по толщине — *procedure* INTN (*x*, *y*, *m*); здесь *x* — значение аргумента; *y* — под-

интегральная функция, m — значение интеграла. Интегрирование ведется по формуле Симпсона по семи расчетным сечениям. 3. Процедура определения фундаментальных функций уравнения растяжения — *procedure* FUNCT1 (x, y); здесь x — функция F_{1i} , y — решение Φ_{1i} . 4. Процедура определения фундаментальных функций уравнения изгиба — *procedure* FUNCT2 (x, y); здесь x — функция F_{2i} , y — решение Φ_{2i} . 5. Процедура интерполяции свойств материала по фактическим температурам диска — *procedure* INTERPOLATION. 6. Процедура нахождения нового секущего модуля при упругопластическом решении — *procedure* PLASTICITY. 7. Процедура печати исходной информации *procedure* INFORMATION. Процедура печатает исходную информацию о диске (геометрические параметры, свойства материала, нагрузки) в виде таблицы. 8. Процедура нахождения граничных условий уравнения растяжения u_a и N_{ra} по известным силовым, кинематическим или смешанным граничным условиям — *procedure* STRETCHING. 9. Процедура нахождения граничных условий уравнения изгиба θ_a , M_{sa} по известным силовым, кинематическим или смешанным граничным условиям — *procedure* BEND. 10. Процедура печати результатов расчета — *procedure* RESULTS. Процедура печатает результаты упругого и упругопластического расчета в виде таблицы (см. текст программы). 11. Процедура вычисления запасов прочности — *procedure* ЗАПАС. Процедура вычисляет запасы местной статической прочности k_{M_r} , k_{M_θ} , запас по разрушающим оборотам k_b и запас по цилиндрическому разрушению k_{b2} . Далее выбираются минимальные запасы и соответствующий им радиус. 12. Процедура вычисления массы диска — *REAL PROCEDURE* F2 (x). 13. Процедура вычисления N_θ и M_θ — *procedure* DISTRICT. 14. Процедура вычисления угла подъема $\phi(r)$ в результате деформации — *procedure* TETA. 15. Процедура расчета диска на растяжение и изгиб с учетом восстанавливающего эффекта в упругопластической области — *procedure* DISK. Эта управляющая процедура с использованием всех описанных выше процедур производит расчет диска и печатает результаты расчета в упругой и упругопластической области.

Составление исходной информации. Для расчета необходимо составить исходную информацию в следующем порядке: 1) $N1$ — число разбиений диска по радиусу; 2) $N2$ — число разбиений по кривой деформирования (включая ноль). 3) $N3$ — число табличных температур, при которых заданы характеристики материала (α , $\sigma_{дл}$, E), кривые деформирования. 4) $N4$ — число радиусов, по которым приложены сосредоточенные силы, включая радиус опоры диска. 5) ГАММА (г/см³) — плотность материала (γ); 6) N — частота вращения, об/мин (n). 7) DELTA — задаваемая точность расчета. 8) L — условное число, определяющее вид граничных условий ($L = 1 \div 10$): $L = 1$ — N_{sa} , N_{sb} , M_{sa} , M_{sb} ; $L = 2$ — u_a , u_b , M_{sa} , M_{sb} ; $L = 3$ — u_a , u_b , θ_a , θ_b ; $L = 4$ — N_{sa} , N_{sb} , θ_a , θ_b ; $L = 5$ — N_{sa} , u_b , M_{sa} , θ_b ; $L = 6$ — u_a , N_{sb} , θ_a , M_{sb} ; $L = 7$ — N_{sb} , M_{sb} ; $L = 8$ — u_b , M_{s3} ; $L = 9$ — u_b , θ_b ; $L = 10$ — N_{sb} , θ_b ; $L = 1 \div 6$ — диск с отверстием, $L = 7 \div 10$ — диск без отверстия. 9) u_a , см. 10) u_b , см. 11) θ_a , рад. 12) θ_b , рад. 13) N_{sa} , кгс/см. 14) N_{sb} , кгс/см. 15) M_{sa} кгс. 16) M_{sb} , кгс. Известные граничные условия задаются нулями. 17) $R1$, см — радиус опоры диска. 18) R , см — радиусы расчетных сечений в количестве $N1$. 19) H , см — толщины диска по соответствующим радиусам. 20) LF , см — расстояние от произвольно выбранной плоскости до правой стороны диска. 21) $G [1 : N1, 1 : 4]$ — двухмерный массив нагрузок на диск; $G [1 : N1, 1]$ — температура диска в расчетных радиусах на левой стороне диска; $G [1 : N1, 2]$ — то же самое на правой стороне диска; $G [1 : N1, 3]$ — $q_z r$ — распределенная осевая нагрузка (кгс/см²) по расчетным радиусам; $G [1 : N1, 4]$ — m_s — моменты, распределенные по радиусу. 22) E — массив деформаций по кривой деформирования, включая ноль в количестве, равном $N2$. 23) $E1 [1 : N3, 1 : 4]$ — массив табличных свойств материала, где $E1 [1 : N3, 1]$ — табличные температуры, при которых известны свойства материала, причем табличные температуры должны охватывать диапазон температур, до которых нагрет диск; $E1 [1 : N3, 2]$ — α (°/град) — коэффициент линейного расширения при заданных табличных температурах; $E1 [1 : N3, 3]$ — $\sigma_{дл}$ (кгс/см²) при тех же температурах; $E1 [1 : N3, 4]$ — E (кгс/см²) — модуль Юнга при тех же температурах. 24) $E2 [1 : N2, 1 : N3]$ — массив напряжений по кривым деформирования для

всех N 3 температур и N 2 деформаций. 25) $H1 [1 : N4, 1 : 4]$ — массив сосредоточенных нагрузок, где $H1 [1 : N4, 1]$ см — радиусы, по которым приложены сосредоточенные нагрузки; $H1 [1 : N4, 2]$ — радиальные сосредоточенные нагрузки N_{rj} (кгс/см); $H1 [1 : N4, 3]$ — осевые сосредоточенные нагрузки Q_j (кгс/см); $H1 [1 : N4, 4]$ — сосредоточенные моменты M_{rj} (кгс).

Примечания: 1. После каждого числа или массива, отмеченного цифрой 1—25, нужно пробивать пробел (—).

2. На первой перфокарте, на которой пробиваются № 1, № 2, № 3, № 4, пробивать следующие числа нельзя. Их нужно пробивать начиная со второй перфокарты

ALGOL—ГДР

1. 'CODE' : 'REAL' ATAN;
2. 'BEGIN' 'INTEGER' N1, N2, N3, N4; READ (N1, N2, N3, N4);
3. 'BEGIN' 'INTEGER' I, J, K, L, K1, K2, K11, K14;
4. 'REAL' MU, GAMMA, N, DELTA, UA, UB, VA, VB, NSA, NSB, MSA, MSB, QA, R1, KMR, KMT, KB2,
5. KB, K3, K4, K5, K6, K7, K8, K9, K10, K12, K13;
6. 'ARRAY' R, H, A, D, F11, F12, F1Q, F1T, F1F, F1V, L12, L13, Q, XI, B1, B2, F21, F22, F2Q,
7. F2T, F2F, F2V, L21, F, V, NS, NT, MS, MT [1 : N1];
8. 'ARRAY' S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, LF [1 : N1];
9. T [1 : N1, 1 : 2], G [1 : N1, 1 : 4], E1 [1 : N3, 1 : 4], E [1 : N2], E2 [1 : N2, 1 : N3],
10. H1 [1 : N4, 1 : 4], P [1 : N1, 1 : 22];
11. 'PROCEDURE' INTR (X, Y);
12. 'ARRAY' X, Y; 'BEGIN' 'REAL' A, B; B := X [1]; Y [1] := 0;
13. 'FOR' I := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
A := (R [I] - R [I - 1]) * (X [I] + B) * 0.5;
14. B := X [I]; Y [I] := Y [I - 1] + A 'END';
15. 'END' INTR;
16. 'PROCEDURE' INTH (X, Y, M); 'ARRAY' X, Y; 'REAL' M;
17. 'BEGIN' M := (X [7] - X [1]) * (Y [1] + 4 * (Y [2] + Y [4] +
+ Y [6]) + 2 * (Y [3] + Y [5] + Y [7])) / 18;
18. 'END' INTH;
19. 'PROCEDURE' FUNCT1 (X, Y); 'ARRAY' X, Y;
20. 'BEGIN' 'INTEGER' J2; 'REAL' J1; 'ARRAY' C1,
C2 [1 : N1]; J1 := DELTA;
21. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' C1 [I] := Y [I] := X [I];
22. M1 : 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
C2 [I] := C1 [I] * XI [I] / A [I];
23. INTR (C1, C1); INTR (C2, C2); J2 := 0;
24. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' C2 [I] := C2 [I] * B1 [I];
INTR (C2, C2);
25. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
C1 [I] := (MU * C1 [I] + C2 [I]) / R [I];
26. Y [I] := Y [I] + C1 [I]; 'IF' ABS (C1 [I]) > J1 'THEN'
J2 := 1; 'END';
27. 'IF' J2 'NE' 0 'THEN' 'GOTO' M1;
28. 'END' FUNCT1;
29. 'PROCEDURE' FUNCT2 (X, Y); 'ARRAY' X, Y;
30. 'BEGIN' 'INTEGER' J2; 'REAL' J1; 'ARRAY' C1, C2,
C3 [1 : N1]; J1 := DELTA;
31. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' C1 [I] := Y [I] := X [I];
32. M1 : 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
C2 [I] := C1 [I] * XI [I] / D [I];
33. INTR (C1, C1); INTR (C2, C2); J2 := 0;
34. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
C3 [I] := C2 [I] * NS [I] * R [I] / XI [I];
35. C2 [I] := C2 [I] * B2 [I] 'END'; INTR (C2, C2); INTR (C3, C3);

36. 'FOR' I : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
C1 [I] : = (C2 [I] + C3 [I] + C1 [I] * MU) / R [I];
37. Y [I] : = Y [I] + C1 [I]; 'IF' ABS (C1 [I]) > Ж1 'THEN'
Ж2 : = 1 'END';
38. 'IF' Ж2, 'NE' 0 'THEN' 'GOTO' M1;
39. 'END' FUNCT 2;
40. 'PROCEDURE' INTERPOLATION;
41. 'BEGIN' 'REAL' Ж1, Ж2, Ж3; 'ARRAY' P1, P2, P3 [1 : 7];
42. 'FOR' I : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN' Ж1 : = H [I] / 6;
43. 'FOR' J : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' 7 'DO' 'BEGIN'
44. P [I, J] : = G [I, 1] - (G [I, 1] - G [I, 2]) * (J - 1) / 6;
45. 'FOR' K : = 2 'STEP' 1 'UNTIL' N3 'DO' 'IF' P [I, J] 'LE'
E1 [K, 1] 'THEN' 'BEGIN'
46. Ж2 : = (E1 [K, 1] - P [I, J]) / (E1 [K, 1] - E1 [K - 1, 1]);
47. P [I, 7 + J] : = E1 [K, 2] - (E1 [K, 2] - E1 [K - 1, 2]) * Ж2;
48. P [I, 14 + J] : = E1 [K, 4] - (E1 [K, 4] - E1 [K - 1, 4]) * Ж2;
'GOTO' M 'END';
49. 'PRINT' "(/53Н РАБОЧИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВЫХОДЯТ ЗА
ПРЕДЕЛЫ
50. ТАБЛИЧНЫХ НА R = , F5.1)", R [I]; STOP;
51. M : P1 [J] : = Ж1 * (J - 1); P2 [J] : = P [I, 14 + J] * P1 [J];
P3 [J] : = P [I, 14 + J] 'END'
52. INTH (P1, P2, Ж2); INTH (P1, P3, Ж3); P [I, 22] : = Ж2 / Ж3;
S1 [I] : = LF [I] + H [I] - P [I, 22];
53. 'FOR' J : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' 7 'DO' 'BEGIN'
P1 [J] : = P1 [J] - P [I, 22];
54. P2 [J] : = P [I, 14 + J] / K5; P3 [J] : = P2 [J] * P1 [J] * P1 [J] 'END';
55. INTH (P1, P2, Ж2); INTH (P1, P3, Ж3); A [I] : = Ж2; D [I] : = Ж3;
56. 'FOR' J : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' 7 'DO' 'BEGIN'
57. P2 [J] : = P2 [J] * P [I, 7 + J] * (P [I, J] - 20);
P3 [J] : = P2 [J] * P1 [J] 'END';
58. INTH (P1, P2, Ж2); INTH (P1, P3, Ж3); T [I, 1] : = Ж2 / A [I];
T [I, 2] : = Ж3 / D [I];
59. 'END'; S2 [I] : = 0;
60. 'FOR' I : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 - 1 'DO' 'BEGIN'
K6 : = R [I + 1] - R [I];
61. 'IF' K6 < 0, 1 'THEN' S2 [I] : = 'S2 [I - 1] 'ELSE'
62. S2 [I] : = (S1 [I + 1] - S1 [I]) / K6; S1 [I] : = ATAN (S2 [I]) 'END';
S1 [N1] : = S1 [N1 - 1];
63. 'FOR' I : = 2 'STEP' 1 'UNTIL' N1 - 1 'DO'
F [I] : = (S1 [I - 1] + S1 [I + 1]) * 0.5;
64. F [1] : = F [2]; F [N1] : = F [N1 - 1]; 'END' INTERPOLATION;
65. 'PROCEDURE' PLASTICITY;
66. 'BEGIN' 'INTEGER' I1, I2; 'REAL' Ж1, Ж2, Ж3, Ж4, Ж5, Ж6, Ж7, Ж8,
Ж9, Ж10, Ж11, Ж12;
67. 'ARRAY' C1, C2 [1 : N1], P1, P2, P3, P4, P5, P6 [1 : 7];
Ж12 : = DELTA * 2;
68. 'FOR' I : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
69. Ж1 : = H [I] / 6; S5 [I] : = K4 * T [I, 1];
S6 [I] : = K4 * T [I, 2]; S1 [I] : = NS [I] / A [I] + S5 [I];
70. S2 [I] : = S6 [I] - MS [I] / D [I]; S3 [I] : = NT [I] / A [I] + S5 [I];
S4 [I] : = S6 [I] - MT [I] / D [I];
71. 'FOR' J : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' 7 'DO' 'BEGIN'
P1 [J] : = Ж1 * (J - 1) - P [I, 22];
72. P4 [J] : = (P [I, J] - 20) * P [I, 7 + J] * K4 / K5;
P2 [J] : = P [I, 14 + J] * ((S1 [I] + S2 [I]) * P1 [J])
73. / K5 - P4 [J]; P3 [J] : = P [I, 14 + J] * ((S3 [I] +
+ S4 [I]) * P1 [J]) / K5 - P4 [J];
74. P6 [J] : = SQRT (P2 [J] * P2 [J] - P2 [J] * P3 [J] + P3 [J] * P3 [J]);
Ж11 : = P6 [J] / P [I, 14 + J];

75. 'IF' Ж11 'LE' 0.002 'THEN' 'BEGIN' P5 [J] := P [I, 14 + J];
 'GOTO' M1 'END';
 76. 'FOR' I2 := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N3 'DO'
 'FOR' I1 := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO'
 77. 'IF' Ж11 < E [I1] 'AND' P [I, J] < E1 [I2, 1] 'THEN' 'BEGIN'
 Ж2 := E2 [I1 - 1, I2 - 1];
 78. Ж3 := E2 [I1, I2 - 1]; Ж4 := E2 [I1 - 1, I2]; Ж5 := E2 [I1, I2];
 79. Ж6 := (E [I1] - Ж11)/(E [I1] - E [I1 - 1]);
 80. Ж7 := (P [I, J] - E1 [I2 - 1, 1])/(E1 [I2, 1] - E1 [I2 - 1, 1]);
 81. Ж8 := Ж3 - (Ж3 - Ж2)*Ж6; Ж9 := Ж5 - (Ж5 - Ж4)*Ж6;
 Ж10 := Ж8 - (Ж8 - Ж9)*Ж7;; 'GOTO' M2 'END';
 82. 'PRINT' "(41H HE ХВАТАЕТ КРИВЫХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
 ДЕФОРМ. =, 2PF6.3,
 83. 12H ПРОЦ. HA R =, 0PF5.2)", Ж11, R [I]; STOP;
 84. M2 : P5 [J] := Ж10/Ж11;
 85. M1 : K6 := ABS (P [I, 14 + J] - P5 [J]); K7 := ABS (Ж12*P [I, 14+J]);
 'IF' K6 'GT' K7 'THEN'
 86. 'BEGIN' K1 := 1; P [I, 14 + J] := P5 [J] 'END' 'END';
 87. 'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' 7 'DO' 'BEGIN'
 88. P1 [J] := Ж1*(J - 1); P2 [J] := P [I, 14 + J]*P1 [J];
 P3 [J] := P [I, 14 + J] 'END';
 89. INTH (P1, P2, Ж2); INTH (P1, P3, Ж3); P [I, 22] := Ж2/Ж3;
 C1 [I] := LF [I] + H [I] - P [I, 22];
 90. 'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' 7 'DO' 'BEGIN'
 P1 [J] := P1 [J] - P [I, 22];
 91. P2 [J] := P [I, 14 + J]/K5;
 P3 [J] := P2 [J]*P1 [J]*P1 [J] 'END';
 92. INTH (P1, P2, Ж2); INTH (P1, P3, Ж3); A [I] := Ж2;
 D [I] := Ж3;
 93. 'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' 7 'DO' 'BEGIN'
 P2 [J] := P2 [J]*P [I, 7 + J]*(P [I, J] - 20);
 94. P3 [J] := P2 [J]*P1 [J] 'END';
 95. INTH (P1, P2, Ж2); INTH (P1, P3, Ж3); T [I, 1] := Ж2/A [I];
 T [I, 2] := Ж3/D [I] 'END';
 96. C2 [I] := 0;
 97. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1-1 'DO' 'BEGIN'
 K6 := R [I + 1] - R [I];
 98. 'IF' I 'NE' 1 'THEN' 'BEGIN' 'IF' K6 < 0.1 'THEN'
 C2 [I] := 0 'ELSE'
 99. C2 [I] := (C1 [I + 1] - C1 [I])/K6 'END'; C1 [I] := ATAN (C2 [I])
 'END'; C1 [N1] := C1 [N1 - 1];
 100. 'FOR' I := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N1 - 1 'DO'
 F [I] := (C1 [I - 1] + C1 [I + 1])*0.5;
 101. F [1] := F [2]; F [N1] := F [N1 - 1];
 102. 'END' PLASTICIY;
 103. 'PROCEDURE' INFORMATION;
 104. 'BEGIN' 'SWITCH' C1 := C11, C12, C13, C14, C15, C16, C17, C18, C19,
 C10;
 105. 'SWITCH' C2 := C21, C22, C23, C24; C25, C26; C27, C28, C29, C20;
 106. 'PRINT' "(3HN =, I3, 4H N2 =, I2, 4H N3 =, I2, 4H N4 =, I2,
 107. /X, 2HN =, F7.1, 8H [ОБ/МИН])", N1, N2, N3, N4, N; 'GOTO' C1 [L];
 108. C11 : C14 := 'PRINT' "(4HNSA =, F8.1, 14H [КГ/СМ]; NSB =, F8.1,
 10H [КГ/СМ]);",
 109. NSA, NSB; 'GOTO' M1;
 110. C12 : C13 := 'PRINT' "(3HUA =, E12.5, 9H [СМ] UB =,
 E12.5, 5H [СМ]);", UA, UB;
 111. 'GOTO' M1;
 112. C15 := 'PRINT' "(4HNSA =, F8.1, 12H [КГ/СМ] UB =, E12.5,
 5H [СМ]);", NSA, UB;
 113. 'GOTO' M1;

114. C16 : 'PRINT' (3HUA =, E12.5, 10H [CM] NSB =, F8.1, 8H [КГ/CM]);", UA, NSB;
115. 'GOTO' M1;
116. C17 : C10 : 'PRINT' "(4HNSB =, F8.1, 8H [КГ/CM]);", NSB; 'GOTO' M1;
117. C18 : C19 : 'PRINT' "(3HUB =, E 12.5, 5H [CM]);", UB;
118. M1 : 'GOTO' C2 [L];
119. C21 : C22 : 'PRINT' "(4HMSA =, F8.1, 10H [КГ] MSB =, F8.1, 5H [КГ]);", MSA, MSB;
120. 'GOTO' M2;
121. C23 : C24 : 'PRINT' "(3HVA =, E12.5, 11H [ПАД.] VB =, 12.5, 7H [ПАД.]);", VA, VB;
122. 'GOTO' M2;
123. C25 : 'PRINT' "(4HMSA =, F8.1 9H [КГ] VB =, E12.5, 6H [ПАД.]);", MSA, VB;
124. 'GOTO' M2;
125. C26 : 'PRINT' "(3HVA =, E12.5, 12H [ПАД.] MSB =, F8.1, 5H [КГ]);", VA, MSB;
126. 'GOTO' M2;
127. C27 : C28 : 'PRINT' "(4HMSB =, F8.1, 5H [КГ]);", MSB; 'GOTO' M2;
128. C29 : C20 : 'PRINT' "(3HVB =, E12.5, 7H [ПАД.]);", VB;
129. M2 : 'PRINT' "(44H ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА — — — — : ГАММА =, F5.2, 8H [Г/CM ↑ 3]);", ГАММА;
131. 'PRINT' "(2X, HT, 5X, 49H АЛЬФА × 10^6 СИГМА ДЛ. Е × 10^6 НАПРЯЖЕНИЯ ПО КРИВЫМ
132. 27НМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ [КГ/ММ ↑ 2],
133. /36H [↑ OC] [1/↑ OC] [КГ/ММ ↑ 2] [КГ/CMF ↑ 2]);",
134. 'BEGIN' ARRAY A1 [2 : N2]; 'FOR' I : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N3 'DO' 'BEGIN'
135. 'FOR' J : = 2 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO' A1 [J] : = E2 [J, I];
136. 'PRINT' "(0PF 6.1, 8PF8.2, —2PF8.1, —6PF8.2, 3X, 15 (—2PF6.2));",
137. E1 [I, 1], E1 [I, 2], E1 [I, 3], E1 [I, 4], A1; 'END';
138. 'FOR' J : = 2 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO' A1 [J] : = E [J];
139. 'PRINT' "(13X, 20H ДЕФОРМАЦИЯ В ПРОЦ. 15 (2PF6.3));", A1; 'END';
140. 'PRINT' "(/5HR [CM], 4X, 5HH [CM], 4X, 7HT1 [↑ OC],
141. 4X, 7HT2 [↑ OC], 3X, 19HQ [КГ/CM ↑ 2] M [КГ/CM],
142. 4X, 5HL [CM], 5X, 6HRJ [CM], 4X, 9HNJ [КГ/CM],
143. 4X, 9HQ [КГ/CM], 4X, 6HMJ [КГ]);",
144. 'FOR' I : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N4 'DO'
145. 'PRINT' "(1X, 0PF6.2, 4X, F6.2, 4X, 2 (F6.1, 4X), F7.2, 4X, F6.2, 5X, F7.2, 5X,
146. F5.2, 4X, 2 (F8.2, 5X), F8.2)", R [I], H [I], G [I, 1], G [I, 2], G [I, 3], G [I, 4], LF [I],
147. H1 [I, 1], H1 [I, 2], H1 [I, 3], H1 [I, 4];
148. 'FOR' I : = N4 + 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
149. 'PRINT' "(1X, 2 (F6.2, 4X), 2 (F6.1, 4X), F7.2, 4X, F6.2, 5X, F7.2, 5X, F5.2, 4X
150. 2 (F8.2, 5X), F8.2)", R [I], H [I], G [I, 1], G [I, 2], G [I, 3], G [I, 4], LF [I];
151. 'END' INFORMATION;
152. 'PROCEDURE' STRETCHING;
153. 'BEGIN' 'REAL' Ж1, Ж2, Ж3, Ж4, Ж5, Ж6, Ж7, Ж8, Ж9, Ж10;
154. 'SWITCH' C1 : = C11, C12, C13, C14, C15, C16, C17, C18, C19, C10;
155. 'FOR' I : = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
- S1 [I] : = XI [I]/A [I];
156. S2 [I] : = F11 [I]*S1 [I]; S3 [I] : = F21 [I]*S1 [I];
- S4 [I] : = FIQ [I]*S1 [I];
157. S5 [I] : = FIT [I]*S1 [I]; S6 [I] : = T [I, 1]*XI [I]*K4 'END';

158. INTR (S2, S2); INTR (S3, S3); INTR (S4, S4); INTR (S5, S5);
 INTR (S6, S6);
 159. $\mathcal{K}1 := S2 [N1]; \mathcal{K}2 := S3 [N1]; \mathcal{K}3 := S4 [N1]; \mathcal{K}4 := S5 [N1];$
 $\mathcal{K}5 := S6 [N1];$
 160. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 $S3 [I] := F1V [I]*S1 [I];$
 161. $S2 [I] := S1 [I]*F1F [I]; S4 [I] := L12 [I]*S1 [I];$
 $S5 [I] := L13 [I]*S1 [I];$
 162. $S6 [I] := (V [I]*V [I]*0.5 + V [I]*F [I])*X1 [I] \text{ 'END'};$
 163. INTR (S2, S2); INTR (S3, S3); INTR (S4, S4); INTR (S5, S5);
 INTR (S6, S6);
 164. $\mathcal{K}6 := S2 [N1]; \mathcal{K}7 := S3 [N1]; \mathcal{K}8 := S4 [N1]; \mathcal{K}9 := S5 [N1];$
 $\mathcal{K}10 := S6 [N1];$
 165. 'GOTO' C1 [L];
 166. $C11 : C14 : UA := (NSB - NSA*F12 [N1] - F1Q [N1] - F1T [N1] -$
 $- F1F [N1] - F1V [N1] - L12 [N1]$
 $- L13 [N1])/F11 [N1]; \text{ 'GOTO' } M1;$
 168. $C12 : C13 : NSA := (UB*X1 [N1] - UA*(\mathcal{K}1 + 1) - \mathcal{K}3 - \mathcal{K}4 - \mathcal{K}5 -$
 $- \mathcal{K}6 - \mathcal{K}7 - \mathcal{K}8 - \mathcal{K}9 + \mathcal{K}10)/\mathcal{K}2; \text{ 'GOTO' } M1;$
 169. $C15 : UA := (UB*X1 [N1] - NSA*\mathcal{K}2 - \mathcal{K}3 - \mathcal{K}4 - \mathcal{K}5 - \mathcal{K}6 -$
 $- \mathcal{K}7 - \mathcal{K}8 - \mathcal{K}9 + \mathcal{K}10)/(\mathcal{K}1 + 1); \text{ 'GOTO' } M1;$
 170. $C16 : NSA := (NSB - UA*F11 [N1] - F1Q [N1] - F1T [N1] -$
 $- F1F [N1] - F1V [N1] - L12 [N1] -$
 $- L13 [N1])/F12 [N1]; \text{ 'GOTO' } M1;$
 172. $C17 : C10 : NSA := (NSB - F1Q [N1] - F1T [N1] - F1F [N1] -$
 $- F1V [N1] - L12 [N1] - L13 [N1] -$
 173. $R [1]*T [1, 1]*F11 [N1])/(R [1]*F11 [N1]/(A [1]*K4) + F12 [N1]);$
 'GOTO' M2;
 174. $C18 : C19 : NSA := (UB*X1 [N1] - \mathcal{K}3 - \mathcal{K}4 - \mathcal{K}5 - \mathcal{K}6 - \mathcal{K}7 -$
 $- \mathcal{K}8 - \mathcal{K}9 + \mathcal{K}10 - R [1]*T [1, 1]*(\mathcal{K}1 + 1))/$
 175. $(R [1]*(\mathcal{K}1 + 1)/(A [1]*K4) + \mathcal{K}2);$
 $M2 : UA := R [1]*(NSA/(A [1]*K4) + T [1, 1]);$
 176. M1 : 'END' STRETCHING;
 177. 'PROCEDURE' BEND;
 178. 'BEGIN' 'REAL' $\mathcal{K}1, \mathcal{K}2, \mathcal{K}3, \mathcal{K}4, \mathcal{K}5, \mathcal{K}6, \mathcal{K}7, \mathcal{K}8;$
 179. 'SWITCH' C1 := C11, C12, C13, C14, C15, C16, C17, C18, C19, C10;
 180. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN' S1 [I] := X1 [I]/D [I];
 181. $S2 [I] := F21 [I]*S1 [I]; S3 [I] := F22 [I]*S1 [I];$
 $S4 [I] := F2Q [I]*S1 [I];$
 182. $S5 [I] := F2T [I]*S1 [I]; S6 [I] := T [I, 2]*X1 [I]*K4 \text{ 'END'};$
 183. INTR (S2, S2); INTR (S3, S3); INTR (S4, S4); INTR (S5, S5);
 INTR (S6, S6);
 184. $\mathcal{K}1 := S2 [N1]; \mathcal{K}2 := S3 [N1]; \mathcal{K}3 := S4 [N1]; \mathcal{K}4 := S5 [N1];$
 $\mathcal{K}5 := S6 [N1];$
 185. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN' $S2 [I] := F2F [I]*S1 [I];$
 186. $S3 [I] := F2V [I]*S1 [I]; S4 [I] := L21 [I]*S1 [I] \text{ 'END'};$
 187. INTR (S2, S2); INTR (S3, S3); INTR (S4, S4); $\mathcal{K}6 := S2 [N1];$
 $\mathcal{K}7 := S3 [N1]; \mathcal{K}8 := S4 [N1];$
 188. 'GOTO' C1 [L];
 189. $C11 : C12 : VA := (MSB - MSA*F22 [N1] - F2Q [N1] - F2T [N1] -$
 $- F2F [N1] - F2V [N1] - L21 [N1])/$
 190. $F21 [N1]; \text{ 'GOTO' } M1;$
 191. $C13 : C14 : MSA := (\mathcal{K}5 - VB*X1 [N1] - VA*(\mathcal{K}1 + 1) - \mathcal{K}3 - \mathcal{K}4 -$
 $- \mathcal{K}6 - \mathcal{K}7 - \mathcal{K}8)/\mathcal{K}2; \text{ 'GOTO' } M1;$
 192. $C15 : VA := (\mathcal{K}5 - VB*X1 [N1] - MSA*\mathcal{K}2 - \mathcal{K}3 - \mathcal{K}4 - \mathcal{K}6 -$
 $- \mathcal{K}7 - \mathcal{K}8)/(\mathcal{K}1 + 1); \text{ 'GOTO' } M1;$
 193. $C16 : MSA := (MSB - VA*F21 [N1] - F2Q [N1] - F2T [N1] - F2F [N1]$
 $- F2V [N1] - L21 [N1])/$
 194. $F22 [N1]; \text{ 'GOTO' } M1;$

235. 6X, 6H [ПАД.], 10X, 4H [CM], 9X, 4H [CM]";
 236. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
 237. 'PRINT' "(X, OPF5.2, 2X, F9.4, 2X, F6.3, 5X, E12.5, 2X, E12.5, 5X, E12.5, 3X,
 238. E12.5)", R [I], LF [I], P [I, 22], F [I], V [I], S5 [I], S6 [I];
 239. 'PRINT' "(/2X, 35H МИНИМАЛЬНЫЕ ЗАПАСЫ:",
 240. /4HKMR =, F7.3, 2X, 5H НА R =, F5.2, 2X, 10H[CM] KMT =,
 241. 10H [CM] KB2 =, F7.3, 2X, 5H НА R =, F5.2, 2X, 9H [CM] KB =,
 242. F7.3./10H ВЕС ДИСКА =,
 243. 3PF8.3, 4H [KГ])", KMR, K6, KMT, K7, KB2, K8, KB, K10;
 244. 'END' RESULTS;
 245. 'PROCEDURE' ЗАПАС;
 246. 'BEGIN' 'REAL' C; 'ARRAY' P1, P2, P3 [1 : 7], C1, C2, C3, C4 [1 : N1];
 247. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN' C := H [I]/6;
 248. 'FOR' J := 1 'STEP' 6 'UNTIL' 7 'DO' 'BEGIN'
 249. 'FOR' K := 2 'STEP' 1 'UNTIL' N3 'DO'
 250. 'IF' P [I, J] 'LE' E1 [K, 1] 'THEN' 'BEGIN' P1 [J] := E1 [K, 3] -
 251. - (E1 [K, 3] - E1 [K - 1, 3]) *
 252. (E1 [K, 1] - P [I, J]) / (E1 [K, 1] - E1 [K - 1, 1]); 'GOTO' M1 'END';
 253. M1 : P2 [J] := C * (J - 1) - P [I, 22];
 254. P3 [J] := (P [I, J] - 20) * P [I, 7 + J] * K4/K5 'END';
 255. C1 [I] := NS [I]/A [I] + K4 * T [I, 1];
 256. C2 [I] := NT [I]/A [I] + K4 * T [I, 1];
 257. C3 [I] := K4 * T [I, 2] - MS [I]/D [I];
 258. C4 [I] := K4 * T [I, 2] - MT [I]/D [I];
 259. S1 [I] := P [I, 15] * ((C1 [I] + C3 [I] * P2 [1]/K5 - P3 [1]);
 260. S2 [I] := P [I, 21] * ((C1 [I] + C3 [I] * P2 [7])/K5 - P3 [7]);
 261. S3 [I] := P [I, 15] * ((C2 [I] + C4 [I] * P2 [1])/K5 - P3 [1]);
 262. S4 [I] := P [I, 21] * ((C2 [I] + C4 [I] * P2 [7])/K5 - P3 [7]);
 263. S5 [I] := P1 [I] - (P1 [I] - P1 [7]) * P [I, 22]/H [I];
 264. 'IF' ABS (S1 [I]) 'LE' 0.1 'THEN' C1 [I] := 10 'ELSE'
 265. C1 [I] := ABS (P1 [I]/S1 [I]);
 266. 'IF' ABS (S2 [I]) 'LE' 0.1 'THEN' C2 [I] := 10 'ELSE'
 267. C2 [I] := ABS (P1 [7]/S2 [I]);
 268. 'IF' ABS (S3 [I]) 'LE' 0.1 'THEN' C3 [I] := 10 'ELSE'
 269. C3 [I] := ABS (P1 [1]/S3 [I]);
 270. 'IF' ABS (S4 [I]) 'LE' 0.1 'THEN' C4 [I] := 10 'ELSE'
 271. C4 [I] := ABS (P1 [7]/S4 [I]);
 272. 'IF' I = 1 'THEN' 'BEGIN' KMR := C1 [I]; KMT := C3 [I];
 273. K6 := K7 := R [I] 'END';
 274. 'IF' C1 [I] 'LT' KMR 'THEN' 'BEGIN' KMR := C1 [I];
 275. K6 := R [I] 'END';
 276. 'IF' C2 [I] 'LT' KMR 'THEN' 'BEGIN' KMR := C2 [I];
 277. K6 := R [I] 'END';
 278. 'IF' C3 [I] 'LT' KMT 'THEN' 'BEGIN' KMT := C3 [I];
 279. K7 := R [I] 'END';
 280. 'IF' C4 [I] 'LT' KMT 'THEN' 'BEGIN' KMT := C4 [I];
 281. K7 := R [I] 'END';
 282. C2 [I] := S5 [I] * H [I]; C3 [I] := R [I] * H [I] * R [I] 'END';
 283. INTR (C2, C2); INTR (C3, C3);
 284. KB := ABS (NS [N1]) * R [N1] * K3 * C3 [N1];
 285. 'IF' KB = 0 'THEN' KB := 10 'ELSE' K8 := SQRT (C2 [N1]/KB);
 286. KB2 := S5 [N1] * H [N1]/NS [N1]; K8 := R [N1];
 287. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 288. K9 := K3 * (C3 [N1] - C3 [I]) + ABS (NS [N1]) * R [N1];
 289. 'IF' K9 = 0 'THEN' C1 [I] := 10 'ELSE'
 290. C1 [I] := SQRT ((C2 [N1] - C2 [I] + S5 [I] * H [I] * R [I])/K9);
 291. 'IF' C1 [I] 'LT' KB2 'THEN' 'BEGIN' KB2 := C1 [I]; K8 := R [I] 'END';
 292. 'END'; 'END' ЗАПАС;

77. 'REAL' 'PROCEDURE' F2 (X); 'ARRAY' X;
 278. 'BEGIN' 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' S1 [I] := R [I]*H[I];
 INTR (S1, S1);
 279. K10 := 2*3.141592*GAMMA* $\diamond$ - 3*S1 [N1]/981; F2 := K10;
 280. 'END' F2;
 281. 'PROCEDURE' DISK;
 282. 'BEGIN'
 283. M1 : K2 := K2 + 1; K5 := 1 - MU** 2; K4 := 1 + MU;
 284. M3 : K6 := R [I]** MU;
 285. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 X1 [I] := R [I]** MU/K6;
 286. S1 [I] := R [I]*X1 [I]; F12 [I] := R [I]/R [I];
 B [I] := A [I]*K5/S1 [I];
 287. B2 [I] := D [I]*K5/S1 [I]; S1 [I] := K3*R [I]** 2*H [I];
 S2 [I] := T [I, 1]*X1 [I]*K4 'END';
 288. INTR (B1, F11); INTR (S1, S1); INTR (S2, S2);
 289. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 F11 [I] := F11 [I]/R [I];
 290. S2 [I] := (S2 [I] - R [I]*T [I, 1]*X1 [I])*B1 [I] 'END';
 INTR (S2, S2);
 291. 'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N4 'DO' 'FOR' I := 1 'STEP' 1
 'UNTIL' N1 'DO'
 292. 'IF' R [I] 'GE' H1 [J, 1] 'THEN' S1 [I] := S1 [I] + H1 [J, 1]*H1 [J, 2];
 293. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 294. F1T [I] := S2 [I]/R [I]; F1Q [I] := -S1 [I]/R [I] 'END';
 295. FUNCT1 (F11, F11); FUNCT 1 (F12, F12); FUNCT 1 (F1Q, F1Q);
 FUNCT1 (F1T, F1T);
 296. M2 : 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 S2 [I] := X1 [I]*V [I];
 297. S1 [I] := S2 [I]*V [I]*0.5; S2 [I] := S2 [I]*F [I];
 S3 [I] := T [I, 2]*X1 [I]*K4;
 298. F22 [I] := R [I]/R [I];
 S4 [I] := NS [I]*R [I]/X1 [I] 'END';
 299. INTR (S1, S1); INTR (S2, S2); INTR (S3, S3); INTR (S4, S5);
 INTR (B2, F21);
 300. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'.
 F21 [I] := -(S5 [I] + F21 [I])/R [I];
 301. S6 [I] := (R [I]*T [I, 2]*X1 [I] - S3 [I])*B2 [I];
 F1F [I] := Q [I]*F [I] -
 302. Q [I]*R [I]*F [I]/R [I];
 F1V [I] := Q [I]*V [I] - Q [I]*R [I]*VA/R [I];
 303. S3 [I] := S4 [I]*S3 [I]; S1 [I] := S1 [I]*B1 [I];
 304. S2 [I] := S2 [I]*B1 [I];
 S4 [I] := G [I, 4]*R [I]; S5 [I] := Q [I]*R [I] 'END';
 305. INTR (S1, S1); INTR (S2, S2); INTR (S3, S3); INTR (S4, S4); INTR (S5, S5);
 INTR (S6, S6);
 306. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 F2T [I] := (S6 [I] - S3 [I])/R [I];
 307. L12 [I] := -S1 [I]/R [I]; L13 [I] := -S2 [I]/R [I];
 S5 [I] := S5 [I] - S4 [I] 'END';
 308. 'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N4 'DO' 'FOR' I := 1 'STEP' 1
 'UNTIL' N1 'DO'
 309. 'IF' R [I] 'GE' H1 [J, 1] 'THEN' S5 [I] := S5 [I] - H1 [J, 1]*H1 [J, 4];
 310. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' F2Q [I] := S5 [I]/R [I];
 311. FUNCT 1 (L12, L12); FUNCT1 (L13, L13); FUNCT 1 (F1F, F1F);
 FUNCT 1 (F1V, F1V);
 312. STRETCHING;
 313. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'

314. $NS[I] := UA * F11[I] + NSA * F12[I] + F1Q[I] + F1T[I] + F1F[I] +$
 $+ F1V[I] + L12[I] + L13[I];$
 315. $S1[I] := NSA * (R[I] - R[1]) / R[1];$
 $F2F[I] := S1[I] * F[1]; F2V[I] := S1[I] * VA;$
 316. $L21[I] := -NS[I] * R[1] * F[I] \text{ 'END' }; INTR(L21, L21);$
 317. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' $L21[I] := L21[I] / R[I];$
 318. $FUNCT\ 2(F21, F21); FUNCT\ 2(F22, F22); FUNCT\ 2(F2Q, F2Q);$
 $FUNCT\ 2(F2T, F2T);$
 319. $FUNCT\ 2(F2F, F2F); FUNCT\ 2(F2V, F2V); FUNCT\ 2(L21, L21);$
 320. 'END';
 321. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
 322. $MS[I] := VA * F21[I] + MSA * F22[I] + F2Q[I] + F2T[I] +$
 $+ F2F[I] + F2V[I] + L21[I];$
 323. DISTRICT; TETA; 'IF' K2 = 1 'THEN' 'BEGIN' ЗАПАС;
 $K10 := F2(S1); RESULTS;$
 324. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' $V[I] := 0 \text{ 'END' }$
 325. 'ELSE' 'BEGIN' K1 := 0;
 326. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' $V[I] := 0;$
 PLASTICITY 'END';
 327. 'IF' K1 'NE' 0 'THEN' 'GOTO' M1; 'IF' K14 = 1 'THEN' 'BEGIN'
 328. ЗАПАС; TETA; RESULTS;
 329. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' $V[I] := 0; \text{ 'END' };$
 330. 'END' DISK;
 331. 'PROCEDURE' DISTRICT;
 332. 'BEGIN'
 333. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 $S1[I] := MS[I] * XI[I] / D[I];$
 334. $S2[I] := T[I, 2] * XI[I] * K4;$
 $S3[I] := NS[I] * XI[I] / A[I];$
 335. $S4[I] := (V[I] * V[I] * 0.5 + V[I] * F[I]) * XI[I];$
 $S5[I] := T[I, 1] * XI[I] * K4 \text{ 'END' };$
 336. $INTR(S1, S1); INTR(S2, S2); INTR(S3, S3); INTR(S4, S4);$
 $INTR(S5, S5);$
 337. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 338. $NT[I] := MU * NS[I] + B1[I] * (S3[I] - S4[I] + S5[I] -$
 $- R[I] * T[I, 1] * XI[I] + UA);$
 339. $MT[I] := MU * MS[I] + B2[I] * (S1[I] - S2[I] +$
 $+ R[I] * T[I, 2] * XI[I] - VA) \text{ 'END' };$
 340. 'END' DISTRICT;
 341. 'PROCEDURE' TETA;
 342. 'BEGIN'
 343. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'BEGIN'
 $S1[I] := T[I, 2] * XI[I] * K4;$
 344. $S2[I] := XI[I] * MS[I] / D[I] \text{ 'END' }; INTR(S1, S1);$
 $INTR(S2, S2);$
 345. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
 $V[I] := (S1[I] - S2[I] + VA) / XI[I];$
 346. 'END' TETA;
 347. READ (ГAMMA, N, ДЕЛТА, L, UA, UB, VA, VB, NSA, NSB, MSA,
 MSB, R1);
 348. READ (R, H, LF, G, E, E1, E2, H1);
 349. $MU := 0.3; K1 := 1; K2 := K11 := K14 := 0; INFORMATION;$
 350. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
 $V[I] := F[I] := NS[I] := MS[I] := 0;$
 351. $K4 := 1.3; K5 := 0.91; K3 := ГAMMA * N * N * 1.1178619 * \diamond - 8;$
 352. INTERPOLATION; $K6 := K7 := 0;$
 353. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
 $S1[I] := G[I, 3] * R[I]; INTR(S1, S1);$
 354. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N4 'DO' $K6 := K6 + H1[I, 1] * H1[I, 3];$
 $QA := -(S1[N1] + K6) / R1;$

355. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N4 'DO' IF' H1 [I, 1] = R1 'THEN
 'BEGIN' H1 [I, 3] := QA;
 356. QA := 0 'END';
 357. 'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N4 'DO' 'FOR' I := 1 'STEP' 1
 'UNTIL' N1 - 1 'DO'
 358. 'IF' R [I] 'GE' H1 [J, 1] 'THEN' S1 [I] := S1 [I] + H1 [J, 1]*H1 [J, 3];
 359. 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'
 Q [I] := (-S1 [I] + QA*R [1])/R [I];
 360. DISK;
 361. 'END';
 362. 'END';
 363. 'EOP'

3. Выражения для компонент матрицы жесткости элемента и столбцов правой части в уравнении равновесия отдельного элемента

Выражение (5.18) для матрицы жесткости элемента

$$S_n = Q_n' C_n Q_n,$$

где матрица $C_n = \int_{v_n} B' DB dv_n$

$$C_n = \begin{bmatrix} C_n^{11} & C_n^{12} \\ (C_n^{12})' & C_n^{22} \end{bmatrix}.$$

Блоки матрицы жесткости элемента

$$\begin{aligned} S_n^{11} &= (T^{-1}) C_n^{11} T^{-1}, \\ S_n^{22} &= (T^{-1}) C_n^{22} T^{-1}, \\ S_n^{12} &= (T^{-1}) C_n^{12} T^{-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где матрица T определяется выражением (5.2) и зависит только от координат узловых точек. Приведем выражения для блоков C_n^{11} , C_n^{22} , C_n^{12} в предположении, что модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ остаются постоянными по всему элементу (но являются различными для разных элементов):

$$C_n^{11} = \frac{E_n (1 - \mu_n)}{(1 + \mu_n) (1 - 2\mu_n)} \begin{bmatrix} I_2 & I_1 \frac{1}{1 - \mu_n} & I_4 \\ & I_6 \frac{2}{1 - \mu_n} & I_3 \frac{1}{1 - \mu_n} \\ & & I_5 + I_6 \frac{1 - 2\mu_n}{2(1 - \mu_n)} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$C_n^{22} = \frac{E_n (1 - \mu_n)}{(1 + \mu_n) (1 - 2\mu_n)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & I_6 \frac{1 - 2\mu_n}{2(1 - \mu_n)} & 0 \\ \text{symm} & & I_6 \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$C^{12} = \frac{E_n (1 - \mu_n)}{(1 + \mu_n) (1 - 2\mu_n)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_1 \frac{\mu_n}{1 - \mu_n} \\ 0 & 0 & I_6 \frac{2\mu_n}{1 - \mu_n} \\ 0 & I_6 \frac{1 - 2\mu_n}{2(1 - \mu_n)} & I_3 \frac{\mu_n}{1 - \mu_n} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь E_n и μ_n — упругие параметры для данного конечного элемента; $I_1, 2, \dots, 6$ обозначены определенные интегралы (интегрирование ведется по объему элемента):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{v_n} \frac{1}{r} dv_n; & I_2 &= \int_{v_n} \frac{1}{r^2} dv_n; & I_6 &= \int_{v_n} dv_n; \\ I_3 &= \int_{v_n} \frac{z}{r} dv_n; & I_4 &= \int_{v_n} \frac{z}{r^2} dv_n; & I_5 &= \int_{v_n} \frac{z^2}{r^2} dv_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Меридиональное сечение диска разбивают на элементы с треугольным поперечным сечением двух типов. У треугольников первого типа вершина расположена по радиусу большему, чем радиус, по которому расположено основание (вершина направлена к ободу). У треугольников второго типа вершина расположена по меньшему радиусу, чем основание, т. е. треугольник направлен вершиной к оси вращения (рис. 1).

Очевидно, что треугольники обоих типов являются частным случаем трапеции, у которой совпадают либо точки m и n (тип а), либо l и p (тип б). Интегралы $I_1 \dots, I_6$ могут быть вычислены аналитически для кольцеобразного элемента трапецидального сечения. Приведем значения интегралов $I_1 \dots, I_6$ для этого случая, введя следующие обозначения для радиусов:

$$r_m = r_n = r_2; \quad r_l = r_p = r_1. \quad (6)$$

Уравнения прямых, проходящих через точки l и m и точки n и p , соответственно имеют вид

$$z = \alpha^{lm} + \beta^{lm} r \quad \text{и} \quad z = \alpha^{np} + \beta^{np} r, \quad (7)$$

где α^{lm} , β^{lm} и α^{np} , β^{np} — коэффициенты уравнений; выражаются через координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha^{lm} &= \frac{z_l r_2 - z_m r_1}{r_2 - r_1}; & \alpha^{np} &= \frac{z_p r_2 - z_n r_1}{r_2 - r_1}; \\ \beta^{lm} &= \frac{z_m - z_l}{r_2 - r_1}; & \beta^{np} &= \frac{z_n - z_p}{r_2 - r_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом этих обозначений интегралы (5)

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi \left[(\alpha^{np} - \alpha^{lm}) (r_2 - r_1) + \frac{1}{2} (\beta^{np} - \beta^{lm}) (r_2^2 - r_1^2) \right]; \\ I_2 &= 2\pi \left[(\alpha^{np} - \alpha^{lm}) \ln \frac{r_2}{r_1} + (\beta^{np} - \beta^{lm}) (r_2 - r_1) \right]; \\ I_3 &= \pi \left\{ [(\alpha^{np})^2 - (\alpha^{lm})^2] (r_2 - r_1) + [\alpha^{np} \beta^{np} - \alpha^{lm} \beta^{lm}] (r_2^2 - r_1^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} [(\beta^{np})^2 - (\beta^{lm})^2] (r_2^3 - r_1^3) \right\}; \end{aligned}$$

$$I_4 = \pi \left\{ [(\alpha^{np})^2 - (\alpha^{lm})^2] \ln \frac{r_2}{r_1} + 2 [\alpha^{np} \beta^{np} - \alpha^{lm} \beta^{lm}] (r_2 - r_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [(\beta^{np})^2 - (\beta^{lm})^2] (r_2^2 - r_1^2) \right\}; \quad (9)$$

$$I_5 = \frac{2}{3} \pi \left\{ [(\alpha^{np})^3 - (\alpha^{lm})^3] \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{3}{2} [\alpha^{np} (\beta^{np})^2 - \alpha^{lm} (\beta^{lm})^2] (r_2^2 - r_1^2) + \right. \\ \left. + 3 [(\alpha^{np})^2 \beta^{np} - (\alpha^{lm})^2 \beta^{lm}] (r_2 - r_1) + \frac{1}{3} [(\beta^{np})^3 - (\beta^{lm})^3] (r_2^3 - r_1^3) \right\};$$

$$I_6 = 2\pi \left[\frac{1}{2} (\alpha^{np} - \alpha^{lm}) (r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{3} (\beta^{np} - \beta^{lm}) (r_2^3 - r_1^3) \right].$$

Необходимые интегралы для элемента типа «а» или «б» получаются либо подстановкой $z_m = z_n$ в (8) и (9), либо $z_l = z_p$ в зависимости от типа рассматриваемого элемента. Выражения (9) справедливы для диска с отверстием.

2. В соответствии с формулой (5.21) температурный и центробежный столбцы векторы в уравнении равновесия элемента (5.22) удобно разбить на два трехмерных

$$\bar{\mathbf{f}}_n^{T, m} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{n, R}^{T, m} \\ \dots \\ \bar{\mathbf{f}}_{n, z}^{T, m} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

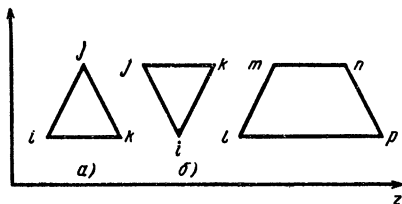
Полагая температуру T и коэффициент линейного расширения α_n постоянными по элементу, а также учитывая блочно-диагональную структуру матрицы Q , из (1.17) с учетом (5) получим следующие трехмерные температурные столбцы элемента:

$$\bar{\mathbf{f}}_{nR}^T = \frac{E_n}{1 - 2\mu_n} \alpha_n T_n (T^{-1})' \begin{bmatrix} I_1 \\ 2I_6 \\ I_3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{f}_{nz}^T = \frac{E_n}{1 - \mu_n} \alpha_n T_n (T^{-1})' \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_6 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Здесь T_n, α_n — температура и коэффициент линейного расширения для данного элемента.

Для столбца центробежной нагрузки элемента, очевидно, $\bar{\mathbf{f}}_{nz}^m = 0$. Для второго трехмерного центробежного столбца



$$\bar{\mathbf{f}}_{nR}^m = \rho \omega^2 (T^{-1})' \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

Рис. 1

где ρ — плотность материала; ω — угловая скорость вращения диска (1/с; определенные интегралы

$$Y_1 = \int_{v_n} r dv_n; \quad Y_2 = \int_{v_n} r^2 dv_n; \quad Y_3 = \int_{v_n} rz dv_n \quad (13)$$

вычислены в тех же предположениях, что и интегралы $I_1, \dots, I_6$, т. е. для кольцеобразного элемента трапецидального сечения

$$\begin{aligned} Y_1 &= 2\pi \left[\frac{1}{3} (\alpha^{np} - \alpha^{lm}) (r_2^3 - r_1^3) + (\beta^{np} - \beta^{lm}) \frac{1}{4} (r_2^4 - r_1^4); \right. \\ Y_2 &= 2\pi \left[\frac{1}{4} (\alpha^{np} - \alpha^{lm}) (r_2^4 - r_1^4) + \frac{1}{5} (\beta^{np} - \beta^{lm}) (r_2^5 - r_1^5) \right]; \\ Y_3 &= \pi \left\{ \frac{1}{3} [(\alpha^{np})^2 - (\alpha^{lm})^2] (r_2^3 - r_1^3) + \frac{1}{2} [\alpha^{np}\beta^{np} - \alpha^{lm}\beta^{lm}] \times \right. \\ &\quad \left. \times (r_2^4 - r_1^4) + \frac{1}{5} [(\beta^{np})^2 - (\beta^{lm})^2] (r_2^5 - r_1^5) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

4. Элементы матриц к уравнению (6.46)

$$\begin{aligned} C_{11} &= \mu (A_1 + A_2); \quad C_{12} = r\chi A_2 + \mu h_c A_2 + \mu (K_1 + K_2); \\ C_{13} &= r\chi A_2 + \mu h_n A_2 - \xi A_n^*; \quad C_{21} = \mu h_c A_2 + \mu (K_1 + K_2); \\ C_{22} &= \mu (D_1 + D_2) + rh_c \chi A_2 + \mu h_c^2 A_2 + 2\mu h_c K + K_2 r\chi; \\ C_{23} &= rh_c \chi A_2 + \mu h_c h_n A_2 + r\chi K_2 + \mu h_n K_2 - \xi K_n^* - \frac{1}{2} A_n^* h_1 \xi; \\ C_{31} &= \mu h_n A_2; \quad C_{32} = r\chi h_n A_2 + \mu h_n h_c A_2 + \mu h_n K_2; \\ C_{33} &= rh_n \chi A_2 + \mu h_n^2 A_2 - \xi K_n^*; \\ G_{11} &= r (A_1 + A_2) + A_n^*; \quad G_{12} = rh_c A_2 + r (K_1 + K_2) + K_n^* + \frac{1}{2} h_1 A_n^*; \\ G_{13} &= rh_n + K_n^*; \\ G_{22} &= r (D_1 + D_2) + rh_c^2 A_2 + 2rh_c K_2 + D_n^* + K_n^* h_1 + \left(\frac{1}{2} h_1 \right)^2 A_n^2 \xi; \\ G_{23} &= rh_c h_n A_2 + rh_n K_2 + \frac{1}{2} h_1 K_n^* + D_n^*; \\ G_{33} &= rh_n^2 A_2 + D_n^*. \\ M_{11} &= \frac{1}{r} (A_1 + A_2); \quad M_{12} = \frac{1}{r} h_c A_2 + \mu \chi A_2 + \frac{1}{r} (K_1 + K_2); \\ M_{13} &= \frac{1}{r} h_n A_2 + \mu \chi A_2; \quad M_{22} = \frac{1}{r} (D_1 + D_2) + r\chi^2 A_2 + \\ &\quad + \frac{1}{r} h_c A_2 + 2\mu \chi h_c A_2 + 2 \frac{1}{r} h_c K_2 + 2\mu \chi K_2; \end{aligned}$$

$$M_{23} = r\kappa A_2 + \frac{1}{r} h_c h_n A_2 + \mu \chi h_c A_2 + \mu h_n \kappa A_2 + \frac{1}{r} h_n K_2 + \mu \chi K_2;$$

$$M_{33} = r\chi^2 A_2 + \frac{1}{r} h_n^2 A_2 + 2\mu \chi h_n A_2 + \xi^2 A_n^* + \frac{1}{2(1+\mu)} A_n^*;$$

$$S_1 = \rho \omega^2 r^2 [h_1 + h_2] + \frac{1}{2\pi} \rho n \delta_n \omega^2 h_n r;$$

$$S_2 = \rho \omega^2 h_2 h_c r^2 + \frac{1}{2\pi} \rho n \delta_n \omega^2 h_n r \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_n}{2} \right) + \int_a^r p r dr - a Q_a;$$

$$S_3 = \rho \omega^2 h_2 r^2 h_n + \frac{1}{4\pi} \rho n \delta_n \omega^2 h_n^2 r.$$

К уравнению (6.70)

$$C_{11} = \mu (A_1 + A_2); \quad C_{12} = (r\kappa + \mu h_c) A_2 + (A_1 + A_2) r \varphi;$$

$$C_{13} = A_2 (r\chi + \mu h_n) - A_n \xi; \quad C_{21} = A_2 \mu h_c; \quad C_{22} = (D_1 + D_2) \mu + A_2 h_c (r\kappa + \mu h_c);$$

$$C_{23} = A_2 r \chi h_c + A_2 \mu h_n h_c - A_n \xi \frac{h_1}{2} - K_n \xi; \quad C_{31} = \mu h_n A_2;$$

$$C_{32} = A_2 r \varphi h_n + A_2 h_n (\kappa r + \mu h_c);$$

$$C_{33} = (r\chi + \mu h_n) h_n A_2 - K_n \xi;$$

$$G_{11} = r (A_1 + A_2) + A_2; \quad G_{12} = A_2 r h_c + 1/2 h_1 A_n + K_n;$$

$$G_{13} = r A_2 h_1 + K_n; \quad G_{21} = G_{12};$$

$$G_{22} = r D_1 + r h_c^2 A_2 + A_n (h_1/2)^2 + K_n h_n + D_n + r D_2;$$

$$G_{23} = r h_n h_c A_2 + K_n h_1/2 + D_n;$$

$$G_{31} = G_{13}; \quad G_{32} = G_{23}; \quad G_{33} = r h_n^2 A_2 + D_n;$$

$$M_{11} = 1/r (A_1 + A_2); \quad M_{12} = (1/r h_c + \mu \kappa) + \mu \varphi (A_1 + A_2);$$

$$M_{13} = A_2 (1/r h_n + \mu \chi); \quad M_{21} = M_{12}; \quad M_{22} = A_1 \varphi^2 r + 2 A_2 \varphi r \kappa + 2 A_2 \varphi \mu h_c +$$

$$+ D_1/r + r \kappa^2 A_2 + A_2/r h_c^2 + 2 \mu h_c \kappa A_2 + D_2/r;$$

$$M_{23} = r \kappa \chi A_2 + A_2 1/r h_n h_c + A_2 \mu h_c \chi + \mu h_n \kappa A_2 + r \varphi \chi A_2 + \mu \varphi h_n A_2;$$

$$M_{31} = M_{13}; \quad M_{32} = M_{23};$$

$$M_{33} = A_2 (2 \mu h_1 \chi + r \chi^2 + 1/r h_n^2) + 1/2 (1 + \mu) A_n + \xi^2 A_n.$$

Список литературы

1. Алянский Р. И., Мандель В. С., Стельмашук В. Н. Расчет секции ротора по предельному равновесию. — «Судостроение и морские сооружения», 1969, № 11, с. 159—167.
2. Амелянчик А. В., Струнина Е. П. Расчет на прочность дисков и роторов тепловых турбин на машине «Урал-2». — В кн.: Экспериментальные исследования прочности дисков, лопаток и паропроводов. М., 1965, 120 с. (Труды ЦНИИТМАШ, № 56).
3. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. Пер. с англ. Под ред. А. Ф. Смирнова. М., Стройиздат, 1968. 241 с.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969. 367 с.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1962. 464 с.
6. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. М., «Высшая школа», 1972. 416 с.
7. Биргер И. А. Вариационные методы в строительной механике турбомашин. М., Оборонгиз, 1959. 28 с.
8. Биргер И. А. Вероятность разрушения, запасы прочности и диагностика. — В кн.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л., «Судостроение», 1970, с. 71—82.
9. Биргер И. А. Интегральные методы расчета диска. — В кн.: Расчет на прочность дисков турбин и компрессоров. М., Оборонгиз, 1950, с. 162—186.
10. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1962. 368 с.
11. Биргер И. А. Метод дополнительных деформаций в задачах теорий пластичности. — «Известия АН СССР. Механика, машиностроение», 1963, № 1, с. 47—56.
12. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956. 152 с.
13. Биргер И. А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. — «Прикладная механика и математика», 1951, т. 15, № 6, с. 765—770.
14. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести. — В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975. с. 51—73.
15. Биргер И. А. Приближенный расчет на прочность колес центробежных турбомашин с двусторонним входом. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М., «Машиностроение», 1964, вып. 1, с. 104—123.
16. Биргер И. А. Теория пластического течения и расчет дисков. — В кн.: Расчеты на прочность. М., Машгиз, 1966, вып. 12, с. 183—200.
17. Биргер И. А., Демьянушко И. В. Теории пластичности при неизотермическом нагружении. — «Механика твердого тела», 1968, № 6, с. 70—77.

18. Биргер И. А., Демьянушко И. В., Темис Ю. М. Долговечность теплонапряженных элементов машин. — «Проблемы прочности», 1975, № 12, с. 9—16.
19. Биргер И. А., Демьянушко И. В., Темис Ю. М. Расчет конструкций при циклическом нагружении. — «Материалы всесоюзного симпозиума по малоцикловой усталости при повышенной температуре», ЧПИ, 1974, вып. 1, с. 3—27.
20. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин. М., «Машиностроение», 1966. 616 с.
21. Богомолов С. И. Совместные колебания рабочих лопаток и дисков турбомашин. — «Энергомашиностроение», 1965, № 2, с. 7—11.
22. Бояршинов С. В. Основы строительной механики. М., «Машиностроение», 1973. 456 с.
23. Ворошко П. П., Квитка А. Л., Уманский Э. С. К вопросу об автоматизации задания информации в методе конечных элементов. — «Проблемы прочности», 1975, № 3, с. 42—46.
24. Гохфельд Д. А. Несущая способность конструкций в условиях тепло-смен. М., «Машиностроение», 1970. 259 с.
25. Гринев В. Б., Филиппов А. П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. Киев, «Наукова думка», 1975. 292 с.
26. Гусенков А. П., Махутов Н. А. «Труды VI конференции по сварке и использованию металлов». Тимишоара, Румыния, 1969.
27. Демьянушко И. В. Напряженное состояние рабочих колес высокооборотных центробежных нагнетателей. — «Известия вузов. Машиностроение», 1966, № 6, с. 44—52.
28. Демьянушко И. В. Оптимальное проектирование круглых пластин и пологих оболочек. В кн.: Труды конференции по теории оболочек и пластин. Л., Изд-во АН СССР, 1976, с. 259—261.
29. Демьянушко И. В. Пластичность и ползучесть пологих оболочек вращения. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1970, № 2, с. 109—122.
30. Демьянушко И. В. Расчет на прочность рабочих колес центробежных нагнетателей. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М., «Машиностроение», 1969, вып. 5, с. 73—90.
31. Демьянушко И. В. Расчетные методы исследования прочности дисков турбомашин. — «Проблемы прочности», 1969. № 2, с. 18—24.
32. Демьянушко И. В. Циклическое нагружение дисков турбомашин. — В кн.: Расчеты на прочность. М., «Машиностроение», 1975, № 16, с. 232—240.
33. Демьянушко И. В., Венедиктов В. И. Решение для пологих оболочек вращения с учетом больших прогибов методом интегральных уравнений. — «Известия вузов. Машиностроение», 1972, № 7, с. 5—10.
34. Демьянушко И. В., Королева Е. Ф. Математическое программирование при проектировании дисков минимального веса. — В кн.: Расчеты на прочность. М., «Машиностроение», 1977, № 17, с. 274—281.
35. Демьянушко И. В., Королева Е. Ф. Оптимальное проектирование дисков турбомашин. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1972, № 2, с. 176—180.
36. Демьянушко И. В., Королева Е. Ф. Проблемы проектирования турбомашин минимального веса. — «Известия вузов. Машиностроение», 1973, № 6, с. 19—23.
37. Демьянушко И. В., Темис Ю. М. Кинетика напряженно-деформированного состояния дисков при циклическом нагружении. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1975, № 3, с. 90—98.
38. Демьянушко И. В., Темис Ю. М. К построению теорий пластического течения для материалов с учетом физических полей. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1975, № 5, с. 111—119.
39. Демьянушко И. В., Темис Ю. М. Повторное неизотермическое упруго-пластическое деформирование при изгибе и растяжении пологих оболочек вращения. — В кн.: Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Тбилиси, «Мецниереба», 1975, с. 383—395.
40. Де Сильва В. М. Е. Применение принципа Понтрягина к задаче определения минимального веса. — «Теоретические основы инженерных расчетов», 1970, сер. А, № 2, с. 46—51.

41. Де Сильва В. М. Е. Проектирование дисков минимального веса с учетом частотного ограничения. — «Труды Американского об-ва инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения». 1974, сер. В, № 1, с. 243—251.
42. Дондошанский В. К. Расчет колебаний упругих систем на ЭВМ. М.—Л., «Машиностроение», 1965. 368 с.
43. Дофман А. А., Либстер А. Ш., Ревзюн М. Б. Численное решение на ЭЦВМ пространственной осесимметричной задачи теории упругости применительно к толстым турбинным дискам. — «Труды ЦКТИ», 1966, вып. 74, с. 175.
44. Дульнев Р. А. Суммирование повреждений и условие прочности. — «Проблемы прочности», № 10, 1971, с. 25—27.
45. Заварцева Н. А. Расчет на прочность дисков радиальных турбомашин. — «Труды НАМИ», 1963, вып. 55, с. 34—80.
46. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ. Под ред. Б. Е. Победри. М., «Мир», 1975. 541 с.
47. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов: от интуиции к общности. — «Механика», 1970, № 6, с. 90—104.
48. Ильин Л. О. Напряженное состояние закрытых рабочих колес центробежных нагнетателей. — «Прикладная механика». 1960, т. 6, вып. 1, с. 46—53.
49. Ильюшин А. А. Пластичность. М., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 376 с.
50. Кабелевский М. Г. Циклическое нестационарное нагружение турбинного диска. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1972, № 1, с. 169—174.
51. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969. 420 с.
52. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960. 455 с.
53. Квитка А. Л., Ворошко П. П. Метод конечных элементов применительно к осесимметричной задаче теории упругости. — «Проблемы прочности», 1970, № 11, с. 61—64.
54. Кинасошвили Р. С. Расчет на прочность дисков турбомашин. М., Оборонгиз, 1954. 144 с.
55. Кобрин М. М. Прочность вращающихся дисков. Л., Судпромгиз, 1963. 340 с.
56. Коваленко А. Д. Пластинки и оболочки в роторах турбомашин. Киев, Изд-во АН УССР, 1955. 302 с.
57. Когаев В. П. Расчетная оценка пределов выносливости деталей машин. — «Вестник машиностроения», 1972, № 1, с. 11—14.
58. Козлов И. А., Баженов В. Г. Предельная способность элементов турбомашин, Киев, «Наукова думка», 1965, 168 с.
59. Костюк А. Г. О равновесии кольцевой пластинки при степенном законе упрочнения. «Прикладная математика и механика», т. XIV. Вып. 3, 1950, с. 319—320.
60. Костюк А. Г., Трухний А. Д. Методика расчета долговечности деталей, работающих в условиях малоциклового усталости и ползучести при наличии концентрации напряжений. — «Материалы Всесоюзного симпозиума по малоциклового усталости при повышенных температурах». Челябинск, 1974, вып. 1, с. 99—108.
61. К расчету дисковых элементов турбомашин с учетом пластичности и ползучести на основе феноменологической модели материала. — В кн.: Тепло-вые напряжения в элементах конструкций. Киев, «Наукова думка», 1970, вып. 10, с. 122—136. Авт.: И. В. Демьянушко, Р. А. Дульнев, Е. П. Бильковская и др.
62. Кузнецов Н. Д., Цейтлин В. И. Эквивалентные испытания газотурбинных двигателей. М., «Машиностроение», 1976. 216 с.
63. Левин А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. М., Госэнергоиздат, 1963. 624 с.
64. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. М., Гостехиздат, 1943. 287 с.
65. Лейкин А. С. Напряженность и выносливость деталей сложной конфигурации. М., «Машиностроение», 1968. 371 с.

66. Лурье А. И. Применение принципа максимума к протейшим задачам механики. — «Труды ЛПИ», 1965, № 252, с. 34—46.
67. Малинин Н. Н. Поверочный расчет на прочность дисков. — «Научные доклады Высшей школы. Машиностроение и приборостроение», 1958, № 1, с. 49—62.
68. Малинин Н. Н. Прочность турбомашин. М., Машгиз, 1962. 291 с.
69. Малинин Н. Н. Расчет вращающегося неравномерно нагретого диска переменной толщины. — В кн.: Инженерный сборник, 1953, т. 17, с. 151—163.
70. Малинин Н. Н., Хажинский Г. М. К построению теории ползучести с анизотропным упрочнением. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1969, № 3, с. 148—152.
71. Малинин Н. Н., Хажинский Г. М. Применение метода конечных элементов для решения осесимметричных и плоских задач теории упругости. — В кн.: Расчеты на прочность. М., «Машиностроение», 1975, вып. 16, с. 25—37.
72. Малкин Я. Ф. Профилирование турбинных дисков в связи с расчетом их на прочность и вибрацию. М., ОНТИ, 1937. 180 с.
73. Мандель В. С. Предельные числа оборотов несимметричных дисков. — «Труды Николаевского кораблестроительного института», 1968, № 26, с. 150—158.
74. Махутов Н. А. Концентрация напряжений и деформаций в упруго-пластической области. — «Машиноведение», 1971, № 6, с. 54—60.
75. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагружениях. Изд-во МГУ, 1965, 263 с.
76. Муштары Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткигоиздат, 1957. 431 с.
77. Нейбер Г. Концентрация напряжений. Пер. с нем. Под ред. проф. А. И. Лурье. М., Гостехиздат, 1947. 204 с.
78. Ниордсон Ф. И., Педерсон П. Обзор исследований по оптимальному проектированию конструкций. — «Механика», 1973, № 2, с. 136—157.
79. Новожилов В. В., Кадашев Ю. Н. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. — «Прикладная механика и математика», 1958, т. 22, вып. 1, с. 78—90.
80. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек. — «Прикладная механика и математика», 1948, с. 116—117.
81. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1, М., Машгиз, 1958. 950 с.
82. Постнов В. А., Хархурим И. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л., «Судостроение», 1974. 344 с.
83. Прагер В. Неизотермическое пластическое деформирование. — «Механика», 1959, № 5 (57), с. 95—101.
84. Прочность при малом числе циклов в нагружении. Под ред. С. В. Серенсена. М., «Наука», 1969. 257 с.
85. Прочность паровых турбин. Под ред. Л. А. Шубенко-Шубина. М., «Машиностроение», 1973. 456 с.
86. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах. Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Поновко. М., «Машиностроение», 1969. 831 с.
87. Рабинович В. П. Прочность турбинных дисков. М., «Машиностроение» 1969. с. 151.
88. Работнов Ю. Н. О диске равногo сопротивления. — «Прикладная механика и математика», 1948, т. 12, вып. 4, с. 463—464.
89. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966. 752 с.
90. Разани Р. Поведение равнонапряженной конструкции и ее отношение к конструкции минимального веса. — «Ракетная техника и космонавтика», 1965, № 12, с. 115—124.
91. Расчеты на прочность в машиностроении. М., Машгиз, 1956. 884 с.
92. Рис В. Ф. К расчету вращающихся дисков турбомашин. Диски с боковой нагрузкой. — «Советское котлостроение», 1938, № 1, с. 21—28.
93. Рис В. Ф. Расчет дисков турбомашин. М.—Л., Машгиз, 1959. 55 с.

94. Розенблюм В. М. Расчеты некоторых деталей турбин в условиях ползучести. — «Котлотурбостроение», 1951, № 4, с. 7—10.

95. Сайрег Г. А. Обзор работ по оптимизации механических конструкций. — В кн.: Динамические системы и управление. М., «Мир», 1972, № 2.

96. Серенсен С. В. Сопротивление деформированию и разрушению при малом числе циклов нагружения. М., «Наука», 1967. 170 с.

97. Серенсен С. В., Кобаев В. Т., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Справочное пособие. М., «Машиностроение», 1975. 488 с.

98. Табак Д., Куо Б. Оптимальное проектирование и математическое программирование. Пер. с англ. Под ред. Я. З. Цыпкина. М., «Наука», 1975. 297 с.

99. Теверовский И. Г. Исследование напряжений во вращающихся дисках со многими отверстиями. — «Советское котлотурбостроение», 1940, № 11, с. 402—411.

100. Темис Ю. М. Вариационно-разностный метод расчета упругопластических круглых пластинок. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1974, № 7, с. 16—21.

101. Теория гибких пластин. Сборник статей. Под ред. А. С. Вольмира. М., Изд-во иностр. лит., 1957. 208 с.

102. Термопрочность деталей машин. М., «Машиностроение», 1975. 454 с. Авт.: И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, И. В. Демьянушко, Р. Н. Сизова, Р. А. Дульнев.

103. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Пер. с англ. Под ред. Я. Г. Пановко. М., «Наука», 1967. 444 с.

104. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Киев, «Наукова думка», 1972. 501 с.

105. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., Физматгиз, 1963. 635 с.

106. Тумаркин С. А. Методы расчета напряжений во вращающихся дисках. — «Труды ЦАГИ», 1936, вып. 262, с. 42.

107. Тумаркин С. А. Расчет дисков с произвольной симметричной радиальной нагрузкой. — «Труды ЦАГИ», 1939, вып. 397, с. 44.

108. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. Пер. с англ. Под ред. А. А. Фельдбаума. М., «Наука», 1967. 267 с.

109. Угодчиков А. Г., Длугач М. И., Степанов А. Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. М., «Высшая школа», 1970. 528 с.

110. Уманский Э. С. Напряжения в диске от центробежных сил лопаток, распределенных несимметрично вдоль окружности. КПИ, 1950, т. 10, с. 69—74.

111. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А. Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1950. 445 с.

112. Хажинский Г. М. Упругопластический расчет диска при нестационарных режимах. — «Известия вузов. Машиностроение», 1968, № 2, с. 64—70.

113. Хейвуд Р. Б. Проектирование с учетом усталости. Пер. с англ. М., Машгиз, 1960. 450 с.

114. Шевченко Ю. Н., Пискунов В. В., Савченко В. Г. Решение осесимметричной пространственной задачи термопластичности на ЭЦВМ типа М-220. Киев, «Наукова думка», 1975. 107 с.

115. Шнейдерович Р. М. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружении. М., «Машиностроение», 1968. 343 с.

116. Шнейдерович Р. М., Гусенков А. П., Зацаринный В. В. Кинетические деформационные критерии циклического разрушения при высоких температурах. — «Проблемы прочности», 1973, № 2, с. 19—27.

117. Шорр Б. Ф. К теории неизотермического пластического деформирования при произвольных законах нагружения — В кн.: «Механика». КПИ, 1975, вып. 8, с. 107—114.

118. Шусторович Я. Л. Изгиб полуоткрытых колес радиальных турбомашин. — «Энергомашиностроение», 1965, № 10, с. 32—35.

119. Яновский М. И. Конструирование и расчет на прочность деталей паровых турбин. М., Изд-во АН СССР, 1947. 646 с.
120. Grammel R. Ein neues Verfahren Zur Berechnung Rotirender Scheiben Dingers. Polytechn. Journal, 1923, p. 217.
121. Donath M. Die Berechnung rotirender Scheiben und Ringe, Berlin, 1929.
122. Chan A. S. H., Henrywood K. K. The Analysis of Radial Flow Impellers by the Matrix Finit Element Method. «The Aeronautical Journal», 1971, vol. 75, No 732, p. 850—860.
123. Coffin L. F. A study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses in a Ductill Metals. «Trans. of the ASME», 1954, vol. 76, p. 931—950.
124. Hodge P. I., Papa I. Rotating Disks with no Plane of Symmetry. J. of Franklin Inst., 1957, vol. 263, N 6, pp. 505—523.
125. Holzer H. Die Berechnung der Scheibenräder. «Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen», 1913, s. 401.
126. Hook H., Jeeves T. Direct Search Solution of Numerical and Statistical problems. Journ. of ASME, 1961, p. 82.
127. Iaburek F. Die Festigkeit von radial beschanfelten Ianfrädern, Österreichische Ingen.—Archiv. Bd. 7, N 3, 1953.
128. Manson S. S. A Simple Procedure for Estimating High — Temperature Low — cycle Fatigue. J. Exp. Mech., August, 1968, p. 348.
129. Manson S. S. Fatigue: A. Complex Subject — Some Simple Approximations. J. Exper. Mechanics. July, 1965, p. 199.
130. Manson S. S. Thermal Stress and Low — Cycle Fatigue. N—J, 1966, 404 p.
131. Manson S. S., Halford G. R. A Method of Estimating High — Temperature Low — Cycle Fatigue Behaviour of Materials — Present. at Intern. Conf. on Thermal and High—Strain Fatigue», Inst. of Metals, London, 1967.
132. Petersen R. E. Stress Concentration Design Factors. John Wiley and Sons, 1953, 203 p.
133. Prager W. Minimum Weight Design of Plates. De Ingeniurs, 1955, v. 76, p. 141—142.
134. Seireg Ali, Surana K. S. Optimal Design of Rotating Disks. Trans. ASME, ser. B., J. of Eng. for Industr. vol. 92, N 1, 1970, p. 1—8.
135. Serensen S. Fatigue Failure Criteria in Large Range Member of Cycles, ASME, 1967, Semi—Int. Symposium, Proc. V. 1, p. 91—95.
136. Serensen S. V., Machutov N. A. Low—cycle Fracture Resistance in the Zones of Stress Concentration at High Temperatures. Proceeding 4 th Conf. on Dimens, Budapest, 1971, p. 195—212.
137. Stodola A. Dampf — und Gasturbinen, Berlin, 1922, s. 1109.
138. Stordahl H., Christensen H. Finit Element Analysis of Axisymmetric Rotors. J. Strain Analysis, 1969, vol. 4, No 3.

Оглавление

Введение	5
Г л а в а 1. Напряжения и деформации при осесимметричном растяжении дисков	8
§ 1. Основные уравнения растяжения	8
§ 2. Точные решения основного дифференциального уравнения	13
§ 3. Применение точных решений для приближенного расчета дисков переменной толщины	21
§ 4. Растяжение дисков произвольного профиля	24
Г л а в а 2. Напряжения и деформации при изгибе дисков	31
§ 5. Основные уравнения осесимметричного изгиба	31
§ 6. Учет больших прогибов	39
§ 7. Общий случай изгиба дисков	52
Г л а в а 3. Пластичность и ползучесть в дисках	68
§ 8. Деформационные теории пластичности и ползучести. Численные методы	68
§ 9. Учет истории нагружения	83
§ 10. Кинетика напряженно-деформированного состояния	105
Г л а в а 4. Методы расчетной оценки прочности и долговеч- ности дисков	114
§ 11. Запасы статической прочности	114
§ 12. Несущая способность дисков. Запасы по разрушающим оборотам	125
§ 13. Долговечность дисков при циклическом нагружении	133
Г л а в а 5. Объемное напряженное состояние дисков	153
§ 14. Основные соотношения метода конечных элементов для диска при осесимметричной нагрузке	153
§ 15. Решение основной системы уравнений. Структура программы. Примеры	161
§ 16. Упругопластический расчет методом конечных элементов	167
Г л а в а 6. Расчет дисков радиальных турбомашин	174
§ 17. Общие замечания. Расчет колес открытого типа	174
§ 18. Расчет колес с покрывающим диском	183
Г л а в а 7. Оптимальное проектирование дисков	201
§ 19. Постановка задачи оптимального проектирования дисков	201
§ 20. Практические примеры	209
§ 21. Оптимальное проектирование дисков с учетом требований к ча- стоте собственных колебаний	214
Приложения	219
Список литературы	241
	247

ИБ № 1419

Ирина
Вадимовна
Демьянушко,
Исаак
Аронович
Биргер

**РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ
ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ**

Редактор
И. И. Лесниченко

Художественный редактор
П. П. Рогачев

Технический редактор
А. И. Захарова

Корректор
Ж. Л. Суходолова

Переплет художника
А. Я. Михайлова

Сдано в набор 25.07.78. Подп. в печать 08.08.78.
Т-09473. Формат 60×90^{1/16}.

Бумага типографская № 1.

Гарнитура литературная. Печать высокая.

Усл. печ. л. 15,5. Уч.-изд. л. 17,2

Тираж 12 000 экз. Заказ 740. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Машиностроение»,
107885, Москва, ГСП-6, 1-й Басманный пер., 3

Ленинградская типография № 6
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете
Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10