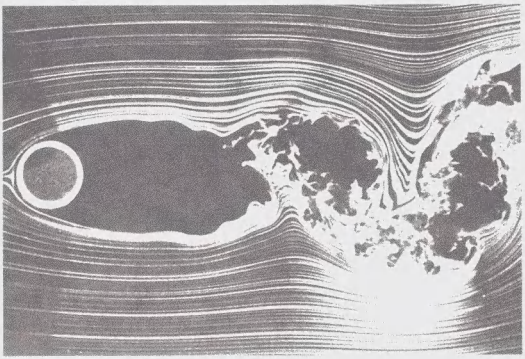
Высшее образование

Классики отечественной науки

Л. Г. Лойцянский

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА



ДРОФА

Имя Льва Герасимовича Лойцянского — ученого, педагога, занимающего славное место в когорте выдающихся механиков XX века, — как нельзя лучше подходит для того, чтобы открыть собою начатую издательством «Дрофа» серию «Классики отечественной науки».

Академик *Г. Г. Черный*

Знаменитые учебники Л. Г. Лойцянского по теоретической механике (написанные совместно с А. И. Лурье) и по механике жидкости и газа уже более полувека рекомендованы учебными программами вузов как основные и еще долго будут настольными книгами всех наших инженеров-исследователей.

Существенной отличительной особенностью настоящего учебника является то, что его автору принадлежит ряд важных новых результатов в механике жидкости и газа, которые читатель и учащийся получает из первых рук, в методически совершенном изложении. Учебник в равной мере пригоден для студентов и аспирантов как университетов (в правильном традиционном понимании этого названия), так и других институтов.

Профессор *Г. Ю. Степанов*

Популярность «Механики жидкости и газа» обусловлена в первую очередь исключительной широтой охвата материала — от классических основ до новейших направлений механики текучих сред. Книга привлекает последовательностью и четкостью выводов, применением удобного математического языка, прозрачностью физических трактовок.

Заслуженный деятель науки РФ, профессор *Ю. В. Лапин*

Вся творческая и педагогическая деятельность Льва Герасимовича Лойцянского (1900—1991) после окончания им в 1921 г. физико-математического отделения Таврического университета связана с Петроградским (впоследствии Ленинградским) политехническим институтом, в который его приглашают в 1922 г. в качестве ассистента выдающегося ученого А. А. Фридмана. В 1935 г. по инициативе Л. Г. Лойцянского в ЛПИ создается кафедра гидроаэродинамики, которой он заведует вплоть до 1975 г. В 1935 г. ВАК по представлению С. А. Чаплыгина без защиты присуждает Л. Г. Лойцянскому ученую степень доктора физико-математических наук (профессорское звание он получил еще в 1929 г.).

В предвоенные годы ученого приглашают консультантом в ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского; это сотрудничество особенно интенсивно развивается во время войны и вплоть до 1946 г. и получает признание присуждением ему (совместно с А. А. Дородницыным) Сталинской премии.

Настольной книгой многих поколений механиков становится фундаментальный труд Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье «Курс теоретической механики».

Работы Л. Г. Лойцянского стали основополагающими в динамике вязкой жидкости, теории газовой смазки, теории ламинарных и турбулентных струй, теории пограничного слоя, теории турбулентности.

Заслуги ученого отмечены присвоением звания заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, избранием действительным членом Международной академии астронавтики (1970), иностранным членом польского Общества теоретической и прикладной механики (1972), почетным членом Общества югославских механиков (1982).

Глубокая научная эрудиция, прирожденный талант полемиста, необычайная находчивость в научных дискуссиях сделали имя Льва Герасимовича одним из самых популярных в отечественной механике.

Классики отечественной науки

Л. Г. Лойцянский

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Издание седьмое, исправленное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 010500
«Механика»



ДРОФА
МОСКВА 2003

Scanned by Me
forFree

УДК 533(075.8)
ББК 22.253я73
Л72

Серия «Классики отечественной науки» основана в 2003 году

Рецензенты:
академик РАН, председатель НМС по МЖГ *Г. Г. Черный*
(НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова);
засл. деят. науки РФ, проф., д-р физ.-мат. наук *Ю. В. Лапин*
(зав. кафедрой гидроаэродинамики СПбГПУ)
проф., д-р физ.-мат. наук *Г. Ю. Степанов*
(НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Лойцянский Л. Г.
Л72 Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. — 7-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с., 311 ил., 22 табл. — (Классики отечественной науки).
ISBN 5—7107—6327—6

В учебнике (6-е изд. — 1987 г.) содержится изложение основных разделов механики жидкости и газа: кинематики, статики и динамики однородных идеальных и вязких сред, а также элементов динамики реологических жидкостей и многокомпонентных газовых смесей. Представлены аналитические и численные методы интегрирования уравнения динамики жидкостей и газов. Особое внимание уделено задачам теории ламинарного и турбулентного пограничных слоев.

Для студентов вузов и втузов, инженеров, аспирантов и научных работников.

УДК 533(075.8)
ББК 22.253я73

Учебное издание

Лойцянский Лев Герасимович

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Учебник для вузов

Зав. редакцией *Б. В. Понкратов*
Редактор *Е. А. Вольмир*
Художественное оформление *Ю. В. Христич*
Технические редакторы *Н. А. Торгашова, И. В. Грибкова*
Компьютерная верстка *А. В. Перепелкин*

Изд. лиц. № 061622 от 07.10.97.
Подписано в печать 28.12.02. Формат 70×108 1/16. Бумага типографская. Гарнитура «Литературная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 73,5. Тираж 7000 экз. Заказ № 9487.
ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.
По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49. Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.
Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.
Магазин «Переплетные птицы». 127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.
Тел.: (095) 912-45-76.
Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат».
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

ISBN 5—7107—6327—6

© ООО «Дрофа», 2003
© Оформление. ООО «Дрофа», 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к шестому изданию 8

Введение 9

§ 1. Предмет механики жидкости и газа. Математическая модель жидкости и газа — сплошная текучая среда 9

§ 2. Краткие сведения о молекулярной структуре вещества 10

Глава I. **Поле физической величины. Условия физической объективности величин, заданных аналитически. Основные операции поля** 12

§ 3. Скалярные и векторные поля. Условия физической объективности заданных аналитически скалярных и векторных величин 12

§ 4. Тензор второго ранга. Условия физической объективности его аналитического задания. Диада и тензор поворота 15

§ 5. Основные операции тензорной алгебры 18

§ 6. Разложение тензора на симметричную и антисимметричную части. Инварианты Разложение тензора на сферическую и девиаторную части 22

§ 7. Главные оси и главные значения симметричного тензора 24

§ 8 Производная по заданному направлению. Пространственные производные в скалярном, векторном и тензорном полях 27

§ 9. Мера неоднородности векторного поля — дифференциальная диада и ее составляющие: деформация и ротация векторного поля . . . 33

§ 10. Основные интегральные формулы поля. Теоремы Гаусса — Остроградского и Стокса 36

Глава II. **Кинематика сплошной среды** 40

§ 11. Задание положения и движения сплошной среды. Линии тока и траектории. Трубки тока и струи 40

§ 12. Распределение скоростей в элементарном объеме среды. Первая теорема Гельмгольца 44

§ 13. Деформационное движение жидкости. Тензор скоростей деформаций и кинематический смысл его компонент. Главные оси тензора скоростей деформаций 47

§ 14. Вихрь, вихревая линия, вихревая трубка. Вторая теорема Гельмгольца 50

§ 15. Теорема Стокса о связи между интенсивностью вихревой трубки и циркуляцией скорости по опоясывающему ее контуру 52

§ 16. Ускорение частицы среды. Локальная и конвективная составляющие ускорения. Полное ускорение 53

§ 17. Кинематическая теорема Кельвина 56

Глава III **Распределение массы и силы в сплошной среде. Равенства Коши. Теорема о взаимности касательных напряжений** 58

§ 18. Плотность распределения массы в сплошной среде. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности 58

§ 19 Распределение сил в сплошной среде. Объемные и поверхностные силы. Равенства Коши. Тензор напряжений 60

§ 20 Теорема о взаимности касательных напряжений 64

Глава IV **Общие теоремы динамики сплошной среды** 67

§ 21. Теорема количеств движения. Уравнение динамики «в напряжениях» 67

§ 22 Теорема моментов и вывод из нее теоремы о взаимности касательных напряжений 69

§ 23. Теорема об изменении кинетической энергии и общий закон сохранения энергии 71

§ 24. Перенос физической величины потоком среды сквозь поверхность. Теорема Эйлера 74

§ 25. Статика текучей среды. Уравнения Эйлера равновесия среды . . 78

§ 26. Равновесие несжимаемой жидкости. Закон Архимеда 80

§ 27. Равновесие равномерно вращающейся несжимаемой жидкости. Центрифугирование твердых частиц 83

§ 28. Баротропное равновесие газа 84

Глава V. **Динамика идеальной среды. Основные уравнения и теоремы** . . 86
§ 29. Уравнения Эйлера, Громека — Ламба и Гельмгольца — Фридмана. Теорема Гельмгольца 86
§ 30. Теорема Бернулли 90
§ 31. Мощность внутренних сил. Уравнение баланса энергии 96
§ 32. Скорость распространения малых возмущений в идеальном газе. Скорость звука 101
§ 33. Числа M и λ. Изэнтропические формулы 106

Глава VI. **Одномерный поток идеального газа** 112
§ 34. Одномерное стационарное движение газа по трубе переменного сечения 112
§ 35. Истечение газа сквозь сопло 115
§ 36. Пример неадиабатического движения газа 120
§ 37. Неизэнтропическое движение газа по трубе при наличии сопротивления 121
§ 38. Плоская ударная волна и скачок уплотнения 124
§ 39. Изменение скорости и термодинамических параметров газа при прохождении его через прямой скачок уплотнения 129
§ 40. Скорости распространения ударной волны и спутного потока за нею 134
§ 41. Элементарная теория сверхзвукового диффузора 137
§ 42. Измерение до- и сверхзвуковых скоростей пневматическими методами 142
§ 43. Нестационарное одномерное течение идеального газа. Распространение возмущений конечной интенсивности 144
§ 44. Волны разрежения за движущимся поршнем. Центрированные волны Автомодельная и общая задачи 151
§ 45. Элементарная теория ударной трубы 155

Глава VII. **Безвихревые движения идеальной среды. Плоское безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости** 158
§ 46. Теоремы Кельвина и Лагранжа; условия существования безвихревых течений 158
§ 47. Потенциал скоростей и его определение по заданному полю скоростей 160
§ 48. Интеграл Лагранжа — Коши. Некоторые общие свойства безвихревого движения 163
§ 49. Плоское безвихревое движение несжимаемой жидкости. Применение функций комплексного переменного 167
§ 50. Комплексные потенциалы простейших потоков 172
§ 51. Решение задачи обтекания по методу конформных отображений. Постулат Жуковского — Чаплыгина. Формула циркуляции . . . 178
§ 52. Примеры применения метода конформных отображений. Обтекание эллипса и пластинки 183
§ 53. Крыловые профили Жуковского — Чаплыгина 190
§ 54. Главный вектор и главный момент сил давления потока на замкнутый контур. Формулы Чаплыгина. Теорема Жуковского. Коэффициенты подъемной силы и момента пластинки 192
§ 55. Теория тонкого профиля (дужки) 198
§ 56. Теорема Жуковского о подъемной силе профиля в решетке . . . 204
§ 57. Применение метода конформных отображений в теории струйных течений 206

Глава VIII. **Плоское безвихревое движение идеального газа** 214
§ 58. Основные уравнения движения и их линеаризация 214
§ 59. Дозвуковое обтекание тонкого профиля. Правило Прандтля — Глауэрта 218
§ 60. Сверхзвуковое обтекание тонкого профиля. Формулы Аккерета . . 221
§ 61. Законы подобия плоских до- и сверхзвуковых обтеканий тонкого профиля. Случай околозвукового обтекания 227
§ 62. Сужающийся сверхзвуковой поток. Косой скачок уплотнения . . 235
§ 63. Расширяющийся сверхзвуковой поток. Движение газа в секторе разрежения 247
§ 64. Случай больших чисел Маха. Закон подобия гиперзвуковых потоков 252
§ 65. Уравнения газовой динамики в плоскости годографа скорости . . 256
§ 66. Влияние сжимаемости на распределение скоростей и давлений в плоском дозвуковом потоке 258
§ 67. Околокритическое обтекание крылового профиля 267
§ 68. Плоский сверхзвуковой поток. Общие свойства характеристик. Графический метод расчета сверхзвуковых течений 268

Глава IX. **Пространственное безвихревое движение жидкости и газа** . . 277
§ 69. Потенциалы скоростей простейших пространственных потоков . . 277
§ 70. Поле скоростей, индуцируемое заданной системой вихрей в безграничной жидкости. Формула Био — Савара 281

§ 71. Потенциал поля скоростей, индуцированного замкнутой вихревой нитью 284
§ 72. Функция тока в пространственных движениях 285
§ 73. Обтекание сферы. Парадокс Даламбера 288
§ 74. Уравнение продольного осесимметричного движения. Течение сквозь каналы 293
§ 75. Осесимметричное продольное обтекание тел вращения 297
§ 76. Поперечное обтекание тел вращения 303
§ 77. Применение метода особенностей для расчета продольного и поперечного обтеканий тел вращения Тела большого удлинения . . . 306
§ 78. Элементарная теория крыла конечного размаха 309
§ 79. Общий случай движения твердого тела в безграничной идеальной несжимаемой жидкости. Задача Кирхгофа 319
§ 80. Осесимметричное до- и сверхзвуковое обтекание тонкого тела вращения 330
§ 81. Законы подобия обтекания тонких тел вращения и тонких крыльев конечного размаха 342
§ 82. Продольное сверхзвуковое обтекание кругового конуса. Конический скачок уплотнения 348
§ 83. Сверхзвуковое обтекание тонкого тела вращения при очень больших числах Маха 354

Глава X. **Динамика несжимаемой вязкой жидкости (линейные задачи)** . 359
§ 84. Ньютоновская вязкая жидкость и ее реологическое уравнение . . 359
§ 85. Реологические законы неньютоновских вязких несжимаемых жидкостей 364
§ 86. Уравнения Навье — Стокса динамики ньютоновской несжимаемой среды 369
§ 87. Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости 373
§ 88. Основы теории размерностей. П-теорема 382
§ 89. Примеры решения уравнений Навье — Стокса. Простейшие линейные задачи 386
§ 90 Установившееся движение вязкопластической жидкости по цилиндрической трубе кругового профиля 396
§ 91. Установившееся движение электропроводной вязкой жидкости по трубам при наличии поперечного магнитного поля 399
§ 92. Пульсирующее ламинарное движение вязкой жидкости по цилиндрической трубе кругового профиля 409
§ 93. Диссипация механической энергии в потоке вязкой жидкости. Вариационный принцип Гельмгольца 412
§ 94. Диффузия завихренности 416
§ 95. Диффузия тепла и вещества в потоках несжимаемой вязкой жидкости 420

Глава XI. **Интегрирование уравнений Навье — Стокса: линеаризованные, автомодельные и численные решения** 423
§ 96. Обтекание шара при малых значениях числа Рейнольдса; формула Стокса и ее обобщения 423
§ 97. Пространственное движение вязкой жидкости между близкими параллельными плоскостями. «Спектры» Хили-Шоу. Закон Дарси . . . 429
§ 98. Движение вязкой жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами. Задача о скольжении ползуна вдоль плоскости, покрытой вязкой жидкостью 432
§ 99. Гидродинамическая теория смазки подшипника. Плоская задача . 437
§ 100. Пространственная задача гидродинамической теории смазки. Сферические подшипники и подвесы 441
§ 101. Применение теории размерностей к определению структуры решений уравнений Навье — Стокса. Автомодельные решения 451
§ 102. Методы численного решения уравнений Навье — Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости 458
§ 103. Пример численного решения внутренней задачи: циркуляционное течение в каверне 477
§ 104. Численное исследование обтекания кругового цилиндра при умеренных числах Рейнольдса 487

Глава XII. **Ламинарный пограничный слой в несжимаемой жидкости** . . 497
§ 105. Взаимодействие конвекции и диффузии в потоке несжимаемой вязкой жидкости. Ламинарный пограничный слой 497
§ 106. Вывод уравнений Прандтля движения вязкой жидкости в ламинарном пограничном слое. Явление отрыва 501
§ 107. Различные формы уравнений Прандтля. Уравнения Мизеса и Крокко 507
§ 108. Простейшие автомодельные решения уравнений ламинарного пограничного слоя. Пограничный слой на продольно обтекаемой пластинке . 509

§ 109 Примеры плоских «свободных» пограничных слоев: дальний след за телом, «затопленная» струя, бьющая из точечного источника . . 514
§ 110 Задача о плоской «пристенной» струе 521
§ 111. Общий случай точных автомодельных решений уравнений стационарного плоского пристенного пограничного слоя 524
§ 112. Приближенные методы расчета ламинарных пограничных слоев. Интегральное соотношение Кармана. Методы Польгаузена и Кочина — Лойцянского 531
§ 113. Обобщение аффинного подобия на неавтомодельные течения в пограничных слоях. Метод обобщенного подобия 538
§ 114. Примеры применения метода обобщенного подобия 549
§ 115 Пространственные пристенные пограничные слои. Свободные пространственные струи 559
§ 116 Плоский нестационарный пограничный слой 571
§ 117. Температурный и концентрационный пограничные слои в несжимаемой жидкости 576

Глава XIII. **Турбулентные движения несжимаемой вязкой жидкости** . . . 584
§ 118. Неустойчивость ламинарных режимов течений и возникновение турбулентности 584
§ 119. Переходные явления в пограничном слое. Кризис сопротивления тел плохо обтекаемой формы 590
§ 120. Уравнения Рейнольдса осредненного турбулентного движения . . 606
§ 121 Некоторые сведения о внутренней структуре турбулентных потоков . 615
§ 122 Перенос импульса, тепла и примесей в турбулентных движениях. Гипотезы Буссинеска, Фурье и Фика 623
§ 123. Теория «пути смешения» Прандтля 630
§ 124 «Свободная» турбулентность. Затопленные струи. Дальний след . 635
§ 125 Двухслойная схема «пристенной» турбулентности. Логарифмический профиль скоростей 648
§ 126 Логарифмические и степенные формулы сопротивления гладких и шероховатых труб 658
§ 127. Эмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине с гладкой и шероховатой поверхностями 666
§ 128 Эмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя с произвольным распределением скорости на внешней границе . . . 673
§ 129 Полуэмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине 679
§ 130. Интегральные методы расчета турбулентных пограничных слоев . 681
§ 131. Сопротивление тела, движущегося в жидкости. Профильное сопротивление Сопротивление трения. Сопротивление давления 683
§ 132 Приближенные формулы профильного сопротивления 688

Глава XIV **Некоторые современные методы расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости** 695
§ 133. «Моментные» методы теории турбулентного пограничного слоя . . 695
§ 134 Введение в метод моментов первого порядка. Двухслойная схема . 696
§ 135 «Пристенная» подобласть турбулентного пограничного слоя. Взаимодействие молекулярной и турбулентной вязкостей 697
§ 136 Тепломассоперенос в «пристенной» подобласти 705
§ 137 «Внешняя» подобласть турбулентного пограничного слоя. Гипотеза Клаузера 717
§ 138. Результаты численных расчетов турбулентных пограничных слоев по методу моментов первого порядка 724
§ 139 Обзор применений моделей второго порядка. Модели: «$k-\varepsilon$», «$\overline{u'v'}-k-\varepsilon$» 730
§ 140. Релаксационные явления в турбулентных пограничных слоях. Релаксационное уравнение Хинце 732

Глава XV. **Динамика вязкого газа** 740
§ 141. Основные уравнения движения вязкого газа 740
§ 142. Условия подобия потоков вязкого газа 748
§ 143. Ламинарный пограничный слой при движении газа с большими скоростями 751
§ 144 Ламинарный пограничный слой на пластине, продольно обтекаемой газом с большими скоростями 759
§ 145. Ламинарный пограничный слой на конусе в продольном сверхзвуковом потоке 772
§ 146. Ламинарный пограничный слой при больших скоростях и наличии продольного перепада давлений 777

§ 147. Преобразование уравнений ламинарного пограничного слоя в газе к форме уравнений для несжимаемой жидкости 787
§ 148. Метод обобщенного подобия в теории ламинарного пограничного слоя в газовом потоке больших скоростей 791
§ 149. Ламинарный пограничный слой в сверхзвуковом потоке смеси реагирующих между собой газов 798
§ 150. Взаимодействие ламинарного пограничного слоя с внешним невязким сверхзвуковым потоком 807
§ 151. Турбулентный пограничный слой на пластинке, продольно обтекаемой газом 815
§ 152. Турбулентный пограничный слой в газовом потоке при наличии продольного градиента давлений 827

Именной указатель 831
Предметный указатель 835

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание подверглось значительной переработке с целью, с одной стороны, приблизить его содержание к задачам учебника, а с другой — обновить изложение некоторыми новыми современными вопросами.

Не имея возможности увеличивать и без того уже значительный объем книги, пришлось поступиться некоторыми специальными разделами механики жидкости и газа, не отвечающими задачам настоящего общего курса. Так, в динамике неоднородной жидкости опущен вопрос о движении многофазных сред и сохранен только вывод уравнений многокомпонентных потоков газа, тесно связанный с описанием явлений диссоциации и ионизации молекул при сверхзвуковых течениях газа. Не включен также раздел, посвященный макроскопическому подходу к расчету потоков запыленного газа, уступающему место методам кинетической теории молекулярных движений. По той же причине исключен параграф об исследовании скачка уплотнения с точки зрения динамики сплошных сред и некоторые другие вопросы, затрагивавшиеся в предыдущем издании.

В отличие от предыдущих изданий, где лишь приведены формулы векторного и тензорного исчислений, в настоящем издании помещено краткое систематическое изложение основ этой области математики. В дополнение к элементам теории подобия дано представление о теории размерности и доказательство основной теоремы этой теории.

Вновь написаны три параграфа, содержащие изложение некоторых общих методов численного интегрирования дифференциальных уравнений и иллюстрации их применений к уравнениям Навье—Стокса динамики вязкой жидкости. Значительная переработка содержания главы о турбулентности привела к появлению новой главы, специально посвященной методам расчета турбулентных пограничных слоев. Во многих местах учебника устранены замеченные методические просчеты.

Доктор физ.-мат. наук, профессор Г. Ю. Степанов с исключительным вниманием прочитал рукопись и сделал большое число важных для качества книги научных и методических замечаний.

Доктор физ.-мат. наук, профессор Ю. В. Лапин прочел в рукописи главу XIV и сделал по ней ряд полезных замечаний. В работе над рукописью и корректурами неоценимую помощь оказал доцент кафедры гидроаэродинамики Ленинградского политехнического института канд. физ.-мат. наук С. Б. Колешко, который не только осуществил научное редактирование рукописи и сделал много полезных замечаний, но и составил три новых параграфа (§ 103—105), посвященных численному решению задач динамики вязкой жидкости. Считаю своим долгом принести названным лицам свою сердечную благодарность.

От редактора

В подготовке настоящего издания большая помощь была оказана коллегами Льва Герасимовича — сотрудниками кафедры гидроаэродинамики СПбГПУ, в особенности С.Б.Колешко, и дочерью автора И.Л.Лойцянской.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет механики жидкости и газа. Математическая модель жидкости и газа — сплошная текучая среда

Все материальные тела, независимо от их агрегатного состояния: твердого (кристаллического или аморфного), жидкого или газообразного, обладают внутренней *молекулярной* (атомной) структурой с характерным внутренним тепловым, *микроскопическим* движением молекул, являющимся причиной наблюдаемых на практике *макроскопических* процессов. В отличие от кинетической теории вещества, механика жидкости и газа занимается только этой *макроскопической* моделью, представляющей жидкости и газы как некоторую *сплошную текучую среду с непрерывным* (строго говоря, кусочно-непрерывным) *распределением физических величин*, определяющих ее движение и состояние.

Подобно тому, как предметом теоретической механики принято считать модели материальных точек и частного случая сплошной среды — абсолютно твердого тела, предметом механики жидкости и газа служит модель *сплошной деформируемой среды*, обладающей, в отличие от упругого тела, *неограниченной* деформируемостью — текучестью. Это свойство выражается прямой зависимостью в такой среде *касательных напряжений от скорости деформации сдвига* (подчеркнем: скорости деформации, а не самой деформации). Равенство нулю скорости деформации сдвига, например, при покое среды, означает и отсутствие в ней касательных напряжений, но пропорциональность этих двух величин имеет место только в частном случае так называемых *ньютоновских* жидкостей. Как будет показано далее в § 85 и 90, существуют жидкости с *аномальной* текучестью, у которых одновременное равенство нулю скоростей сдвига и касательных напряжений может не осуществляться. Этими и другими неньютоновскими жидкостями занимается общая наука о текучести сред — *реология*.

Используемой в настоящем курсе модели сплошной среды приписываются *феноменологические* свойства: плотность, силовая напряженность, деформируемость, вязкость, тепло- и электропроводность, намагничиваемость и др., сущность которых на молекулярном уровне не рассматривается; эти вопросы — предмет специальных разделов физики.

Применительно к среде в целом и к отдельным ее частям *постулируется* возможность применения общих законов механики *дискретной* системы материальных точек: сохранения массы, количества движения, момента количества движения, механической и общей термодинамической энергии. Из этих общих механических законов выводятся основные *дифференциальные уравнения механики жидкости и газа* и следующие из них общие *интегралы или теоремы*. Полная определенность в применениях этих уравнений требует учета дополнительных *феноменологических законов*: уравнения состояния, закона Ньютона — для вязкости, Фурье — для теплопроводности, Фика — для диффузии, и других.

§ 2. Краткие сведения о молекулярной структуре вещества

В зависимости от количественного соотношения между кинетической энергией движения молекул и потенциальной энергией межмолекулярного силового взаимодействия возникают различные молекулярные структуры и разновидности внутреннего движения молекул.

В *твердых телах* основное значение приобретает *молекулярная энергия взаимодействия* молекул, вследствие чего молекулы располагаются в правильные кристаллические решетки с положениями *устойчивого* равновесия в узлах этой решетки. Тепловые движения в твердом теле представляют собой малые колебания молекул относительно узлов решетки с высокой частотой (порядка 10^{12} Гц) и амплитудой, пропорциональной расстояниям между узлами решетки. В молекулярной структуре твердого тела обеспечиваются как «ближний», так и «дальний» порядки. К твердым телам относятся также вещества в *аморфном* состоянии, не имеющие кристаллической структуры, но обладающие «ближним» порядком, во многом схожим с таковым в жидкостях (см. далее). Аморфные состояния мало устойчивы и легко переходят в кристаллические.

В противоположность твердому телу, в *газах* отсутствуют как ближний, так и дальний порядки. Молекулы газа совершают беспорядочное движение, причем взаимодействие их сводится только к столкновениям. В промежутках между столкновениями взаимодействием между молекулами пренебрегают, что соответствует малости потенциальной энергии силового взаимодействия молекул по сравнению с кинетической энергией их хаотического движения. Среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями молекул определяет «длину свободного пробега». Скорость «пробега» молекул сравнима со скоростью распространения малых возмущений (скоростью звука) в данном состоянии газа.

Жидкие тела по своей молекулярной структуре и тепловому движению занимают *промежуточное* положение между твердыми и газообразными телами. По существующим воззрениям вокруг некоторой, приобретающей роль *центральной*, молекулы группируются соседние молекулы, совершающие малые колебания с частотой, близкой к указанной ранее для колебаний молекул твердого тела в решетке, и амплитудой порядка среднего расстояния между молекулами. Центральная молекула либо (при покое жидкости) остается неподвижной, либо *мигрирует* со скоростью, по величине и направлению совпадающей с местной средней скоростью макроскопического движения жидкости. В молекулярной структуре жидкости потенциальная энергия взаимодействия молекул *сравнима по порядку* с кинетической энергией их теплового движения; при этом обнаруживается *ближний* порядок, но отсутствует *дальний*. Доказательством наличия колебаний молекул в жидкостях служит известное «броуновское движение» мельчайших твердых частиц, внесенных в жидкость. Колебания этих частиц легко наблюдаются в поле микроскопа и могут рассматриваться как результат соударения твердых частиц с молекулами жидкости.

Различие в молекулярной структуре и тепловых движениях твердых, жидких и газообразных тел наглядно обнаруживается в явлении *диффузии*, заключающейся в распространении одного вещества (включения) в другое (носитель). Диффузия одного газа в другом (например, распространение запаха в воздухе) благодаря интенсивному молекулярному движению приводит к быстрому проникновению запаха в самые удаленные уголки помещения. Наоборот, диффузия жидкости в жидкости из-за слабой миграции центральных молекул, связывающих группы молекул, происходит значительно медленнее. Ярким примером

может служить исторический опыт Рейнольдса, вводившего в спокойно движущийся (ламинарный) поток воды сквозь цилиндрическую грубу тонкую струйку красящего вещества. Струйка вдоль почти всего рабочего участка трубы не меняла заметно свою толщину, что говорит о медленной *молекулярной* диффузии, присущей ламинарному движению воды. При переходе к турбулентному режиму течения, когда молекулярный механизм диффузии заменяется турбулентным перемешиванием конечных макрообъемов жидкости, возникает интенсивная турбулентная диффузия, и красящее вещество быстро заполняет весь поток.

Заметим, что явление диффузии, хотя значительно более слабое, чем в жидкостях, имеет место и в твердых телах. Два плотно притертых друг к другу образца из разных металлов спустя длительное время обнаруживают взаимное проникновение молекул.

Задачи астрофизики, связанные с изучением ионосферы, «звездных облаков» и других астрономических объектов, и особенно разнообразные физико-технические проблемы создания термоядерных реакторов, магнитогидродинамических генераторов для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую заметно повысили интерес к вопросам динамики ионизованных газов (плазмы).

В отличие от обычных электронейтральных газов, в которых силовое взаимодействие хаотически движущихся молекул проявляется лишь при их взаимных соударениях, в плазме благодаря высокой концентрации заряженных частиц возникают гораздо более существенные *кулоновские* взаимодействия. Это придает плазме особые свойства, в частности повышенную электропроводность, наиболее заметно проявляющиеся при воздействии на плазменные потоки внешних электрических и магнитных полей.

Исключительные по своему физическому значению и прикладным возможностям и вместе с тем весьма специфические свойства, которыми обладает плазма, привели к представлению о ней как о четвертом (после твердого, жидкого и газообразного) агрегатном состоянии вещества [1]).

---

[1]) Подробный очерк о свойствах плазмы и явлениях в ней можно найти в статье Б. Б. Кадомцева «Плазма» (Физ. энцикл. слов. Т. 4.— М.: Сов. энциклопедия, 1965, с. 15—24). См. также разделы 1.3 и 1.4 в монографии: Лукьянов Г. А. Сверхзвуковые струи плазмы.— Л.: Машиностроение, 1985, с. 13—21 и приведенный в ней список литературы.

ГЛАВА I

ПОЛЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ. УСЛОВИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ОБЪЕКТИВНОСТИ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИ. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ПОЛЯ

§ 3. Скалярные и векторные поля. Условия физической объективности заданных аналитически скалярных и векторных величин

Полем физической величины (скорости, ускорения, давления, плотности, температуры и т. д.) называют совокупность значений этой величины, однозначно определенных в каждой точке некоторой части пространства. Могут существовать *скалярные*, *векторные* и, как мы далее увидим, *тензорные* поля в зависимости от рода той величины, распределение которой задается полем.

Если во всех точках поля скалярные, векторные или тензорные величины имеют одно и то же значение, то поле называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*. Поля физических величин могут не изменяться с течением времени — быть *стационарными*, а могут изменяться — быть *нестационарными*.

Поле скалярной величины φ (например, температуры, давления, плотности) аналитически задается в виде функции координат точек поля и времени ($\boldsymbol{r}$ — текущий вектор-радиус точки M пространства)

$$\varphi=\varphi(x, y, z; t)=\varphi(M; t)=\varphi(\boldsymbol{r}; t). \tag{1}$$

Время здесь рассматривается как параметр, отмечающий отдельные моменты, к которым относятся поля, если они нестационарны, и может быть опущено, если поля стационарны.

Поле *векторной* величины $\boldsymbol{a}$ (скорости, ускорения, силы и т. п.) задается векторной функцией координат точек M и времени

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x, y, z; t)=\boldsymbol{a}(M; t)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}; t) \tag{2}$$

или тремя проекциями вектора $\boldsymbol{a}$

$$a_x=a_x(x, y, z; t), \quad a_y=a_y(x, y, z; t), \quad a_z=a_z(x, y, z; t). \tag{3}$$

Для сокращения объема записи будем часто пользоваться, взамен буквенной, *числовой* индексацией координат и проекций векторов, полагая

$$x=x_1, \quad y=x_2, \quad z=x_3; \quad a_x=a_1, \quad a_y=a_2, \quad a_z=a_3,$$

и писать вместо (3)

$$a_i=a_i(x_1, x_2, x_3; t) \qquad (i=1, 2, 3).$$

Кроме того, следуя приему, указанному Эйнштейном, будем опускать знак суммы $\sum$ перед суммируемыми одночленами, если индекс, по которому производится суммирование, повторяется в одночлене два раза. Так, например,

$$c_k=\sum_{l=1}^{3} a_l b_{lk}=a_l b_{lk} \qquad (k=1, 2, 3),$$

$$f_{pq}=\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} a_{pl} b_{qm} c_{lm}=a_{pl} b_{qm} c_{lm} \qquad (p, q=1, 2, 3).$$

Повторяющиеся два раза индексы, по которым производится суммиро-

вание, называют «немыми»; их обозначения можно в процессе вычисления менять:

$$c_k = a_l b_{kl} = a_m b_{km} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Остальные индексы (как, например, k в предыдущей формуле) сохраняются в каждом данном процессе вычисления неизменными — их называют «свободными».

Напомним необходимые для дальнейшего формулы аналитической геометрии, выражая их в принятых только что обозначениях.

Рассмотрим две системы *прямоугольных* декартовых координат: $Ox_1x_2x_3$ и $Ox_1'x_2'x_3'$ (рис. 1), имеющих общее начало в точке O, но как угодно повернутых друг по отношению к другу. Обозначим *косинусы* углов между «новыми» (штрихованными) и «старыми» осями через α_{kl} согласно таблице

	x_1	x_2	x_3
x_1'	α_{11}	α_{12}	α_{13}
x_2'	α_{21}	α_{22}	α_{23}
x_3'	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(I)

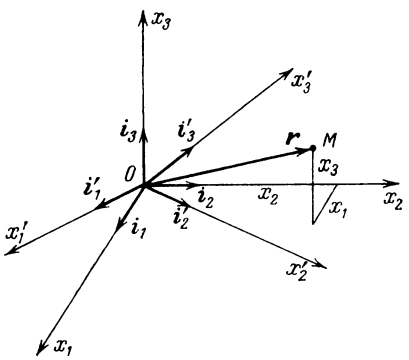


Рис. 1

Каждой системе координат сопоставим свою *совокупность единичных векторов, направленных по осям координат* и называемых *базисом* координатной системы. Таких базисов в данном случае *два*: i_1, i_2, i_3 и i_1', i_2', i_3'. Вектор-радиус r точки M можно разложить по этим базисам, положив

$$r = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 = x_1' i_1' + x_2' i_2' + x_3' i_3'. \tag{4}$$

Умножая скалярно обе части этого равенства последовательно на i_1, i_2, i_3 или на i_1', i_2', i_3', вспоминая, что

$$i_k \cdot i_l = i_k' \cdot i_l' = \delta_{kl} := \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \tag{5}$$

и замечая еще, что, согласно таблице (I),

$$i_k' \cdot i_l = \alpha_{kl}, \tag{6}$$

получим следующие формулы преобразования «старых» координат x_1, x_2, x_3 в «новые» x_1', x_2', x_3':

$$x_k' = \alpha_{k1} x_1 + \alpha_{k2} x_2 + \alpha_{k3} x_3 = \alpha_{kl} x_l \quad (k = 1, 2, 3) \tag{7}$$

или, наоборот, «новых» x_1', x_2', x_3' в «старые» x_1, x_2, x_3:

$$x_k = \alpha_{1k} x_1' + \alpha_{2k} x_2' + \alpha_{3k} x_3' = \alpha_{lk} x_l' \quad (k = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Учитывая, что проекции вектора a на оси координат a_1, a_2, a_3 или a_1', a_2', a_3' определяются разностями координат конца и начала отрезка, изображающего вектор, заключим, что формулы для проекций вектора при переходе от одной системы координат к другой будут иметь аналогичный вид

$$a_k' = \alpha_{kl} a_l, \quad a_k = \alpha_{lk} a_l' \quad (k = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Заметим, что формулы (9) справедливы только в ортогональных системах координат, которые за редким исключением и используются ниже.

Условимся называть *физически объективными* величины, в силу своей физической сущности *не зависящие от выбора системы координат*, в которой они аналитически представляются. Так, например, физический скаляр (температура, давление, плотность и др.), заданный своим полем, т. е. функцией координат $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, должен быть *инвариантом*, удовлетворяющим равенству

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1', x_2', x_3') = \text{inv},$$

в котором подразумевается, что наборы «старых» и «новых» координат соответствуют одной и той же точке пространства.

Аналогично, вектор, заданный тремя своими проекциями $a_k(x_1, x_2, x_3)$ $(k=1, 2, 3)$ или в другой системе координат проекциями $a_k'(x_1', x_2', x_3')$ $(k=1, 2, 3)$, чтобы представлять физическую величину, должен не зависеть от выбора осей координат.

Чтобы найти условия физической объективности векторной функции $\boldsymbol{a}$, докажем сначала, что скалярное произведение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_kb_k$, где a_k и b_k удовлетворяют формулам перехода (9), не зависит от выбора направления осей координат, в которых эти сомножители определены, т. е. является *инвариантом*.

Согласно (9) имеем (k — немой индекс)

$$a_kb_k = \alpha_{lk}a_l'\alpha_{mk}b_m' = \alpha_{lk}\alpha_{mk}a_l'b_m'. \tag{10}$$

Стоящее справа сомножителем выражение $\alpha_{lk}\alpha_{mk}$ представляет собой, согласно известной теореме аналитической геометрии, выражение косинуса угла между осями Ox_l' и Ox_m' через косинусы углов этих осей с осями системы $Ox_1x_2x_3$. По свойству взаимной ортогональности осей координат будет

$$\cos(\widehat{x_l', x_m'}) = \alpha_{lk}\alpha_{mk} = \begin{cases} 1, & \text{если } m=l, \\ 0, & \text{если } m\neq l. \end{cases} \tag{11}$$

Аналогично, выражая косинус угла между осями Ox_l и Ox_m через косинусы углов с осями системы $Ox_1'x_2'x_3'$, получим

$$\cos(\widehat{x_l, x_m}) = \alpha_{kl}\alpha_{km} = \begin{cases} 1, & \text{если } m=l, \\ 0, & \text{если } m\neq l. \end{cases} \tag{12}$$

Учитывая (11), получим доказывающее *инвариантность скалярного произведения* $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ равенство

$$a_k'b_k' = a_lb_l = \text{inv}. \tag{13}$$

Полагая в нем $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$, убедимся в *инвариантности суммы квадратов проекций*

$$a_k'a_k' = a_la_l = \text{inv}, \tag{14}$$

т. е. квадрата длины (модуля) вектора, а следовательно, и самой длины (модуля) вектора. Имея в виду, что

$$a_kb_k = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}),$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — инварианты, и задаваясь различными векторами $\boldsymbol{b}$, убедимся также в инвариантности расположения вектора $\boldsymbol{a}$ относительно точек пространства.

Роль формул (9) как условий физической объективности аналитического определения вектора очевидна. Что касается формул (7) и (8) перехода от одной системы координат к другой, то они представляют собой частный случай формул (9) применительно к вектор-радиусу $\boldsymbol{r}$ точки M и, следовательно, устанавливают физическую объективность ана-

литического определения вектор-радиуса точки при помощи ее координат.

Обратив внимание на идентичность формул перехода от одной системы координат к другой для самих декартовых координат (7), (8) и для проекций векторов (9), можем сформулировать условия физической объективности аналитического представления векторов: проекции физического вектора при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой должны преобразовываться так же, как координаты.

§ 4. Тензор второго ранга. Условия физической объективности его аналитического задания. Диада и тензор поворота

Наряду со скалярными величинами, поле которых определяется одной числовой функцией, и векторными величинами с полем, задаваемым *тремя* числовыми функциями — проекциями вектора на оси координат, в механике сплошных сред используются и более сложные по математической структуре физические величины — *тензоры второго ранга.*

Определение тензора второго ранга можно ввести двумя независимыми друг от друга, приводящими к идентичным результатам способами.

Обобщая понятия скаляра и вектора и условий физической их объективности, определим тензор второго ранга T в каждой точке трехмерного пространства как совокупность *девяти* величин T_{pq} (p, $q=1, 2, 3$) — компонент тензора, заданных в некоторой прямоугольной декартовой системе координат и преобразующихся при переходе к другой системе координат по формулам (r, s — немые индексы)

$$T'_{pq} = \alpha_{pr}\alpha_{qs}T_{rs}, \quad T_{pq} = \alpha_{rp}\alpha_{sq}T'_{rs} \quad (p, q = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Эти равенства можно трактовать как формулы перехода от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой произведения двух координат. Действительно,

$$x'_p x'_q = \alpha_{pr}x_r\alpha_{qs}x_s = \alpha_{pr}\alpha_{qs}x_r x_s,$$

$$x_p x_q = \alpha_{rp}x'_r\alpha_{sq}x'_s = \alpha_{rp}\alpha_{sq}x'_r x'_s,$$

что совпадает с (15).

Таким образом, согласно *первому* определению, тензор второго ранга представляет совокупность *девяти* величин — *компонент* тензора — преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой как *произведение двух координат.*

Второе определение тензора исходит из понятий *линейной вектор-функции* или *линейного преобразования вектора.* Аналитическим выражением того и другого являются равенства (l — немой индекс, k — свободный)

$$b_k = T_{kl}a_l \quad (k=1, 2, 3), \tag{16}$$

где a_i и b_i — координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; T_{kl} — коэффициенты линейной вектор-функции или линейного преобразования.

Второе определение тензора второго ранга гласит: если в линейном преобразовании (линейной вектор-функции) (16) физическому вектору $\boldsymbol{a}$ сопоставляется также физический вектор $\boldsymbol{b}$, то совокупность коэффициентов преобразования T_{kl} (k, $l=1, 2, 3$) представляет в свою очередь физически объективную величину — тензор второго ранга.

В дальнейшем опустим упоминания о ранге тензора, так как тензоры выше второго ранга, как правило, встречаться не будут. Единствен-

ным исключением будет тензор третьего ранга Леви-Чивита (34). Тензоры обозначаются заглавными курсивными буквами (*P*, *Q*, *S* и т. д.), а их компоненты теми же, а иногда и строчными буквами с двумя индексами. Так, тензор, представляющий совокупность коэффициентов линейного преобразования (16), может быть обозначен заглавной буквой *T*, а для его компонент принимается обозначение T_{kl}.

Тензору *T* соответствует его *матрица* (*таблица*), в которой первым индексом принято обозначать номер *строки* таблицы, вторым — *столбца*. Тензор, матрица которого образована *транспонированием* — изменением порядка индексов на противоположный — матрицы исходного тензора *T*, называют *сопряженным*, или *транспонированным*, по отношению к тензору *T* и обозначают T^*. Приведем эти две матрицы:

$$T\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad T^*\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Условия физической объективности аналитического задания тензора входят в оба его определения. Согласно *первому* определению требуется, чтобы компоненты тензора при переходе от одной системы координат к другой преобразовывались как произведения координат. Согласно *второму* определению (16) компоненты тензора должны быть коэффициентами линейного преобразования физического вектора в физический. Покажем, что эти требования вытекают одно из другого.

Согласно (9) и (16) имеем

$$b'_s = \alpha_{sk} b_k = \alpha_{sk} T_{kl} a_l = \alpha_{sk} T_{kl} \alpha_{pl} a'_p = \alpha_{sk} \alpha_{pl} T_{kl} a'_p,$$

но по тому же равенству (16), примененному теперь в системе со штрихами, будет

$$b'_s = T'_{sp} a'_p;$$

сравнивая с предыдущим выражением, получим

$$T'_{sp} = \alpha_{sk} \alpha_{pl} T_{kl},$$

т. е. соотношение (15). Таким образом, исходя из второго определения тензора *T* (16) и условий физической объективности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (9), мы пришли к первому определению тензора (15), что и доказывает эквивалентность обоих определений.

Принятое определение тензора является *физическим*, чему и соответствуют условия его физической объективности. Существует также определение тензора как *математического объекта* с заданными свойствами относительно либо преобразования координат, либо выражения линейной вектор-функции. В настоящем курсе тензоры рассматриваются только в *прямоугольных* декартовой или криволинейной системах координат, что позволяет пользоваться лишь одними *нижними* индексами в обозначении компонент тензора.

Рассмотрим два характерных примера для каждого из указанных только что определений.

Составим из проекций a_k ($k=1, 2, 3$) и b_l ($l=1, 2, 3$) двух физических векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ совокупность девяти величин $d_{kl}=a_k b_l$. Пользуясь формулами (7), легко показать физическую объективность этих произведений попарно взятых проекций векторов. Действительно, согласно этим формулам

$$d'_{kl} = a'_k b'_l = \alpha_{km} a_m \alpha_{ln} b_n = \alpha_{km} \alpha_{ln} a_m b_n = \alpha_{km} \alpha_{ln} d_{mn}.$$

Полученные равенства совпадают с условиями физической объективности тензора *D*, аналитически заданного своими компонентами $d_{mn}=$

$=a_m b_n$. Тензор D носит наименование *диады*, или *мультипликативного тензора*, образованного из двух физических векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; образование диады обозначают следующим образом:

$$D=\boldsymbol{ab}. \tag{18}$$

Таблицы (матрицы) тензора D и сопряженного с ним тензора D^* будут

$$D\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}, \quad D^*\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Выражение, стоящее в правой части (18), называют еще иногда *диадным произведением* двух векторов; напомним, что скалярное произведение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ является *скаляром*, векторное произведение $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ — *вектором*, диадное произведение $\boldsymbol{ab}$ — тензором, причем

$$D^*=(\boldsymbol{ab})^*=\boldsymbol{ba}. \tag{20}$$

Простейшими примерами диады могут служить *координатные диады*, представляющие *диадные произведения* единичных координатных векторов — ортов $\boldsymbol{i}_k$, $\boldsymbol{i}_l$. Подобно тому, как вектор $\boldsymbol{a}$ может быть представлен разложением $\boldsymbol{a}=a_k\boldsymbol{i}_k$, так же и тензор T разлагается по координатным диадам $T=T_{kl}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_l$, в чем легко убедиться, выписывая компоненты обеих частей этого равенства и замечая, например, что

$$\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{12}=(T_{kl}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_l)_{12}=T_{12} \text{ и т. п.}$$

Таково, например, разложение диады общего вида по координатным диадам.

В качестве другого примера, **иллюстрирующего второй способ определения** тензора, рассмотрим тензор $\mathfrak{A}$ с матрицей, составленной из косинусов углов между двумя различными системами координат

$$\mathfrak{A}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Нет необходимости доказывать физическую объективность аналитического задания тензора $\mathfrak{A}$ его компонентами α_{kl}, так как они являются коэффициентами преобразований (7) и (8) физического вектора $\boldsymbol{r}$ в другой также физический вектор $\boldsymbol{r}'$, или же преобразований (9) любого физического вектора $\boldsymbol{a}$ в физический вектор $\boldsymbol{a}'$.

Систему координат $Ox_1'x_2'x_3'$ можно рассматривать как результат такого поворота системы $Ox_1x_2x_3$, при котором одноименные «старые» и «новые» оси совпадают. При этом любой вектор, *закрепленный* в системе $Ox_1x_2x_3$, совершит вместе с нею поворот в пространстве. Покажем, что произведение тензора $\mathfrak{A}$ (21) на произвольный вектор $\boldsymbol{a}$, жестко связанный с $Ox_1x_2x_3$, выражает поворот этого вектора в пространстве вместе с системой $Ox_1x_2x_3$. Имеем по (21) (определение произведения тензора на вектор см. далее в § 5)

$$(\mathfrak{A}\boldsymbol{a})_i=\mathfrak{A}_{ij}a_j=\alpha_{ij}a_j;$$

или, согласно первому равенству (9),

$$(\mathfrak{A}\boldsymbol{a})_i=a_i'.$$

Полученное равенство, содержащее в левой части i-ю проекцию преобразованного умножением на $\mathfrak{A}$ вектора $\boldsymbol{a}$ в системе $Ox_1x_2x_3$, а в пра-

вой — одноименную проекцию a_i' исходного вектора $\boldsymbol{a}$ в системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$, говорит о том, что результат умножения вектора $\boldsymbol{a}$ справа на тензор $\mathfrak{A}$ представляет собой тот же вектор $\boldsymbol{a}$, но повернутый в пространстве как одно целое с системой координат $Ox_1x_2x_3$. Такая интерпретация вектора $\mathfrak{A}\boldsymbol{a}$ позволяет дать физическому тензору $\mathfrak{A}$ наименование *тензора поворота.*

В дальнейшем мы встретимся с различными тензорами, причем в большинстве случаев определение их будет связано с понятием линейной вектор-функции (или линейного преобразования) двух физических векторов друг в друга, иными словами, соответствовать *второму* способу определения физического тензора.

§ 5. Основные операции тензорной алгебры

Простейшими операциями над тензорами являются: сложение (вычитание), умножение на скаляр и умножение на вектор.

Сложение (вычитание) и умножение на скаляр определяются равенствами

$$(P\pm Q\pm R\pm\ldots)_{mn}=P_{mn}\pm Q_{mn}\pm R_{mn}\pm\ldots,$$
$$(\lambda P)_{mn}=(P\lambda)_{mn}=\lambda P_{mn}. \tag{22}$$

Несколько сложнее вводится операция умножения *тензора на вектор* и отличная от нее в случае произвольного тензора операция умножения *вектора на тензор.* Операции эти определяют соответственно векторы $P\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}P$ с проекциями (n — немой индекс)

$$(P\boldsymbol{a})_m=P_{mn}a_n,\quad (\boldsymbol{a}P)_m=a_nP_{nm}\qquad (m=1,\ 2,\ 3). \tag{23}$$

Вспоминая введенное в предыдущем параграфе определение линейной векторной функции (линейного преобразования) (16) и сравнивая правые части равенства (16) с первой системой равенств (23), убедимся *в эквивалентности* операции умножения тензора на вектор $P\boldsymbol{a}$ линейному преобразованию физического вектора $\boldsymbol{a}$ в другой физический вектор. Очевидно, что умножение вектора на тензор $\boldsymbol{a}P$ эквивалентно линейному преобразованию физического вектора $\boldsymbol{a}$ по формуле (16) посредством тензора P^*.

Операцию умножения тензора на вектор, определенную первым равенством (23), называют еще иначе *умножением тензора на вектор справа,* а второе равенство (23) — *умножением тензора на вектор слева.* Отметим, что при любом порядке расположения сомножителей немые индексы у тензора и вектора всегда являются смежными. Полезно еще отметить тождества

$$P\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}P^*,\quad P^*\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}P. \tag{24}$$

Тензор, компоненты которого не зависят от порядка индексов, так что

$$S_{mn}=S_{nm}\qquad (m,\ n=1,\ 2,\ 3), \tag{25}$$

называется *симметричным.* В его таблице [см. далее (29)] компоненты, зеркально расположенные относительно *главной* диагонали, идущей от левого верхнего угла к правому нижнему, одинаковы. Симметричный тензор имеет только *шесть* отличных друг от друга компонент.

Простейшим примером симметричного тензора может служить так называемая «тензорная единица» E с компонентами, представляющими собой уже встречавшиеся [см. равенства (5)] символы Кронекера

δ_{kl}, и имеющая одну и ту же таблицу

$$E\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{26}$$

во *всех системах* координат.

В самом деле, из определения тензора по первому способу (15) следует, что если считать таблицу (26) выраженной в старых координатах, то в новых компоненты E примут вид

$$\delta'_{kl}=\alpha_{km}\alpha_{ln}\delta_{mn}=\alpha_{km}\alpha_{lm},$$

или, вспоминая (12) (m — немой индекс),

$$\delta'_{kl}=\begin{cases}1, & \text{если } l=k,\\ 0, & \text{если } l\neq k,\end{cases}$$

что совпадает с (5) ($\delta'_{kl}=\delta_{kl}$).

Название тензорной единицы связано с очевидным соотношением

$$E\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}. \tag{27}$$

Тензор A, компоненты которого при изменении порядка индексов изменяют свой знак на противоположный, называют *антисимметричным*, или *кососимметричным*. Имеем

$$A^*=-A,\quad A_{mn}=-A_{nm},\quad A_{mm}=0\qquad (m,\ n=1,\ 2,\ 3). \tag{28}$$

У антисимметричного тензора различных по абсолютной величине компонент только *три*.

Приводим таблицы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$S\begin{pmatrix}S_{11}&S_{12}=S_{21}&S_{13}=S_{31}\\S_{21}=S_{12}&S_{22}&S_{23}=S_{32}\\S_{31}=S_{13}&S_{32}=S_{23}&S_{33}\end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$A\begin{pmatrix}0&A_{12}=-A_{21}&A_{13}=-A_{31}\\A_{21}=-A_{12}&0&A_{23}=-A_{32}\\A_{31}=-A_{13}&A_{32}=-A_{23}&0\end{pmatrix}. \tag{30}$$

По определению операций умножения тензора на вектор для симметричного тензора S и антисимметричного тензора A имеем

$$\begin{gathered}S\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}S=S^*\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}S^*,\\ A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}A^*=-\boldsymbol{a}A.\end{gathered} \tag{31}$$

Рассмотрим детальнее операцию умножения антисимметричного тензора A на вектор $\boldsymbol{a}$ справа. Докажем, что из совокупности трех компонент антисимметричного тензора, если их взять в определенном порядке, можно составить так называемый *сопутствующий* тензору A *вектор* $\boldsymbol{c}$ с компонентами

$$c_1=A_{23},\quad c_2=A_{31},\quad c_3=A_{12}; \tag{32}$$

заметим, что в принятом определении сопутствующего вектора значения индексов в левой и правой частях каждого из этих равенств подчиняются правилу круговой перестановки (1→2→3→1 и т. д.).

Название «сопутствующий» подчеркивает, что хотя компоненты вектора $\boldsymbol{c}$ совпадают с *тремя* из *девяти* компонент тензора A (включая и нулевые значения A_{ii}), но, конечно, *ни о каком равенстве вектора* $\boldsymbol{c}$ *и тензора* A *не может быть и речи*: это величины *разного рода*.

Равенства (32) можно заменить одним

$$c_r=\varepsilon_{rst}A_{st} \tag{33}$$

($r \to s \to t$ по правилу круговой перестановки; $r, s, t = 1, 2, 3$; по индексам s и t не суммировать!), если ввести в рассмотрение символы Леви-Чивита, составляющие в совокупности тензор *третьего* ранга,

$$\varepsilon_{rst} = \boldsymbol{i}_r \cdot (\boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_t), \tag{34}$$

где $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_s$, $\boldsymbol{i}_t$ — орты прямоугольных координатных осей. Согласно определению (34) ε_{rst} равны нулю, если в числе индексов имеются хоть *два одинаковых*, $+1$, если индексы образуют круговую перестановку, и -1, если круговая перестановка нарушена. Примером применения символов Леви-Чивита может служить общая формула для компонент векторного произведения двух векторов

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_r = \varepsilon_{rst} a_s b_t, \tag{35}$$

предполагающая суммирование по повторяющимся «немым» индексам. Имеем

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_1 = \varepsilon_{1st} a_s b_t = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \text{ и т. д.}$$

Докажем, что три величины c_k ($k = 1, 2, 3$), выраженные через компоненты физического антисимметричного тензора A по формулам (32) или (33), образуют физический вектор $\boldsymbol{c}$. Иными словами, докажем, что если компоненты A_{ln} ($l, n = 1, 2, 3$) удовлетворяют условиям *физической объективности тензора*, то величины c_k ($k = 1, 2, 3$) удовлетворяют условиям *физической объективности вектора* (9).

Согласно (15) в системе со штрихами имеет место равенство

$$A'_{23} = c'_1 = \alpha_{2r} \alpha_{3s} A_{rs} \tag{36}$$

или, в развернутом виде,

$$c'_1 = A'_{23} = (\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) A_{23} + (\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33}) A_{31} + (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}) A_{12} =$$
$$= (\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) c_1 + (\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33}) c_2 + (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}) c_3. \tag{37}$$

Возводя определитель таблицы косинусов (I) по правилам умножения определителей[1]) в квадрат и пользуясь соотношениями (12), убедимся в том, что квадрат определителя ($\det$ — символ определителя) равен единице:

$$[\det(\alpha_{kl})]^2 = \det(\delta_{mn}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

а, следовательно, сам определитель равен

$$\det(\alpha_{kl}) = \pm 1, \tag{38}$$

где плюс соответствует случаю *сонаправленных* систем координат (обе системы правые или обе левые), а минус — *разнонаправленным* системам (одна — правая, другая — левая).

Полагая в (11) последовательно $l = 1, 2, 3$ при $m = 1$, получим систему равенств (условия ортогональности систем координат):

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\alpha_{11} + \alpha_{12}\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{13} &= 1, \\ \alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{12} + \alpha_{23}\alpha_{13} &= 0, \\ \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} &= 0, \end{aligned} \tag{39}$$

которую можно рассматривать как линейную неоднородную систему уравнений относительно неизвестных α_{11}, α_{12}, α_{13}. Замечая, что определитель этой системы, согласно (38), равен единице (знак минус опускаем, так как в дальнейшем будем пользоваться только *сонаправлен-*

[1]) $\det(a_{ij}) \cdot \det(b_{ij}) = \det(c_{mn})$, $c_{mn} = a_{mk} b_{kn}$.

ными, а именно *правыми* системами), найдем ее решение:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}, \\ \alpha_{12} &= \alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33}, \\ \alpha_{13} &= \alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}. \end{aligned} \tag{40}$$

Справа стоят *алгебраические дополнения* элементов определителя таблицы косинусов α_{11}, α_{12}, α_{13}. Аналогично можно было бы показать, что любой из элементов определителя таблицы косинусов $\det(\alpha_{kl})$ углов между двумя осями координат равен своему алгебраическому дополнению. Определители, обладающие этим свойством, называют *взаимными*.

Возвращаясь к равенству (37), перепишем его, согласно (40), в виде

$$c_1' = \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \alpha_{13}c_3. \tag{41}$$

Аналогично, пользуясь доказанным свойством взаимности определителя таблицы косинусов, выразим остальные проекции c_2' и c_3'

$$\begin{aligned} c_2' &= \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \alpha_{23}c_3, \\ c_3' &= \alpha_{31}c_1 + \alpha_{32}c_2 + \alpha_{33}c_3. \end{aligned} \tag{41'}$$

Совокупность равенств (41) и (41′), очевидно, и доказывает физически объективный характер *сопутствующего* антисимметричному тензору A вектора $\boldsymbol{c}$.

Чтобы показать основное применение сопутствующего тензору A вектора $\boldsymbol{c}$, составим произведение тензора A на какой-нибудь вектор $\boldsymbol{a}$, например, справа. Будем иметь по (32)

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{a})_1 &= A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3 = a_2c_3 - a_3c_2 = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})_1, \\ (A\boldsymbol{a})_2 &= A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3 = a_3c_1 - a_1c_3 = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})_2, \\ (A\boldsymbol{a})_3 &= A_{31}a_1 + A_{32}a_2 + A_{33}a_3 = a_1c_2 - a_2c_1 = (\boldsymbol{a}\times c)_3 \end{aligned}$$

или, переходя к векторному представлению,

$$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}. \tag{42}$$

Это означает, что при умножении антисимметричного тензора A на вектор $\boldsymbol{a}$ справа совокупность его компонент (32) ведет себя как сопутствующий вектор $\boldsymbol{c}$ в том смысле, что в результате получается векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на сопутствующий вектор $\boldsymbol{c}$. Такая *эквивалентность* антисимметричного тензора сопутствующему вектору при проведении операции умножения, конечно, как уже упоминалось, не означает равенства тензора A вектору $\boldsymbol{c}$.

К формуле (42) можно присоединить аналогичную формулу для произведения антисимметричного тензора на вектор слева

$$\boldsymbol{a}A = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}. \tag{42'}$$

Если ввести в рассмотрение сопряженный, т. е. сопутствующий сопряженному тензору $A^* = -A$ вектор $\boldsymbol{c}^* = -\boldsymbol{c}$, то формулы (32) перейдут в следующие:

$$c_1^* = A_{23}^* = -A_{23}, \quad c_2^* = A_{31}^* = -A_{31}, \quad c_3^* = A_{12}^* = -A_{12}$$

с сохранением круговой перестановки индексов, но с переменой знака при тензоре A.

Справедливы формулы

$$A^*\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}A^* = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}. \tag{43}$$

Принятая операция умножения вектора на тензор $\boldsymbol{a}T$ или тензора на вектор $T\boldsymbol{a}$ не исчерпывает многообразия возможных операций такого рода. В несколько других обозначениях, чем принятые у нас, рассматривают следующие операции:

1) внешнее произведение $\boldsymbol{a}T$, приводящее к тензору третьего ранга, представляемому разложением по координатным «триадам» $\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_l\boldsymbol{i}_m$ (далее сохраняется правило суммирования по дважды повторяющимся в одночленах индексам от 1 до 3):

$$\boldsymbol{a}T=\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_l\boldsymbol{i}_m a_k T_{lm}; \tag{44}$$

2) внутреннее произведение $\boldsymbol{a}\cdot T$, дающее вектор, разложение которого по единичным векторам $\boldsymbol{i}_m$ имеет вид

$$\boldsymbol{a}\cdot T=a_k T_{km}\boldsymbol{i}_m, \tag{45}$$

совпадающий с принятым у нас ранее $\boldsymbol{a}T$;

3) векторное произведение $\boldsymbol{a}\times T$, приводящее к тензору второго ранга со следующим разложением по координатным диадам:

$$\boldsymbol{a}\times T=(\boldsymbol{i}_k\times\boldsymbol{i}_l)\,\boldsymbol{i}_n a_k T_{lm}=\boldsymbol{i}_n\boldsymbol{i}_m e_{kln} a_k T_{lm}. \tag{46}$$

§ 6. Разложение тензора на симметричную и антисимметричную части. Инварианты. Разложение тензора на сферическую и девиаторную части

Пользуясь приведенными в предыдущем параграфе простейшими операциями над тензорами, покажем, что тензор P второго ранга общего вида может быть разложен на симметричную и антисимметричную части. Это непосредственно вытекает из тождества

$$P\equiv\frac{1}{2}(P+P^*)+\frac{1}{2}(P-P^*)=S+A, \tag{47}$$

где

$$S=\frac{1}{2}(P+P^*)=\frac{1}{2}(P^*+P)=S^* \tag{48}$$

представляет *симметричную*, а

$$A=\frac{1}{2}(P-P^*)=-\frac{1}{2}(P^*-P)=-A^* \tag{49}$$

— *антисимметричную* части тензора P.

Запишем матрицы симметричной и антсимметричной частей тензора P:

$$S\begin{Vmatrix} P_{11} & \frac{1}{2}(P_{12}+P_{21}) & \frac{1}{2}(P_{13}+P_{31}) \\ \frac{1}{2}(P_{21}+P_{12}) & P_{22} & \frac{1}{2}(P_{23}+P_{32}) \\ \frac{1}{2}(P_{31}+P_{13}) & \frac{1}{2}(P_{32}+P_{23}) & P_{33} \end{Vmatrix},$$

$$A\begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(P_{12}-P_{21}) & \frac{1}{2}(P_{13}-P_{31}) \\ \frac{1}{2}(P_{21}-P_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(P_{23}-P_{32}) \\ \frac{1}{2}(P_{31}-P_{13}) & \frac{1}{2}(P_{32}-P_{23}) & 0 \end{Vmatrix}.$$

Сопутствующие антисимметричной части тензора P векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}^*$ будут иметь компоненты

$$c_r = \frac{1}{2}\varepsilon_{rst}(P_{st} - P_{ts}), \quad c_r^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{rst}(P_{ts} - P_{st})$$

или, в развернутом виде,

$$c_1 = \frac{1}{2}(P_{23} - P_{32}), \quad c_2 = \frac{1}{2}(P_{31} - P_{13}), \quad c_3 = \frac{1}{2}(P_{12} - P_{21});$$

$$c_1^* = \frac{1}{2}(P_{32} - P_{23}), \quad c_2^* = \frac{1}{2}(P_{13} - P_{31}), \quad c_3^* = \frac{1}{2}(P_{21} - P_{12}).$$

Если тензор P представляет диаду $\boldsymbol{ab}$ (а этот случай в дальнейшем встретится), то проекции сопутствующего вектора $\boldsymbol{c}$ для антисимметричной части в разложении диады $\boldsymbol{ab}$ будут равны

$$c_r = \varepsilon_{rst}a_s b_t \qquad (r = 1, 2, 3),$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(a_2b_3 - a_3b_2), \quad c_2 = \frac{1}{2}(a_3b_1 - a_1b_3), \quad c_3 = \frac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1),$$

откуда следует, что

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \tag{50}$$

т. е. сопутствующий вектор антисимметричной части диады равен половине векторного произведения векторов, образующих диаду.

Из компонент любого тензора P можно составить три скалярных выражения, инвариантных к преобразованию координат. Их называют *инвариантами тензора.*

Первый инвариант J_1 («след») представляет *сумму диагональных элементов* матрицы тензора

$$J_1 = P_{11} + P_{22} + P_{33} = P_{mm}. \tag{51}$$

Доказательство инвариантности не составляет труда. Имеем в новой системе координат

$$J_1' = P_{kk}' = \alpha_{kl}\alpha_{km}P_{lm} = \delta_{lm}P_{lm} = P_{ll};$$

здесь применено известное по предыдущему равенство

$$\alpha_{kl}\alpha_{km} = \delta_{lm} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = l, \\ 0, & \text{если } m \neq l. \end{cases}$$

Вторым инвариантом J_2 тензора P называют *скалярное произведение тензора на самого себя*, обозначаемое условно как *квадрат* тензора, и равное сумме квадратов всех компонент тензора

$$J_2 = P_{mn}P_{mn} = P^2. \tag{52}$$

Третьим инвариантом J_3 тензора является определитель его матрицы

$$J_3 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} = \det(P_{mn}).$$

Пользуясь первым инвариантом, можно составить тождество

$$P \equiv J_1E + (P - J_1E) = P^{(s)} + P^{(d)}, \tag{53}$$

представляющее разложение тензора P на *сферическую* $P^{(s)} = J_1E$

и *девиаторную* $P^{(d)}=P-J_1E$ части. Матрицы этих частей имеют вид

$$P^{(s)}\begin{pmatrix}J_1 & 0 & 0\\ 0 & J_1 & 0\\ 0 & 0 & J_1\end{pmatrix}, \tag{54}$$

$$P^{(d)}\begin{pmatrix}P_{11}-J_1 & P_{12} & P_{13}\\ P_{21} & P_{22}-J_1 & P_{23}\\ P_{31} & P_{32} & P_{33}-J_1\end{pmatrix}. \tag{55}$$

Тензор $P^{(s)}$, обладающий *сферической* симметрией (изотропией), называют *сферическим*, или *шаровым*, тензором.

Из изложенных двух способов разложения тензора на составляющие наибольший интерес для последующего представляет разложение тензора на симметричную и антисимметричную части, причем [вспомнить (42) и (42′)] произведение вектора на антисимметричную часть тензора справа или слева выражается векторным произведением этого тензора на сопутствующий антисимметричному тензору вектор $\boldsymbol{c}$, так что

$$\begin{aligned}P\boldsymbol{a}&=S\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{a}=S\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\\ \boldsymbol{a}P&=\boldsymbol{a}S+\boldsymbol{a}A=S\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.\end{aligned} \tag{56}$$

§ 7. Главные оси и главные значения симметричного тензора

Среди всевозможных осей систем координат существуют такие — их называют *главными* осями симметричного тензора, — что после линейного преобразования, соответствующего данному тензору, векторы, расположенные по этим главным осям, сохранят свои направления в пространстве.

Обозначим через $\boldsymbol{e}$ единичный вектор какой-нибудь главной оси заданного симметричного тензора S и подчиним его условию сохранения направления после преобразования (λ — скаляр, E — тензорная единица). Это условие можно записать в виде любого из двух эквивалентных равенств

$$S\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e}, \qquad (S-\lambda E)\boldsymbol{e}=0, \tag{57}$$

что в раскрытом виде приводит к системе уравнений относительно e_1, e_2, e_3

$$\begin{aligned}(S_{11}-\lambda)e_1+S_{12}e_2+S_{13}e_3&=0,\\ S_{12}e_1+(S_{22}-\lambda)e_2+S_{23}e_3&=0,\\ S_{13}e_1+S_{23}e_2+(S_{33}-\lambda)e_3&=0.\end{aligned} \tag{58}$$

Система эта с неизвестными e_1, e_2, e_3 *однородна* и имеет *тривиальное нулевое* решение, не согласующееся с очевидным условием

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=1. \tag{59}$$

Для существования *нетривиальных* решений системы уравнений (58) должно, как известно, выполняться условие равенства нулю определителя этой системы

$$\begin{vmatrix}S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13}\\ S_{12} & S_{22}-\lambda & S_{23}\\ S_{13} & S_{23} & S_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{60}$$

Кубическое уравнение (60) называется *характеристическим*, а его корни — *собственными числами* матрицы S. В общем случае оно имеет *три* не равных между собой корня $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$, и каждому из этих корней соответствуют свои значения единичных векторов: $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$, $\boldsymbol{e}^{(3)}$.

Докажем сначала, что эти векторы *взаимно ортогональны.* Воспользовавшись (57), будем иметь равенства

$$(S-\lambda^{(1)}E)e^{(1)}=0,\quad (S-\lambda^{(2)}E)e^{(2)}=0,\quad (S-\lambda^{(3)}E)e^{(3)}=0. \tag{61}$$

Умножив скалярно обе части первых двух из этих равенств соответственно на $e^{(2)}$ и $e^{(1)}$, найдем

$$e^{(2)}\cdot(Se^{(1)})=\lambda^{(1)}e^{(1)}\cdot e^{(2)},\quad e^{(1)}\cdot(Se^{(2)})=\lambda^{(2)}e^{(1)}\cdot e^{(2)}. \tag{62}$$

Замечая, что в силу симметрии тензора S

$$e^{(2)}\cdot(Se^{(1)})=e_m^{(2)}S_{mn}e_n^{(1)}=e_m^{(1)}S_{mn}e_n^{(2)}=e^{(1)}\cdot(Se^{(2)}),$$

и вычитая почленно друг из друга левые и правые части равенств (62), получим

$$0=(\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)})e^{(1)}\cdot e^{(2)}.$$

Отсюда, в силу принятого условия неравенства корней характеристического уравнения $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$, следует *ортогональность* векторов $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$. Аналогично показывается ортогональность $e^{(2)}$ и $e^{(3)}$, а тем самым и *взаимная ортогональность* всех трех векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$.

Докажем теперь, что все не равные корни *вещественны.* Пусть, например, $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ — *комплексные* и при этом *сопряженные* числа. Тогда и соответствующие им проекции $e_m^{(1)}$ и $e_m^{(2)}$, где $m=1, 2, 3$, должны были бы иметь вид сопряженных комплексных чисел

$$e_m^{(1)}=\mu_m+\nu_m i,\quad e_m^{(2)}=\mu_m-\nu_m i,$$

а сумма их произведений (суммирование по m)

$$e_m^{(1)}e_m^{(2)}=\mu_m\mu_m+\nu_m\nu_m,$$

как сумма квадратов, была бы больше нуля; однако эта сумма представляет собой не что иное, как скалярное произведение $e^{(1)}\cdot e^{(2)}$, которое, по только что доказанному, равно нулю. Таким образом, доказана вещественность всех трех корней $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$.

Покажем, наконец, что если принять за оси координат три *главные* оси, соответствующие ортам $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$, то недиагональные компоненты симметричного тензора S будут равны *нулю*, а *диагональные — корням характеристического уравнения* $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$, которые называются *главными значениями* симметричного тензора S.

Из равенств (57) следует (по m не суммировать!)

$$Se^{(m)}=\lambda^{(m)}e^{(m)},$$

$$(Se^{(m)})\cdot e^{(n)}=\lambda^{(m)}e^{(m)}\cdot e^{(n)}=\lambda^{(m)}\delta_{mn},$$

где, напоминаем, δ_{mn} — компоненты тензорной единицы. Если штрихом обозначить компоненты симметричного тензора S в главных осях, то на основании последнего равенства будет

$$S'_{mn}=\lambda^{(m)}\delta_{mn}=\begin{cases}\lambda^{(m)}, & \text{если } n=m,\\ 0, & \text{если } n\neq m,\end{cases} \tag{63}$$

что и доказывает высказанное положение о равенстве нулю недиагональных членов, а главным значениям — диагональных членов.

Матрица симметричного тензора в главных осях имеет вид

$$S'\begin{pmatrix}\lambda^{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda^{(3)}\end{pmatrix}. \tag{64}$$

В случае *кратности* корней характеристического уравнения, например $\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}$, только третья главная ось, соответствующая единичному вектору $e^{(3)}$, будет иметь определенное направление в пространстве, остальные две будут расположены в плоскости, перпендикулярной к третьей оси, и положение их будет определено в пространстве с точностью до *произвольного поворота* вокруг третьей оси.

В случае равенства между собой всех трех корней ($\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=\lambda^{(3)}=\lambda$) симметричный тензор S будет обладать свойством *изотропии* диагональных компонент, т. е. независимостью их от направлений осей координат. Такой тензор, как уже упоминалось, называют шаровым, или *сферическим*. Он определяется как произведение λ на тензорную единицу, а его матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\lambda E. \tag{65}$$

Выражение *первого* инварианта симметричного тензора S в главных осях будет

$$J_1=\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\lambda^{(3)}, \tag{66}$$

второго —

$$J_2=(\lambda^{(1)})^2+(\lambda^{(2)})^2+(\lambda^{(3)})^2, \tag{67}$$

третьего —

$$J_3=\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\lambda^{(3)}. \tag{68}$$

Наряду с широко распространенными операциями сложения (вычитания) тензоров, умножения их на скалярную величину или на вектор справа или слева, нам придется, хотя и реже, встречаться с операциями *умножения друг на друга двух тензоров*; последние операции мы отделили от предыдущих и поместили в конец настоящего, заключающего тензорную алгебру, параграфа. Эти операции — их *три* — в соответствии с *родом* получаемого результата (скаляра, вектора или тензора) определяются и именуются так:

1) *скалярное* произведение (свертка) двух тензоров:

$$P\cdot Q=P_{ij}Q_{ij} \qquad (i,\ j\text{ — «немые» индексы}); \tag{69}$$

2) *векторное* произведение двух тензоров:

$$(P\times Q)_i=\varepsilon_{imn}P_{ms}Q_{sn}=P_{js}Q_{sk}-P_{ks}Q_{sj}; \tag{70}$$

здесь m, n, s — «немые» индексы; j и k следуют за i в порядке круговой перестановки $i\to j\to k\to i\to\ldots$;

3) *тензорное* произведение двух тензоров:

$$(PQ)_{ij}=P_{is}Q_{sj}$$

(s — «немой» индекс, $i,\ j=1,\ 2,\ 3$). (71)

Отметим некоторые частные случаи и, прежде всего, формулу

$$P\cdot E=E\cdot P=P_{ii}=P_{11}+P_{22}+P_{33}. \tag{72}$$

Правая часть является *первым инвариантом* тензора P. При скалярном умножении тензора P на самого себя получим

$$P\cdot P=P_{ij}P_{ij}=P^2=|P|^2, \tag{73}$$

т. е. квадрат тензора P. Это — *второй инвариант* тензора P.

Из *второй* операции следует ($i\to j\to k\to\ldots$; суммирование по индексу s):

$$(P\times E)_i=P_{js}E_{sk}-P_{ks}E_{sj}=P_{jk}-P_{kj}. \tag{74}$$

Из последнего равенства заключаем, что условие симметричности *тензора* $P=S$ можно записать в следующей не зависящей от координат форме

$$P\times E=0. \tag{75}$$

§ 8. Производная по заданному направлению. Пространственные производные в скалярном, векторном и тензорном полях

Поскольку подробное изложение основ векторного анализа предусмотрено рядом общих курсов, приведем здесь лишь некоторые наиболее необходимые для дальнейшего сведения. В первую очередь дадим определение *производной по заданному направлению*, а затем и *общей пространственной производной*.

Зададим в пространстве некоторую ось l и введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть ориентация оси и одновременно положительное направление на ней определяются единичным вектором $\boldsymbol{l}(l_1, l_2, l_3)$, где l_1, l_2, l_3 — направляющие косинусы оси в данной системе координат (рис. 2).

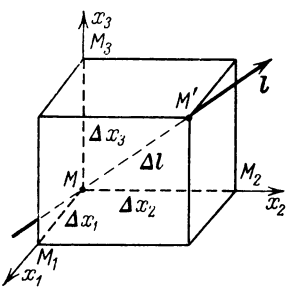


Рис. 2

В дальнейшем часто придется иметь дело с понятием производной от скалярной, векторной или тензорной функций. Этому понятию можно придать легко запоминаемый вид, если ввести в рассмотрение символический вектор-оператор ∇ («набла»)

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)=\boldsymbol{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Операция производной от величины Ψ по направлению вдоль оси l в данной точке M будет определяться, как обычная производная, пределом

$$\frac{d\Psi}{dl}=\lim_{\overline{MM'}\to 0}\frac{\Psi(M')-\Psi(M)}{\overline{MM'}}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\Psi}{\Delta l},$$

где Ψ — любая скалярная, векторная или тензорная функция, для которой этот предел существует. Производная $d\Psi/dl$ может быть вычислена по формуле производной от сложной функции:

$$\frac{d\Psi}{dl}=\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dl}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dl},$$

или, если учесть, что

$$\frac{dx_1}{dl}=\cos(\widehat{l, x_1})=l_1,\quad \frac{dx_2}{dl}=\cos(\widehat{l, x_2})=l_2,\quad \frac{dx_3}{dl}=\cos(\widehat{l, x_3})=l_3,$$

по формуле

$$\frac{d\Psi}{dl}=\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}l_1+\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}l_2+\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}l_3.$$

Так как для самого способа вычисления производной вид функции Ψ несуществен, получим, опуская Ψ, следующую символическую формулу:

$$\frac{d}{dl}=\boldsymbol{l}\cdot\nabla=l_1\frac{\partial}{\partial x_1}+l_2\frac{\partial}{\partial x_2}+l_3\frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{76}$$

Применение операции производной по направлению к скаляру φ, вектору $\boldsymbol{a}$, тензору T дает следующие выражения:

$$\frac{d\varphi}{dl} = (\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\varphi = \boldsymbol{l}\cdot\operatorname{grad}\varphi = l_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \qquad (77)$$

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dl} = (\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} = l_i\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i}, \quad \frac{dT}{dl} = (\boldsymbol{l}\cdot\nabla)T = l_i\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Примером может служить часто встречающаяся в дальнейшем производная вектора $\boldsymbol{b}$ по направлению вектора $\boldsymbol{a}$:

$$(\hat{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} = \frac{1}{a}(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}, \qquad (78)$$

где $\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}/a$ — *единичный вектор, направленный по вектору* $\boldsymbol{a}$.

Среди всевозможных направлений в поле *скалярной* величины φ отметим одно характерное направление — *нормали к поверхности уровня* функции φ (рис. 3)

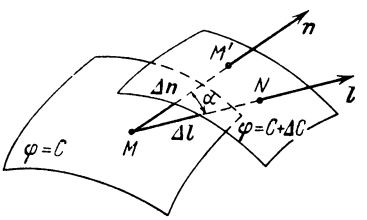


Рис. 3

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = C = \text{const}$$

и зададим его *единичным* вектором $\boldsymbol{n}$, направив в сторону возрастания φ, так что $d\varphi/dn > 0$. Как видно из рис. 3, для одного и того же приращения ΔC функции φ при переходе от одной поверхности уровня ($\varphi = C$) к другой ($\varphi = C + \Delta C$, $\Delta C > 0$) разным направлениям l соответствуют разные приращения $\Delta l = \Delta n/\cos\alpha$, так что $\Delta l \geqslant \Delta n$ и

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{d\varphi}{dn}\frac{dn}{dl} = \frac{d\varphi}{dn}\cos\alpha \leqslant \frac{d\varphi}{dn}.$$

Градиент скалярной функции φ определяется как вектор

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{d\varphi}{dn}\boldsymbol{n},$$

равный по величине производной от скалярной функции φ *по нормали к поверхности уровня и направленный в сторону наибольшего изменения* φ *в данной точке.*

Общая пространственная производная от скалярной, векторной или тензорной функций определяется как *предельная интегральная операция* (существование предела постулируется)

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_\sigma \boldsymbol{n}\ldots\delta\sigma = \nabla\ldots, \qquad (79)$$

где τ — объем, заключающий внутри себя данную точку поля, σ — ограничивающая объем поверхность, $\boldsymbol{n}\delta\sigma$ — ориентированный элемент поверхности σ ($\boldsymbol{n}$ — орт внешней нормали к поверхности σ), а многоточие в формуле (79) указывает место *интегрируемого* скаляра, вектора или тензора с соответствующими символами произведений $\boldsymbol{n}$ на интегрируемые величины.

Такими пространственными производными являются

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_\sigma \boldsymbol{n}\varphi\,\delta\sigma = \operatorname{grad}\varphi,$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{\sigma} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}\,\delta\sigma = \operatorname{div}\boldsymbol{a},$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{\sigma} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}\,\delta\sigma = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \tag{80}$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{\sigma} \boldsymbol{n}\boldsymbol{a}\,\delta\sigma = \operatorname{Grad}\boldsymbol{a},$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{\sigma} \boldsymbol{n}T\,\delta\sigma = \operatorname{Div}T,$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{\sigma} \boldsymbol{n}\times T\,\delta\sigma = \operatorname{Rot}T.$$

Используя в качестве σ поверхность координатного прямоугольного параллелепипеда и применяя указанный предельный переход, получим *аналитические выражения* перечисленных операций пространственного дифференцирования (суммирование по дважды повторяющимся индексам):

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3); \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i};$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_p = \varepsilon_{pqr}\frac{\partial a_r}{\partial x_q} = \frac{\partial a_r}{\partial x_q} - \frac{\partial a_q}{\partial x_r} \quad (p\to q\to r\to p\ \ldots);$$

$$(\operatorname{Grad}\boldsymbol{a})_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \tag{81}$$

$$(\operatorname{Div}T)_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j},$$

$$(\operatorname{Rot}T)_{nm} = \varepsilon_{kln}\frac{\partial T_{lm}}{\partial x_k} \text{ [сравнить с (46)]}.$$

К тем же результатам можно прийти, пользуясь символическими выражениями операций с вектором ∇:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\boldsymbol{i}_k,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_k}{\partial x_k},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \nabla\times\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \tag{82}$$

$$\operatorname{Grad}\boldsymbol{a} = \nabla\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_l\frac{\partial a_l}{\partial x_k},$$

$$\operatorname{Div}T = \nabla T = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j}\boldsymbol{i}_k,$$

$$\operatorname{Rot}T = \nabla\times T = \boldsymbol{i}_n\boldsymbol{i}_m\varepsilon_{kln}\frac{\partial T_{lm}}{\partial x_k} \text{ [сравнить с (46)]}.$$

Аналогичные выражения в системе *ортогональных криволинейных* координат выглядят более сложно. Введем так называемые *коэффициенты* Л я м е (q_i — криволинейные координаты):

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}, \tag{83}$$

где конкретный вид системы криволинейных координат q_1, q_2, q_3 определяется равенствами

$$x_k = x_k(q_1, q_2, q_3) \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Заметим, что каждая из величин H_i имеет смысл коэффициента пропорциональности в равенстве, выражающем связь между элементарным приращением ds_i длины отрезка вдоль i-й координатной линии и приращением соответствующей криволинейной координаты dq_i:

$$ds_i = H_i dq_i \text{ (по } i \text{ не суммировать)}.$$

Тогда аналитические выражения пространственных производных в криволинейных координатах будут иметь следующий вид (по повторяющимся индексам не суммировать!):

$$(\operatorname{grad}\varphi)_{q_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_{q_1}H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_{q_2}H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_{q_3}H_1H_2)\right],$$

$$\operatorname{rot}_{q_1} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_{q_3}H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_{q_2}H_2)}{\partial q_3}\right],$$

$$\operatorname{rot}_{q_2} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(a_{q_1}H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(a_{q_3}H_3)}{\partial q_1}\right],$$

$$\operatorname{rot}_{q_3} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(a_{q_2}H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(a_{q_1}H_1)}{\partial q_2}\right],$$

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right], \tag{84}$$

$$(\operatorname{Div} T)_{q_1} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3T_{q_1q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1T_{q_2q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2T_{q_3q_1})\right] + \\ + \frac{T_{q_1q_2}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{T_{q_1q_3}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{T_{q_2q_2}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{T_{q_3q_3}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1},$$

$$(\operatorname{Div} T)_{q_2} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3T_{q_1q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1T_{q_2q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2T_{q_3q_2})\right] + \\ + \frac{T_{q_2q_1}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{T_{q_2q_3}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{T_{q_1q_1}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{T_{q_3q_3}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2},$$

$$(\operatorname{Div} T)_{q_3} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3T_{q_1q_3}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1T_{q_2q_3}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2T_{q_3q_3})\right] + \\ + \frac{T_{q_3q_1}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{T_{q_3q_2}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{T_{q_1q_1}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{T_{q_2q_2}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}.$$

Приведем для справки формулы в наиболее употребительных системах криволинейных координат: цилиндрической и сферической.

Цилиндрическая (в том числе и *полярная*) система r, ε, z:

$$x=r\cos\varepsilon,\ y=r\sin\varepsilon,\ z=z,\ r=\sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{tg}\varepsilon=y/x$$

$$(0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant 2\pi,\ -\infty<z<\infty),$$

$$H_r=1,\ H_\varepsilon=r,\ H_z=1,$$

$$ds^2=dr^2+r^2d\varepsilon^2+dz^2,$$

$$d\sigma_r=r\,d\varepsilon\,dz,\ d\sigma_\varepsilon=dr\,dz,\ d\sigma_z=r\,dr\,d\varepsilon,\ d\tau=r\,dr\,d\varepsilon\,dz,$$

$$\operatorname{grad}_r\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r},\quad \operatorname{grad}_\varepsilon\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon},\quad \operatorname{grad}_z\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_r\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial z},\tag{85}$$

$$\operatorname{rot}_\varepsilon\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r},\quad \operatorname{rot}_z\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_\varepsilon)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\varepsilon}\right],$$

$$\Gamma^2\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

$$(\operatorname{Div}T)_r=\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varepsilon r}}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial T_{zr}}{\partial z}+\frac{T_{rr}-T_{\varepsilon\varepsilon}}{r},$$

$$(\operatorname{Div}T)_\varepsilon=\frac{\partial T_{r\varepsilon}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varepsilon\varepsilon}}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial T_{z\varepsilon}}{\partial z}+\frac{T_{r\varepsilon}+T_{\varepsilon r}}{r},$$

$$(\operatorname{Div}T)_z=\frac{\partial T_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varepsilon z}}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\frac{T_{rz}}{r}.$$

Сферическая система R, θ, ε:

$$x=R\sin\theta\cos\varepsilon,\quad y=R\sin\theta\sin\varepsilon,\ z=R\cos\theta$$

$$(0\leqslant R<\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant 2\pi),$$

$$H_R=1,\ H_\theta=R,\ H_\varepsilon=R\sin\theta,$$

$$ds^2=dR^2+R^2d\theta^2+R^2\sin^2\theta\,d\varepsilon^2,$$

$$d\sigma_R=R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varepsilon,\ d\sigma_\theta=R\sin\theta\,dr\,d\varepsilon,\ d\sigma_\varepsilon=R\,dR\,d\theta,$$

$$d\tau=R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varepsilon,$$

$$\operatorname{grad}_R\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial R},\quad \operatorname{grad}_\theta\varphi=\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\quad \operatorname{grad}_\varepsilon\varphi=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2a_R)}{\partial R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial(a_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial\varepsilon},$$

$$\operatorname{rot}_R\boldsymbol{a}=\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial(a_\varepsilon\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varepsilon}\right],$$

$$\operatorname{rot}_\theta\boldsymbol{a}=\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_R}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial(Ra_\varepsilon)}{\partial R}\right],\tag{86}$$

$$\operatorname{rot}_\varepsilon\boldsymbol{a}=\frac{1}{R}\left[\frac{\partial(Ra_\theta)}{\partial R}-\frac{\partial a_R}{\partial\theta}\right],$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)}{\partial R}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon^2}\right],$$

$$(\mathrm{Div}\,T)_R=\frac{\partial T_{RR}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial T_{\theta R}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial T_{\varepsilon R}}{\partial\varepsilon}+$$
$$+\frac{1}{R}(2T_{RR}+T_{\theta R}\operatorname{ctg}\theta-T_{\theta\theta}-T_{\varepsilon\varepsilon}),$$

$$(\mathrm{Div}\,T)_\theta=\frac{\partial T_{R\theta}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial T_{\varepsilon\theta}}{\partial\varepsilon}+$$
$$+\frac{1}{R}[2T_{R\theta}+T_{\theta R}+(T_{\theta\theta}-T_{\varepsilon\varepsilon})\operatorname{ctg}\theta],$$

$$(\mathrm{Div}\,T)_\varepsilon=\frac{\partial T_{R\varepsilon}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial T_{\theta\varepsilon}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial T_{\varepsilon\varepsilon}}{\partial\varepsilon}+$$
$$+\frac{1}{R}[2T_{R\varepsilon}+T_{\varepsilon R}+(T_{\theta\varepsilon}+T_{\varepsilon\theta})\operatorname{ctg}\theta].$$

Символический оператор ∇ был задан в *прямолинейной ортогональной* системе координат своими проекциями $\partial/\partial x_i$ ($i=1, 2, 3$). Заметим, что этот оператор может быть обобщен и на любую ортогональную криволинейную систему. Общие выражения различных пространственных производных (80) от скалярных, векторных и тензорных функций через символический оператор ∇ были приведены выше и раскрыты для случая прямолинейной ортогональной системы координат. Целесообразность применения оператора ∇ не ограничивается очевидными удобствами запоминания соответствующих формул; он может быть использован и для вывода выражений пространственных производных от *сложных* скалярных, векторных и тензорных функций. Вспоминая обычное правило дифференцирования произведения двух функций

$$(\varphi\psi)'=\varphi\psi'+\psi\varphi', \tag{87}$$

обобщим его на скалярные, векторные и тензорные операции с символическим вектором ∇. Для этого будем составлять *по правилам векторной алгебры* различные комбинации ∇ и дифференцируемых величин, включая лишь те комбинации, которые имеют оператор ∇ слева от этих величин или могут быть к такому виду сведены, а затем сложим эти комбинации.

Пользуясь этим приемом, найдем

$$\begin{gathered}
\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi,\\
\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi,\\
\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=\nabla\times(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla\varphi)\times\boldsymbol{a}=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{a},\\
\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b},\\
\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})=\\
=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a},\\
\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}(\nabla\times\boldsymbol{a})=\\
=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\\
\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}^2)=2(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\\
\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\nabla^2\varphi\ (\text{лапласиан }\varphi),\\
\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi\equiv0,\quad\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\equiv0,\\
\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\nabla^2\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\nabla^2\boldsymbol{a}.
\end{gathered} \tag{88}$$

Аналитические координатные выражения формул (88) приводить нецелесообразно, так как они слишком громоздки и далее не потребуются.

§ 9. Мера неоднородности векторного поля — дифференциальная диада и ее составляющие: деформация и ротация векторного поля

Дифференциальная диада $D=\nabla a$, которая была введена в предыдущем параграфе, с компонентами $D_{ij}=\nabla_i a_j=\partial a_j/\partial x_i$ и таблицей

$$D\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{89}$$

может служить *мерой неоднородности векторного поля*. Только равенство ее нулю во всех точках указывает на *однородность* векторного поля.

Сопряженная диада D^* с компонентами $D^*_{ij}=D_{ji}$ имеет таблицу

$$D^*\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \tag{90}$$

Простым, но полезным для дальнейшего примером может служить *дифференциальная диада вектор-радиусов* $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$ *точек поля* $\nabla \boldsymbol{r}$ с таблицей

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

выражающей справедливость равенства

$$\nabla \boldsymbol{r}=E. \tag{91}$$

Условие *симметричности* (75) тензора P приводится теперь к виду

$$P\times\nabla \boldsymbol{r}=0. \tag{92}$$

Тензору D, в столбцах которого располагаются элементы *градиентов проекций* вектора $\boldsymbol{a}$, приписывают обозначение [см. (80)]

$$D=\nabla \boldsymbol{a}=\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{a} \tag{93}$$

[см. формулу (89)], где оператор «градиент вектора», в отличие от градиента скалярной функции, отмечают заглавной буквой.

Выражение *полного дифференциала* вектора $\boldsymbol{a}$ можно представить равенствами

$$(d\boldsymbol{a})_i=\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx_j=D_{ij}dx_j=D^*_{ij}dx_j=(D^*d\boldsymbol{r})_i$$

или, в не зависящей от координат форме, равенством

$$d\boldsymbol{a}=D^{*}d\boldsymbol{r}. \tag{94}$$

Введем операцию «производная вектора $\boldsymbol{a}$ по вектору $\boldsymbol{b}$» и обозначим ее символом $d\boldsymbol{a}/d\boldsymbol{b}$; тогда будем иметь

$$D^{*}=\frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{r}}. \tag{95}$$

Меру неоднородности векторного поля общего вида — тензор D — можно разложить на две составляющие: *деформацию* и *ротацию* поля. Для этого воспользуемся ранее установленным разложением тензора на симметричную и антисимметричную части:

$$\begin{gathered}D\equiv\frac{1}{2}(D+D^{*})+\frac{1}{2}(D-D^{*})=S+A,\\ D^{*}\equiv\frac{1}{2}(D^{*}+D)+\frac{1}{2}(D^{*}-D)=S+A^{*}.\end{gathered} \tag{96}$$

Симметричную часть S, равную

$$S=\frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad}\boldsymbol{a}+\frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{r}}\right)=\operatorname{def}\boldsymbol{a}, \tag{97}$$

назовем *мерой деформации*, или, короче, *деформацией* векторного поля. Ее компоненты в *прямолинейной* ортогональной декартовой системе координат будут

$$(\operatorname{def}\boldsymbol{a})_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}+\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\quad(i,\,j=1,\,2,\,3). \tag{98}$$

Компоненты тензора $\operatorname{def}\boldsymbol{a}$ в ортогональных криволинейных координатах имеют вид

$$(\operatorname{def}\boldsymbol{a})_{q_rq_s}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial a_{q_s}}{\partial q_r}+\dfrac{1}{H_s}\dfrac{\partial a_{q_r}}{\partial q_s}-\dfrac{a_{q_r}}{H_rH_s}\dfrac{\partial H_r}{\partial q_s}-\dfrac{a_{q_s}}{H_rH_s}\dfrac{\partial H_s}{\partial q_r}\right) & \text{при } r\neq s,\\ \dfrac{1}{H_s}\dfrac{\partial a_{q_s}}{\partial q_s}-\dfrac{a_{q_s}}{H_s^2}\dfrac{\partial H_s}{\partial q_s}+\dfrac{a_{q_1}}{H_1H_s}\dfrac{\partial H_s}{\partial q_1}+\dfrac{a_{q_2}}{H_2H_s}\dfrac{\partial H_s}{\partial q_2}+\dfrac{a_{q_3}}{H_3H_s}\dfrac{\partial H_s}{\partial q_3} & \text{при } r=s,\end{cases}$$

$$(\operatorname{def}\boldsymbol{a})_{q_1q_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial a_{q_1}}{\partial q_1}+\frac{a_{q_2}}{H_2H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{a_{q_3}}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3},$$

$$(\operatorname{def}\boldsymbol{a})_{q_1q_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial a_{q_2}}{\partial q_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial a_{q_1}}{\partial q_2}-\frac{a_{q_1}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{a_{q_2}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right), \tag{99}$$

$$(\operatorname{def}\boldsymbol{a})_{q_1q_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial a_{q_3}}{\partial q_1}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial a_{q_1}}{\partial q_3}-\frac{a_{q_1}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{a_{q_3}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right),$$

$$(\operatorname{def}\boldsymbol{a})_{q_2q_2}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial a_{q_2}}{\partial q_2}+\frac{a_{q_1}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{a_{q_3}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3},$$

$$(\operatorname{def}\boldsymbol{a})_{q_2q_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial a_{q_3}}{\partial q_2}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial a_{q_2}}{\partial q_3}-\frac{a_{q_3}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-\frac{a_{q_3}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right),$$

$$(\operatorname{def}\boldsymbol{a})_{q_3q_3}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial a_{q_3}}{\partial q_3}+\frac{a_{q_1}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\frac{a_{q_2}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2},$$

$$(\operatorname{def} a)_{q_2q_1}=(\operatorname{def} a)_{q_1q_2},\quad (\operatorname{def} a)_{q_3q_1}=(\operatorname{def} a)_{q_1q_3},$$
$$(\operatorname{def} a)_{q_3q_2}=(\operatorname{def} a)_{q_2q_3}.$$

Так, в *цилиндрической* системе координат r, ε, z ($H_r=1$, $H_\varepsilon=r$, $H_z=1$) имеем

$$(\operatorname{def} a)_{rr}=\frac{\partial a_r}{\partial r},\quad (\operatorname{def} a)_{\varepsilon\varepsilon}=\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial \varepsilon}+\frac{a_r}{r},\quad (\operatorname{def} a)_{zz}=\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$(\operatorname{def} a)_{\varepsilon z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial z}\right),\quad (\operatorname{def} a)_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}+\frac{\partial a_z}{\partial r}\right), \tag{100}$$

$$(\operatorname{def} a)_{r\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial r}-\frac{a_\varepsilon}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varepsilon}\right).$$

В *сферической* системе R, θ, ε ($H_R=1$, $H_\theta=R$, $H_\varepsilon=R\sin\theta$)

$$(\operatorname{def} a)_{RR}=\frac{\partial a_R}{\partial R},\quad (\operatorname{def} a)_{\theta\theta}=\frac{1}{R}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}+\frac{a_R}{R},$$

$$(\operatorname{def} a)_{\varepsilon\varepsilon}=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial \varepsilon}+\frac{a_\theta}{R}\operatorname{ctg}\theta+\frac{a_R}{R},$$

$$(\operatorname{def} a)_{\theta\varepsilon}=(\operatorname{def} a)_{\varepsilon\theta}=\frac{1}{2R}\left(\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial \theta}-a_\varepsilon\operatorname{ctg}\theta\right)+\frac{1}{2R\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varepsilon}, \tag{101}$$

$$(\operatorname{def} a)_{R\theta}=(\operatorname{def} a)_{\theta R}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial R}-\frac{a_\theta}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial a_R}{\partial \theta}\right),$$

$$(\operatorname{def} a)_{\varepsilon R}=(\operatorname{def} a)_{R\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial a_R}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial R}-\frac{a_\varepsilon}{R}\right).$$

Антисимметричная часть

$$A=\frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad} a-\frac{da}{dr}\right) \tag{102}$$

с компонентами в *прямоугольной* декартовой системе

$$A_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right), \tag{103}$$

имеющая в качестве «сопутствующего» вектора

$$c_k=A_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{rot}_k a$$

$$(k=1,\ 2,\ 3;\quad i\to j\to k\to\ldots), \tag{104}$$

т. е. вектор

$$c=\frac{1}{2}\operatorname{rot} a, \tag{105}$$

называется *ротацией* векторного поля [1]).

Согласно (56) будет

$$bD=D^*b=b\operatorname{def} a+\frac{1}{2}\operatorname{rot} a\times b. \tag{106}$$

---

[1]) Происхождение терминов *деформация* и *ротация* связано с применением их к полям *перемещений* или *скоростей* точек сплошной среды (см. далее §§ 12, 13).

§ 10. Основные интегральные формулы поля. Теоремы Гаусса — Остроградского и Стокса

Используя определение (79) пространственной производной, можно вывести имеющие фундаментальное значение в механике жидкости и газа *интегральные* формулы поля.

Перепишем предельные определения пространственных производных (80) в приближенной форме, верной с точностью до малых четвертого порядка относительно характерного линейного размера h элементарной области. Рассмотрим далее вывод на примере первой из формул (80). Введем для малого объема $\delta\tau$

$$\int_\sigma n\varphi\,\delta\sigma \approx \operatorname{grad}\varphi\,\delta\tau + O(h^4). \tag{107}$$

Просуммируем обе части этого равенства по всем элементарным объемам $\delta\tau$, составляющим конечный объем τ. Заметим, что на общей границе $\delta\sigma$ двух любых смежных элементарных объемов единичные векторы n будут иметь противоположные для каждого из объемов направления, что при непрерывности скалярной функции φ приведет к взаимному попарному уничтожению элементов поверхностного интеграла, стоящего в левой части равенства (107). Такое взаимное уничтожение не затронет, очевидно, только поверхности элементарных объемов, находящихся на *внешней границе* поверхности σ, ограничивающей объем τ.

Сумма таких нескомпенсированных элементов приводит к интегралу $\int_\sigma n\varphi\delta\sigma$ для поверхности конечного объема.

Суммирование первых членов в правой части дает интеграл $\int_\tau \operatorname{grad}\varphi\,\delta\tau$. Таким образом, придем к *точной* формуле

$$\int_\sigma n\varphi\,\delta\sigma = \int_\tau \operatorname{grad}\varphi\,\delta\tau, \tag{108}$$

так как при суммировании по объему малых величин четвертого порядка накопится ошибка первого порядка, в пределе при $h\to 0$ обращающаяся в нуль.

Аналогично, в соответствии с (80) получим систему интегральных формул

$$\begin{aligned}
\int_\sigma n\cdot a\,\delta\sigma &= \int_\tau \operatorname{div} a\,\delta\tau,\\
\int_\sigma n\times a\,\delta\sigma &= \int_\tau \operatorname{rot} a\,\delta\tau,\\
\int_\sigma nT\,\delta\sigma &= \int_\tau \operatorname{Div} T\,\delta\tau,
\end{aligned} \tag{109}$$

совокупность которых можно представить в удобной для запоминания символической форме

$$\int_\sigma n\ldots\delta\sigma = \int_\tau \nabla\ldots\delta\tau. \tag{110}$$

Формула (110) дает возможность перехода от поверхностного интеграла к объемному с заменой нормали n в первом интеграле на ∇ во втором. Многоточием в обеих частях обозначается интегрируемая величина с соответствующим для нее знаком умножения.

Первая из формул системы (109), которую перепишем в развернутом виде еще так (суммирование по i):

$$\int_\sigma \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}\,\delta\sigma=\int_\sigma a_n\delta\sigma=\int_\sigma (a_i n_i)\,\delta\sigma=\int_\tau \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\delta\tau=\int_\tau \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\delta\tau, \tag{111}$$

выражает теорему Гаусса – Остроградского.

Введем понятие потока вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность σ:

$$F_\sigma'(\boldsymbol{a})=\int_\sigma a_n\delta\sigma=\int_\sigma \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\delta\sigma, \tag{112}$$

где $a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ – проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности σ в данной ее точке. Само по себе определение (112) имеет смысл как для замкнутых, так и для разомкнутых поверхностей, причем знак $F_\sigma(\boldsymbol{a})$,

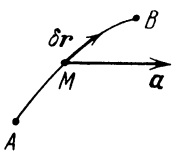


Рис. 4

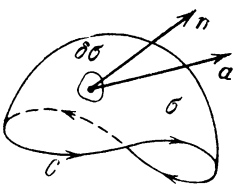


Рис. 5

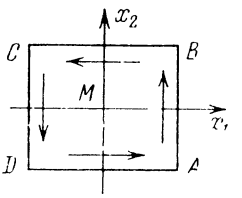


Рис. 6

очевидно, зависит от выбора направления нормали $\boldsymbol{n}$ в одну или в другую сторону. В формуле (111) фигурируют замкнутая поверхность и внешняя нормаль. Таким образом, теорему Гаусса – Остроградского можно сформулировать так: *поток вектора через замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем, равен интегралу по этому объему от дивергенции вектора.*

Для доказательства другой, также очень важной теоремы Стокса понадобится понятие *циркуляции* вектора $\boldsymbol{a}$ по произвольному контуру C (рис. 4), которая определяется криволинейным интегралом вдоль контура C:

$$\Gamma_C(\boldsymbol{a})=\int_{A\,(C)}^{B}\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\int_{A\,(C)}^{B}a_i\delta x_i. \tag{113}$$

В случае *замкнутого* ($B\to A$), самого себя не пересекающего контура C циркуляция обозначается символом

$$\Gamma_C(\boldsymbol{a})=\oint_{(C)}\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\oint_{(C)}a_i\delta x_i. \tag{114}$$

Направление обхода контура C выбирается таким, чтобы ограниченная контуром поверхность σ оставалась при обходе слева.

Теорема Стокса утверждает, что *циркуляция вектора по замкнутому контуру C, на который опирается разомкнутая поверхность* σ (рис. 5), *равна потоку вектора* $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ *через поверхность* σ:

$$\Gamma_C(\boldsymbol{a})=F_\sigma(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}), \tag{115}$$

а соответствующая этой теореме формула Стокса имеет вид

$$\oint_C\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\oint_\sigma \operatorname{rot}_n\boldsymbol{a}\,\delta\sigma. \tag{116}$$

Направление нормали должно соответствовать направлению обхода контура C, т. е. со стороны нормали обход должен представляться в

положительном (против часовой стрелки) направлении. Докажем сначала теорему Стокса для *элементарного* прямоугольника $ABCD$ (рис. 6), расположенного в плоскости $x_3=\text{const}$ (ось Ox_3 направлена перпендикулярно к плоскости рисунка на читателя), со сторонами, параллельными осям Ox_1 и Ox_2, в центре которого помещена точка M с координатами x_1, x_2, x_3 и с заданным в ней вектором $\boldsymbol{a}$ (x_1, x_2, x_3). Значения вектора $\boldsymbol{a}$ на серединах сторон выразим с точностью до $O(\delta x^2)$ равенствами

$$\text{на } \overline{AB}\text{: } \boldsymbol{a}+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_1}\delta x_1,$$

$$\text{на } \overline{BC}\text{: } \boldsymbol{a}+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_2}\delta x_2,$$

$$\text{на } \overline{CD}\text{: } \boldsymbol{a}-\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_1}\delta x_1,$$

$$\text{на } \overline{DA}\text{: } \boldsymbol{a}-\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_2}\delta x_2.$$

Циркуляцию по обводу прямоугольника получим как сумму циркуляций по отдельным отрезкам $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$, равных по отдельности, с учетом направления обхода,

$$\Gamma_{AB}=\left(a_2+\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\delta x_1\right)|AB|=\left(a_2+\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\delta x_1\right)2\delta x_2,$$

$$\Gamma_{BC}=-\left(a_1+\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\delta x_2\right)|BC|=-\left(a_1+\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\delta x_2\right)2\delta x_1,$$

$$\Gamma_{CD}=-\left(a_2-\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\delta x_1\right)|CD|=-\left(a_2-\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\delta x_1\right)2\delta x_2,$$

$$\Gamma_{DA}=\left(a_1-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\delta x_2\right)|DA|=\left(a_1-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\delta x_2\right)2\delta x_1.$$

Суммируя, получим

$$\Gamma_{ABCD}=\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)4\delta x_1\delta x_2=\operatorname{rot}_3 \boldsymbol{a}\,\delta\sigma, \tag{117}$$

где $\delta\sigma$ обозначает площадь прямоугольника $ABCD$ $\delta\sigma=2\delta x_1\cdot 2\delta x_2=4\delta x_1\delta x_2$. Равенство (117) показывает, что циркуляция вектора $\boldsymbol{a}$ по обводу прямоугольника равна потоку вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ сквозь площадь прямоугольника. Эту формулу можно применить к любому элементу $\delta\sigma$ поверхности σ в форме

$$\delta\Gamma=\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a}\,\delta\sigma. \tag{118}$$

Суммируя обе части формулы (118) по всем элементам поверхности σ, заметим, что циркуляции по общим сторонам смежных ячеек взаимно уничтожатся, а останутся лишь циркуляции по тем сторонам ячеек, которые как раз составляют контур C. В пределе получим

$$\sum\delta\Gamma=\oint\limits_C\delta\Gamma=\oint\limits_C \boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}.$$

Сумма правых частей в уравнении (118) приведется к *полному потоку вектора* $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ *сквозь поверхность* σ, что и доказывает справедливость теоремы Стокса.

Изложенных в этой главе основных понятий и формул векторного и тензорного анализа достаточно для усвоения содержания настоящего курса. Для более подробного ознакомления с основами векторного и

тензорного исчислений рекомендуем следующие специальные учебные пособия:

1) Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.— М.: Наука, 1965;

2) Седов Л. И. Механика сплошной среды, Ч. 1.— М.: Наука, 1983;

3) Лурье А. И. Теория упругости.— М.: Наука, 1970. Приложения I, II, III (с. 799—870);

4) Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред.— М.: Мир, 1974.

В предыдущем (пятом) издании (М.: Наука, 1978) настоящего учебника на с. 14—30 приведена *сводка наиболее употребительных формул векторного и тензорного исчислений.*

ГЛАВА II

КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 11. Задание положения и движения сплошной среды. Линии тока и траектории. Трубки тока и струи

Для задания положения и движения сплошной среды, в частности жидкости или газа, существуют два способа.

Первый, связанный с именем Л а г р а н ж а, заключается в задании текущих значений координат частиц среды x_1, x_2, x_3 как функций времени, т. е. совпадает с применяемым в кинематике системы материальных точек. Необходимость индивидуализации этих частиц требует дополнительного задания значений координат каждой из них a_1, a_2, a_3 в некоторый начальный момент времени $t=t_0$, причем эти координаты могут быть не только прямоугольными декартовыми, но и любыми криволинейными. Поскольку частиц сплошной среды бесконечно много, то сами величины a_k составляют непрерывное поле. Величины a_k и t называют *лагранжевыми переменными.*

Кинематические уравнения движения запишутся при этом в векторной или координатной форме так:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(a_1, a_2, a_3; t), \\ x_2 &= x_2(a_1, a_2, a_3; t), \\ x_3 &= x_3(a_1, a_2, a_3; t), \end{aligned} \tag{1}$$

или

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3; t) \qquad (i=1, 2, 3),$$

или

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(a_1, a_2, a_3; t) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}, t).$$

Другой способ, принадлежащий Э й л е р у и значительно шире распространенный, чем способ Л а г р а н ж а, заключается в аналитическом или векторном задании *поля скоростей* вектора скорости $\boldsymbol{V}$ с проекциями V_1, V_2, V_3:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1(x_1, x_2, x_3; t), \\ V_2 &= V_2(x_1, x_2, x_3; t), \\ V_3 &= V_3(x_1, x_2, x_3; t), \end{aligned} \tag{2}$$

или

$$V_i = V_i(x_1, x_2, x_3; t) \qquad (i=1, 2, 3),$$

или

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x_1, x_2, x_3; t) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t).$$

Переменные x_1, x_2, x_3, t в этом случае называют *эйлеровыми переменными.*

Подчеркнем, что в лагранжевом задании координаты x_1, x_2, x_3 относятся к движущимся частицам среды, а в эйлеровом — к точкам пространства, с которыми в данный момент времени совпадают эти частицы, что позволяет переписать систему уравнений (2) в виде одного векторного или системы трех обыкновенных дифференциальных урав-

нений первого порядка

$$V_1 = \frac{dx_1}{dt} = V_1(x_1, x_2, x_3; t),$$

$$V_2 = \frac{dx_2}{dt} = V_2(x_1, x_2, x_3; t), \qquad (3)$$

$$V_3 = \frac{dx_3}{dt} = V_3(x_1, x_2, x_3; t),$$

или

$$V_i = dx_i/dt = V_i(x_1, x_2, x_3; t) \qquad (i=1, 2, 3),$$

или

$$\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{V}(x_1, x_2, x_3; t)$$

относительно неизвестных $\boldsymbol{r}(t)$ или $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Три постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, которые при этом появятся и войдут в интегралы системы (3)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(C_1, C_2, C_3; t), \\ x_2 &= x_2(C_1, C_2, C_3; t), \\ x_3 &= x_3(C_1, C_2, C_3; t) \end{aligned} \qquad (4)$$

могут быть исключены при помощи начальных условий при $t=t_0$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1(C_1, C_2, C_3; t_0), \\ a_2 &= x_2(C_1, C_2, C_3; t_0), \\ a_3 &= x_3(C_1, C_2, C_3; t_0). \end{aligned} \qquad (5)$$

Это приведет в конечном счете к лагранжеву заданию (1). В дальнейшем будет удобнее пользоваться эйлеровыми переменными и задавать движение в форме (2).

Поле скоростей является *однородным*, если *векторы* скорости во всех точках поля *одинаковы*. Поле скоростей называют *стационарным*, если оно не меняется с течением времени ($\partial \boldsymbol{V}/\partial t = 0$), в противном случае — *нестационарным*. В разделе кинематики сплошной среды поле скоростей считается заданным.



Рис. 7

Поля физических величин трудно обозримы непосредственно. Для упорядочения представления о них разработаны специальные приемы. Скалярное поле разбивается *поверхностями уровня* скалярной функции. Таковы, например, изотермы — поверхности одинаковой температуры и изопотенциальные поверхности в динамике, на которых сохраняются постоянными значения потенциала силового поля.

В векторных полях рассматривают *векторные линии, в каждой точке которых вектор направлен по касательной к этой линии.* В дальнейшем прежде всего встретятся *линии тока* (рис. 7), т. е. линии, в каждой точке которых вектор скорости среды направлен по касательной к ним. В определении линий тока время играет роль фиксированного параметра. В дальнейшем будем отличать линии тока от других векторных линий, нанося на них стрелки, показывающие, в какую сторону происходит движение.

Через каждую точку поля скоростей в данный момент времени можно, вообще говоря, провести линию тока и притом только одну. Существуют, однако, и такие — их называют *особыми* — точки поля скоростей, через которые проходят две или бесчисленное множество линий

тока, а иногда и такие, через которые не проходит ни одна линия тока. Примеры таких особых точек будут даны в § 50 гл. VII.

Течение жидкости можно визуализировать, т. е. сделать видимым, если, например, ввести в жидкость мелкие твердые частицы (порошки ликоподия, алюминия или полистироловые шарики) или мелкие пузырьки газа (обычно водорода), а затем сфотографировать в отраженном свете с малой выдержкой или снять на киноленту. При этом линии тока наглядно показывают общий характер движения. Такие образы движения жидкости называются *спектрами* потока. Аналогичные, например, *дымовые* спектры осуществляют и в воздушных потоках. Проф. М. Ван-Дайк (Стэнфордский университет, США) составил замечательный по содержанию и оформлению атлас спектров водяных и воздушных потоков, а также оптических картин до- и сверхзвуковых течений, представляющий ценное учебное пособие по курсу механики жидкости и газа [1]).

Записав условие, что вектор скорости $\boldsymbol{V}$ в данной точке, направленный по касательной к линии тока, и дифференциал $\delta\boldsymbol{r}$ (рис. 7) вектор-радиуса $\boldsymbol{r}$ этой точки имеют общее направление, получим векторное равенство, выражающее условие параллельности этих двух векторов:

$$\boldsymbol{V}\times\delta\boldsymbol{r}=0, \tag{6}$$

или, в проекциях,

$$\frac{\delta x_1}{V_1(x_1, x_2, x_3; t)} = \frac{\delta x_2}{V_2(x_1, x_2, x_3; t)} = \frac{\delta x_3}{V_3(x_1, x_2, x_3; t)}. \tag{7}$$

Подчеркнем, что использование греческой буквы δ в обозначениях дифференциалов указывает на бесконечно малое приращение величины в пространстве, когда поле данной величины зафиксировано в данный момент времени. Латинская буква d сохранена для обозначения дифференциалов величин как бесконечно малых приращений во времени при движении среды.

В равенствах (7) V_1, V_2, V_3 — заданные функции координат и времени. Считая t параметром, принимающим любые фиксированные значения, можем рассматривать совокупность равенств (7) как систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (третье — следствие остальных). Интегралы этих уравнений представят конечные связи между координатами, являющиеся уравнениями двух поверхностей; в пересечении их получится искомая линия тока. Таким непосредственным, но излишне трудоемким методом получения линий тока в дальнейшем пользоваться не будем.

От линий тока следует отличать *траектории* движения частиц сплошной среды, определяемые как геометрическое место точек последовательных положений отдельных частиц в пространстве в следующие друг за другом моменты времени.

В каждый данный момент времени t дифференциал $d\boldsymbol{r}$ вектор-радиуса $\boldsymbol{r}$ движущейся частицы будет совпадать по направлению с вектором скорости, так что дифференциальные уравнения *траекторий* будут аналогичны уравнениям (7) линий тока, но с тем принципиальным отличием, что теперь уже время t будет таким же независимым переменным, как x_1, x_2, x_3, и *уравнение траектории* должно быть записано в виде

$$\frac{dx_1}{V_1(x_1, x_2, x_3; t)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1, x_2, x_3; t)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1, x_2, x_3; t)} = dt. \tag{8}$$

---

[1]) Van-Dyke M. An album of fluid motion.— Stanford, California, USA: The Parabolic Press, 1982. Имеется и русский перевод: Альбом течений жидкости и газа/Под ред. М. Ван-Дайка.— М.: Мир, 1986.

Если поле скоростей *стационарно*, то время t не будет входить в проекции скоростей, исчезнет оно и из уравнений (8), и они совпадут с (7). Отсюда следует, что в *стационарных полях скоростей траектории и линии тока в любой момент времени совпадают.*

К тому же результату можно прийти и из следующих простых геометрических соображений. Для построения *линии тока*, проходящей через точку M (рис. 8), отложим вдоль вектора скорости произвольный *малый* отрезок $\overline{MM_1}$. В тот же момент времени t (t — фиксированный параметр) в точке M_1 скорость в силу неоднородности поля скоростей будет уже иной, скажем, $\boldsymbol{V}_1$. Откладывая вдоль направления $\boldsymbol{V}_1$ отрезок M_1M_2, получим следующую точку M_2 и т. д. На рисунке показан полигон $MM_1M_2M_3\ldots$ При бесконечной малости отрезков этот полигон превратится в непрерывную кривую — линию тока.

Иначе будет строиться *траектория* точки. По прошествии малого промежутка времени Δt точка M совершит перемещение $\overrightarrow{MM'}=\boldsymbol{V}\Delta t$ и перейдет в точку M', которую выбором Δt можно совместить с M_1. Отсюда по вектору скорости $\boldsymbol{V}'$, соответствующему точке M' и моменту времени $t+\Delta t$, за новый промежуток времени Δt точка M' переместится в точку M'', а затем по вектору скорости $\boldsymbol{V}''$ в точку M''' и т. д.

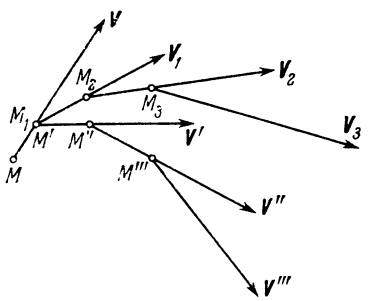


Рис. 8

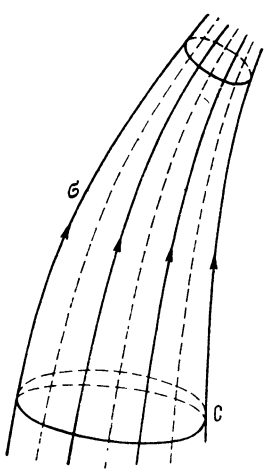


Рис. 9

Очевидно, что полигон $MM'M''M'''\ldots$ в общем случае *нестационарного* поля скоростей будет отличен от полигона $MM_1M_2\ldots$ Предельное положение точек полигона $MM'M''\ldots$ при $\Delta t\to 0$ определит *траекторию* движущейся точки M среды, которая в случае нестационарного поля скоростей не совпадет с линией тока. У линии тока и траектории, проходящих через данную точку M, в этой точке будет общей касательная, направленная по вектору скорости $\boldsymbol{V}$.

В случае *стационарного* потока, выбирая произвольные точки M_1, M_2, ... совпадающими с M', M'', ... и замечая, что векторы скоростей $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, ... в любой момент времени по условию стационарности совпадут с $\boldsymbol{V}'$, $\boldsymbol{V}''$, ... убедимся, что совпадут и линия тока с траекторией.

Проводя в данный момент времени через точки замкнутого контура C (рис. 9) линии тока, получим *поверхность тока*, заключающую внутри себя часть жидкости, называемую *трубкой тока.* Если далее рассмотреть контур C как *жидкий*, т. е. *состоящий в любой момент времени из одних и тех же частиц жидкости*, то совокупность траекторий точек этого контура ограничит *струю.* В случае *стационарного* поля скоростей *струя совпадает с трубкой тока.* В любой точке поверхности тока вектор скорости $\boldsymbol{V}$ направлен по касательной к линии тока, так что среда не проникает сквозь поверхность тока. Поэтому, если

среда несжимаемая (плотность ее повсюду одинакова) и, кроме того, внутри трубки тока нет источников или стоков, то секундный объемный расход ее Q, т. е. поток вектора скорости через поперечное сечение трубки, *одинаков* в данный момент для любого сечения трубки:

$$Q=\int_{\sigma} V_n \delta\sigma = \text{const}, \tag{9}$$

где n — нормаль к сечению трубки σ в данной точке.

Элементарные (построенные на бесконечно малом контуре) трубки тока, каково бы ни было поле скоростей, допускают проведение *нормальных* к ним сечений, причем с точностью до малых высших порядков эти сечения могут рассматриваться как *плоские*. Иначе обстоит дело с трубками тока *конечного* размера. Для того, чтобы такие трубки имели сечения, нормальные к линиям тока внутри трубок и на их поверхности, необходимо выполнение условия *существования поверхностей, нормальных к линиям тока.*

Рассмотрим семейство поверхностей $\varphi(x_1, x_2, x_3)=\text{const}$, пересекающих линии тока. Условием ортогональности линий тока этим поверхностям будет (λ — скалярная функция)

$$\operatorname{grad}\varphi=\lambda \boldsymbol{V}.$$

Взяв от обеих частей этого векторного равенства операцию rot, слева получим нуль, а справа, согласно третьему равенству системы (88) гл. I, соотношение

$$\operatorname{rot}(\lambda \boldsymbol{V})=\lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{V}+\operatorname{grad}\lambda\times \boldsymbol{V}.$$

Умножая обе части таким образом полученного равенства

$$0=\lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{V}+\operatorname{grad}\lambda\times \boldsymbol{V}$$

скалярно на $\boldsymbol{V}$ и учитывая, что второе слагаемое справа перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{V}$, убедимся, что условием существования ортогональных к линиям тока поверхностей будет

$$\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{rot} \boldsymbol{V}=0. \tag{10}$$

Таково ограничение, накладываемое на поле скоростей, без выполнения которого *невозможно существование сечений трубок тока, нормальных к линиям тока.*

§ 12. Распределение скоростей в элементарном объеме среды. Первая теорема Гельмгольца

В кинематике абсолютно твердого тела, представляющего простейший пример сплошной среды, излагается теорема Эйлера о разложении вектора скорости $\boldsymbol{V}$ любой точки тела произвольных размеров на составляющую $\boldsymbol{V}_0$ поступательного движения вместе с произвольно выбранным полюсом O и вращательную составляющую согласно вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Аналогичная по содержанию теорема, расширенная учетом возможных деформаций среды, но по необходимости ограниченная применением к бесконечно малому объему, устанавливается для любой сплошной среды, в частности для жидкости или газа.

Напомним, что в общем случае движения абсолютно твердого тела распределение скорости задавалось формулой

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0), \tag{11}$$

где $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости любой точки M тела; $\boldsymbol{V}_0$ — скорость точки M_0, выбранной за *полюс*; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения тела, оди-

наковый для любой точки тела; $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_0$ — вектор-радиусы точек M и M_0. В проекциях на оси координат равенство (11) примет вид

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{10} + \omega_2(x_3 - x_{30}) - \omega_3(x_2 - x_{20}), \\ V_2 &= V_{20} + \omega_3(x_1 - x_{10}) - \omega_1(x_3 - x_{30}), \\ V_3 &= V_{30} + \omega_1(x_2 - x_{20}) - \omega_2(x_1 - x_{10}). \end{aligned} \tag{12}$$

Имея в виду, что величины x_{10}, x_{20}, x_{30}; V_{10}, V_{20}, V_{30}; ω_1, ω_2, ω_3 одинаковы в данный момент времени t для всех точек тела, заключим, что равенство (11) и его развернутая форма (12) представляют *линейную вектор-функцию вектор-радиуса* $\boldsymbol{r}$ точки M или, что все равно, координат x_1, x_2, x_3.

В кинематике абсолютно твердого тела уравнения (11) или (12) выражают вектор скорости $\mathbf{V}$ любой точки тела как заданную функцию координат. Поставим обратную задачу, обычно не рассматриваемую в курсах теоретической механики, об отыскании выражения вектора угловой скорости вращения тела через заданное равенствами (11) или (12) поле вектора скорости $\boldsymbol{V}$. С этой целью, пользуясь равенствами (12), найдем следующие разности производных от проекций скорости V_1, V_2, V_3 по координатам x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} &= \omega_1 - (-\omega_1) = 2\omega_1, \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} &= \omega_2 - (-\omega_2) = 2\omega_2, \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} &= \omega_3 - (-\omega_3) = 2\omega_3. \end{aligned} \tag{13}$$

Разности, стоящие в левых частях этих равенств, представляют проекции пространственной производной вектора $\mathbf{V}$, именуемой *ротором*, или *вихрем*, вектора скорости и обозначаемой символом $\operatorname{rot} \boldsymbol{V}$ [см. формулы (80), (81) гл. I].

Из равенств (13) следует

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{V}, \tag{14}$$

что и служит решением поставленной обратной задачи кинематики абсолютно твердого тела.

В рассмотренном случае общего движения абсолютно твердого тела уравнения (12) представляли проекции вектора скорости $\boldsymbol{V}$ *линейными* функциями координат, в силу чего величина и направление векторов вихря скорости $\operatorname{rot} \boldsymbol{V}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ были одинаковыми во всем пространстве.

В случае *деформируемой* среды, в частности жидкости или газа, поле скоростей не будет линейным относительно координат, но если удовольствоваться рассмотрением в данный момент времени бесконечно малого объема, то внутри него с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости поле скоростей можно считать линейным, а формулу (13) справедливой. Представив мысленно элементарный объем среды мгновенно *затвердевшим*, заключим, что угловая скорость его вращения в данный момент будет равна *половине вихря вектора скорости*, который может быть вычислен в малой области этой мгновенно *затвердевшей*, недеформируемой жидкости.

Формула (14) в случае абсолютно твердого тела справедлива *глобально*, т. е. для всего тела в целом, а в случае деформируемой среды — лишь *локально* в бесконечной близости к данной точке среды.

Далее вектору угловой скорости элементарного объема жидкости будет дана более прямая трактовка, не опирающаяся на образ мысленного затвердевания объема.

Рассмотрим движение элементарного объема жидкости, выделив в нем две произвольные точки M и M_1 (рис. 10) со скоростями $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}^{(1)}$. Относительное расположение точек M_1 и M определяется вектор-радиусом $\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$, где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_0$ — соответственно вектор-радиусы точек M_1 и M.

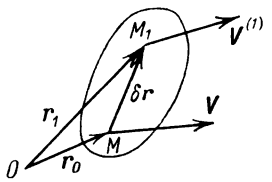


Рис. 10

Пользуясь непрерывностью поля скоростей и постулируя существование первых производных от проекций скорости $\boldsymbol{V}$ по координатам, сравним скорости $\boldsymbol{V}^{(1)}$ и $\boldsymbol{V}$. Применяя для этой цели символические представления полного дифференциала вектора $\boldsymbol{V}$ в пространстве и полной производной вектора $\boldsymbol{V}$ по вектор-радиусу $\boldsymbol{r}$, получим, согласно формулам (94)—(96) гл. I,

$$\delta\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^{(1)}-\boldsymbol{V}=\left(\frac{\delta\boldsymbol{V}}{\delta\boldsymbol{r}}\,\delta\boldsymbol{r}\right)=\dot{D}^{*}\delta\boldsymbol{r}=\dot{S}\,\delta\boldsymbol{r}+\dot{A}^{*}\delta\boldsymbol{r}, \tag{15}$$

где выражение, помещенное в круглых скобках, обозначает произведение тензора $\delta\boldsymbol{V}/\delta\boldsymbol{r}=\dot{D}^{*}$ на вектор $\delta\boldsymbol{r}$ «справа» [1]). Используя теперь равенство (106) гл. I при $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{b}=\delta\boldsymbol{r}$, получим

$$\boldsymbol{V}^{(1)}=\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{V}\times\delta\boldsymbol{r}+(\operatorname{def}\boldsymbol{V})\,\delta\boldsymbol{r}. \tag{16}$$

Сравним это выражение, приведенное, согласно (14), к виду

$$\boldsymbol{V}^{(1)}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\omega}\times\delta\boldsymbol{r}+(\operatorname{def}\boldsymbol{V})\,\delta\boldsymbol{r}, \tag{17}$$

с равенством (11) при $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\delta\boldsymbol{r}$. Первое слагаемое в правой части можно рассматривать как скорость *полюса* M, второе — как вращательную скорость точек элементарного объема с относительными вектор-радиусами $\delta\boldsymbol{r}$ при угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, а сумму этих двух слагаемых — как скорость $\boldsymbol{V}_{\text{кт}}$ в квазитвердом движении элементарного объема. Последнее слагаемое назовем *деформационной* скоростью и обозначим через $\boldsymbol{V}_{\text{деф}}$. Тогда равенство (17), переписанное в виде

$$\boldsymbol{V}^{(1)}=\boldsymbol{V}_{\text{кт}}+\boldsymbol{V}_{\text{деф}}, \tag{18}$$

где

$$\boldsymbol{V}_{\text{кт}}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\omega}\times\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{V}\times\delta\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{V}_{\text{деф}}=(\operatorname{def}\boldsymbol{V})\,\delta\boldsymbol{r}=\dot{S}\,\delta\boldsymbol{r}, \tag{19}$$

будет выражать *первую теорему* Гельмгольца, представляющую прямое обобщение теоремы Эйлера о распределении скоростей в движении *абсолютно твердого* тела. Первая теорема Гельмгольца гласит: *скорости точек элементарного объема сплошной среды складываются из скоростей квазитвердого и деформационного ее движений.*

Квазитвердое движение, точнее, общий случай движения абсолютно твердого тела, рассматривается подробно в курсе теоретической механики [2]). Обратимся к описанию деформационной составляющей скорости.

---

[1]) Точки в обозначениях $\dot{D}$, $\dot{S}$ и $\dot{A}^{*}$, обычно применяемые для сокращенного обозначения производных по времени, поставлены для того, чтобы не смешивать эти тензоры поля *скоростей* с тензорами D, S, A^{*} для поля *перемещений*.

[2]) См. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. I.— М.: Наука, 1982, с. 283—285.

§ 13. Деформационное движение жидкости. Тензор скоростей деформаций и кинематический смысл его компонент. Главные оси тензора скоростей деформаций

Введем (рис. 11) в некоторый момент в выбранной точке произвольно ориентированную систему прямоугольных декартовых координат $Mx_1x_2x_3$. Рассмотрим далее совокупность трех элементарных жидких отрезков $\delta\boldsymbol{r}_1$, $\delta\boldsymbol{r}_2$, $\delta\boldsymbol{r}_3$ с проекциями на эти оси:

$$\delta\boldsymbol{r}_1(\delta x_1, 0, 0), \quad \delta\boldsymbol{r}_2(0, \delta x_2, 0),$$
$$\delta\boldsymbol{r}_3(0, 0, \delta x_3). \qquad (20)$$

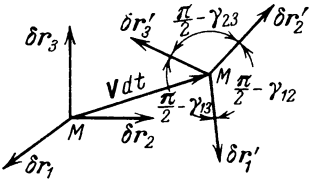


Рис. 11

По прошествии бесконечно малого промежутка времени dt жидкие координатные отрезки (20) переместятся в смежное положение $M'x_1'x_2'x_3'$, совершив, кроме квазитвердого, еще деформационное перемещение [второе равенство системы (19)]. Новые значения координатных отрезков (20) и их проекций будут равны (сохраним краткое обозначение S для def $\boldsymbol{V}$)

$$\delta\boldsymbol{r}_i' = \delta\boldsymbol{r}_i + \dot{S}\,\delta\boldsymbol{r}_i dt;$$
$$\delta x_i' = \delta x_i + (\dot{S}\,\delta\boldsymbol{r}_i)_i\,dt = \delta x_i + \dot{S}_{ij}(\delta\boldsymbol{r}_i)_j\,dt = \delta x_i + \dot{S}_{ii}\delta x_i dt, \qquad (21)$$

так как по (20) $(\delta\boldsymbol{r}_i)_j=0$, если $j\neq i$ ($i=1, 2, 3$; в формулах (21)—(23) по i не суммировать).

Относительные удлинения величин этих отрезков, согласно (21), будут

$$\varepsilon_i = \frac{\delta x_i' - \delta x_i}{\delta x_i} = \dot{S}_{ii}dt, \qquad (22)$$

и, следовательно, *диагональные компоненты тензора скоростей деформации $\dot{S}_{ii}$ равны скоростям относительных удлинений ε_i координатных отрезков $\delta\boldsymbol{r}_i$*

$$\dot{S}_{ii} = \frac{\varepsilon_i}{dt} = \dot{\varepsilon}_i. \qquad (23)$$

За время dt координатные векторы $\delta\boldsymbol{r}_1$, $\delta\boldsymbol{r}_2$, $\delta\boldsymbol{r}_3$ переместятся в положения $\delta\boldsymbol{r}_1'$, $\delta\boldsymbol{r}_2'$, $\delta\boldsymbol{r}_3'$, причем деформируются (растянутся или укоротятся), а первоначально прямые углы между ними перестанут быть таковыми («скосятся»).

Новые значения углов между $\delta\boldsymbol{r}_1'$, $\delta\boldsymbol{r}_2'$ и $\delta\boldsymbol{r}_3'$ обозначим так:

$$\widehat{\delta\boldsymbol{r}_1, \delta\boldsymbol{r}_2} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12}, \quad \widehat{\delta\boldsymbol{r}_2, \delta\boldsymbol{r}_3} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{23}, \quad \widehat{\delta\boldsymbol{r}_1, \delta\boldsymbol{r}_3} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{13},$$

причем «скошения» прямых углов γ_{12}, γ_{23}, γ_{13} условимся считать положительными, если углы уменьшаются.

Для определения этих скошений выпишем равенства ($\approx$ — знак приближенного равенства)

$$\cos(\widehat{\delta\boldsymbol{r}_1', \delta\boldsymbol{r}_2'}) = \frac{\delta x_1'}{\delta\boldsymbol{r}_1'}\cdot\frac{\delta x_2'}{\delta\boldsymbol{r}_2'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin\gamma_{12} \approx \gamma_{12},$$
$$\cos(\widehat{\delta\boldsymbol{r}_2', \delta\boldsymbol{r}_3'}) = \frac{\delta x_2'}{\delta\boldsymbol{r}_2'}\cdot\frac{\delta x_3'}{\delta\boldsymbol{r}_3'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{23}\right) = \sin\gamma_{23} \approx \gamma_{23}, \qquad (24)$$
$$\cos(\widehat{\delta\boldsymbol{r}_1', \delta\boldsymbol{r}_3'}) = \frac{\delta x_1'}{\delta\boldsymbol{r}_1'}\cdot\frac{\delta x_3'}{\delta\boldsymbol{r}_3'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{13}\right) = \sin\gamma_{13} \approx \gamma_{13}.$$

Используя (21) и вспоминая, что в первоначальном положении $\delta r_1 \cdot \delta r_2 = 0$, получим выражение скошения координатного угла $\widehat{\delta r_1, \delta r_2}$

$$\gamma_{12} = \frac{\delta r_1'}{\delta x_1'} \cdot \frac{\delta r_2'}{\delta x_2'} = \frac{\delta r_1 + (\dot{S}\,\delta r_1)\,dt}{\delta x_1 + \dot{S}_{11}\delta x_1 dt} \cdot \frac{\delta r_2 + (\dot{S}\,\delta r_2)\,dt}{\delta x_2 + \dot{S}_{22}\delta x_2 dt} =$$

$$= \frac{(\dot{S}\,\delta r_1)\cdot \delta r_2 dt + (\dot{S}\delta\, r_2)\cdot \delta r_1 dt + \dots}{\delta x_1 \delta x_2 + \dots} \approx 2\dot{S}_{12}\frac{\delta x_1 \delta x_2 dt}{\delta x_1 \delta x_2} = 2\dot{S}_{12}dt.$$

Аналогично найдем скошения других координатных углов:

$$\gamma_{23} = 2\dot{S}_{23}\,dt, \quad \gamma_{13} = 2\dot{S}_{13}\,dt,$$

а *скорости скошения* координатных углов будут равны

$$\dot{\gamma}_{12} = 2\dot{S}_{12}, \quad \dot{\gamma}_{23} = 2\dot{S}_{23}, \quad \dot{\gamma}_{13} = 2\dot{S}_{13}. \tag{25}$$

Отсюда следует, что *недиагональные компоненты тензора скоростей деформаций равны половинам скоростей скошений координатных углов.*

Для дальнейшего имеет значение еще одна характеристика деформационного движения — *скорость относительного объемного расширения* среды в данной точке $\dot{\theta}$, определенная равенством

$$\dot{\theta} = \frac{\delta\tau' - \delta\tau}{\delta\tau\, dt} = \frac{1}{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\delta\tau) \tag{26}$$

как отношение приращения элементарного жидкого объема $\delta\tau$ к первоначальной величине этого объема и к времени деформации dt.

Полагая

$$\delta\tau = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3,$$

$$\delta\tau' = \delta x_1' \delta x_2' \delta x_3' = (1 + \dot{\varepsilon}_1 dt)\,\delta x_1 \cdot (1 + \dot{\varepsilon}_2 dt)\,\delta x_2 \cdot (1 + \dot{\varepsilon}_3 dt)\,\delta x_3,$$

найдем, опуская в окончательном варианте бесконечно малые, что соответствует предельному переходу,

$$\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \boldsymbol{V}. \tag{27}$$

Таким образом, из определения $\dot{\theta}$ (26) и равенства (27) следует, что *дивергенция вектора скорости* $\boldsymbol{V}$ *имеет смысл скорости относительного изменения элементарного объема жидкости в данной точке поля скоростей.*

В модели *несжимаемой* жидкости, с которой в дальнейшем придется неоднократно встречаться, скорость относительного объемного расширения при отсутствии распределенных источников по самому ее определению равна нулю. При этом, независимо от всех прочих свойств жидкости (плотности, вязкости и др.), проекции скорости ее движения оказываются связанными чисто кинематическим равенством — *уравнением несжимаемости*, называемым также менее определенно *уравнением неразрывности*:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0. \tag{28}$$

Напомним (§ 7), что для любого симметричного тензора можно указать такую прямоугольную систему координат — ее оси носят наименование *главных*,— в которой все недиагональные компоненты равны нулю, а таблица тензора сводится к главным значениям тензора, расположенным на главной диагонали.

В приложении к тензору скоростей деформаций $\dot{S}$ это означает, что в главных его осях скорости скошения координатных углов равны нулю, а скорости относительных удлинений бесконечно малых координатных отрезков равны главным значениям $\dot{\lambda}^{(1)}$, $\dot{\lambda}^{(2)}$, $\dot{\lambda}^{(3)}$ тензора скоростей деформаций. Отмечая штрихами главные координаты и компоненты тензора в главных осях, будем иметь

$$\begin{aligned} &\dot{S}'_{11}=\dot{\lambda}^{(1)}, \quad \dot{S}'_{12}=0, \quad \dot{S}'_{13}=0, \\ &\dot{S}'_{21}=0, \quad \dot{S}'_{22}=\dot{\lambda}^{(2)}, \quad \dot{S}'_{23}=0, \\ &\dot{S}'_{31}=0, \quad \dot{S}'_{32}=0, \quad \dot{S}'_{33}=\dot{\lambda}^{(3)}. \end{aligned} \tag{29}$$

То обстоятельство, что главные оси координат в каждый данный момент в данной точке среды не скашиваются, позволяет придать вектору ω смысл *мгновенной угловой скорости трехгранника главных осей*, который представляет собой мгновенный жесткий, если судить только по *направлениям* осей, «*скелет*» элементарного жидкого объема. Не следует конечно забывать, что в следующий момент времени трехгранник главных осей уже будет проходить через другие частицы среды.

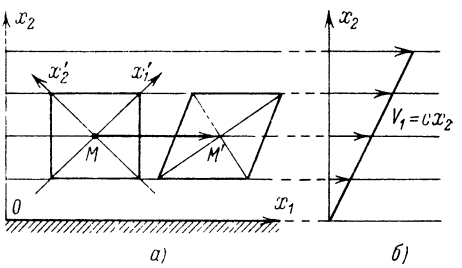


Рис. 12

В качестве простейшего примера рассмотрим движение *чистого сдвига*, в котором распределение скоростей имеет вид (рис. 12, *б*)

$$V_1=cx_2, \quad V_2=0, \quad V_3=0. \tag{30}$$

Среди компонент тензора скоростей деформации в координатах x_1, x_2 отличными от нуля будут только $\dot{S}_{12}=\dot{S}_{21}=\frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial x_2}=\frac{c}{2}$. Характеристическое уравнение (60) гл. I примет вид

$$\begin{vmatrix} -\dot{\lambda} & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & -\dot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\lambda} \end{vmatrix} = -\dot{\lambda}\left(\dot{\lambda}^2-\frac{c^2}{4}\right)=0 \tag{31}$$

и будет иметь корни — главные значения тензора скоростей деформаций —

$$\dot{\lambda}^{(1)}=\frac{c}{2}, \quad \dot{\lambda}^{(2)}=-\frac{c}{2}, \quad \dot{\lambda}^{(3)}=0. \tag{32}$$

Если выделить в начальный момент времени жидкий контур в виде бесконечно малого квадрата с центром M, то спустя время dt он перейдет в другое положение и превратится в ромб (с точностью до малых второго порядка). Из физических соображений ясно, что скорость относительного удлинения оси Mx_1' (рис. 12, *а*) положительна, а оси Mx_2' отрицательна, т. е. со временем отрезки оси Mx_1' удлиняются, а оси Mx_2' укорачиваются. Прямой угол между диагоналями квадрата Mx_1' и Mx_2' остается прямым после малой деформации, став углом между диагоналями ромба. Это указывает, что оси Mx_1' и Mx_2' главные. Придем к тому же выводу аналитическим путем.

Уравнения (58) и (59) гл. I приводятся к двум независимым уравнениям относительно проекций $e_1^{(1)}$, $e_2^{(1)}$ орта $e^{(1)}$ одной из главных осей:

$$-\lambda^{(1)}e_1^{(1)}+\lambda^{(1)}e_2^{(1)}=0,\quad e_1^{(1)^2}+e_2^{(1)^2}=1,$$

откуда, согласно (32), следует

$$e_1^{(1)}=e_2^{(1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{33}$$

Аналогично, для $e_1^{(2)}$ и $e_2^{(2)}$ получим значения

$$e_1^{(2)}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad e_2^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{34}$$

а для $e_1^{(3)}$ и $e_2^{(3)}$ — нулевые значения, что отвечает двумерному характеру течения.

В то же время проекции ортов главных осей $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$ на оси координатной системы $Ox_1x_2x_3$ равны соответствующим косинусам углов между главными и обычными осями. Из (33) и (34) следует, что углы между первой главной осью и осями Ox_1, Ox_2 равны 45°, а между второй главной осью и теми же осями соответственно 135° и 45°. Отсюда следует, что первые две главные оси тензора скоростей деформаций в точке M расположены по диагоналям квадрата (рис. 12), т. е. как раз являются осями Mx_1' и Mx_2'. Третья главная ось образует с плоскостью рисунка угол 90°, что было заранее очевидно, так как рассматриваемое движение происходит параллельно плоскости Ox_1x_2.

Перемещение $\overline{MM'}$ (рис. 12) характеризует поступательное перемещение $V\,dt$ элементарного объема среды за промежуток времени dt. Можно заметить, что за то же время система главных осей, служащая, как ранее было указано, «скелетом» жидкого объема, повернулась по часовой стрелке на угол $\omega_3\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)dt=-\frac{c}{2}\,dt$. Знак минус связан с тем, что ось Ox_3 направлена перпендикулярно к плоскости рисунка так, что со стороны этой оси поворот виден совершающимся от оси Ox_2' к оси Ox_1', т. е. в отрицательном направлении.

Деформационная составляющая движения не имеет в механике жидкости и газа того значения, как в теории твердого тела (упругого, пластического и др.). Компоненты тензора скоростей деформаций встретятся только в динамике *вязких* жидкостей и газов, где они окажутся связанными с компонентами *тензора напряжений* (обобщенный закон Ньютона).

В ближайших главах основное значение будет иметь *квазитвердая составляющая движения*, но, конечно, при этом нельзя забывать о присутствии деформационной составляющей.

§ 14. Вихрь, вихревая линия, вихревая трубка. Вторая теорема Гельмгольца

Как следует из предыдущего параграфа, квазитвердое движение элементарного объема складывается из поступательного движения со скоростью V, определяемой какой-либо точкой этого объема, принимаемой за полюс, и вращательного движения вокруг мгновенной оси с вектором угловой скорости $\omega=\frac{1}{2}\operatorname{rot} V$. Движение жидкости, сопровождаемое вращением отдельных ее элементарных объемов, называют *вихревым*, а сам вращающийся объем (иногда его угловую скорость) — *вихрем*. Если движение элементарных объемов среды сводится только

к поступательному и деформационному, то такое движение именуют *безвихревым*.

В общем случае каждой точке M поля скоростей движущейся среды сопоставляются *два* вектора: скорость $\boldsymbol{V}$ и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 13). Каждому из этих двух векторов соответствуют свои векторные линии: вектору $\boldsymbol{V}$ — *линии тока*, векторам $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ или $\boldsymbol{\Omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ — *вихревые линии*, т. е. линии, в каждой точке которых касательная совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{\Omega}$ или $\boldsymbol{\omega}$. Вихревые линии будут в дальнейшем часто отмечаться закругленной стрелкой, выражающей вращение элементарных объемов вокруг касательных к вихревым линиям.

Подобно тому, как раньше строились поверхности тока, получим вихревую поверхность σ, проведя через точки некоторого замкнутого контура C вихревые линии (рис. 14), а ограниченную ею часть жидкости, участвующую во вращении, назовем *вихревой трубкой*.

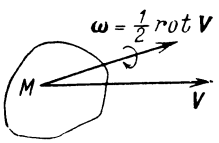


Рис. 13

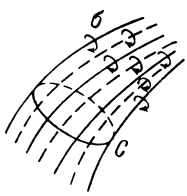


Рис. 14

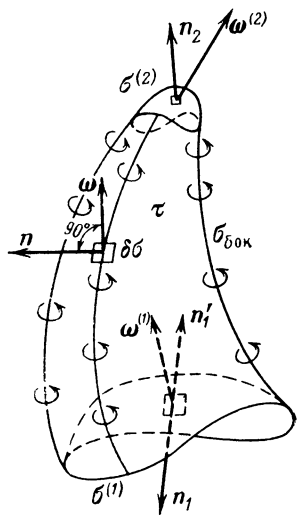


Рис. 15

Аналогично *секундному объемному расходу жидкости*, равному потоку вектора скорости сквозь любое поперечное сечение трубки тока и одинаковому для несжимаемой жидкости вдоль всей трубки тока, будет равен в данный момент времени вдоль вихревой трубки и поток вектора $\boldsymbol{\omega}$ или вихря $\boldsymbol{\Omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$.

Докажем следующую *вторую теорему* Гельмгольца: *поток вихря скорости* $F_\sigma(\boldsymbol{\Omega})$ (так же, как и поток вектора угловой скорости $F_\sigma(\boldsymbol{\omega})$) *сквозь любое поперечное сечение вихревой трубки одинаков в данный момент времени вдоль всей трубки.*

Выделим в вихревой трубке объем τ, заключенный (рис. 15) между боковой поверхностью $\sigma_{\text{бок}}$ трубки и двумя ее произвольными поперечными сечениями $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$. Применим к этому объему формулу Гаусса — Остроградского в форме (111) гл. I при $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\omega}$. Будем иметь

$$\int_\sigma \omega_n \delta\sigma = \int_\tau \operatorname{div}\boldsymbol{\omega}\,\delta\tau, \tag{35}$$

где поверхность σ, ограничивающая объем вихревой трубки τ, состоит из трех поверхностей: $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ и $\sigma_{\text{бок}}$. По определению вихревой линии на боковой поверхности будет $\omega_n=0$, а подынтегральное выражение в правой части (35) тождественно равно нулю ($\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{V}\equiv 0$). Равенство (35) приведется к виду $\int\limits_{\sigma^{(1)}} \omega_n\delta\sigma + \int\limits_{\sigma^{(2)}} \omega_n\delta\sigma = 0$. Изменяя направление орта $\boldsymbol{n}_1$ на противоположное $\boldsymbol{n}_1'$ так, чтобы косинус угла между $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ и $\boldsymbol{n}_1'$ был положительным, получим

$$\int_{\sigma^{(1)}} \omega_n\delta\sigma = \int_{\sigma^{(2)}} \omega_n\delta\sigma. \tag{36}$$

Поскольку поперечные сечения $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ выбирались произвольно, то равенство (36) и доказывает вторую теорему Гельмгольца.

Из второй теоремы Гельмгольца следует, что поток вектора $\boldsymbol{\Omega}$ (или $\boldsymbol{\omega}$), одинаковый в данный момент для любых сечений вихревой трубки, может служить *мерой интенсивности вихревой трубки* i в целом.

Из второй теоремы Гельмгольца также можно заключить, что вихревые трубки не могут заканчиваться внутри среды, так как при этом ($\sigma^{(1,2)}=0$) $\boldsymbol{\omega}$ или $\boldsymbol{\Omega}$ должны были бы становиться *бесконечными*. Опыт подтверждает этот факт. В природе наблюдаются либо замкнутые вихревые кольца (рис. 16), как, например, при выходе дыма из трубы, либо вихревые трубки, начинающиеся и оканчивающиеся на поверхностях раздела твердой поверхности и жидкости или жидкости и газообразной среды. Таковы часто наблюдаемые в реках водовороты, которые представляют собой вихревые трубки, опирающиеся одной своей стороной на дно реки, а другой — на свободную ее поверхность, отделяющую воду от атмосферы, или только на дно или только на свободную поверхность. В стакане молока или кофе можно наблюдать невооруженным глазом вихревые трубки, если быстро вынуть из стакана ложку. Водовороты гигантских размеров наблюдаются в океане за островами (например, за островом Ямайка), находящимися в быстрых течениях. Вероятно, самыми «грозными» вихревыми трубками являются смерчи. Они опираются нижним концом на поверхность океана, а верхним уходят в слой нависших облаков. Причины возникновения их пока точно не известны, но, по-видимому, связаны с тепловыми явлениями на границе океана и атмосферы. Слабее проявляют себя циклоны и антициклоны в атмосфере.

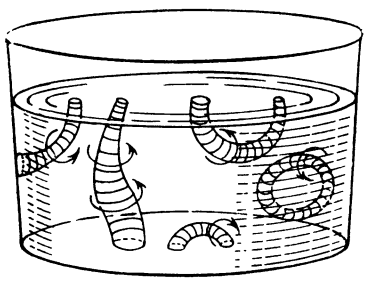


Рис. 16

Обращает на себя особое внимание вихревая трубка, образующаяся при истечении воды из резервуара с малым отверстием в дне. Резервуар с водой, вращаясь вместе с Землей, уже обладает малой угловой скоростью, которая резко увеличивается при прохождении воды сквозь узкое отверстие. При этом в область разрежения, которая образуется при быстром вращении жидкости, индуцируемом резко возросшим вихрем (см. § 27), врывается воздух, создающий воздушную полость (так называемый «полый вихрь»). Такое же явление имеет место и в смерчах, внизу которых собирается вода из океана, а вверху — водяной пар из облаков. Смерчи, образующиеся в пустынях, увлекают песок. Эти явления требуют для своего описания привлечения *динамики* жидкости или газа. Результаты современных исследований, относящихся к разнообразным вихревым течениям в природе и в технических устройствах, можно найти в исключительной по наглядности иллюстраций монографии В. Альбринга [1]).

§ 15. Теорема Стокса о связи между интенсивностью вихревой трубки и циркуляцией скорости по опоясывающему ее контуру

Непосредственное наблюдение вихревой трубки в прозрачной жидкости, не несущей примеси или специально не нагреваемой для визуализации потока, практически невозможно. Не существует также и

[1]) Albring W. Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen — Berlin: Acad. Verlag, 1981, S. 305.

приборов для измерения интенсивности вихревых трубок. Однако эту интенсивность можно вычислить, если найти на соответствующем контуре распределение скорости при помощи одного из предназначенных для этого приборов. Такими приборами являются, например, крыльчатые анемометры, скоростные трубки, термо- и лазерные анемометры. Для указанного вычисления достаточно воспользоваться следующей *теоремой* Стокса: *интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по контуру, расположенному на поверхности вихревой трубки и один раз ее опоясывающему.*

Для доказательства теоремы Стокса применим формулу Стокса [(116) предыдущей главы], положив $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{V}$ и определив интенсивность вихревой трубки i, например, как *поток вектора вихря скорости* $\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$.

Будем иметь (σ — произвольное сечение трубки, опирающееся на контур C)

$$i=\int_{\sigma}\Omega_n\delta\sigma=\oint_{C}\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}. \tag{37}$$

По этой теореме определение интенсивности вихревой трубки сводится к интегрированию элементов циркуляции $\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}$ вдоль контура, опоясывающего трубку.

Вихревая трубка, заключающая внутри себя завихренные части жидкости, может быть окружена жидкостью, частицы которой не вращаются вокруг своих осей, а движутся поступательно по замкнутым, в том числе круговым траекториям. Такая безвихревая «оболочка» вызывается (индуцируется) вихревой трубкой. В этом случае для определения интенсивности вихревой трубки нет необходимости вычислять циркуляцию по контуру, один раз опоясывающему трубку, а достаточно брать циркуляцию скорости по любому контуру, один раз охватывающему трубку. При наличии нескольких разделенных безвихревыми потоками вихревых трубок интенсивности i_1, i_2, ... (рис. 17) общая их интенсивность, равная алгебраической сумме интенсивностей отдельных трубок, будет определяться циркуляцией скорости по контуру C, один раз охватывающему всю совокупность таких вихревых трубок.

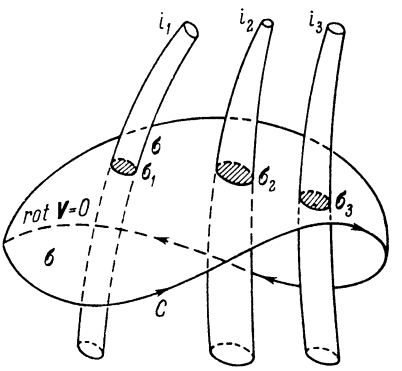


Рис. 17

По измеренной циркуляции по замкнутому контуру в поле скоростей можно судить не о наличии или отсутствии внутри его вихревых трубок, а лишь о суммарной их интенсивности. Равенство нулю циркуляции скорости по замкнутому контуру еще не позволяет сделать заключение об отсутствии вихревых трубок, так как внутри этого контура могут быть вихревые трубки с различными направлениями вращения, которым соответствуют разные по знаку интенсивности.

§ 16. Ускорение частицы среды. Локальная и конвективная составляющие ускорения. Полное ускорение

Ускорение частицы жидкости, так же как и вообще ускорение материальной точки, определяется *производной вектора скорости этой частицы по времени*

$$\dot{\boldsymbol{V}}=\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}. \tag{38}$$

В *лагранжевом* представлении движения (1) вектор скорости $\boldsymbol{V}$ определится как

$$\boldsymbol{V} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(a, b, c; t), \tag{39}$$

а вектор ускорения $\dot{\boldsymbol{V}}$ — как

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(a, b, c; t) \tag{40}$$

(a, b, c — параметры, выделяющие данную частицу из множества других и равные координатам частицы в начальный момент).

В *эйлеровом* представлении вектор скорости задается равенствами (2), а для вычисления ускорения, т. е. векторной производной по времени от $\boldsymbol{V}$ надо принять во внимание следующие два обстоятельства, обусловливающие изменение вектора скорости $\boldsymbol{V}$ с течением времени: 1) *локальное* (местное) изменение скорости во времени из-за *нестационарности* поля, 2) *конвективное* изменение скорости за счет *перемещения частицы жидкости в неоднородном* поле скорости.

Первое, *локальное*, ускорение определится как

$$\dot{\boldsymbol{V}}_{\text{лок}} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}. \tag{41}$$

Для вычисления второго, *конвективного*, ускорения надо найти приращение вектора скорости жидкой частицы, обусловленное лишь ее перемещением (конвекцией) в соседнюю точку пространства в «замороженном» поле скорости, и отнести его к соответствующему интервалу времени. При использовании метода Эйлера это требует дифференцирования $\boldsymbol{V}(x_1, x_2, x_3; t)$ по времени как *сложной* функции, когда четвертый аргумент t фиксирован, а $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ являются переменными координатами жидкой частицы. В результате производная от $\boldsymbol{V}$ по направлению траектории умножается на производную от пути s по времени, т. е. на величину скорости. Согласно формуле (78) гл. I получим ($\hat{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}/V$)

$$\dot{\boldsymbol{V}}_{\text{конв}} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial s}\frac{ds}{dt} = (\hat{\boldsymbol{V}} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}V = \left(\frac{\boldsymbol{V}}{V} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{V}V = (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}. \tag{42}$$

Суммируя локальную и конвективную составляющие ускорения, получим выражение полного ускорения

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}, \tag{43}$$

или, в проекциях на оси координат,

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_1}{\partial x_3},\\
\dot{V}_2 &= \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_2}{\partial x_3},\\
\dot{V}_3 &= \frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_3}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{44}$$

или

$$\dot{V}_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Локальное ускорение равно нулю, если поле скоростей стационарно. Конвективное ускорение отсутствует, если поле скоростей однородно. Например, в случае удара тела о поверхность воды вначале возникает локальное ускорение жидкости, а конвективное ускорение мож-

но считать в начальный момент равным нулю; неоднородность поля скорости и конвективное ускорение появляются лишь затем. Аналогичное положение имеет место и при начале движения тела, погруженного в неподвижную жидкость.

Оператор $V\cdot\nabla$ называют *конвективной производной*, производную $\partial/\partial t$ – *локальной производной*, а полную производную d/dt, равную

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(V\cdot\nabla), \tag{45}$$

учитывающую полное изменение некоторой физической величины, связанной с движением индивидуальной частицы среды в поле этой величины – или, в более общем случае, в поле любой субстанции,– называют *индивидуальной* (*лагранжевой*) или *субстанциональной производной*.

Полное ускорение частицы в эйлеровом представлении ее движения, равное сумме локального и конвективного ускорений, определяется как *индивидуальная* (*субстанциональная*) *производная от вектора скорости по времени*. Сохраним для индивидуальной производной обозначение d/dt.

Символическую формулу (42) конвективного ускорения можно заменить другой, не содержащей символического оператора ∇. Приведем сначала вывод одной важной формулы векторного анализа, выражающей конвективное ускорение через пространственные производные grad и rot.

Вспомним формулу двойного векторного произведения

$$a\times(b\times c)=b(a\cdot c)-c(a\cdot b)=b(a\cdot c)-(a\cdot b)c. \tag{46}$$

Положив в ней $b=\nabla$, будем иметь

$$\nabla(a\cdot c)=(a\cdot\nabla)c+a\times(\nabla\times c)$$

и, поменяв местами a и c,

$$\nabla(c\cdot a)=(c\cdot\nabla)a+c\times(\nabla\times a).$$

В первом из этих равенств операция дифференцирования ∇ относится только к c при постоянном a, во втором, наоборот, к a при постоянном c. По правилу символического составления пространственных производных от сложных векторных выражений (см. конец § 8 гл. I) *объединим* эти два выражения для одной и той же величины $\nabla(a\cdot c)$ и получим

$$\nabla(a\cdot c)=(a\cdot\nabla)c+(c\cdot\nabla)a+a\times(\nabla\times c)+c\times(\nabla\times a).$$

Переходя частично от символических обозначений к операциям grad и rot, получим формулу векторного анализа

$$\operatorname{grad}(a\cdot c)=(a\cdot\nabla)c+(c\cdot\nabla)a+a\times\operatorname{rot}c+c\times\operatorname{rot}a, \tag{47}$$

ранее [(88) гл. I] приведенную без вывода.

Положим в этом равенстве $a=c$, $a\cdot c=a^2$. Тогда из векторного соотношения (47) будет непосредственно следовать

$$\operatorname{grad}(a^2)=2(a\cdot\nabla)a+2a\times\operatorname{rot}a. \tag{48}$$

Отсюда вытекает равенство

$$(a\cdot\nabla)a=\operatorname{grad}\frac{a^2}{2}+\operatorname{rot}a\times a, \tag{49}$$

которое при $a=V$ приведет к не содержащему символических операторов выражению конвективной составляющей ускорения через операции

grad и rot

$$\dot{V}_{\text{конв}} = (V\cdot\nabla)V = \operatorname{grad}\frac{V^2}{2} + \operatorname{rot}V\times V. \tag{50}$$

Последнее выражение $\dot{V}_{\text{конв}}$ будет полезным в динамике при выводе уравнения Громека—Ламба. Большую помощь может оказать это равенство и для вывода проекций ускорения в ортогональной криволинейной системе координат. Прямой подход к этому выводу заключался бы в использовании разложения вектора скорости по ортам (единичным векторам) i_r осей координат в *криволинейной системе*

$$V = V_{q_1}i_1 + V_{q_2}i_2 + V_{q_3}i_3 = V_{q_r}i_r \tag{51}$$

с последующим его дифференцированием по времени, которое потребовало бы вычисления индивидуальных производных dV_{q_r}/dt и di_r/dt, что само по себе достаточно трудоемко.

Удовольствуемся приведением выражений проекций ускорения на оси наиболее употребительных систем криволинейных координат: *цилиндрической* (в том числе *полярной*) и *сферической*:

цилиндрическая система (r, ε, z):

$$\begin{aligned}
\dot{V}_r &= \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varepsilon^2}{r},\\
\dot{V}_\varepsilon &= \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + V_z\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} + \frac{V_rV_\varepsilon}{r},\\
\dot{V}_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z};
\end{aligned} \tag{52}$$

сферическая система (R, θ, ε):

$$\begin{aligned}
\dot{V}_R &= \frac{\partial V_R}{\partial t} + V_R\frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_R}{\partial \theta} + \frac{V_\varepsilon}{R\sin\theta}\frac{\partial V_R}{\partial \varepsilon} - \frac{V_\theta^2 + V_\varepsilon^2}{R},\\
\dot{V}_\theta &= \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_R\frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\varepsilon}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varepsilon} + \frac{V_RV_\theta}{R} - \frac{V_\varepsilon^2}{R}\operatorname{ctg}\theta,\\
\dot{V}_\varepsilon &= \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + V_R\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{V_\varepsilon}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{V_RV_\varepsilon}{R} + \frac{V_\theta V_\varepsilon}{R}\operatorname{ctg}\theta.
\end{aligned} \tag{53}$$

§ 17. Кинематическая теорема Кельвина

До сих пор изучались свойства вихревых трубок или эквивалентных им по теореме Стокса циркуляций скорости по опоясывающим вихревые трубки контурам в данный момент времени. Излагаемая ниже теорема Кельвина позволяет с чисто кинематической стороны предсказать поведение вихревой трубки во времени[1]). Формулировка теоремы такова: *индивидуальная производная по времени от циркуляции скорости по замкнутому жидкому* (т. е. состоящему во все время движения из одних и тех же частиц жидкости) *контуру равна циркуляции ускорения по тому же контуру.*

Рассмотрим сначала несколько более общий случай — изменение во времени циркуляции скорости по *разомкнутому* жидкому контуру C (рис. 18).

---

[1]) В связи с чисто кинематическим характером этой теоремы, не связанной с физическими свойствами жидкости или какими бы то ни было силовыми воздействиями, ее называют *кинематической теоремой* Кельвина, отличая от *динамической теоремы* Кельвина, которая будет рассмотрена далее в динамике жидкости.

Вычислим индивидуальную производную по времени от циркуляции вектора скорости V по разомкнутому контуру C между точками A и B. Согласно определению интеграла как предела суммы имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{A\,(C)}^{B} V\cdot\delta r=\int\limits_{A\,(C)}^{B}\frac{d}{dt}(V\cdot\delta r)=\int\limits_{A\,(C)}^{B}\frac{dV}{dt}\cdot\delta r+\int\limits_{A\,(C)}^{B}V\cdot\frac{d}{dt}(\delta r).$$

В силу независимости операций d/dt и δ их можно поменять местами, придав последнему интегралу в предыдущем равенстве вид

$$\int\limits_{A\,(C)}^{B} V\cdot\frac{d}{dt}\delta r=\int\limits_{A\,(C)}^{B} V\cdot\delta\left(\frac{dr}{dt}\right)=\int\limits_{A\,(C)}^{B} V\cdot\delta V=\int\limits_{A\,(C)}^{B}\delta\left(\frac{V^2}{2}\right).$$

Интеграл от дифференциала равен разности значений первообразной функции на верхнем и нижнем пределах. Таким образом, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{A\,(C)}^{B} V\cdot\delta r=\int\limits_{A\,(C)}^{B}\dot{V}\cdot\delta r+\frac{1}{2}(V_B^2-V_A^2). \qquad (54)$$

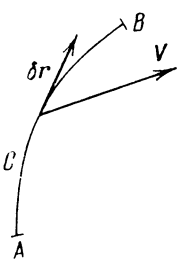


Рис. 18

Соединяя точки B и A, замкнем кривую C и получим

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_{(C)} V\cdot\delta r=\oint\limits_{(C)}\dot{V}\cdot\delta r, \qquad (55)$$

или, в ранее введенных обозначениях для циркуляции,

$$\frac{d}{dt}\Gamma_C(V)=\Gamma_C(\dot{V}). \qquad (56)$$

Формула Кельвина (55) или (56) выражает общий закон изменения со временем циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру и тем самым по теореме Стокса (§ 15), интенсивности вихревой трубки, причем связывает это изменение с циркуляцией ускорения, т. е. с циркуляцией объемной силы, которая, очевидно, равна *работе* силы по замкнутому контуру. В этом заключается особое значение теоремы Кельвина для динамики жидкости и газа, о чем будет речь в последующем (см. гл. VII).

ГЛАВА III

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАССЫ И СИЛЫ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ. РАВЕНСТВА КОШИ. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 18. Плотность распределения массы в сплошной среде. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности

В динамике дискретной системы материальных точек динамические характеристики, в том числе и инерционные, приписывались отдельным точкам системы (массы материальных точек системы, приложенные к ним силы). В случае абсолютно твердого тела рассматривались как суммарные, но относящиеся к резко очерченным областям твердого тела характеристики (моменты инерции, зависящие от размеров, внешней формы тела и распределения в нем масс, векторы количества движения и момента количества движения), так и сосредоточенные в конкретных точках твердого тела силы (нагрузки), моменты сил.

В динамике сплошных сред (жидкостей, газов, упругих и других «твердых» деформируемых тел) такой подход заменяется заданием непрерывных распределений динамических и, вообще, физических величин по сплошной среде, характеризуемых *плотностью* распределения этих величин.

Первым примером такого задания может служить плотность распределения массы в виде предела отношения массы Δm малого объема $\Delta\tau$, заключающего в себе данную точку M, к объему $\Delta\tau$, когда последний стремится к нулю, стягиваясь к точке M. Отношение $\Delta m/\Delta\tau$ называют *средней плотностью* в объеме $\Delta\tau$, а предел этого отношения при $\Delta\tau\to 0$ — *плотностью среды в данной точке* M и обозначают буквой ρ, так что

$$\rho=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta\tau}=\frac{\delta m}{\delta\tau}. \tag{1}$$

Отсюда непосредственно следуют выражения массы элементарного объема δm через плотность ρ

$$\delta m=\rho\,\delta\tau \tag{2}$$

и массы m выделенного в среде *конечного* объема τ

$$m=\int_{\tau}\rho\,\delta\tau. \tag{3}$$

Плотность характеризует инерционные свойства среды и образует скалярное поле $\rho=\rho(x_1, x_2, x_3; t)$, которое может быть как стационарным, так и нестационарным. Поверхности уровня в поле плотности называют *изостерами*.

Плотность выражают в Международной системе единиц (СИ) в кг/м^3. Числовые значения плотности жидкостей и газов приведены в таблицах физических величин.

В дальнейшем по-прежнему используем обозначение δ для бесконечно малого приращения в пространстве, а букву d сохраним как символ приращения во времени.

В ньютоновской механике масса жидкого, т. е. состоящего во все время движения из одних и тех же частиц, объема, сохраняет постоянную *величину*, так что, согласно формуле (2) (d/dt — символ *индиви-*

дуальной производной по времени),

$$\frac{d}{dt}(\delta m) = \frac{d}{dt}(\rho\,\delta\tau) = \frac{d\rho}{dt}\delta\tau + \rho\frac{d}{dt}(\delta\tau) = 0. \tag{4}$$

Вспоминая данное в конце § 13 определение скорости объемного расширения $\dot{\theta}$, по формулам (26) и (27) гл. II будем иметь

$$\frac{d}{dt}\delta\tau = \operatorname{div} V\,\delta\tau,$$

и, следовательно, равенство (4) приведется к такому

$$\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div} V\right)\delta\tau = 0,$$

откуда, в силу произвольности величины $\delta\tau$, следует

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div} V = 0. \tag{5}$$

Закон сохранения массы в ньютоновской механике привел, таким образом, к дифференциальному уравнению связи между плотностью и скоростью (5). Подчеркнем, что эта связь имеет место независимо от приложенных к среде сил.

Уравнение (5) обычно называют *уравнением сплошности* или *уравнением неразрывности*, хотя, быть может, ему более соответствовало бы наименование *уравнения сохранения массы.*

Разлагая, согласно изложенному в § 16, индивидуальную производную, входящую в уравнение (5), на локальную и конвективную составляющие, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (V\cdot\nabla)\rho + \rho\operatorname{div} V = 0, \tag{6}$$

или, внося *скалярную* величину ρ внутрь круглой скобки,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + V\cdot\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div} V = 0.$$

Вспоминая соответствующую формулу (88) гл. I ($\varphi=\rho$, $\boldsymbol{a}=V$), получим

$$\operatorname{div}(\rho V) = V\cdot\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div} V$$

и перепишем равенство (6) в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0. \tag{7}$$

Это другая форма того же уравнения сплошности (5), в которой отсутствует индивидуальная производная плотности по времени.

Если поле плотности *стационарно* ($\partial\rho/\partial t=0$), уравнение сплошности примет вид

$$\operatorname{div}(\rho V) = 0 \tag{8}$$

или в проекциях скорости V_k ($k=1, 2, 3$) (суммирование по k)

$$\frac{\partial(\rho V_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial(\rho V_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho V_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho V_3)}{\partial x_3} = 0. \tag{9}$$

Наконец, в случае постоянной плотности (несжимаемая однородная среда) получим *уравнение несжимаемости* жидкости

$$\operatorname{div} V = 0 \tag{10}$$

или

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0.$$

В дальнейшем встретятся случаи движения сплошной среды с непрерывным по ходу движения возникновением (исчезновением) вещества определенного сорта за счет, например, химической реакции превращения одного из составляющих ее веществ в другое или вследствие изменения фазового состояния вещества (испарение движущейся жидкости, сопровождающееся возникновением в ней пузырьков пара или, наоборот, конденсация пара и появление в нем жидких капель, цепенение жидкого металла, таяние льдинок в потоке воды и т. п.). В этих случаях естественно говорить о применении в сплошных средах методов *механики переменной массы* [1]). Теоретической моделью такого рода явлений может служить заданное наперед, определяемое химической или физической кинетикой происходящих в движущейся среде процессов, непрерывное распределение источников притока (стока) массы, с интенсивностью, характеризуемой секундным, отнесенным к единице объема приростом массы вещества в данной точке потока. Эту величину, имеющую размерность $[M/(L^3T)]$=плотность/время, было бы естественно обозначить символом $\dot{\rho}$, но, чтобы не смешивать ее с индивидуальной производной по времени $d\rho/dt$, примем для нее самостоятельное обозначение J. Связь между величинами $d\rho/dt$ и J определится из очевидного соотношения

$$\frac{d}{dt}(\delta m) = \frac{d}{dt}(\rho\,\delta\tau) = J\,\delta\tau, \tag{11}$$

приходящего на смену равенству (4), и следующих из него, но обобщенных на случай динамики переменной массы *уравнений неразрывности*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,V = J, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho V) = J. \tag{13}$$

§ 19. Распределение сил в сплошной среде. Объемные и поверхностные силы. Равенства Коши. Тензор напряжений

В динамике сплошных сред выделяют два класса действующих на частицы среды сил: *объемные* (иногда их еще называют *массовыми*) и *поверхностные*. Под *объемными* силами понимают силы, действующие на элементы объема, как, например, силы веса, тяготения, инерции, электростатического притяжения или отталкивания, силы действия магнитного или электрического поля на частицы среды. К *поверхностным* относят силы, которые при принятом в механике сплошных сред макроскопическом подходе действуют на элементы поверхности, ограничивающей объем, как, например, силы давления, или, более общо, силы, действующие со стороны потока на поверхность погруженного в него тела или реакции тела на поток, силы внутреннего трения (вязкости) в среде.

Следует оговориться, что эта классификация сил условна, так как механика Ньютона знает лишь силы, приложенные к массам, т. е. только объемные силы. Но в тех случаях, когда частицы, на которых сосредоточено действие сил, расположены в столь тонком слое, что можно без большой погрешности свести этот слой к некоторой «материальной

[1]) См. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. II.— М.: Наука, 1983, с. 110—114.

поверхности», считают, что *силы действуют на элементы этой поверхности.*

В отличие от динамики системы дискретных точек в динамике сплошных сред имеют дело не с самими силами, а *с плотностями их распределения в пространстве.* Так, под *плотностью распределения объемных сил* (коротко — объемной силой) $\boldsymbol{F}$ в данной точке M среды понимают *предел отношения главного вектора* $\Delta\boldsymbol{R}$ *сил, приложенных к точкам малого объема* $\Delta\tau$, заключающего в себе точку M, *к массе* $\Delta m=\rho\Delta\tau$, *где* ρ — *некоторое среднее значение плотности в объеме* $\Delta\tau$, когда объем $\Delta\tau$ стремится к нулю, сохраняя внутри себя точку M, т. е.

$$\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{R}}{\Delta m}=\frac{1}{\rho}\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{R}}{\Delta\tau}=\frac{1}{\rho}\frac{\delta\boldsymbol{R}}{\delta\tau}. \tag{14}$$

Измеряется $\boldsymbol{F}$ в Международной системе единиц (СИ) в Н/кг или м/с^2.

Отсюда следует, что обычная, ньютоновская сила $\delta\boldsymbol{R}$, приложенная к элементарному объему $\delta\tau$ в точке M, определяется через объемную силу $\boldsymbol{F}$ как

$$\delta\boldsymbol{R}=\rho\boldsymbol{F}\,\delta\tau.$$

В качестве примера можно указать, что в случае силы тяжести $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{g}$, где $\boldsymbol{g}$ — вектор ускорения свободного падения; случаю центробежной силы инерции во вращающейся с угловой скоростью ω системе соответствует объемная сила $\boldsymbol{F}=\omega^2\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — вектор, равный кратчайшему расстоянию между точкой приложения силы и осью вращения и направленный *в сторону от оси.*

Аналогично, *поверхностные* силы задаются вектором *напряжения*

$$\boldsymbol{p}=\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{p}'}{\Delta\sigma}=\frac{\delta\boldsymbol{p}}{\delta\sigma}, \tag{15}$$

где $\Delta\boldsymbol{p}'$ — главный вектор сил, приложенных со стороны среды к выделенной в ней малой площадке $\Delta\sigma$, а $\delta\boldsymbol{p}$ и $\delta\sigma$ — предельные их значения. Измеряют $\boldsymbol{p}$ в Н/м^2.

Вектор $\delta\boldsymbol{p}$ поверхностной силы, приложенной к площадке $\delta\sigma$ в данной точке пространства, равен, согласно (15),

$$\delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\,\delta\sigma,$$

т. е. произведению вектора напряжения $\boldsymbol{p}$ на величину элементарной площадки $\delta\sigma$.

Отметим основное различие (кроме, конечно, несовпадения размерностей) между векторами $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{p}$: в то время как вектор $\boldsymbol{F}$ является однозначной векторной функцией точек пространства и времени, т. е. образует *векторное поле*, вектор $\boldsymbol{p}$ принимает в каждой точке пространства бесчисленное множество значений в зависимости от ориентации площадки, к которой приложено напряжение, и, таким образом, *векторного поля не образует.*

Возьмем в точке M сплошной среды площадку $\delta\sigma$, ориентацию которой в пространстве определим ортом $\boldsymbol{n}$ нормали к площадке (рис. 19). Назовем одну из сторон площадки $\delta\sigma$ *лицевой*, а другую — *тыльной.* Проведем с лицевой стороны единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$. Откинем мысленно с лицевой стороны площадки часть среды, заменив ее действие на площадку *силой* $\boldsymbol{p}_n\delta\sigma$. Индекс n у вектора напряжения $\boldsymbol{p}_n$ указывает на то, что сила приложена к лицевой стороне площадки с ортом нормали $\boldsymbol{n}$. Если бы, наоборот, была откинута часть среды с тыльной стороны, то сила, эквивалентная действию откинутой среды, приложенная к *тыльной* стороне площадки, была бы, согласно закону действия и противодействия, равна $-\boldsymbol{p}_n\delta\sigma$. Конечно, выбор одной из сторон площадки в качестве лицевой, а другой — в качестве тыльной совершенно

произволен, но должен быть заранее указан и в процессе рассуждения зафиксирован.

Докажем, что вектор напряжения $\boldsymbol{p}_n$ можно представить как произведение орта $\boldsymbol{n}$, характеризующего ориентацию площадки $\delta\sigma$ в пространстве, на тензор второго ранга P, являющийся функцией вектор-радиуса $\boldsymbol{r}$ точки и времени, т. е. образующий тензорное поле.

С этой целью рассмотрим вырезанный в среде элементарный тетраэдр $MABC$ (рис. 20) с вершиной в данной точке M, с основанием в форме треугольника ABC, образованного пересечением наклонной плоскости с тремя координатными плоскостями, и боковыми гранями, расположенными в координатных плоскостях. Обозначим площадь треугольника ABC через $\delta\sigma_n$, а площади треугольников BMC, AMC и AMB, пред-

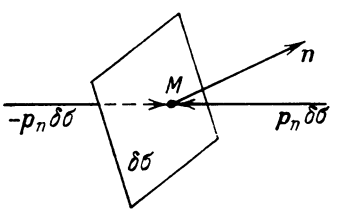


Рис. 19

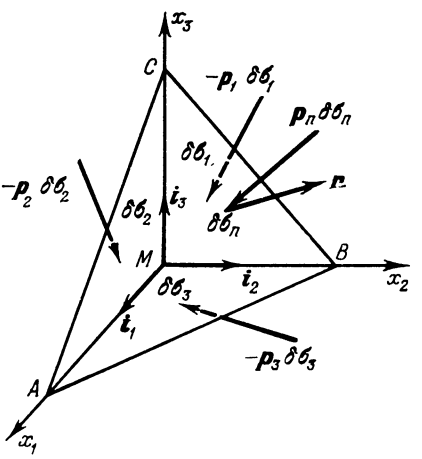


Рис. 20

ставляющих собой проекции треугольника ABC на координатные плоскости, соответственно $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\sigma_3$, причем индексы 1, 2, 3 при этих площадках, так же как и при напряжениях $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$, приложенных к этим площадкам, обозначают оси, *перпендикулярные* к площадкам.

Рассматривая взятый бесконечно малый тетраэдр как «жидкий», т. е. состоящий из частиц движущейся среды, напишем уравнение движения центра инерции этой системы частиц, общая масса которых пусть равна δm; будем иметь

$$\dot{V}_C\delta m = \boldsymbol{F}\,\delta m + \boldsymbol{p}_n\delta\sigma_n - \boldsymbol{p}_1\delta\sigma_1 - \boldsymbol{p}_2\delta\sigma_2 - \boldsymbol{p}_3\delta\sigma_3,$$

где $\dot{V}_C$ — вектор ускорения центра инерции тетраэдра; $\boldsymbol{F}$ — плотность распределения *объемных сил*, а $\boldsymbol{p}_n$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ — *векторы* напряжений, расположенные со стороны *лицевых* граней тетраэдра. Лицевыми, очевидно, являются те, со стороны которых расположен орт $\boldsymbol{n}$ и, чтобы не вводить новых, орты $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ (рис. 20). При последних трех членах в правой части последнего уравнения стоят знаки минус, так как к внешним — *тыльным* — сторонам боковых граней приложены напряжения $-\boldsymbol{p}_1$, $-\boldsymbol{p}_2$, $-\boldsymbol{p}_3$.

В рассматриваемом уравнении член слева и первое слагаемое справа как величины *третьего* порядка малости — они содержат элементы массы, пропорциональные *объему* $\delta\tau$ — можно откинуть по сравнению с остальными членами, содержащими элементы *поверхностей* $\delta\sigma_n$, $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\sigma_3$, являющиеся малыми второго порядка. Тогда, оставляя лишь малые второго порядка, будем иметь

$$\boldsymbol{p}_n\delta\sigma_n = \boldsymbol{p}_1\delta\sigma_1 + \boldsymbol{p}_2\delta\sigma_2 + \boldsymbol{p}_3\delta\sigma_3. \qquad (16)$$

Замечая, что

$$\delta\sigma_1 = \delta\sigma_n \cos(\widehat{n, x_1}) = n_1\delta\sigma_n,$$

$$\delta\sigma_2 = \delta\sigma_n \cos(\widehat{n, x_2}) = n_2\delta\sigma_n,$$

$$\delta\sigma_3 = \delta\sigma_n \cos(\widehat{n, x_3}) = n_3\delta\sigma_n,$$

где n_1, n_2, n_3 обозначают косинусы углов орта n с осями координат, получим после сокращения обеих частей уравнения (16) на $\delta\sigma_n$ и стягивания тетраэдра к его вершине в точке M точное выражение

$$p_n = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = n_kp_k, \tag{17}$$

или, в проекциях на оси декартовых координат,

$$p_{n1} = n_1p_{11} + n_2p_{21} + n_3p_{31}, \quad p_{n2} = n_1p_{12} + n_2p_{22} + n_3p_{32},$$
$$p_{n3} = n_1p_{13} + n_2p_{23} + n_3p_{33}. \tag{18}$$

Вспоминая определение напряжений p_1, p_2, p_3, отметим, что при принятых обозначениях первый подстрочный индекс при напряжениях p_{11}, p_{12}, ... обозначает ось, перпендикулярно к которой ориентирована площадка $\delta\sigma$, второй — ось, на которую спроектировано это напряжение; так, например, p_{13} обозначает проекцию на ось x_3 напряжения, приложенного к площадке, перпендикулярной к оси x_1. Очевидно, что

$$p_r = p_{rs}i_s \quad (r = 1, 2, 3;\ \text{суммирование по } s \text{ от 1 до 3}).$$

Величины с одинаковыми индексами p_{11}, p_{22}, p_{33}, представляющие проекции векторов напряжений p_1, p_2, p_3 на нормали к соответствующим площадкам, называют *нормальными* напряжениями, а проекции p_{12}, p_{21}, p_{31}, ... на оси, лежащие в плоскости площадок,— *касательными* напряжениями.

Система равенств (17) или (18) показывает, что проекции физически объективного вектора p_n на оси координат являются линейными функциями проекций на те же оси физически объективного вектора n. Коэффициенты в этой линейной связи представляют совокупность *девяти* величин

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Как было отмечено в § 4, наличие линейной связи между проекциями двух физических векторов p_n и n говорит о *физической объективности совокупности величин* (19) p_{kl} (k, $l = 1, 2, 3$) и тем самым о физической объективности определенного таблицей (19) *тензора второго ранга* с этими компонентами.

Таблица (19) не удовлетворяет принятому порядку индексов: первый — номер строки, второй — столбца. Поэтому за *тензор напряжений* примем тензор P с таблицей

$$P\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

а тензору с таблицей (19) сопоставим тензор P^*, *сопряженный* с тензором напряжений P. Как будет вскоре показано, различие между тензорами P и P^* отсутствует.

Вспоминая определение операции *умножения вектора на тензор* справа (или тензора на вектор слева), можем переписать (18) в тензорной форме так:

$$p_n = nP = P^*n. \tag{21}$$

Равенство (17) и эквивалентные ему равенства (18), устанавливающие линейную зависимость между проекциями напряжения, приложенного к любой площадке в данной точке, и косинусами углов нормали к этой площадке с осями координат, имеют основное значение для механики сплошных сред. Они носят наименование *равенств Коши*, впервые их опубликовавшего в 1827 г. Формула (21) эквивалентна аналитическим формулам (17) или (18), но имеет перед ними то преимущество, что лишена зависимости от выбора той или другой декартовой системы координат, чем подчеркивает свою физическую объективность.

§ 20. Теорема о взаимности касательных напряжений

Условия равновесия тетраэдра $ABCM$, согласно известной теореме статики, должны, кроме равенства нулю главного вектора (16), содержать еще условия равенства нулю *главного момента* приложенных сил.

Необходимо с этой целью отметить, что принятое в § 19 определение объемных и поверхностных сил нуждается в дополнении еще определениями *объемных* и *поверхностных пар сил*, которые, например, могут образовываться в ферромагнитных жидкостях. Первые из них, как малые третьего порядка, в уравнения моментов не войдут, а вторые должны быть учтены.

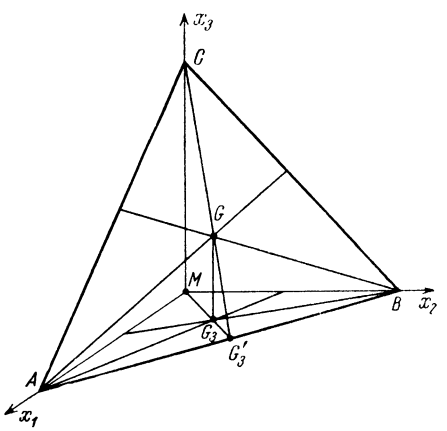


Рис. 21

Отвлечемся от этого особого случая и примем, что в движущейся среде поверхностных пар сил нет.

При составлении условия равновесия (16) положение точек приложения поверхностных сил не имело значения. Для определения моментов поверхностных сил необходимо знать координаты точек приложения сил. Поскольку грани тетраэдра бесконечно малы, можно принять, что поверхностные силы по ним распределены равномерно и, следовательно, точки приложения равнодействующих находятся на пересечении медиан в треугольниках ABC, AMB, BMC и AMC в точках G, G_1, G_2, G_3 (рис. 21). Чтобы не загромождать чертеж, на рисунке показано положение только точек G и G_3 на грани ABC и ее проекции AMB. Обозначим через $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}^{(1)}$, $\boldsymbol{r}^{(2)}$, $\boldsymbol{r}^{(3)}$ вектор-радиусы точек пересечения медиан G, G_1, G_2, G_3. Тогда искомым вторым условием равновесия тетраэдра будет уравнение моментов

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\delta\sigma_n=\boldsymbol{r}^{(1)}\times\boldsymbol{p}_1\delta\sigma_1+\boldsymbol{r}^{(2)}\times\boldsymbol{p}_2\delta\sigma_2+\boldsymbol{r}^{(3)}\times\boldsymbol{p}_3\delta\sigma_3.$$

Заменяя в этом равенстве $\boldsymbol{p}_n$ его разложением (17), получим после сокращения на $\delta\sigma_n$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(1)})\times\boldsymbol{p}_1n_1+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(2)})\times\boldsymbol{p}_2n_2+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(3)})\times\boldsymbol{p}_3n_3=0. \qquad (22)$$

Направленный отрезок $\overrightarrow{G_3G}$ равен разности вектор-радиусов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}^{(3)}$

$$\overrightarrow{G_3G}=\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MG_3}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(3)},$$

а так как точка G_3 является проекцией точки G на плоскость Mx_1x_2, то направленный отрезок $\overrightarrow{G_3G}$ параллелен вектору $\boldsymbol{i}_3$.

Аналогично, векторы $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(1)}$ и $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(2)}$ параллельны векторам $\boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{i}_2$, так что можно положить ($\lambda^{(k)}$— скаляры)

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(1)}=\lambda^{(1)}\boldsymbol{i}_1, \quad \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(2)}=\lambda^{(2)}\boldsymbol{i}_2, \quad \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(3)}=\lambda^{(3)}\boldsymbol{i}_3. \tag{23}$$

Подставляя значения этих разностей в (22), составим соотношение

$$\lambda^{(1)}n_1(\boldsymbol{i}_1\times\boldsymbol{p}_1)+\lambda^{(2)}n_2(\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{p}_2)+\lambda^{(3)}n_3(\boldsymbol{i}_3\times\boldsymbol{p}_3)=0. \tag{24}$$

Остается определить скаляры $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$. Для этого продлим отрезки $\overrightarrow{MG_1}$, $\overrightarrow{MG_2}$ и $\overrightarrow{MG_3}$ до их пересечений с плоскостью ABC в точках G_1', G_2', G_3' (на рисунке это построение показано только для G_3'). По известной теореме о пересечении медиан в треугольнике будем иметь

$$\overrightarrow{MG_1'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MG_1}=\frac{3}{2}\boldsymbol{r}^{(1)}, \quad \overrightarrow{MG_2'}=\frac{3}{2}\boldsymbol{r}^{(2)}, \quad \overrightarrow{MG_3'}=\frac{3}{2}\boldsymbol{r}^{(3)}.$$

Учтем, что концы векторов $\overrightarrow{MG_1'}$, $\overrightarrow{MG_2'}$, $\overrightarrow{MG_3'}$, так же как и $\overrightarrow{MG}$, лежат в наклонной плоскости ABC. Следовательно, обозначая через h длину перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC, найдем ($\boldsymbol{n}$ – орт нормали к ABC)

$$\frac{3}{2}[\boldsymbol{r}^{(1)}\cdot\boldsymbol{n}]=\frac{3}{2}[\boldsymbol{r}^{(2)}\cdot\boldsymbol{n}]=\frac{3}{2}[\boldsymbol{r}^{(3)}\cdot\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{h}. \tag{25}$$

Умножая обе части каждого из равенств (23) скалярно на $\boldsymbol{n}$, будем иметь согласно (25)

$$[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(k)})\cdot\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}^{(k)}\cdot\boldsymbol{n}=h-\frac{2}{3}h=\frac{1}{3}h=\lambda^{(k)}n_k$$

($k=1, 2, 3$; по k не суммировать!).

Отсюда следует, что $\lambda^{(k)}n_k=h/3$. Подставляя полученные значения $\lambda^{(k)}$ в равенство (24) и сокращая обе части на h, придем к следующему векторному соотношению:

$$\boldsymbol{i}_1\times\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{i}_3\times\boldsymbol{p}_3=0. \tag{26}$$

Принимая во внимание равенство $\boldsymbol{p}_r=p_{rs}\boldsymbol{i}_s$ (суммирование по s), будем иметь

$$\boldsymbol{i}_1\times\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{i}_1\times p_{1s}\boldsymbol{i}_s=p_{1s}(\boldsymbol{i}_1\times\boldsymbol{i}_s),$$

причем

$$\boldsymbol{i}_1\times\boldsymbol{i}_s=\begin{cases}0, & s=1,\\ \boldsymbol{i}_3, & s=2,\\ -\boldsymbol{i}_2, & s=3,\end{cases}$$

так что

$$\boldsymbol{i}_1\times\boldsymbol{p}_1=p_{12}\boldsymbol{i}_3-p_{13}\boldsymbol{i}_2.$$

Аналогично будет

$$\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{p}_2=-p_{21}\boldsymbol{i}_3+p_{23}\boldsymbol{i}_1, \quad \boldsymbol{i}_3\times\boldsymbol{p}_3=p_{31}\boldsymbol{i}_2-p_{32}\boldsymbol{i}_1.$$

Подставляя эти результаты в равенство (26), получим

$$\boldsymbol{i}_1\times\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{i}_3\times\boldsymbol{p}_3=(p_{23}-p_{32})\boldsymbol{i}_1+(p_{31}-p_{13})\boldsymbol{i}_2+(p_{12}-p_{21})\boldsymbol{i}_3=0,$$

откуда прямо следует, что

$$p_{23}=p_{32}, \quad p_{31}=p_{13}, \quad p_{12}=p_{21}; \quad P=P^*. \tag{27}$$

Равенства эти выражают теорему о *взаимности касательных напряжений: если через какую-нибудь точку среды провести три взаимно перпендикулярные бесконечно малые площадки, то для каждых двух из них проекции вектора напряжения, приложенного к одной из площадок, на нормаль к другой равны между собой.*

Равенства (27) устанавливают, что при принятом условии отсутствия в среде непрерывного распределения поверхностных пар сил, компоненты тензора напряжений не зависят от порядка индексов, иными словами, *тензор напряжений симметричен.*

Механику сплошных сред (жидкостей, газов, упругих тел), для которой справедлива теорема о взаимности касательных напряжений и, следовательно, *симметричен* тензор напряжений, называют «симметричной», в противном случае — «несимметричной». Последняя получила развитие только в недавнем прошлом, представляет предмет пока еще небольшого числа исследований и не может занять место в настоящем учебнике. Дальнейшее изложение посвящается только *симметричной* механике жидкости и газа.

Отметим существенные для последующего выводы из теоремы о взаимности касательных напряжений: 1) из девяти неизвестных компонент тензора напряжений различными являются только шесть; 2) в равенствах Коши (18) порядок индексов при компонентах тензора напряжений можно менять; 3) равенство (21) приобретает вид

$$p_{n'} = nP = Pn. \tag{28}$$

Подчеркнем, что *присутствие объемных* или *поверхностных пар сил не ограничивает справедливости равенств Коши*, так как при составлении главного вектора сил *пары вклада не дают.*

ГЛАВА IV

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 21. Теорема количеств движения. Уравнение динамики «в напряжениях»

Обратимся к общей теореме об изменении главного вектора количеств движения системы, гласящей: производная по времени от главного вектора количеств движения системы равна главному вектору *внешних* сил, приложенных к системе.

Применительно к механике сплошных текучих сред эта формулировка претерпевает небольшие изменения и становится следующей: *индивидуальная производная от главного вектора количеств движения «жидкого» объема равна главному вектору внешних объемных и поверхностных сил, приложенных к частицам, расположенным соответственно в объеме и на ограничивающей его поверхности.*

Выделим в жидкости произвольный конечный жидкий объем τ (рис. 22). Если $\delta\tau$ — элемент объема, содержащий точку M со скоростью $\boldsymbol{V}$, то вектор его количества движения $\delta\boldsymbol{K}$ равен

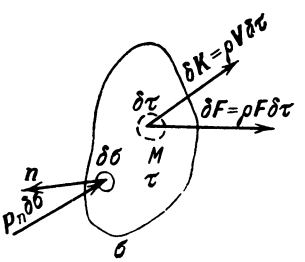


Рис. 22

$$\delta\boldsymbol{K}=\rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau,$$

а главный вектор количеств движения во всем объеме τ равен сумме или интегралу элементарных количеств движения

$$\boldsymbol{K}=\int_{\tau}\rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau. \tag{1}$$

По тем же соображениям главные векторы внешних объемных и поверхностных сил будут соответственно равны

$$\int_{\tau}\rho\boldsymbol{F}\,\delta\tau \quad \text{и} \quad \int_{\sigma}\boldsymbol{p}_n\delta\sigma. \tag{2}$$

Таким образом, только что сформулированная в терминах динамики сплошных сред теорема об изменении количеств движения приводит к равенству

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau=\int_{\tau}\rho\boldsymbol{F}\,\delta\tau+\int_{\sigma}\boldsymbol{p}_n\delta\sigma. \tag{3}$$

В левой части выполним преобразование

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau=\int_{\tau}\frac{d}{dt}(\rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau)=\int_{\tau}\rho\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\,\delta\tau+\int_{\tau}\boldsymbol{V}\,\frac{d}{dt}(\rho\,\delta\tau).$$

Последний интеграл по условию сохранения массы (4) гл. III равен

нулю; следовательно,

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho V\,\delta\tau=\int_{\tau}\rho\frac{dV}{dt}\delta\tau. \tag{4}$$

В последнем члене правой части (3) произведем замену p_n его выражениями (17) или (28) гл. III. Будем иметь, согласно теореме Гаусса — Остроградского, эквивалентные друг другу результаты

$$\int_{\sigma}p_n\delta\sigma=\int_{\sigma}(n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3)\,\delta\sigma=\int_{\tau}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_3}{\partial x_3}\right)\delta\tau, \tag{5}$$

$$\int_{\sigma}p_n\delta\sigma=\int_{\sigma}nP\,\delta\sigma=\int_{\tau}\nabla P\,\delta\tau=\int_{\tau}\mathrm{Div}\,P\,\delta\tau.$$

Возвращаясь к равенству (3), подставим в него приведенные к объемным интегралам члены и объединим их, перенеся в левую часть уравнения. Получим

$$\int_{\tau}\left(\rho\frac{dV}{dt}-\rho F-\frac{\partial p_1}{\partial x_1}-\frac{\partial p_2}{\partial x_2}-\frac{\partial p_3}{\partial x_3}\right)\delta\tau=0,$$

$$\int_{\tau}\left(\rho\frac{dV}{dt}-\rho F-\mathrm{Div}P\right)\delta\tau=0,$$

откуда, в силу произвольности объема интегрирования τ, придем к следующим двум возможным выражениям *уравнения динамики сплошной среды в напряжениях*:

$$\rho\frac{dV}{dt}=\rho F+\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_3}{\partial x_3}=\rho F+\frac{\partial p_i}{\partial x_i},$$

$$\rho\frac{dV}{dt}=\rho F+\mathrm{Div}\,P. \tag{6}$$

Векторы

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i}=\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_3}{\partial x_3}=\mathrm{Div}\,P,$$

стоящие в правых частях уравнений (6), согласно равенствам (5), можно рассматривать как пределы

$$\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta\sigma}p_n\delta\sigma=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta\sigma}nP\,\delta\sigma \tag{7}$$

отношения главного вектора поверхностных сил, приложенных к поверхности $\Delta\sigma$, которая ограничивает объем $\Delta\tau$, заключающий внутри себя данную точку M, к этому объему, т. е. как *объемную плотность распределения главного вектора поверхностных сил*. Эту плотность будем называть объемным действием поверхностных сил.

В декартовой системе прямоугольных координат уравнения (6) приобретут вид

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}\right)=\rho F_i+\frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k}\quad(i=1,\,2,\,3;\ \text{суммирование по } k)$$

или, в развернутом виде,

$$\rho\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)=\rho F_1+\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{31}}{\partial x_3},$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_2}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)=\rho F_2+\frac{\partial p_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{32}}{\partial x_3}, \quad (8)$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_3}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial V_3}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial V_3}{\partial x_3}\right)=\rho F_3+\frac{\partial p_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}.$$

К этой системе уравнений присоединяется уравнение неразрывности (7) гл. III, имеющее в указанных координатах вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho V_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho V_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho V_3)=0. \quad (9)$$

Как будет показано далее, уравнения (8) вместе с уравнением (9) являются основой динамики сплошных сред. В них содержатся как частные случаи различные виды уравнений, отвечающие тем или иным дополнительным допущениям относительно физических свойств определенных моделей сплошных сред (идеальная, вязкая жидкости и др.).

Предыдущий вывод уравнения в напряжениях относился к случаю отсутствия внутренних источников притока массы, т. е. (согласно концу § 18) соответствовал условию $J=0$. При наличии такого рода источников ($J\neq 0$) и в условиях их неподвижности в левой части уравнений (6) появится дополнительный член JV, учитывающий изменение количества движения со временем за счет наличия этих источников; будем иметь, например, вместо второго уравнения (6)

$$\rho\frac{dV}{dt}+JV=\rho F+\operatorname{Div}P$$

или, перенося член JV в правую часть,

$$\rho\frac{dV}{dt}=\rho F+\operatorname{Div}P-JV. \quad (10)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение *динамики сплошной среды переменной массы*[1]), а последний член справа трактовать как *реактивную* силу, отнесенную к единице объема, или *плотность распределения реактивных сил.*

§ 22. Теорема моментов и вывод из нее теорем о взаимности касательных напряжений

Закон изменения главного момента количеств движения системы материальных точек гласит: производная по времени от главного момента количеств движения системы материальных точек равна главному моменту внешних сил, приложенных к системе.

В динамике сплошной среды этот закон формулируется так: *индивидуальная производная от главного момента количеств движения конечного жидкого объема равна главному моменту внешних объемных и поверхностных сил, приложенных к этому объему и ограничивающей его поверхности.*

Пользуясь тем же рис. 22, найдем моменты указанных там векторов относительно произвольного центра O, на рис. 22 не показанного. Обозначая через r текущий вектор-радиус точек объема τ и ограничивающей его поверхности σ, выразим только что сформулированную

[1]) Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. II.— М.: Наука, 1983, с. 110—114.

теорему следующим равенством:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau} r\times\rho V\,\delta\tau=\int_{\tau} r\times\rho F\,\delta\tau+\int_{\sigma} r\times p_n\delta\sigma. \tag{11}$$

Стоящий в левой части интеграл преобразуется так:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau} r\times\rho V\,\delta\tau=\int_{\tau}\frac{dr}{dt}\times\rho V\,\delta\tau+\int_{\tau} r\times\rho\frac{dV}{dt}\delta\tau+\int_{\tau} r\times V\frac{d}{dt}(\rho\,\delta\tau).$$

Первый из интегралов в правой части равен нулю, так как

$$\frac{dr}{dt}\times\rho V=V\times\rho V\equiv 0,$$

третий также равен нулю, так как по закону сохранения массы $\frac{d}{dt}(\rho\,\delta\tau)=0$, и мы приходим к равенству

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau} r\times\rho V\,\delta\tau=\int_{\tau} r\times\rho\frac{dV}{dt}\,\delta\tau.$$

Обратимся к преобразованию поверхностного интеграла правой части (11) в объемный. Перепишем его, согласно формуле Коши (17) гл. III, в виде

$$\int_{\sigma} r\times p_n\delta\sigma=\int_{\sigma} r\times(n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3)\,\delta\sigma=$$

$$=\int_{\sigma}[n_1(r\times p_1)+n_2(r\times p_2)+n_3(r\times p_3)]\,\delta\sigma$$

или, используя интегральное соотношение Гаусса — Остроградского,

$$\int_{\sigma} r\times p_n\delta\sigma=\int_{\tau}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(r\times p_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(r\times p_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(r\times p_3)\right]\delta\tau=$$

$$=\int_{\tau}\left[r\times\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_3}{\partial x_3}\right)+\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\times p_1\right)+\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\times p_2\right)+\left(\frac{\partial r}{\partial x_3}\times p_3\right)\right]\delta\tau. \tag{12}$$

Подставляя полученные выражения в (11) и группируя члены, придем к выражению

$$\int_{\tau}\left[r\times\left(\rho\frac{dV}{dt}-\rho F-\frac{\partial p_1}{\partial x_1}-\frac{\partial p_2}{\partial x_2}-\frac{\partial p_3}{\partial x_3}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial r}{\partial x_1}\times p_1-\frac{\partial r}{\partial x_2}\times p_2-\frac{\partial r}{\partial x_3}\times p_3\right]\delta\tau=0. \tag{13}$$

Отсюда, имея в виду первое равенство (6) и произвольность объема интегрирования τ, получим соотношение между векторами напряжений p_1, p_2, p_3

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}\times p_1+\frac{\partial r}{\partial x_2}\times p_2+\frac{\partial r}{\partial x_3}\times p_3=0,$$

которое, замечая, что

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1i_1+x_2i_2+x_3i_3)=i_1,\quad \frac{\partial r}{\partial x_2}=i_2,\quad \frac{\partial r}{\partial x_3}=i_3,$$

можно записать в виде

$$i_1 \times p_1 + i_2 \times p_2 + i_3 \times p_3 = 0. \qquad (14)$$

Последнее равенство совпадает с равенством (26) гл. III, которое, как было показано, приводит к теореме о взаимности касательных напряжений и симметричности тензора напряжений (формула (27) той же главы).

Отметим, что соотношение (14) справедливо для любой сплошной среды независимо от характера приложенных к ней сил и наличия или отсутствия притока массы извне, если только в этой среде нет распределенных пар сил. Иными словами, существование распределенных источников (стоков) массы не нарушило бы симметричности тензора напряжений.

Очевидно, что если считать свойство взаимности касательных напряжений уже известным на основании геометрического вывода гл. III, подставить соответствующую формулу (27) гл. III в равенство (11) и учесть уравнение количеств движения (6), то уравнение моментов (11) просто обратится в *тождество* и не даст никакой новой информации. Если же не основываться на геометрическом выводе теоремы о взаимности касательных напряжений, а независимо проделать преобразования, приводящие уравнение баланса моментов к виду (14), то это будет второе доказательство той же теоремы. Наконец, опираясь на определение операции векторного умножения двух тензоров [(70) гл. I], можно было бы осуществить еще третье, тензорное доказательство симметричности тензора напряжений в форме равенства (75) гл. I: $P \times E = 0$, которое полностью не зависит от выбора координатной системы.

Однако поскольку подобные тензорные операции в дальнейшем не понадобятся, опустим этот вариант доказательства и перейдем к следующему по порядку *закону изменения кинетической энергии.*

§ 23. Теорема об изменении кинетической энергии и общий закон сохранения энергии

Напомним общую формулировку закона изменения кинетической энергии системы материальных точек: *производная по времени от кинетической энергии системы материальных точек равна сумме мощностей как внешних сил, приложенных к системе, так и сил внутренних взаимодействий между точками системы.* Подчеркнем разницу в формулировках теоремы об изменении кинетической энергии и теорем количеств и момента количеств движения: в только что приведенной формулировке, наряду с *внешними* силами, учитываются и *внутренние.*

Интегральное выражение теоремы об изменении кинетической энергии движущегося индивидуального объема сплошной среды составим, пользуясь только что приведенной формулировкой для динамики материальных систем, в форме

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \frac{\rho V^2}{2}\,\delta\tau = \int_\tau \rho F \cdot V\,\delta\tau + \int_\sigma p_n \cdot V\,\delta\sigma + \int_\tau N_{\text{in}}\delta\tau, \qquad (15)$$

где под N_{in} подразумевается отнесенная к единице объема мощность внутренних сил, называемая иначе *плотностью распределения мощности внутренних сил.*

Переходя от поверхностного интеграла к объемному при помощи преобразования

$$\int_\sigma p_n \cdot V\,\delta\sigma = \int_\sigma (nP)\cdot V\,\delta\sigma = \int_\sigma n\cdot(PV)\,\delta\sigma = \int_\tau \operatorname{div}(PV)\,\delta\tau,$$

в котором использованы легко проверяемое тождество

$$(\boldsymbol{n}P)\cdot\boldsymbol{V}\equiv\boldsymbol{n}\cdot(P\boldsymbol{V})$$

и формула Гаусса — Остроградского [(111) гл. I)], и освобождаясь тем же путем, что и в предыдущих параграфах, от интегралов, получим выражение *теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме*

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\operatorname{div}(P\boldsymbol{V})+N_{\text{in}}. \tag{16}$$

Сравним это уравнение с равенством

$$\rho\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\cdot\boldsymbol{V}\equiv\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{Div}P,$$

составленным из второго уравнения (6) путем скалярного умножения обеих его частей на вектор скорости $\boldsymbol{V}$. Почленное вычитание последних двух уравнений дает выражение для плотности распределения мощности внутренних сил

$$N_{\text{in}}=\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{Div}P-\operatorname{div}(P\boldsymbol{V}). \tag{17}$$

Это выражение можно еще упростить, если использовать следующий ряд дифференциальных преобразований с оператором ∇:

$$\operatorname{div}(P\boldsymbol{V})=\nabla\cdot(P\boldsymbol{V})=(\nabla P)\cdot\boldsymbol{V}+P\cdot(\nabla\boldsymbol{V})=\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{Div}P+P\cdot(\nabla\boldsymbol{V}). \tag{18}$$

Здесь последнее выражение справа представляет собой скалярное произведение тензора напряжений на *диаду* поля скоростей [см. формулы (18), (19) и (69) гл. I]. Используя предыдущее равенство, найдем, согласно (17),

$$N_{\text{in}}=-P\cdot(\nabla\boldsymbol{V})$$

или, разлагая диаду поля скоростей $\nabla\boldsymbol{V}$ на симметричную $\dot{S}$ и антисимметричную $\dot{A}$ части и замечая, что в силу симметричности тензора P будет $P\cdot\dot{A}\equiv0$, перейдем к следующему выражению мощности внутренних сил как взятого с противоположным знаком скалярного произведения тензора напряжений на тензор скоростей деформаций:

$$N_{\text{in}}=-P\cdot\dot{S}. \tag{19}$$

Правая часть (19), выражающая *плотность распределения мощности внутренних сил*, по своей структуре напоминает формулу мощности силы. Разница, однако, в том, что в случае дискретной силы мощность определяется как скалярное произведение *векторов силы* и *скорости*, а в сплошной среде *плотность распределения мощности внутренних сил равна скалярному произведению тензоров напряжений и скоростей деформаций.*

При движениях сплошных сред происходят преобразования одних видов энергии в другие и в первую очередь *механической энергии в тепловую.* Для расчета этих преобразований служит уравнение баланса энергии, выводимое из общего *термодинамического закона сохранения энергии* (*первого закона термодинамики*), который для данного индивидуального объема движущейся среды формулируется так: *индивидуальная производная по времени от полной энергии данного движущегося объема среды равна сумме мощностей приложенных к выделенному объему и его поверхности внешних массовых и поверхностных сил и отнесенного к единице времени количества энергии, подведенной извне к объему.* Этот закон выражается интегральным равенством

$$\frac{d}{dt}\int_\tau\rho\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau=\int_\tau\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}\,\delta\tau+\int_\sigma\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{V}\,\delta\sigma+\int_\tau\rho q\,\delta\tau, \tag{20}$$

где U — удельная (отнесенная к единице массы) внутренняя энергия среды, включающая в себя все возможные виды энергии внутренних движений материи (в задачах механики жидкости и газа — это в первую очередь тепловая энергия), а q — удельное количество энергии, подведенное извне в единицу времени к данной частице среды и заключающее в себе отличные от работы макроскопических механических сил тепловые и нетепловые виды энергии. Сумма внутренней и внешней (кинетической) энергии носит наименование *полной энергии.*

Левую часть уравнения (20), используя закон сохранения массы (4) гл. III, преобразуем так:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau}\rho\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau=\int\limits_{\tau}\rho\frac{d}{dt}\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau+$$

$$+\int\limits_{\tau}\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\frac{d}{dt}(\rho\,\delta\tau)=\int\limits_{\tau}\rho\frac{d}{dt}\left(U+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau,$$

а поверхностный интеграл в правой части равенства (20), как и при выводе формулы (16), может быть превращен в объемный:

$$\int\limits_{\sigma}\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{V}\,\delta\sigma=\int\limits_{\tau}\operatorname{div}(P\boldsymbol{V})\,\delta\tau.$$

Подставляя написанные выражения в уравнение (20) и учитывая, как и выше, произвольность объема τ, получим *уравнение баланса полной энергии в дифференциальной форме*

$$\rho\frac{d}{dt}\left(U+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\operatorname{div}(P\boldsymbol{V})+\rho q. \tag{21}$$

Сопоставляя уравнение баланса полной энергии (21) с ранее выведенным уравнением изменения кинетической энергии (16), можем, произведя почленное вычитание этих уравнений одно из другого, получить следующее уравнение *баланса внутренней энергии*:

$$\rho\frac{dU}{dt}=\rho q-N_{\text{in}}=\rho q+P\cdot\dot{S}, \tag{22}$$

не заключающее в явной форме ни внешних объемных сил, ни скоростей и выражающее связь между *индивидуальным изменением во времени отнесенной к единице массы внутренней энергии среды, притоком внутренней энергии извне и мощностью внутренних сил.*

Пользуясь полученным выражением плотности распределения мощности внутренних сил N_{in} (19), можем привести уравнение (16) к одному из следующих эквивалентных видов:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{Div}P,$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\operatorname{div}(P\boldsymbol{V})-P\cdot\dot{S}. \tag{23}$$

Одно из уравнений баланса энергии (полной или внутренней) в том или другом виде может быть присоединено к общей системе уравнений динамики жидкости, которая и после этого останется незамкнутой. Для замыкания системы необходимо либо ввести дополнительные связи между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформаций (например, закон вязких напряжений Ньютона), либо наложить упрощающие предположения на компоненты тензора напряжений (модель *идеальной*, т. е. лишенной внутреннего трения жидкости).

При наличии притока массы от непрерывно распределенных *источников* в предыдущих формулах появятся дополнительные члены. Так, дифференциальной формой теоремы об изменении кинетической энергии вместо (16) будет служить уравнение

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V} + \operatorname{div}(P\boldsymbol{V}) + N_{\text{in}} - \frac{JV^2}{2}; \tag{24}$$

уравнения баланса энергии в дифференциальной форме (21) и (22) перейдут в следующие:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(U + \frac{V^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V} + \operatorname{div}(P\boldsymbol{V}) + \rho q - J\left(U + \frac{V^2}{2}\right), \tag{25}$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho q - N_{\text{in}} - JU, \tag{26}$$

и, наконец, выражение мощности внутренних сил приобретет вид

$$N_{\text{in}} = -P\cdot\dot{S} - \frac{JV^2}{2}. \tag{27}$$

Вывод формул (24)—(27) основан на использовании равенства (11) гл. III вместо равенства (4) той же главы и не представляет труда.

При выводе формул (10) и (24)—(27) предполагалось, что непрерывно распределенные *источники масс неподвижны*. В случае источников, *движущихся* со скоростями $\overline{V}$, изменение плотности количества движения, вызываемое притоком массы от этих движущихся источников, определится разностью $J(V-\overline{V})$, а соответствующая реактивная сила — разностью $J(\overline{V}-V)$. Изменение кинетической энергии равно $J(V^2/2-\overline{V}^2/2)$, а изменение полной энергии $E=U+\frac{1}{2}V^2$ соответственно равно $J(E-\overline{E})$, где $\overline{E}=\overline{U}+\frac{1}{2}\overline{V}^2$. Такого рода выражения будут использованы в § 149 при выводе уравнений движения *неоднородных многокомпонентных* газовых смесей, в которых за счет физико-химических превращений *возникают* и соответственно исчезают массы некоторых компонент смеси.

В практических расчетах непосредственное применение общих законов динамики жидкостей и газов бывает затруднительным. В связи с этим предпочитают, как это имеет место, например, в гидравлике, пользоваться *интегральными* их выражениями, часто сопровождаемыми явными или неявными *осреднениями* полей скоростей или других физических величин. Этому вопросу посвящено содержание следующего параграфа.

§ 24. Перенос физической величины потоком среды сквозь поверхность. Теорема Эйлера

Интегральные формы рассмотренных выше законов динамики и баланса энергии сплошных сред [количеств и моментов количеств движения (3) и (11), баланса кинетической и полной энергии (15) и (20)] содержат в левых частях *индивидуальные производные по времени от выражений типа* $\int_\tau \Phi\,\delta\tau$, называемых *значениями физической величины* Φ *в объеме* τ. Сама величина Φ в зависимости от вида уравнения может быть скалярной, векторной или тензорной. В перечисленных случаях она соответственно равна ρV, $r\times\rho V$, $\rho V^2/2$, $\rho(U+V^2/2)$.

Индивидуальную производную d/dt от $\int\limits_\tau \Phi\,\delta\tau$ разобьем на *локальную* $\partial/\partial t$ и *конвективную* $(d/dt)_{\text{конв}}$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\tau \Phi\,\delta\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\tau \Phi\,\delta\tau + \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{конв}}\int\limits_\tau \Phi\,\delta\tau.$$

Для придания наглядности конвективной части производной, а также ради определенных вычислительных удобств введем понятие *переноса физической величины потоком среды через так называемую контрольную поверхность.*

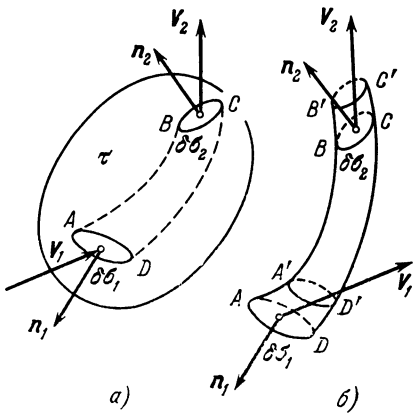


Рис. 23

Условимся называть *контрольной поверхностью* движущегося жидкого объема среды *неподвижную в пространстве поверхность, в данный момент ограничивающую рассматриваемый движущийся объем.* Перемещаясь в пространстве, жидкий объем *протекает* сквозь контрольную поверхность.

Возьмем в пространстве, заполненном движущейся средой, элементарную площадку $\delta\sigma$ с ортом нормали n, определяющим лицевую сторону площадки. Произведение $\Phi V_n\delta\sigma$ физической величины Φ на секундный объемный расход $V_n\delta\sigma$ среды сквозь площадку $\delta\sigma$ представляет собой перенос величины Φ сквозь эту площадку, а **интеграл** $\int\limits_\sigma \Phi V_n\delta\sigma$ — *перенос той же величины сквозь поверхность* σ *конечной протяженности.*

Полагая, например, Φ равным отнесенному к единице объема вектору количества движения $\rho\boldsymbol{V}$, получим *вектор переноса количества движения* сквозь поверхность σ, равный интегралу $\int\limits_\sigma \rho\boldsymbol{V}V_n\delta\sigma$. Вектор $\int\limits_\sigma \rho\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}V_n\delta\sigma$ представляет собой *перенос момента количеств движения.* Протекающую сквозь поверхность σ секундную массу среды $\int\limits_\sigma \rho V_n\delta\sigma$ можно рассматривать как *перенос плотности* ρ через поверхность σ, скалярную величину $\int\limits_\sigma \rho\,\frac{V^2}{2}\,V_n\delta\sigma$ — как *перенос кинетической энергии* и т. п.

Докажем, *что конвективная производная по времени от интеграла некоторой величины, взятого по движущемуся объему, равна переносу той же величины сквозь контрольную поверхность объема.*

Для доказательства разобьем объем τ (рис. 23, *а*) на элементарные трубки тока $ABCD$ и для каждой из них составим выражение бесконечно малого конвективного изменения интеграла от величины Φ по объему элементарной трубки, происшедшего за время dt в результате перемещения этого объема из положения $ABCD$ в положение $A'B'C'D'$ (рис. 23, *б*). Конвективное приращение величины $\int\limits_\tau \Phi\,\delta\tau$ за время dt, по определению, обусловлено только изменением положения объема интегрирования в неоднородном поле $\Phi(x_1, x_2, x_3; t)$, «замороженном» в начальный момент t. Следовательно, интеграл по общей части $A'BCD'$ нового и старого объемов на это приращение не повлияет и может быть

откинут. Тогда

$$d_{\text{конв}}\int_{\tau}\Phi\,\delta\tau=\int_{A'B'C'D'}\Phi(x_1, x_2, x_3; t)\,\delta\tau-\int_{ABCD}\Phi(x_1, x_2, x_3; t)\,\delta\tau=$$

$$=\int_{BB'C'C}\Phi(x_1, x_2, x_3; t)\,\delta\tau-\int_{AA'D'D}\Phi(x_1, x_2, x_3; t)\,\delta\tau.$$

В силу элементарности объемов справедливы равенства

$$\text{объем } AA'D'D=-V_{1n}\delta\sigma_1 dt,$$

$$\text{объем } BB'C'C=V_{2n}\delta\sigma_2 dt.$$

Здесь индекс n означает, что проекции берутся на направление внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности, ограничивающей объем $ABCD$, заключенный между сечениями $\delta\sigma_1$ и $\delta\sigma_2$. Искомое конвективное изменение интеграла от Φ в объеме элементарной трубки равно

$$\Phi_1 V_{1n}\delta\sigma_1 dt+\Phi_2 V_{2n}\delta\sigma_2 dt.$$

Произведя суммирование этих величин по всем элементарным трубкам, на которые разбит объем τ, получим выражение бесконечно малого конвективного изменения рассматриваемого интеграла за время dt:

$$d_{\text{конв}}\int_{\tau}\Phi\,\delta\tau=\int_{\sigma}\Phi V_n\delta\sigma\,dt.$$

Деля на dt, перейдем к конвективной производной

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{конв}}\int_{\tau}\Phi\,\delta\tau=\int_{\sigma}\Phi V_n\delta\sigma, \tag{28}$$

что и доказывает ранее высказанное утверждение.

В левой части равенства (28) находится производная, вычисление которой требует наблюдения за *движением* объема. Это — конвективная производная в *лагранжевом* представлении движения среды [(1), гл. II].

В правой части равенства (28) та же конвективная производная для своего вычисления требует знания поля скоростей, т. е. основного элемента при использовании *эйлеровых переменных* [(2), гл. II]. Можно сказать, что выражение, стоящее в правой части (28), является *конвективной производной в эйлеровом представлении.*

Индивидуальная производная по времени от интеграла по движущемуся жидкому объему τ физической величины Φ заключает еще локальную часть, так что развернутое выражение для индивидуальной производной имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\Phi\,\delta\tau=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\Phi\,\delta\tau+\int_{\sigma}\Phi V_n\delta\sigma. \tag{29}$$

Если поле величины Φ стационарно, то локальная часть отпадает и в этом случае будет

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\Phi\,\delta\tau=\int_{\sigma}\Phi V_n\delta\sigma. \tag{30}$$

Пользуясь (29) и полагая $\Phi=\rho$, получим *уравнение сохранения массы* в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho\,\delta\tau+\int_{\sigma}\rho V_n\delta\sigma=0, \tag{31}$$

имеющее особо простой смысл в случае стационарного потока, когда первое слагаемое слева равно нулю. В этом случае равенство

$$\int_{\sigma} \rho V_n \delta\sigma = 0 \tag{32}$$

утверждает, что секундный *массовый* расход среды сквозь неподвижную замкнутую поверхность, не заключающую внутри себя источников массы, равен нулю.

Если применить это равенство к объему конечной трубки тока, заключенному между сечениями σ_1 и σ_2, где скорости и плотности обозначены соответственно V_1, V_2, ρ_1, ρ_2, то будем иметь

$$\int_{\sigma_1} \rho V_{1n} \delta\sigma = \int_{\sigma_2} \rho V_{2n} \delta\sigma. \tag{33}$$

Последнее равенство выражает *закон сохранения секундного массового расхода вдоль трубки тока*, или, пользуясь терминологией § 10, закон сохранения *потока* вектора количества движения $\rho \boldsymbol{V}$ вдоль трубки тока.

Интегральной формой теоремы об изменении количества движения среды в объеме τ, ограниченном замкнутой поверхностью σ, согласно изложенному выше, будет

$$\int_{\tau} \rho \boldsymbol{F}\, \delta\tau + \int_{\sigma} \boldsymbol{p}_n \delta\sigma - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \boldsymbol{V}\, \delta\tau - \int_{\sigma} \rho \boldsymbol{V} V_n \delta\sigma = 0. \tag{34}$$

Последнее слагаемое, включая знак минус, можно трактовать как *перенос количества движения через контрольную поверхность внутрь объема* τ. Действительно, орт внешней нормали направлен *наружу* объема, так что если в некоторой точке поверхности вектор скорости $\boldsymbol{V}$ направлен также наружу объема ($V_n > 0$), то элемент интеграла «$-\rho V_n \boldsymbol{V} \delta\sigma$» направлен внутрь объема; если же вектор $\boldsymbol{V}$ направлен внутрь объема, то $V_n < 0$ и элемент интеграла направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{V}$, т. е. опять внутрь объема.

Полезно отметить, что из интегральных форм выражения законов сохранения массы (31) и количества движения (34) легко получить, используя формулу Гаусса — Остроградского, соответствующие дифференциальные формы.

Равенство (34) в случае *стационарного* потока можно трактовать следующим образом: *главные векторы внешних объемных и поверхностных сил, приложенных к выделенному жидкому объему, вместе со взятым с противоположным знаком вектором переноса количества движения сквозь контрольную поверхность, соответствующую этому жидкому объему, образуют замкнутый треугольник, т. е. сумма этих трех векторов равна нулю.* Такова *теорема Эйлера количеств движения в сплошной среде.*

Эта теорема, так же как и аналогичные формулировки для момента количеств движения и механической энергии, широко используются в курсах гидравлики и прикладной гидродинамики. Среди этих применений отметим расчеты давления струи на плоскую или криволинейную стенку, определение момента количеств движения жидкости, движущейся сквозь рабочее колесо турбины, применение теоремы Бернулли (см. далее), теоремы Борда к расчету внезапно расширяющегося потока и др.[1]).

---

[1]) Кроме учебников гидравлики, см. еще Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. II.— 6-е изд. перераб. и доп.— М.. Наука, 1983, с. 143—147, 191, 192, 245—251.

§ 25. Статика текучей среды. Уравнения Эйлера равновесия среды

Уравнения неразрывности, динамики «в напряжениях», взаимности касательных напряжений, баланса кинетической и полной энергии составляют основную систему уравнений механики сплошных сред. Эта система не является *замкнутой*, так как число неизвестных в ней значительно превосходит число уравнений. Без дополнительных допущений о физических свойствах среды обойтись, как правило, нельзя. С главными из этих допущений мы познакомимся в дальнейшем.

Вместе с тем существует распространенный и практически важный класс задач, когда основная система уравнений сплошной среды замыкается без привлечения новых физических представлений. Это — *статика*, т. е. *относительный покой, равновесие среды.*

Как уже указывалось во введении, в основу механики сплошных сред положены *два допущения*: первое — о *сплошности*, т. е. непрерывности распределения в пространстве всех свойств, второе — *о текучести*, или *легкой подвижности.* Для построения всех разделов кинематики достаточно первого допущения, в то время как для динамики очень важно и второе.

Напомним, что, за исключением некоторых специальных жидкостей, у текучих сплошных сред при отсутствии недиагональных компонент тензора скоростей деформаций — скоростей сдвига — отпадают и касательные компоненты тензора напряжений. Таким образом, в покоящейся ($V\equiv 0$) текучей среде касательные напряжения отсутствуют:

$$p_{12}=p_{21}=p_{23}=p_{32}=p_{13}=p_{31}=0, \tag{35}$$

а выражения нормальных напряжений имеют вид

$$\boldsymbol{p}_n=p_n\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{p}_1=p_{11}\boldsymbol{i}_1,\quad \boldsymbol{p}_2=p_{22}\boldsymbol{i}_2,\quad \boldsymbol{p}_3=p_{33}\boldsymbol{i}_3. \tag{36}$$

Используя (35), (36) и равенства Коши (18) гл. III, найдем

$$p_{11}=p_{22}=p_{33}=p_n, \tag{37}$$

т. е. *три нормальных напряжения, приложенные к трем взаимно перпендикулярным площадкам, как угодно ориентированным в пространстве, равны между собой.* Этот закон *изотропии нормальных напряжений* в точках сплошной среды, находящейся в равновесии, был открыт в середине XVII в. Паскалем.

Общее значение нормальных напряжений в данной точке среды, взятое со знаком минус, назовем *давлением* в этой точке и обозначим буквой p, так что

$$p_{11}=p_{22}=p_{33}=-p. \tag{38}$$

Чтобы подчеркнуть, что принятое определение соответствует лишь случаю равновесия среды, это давление называют *гидростатическим* давлением.

Знак минус, взятый в определении давления, подчеркивает, что нормальное напряжение

$$\boldsymbol{p}_n=-p\boldsymbol{n}, \tag{39}$$

приложенное в точках поверхности мысленно выделенного объема, направлено в сторону, противоположную орту внешней нормали к этой поверхности, т. е. внутрь объема.

Давление p представляет собой физический *скаляр*, так же как плотность, температура, концентрация и другие скалярные характеристики. Измеряется оно в Н/м² (Па), кгс/м², барах.

Давление в газе, где не может быть растяжений, всегда положительно; оно обращается в нуль только в условиях абсолютного вакуума; в жидкости возможно существование растяжений.

При равновесии среды тензор напряжений в ней, согласно (36), имеет таблицу

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. обладает *сферической симметрией*, что соответствует свойству *изотропии* нормальных напряжений в покоящейся среде.

Можно положить (E — тензорная единица)

$$P = -pE. \tag{40}$$

Уравнения равновесия среды легко получить, если в уравнениях динамики в напряжениях (8) положить $V_1 = V_2 = V_3 = 0$ и, кроме того, принять во внимание (35) и (38).

Найдем следующие уравнения Эйлера *статики* среды:

$$\rho F_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \rho F_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad \rho F_3 = \frac{\partial p}{\partial x_3}, \tag{41}$$

или эквивалентное векторное уравнение

$$\rho \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} p. \tag{42}$$

Этот же результат можно было бы получить из второго уравнения (6) непосредственно, если заметить, что в рассматриваемом случае

$$\operatorname{Div} P = -\operatorname{grad} p. \tag{43}$$

Из уравнения равновесия (42) можно исключить плотность и давление. Для этого возьмем сначала от обеих его частей операцию вихря rot; тогда p исключится, так как $\operatorname{rot} \operatorname{grad} p \equiv 0$; будем иметь

$$\operatorname{rot}(\rho \boldsymbol{F}) = 0.$$

Отсюда, раскрывая скобки по известному правилу (третье равенство системы (88) гл. I), получим

$$\rho \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \operatorname{grad} \rho \times \boldsymbol{F} = 0. \tag{44}$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на $\boldsymbol{F}$; тогда, заметив, что второе слагаемое, как векторное произведение, перпендикулярно к своему сомножителю $\boldsymbol{F}$, найдем следующее общее ограничение, накладываемое на класс сил, под действием которых *возможно равновесие* жидкости или газа:

$$\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \tag{45}$$

совпадающее по виду с условием (10) гл. II и выражающее существование поверхностей, нормальных к силовым линиям поля.

К числу объемных сил, удовлетворяющих условию (45), относятся, прежде всего, силы, имеющие потенциал П, так как для них

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} \Pi, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0.$$

В этом случае

$$\operatorname{grad} \rho \times \boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} \Pi = 0, \tag{46}$$

откуда следует, что при равновесии среды *силовые линии* поля потенциальных объемных сил *ортогональны изостерам* (поверхностям одинаковой плотности), а также что *изостеры совпадают с изопотенциальными поверхностями* силового поля.

Из (42) следует, что при равновесии среды силовые линии ортогональны *изобарам* (поверхностям одинакового давления). Таким образом, вообще при равновесии жидкости или газа под действием потенциального поля объемных сил *изопотенциальные поверхности поля совпадают с изобарами и изостерами.*

Можно доказать и обратное положение: *если изобары совпадают с изостерами, то равновесие жидкости или газа возможно только под действием потенциального поля объемных сил.* Действительно, из условия

$$\operatorname{grad} p \times \operatorname{grad} \rho = 0$$

или по (42)

$$\boldsymbol{F} \times \operatorname{grad} \rho = 0$$

на основании (44) следует

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} \Pi.$$

Если в движущемся или покоящемся газе плотность является функцией только давления, то движение или равновесие называют *баротропным.* Из предыдущего следует, что *баротропное равновесие газа возможно при наличии только потенциальных сил*, так как при условии $\rho = \rho(p)$ изобары и изостеры, очевидно, совпадут; следовательно, как только что было показано, силовое поле должно быть потенциальным.

Уравнения Эйлера (41) представляют собой так называемую систему в полных дифференциалах и имеют общее решение вида

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{M_0}^{M} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{47}$$

или при наличии потенциала $\Pi(M)$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = \Pi(M_0) - \Pi(M), \tag{48}$$

где $p_0 = p(M_0)$. Чтобы сделать задачу определенной, надо использовать дополнительные допущения о форме зависимости плотности от давления.

§ 26. Равновесие несжимаемой жидкости. Закон Архимеда

Уравнение равновесия несжимаемой жидкости в потенциальном поле внешних объемных сил будет

$$-\rho \operatorname{grad} \Pi = \operatorname{grad} p, \tag{49}$$

откуда при $\rho = \text{const}$ прямо следует

$$p + \rho\Pi = \text{const}. \tag{50}$$

Пусть две несмешивающиеся жидкости разной плотности ρ_1 и ρ_2 находятся во взаимном равновесии; при этом на поверхности раздела этих жидкостей давление p и потенциал непрерывны. Производная от левой части равенства (50) по любому направлению s, лежащему в касательной плоскости к поверхности раздела, должна удовлетворять одновременно следующим двум равенствам:

$$\frac{dp}{ds} + \rho_1 \frac{d\Pi}{ds} = 0, \quad \frac{dp}{ds} + \rho_2 \frac{d\Pi}{ds} = 0,$$

откуда вычитанием получим

$$(\rho_1 - \rho_2) \frac{d\Pi}{ds} = 0;$$

последнее равенство при принятом условии $\rho_1 \neq \rho_2$ приводит к постоянству потенциала объемных сил Π на поверхности раздела. По (50) при этом и давление p будет сохранять постоянное значение вдоль поверхности раздела, которую в этом случае называют *свободной поверх-*

ностью. Таким образом, *при равновесии двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей разной плотности в потенциальном поле объемных сил граница раздела жидкостей будет одновременно изопотенциальной поверхностью и изобарой.*

При равновесии несжимаемой жидкости в поле тяжести (ось z направим по вертикали *вниз*) равенство (50) дает $p-\rho gz=\text{const}$, или, если заменить произведение ρg на удельный вес γ, $p-\gamma z=\text{const}$.

Обозначим давление над *свободной поверхностью* жидкости (обычно атмосферное) через p_a; тогда, помещая начало координат в точку на горизонтальной свободной поверхности, найдем $p=p_a+\rho gz=p_a+\gamma z$.

Давление в данной точке на глубине z, за вычетом дополнительного давления столба воздуха на свободную поверхность, т. е. давление

$$p'=\gamma z, \tag{51}$$

будем называть *давлением жидкости*, понимая под p' превышение давления в жидкости над атмосферным давлением на свободной поверхности.

Поверхностью раздела — *свободной* поверхностью жидкости — служит горизонтальная плоскость $z=0$; на всей этой плоскости $p'=0$.

Главный вектор и главный момент сил давления жидкости на некоторую поверхность σ определяются интегралами ($\boldsymbol{n}$ — орт внешней нормали к поверхности σ, направленный внутрь жидкости)

$$\boldsymbol{R}=-\int_\sigma \boldsymbol{n}p'\,d\sigma,\quad \boldsymbol{L}=-\int_\sigma \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}p'\,d\sigma, \tag{52}$$

причем поверхность σ, вообще говоря, не замкнута. В частном случае *тяжелой* жидкости, полагая $p'=\gamma z$, получим

$$\boldsymbol{R}=-\gamma\int_\sigma \boldsymbol{n}z\,d\sigma,\quad \boldsymbol{L}=-\gamma\int_\sigma \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}z\,d\sigma. \tag{53}$$

Если поверхность σ (рис. 24) представляет как угодно наклоненную плоскую площадку, то $\boldsymbol{n}=\text{const}$ и первая из формул (53) дает

$$\boldsymbol{R}=-\gamma\boldsymbol{n}z_C\sigma,\quad R=\gamma z_C\sigma, \tag{54}$$

где z_C (рис. 24) обозначает вертикальную координату центра инерции C площадки σ. Равенства (54) показывают, что *главный вектор сил давления жидкости на любую плоскую площадку*, как угодно наклоненную к горизонту, равен по величине *весу цилиндрического столба жидкости, имеющего своим основанием площадку, а высотой глубину центра тяжести площадки под свободной поверхностью жидкости.*

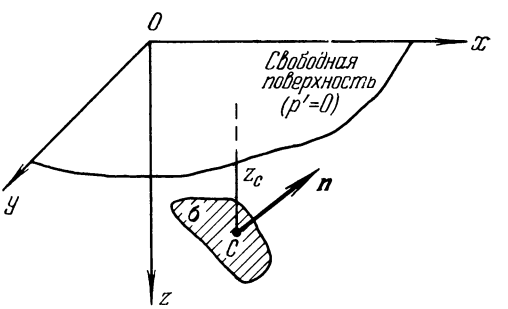


Рис. 24

Этот закон, примененный к сосуду, заполненному жидкостью, приводит к заключению о независимости давления жидкости на стенку сосуда от формы сосуда, сделанному Паскалем и получившему наименование *гидростатического парадокса.*

Если поверхность σ *замкнута* и ограничивает некоторый конечный объем τ, то по (52), замечая, что $\operatorname{grad}p'=\operatorname{grad}p$, получим

$$\boldsymbol{R}=-\int_\sigma \boldsymbol{n}p'\,d\sigma=-\int_\tau \operatorname{grad}p\,d\tau. \tag{55}$$

В случае *тяжелой* жидкости имеем, согласно уравнению Эйлера,

$$\operatorname{grad} p = \rho \boldsymbol{g}, \tag{56}$$

где $\boldsymbol{g}$ — вектор ускорения силы тяжести.

Подставляя это значение градиента в (55), найдем

$$\boldsymbol{R} = -\int_{\tau} \rho \boldsymbol{g}\, d\tau = -\boldsymbol{G}, \tag{57}$$

где $\boldsymbol{G}$ — вектор силы тяжести жидкости в объеме погруженного в нее тела.

Равенство (57) показывает, что *главный вектор сил давления тяжелой жидкости на поверхность погруженного в нее тела равен по величине весу жидкости в объеме тела и направлен в сторону, противоположную силе веса.* Это — *закон Архимеда.* Вектор $\boldsymbol{R}$ называют *архимедовой силой* или *гидростатической подъемной силой* в знак того, что эта сила стремится вытолкнуть тело из жидкости, заставить его всплыть. *Всякое тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная телом жидкость.*

Архимедова сила может наблюдаться не только в тяжелой, т. е. находящейся под действием сил веса жидкости, но и в любом случае, когда тело находится в переменном поле давлений. Такова, например, «индукция» закрытого рабочего участка аэродинамической трубы с твердыми стенками на помещенное в трубу удлиненное тело, обусловленная падением давления в направлении потока из-за наличия сопротивления самого рабочего участка.

Главный момент сил давления жидкости на погруженное тело равен

$$\boldsymbol{L} = -\int_{\sigma} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} p\, d\sigma = \int_{\sigma} \boldsymbol{n} \times p\boldsymbol{r}\, d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{rot}(p\boldsymbol{r})\, d\tau.$$

Раскрывая выражение $\operatorname{rot}(p\boldsymbol{r})$ согласно третьей формуле системы (88) гл. I и учитывая, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{r} \equiv 0$, получим

$$\boldsymbol{L} = -\int_{\tau} \boldsymbol{r} \times \operatorname{grad} p\, d\tau,$$

или, согласно (56),

$$\boldsymbol{L} = -\int_{\tau} \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{g}\, d\tau. \tag{58}$$

Замечая еще, что вектор-радиус $\boldsymbol{r}'$ центра инерции вытесненного объема равен

$$\boldsymbol{r}' = \frac{1}{G} \int_{\tau} \boldsymbol{r} \rho \boldsymbol{g}\, d\tau$$

и что, очевидно,

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{G}}{G} g,$$

найдем по (58)

$$\boldsymbol{L} = -\frac{1}{G} \int_{\tau} \boldsymbol{r} \rho \boldsymbol{g}\, d\tau \times \boldsymbol{G} = -\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{R}. \tag{59}$$

Полученная формула показывает, что *линия действия главного вектора давления жидкости на погруженное в нее тело проходит через центр тяжести вытесненного телом объема жидкости.*

§ 27. Равновесие равномерно вращающейся несжимаемой жидкости. Центрифугирование твердых частиц

Если несжимаемая жидкость находится в относительном покое по отношению к некоторой равномерно вращающейся с угловой скоростью ω системе координат, то, чтобы написать условие относительного равновесия вращающейся жидкости, необходимо к непосредственно приложенным силам с потенциалом Π присоединить еще отнесенную к единице массы инерционную центробежную силу $\boldsymbol{F}^{(ц)}$, равную

$$\boldsymbol{F}^{(ц)} = \omega^2 \boldsymbol{r} \tag{60}$$

и имеющую потенциал

$$\Pi^{(ц)} = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2, \tag{61}$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, направленный по кратчайшему расстоянию от оси вращения к рассматриваемой точке жидкости и равный по величине этому расстоянию. Уравнение относительного равновесия вращающейся жидкости будет

$$p + \rho\Pi - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \text{const}, \tag{62}$$

а уравнение *свободной поверхности* жидкости ($p = \text{const}$) —

$$\Pi - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \text{const}. \tag{63}$$

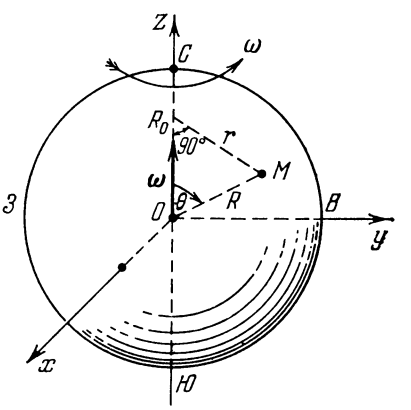


Рис. 25

Найдем *фигуру равновесия* вращающегося объема однородной жидкости, притягивающейся к неподвижному центру силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра.

Примем (рис. 25) ось z за ось вращения и начало координат O за центр притяжения. Потенциал сил тяготения, отнесенных к единице массы жидкости, будет равен $-C/R$, где C — некоторая константа, $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — расстояние частицы жидкости M от центра тяготения — начала координат O. Потенциал центробежных сил, отнесенных к единице массы жидкости (61), равен $\left(-\frac{1}{2}\omega^2 r^2\right)$, где ω — угловая скорость вращения жидкого объема, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние жидкой частицы от оси вращения Oz. Условие равновесия вращающейся жидкости, если отвлечься от сил взаимного тяготения между частицами, будет по (62)

$$p - \rho\frac{C}{R} - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \text{const}, \tag{64}$$

а уравнение свободной поверхности, ограничивающей вращающийся объем жидкости,

$$\frac{C}{R} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{const}. \tag{65}$$

Это уравнение описывает искомую форму поверхности фигуры равновесия вращающейся массы жидкости. Чтобы дать некоторое, хотя бы качественное представление о приложении только что полученной формулы к вопросу о форме Земли, представляющей в грубом приближении вращающуюся однородную жидкость, тяготеющую к центру, зададим

ускорение g_0 тяготения масс на полюсе, находящемся на расстоянии R_0 от центра Земли; тогда будем иметь

$$\frac{C}{R_0^2} = g_0, \quad C = g_0 R_0^2,$$

и уравнение поверхности фигуры равновесия примет вид

$$\frac{g_0 R_0^2}{R} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{const},$$

причем постоянная определяется из условия, что на полюсе $R = R_0$, $r = 0$, откуда следует $g_0 R_0 = \text{const}$. Окончательное уравнение свободной поверхности будет

$$\frac{g_0 R_0^2}{R} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = g_0 R_0,$$

или, вводя полярный угол θ и полагая $r = R \sin\theta$, получим

$$\frac{g_0 R_0^2}{R} + \frac{\omega^2 R^2 \sin^2\theta}{2} = g_0 R_0. \tag{66}$$

Если бы Земля не вращалась ($\omega = 0$), уравнение свободной поверхности свелось бы к равенству $R = R_0$, и фигурой равновесия служила бы *сфера*. За счет весьма медленного вращения, совершаемого Землей $\left(\omega \approx \frac{1}{13\,700}\ \text{с}^{-1}\right)$, фигурой равновесия служит тело вращения, представляющее несколько сплющенную у полюсов сферу — *сфероид*, уравнение поверхности которого может быть в силу малости безразмерной величины

$$\frac{\omega^2 R_0}{g_0} = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}\right)^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{9{,}83} \approx 0{,}0034 \approx \frac{1}{300}$$

приближенно представлено так:

$$R = R_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R_0}{g_0} \sin^2\theta\right).$$

Отсюда легко найти относительную сплюснутость Земли:

$$\varepsilon = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\min}} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R_0}{g_0} \approx \frac{1}{600}.$$

Геодезические измерения приводят к величине, *в два раза большей*. Такое расхождение теории с опытом объясняется грубостью принятого предположения об однородности Земли и неучетом взаимного притяжения частиц, изменяющего самый закон притяжения к центру. На самом деле закон притяжения зависит от формы жидкого тела, равновесие которого рассматривается, что делает строгое решение поставленной задачи весьма сложным.

§ 28. Баротропное равновесие газа

Равновесие газа называется *баротропным*, если плотность газа может быть рассматриваема как функция только давления ($\rho = \rho(p)$). В противном случае ($\rho = \rho(p, T)$) равновесие называют *бароклинным*.

Отметим основные частные случаи баротропного равновесия:

1) газ *несжимаем*, т. е. имеет повсюду одинаковую плотность ($\rho = \text{const} = \rho_0$); этот случай уже был разобран;

2) процесс *изотермичен*; при этом температура повсюду одна и та же ($T=\text{const}=T_0$) и из уравнения состояния Клапейрона следует

$$\rho=\frac{p}{RT_0}=\text{const}\cdot p=\frac{\rho_0}{p_0}p; \tag{67}$$

3) процесс *адиабатичен* (нет притока тепла извне); тогда имеет место адиабата

$$p=\text{const}\cdot\rho^k=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k, \tag{68}$$

где k — показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей газа при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_v; для воздуха $k\approx 1{,}4$. Значения величин p_0, ρ_0, T_0 относятся к какой-нибудь характерной точке покоящегося газа.

В случае равновесия газа в потенциальном силовом поле уравнение равновесия имеет вид (49).

Безотносительно к тому, будет ли равновесие или движение, лишь бы только процесс был баротропным, введем *функцию давления*

$$\mathcal{P}(p)=\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)}; \tag{69}$$

градиент ее равен

$$\operatorname{grad}\mathcal{P}=\frac{d\mathcal{P}}{dp}\operatorname{grad}p=\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p. \tag{70}$$

Величина $\left(-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\right)$ по соображениям, изложенным в § 21, 25, может рассматриваться как отнесенный к единице массы главный вектор сил давлений в данной точке, или вектор объемного действия этих сил. Таким образом, функция давления $\mathcal{P}$, удовлетворяющая равенству (70), представляет *потенциал объемного действия сил давления*.

Уравнение равновесия (49) может быть теперь переписано в форме $\operatorname{grad}(\Pi+\mathcal{P})=0$, откуда следует, что при баротропном равновесии среды во всех ее точках выполняется равенство

$$\Pi+\mathcal{P}=\text{const}. \tag{71}$$

Простые вычисления интегралов в (69) приводят к следующим значениям функции давления в отмеченных выше частных случаях баротропных процессов:

1) *несжимаемая* жидкость ($\rho=\text{const}$)

$$\mathcal{P}(p)=\frac{p-p_0}{\rho}; \tag{72}$$

2) *изотермический* процесс $\left(\rho=\frac{\rho_0}{p_0}p\right)$

$$\mathcal{P}(p)=\frac{p_0}{\rho_0}\ln\frac{p}{p_0}; \tag{73}$$

3) *адиабатический* процесс $\left[p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k\right]$

$$\mathcal{P}(p)=-\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]. \tag{74}$$

Удовольствуемся этими краткими представлениями из области статики жидкости и газа. Отошлем интересующихся к курсам гидравлики, где разделы гидростатики и аэростатики занимают заметную часть.

ГЛАВА V

ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ СРЕДЫ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ

§ 29. Уравнения Эйлера, Громека — Ламба и Гельмгольца — Фридмана. Теорема Гельмгольца

Простейшей моделью сплошной текучей среды является *идеальная* среда, обладающая *при движении* свойством *идеальной текучести*, которое присуще, как это было выяснено в § 25, большинству сплошных сред при их покое. Это свойство заключалось *в отсутствии касательных компонент тензора напряжений при нулевых касательных компонентах — скоростях сдвига — тензора скоростей деформаций.* Для идеальной среды постулируется отсутствие касательных напряжений безотносительно к тому, покоится или движется среда. Принятое допущение равносильно условию отсутствия в идеальной среде *внутреннего трения.*

В движущейся идеальной среде выполняется закон Паскаля (равенства (35)—(40), гл. IV)

$$p_{12}=p_{21}=p_{23}=p_{32}=p_{31}=p_{13}=0,$$
$$p_{11}=p_{22}=p_{33}=-p, \quad \boldsymbol{p}_n=-p\boldsymbol{n}, \tag{1}$$
$$P=-pE,$$

вывод которого ничем не отличается от ранее приведенного в § 25.

Скалярную величину p, в отличие от введенного в предыдущей главе *гидростатического* давления, будем называть *гидродинамическим давлением* или просто *давлением* в данной точке потока; знак минус, как и в случае равновесия, подчеркивает противоположность направления вектора нормального напряжения $\boldsymbol{p}_n$ направлению орта нормали $\boldsymbol{n}$ к лицевой стороне площадки.

Отвлекаясь в модели идеальной среды от количественного влияния внутреннего молекулярного обмена, проявляющегося в реальных жидкостях в виде трения и теплопроводности, сохраним качественное следствие этого обмена — *непрерывность* распределения скоростей и других физических величин. Это объясняет пригодность теории идеальной жидкости в установлении, например, общей картины плавного обтекания тел, распределения давлений по поверхности таких тел, образования подъемной силы и во многих других практически важных задачах.

От принципа непрерывности приходится отказываться лишь в отдельных случаях: на поверхности раздела двух идеальных сред, на твердой границе обтекаемых тел, а также на некоторых специальных поверхностях разрыва непрерывности.

В первых двух из указанных случаев допускается свободное скольжение жидкостей друг по отношению к другу и скольжение жидкости по поверхности твердого тела, причем ставится только условие отсутствия взаимного проникновения жидкостей или протекания жидкости сквозь поверхность твердого тела (условие *непроницаемости*).

Реальная среда не допускает наличия разрывов непрерывности ни внутри движущегося потока, ни на границах его с твердым телом. В действительности жидкость или газ не могут скользить вдоль поверхности твердого тела; скорости тех частиц, которые граничат с твердой стенкой, равны нулю, среда как бы *прилипает* к поверхности тела. Од-

нако эта скорость, как правило, резко возрастает при удалении от поверхности и на внешней границе весьма тонкого по сравнению с размерами тела *пограничного слоя* достигает значений, соответствующих схеме свободного скольжения идеальной среды. В этом *другая* причина возможности применения схемы идеальной среды для расчета обтекания тел плавной, вытянутой формы (крыло, фюзеляж, лопатка рабочего колеса турбомашины и др.). В случае плохо обтекаемого тела пограничный слой отрывается от поверхности тела и значительно искажает картину непрерывного обтекания тела идеальной средой.

Основные дифференциальные уравнения динамики идеальной среды непосредственно вытекают из общих уравнений движения, выведенных в гл. IV, путем упрощения их на основании (1) или очевидного в этом случае равенства

$$\operatorname{Div} P = -\operatorname{grad} p. \tag{2}$$

Уравнение неразрывности [(5), (7) гл. III], как не содержащее напряжений, сохранит тот же вид, что и в общем случае.

Уравнение динамики в напряжениях [(6), (8) предыдущей главы] значительно упростится и примет форму уравнения Эйлера

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{3}$$

или в проекциях на оси декартовых прямоугольных координат

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_1}{\partial x_3} = F_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1},\\
&\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_2}{\partial x_3} = F_2 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2},\\
&\frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_3}{\partial x_3} = F_3 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{4}$$

или

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Используя выражения проекций ускорения на оси цилиндрических и сферических координат [формулы (52), (53) гл. II], запишем уравнения Эйлера в этих двух системах:

цилиндрические координаты:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varepsilon} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_rV_\theta}{r} = F_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon},\\
&\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};
\end{aligned} \tag{4а}$$

сферические координаты:

$$\frac{\partial V_R}{\partial t} + V_R\frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_R}{\partial \theta} + \frac{V_\varepsilon}{R\sin\theta}\frac{\partial V_R}{\partial \varepsilon} - \frac{V_\theta^2 + V_\varepsilon^2}{R} = F_R - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial R},$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_R\frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\varepsilon}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varepsilon} + \frac{V_RV_\theta}{R} - \frac{V_\varepsilon^2}{R}\operatorname{ctg}\theta = F_\theta - \frac{1}{\rho R}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{4б}$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + V_R\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{V_\varepsilon}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{V_RV_\varepsilon}{R} + \frac{V_\theta V_\varepsilon}{R}\operatorname{ctg}\theta = F_\varepsilon - \frac{1}{\rho R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}.$$

Уравнение Эйлера (3) можно освободить от символической комбинации $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$ и вместе с тем выделить в левой части *градиентное слагаемое.*

Вспомним для этого установленное ранее выражение конвективной составляющей ускорения (50) гл. II. Подставляя его в левую часть уравнения (3), получим следующую модификацию уравнения Эйлера, предложенную Громека и Ламбом

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \operatorname{rot}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{5}$$

Для дальнейшего наибольший интерес представляет случай, когда объемные силы имеют потенциал П, т. е.

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad}\Pi, \tag{6}$$

и существует функция давления (движение баротропно)

$$\mathscr{P}(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}, \tag{7}$$

введенная ранее в § 28. При этом уравнение Громека — Ламба (5) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \mathscr{P} + \Pi\right) + \operatorname{rot}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V} = 0. \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$\frac{V^2}{2} + \mathscr{P} + \Pi = B, \tag{9}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}. \tag{10}$$

Тогда уравнение (8) может быть представлено в форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \operatorname{grad} B + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V} = 0, \tag{11}$$

или, в проекциях на декартовы оси,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_1} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 = 0,\\
&\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_2} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 = 0,\\
&\frac{\partial V_3}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_3} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Трехчлен Бернулли (9) можно трактовать как *полную механическую энергию* в данной точке, отнесенную к единице массы, т. е. по обычной терминологии как полную *удельную* механическую энергию. Действительно, первое слагаемое в левой части представляет удельную кинетическую энергию, третье слагаемое — удельную потенциальную энергию объемных сил.

Как уже разъяснялось в § 28, функция давления $\mathscr{P}$ имеет смысл потенциала (потенциальной энергии) объемного действия сил давления (точнее, массовой плотности действия этих сил). Следует избегать встречающегося иногда определения функции давления $\mathscr{P}$ (в случае $\rho=\text{const}$ равной p/ρ) как *потенциала давлений.* Давления образуют *скалярное поле*, для которого понятия потенциала или потенциальной энергии не существует.

Уравнение (11) или уравнения (12) связывают чисто кинематические величины $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{\Omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ с динамическими характеристиками П и $\mathscr{P}$.

Переписывая уравнение (11) в форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V} = -\operatorname{grad} B, \tag{13}$$

видим, что при баротропном движении идеальной сплошной среды под действием потенциального поля объемных сил левая, кинематическая часть этого равенства представляет собой *потенциальный* вектор. Следовательно, не всякое поле скоростей может быть создано в идеальной жидкости, баротропно движущейся под действием потенциального поля объемных сил, а только такое, которое удовлетворяет равенству

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V}\right) = 0,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V}) = 0. \tag{14}$$

Раскрывая дифференциальную операцию вихря от векторного произведения по правилу векторного анализа (см. пятое равенство системы (88) гл. I)

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V} \operatorname{div} \boldsymbol{\Omega}$$

и откидывая последний член в правой части этого равенства как тождественно равный нулю, перепишем предыдущее равенство в форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} - \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{V},$$

или, вспоминая определение индивидуальной производной,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} - \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{V}. \tag{15}$$

Первое слагаемое в правой части, равное, согласно (106) гл. I,

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}(\nabla \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{\Omega}\dot{S} - \boldsymbol{\Omega} \times \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\dot{S},$$

выражает эффект деформации вектора $\boldsymbol{\Omega}$ скоростным полем, второе ($-\boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{V}$) определяет влияние сжимаемости.

Уравнение (15) называют уравнением *динамической возможности движения* идеальной сжимаемой среды или уравнением Гельмгольца — Фридмана. Оно было получено А. А. Фридманом [1]) путем обобщения уравнения Гельмгольца

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}, \tag{16}$$

относящегося к случаю *несжимаемой* жидкости ($\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0$).

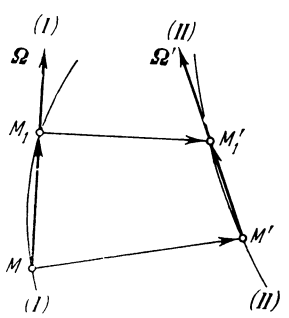


Рис. 26

Введем понятие *сохраняемости вихревых линий*. Пусть в некоторый момент времени в жидкости существует вихревая линия (I, I) (рис. 26), являющаяся векторной линией вектора $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{V}$; рассмотрим жидкую линию (II, II), образованную в момент $t + dt$ теми же жидкими частицами, что и линия (I, I) в момент t. Если жидкая линия (II, II), представляющая новое положение линии (I, I) к моменту времени $t + dt$,

[1]) Фридман А. А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости.— М.: ОНТИ, 1934 (гл. I, в частности, с. 34); см. также Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. I — М. Гостехиздат, 1948, с. 150—160.

является также вихревой, то будем говорить, что вихревая линия (I, I) при движении среды *сохраняется*, в противном случае — разрушается.

Докажем следующую теорему Гельмгольца: *в движущейся под действием консервативного поля объемных сил идеальной несжимаемой жидкости вихревые линии сохраняются.*

Сравним между собой бесконечно малый жидкий вектор $\overline{MM_1}$ и его смежное положение $\overline{M'M_1'}$ (при бесконечно малых перемещениях жидкости прямолинейные отрезки остаются с точностью до малых высших порядков прямолинейными). Имеем из векторного многоугольника $MM_1M_1'M'$

$$\overline{M'M_1'} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_1'} - \overline{MM'},$$

или, замечая, что по условию (λ — произвольный бесконечно малый скаляр)

$$\overline{MM_1} = \lambda\Omega,\ \overline{MM'} = \boldsymbol{V}\,dt,\ \overline{M_1M_1'} = [\boldsymbol{V} + (\lambda\Omega\cdot\nabla)\boldsymbol{V}]\,dt,$$

получим

$$\overline{M'M_1'} = \lambda\Omega + \boldsymbol{V}dt + \lambda(\Omega\cdot\nabla)\boldsymbol{V}dt - \boldsymbol{V}dt = \lambda[\Omega + (\Omega\cdot\nabla)\boldsymbol{V}dt]. \qquad (17)$$

Последнее равенство, с учетом уравнения (16), приводит к соотношению

$$\overline{M'M_1'} = \lambda\left(\Omega + \frac{d\Omega}{dt}\,dt\right) = \lambda\Omega', \qquad (18)$$

доказывающему теорему Гельмгольца, так как элемент жидкой линии (II, II) оказывается направленным по вектору Ω', в который перейдет за время dt вектор Ω.

Приведенное доказательство справедливо только для идеальной несжимаемой жидкости. Как показал А. А. Фридман[1]), теорема верна и в случае *любого баротропного движения идеального газа.*

§ 30. Теорема Бернулли

Предположим, что идеальная жидкость под действием потенциального поля объемных сил с потенциалом Π совершает *стационарное* баротропное движение с функцией давления $\mathcal{P}$. Тогда первый член в уравнении (11) равен нулю, и, умножая обе части (11) скалярно на вектор скорости $\boldsymbol{V}$, получим, в силу перпендикулярности последнего слагаемого вектору $\boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad} B \equiv V\left(\frac{\boldsymbol{V}}{V}\cdot\operatorname{grad} B\right) = 0,$$

или, вспоминая определение производной по направлению,

$$\frac{\boldsymbol{V}}{V}\cdot\operatorname{grad} B = \frac{dB}{ds};$$

отсюда заключаем, что

$$\frac{dB}{ds} = 0, \qquad (19)$$

где символ d/ds означает производную, взятую вдоль траектории или линии тока, что при стационарном движении одно и то же. Из равенства (19) сразу следует, что вдоль траектории или линии тока трехчлен

---

[1]) См. предыдущую сноску.

Бернулли B сохраняет одно и то же значение

$$B = \frac{V^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = \text{const} \quad \text{(вдоль линии тока)}. \tag{20}$$

Полученное равенство можно рассматривать как первый интеграл уравнения Эйлера, справедливый в случае *стационарного* движения при наличии *функции давления*, представляющей *потенциал объемного действия поверхностных сил*, и *потенциала объемных сил*. Этот интеграл, выведенный путем скалярного умножения обеих частей уравнения (11) на вектор скорости $\boldsymbol{V}$, может трактоваться как *интеграл механической энергии* уравнения движения центра инерции элементарного объема жидкости (*интеграл Бернулли*).

Равенство (20) выражает следующую теорему Бернулли: *при стационарном баротропном движении идеальной жидкости под действием потенциальных объемных сил сумма кинетической энергии единицы массы, функции давления и приведенного к единице массы потенциала объемных сил сохраняет вдоль линии тока (траектории) постоянное значение.*

Интеграл Бернулли мог быть выведен и непосредственно из уравнения Эйлера (3) без преобразования его к форме Громека — Ламба (8). Действительно, переписывая в условиях теоремы уравнение (3) в виде

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = -\operatorname{grad}(\Pi + \mathcal{P})$$

и умножая скалярно на вектор $\boldsymbol{V}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad}(\Pi + \mathcal{P});$$

но, по определению индивидуальной производной по времени от скалярной функции, в случае стационарного движения будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right),$$

так что

$$\boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi\right) = 0,$$

что, по предыдущему, и приводит к равенству (20).

Из уравнения (11) в случае стационарного движения сразу следует постоянство величины B также и вдоль любой *вихревой* линии. В самом деле, откидывая в случае стационарного движения первый член, умножая обе части (11) скалярно на $\boldsymbol{\Omega}$ и рассуждая так же, как и при выводе равенства (19), получим

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} B \equiv \Omega\left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \cdot \operatorname{grad} B\right) = \Omega \frac{dB}{dl} = 0,$$

где d/dl определяет дифференцирование вдоль дуги вихревой линии. Отсюда сразу следует, что и вдоль вихревой линии величина B имеет одно и то же значение

$$B = \frac{V^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = \text{const}' \quad \text{(вдоль вихревой линии)}. \tag{21}$$

При *стационарном* движении вектор $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V}$ образует [см. (11)] потенциальное векторное поле с потенциалом B. При этом через каждую точку пространства можно провести поверхность, ортогональную к векторной линии поля вектора $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V}$, проходящей через эту точку. Эти ортогональные поверхности будут *поверхностями уровня трехчлена Бернулли* и вместе с тем *полной удельной механической энергии*. Касательные плос-

кости к этим поверхностям содержат векторы Ω и V. Поверхности уровня можно получить, взяв (рис. 27) какую-нибудь линию тока и проведя через все ее точки вихревые линии; эти вихревые линии образуют *вихревую поверхность* — поверхность уровня, проходящую через данную линию тока. Можно поступить и иначе: взяв некоторую вихревую линию, через все ее точки провести линии тока; тогда эти линии тока образуют *поверхность тока*, проведенную через данную вихревую линию.

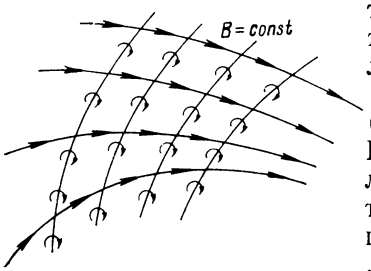


Рис. 27

Значения констант в равенствах (20), (21) определяются значением трехчлена Бернулли в какой-нибудь одной почему-либо характерной или заданной наперед точке линии тока или вихревой линии. В общем случае константы эти различны для линий тока или вихревых линий, не лежащих на одной и той же поверхности уровня полной механической энергии.

Если во всех точках пространства выполняется векторное равенство

$$\Omega \times V = 0, \tag{22}$$

то поверхностей уровня нет, но в этом случае по (11) в стационарном потоке

$$\operatorname{grad} B = 0, \tag{23}$$

т. е. трехчлен Бернулли *сохраняет одно и то же значение во всем пространстве*, занятом потоком жидкости или газа.

Равенство (22) выполняется в следующих двух случаях:

1) $\Omega = 0$ — движение *безвихревое*; подробному рассмотрению этого важнейшего случая будут посвящены специальные главы курса;

2) $\Omega \parallel V$ — вихревые линии совпадают с линиями тока; при таком движении частицы в своем мгновенном вращении поворачиваются вокруг касательных к линиям тока. Такое движение называется *винтовым*. С винтовым движением приходится иметь дело, например, при рассмотрении так называемых «свободных» вихрей, сходящих с поверхности крыла конечного размаха.

Рассмотрим частные случаи теоремы Бернулли, относящиеся к отдельным простейшим *баротропным* процессам.

В случае движения *несжимаемой* жидкости ($\rho = \text{const}$) имеем

$$\mathcal{P} = \frac{p - p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \text{const}.$$

Ограничиваясь среди объемных сил только силами тяжести и направляя вертикальную ось z вверх, получим

$$\Pi = gz + \text{const}.$$

Тогда формулы (20) и (21) примут вид (символ const обозначает сохранение величины B как вдоль линии тока, так и вдоль вихревой линии)

$$B = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}, \tag{24}$$

или, если перейти от плотности ρ к удельному весу $\gamma = \rho g$,

$$\frac{B}{g} = H = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}. \tag{25}$$

Отдельные члены равенства (25) имеют размерность длины и называются соответственно: $V^2/(2g)$ — *скоростной*, p/γ — *пьезометрической* и

z — *нивелирной высотами.* Сумма этих высот H называется *гидравлической высотой.*

Формула (25) приводит к классической формулировке теоремы Бернулли: *при стационарном движении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости гидравлическая высота, равная сумме скоростной, пьезометрической и нивелирной высот, сохраняет постоянное значение вдоль линии тока (траектории) или вихревой линии.*

Эта форма теоремы Бернулли имеет основное значение в *гидравлике* и называется *уравнением Бернулли.*

Предположим в дальнейшем, что объемными силами по сравнению с поверхностными (давлением) можно пренебречь; тогда уравнение Бернулли (24) примет более простой вид

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = \text{const} = p_0. \tag{26}$$

Первый член левой части этого равенства называют *пьезометрическим напором*, второй — *скоростным* или *динамическим напором*, сумму их — *полным напором* p_0. Теорему Бернулли формулируют так: *при стационарном движении идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие объемных сил полный напор, равный сумме пьезометрического и скоростного напора, сохраняет свою величину вдоль линии тока (траектории) или вихревой линии.*

Припоминая выражения функций давления $\mathscr{P}$ (73) и (74), помещенные в § 28 гл. IV, получим следующие формы теоремы Бернулли:

а) для *изотермического* движения ($T=\text{const}$, $p/\rho=p_0/\rho_0$, $p/p_0=\rho/\rho_0$)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0}\ln\frac{p}{p_0} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0}\ln\frac{\rho}{\rho_0} = \text{const} = \frac{V_0^2}{2}; \tag{27}$$

б) для *адиабатического* движения [$p/p_0=(\rho/\rho_0)^k$, $\rho/\rho_0=(p/p_0)^{1/k}$]

$$\frac{V^2}{2} - \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = \text{const} = \frac{V_0^2}{2}; \tag{28}$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1}\right] = \text{const} = \frac{V_0^2}{2}. \tag{29}$$

Здесь индекс нуль, относящийся к произвольно выбранной на линии тока (траектории) или вихревой линии точке в дальнейшем будет применен для параметров *покоящегося газа.* Если на данной линии тока (траектории) или вихревой линии нет точки, где $V=0$, то всегда можно себе мысленно представить некоторое *непрерывное адиабатическое* движение идеального газа (далее будет показано, что оно также и *изэнтропическое*), переводящее его из данного положения в «котел» (ресивер) бесконечно большого объема, в котором газ становится неподвижным, или, как принято говорить, *адиабатически и изэнтропически заторможенным.* Параметры газа в этом его состоянии называют адиабатически и изэнтропически *заторможенными*, или *параметрами торможения*, и соответственно обозначают p_0, ρ_0, T_0. Уравнения Бернулли (28) и (29) примут при этом один из следующих видов (первое равенство носит имена Сен-Венана и Вантцеля):

$$V^2 = \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right], \quad V^2 = \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1}\right]. \tag{30}$$

В приложениях, в частности, при расчетах турбомашин, приходится иметь дело с относительным движением жидкости в некоторой равно-

мерно вращающейся вокруг неподвижной оси системе координат. Так, при обтекании вращающегося с постоянной угловой скоростью рабочего колеса абсолютный поток, т. е. поток по отношению к фундаменту турбины, будет, очевидно, *нестационарным*, и теорему Бернулли к нему применять нельзя. В *относительной* системе координат, связанной с вращающимся колесом, поток *стационарен*, и теорема Бернулли в относительном движении справедлива.

Обозначая через V_r относительную скорость и присоединяя к приложенным объемным силам центробежную силу инерции с плотностью распределения $F^{(ц)}=\omega^2 r$ и потенциалом $\Pi^{(ц)}=-{}^1/_2 r^2\omega^2$, где r — расстояние от оси вращения, и кориолисову силу с плотностью распределения $F^{(с)}=-2\omega\times V_r$ (исчезающую при скалярном умножении на V_r), получим

$$\frac{V_r^2}{2}+\mathcal{P}+\Pi-\frac{r^2\omega^2}{2}=\text{const} \tag{31}$$

(const только *вдоль относительных линий тока* или траекторий).

Замечая, что $r\omega=V_e$ представляет собой *переносную* (окружную) скорость, будем иметь окончательную форму теоремы Бернулли в *относительном движении*

$$\frac{V_r^2-V_e^2}{2}+\mathcal{P}+\Pi=\text{const}. \tag{32}$$

Теорема Бернулли обычно широко иллюстрируется примерами в курсах гидравлики и прикладной гидромеханики. Для ознакомления с совместным применением теорем количеств движения и кинетической энергии в форме теоремы Бернулли полезно рассмотреть вывод теоремы Борда об ударе при внезапном расширении потока[1]). Теорема Бернулли широко используется в следующих главах настоящего курса. Интересной иллюстрацией применения теоремы Бернулли к движению идеальной несжимаемой жидкости может служить общепринятый в аэродинамических лабораториях метод измерения скоростей при помощи так называемой скоростной трубки, или трубки Прандтля.

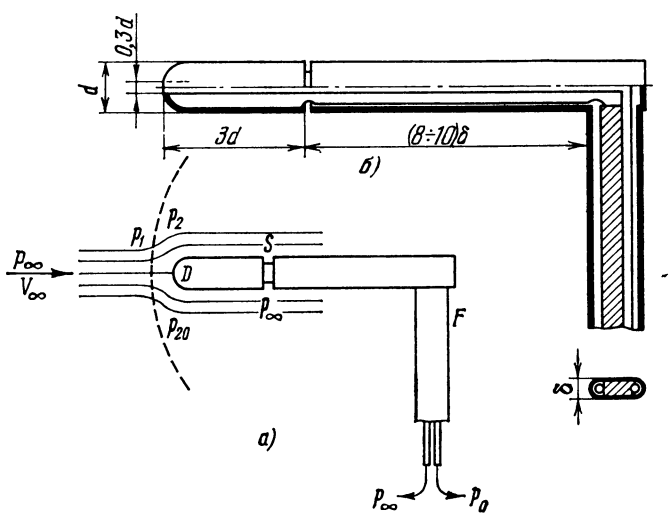


Рис. 28

Рассмотрим схематический чертеж трубки Прандтля (рис. 28), применяемой для измерения скоростей газа (воздуха) в условиях, допуска-

[1]) См. ранее цитированный «Курс теоретической механики». Т. II, с. 249—251. Там же описаны некоторые приложения теоремы Бернулли.

ющих пренебрежение эффектом сжимаемости; аналогичного рода трубки применяют и для измерения скоростей в потоках жидкости. Поток набегает вдоль оси трубки на ее носик, где имеется так называемое *динамическое* отверстие D (рис. 28, *а*), и омывает боковую поверхность трубки с расположенным на ней *статическим* отверстием (щелью) S. При достаточном удалении ножки трубки F и носика D от статического отверстия (обычно принятые размеры показаны на рис. 28, *б*) можно считать, что вблизи отверстия D давление равно (рис. 28, *а*) давлению заторможенного газа p_0, а вблизи статической щели — давлению p проходящего мимо трубки газа. Вероятно, поэтому давление p необоснованно называют *статическим*, хотя подобный термин в гидродинамике отсутствует.

При изложении теории вязкого движения жидкости в пограничном слое на поверхности обтекаемого тела (гл. XII) будет показано, что давление в любой точке сечения пограничного слоя, в том числе и на поверхности, совпадает с давлением среды на внешней границе пограничного слоя, т. е. в потоке, проносящемся мимо статического отверстия трубки. Таким образом, если трубка вблизи щели S имеет цилиндрическую форму, а сама щель S располагается заподлицо к стенкам трубки так, что жидкость проходит мимо щели, не подвергаясь подпору со стороны выступающих стенок этой щели, то давление в щели будет равно давлению в невозмущенной трубкой жидкости вдали от трубки.

Обозначим через p_∞ и V_∞ давление и скорость набегающего однородного потока и будем иметь в виду, что возмущающее влияние носика на поле параметров потока идеальной среды заканчивается до статического отверстия. Таким образом, V_∞ является измеряемой трубкой величиной.

По теореме Бернулли, выражаемой в случае несжимаемой жидкости равенством (26), будет

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = \text{const} = p_0,$$

где p_0 — полный напор (полное давление), замеряемое отверстием D трубки, p_∞ — давление в отверстии S.

Отсюда следует формула для выражения искомой скорости

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_\infty)}{\rho}}.$$

Если теперь рассмотреть трубку Прандтля в *неоднородном* потоке, однако считать, что размер носика гораздо меньше характерного размера неоднородности, то можно повторить прежние рассуждения и прийти к подобной формуле

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}, \tag{33}$$

где p и V имеют смысл *местных* параметров невозмущенного трубкой потока.

Измеряя разность давлений p_0—p при помощи дифференциального манометра и зная плотность движущейся среды, найдем ее скорость в данном месте потока.

На самом деле, в результате неточностей изготовления трубки измеренные величины разности давлений могут несколько отличаться от действительных; для учета необходимых поправок в формулу (33) вводят близкий к единице коэффициент, который определяют калибровкой трубки, сравнивая в потоке данную трубку с некоторой *образцовой*.

Теоремы Гельмгольца и Бернулли — два существенных результата, *выводимых из уравнения* Эйлера, т. е. из закона количеств движения идеальной сплошной среды. Закон моментов количеств движения при отсутствии в идеальной среде касательных напряжений выполняется автоматически в силу условия $P=-pE$. Следуя принятой последовательности изложения, обратимся к рассмотрению дальнейших по порядку законов механики и термодинамики сплошных сред.

§ 31. Мощность внутренних сил. Уравнение баланса энергии

Уравнение баланса кинетической энергии (16) гл. IV в случае идеальной среды несколько упростится, поскольку напряжения сведутся к давлению. Однако и в этом виде уравнение не имеет самостоятельного значения, так как его с успехом заменяет интеграл Бернулли, выражающий *закон сохранения полной механической энергии.*

Обратимся к рассмотрению выражения *мощности внутренних сил в движущейся идеальной среде.* В случае идеального газа эта мощность соответствует работе сил давления, затрачиваемой на сжатие газа. Замечая, что в рассматриваемом случае (суммирование по повторяющимся индексам)

$$P=-pE;\quad P\cdot\dot{S}=-pE_{ij}\dot{S}_{ij}=-p\dot{S}_{ii}=-p\operatorname{div}V,$$

получим, согласно (19) гл. IV, следующее выражение искомой мощности:

$$N_{\text{in}}=-P\cdot\dot{S}=p\operatorname{div}V. \tag{34}$$

Заметим, что по уравнению неразрывности (5) гл. III будет

$$\operatorname{div}V=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\rho\frac{dv}{dt},$$

где v — *удельный объем*, равный $1/\rho$, так что равенство (34) эквивалентно следующему:

$$N_{\text{in}}=\rho p\frac{dv}{dt}. \tag{35}$$

Если обе части этого равенства разделить на ρ и умножить на dt, то получится известное из термодинамики выражение $p\,dv$ *удельной элементарной работы внутренних сил давления* в идеальном газе.

Внутреннее трение (вязкость) в газе и теплопроводность представляют собой две стороны одного и того же процесса молекулярного переноса. Трение обусловлено переносом количества движения, теплопроводность — переносом кинетической энергии молекул. Приняв в настоящей главе схему идеального, т. е. лишенного внутреннего трения, газа, естественно отвлечься и от теплопроводности. Пренебрегая также лучеиспусканием, примем, что движущийся газ изолирован от притока тепла извне. Такое движение называется *адиабатическим*[1]). Кроме того, заметим, что удельная *внутренняя энергия* термодинамически совершенного газа пропорциональна его абсолютной температуре и равна $U=c_vT$, где c_v — коэффициент *теплоемкости* газа при постоянном *объеме.*

Перейдем к рассмотрению уравнения баланса полной энергии (21) гл. IV в предположениях: *адиабатичности* движения ($q=0$), *идеальности*

---

[1]) В § 28 уже употреблялось понятие *адиабатического* состояния для обозначения такого состояния газа, когда $p/\rho^k=\text{const}$. Как будет показано далее, для рассматриваемого случая *идеального совершенного* газа эти два определения эквивалентны друг другу.

($P=-pE$) и *совершенности* газа ($p/\rho=RT$, $U=c_vT$). Будем иметь

$$\rho\frac{d}{dt}\left(U+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\frac{d}{dt}\left(c_vT+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}-\operatorname{div}(p\boldsymbol{V}). \tag{36}$$

Введем наряду с внутренней энергией еще одну *тепловую функцию — удельную энтальпию*

$$h=c_pT. \tag{37}$$

Напомним вывод основной термодинамической формулы

$$c_p-c_v=R, \tag{38}$$

связывающей коэффициенты *теплоемкости* газа при *постоянном давлении* c_p и при *постоянном объеме* c_v с газовой постоянной R. Определяя коэффициенты теплоемкости как величины, характеризующие быстроту изменения количества тепла с ростом температуры, соответственно в условиях сохранения давления или объема:

$$c_p=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p,\quad c_v=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v,$$

из первого начала термодинамики, написанного в форме ($v=1/\rho$)

$$dQ=c_vdT+p\,dv,$$

получим

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p=c_v+p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p, \tag{39}$$

а по формуле Клапейрона

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p=\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{p}\right)\right]_p=\frac{R}{p}.$$

Равенство (39) при этом приводится к (38).

Из формулы (38) найдем связь между внутренней энергией и энтальпией

$$U=c_vT=c_pT-RT=h-\frac{p}{\rho}. \tag{40}$$

Подставляя это выражение внутренней энергии в уравнение баланса (36), получим

$$\rho\frac{d}{dt}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}-\operatorname{div}(p\boldsymbol{V})+\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right). \tag{41}$$

Последнее слагаемое в правой части, если вычислить индивидуальную производную и воспользоваться уравнением неразрывности в форме (5) гл. III, преобразуется так:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)=\frac{dp}{dt}-\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{dp}{dt}+\frac{p}{\rho}\rho\operatorname{div}\boldsymbol{V}=\frac{dp}{dt}+p\operatorname{div}\boldsymbol{V}.$$

Подставляя это выражение в (41) и производя простые преобразования, получим уравнение баланса энергии в одном из следующих видов $\left(\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad}p\right)$:

$$\begin{gathered}\rho\frac{d}{dt}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad}p+\frac{dp}{dt},\\ \rho\frac{d}{dt}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\frac{\partial p}{\partial t}.\end{gathered} \tag{42}$$

Исключим из уравнения баланса энергии объемные силы и вектор скорости V. С этой целью умножим обе части уравнения Эйлера (3) скалярно на V и полученное таким образом равенство

$$\rho V \cdot \frac{dV}{dt} \equiv \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \rho F \cdot V - V \cdot \operatorname{grad} p$$

вычтем почленно из обеих частей первого из уравнений (42). Тогда найдем следующую дифференциальную связь между плотностью, давлением и энтальпией (т. е. температурой):

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt}. \tag{43}$$

Покажем, что из этого соотношения следует *баротропность адиабатического движения идеального совершенного газа*, и найдем соответствующую связь между плотностью и давлением. Из равенства (43) и закона Клапейрона вытекает, что при дифференцировании вдоль траектории

$$\frac{dp}{\rho} = dh = c_p dT = \frac{c_p}{R} d(RT) = \frac{c_p}{R} d\left(\frac{p}{\rho}\right). \tag{44}$$

Но по (38)

$$\frac{c_p}{R}\left(1 - \frac{c_v}{c_p}\right) = 1$$

или, после введения отношения $c_p/c_v = k$,

$$\frac{c_p}{R} = \frac{k}{k-1}. \tag{45}$$

Равенство (44) может быть теперь переписано в виде

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} d\left(\frac{p}{\rho}\right) \equiv \frac{k}{k-1}\frac{dp}{\rho} - \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

или

$$\frac{dp}{p} = k\frac{d\rho}{\rho}.$$

Интегрирование дает известную *адиабату Пуассона*

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k}, \tag{46}$$

причем индекс нуль соответствует состоянию газа в какой-нибудь фиксированной точке на траектории частицы. Итак, движение действительно баротропно; соотношение между плотностью и давлением определяется адиабатой (46).

Из (43), в силу только что доказанной баротропности движения, вытекает, что

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = \frac{d\mathcal{P}}{dt},$$

т. е. *вдоль траектории движения значения энтальпии и функции давлений различаются лишь на постоянную*

$$h = \mathcal{P} + \text{const}. \tag{47}$$

Выражение функции давлений $\mathcal{P}(p)$ для адиабатического движения было уже выведено в § 28. Подставляя значение $\mathcal{P}$ из равенства (74) этого параграфа в (47), получим адиабатическое соотношение между

абсолютной температурой T и давлением p

$$c_pT=\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]+\text{const}=\frac{k}{k-1}RT_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]+c_pT_0,$$

или по (46)

$$\frac{T}{T_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}},\quad \frac{p}{p_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{48}$$

Заменяя здесь p на ρ по (46), получим *адиабатические соотношения между температурой и плотностью*

$$\frac{}{T_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1},\quad \frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{49}$$

Простая связь между термодинамическими элементами газа p, ρ, T и величиной скорости его движения V может быть выведена из уравнения баланса энергии при условии *стационарности* движения и *консервативности* объемных сил. В этом случае будет

$$\frac{d}{dt}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)=\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad}\left(h+\frac{V^2}{2}\right),\quad \frac{\partial p}{\partial t}=0,\quad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}=-\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad}\Pi;$$

и второе из равенств (42) приводится к виду

$$\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad}\left(h+\frac{V^2}{2}+\Pi\right)=0.$$

Замечая, что скалярное произведение вектора скорости на градиент скалярной функции пропорционально производной от этой функции по направлению траектории или линии тока, получим равенство

$$V^2/2+h+\Pi=\text{const}\quad\text{(вдоль траектории или линии тока)}. \tag{50}$$

Комбинируя равенство (50) с (47), вновь получим уравнение Бернулли (20), ранее выведенное из допущения о баротропности движения. Только что приведенный вывод отличается тем, что в нем баротропность процесса заранее не предполагалась, а вытекала из условия адиабатичности движения газа.

В дальнейшем при изучении движений газа будем пренебрегать влиянием объемных сил (в частности, весом). Это влияние существенно сказывается лишь при движениях газа в пределах больших разниц высот над поверхностью Земли, например в *динамической метеорологии*. При отсутствии объемных сил ($\Pi=0$) равенство (50) приводится к более простому

$$h+\frac{V^2}{2}\equiv c_pT+\frac{V^2}{2}=\text{const}, \tag{51}$$

утверждающему, что при адиабатическом движении идеального газа его абсолютная температура и скорость движения находятся вдоль траектории в определенном соотношении: *с возрастанием скорости газ охлаждается, с убыванием скорости, наоборот, разогревается.*

Определим постоянную в равенстве (51) через параметры адиабатически заторможенного газа ($V=0$, $h=h_0$, $T=T_0$); тогда будем иметь основную для дальнейшего формулу

$$h+\frac{V^2}{2}=h_0. \tag{52}$$

Стоящая слева сумма удельной энтальпии и удельной кинетической энергии, сохраняющаяся при адиабатическом движении частиц газа вдоль их траекторий (линий тока), носит наименование *полной энтальпии*, или *энтальпии торможения*.

Не будем сейчас выписывать соотношения между скоростью и давлением или скоростью и плотностью, так как далее, в § 33, те же формулы получат более симметричную и удобную для запоминания форму.

Введем наряду с функциями состояния — энтальпией h и функцией давления $\mathscr{P}$ — еще одну функцию состояния, а именно удельную *энтропию* s, определяемую дифференциальным соотношением

$$ds = dQ/T, \tag{53}$$

где dQ — элементарный приток тепла, отнесенный к единице массы газа и удовлетворяющий, согласно первому началу термодинамики, соотношению

$$dQ = c_v\,dT + p\,dv = c_v\,dT - \frac{p}{\rho^2}\,d\rho.$$

Подставляя это выражение в (53), получим

$$ds = c_v\frac{dT}{T} - \frac{p}{\rho T}\frac{d\rho}{\rho} = c_v\frac{d\,(p/\rho)}{p/\rho} - R\frac{d\rho}{\rho} = R\left[\frac{c_v}{R}\,d\ln\left(\frac{p}{\rho}\right) - d\ln\rho\right],$$

или, замечая еще, что по (45)

$$\frac{c_v}{R} = \frac{1}{k-1},$$

найдем

$$ds = \frac{R}{k-1}\,d\ln\left(\frac{p}{\rho^k}\right).$$

Отсюда интегрированием получим следующее выражение удельной энтропии в конечной форме:

$$s = \frac{R}{k-1}\ln\left(\frac{p}{\rho^k}\right) + \text{const}. \tag{54}$$

Значение константы несущественно, так как приходится иметь дело лишь с приращениями энтропии, а не с абсолютными ее значениями.

Если вдоль траектории движения выполняется равенство $ds=0$, т. е. энтропия сохраняет свою величину, то такое движение называется *изэнтропическим*.

Из уравнения (54) вытекает, что адиабатическое движение идеального газа, подчиняющееся соотношению (46), является *изэнтропическим*. Соотношение (46) можно было бы назвать *изэнтропической адиабатой* или, короче, *изэнтропой*. Ранее выведенные формулы (51), (52) также носят наименование *изэнтропических*.

Согласно второму началу термодинамики в замкнутой (адиабатической) материальной системе энтропия является *неубывающей* функцией времени. Возрастание энтропии в адиабатической системе показывает, что внутри этой системы происходят *необратимые процессы преобразования механической энергии в тепло*, сопровождаемые потерями механической энергии. Примером образования таких механических потерь могут служить потери на внутреннее трение в неидеальных жидкостях и газах. В следующей главе мы встретимся с явлением потери механической энергии газа при прохождении его сквозь *скачок уплотнения* — поверхность разрыва непрерывности кинематических и термодинамических величин. В этом случае движение, будучи адиабатическим, окажется неизэнтропическим.

§ 32. Скорость распространения малых возмущений в идеальном газе. Скорость звука

Для выяснения особенностей движения газа очень важно сравнить скорость его движения с характерной для данного газа и зависящей от его термодинамического состояния величиной — *скоростью распространения малых возмущений* (например, малых сжатий) по газу или, что все равно, *скоростью распространения звука.*

С этой целью рассмотрим для простоты баротропный поток идеального совершенного газа, все линии тока которого параллельны оси x, а составляющая скорости u, так же как давление p, плотность ρ и температура T, являются функциями только x и t; при этом будем пренебрегать действием объемных сил.

Уравнения Эйлера (4) и уравнение неразрывности (7) гл. III сводятся в этом случае к нелинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных (используем буквенное обозначение проекции скорости $u=V_1$)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0 \tag{55}$$

с тремя неизвестными функциями u, p, ρ. Чтобы сделать систему определенной, необходимо в случае *баротропного* движения добавить еще уравнение связи между ρ и p или, в более общем случае, уравнение Клапейрона и уравнение баланса энергии. Интегралы таким образом составленной системы уравнений должны, конечно, еще удовлетворять заданным начальным и граничным условиям.

Обратимся к решению простейшей задачи о *распространении в газе малых возмущений*, которая может быть сформулирована так: в покоящемся идеальном и совершенном газе создаются весьма малые возмущения скоростей, давлений или плотности, причем возникающее вследствие этого движение является *одномерным* параллельным оси x баротропным движением, зависящим лишь от координаты x и времени t; требуется разыскать *элементы возмущенного движения.* Обозначим через u, p и ρ скорость, давление и плотность возмущенного движения, через p_0 и ρ_0 — давление и плотность в покоящемся газе, причем отвлечемся от действия объемных сил; тогда, вводя обозначения u', p', ρ' для малых возмущений скорости, давления и плотности, будем иметь

$$u=u',\quad p=p_0+p',\quad \rho=\rho_0+\rho'.$$

Подставим эти значения возмущенных элементов в систему уравнений (55) и откинем в них произведения малых величин и их производных по координатам как малые высших порядков. Тогда, замечая, что с точностью до малых величин первого порядка малости при баротропном движении будет

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0\frac{\partial \rho'}{\partial x},$$

получим вместо *нелинейной* системы (55) следующую *линейную* систему двух уравнений с двумя неизвестными u' и ρ':

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0\frac{\partial \rho'}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial u'}{\partial x}=0. \tag{56}$$

Система (56) может быть названа *линеаризованной* по сравнению с нелинейной системой (55), так как она получена из нее путем линеаризации, заключающейся в откидывании малых второго и высших порядков.

Замечая, что величина $dp/d\rho$ существенно положительна, так как плотность совершенного газа растет с давлением, введем обозначение

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 = a_0^2 \tag{57}$$

и перепишем систему (56) в форме

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = -a_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t}. \tag{58}$$

Система уравнений (58) может быть сведена к одному уравнению. Дифференцируя обе части первого уравнения системы (58) по времени t, а второго — по x, умножая обе части второго уравнения на a_0^2 и вычитая его почленно из первого, получим линейное уравнение *гиперболического* типа

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0. \tag{59}$$

Аналогичное уравнение найдем для определения ρ':

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0,$$

а замечая, что

$$p' = p - p_0 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 (\rho - \rho_0) = a_0^2 \rho',$$

и для p':

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0.$$

Общее решение любого из этих уравнений можно представить в виде суммы, в частности,

$$u' = f_1(x + a_0 t) + f_2(x - a_0 t); \tag{60}$$

вид функций f_1 и f_2 зависит от начальных условий задачи.

Введем новые координаты ξ_1 и ξ_2, связанные со старыми при помощи равенств

$$\xi_1 = x + a_0 t, \quad \xi_2 = x - a_0 t. \tag{61}$$

Такое преобразование координат имеет простой кинематический смысл. Ось координат $O_1\xi_1$ расположена вдоль оси Ox и движется поступательно в сторону отрицательного направления оси Ox со скоростью a_0, точно так же ось $O_2\xi_2$ движется поступательно в сторону положительного направления оси Ox с той же скоростью a_0.

Решение (60) принимает при этом вид

$$u' = f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2). \tag{62}$$

Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности, т. е. следующие два частных решения уравнения (59):

$$u' = f_1(\xi_1) = f_1(x + a_0 t), \quad u' = f_2(\xi_2) = f_2(x - a_0 t). \tag{63}$$

Функция $f_1(\xi_1)$ представляет в подвижной системе $O_1\xi_1$ *не зависящее от времени распределение возмущений скорости.* Эта фиксированная форма одномерного возмущения, заданная начальным его распределением, *перемещается*, согласно первому из равенств (63), *как одно целое* вдоль отрицательного направления неподвижной оси Ox со скоро-

стью a_0. Аналогично этому функция $f_2(\xi_2)$, характеризующая распределение возмущений в подвижной системе $O_2\xi_2$, представляет вторую фиксированную форму возмущения, отличную, вообще говоря, по своему виду от первой и распространяющуюся также как одно целое в положительную сторону неподвижной оси Ox с той же скоростью a_0.

Полагая в этих решениях $\xi_1=\text{const}$ или $\xi_2=\text{const}$, получим две системы *плоских волн*:

$$x+a_0t=\text{const}, \quad x-a_0t=\text{const}, \tag{64}$$

представляющих две движущиеся в противоположные стороны со скоростью a_0 перпендикулярные оси Ox плоскости, каждая из которых несет *постоянные, заданные начальными условиями значения возмущений* скорости, давления, плотности или температуры; такие волны называют *простыми*.

Общее решение уравнения (59), а следовательно, и аналогичных уравнений для возмущений давления и плотности складывается, таким образом, из решений, соответствующих *двум распространяющимся в противоположные стороны простым волнам*; само уравнение (59), так же как и однотипные уравнения для плотности и давления, являются *одномерными волновыми уравнениями*. С геометрической стороны полученное решение можно интерпретировать как наличие в плоскости (x, t) двух семейств прямых (64) с угловыми коэффициентами $\pm a_0$, обладающих тем свойством, что вдоль каждой из этих прямых сохраняются постоянные значения заданных начальными условиями возмущений скорости или других параметров газа. Эти два семейства прямых представляют в рассматриваемом случае *два семейства характеристик волнового уравнения* (59).

Физически две такие простые волны можно создать перемещениями с малой амплитудой поршня около некоторого первоначального положения.

Общая для обеих волн скорость a_0 называется *скоростью распространения малых возмущений* в газе и определяется, согласно (57), формулой

$$a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{65}$$

В последней формуле подстрочный индекс нуль, характеризующий рассматриваемое невозмущенное состояние газа, опущен, так как формула (65) верна и в случае как угодно движущегося газа, если только под величиной a понимать *местную* скорость распространения малых возмущений относительно движущегося газа в данной точке потока. К числу наиболее широко наблюдаемых явлений распространения малых возмущений в жидкостях и газах относится *распространение звука*, заключающееся, как известно, в распространении волн слабого сжатия и разрежения. В связи с этим величину a называют *скоростью звука*.

Скорость звука, согласно формуле (65), зависит от *характера баротропности процесса распространения малых возмущений*.

Если предположить, что жидкость несжимаема ($\rho=\text{const}$), то по (65) $a=\infty$. Это означает, что в модели *несжимаемой* жидкости *возмущения распространяются с бесконечной скоростью*, т. е. всякое изменение давления в данном месте потока должно *мгновенно* сказаться в любом другом месте. В ряде случаев такое предположение может с достаточным для практики приближением приниматься для расчетов, в других, как далее будет показано, от него приходится отказываться и пользоваться схемой *сжимаемой* среды, имеющей *конечную* скорость распространения звука.

Принимая процесс распространения звука *изотермическим* и вспоминая, что при изотермическом процессе (C — постоянная)

$$p = C\rho, \quad \frac{dp}{d\rho} = C = \frac{p}{\rho},$$

получим *изотермическую* скорость звука

$$a_{из} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}.$$

Если предположить, что процесс распространения звука происходит настолько быстро, что можно пренебречь влиянием сравнительно медленного процесса отвода тепла и считать процесс распространения звука *адиабатическим*, то будем иметь

$$p = C\rho^k, \quad \frac{dp}{d\rho} = kC\rho^{k-1} = k\frac{p}{\rho};$$

адиабатическая скорость звука будет равна

$$a = \sqrt{k\frac{p}{\rho}}. \tag{66}$$

Формула изотермического распространения звука была предложена Ньютоном, а формула (66) — Лапласом; эксперименты подтвердили правильность формулы Лапласа (66). Под скоростью звука в дальнейшем будет всегда подразумеваться адиабатическая скорость звука (66).

Применяя формулу Клапейрона, перепишем равенство (66) в виде

$$a = \sqrt{kRT}. \tag{67}$$

Отсюда следует, что *скорость распространения звука в совершенном газе зависит лишь от абсолютной температуры и физических свойств газа.* Замечая, что газовая постоянная R может быть выражена через молекулярный вес газа μ и ускорение силы тяжести g по формуле

$$R = \frac{848g}{\mu}\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}},$$

получим

$$a = \sqrt{\frac{848\,kg}{\mu}}\sqrt{T}\ \text{м/с}.$$

Для воздуха $k = 1{,}4$, $\mu = 29$; принимая $g = 9{,}81$ м/с^2, получим, что скорость распространения звука в воздухе равна

$$a = 20{,}1\sqrt{T}\ \text{м/с};$$

в частности, при $T = 273$ К (0 °С) скорость звука достигает величины 332 м/с. Скорость звука в воздушной атмосфере меняется с высотой над уровнем моря. Применяя стандартную атмосферу, получим табл. 1 *стандартных скоростей звука* в зависимости от высоты над уровнем моря.

Таблица 1

H, км	T, К	a, м/с	H, км	T, К	a, м/с	H, км	T, К	a, м/с
—1,0	294,5	345	3,0	268,5	329	7,0	242,5	313
0,0	288,0	341	4,0	262,0	326	8,0	236,0	309
1,0	281,5	337	5,0	255,5	322	9,0	229,5	306
2,0	275,0	333	6,0	249,0	317	10,0	223,0	300

В кинетической теории газов показано, что скорость звука имеет тот же порядок, что и средняя квадратичная скорость свободного пробега молекул газа $v_s=\sqrt{\overline{v^2}}$, которая также пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры и определяется формулой

$$v_s=\sqrt{3RT}.$$

Сравнивая с (67), получим

$$a=\sqrt{\frac{k}{3}}\,v_s,$$

где, напоминаем, $k=c_p/c_v$.

Для воздуха ($k=1{,}4$) скорость звука составляет примерно 70% от средней квадратичной скорости свободного пробега молекул.

Скорость звука существенно зависит от молекулярного веса; так, скорость звука в *аргоне* при нормальных условиях меньше, чем в воздухе, она равна 308 м/с, еще меньше эта скорость в двуокиси углерода — 258 м/с, в газообразном фреоне-12 скорость звука при 15 °С снижается до 120 м/с.

Гораздо сложнее описание явления распространения малых возмущений в неоднородных средах, таких как, например, газожидкостные смеси[1]). Остановимся на распространении звуковых волн в воде, насыщенной пузырьками воздуха. Процесс образования такой смеси носит наименование *барботажа*. Введем обозначения α и $(1-\alpha)$ соответственно для *объемных* концентраций газа и жидкости; плотности газожидкостной смеси, газа и жидкости по отдельности обозначим через ρ, $\rho_г$ и $\rho_ж$, а соответствующие им скорости звука — через a, $a_г$ и $a_ж$. Тогда для плотности смеси получим

$$\rho=\alpha\rho_г+(1-\alpha)\rho_ж. \tag{68}$$

Считая, что соотношение *масс* газа и жидкости в элементарном объеме смеси сохраняется, будем иметь

$$\rho_г=\text{const}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho_ж. \tag{69}$$

Примем для простоты, что пузырьки газа полностью увлекаются жидкостью и что при этом давление в пузырьке $p_г$ совпадает с давлением жидкости, а следовательно, и смеси в соответствующей точке. Кроме того, будем считать, что температура в газовом пузырьке постоянна, а следовательно, давление p пропорционально плотности $\rho_г$; тогда по (69) будет

$$p=\text{const}\cdot\rho_г=\text{const}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho_ж. \tag{70}$$

Предполагая, что распространение малых возмущений в газожидкостной смеси происходит *баротропно*, возьмем от обеих частей (68) производную по p и в полученном результате

$$\frac{d\rho}{dp}=\alpha\frac{d\rho_г}{dp}+(1-\alpha)\frac{d\rho_ж}{dp}+(\rho_г-\rho_ж)\frac{d\alpha}{dp}$$

произведем замену

$$\frac{d\rho}{dp}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{d\rho_г}{dp}=\frac{1}{a_г^2},\quad \frac{d\rho_ж}{dp}=\frac{1}{a_ж^2};$$

[1]) См. обзор van Wijngaarden L. Onedimensional flow of liquids containing small gas bubbles.— Annual Review of Fluid Mechanics, 1972, v. 4, p. 370.

вместе с тем заметим, что из (70) следует

$$\frac{d\alpha}{dp} = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{p} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{\rho_ж a_ж^2}.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha}{a_г^2} + \frac{1-\alpha}{a_ж^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_г}{p} + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_г}{\rho_ж a_ж^2} + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_ж}{p} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{a_ж^2}.$$

В третьем слагаемом справа используем изотермичность сжатия газового пузырька и заменим p на $\rho_г a_г^2$. Тогда предыдущее равенство можно переписать в форме

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha}{a_г^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{a_г^2}\left(1 - \frac{\rho_г a_г^2}{\rho_ж a_ж^2}\right) + \frac{1-\alpha}{a_ж^2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{a_ж^2} + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_ж}{p},$$

или, замечая, что $\rho_г \ll \rho_ж$, $a_г \ll a_ж$ и $\rho_г a_г^2 \ll \rho_ж a_ж^2$, окончательно получим *формулу Вуда*[1])

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha^2}{a_г^2} + \frac{(1-\alpha)^2}{a_ж^2} + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_ж}{p}.$$

Первые два слагаемых в правой части сравнительно малы и могут быть опущены; на практике можно пользоваться следующей приближенной формулой для скорости распространения малых возмущений (скорости звука) в газожидкостной смеси

$$a^2 = \frac{p}{\alpha(1-\alpha)\rho_ж}.$$

Минимум скорости звука соответствует объемной концентрации газа $\alpha = 1/2$. Для воды с пузырьками воздуха при обычных условиях давления ($p = 10$ кПа) этот минимум равен 20 м/с, т. е. в 17 раз меньше скорости звука в воздухе (340 м/с) и в 75 раз меньше скорости звука в воде (1500 м/с). Существенное отличие ($a = 50$ м/с) сохраняется и при 4% объемной концентрации воздуха. В цитированном обзоре Вийнгардена можно найти обобщения вышеуказанных формул скорости звука в газожидкостных средах, учитывающие разность скоростей жидкости и пузырьков газа, влияние неизотермичности процесса сжатия пузырька, наличия вязкости жидкости, частоты звуковых колебаний и других физических деталей процесса[2]).

§ 33. Числа M и λ. Изэнтропические формулы

Скорость распространения малых возмущений или скорость звука является важной характеристикой потока сжимаемой среды. В зависимости от того, будут ли скорости движения частиц меньше или больше скорости звука, принципиально различными будут и происходящие в среде явления. Это может быть продемонстрировано на следующем простом и наглядном примере. Предположим, что из баллона большой емкости через сужающийся патрубок происходит истечение газа в некоторую камеру. Пусть вначале разность давлений между баллоном и камерой была невелика и скорость истечения сквозь патрубок не превосхо-

[1]) Wood A. B. A textbook of sound — London: Bell & Sons Ltd, 1941.

[2]) Детальную модель этих процессов можно найти в статье Когарко Б. С. Движение смеси жидкости с газовыми пузырьками.— Сб. трудов Междунар. симпозиума по неустановившимся течениям воды с большими скоростями (Ленинград, 22—26 июня 1971). М.: Наука, 1973, с. 243—246 и в других статьях того же автора.

дила скорости звука. Будем теперь медленно понижать давление в камере; тогда скорость истечения начнет повышаться. Создаваемые в камере возмущения (уменьшения) давления будут распространяться против течения из камеры через патрубок в баллон до тех пор, пока скорость в выходном сечении патрубка не достигнет скорости звука. После этого возмущения давления *не смогут уже проникнуть в баллон*, так как они будут *сноситься потоком*, имеющим ту же скорость, что и скорость распространения возмущений в газе. Продолжающееся понижение давления в камере не отразится на явлении истечения, скорость которого будет оставаться постоянной и равной скорости звука в выходном сечении патрубка. Это явление носит наименование *запирания потока*. В дальнейшем мы встретимся и с другими, столь же своеобразными явлениями в потоках сжимаемой среды — газа.

Если где-нибудь в потоке газа скорость V станет равна местной скорости звука a, то такая скорость газа $V=a^*$ называется *критической*; критическими будут называться и соответствующие значения p^*, ρ^*, T^* давления, плотности и температуры.

Если скорость истечения в рассматриваемом только что случае достигнет в выходном сечении патрубка своего критического значения, то в этом, также называемом *критическим*, сечении патрубка давление, плотность и температура газа примут соответствующие критические значения.

В адиабатическом движении газа критические значения параметров состояния одинаковы для всех частиц газа и зависят только от полной его энтальпии (§ 31) и могут быть определены, например, по «заторможенным» значениям параметров в баллоне, где газ предполагается неподвижным. Наличие критических явлений представляет характерную особенность газовых течений.

Приведенный пример показывает, что характер развивающихся в потоке явлений тесно связан с величиной отношения скорости в данной точке потока к скорости звука или критической скорости потока.

Отношение скорости V движения газа в данной точке потока к соответствующей этой точке местной скорости звука

$$\mathbf{M}=\frac{V}{a},$$

характеризующее, будет ли поток в данной точке *дозвуковым* ($\mathbf{M}<1$), *звуковым* ($\mathbf{M}=1$) или *сверхзвуковым* ($\mathbf{M}>1$), представляет основной параметр движения газа и называется *числом* $\mathbf{M}$ (*числом Маха*). Отношение скорости потока в данной точке к одинаковой для всего потока в целом критической скорости $V/a^*=\lambda$ будем называть *скоростным коэффициентом*. В зарубежной литературе его обозначают символом $\mathbf{M}^*$.

В конце предыдущего параграфа уже указывалось, что скорость звука пропорциональна средней квадратичной скорости свободного пробега молекул. Это позволяет рассматривать квадрат числа $\mathbf{M}$ как величину, характеризующую *отношение кинетических энергий направленного* (внешнего, изучаемого в механике жидкости и газа) и *хаотического*, молекулярного (внутреннего) *движений газа*. Действительно, это отношение энергий равно

$$\frac{V^2}{v_s^2}=\frac{V^2}{(3/k)\,a^2}=\frac{k}{3}\mathbf{M}^2.$$

При *дозвуковом* движении ($\mathbf{M}<1$) кинетическая энергия направленного движения *меньше* кинетической энергии хаотического. Это сохраняется и при *сверхзвуковом* движении до $\mathbf{M}=\sqrt{3/k}$ (для воздуха 1,46): *при бо́льших значениях числа* $\mathbf{M}$ *кинетическая энергия направленного движе-*

ния превосходит по величине кинетическую энергию молекулярного движения. С точки зрения динамики газа, рассматриваемого как сплошная среда, характерным, критическим для процессов движения газа является не значение числа M, при котором выравниваются энергии направленного и хаотического движений, а значение $M=1$, соответствующее равенству скорости частиц газа скорости распространения малых возмущений в той же точке газа. Из дальнейшего станет ясно, что и сами уравнения движения газа имеют принципиально друг от друга отличный характер: эллиптический — в дозвуковом ($M<1$) и гиперболический в сверхзвуковом потоках ($M>1$). Это математическое различие отражает физические особенности двух основных режимов течения газа.

Пользуясь числами M и λ, можно составить простые, удобные для запоминания формулы связи между скоростью, давлением, плотностью и температурой в изэнтропическом адиабатическом движении.

Заменив в равенстве (51) энтальпию h ее выражением через температуру, будем иметь

$$\frac{V^2}{2}+c_pT=c_pT_0,$$

где, как всегда, индекс нуль обозначает, что величина взята при $V=0$, т. е. в адиабатически и изэнтропически заторможенном газе. Деля обе части последнего равенства на c_pT, получим

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{V^2}{2c_pT}.$$

Замечая, что

$$\frac{V^2}{2c_pT}=\frac{V^2}{2\frac{c_p}{kR}\cdot kRT}=\frac{k-1}{2}\frac{V^2}{a^2}=\frac{k-1}{2}M^2,$$

перепишем предыдущую формулу в виде

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{k-1}{2}M^2,\quad \frac{T}{T_0}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1}. \tag{71}$$

Вспоминая, что скорость звука пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры, получим

$$\frac{a_0}{a}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{1/2},\quad \frac{a}{a_0}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1/2}. \tag{72}$$

Пользуясь формулами (48) и (49), легко по (71) получить изэнтропические формулы: для отношения плотностей

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}},\quad \frac{\rho}{\rho_0}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{k-1}}, \tag{73}$$

отношения давлении

$$\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}},\quad \frac{p}{p_0}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-\frac{k}{k-1}} \tag{74}$$

и отношения скорости потока к скорости звука в покоящемся газе

$$\frac{V}{a_0}=M\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1/2}. \tag{75}$$

Изэнтропические формулы (71)—(75) осуществляют *параметрическую связь* между температурой, плотностью, давлением и скоростью при помощи *параметра* M.

Аналогичные по типу параметрические формулы можно установить, имея в качестве параметра *скоростной коэффициент* λ. С этой целью заметим, что энтальпия связана со скоростью звука соотношением

$$h = c_p T = \frac{c_p k R T}{k R} = \frac{a^2}{k-1}, \tag{76}$$

и перепишем (51) в виде

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \text{const},$$

где константу можно определить как из условия $a=a_0$ при $V=0$, так и из условия $a=a^*$ при $V=a^*$. Будем иметь одно из следующих двух равенств:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}, \quad \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2}. \tag{77}$$

Деля обе части последнего равенства на V^2, получим связь между числом Маха M и скоростным коэффициентом λ

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{1}{M^2}, \tag{78}$$

легко разрешимую относительно λ или M. Таким образом, получим

$$\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{2}} \frac{M}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M^2}} \tag{79}$$

и обратное соотношение

$$M = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}. \tag{80}$$

Если $M=0$, то и $\lambda=0$; если же $M\to\infty$, то $\lambda\to\lambda_{max}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ ($\lambda_{max}=2{,}449$ для воздуха при $k=1{,}4$).

Заметим, что входящий в изэнтропические формулы двучлен $1+\frac{k-1}{2}M^2$ может быть выражен через λ по формуле

$$1 + \frac{k-1}{2} M^2 = \frac{1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}, \tag{81}$$

так что формулы (71)—(75) преобразуются к виду

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2, \quad \frac{a}{a_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{1/2},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{82}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{V}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}\lambda.$$

Эти формулы, так же как и формулы (71)—(75), полезно запомнить, потому что они постоянно встречаются при расчетах газовых потоков.

Покажем, что в изэнтропических формулах (73) и (74) содержатся как частный случай при $M=0$ формулы *несжимаемой* жидкости

$$\rho=\rho_0,\quad p+\frac{\rho V^2}{2}=p_0. \tag{83}$$

Подчеркнем, что условие $M=0$ следует в этом случае, конечно, понимать как наличие бесконечного значения скорости звука a, вытекающее из формулы $a=\sqrt{dp/d\rho}$ при $\rho=\text{const}$, т. е. результат обращения в бесконечность знаменателя a в выражении M, а не числителя V в нуль, что означало бы отсутствие течения. Разложим правые части (73) и (74) в степенные ряды при малых M; тогда будем иметь

$$\frac{p_0-p}{{}^1/_2\rho V^2}=\frac{p}{{}^1/_2\rho V^2}\left[\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}-1\right]=$$

$$=\frac{2}{k}\frac{kp/\rho}{V^2}\left\{\left[1+\frac{k}{2}M^2+\frac{\frac{k}{k-1}\left(\frac{k}{k-1}-1\right)}{2}\frac{(k-1)^2}{4}M^4+\ldots\right]-1\right\}=$$

$$=\frac{2}{kM^2}\left(\frac{k}{2}M^2+\frac{k}{8}M^4+\ldots\right)=1+\frac{1}{4}M^2+\ldots, \tag{84}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=1-\frac{1}{2}M^2+\ldots \tag{85}$$

Полагая $M=0$, найдем формулы (83) *несжимаемой* жидкости. Кроме того, учитывая в полученных разложениях еще вторые члены, определим *порядок погрешности*, которую делают, рассматривая при малых M *движущийся газ как несжимаемую жидкость*. Полагая $\rho=\text{const}=\rho_0$, пренебрегают по сравнению с единицей членами, старший из которых равен ${}^1/_2M^2$. Если, например, допустить относительную погрешность за счет неучета сжимаемости газа, равную 1%, то это равносильно требованию

$${}^1/_2M^2\leqslant 0{,}01,\quad M\leqslant 0{,}14,$$

что для воздуха при нормальных условиях [$T=(273+15)$ К, $a=340$ м/с] приводит к ограничению скорости $V<50$ м/с. При скорости, близкой к 100 м/с, относительная ошибка доходит до 4%. Как видно из формулы (84), при этом относительная ошибка для давлений в два раза меньше, чем для плотностей.

Пользуясь изэнтропическими формулами, найдем выражение критических параметров газа T^*, a^*, p^*, ρ^* через параметры T_0, a_0, p_0, ρ_0 заторможенного газа. Для этого достаточно вспомнить, что при критическом течении скорость V равна местной скорости звука a, т. е. в этом случае $M=1$. Тогда по (71)—(75) будем иметь

$$\frac{T^*}{T_0}=\frac{2}{k+1},\quad \frac{a^*}{a_0}=\sqrt{\frac{2}{k+1}},\quad \frac{p^*}{p_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}},\quad \frac{\rho^*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{86}$$

Составив изэнтропические соотношения для каких-нибудь двух точек с числами M_1 и M_2 или λ_1 и λ_2 одного и того же потока или двух потоков, но с одинаковыми параметрами заторможенного потока и поделив соответствующие соотношения друг на друга, получим

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}=\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2},$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\,\mathsf{M}_2^2}{1+\frac{k-1}{2}\,\mathsf{M}_1^2}\right)^{1/2}=\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\,\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\,\lambda_2^2}\right)^{1/2},$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\,\mathsf{M}_2^2}{1+\frac{k-1}{2}\,\mathsf{M}_1^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}=\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\,\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\,\lambda_2^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \qquad (87)$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\,\mathsf{M}_2^2}{1+\frac{k-1}{2}\,\mathsf{M}_1^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\,\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\,\lambda_2^2}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\mathsf{M}_1}{\mathsf{M}_2}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\,\mathsf{M}_2^2}{1+\frac{k-1}{2}\,\mathsf{M}_1^2}\right)^{1/2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

ГЛАВА VI

ОДНОМЕРНЫЙ ПОТОК ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

§ 34. Одномерное стационарное движение газа по трубе переменного сечения

Если все динамические и термодинамические величины газового потока являются функциями только одной, в общем случае криволинейной, координаты и времени, то такой поток называется *одномерным.*

Для приближенных расчетов газовых потоков по трубам во многих случаях можно довольствоваться следующей упрощенной *одномерной стационарной* схемой. Принимая вектор скорости в данном сечении трубы или канала направленным вдоль оси, а величины скорости V, давления p, плотности ρ и температуры T постоянными по сечению, будем рассматривать их как величины, изменяющиеся от сечения к сечению канала, причем закон изменения площади сечения A вдоль оси будем считать заданным.

Отвлекаясь от влияния кривизны оси канала, примем за основной аргумент прямолинейную декартову координату x, отсчитываемую вдоль оси канала вниз по потоку от некоторого начального сечения.

Поток будем считать адиабатическим, а газ совершенным и идеальным. При этих условиях, как уже было ранее (§ 31) доказано, движение газа можно считать *изэнтропическим.*

Пользуясь уравнением Эйлера

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \tag{1}$$

и уравнением неразрывности

$$\rho u A = \text{const}, \tag{2}$$

легко установить дифференциальное соотношение между изменениями скорости и площади сечения трубы. С этой целью преобразуем (1) к виду

$$u du = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -a^2\frac{d\rho}{\rho}$$

и возьмем от обеих частей (2) логарифмический дифференциал; тогда получим

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{du}{u} - \frac{dA}{A}.$$

Исключая при помощи этого равенства плотность в предыдущем уравнении, найдем

$$(u^2 - a^2)\frac{du}{u} = a^2\frac{dA}{A},$$

или, деля обе части на a^2,

$$(M^2 - 1)\frac{du}{u} = \frac{dA}{A}. \tag{3}$$

Из полученного уравнения, носящего имя Гюгонио[1]), вытекают следствия:

[1]) Hugoniot H. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences.— Paris, 1880, v. 103, p. 1178.

1. Если $M<1$, знак du противоположен знаку dA, т. е. при *дозвуковом* движении газа, так же как и в случае несжимаемой жидкости, *с возрастанием площади сечения трубы скорость движения уменьшается* и, наоборот, *при уменьшении сечения скорость увеличивается.*

2. Если $M>1$, знак du одинаков со знаком dA, т. е. *при сверхзвуковом движении газа в сужающейся трубе движение замедляется, в расширяющейся трубе — ускоряется.* Этот парадоксальный на первый взгляд результат объясняется тем, что при расширении газа плотность его настолько сильно уменьшается, что произведение ρA в равенстве (2), несмотря на увеличение площади A, все же уменьшается, что и приводит к возрастанию скорости u.

3. Если $M=1$, то $dA=0$; соответствующее сечение трубы будет *критическим.* Условие $dA=0$ совпадает с *необходимым* условием экстремума площади сечения. Легко сообразить, что критическое сечение будет минимальным, так как при подходе к максимальному сечению дозвуковой поток замедляется, а сверхзвуковой ускоряется, что никак не может привести к течению со скоростью звука в критическом сечении.

4. Если $dA=0$ и сечение экстремально (максимально или минимально), то либо $M=1$ и, следовательно, это сечение критическое, либо $M\neq 1$ и $du=0$. В последнем случае, каково бы ни было движение — дозвуковое или сверхзвуковое, скорость в экстремальном сечении принимает также экстремальное значение: при дозвуковом течении газа — минимальное в максимальном сечении и максимальное в минимальном сечении, при сверхзвуковом течении, наоборот, в максимальном сечении скорость максимальна, в минимальном минимальна.

Пользуясь уравнением (2) и выведенными в конце гл. V изэнтропическими формулами, найдем связь между параметрами одномерного потока и площадью сечения, заданной в функции от координаты x. Действительно, согласно (2) настоящей главы и (87) гл. V, имеем (индекс «1» отмечает какое-нибудь фиксированное сечение трубы)

$$\frac{A}{A_1}=\frac{\rho_1 u_1}{\rho u}=$$

$$=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\frac{M_1}{M}\frac{a_1}{a}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\frac{M_1}{M}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

или окончательно

$$\frac{A}{A_1}=\frac{M_1}{M}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}. \tag{4}$$

Это соотношение в совокупности с изэнтропическими формулами

$$\frac{p}{p_1}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{k}{k-1}},\quad \frac{\rho}{\rho_1}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2},\quad \frac{u}{u_1}=\frac{M}{M_1}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

дает *параметрическое* решение задачи об одномерном газовом потоке в трубе переменного сечения, причем роль параметра играет число M. Задаваясь функцией $A(x)$, определим по (4) $M(x)$, а затем уже по (5) и искомые $p(x)$, $\rho(x)$, $T(x)$ и $u(x)$.

Формула (4) упрощается, если принять $M_1=1$; тогда сечение с площадью A_1 будет критическим ($A_1=A^*$), а (4) преобразуется к виду

$$\frac{A}{A^*}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\frac{1}{M}\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}=\Theta^{-1}. \tag{6}$$

На рис. 29 приведен график этой зависимости для воздуха ($k=1{,}4$).

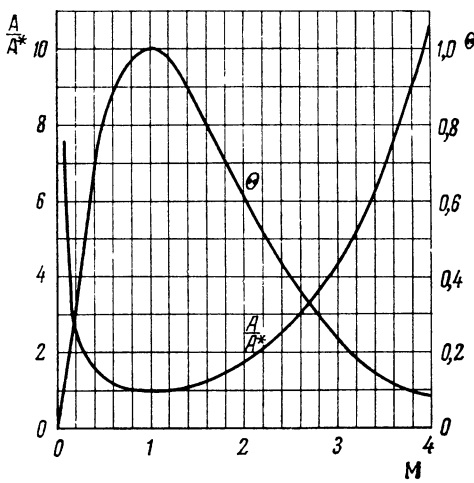


Рис 29

График подтверждает ранее отмеченный факт: в дозвуковом потоке ($M<1$) для увеличения числа M сечение A следует уменьшать, в сверхзвуковом потоке ($M>1$), наоборот, увеличивать. Так, например, из рис. 29 следует, что для повышения числа M от 0,2 до 0,8 газ должен пройти через участок суживающейся трубы — конфузора — с сечением, уменьшающимся в три раза; чтобы увеличить число M от значения 1 в критическом сечении до 3,2 необходимо построить расширяющуюся трубу—сверхзвуковой диффузор—с площадью на выходе, в пять раз превышающей площадь критического сечения.

Присоединяя к равенству (6) очевидную группу формул

$$\frac{p}{p^*}=\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{-\frac{k}{k-1}},\quad \frac{\rho}{\rho^*}=\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{-\frac{1}{k-1}},$$

$$\frac{T}{T^*}=\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{-1},\quad \frac{u}{a^*}=M\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

найдем параметрическое решение, заключающее критические значения A^*, p^*, ρ^*, T^*, а не A_1, p_1, ρ_1, T_1, относящиеся к произвольному сечению.

Пользуясь равенствами (80) и (81) гл. V, нетрудно написать соответствующие формулы, выраженные через параметр λ:

$$\frac{A}{A^*}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left[\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}\right]^{-1},$$

$$\frac{p}{p^*}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$\frac{\rho}{\rho^*}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{8}$$

$$\frac{T}{T^*}=\frac{k+1}{2}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right),\quad \frac{u}{a^*}=\lambda.$$

Таблица 2

M	λ	$\sqrt{\tau}$	p/p^*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	Θ
0	0	0	1,894	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,2	0,218	0,089	1,842	0,9725	0,9803	0,9921	0,3374
0,4	0,431	0,176	1,696	0,8956	0,9243	0,9690	0,6288
0,6	0,635	0,259	1,485	0,7840	0,8405	0,9328	0,8416
0,8	0,825	0,337	1,345	0,6560	0,7400	0,8865	0,9632
1,0	1,000	0,408	1,000	0,5283	0,6339	0,8333	1,0000
1,2	1,159	0,474	0,781	0,4124	0,5311	0,7764	0,9705
1,4	1,300	0,531	0,595	0,3142	0,4374	0,7184	0,8969
1,6	1,426	0,582	0,446	0,2353	0,3557	0,6614	0,7999
1,8	1,536	0,627	0,329	0,1740	0,2868	0,6068	0,6949
2,0	1,633	0,667	0,242	0,1278	0,2301	0,5556	0,5926
2,2	1,718	0,701	0,177	0,0935	0,1841	0,5081	0,4988
2,4	1,793	0,732	0,129	0,0684	0,1472	0,4647	0,4161
2,6	1,858	0,758	0,095	0,0501	0,1179	0,4252	0,3453
2,8	1,914	0,781	0,070	0,0368	0,0946	0,3894	0,2857
3,0	1,964	0,802	0,0515	0,0272	0,0762	0,3571	0,2362
3,2	2,008	0,820	0,0383	0,0202	0,0616	0,3281	0,1953
3,4	2,047	0,835	0,0296	0,0151	0,0500	0,3019	0,1617
3,6	2,081	0,849	0,0216	0,0114	0,0409	0,2784	0,1342
3,8	2,112	0,862	0,0163	0,0086	0,0335	0,2572	0,1113
4,0	2,138	0,873	0,0125	0,0066	0,0276	0,2381	0,0933
∞	2,437	1,000	0	0	0	0	0

Из уравнения неразрывности (2), переписанного в форме

$$\rho u A = \rho^* u^* A^* = \rho^* a^* A^*, \tag{9}$$

вытекает соотношение

$$\frac{A^*}{A} = \frac{\rho u}{\rho^* a^*} = \Theta, \tag{10}$$

где величина Θ, согласно (6) и первому из равенств (8), при заданном k является функцией только M или λ:

$$\Theta = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \mathrm{M}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{11}$$

На рис. 29 приведен график Θ(M) для воздуха ($k=1{,}4$). Для любого сечения A трубы с заданным критическим (минимальным) сечением A^* находим по (10) величину Θ; по (11) — M или λ; по (7) или (8) определим p, ρ, T и непосредственно скорость u. При проведении расчетов удобно пользоваться имеющимися таблицами для воздуха (табл. 2) [1]; смысл величины $\sqrt{\tau}$, приведенной в третьем столбце таблицы, поясняется в следующем параграфе.

§ 35. Истечение газа сквозь сопло

В качестве первого примера приложения выведенных формул рассмотрим задачу об изэнтропическом истечении газа из резервуара (котла) очень большой вместимости.

Предположим сначала, что сопло, из которого происходит истечение, имеет вид конфузора, т. е. канала с уменьшающейся вниз по пото-

[1]) Подробные таблицы можно найти, например, в книгах: Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений· Пер. с англ — М · Гостехиздат, 1953; Абрамович Г Н. Прикладная газовая динамика.— М.. Наука, 1976.

ку площадью сечения. Обозначим через p_0, ρ_0, T_0 термодинамические параметры газа в котле, где газ, в силу большой вместимости котла, может рассматриваться как покоящийся ($u=0$, $M=0$), через $\bar{p}$, $\bar{\rho}$, $\bar{T}$, $\bar{M}$ — соответствующие параметры в выходном сечении, площадь которого пусть будет $\bar{A}$, и через p' — давление в камере, куда происходит истечение; это давление p' в теории истечения называют *противодавлением*.

Обозначим через m массу газа, протекающую за одну секунду через любое сечение сопла:

$$m=\rho uA=\bar{\rho}\bar{u}\bar{A},$$

а через m^* — критическое значение этой массы, соответствующее числу $\bar{M}$ в выходном сечении, равному единице; имеем $m^*=\rho^* a^* \bar{A}$, и, следовательно, по (10) безразмерный секундный массовый расход будет равен

$$\frac{m}{m^*}=\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho^* a^*}=\Theta(\bar{M}). \tag{12}$$

Исключая из (12) $\bar{M}$ при помощи изэнтропического соотношения

$$\frac{\bar{p}}{p_0}=\left(1+\frac{k-1}{2}\bar{M}^2\right)^{-\frac{k}{k-1}}, \tag{13}$$

получим выражение безразмерного расхода через отношение давления на выходе к давлению в котле

$$\frac{m}{m^*}=\sqrt{\frac{2}{k-1}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\left(\frac{\bar{p}}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}}\left[1-\left(\frac{\bar{p}}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}. \tag{14}$$

На рис. 30 представлен график зависимости безразмерного секундного массового расхода m/m^* в функции от отношения противодавления p' в камере к давлению в котле p_0. До тех пор пока давление на выходе из сопла $\bar{p}$ не станет равным критическому p^*, противодавление p' будет совпадать с $\bar{p}$, и кривая определится соотношением (14) (правая сплошная ветвь кривой). При дальнейшем уменьшении противодавления, т. е. при $p'<p^*$, наступит описанное в начале § 33 явление *запирания* выходного сечения. Возмущения давления не смогут проникнуть сквозь выходное сечение, и истечение будет происходить с постоянной критической скоростью, несмотря на то, что противодавление продолжает уменьшаться. Часть графика на рис. 30, соответствующая интервалу $p'/p_0<p^*/p_0$ (для воздуха $p^*/p_0=0{,}528$), представится сплошной горизонтальной прямой, а не пунктирной спадающей кривой, как это следовало бы по формуле (14).

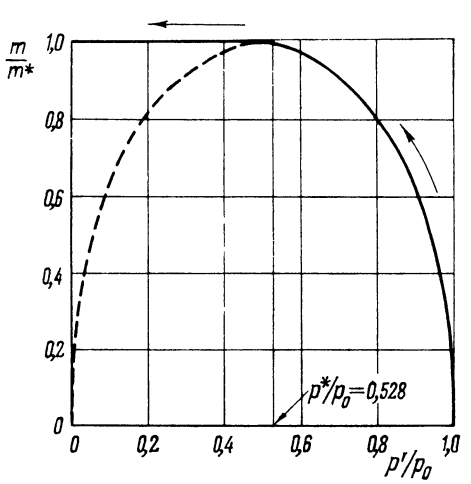


Рис. 30

Максимально возможный при заданных параметрах в котле секундный массовый расход m_{max} газа сквозь выходное сечение сужающегося

сопла равен $m_{max}=m^*=\rho^* a^* \bar{A}$ и, согласно (86) гл. V, представится так:

$$m_{max}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\sqrt{kp_0\rho_0}\,\bar{A}. \tag{15}$$

Как указал Прандтль[1]), для воздуха можно пользоваться следующими простыми *приближенными* формулами истечения:

$$G=0{,}76\bar{A}\sqrt{\frac{(p_0-\bar{p})\,\bar{p}}{T_0}} \quad \text{при} \quad \bar{p}>\frac{1}{2}p_0, \tag{16}$$

$$G_{max}=0{,}38\bar{A}\frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \quad \text{при} \quad \bar{p}<\frac{1}{2}p_0, \tag{17}$$

где G и G_{max} представляют собой секундные весовые расходы, выраженные в Н/с, а давления p_0 и $\bar{p}$ должны быть выражены соответственно в Па (Н/м²) или 10·кПа (Н/см²), в зависимости от того, задается ли площадь $\bar{A}$ отверстия истечения в м² или см²; T_0 — абсолютная температура в баке.

Формула (16) получается в результате приближенной замены правой ветви кривой на рис. 30 четвертью эллипса, а числа 0,528, выражающего

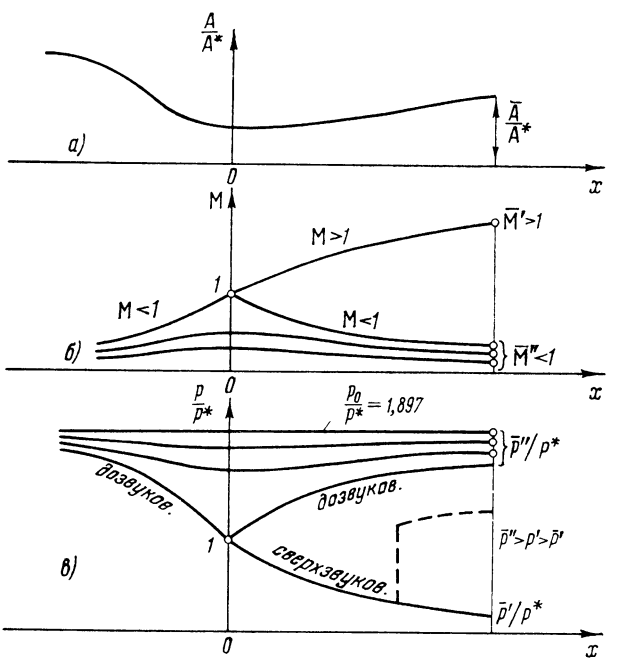


Рис 31

отношение критического давления к давлению в баке, числом 0,5. Почленным делением (16) на (17) получим легко запоминаемую формулу

$$\frac{G}{G_{max}}=2\sqrt{\left(1-\frac{\bar{p}}{p_0}\right)\frac{\bar{p}}{p_0}}. \tag{18}$$

Явление истечения газа в камеру с заданным противодавлением происходит иначе, если сопло имеет как начальную суживающуюся (конфузорную), так и выходную расширяющуюся (диффузорную) части. В этом

[1]) Прандтль Л. Гидроаэромеханика· Пер. с нем.— М.: ИЛ, 1949, с. 327, 328.

случае скорость газа, достигнув своего критического значения в сечении, отделяющем конфузорную часть от диффузорной, при дальнейшем расширении газа в диффузорной части сопла может стать *сверхзвуковой*. Такого рода сопла называют *соплами Лаваля* по имени шведского инженера Лаваля, впервые применившего их в качестве сопел для паровых турбин.

Рассмотрим одномерное адиабатическое и изэнтропическое течение газа в сопле Лаваля. Ход изменения площади A вдоль оси сопла задан кривой на рис. 31, *а*; соответствующее изменение числа M — на кривых рис. 31, *б* и, наконец, кривые давления, отнесенного к критическому его значению, приведены на рис. 31, *в*.

Кривые M и p/p^* построены по ранее выведенным формулам изэнтропического течения.

Из вида кривых можно сделать выводы о явлениях, происходящих в сопле Лаваля. Если в наиболее узком сечении сопла $A=A^*$ число M достигло значения $M=1$, то дальнейшее развитие потока может идти по кривым, соответствующим как $M>1$, так и $M<1$, т. е. *поток может стать сверхзвуковым или остаться дозвуковым*. Эта альтернатива разрешается заданием *противодавления* на выходе из сопла.

По заданному отношению $\bar{A}/A^*$ на выходе из сопла Лаваля, найдем пользуясь (6) или правой восходящей ветвью кривой на рис. 31, выходное значение $\overline{M}'>1$ и, подставив его в правую часть первого равенства (7), определим *расчетное* значение отношения давления на выходе $\bar{p}'$ к критическому давлению p^*. Если противодавление в камере подобрать равным этому расчетному давлению $\bar{p}'$, то сопло Лаваля будет работать на *расчетном сверхзвуковом режиме*, скорость на выходе будет превышать скорость звука и равна $\bar{u}=\overline{M}'\bar{a}$.

При том же значении $\bar{A}/A^*$, но пользуясь левой нисходящей ветвью кривой на рис. 31, определим значение $\overline{M}''<1$ на выходе из сопла и соответствующее ему по первому равенству (7) отношение $\bar{p}''/p^*$. Выбирая противодавление большим или равным $\bar{p}''$, получим *различные дозвуковые режимы* истечения из выходного сечения сопла.

Подчеркнем, что дозвуковых режимов истечений из сопла Лаваля заданной формы существует бесчисленное множество, в то время как *сверхзвуковое истечение единственно* и может осуществляться только при одном значении противодавления, равном $\bar{p}'$.

Если противодавление окажется лежащим между расчетными значениями $\bar{p}'$ и $\bar{p}''$, то в сопле или вне его возникнут сложные явления, при наличии которых движение газа в сопле уже не будет *непрерывным одномерным* и *изэнтропическим*. Если противодавление в камере окажется меньшим $\bar{p}'$, то газ по выходе из сопла будет продолжать непрерывно и изэнтропически расширяться, пока не достигнет давления в камере, но движение его вне сопла уже нельзя будет рассматривать как одномерное.

Секундный массовый расход через сопло Лаваля, так же как и в случае чисто конфузорного сопла, не может превзойти своего максимального значения, равного тому расходу, который пройдет сквозь сопло, если в наиболее узком его сечении будет достигнута местная скорость звука. Но, в отличие от конфузорного сопла, скорость на выходе из сопла Лаваля при сверхзвуковом режиме превосходит скорость звука и может быть подбором формы и длины сопла сделана тем больше, чем меньше противодавление. Можно представить себе мысленно такое идеальное сопло Лаваля, которое будет работать на расчетном режиме $\bar{p}'=0$. Это означает, что в камере будет достигнут абсолютный вакуум, причем наряду с $\bar{p}'$ обращаются в нуль ρ' и $\bar{T}'$.

Как об этом легко заключить из формулы Сен-Венана и Вантцеля (30) гл. V, скорость такого истечения является максимальной при

данных параметрах газа в котле и равна

$$u_{\max}=\sqrt{\frac{2}{k-1}}\sqrt{k\frac{p_0}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{2}{k-1}}a_0=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}a^*. \tag{19}$$

Вводя энтальпию адиабатически заторможенного газа (полную энтальпию) $h_0=c_pT_0$, можно еще написать

$$u_{\max}=\sqrt{2h_0}, \tag{20}$$

что непосредственно следует из равенства (52) гл. V при $h=0$.

Отметим, что для воздуха при абсолютной температуре $T_0=273+15=288$ К максимальная скорость будет 757 м/с. Подсчитаем еще числа M и λ при максимальной скорости истечения. Замечая, что скорость звука в вакууме равна нулю, а максимальная скорость истечения конечна, найдем $M_{\max}=\infty$. Скоростной коэффициент λ достигает при этом своего максимального значения

$$\lambda_{\max}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \tag{21}$$

Наряду с числами M и λ в газодинамических исследованиях используют еще *параметр Чаплыгина* τ, равный квадрату отношения скорости течения к максимальной скорости и выражающийся, согласно (19), через λ по формуле

$$\tau=\left(\frac{u}{u_{\max}}\right)^2=\frac{k-1}{k+1}\lambda^2. \tag{22}$$

Из самого определения τ следует, что $\tau_{\max}=1$. В табл. 2 дано сравнение чисел M, λ и $\sqrt{\tau}$ для воздуха ($k=1{,}4$).

Все сказанное о движении газа в соплах справедливо для идеального газа, лишенного внутреннего трения, и в случае полной адиабатичности процесса, т. е. отсутствия притока или отвода тепла в сопле. На самом деле явление движения газа в сопле неизмеримо сложнее.

Рассчитанное по приближенной теории сопло может не дать желаемого увеличения числа M на выходе, и только опытной проверкой можно добиться практически полезного результата; применяются и более точные расчеты.

При проведении расчетов одномерных газовых потоков часто бывает полезно сравнивать термодинамические «текущие» характеристики газа в любой точке потока с некоторыми стандартными. За такие состояния в большинстве случаев выбирают два: *покой* газа и его *критическое состояние*, т. е. движение с местной скоростью звука. Эти состояния можно всегда себе мысленно представить осуществленными при помощи одномерного адиабатического и изэнтропического движения газа через некоторый воображаемый канал.

Если движение дозвуковое, то газ приводится к покою при помощи расширяющегося канала — дозвукового диффузора, служащего для превращения кинетической энергии потока в давление. Такой процесс носит наименование *восстановления давления*. Чем больше степень восстановления давления, тем выше к. п. д. диффузора. В идеальном адиабатическом движении может произойти полное восстановление давления до значения p_0, определяемого уже известной адиабатической и изэнтропической формулой.

Сверхзвуковой поток также может быть подторможен при помощи специального сверхзвукового диффузора, аналогичного по внешней форме соплу Лаваля, причем, в отличие от него, в сужающейся части сопла поток будет замедляться до некоторой меньшей, чем во входном сечении, но все же сверхзвуковой скорости, чтобы затем, перейдя скачкооб-

разно в дозвуковой поток, продолжать далее тормозиться в расширяющейся части. Элементарный расчет такого сверхзвукового диффузора будет приведен в § 41 настоящей главы.

§ 36. Пример неадиабатического движения газа

Предположим, что адиабатичность одномерного стационарного потока идеального газа нарушается тем, что на некотором весьма коротком участке к газу подводится извне тепло. Это вызывает изменение температуры газа T_1 и температуры изэнтропически заторможенного газа T_{10} до участка подогрева на величину $\Delta T = T_2 - T_1$ и соответственно на $\Delta T_0 = T_{20} - T_{10}$, причем за участком подогрева вновь устанавливается адиабатическое течение с температурами T_2 и T_{20}.

Отвлекаясь от эффекта переменности сечения трубы на коротком участке подогрева, определим изменение числа M на этом участке, после чего уже нетрудно будет найти и изменения всех остальных величин. Основные уравнения поставленной задачи легко получить, если учесть, что приток тепла не нарушает баланса массы и количества движения, т. е. при прохождении газом участка подогрева остаются в силе следующие два равенства:

$$\rho u = \text{const}, \quad p + \rho u^2 = \text{const}. \tag{23}$$

Первое из этих равенств в принятых условиях стационарного одномерного потока по цилиндрической трубе ($V_n = V = u$) непосредственно вытекает из (33) гл. IV. Второе следует из равенства (34) той же главы, если спроектировать обе его части на ось трубы, пренебречь действием объемных сил, учесть стационарность потока, заметить, что при идеальности среды $p_{nn} = p_{xx} = -p$, и применить таким образом упрощенное равенство (34) к объему трубы, заключенному между двумя произвольными плоскими сечениями.

Припоминая известные уже формулы связи скорости звука с температурой, давлением и плотностью газа, а также определение числа M, будем иметь

$$\rho u = k\frac{pu}{kp/\rho} = k\frac{pu}{a^2} = kp\mathsf{M}\frac{1}{\sqrt{kRT}} = p\mathsf{M}\sqrt{\frac{k}{RT}} = \text{const},$$

$$p + \rho u^2 = p\left(1 + \frac{\rho u^2}{p}\right) = p\left(1 + k\frac{u^2}{a^2}\right) = p(1 + k\mathsf{M}^2) = \text{const}. \tag{24}$$

Отсюда, деля одно равенство на другое, получим искомую связь числа M с абсолютной температурой T или температурой адиабатически изэнтропически заторможенного газа T_0

$$\frac{1 + k\mathsf{M}^2}{\mathsf{M}}\sqrt{T} = \text{const}, \quad \frac{1 + k\mathsf{M}^2}{\mathsf{M}\sqrt{1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}^2}}\sqrt{T_0} = \text{const}. \tag{25}$$

Применим эти равенства к двум сечениям потока, ограничивающим участок подогрева; тогда будем иметь

$$\frac{\mathsf{M}_2}{1 + k\mathsf{M}_2^2} = \frac{\mathsf{M}_1}{1 + k\mathsf{M}_1^2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

$$\frac{\mathsf{M}_2\sqrt{1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}_2^2}}{1 + k\mathsf{M}_2^2} = \frac{\mathsf{M}_1\sqrt{1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}_1^2}}{1 + k\mathsf{M}_1^2}\sqrt{\frac{T_{20}}{T_{10}}}. \tag{26}$$

Задаваясь отношением

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{\Delta T}{T_1}$$

и числом M_1 до прохождения участка подогрева, по первой формуле (26) найдем M_2, а уже затем по второй из формул (24) — и отношение давлений

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}, \tag{27}$$

а также и все остальные термодинамические параметры. Наконец, зная число M_2 и температуру T_2, легко найдем и скорость газа за участком подогрева.

Введем в рассмотрение функцию

$$f(M) = \frac{M\sqrt{1 + \frac{k-1}{2}M^2}}{1 + kM^2}, \tag{28}$$

входящую во вторую формулу (26). Вычислив производную

$$f'(M) = \frac{1 - M^2}{(1 + kM^2)^2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{1/2}},$$

убедимся, что функция $f(M)$ имеет максимум при $M=1$, и этот максимум равен

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}.$$

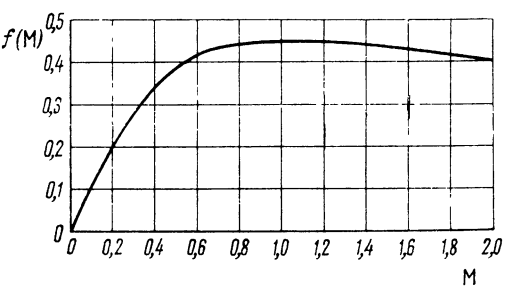


Рис 32

На рис. 32 приведен график функции $f(M)$ для воздуха (k=1,4). Как видно из графика и второй из формул (26), подогрев газа при $M_1<1$ вызывает возрастание функции $f(M_2)$ и при этом числа M_2, а при $M_1>1$, наоборот, убывание числа M_2. Следовательно, *приток тепла к дозвуковому потоку ускоряет его, отвод тепла — замедляет.* В случае *сверхзвукового* потока *приток тепла замедляет его, отвод ускоряет.* Так, например, при $T_{10}=540$ К и $M_1=0{,}5$ увеличение температуры на 20% приводит к возрастанию числа M до значения $M_2=0{,}6$. При той же начальной температуре и числе $M_1=1{,}4$ подогрев на 7% приведет к уменьшению числа M до $M_2=1$; при этом давление увеличится более чем на 50%.

§ 37. Неизэнтропическое движение газа по трубе при наличии сопротивления

Рассмотрим адиабатическое, но не изэнтропическое движение газа по трубе при наличии сопротивления трения, причем для простоты ограничимся случаем трубы постоянного сечения.

Для поддержания равномерного движения *реальной* жидкости в трубе постоянного сечения необходимо к сечениям трубы, ограничивающим некоторый участок длины l, приложить *движущий перепад давлений*

Δp, который смог бы уравновесить сопротивление трения, препятствующее движению жидкости по трубе. Этот перепад давления называют *сопротивлением участка трубы* и представляют формулой

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}, \tag{29}$$

где D — диаметр трубы, ρ — плотность жидкости, принимаемая постоянной, $u_{\text{ср}}$ — средняя по сечению трубы скорость движения жидкости, определяемая отношением секундного объемного расхода жидкости сквозь сечение к площади сечения. Коэффициент сопротивления λ представляет собой безразмерное число, зависящее от физических свойств среды: плотности ρ и коэффициента вязкости μ, а также от средней скорости $u_{\text{ср}}$ и диаметра D трубы. Более точно, λ является функцией некоторого комплекса этих величин — рейнольдсова числа $\mathbf{Re} = \rho u_{\text{ср}} D/\mu$ [1]).

При принятом в настоящем параграфе приближенном одномерном представлении движения будем считать среднюю скорость $u_{\text{ср}}$ совпадающей со скоростью u одномерного движения, а коэффициент сопротивления λ — постоянной величиной. Последнее допущение можно оправдать тем, что λ слабо зависит от $\mathbf{Re}$, а само число $\mathbf{Re}$ на данном участке трубы обычно меняется сравнительно незначительно и может быть заменено своим средним значением. Применяя формулу сопротивления (29) к сжимаемому газу на участке длины dx, будем иметь

$$dp = \lambda \frac{dx}{D} \frac{\rho u^2}{2}. \tag{30}$$

Составим уравнение Эйлера (1) для одномерного стационарного движения *идеального* газа, учитывая *влияние трения дополнительным перепадом давления* (30); тогда будем иметь уравнение движения

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \lambda \frac{u^2}{2D}, \tag{31}$$

из которого найдем

$$\frac{dp}{p} = -\lambda \frac{\rho}{p} \frac{u^2}{2} \frac{dx}{D} - \frac{\rho}{p} u\, du.$$

Воспользовавшись формулой Клапейрона и определением скорости звука $a = \sqrt{kp/\rho}$, получим, вводя число $\mathbf{M}$,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \lambda k \mathbf{M}^2 \frac{dx}{D} - k\mathbf{M}^2 \frac{du}{u}. \tag{32}$$

Уравнение неразрывности (2), переписанное ($A = \text{const}$) при помощи формулы Клапейрона в виде

$$\frac{pu}{T} = \text{const},$$

дает после логарифмического дифференцирования

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{du}{u}. \tag{33}$$

Сравнение (32) и (33) приводит к соотношению

$$-\frac{\lambda}{2} k\mathbf{M}^2 \frac{dx}{D} + (1 - k\mathbf{M}^2) \frac{du}{u} = \frac{dT}{T}. \tag{34}$$

Но по определению числа $\mathbf{M}$

$$u = \mathbf{M}a = \text{const} \cdot \mathbf{M} \sqrt{T},$$

[1]) Подробнее об этом см. гл. X и XIII настоящего курса.

так что после логарифмического дифференцирования

$$\frac{du}{u} = \frac{d\mathsf{M}}{\mathsf{M}} + \frac{1}{2}\frac{dT}{T}. \tag{35}$$

Ввиду адиабатичности движения, т. е. тепловой изоляции трубы, напишем условие сохранения полной энтальпии h_0 или, что все равно, температуры заторможенного газа

$$T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}^2\right) = \text{const};$$

тогда будем иметь, вновь логарифмически дифференцируя,

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\frac{\mathsf{M}\,d\mathsf{M}}{1 + \frac{k-1}{M}\mathsf{M}^2}. \tag{36}$$

Выражая при помощи (35) и (36) du/u и dT/T через число M и его дифференциал $d\mathsf{M}$ и подставляя эти значения в равенство (34), получим после простых преобразований следующее основное соотношение:

$$\frac{k\lambda}{2D}dx = d\xi = \frac{1-\mathsf{M}^2}{\mathsf{M}^3\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}^2\right)}d\mathsf{M}.$$

Положим $d\xi > 0$, т. е. будем рассматривать развитие движения вниз по потоку. Тогда сразу видно, что $d\mathsf{M} > 0$, если $\mathsf{M} < 1$ и $d\mathsf{M} < 0$, если $\mathsf{M} > 1$. Это приводит к следующему выводу: *при адиабатическом движении газа по трубе постоянного сечения наличие трения вызывает ускорение дозвукового потока и замедление сверхзвукового потока.*

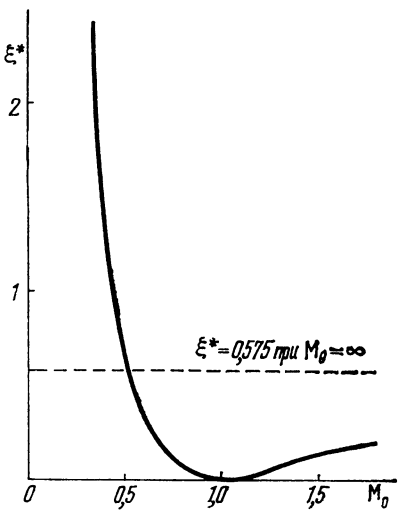


Рис. 33

Пользуясь равенством (37), можно определить длину l^* участка трубы, на котором дозвуковой поток, начав с заданного значения $\mathsf{M}_0 < 1$, достигнет благодаря наличию ускорения значения $\mathsf{M}_1 = 1$; аналогично можно найти длину участка, на котором сверхзвуковой поток от заданного $\mathsf{M}_0 > 1$ замедлится до $\mathsf{M}_1 = 1$.

Интегрируя (37), будем иметь, полагая $\xi = 0$ в сечении, где $\mathsf{M} = \mathsf{M}_0$,

$$\xi^* = \frac{k\lambda l^*}{2D} = \frac{1}{2\mathsf{M}_0^2} - \frac{1}{2} - \frac{k+1}{4}\ln\frac{1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}_0^2}{\frac{k+1}{2}\mathsf{M}_0^2}. \tag{38}$$

Так, например, для воздуха ($k = 1{,}4$) при $\mathsf{M}_0 = 0{,}4$ будем иметь, принимая $\lambda = 0{,}01$ (это соответствует $\mathsf{Re} = 2{,}5 \cdot 10^6$),

$$\frac{l^*}{D} = \frac{2}{1{,}4 \cdot 0{,}01} \cdot 1{,}62 \approx 230;$$

в тех же условиях при $\mathsf{M}_0 = 1{,}4$ получим

$$\frac{l^*}{D} = \frac{2}{1{,}4 \cdot 0{,}01} \cdot 0{,}07 \approx 10.$$

Общий ход зависимости безразмерного параметра ξ^* от M_0 представлен на рис. 33. Можно заметить, что при возрастании числа M_0 до

бесконечности ξ^* стремится к конечной величине

$$\xi^* \to \frac{k+1}{4} \ln \frac{k+1}{k-1} - \frac{1}{2}.$$

В частности, для воздуха ($k=1{,}4$) кривая на рис. 33 имеет горизонтальную асимптоту $\xi^* = 0{,}5751$.

§ 38. Плоская ударная волна и скачок уплотнения

В отличие от задачи о распространении малых возмущений изучение явления распространения *конечных по интенсивности* возмущений представляет математические трудности, так как требует интегрирования нелинеаризованных уравнений (55) гл. V. Рассмотрению этого случая будет посвящен § 44; там же приводится принадлежащее Риману строгое объяснение явлений возникновения в идеальном газе ударных волн, представляющих собой поверхности разрыва параметров состояния газа и скорости его движения. Остановимся сначала на *элементарной* теории ударных волн и удовольствуемся простым качественным объяснением причины их возникновения.

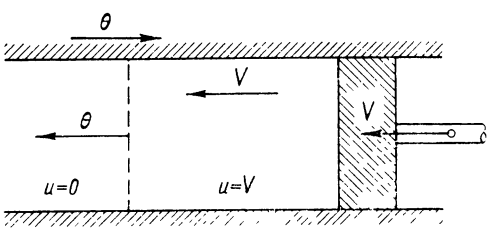


Рис. 34

Представим себе (рис. 34) теплоизолированную от внешней среды цилиндрическую трубу бесконечной длины, вдоль которой перемещается поршень. Пусть вначале поршень и газ неподвижны, а затем поршень мгновенно приобретает некоторую скорость и перемещается с этой скоростью влево, сжимая находящийся перед ним газ. Возникающее при этом возмущение (сжатие газа) будет распространяться по трубе.

Разобьем мысленно область возмущенного газа на большое число объемов близкими друг к другу, перпендикулярными к оси трубы плоскими сечениями, каждому из которых соответствуют свои значения возмущенных параметров газа и скорости распространения по отношению к газу. Можно предположить, что распределение возмущений вдоль оси в каждый момент непрерывно, т. е. в двух достаточно близких друг к другу сечениях параметры газа мало разнятся между собой. Тогда, представляя движение газа в данном сечении как относительное в системе координат, движущейся поступательно и равномерно со скоростью газа в смежном сечении, можем в такой галилеевой системе применять теорию распространения малых возмущений. Это позволит утверждать, что *скорость распространения возмущений в каждом сечении равна местной скорости звука.*

Таким образом, распространение возмущений, создаваемых поршнем, можно рассматривать как совокупность непрерывно следующих друг за другом звуковых волн, причем каждая последующая волна перемещается по газу, возмущенному предыдущими волнами. Но в рассматриваемом адиабатическом и изэнтропическом движении сжатие газа сопровождается его подогреванием, а скорость распространения возмущений возрастает с температурой. Отсюда заключим, что каждая последующая волна будет перемещаться относительно невозмущенного газа *быстрее*, чем предыдущая. Волны будут *догонять* друг друга, складываться и образовывать одну обладающую конечной интенсивностью волну сжатия, называемую *ударной волной.*

Заметим, что при движении поршня влево за ним образуется разрежение, которое будет распространяться вправо от поршня также волно-

вым образом. Но в этом случае волны уже не будут нагонять друг друга, так как последующая волна пойдет по газу, охлажденному предыдущей волной, и скорость распространения последующей волны будет *меньше* скорости предыдущей. Из этого простого рассуждения следует, что волны разрежения не могут образовывать ударные волны. В следующем параграфе будет дано и другое, термодинамическое доказательство невозможности такого рода образований.

Из описанного только что процесса развития ударной волны сжатия следует, что после того, как ударная волна образовалась (в дальнейшем будет доказано, что это произойдет через *конечный* промежуток времени), по обе стороны от ее фронта параметры состояния газа и его скорость (абсолютная или по отношению к движущемуся фронту) будут иметь значения, различающиеся между собой на конечные величины. Фронт ударной волны представляет собой поверхность (в рассматриваемом частном случае — плоскость) разрыва параметров состояния газа, перемещающуюся по газу и вызывающую скачкообразное изменение этих параметров, причем невозмущенный газ перед фронтом ударной волны имеет меньшие давление, плотность и температуру, чем после прохождения фронта.

Наличие такого скачкообразного изменения параметров газа — в действительности очень *резкого* их изменения на участке длины, равной по порядку пути свободного пробега молекулы,— показывает, что здесь имеет место *внутренний молекулярный процесс, связанный с переходом кинетической энергии упорядоченного течения газа в кинетическую энергию беспорядочного теплового движения молекул.* Этим объясняется разогрев газа при прохождении его из невозмущенной области перед фронтом ударной волны в область возмущенного движения за фронтом ударной волны. Повышение средней квадратичной скорости пробега молекул вызывает также возрастание давления и плотности газа при прохождении его сквозь фронт ударной волны.

Явление одномерного распространения плоской ударной волны допускает элементарный количественный расчет.

Обозначим через V постоянную скорость движения поршня (рис. 34), а через θ — скорость распространения относительно невозмущенного газа ударной волны, показанной на рис. 34 штрихами. Предполагая, что процесс возникновения ударной волны уже закончился, примем скорость газа во всей области между ударной волной и поршнем одинаковой и равной постоянной скорости движения поршня V; точно так же будем считать постоянными в этой области и параметры газа. Таким образом, как слева от ударной волны (в области невозмущенного газа), так и справа от нее параметры движения и состояния газа сохраняют неизменные значения при всех положениях ударной волны. Отсюда следует, что и скорость распространения ударной волны θ также постоянна, причем из приведенного рассуждения ясно, что ударная волна обгоняет газ, приводимый в движение поршнем, т. е. всегда будет $\theta > V$.

Движение газа в системе координат, связанной с трубой, будет *нестационарным*, так как ударная волна, перемещаясь вдоль трубы, изменяет поле скоростей во времени. Обратим движение, сообщив мысленно всей трубе вместе с движущимся газом поступательное движение вправо со скоростью θ. Иначе говоря, будем рассматривать происходящее в трубе явление с точки зрения галилеевой системы координат, движущейся поступательно вдоль оси трубы вместе с фронтом ударной волны. Тогда ударная волна окажется как бы остановленной, а движение газа — *стационарным.*

Неподвижную ударную волну, плоскость которой перпендикулярна к направлению потока, будем называть *прямым скачком уплотнения.* Невозмущенный газ в новом рассмотрении уже не неподвижен, а подходит

к скачку уплотнения слева направо (рис. 35) со скоростью $V_1=\theta$, а за скачком движется со скоростью $V_2=\theta-V$; при этом, очевидно, $V_1>V_2$; давление, плотность и температура в этой галилеевой системе сохраняют свои прежние значения. Условимся в дальнейшем обозначать индексом 1 величины перед скачком, индексом 2 — после скачка.

Чтобы найти связь между V_1, p_1, ρ_1, T_1 и V_2, p_2, ρ_2, T_2, воспользуемся стационарностью потока и применим к нему теорему сохранения массы, количества движения и энергии в форме Эйлера. Как следует из самих выводов, приведенные в § 24 эйлеровы формы этих теорем могут быть применимы и при наличии в потоке поверхностей разрыва (например, скачка уплотнения). Следует только выбрать контрольную поверхность так, чтобы те ее части, на которых нормальная составляющая скорости отлична от нуля, не совпали и не пересеклись с поверхностью разрыва.

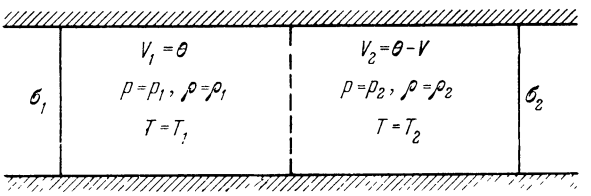


Рис 35

Выберем за контрольную поверхность совокупность боковой поверхности цилиндрической трубы и двух равных между собой по площади нормальных сечений σ_1 и σ_2 (рис. 35). Поверхность разрыва пересекает только ту часть контрольной поверхности, где $V_n=0$. В силу принятой одномерности движения будем считать, что в сечениях σ_1 и σ_2 поля скорости и других величин однородны. В этих условиях закон сохранения массы при $\sigma_1=\sigma_2$ и $V_n=V_1$ или V_2 сразу дает

$$\rho_1 V_1=\rho_2 V_2. \tag{39}$$

Теорема об изменении количеств движения в форме (34) гл. IV, если принять, что движение стационарно, объемные силы отсутствуют ($\boldsymbol{F}=0$) и газ идеален ($\boldsymbol{p}_n=-n\boldsymbol{p}$), в условиях однородности поля скоростей и давлений в сечениях σ_1 и σ_2 после проектирования обеих частей (34) той же главы на направление оси трубы даст второе искомое равенство — сохранение *полного импульса* $p+\rho V^2$ —

$$p_1+\rho_1 V_1^2=p_2+\rho_2 V_2^2. \tag{40}$$

Аналогично уравнение баланса энергии (20) гл. IV в условиях идеального и совершенного газа $\boldsymbol{p}_n=-n\boldsymbol{p}$, $U=c_vT$, если отвлечься от объемных сил и перейти к форме Эйлера, сведется к такому:

$$\int_\sigma \rho\left(c_vT+\frac{V^2}{2}\right)V_n d\sigma=-\int_\sigma pV_n d\sigma.$$

Произведя замену

$$U=c_vT=h-\frac{p}{\rho},$$

найдем

$$\int_\sigma \rho\left(h+\frac{V^2}{2}\right)V_n d\sigma=0.$$

Применяя эту формулу к выбранной контрольной поверхности, получим

$$\rho_1V_1\sigma_1\left(h_1+\frac{V_1^2}{2}\right)=\rho_2V_2\sigma_2\left(h_2+\frac{V_2^2}{2}\right),$$

или, в силу (39) и равенства сечений σ_1 и σ_2,

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}; \tag{41}$$

это равенство представляет собой *закон сохранения полной энтальпии* $h_0 = h + V^2/2$ газа при его прохождении через скачок уплотнения.

К системе уравнений (39), (40) и (41) можно присоединить уравнение Клапейрона, вследствие которого будет

$$h_1 = c_p T_1 = \frac{c_p}{R}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}$$

и аналогично

$$h_2 = \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2},$$

после чего равенство (41) заменяется следующим:

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2}. \tag{42}$$

Таким образом, составлена система трех уравнений (39), (40) и (42) с тремя неизвестными величинами V_2, p_2, ρ_2.

Найдем сначала связь между давлениями и плотностями до и за скачком уплотнения, исключив из рассмотрения скорости V_1 и V_2. Для этого, согласно (39), перепишем уравнение изменения количеств движения (40) в виде

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 = \rho_1 V_1 (V_2 - V_1)$$

и умножим обе части этого равенства: справа на выражение

$$\frac{V_2 + V_1}{\rho_1 V_1},$$

а слева на равную ему величину

$$\frac{V_2}{\rho_1 V_1} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{V_2}{\rho_2 V_2} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2};$$

тогда получим

$$(p_1 - p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = V_2^2 - V_1^2.$$

С другой стороны, из уравнения баланса энергии (42) следует

$$\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) = V_2^2 - V_1^2,$$

так что, приравнивая левые части двух последних равенств, найдем

$$\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right).$$

Группируя в этом равенстве члены с p_1 и p_2, получим *уравнение Гюгонио*

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\rho_2 - (k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1 - (k-1)\rho_2} = \frac{(k+1)\rho_2/\rho_1 - (k-1)}{k+1-(k-1)\rho_2/\rho_1}. \tag{43}$$

Вспоминая связь между давлением и плотностью в адиабатическом движении идеального газа, определяемую изэнтропической адиабатой

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k, \tag{44}$$

видим, что уравнение Гюгонио (43) представляет адиабату, отличную от изэнтропической; эту адиабату называют *ударной адиабатой* или *адиабатой Гюгонио* в отличие от *изэнтропической адиабаты Пуассона* (44).

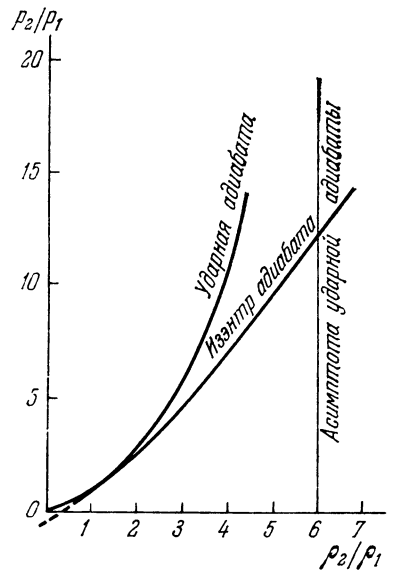


Рис. 36

Полученный результат на первый взгляд противоречит доказанному в предыдущей главе положению об изэнтропичности адиабатического движения идеального газа. Не следует, однако, забывать, что, в отличие от рассмотренного ранее *непрерывного* вдоль трубки тока движения, в настоящем параграфе рассматривается *разрывное* движение с *конечным скачком* параметров газа в некотором сечении трубы. Отсюда следует только сделать заключение, что *прохождение идеального газа сквозь скачок уплотнения не является изэнтропическим процессом*, а сопровождается *необратимым переходом механической энергии в тепловую*.

Как известно, при наличии необратимых процессов преобразования механической энергии в тепловую в замкнутой (адиабатической) системе *энтропия* этой системы *должна возрастать*. Легко убедиться, что в рассматриваемом сейчас случае прохождения газа сквозь скачок уплотнения отнесенная к единице массы энтропия газа будет возрастать. Составим с этой целью выражение энтропии по (54) гл. V. Получим

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{k-1}\left[\ln\left(\frac{p_2}{\rho_2^k}\right) - \ln\left(\frac{p_1}{\rho_1^k}\right)\right] = \frac{R}{k-1}\ln\left[\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k\right]. \qquad (45)$$

На рис. 36 показаны для сравнения графики двух адиабат: изэнтропической и неизэнтропической ударных адиабат. Как видно из этого графика, при $\rho_2/\rho_1 > 1$ ударная адиабата располагается выше изэнтропической, откуда и следует, что выражение, стоящее в квадратной скобке под знаком логарифма в формуле (45), больше единицы, логарифм положителен, так что действительно $s_2 > s_1$.

Из формулы (45) сразу следует, что скачка разрежения быть не может. Действительно, повторяя формально все предыдущие рассуждения относительно воображаемого скачка разрежения, можно было бы получить те же самые формулы и при $p_1 > p_2$, $\rho_1 > \rho_2$. Но при $\rho_2/\rho_1 < 1$ кривая, соответствующая ударной адиабате, ложится ниже изэнтропической адиабаты [на рис. 36 эта ветвь показана штрихами; она пересекает ось ординат в точке $\left(0, -\frac{k-1}{k+1}\right)$], так что в этом случае $s_2 < s_1$; это означает, что при прохождении газа сквозь воображаемый скачок разрежения отнесенная к единице массы энтропия газа должна была бы уменьшаться, а это приводит к противоречию со вторым началом термодинамики. Таким образом, и из общих термодинамических соображений следует, что скачок разрежения невозможен.

Заметим, что ударная адиабата имеет асимптоту

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1},$$

так как при этом отношение давлений, согласно (43), обращается в бес-

конечность. Отсюда следует, что, в отличие от обычного адиабатического и изэнтропического сжатия газа, например в теплоизолированном цилиндре с поршнем, как бы ни было велико сжатие p_2/p_1 газа в ударной волне, созданное ею уплотнение газа ρ_2/ρ_1 не может превзойти величины $\frac{k+1}{k-1}$. Так, например, воздух, пройдя сквозь скачок уплотнения, не может повысить свою плотность более чем в *шесть* раз.

§ 39. Изменение скорости и термодинамических параметров газа при прохождении его через прямой скачок уплотнения

По теореме Бернулли, справедливой порознь в областях до и после скачка уплотнения, имеем

$$h_1+\frac{V_1^2}{2}=h_{10}=c_pT_{10},\quad h_2+\frac{V_2^2}{2}=h_{20}=c_pT_{20}.$$

Сравнивая эти равенства с (41), заключим, что при прохождении газа сквозь скачок уплотнения сохраняются полная энтальпия h_0 и температура адиабатически заторможенного газа T_0, а следовательно, и a_0, a^*, T^*. Таким образом будет:

$$h_{10}=h_{20}=h_0,\quad T_{10}=T_{20}=T_0,\quad T_1^*=T_2^*=T^*,$$
$$a_{10}=a_{20}=a_0,\quad a_1^*=a_2^*=a^*. \tag{46}$$

Согласно формуле Клапейрона можно написать также, что

$$\frac{p_{10}}{\rho_{10}}=\frac{p_{20}}{\rho_{20}},\quad \frac{p_1^*}{\rho_1^*}=\frac{p_2^*}{\rho_2^*}. \tag{47}$$

Разыщем связь между скоростями V_1 и V_2 до и за скачком уплотнения. Перепишем с этой целью уравнение количеств движения (40) с учетом (39) в виде

$$V_1-V_2=\frac{p_2}{\rho_2V_2}-\frac{p_1}{\rho_1V_1}. \tag{48}$$

Уравнение Бернулли в форме второго из равенств (77) гл. V, примененное до и после скачка, дает

$$\frac{a_1^2}{k-1}\equiv\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}-\frac{V_1^2}{2},$$
$$\frac{a_2^2}{k-1}\equiv\frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2}=\frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}-\frac{V_2^2}{2}.$$

Определяя из этих двух уравнений отношения p_1/ρ_1, p_2/ρ_2 и подставляя их значения в уравнение (48), получим после простых преобразований равенство

$$\frac{k+1}{2k}(V_1-V_2)\left(1-\frac{a^{*2}}{V_1V_2}\right)=0.$$

Но по доказанному выше в скачке уплотнения $\rho_2>\rho_1$ и, следовательно, по (39) $V_1>V_2$; при этом предыдущее равенство приводится к следующему выведенному Прандтлем соотношению:

$$V_1V_2=a^{*2}, \tag{49}$$

которое при переходе к скоростным коэффициентам λ_1, λ_2 преобразуется

к виду

$$\lambda_1\lambda_2=1. \tag{50}$$

Из формулы Прандтля (49) при наличии неравенства $V_1>V_2$ следует

$$V_1>a^*>V_2 \quad \text{или} \quad \lambda_1>1>\lambda_2,$$

т. е. перед скачком движение газа *сверхкритическое*, за скачком — *докритическое*.

Воспользовавшись формулой (80) гл. V, убедимся, что $M_1>1$ при $\lambda_1>1$ и $M_2<1$ при $\lambda_2<1$. Таким образом, заключим, что *движение газа до прохождения им скачка уплотнения является сверхзвуковым, за скачком — дозвуковым.*

Перейдем в формуле Прандтля (50) от скоростных коэффициентов к числам M. Согласно соотношению (79) гл. V будем иметь

$$\frac{k+1}{2}\frac{M_1}{\sqrt{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}}\frac{M_2}{\sqrt{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}}=1.$$

Разрешив это уравнение относительно M_2, получим связь между числами M_1 и M_2 до и после скачка

$$M_2=\sqrt{\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{kM_1^2-\frac{k-1}{2}}}. \tag{51}$$

Составляя для упрощения вычислений производную $d(M_2^2)/d(M_1^2)$ вместо одинаковой с ней по знаку производной dM_2/dM_1, будем иметь

$$\frac{d(M_2^2)}{d(M_1^2)}=-\frac{(k+1)^2}{4}\frac{1}{\left(kM_1^2-\frac{k-1}{2}\right)^2}<0,$$

откуда следует, что с возрастанием числа M_1 потока до скачка число M_2 за скачком монотонно убывает. Приводим табл. 3 связи между M_1 и M_2

Таблица 3

M_1	M_2	p_2/p_1	M_1	M_2	p_2/p_1	M_1	M_2	p_2/p_1
1,0	1,000	1,000	1,6	0,668	2,820	2,1	0,561	4,970
1,1	0,912	1,246	1,7	0,640	3,200	2,2	0,546	5,480
1,2	0,842	1,520	1,8	0,616	3,604	2,3	0,534	6,000
1,3	0,779	1,824	1,9	0,595	4,043	2,4	0,522	6,550
1,4	0,739	2,120	2,0	0,577	4,500	2,5	0,512	7,400
1,5	0,701	2,455						

в диапазоне $1\leqslant M_1\leqslant 2{,}5$ для воздуха ($k=1{,}4$); в этой же таблице приводятся и числовые значения отношения p_2/p_1, характеризующего сжатие газа при прохождении его через скачок уплотнения. Формула связи p_2/p_1 и M_1 будет выведена далее.

Как показывает формула (51), при беспредельном росте M_1 величина M_2 стремится к своему предельному значению

$$(M_2)_{M_1=\infty}=\sqrt{\frac{k-1}{2k}},$$

для воздуха ($k=1{,}4$) равному 0,378.

Определим относительные изменения давления

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1},$$

плотности

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$$

и температуры

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

при прохождении газа через скачок уплотнения. Для этого используем основные соотношения (39), (40) и формулу Прандтля (49), написав

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2}{p_1} = \frac{\rho_1 V_1^2}{p_1}\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = k\frac{V_1^2}{kp_1/\rho_1}\left(1 - \frac{V_1 V_2}{V_1^2}\right) =$$

$$= k\mathbf{M}_1^2\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right).$$

Остается применить формулы (79), (80) гл. V перехода от λ_1 к $\mathbf{M}_1$ или от $\mathbf{M}_1$ к λ_1, чтобы получить искомые соотношения

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1}\frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}\frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}; \tag{52}$$

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1}(\mathbf{M}_1^2 - 1), \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}(\mathbf{M}_1^2 - 1) = \frac{2k}{k+1}\mathbf{M}_1^2 - \frac{k-1}{k+1}. \tag{53}$$

Аналогичные преобразования дают

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} - 1 = \frac{V_1^2}{a^{*2}} - 1,$$

так что

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \lambda_1^2 - 1, \tag{54}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\mathbf{M}_1^2 - 1}{1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_1^2}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{2}\mathbf{M}_1^2}{1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_1^2}. \tag{55}$$

Чтобы определить относительное изменение температуры, используем равенство (41), из которого следует

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2h_1} = \frac{V_1^2}{2a_1^2/(k-1)}\left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2}\right) =$$

$$= \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_1^2\left(1 - \frac{a^{*4}}{V_1^4}\right) = \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_1^2\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4}\right).$$

Заменяя здесь, как и ранее, $\mathbf{M}_1$ через λ_1 или λ_1 через $\mathbf{M}_1$, получим

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{k-1}{k+1}\frac{\lambda_1^4 - 1}{\lambda_1^2\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)}, \tag{56}$$

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{2(k-1)}{(k+1)^2\mathbf{M}_1^2}(\mathbf{M}_1^2 - 1)(1 + k\mathbf{M}_1^2). \tag{57}$$

Чтобы оценить потерю механической энергии движущегося газа при прохождении им прямого скачка уплотнения, условимся характеризо-

вать *механическую энергию полным давлением* p_0, т. е. давлением в адиабатически и изэнтропически заторможенном газе. При этом за количественную характеристику необратимости процесса прохождения

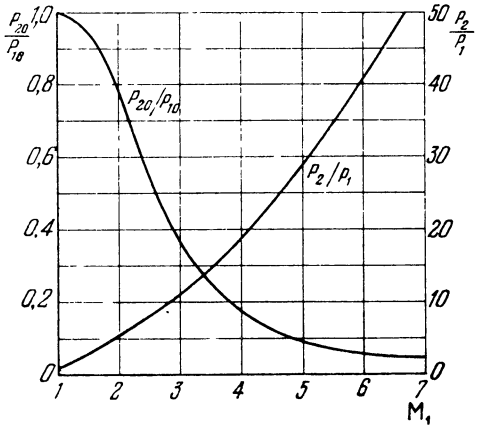


Рис. 37

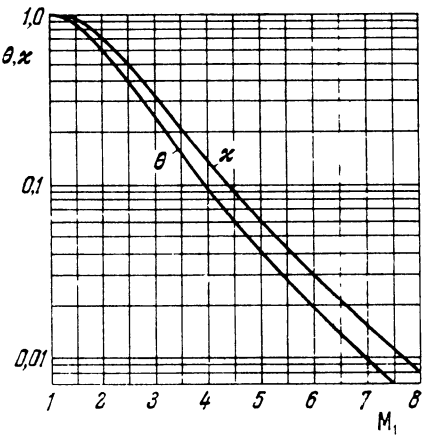


Рис. 38

газа сквозь прямой скачок примем величину $\varkappa$ отношения полного давления p_{20} за скачком к p_{10} до скачка

$$\varkappa = \frac{p_{20}}{p_{10}}. \tag{58}$$

Выражая p_{20} и p_{10} по изэнтропическим формулам через давления p_2 и p_1 газа за скачком и перед скачком, получим

$$\varkappa = \frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{p_2\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{p_1\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{p_2\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{p_1\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Заменяя здесь отношение p_2/p_1 по (52) на одно из следующих:

$$\frac{p_2}{p_1} = \begin{cases} 1+\dfrac{2k}{k+1}(M_1^2-1), \\ 1+\dfrac{2k}{k+1}\dfrac{\lambda_1^2-1}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}, \end{cases}$$

и используя выражения (51) и (50) M_2 и λ_2 через M_1 и λ_1, получим искомое отношение в одном из следующих двух видов:

$$\varkappa = \frac{p_{20}}{p_{10}} = \begin{cases} \lambda_1^{\frac{2k}{k-1}}\left(\dfrac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{\lambda_1^2-\frac{k-1}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \lambda_1^2\left(\dfrac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_1^2}}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\dfrac{M_1^{\frac{2k}{k-1}}}{\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(kM_1^2-\frac{k-1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \end{cases} \tag{59}$$

Напомним, что, согласно (47), эти же выражения определяют и отношение плотностей заторможенного газа за скачком и до скачка.

На рис. 37 представлен график второго соотношения (59) для воздуха ($k=1{,}4$); там же приведен график сжатия p_2/p_1 воздуха в скачке. График, выражающий первое соотношение (59), имеет тот же характер, но p_{20}/p_{10} обращается в нуль не при $M_1\to\infty$, а при конечном значении скоростного коэффициента $\lambda_1=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$. Как видно из графика, чем больше величины M_1 или p_2/p_1, характеризующие интенсивность скачка, тем относительно меньшее давление p_{20} можно получить за счет последующего адиабатического и изэнтропического торможения газа, прошедшего через скачок уплотнения. Причина этого явления была выяснена раньше: в скачке уплотнения имеет место *необратимое превращение механической энергии в тепловую*, вследствие чего механическая энергия становится меньше.

Более точно, чем на рис. 37, можно судить о значениях отношения p_{20}/p_{10} при больших числах M_1 по графику рис. 38, где это отношение построено в логарифмическом масштабе; здесь же дана зависимость $\theta(M_1)$ [формулы (10), (11)], которая потребуется в § 41.

При *больших* M_1 вторая из формул (59) может быть заменена приближенной, асимптотической

$$\varkappa=\frac{p_{20}}{p_{10}}\sim\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\frac{M_1^{\frac{2k}{k-1}}}{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}M_1^{\frac{2k}{k-1}}k^{\frac{1}{k-1}}M_1^{\frac{2}{k-1}}}=$$

$$=\left[\frac{(k+1)^{k+1}}{2k(k-1)^k}\right]^{\frac{1}{k-1}}M_1^{-\frac{2}{k-1}},\qquad(60)$$

что дает простую количественную оценку поведения величин p_{20}/p_{10} при больших M_1. Например, для воздуха ($k=1{,}4$) при больших M_1 рассматриваемое отношение обратно пропорционально числу M_1 в пятой степени, что говорит о весьма значительных потерях механической энергии при прохождении газа через скачки большой интенсивности. Укажем, что соответствующая этому случаю простая асимптотическая (верная только при больших значениях M_1) формула для $\varkappa$ будет $\varkappa\sim 360\,M_1^{-5}$.

Исследуем поведение кривой на рис. 37 при малых значениях разности M_1^2-1. Преобразуем второе равенство (59) к виду

$$\varkappa=\left[\frac{2k}{k+1}-\frac{k-1}{k+1}+\frac{2k}{k+1}(M_1^2-1)\right]^{-\frac{1}{k-1}}\left[\frac{\frac{k+1}{2}+\frac{k+1}{2}(M_1^2-1)}{1+\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{2}(M_1^2-1)}\right]^{\frac{k}{k-1}}=$$

$$=\left[1+\frac{2k}{k+1}(M_1^2-1)\right]^{-\frac{1}{k-1}}\left[\frac{1+(M_1^2-1)}{1+\frac{k-1}{k+1}(M_1^2-1)}\right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Производя разложение по степеням малой величины M_1^2-1, убедимся, что коэффициенты при M_1^2-1 и $(M_1^2-1)^2$ обращаются в нуль, и

разложение величины $\varkappa = p_{20}/p_{10}$ будет иметь вид

$$\varkappa = 1 - \frac{2k}{(k+1)^2}\frac{(M_1^2-1)^3}{3} + \ldots \tag{61}$$

Из последнего разложения видно, что скачки *малой интенсивности* не приводят к заметной потере полного напора, так как при M_1, близком к единице, p_{20} совпадает с p_{10} с точностью до малой величины

$$\frac{2k}{(k+1)^2}\frac{(M_1^2-1)^3}{3}.$$

Так, для воздуха ($k=1{,}4$) эта величина имеет порядок $0{,}16(M_1^2-1)^3$ и, например при превышении скорости звука на 10% ($M_1=1{,}1$) будет равна 0,0015.

При наличии необратимых потерь в адиабатической системе возрастает ее энтропия. Для определения этого возрастания применим равенство (45) к параметрам адиабатически и изэнтропически заторможенного газа, что допустимо, так как изэнтропическое торможение не может влиять на приращение энтропии. Получим

$$\frac{s_2-s_1}{R} = \frac{1}{k-1}\ln\left[\frac{p_{20}}{p_{10}}\left(\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}}\right)^k\right].$$

Но, по предыдущему, $\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} = \frac{p_{10}}{p_{20}}$, следовательно,

$$\frac{s_2-s_1}{R} = \frac{1}{k-1}\ln\left[\left(\frac{p_{20}}{p_{10}}\right)^{1-k}\right] = -\ln\left(\frac{p_{20}}{p_{10}}\right) = -\ln\varkappa. \tag{62}$$

Подставляя сюда отношение p_{20}/p_{10} по приближенной формуле (60), найдем при *больших* M_1 соотношение

$$\frac{s_2-s_1}{R} \sim \frac{2}{k-1}\ln M_1, \tag{63}$$

выражающее асимптотический закон роста энтропии при прохождении газа сквозь скачки большой интенсивности.

При сравнительно *малой* интенсивности, т. е. при разности (M_1^2-1), близкой к нулю, будем иметь, согласно (61),

$$\frac{s_2-s_1}{R} \approx \frac{2k}{(k+1)^2}\frac{(M_1^2-1)^3}{3}. \tag{64}$$

Отсюда следует, что *скачки малой интенсивности приводят к слабым изменениям энтропии*, т. е. околозвуковые явления можно с достаточной степенью приближения рассматривать как изэнтропические.

§ 40. Скорости распространения ударной волны и спутного потока за нею

Составив основные соотношения для скачка уплотнения, вернемся теперь к рассмотрению явления распространения ударной волны в пространстве. Определим скорость θ распространения ударной волны по отношению к невозмущенному (покоящемуся) газу и скорость V движения возмущенного газа за ударной волной; последнее движение можно было бы назвать *спутным потоком* газа за ударной волной. Согласно изложенному в § 38 эти скорости связаны со скоростями V_1 и V_2 по отношению к ударной волне равенствами

$$\theta = V_1, \quad V = \theta - V_2 = V_1 - V_2. \tag{65}$$

За меру интенсивности скачка, а следовательно, и ударной волны можно принять число M_1, равное, по предыдущему,

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{\theta}{a_1}, \tag{66}$$

или сжатие газа в скачке p_2/p_1, равное по (53)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}. \tag{67}$$

Тогда скорость θ распространения ударной волны по отношению к невозмущенному газу будет

$$\theta = M_1 a_1 = \sqrt{\frac{k-1}{2k} + \frac{k+1}{2k}\frac{p_2}{p_1}} \cdot a_1. \tag{68}$$

Из этой формулы вытекают два важных следствия.

1. *Скорость распространения ударной волны по отношению к невозмущенному газу всегда больше скорости звука в невозмущенном газе.*

2. При уменьшении интенсивности ударной волны скорость ее распространения стремится к скорости звука в невозмущенном газе

$$\theta = a_1 \text{ при } M_1 = 1 \text{ или } p_2 = p_1.$$

Звуковую волну можно, таким образом, рассматривать как ударную волну очень малой интенсивности.

Чтобы определить скорость V спутного потока за волной, используем второе из соотношений (65) и формулу Прандтля (49); тогда получим

$$V = V_1 - \frac{a^{*2}}{V_1}.$$

Производя здесь замену

$$a^{*2} = \frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) a_1^2,$$

будем иметь после простых преобразований

$$V = \frac{2}{k+1}\left(M_1 - \frac{1}{M_1}\right) a_1. \tag{69}$$

При больших M_1 можно указать приближенную асимптотическую формулу

$$V \sim \frac{2}{k+1} M_1 a_1 = \frac{2}{k+1}\theta,$$

из которой видно, что спутный поток за ударной волной при очень больших интенсивностях имеет скорость меньшую, чем скорость распространения самой ударной волны, но довольно близкую к ней.

Выражение (69) по (53) легко преобразовать к виду

$$V = \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\sqrt{k - 1 + (k+1)\frac{p_2}{p_1}}} a_1, \tag{70}$$

или при очень больших p_2/p_1

$$V \sim \sqrt{\frac{2}{k(k+1)}} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\, a_1. \tag{71}$$

Как легко заключить из (70), в звуковой волне ($p_2/p_1 \approx 1$) скорость спутного потока близка к нулю. С ростом интенсивности ударной волны скорость спутного потока возрастает; при очень больших интенсивностях эта скорость пропорциональна корню квадратному из сжатия p_2/p_1.

Приведем табл. 4 численных значений относительных сжатий и уплотнений газа ударной волной, распространяющейся в неподвижном

Таблица 4

M_1	$\Delta p/p_1$	$\Delta\rho/\rho_1$	ΔT, °C	θ, м/с	V, м/с	M_1	$\Delta p/p_1$	$\Delta\rho/\rho_1$	ΔT, °C	θ, м/с	V, м/с
1	0	0	0	340	0	5,90	40,3	4,20	1 925	2000	1611
1,18	0,47	0,30	33	400	93	8,80	92,3	4,58	5 940	3000	2880
1,47	1,39	0,81	87	500	224	11,80	165	4,72	7 750	4000	3300
2,94	9,20	2,77	465	1000	734	14,70	258	4,78	12 100	5000	4135
4,40	22,20	3,74	1075	1500	1181						

воздухе ($k=1{,}4$) при 15 °C ($T=288$ К) и нормальном атмосферном давлении; в той же таблице помещены соответствующие этим сжатиям значения M_1, θ, V и перепада температуры ΔT.

Заметим, что даже при сравнительно небольших сжатиях воздуха ударной волной возникает сильный спутный поток. Так, например, легко подсчитать по предыдущим формулам, что ударная волна, несущая относительное сжатие воздуха $\Delta p/p_1=0{,}22$, распространяясь со скоростью 370 м/с, могла бы вызвать спутный поток со скоростью 50 м/с. Отсюда видно, сколь ничтожные сжатия воздуха несут с собой обычные звуковые волны, почти совершенно не смещающие частицы воздуха.

Приведем следующие данные[1]): для звука в сто тысяч раз более интенсивного, чем самая громкая игра оркестра, амплитуда изменения плотности воздуха в звуковой волне составляет всего лишь 0,4% от нормальной плотности воздуха; амплитуда изменения давления равна 0,56% от атмосферного давления; амплитуда скорости воздуха не превышает 0,4% от скорости звука, т. е. имеет порядок 1,3 м/с. Амплитуда смещения частиц воздуха при частоте в 500 Гц достигает 0,036 см. Звук, создаваемый сильной сиреной, может вызвать спутный поток — «звуковой ветер», способный потушить свечу.

Приведенные в табл. 4 числовые данные относятся к идеальному газу. Они рассчитаны в предположении об отсутствии вязкости и теплопроводности, причем в силу адиабатичности предполагается и отсутствие лучистого отвода энергии, очень существенного при высоких температурах. На самом деле энергия ударной волны частично поглощается реальным газом и интенсивность волны при этом ослабевает; вместе с тем действительные процессы распространения ударных волн не являются адиабатическими, т. е. энергия их отводится в окружающее пространство.

Следует еще отметить то, что табл. 4 относится к распространению плоской ударной волны, для которой все характерные величины сохраняются постоянными независимо от расстояния от источника образования возмущения.

На практике приходится иметь дело со сферическими ударными волнами, процесс распространения которых существенно нестационарен и даже в простейших случаях требует для своего изучения применения сложного математического аппарата.

---

[1]) Зельдович Я. Б, Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматгиз, 1963, с. 18, 19.

Отличие сферического распространения волн от плоского можно просто показать на примере задачи о распространении сферической звуковой волны. Составим уравнения возмущенного движения в сферических координатах, поместив начало координат в центр возмущений (точечный источник звука). Точные уравнения будут состоять из уравнения движения, совпадающего с соответствующим уравнением в плоском случае (первое уравнение системы (55) гл. V), если только в нем заменить x на расстояние r точки относительно источника возмущений, а под u понимать радиальную скорость газа,

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}$$

и уравнения неразрывности, которое в сферических координатах приведется к такому:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\rho u)}{\partial r}=0.$$

В полной аналогии с § 32, пользуясь малостью возмущений, линеаризируем эти уравнения и, довольствуясь предположением об адиабатичности движения, придем к следующей системе уравнений малых возмущений:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial r}=0,\\ &\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\frac{\rho_0}{r^2}\frac{\partial (r^2u')}{\partial r}=0,\end{aligned}\qquad (72)$$

где, как и в § 32, $a_0^2=(dp/d\rho)_0$.

Решение этой системы в виде расходящейся от центра волны имеет вид

$$\rho'=\frac{f(r-a_0t)}{r}, \qquad (73)$$

что соответствует убыванию интенсивности возмущения по закону $1/r$. Сферические звуковые волны по сравнению с плоскими обладают и другими особенностями, на которых мы не будем останавливаться [1]).

§ 41. Элементарная теория сверхзвукового диффузора

Простым примером одномерного потока с прямым скачком уплотнения служит проточная часть прямоточного реактивного двигателя, упрощенная схема которого показана на рис. 39. Все устройство может быть расчленено на следующие части: входную часть I–III – сверхзвуковой диффузор, среднюю часть III–IV – камеру горения и выходную частью IV–V – сопло Лаваля.

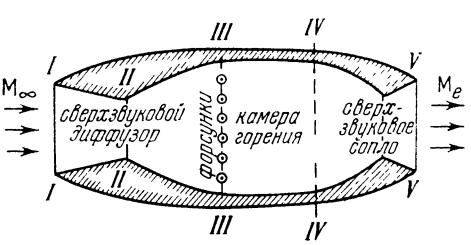


Рис. 39

Назначение сверхзвукового диффузора заключается в превращении кинетической энергии набегающего на двигатель сверхзвукового потока в энергию сжатия, необходимую для повышения интенсивности горения топлива, подводимого в камеру горения через форсунки.

[1]) См. цитированную только что книгу, с. 21, 22.

Камера горения служит для сообщения потоку тепловой энергии, которая является основным источником расширения газа и превращается в ускоряющем поток сопле Лаваля *IV—V* в кинетическую энергию струи на выходе из сопла *V*. Количество движения этой струи служит источником *реактивной силы* двигателя, которая определяется как произведение секундного массового расхода газа сквозь выходное сечение двигателя на относительную скорость выхлопа. Простейший расчет проточной части двигателя по одномерной теории элементарен и заключается в использовании, с одной стороны, изэнтропических формул, а с другой — основных формул теории прямого скачка. Приток тепла при этом может учитываться приближенно по теории, аналогичной изложенной в § 36.

В основе расчета лежит выбор режима работы двигателя. От выбора режима зависит расположение прямого скачка уплотнения, неизбежного при сверхзвуковом полете, внутри или вне проточной части двигателя. Оптимальным является расположение скачка в горле *II* сверхзвукового диффузора или в непосредственной близости за ним. Действительно, в этом случае набегающий на двигатель сверхзвуковой поток с числом $M_1>1$ станет [вспомнить следствия из уравнения Гюгонио (3)] замедляться в сужающемся канале на участке *I—II* до некоторого $M_2>1$, но меньшего M_1, затем посредством сравнительно малого по интенсивности скачка перейдет в дозвуковой поток и, оказавшись после этого в расширяющемся канале *II—III*, будет продолжать замедляться, восстанавливая давление. При этом весь канал *I—III* работает на полезное для двигателя восстановление давления перед камерой горения.

При некоторых режимах работы двигателя скачок уплотнения может возникнуть перед входом в двигатель в виде так называемой *отсоединенной* ударной волны (см. § 62). Наличие такого рода ударной волны на входе резко уменьшало бы к. п. д. двигателя, как об этом можно заключить из следующей оценки. Обозначим через $V_1>a_1$ (a_1 — скорость звука на данной высоте H полета) скорость летательного аппарата. Давление в набегающем потоке пусть будет p_1, давление в камере горения — p_2'. Предполагая сначала головную волну отсутствующей, а процесс поступления воздуха в камеру горения изэнтропическим, будем пренебрегать малой по сравнению со скоростью набегающего потока скоростью движения воздуха в камере. Тогда получим

$$p_2' = p_{20} = p_{10} = p_1\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

в частности, для воздуха ($k=1{,}4$)

$$p_2' = p_1(1+0{,}2M_1^2)^{3{,}5}.$$

Так, например, при $M_1=2$ получим сжатие воздуха в камере

$$p_2'/p_1 = 1{,}8^{3{,}5} \approx 8.$$

На высоте $H=10$ км давление p_1 (по международной стандартной атмосфере) равно примерно 26 кПа, в камере горения при $M_1=2$ (это на высоте 10 км соответствует скорости самолета, равной 600 м/с, или 2160 км/ч) при изэнтропичности торможения давление $p_2'=200$ кПа. Такое повышение давления весьма благоприятно отразилось бы на работе двигателя. Однако из-за наличия головной ударной волны, участок которой вблизи входа в двигатель можно рассматривать как прямой скачок, такое изэнтропическое движение не осуществляется. За счет потерь механической энергии, согласно рис. 38, давление в камере будет

равно

$$p_2' = p_{20} = 0{,}75 p_{10} = 0{,}75 \cdot 200 = 150 \text{ кПа},$$

т. е. 75% давления при изэнтропическом торможении. Разница эта была бы значительнее при больших M_1. Так, при $M_1=3$ давление в камере составило бы лишь 35% давления изэнтропически заторможенного воздуха, при $M_1=4$ — только 15%, при $M_1=5$ — всего 5%. Для сохранения эффекта повышения давления в камере горения двигателя необходимо приближать процесс восстановления давления к изэнтропическому, т. е. бороться с образующейся перед входом в двигатель головной волной.

Одним из способов такой борьбы является использование сверхзвукового диффузора, благодаря которому скачок во время запуска двигателя сначала «садится» на входное сечение, а затем перемещается в глубь входного сопла двигателя, теряя при этом свою интенсивность. Другой путь борьбы с головной ударной волной заключается в ее разрушении при помощи *иглы*, выдвигаемой навстречу сверхзвуковому потоку на входе в двигатель. Объяснение эффекта применения иглы выходит за рамки теории одномерного потока; изложение соответствующей двумерной теории будет дано в § 62.

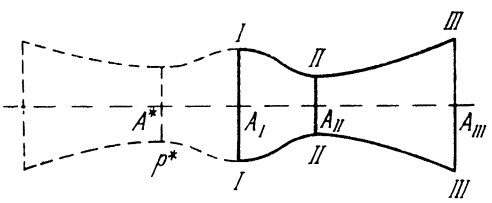


Рис. 40

Для количественной оценки возможности восстановления давления в потоке при помощи сверхзвукового диффузора сделаем следующие близкие к практике допущения: 1) поток в проточной части диффузора адиабатичен, 2) стенки диффузора непроницаемы. Эти два основных допущения сводятся к требованию отсутствия тепломассопереноса в диффузор извне. Используем условия сохранения вдоль потока секундной массы и полной энтальпии или температуры торможения, а следовательно, и критической температуры. Сохраним в качестве индексов, отмечающих принадлежность величины к тому или другому сечению диффузора, римские цифры[1]) (рис. 40) и обычные обозначения звездочкой и нуликом для критических и «заторможенных» значений характерных для потока величин.

Чтобы не вдаваться во второстепенные для одномерного подхода детали условий входа внешнего потока в сверхзвуковой диффузор, примем, что поток на входе в диффузор образован некоторым воображаемым, показанным на рис. 40 штрихами, идеальным соплом Лаваля с площадью узкого сечения (горла) A^* и критическими характеристиками ρ^*, p^*, a^*. Выходное сечение этого сопла будем считать совпадающим с входным сечением диффузора.

Если бы поток в сверхзвуковом диффузоре можно было рассматривать как изэнтропический, пренебрегая наличием в нем необратимых процессов: скачков уплотнения, трения и др., то этот диффузор представил бы в свою очередь идеальное сопло Лаваля, только с обратным по направлению потоком. Такое сопло часто называют *обратным соплом Лаваля*, иногда сохраняя это наименование и для реального сверхзвукового диффузора, восстановление давления в котором всегда связано с необратимыми неизэнтропическими процессами и прежде всего с наличием скачков уплотнения, неизбежных при переходе сверхзвуковых потоков в дозвуковые.

---

[1]) Арабские цифры 1, 2 были использованы уже для обозначения величин до и за скачком.

Среди всевозможных течений в сверхзвуковом диффузоре выделим два основных предельных случая. В первом из них набегающий сверхзвуковой поток переходит в дозвуковой еще до входа в диффузор, пройдя сквозь отсоединенную ударную волну (см. далее § 62) или через скачок уплотнения, сидящий во входном сечении диффузора. Поскольку поток за прямым скачком всегда дозвуковой, то в этом случае *диффузор работает как дозвуковой.* Положение скачка при этом *не является устойчивым* по отношению к малым возмущениям потока и рассматривается лишь как удобный образ для противопоставления его второму, оптимальному с точки зрения решения задачи о восстановлении давления случаю, когда скачок уплотнения, пройдя сквозь сужающийся участок *I—II*, займет положение в сечении *II* или в непосредственной близости за этим сечением.

Для приближенной, сравительно грубой оценки выигрыша в степени восстановления давления, осуществляемого сверхзвуковым диффузором, сосредоточим все внимание лишь на изменениях полного давления при прохождении потока через скачки уплотнения, считая течения до и за скачком по отдельности изэнтропическими. Количественной оценкой этого восстановления явится введенный ранее равенством (58) коэффициент $\varkappa$, зависящий от числа M в потоке перед скачком по формулам (59), (60) или (61).

Назовем коэффициентом восстановления полного давления в сверхзвуковом диффузоре η отношение величин $\varkappa(M)$ для второго (скачок в горле диффузора) и первого (скачок во входном сечении диффузора) случаев, т. е. положим

$$\eta = \frac{\varkappa(M_{II}^{(2)})}{\varkappa(M_I)}, \tag{74}$$

где M_I — одно и то же в обоих сравниваемых случаях, а $M_{II}^{(2)}$ обозначает число Маха в сечении (*II*) во *втором* случае, причем в этом случае за счет замедления сверхзвукового потока в сужающемся участке *I—II* будет $M_I > M_{II}^{(2)} > 1$.

В *первом* случае (скачок на входе), нисколько не нарушая общности, будем считать горло диффузора критическим ($A_{II} = A_{II}^*$) и полагать $M_{II}^{(1)} = 1$. Для определения η остается лишь найти $M_{II}^{(2)}$ при заданном M_I, так как сама функция $\varkappa(M)$ уже известна и, например, для воздуха затабулирована.

С этой целью составим отношения площадей критического сечения в воображаемом сопле Лаваля и горле диффузора A^*/A_{II} для двух рассматриваемых случаев движения и приравняем их между собой, так как и в том и другом случае геометрические размеры проточной части одни и те же. Имеем в *первом* случае (закон сохранения массы; сечение *II* критическое)

$$\rho^* a^* A^* = \rho_{II}^* a_{II}^* A_{II}, \tag{75}$$

или, по закону сохранения полной энтальпии, а следовательно, критической температуры и критической скорости газа,

$$\frac{A^*}{A_{II}} = \frac{\rho_{II}^*}{\rho^*}.$$

Используя еще формулу Клапейрона (газ совершенен)

$$\frac{p^*}{\rho^*} = RT^* = RT_{II}^* = \frac{p_{II}^*}{\rho_{II}^*} \tag{76}$$

Таблица 5

M_I	1	2	3	4	5	7	10	∞
$M_{II}^{(2)}/M_I$	1,000	0,876	0,884	0,891	0,895	0,898	0,901	0,903

Таблица 6

M_I	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
η	1,000	1,049	1,157	1,341	1,452	1,558	1,602	1,624	1,666

и переходя от критических давлений к полным, будем иметь в *первом* случае работы сверхзвукового диффузора

$$\frac{A^*}{A_{II}} = \frac{p_{II_0}}{p_0} = \varkappa(M_I). \tag{77}$$

Обращаясь к рассмотрению *второго* случая, когда скачок расположен в горле *II* сверхзвукового диффузора, вспомним, что в этом режиме работы диффузора сечение *II* уже не является критическим. Число $M_{II}^{(2)}$, став меньшим, чем M_I, все же сохранит значение $M_{II}^{(2)}>1$, соответствующее сверхзвуковому течению в этом сечении.

Введем по (10) функцию $\Theta(M)$, которая, в силу изэнтропичности движения на участке от горла воображаемого сопла Лаваля до сечения *II*, будет определяться равенствами (11). По закону сохранения массы получим

$$\frac{\rho_{II}u_{II}}{\rho_* a_*} = \frac{A^*}{A_{II}} = \Theta(M_{II}^{(2)}). \tag{78}$$

Сравнивая между собой (77) и (78), найдем искомую зависимость $M_{II}^{(2)}$ от M_I:

$$\Theta(M_{II}^{(2)}) = \varkappa(M_I). \tag{79}$$

Это уравнение допускает простое графическое решение. Пользуясь графиками функций $\Theta(M)$ и $\varkappa(M)$, помещенными на рис. 38, можем, задаваясь числом M_I на входе, найти $\varkappa(M_I)$ и, снеся эту ординату на кривую $\Theta(M)$, определить соответствующую абсциссу $M_{II}^{(2)}$. По виду кривых на рис. 38 заключим, что отношение $M_{II}^{(2)}/M_I$ будет близким к единице. Приводим табл. 5 для воздуха ($k=1{,}4$), подтверждающую это во всем диапазоне значений M_I.

Можно приближенно положить

$$M_{II}^{(2)} = 0{,}89\,M_I \text{ при } 1{,}2 \leqslant M_I \leqslant \infty.$$

При $M_I>2{,}5$ ошибка не превысит 1%.

Коэффициент восстановления полного давления в сверхзвуковом диффузоре η определим как функцию числа M_I на входе, исключая $M_{II}^{(2)}$ из (74) и (79).

Приводим табл 6 зависимости η от M_I для воздуха.

При рассмотрении табл. 5 и 6 можно заметить, что, несмотря на малую разницу в числах M на входе и в горле сверхзвукового диффузора, выигрыш в восстановлении полного давления довольно значителен и возрастает с ростом числа M_I в набегающем потоке. Этот факт находит

свое объяснение в отмеченной ранее высокой степени зависимости (обратная пропорциональность *пятой* степени для воздуха) коэффициента восстановления $\varkappa$ от числа Маха.

Описание разнообразных случаев работы сверхзвуковых диффузоров и приближенную трактовку их с точки зрения как одномерной, так и двумерной теорий можно найти в специальных руководствах по этому вопросу [1]).

Изложенные в настоящем параграфе элементы одномерной теории сверхзвукового диффузора весьма приближенно отражают сущность происходящих в нем в действительности явлений. Прежде всего отметим, что наряду с прямыми скачками уплотнения в проточной части диффузора и на его входе образуются системы косых скачков, наклоненных к оси диффузора под различными углами, отличными от прямого угла. Эти скачки нарушают одномерность потока, делают его двумерным (плоским или осесимметричным).

Кроме того, допущение об идеальности газа, т. е. отсутствии в нем внутреннего трения, также слишком упрощает действительный поток в диффузоре. На самом деле торможение потока силами трения создает неоднородность профиля скоростей, не учитываемую одномерной теорией. Существенную роль в работе сверхзвукового диффузора может сыграть явление отрыва потока (пограничного слоя) от стенок диффузора, тесно связанное с наличием в диффузоре косых скачков, падающих и отражающихся от стенок диффузора; об этом будет идти речь в заключительных главах курса.

§ 42. Измерение до- и сверхзвуковых скоростей пневматическими методами

В отличие от трубок Прандтля (рис. 28), применяемых для потоков малых скоростей ($M \ll 1$), трубки для измерения больших сверхзвуковых скоростей представляют собой *тонкие*, с передней частью конической формы зонды со статическими отверстиями для измерения давления p_1 в набегающем потоке газа плотности ρ_1. Полный напор p_{10} измеряется отдельной, присоединенной к прибору трубкой.

Предположим, что газ движется с большими, но *дозвуковыми* скоростями ($M_1 < 1$). В этом случае можно применить формулу изэнтропического движения

$$p_{10} = p_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{80}$$

Регистрируя микроманометром отдельно давление p_{10} в динамическом и давление p_1 в статическом отверстиях обычной трубки Прандтля, определим число M_1 движущегося газа, а зная температуру газа, найдем скорость звука a_1 в движущемся газе, а следовательно, и скорость V_1. Измерение температуры можно производить, например, термопарой или другим термометрическим прибором, помещенным в такую точку скоростной трубки, где скорость равна нулю, и можно быть уверенным, что измеряется температура *изэнтропически заторможенного газа* T_0. Таким местом является лобовая точка на скоростной трубке, где поток разветвляется. Измеряя непосредственно T_0, найдем T_1 по формуле

$$T_0 = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right),$$

[1]) См. Герман Р. Сверхзвуковые входные диффузоры/Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1960

затем скорость звука

$$a_1=\sqrt{kRT_1}$$

и искомую скорость

$$V_1=M_1a_1.$$

Показание давления p_{10} в динамическом отверстии D можно считать надежным, что же касается работы статического отверстия, то относительно него следует сделать оговорку. При достаточно больших, хотя и меньших единицы, значениях числа M_1 на сферической поверхности носика могут возникнуть зоны местных сверхзвуковых скоростей. Последующий переход от сверхзвуковых скоростей к дозвуковым вызовет возникновение на поверхности трубки перед статическим отверстием S *скачков уплотнения* и местные искажения давления. Наименьшее значение числа $M_1<1$ набегающего потока, при котором на поверхности обтекаемого тела (в данном случае измерительной трубки) возникают сверхзвуковые зоны, называют *критическим числом* M и обозначают $M_{кр}$ [1]). Если число M_1 набегающего потока превосходит число $M_{кр}$, то пользование статическим отверстием становится ненадежным и необходимо каким-нибудь независимым путем определять давление p_1 в движущемся газе, например при движении газа по цилиндрической трубе измерять давление на стенке трубы в сечении, близком к носику скоростной трубки.

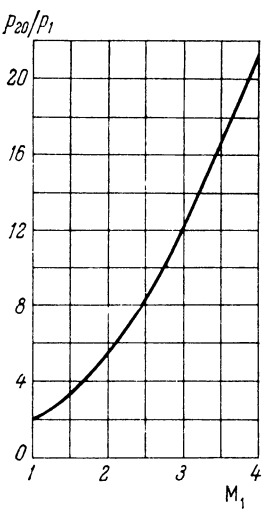


Рис. 41

Применение статического отверстия S при измерении скоростей в *сверхзвуковом* потоке может также оказаться неудовлетворительным, так как в этом случае перед динамическим отверстием возникает головная волна и давление p_1 не будет совпадать с показаниями микроманометра, соединенного со статическим отверстием. Скачки уплотнения, садящиеся на участок поверхности трубки DS, искажают поле давлений в газе.

Используя показание p_{20} динамического отверстия за головной волной и измеряя каким-нибудь другим путем p_1, найдем их отношение p_{20}/p_1. Это отношение связано с искомым числом M_1 набегающего потока формулой Рэлея

$$\frac{p_{20}}{p_1}=\frac{p_{20}}{p_{10}}\frac{p_{10}}{p_1}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\frac{M_1^{\frac{2k}{k-1}}}{\left(kM_1^2-\frac{k-1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}, \qquad (81)$$

следующей из формулы (59).

На рис. 41 приводится зависимость между p_{20}/p_1 и M_1 для воздуха ($k=1{,}4$).

При сверхкритических дозвуковых и сверхзвуковых скоростях носику трубки придают форму острой иглы (конуса с малым углом раствора), разбивающей головную ударную волну. Это позволяет улучшить работу статического отверстия, служащего для определения давления.

---

[1]) Об этом подробно будет сказано в § 67 гл. VIII.

Параллельно этой игле на некотором от нее расстоянии помещают заборник полного давления. Число Маха определяют, помещая в поток термометр сопротивления [1]).

§ 43. Нестационарное одномерное течение идеального газа. Распространение возмущений конечной интенсивности

Вернемся к рассмотрению нелинеаризованной системы дифференциальных уравнений одномерного нестационарного движения (55) гл. V, которые при адиабатичности движения могут быть путем замены ($\mathscr{P}$ — функция давления)

$$\frac{dp}{d\rho}=a^2,\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x},\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\rho}{a^2}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\rho}{a^2}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}$$

переписаны в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}=0,\\ \frac{1}{a}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{a}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}=0.\end{gathered}\tag{82}$$

Введем вместо функции давления $\mathscr{P}$ новую функцию $\widetilde{\mathscr{P}}$, положив

$$d\widetilde{\mathscr{P}}=\frac{1}{a}d\mathscr{P}=\frac{1}{\rho a}dp,\quad \widetilde{\mathscr{P}}=\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)\,a(p)}.\tag{83}$$

При этом

$$\frac{\partial \widetilde{\mathscr{P}}}{\partial t}=\frac{1}{a}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t},\quad \frac{\partial \widetilde{\mathscr{P}}}{\partial x}=\frac{1}{a}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x},$$

и система (82) перейдет в следующую:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial \widetilde{\mathscr{P}}}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial \widetilde{\mathscr{P}}}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \widetilde{\mathscr{P}}}{\partial x}=0.\end{gathered}$$

Почленным сложением и вычитанием преобразуем эту систему уравнений к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{\mathscr{P}}+u)+(u+a)\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\mathscr{P}}+u)=0,\\ \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{\mathscr{P}}-u)+(u-a)\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\mathscr{P}}-u)=0.\end{gathered}\tag{84}$$

В левых частях этих уравнений стоят одномерные индивидуальные производные: в первом уравнении от величины $\widetilde{\mathscr{P}}+u$, связанной с точкой, движущейся вдоль оси Ox со скоростью $u+a$, а во втором уравнении от величины $\widetilde{\mathscr{P}}-u$, связанной с точкой, движущейся вдоль оси Ox со скоростью $u-a$. Равенство нулю этих индивидуальных производных гово-

[1]) См., например, Горлин С. М. Экспериментальная аэромеханика.— М.: Высшая школа, 1970, с. 158—182.

рит о *сохранении* величины $\widetilde{\mathcal{P}}+u$ в точке, движущейся со скоростью $u+a$, и величины $\widetilde{\mathcal{P}}-u$ в точке, движущейся со скоростью $u-a$. Величины

$$r=\widetilde{\mathcal{P}}+u, \quad s=\widetilde{\mathcal{P}}-u \tag{85}$$

носят наименование *инвариантов Римана*[1]).

Замечая, что в одномерном движении вдоль оси Ox точке с абсциссой x соответствует на самом деле плоскость, перпендикулярная к оси Ox и проходящая через эту точку, например плоское сечение трубы, можем интерпретировать полученный результат как наличие двух семейств плоских волн, распространяющихся вдоль оси Ox.

Абсолютная скорость распространения волн *первого* семейства (C_1) равна

$$\frac{dx}{dt}=u+a, \tag{86}$$

а *второго* семейства (C_2)

$$\frac{dx}{dt}=u-a. \tag{87}$$

Направляя ось Ox вниз по потоку, т. е. считая $u>0$, можем сказать, что волны первого семейства в своем относительном движении по газу распространяются в ту же сторону, что и газ, волны второго семейства — в противоположную сторону. *Относительная скорость распространения волн по газу* равна $\pm a$, где a — *местная скорость звука*; верхний знак относится к первому семейству, нижний — ко второму. Волны первого семейства несут постоянное значение инварианта r, волны второго семейства — инварианта s.

В случае линеаризованного движения газа (§ 32) имела место аналогичная картина распространения возмущений, с той лишь разницей, что волны в этом случае распространялись с постоянной скоростью, равной скорости звука в невозмущенном газе, и несли постоянные значения параметров газа.

Прежде чем перейти к более детальному рассмотрению вопроса о распространении конечных возмущений, заметим, что волновой характер уравнений (84) позволяет указать графоаналитический метод их интегрирования. Изложим основную идею этого метода.

С геометрической точки зрения уравнения (84) могут быть интерпретированы так. В каждой точке плоскости (t, x) существуют два направления (на рис. 42 они показаны штриховыми линиями) с угловыми коэффициентами

$$\operatorname{tg}\theta_1=\left(\frac{dx}{dt}\right)_1=u+a, \quad \operatorname{tg}\theta_2=\left(\frac{dx}{dt}\right)_2=u-a, \tag{88}$$

обладающих тем свойством, что при бесконечно малом перемещении вдоль этих направлений соответствующие значения инвариантов Римана сохраняются.

Уравнения (86) и (87) можно рассматривать как дифференциальные уравнения семейств кривых C_1 и C_2, угловые коэффициенты касательных к которым определяются равенствами (88). Разыскание уравнений этих семейств кривых в конечной форме невозможно до интегрирования уравнений (84) и нахождения $u(x, t)$ и $a(x, t)$; однако, как мы сейчас увидим, наличие равенств (88) существенно как для представле-

---

[1]) Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.— Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1860 (русский перевод: Риман Б. Сочинения. О распространении плоских волн конечной амплитуды.— М.: Гостехиздат, 1948, гл. XXI).

ния общего характера процессов, описываемых уравнениями (84), так и для интегрирования этих уравнений.

Кривые C_1 и C_2 представляют собой так называемые *характеристики* системы (84), а направления касательных к ним (88) — *характеристические* направления. Напомним, что в случае линеаризованной

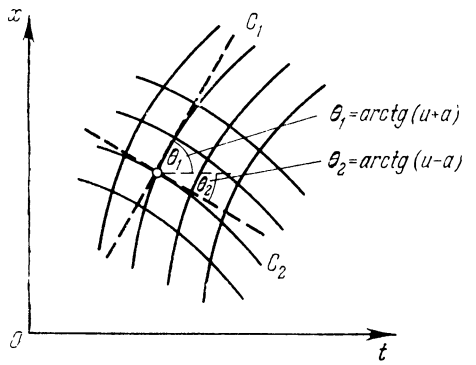


Рис. 42

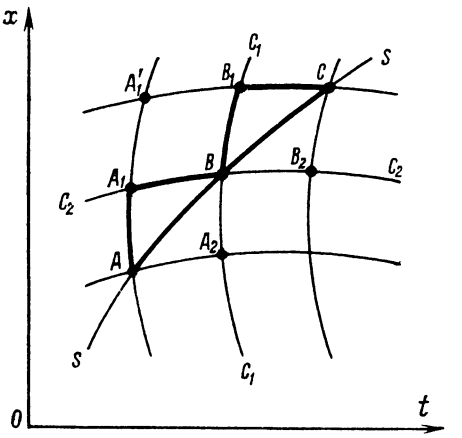


Рис. 43

задачи (§ 32) уравнения характеристик были известны в конечной форме; это были семейства прямых

$$x+at=\text{const}, \quad x-at=\text{const}.$$

Математическому понятию характеристик в плоскости (x, t) как раз и соответствуют введенные ранее понятия волн как плоскостей, движущихся со скоростями $u+a$ и $u-a$ и несущих значения инвариантов Римана r и s.

Предположим, что нам задано некоторое начальное распределение скорости $u(s)$ и параметров газа $p(s)$, $\rho(s)$, $a(s)$, а следовательно, и $\widetilde{\mathcal{P}}(s)$ вдоль некоторой кривой S (рис. 43), направление касательных к которой не совпадает с характеристическими направлениями. В частном случае это может быть заданием *начальных* условий при $t=0$, т. е. на оси Ox, или *граничных* условий на прямых, параллельных оси Ot.

Определив по (88) угловые коэффициенты кривой C_1 в точке A и кривой C_2 в близкой точке B по формулам

$$\operatorname{tg}\theta_{1A}=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{1A}=u_A+a_A, \quad \operatorname{tg}\theta_{2B}=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{2B}=u_B-a_B,$$

проведем через эти точки соответствующие характеристические направления и построим малый треугольник AA_1B.

На отрезке AA_1 характеристики C_1 сохраняется первый инвариант r, т. е.

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{A_1}+u_{A_1}=\widetilde{\mathcal{P}}_A+u_A,$$

а на отрезке A_1B характеристики C_2 — второй инвариант s, так что ,

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{A_1}-u_{A_1}=\widetilde{\mathcal{P}}_B-u_B.$$

Из полученной системы равенств находим

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{A_1}=\frac{1}{2}(\widetilde{\mathcal{P}}_A+u_A+\widetilde{\mathcal{P}}_B-u_B).$$

$$u_{A_1} = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathcal{P}}_A + u_A - \widetilde{\mathcal{P}}_B + u_B),$$

а следовательно, и p_{A_1}, ρ_{A_1}, a_{A_1}.

Повторяя такое же рассуждение относительно треугольника BB_1C, построенного по значениям угловых коэффициентов характеристики C_1 в точке B и характеристики C_2 в точке C, найдем значения u_{B_1} и $\widetilde{\mathcal{P}}_{B_1}$ в точке B_1, а следовательно, и p_{B_1}, ρ_{B_1} и a_{B_1}. Это позволит наметить направления характеристик в точках A_1 и B_1, построить треугольник $A_1A_1'B_1$ и, по предыдущему, определить значения u и $\widetilde{\mathcal{P}}$ в точке A_1, а затем в точках A_2, B_2 и т. д. Задаваясь достаточно густым делением кривой S в точках A, B, C и т. д., найдем значения неизвестных функций u, p, ρ, a в сколь угодно близких друг к другу точках плоскости (x, t).

Обратимся теперь к более детальному рассмотрению вопроса об одномерном распространении в идеальном газе возмущений *конечной* интенсивности. Покажем, что, подобно тому как это имело место в случае малых возмущений, распространение конечных по величине возмущений также может происходить при помощи *простых волн* (§ 32), т. е. волн, бегущих с постоянной скоростью и несущих с собой постоянные значения параметров газа. Такого рода распространение возмущений конечной интенсивности будет иметь место, если один из инвариантов Римана постоянен во всей области течения, для чего, очевидно, достаточно, чтобы этот инвариант был постоянным в начальный момент времени (при $t=0$, вдоль оси Ox). Возможность такого рода допущения будет вскоре пояснена и проиллюстрирована примером.

Пусть для определенности постоянен второй инвариант $s = \widetilde{\mathcal{P}} - u$.

Полагая $p = p_0$ при $u = 0$ и вспоминая определение $\widetilde{\mathcal{P}}$, данное последней из формул (83), будем иметь во всей области течения и в любой момент времени

$$\widetilde{\mathcal{P}} = u. \tag{89}$$

При этом второе уравнение системы (84) выполнится тождественно, а первое, переписанное в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + a)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{90}$$

показывает, что волны семейства C_1 несут постоянные значения скорости u. Согласно (89) постоянными будут также значения функции $\widetilde{\mathcal{P}}$, а следовательно, и параметров газа p, ρ и a. Отсюда следует, что абсолютная скорость распространения волны $u+a$ и скорость ее по отношению к газу a сохраняют постоянные значения в данной волне, т. е. волна *простая*.

Из принятого условия $u > 0$ и равенства (89) заключим, что $\widetilde{\mathcal{P}} > 0$, а по (83) $p > p_0$, т. е. возмущения, переносимые волнами первого семейства, соответствуют *сжатию* газа, а сами волны можно назвать *волнами сжатия*.

Точно так же, сделав предположение о сохранении во всей области течения и во времени инварианта $r = \widetilde{\mathcal{P}} + u$, т. е. положив

$$\widetilde{\mathcal{P}} + u = \text{const} = 0, \tag{91}$$

где константа выбрана равной нулю из тех же соображений, что и в предыдущем случае, убедимся, что при этом второе уравнение системы (84) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u - a)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{92}$$

т. е. в волнах второго семейства C_2, так же как и в волнах первого семейства, скорость u сохраняет свое значение, а по (91) сохраняются $\widetilde{\mathcal{P}}$, p, ρ и a. Итак, при выполнении условия (91) второе семейство C_2 также представляет собой совокупность *простых* волн с абсолютной скоростью распространения $u-a$ и со скоростью a по отношению к газу, направленной в сторону, противоположную движению газа. Согласно (91) и условию $u>0$ заключим, что волны второго семейства представляют собой *волны разрежения*.

В отличие от случая малых возмущений, рассмотренного в § 32, где все простые волны имели одну и ту же по величине скорость распространения, равную скорости звука в невозмущенном газе, в разбираемом сейчас случае простых волн, несущих *конечные* по интенсивности возмущения, скорости распространения по отношению к газу, равные по абсолютной величине местной скорости звука, не одинаковы для различных волн данного семейства.

Легко убедиться в том, что в случае возмущений конечной интенсивности абсолютная и относительная скорости распространения простых волн первого семейства C_1 тем больше, чем интенсивнее переносимые ими возмущения. Для этого выразим $\widetilde{\mathcal{P}}$ через a, предполагая для определенности движение *изэнтропическим*. Имеем в этом случае

$$d\widetilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{a}d\mathcal{P} = \frac{1}{\rho a}dp = \frac{1}{a}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho} = a\frac{d\rho}{\rho}; \tag{93}$$

с другой стороны,

$$a^2 = k\frac{p}{\rho} = \text{const}\cdot\rho^{k-1},$$

и, вычисляя логарифмический дифференциал, найдем

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2}{k-}\frac{da}{a},$$

так что

$$d\widetilde{\mathcal{P}} = \frac{2}{k-1}da, \quad \widetilde{\mathcal{P}} = \frac{2}{k-1}(a-a_0), \tag{94}$$

где значок нуль, как и ранее, относится к параметрам покоящегося газа ($u=0$), а постоянная интегрирования выбрана в согласии с определением $\widetilde{\mathcal{P}}$ (83). Подставляя полученное значение $\widetilde{\mathcal{P}}$ в (89), найдем

$$a = a_0 + \frac{k-1}{2}u, \quad u+a = a_0 + \frac{k+1}{2}u. \tag{95}$$

Из этих равенств непосредственно следует, что для волн первого семейства C_1 чем больше скорость u возмущенного движения газа, тем больше скорости $u+a$ абсолютного и a относительного распространения волны. Но, согласно (89), большей скорости движения соответствуют и бо́льшие значения $\widetilde{\mathcal{P}}$, а вместе с тем давления p и плотности ρ возмущенного газа, так как по определению функции $\widetilde{\mathcal{P}}$

$$\frac{dp}{d\widetilde{\mathcal{P}}} = \rho a > 0, \quad \frac{d\rho}{d\widetilde{\mathcal{P}}} = \frac{\rho}{a} > 0.$$

Таким образом, абсолютная и относительная скорости распространения волн первого семейства (волн сжатия) тем больше, чем больше переносимые ими интенсивности возмущений.

Для волн второго семейства C_2 — волн разрежения — будем иметь, согласно (91) и (94),

$$a = a_0 - \frac{k-1}{2}u, \quad u-a = -a_0 + \frac{k+1}{2}u \tag{96}$$

С увеличением разрежения, т. е. абсолютной величины разности $p-p_0$, будет, согласно (83), увеличиваться и абсолютное значение функции $\widetilde{\mathcal{P}}$, так что по (91) увеличится и скорость движения газа u. Из первого равенства системы (96) заключим, что при этом скорость a распространения волн разрежения относительно газа будет уменьшаться, а абсолютная скорость увеличиваться.

Отсюда следует основное отличие явления распространения *конечных* возмущений от распространения *малых* возмущений: *начальная форма распределения возмущений не сохраняется.*

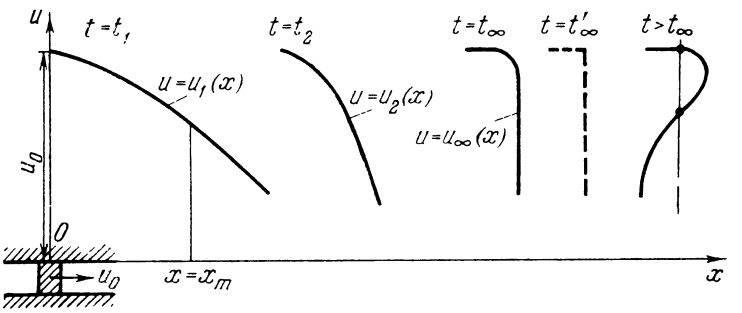


Рис 44

Чтобы составить общее представление о характере деформации кривой распределения начальных возмущений, рассмотрим опять движение поршня в трубе (рис. 44). Пусть скорость поршня равна u_0, направлена слева направо вдоль положительного направления оси Ox; справа от поршня образуется сжатие газа. В момент времени $t=t_1$ перед поршнем образовалось возмущение скоростей, которое можно себе представить в виде некоторой непрерывной спадающей кривой $u=u_1(x)$. В последующий момент времени $t=t_2>t_1$ кривая распределения скоростей $u=u_2(x)$ будет иметь более крутой уклон, так как за промежуток времени t_2-t_1 точки кривой $u_1(x)$ сместятся в горизонтальном направлении на отрезки, согласно теории распространения волн первого семейства (волн сжатия) равные

$$(u_1+a)(t_2-t_1)=\left(a_0+\frac{k+1}{2}u_1\right)(t_2-t_1) \qquad (97)$$

и, следовательно, тем бо́льшие, чем больше ординаты u_1 кривой $u_1(x)$. С течением времени уклон кривой будет продолжать возрастать, пока в некоторый момент времени $t=t_\infty$ в одной из точек кривой касательная не станет перпендикулярной к оси Ox, а производная $u'_\infty(x)$ бесконечной. В дальнейшем при $t>t_\infty$ верхние точки кривой распределения скоростей должны были бы обогнать нижние, а кривая — приобрести форму, показанную на рис. 44 крайней справа. Но такая форма физически невозможна, так как при этом одному и тому же сечению трубы в данный момент соответствовало бы несколько различных скоростей. На самом деле изменение формы продолжается только до тех пор, пока касательные не станут перпендикулярными к оси Ox. Предельной формой распределения возмущений будет служить *скачкообразное* изменение скорости, показанное на рис. 44 штрихами и соответствующее, очевидно, *ударной волне.*

Таким образом, из теории распространения волн сжатия конечной интенсивности вытекает *неизбежность возникновения в трубе ударных волн.*

Оценим промежуток времени $t_\infty-t_1$, необходимый для того, чтобы из начального распределения скоростей образовалось распределение $u=$

$=u_\infty(x)$ с бесконечно большим уклоном в какой-нибудь одной точке. Этот промежуток времени можно принять за меру времени, по истечении которого из заданного начального распределения возмущения образуется распределение, характерное для ударной волны.

Обозначим через $u=u(x)$ некоторое промежуточное распределение скорости, имеющее место в момент t. Кривая $u(x)$ получается из кривой $u_1(x)$ параллельным оси Ox переносом ординат кривой $u_1(x)$ на расстояние (97), так что можно написать

$$u(\xi)=u_1(x), \tag{98}$$

где положено

$$\xi = x + \left[a_0 + \frac{k+1}{2}u_1(x)\right](t-t_1). \tag{99}$$

Поясним, что такой перенос ординат кривой $u_1(x)$ соответствует перемещению в плоскости (x, t) вдоль прямолинейных характеристик первого семейства с постоянными на характеристике скоростями $u_1(x)$.

Для вычисления производной в точке ξ возьмем производную по x от обеих частей равенства (98); будем иметь, используя (99),

$$u'(\xi)\frac{d\xi}{dx} = u'(\xi)\left[1 + \frac{k+1}{2}u_1'(x)(t-t_1)\right] = u_1'(x),$$

откуда

$$u'(\xi) = \frac{u_1'(x)}{1+\frac{k+1}{2}u_1'(x)(t-t_1)}. \tag{100}$$

Пусть $x=x_m$ — абсцисса точки, в которой кривая $u_1(x)$ имеет максимальный по абсолютной величине уклон $u_1'(x_m)$. Тогда, полагая, что в момент времени $t=t_\infty$ левая часть равенства (100) при $\xi=\xi_m$ обратится в бесконечность, получим из условия конечности величины $u_1'(x_m)$ следующее равенство:

$$1 + \frac{k+1}{2}u_1'(x_m)(t_\infty - t_1) = 0.$$

Отсюда следует

$$t_\infty - t_1 = -\frac{2}{(k+1)u_1'(x_m)} = \frac{2}{(k+1)|u_1'(x_m)|}.$$

Полученное выражение может служить оценкой промежутка времени, по истечении которого распределение скоростей с максимальным по

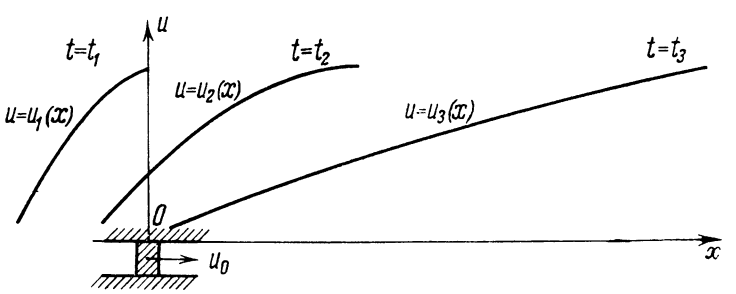


Рис 45

абсолютной величине уклоном $|u_1'(x_m)|$ перейдет в скачкообразное распределение скоростей, соответствующее образованию ударной волны. Этот промежуток времени *конечен* и имеет тем меньшую величину, чем больше максимальный уклон кривой начального возмущения скоростей.

При рассмотренном только что движении поршня слева от него образуется разрежение, которое будет распространяться при помощи волн второго семейства (волн разрежения) и также приведет к некоторому непрерывному распределению скоростей возмущений, направленных в сторону положительных x. Но в этом случае распределение скоростей представится не спадающей, как на рис. 44, а восходящей кривой (рис. 45), так как точки, ближние к левой стороне поршня, будут иметь бо́льшие скорости, чем удаленные от нее. Выведенное из равенств (96) заключение о возрастании абсолютной скорости распространения волн второго семейства показывает, что в этом случае уклон кривых уменьшается и тенденция к образованию разрывов отсутствует.

§ 44. Волны разрежения за движущимся поршнем. Центрированные волны. Автомодельная и общая задачи

Рассмотрим детальнее[1]) вопрос о волнах разрежения, образующихся в одномерном газовом потоке за движущимся поршнем. Начнем с простейшего случая так называемых *центрированных* волн разрежения.

Прежде всего заметим, что из условия сохраняемости скорости движения газа u и скорости звука a вдоль характеристик данного семейства, согласно (86) или (87), следует их *прямолинейность* в плоскости (x, t). Действительно, если, например, принять постоянство инварианта r, т. е. в изэнтропическом случае положить

$$u + \frac{2a}{k-1} = \text{const} = u_1 + \frac{2a_1}{k-1}, \tag{101}$$

то вдоль характеристик C_2 второго семейства — волн разрежения — должны сохраняться u и a, так что из равенства

$$\frac{dx}{dt} = u - a = \text{const} = u_1 - a_1$$

будет вытекать

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x - x_1}{t - t_1} = u_1 - a_1,$$

где (x_1, t_1) — какая-то точка плоскости (x, t), находящаяся на характеристике C_2, а u_1 и a_1 — соответствующие скорость газа и скорость звука в этой точке. Из этого равенства следует уравнение семейства характеристик C_2 в плоскости (x, t)

$$x - x_1 = (u_1 - a_1)(t - t_1). \tag{102}$$

Это — *прямые линии*, на каждой из которых величины u_1 и a_1 сохраняют свое постоянное значение.

Если все характеристики данного семейства пересекаются в одной и той же точке, то соответствующие им волны носят наименование *центрированных*.

Рассмотрим в качестве примера *центрированных* волн задачу о потоке газа за движущимся поршнем (рис. 46) и определим, *каков должен быть закон движения поршня, для того чтобы вызываемые им волны разрежения были центрированными*.

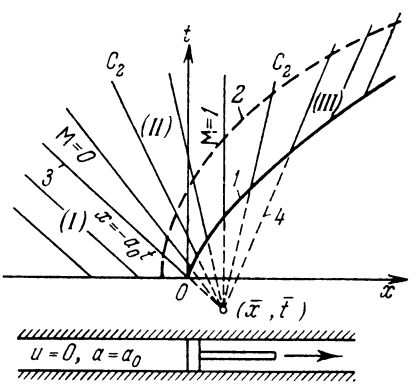
Обозначая через $(\bar{x}, \bar{t})$ координаты общей точки (полюса) пересечения характеристик второго семейства (волн разрежения), положим,

[1]) См. цитированную уже ранее монографию: Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматгиз, 1963, с. 25—43, и Патерсон Г. Н. Молекулярное течение газов.— М.: Физматгиз, 1960, с. 63—72.

что в начальный момент ($t=0$) поршень (скорость его обозначим через w), а вместе с ним и газ находились в покое ($w=0$, $u=u_0=0$, $a=a_0$), а с момента $t=t_1$ поршень, достигнув скорости w_1, стал двигаться равномерно с этой скоростью. Тогда, согласно (101) и (102), будем иметь уравнения характеристик в плоскостях (x, t) и (u, a) в конечной форме

$$\frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}=u-a, \qquad u+\frac{2a}{k-1}=\frac{2a_0}{k-1}. \tag{103}$$

Отметим, что, в то время как характеристики семейства C_2 в плоскости (x, t) представляют собой *семейство* прямых, зависящее от значения разности $u-a$, в плоскости (u, a) все характеристики сливаются в одну прямую.



1 – график пути поршня
2 – график пути частицы
3 – начальная характеристика области II
4 – замыкающая характеристика области II

Рис. 46

Из уравнений (103) найдем

$$u=\frac{2}{k+1}\left(\frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}+a_0\right), \tag{104}$$

$$a=\frac{2a_0}{k+1}-\frac{k-1}{k+1}\frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}. \tag{105}$$

Как видно из рис. 46, начальная характеристика *3* сектора центрированных волн *II* имеет уравнение

$$x=-a_0t,$$

непосредственно следующее из уравнения (87) при $u_0=0$, $a=a_0=\text{const}$ и условия прохождения этой характеристики через начало координат (начальное положение поршня в начальный момент времени). Область *I*, расположенная слева от этой характеристики, соответствует покоящемуся газу, и характеристиками в ней будут служить прямые, параллельные начальной характеристике. Область *II* замыкается характеристикой *4*, проходящей через ту точку графика пути поршня *1*, начиная с которой этот график становится прямолинейным, а скорость поршня постоянной и равной w_1. Замыкающая характеристика будет иметь уравнение

$$x-\bar{x}=(u_1-a_1)(t-\bar{t}),$$

где $u_1=w_1$, а a_1 — скорость звука слева от поршня, движущегося уже равномерно со скоростью w_1. Справа от замыкающей характеристики *4* в области *III* характеристики будут являться прямыми, параллельными этой характеристике.

Уравнение движения частиц газа при рассматриваемом движении поршня определяется путем интегрирования уравнения

$$u=\frac{dx}{dt}=\frac{2}{k+1}\left(\frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}+a_0\right) \tag{106}$$

и имеет вид

$$x-\bar{x}=(t-\bar{t})\left[\alpha(t-\bar{t})^{-\frac{k-1}{k+1}}+\frac{2a_0}{k-1}\right], \qquad t>\bar{t}. \tag{107}$$

Различные значения постоянной интегрирования α соответствуют выбору частиц, движения которых рассматриваются. Полагая $x=\xi\leqslant 0$

при $t=-x/a_0$, найдем значение $\alpha(\xi)$ и, подставляя его в уравнение (107), получим уравнение движения частицы, имевшей в начальный момент (при начале движения поршня) абсциссу ξ. В частности, таким образом можно найти и интересующий нас закон движения поршня, приводящий к центрированным волнам разрежения. Для этого достаточно составить уравнение движения частицы (107), выбрав константу α из условия, чтобы $\xi=0$ при $t=0$. Тогда получим

$$\alpha=(-\bar{t})^{-\frac{k-1}{k+1}}\left(\frac{\bar{x}}{\bar{t}}-\frac{2a_0}{k-1}\right).$$

Местное число Маха $M=u/a$ будет, согласно (104) и (105), равно

$$M=\frac{1+\dfrac{x-\bar{x}}{a_0(t-\bar{t})}}{1-\dfrac{k-1}{2}\dfrac{x-\bar{x}}{a_0(t-\bar{t})}};$$

оно сохраняет постоянное значение вдоль каждой характеристики C_2 и поэтому служит естественной «отметкой» характеристик семейства (рис. 46).

Пользуясь вторым из равенств (103), можно получить соотношение

$$a_0=a\left(1+\frac{k-1}{2}M\right),$$

а вслед за ним и группу равенств

$$T_0=T\left(1+\frac{k-1}{2}M\right)^2,\quad \rho_0=\rho\left(1+\frac{k-1}{2}M\right)^{\frac{2}{k-1}},\quad p_0=p\left(1+\frac{k-1}{2}M\right)^{\frac{2k}{k-1}},$$

существенно отличных от выведенных в предыдущей главе *изэнтропических* формул для *стационарного* движения газа. Прежде всего, в скобках, в отличие от стационарного движения, стоит число M в первой, а не второй степени; кроме того, показатели степени у круглых скобок справа в два раза превосходят соответствующие значения в стационарном случае. Для оценки этой разницы предположим, например, что поршень движется с возрастающей скоростью так, что $M\to\infty$, $a\to 0$ и, согласно второму равенству (103),

$$u\to u_{\max}=\frac{2}{k-1}a_0.$$

Если скорость поршня будет больше этой скорости, то между поршнем и газом образуется вакуум, причем скорость истечения в вакуум $u_{\max}$ в этом *нестационарном случае отличается от стационарной максимальной скорости* (19) тем, что у последней перед величиной a_0 вместо $2/(k-1)$ стоит множитель $\sqrt{2/(k-1)}$. Таким образом, например, для воздуха скорость истечения в вакуум при рассматриваемом нестационарном движении оказывается в $\sqrt{5}$ раз больше, чем в случае стационарного движения. При стационарном движении газа удельная кинетическая энергия истечения в вакуум, согласно (20), точно равна полной энтальпии в резервуаре, из которого происходит истечение; в случае же нестационарного истечения кинетическая энергия в $2/(k-1)$ раз превосходит полную энтальпию.

Простота приведенного выше решения для центрированных волн была обусловлена тем, что решение представляется функцией отношения $(x-\bar{x})/(t-\bar{t})$, а не отдельно каждого переменного x и t. Переходя к полярным координатам, можно было бы сказать, что решение зави-

сит только от полярного угла $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}$ и не зависит от расстояния $r = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (t-\bar{t})^2}$ текущей точки пространственно-временной плоскости до точки пересечения характеристик $(\bar{x}, \bar{t})$. Именно поэтому решение свелось к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое, кроме того, оказалось достаточно простым и позволило представить интеграл в замкнутом виде.

В дальнейшем придется часто встречаться с такого рода случаями возможности сведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В этих случаях решение представляется в функции от одного аргумента, который является некоторым сочетанием основных аргументов задачи. Постоянным значениям этого сложного аргумента соответствуют целые многообразия решений по отдельным аргументам, которые можно рассматривать как *подобные* между собой. По этой причине вообще решение дифференциального уравнения в частных производных, выраженное в функции одного сложного аргумента, представляющего одночленную совокупность аргументов, содержащихся в постановке задачи, и удовлетворяющее обыкновенному дифференциальному уравнению, к которому в этом случае приводится основное уравнение в частных производных, носит наименование *автомодельного* (в заграничной литературе — *подобного*) решения, а сама задача называется *автомодельной.*

Примером такого автомодельного решения является только что полученное решение задачи о центрированных волнах разрежения, где в качестве сложного аргумента фигурировало сочетание $(x-\bar{x})/(t-\bar{t})$. В полной аналогии с этой одномерной нестационарной задачей в дальнейшем будет разобрана плоская стационарная задача о центрированных волнах разрежения в сверхзвуковом газовом потоке вокруг внешности тупого угла. Большое число автомодельных задач будет рассмотрено также в последующих главах, посвященных теории движения вязкой жидкости в пограничном слое [1]).

Автомодельные решения представляют, конечно, лишь некоторые простейшие частные решения поставленной общей задачи, но вместе с тем в большинстве случаев оказываются полезными, так как позволяют судить об основных сторонах рассматриваемого явления. Стоит отметить — в дальнейшем это будет подтверждено многочисленными примерами,— что возможность существования автомодельных решений обусловливается отсутствием в постановке задачи (уравнениях, граничных и начальных условиях) некоторых характерных масштабов: времени, длины, массы или др., т. е. некоторой ограниченностью самой постановки задачи, отказом от общности постановки. Так, например, в предыдущей задаче о центрированных волнах разрежения за движущимся поршнем не могло быть речи о произвольном заданном наперед законе движения поршня, а, наоборот, по ходу решения задачи был определен тот частный закон движения поршня, при котором возможно существование центрированных волн.

Рассмотрим теперь общую постановку задачи о волнах разрежения за движущимся по *произвольному* закону поршнем.

Будем, как и ранее, предполагать, что первый инвариант Римана r сохраняет постоянную величину во всей области течения, т. е. выполняется равенство (101). Тогда, замечая, что вдоль прямолинейных, но в общем случае не центрированных характеристик второго семейства C_2 (волн разрежения) сохраняют свои значения u и a, будем иметь,

---

[1]) Разнообразные примеры автомодельных задач можно найти в книге: Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М Физматгиз, 1981

выполняя интегрирование дифференциального уравнния (87),

$$x=(u-a)t+\varphi(u), \tag{108}$$

где $\varphi(u)$ является постоянной интегрирования, различной на разных характеристиках. Для определения функции $\varphi(u)$ зададимся законом движения поршня $x_п=X(t_п)$ и тем самым скорости поршня $w=X'(t_п)$. Тогда совокупность равенств

$$\varphi(w)=X(t_п)-[w-a(w)]t_п,\ w=X'(t_п) \tag{109}$$

после исключения $t_п$ определит вид функции $\varphi(w)$; функция $a(w)$ находится по (101). Решение задачи представляется уравнением

$$x=[u-a(u)]t+X(t_п)-[w-a(w)]t_п,$$

которое надо рассматривать как уравнение для определения u в функции от x и t. В отличие от задачи о центрированных волнах в общем случае u является функцией от x и t, взятых по отдельности, а не от какой-то их совокупности.

В частном случае *центрированных* волн с полюсом в точке (x_0, t_0) будем по (108) иметь

$$\varphi(u)=x_0-(u-a)t_0,$$

а для определения $u(x, t)$ получим по (108) равенство

$$u-a(u)=\frac{x-x_0}{t-t_0},$$

т. е. вновь удостоверимся, что в центрированных волнах скорости частиц, так же как скорость звука и другие термодинамические параметры газа, будут функциями отношения $(x-x_0)/(t-t_0)$, а не x и t по отдельности. За иллюстративным примером и некоторыми деталями рассматриваемой задачи отсылаем интересующихся к цитированным выше страницам монографии Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера.

§ 45. Элементарная теория ударной трубы

Схема ударной трубы, служащей для создания в лабораторных условиях кратковременных сверхзвуковых потоков, не требующих для своего осуществления затраты больших количеств энергии, показана на рис. 47, *а*.

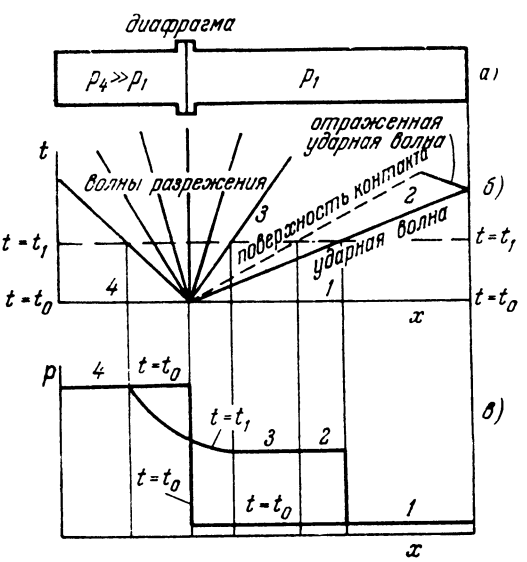


Рис. 47

Цилиндрическая труба с закрытыми входом и выходом разделена на два отсека диафрагмой, по обе стороны от которой находятся газы различных физических свойств. Газ, находящийся в левом отсеке, сжат до значительно большего давления, чем другой. В некоторый момент времени диафрагма разрушается и газ из левого отсека устремляется в правый. Разрыв давлений, имевший место до разрушения диафрагмы, распространяется в виде ударной волны вправо, увлекая за собой спутный поток газа. Этот поток встречает на своем

пути исследуемую модель, размещенную в правом отделении трубы. Специальная оптическая установка позволяет произвести при этом мгновенное фотографирование спектра обтекания модели, а также и другие интересующие исследователя измерения.

Элементарный расчет ударной трубы заключается в следующем. Охарактеризуем физические свойства газов двумя константами: молекулярным весом μ и показателем адиабаты k. Пусть газу, вначале находившемуся в правом отделении, соответствуют константы μ_1 и k_1, а газу в левом отделении — μ_4 и k_4. Начальные давления назовем соответственно p_1 и p_4, причем $p_4 \gg p_1$. Трубу будем считать теплоизолированной, а движение газа адиабатическим.

На диаграмме рис. 47, *б* приведены графики распространения ударной волны, поверхности контакта газов[1]) и волн разрежения. Как видно из графика, наибольшую скорость, выражаемую производной dx/dt, имеет ударная волна, затем поверхность контакта газов и, наконец, волны разрежения, распространяющиеся по газу справа налево, но сносимые вправо спутным потоком. Область трубы, занятая волнами разрежения (с возрастанием времени эта область расширяется), представляет собой область непрерывного изэнтропического движения, так что на границах этой области, используя формулы (48) гл. V, получим

$$\frac{p_4}{p_3} = \left(\frac{a_4}{a_3}\right)^{\frac{2k_4}{k_4-1}}. \tag{110}$$

Рассматривая волны разрежения как простые волны конечной интенсивности, применим к ним теорию, изложенную в § 43. Согласно этой теории во всей области, заполненной волнами разрежения, движущимися с абсолютной скоростью $u-a$, сумма $\widetilde{\mathcal{P}}+u$, равная по (94)

$$\widetilde{\mathcal{P}} + u = \frac{2}{k-1}a + u + \text{const},$$

сохраняет одно и то же значение, так что можно написать (на левой границе области *3* газ неподвижен)

$$\frac{2}{k_4-1}a_4 = \frac{2}{k_4-1}a_3 + u_3. \tag{111}$$

Замечая, что вблизи поверхности контакта газов давление и скорость непрерывны, будем иметь (рис. 47, *в*)

$$p_3 = p_2, \quad u_3 = u_2 = V,$$

где V — скорость спутного потока. Таким образом, вместо (110) получим, используя (111),

$$p_4 = p_2\left(\frac{a_4}{a_4 - \frac{k_4-1}{2}V}\right)^{\frac{2k_4}{k_4-1}}. \tag{112}$$

Вспоминая формулу (53) сжатия газа при прохождении его сквозь ударную волну ($M_1 = \theta/a_1$ — число Маха ударной волны)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k_1}{k_1+1}M_1^2 - \frac{k_1-1}{k_1+1} \tag{113}$$

и выражение (69) скорости спутного потока за ударной волной, которое

---

[1]) Предполагается, что за малый промежуток времени работы ударной трубы газы не успеют сколько-нибудь заметно перемешаться.

в настоящем случае будет иметь вид

$$V = \frac{2}{k_1 + 1}\left(\mathbf{M}_1 - \frac{1}{\mathbf{M}_1}\right)a_1, \tag{114}$$

подставим эти выражения в равенство (112). Тогда получим

$$\frac{p_4}{p_1} = \left(\frac{2k_1}{k_1 + 1}\mathbf{M}_1^2 - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}\right)\left[1 - \frac{k_4 - 1}{k_1 + 1}\left(\mathbf{M}_1 - \frac{1}{\mathbf{M}_1}\right)\frac{a_1}{a_4}\right]^{-\frac{2k_4}{k_4 - 1}}. \tag{115}$$

Здесь p_4/p_1 — заданное начальное отношение давлений в отсеках трубы, а отношение a_1/a_4 при одинаковости начальных температур газов может быть, согласно § 32 гл. V вычислено как

$$\frac{a_1}{a_4} = \sqrt{\frac{k_1\mu_4}{k_4\mu_1}}. \tag{116}$$

Подставляя это отношение в (115), найдем $\mathbf{M}_1$, а следовательно, по (114) и скорость спутного потока V в трубе.

На рис. 48 [1]) приводятся графики зависимости числа $\mathbf{M}_1$ от $\lg(p_4/p_1)$ при различных значениях параметра a_4/a_1 для $k_1 = 5/3$ и $k_4 = 7/5$.

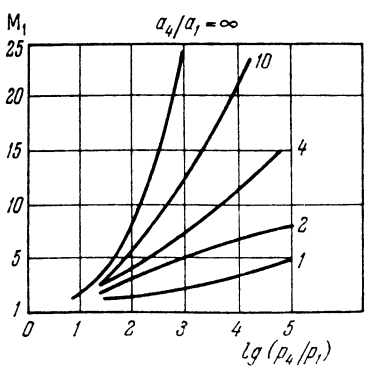


Рис. 48

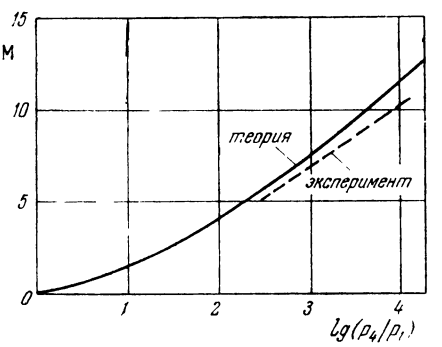


Рис. 49

Определим приближенно максимальное значение $\mathbf{M}_1$, соответствующее бесконечному значению отношения p_4/p_1. Для этого положим равным нулю выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части (115), и пренебрежем членом, содержащим $\mathbf{M}_1$ в знаменателе. Будем иметь

$$(\mathbf{M}_1)_{p_4/p_1=\infty} = \frac{k_1 + 1}{k_4 - 1}\frac{a_4}{a_1}. \tag{117}$$

Отсюда видно, что отношение a_4/a_1 следует выбирать по возможности бо́льшим, для чего выгодно в качестве газа, находящегося в левом отделении трубы под большим давлением, выбирать газ с малым молекулярным весом, например водород ($\mu_4 = 2{,}016$), и, наоборот, в правое отделение помещать тяжелые газы, например аргон ($\mu_1 = 39{,}94$).

Элементарная теория ударной трубы в ее простейшем виде дает удовлетворительное совпадение с экспериментом, как об этом можно судить по графику (рис. 49), заимствованному из цитированной выше работы и соответствующему применению газов водород — аргон.

[1]) Реслер Е. Л., Лин С. Ц., Кантровиц А. Получение газов высокой температуры в ударных трубах.— Сборник переводов и обзоров «Механика», 1953, вып. 5, с. 33—51.

ГЛАВА VII

БЕЗВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СРЕДЫ. ПЛОСКОЕ БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 46. Теоремы Кельвина и Лагранжа; условия существования безвихревых течений

Изучение неодномерных течений идеальной жидкости или газа: плоских, осесимметричных и более общих, пространственных движений представляет математические трудности. Уравнения Эйлера динамики идеальной жидкости и газа в предыдущей главе были использованы для вывода двух основных уравнений: Бернулли и Гельмгольца—Фридмана с вытекающей из последнего уравнения теоремой о сохранении вихревых линий. Непосредственное интегрирование уравнений Эйлера в общем случае вихревых движений не получило освещения в нашем курсе, хотя появление ЭВМ во многом облегчило решение такого рода задач. Имея в виду в настоящей главе обратиться к более доступному для решения случаю *безвихревых* движений, отошлем интересующихся вопросами вихревых движений к специальной монографии, написанной М. А. Гольдштиком[1]). Основным допущением, сыгравшим историческую роль в деле приближения теоретической гидродинамики к конкретным приложениям, явилось предположение об отсутствии в движущейся идеальной жидкости завихренности. Возможность существования такого безвихревого движения обосновывается следующими двумя теоремами.

Теорема Кельвина: *при баротропном движении идеальной жидкости под действием поля объемных сил с однозначным потенциалом циркуляция скорости по замкнутому жидкому контуру не изменяется.*

Эта теорема легко доказывается при помощи изложенной в § 17 кинематической теоремы Кельвина об изменении во времени циркуляции скорости. Согласно этой теореме

$$\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \oint \dot{\boldsymbol{V}}\cdot\delta\boldsymbol{r}.$$

Подставим в правую часть этого равенства выражение ускорения по основному уравнению Эйлера (3) гл. V, которое в случае потенциальных объемных сил и баротропности движения может быть переписано в виде

$$\dot{\boldsymbol{V}} = -\operatorname{grad}(\Pi + \mathcal{P});$$

тогда получим

$$\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r} = -\oint \operatorname{grad}(\Pi+\mathcal{P})\cdot\delta\boldsymbol{r} = -\oint \delta(\Pi+\mathcal{P}),$$

так как скалярное произведение градиента от некоторой функции на ориентированный в пространстве элемент дуги кривой есть не что иное, как дифференциал этой функции, взятый вдоль дуги кривой.

---

[1]) Гольдштик М. А. Вихревые потоки.— Новосибирск: Наука, Сибирское отд ние, 1981.

При однозначности функции П (однозначность $\mathcal{P}$ очевидна) контурный интеграл по замкнутому контуру от дифференциала равен нулю, так что

$$\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$$

и, следовательно,

$$\oint \boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\text{const},$$

что и доказывает теорему Кельвина. Вспоминая, что циркуляция скорости по замкнутому контуру равна суммарной интенсивности вихревых трубок, опоясанных этим контуром, можем на основании теоремы Кельвина заключить, что при принятых оговорках о баротропности движения и наличии однозначного потенциала объемных сил *сохраняются также интенсивности вихревых трубок*

$$\int_{\sigma}(\operatorname{rot}\boldsymbol{V})_n\,d\sigma=\text{const}. \tag{1}$$

Предположим теперь, что в некоторый начальный момент времени во всех точках области, заполненной жидкостью, отсутствует завихренность ($\operatorname{rot}\boldsymbol{V}=0$), т. е. элементарные жидкие объемы движутся без вращения, совершая лишь поступательное и деформационное движение; тогда постоянная, стоящая в правой части (1), будет равна нулю, и в любой другой момент времени сохранится равенство

$$\int_{\sigma}(\operatorname{rot}\boldsymbol{V})_n\,d\sigma=0. \tag{2}$$

Произвольность выбора поверхности σ в равенстве (2) позволит заключить, что в любой момент времени и в любой точке области будет

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{V})_n=0.$$

Наконец, в силу произвольности выбора направления нормали, найдем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{V}=0. \tag{3}$$

Отсюда следует теорема Лагранжа: *если во всех точках баротропно движущейся под действием объемных сил с однозначным потенциалом идеальной жидкости вихрь скорости в некоторый начальный момент времени был равен нулю, то движение останется безвихревым и в любой последующий момент времени.*

Из аналогичного рассуждения следует также, что если вначале движение было вихревым, то оно останется вихревым и в дальнейшем.

Предположим, что твердое тело, погруженное в покоящуюся жидкость, начинает двигаться. При покое жидкости завихренности не было, следовательно, в условиях справедливости теоремы Лагранжа вихри образоваться не могли, и движение останется во все дальнейшее время безвихревым. Если в некоторый момент времени благодаря нарушению условий теоремы Лагранжа завихренность в идеальной жидкости была создана, то в дальнейшем, при сохранении этих условий, движение будет вихревым. В действительности приходится наблюдать как образование, так и исчезновение вихревых движений. Главной причиной такого нарушения справедливости теорем Кельвина и Лагранжа служит наличие в реальной жидкости *внутреннего трения* (*вязкости*), особенно существенного в тонком пограничном слое на поверхности обтекаемого тела и в *аэродинамическом следе* за телом.

Внутреннее трение не является единственной причиной возникновения вихрей. Так, в свободной атмосфере причиной вихреобразований служат отклонения от баротропности при движении воздуха: плотность воздушных слоев зависит не только от давления, но и от температуры, определяемой солнечной радиацией, от количества водяных паров и других причин.

Модель идеальной жидкости допускает еще одну возможность нарушения справедливости теорем Кельвина и Лагранжа. Это — образование *поверхностей разрыва* сплошной жидкости, неустойчивых и сворачивающихся в дискретные вихри. Таковы, например, наблюдаемые в следе за обтекаемым телом *вихревые дорожки* Кармана (см. спектры в ранее цитированном атласе М. Ван-Дайка).

Несмотря на наличие всех этих факторов, нарушающих существование безвихревого движения, схема безвихревого движения во многих практических случаях дает близкую к действительности картину. Итак, примем допущение об отсутствии завихренности и обратимся к рассмотрению основных свойств такого безвихревого потока.

§ 47. Потенциал скоростей и его определение по заданному полю скоростей

Если движение жидкости безвихревое, то из условия равенства нулю вихря скорости $\operatorname{rot} \boldsymbol{V}$ следует существование функции φ от координат и времени, связанной со скоростью $\boldsymbol{V}$ равенством

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{4}$$

или, в проекциях на оси прямоугольных декартовых координат,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{5}$$

называемой *потенциалом поля скоростей* (или *потенциалом скоростей*).

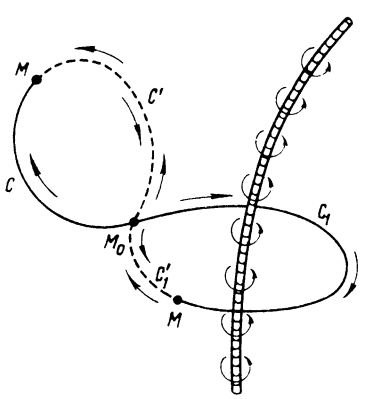


Рис 50

Потенциал скоростей, согласно равенствам (4) или (5), определяется с точностью до постоянной.

Уравнением *поверхности уровня потенциала скоростей* будет служить

$$\varphi(x, y, z; t) = \text{const},$$

причем в случае *стационарного* поля скоростей время t как аргумент φ отсутствует.

По заданному полю скоростей из уравнения (4) можно найти потенциал φ. Для этого достаточно умножить обе части (4) скалярно на направленный элемент $\delta \boldsymbol{r}$ какой-нибудь кривой C, выходящей из точки M_0 (рис. 50), и проинтегрировать полученное выражение вдоль участка этой кривой M_0M. Тогда для определения потенциала скоростей $\varphi(M)$ в точке M получим равенство

$$\int\limits_{\substack{M_0 \\ (C)}}^{M} \boldsymbol{V} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \int\limits_{\substack{M_0 \\ (C)}}^{M} \operatorname{grad} \varphi \cdot \delta \boldsymbol{r} = \int\limits_{\substack{M_0 \\ (C)}}^{M} \delta \varphi = \varphi(M) - \varphi(M_0), \tag{6}$$

откуда будет следовать

$$\varphi(M)=\varphi(M_0)+\int\limits_{\substack{M_0\\(C)}}^{M} \boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\varphi(M_0)+\int\limits_{\substack{M_0\\(C)}}^{M}(u\,\delta x+v\,\delta y+w\,\delta z). \qquad (7)$$

Если течение в односвязной области[1]) безвихревое, то, замкнув (на рисунке штриховой кривой) кривую C при помощи кривой C' так, чтобы точка M совпала с M_0, и заметив, что при этом циркуляция скорости по замкнутому контуру $(C+C')$, равная сумме интенсивностей опоясанных контуром вихревых трубок, в рассматриваемом скоростном поле, где нет вихрей, обращается в нуль, получим, согласно (7),

$$\varphi(M)=\varphi(M_0) \text{ при } M\to M_0, \qquad (8)$$

т. е. потенциал скоростей представляет собой *однозначную* функцию координат. Отсюда следует также, что интеграл в выражении (7) не зависит от формы контура интегрирования C, так как в силу равенства нулю интеграла по замкнутому контуру, состоящему из участка M_0CM, представленного на рисунке сплошной кривой, и участка $MC'M_0$, представленного штриховой кривой, можно заключить, что

$$\int\limits_{\substack{M_0\\(C)}}^{M}+\int\limits_{\substack{M\\(C')}}^{M_0}=0 \quad \text{или} \quad \int\limits_{\substack{M_0\\(C)}}^{M}=\int\limits_{\substack{M_0\\(C')}}^{M}.$$

Иное получится, если в безвихревом движении имеется изолированная вихревая трубка (рис. 50). Производя в этом случае интегрирование по контуру C, вновь получим равенство (7); но другой результат будет иметь место, если вместо контура C взять контур C_1, охватывающий вихревую трубку. Интеграл, стоящий в правой части равенства (7), вычисленный по замкнутому контуру (C_1+C_1') (замыкание показано на рисунке штрихами), как это следует из теоремы Стокса (§ 15), будет равен интенсивности вихревой трубки

$$\oint\limits_{(C_1+C_1')} \boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\Gamma,$$

и, согласно (7), потенциал в точке M_0 после обхода вихревой трубки окажется равным $\varphi(M_0)+\Gamma$. Выйдя из точки M_0 и взяв за контур интегрирования петлеобразную кривую (не показанную на рисунке), k раз опоясывающую вихревую трубку, вернемся в точку M_0 со значением потенциала, отличающимся от первоначального на величину, кратную интенсивности Γ

$$\varphi(M_0)\pm k\Gamma.$$

Таким образом, если в односвязной области безвихревого движения жидкости имеется вихревая трубка, то потенциал скоростей, выраженный через скорости по формуле (7), будет *многозначной функцией* точек поля. Значение потенциала скоростей в точке окажется в этом случае зависящим от формы кривой, вдоль которой производится интегрирование.

Имея в виду дальнейшие гидродинамические приложения, подойдем к вопросу о многозначности потенциала в безвихревом движении еще иначе. Выделим из области течения жидкости чисто безвихревую часть, рассматривая поверхности тока, ограничивающие вихревые трубки, как *твердые стенки*. Поясним, что вблизи вихревых линий всегда

[1]) *Односвязной* называется область, в которой любой замкнутый контур может быть непрерывно стянут в точку.

имеются замкнутые линии тока, расположенные на поверхностях тока, отделяющих вихревые линии от окружающей их жидкости.

В идеальной среде благодаря отсутствию трения можно мысленно, нисколько не нарушая происходящего движения, заменять поверхности тока твердыми, непроницаемыми для движущейся среды поверхностями.

При таком рассмотрении движения в жидкости уже нет вихревых трубок, но зато сама область течения становится *многосвязной*[1]). Действительно, по второй теореме Гельмгольца вихревые трубки не могут заканчиваться в самой жидкости: они образуют либо замкнутые трубки — вихревые кольца, либо опираются на граничные поверхности (твердые стенки, свободные поверхности раздела). Во всех этих случаях замкнутый контур, опоясывающий трубку, оставаясь в области безвихревого течения, не может быть непрерывным преобразованием сведен в точку (рис. 51); это и доказывает, что область чисто безвихревого движения при наличии указанного выделения вихревых трубок, вообще говоря, *не односвязна*. Значения циркуляций скорости Г по контурам, однократно охватывающим трубчатую поверхность, нарушающую односвязность пространства, заключающего жидкость, в общих случаях любых физических полей называют *циклическими постоянными* многосвязных областей.

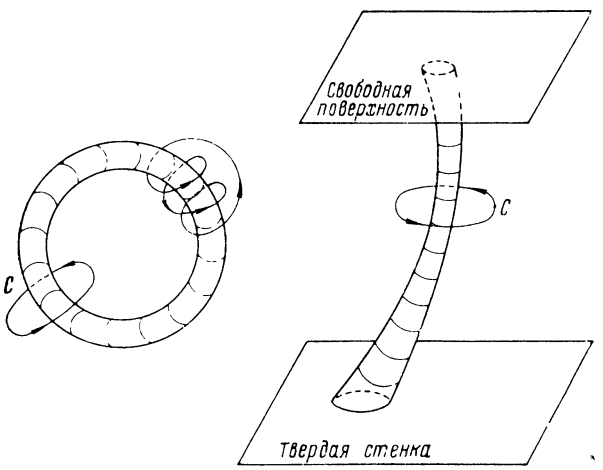


Рис. 51

При наличии в многосвязной области течения вихревых трубок теорема Стокса должна быть сформулирована так: *циркуляция скорости по замкнутому контуру, проведенному произвольно в многосвязной области, отличается от суммы интенсивностей опоясанных контуром вихревых трубок на сумму целых кратных циклических постоянных многосвязной области.*

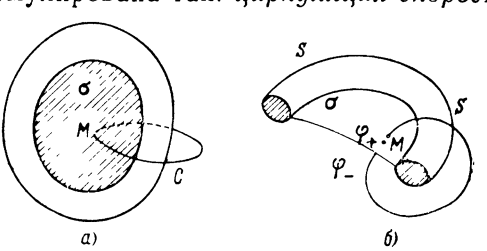


Рис. 52

Проводя в многосвязной области дополнительные поверхности, можно уменьшить степень ее связности и при желании превратить многосвязную область в односвязную. Так, например (рис. 52), двухсвязную область вне кольца (тора) можно сделать односвязной, если дополнительно провести поверхность σ, закрывающую отверстие кольца. При наличии поверхности σ проведение замкнутого контура *C*, охватывающего кольцо, становится невозможным. Если циклическая постоянная рассмотренной до проведения σ двухсвязной обла-

[1]) *k-связной* называется область, в которой можно указать $k-1$ не сводящихся друг к другу непрерывным преобразованием контуров, не стягиваемых в точку.

сти отлична от нуля, то значение потенциала скорости $\varphi_+(M)$ на одной, скажем передней, стороне поверхности σ будет отличаться от значения $\varphi_-(M)$ на задней стороне поверхности σ на величину циклической постоянной, хотя значение потенциала взято в одной и той же точке M (рис. 52, *б*). В этом случае потенциал скоростей $\varphi(M)$ при прохождении через поверхность σ претерпевает конечный скачок $\varphi_+ - \varphi_-$, а поверхность σ представляет собой поверхность разрыва потенциала. Рассматривая поверхность σ вместе с поверхностью S как границу области, можно считать потенциал φ непрерывным во всей области.

§ 48. Интеграл Лагранжа — Коши. Некоторые общие свойства безвихревого движения

В случае безвихревого движения идеальной жидкости легко указать первый интеграл уравнений движения. Для этого возьмем уравнение Эйлера в форме Громека — Ламба [(8) гл. V]

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi\right) + \operatorname{rot} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} = 0 \tag{9}$$

и положим в нем, согласно (4),

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad}\varphi, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{V} = 0. \tag{10}$$

Тогда, замечая, что вследствие независимости операций частного, или локального, дифференцирования по времени $\partial/\partial t$ и пространственного дифференцирования, выражаемого операцией grad, можно менять порядок дифференцирования:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

будем иметь вместо (9) равенство

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi\right) = 0, \tag{11}$$

интегрирование которого приводит к выражению первого интеграла уравнений движения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = f(t), \tag{12}$$

называемого *интегралом Лагранжа — Коши*; здесь $f(t)$ — одинаковая для всей области течения произвольная функция времени, определяемая из *граничных* условий.

Интеграл Лагранжа — Коши играет в теории нестационарного движения идеальной жидкости такую же роль, как интеграл Бернулли при стационарном движении. В последнем случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad f(t) = \text{const},$$

и равенство (12) превращается в обычный интеграл Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = \text{const}, \tag{13}$$

причем при безвихревом движении константа, стоящая в правой части, имеет одно и то же значение во всех точках движущейся жидкости, а не только вдоль линий тока.

Интеграл Лагранжа — Коши, так же как и интеграл Бернулли, в случае безвихревого движения служит для выражения давления p через кинематические элементы φ, V и координаты, от которых зависит Π. Выражая V^2 через проекции $\operatorname{grad}\varphi$ на оси декартовых координат, будем

иметь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\mathcal{P}+\Pi=f(t). \tag{14}$$

В случае движения *несжимаемой* жидкости при отсутствии объемных сил ($\mathcal{P}=p/\rho$, $\Pi=0$) найдем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}=f(t). \tag{15}$$

В частном случае нестационарного движения твердого тела сквозь покоящуюся на бесконечном удалении от него несжимаемую жидкость, полагая на бесконечности

$$p=p_\infty,\quad V=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

получим

$$f(t)=\text{const}=\frac{p_\infty}{\rho}. \tag{16}$$

При безвихревом движении жидкости или газа *три* неизвестные величины — проекции скорости u, v, w — выражаются через *одну* неизвестную функцию — потенциал скоростей $\varphi(x, y, z, t)$. Принятое допущение об отсутствии завихренности вместе с допущением о баротропности движения $\rho=\rho(p)$ сводит решение задачи о движении жидкости или газа к разысканию двух неизвестных величин φ и p. Для этой цели могут служить уравнение (14) и уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho V)=0.$$

Останавливаясь подробнее на случае *несжимаемой* жидкости, используем два основных условия: несжимаемости

$$\operatorname{div} V=0$$

и наличия потенциала скоростей (4). Тогда для определения неизвестной φ получим уравнение Лапласа

$$\nabla^2\varphi=0, \tag{17}$$

в частности в декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Уравнение это должно интегрироваться при заданных граничных условиях, зависящих от типа поставленной задачи. Так, в задаче о движении тела сквозь покоящуюся на бесконечности жидкость должны выполняться следующие граничные условия [1]):

а) на поверхности тела — условие непроницаемости, т. е. равенства нормальных составляющих скоростей $V_n=\partial\varphi/\partial n$ частиц жидкости на поверхности твердого тела нормальным составляющим скоростей V_n^* соприкасающихся с ними точек твердого тела

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=V_n^*; \tag{18}$$

б) на бесконечном удалении от тела — равенство нулю скоростей частиц жидкости

$$\operatorname{grad}\varphi=0, \tag{19}$$

[1]) Решение этой задачи, носящей имя Кирхгофа, будет дано в § 79 гл. IX.

в декартовой системе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

В задаче об обтекании неподвижного твердого тела жидкостью, имеющей на бесконечности заданную скорость $\boldsymbol{V}_\infty$, будем иметь граничные условия:

а) на поверхности тела

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0; \tag{20}$$

б) на бесконечности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_\infty \cos(\widehat{\boldsymbol{V}_\infty, x}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_\infty \cos(\widehat{\boldsymbol{V}_\infty, y}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = V_\infty \cos(\widehat{\boldsymbol{V}_\infty, z}). \tag{21}$$

Как известно, задача интегрирования уравнения Лапласа (17), или, что все равно, разыскания гармонической функции, удовлетворяющей условиям (18), (19) или (20), (21), представляет собой пример внешней задачи теории потенциала. В дальнейшем будут разобраны различные примеры решения задач такого типа, как для *обтекания* тел жидкостью (внешняя задача), так и для внутреннего *протекания* жидкости сквозь каналы (внутренняя задача).

Определив потенциал скоростей $\varphi(x, y, z, t)$, найдем давление p при помощи интеграла Лагранжа — Коши (15); будем иметь

$$p = \rho\left\{f(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}. \tag{22}$$

Безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости обладает многими интересными свойствами. Докажем следующую теорему *Кельвина: если на границе некоторой односвязной области вихревое движение совпадает с безвихревым, то кинетическая энергия безвихревого движения в рассматриваемой области меньше кинетической энергии вихревого движения.*

Теорему Кельвина можно доказать, основываясь на том, что скорости в безвихревом движении представляются градиентом потенциала скоростей и что дивергенция скорости несжимаемой жидкости равна нулю как для безвихревого, так и для вихревого движения. В самом деле, условимся обозначать символом Δ разность между соответствующими элементами вихревого и безвихревого движения. Тогда будем иметь следующее выражение для разности кинетических энергий:

$$\Delta T = \frac{\rho}{2}\int_\tau [(\boldsymbol{V} + \Delta \boldsymbol{V})^2 - V^2]\, d\tau = \rho \int_\tau \boldsymbol{V} \cdot \Delta \boldsymbol{V}\, d\tau + \frac{\rho}{2}\int_\tau |\Delta \boldsymbol{V}|^2\, d\tau. \tag{23}$$

Первый интеграл справа равен

$$\int_\tau \boldsymbol{V} \cdot \Delta \boldsymbol{V}\, d\tau = \int_\tau \operatorname{grad} \varphi \cdot \Delta \boldsymbol{V}\, d\tau$$

и по известной формуле

$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \boldsymbol{a}$$

может быть преобразован так:

$$\int_\tau \boldsymbol{V} \cdot \Delta \boldsymbol{V}\, d\tau = \int_\tau \operatorname{grad} \varphi \cdot \Delta \boldsymbol{V}\, d\tau = \int_\tau \operatorname{div}(\varphi \Delta \boldsymbol{V})\, d\tau - \int_\tau \varphi \operatorname{div}(\Delta \boldsymbol{V})\, d\tau =$$

$$= \int_\sigma \varphi\, (\Delta \boldsymbol{V})_n\, d\sigma - \int_\tau \varphi \Delta (\operatorname{div} \boldsymbol{V})\, d\tau,$$

где σ — поверхность, ограничивающая односвязный объем, а дивергенция разности двух векторных функций заменена на разность дивергенций этих функций. По условию теоремы безвихревое и вихревое движения на поверхности σ совпадают, т. е. $\Delta \boldsymbol{V}=0$ на σ; кроме того, по условию несжимаемости $\operatorname{div} \boldsymbol{V}=0$. Таким образом, первый интеграл в равенстве (23) оказывается равным нулю и остается

$$\Delta T=\frac{\rho}{2}\int_{\tau}|\Delta \boldsymbol{V}|^{2}\,d\tau>0,$$

из которого и следует теорема Кельвина. Теорему Кельвина можно трактовать с *вариационной* точки зрения как утверждение о *минимальности кинетической энергии* при безвихревом движении по сравнению с любым другим, *вихревым*, движением, если только эти движения совпадают на границе области.

Из теоремы Кельвина следует, что если на границе односвязной области скорости равны нулю, то единственным возможным безвихревым движением несжимаемой жидкости внутри такой области является покой. Действительно, всегда можно представить себе произвольное (вихревое!), сколь угодно медленное движение, при котором скорости на границе области равны нулю; кинетическая энергия такого вихревого движения будет как угодно мала, а кинетическая энергия соответствующего по теореме Кельвина безвихревого движения, будучи положительной величиной, меньшей другой сколь угодно малой величины, должна быть тождественно равна нулю во всей области.

К тому же результату можно прийти и непосредственно, не пользуясь теоремой Кельвина. Для этого выведем полезную для дальнейшего общую формулу кинетической энергии односвязного объема несжимаемой жидкости, движущейся безвихревым образом. Имеем

$$\boldsymbol{T}=\frac{\rho}{2}\int_{\tau}V^{2}d\tau=\frac{\rho}{2}\int_{\tau}\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\varphi\,d\tau.$$

Применим вновь формулу дивергенции произведения скаляра на вектор, полагая в ней $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\varphi$; тогда получим

$$\boldsymbol{T}=\frac{\rho}{2}\int_{\tau}\operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\varphi)\,d\tau-\frac{\rho}{2}\int_{\tau}\varphi\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\,d\tau=$$

$$=-\frac{\rho}{2}\int_{\sigma}\varphi(\operatorname{grad}\varphi)_{n}\,d\sigma-\frac{\rho}{2}\int_{\tau}\varphi\nabla^{2}\varphi\,d\tau.$$

В поверхностном интеграле, полученном из объемного по формуле Гаусса — Остроградского, под n понимается орт *внутренней* нормали, направленной внутрь объема жидкости, вследствие чего перед интегралом поставлен знак минус. Замечая, что по (17) второй интеграл равен нулю, будем окончательно иметь

$$T=-\frac{\rho}{2}\int_{\sigma}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,a\sigma. \tag{24}$$

Если на ограничивающей односвязный объем жидкости поверхности σ скорость равна нулю, то и

$$V_{n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0,$$

откуда по (24) сразу будет следовать, что и $T=0$. Таким образом, вновь приходим к тому же результату, который следовал из теоремы Кельвина.

§ 49. Плоское безвихревое движение несжимаемой жидкости. Применение функций комплексного переменного

Изучение безвихревых движений начнем с простейшего класса такого рода движений — *плоского стационарного* движения несжимаемой жидкости.

Определение плоского движения в гидродинамике ничем не отличается от соответствующего определения для твердого тела. При плоском движении все частицы жидкости получают перемещения, параллельные некоторой плоскости, которую примем за плоскость xOy, причем во всех параллельных плоскостях движения тождественны. Будем рассматривать поэтому лишь движение в плоскости xOy. Каждая линия в таком плоском движении, проведенная в плоскости xOy, является на самом деле направляющей цилиндрической поверхности с образующими, перпендикулярными к плоскости xOy. Контур обтекаемого тела представится некоторой линией в плоскости, хотя на самом деле происходит обтекание бесконечного цилиндрического тела. Все значения расходов жидкости, сил, приложенных к обтекаемым телам, и т. д. будем относить к *единице длины* в направлении перпендикуляра к плоскости xOy, т. е. в направлении оси Oz, которая на рисунках в дальнейшем опускается.

Как уже упоминалось в предыдущем параграфе, в рассматриваемом случае задача сводится к решению задачи об интегрировании при тех или иных граничных условиях уравнения Лапласа, которое для плоского случая имеет вид

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{25}$$

В случае плоского движения задача эта может быть с успехом разрешена при помощи *метода комплексной переменной*, применение которого составляет основное содержание гидродинамики плоского безвихревого движения несжимаемой жидкости.

Из уравнения неразрывности (несжимаемости)

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

следует, что всегда можно найти функцию $\psi(x, y)$, тождественно удовлетворяющую уравнению (25) и связанную с проекциями скорости u и v равенствами

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{26}$$

Функция $\psi(x, y)$ имеет простой гидродинамический смысл. В самом деле, напишем дифференциальное уравнение линий тока (7) гл. II, в случае плоского движения имеющее вид

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

и подставим в него значения проекций скорости по (26); тогда будем иметь

$$\frac{dx}{\partial\psi/\partial y} = \frac{dy}{-\partial\psi/\partial x},$$

или

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi = 0.$$

Из последнего равенства следует, что функция ψ *сохраняет постоянные значения вдоль линий тока*; иными словами, семейство линий

уровня функции

$$\psi(x, y) = C, \tag{27}$$

соответствующих различным значениям C, представляет собой совокупность *линий тока*. Функция $\psi(x, y)$ в связи с этим называется *функцией тока*. Для выяснения кинематического смысла функции тока рассмотрим в плоскости течения две бесконечно близкие линии тока: одну — проходящую через точку M_0, с соответствующим значением функции тока ψ_0, вторую — через точку M_1 со значением функции тока $\psi = \psi_0 + d\psi$ (рис. 53).

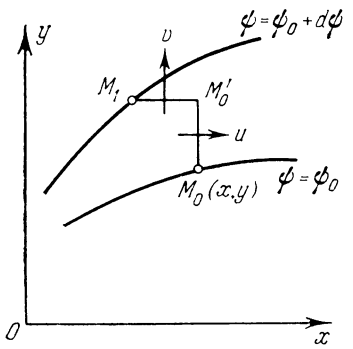


Рис. 53

Часть жидкости, находящаяся между цилиндрическими поверхностями, перпендикулярными к плоскости рисунка и имеющими линии тока в качестве *направляющих*, образует элементарную *трубку тока*, которую будем ограничивать плоскостью рисунка и параллельной ей плоскостью, находящейся на расстоянии единицы длины от плоскости рисунка. В случае *плоского движения* указанный только что образ трубки тока представляется областью, заключенной между двумя линиями тока в плоскости движения жидкости. Это пояснение надо иметь в виду в дальнейшем.

Замечая (рис. 53), что элементарный секундный объемный расход жидкости dQ через любое сечение трубки тока не зависит от формы этого сечения, выберем его в виде совокупности двух параллельных осям координат отрезков $M_0M_0' = dy$ и $M_0'M_1 = -dx$. Тогда, как это непосредственно следует из рисунка, выражение для dQ примет вид

$$dQ = u\,dy - v\,dx = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx = d\psi,$$

откуда следует выражение расхода сквозь конечную по поперечным размерам трубку (M_0M)

$$Q = \int_{M_0}^{M} dQ = \psi(M) - \psi(M_0). \tag{28}$$

Условимся в дальнейшем одну какую-нибудь линию тока произвольно рассматривать как *нулевую*, полагая, что вдоль нее

$$\psi(x, y) = 0.$$

Это можно всегда сделать, так как, согласно системе равенств (26), функция тока определяется с точностью до аддитивной постоянной. Если принять такое условие, то значение константы в (27) на некоторой линии тока будет равно секундному объемному расходу жидкости сквозь сечение трубки тока, образованной этой линией тока и выбранной произвольно нулевой линией.

Сопоставим выражения (5) проекций скорости через потенциал скоростей, которые в случае плоского движения сводятся к системе двух равенств

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{29}$$

и выражения (26) тех же проекций через функцию тока ψ; будем иметь

следующую систему соотношений:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{30}$$

Эти уравнения выражают известные условия Коши — Римана, при выполнении которых комплексная величина

$$\chi=\varphi+i\psi=\varphi(x,\ y)+i\psi(x,\ y)=\chi(z) \tag{31}$$

будет не просто функцией *двух* переменных (координат x, y), а *функцией одной комплексной переменной* $z=x+iy$[1]). Действительно, если величина χ есть функция только положения точки M с координатой z, то производная от нее в этой точке в свою очередь должна быть функцией только положения точки, т. е. координаты z, а не зависеть от направления дифференцирования в плоскости. Иными словами, производные $d\chi/dz$ и производные по направлениям действительной и мнимой осей должны быть равны между собой:

$$\frac{d\chi}{dz}=\frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{\partial\chi}{\partial(iy)}. \tag{32}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{\partial(\varphi+i\psi)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial(iy)}=-i\frac{\partial(\varphi+i\psi)}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

и учитывая условия Коши — Римана (30), убеждаемся в справедливости соотношений (32).

Для дальнейшего полезно вспомнить, что функция комплексного переменного $\chi(z)$ однозначно отображает точки плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ на плоскость комплексного переменного $\chi=\varphi+i\psi$. При этом происходит *отображение* фигур: замкнутых кривых и ограничиваемых ими частей плоскости z в соответствующие им фигуры или части плоскости χ. Такое отображение называют *конформным*. Далее будут приведены многие примеры таких конформных отображений.

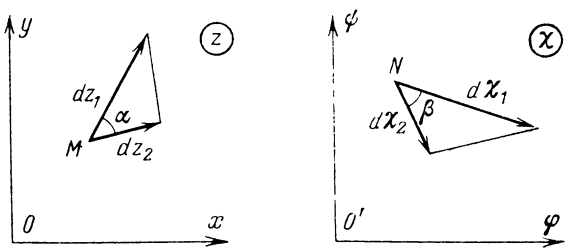


Рис. 54

Основное свойство *конформного* преобразования (отображения), с которым придется встретиться далее, заключается в *подобии бесконечно малых фигур*: данной и преобразованной. Покажем это на примере бесконечно малого треугольника (рис. 54). Зададим в точке M плоскости комплексного переменного z два бесконечно малых приращения dz_1 и dz_2, образующих между собою конечный угол α. Соответственно в точке N плоскости комплексного переменного χ появятся приращения $d\chi_1$, $d\chi_2$, образующие между собой некоторый угол β.

Переход из плоскости z в плоскость χ происходит согласно преобразованию (31)

$$\chi=\chi(z).$$

[1]) Координата z, соответствующая перпендикулярной к плоскости Oxy оси Oz, в плоском движении не встречается; это позволяет использовать букву z для обозначения комплексной величины $x+iy$.

Отсюда следует, что приращения $d\chi$ с приращениями dz связаны соотношениями (предполагается, что производная $\chi'(z)$ существует и в точке M не обращается ни в нуль, ни в бесконечность)

$$d\chi_1 = \chi'(z)\,dz_1, \quad d\chi_2 = \chi'(z)\,dz_2,$$

так что

$$\frac{d\chi_1}{d\chi_2} = \frac{dz_1}{dz_2}.$$

Положим

$$dz_1 = ds_1 e^{i\alpha_1}, \quad dz_2 = ds_2 e^{i\alpha_2},$$

$$d\chi_1 = d\sigma_1 e^{i\beta_1}, \quad d\chi_2 = d\sigma_2 e^{i\beta_2}.$$

Тогда из предыдущего равенства следует

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_2} e^{i(\beta_1-\beta_2)} = \frac{ds_1}{ds_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Сравнивая модули и аргументы, получим

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_2} = \frac{ds_1}{ds_2}, \quad \beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \text{ т. е. } \beta = \alpha,$$

что и доказывает *подобие* указанных на рис. 54 бесконечно малых фигур (треугольников).

Для дальнейшего важно подчеркнуть, что *при конформном преобразовании фигур соответствующие углы сохраняются*, за исключением, быть может, одной или нескольких точек, которые называются *особыми*.

Отделяя в произвольной функции комплексного переменного $\chi(z)$ действительную Re и мнимую Im части, получим потенциал скоростей $\varphi(x, y)$ и функцию тока $\psi(x, y)$ некоторого плоского безвихревого движения

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re}\chi(z), \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im}\chi(z). \tag{33}$$

Приравнивая функцию $\varphi(x, y)$ различным постоянным

$$\varphi(x, y) = C, \tag{34}$$

получим семейство *изопотенциальных линий*; аналогично совокупность равенств

$$\psi(x, y) = C', \tag{35}$$

согласно (27), представит семейство *линий тока*.

Легко убедиться, что изопотенциальные линии и линии тока в любой точке плоскости течения *взаимно* ортогональны. Для этого достаточно показать, что взаимно перпендикулярны векторы — градиенты функций φ и ψ. Имеем

$$\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \equiv 0,$$

а это и доказывает взаимную ортогональность изопотенциальных линий и линий тока.

Если вместо функции $\chi(z)$ рассмотреть функцию $i\chi(z)$, то в новом движении потенциал скоростей поменяется местами с функцией тока, а изопотенциальные линии — с линиями тока; этим приемом часто приходится пользоваться при построении обтеканий. Отсюда следует, что функция тока $\psi(x, y)$ всегда играет сопряженную роль с функцией $\varphi(x, y)$ — потенциалом скоростей; каждая из этих функций может быть как функцией тока, так и потенциалом скоростей в двух сопряженных между собой безвихревых плоских движениях идеальной жидкости. Функцию $\chi(z) = \varphi + i\psi$ называют *комплексным потенциалом*.

Покажем, как, зная комплексный потенциал $\chi(z)$, определить вектор скорости V или его проекции u и v. Каждому комплексному числу можно сопоставить в плоскости вектор с проекциями, соответственно равными действительной и мнимой частям этого комплексного числа. Условимся при изучении плоского движения обозначать светлой буквой V комплексную скорость $V=u+iv$, а для *величины* скорости сохраним обычное обозначение модуля комплексного числа

$$|V|=\sqrt{u^2+v^2}.$$

Наряду с комплексной скоростью V введем в рассмотрение *сопряженную* скорость $\overline{V}$, равную

$$\overline{V}=u-iv. \tag{36}$$

Если θ — угол между V и осью Ox, то

$$\begin{aligned} V&=u+iv=|V|(\cos\theta+i\sin\theta)=|V|e^{i\theta},\\ \overline{V}&=u-iv=|V|(\cos\theta-i\sin\theta)=|V|e^{-i\theta}. \end{aligned} \tag{37}$$

Можно заметить, что сопряженная скорость $\overline{V}$ является зеркальным изображением V относительно оси Ou.

Плоскость Oxy значений комплексной координаты z называют *физической плоскостью* или *плоскостью течения*. Совокупность значений комплексной скорости V образует *плоскость годографа скорости*, или просто *плоскость годографа uOv*; в этой плоскости расположатся годографы скорости, т. е. геометрические места концов проведенных из начала O векторов скорости частиц жидкости.

Рассмотрим производную $d\chi/dz$ комплексного потенциала по комплексному аргументу. По ранее отмеченному свойству функций комплексной переменной

$$\frac{d\chi}{dz}=\frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{\partial(\varphi+i\psi)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

отсюда следует

$$\frac{d\chi}{dz}=u-iv=\overline{V}=|V|e^{-i\theta}, \tag{38}$$

т. е. *производная от комплексного потенциала по комплексной координате равна сопряженной скорости.* Проекции скорости u и v определятся как

$$u=\operatorname{Re}\left(\frac{d\chi}{dz}\right),\quad v=-\operatorname{Im}\left(\frac{d\chi}{dz}\right). \tag{39}$$

Полезно еще рассмотреть контурный интеграл от сопряженной скорости $\overline{V}$ по замкнутому контуру C в плоскости течения, равный

$$\oint\overline{V}\,dz=\oint\frac{d\chi}{dz}\,dz=\oint d\chi=\oint(d\varphi+i\,d\psi). \tag{40}$$

Вычисляя действительную и мнимую части этого интеграла, найдем, что *действительная* часть определяет *циркуляцию* скорости Γ по замкнутому контуру, а *мнимая — секундный объемный расход* жидкости Q через замкнутый контур; действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\oint\overline{V}\,dz&=\oint(u\,dx+v\,dy)=\oint d\varphi=\Gamma,\\ \operatorname{Im}\oint\overline{V}\,dz&=\oint(u\,dy-v\,dx)=\oint d\psi=Q. \end{aligned} \tag{41}$$

§ 50. Комплексные потенциалы простейших потоков

Пользуясь приемом (33) отделения действительной и мнимой частей в выражении комплексного потенциала, можем определить потенциалы скоростей и функции тока, а по (39) — и распределение скорости для нескольких простейших плоских потоков идеальной несжимаемой жидкости.

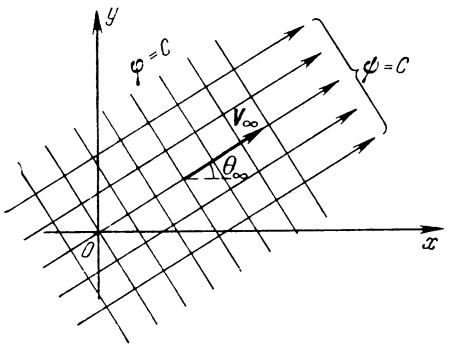


Рис. 55

1. *Однородный поток* с вектором скорости $\boldsymbol{V}_\infty(u_\infty, v_\infty)$, направленный к оси Ox под углом θ_∞ (рис. 55):

$$\chi(z) = \overline{V}_\infty z, \quad \overline{V}_\infty = u_\infty - iv_\infty =$$

$$= |V_\infty| e^{-i\theta_\infty} = |V_\infty| (\cos\theta_\infty - i \sin\theta_\infty);$$

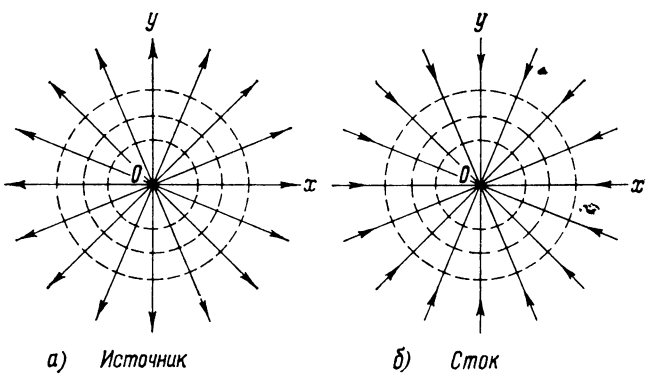
$$\varphi = u_\infty x + v_\infty y, \quad \psi = -v_\infty x + u_\infty y,$$

$$V = V_\infty = u_\infty + iv_\infty.$$

2. *Источник* (*сток*) в начале координат (рис. 56) с секундным объемным расходом (дебитом) Q — действительной величиной, положительной в случае источника и отрицательной в случае стока:

$$\chi(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z, \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \varepsilon \quad (r, \varepsilon \text{ — полярные координаты}),$$

$$\overline{V} = \frac{Q}{2\pi z}, \quad |V| = \frac{|Q|}{2\pi r}.$$



а) *Источник* б) *Сток*

Рис. 56

3. *Вихрь*, изолированный в начале координат (рис. 57), с циркуляцией Γ (действительная величина):

$$\chi(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z; \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \varepsilon, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad \overline{V} = \frac{\Gamma}{2\pi i z}, \quad |V| = \frac{|\Gamma|}{2\pi r}.$$

4. *Диполь* в начале координат с *моментом* m (рис. 58) (действительная величина) и осью, направленной вдоль оси Ox:

$$\chi(z) = \frac{m}{2\pi z}; \quad \varphi = \frac{mx}{2\pi (x^2 + y^2)} = \frac{mx}{2\pi r^2}; \quad \psi = -\frac{my}{2\pi (x^2 + y^2)} = -\frac{my}{2\pi r^2};$$

$$\overline{V} = -\frac{m}{2\pi z^2}, \quad |V| = \frac{|m|}{2\pi r^2}.$$

Прием наложения потоков, оправдываемый линейностью уравнений для φ и ψ, позволяет получать новые потоки. Так, например, поток диполя (п. 4) может быть получен сложением потоков источника и стока

одинаковой мощности, размещенных по оси Ox симметрично относительно начала координат O в точках с абсциссами $\pm h$, при предельном переходе: $h\to 0$, $|Q|\to\infty$, $Q\cdot 2h$ стремится к конечной величине m — моменту диполя:

$$\chi(z)=\lim_{\substack{h\to 0,\,|Q|\to\infty\\ Q\cdot 2h\to m}}\frac{Q\cdot 2h}{2\pi}\,\frac{\ln(z+h)-\ln(z-h)}{2h}=\frac{m}{2\pi}\,\frac{d\ln z}{dz}=\frac{m}{2\pi z}.$$

Значение $m>0$ соответствует расположению стока с положительной стороны оси Ox, $m<0$ — противоположному случаю.

Путем такого наложения можно получить следующие потоки.

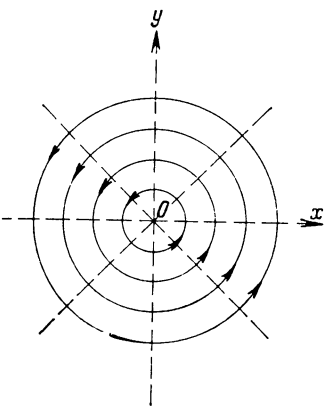


Рис. 57

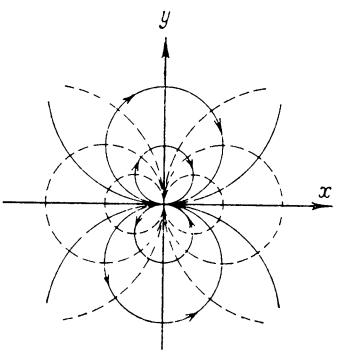


Рис. 58

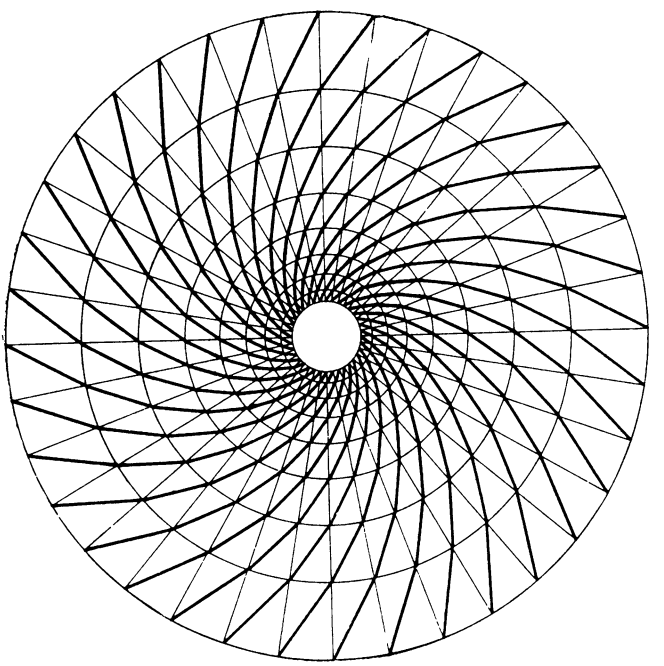


Рис 59

5. *Вихреисточник* (*вихресток*) (рис. 59) — сложением комплексных потенциалов вихря и источника (стока):

$$\chi=\frac{Q-\Gamma i}{2\pi}\ln z.$$

6. *Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра* радиуса a потоком вдоль оси Ox (рис. 60) — наложением однородного потока (п. 1) на поток диполя (п. 4) при $m=2\pi a^2 V_\infty$ (V_∞ — действительная положительная величина):

$$\chi = V_\infty z + \frac{2\pi a^2 V_\infty}{2\pi}\frac{1}{z} = V_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right). \tag{42}$$

Нулевая линия тока ($\psi=0$) в рассматриваемом случае распадается на две кривые: окружность ($x^2+y^2=a^2$) радиуса a и ось Ox ($y=0$).

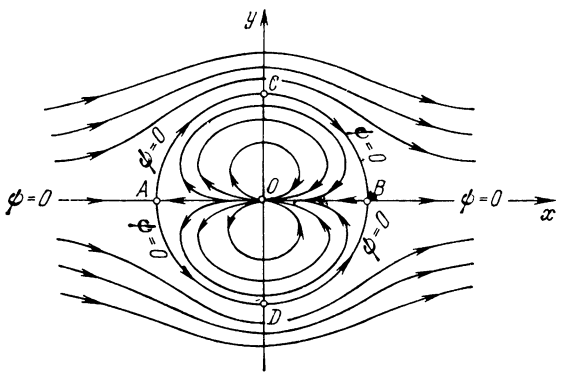


Рис 60

То же обтекание в случае $V_\infty = |V_\infty| e^{i\theta_\infty}$ определяется комплексным потенциалом

$$\chi(z) = \bar{V}_\infty z + V_\infty \frac{a^2}{z}, \tag{43}$$

выражение которого легко выводится из формулы (42), если ее применить в плоскости комплексного переменного z' с осью Ox', направленной по вектору скорости V_∞, так что по (42)

$$\chi(z') = |V_\infty|\left(z' + \frac{a^2}{z'}\right);$$

возвращаясь к плоскости z заменой z' на $ze^{-i\theta_\infty}$, получим (43).

Скорость $\bar{V}$ в произвольной точке потока (42) равна

$$\bar{V} = \frac{d\chi}{dz} = V_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right). \tag{44}$$

Распределение скоростей по контуру окружности $z=ae^{i\varepsilon}$ определяется формулой

$$|V| = 2V_\infty|\sin\varepsilon|, \tag{45}$$

где ε — полярный угол между радиусом окружности и осью Ox. Если вместо полярного угла ε перейти к дополняющему его до $\pi/2$ местному углу атаки θ — углу между вектором скорости в точке на контуре окружности и направлением набегающего на тело потока, то (45) примет вид

$$|V| = 2V_\infty\cos\theta,$$

выражающий *пропорциональность модуля скорости в точках контура окружности косинусу местного угла атаки в этих точках.* Эта закономерность оказывается справедливой для обтекания *эллипса* и ряда других течений (см. далее § 52). В точках $A(\varepsilon=\pi)$ и $B(\varepsilon=0)$ скорости равны нулю; эти точки называются *критическими точками* потока. При направлении движения, указанном на рис. 60, точка A называется передней критической точкой, точка B — задней.

Скорость на поверхности цилиндра принимает свое максимальное значение при $\varepsilon=\pm\pi/2$ в точках C и D миделевого сечения цилиндра; это максимальное значение скорости равно

$$|V_{max}| = 2V_\infty,$$

т. е. удвоенной скорости набегающего потока или удвоенной скорости на бесконечности.

Распределение давления в потоке и, в частности, по контуру цилиндра может быть представлено в форме *коэффициента давления* $c_p=$

$=(p-p_\infty)/(^1/_2\rho V^2_\infty)$. Применяя теорему Бернулли в форме (26) гл. V и определяя константу как $p_\infty+^1/_2\rho V^2_\infty$, найдем в рассматриваемом случае

$$c_p=\frac{p-p_\infty}{^1/_2\rho V^2_\infty}=1-\frac{|V|^2}{V^2_\infty}=1-4\sin^2\varepsilon. \tag{46}$$

Полученное распределение давления по контуру окружности, как это прямо следует из симметрии обтекания по отношению к осям Ox и Oy, результирующей силы не дает. Это является частным случаем парадокса Даламбера, который будет в дальнейшем (см. гл. IX) установлен для тела любой формы при поступательном, прямолинейном и равномерном его движении сквозь покоящуюся вдали от него идеальную несжимаемую жидкость.

7. *Циркуляционное обтекание круглого цилиндра* можно получить наложением вихря с циркуляцией Γ (п. 3) на бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра (п. 6). Комплексный потенциал составного движения будет, согласно (42) и п. 3,

$$\chi(z)=|V_\infty|\left(z+\frac{a^2}{z}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z, \tag{47}$$

что при $\Gamma>0$ соответствует направлению циркуляционного движения против часовой стрелки. Останавливаясь на этом случае, определим сопряженную скорость

$$\overline{V}=\frac{d\chi}{dz}=|V_\infty|\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi iz} \tag{48}$$

и найдем положение критических точек, решая уравнение

$$|V_\infty|\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi iz}=0,$$

или, что то же, квадратное уравнение

$$z^2+\frac{\Gamma}{2\pi i|V_\infty|}z-a^2=0.$$

Корни его будут

$$z=\frac{\Gamma i}{4\pi|V_\infty|}\pm\sqrt{a^2-\frac{\Gamma^2}{16\pi^2|V_\infty|^2}}. \tag{49}$$

В зависимости от величины циркуляции возможны три типа обтекания.

а) Циркуляция *велика*: $\Gamma>4\pi a|V_\infty|$. В этом случае в выражении (49) под знаком радикала будет стоять отрицательная величина, и можно написать

$$z=\left(\frac{\Gamma}{4\pi|V_\infty|}\pm\sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2|V_\infty|^2}-a^2}\right)i.$$

Оба корня квадратного уравнения мнимы, причем модуль одного больше радиуса цилиндра, другого — меньше. В самом деле, корень

$$z_1=\left(\frac{\Gamma}{4\pi|V_\infty|}+\sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2|V_\infty|^2}-a^2}\right)i$$

имеет модуль ($\Gamma>0$)

$$|z_1|=\frac{\Gamma}{4\pi|V_\infty|}+\sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2|V_\infty|^2}-a^2}>\frac{\Gamma}{4\pi|V_\infty|}>a;$$

второй корень

$$z_2 = \left(\frac{\Gamma}{4\pi |V_\infty|} - \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 |V_\infty|^2} - a^2} \right) i$$

имеет модуль

$$|z_2| = \frac{\Gamma}{4\pi |V_\infty|} - \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 |V_\infty|^2} - a^2} = \frac{a^2}{\frac{\Gamma}{4\pi |V_\infty|} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 |V_\infty|^2} - a^2}}.$$

Заменим в знаменателе последнего выражения $\Gamma/(4\pi|V_\infty|)$ на меньшую величину a; тогда получим

$$|z_2| < \frac{a^2}{a} = a.$$

Первый корень дает критическую точку A (рис. 61, *а*), лежащую вне круга на положительной стороне мнимой оси, второй — критическую точку B на той же оси, но внутри круга.

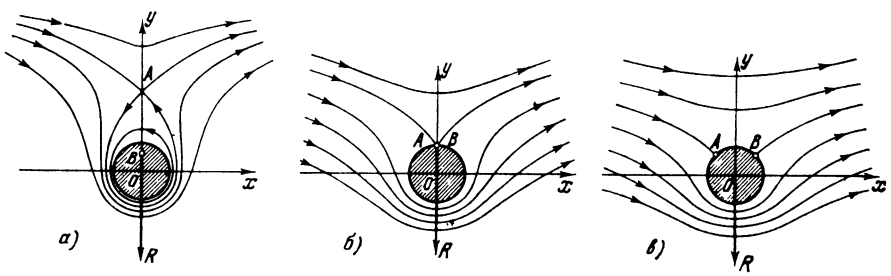


Рис. 61

б) Промежуточный случай: $\Gamma = 4\pi a |V_\infty|$. Корни z_1 и z_2 равны между собой; критические точки совпадают (рис. 61, *б*) и находятся на мнимой оси в точке

$$z_1 = z_2 = ai.$$

в) Циркуляция *мала*: $\Gamma < 4\pi a |V_\infty|$. Корни (49) в этом случае комплексные,

$$z = \pm \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 |V_\infty|^2}} + \frac{\Gamma}{4\pi |V_\infty|} i,$$

имеют общую ординату $\Gamma/(4\pi|V_\infty|)$ и отличаются лишь знаками абсцисс, по модулю меньших a. Модуль каждого из корней равен a, т. е. они расположены на окружности радиуса a. Положение критических точек показано на рис. 61, *в*. При уменьшении Γ до нуля критические точки будут перемещаться, стремясь занять положение на пересечении окружности с осью Ox, как это и должно быть при $\Gamma = 0$.

Как видно, при циркуляционном обтекании круглого цилиндра сохраняется симметрия относительно оси Oy, но нарушается симметрия относительно оси Ox. В связи с этим главный вектор сил давления жидкости на поверхность цилиндра будет отличен от нуля и направлен вдоль оси Oy. Заметим, что в слоях жидкости *под* цилиндром скорости бесциркуляционного обтекания цилиндра и чисто циркуляционного потока вокруг цилиндра *складываются*, а *над* цилиндром *вычитаются*. При этом под цилиндром скорости больше, а давления, согласно уравнению Бернулли, меньше. Над цилиндром, наоборот, скорости меньше, а давления больше. Это приводит к тому, что в указанном обтекании главный вектор сил

давления $\boldsymbol{R}$ жидкости на цилиндр будет направлен по оси Oy в отрицательную сторону (вниз).

При циркуляционном течении по часовой стрелке ($\Gamma<0$) картина обтекания при том же расположении осей координат изменится на перевернутую вокруг оси Ox на 180°, и главный вектор окажется направленным по оси Oy в положительную сторону, т. е. вверх. Можно дать простое правило определения направления главного вектора сил давления жидкости на поверхность цилиндра: поместив начало вектора скорости $\boldsymbol{V}_\infty$ в центр цилиндра O, повернем его на 90° в сторону, противоположную направлению циркуляционного движения; это и даст направление главного вектора $\boldsymbol{R}$.

Остается вычислить величину R_y. Имеем

$$\boldsymbol{R} = -\oint p\boldsymbol{n}\,ds, \quad R_y = -\oint pn_y\,ds = -a\int_0^{2\pi} p\sin\varepsilon\,d\varepsilon. \tag{50}$$

На контуре круга по (48) будет

$$\overline{V} = |V_\infty|(1-e^{-2i\varepsilon}) + \frac{\Gamma}{2\pi ia}e^{-i\varepsilon} =$$

$$= 2|V_\infty| ie^{-i\varepsilon}\frac{e^{i\varepsilon}-e^{-i\varepsilon}}{2i} - \frac{\Gamma}{2\pi a}ie^{-i\varepsilon} = ie^{-i\varepsilon}\left(2|V_\infty|\sin\varepsilon - \frac{\Gamma}{2\pi a}\right),$$

так что

$$|V| = |V_\infty|\left|2\sin\varepsilon - \frac{\Gamma}{2\pi|V_\infty|a}\right|,$$

$$c_p = 1 - \left(2\sin\varepsilon - \frac{\Gamma}{2\pi|V_\infty|a}\right)^2. \tag{51}$$

В отличие от бесциркуляционного обтекания цилиндра в рассматриваемом сейчас случае циркуляционного обтекания коэффициент давления зависит от параметра $\Gamma/(|V_\infty|a)$, содержащего произвольную величину наложенной циркуляции. Как это следует из (51), для подобия циркуляционных обтеканий необходимо ставить условие одинаковости в сравниваемых течениях параметра $\Gamma/(|V_\infty|a)$ — безразмерной циркуляции.

Подставляя в выражение R_y (50) значение p по уравнению Бернулли и принимая во внимание (51), получим

$$R_y = \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left(2|V_\infty|\sin\varepsilon - \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2\sin\varepsilon\,d\varepsilon = -\rho|V_\infty|\Gamma. \tag{52}$$

Проделав аналогичные выкладки, можно было бы показать, что $R_x=0$, но это очевидно и из соображений симметрии.

Как и в случае бесциркуляционного обтекания цилиндра, при циркуляционном обтекании сопротивления нет, но возникает *поперечная* сила, равная произведению плотности жидкости на скорость набегающего потока и на циркуляцию. Полученное выражение (52) для R_y является частным случаем общей теоремы Жуковского, относящейся к любому обтекаемому контуру; доказательство этой теоремы будет дано ниже.

При вращательном движении тел в реальной жидкости, обладающей внутренним трением (вязкостью), можно наблюдать возникновение циркуляционных движений, качественно похожих на только что изученные. Эффект образования при этом поперечной силы (эффект Магнуса) помогает объяснить многие интересные явления. Таково, например, возникновение аэродинамического момента действия воздушного потока на вращающийся артиллерийский снаряд, приводящего в совокупности

с гироскопическим моментом к повороту снаряда в плоскости стрельбы и приближению его оси к касательной к траектории. К тому же роду вопросов принадлежит историческая попытка, вновь привлекающая внимание кораблестроителей, создания судового движителя в виде вертикальных вращающихся цилиндрических башен (так называемых роторов Флетнера), помещенных на палубе корабля и создающих движущую силу, перпендикулярную к направлению ветра. Аналогичный эффект наблюдается при полете закрученных футбольных и теннисных мячей. Та или иная интенсивность закрутки и направление закрутки создают совершенно неожиданные для партнера траектории мячей.

Отметим, что комплексный потенциал (47) является частным случаем более общего потенциала

$$\chi(z) = \overline{V}_\infty z + V_\infty \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \tag{53}$$

соответствующего, как это следует из (43), наличию между вектором $\boldsymbol{V}_\infty$ и осью Ox некоторого угла θ_∞; комплексный потенциал (53) может быть положен в основу метода разыскания комплексных потенциалов плоского обтекания тел иной формы.

§ 51. Решение задачи обтекания по методу конформных отображений. Постулат Жуковского — Чаплыгина. Формула циркуляции

Обратимся теперь к рассмотрению приложения метода конформных отображений к решению *прямой* задачи определения обтекания крыловых профилей. Под крыловым профилем понимают плавный, вытянутый в направлении набегающего на него потока, замкнутый и самонепересекающийся геометрический контур с закругленной передней кромкой («лоб» профиля) и заостренной задней кромкой («хвост» профиля). Отрезок прямой, соединяющей некоторую точку передней кромки с вершиной угла на задней кромке, называют *хордой* крылового профиля (выбор хорды может быть весьма разнообразен), а длину хорды — *длиной* профиля; максимальную толщину профиля в направлении, перпендикулярном к хорде, называют *толщиной* профиля, а отношение толщины к длине — *относительной толщиной* крылового профиля. Угол, образованный вектором скорости набегающего потока вдалеке от профиля (вектором скорости «на бесконечности») и направлением хорды, носит наименование *угла атаки*. Условясь в этой обычной терминологии, перейдем к постановке основной задачи обтекания крылового профиля плоским, однородным на бесконечности, безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости.

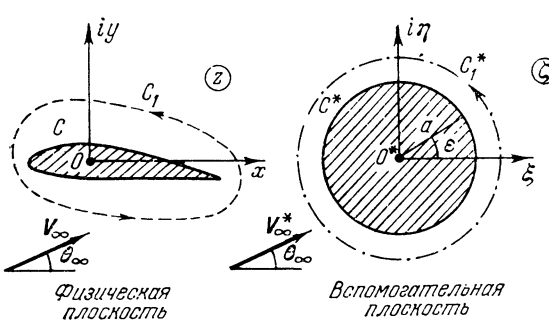


Рис. 62

Набегающий поток зададим комплексным вектором скорости V_∞, образующим с осью Ox угол θ_∞. *Физическая плоскость* z имеет заштрихованный на рис. 62 вырез, что делает ее *двухсвязной*; для определенности задачи необходимо задать наперед циркуляцию скорости Γ по произвольному, охватывающему профиль контуру C_1.

Будем считать первую, чисто геометрическую и самую трудную по существу задачу об отображении внешней по отношению к заштрихо-

ванной на рис. 62 области C в физической плоскости на внешнюю по отношению к заштрихованному кругу C^* область вспомогательной плоскости, уже разрешенной.

Пусть функция комплексного переменного

$$z=f(\zeta) \tag{54}$$

представляет собой искомую *преобразующую*, или *отображающую*, функцию, осуществляющую конформное отображение внешней по отношению к ограниченной контуром C (на рис. 62 заштрихованной) области плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ на внешнюю по отношению к заштрихованному на том же рисунке кругу C^* с радиусом a и центром в начале координат системы $O^*\,\xi\eta$ часть вспомогательной плоскости комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$. Наложим на преобразующую функцию (54) дополнительные условия: 1) чтобы бесконечно удаленная точка $z=\infty$ переходила при отображении в бесконечно удаленную точку $\zeta=\infty$, и 2) чтобы направление скорости на бесконечности V_∞ при переходе из плоскости z в плоскость ζ сохранялось. Как доказывается в теории функций комплексного переменного (теорема Римана), при выполнении этих условий преобразование (54) является *единственным*.

Пусть $\chi(z)$ — искомый комплексный потенциал течения в физической плоскости, а $\chi^*(\zeta)$ — комплексный потенциал течения во вспомогательной плоскости, т. е. определенный в предыдущем параграфе комплексный потенциал циркуляционного обтекания круглого цилиндра. Согласно (53) в настоящем случае будет

$$\chi^*(\zeta)=\overline{V}^*_\infty\zeta+\frac{V^*_\infty a^2}{\zeta}+\frac{\Gamma^*}{2\pi i}\ln\zeta, \tag{55}$$

где V^*_∞ и Γ^* — скорость на бесконечности и циркуляция скорости по произвольному контуру C_1^*, охватывающему C^* во вспомогательной плоскости ζ. Пользуясь связью (54) между z и ζ, заключим, что ($\chi=\varphi+i\psi$ — инвариант)

$$\chi(z)=\chi[f(\zeta)]=\chi^*(\zeta).$$

Взяв производную по ζ от обеих частей этого равенства, получим

$$\frac{d\chi^*}{d\zeta}=\frac{d\chi}{dz}\frac{dz}{d\zeta}=\frac{d\chi}{dz}f'(\zeta),$$

или по (38)

$$\overline{V}^*=\overline{V}f'(\zeta), \tag{56}$$

а в бесконечно удаленных точках

$$\overline{V}^*_\infty=m_\infty\overline{V}_\infty,\quad m_\infty=f'(\infty). \tag{57}$$

По принятому ранее условию направление вектора скорости на бесконечности V_∞ при конформном отображении сохраняется, т. е. векторы V^*_∞ и V_∞ параллельны. Отсюда следует параллельность сопряженных векторов $\overline{V}^*_\infty$ и $\overline{V}_\infty$, а из (57) заключим о действительности величины m_∞, так что

$$V^*_\infty=m_\infty V_\infty;$$

будем считать для определенности m_∞ положительной величиной.

Преобразующая функция (54) может быть выражена рядом Лорана

$$z=f(\zeta)=m_\infty\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m_n}{\zeta^n}, \tag{58}$$

сходящимся во всей внешней по отношению к кругу C^* области $|\zeta|>a$.

Коэффициенты главной части этого ряда, представленной суммой членов с отрицательными степенями ζ, могут быть определены при помощи контурных интегралов ($n=0, 1, 2, \ldots$)

$$m_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_1^*} f(\zeta)\,\zeta^{n-1}d\zeta, \tag{59}$$

вычисленных по окружности C^* или по любой другой окружности, содержащей внутри себя C^*.

Преобразующая функция может быть также выражена при помощи интеграла Коши

$$z = f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_1^*} \frac{f(\zeta')\,d\zeta'}{\zeta-\zeta'}, \tag{60}$$

где ζ' — комплексная переменная интегрирования.

Рассмотрим теперь циркуляцию Γ^*. Представив ее, согласно первой из формул (41), как действительную часть интегралов

$$\Gamma^* = \operatorname{Re}\oint\limits_{C_1^*}\overline{V}^*\,d\zeta = \operatorname{Re}\oint\limits_{C_1^*}\overline{V}\,\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta = \operatorname{Re}\oint\limits_{C_1}\overline{V}\,dz = \Gamma,$$

заключим, что *циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему обтекаемый профиль, при конформном отображении сохраняет свое значение.*

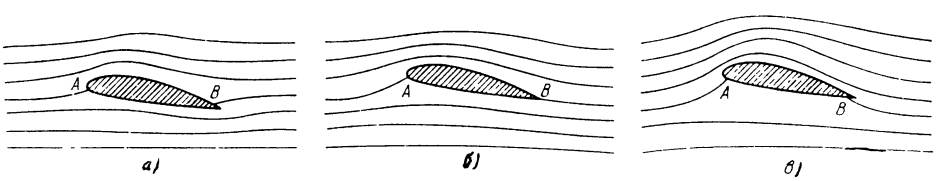


Рис. 63

Приведенные рассуждения позволили выразить неизвестные величины V_∞^* и Γ^* через заданные величины V_∞, Γ и коэффициент m_∞, определяемый, согласно (57), по известной преобразующей функции $f(\zeta)$. Следовательно, будем иметь окончательное выражение комплексного потенциала χ в плоскости течения в виде параметрической зависимости от параметра ζ

$$\chi(z) = \chi^*(\zeta) = m_\infty\left(\overline{V}_\infty\zeta + \frac{V_\infty a^2}{\zeta}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta, \quad z = f(\zeta). \tag{61}$$

Таким образом, если известно решение геометрической задачи о конформном отображении внешней по отношению к обтекаемому контуру C области физической плоскости z на внешнюю по отношению к кругу C^* произвольного радиуса a область вспомогательной плоскости ζ, то решение гидродинамической задачи об определении комплексного потенциала $\chi(z)$ уже не составит труда.

Из системы равенств (61) следует, что задача об обтекании профиля C потоком заданной по величине и направлению скорости на бесконечности имеет *бесчисленное множество решений*, зависящих от произвольного выбора величины циркуляции Γ. С точки зрения теории идеальной жидкости такой произвол отвечает сущности вопроса. Как уже было показано раньше для случая обтекания окружности, налагая ту или дру-

гую циркуляцию, можно получить бесчисленное множество форм обтекания кругового цилиндра с различным расположением критических точек.

Точно так же для одного и того же крылового профиля с угловой точкой на задней кромке и при той же по величине и направлению скорости на бесконечности теоретически возможны три указанных на рис. 63 типа обтекания. Буквами A и B отмечены критические точки обтекания. В случае *а*), так же как и в случае *в*), жидкость должна перетекать с одной стороны поверхности крыла на другую: с верхней на нижнюю в случае *в*) и с нижней на верхнюю в случае *а*). При этом на острой кромке либо должны образовываться бесконечно большие скорости, что приводит к физически невозможным бесконечно большим отрицательным давлениям, либо должны происходить срывы потока с поверхности профиля и вихреобразование. Среди трех указанных возможных форм обтекания только одна форма *б*) с задней критической точкой B, совпадающей с угловой точкой на задней кромке профиля, приводит к плавному стеканию струй жидкости с задней кромки крыла с конечной скоростью.

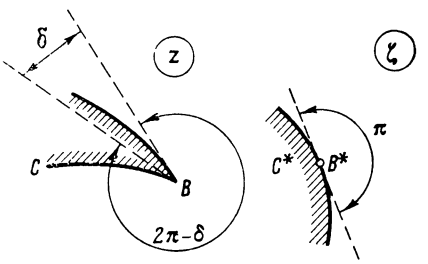


Рис. 64

По свидетельству современников в конце 1909 г. С. А. Чаплыгин в дискуссии по докладу Н. Е. Жуковского выдвинул в качестве обобщения известного опытного факта следующий постулат: *среди бесконечного числа теоретически возможных обтеканий профиля с угловой точкой на задней кромке в действительности осуществляется плавное обтекание с конечной скоростью в этой точке.*

Приоритет С. А. Чаплыгина, давшего общую трактовку этого постулата, оспаривается в связи с использованием подобного постулата в более ранних работах Н. Е. Жуковского по крыловым профилям частной формы. Сохраним общепринятое в отечественной и зарубежной литературе наименование «постулат Жуковского — Чаплыгина».

Опыт показывает, что для каждого крылового профиля существует диапазон углов атаки, в котором профиль обтекается без отрыва жидкости от его поверхности с плавным сходом с задней кромки. Крыловые профили, отвечающие постулату Жуковского — Чаплыгина, обычно называют *хорошо обтекаемыми*, остальные — *плохо обтекаемыми*. Само собой разумеется, что обтекаемость не есть чисто геометрическое свойство профилей. В дальнейшем будет показано, что обтекаемость зависит не только от формы профиля, но и от скорости потока, от угла атаки, от физических свойств жидкости, присутствия вблизи профиля других тел и др.

Постулат Жуковского — Чаплыгина позволяет однозначно определить величину циркуляции Γ, наложение которой приводит к безотрывной форме обтекания крылового профиля с конечной скоростью на задней его кромке.

Пусть угловой точке B (рис. 64) на профиле C соответствует некоторая точка B^* на окружности круга C^*. Эти точки являются *особыми точками* преобразования, так как в них нарушается основное свойство конформного преобразования — сохранение углов между касательными к преобразуемым контурам. Действительно, *внешний* угол с вершиной в точке B на задней кромке, равный $2\pi-\delta$, где δ — внутренний острый угол на задней кромке, переходит в плоскости ζ в не равный ему угол π с вершиной в точке B^*.

Рассмотрим конформное отображение внешней по отношению к профилю C малой области вблизи вершины угла B на малую, внешнюю по отношению к кругу C^* область вблизи точки B^* в плоскости ζ. Это конформное отображение можно представить формулой

$$z - z_B = M(\zeta - \zeta_{B^*})^{\frac{2\pi-\delta}{\pi}}, \tag{62}$$

где z_B и ζ_{B^*} — комплексные координаты соответствующих друг другу точек B и B^* в плоскостях z и ζ, а M — некоторое действительное число. В самом деле, положив вблизи точек B и B^*

$$z - z_B = re^{i\beta}, \quad \zeta - \zeta_{B^*} = r^* e^{i\beta^*}$$

и подставив эти выражения в (62), найдем

$$re^{i\beta} = Mr^{*\frac{2\pi-\delta}{\pi}} e^{i\frac{2\pi-\delta}{\pi}\beta^*}.$$

Приравнивая аргументы, получим

$$\beta = \frac{2\pi - \delta}{\pi}\beta^* \pm 2k\pi$$

и убедимся, что изменению β^* на π соответствует изменение β на $2\pi - \delta$.

Пользуясь преобразующей функцией (54), можем установить связь между скоростями в точках B и B^*; получим

$$\overline{V}_{B^*} = \left(\frac{d\chi^*}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{B^*}} = \left(\frac{d\chi}{dz}\right)_{z=z_B}\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{B^*}} = \overline{V}_B\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{B^*}},$$

или, вычисляя производную по (62),

$$\overline{V}_{B^*} = \overline{V}_B \frac{2\pi - \delta}{\pi} M(\zeta - \zeta_{B^*})^{\frac{\pi-\delta}{\pi}}_{\zeta=\zeta_{B^*}}.$$

По постулату Жуковского — Чаплыгина скорость V_B должна быть *конечна*, последний же сомножитель, поскольку $\delta < \pi$, равен нулю; следовательно, все произведение равно нулю. Отсюда следует, что соответствующая задней кромке профиля точка круга во вспомогательной плоскости должна быть *критической*.

Из этого условия найдем циркуляцию Γ, если, используя (61), напишем, что скорость в точке B^* равна нулю

$$\overline{V}_{B^*} = \left(\frac{d\chi^*}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{B^*}} = m_\infty \overline{V}_\infty - \frac{m_\infty V_\infty a^2}{\zeta_{B^*}^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta_{B^*}} = 0.$$

Полагая здесь

$$\zeta_{B^*} = ae^{i\varepsilon_0}, \quad V_\infty = |V_\infty| e^{i\theta_\infty},$$

где ε_0 — полярный угол точки B^* на окружности C^*, θ_∞ — угол, образованный скоростью на бесконечности с осями Ox или $O^*\xi$, получим

$$m_\infty |V_\infty| e^{-i\theta_\infty} - m_\infty |V_\infty| e^{i(\theta_\infty - 2\varepsilon_0)} + \frac{\Gamma}{2\pi a i} e^{-i\varepsilon_0} = 0,$$

откуда найдем

$$\Gamma = -4\pi a m_\infty |V_\infty| \frac{e^{i(\theta_\infty - \varepsilon_0)} - e^{-i(\theta_\infty - \varepsilon_0)}}{2i},$$

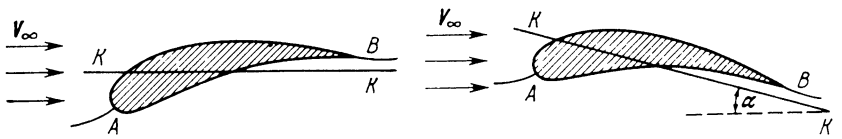
или, переходя от показательных функций к тригонометрическим,

$$\Gamma = -4\pi a m_\infty |V_\infty| \sin(\theta_\infty - \varepsilon_0). \tag{63}$$

Введем обозначение $\theta_\infty - \varepsilon_0 = \alpha$ и перепишем формулу (63) в виде

$$\Gamma = -4\pi a m_\infty |V_\infty| \sin\alpha. \tag{64}$$

Повернем по отношению к заданному потоку профиль так, чтобы без наложения циркуляции ($\Gamma = 0$) задняя кромка совпадала с критической точкой B. Отметим на профиле прямую KK (рис. 65, *а*), определяющую направление скорости на бесконечности, соответствующее этому *бесциркуляционному* обтеканию. Жестко связанную с профилем прямую KK будем называть *направлением бесциркуляционного обтекания*, а соответствующее значение угла $\theta_\infty = \varepsilon_0$ — *углом бесциркуляционного обтекания профиля.*



а) Бесциркуляционное обтекание *б) Циркуляционное обтекание*

Рис. 65

Повернув профиль на угол α (рис. 65, *б*), получим циркуляционное обтекание с критической точкой в задней кромке B, причем необходимая для этого циркуляция определится равенством (64).

Острый угол α между направлением скорости набегающего потока и направлением бесциркуляционного обтекания назовем *теоретическим углом атаки* в отличие от *практических углов атаки*, определяемых как углы между направлением скорости на бесконечности и *хордами* крыла, задаваемыми разнообразными способами.

Формула (64) определяет так называемую *теоретическую циркуляцию.* Как показывают опыты, теоретическая циркуляция несколько превышает действительную; объяснение этого факта связано с наличием в реальных жидкостях внутреннего трения.

Исключая из параметрической системы (61) циркуляцию при помощи формулы (64), получим однозначное решение задачи о внешнем обтекании крылового профиля.

Вывод формулы (64) основывался на наличии у крылового профиля острой задней кромки. В случае обтекания профиля *плавной* формы без угловой точки на задней кромке постулат Жуковского — Чаплыгина не имеет места и *циркуляция остается неопределенной.* Теоретический расчет обтекания такого рода профилей требует или специальных допущений, или задания положения задней критической точки.

§ 52. Примеры применения метода конформных отображений. Обтекание эллипса и пластинки

Рассмотрим некоторые простые конформные преобразования внешности круга во вспомогательной плоскости на внешность замкнутого профиля в плоскости течения.

Первое такого рода преобразование, указанное Н. Е. Жуковским и использованное С. А. Чаплыгиным в 1910 г., имело вид

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right), \tag{65}$$

или, в более симметричной форме,

$$\frac{z-c}{z+c} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c}\right)^2. \tag{66}$$

Преобразование Жуковского (65) является простейшим частным случаем общего преобразования (58), соответствующим значениям коэффициентов

$$m_\infty = \frac{1}{2}, \quad m_1 = \frac{1}{2}c^2, \quad m_0 = m_2 = \ldots = 0;$$

оно удовлетворяет всем поставленным в § 51 условиям.

Окружность C^* радиуса c в плоскости ζ — будем ее называть *основной окружностью* — преобразуется в плоскости z в отрезок $F'F$ (рис. 66) на оси Ox с концами в точках $(-c, 0)$ и $(+c, 0)$. В самом деле, полагая $\zeta = ce^{i\varepsilon}$, найдем

$$z = \frac{c}{2}(e^{i\varepsilon} + e^{-i\varepsilon}) = c\cos\varepsilon, \tag{67}$$

так что полному обходу окружности $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2\pi)$ соответствует двойной

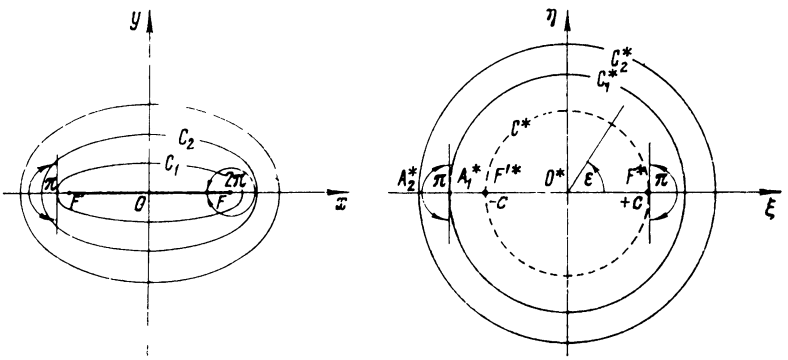


Рис. 66

обход отрезка FF', справа налево по верхней части разреза FF' и слева направо по нижней части разреза.

Окружности C_1^*, C_2^*, ..., *концентрические* с основной окружностью C^*, преобразуются в софокусные эллипсы C_1, C_2, ... с фокусами F, F'. Действительно, обозначая через r радиус какой-нибудь из окружностей и полагая в (65)

$$\zeta = re^{i\varepsilon} \quad (r > c),$$

получим

$$z = \frac{1}{2}\left(re^{i\varepsilon} + \frac{c^2}{r}e^{-i\varepsilon}\right),$$

откуда следует

$$x = \frac{1}{2}\left(r + \frac{c^2}{r}\right)\cos\varepsilon,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(r - \frac{c^2}{r}\right)\sin\varepsilon, \quad \frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{c^2}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{c^2}{r}\right)^2} = 1.$$

Обозначим полуоси эллипсов через a и b. Из равенств

$$a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{c^2}{r}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{c^2}{r}\right) \tag{68}$$

найдем

$$a^2 - b^2 = c^2;$$

все рассматриваемые эллипсы имеют общее фокусное расстояние $2c$ и фокусы в точках F и F'. Из (68) следует

$$r=a+b. \tag{69}$$

Комплексный потенциал $\chi(z)$ обтекания любого из эллипсов C_1, C_2, в том числе в пределе и отрезка FF', со скоростью на бесконечности V_∞, образующей с осью Ox угол θ_∞, и циркуляцией Γ можно по-прежнему составить в параметрической форме (61)

$$\chi=\frac{1}{2}\left[\overline{V}_\infty\zeta+\frac{V_\infty(a+b)^2}{\zeta}\right]+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta,\quad z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{c^2}{\zeta}\right); \tag{70}$$

в случае обтекания отрезка FF' надо положить $b=0$, $c=a$.

Комплексный параметр ζ может быть из системы (70) легко исключен. Разрешая второе равенство относительно ζ, получим

$$\zeta=z\overset{+}{(-)}\sqrt{z^2-c^2}, \tag{71}$$

причем перед корнем взят верхний знак, что соответствует отображению *внешности эллипса на внешность круга*; в самом деле, принимая нижний знак, мы бы имели

$$\zeta=z-\sqrt{z^2-c^2}=\frac{c^2}{z+\sqrt{z^2-c^2}}$$

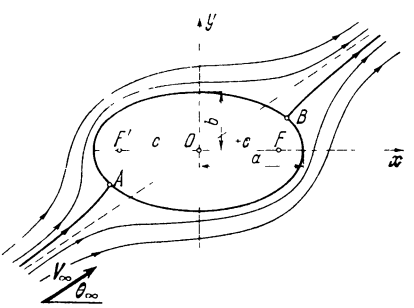


Рис 67

и $\zeta=0$ при $z=\infty$, т. е. *внешности* эллипса соответствовала бы *внутренность* круга.

Таким образом, вместо параметрического представления (70) комплексного потенциала обтекания эллипса получим *явное* выражение этого потенциала

$$\chi(z)=\frac{1}{2}\left[\overline{V}_\infty(z+\sqrt{z^2-c^2})+\frac{V_\infty(a+b)^2}{z+\sqrt{z^2-c^2}}\right]+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+\sqrt{z^2-c^2}),$$

которое легко упрощается, если обычным приемом уничтожить иррациональность в знаменателе второго слагаемого в квадратных скобках. Будем иметь

$$\chi(z)=\frac{1}{2}\overline{V}_\infty(z+\sqrt{z^2-c^2})+\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{c^2}V_\infty(z-\sqrt{z^2-c^2})+$$
$$+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+\sqrt{z^2-c^2}). \tag{72}$$

Бесциркуляционное ($\Gamma=0$) обтекание эллипса показано на рис. 67 Нулевая линия тока, проходящая через критические точки A и B, состоит из самого обтекаемого эллипса и двух отрезков софокусной с ним гиперболы, параметры которой зависят от угла атаки θ_∞.

Имея выражение комплексного потенциала скоростей (72) и взяв от него производную по z, найдем сопряженную скорость, а следовательно, и распределение скоростей и давлений по контуру обтекаемого эллипса.

А. Л. Гонор[1]) придал этим распределениям изящную форму, доказав теорему: *при безвихревом, бесциркуляционном обтекании эллипса несжимаемой жидкостью в направлении его осей скорость в точках контура пропорциональна косинусу местного угла атаки в этих точках.*

[1]) Гонор А. Л. Определение поля течения на поверхности некоторых тел в потоке несжимаемой жидкости.— Механика жидкости и газа, 1976, № 2, с. 187—190.

Приведем доказательство этой теоремы для случая набегающего потока, параллельного большей оси эллипса. Аналогично проводится доказательство в случае потока, параллельного малой оси, а путем наложения этих потоков — для обтекания под любым углом атаки.

Выражение потенциала скоростей φ найдем, положив в (72) $\Gamma=0$, $\overline{V}_\infty=V_\infty=U_\infty$ и отделив в ней *действительную* часть. Для этого перейдем от декартовых координат x, y к *эллиптическим* ξ, η:

$$x=c\operatorname{ch}\xi\cos\eta,\quad y=c\operatorname{ch}\xi\sin\eta.$$

Координатными линиями будут служить семейства *софокусных* эллипсов и гипербол (c — расстояние от начала координат до фокусов):

$$\frac{x^2}{c^2\operatorname{ch}^2\xi}+\frac{y^2}{c^2\operatorname{sh}^2\xi}=1,\quad \frac{x^2}{c^2\cos^2\eta}-\frac{y^2}{c^2\sin^2\eta}=1.$$

Рассматривая обтекаемый эллипс с полуосями a и b как один из эллипсов первого семейства ($\xi=\text{const}$), получим следующие соотношения, справедливые на контуре эллипса:

$$\operatorname{ch}\xi=a/c,\quad \operatorname{sh}\xi=b/c,\quad c=\sqrt{a^2-b^2},$$

$$\cos\eta=x/a,\quad \sin\eta=y/b.$$

Переходу от декартовых координат к эллиптическим соответствует преобразование $z=c\operatorname{ch}\zeta$, где $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$.

Комплексный потенциал скоростей χ при этом приобретет вид

$$\chi=U_\infty\sqrt{(a+b)/(a-b)}\,(a\operatorname{ch}\zeta-b\operatorname{sh}\zeta),$$

а его действительная часть и производные от нее по ξ и η будут равны

$$\varphi=U_\infty\sqrt{(a+b)/(a-b)}\,(a\operatorname{ch}\xi-b\operatorname{sh}\xi)\cos\eta,$$

$$\partial\varphi/\partial\xi=U_\infty\sqrt{(a+b)/(a-b)}\,(a\operatorname{sh}\xi-b\operatorname{ch}\xi)\cos\eta,$$

$$\partial\varphi/\partial\eta=-U_\infty\sqrt{(a+b)/(a-b)}\,(a\operatorname{ch}\xi-b\operatorname{sh}\xi)\sin\eta.$$

Для определения производных $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ используем систему равенств

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta},$$

которая, согласно только что полученным соотношениям, приведется на контуре эллипса к следующей:

$$\frac{b}{a}x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{a}{b}y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{a}{b}y\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{b}{a}x\frac{\partial\varphi}{\partial y}=U_\infty\frac{a+b}{b}y.$$

Решения этой системы уравнений выразятся в форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=U_\infty\frac{a+b}{ab^4}y^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-U_\infty\frac{a+b}{a^3b^2}xy\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{-1},$$

а квадрат модуля скорости окажется равным

$$|V|^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=U_\infty^2\frac{(a+b)^2}{a^2b^4}y^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b}\right)^{-1}.$$

Квадрат косинуса местного угла атаки θ на контуре эллипса будет равен

$$\cos^2\theta=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-1},$$

или, согласно уравнению эллипса в декартовых координатах,

$$\cos^2\theta = (y^2/b^4)\,(x^2/a^4 + y^2/b^4)^{-1}.$$

Сравнивая между собой полученные выражения $|V|^2$ и $\cos^2\theta$, убедимся в наличии на контуре эллипса соотношения

$$|V| = (1 + b/a)\,U_\infty \cos\theta,$$

которое доказывает теорему Гонора. Коэффициент давления $c_p = (p - p_\infty)/(\frac{1}{2}\rho U_\infty^2)$ определится равенством

$$c_p = 1 - (1 + b/a)^2 \cos^2\theta.$$

При $b = a$ вновь найдем указанные в § 50 формулы бесциркуляционного обтекания круглого цилиндра.

Теорема Гонора справедлива не только для плоского бесциркуляционного безвихревого обтекания эллиптического цилиндра, но и в случае пространственного обтекания вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения, а также и трехосного эллипсоида. Доказательство этих результатов можно найти в ранее цитированной статье А. Л. Гонора.

Полагая в (72) $c = 0$, $b = a$, получим комплексный потенциал циркуляционного обтекания круга. Для этого достаточно лишь вычислить предельное выражение

$$\left.\frac{z - \sqrt{z^2 - c^2}}{c^2}\right|_{c \to 0} = \frac{1}{2z},$$

входящее во второе слагаемое. Будем иметь

$$\chi(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{V_\infty a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$$

в полном соответствии с ранее указанным выражением (53).

Полагая в той же формуле (72) $b = 0$, $a = c$, найдем комплексный потенциал *циркуляционного обтекания пластинки* длины $2c$ (отрезка FF' на рис. 66)

$$\chi = \frac{1}{2}\bar{V}_\infty (z + \sqrt{z^2 - c^2}) + \frac{1}{2} V_\infty (z - \sqrt{z^2 - c^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(V \quad + \bar{V}_\infty) z - \frac{1}{2}(V_\infty - \bar{V}_\infty)\sqrt{z^2 - c^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}) =$$

$$= u_\infty z - i v_\infty \sqrt{z^2 - c^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}), \quad (73)$$

где u_∞, v_∞ — проекции V_∞ на оси координат.

На рис. 68 показана картина линий тока обтекания пластинки при $\Gamma = 0$. Нулевая линия тока состоит из поверхности пластинки и двух отрезков софокусной гиперболы, параметры которой, так же как и в случае обтекания эллипса, зависят от угла атаки θ_∞.

Не останавливаясь на анализе течения, определенного формулой (72) в общем случае, рассмотрим несколько подробнее выражение (73) комплексного потенциала обтекания пластинки.

Вычисляя скорость, получим

$$\bar{V} = \frac{d\chi}{dz} = u_\infty - i v_\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1 + \dfrac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}}{z + \sqrt{z^2 - c^2}} = u_\infty - \frac{i v_\infty z - \dfrac{\Gamma}{2\pi i}}{\sqrt{z^2 - c^2}}. \quad (74)$$

При произвольной величине циркуляции Γ и $z=\pm c$ скорость имеет бесконечные значения, что соответствует обтеканию острых передней и задней кромок.

Подчиним теперь величину Γ условию конечности скорости на задней кромке ($z=c$), как того требует постулат Жуковского — Чаплыгина. Для этого должно быть

$$iv_\infty c - \frac{\Gamma}{2\pi i} = 0,$$

т. е.

$$\Gamma = -2\pi c v_\infty. \tag{75}$$

В рассматриваемом сейчас случае пластинки бесциркуляционное направление совпадает с направлением самой пластинки, так что угол

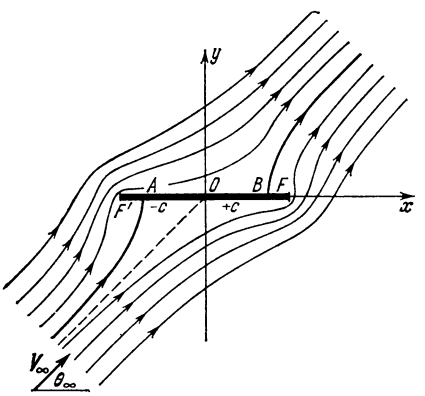


Рис. 68

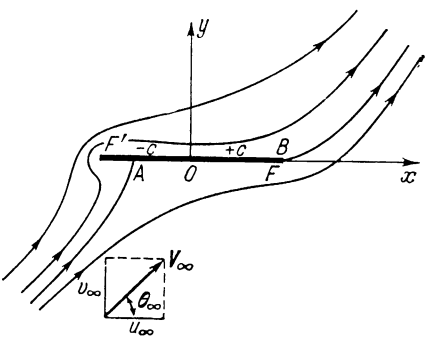


Рис. 69

ε_0, входящий в формулу циркуляции (63), равен нулю. Определяя циркуляцию по этой формуле и заменяя по (65) $m_\infty = {}^1/_2$, получим

$$\Gamma = -4\pi \frac{1}{2} c\,|V_\infty| \sin\theta_\infty = -2\pi c\,|V_\infty| \sin\theta_\infty \tag{76}$$

в полном соответствии с только что непосредственно выведенной формулой (75).

Подставляя выражение циркуляции (75) в (74), получим следующую формулу распределения скоростей:

$$\overline{V} = u_\infty - iv_\infty \frac{z-c}{\sqrt{z^2-c^2}} = u_\infty - iv_\infty \sqrt{\frac{z-c}{z+c}}. \tag{77}$$

На задней кромке ($z=c$) скорость конечна и равна u_∞, на передней кромке ($z=-c$) скорость остается равной бесконечности. *Выбором циркуляции нельзя сделать скорость конечной на обеих острых кромках.* Расположение линий тока в случае плавного обтекания задней кромки показано на рис. 69.

В формулы (72) и (73) в качестве последнего слагаемого входит комплексный потенциал *чисто циркуляционного* обтекания эллипса или пластинки

$$\chi_0(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left(z + \sqrt{z^2-c^2}\right). \tag{78}$$

Соответствующие этому течению линии тока — эллипсы — показаны на рис. 70. Сопряженная скорость будет

$$\overline{V} = \frac{d\chi_0}{dz} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2-z^2}}.$$

На верхней поверхности пластинки ($y=0$, $-c<x<c$) квадратному корню соответствует знак плюс, так что сопряженная скорость действительна и равна

$$u_+ = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2-x^2}} \qquad (u_+ < 0 \text{ при } \Gamma > 0).$$

На нижней поверхности у корня следует брать знак минус, так что

$$u_- = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2-x^2}} \qquad (u_- > 0 \text{ при } \Gamma > 0).$$

Отвлечемся от того, что отрезок $F'F$ представляет собой твердую стенку, и представим себе всю плоскость xOy занятой жидкостью. Тогда линия $F'F$ явится линией разрыва скоростей в погоке. В самом деле, по только что доказанному, при

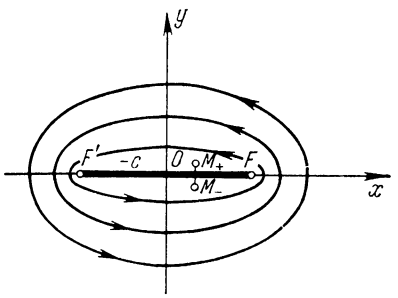


Рис. 70

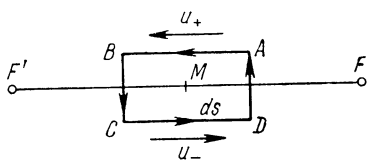


Рис. 71

переходе через линию $F'F$ (рис. 70) скорость u претерпевает конечный скачок

$$u_- - u_+ = \frac{\Gamma}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}.$$

Построим на бесконечно малом отрезке ds линии $F'F$ (рис. 71) прямоугольный контур, охватывающий точку M. Циркуляция скорости по этому замкнутому контуру

$$(u_- - u_+)\,ds = \frac{\Gamma ds}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}$$

отлична от нуля; следовательно, на отрезке ds линии разрыва скоростей расположены *вихри с общей интенсивностью, равной этой циркуляции.*

Обозначим через γ *плотность распределения вихрей*, т. е. интенсивность непрерывного их распределения, приходящуюся на единицу длины отрезка $F'F$; тогда получим

$$\gamma ds = (u_- - u_+)\,ds$$

и, следовательно,

$$\gamma = u_- - u_+ = \frac{\Gamma}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}. \qquad (79)$$

Непрерывное распределение вихрей на поверхности (при плоском движении вдоль некоторой линии) образует *вихревой слой.*

Из сказанного выше следует, что чисто циркуляционное движение (78) вокруг эллиптического цилиндра (в частности, пластинки) эквивалентно потоку, образованному вихревым слоем, расположенным вдоль линии, соединяющей фокусы эллипса, причем плотность распределения вихрей в слое определяется формулой (79).

§ 53. Крыловые профили Жуковского — Чаплыгина

Разобранные в предыдущем параграфе примеры обтекания эллиптического контура и, в частном случае, пластинки не дают полного представления об обтекании крыловых профилей.

Составляя выражение производной от преобразующей функции (65)

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2}{\zeta^2}\right), \tag{80}$$

видим, что точки F^* и F'^* (рис. 66) плоскости ζ с координатами $\zeta=\pm c$ являются особыми точками конформного отображения (65), так как в

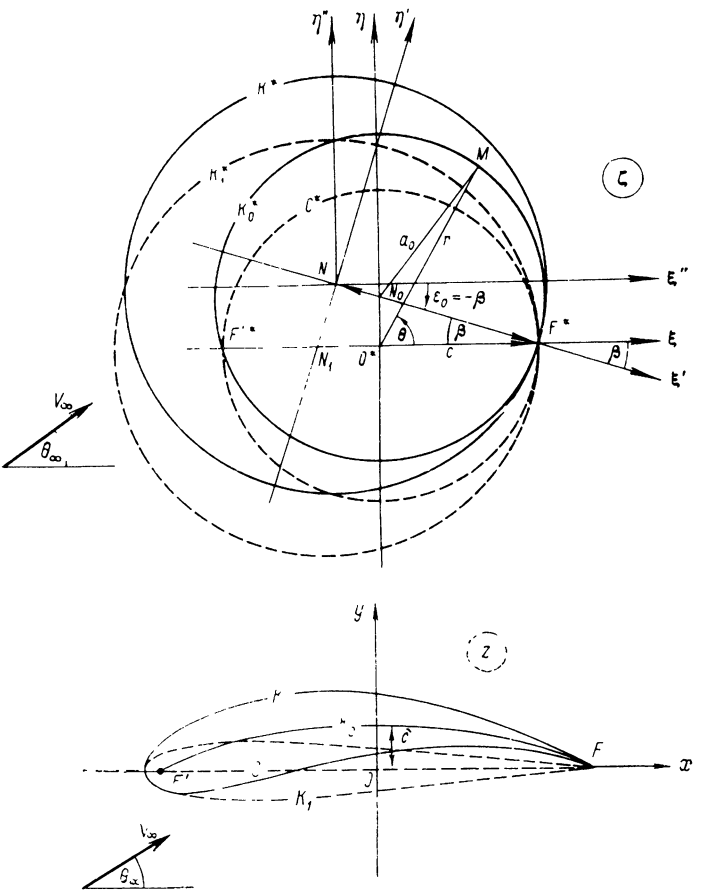


Рис. 72

этих точках производная равна нулю. В точках F^* и F'^* нарушается конформность отображения: углам π в этих точках соответствуют углы 2π в точках F и F' плоскости z.

Окружность C^*, проведенная через обе особые точки, преобразовалась в прямолинейный отрезок FF' или, точнее, в разрез плоскости z с двумя угловыми точками, окружности же C_1^* и C_2^*, не проходящие через особые точки, перешли в эллипсы — плавные кривые, не имеющие угловых точек. Проводя в плоскости ζ окружности или другие какие-нибудь замкнутые кривые так, чтобы они проходили только через одну особую точку, образуем в плоскости z профили с одной угловой точкой, из которых можно выбрать подходящие для крыловых профилей.

Примерами такого рода теоретических крыловых профилей могут служить профили Жуковского — Чаплыгина, образованные конформным отображением (65) окружностей K^*, проведенных во вспомогательной плоскости (рис. 72) через особую точку F^* и содержащих внутри себя вторую особую точку F'^*. Особенностью этих профилей является нулевой угол на задней кромке.

Если центр круга K_1^* находится в точке N_1 оси $O^*\xi$, то в плоскости z получим симметричный профиль K_1, называемый *рулем Жуковского* (показан на рисунке пунктиром). Круг C^* переходит в отрезок $F'F$, служащий *скелетом* руля Жуковского в том смысле, что при уменьшении относительной толщины руля контур его K_1 будет стягиваться к отрезку $F'F$. Чтобы получить руль небольшой (по сравнению с его длиной) толщины, дадим точке N_1 малое смещение влево от точки O^*, равное по абсолютной величине λc, где $\lambda \ll 1$. Тогда уравнение окружности K_1^* можно представить в виде

$$\zeta = -\lambda c + (1+\lambda) c e^{i\theta},$$

где θ — полярный угол точек окружности K_1^* (на рисунке не показанный). Подставляя это выражение в преобразование (65), получим уравнение руля Жуковского

$$z = \frac{1}{2}\left[-\lambda c + (1+\lambda) c e^{i\theta} + \frac{c}{-\lambda + (1+\lambda) e^{i\theta}}\right].$$

Не составляет труда, используя малость параметра λ, представить правую часть в виде разложения в ряд по степеням λ. Довольствуясь членами с первой степенью λ, получим

$$z = c\cos\theta + \frac{1}{2}\lambda c(\cos 2\theta - 1) + i\lambda c\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right),$$

или

$$x = c\cos\theta + \frac{1}{2}\lambda c(\cos 2\theta - 1), \quad y = \lambda c(1 - \cos\theta)\sin\theta.$$

Из второго равенства следует, что крайним абсциссам руля соответствуют значения $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, так что длина, или *хорда*, b профиля равна

$$b = x(0) - x(\pi) = 2c,$$

т. е. в принятом приближении не отличается от длины *скелета* — отрезка FF'. Найдем максимальную толщину профиля. Максимальному значению ординаты профиля отвечает корень уравнения

$$\frac{dy}{d\theta} = \lambda c(\cos\theta - \cos 2\theta) = 0,$$

равный $\theta_m = 120°$. Следовательно, максимальная *ордината* будет

$$y_{\max} = \lambda c \sin 60°(1 + \cos 60°) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda c,$$

а *толщина*

$$t = 2y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda c.$$

Круг K^* с центром в любой точке N плоскости ζ, проходящий через особую точку F^*, преобразуется в изогнутый профиль Жуковского — Чаплыгина K. Дужка K_0 служит скелетом для этого профиля, так же как отрезок FF' — для руля K_1. Вогнутость дужки K_0 представляет вместе с тем и вогнутость профиля K. Если, сохраняя вогнутость профиля K,

уменьшать его толщину, то профиль будет стягиваться к своему скелету — дужке K_0.

Для решения задачи об обтекании профиля K потоком со скоростью V_∞, направленной под углом θ_∞ к оси Ox, проще всего поступить так. Проведем во вспомогательной плоскости ζ оси $N\xi'$ и $N\eta'$ с началом в центре смещенного круга N. Плоскость комплексного переменного $\zeta' = \xi' + i\eta'$ повернута относительно плоскости ζ на угол $(-\beta)$, так что, положив

$$\zeta'' = e^{-i\beta}\zeta',$$

приходим к соответствию между плоскостями ζ и ζ'' с параллельными осями координат (a — радиус окружности K^*)

$$\zeta = c - ae^{-i\beta} + \zeta''.$$

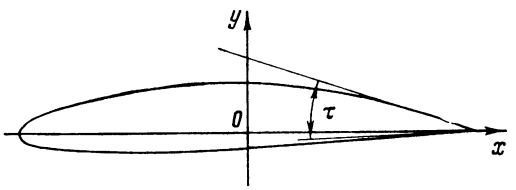


Рис. 73

Тогда, принимая плоскость ζ'' за вспомогательную, перейдем от преобразования (65) к преобразованию более общему

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right) = \frac{1}{2}\left(c - ae^{-i\beta} + \zeta'' + \frac{c^2}{c - ae^{-i\beta} + \zeta''}\right),$$

которое может быть переписано в виде ряда Лорана

$$z = \frac{1}{2}\zeta'' + \frac{1}{2}(c - ae^{-i\beta}) + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\zeta''} - \frac{1}{2}\frac{c^2(c - ae^{-i\beta})}{\zeta''^2} + \ldots$$

Комплексный потенциал в плоскости ζ'' сохранит прежнюю форму

$$\chi^*(\zeta'') = m_\infty\left(\overline{V}_\infty\zeta'' + \frac{V_\infty a^2}{\zeta''}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta''.$$

Совокупность последних двух равенств представляет собой искомое решение задачи обтекания теоретических профилей Жуковского — Чаплыгина.

Обобщенные профили Жуковского — Чаплыгина, соответствующие преобразованию

$$\frac{z - \sigma c}{z + \sigma c} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c}\right)^\sigma, \quad \sigma = 2 - \frac{\tau}{\pi},$$

приводят к крыловым профилям с острым углом τ на задней кромке (рис. 73).

Приближенные методы расчета обтекания крылового профиля произвольной формы изложены в четвертом и предыдущих изданиях настоящего курса, а также в § 55. При современных возможностях машинного счета такие приближенные методы практически становятся излишними.

§ 54. Главный вектор и главный момент сил давления потока на замкнутый контур. Формулы Чаплыгина. Теорема Жуковского. Коэффициенты подъемной силы и момента пластинки

Определим *динамическое* воздействие потока на находящийся в нем профиль.

Составим выражения главного вектора $\boldsymbol{R}$ и главного момента L_O сил давления потока на профиль C (рис. 74) относительно начала координат O. Используя уравнение Бернулли

$$p = \text{const} - \frac{\rho|V|^2}{2},$$

получим выражения главного вектора

$$\boldsymbol{R} = -\oint_C p\boldsymbol{n}ds = \frac{\rho}{2}\oint_C |V|^2\boldsymbol{n}ds$$

и главного момента

$$L_O = -\oint_C (xn_y - yn_x)\,pds = \frac{\rho}{2}\oint_C (xn_y - yn_x)\,|V|^2\,ds.$$

Переходя в этих формулах к комплексным величинам, заметим, что

$$n = -ie^{i\theta},\quad ds = dze^{-i\theta},\quad xn_y - yn_x = \operatorname{Re}(iz\bar{n}),\quad V = \pm|V|e^{i\theta}.$$

Тогда предыдущие формулы силы и момента приведутся к виду

$$R = R_x + iR_y = -\frac{\rho i}{2}\oint_C |V|^2\,dz,$$

$$L_O = -\frac{\rho}{2}\operatorname{Re}\oint_C |V|^2 e^{-2i\theta} z\,dz.$$

Заменим в этих формулах

$$|V| = \pm Ve^{-i\theta} = \pm\overline{V}e^{i\theta};$$

найдем

$$\overline{R} = R_x - iR_y = \frac{\rho i}{2}\oint_C |V|^2\,d\bar{z} = \frac{\rho i}{2}\oint_C \overline{V}^2 dz,$$

$$L_O = -\frac{\rho}{2}\operatorname{Re}\oint_C \overline{V}^2 z\,dz. \qquad (81)$$

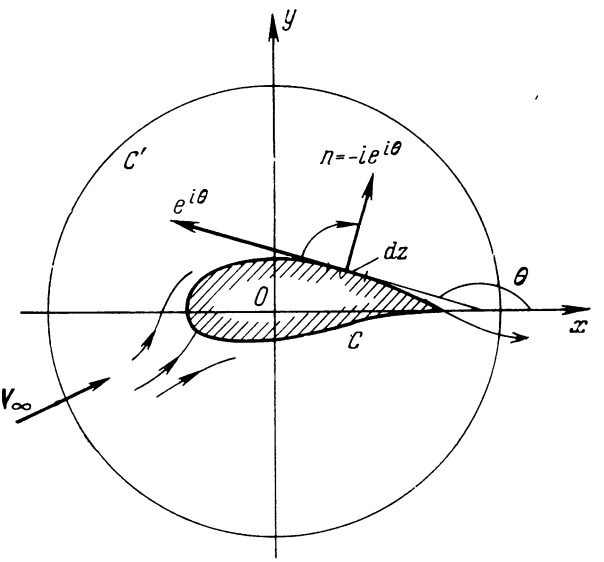


Рис. 74

Вспоминая, что по предыдущему $\overline{V} = d\chi/dz$, перепишем эти выражения еще в таком виде:

$$\overline{R} = \frac{\rho i}{2}\oint_C \left(\frac{d\chi}{dz}\right)^2 dz,\quad L_O = -\frac{\rho}{2}\operatorname{Re}\oint_C \left(\frac{d\chi}{dz}\right)^2 z\,dz. \qquad (82)$$

Приведенные формулы главного вектора и главного момента сил давления потока на профиль были даны в 1910 г. С. А. Чаплыгиным [1]).

Покажем, что для вычисления контурных интегралов, входящих в формулы Чаплыгина (81) или (82), нет необходимости полностью знать комплексный потенциал, а достаточно иметь лишь первые *три* коэффициента в разложении производной от комплексного потенциала $d\chi/dz$, или, что все равно, сопряженной комплексной скорости $\overline{V}$ в ряд Лорана.

Предполагая, что во всей внешней к обтекаемому профилю области физической плоскости, включая и сам контур C, особых точек нет, можем представить сопряженную скорость $\overline{V}$ ее разложением в ряд Лорана в физической плоскости

$$\overline{V} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \qquad (83)$$

[1]) Чаплыгин С. А. О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (К теории аэроплана).— Мат. сб., 1910, т. XXVIII.

Легко убедиться, что первые два коэффициента выражаются через скорость набегающего потока V_∞ и циркуляцию Г, а именно

$$a_0 = (\overline{V})_{z=\infty} = \overline{V}_\infty, \quad a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \overline{V}dz = \frac{\Gamma}{2\pi i}. \tag{84}$$

Подставим в полученные только что формулы (81) разложение сопряженной скорости в ряд Лорана (83), причем сохраним под знаком интеграла только те слагаемые, которые дадут результаты интегрирования, отличные от нуля; будем иметь (C' — произвольный круговой контур в физической плоскости, охватывающий профиль C)

$$\overline{R} = \frac{\rho i}{2}\oint_{C'}\left(\ldots + \frac{2a_0a_1}{z} + \ldots\right)dz = -2\pi\rho a_0a_1,$$

$$L_0 = -\frac{\rho}{2}\operatorname{Re}\oint_{C'}\left(\ldots + \frac{a_1^2 + 2a_0a_2}{z} + \ldots\right)dz = -\pi\rho\operatorname{Re}[i(a_1^2 + 2a_0a_2)].$$

Используя выражения (84) первых двух коэффициентов a_0 и a_1, получим

$$R = -i\rho V_\infty\Gamma, \quad L_0 = -2\pi\rho\operatorname{Re}(i\overline{V}_\infty a_2). \tag{85}$$

Первая из формул (85) выражает известную *теорему Жуковского о подъемной силе* крыла в плоскопараллельном безвихревом потоке идеальной несжимаемой жидкости. Эта теорема была опубликована в 1906 г. в классическом мемуаре «О присоединенных вихрях»[1]), в котором Н. Е. Жуковский впервые установил *вихревую природу* сил, действующих со стороны потока на крыло, и указал на наличие простой зависимости между этой силой и циркуляцией скорости по контуру, охватывающему обтекаемое крыло.

Для того чтобы, оставаясь в рамках теории идеального безвихревого потока, определить величину воздействия потока на помещенное в него тело, Жуковский заменяет крыло некоторым воображаемым *жидким* крылом, ограниченным замкнутой линией тока, и предполагает, что внутри этого жидкого крыла происходит движение с *особенностью*—вихрем[2]).

Такой вихрь Н. Е. Жуковский назвал *присоединенным*. Интенсивность присоединенного вихря можно вычислить только при помощи некоторого дополнительного допущения. Таким допущением, как мы уже знаем, является постулат *Жуковского — Чаплыгина о конечности скорости на задней острой кромке крылового профиля*. Пользуясь этим постулатом, оказалось, как мы видим, возможным теоретически определить величину наложенной циркуляции, или, что то же, интенсивность присоединенного вихря. Эта величина задается формулами (63) или (64) настоящей главы.

Идея присоединенного вихря и постулат конечности скорости на задней острой кромке крылового профиля представляют собой основу всей теории крыла в плоскопараллельном потоке. Эти представления нашли свое дальнейшее развитие и применение и в более общей, *пространственной* теории крыла конечного размаха, системы крыльев, а также в теории лопаточных аппаратов турбин, компрессоров и насосов.

Возвращаясь к первой формуле (85) и принимая во внимание ее векторный характер, заключим, что *величина* главного вектора $\boldsymbol{R}$ равна

[1]) Жуковский Н. Е. Избр. соч., т. II.— Л.; М.: Гостехиздат, 1948, с. 97.

[2]) См. по этому поводу Степанов Г. Ю. О некоторых неточностях в разъяснениях теории крыла.— Механика жидкости и газа, 1975, № 3, с. 188, 189; Степанов Г. Ю. О комментариях к избранным трудам С. А. Чаплыгина.— Механика жидкости и газа, 1977, № 4, с. 180—183.

произведению плотности жидкости на величину скорости набегающего потока и величину наложенной циркуляции (Γ — алгебраическая величина, которая может быть как положительной, так и отрицательной)

$$|R| = \rho |V_\infty| |\Gamma|, \tag{86}$$

а его направление определяется (рис. 75, *а*, *б*) поворотом на 90° вектора скорости набегающего потока $\boldsymbol{V}_\infty$ по часовой стрелке, если $\Gamma > 0$, и против часовой стрелки, если $\Gamma < 0$. Таким образом, как уже отмечалось в § 50, главный вектор $\boldsymbol{R}$ является силой, *поперечной* к направлению набегающего потока или к направлению поступательного движения тела в обращенном движении. По формулировке Жуковского для получения направления главного вектора сил давления $\boldsymbol{R}$ надо повернуть вектор скорости набегающего потока $\boldsymbol{V}_\infty$ на 90° в *сторону, противоположную направлению циркуляции.*

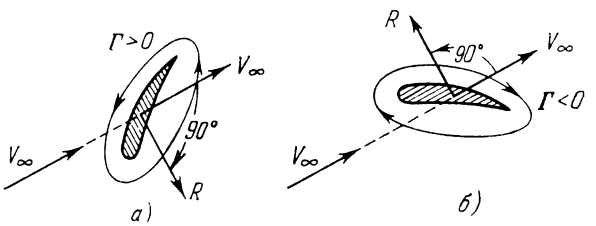


Рис 75

Заметим, что направление циркуляции в общем случае крылового профиля произвольной формы и любого направления натекания не поддается непосредственному восприятию, как это имело, например, место в случае циркуляционного обтекания круглого цилиндра, допускающем простую физическую интерпретацию (§ 50). Для определения «направления циркуляции» необходимо в каждом отдельном случае находить знак Γ, пользуясь для этого формулой (63).

Весьма существен тот факт, что единственной силой, действующей на профиль в плоскопараллельном безвихревом потоке идеальной несжимаемой жидкости, является *перпендикулярная* к направлению набегающего потока или, в обращенном движении, *поперечная* направлению движения профиля сила, которая может быть названа *подъемной* или *поддерживающей* силой, так как именно эта сила обеспечивает подъем самолета в воздух, поддерживает его крыло при горизонтальном полете. Подчеркнем отсутствие составляющей силы, направленной вдоль движения жидкости, или, что все равно, направления движения тела по отношению к жидкости,— *силы сопротивления.* Это представляет собой частный случай общего парадокса Даламбера.

Теорема Жуковского подтверждает парадокс Даламбера для любого плоского безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости как при наличии присоединенных вихрей, так и при отсутствии их. Общее доказательство парадокса для пространственного течения будет дано в § 73 гл. IX.

Воспользовавшись теоремой Жуковского и постулатом Жуковского — Чаплыгина, можно по формуле (86) и по формулам (63) и (64) получить выражение величины подъемной силы в виде

$$|R| = 4\pi a m_\infty \rho |V_\infty|^2 |\sin(\varepsilon_0 - \theta_\infty)| = 4\pi a m_\infty \rho |V_\infty|^2 |\sin\alpha|, \tag{87}$$

впервые указанном Чаплыгиным. Входящее в эту формулу произведение am_∞ зависит от формы обтекаемого контура.

Для иллюстрации применения формул (85) остановимся сначала на простейшем примере, изложенном в конце § 52,— на обтекании *пластинки* с плавным сходом струй с задней кромки. В этом случае $am_\infty = {}^1/_2 c$, а подъемная сила оказывается равной

$$|R| = 2\pi\rho c |V_\infty|^2 \sin\alpha. \tag{88}$$

Введем *коэффициент подъемной силы* как отношение величины подъемной силы $|R|$ к скоростному напору набегающего потока $^1/_2\rho|V_\infty|^2$ и длине хорды b. Обычно ось Ox направляют по скорости V_∞; тогда подъемная сила будет направлена по оси Oy и может быть обозначена через Y или R_y. Вот почему коэффициент подъемной силы в нашей литературе принято обозначать через c_y, а коэффициент сопротивления — через c_x.

При этом обозначении будем иметь

$$c_y = \frac{|R|}{^1/_2\rho|V_\infty|^2 b} = 8\pi\frac{am_\infty}{b}\sin\alpha, \tag{89}$$

а в рассматриваемом сейчас частном случае пластинки ($b=2c$)

$$c_y = 2\pi\sin\alpha. \tag{90}$$

Как показывают многочисленные опыты, при сравнительно малых углах атаки, при которых действительно выполняется условие плавного схода струй с задней кромки, формула (90), переписанная в виде ($\sin\alpha\approx\alpha$)

$$c_y \approx 2\pi\alpha \approx 6{,}28\alpha, \tag{91}$$

удовлетворительно отражает установленную в опытах закономерность: *при малых углах атаки коэффициент подъемной силы пластинки прямо пропорционален углу атаки.* Однако теоретическая величина коэффициента пропорциональности $2\pi = 6{,}28$ несколько завышена. На рис. 76 представлены для сравнения

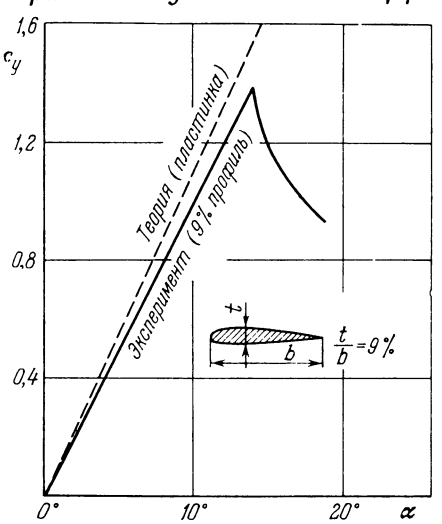


Рис 76

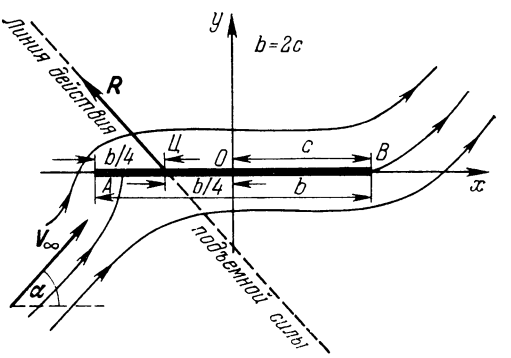


Рис. 77

теоретическая прямая и экспериментальная кривая $c_y(\alpha)$ для симметричного профиля с отношением максимальной толщины к хорде, равным 9%. Как видно из рисунка, в интервале углов атаки $-13°<\alpha<13°$ (область отрицательных α на рисунке не представлена, но она в силу симметричности профиля только знаком отличается от области положительных α) расхождение между теоретическим коэффициентом подъемной силы пластинки и экспериментальным для тонкого профиля невелико.

Возможность рассмотрения пластинки как предельного случая тонкого симметричного профиля при стремлении относительной его толщины к нулю позволяет обосновать справедливость формулы (91). Физически можно себе представить, что, как бы ни была тонка пластинка, передняя ее кромка все же имеет некоторую закругленность, на которой благодаря очень большой (для пластинки теоретически бесконечной)

скорости образуется значительное разрежение, создающее *подсасывающую* силу, направленную навстречу потоку вдоль поверхности пластинки. Эта подсасывающая сила вместе с силами давления, перпендикулярными к пластинке, и дает подъемную силу, поперечную к направлению набегающего на пластинку потока.

Чтобы вычислить главный момент L_0 сил давления потока на пластинку, разложим сопряженную скорость $\overline{V}$ обтекания пластинки, определяемую в рассматриваемом сейчас случае плавного стекания жидкости с задней кромки пластинки формулой (77), в ряд по отрицательным степеням z:

$$\overline{V}(z)=u_\infty-iv_\infty\sqrt{\frac{z-c}{z+c}}=u_\infty-iv_\infty+\frac{cv_\infty i}{z}-\frac{1}{2}\frac{c^2v_\infty i}{z^2}+\ldots$$

Сравнивая это разложение с рядом (83), получим

$$a_0=u_\infty-iv_\infty=\overline{V}_\infty,\quad a_1=civ_\infty=ci\,|V_\infty|\sin\alpha,$$

$$a_2=-\frac{1}{2}c^2iv_\infty=-\frac{1}{2}c^2i\,|V_\infty|\sin\alpha.$$

По первой из формул (85) находим

$$R=R_x+iR_y=-i\rho(u_\infty+iv_\infty)\Gamma=\rho v_\infty\Gamma-i\rho u_\infty\Gamma,$$

или, пользуясь формулой циркуляции (75),

$$R_x=-2\pi\rho cv_\infty^2,\quad R_y=2\pi\rho cu_\infty v_\infty.$$

Момент L_0 по второй из формул (85) будет равен

$$L_0=-2\pi\rho\,\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{2}c^2iv_\infty i\,(u_\infty-iv_\infty)\right]=-\pi\rho c^2v_\infty\mathrm{Re}\,(u_\infty-iv_\infty)=$$

$$=-\pi\rho c^2u_\infty v_\infty.$$

Переходя от проекций скорости u_∞, v_∞ к их выражениям через модуль скорости и угол атаки $\alpha=\theta_\infty$, получим

$$R_x=-2\pi\rho c\,|V_\infty|^2\sin^2\alpha,\quad R_y=2\pi\rho c\,|V_\infty|^2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$L_0=-\pi\rho c^2\,|V_\infty|^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Имея выражение проекций подъемной силы и момента относительно точки O, можем найти уравнение *линии действия равнодействующей*. Обозначим через x и y текущие координаты точки на линии действия равнодействующей; тогда уравнение этой линии получим в виде

$$xR_y-yR_x=L_0,$$

или, используя предыдущие выражения и произведя очевидные сокращения,

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=-\frac{1}{2}c\cos\alpha.$$

Точка $Ц$ (рис. 77) пересечения линии действия подъемной силы с пластинкой называется *центром давления*. Если привести все силы давления потока на пластинку к одной силе R, то эта сила будет приложена в центре давления $Ц$. Полагая в последнем уравнении $y=0$, найдем абсциссу положения центра давления $Ц$ на пластинке

$$x=-\frac{c}{2}.$$

Центр давления потока на пластинку находится на *четверти ее длины от передней кромки*, причем, как показывает последняя формула, *положение центра давления не зависит ни от скорости набегающего потока, ни от угла атаки.*

Вводя в рассмотрение коэффициент момента

$$c_m = \frac{L_O}{\frac{1}{2}\rho |V_\infty|^2 b^2},$$

будем иметь при малых углах атаки ($\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$)

$$c_m = \frac{\pi}{2}\alpha.$$

Сравнивая с формулой коэффициента подъемной силы $c_y = 2\pi\alpha$, видим, что

$$c_m : c_y = 1 : 4.$$

Отметим, что это соотношение, обычно выражаемое через коэффициенты $dc_m/d\alpha$ и $dc_y/d\alpha$ в виде

$$\frac{dc_m}{dc_y} = \frac{dc_m}{d\alpha} : \frac{dc_y}{d\alpha} = \frac{1}{4},$$

удовлетворительно соответствует опытным данным не только для обтекания пластинки, но и для тонких симметричных профилей.

Если принять точку $Ц$ ($-c/2$, 0) за точку, относительно которой берется главный момент сил давлений, то момент $L_ц$ будет равен нулю. Это свойство пластинки, а также и тонких симметричных профилей используется при конструировании креплений рулей. За ось вращения руля берут линию, проходящую через центры давления нормальных к оси вращения сечений руля; это сводит к минимуму момент, необходимый для поворота руля, и облегчает управление.

§ 55. Теория тонкого профиля (дужки)

Тонкий крыловой профиль малой вогнутости можно рассматривать как дужку, уравнение которой в системе координат, показанной на рис. 78, представляется в виде

$$y = h(x) = \frac{1}{2}[h_1(x) + h_2(x)], \tag{92}$$

где $y_1 = h_1(x)$ и $y_2 = h_2(x)$ — уравнения верхней и нижней поверхностей тонкого профиля, приближенно заменяемого дужкой.

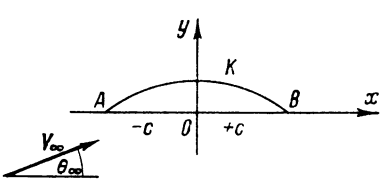


Рис. 78

Поместим дужку в плоскопараллельный безвихревой поток идеальной несжимаемой жидкости, имеющий скорость на бесконечности V_∞, образующую с хордой профиля $AB = 2c$ угол атаки θ_∞. Для расчета обтекания тонкого профиля применим метод малых возмущений, приняв, что возмущение скорости V^*, производимое дужкой в набегающем потоке, мало по величине. Таким образом, вектор скорости V в любой точке потока может быть представлен суммой

$$V = V_\infty + V^*. \tag{93}$$

Условие непроницаемости дужки запишем в форме равенства нулю на контуре дужки проекции скорости V на нормаль к контуру:

$$V_n = V_{\infty n} + V_n^* = u_\infty \cos(\widehat{n, x}) + v_\infty \cos(\widehat{n, y}) + V_n^* = 0.$$

Отсюда вытекает граничное условие (θ — угол касательной к дужке с осью Ox, u_∞ и v_∞ — проекции скорости $\boldsymbol{V}_\infty$ на оси Ox и Oy)

$$V_n^* = -V_{\infty n} = -[u_\infty \cos(\widehat{\boldsymbol{n}, x}) + v_\infty \cos(\widehat{\boldsymbol{n}, y})] = u_\infty \sin\theta - v_\infty \cos\theta, \quad (94)$$

которое должно выполняться на обеих сторонах дужки. Из условия малой вогнутости следует, что угол θ мал, и можно положить

$$\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta = h'(x), \quad \cos\theta \approx 1.$$

Пользуясь малостью отклонений дужки от хорды AB, заменим в граничном условии (94) нормальную компоненту скорости возмущения V_n^* на равную ей с точностью до малых высших порядков проекцию v^* этой скорости на ось Oy. Кроме того, граничное условие (94) выполним не на дужке K, а на хорде AB. Такой перенос граничных условий с одной кривой на мало от нее отклоняющуюся другую вводит ошибку *второго порядка малости*. Итак, имеем граничное условие

$$v^*(x, y) = u_\infty h'(x) - v_\infty \text{ при } -c \leqslant x \leqslant c \text{ и } y = \pm 0. \quad (95)$$

Двойной знак при нуле выражает применимость граничного условия (95) как на верхней, так и на нижней границе разреза AB по оси Ox в плоскости течения, т. е. непрерывность изменения функции $v^*(x, y)$, представляющей взятую с обратным знаком мнимую часть $\overline{V}^*$, при переходе с одной стороны разреза AB на другую.

На бесконечном удалении от дужки скорость возмущения обращается в нуль; кроме того, еще должно быть выполнено условие Жуковского — Чаплыгина конечности скорости в точке B.

Задача сводится, таким образом, к разысканию голоморфной, исчезающей на бесконечности функции $\overline{V}^*(z)$, мнимая часть которой на отрезке действительной оси ($-c \leqslant x \leqslant c$) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Im} \overline{V}^*(z) = v_\infty - u_\infty h'(x), \quad (96)$$

непосредственно вытекающему из (95), причем функция $\overline{V}^*(z)$ должна быть *конечна* при $z = c$.

Сравним поставленную задачу с ранее рассмотренной задачей об обтекании пластинки с конечной скоростью на задней кромке (§ 52). Из полученного там распределения скоростей (77) найдем сопряженную скорость возмущения

$$\overline{V}^* = \overline{V} - \overline{V}_\infty = u_\infty - iv_\infty \sqrt{\frac{z-c}{z+c}} - u_\infty + iv_\infty = iv_\infty \left(1 - \sqrt{\frac{z-c}{z+c}}\right).$$

В этом случае условие (96), очевидно, удовлетворено, так как на пластинке

$$\overline{V}^* = iv_\infty \left(1 - i\sqrt{\frac{c-x}{c+x}}\right) = v_\infty \sqrt{\frac{c-x}{c+x}} + iv_\infty,$$

а $h'(x) = 0$; кроме того, $\overline{V}^* \to 0$ при $z \to \infty$ и $u^* = 0$, $v^* = -v_\infty$ при $z = c$, т. е. $\overline{V}^*$ конечно. На верхней стороне разреза ($-c \leqslant x \leqslant c$, $y = +0$) корню приписывается положительное значение, а на нижней ($-c \leqslant x \leqslant c$, $y = -0$) — отрицательное, так что, приравнивая в предыдущей формуле действительные и мнимые части, получим

$$u^*(x, +0) = v_\infty \sqrt{\frac{c-x}{c+x}}, \quad u^*(x, -0) = -v_\infty \sqrt{\frac{c-x}{c+x}},$$

$$v^*(x, +0) = v^*(x, -0) = -v_\infty,$$

откуда следует

$$u^*(x, +0) = -u^*(x, -0), \quad v^*(x, +0) = v^*(x, -0). \quad (97)$$

Конечный скачок в величине составляющей u^* скорости возмущения при переходе через разрез от положительных y к отрицательным равен

$$u^*(x, +0) - u^*(x, -0) = 2v_\infty \sqrt{\frac{c-x}{c+x}}.$$

Как уже было разъяснено в конце § 52, этот разрыв в составляющей u^* при непрерывности составляющей v^* может быть интерпретирован как наличие *вихревого слоя* с общей интенсивностью, равной наложенной на пластинку циркуляции.

Возвращаясь к вопросу об обтекании дужки, представим[1]) искомую сопряженную скорость возмущенного движения как произведение (радикал играет ту же роль, что и в формуле (77) для пластинки)

$$\overline{V}^* = \sqrt{\frac{z-c}{z+c}} f(z), \tag{98}$$

где $f(z)$ — ограниченная, голоморфная и исчезающая на бесконечности функция; при таком выборе вида функции $\overline{V}^*(z)$ будут выполняться условия $\overline{V}^*(c)=0$, $\overline{V}(c)=u_\infty$ безотрывного обтекания задней кромки ($z=c$). На передней кромке ($z=-c$) скорость в общем случае обращается в бесконечность[2]).

По известной формуле Коши будем иметь следующее интегральное представление функции $f(z)$ через ее значения на контуре:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{99}$$

где L — контур выреза AB с двумя бесконечно малыми окружностями, выделяющими точки разветвления A и B подынтегральной функции

$$f(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta+c}{\zeta-c}} \overline{V}^*(\zeta),$$

причем в *верхней* части разреза AB у корня следует брать знак плюс и считать

$$f(\xi) =$$

$$= \sqrt{\frac{\xi+c}{\xi-c}} [u^*(\xi, +0) - iv^*(\xi, +0)] = -i \sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}} [u^*(\xi, +0) - iv^*(\xi, +0)],$$

а на *нижней* — знак минус, так что

$$f(\xi) =$$

$$= -\sqrt{\frac{\xi+c}{\xi-c}} [u^*(\xi, -0) - iv^*(\xi, -0)] = i \sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}} [u^*(\xi, -0) - iv^*(\xi, -0)].$$

Составляя интеграл (99), убедимся, что интегралы по малым окружностям с центрами в точках A и B при стремлении радиусов этих окружностей к нулю также стремятся к нулю, а интеграл Коши (99) сводится к разности определенных интегралов в пределах $(-c, c)$, вычисляемых в положительном направлении оси Ox по верхней и нижней сторонам разреза AB. По основному свойству вихревого слоя, расположенного в этом общем случае вдоль дужки, или, с ошибкой второго порядка малости, по разрезу AB, будут выполняться условия (97), так что в разности интегралов слагаемые, содержащие $u^*(\xi, +0)$ и $u^*(\xi, -0)$,

[1]) Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М.: Гостехиздат, 1950, с. 46—64; Кибель И. А., Кочин Н. Е., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I.— М.: Физматгиз, 1963, с. 297—321.

[2]) См. по этому поводу замечание в § 52.

сократятся, а слагаемые с $v^*(\xi, +0) = v^*(\xi, -0) = v^*(\xi, 0)$ сложатся; получим

$$\overline{V}^*(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z-c}{z+c}}\int_{-c}^{+c}\frac{2v^*(\xi, 0)}{\xi - z}\sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}}\,d\xi$$

и, согласно граничному условию (95),

$$\overline{V}^*(z) = -\frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{z-c}{z+c}}\int_{-c}^{+c}\frac{u_\infty h'(\xi) - v_\infty}{\xi - z}\sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}}\,d\xi. \qquad (100)$$

Возвращаясь к полной скорости $\overline{V}$ и замечая, что при малом θ_∞ можно положить

$$u_\infty = |V_\infty|, \quad v_\infty = |V_\infty|\theta_\infty,$$

окончательно получим

$$\overline{V}(z) = \overline{V}_\infty + \overline{V}^*(z) = \overline{V}_\infty - \frac{|V_\infty|}{\pi i}\sqrt{\frac{z-c}{z+c}}\int_{-c}^{+c}\frac{h'(\xi) - \theta_\infty}{\xi - z}\sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}}\,d\xi. \qquad (101)$$

Вычислим *главный вектор* и *главный момент* сил давления потока на дужку. Для этого разложим в ряд по отрицательным степеням z выражения

$$\sqrt{\frac{z-c}{z+c}} = \sqrt{\frac{1-c/z}{1+c/z}} = 1 - \frac{c}{z} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{z^2} - \ldots,$$

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\xi/z} = -\frac{1}{z} - \frac{\xi}{z^2} - \ldots$$

и подставим их в (101); сравнив результат подстановки с разложением сопряженной скорости (83), найдем значения коэффициентов разложения

$$a_0 = \overline{V}_\infty,$$

$$a_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i} = \frac{|V_\infty|}{\pi i}\int_{-c}^{+c}[h'(\xi) - \theta_\infty]\sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}}\,d\xi,$$

$$a_2 = -\frac{|V_\infty|}{\pi i}\int_{-c}^{+c}[h'(\xi) - \theta_\infty]\sqrt{c^2 - \xi^2}\,d\xi,$$

а следовательно, согласно (85), и *общие выражения главного вектора и главного момента*

$$R_x = -2\pi\rho c|V_\infty|^2\theta_\infty^2 + 2\rho|V_\infty|^2\theta_\infty\int_{-c}^{+c}h'(\xi)\sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}}\,d\xi,$$

$$R_y = 2\pi\rho c|V_\infty|^2\theta_\infty - 2\rho|V_\infty|^2\int_{-c}^{+c}h'(\xi)\sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}}\,d\xi, \qquad (102)$$

$$L_O = -\pi\rho c^2|V_\infty|^2\theta_\infty + 2\rho|V_\infty|^2\int_{-c}^{+c}h'(\xi)\sqrt{c^2 - \xi^2}\,d\xi.$$

В принятом приближении $R_x = 0$, так как оба слагаемых в правой части первой формулы системы (102) представляют малые величины второго порядка, пренебрежение которыми в теории тонкого крыла обя-

зательно; этот результат соответствует *парадоксу Даламбера об отсутствии сопротивления.*

В случае пластинки $h'(\xi)\equiv 0$ и равенства (102) приводят к известным уже формулам (с точностью до θ_∞ в первой степени)

$$R_y=2\pi\rho c|V_\infty|^2\theta_\infty,\quad L_O=-\pi\rho c^2|V_\infty|^2\theta_\infty.$$

При произвольной форме дужки $y=h(x)$ величины R_y и L_O могут быть по (102) без труда вычислены, причем, подчеркнем это, все слагаемые, стоящие в правых частях второго и третьего равенств системы

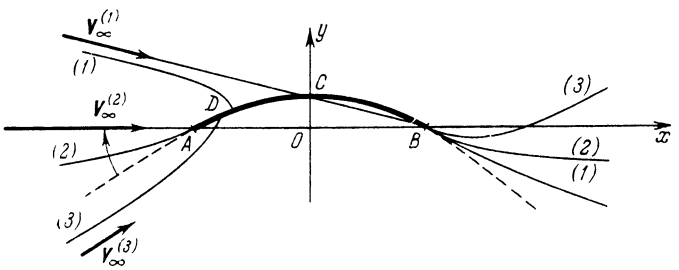


Рис. 79

(102), имеют *первый* порядок малости. Интегральные члены в правых частях выражений (102) для R_y и L_O являются дополнительными к соответствующим выражениям для пластинки; эти члены определяют влияние вогнутости дужки. Так, например, для дужки параболы

$$h(x)=\delta\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right), \tag{103}$$

где δ — стрелка прогиба, будем иметь

$$R_y=2\pi\rho c|V_\infty|^2\left(\theta_\infty+\frac{\delta}{c}\right),\quad L_O=-\pi\rho c^2|V_\infty|^2\theta_\infty. \tag{104}$$

Как видно из этих формул, в принятом приближении относительная вогнутость $\delta/(2c)$ увеличивает подъемную силу, но не влияет на момент относительно начала координат O, расположенного на середине отрезка AB.

Согласно первой из формул (104) направление нулевой подъемной силы ($\theta_\infty=-\delta/c$), или, что то же, бесциркуляционное направление совпадает с направлением прямой, проведенной через вершину C дужки и заднюю кромку B (рис. 79).

Вычисление скорости на поверхности дужки по формуле (101) представляет некоторые затруднения, связанные с тем, что интеграл, стоящий в правой части, является *несобственным* и должен вычисляться в смысле своего *главного значения* [1]).

Приводим, опуская вычислительные детали, формулу распределения скоростей по поверхности параболической дужки, заданной уравнением (103)

$$\overline{V}=|V_\infty|\left(1-i\theta_\infty\sqrt{\frac{z-c}{z+c}}\right)+\frac{2i|V_\infty|\delta}{z+\sqrt{z^2-c^2}}. \tag{105}$$

Первое слагаемое выражает распределение скорости по пластинке (для малых θ_∞), второе дает влияние вогнутости $\delta/(2c)$ дужки.

---

[1]) См., например, Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV.— М.: Гостехиздат, 1941, с. 252—253.

При $\theta_\infty=0$ предыдущая формула приводится к виду

$$\overline{V}=|V_\infty|\left(1+\frac{2i\delta}{z+\sqrt{z^2-c^2}}\right);$$

полагая здесь $z=\pm c$, получим

$$\overline{V}(\pm c)=|V_\infty|\left(1\pm i\frac{2\delta}{c}\right). \tag{106}$$

Замечая, что тангенс или синус малого угла наклона касательной к дужке в точках ($x=\pm c$, $y=0$) равен $\mp 2\delta/c$, а косинус — единице, заключим, что в рассматриваемом случае векторы скорости на кромках направлены по касательным к дужке в этих точках. Иными словами, при $\theta_\infty=0$ передняя кромка является точкой плавного, или, как говорят, *безударного* входа жидкости на дужку, а задняя — *плавного схода* (рис. 79).

Подъемная сила, в этом случае равная

$$(R_y)_{\theta_\infty=0}=2\pi\rho\,|V_\infty|^2\,\delta=4\pi\rho c\,|V_\infty|^2\frac{\delta}{2c}, \tag{107}$$

пропорциональна относительной вогнутости дужки.

На рис. 79 совмещены картины обтекания параболической дужки при трех различных, наиболее характерных направлениях набегающего потока, причем, чтобы избежать излишнего загромождения рисунка, показаны лишь нулевые линии токов для каждого из трех потоков. Штрихами показаны направления касательных к дужке в передней и задней кромках. Направления набегающих потоков вдалеке от дужки представлены векторами скоростей на бесконечности: $V_\infty^{(1)}$, $V_\infty^{(2)}$ и $V_\infty^{(3)}$.

Согласно принятому при выводе равенства (105) условию для всех трех потоков наложенные циркуляции подобраны так, чтобы задняя кромка B была точкой конечной скорости и плавного схода потока. В этой точке B, как это видно из рисунка, все три нулевые линии тока (*1*), (*2*) и (*3*) имеют общую точку схода B и общую касательную, показанную штрихами и совпадающую с касательной к дужке в задней кромке B.

Положения точек разветвления потока вблизи передней кромки A, наоборот, резко различаются. Плавный, безударный вход потока на переднюю кромку с конечной скоростью, определяемой по (106), образуется лишь при направлении набегающего потока по вектору скорости на бесконечности $V_\infty^{(2)}$, т. е. параллельному хорде дужки AB по оси Ox. Это направление естественно назвать *направлением безударного натекания.*

При бесциркуляционном натекании, соответствующем вектору скорости на бесконечности $V_\infty^{(1)}$, так же как и при натекании в направлении касательной к дужке в передней кромке со скоростью на бесконечности $V_\infty^{(3)}$, скорость в точке A будет бесконечно большой, вход на дужку в передней кромке не будет безударным.

Изложенные обстоятельства, имеющие, строго говоря, отношение лишь к рассмотренным симметричным относительно оси Oy параболическим дужкам, в той или другой степени приближения оправдываются и для дужек другой формы. Более того, как показывают точные расчеты и опытные материалы, указанные свойства обтекания дужки оказываются качественно справедливыми и для профилей малых конечных толщин и кривизн. В этом случае под безударным обтеканием следует условно понимать такое, при котором вблизи носка профиля *не образуется резких пиков разрежения*, соответствующих большим местным скоростям на лобовой поверхности профиля. Для определения направления набегающего потока, соответствующего этому условному безударному

обтеканию, необходимо в каждом отдельном случае провести ряд аналитических расчетов обтекания рассматриваемого профиля. Углы атаки при этих расчетах можно выбирать из соображений малого их отличия от угла атаки, отвечающего безударному обтеканию «скелета» профиля.

§ 56. Теорема Жуковского о подъемной силе профиля в решетке

Под плоской решеткой профилей (рис. 80) понимают бесконечную совокупность периодично расположенных в плоскости одинаковых крыловых профилей, каждый из которых получается из смежного параллельным переносом на некоторую, называемую *шагом* длину t в направлении, определяющем ось решетки. Угол β между хордой профиля и перпендикуляром к оси решетки иногда называют *углом выноса*, дополнительный угол β' — *углом установки* профиля. Вектор t, равный по

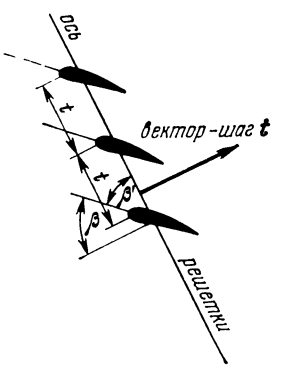


Рис. 80

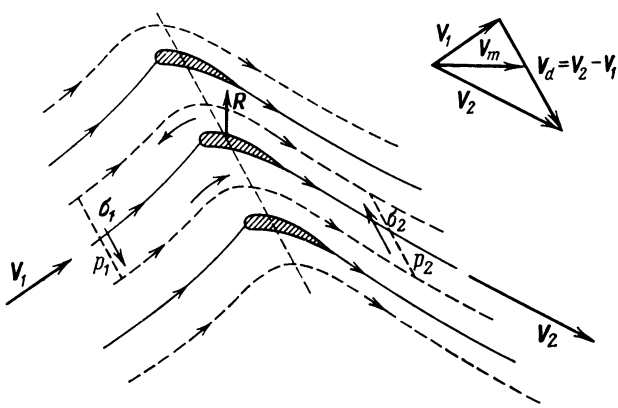


Рис. 81

длине шагу и направленный перпендикулярно к оси решетки в сторону течения, назовем *вектором-шагом*.

В отличие от одиночного профиля, в бесконечном удалении впереди и позади решетки скорости в общем случае *различны* как по величине, так и по направлению. Решетка не только меняет скорость набегающего на нее потока, но и *поворачивает* поток.

Обозначим (рис. 81) вектор скорости потока в бесконечности *перед решеткой* через $\boldsymbol{V}_1$, давление — через p_1, соответственно вектор скорости и давление в бесконечном удалении *за решеткой* — через $\boldsymbol{V}_2$ и p_2; плотность повсюду одинакова и равна ρ.

Рассмотрим в плоскости рисунка трубку тока, образованную двумя какими-нибудь линиями тока, сдвинутыми друг по отношению к другу в направлении оси решетки на расстояние, равное шагу. Весь поток можно, очевидно, разбить на такие равные между собой трубки тока, так как обтекание обладает свойством периодичности с периодом, равным шагу.

Применим теорему количеств движения в форме Эйлера, взяв за контрольную поверхность боковую поверхность только что выделенной трубки тока и два бесконечно удаленных сечения трубки σ_1, σ_2, параллельные оси решетки и равные по длине шагу. Тогда, обозначая через $\boldsymbol{R}$ главный вектор сил давления *потока на профиль*, будем иметь

$$(p_1-p_2)\boldsymbol{t}+\rho(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_1)\boldsymbol{V}_1-\rho(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_2)\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{R}=0. \qquad (108)$$

Величины $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_2$ представляют собой равные между собой секунд-

ные объемные расходы жидкости сквозь сечения трубки тока, а $-\boldsymbol{R}$ есть главный вектор сил давления *профиля на поток.*

Предполагая поток безвихревым и применяя уравнение Бернулли, получим

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2),$$

или, представляя разность квадратов скоростей как скалярное произведение суммы векторов скоростей на их разность,

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2)\cdot(\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1).$$

Введем две характерные для обтекания решетки скорости: *среднюю векторную скорость*

$$\boldsymbol{V}_m = \frac{1}{2}(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2)$$

и скорость *девиации* потока

$$\boldsymbol{V}_d = \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1,$$

характеризующую отклонение потока решеткой.

Тогда будем иметь

$$p_1 - p_2 = \rho \boldsymbol{V}_m \cdot \boldsymbol{V}_d,$$

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_m; \quad \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_d = \boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1) = 0, \tag{109}$$

и равенство (108) перепишется в форме

$$\boldsymbol{R} = \rho(\boldsymbol{V}_m\cdot\boldsymbol{V}_d)\boldsymbol{t} + \rho(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_1)(\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2) = \rho(\boldsymbol{V}_m\cdot\boldsymbol{V}_d)\boldsymbol{t} - \rho(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_m)\boldsymbol{V}_d.$$

Выражение, стоящее справа, представляет собой разложение двойного векторного произведения, так что окончательно получим

$$\boldsymbol{R} = \rho \boldsymbol{V}_m \times (\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{V}_d). \tag{110}$$

Замечая, что по (109) вектор-шаг $\boldsymbol{t}$ перпендикулярен к скорости девиации потока $\boldsymbol{V}_d$, а вектор $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{V}_d$ перпендикулярен к плоскости течения, т. е. и $\boldsymbol{V}_m$, найдем величину главного вектора в виде

$$R = \rho t V_m V_d. \tag{111}$$

Векторное равенство (110) дает в явной форме зависимость главного вектора $\boldsymbol{R}$ от плотности жидкости, шага $\boldsymbol{t}$ решетки и двух характерных скоростей — средней $\boldsymbol{V}_m$ и скорости девиации $\boldsymbol{V}_d$ потока. Скалярное равенство (111) определяет *величину* главного вектора сил давления потока на профиль в решетке как произведение *плотности* жидкости, *шага решетки, средней скорости и скорости девиации.* Из векторного равенства (110) следует, что главный вектор $\boldsymbol{R}$ лежит в плоскости течения и направлен по перпендикуляру к средней скорости $\boldsymbol{V}_m$ в сторону, определяемую векторным произведением (110).

Введем единичные векторы оси решетки $\boldsymbol{a}$ и нормали к плоскости рисунка в сторону читателя $\boldsymbol{k}$, направив их так, чтобы совокупность векторов $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{k}$ образовывала триэдр, сонаправленный с принятой правой системой координат (вектор $\boldsymbol{t}$ не единичный, его величина равна шагу). Замечая, что, согласно (109), вектор $\boldsymbol{V}_d = \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1$ направлен параллельно оси решетки, получим

$$\boldsymbol{V}_d = (V_{2a} - V_{1a})\boldsymbol{a}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{V}_d = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{a}(V_{2a} - V_{1a}) = t(V_{2a} - V_{1a})\boldsymbol{k}.$$

Определим циркуляцию скорости Γ по контуру, составленному из направляющих сечений σ_1, σ_2 и двух линий тока, смещенных на шаг.

Составляя интеграл $\oint V_s ds$ по положительному направлению обвода контура, показанному на рис. 81, получим ($\sigma_1=\sigma_2=t\cdot 1$)

$$\Gamma=(V_{2a}-V_{1a})t,$$

так как интегралы по смещенным на шаг линиям тока равны по величине и противоположны по знаку. Итак, $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{V}_d=\boldsymbol{k}\Gamma$, а следовательно, по (110)

$$\boldsymbol{R}=\rho\boldsymbol{V}_m\times\boldsymbol{k}\Gamma; \tag{112}$$

формула эта сооответствует формуле для единичного профиля, причем средняя векторная скорость $\boldsymbol{V}_m$ заменяет скорость на бесконечности $\boldsymbol{V}_\infty$.

Устремим величину шага t к бесконечности, сохраняя в то же время величину циркуляции. При этом разность $V_{2a}-V_{1a}$ должна стремиться к нулю, что при наличии равенства (109) приводит к установлению общей скорости $\boldsymbol{V}_1\to\boldsymbol{V}_2\to\boldsymbol{V}_\infty$ вместо $\boldsymbol{V}_m$, и формула (112) переходит в формулу Жуковского для единичного профиля

$$\boldsymbol{R}=\rho\boldsymbol{V}_\infty\times\boldsymbol{k}\Gamma.$$

Правило определения направления вектора $\boldsymbol{R}$ по (112) остается тем же, что и для единичного профиля. Вектор $\boldsymbol{R}$ имеет направление вектора $\boldsymbol{V}_m$, повернутого в плоскости течения на 90° в сторону, противоположную направлению циркуляции, т. е. тому направлению обхода контура интегрирования, при котором циркуляция окажется положительной [1]).

§ 57. Применение метода конформных отображений в теории струйных течений

Изложенный ранее (§ 51) метод конформных отображений получил уже давно широкое применение не только при решении задач плоского обтекания замкнутых контуров, в частности, крыловых профилей. Одной из наиболее важных областей применения этого метода явилась теория течений идеальной несжимаемой жидкости с *разрывным* потенциалом, известных под названием *струйных течений*. Благодаря отсутствию внутреннего трения в потоках идеальной жидкости становится возможным возникновение нарушений сплошности течения, образования в потоке «мертвых» зон покоящейся жидкости.

Примерами течений с нарушением сплошности могут служить кавитационные «каверны» (полости), заполненные парами жидкости и воздухом, срывные зоны за плохо обтекаемыми телами, струи плотной среды в окружении жидкости (газа) малой плотности, водосливы через преграду и из-под щита, течения, относящиеся к задачам транспорта на «воздушных подушках». Некоторые из перечисленных задач и в первую очередь — гидротехнические, связанные с движением воды в поле тяжести и имеющие часто существенно пространственный характер, представляют значительные математические трудности и не могут быть изложены на страницах настоящего учебника [2]).

---

[1]) Теоретические вопросы в этой области разобраны в специальных монографиях: Кочин Н. Е Гидродинамическая теория решеток. Современные проблемы механики.— М · Гостехиздат, 1949, и Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин — М.: Физматгиз, 1962. В монографии более широкого содержания — Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М.: Наука, 1980 — теории решеток посвящена специальная гл. III. Практические вопросы численного расчета решеток профилей подробно освещены в монографии. Жуковский М И. Расчет обтекания решеток профилей турбомашин.— М ; Л Машгиз, 1960.

[2]) Представление об этих трудностях и о способах приближенных решений такого рода задач можно составить, ознакомясь с гл XI и XII монографии Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости.— М.. Наука, 1979.

Прямым методом решения задач плоских разрывных течений служит метод конформных отображений[1]). «Свободные» линии тока (рис. 82), сорвавшиеся с обтекаемого тела, представляют неизвестные по форме границы потока; в то же время в плоскости годографа сопряженной скорости $\overline{V}$ или обратной величины — функции Кирхгофа $\zeta=1/\overline{V}$, так же как и в плоскости комплексного потенциала χ, границы представляются отрезками простейших линий: прямых и окружностей если обтекаются тела, состоящие из прямолинейных отрезков (пластины, клин), расположенные в каналах с прямолинейными границами,

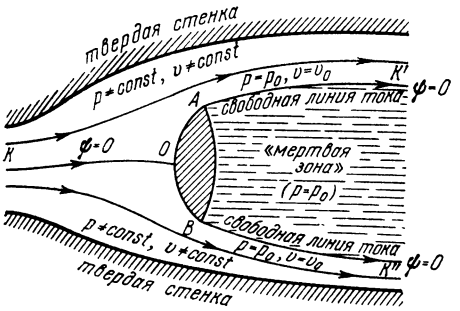


Рис. 82

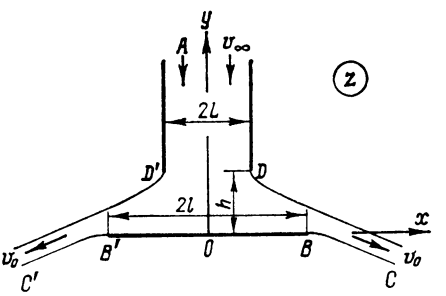


Рис. 83

и т. п. При этом установление взаимно однозначного соответствия между областями в плоскостях комплексных переменных $\overline{V}$ (или ζ) и χ не составляет труда, и метод конформных отображений дает преобразующую функцию $\overline{V}(\chi)$ или $\zeta(\chi)$. Задача сводится к разысканию связи между этими функциями и основным комплексным аргументом z в физической плоскости, что может быть осуществлено при помощи очевидного соотношения

$$z=\int\frac{d\chi}{\overline{V}(\chi)}=\int\zeta(\chi)\,d\chi.$$

Продемонстрируем метод на примере удара струи, вытекающей из канала конечной ширины, на перпендикулярно по отношению к ней расположенную пластину (рис. 83). Рассмотрим правую половину физической плоскости z. Обозначим полуширину подводящего канала через L, полуширину пластины через l, расстояние пластины от выходного сечения канала через h. Скорость, одинаковую по величине вдоль границ свободных линий тока BC и DC, назовем v_0, скорость в канале вдалеке от выходного отверстия v_∞; тогда

$$\overline{V}_A=v_\infty i,\quad \overline{V}_0=0,\quad \overline{V}_B=v_0,\quad \overline{V}_D=v_0 i,\quad |V_C|=v_0.$$

Введем в рассмотрение комплексную переменную (функцию Кирхгофа)

$$\zeta=\frac{1}{\overline{V}}=\frac{1}{|V|}e^{i\theta}$$

и установим соответствие между точками физической плоскости z и плоскости годографа вектора обратной сопряженной скорости ζ.

---

[1]) Исторически первая простейшая схема принадлежит Гельмгольцу и Кирхгофу; Helmholtz H Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen — Monatsber. Berlin. Akad. Wiss, 1868, Bd 23, April; Kirchhoff G Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen — Crelle's Journ f Mathem, 1869, v. 70.

Границам потока $AOBC$ и ADC в плоскости z сопоставляются границы в плоскости ζ, показанные на рис. 84 теми же буквами; область течения отмечена штриховкой.

Наметим еще область течения (рис. 85) в плоскости комплексного потенциала χ. Это будет полоса между двумя параллельными действительной оси прямыми, соответствующими постоянству функции тока ψ вдоль линий тока. Линию тока $AOBC$ примем за нулевую, линии тока ADC припишем значение $\psi=\pi$, тогда ширина полосы будет равна π.

Взаимно однозначное соответствие между заштрихованными областями плоскостей ζ и χ можно установить, отображая конформно обе области на ту или иную полуплоскость, а затем по известной теореме теории функций комплексного переменного, связывая отображающие

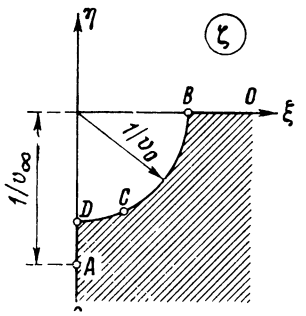


Рис. 84

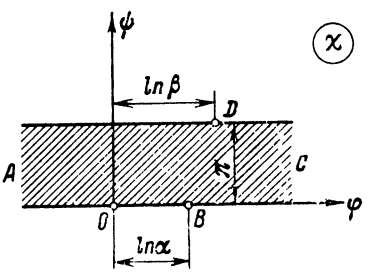


Рис. 85

функции *дробно-линейной подстановкой*. Так, заштрихованная область плоскости ζ преобразуется в нижнюю полуплоскость при помощи соотношения

$$Z_1=\frac{(\zeta^2-1/v_0^2)^2}{(\zeta^2+1/v_0^2)^2},$$

а полоса плоскости χ в верхнюю полуплоскость при помощи преобразования

$$Z_2=e^{\chi}.$$

Для взаимно однозначного соответствия между полуплоскостями Z_1 и Z_2 должно быть

$$Z_1=\frac{aZ_2+b}{Z_2+c},$$

или

$$\left(\frac{\zeta^2-1/v_0^2}{\zeta^2+1/v_0^2}\right)^2=\frac{ae^{\chi}+b}{e^{\chi}+c}.$$

Постоянные a, b, c определим из условий соответствия

$$\chi=0 \quad \text{при } \zeta=\infty \text{ (в точке } O),$$
$$\chi=\ln\alpha \quad \text{при } \zeta=1/v_0 \text{ (в точке } B),$$
$$\chi=\pi i+\ln\beta \quad \text{при } \zeta=-i/v_0 \text{ (в точке } D),$$

где $\ln\alpha$ и $\ln\beta$ — неизвестные пока постоянные, равные абсциссам точек B и D в плоскости χ. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, получим

$$a=-\frac{\beta+1}{\alpha-1}, \quad b=\frac{\beta+1}{\alpha-1}\alpha, \quad c=\beta,$$

так что

$$\left(\frac{\zeta^2 - 1/v_0^2}{\zeta^2 + 1/v_0^2}\right)^2 = \frac{\beta+1}{\alpha-1}\,\frac{\alpha - e^{\chi}}{e^{\chi}+\beta}$$

или, после простых преобразований,

$$\zeta = \frac{1}{v_0}\,\frac{\sqrt{(\alpha-1)(e^{\chi}+\beta)} + \sqrt{(\beta+1)(\alpha-e^{\chi})}}{\sqrt{(\alpha+\beta)(e^{\chi}-1)}}. \tag{113}$$

К этому равенству присоединим очевидное соотношение

$$z = \int_0^{\chi} \zeta\, d\chi, \tag{114}$$

где постоянная определена из условия соответствия в точке O. Совокупность равенств (113) и (114) дает искомое решение задачи; необходимо лишь сопоставить неизвестные постоянные α, β с геометрическими параметрами задачи l, L, h и заданной скоростью v_∞, учтя, что расход принят равным π.

Для этого определим прежде всего полуширину пластины l. Имеем

$$l = \int_0^{\ln\alpha} \zeta d\chi = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\int_0^{\ln\alpha}\sqrt{\frac{e^{\chi}+\beta}{e^{\chi}-1}}\,d\chi + \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta}}\int_0^{\ln\alpha}\sqrt{\frac{\alpha-e^{\chi}}{e^{\chi}-1}}\,d\chi.$$

Интегрирование может быть выполнено при помощи подстановок

$$\frac{e^{\chi}+\beta}{e^{\chi}-1} = \frac{1}{t^2}$$

для первого интеграла и

$$\frac{\alpha - e^{\chi}}{e^{\chi}-1} = \frac{1}{\tau^2}$$

для второго. Будем иметь

$$l = \frac{1}{v_0}\left[2\sqrt{\beta\,\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\beta\,\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\ln\frac{1+\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}}{1-\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}} + \pi\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta}}\,(\sqrt{\alpha}-1)\right]. \tag{115}$$

Полуширину канала L выразим через расход π и скорость v_∞:

$$L = \frac{\pi}{v_\infty}.$$

Отношение

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{\pi}\,\frac{v_\infty}{v_0}\left[2\sqrt{\beta\,\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\beta\,\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\ln\frac{1+\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}}{1-\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}} + \pi\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta}}\,(\sqrt{\alpha}-1)\right]$$

можно выразить только через α и β, если заметить, что в точке A

$$|V| = v_\infty, \quad \zeta = -\frac{i}{v_\infty}, \quad \chi = -\infty.$$

Согласно (113) этому соответствует равенство

$$-\frac{i}{v_\infty} = \frac{1}{v_0}\frac{\sqrt{\beta(\alpha-1)}+\sqrt{\alpha(\beta+1)}}{i\sqrt{\alpha+\beta}},$$

откуда

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha(\beta+1)}+\sqrt{\beta(\alpha-1)}}. \tag{116}$$

Итак, имеем

$$\frac{l}{L} = \frac{2\sqrt{\beta(\alpha-1)}\,\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\beta\,\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\right)}{\pi[\sqrt{\alpha(\beta+1)}+\sqrt{\beta(\alpha-1)}]} + \\ + \frac{\sqrt{\alpha-1}\ln\frac{1+\sqrt{(\alpha-1)/(\alpha+\beta)}}{1-\sqrt{(\alpha-1)/(\alpha+\beta)}} + \pi\sqrt{\beta+1}\,(\sqrt{\alpha}-1)}{\pi[\sqrt{\alpha(\beta+1)}+\sqrt{\beta(\alpha-1)}]}. \tag{117}$$

Силу давления струи на всю пластину найдем по теореме Бернулли

$$P = 2\int_0^l (p-p_0)\,dx = \rho\int_0^l [v_0^2 - |V|^2]\,dx,$$

где p_0 — давление в мертвой зоне за пластиной. Произведя на поверхности пластины замену

$$dx = dz, \quad |V| = \frac{1}{\zeta}, \quad dz = \zeta d\chi,$$

получим

$$P = \rho\int_0^{\ln\alpha}\left(v_0^2 - \frac{1}{\zeta^2}\right)\zeta\,d\chi = \rho v_0\int_0^{\ln\alpha}\left(v_0\zeta - \frac{1}{v_0\zeta}\right)d\chi.$$

Для вычисления интеграла следует заметить, что, согласно (113),

$$v_0\zeta = \frac{\sqrt{(\alpha-1)(e^\chi+\beta)}+\sqrt{(\beta+1)(\alpha-e^\chi)}}{\sqrt{(\alpha+\beta)(e^\chi-1)}},$$

$$\frac{1}{v_0\zeta} = \frac{\sqrt{(\alpha-1)(e^\chi+\beta)}-\sqrt{(\beta+1)(\alpha-e^\chi)}}{\sqrt{(\alpha+\beta)(e^\chi-1)}},$$

так что

$$P = 2\rho v_0\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta}}\int_0^{\ln\alpha}\sqrt{\frac{\alpha-e^\chi}{e^\chi-1}}\,d\chi = 2\pi\rho v_0\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta}}\,(\sqrt{\alpha}-1).$$

Введем сюда явно длину пластины $2l$; с этой целью из предыдущей формулы найдем порознь

$$\pi\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta}}\,(\sqrt{\alpha}-1) = \frac{P}{2\rho v_0}, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}} = \frac{P}{2\rho v_0\pi\sqrt{\beta+1}\,(\sqrt{\alpha}-1)}$$

и подставим в выражение (115) полудлины пластины; тогда после простых преобразований получим

$$P=\frac{1}{2}\rho v_0^2\cdot 2l\,\frac{2\pi(\sqrt{\alpha}-1)}{\pi(\sqrt{\alpha}-1)+2\sqrt{\beta\frac{\alpha-1}{\beta+1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\beta\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\right)+\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta+1}}\ln\frac{1+\sqrt{(\alpha-1)/(\alpha+\beta)}}{1-\sqrt{(\alpha-1)/(\alpha+\beta)}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\rho v_0^2\cdot 2l\,\frac{2\pi}{\pi+2\sqrt{\frac{\beta(\sqrt{\alpha}+1)}{(\beta+1)(\sqrt{\alpha}-1)}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\beta\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}\right)+\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}+1}{(\beta+1)(\sqrt{\alpha}-1)}}\ln\frac{1+\sqrt{(\alpha-1)/(\alpha+\beta)}}{1-\sqrt{(\alpha-1)/(\alpha+\beta)}}}. \tag{118}$$

Для определения постоянных α и β в нашем распоряжении пока только одно уравнение (117). Составление второго уравнения требует введения в расчет константы h, определяющей расстояние пластины от выходного сечения канала. Это нетрудно сделать, написав, что по (114)

$$h=\operatorname{Im} z_D=\operatorname{Im}\int_0^{\chi_D}\zeta\,d\chi=\operatorname{Im}\int_0^{\pi i+\ln\beta}\zeta\,d\chi.$$

Составив затем отношение h к l или L, получим искомое второе уравнение для определения α и β. Опуская эти вычисления, аналогичные тем, которые были сделаны при составлении выражения (115) для l, удовольствуемся рассмотрением нескольких частных случаев, не требующих задания h.

1. *Струйное обтекание пластины безграничным потоком.* В этом предельном случае ($L\to\infty$) из равенства (117) сразу следует, что величина α близка к единице, а из физических соображений ясно, что для вычисления силы P совершенно несущественна величина h, а следовательно, и значение параметра β. Подтвердим это вычислением. Перейдем в выражении (118) силы P к пределу при $\alpha=1$ и произвольном β. Проще всего это сделать, разложив входящие в знаменатель функции arctg и ln в ряды по степеням малых аргументов $\sqrt{\beta\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}$ и $\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}$ и сохранив только первые члены этих разложений; будем иметь

$$P=\frac{1}{2}\rho v_0^2\cdot 2l\left[\frac{2\pi}{\pi+2\sqrt{\beta\frac{\sqrt{\alpha}+1}{(\beta+1)(\sqrt{\alpha}-1)}}\sqrt{\beta\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}+1}{(\beta+1)(\sqrt{\alpha}-1)}}\,2\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}}\right]_{\alpha=1}=$$

$$=\frac{1}{2}\rho v_0^2\cdot 2l\,\frac{2\pi}{\pi+2\frac{2\beta}{\beta+1}+2\frac{2}{\beta+1}}=\frac{1}{2}\rho v_0^2\cdot 2l\,\frac{2\pi}{\pi+4},$$

что представляет собой известную формулу Рэлея; из (116) следует, что при $\alpha=1$ $v_0=v_\infty$.

2. *Струйное обтекание пластины потоком конечной ширины, ограниченной свободными поверхностями* (рис. 86). Удалим выход из канала на бесконечность в положительном направлении оси Oy ($h=\infty$). Вспоминая, что $\ln\beta$ представляет собой абсциссу точки D на прямой $\psi=\pi$ (рис. 86), т. е. значение потенциала скорости φ, изменяющегося от $-\infty$ вдалеке вверх по течению, до $+\infty$ вниз по течению, положим $\ln\beta=-\infty$, и, следовательно, $\beta=0$. Тогда формула (118) дает выражение для силы

давления потока на пластину

$$P=\frac{1}{2}\rho v_0^2\cdot 2l\,\frac{2\pi}{\pi+\sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1}}\ln\dfrac{1+\sqrt{(\alpha-1)/\alpha}}{1-\sqrt{(\alpha-1)/\alpha}}}, \tag{119}$$

причем, согласно (116), $v_0=v_\infty$. Равенство (119) вместе с равенством (117), переписанным в виде

$$\frac{l}{L}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\ln\frac{1+\sqrt{(\alpha-1)/\alpha}}{1-\sqrt{(\alpha-1)\alpha}}+1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \tag{120}$$

определяет P при заданных ρ, v_∞, l и отношении l/L ширины пластины к ширине свободной струи. При $L\to\infty$ и фиксированном l, т. е., согласно (120), при $\alpha\to 1$, из (119) вновь получим *формулу Рэлея*.

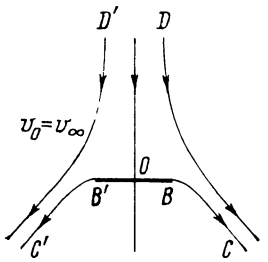


Рис. 86

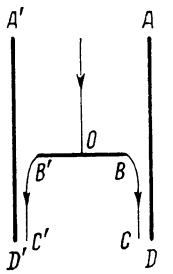


Рис. 87

3. *Струйное обтекание пластины, находящейся в канале конечной ширины* (рис. 87). Этот случай можно рассматривать как предельный при $\beta\to\infty$. Будем иметь из равенства (116)

$$v_0=v_\infty(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha-1});$$

сила определится по формуле (118) параметрическим выражением

$$P=\frac{1}{2}\rho v_\infty^2\cdot 2l\,\frac{2\pi(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha-1})^2}{\pi+2\sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\alpha-1}}, \tag{121}$$

которое надо рассматривать совместно с выражением отношения ширины пластины к ширине канала

$$\frac{l}{L}=\frac{2\sqrt{\alpha-1}\operatorname{arctg}\sqrt{\alpha-1}+\pi(\sqrt{\alpha}-1)}{\pi(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha-1})}. \tag{122}$$

Легко проверить по (121), что при $L\to\infty$ и фиксированном l, т. е., согласно (122), при $\alpha\to 1$, вновь получится формула Рэлея для случая поперечного обтекания пластины.

Рассмотренные только что случаи 2 и 3 дают общее представление о необходимости поправок на ограниченность потока, которые надо делать при продувках пластин в аэродинамических трубах с открытыми (свободная струя) и закрытыми рабочими участками.

Изложенный только что пример достаточно ясно иллюстрирует простой классический метод Кирхгофа, до сих пор встречающийся в практических приложениях, но уже не характеризующий современное состояние теории струйных течений. Последняя обязана своим расцветом трудам многих крупных ученых конца XIX и первой половины нашего века. Литература по теории струйных течений идеальной жидкости чрезвычайно обширна, поэтому ограничимся перечислением лишь наиболее заметных научных источников. Прежде всего сошлемся на основополагающие работы в этой области наших выдающихся ученых:

Н. Е. Жуковского[1]), С. А. Чаплыгина[2]), А. И. Некрасова[3]), М. А. Лаврентьева[4]), Л. И. Седова[5]). Укажем также исторически важные исследования задачи о плоском струйном обтекании клина, относящиеся к последней четверти XIX века и принадлежащие Д. К. Бобылеву[6]) и И. В. Мещерскому[7]).

Не имея возможности сколько-нибудь подробно останавливаться на указании многочисленных зарубежных трудов по теории струйных течений (отсылаем к цитированной далее монографии М. И. Гуревича и помещенному в ней списку литературы), укажем лишь два капитальных труда, сыгравших значительную роль в современном развитии теории струй. Это замечательные по общности постановки задач струйного обтекания работа Т. Леви-Чивитта[8]) и монография Г. Вилля[9]).

В советской литературе выделяется богатая по содержанию монография М. И. Гуревича[10]), в которой с большой строгостью и ясностью изложены теоретические предпосылки методов расчета струйных течений и приведены решения многих соответствующих задач, включая не только плоские, но и осесимметричные, а также имеющие большое практическое значение задачи о струях «тяжелой» жидкости.

Значительный интерес представляет монография Л. В. Гогиша и Г. Ю. Степанова[11]) и работа второго из этих авторов[12]).

Новый подход к струйным задачам, основанный на решении уравнений Эйлера в общем случае *вихревых* течений, указан в монографии М. А. Гольдштика[13]).

---

[1]) Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока.— Мат. сб. 1890, т. XV.

[2]) Чаплыгин С. А. К вопросу о струях в несжимаемой жидкости.— Труды отд. физ. наук Общества любителей естеств. наук, 1889, т. 10, вып. 1; Чаплыгин С. А. О силах, действующих на цилиндр, обтекаемый потоком с образованием поверхностей разрыва.— Сборник общетеоретической группы ЦАГИ, Труды ЦАГИ, 1935, вып. 240 и совместная работа: Чаплыгин С. А., Лаврентьев А. Л. О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности.— Труды ЦАГИ, 1935, вып. 240.

[3]) Некрасов А. И. О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга.— Известия Иваново-Вознесенского политехнич. ин-та, 1922, № 5 (вып. матем.). С этой работой тесно связаны исследования: Секерж-Зенькович Я. И. К теории обтекании криволинейной дуги с отрывом струй.— Труды ЦАГИ, 1937, вып. 299 и другие работы того же автора.

[4]) Лаврентьев М. А О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй.— Мат. сб. (новая серия), 1938, т. 4 (46), № 3; Лаврентьев М. А. Кумулятивный заряд и принцип его работы.— Успехи мат. наук. 1957, т. XII, вып. 4 (76)

[5]) Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М.: Наука, 1980 и ряд работ того же автора в Трудах ЦАГИ и Технических заметках ЦАГИ за 1934—1938 гг.

[6]) Бобылев Д К. Заметка о давлении, производимом потоком неограниченной ширины на две стенки, сходящиеся под каким бы то ни было углом.— Журн. Русского физ.-хим. об-ва, 1881, т. XIII.

[7]) Мещерский И. В. К вопросу о сопротивлении жидкостей.— Журн. Русского физ.-хим. об-ва, 1886, т. XVIII.

[8]) Levi-Civitta T. Scie e leggi di resistenza.—Rendiconti del Circolo Mathem. di Palermo. 1907, t XXIII, № 1

[9]) Villat H. Aperçus théoriques de la résistance des fluides.— Paris: Science, Phys.- Math., № 38, edit. Gauthier — Villars, 1920, p. 101.

[10]) Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости.— М.: Наука, 1979; в монографии помещен обширный список литературы, содержащий 653 названия.

[11]) Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения.— М.: Наука, 1979, с. 286—313.

[12]) Степанов Г. Ю. Гидродинамическая теория аппаратов на воздушной подушке.— М.: Машгиз, 1963.

[13]) Гольдштик М. А. Вихревые потоки.— Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1981.

ГЛАВА VIII

ПЛОСКОЕ БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

§ 58. Основные уравнения движения и их линеаризация

Уравнение неразрывности (9) гл. IV в случае плоского *стационарного* движения газа примет вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\equiv\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}=0. \tag{1}$$

При условии адиабатичности движения газа

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial y},$$

используя уравнения Эйлера (4) гл. V, которые при плоском стационарном движении в случае отсутствия объемных сил могут быть переписаны в форме

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x},\quad \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y},$$

получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\frac{\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=-\frac{\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Подставляя эти значения $\partial\rho/\partial x$ и $\partial\rho/\partial y$ в (1), найдем уравнение

$$(a^2-u^2)\frac{\partial u}{\partial x}-uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+(a^2-v^2)\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{2}$$

справедливое как для безвихревого, так и вихревого движения. В случае *безвихревого* движения к этому уравнению присоединяется еще условие отсутствия вихря

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{3}$$

При безвихревом стационарном адиабатическом движении идеального газа во всей области (плоскости) движения справедливо уравнение Бернулли

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{a^2}{k-1}=\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{a^2}{k-1}=\frac{1}{2}V_\infty^2+\frac{a_\infty^2}{k-1}, \tag{4}$$

при помощи которого можно выразить скорость звука через скорость движения газа.

Условие (3) отсутствия в потоке завихренности позволяет ввести потенциал скоростей $\varphi(x, y)$, связанный с проекциями скорости формулами

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{5}$$

Что касается функции тока, то ее существование вытекает из левой части равенства (1), согласно которому можно положить, вводя в правые части формул постоянный множитель ρ_∞,

$$\rho u=\rho_\infty\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \rho v=-\rho_\infty\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{6}$$

Уравнение (2) после подстановки в него выражений проекций скорости (5) приобретает окончательный вид

$$\left[a^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\left[a^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0; \qquad (7)$$

входящий в это уравнение квадрат скорости звука a^2 должен быть исключен при помощи вытекающего из (4) равенства

$$a^2=\frac{k-1}{2}V_\infty^2+a_\infty^2-\frac{k-1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]. \qquad (8)$$

Интегрирование уравнения (7) с исключенным по (8) квадратом скорости звука при обычных условиях непроницаемости твердых стенок обтекаемых тел и заданных значениях скорости на бесконечности представляет значительные математические трудности, связанные с *нелинейностью* уравнения. Обратимся к рассмотрению простейшего случая плоского обтекания *тонких, слабо искривленных* тел, расположенных в однородном газовом потоке под *малым углом атаки*. В этом случае возмущения, создаваемые телом в однородном потоке, будут *малыми*, и уравнения (7) и (8) могут быть подвергнуты *линеаризации*.

Выберем направление однородного потока совпадающим с направлением оси Ox и обозначим U_∞, p_∞, ρ_∞, a_∞ и т. д. соответственно скорость, давление, плотность, скорость распространения звука в однородном потоке. Возмущения, вносимые в этот поток тонким телом, условимся обозначать тильдой ($\sim$), так что будем иметь

$$u=U_\infty+\tilde{u},\quad v=\tilde{v},\quad p=p_\infty+\tilde{p},\quad \rho=\rho_\infty+\tilde{\rho},\quad a=a_\infty+\tilde{a}. \qquad (9)$$

Остановимся сначала на тех двух основных случаях, когда однородный поток является дозвуковым или сверхзвуковым, т. е. когда число Маха однородного потока $M_\infty=U_\infty/a_\infty$ меньше или больше единицы ($M_\infty\neq1$). Случай *звукового* потока ($M_\infty=1$) обладает некоторыми особенностями и будет рассмотрен в дальнейшем отдельно.

Подставим в уравнения (2) и (3) значения проекций скорости и скорости звука, согласно совокупности равенств (9), и пренебрежем произведениями возмущений и их производных по координатам, как малыми второго и высших порядков. В этом приближении будем иметь

$$(a_\infty^2-U_\infty^2)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+a_\infty^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}=0,$$

или, деля обе части первого равенства на a_∞^2,

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}=0. \qquad (10)$$

Представим потенциал скоростей φ и функцию тока ψ возмущенного движения в виде сумм потенциала скоростей φ_∞ и функции тока ψ_∞ однородного движения и соответствующих потенциала $\tilde{\varphi}$ и функции тока $\tilde{\psi}$ малых возмущений, произведенных тонким телом в однородном потоке

$$\varphi=\varphi_\infty+\tilde{\varphi},\quad \psi=\psi_\infty+\tilde{\psi}. \qquad (11)$$

Подставляя эти выражения в равенства (5) и (6), произведем в них линеаризацию, отбрасывая малые высших порядков. Будем иметь

$$U_\infty+\tilde{u}=\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x},\quad \tilde{v}=\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y},$$

$$(\rho_\infty + \tilde{\rho})(U_\infty + \tilde{u}) = \rho_\infty \left(\frac{\partial \psi_\infty}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \right),$$

$$(\rho_\infty + \tilde{\rho})\,\tilde{v} = -\rho_\infty \left(\frac{\partial \psi_\infty}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right).$$

Сравнение конечных (малых нулевого порядка) величин сразу дает

$$\varphi_\infty = U_\infty x, \quad \psi_\infty = U_\infty y, \tag{12}$$

а сравнение малых величин первого порядка приводит к системе равенств

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}, \tag{13}$$

$$\tilde{\rho} U_\infty + \rho_\infty \tilde{u} = \rho_\infty \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}, \quad \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}. \tag{14}$$

В левой части первого из равенств (14) выразим возмущение плотности $\tilde{\rho}$ через возмущение скорости $\tilde{u}$, воспользовавшись для этого уравнением (29) гл. V, переписанным в форме ($p_0 = p_\infty$, $\rho_0 = \rho_\infty$, $kp_\infty/\rho_\infty = a_\infty^2$, const $= U_\infty^2/2$)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{k-1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{k-1} - 1 \right] = \frac{U_\infty^2}{2},$$

Произведем в этом равенстве принятую ранее линеаризацию. Перепишем его сначала в виде

$$\frac{(U_\infty + \tilde{u})^2 + \tilde{v}^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{k-1}\left[\left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho_\infty} \right)^{k-1} - 1 \right] = \frac{U_\infty^2}{2},$$

а затем, после простых преобразований и пренебрежения малыми высшего порядка, получим

$$U_\infty \tilde{u} + \frac{a_\infty^2}{\rho_\infty}\tilde{\rho} = 0.$$

Возвращаясь к (14), найдем, исключая $\tilde{\rho}$,

$$\tilde{u} = \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}, \quad \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}. \tag{15}$$

Подставляя значения $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ из (13) в первое из уравнений (10), получим основное линеаризованное уравнение для определения потенциала скоростей возмущений $\tilde{\varphi}$

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} = 0. \tag{16}$$

Взяв значения $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ из (15) и подставляя их во второе уравнение системы (10), найдем аналогичное линеаризованное уравнение для определения функции тока возмущений $\tilde{\psi}$

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} = 0. \tag{17}$$

Для решения задач обтекания тонкого крыла можно в одинаковой степени пользоваться как уравнением (16), так и (17). Разница будет в граничных условиях на контуре обтекаемого газом профиля.

Условие непроницаемости контура можно задать в двух различных формах: либо равенством нулю нормальной к поверхности составляющей скорости потока, либо равенством нулю функции тока, если поверхность профиля рассматривается как *нулевая* линия тока.

Зададим контур профиля, расположенного в окрестности отрезка ab оси Ox, уравнением (a и b — абсциссы передней и задней кромок профиля)

$$y=h(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

так что угол θ касательной с осью x определяется равенствами

$$\operatorname{tg}\theta\approx\theta\approx h'(x).$$

Условие непроницаемости контура профиля в первой из упомянутых только что форм будет

$$V_n=U_{\infty n}+\tilde{V}_n=0 \text{ при } y=h(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

или, с той же степенью приближения,

$$\tilde{v}=\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}=U_\infty h'(x) \quad \text{при} \quad y=h(x), \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Вторая форма условия непроницаемости, согласно (11) и (12), будет

$$\psi=\psi_\infty+\tilde{\psi}=U_\infty y+\tilde{\psi}=0 \quad \text{при} \quad y=h(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

или

$$\tilde{\psi}=-U_\infty h(x) \quad \text{при} \quad y=h(x), \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Так же, как это уже было сделано в § 55, в принятой степени приближения будем требовать выполнения только что выведенных условий непроницаемости не на самом контуре, а на отрезке оси Ox между $x=a$ и $x=b$, причем будем различать верхнюю и нижнюю стороны этого отрезка, полагая для этого условно $y=\pm 0$.

Таким образом, для уравнения (16) будем иметь граничное условие

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}=U_\infty h'(x) \quad \text{при} \quad y=\pm 0, \quad a\leqslant x\leqslant b, \tag{18}$$

а для уравнения (17)

$$\tilde{\psi}=-U_\infty h(x) \quad \text{при} \quad y=\pm 0, \quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{19}$$

Что касается граничного условия на бесконечном удалении от профиля, то оно очень просто формулируется для *дозвукового* движения ($M_\infty<1$) и сводится к убыванию возмущений до нуля при удалении от контура профиля:

$$\tilde{\varphi}\to 0, \quad \tilde{\psi}\to 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2}\to\infty.$$

Для *сверхзвукового* обтекания ($M_\infty>1$) это условие, как вскоре будет выяснено, не удовлетворяется.

В заключение параграфа составим необходимое для вычисления давления потока на поверхности тела выражение коэффициента давления c_p, сохранив для него то же определение (46) гл. VII, что и в случае несжимаемой жидкости, но подчеркнув выбор в качестве характерного значения величины плотности на бесконечности $\rho=\rho_\infty$, так что

$$c_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}. \tag{20}$$

Пользуясь той из изэнтропических формул (87) гл. V, которая относится к давлениям, и полагая в ней $p_1=p$, $p_2=p_\infty$, $M_1=M$, $M_2=M_\infty$,

преобразуем выражение (20) коэффициента давления c_p к виду

$$c_p = \frac{2p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty}-1\right) = \frac{2}{k}\frac{k(p_\infty/\rho_\infty)}{V_\infty^2}\left[\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}-1\right],$$

или, производя замену $k(p_\infty/\rho_\infty)$ на a_∞^2 и V_∞/a_∞ на M_∞,

$$c_p = \frac{2}{k\mathrm{M}_\infty^2}\left[\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}-1\right]. \tag{21}$$

Это выражение коэффициента давления является общим, не связанным с допущением о *малости* возмущений.

В случае малых возмущений совершим над уравнением (28) гл. V линеаризацию, аналогичную только что проведенной над уравнением (29) той же главы. Тогда найдем

$$\tilde{p} = -\rho_\infty U_\infty \tilde{u},$$

после чего для коэффициента давления c_p получим искомое приближенное выражение, справедливое лишь в случае малых возмущений:

$$c_p = \frac{2\tilde{p}}{\rho_\infty U_\infty^2} = -\frac{2\tilde{u}}{U_\infty}. \tag{22}$$

Составленные уравнения для потенциала и функции тока возмущений представляют собой линейные уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. В такой приближенной линеаризованной постановке решение задач газовой динамики может быть выполнено сравнительно простыми приемами. В зависимости от того, является ли движение газа *дозвуковым* ($\mathrm{M}_\infty<1$) или *сверхзвуковым* ($\mathrm{M}_\infty>1$), уравнения (16) и (17) будут принадлежать к *эллиптическому* или *гиперболическому* типу. В первом случае ($\mathrm{M}_\infty<1$) уравнения можно сохранить в ранее указанной форме, во втором ($\mathrm{M}_\infty>1$) переписать в виде

$$(\mathrm{M}_\infty^2-1)\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial y^2}=0, \quad (\mathrm{M}_\infty^2-1)\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial y^2}=0. \tag{23}$$

Наличие отрицательного знака в гиперболических уравнениях соответствует особому, как уже было показано в § 32 гл. V, *волновому* характеру процессов сверхзвукового течения газа.

§ 59. Дозвуковое обтекание тонкого профиля. Правило Прандтля — Глауэрта

Контур профиля, помещенного в поток, зададим уравнениями верхней (индекс 1) и нижней (индекс 2) частей контура

$$y_1 = h_1(x), \quad y_2 = h_2(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

которые для краткости будем обозначать так:

$$y = h_{1,2}(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Будем пользоваться уравнением функции тока (17) и соответственно граничными условиями (19). Введя обозначение $\omega^2 = 1-\mathrm{M}_\infty^2$, придем

к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial x^2}+\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial y^2}=0;$$
$$\widetilde{\psi}=-U_\infty h_{1,2}(x) \quad \text{при } y=\pm 0, \quad a\leqslant x\leqslant b, \tag{24}$$
$$\widetilde{\psi}\to 0 \text{ на бесконечности.}$$

Перейдем от координат x и y к новым координатам ξ и η, произведя аффинное преобразование (деформацию ординат) [1])

$$\xi=x, \quad \eta=\omega y. \tag{25}$$

Тогда краевая задача (24), поскольку в граничных условиях используются лишь нулевые и бесконечно большие значения y, сведется к такой:

$$\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\eta^2}=0,$$
$$\widetilde{\psi}=-U_\infty h_{1,2}(\xi) \quad \text{при} \quad \eta=\pm 0, \quad a\leqslant\xi\leqslant b, \tag{26}$$
$$\widetilde{\psi}\to 0 \text{ на бесконечности.}$$

Сопоставим эту задачу с задачей (24), в которой предварительно положим $M_\infty=0$, $\omega=1$, что будет соответствовать обтеканию того же самого тонкого профиля *несжимаемой* жидкостью (отметим это индексом 0 при $\widetilde{\psi}$). Будем иметь

$$\frac{\partial^2\widetilde{\psi}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\psi}_0}{\partial y^2}=0,$$
$$\widetilde{\psi}_0=-U_\infty h_{1,2}(x) \quad \text{при} \quad y=\pm 0, \quad a\leqslant x\leqslant b, \tag{27}$$
$$\widetilde{\psi}_0\to 0 \text{ на бесконечности.}$$

Сравнивая (26) и (27), сделаем заключение о тождественности решений этих уравнений, выраженных соответственно в переменных ξ, η и x, y, так что

$$\widetilde{\psi}(\xi,\eta)\equiv\widetilde{\psi}_0(x,y), \quad \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\xi}\equiv\frac{\partial\widetilde{\psi}_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta}\equiv\frac{\partial\widetilde{\psi}_0}{\partial y}. \tag{28}$$

Пользуясь этими тождествами, равенствами (15) и преобразованиями (25), получим

$$\widetilde{u}=\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial y}=\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{\partial\widetilde{\psi}_0}{\partial y}=\frac{\widetilde{u}_0}{\sqrt{1-M_\infty^2}},$$
$$\widetilde{v}=-\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}=-\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\xi}=-\frac{\partial\widetilde{\psi}_0}{\partial x}=\widetilde{v}_0, \tag{29}$$

после чего на основании формулы (22) получим следующую связь между коэффициентами давления c_p в линеаризованном дозвуковом потоке газа ($M_\infty<1$) и c_{p0} в несжимаемой жидкости ($M_\infty=0$):

$$c_p=\frac{c_{p0}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}. \tag{30}$$

Полученное соотношение выражает следующее правило Прандтля — Глауэрта: *распределение коэффициента давления в плоском безви-*

[1]) Prandtl L. Über Strömungen deren Geschwindigkeiten mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar sind.— Journ. Aeron. Res. Inst., Tokyo, 1930, v. 65, p. 14; Glauert H. The effect of compressibility on the lift on airfoil.— Proceed. Roy. Soc. A., 1928, v. 118; Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики.— М.: Наука, 1980.

хревом линеаризованном дозвуковом потоке газа при данном значении $M_\infty < 1$ *может быть получено из соответствующего распределения в потоке несжимаемой жидкости, если все ординаты этого распределения увеличить в* $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$ *раз.*

Вспоминая (§ 54 гл. VII), что подъемная сила профиля R_y и коэффициент подъемной силы c_y определяются по формулам

$$R_y = -\oint p n_y ds = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \oint c_p dx,$$

$$c_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 b \cdot 1} = \oint c_p d\bar{x}, \quad \bar{x} = x/b,$$

где b — хорда профиля, заключим, что для профиля с одним и тем же контуром в потоках газа и несжимаемой жидкости для коэффициентов подъемной силы c_y и c_{y0} справедливо соотношение

$$c_y = \frac{c_{y0}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}, \tag{31}$$

аналогичное (30).

Результаты экспериментов показывают, что интегральная формула (31) справедлива в несколько более широком интервале чисел $M_\infty < 1$, чем *локальная* формула (30). На рис. 88 приводятся для сравнения результаты опытного определения c_y тонкого (относительная толщина

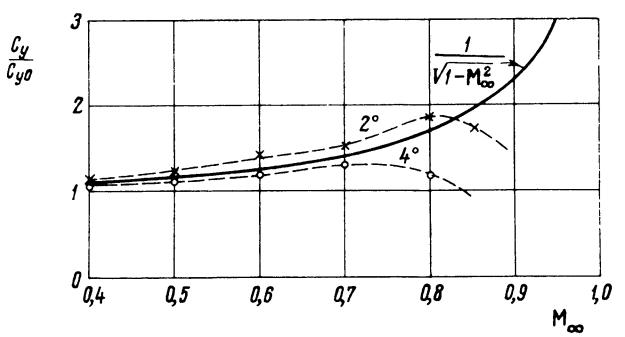


Рис. 88

6,5%), мало изогнутого винтового профиля при двух углах атаки 2° и 4°. Можно заметить, что при угле атаки 4° экспериментальная кривая (штрихи с кружками) уклоняется от теоретической (сплошная линия) кривой (31) ранее, чем при угле атаки 2° (штрихи с крестиками).

Представляет интерес тот факт, что чем больше возмущение потока, в данном случае чем больше угол атаки, тем меньше интервал чисел M_∞, в котором сохраняет свою силу линеаризованная теория. Изложенная в настоящем параграфе теория не дает количественного объяснения этого важного факта. В дальнейшем будут приведены более общие соображения о связи между линеаризованными обтеканиями тел в дозвуковом течении газа и потоке несжимаемой жидкости, которые теоретически подтвердят только что отмеченный факт.

Правило Прандтля — Глауэрта служит только для *пересчета* уже заранее определенных c_{p0} и c_{y0} в несжимаемой жидкости (например, по методу теории тонкого крыла, изложенному в § 55) на их значения при заданном числе $M_\infty < 1$ в дозвуковом газовом потоке.

§ 60. Сверхзвуковое обтекание тонкого профиля. Формулы Аккерета

При сверхзвуковом течении газа ($M_\infty > 1$) второе из линеаризованных уравнений (23) приобретает форму

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} = 0, \tag{32}$$

где, в отличие от предыдущего параграфа, положено

$$\omega^2 = M_\infty^2 - 1. \tag{33}$$

Волновое уравнение (32) нам уже знакомо по § 32 гл. V. Отличие математической структуры отражает физические особенности явлений, описываемых уравнением (32), по сравнению с явлениями дозвукового течения.

Легко убедиться простой подстановкой, что *общее* решение уравнения (32) может быть выражено формулой

$$\tilde{\psi}(x, y) = \Omega_1(x - \omega y) + \Omega_2(x + \omega y),$$

где Ω_1 и Ω_2 — произвольные функции аргументов $x - \omega y$ и $x + \omega y$; вид этих функций определяется с помощью граничных условий задачи.

Рассмотрим частное решение

$$\tilde{\psi}_1 = \Omega_1(x - \omega y). \tag{34}$$

Оно имеет следующий смысл: в плоскости течения (x, y) существует семейство прямых линий

$$x - \omega y = \text{const},$$

вдоль которых функция тока возмущений, а следовательно, и вообще возмущения параметров движения и состояния газа будут *сохранять постоянные значения*. Эти прямые представляют собой *первое семейство* (C_1) *характеристик волнового уравнения* (32) и играют роль *линий возмущения* в рассматриваемом сверхзвуковом потоке. Их именуют *линиями* или *волнами Маха*.

Точно так же частному решению

$$\tilde{\psi}_2 = \Omega_2(x + \omega y) \tag{35}$$

соответствует *второе семейство* (C_2) *характеристик*, или *линий возмущения*,

$$x + \omega y = \text{const},$$

вдоль которых также сохраняют постоянное значение возмущения параметров движения и состояния газа.

Рассматривая угловые коэффициенты этих семейств прямых

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{1}{\omega} = \pm\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \tag{36}$$

заключим, что углы α, образованные линиями возмущения с направлением невозмущенного движения (осью Ox), равны

$$\alpha = \pm \arcsin\frac{1}{M_\infty}. \tag{37}$$

На рис. 89 показаны две линии возмущения от точечного источника возмущений S, находящегося на оси Ox. Только вдоль этих двух лучей, выходящих из точки S, можно наблюдать возмущения однородного набегающего на точку S потока; во всех остальных точках плоскости течения поток не возмущен и сохраняет свою однородность. Напомним, что «то-

чечным» источником в плоском потоке служит на самом деле источник возмущений в виде прямой, перпендикулярной к плоскости рисунка (например, расположенная поперек потока тонкая проволока). От действительно точечного источника в пространстве линии возмущения расположатся на конической поверхности с вершиной в точке S и углом полураствора α, определяемым по (37). Этот *конус возмущений* называют еще *конусом Маха*. По наклону линий возмущения можно судить о значении числа M_∞ однородного потока.

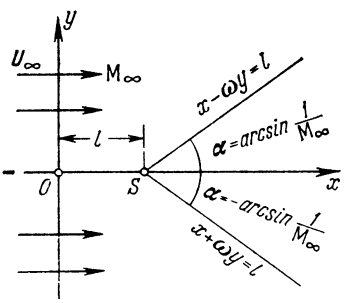


Рис. 89

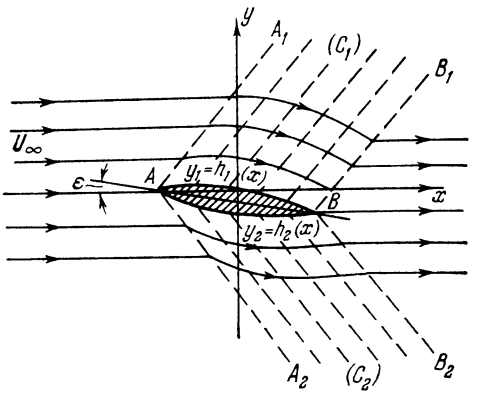


Рис. 90

Так в аэродинамических сверхзвуковых трубах, внося в поток малые возмущения при помощи тонких игл или зондов, наблюдают линии возмущения и по углам наклона их к направлению невозмущенного потока определяют число M_∞ в трубе. Видимость линий возмущения обеспечивается тем, что вдоль них плотность газа (воздуха), а следовательно, и показатель преломления отличны от соответствующих значений в невозмущенном потоке.

Обратимся к вопросу об обтекании тонкого профиля сверхзвуковым потоком. Контур его, как и в дозвуковом потоке, будем задавать ординатами верхней (индекс 1) и нижней (индекс 2) поверхностей: $y=h_{1,2}(x)$.

Граничное условие представим, как и прежде, в форме

$$\widetilde{\psi} = -U_\infty h_{1,2}(x) \text{ при } y = \pm 0, \quad x_A \leqslant x \leqslant x_B. \tag{38}$$

Заполним область течения сверху и снизу от контура профиля (рис. 90) соответственно характеристиками первого (C_1) и второго (C_2) семейств. Только что изложенные свойства характеристик [формула (34) для первого семейства и формула (35) для второго семейства] позволяют сразу заключить, что решение уравнения (32) при граничном условии (38) может быть представлено в форме

$$\widetilde{\psi} = -U_\infty h_{1,2}(x \mp \omega y), \tag{39}$$

где, напоминаем, индексу 1 при h соответствует верхний знак в круглой скобке, а индексу 2 — нижний.

В отличие от дозвукового обтекания функция тока возмущений $\widetilde{\psi}(x, y)$ при удалении на сколь угодно большое расстояние от контура профиля не обращается в нуль, а сохраняет внутри верхней и нижней полос, ограниченных крайними характеристиками AA_1, BB_1 и AA_2, BB_2, при $y \to \pm\infty$ то же распределение по x, как и на верхней и нижней поверхностях профиля [1]). Вне указанных полос поток остается однородным

[1]) Асимптотические методы теории малых возмущений показывают, что на больших расстояниях от профиля влияние малых второго порядка становится существенным уже

и скорость его равна U_∞. Как это непосредственно видно из решения (39) и показано на рис. 90, линии тока *возмущенного* движения ($\psi = U_\infty y + \tilde{\psi} = \text{const}$) представляют собой кривые, которые могут быть получены параллельным переносом верхнего и нижнего контуров профиля соответственно вдоль характеристик первого и второго семейств.

Располагая решением (39), найдем по (15) распределение возмущений составляющих скорости (штрих означает производную по всему аргументу, стоящему в круглой скобке)

$$\tilde{u} = -\frac{1}{M_\infty^2 - 1}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y} = \mp\frac{U_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h'_{1,2}(x \mp \omega y),$$
$$\tilde{v} = -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} = U_\infty h'_{1,2}(x \mp \omega y), \tag{40}$$

справедливое во всей области возмущенного движения. Из второго равенства системы (40) можно найти угол отклонения $\theta_{1,2}$ касательной к линии тока в возмущенной области от линии тока невозмущенного потока. Будем иметь по определению линии тока и в силу малости отклонения $\theta_{1,2}$

$$\theta_{1,2} \approx \operatorname{tg}\theta_{1,2} = \frac{\tilde{v}}{(U_\infty + \tilde{u})} \approx \frac{\tilde{v}}{U_\infty} \approx h'_{1,2}(x \mp \omega y),$$

а тогда из равенств (40) следует

$$\tilde{u} = \mp\frac{U_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\theta_{1,2}, \quad \tilde{v} = U_\infty\theta_{1,2}. \tag{41}$$

Эти равенства выражают основное свойство линеаризованного сверхзвукового потока: *продольная и поперечная составляющие скорости возмущения* при заданных скорости и числе Маха невозмущенного потока *пропорциональны местному углу наклона линии тока* возмущенного движения по отношению к направлению невозмущенного потока и имеют *местный* (локальный) *характер*. Тем же свойством обладают давление, плотность и другие характерные для потока величины, что принципиально отличает *сверхзвуковой* линеаризованный поток от *дозвукового*, в котором значения параметров потока в данной точке зависят от распределения этих параметров во всем потоке в целом.

Припоминая одинаковую как для дозвукового, так и сверхзвукового линеаризованных потоков формулу (22) коэффициента давления, найдем, согласно (41), выражения коэффициента давления в любой точке возмущенного потока

$$c_p = \pm\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h'_{1,2}(x \mp \omega y) = \pm\frac{2\theta_{1,2}(x \mp \omega y)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}},$$

а затем и на поверхности (контуре) профиля, где приближенно можно положить $y = \pm 0$,

$$c_p(x) = \frac{\pm 2h'_{1,2}(x)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{\pm 2\theta_{1,2}(x)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \tag{42}$$

Последнее равенство, выражающее пропорциональность коэффициента давления в линеаризованном сверхзвуковом потоке местному зна-

---

в первом приближении и искажает картину течения на рис. 90. Характеристики искривляются и перестают быть параллельными между собой. См. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967, с. 147—161.

чению угла между касательной к контуру тонкого профиля и направлением невозмущенного потока — этот угол принято обычно называть *местным углом атаки* — напоминает известную «ударную» теорию Ньютона, против применения которой в теории обтекания тел *несжимаемой жидкостью* боролся Эйлер. Как вскоре будет выяснено, «ударная» теория Ньютона найдет свое применение как вполне удовлетворительный, хотя и только приближенный, метод расчета обтеканий тел при очень больших значениях чисел Маха набегающего на тело сверхзвукового потока.

Коэффициент подъемной силы c_y найдем, выполняя интегрирование ($b=AB$ — хорда профиля, в принятом приближении равная разности x_B-x_A абсцисс точек B и A)

$$c_y = \oint c_p d\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{1}{b}\int_{x_A}^{x_B} (c_{p2} - c_{p1})\, dx. \tag{43}$$

Подставляя сюда значения c_{p1} и c_{p2} из (42), получим

$$c_y = -\frac{2}{b\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{x_A}^{x_B} [h_2'(x) + h_1'(x)]\, dx = -\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{2(y_B - y_A)}{x_B - x_A}.$$

Введем *угол атаки профиля* ε как острый угол между направлением хорды AB и набегающим потоком

$$\operatorname{tg}\varepsilon \approx \varepsilon \approx \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A};$$

тогда предыдущая формула примет окончательный вид

$$c_y = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \tag{44}$$

Это — формула Аккерета[1]).

В линеаризованной теории сверхзвукового обтекания тонкого профиля *коэффициент подъемной силы не зависит от формы профиля, а только от угла атаки и числа* $M_\infty > 1$ *набегающего потока.*

В отличие от линеаризованного дозвукового течения, в котором, как это непосредственно следует из правила Прандтля — Глауэрта (§ 59), сопротивление профиля отсутствует, при сверхзвуковом обтекании сопротивление профиля отлично от нуля; оно носит наименование *волнового.* Возникновение этого сопротивления может быть физически объяснено той продольной несимметрией потока, которая отличает сверхзвуковой поток от дозвукового. Если в дозвуковом потоке давление в задней кормовой части профиля восстанавливается и создает силу, противодействующую главному вектору сил давлений в передней (лобовой) части профиля, то при сверхзвуковом обтекании такого уравновешивания не происходит. В кормовой расширяющейся области течения имеет место явление, подобное наблюдаемому в сопле Лаваля: сверхзвуковой поток при расширении ускоряется, давление в кормовой части не восстанавливается, а продолжает уменьшаться, что приводит к дополнительной отсасывающей силе, направленной вниз по потоку. Таким образом, в отличие от дозвукового потока, главные векторы сил давления по лобовой и кормовой части поверхности профиля друг друга не уничтожают, а, наоборот, складываются, образуя суммарную силу волнового сопротивления.

---

[1]) Ackeret J. Über Luftkräfte auf Flügel, die mit grösserer als Schallgeschwindigkeit bewegt werden.— Zeischr. f. Flügtechn., 1925, Bd. 16.

Коэффициент волнового сопротивления c_x найдем, составляя выражение для силы сопротивления

$$R_x = -\oint p n_x ds = -\oint p dy = -\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \oint c_p \frac{dy}{dx} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \int_{x_A}^{x_B} \left(c_{p1} \frac{dh_1}{dx} - c_{p2} \frac{dh_2}{dx} \right) dx.$$

Согласно (42) будем иметь следующую формулу Аккерета для коэффициента волнового сопротивления:

$$c_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 b} = \frac{2}{b\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{x_A}^{x_B} \{[h_1'(x)]^2 + [h_2'(x)]^2\} dx. \qquad (45)$$

Как видно из этой формулы, коэффициент волнового сопротивления представляет собой малую величину *второго* порядка; в отличие от

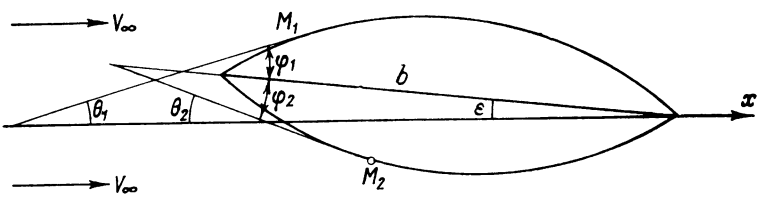


Рис. 91

коэффициента подъемной силы он *зависит от формы обтекаемого профиля*. Так, для пластины

$$h_1'(x) = h_2'(x) = -\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} = -\operatorname{tg}\varepsilon \approx -\varepsilon,$$

и по (45) получим

$$c_x = \frac{4\varepsilon^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \qquad (46)$$

Для вычисления c_x в случае более сложных форм профилей полезно в выражении (45) положить

$$h_1'(x) \approx \theta_1 = \varphi_1 - \varepsilon, \quad h_2'(x) \approx \theta_2 = \varphi_2 + \varepsilon,$$

где ε — угол атаки (рис. 91), а φ_1 и φ_2 — углы между касательными в точках M_1 и M_2 верхней и нижней поверхностей и хордой профиля. Тогда, согласно (45), c_x выразится в виде

$$c_x = \frac{2}{b\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{x_A}^{x_B} [\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1)] dx.$$

В случае симметричного крыла ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) получим

$$c_x = \frac{4\varepsilon^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{1}{b} \int_{x_A}^{x_B} \varphi^2 dx = \frac{4(\varepsilon^2 + \overline{\varphi^2})}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \qquad (47)$$

где $\overline{\varphi^2}$ обозначает среднее интегральное значение квадрата угла наклона

касательной к контуру крыла относительно его хорды. Из формулы (47) следует, что *по линеаризованной теории из всех профилей, расположенных к потоку под малым углом атаки, пластина обладает наименьшим волновым сопротивлением.*

Для ромбовидного профиля с максимальной толщиной (малой диагональю) t и хордой (большой диагональю) b имеем $\varphi = t/b$, так что

$$c_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\varepsilon^2 + \frac{t^2}{b^2} \right). \tag{48}$$

В случае *чечевицеобразного* профиля (рис. 92), составленного из двух одинаковых дуг окружностей, в принятом приближении можно написать

$$\overline{\varphi^2} = \frac{2}{b} \int_0^{b/2} \varphi^2 dx = \frac{2R}{b} \int_0^{\varphi_0} \varphi^2 d\varphi = \frac{2}{3} \frac{R}{b} \varphi_0^3$$

и заметить, что

$$b = 2R \sin \varphi_0 \approx 2R\varphi_0, \quad \frac{t}{2} = R - R\cos\varphi_0 \approx \frac{1}{2} R\varphi_0^2, \quad \frac{R}{b} = \frac{1}{2\varphi_0}, \quad \varphi_0 = 2\frac{t}{b}.$$

Окончательно найдем по (47)

$$c_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\varepsilon^2 + \frac{4}{3} \frac{t^2}{b^2} \right). \tag{49}$$

Теория Аккерета, как теория первого приближения, дает результаты, удовлетворительно совпадающие с экспериментом, если профиль достаточно тонок, углы атаки малы, а число M_∞ не слишком близко к единице. Для примера приводим (рис. 93)

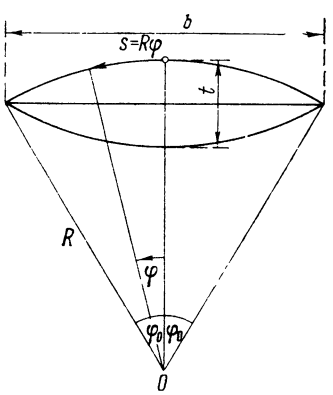


Рис. 92

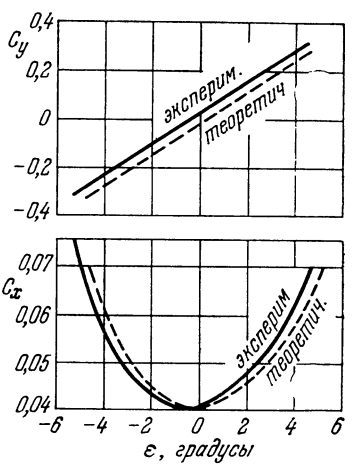


Рис. 93

сравнение теоретических кривых $c_y(\varepsilon)$ и $c_x(\varepsilon)$, рассчитанных по формулам Аккерета (44) и (47), с экспериментальными кривыми Хилтона и Прудена [1]) для ромбовидного профиля относительной толщины 8,7% со скругленными углами посредине при $M_\infty = 1{,}45$. Экспериментальная кривая нанесена сплошной линией, теоретическая — штриховой. Ординаты теоретической кривой c_x увеличены на число 0,008, соответствующее коэффициенту сопротивления трения, теорией Аккерета не учиты-

[1]) Hilton W. F., Pruden F. W. Subsonic and supersonic high-speed tunnel tests of a faired double wedge airfoil.— Rep. and Mem., 1943, № 2057.

ваемому. Более подробное изложение вопроса о границах применимости формул Аккерета, а также дополнительные экспериментальные материалы можно найти в специальной литературе [1]).

§ 61. Законы подобия плоских до- и сверхзвуковых обтеканий тонкого профиля. Случай околозвукового обтекания

В предыдущих двух параграфах, трактовавших задачи плоского, до- и сверхзвукового обтекания тонкого профиля, были получены формулы, позволявшие пересчитывать коэффициенты давлений и подъемной силы, а также коэффициент волнового сопротивления для сверхзвукового обтекания *данного* профиля с одного значения числа Маха набегающего потока на другое.

В случае *дозвукового* потока была установлена связь между c_p или c_y тонкого профиля заданной формы и расположения в однородном потоке при произвольном, меньшем единицы числе Маха M_∞, и соответствующими значениями этих коэффициентов для того же и так же расположенного профиля в однородном потоке *несжимаемой* жидкости ($M_\infty=0$). Из формул (30) и (31) непосредственно следуют несколько более общие формулы пересчета

$$\frac{(c_p)_{M_\infty=M_1}}{(c_p)_{M_\infty=M_2}}=\frac{(c_y)_{M_\infty=M_1}}{(c_y)_{M_\infty=M_2}}=\sqrt{\frac{1-M_2^2}{1-M_1^2}} \tag{50}$$

коэффициентов c_p и c_y с одного значения $M_\infty=M_1<1$ на другое $M_\infty=M_2<1$, конечно, подчеркнем это еще раз, для одного и того же по форме и расположению тонкого профиля.

Судя по формулам (42), (44) и (45), для двух одинаковых по форме тонких профилей, одинаково расположенных в двух однородных *сверхзвуковых* потоках с числами M_∞, равными $M_1>1$ и $M_2>1$, будут иметь место формулы пересчета

$$\frac{(c_p)_{M_\infty=M_1}}{(c_p)_{M_\infty=M_2}}=\frac{(c_y)_{M_\infty=M_1}}{(c_y)_{M_\infty=M_2}}=\frac{(c_x)_{M_\infty=M_1}}{(c_x)_{M_\infty=M_2}}=\sqrt{\frac{M_2^2-1}{M_1^2-1}}, \tag{51}$$

которые можно переписать в виде, тождественном с (50), если поменять местами члены в числителе и знаменателе под знаком корня.

Указанные формулы являются частным случаем более общих соотношений динамического подобия, которые можно установить для разных по форме, но *аффинноподобных* между собой тонких профилей, расположенных под малыми углами атаки в двух однородных потоках с различными числами Маха, но, конечно, такими, чтобы сравниваемые потоки были оба дозвуковыми или оба сверхзвуковыми.

Выясним условия *динамического подобия* двух линеаризованных потоков газа и определим соотношения между коэффициентами c_p, c_y, а в случае сверхзвукового потока также и c_x для таких подобных друг другу потоков.

Рассмотрим два линеаризованных потока со скоростями на бесконечности U_i и числами Маха M_i, заданные своими функциями тока малых возмущений $\tilde{\psi}_i$ в физических плоскостях движения (x_i, y_i). Здесь и дальше индекс i принимает значения $i=1, 2$ соответственно двум сравниваемым между собой потокам.

---

[1]) См., например, Хилтон У. Ф. Аэродинамика больших скоростей.— М.: ИЛ, 1955, с. 165—231.

Дифференциальные уравнения движения, согласно (17), можно написать в форме

$$\frac{\partial^2\widetilde{\psi}_i}{\partial x_i^2} \pm \frac{1}{|1-M_i^2|}\frac{\partial^2\widetilde{\psi}_i}{\partial y_i^2} = 0 \quad (i=1, 2), \tag{52}$$

где верхний знак относится к дозвуковому, а нижний — к сверхзвуковому потоку. Без нарушения общности принимается, что хорды обоих профилей одинаковы и равны $b=x_B-x_A$, а уравнения

$$y_i = h_i(x_i) \quad (i=1, 2)$$

соответствуют всему контуру профиля, который, в отличие от предыдущего (§§ 59, 60), не разделяется на верхнюю и нижнюю части.

Граничные условия на поверхностях расположенных в потоках тонких профилей будут по (19)

$$\widetilde{\psi}_i = -U_i h_i(x_i) \text{ при } y_i = \pm 0, \; x_A \leqslant x_i \leqslant x_B \quad (i=1, 2). \tag{53}$$

Совершим в уравнениях (52) и граничных условиях (53) переход к безразмерным переменным, положив

$$x_i = b\xi_i, \quad y_i = \frac{b}{\sqrt{|1-M_i^2|}}\eta_i, \tag{54}$$

$$\widetilde{\psi}_i = bU_i\sqrt{|1-M_i^2|}\,\Psi_i\theta_i(\xi_i, \eta_i), \quad h_i = b\tau_i H_i(\xi_i).$$

В этих формулах перехода Ψ_i — некоторые благодаря однородности уравнений (52) произвольные постоянные, что отражает произвольность масштабов $\widetilde{\psi}_i$. За масштабы ординат профилей приняты произведения длины хорды b на малую *относительную толщину* τ_i, под которой в настоящем изложении принимается не только обычное отношение максимальной толщины профиля $h_{i\max}$ к длине хорды b, но и, более общо, относительная вогнутость профиля, равная отношению стрелы прогиба «скелета» профиля к длине хорды, или просто угол атаки; ξ_i, η_i, θ_i, H_i — безразмерные координаты и функции от них.

Выражая в уравнениях (52) и граничных условиях (53) все переменные через безразмерные их значения, получим после простых сокращений (i=1, 2)

$$\frac{\partial^2\theta_i}{\partial\xi_i^2} \pm \frac{\partial^2\theta_i}{\partial\eta_i^2} = 0, \tag{55}$$

$$\Psi_i\sqrt{|1-M_i^2|}\,\theta_i = -\tau_i H_i \text{ при } \eta_i = \pm 0, \quad \frac{x_A}{b} \leqslant \xi_i \leqslant \frac{x_B}{b}. \tag{56}$$

В случае дозвукового потока к условиям (56) добавляется еще условие: $\theta_i \to 0$ при $\sqrt{\xi_i^2+\eta_i^2} \to \infty$.

Если в *сходственных* точках сравниваемых двух потоков, определяемых равенствами безразмерных координат этих точек

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi, \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta,$$

в условиях *геометрического аффинного подобия* обтекаемых профилей

$$H_1(\xi_1) = H_2(\xi_2) = H(\xi)$$

выполняются равенства

$$\theta_1(\xi_1, \eta_1) = \theta_2(\xi_2, \eta_2) = \theta(\xi, \eta),$$

то *такие потоки кинематически подобны друг другу.*

Обращаясь к уравнению (55) и граничным условиям (56), убедимся, что для выполнения указанных требований должны соблюдаться равенства (λ — некоторая константа)

$$\frac{\tau_1}{\Psi_1\sqrt{|1-M_1^2|}}=\frac{\tau_2}{\Psi_2\sqrt{|1-M_2^2|}}=\lambda. \tag{57}$$

Выполнение дополнительного условия на бесконечности в дозвуковом потоке не приведет к новому условию подобия.

При выполнении условий аффинности профилей и равенств (57) совокупность уравнений (55) и граничных условий (56) приведется к одному уравнению и соответствующим ему граничным условиям

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}\pm\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}=0,$$

$$\theta=-\lambda H(\xi) \text{ при } \eta=\pm 0,\ \frac{x_A}{b}\leqslant\xi\leqslant\frac{x_B}{b},$$

$$\theta\to 0 \text{ при } \sqrt{\xi^2+\eta^2}\to\infty \text{ (дозвуковой поток).}$$

При заданном значении λ полученное уравнение имеет единственное решение $\theta=\theta(\xi, \eta)$, что и говорит о наличии *кинематического* подобия между сравниваемыми потоками.

Как сейчас будет выяснено, различные значения постоянной λ зависят от выбора выражения для Ψ через заданные константы τ и M_∞. Этот выбор остается *произвольным*, причем каждому значению λ соответствует свое условие (57) и вытекающее из него частное условие кинематического подобия. Некоторые из этих условий будут далее рассмотрены.

Для установления условий *динамического* подобия обратимся к рассмотрению коэффициента давления c_p в двух кинематически подобных потоках. Согласно (22) будем иметь, переходя к безразмерным величинам в сходственных точках,

$$c_{pi}=-\frac{2\widetilde{u}_i}{U_i}=-\frac{2}{U_i(1-M_i^2)}\frac{\partial\widetilde{\psi}_i}{\partial y_i}=\mp 2\Psi_i\frac{\partial\theta_i}{\partial\eta_i},$$

откуда следует, что условием динамического подобия служит

$$\frac{c_{p1}}{\Psi_1}=\frac{c_{p2}}{\Psi_2}=\mp 2\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=f(\lambda). \tag{58}$$

Применяя символ «idem» (по латыни — «то же») для обозначения *одинаковых величин в сравниваемых двух динамически подобных потоках*, можем условия (57) и (58) записать в следующей более краткой форме:

$$\lambda=\frac{\tau}{\Psi\sqrt{|1-M_\infty^2|}}=\text{idem},\quad \frac{c_p}{\Psi}=\text{idem}. \tag{59}$$

Совокупность равенств (59) можно представить в форме следующей функциональной зависимости [1]):

$$\frac{c_p}{\Psi}=f\left(\frac{\tau}{\Psi\sqrt{|1-M_\infty^2|}}\right)=f(\lambda), \tag{60}$$

---

[1]) Липман Г. В., Рошко А. Элементы газовой динамики: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1960, с. 302—305.

выражающей тот факт, что при $\tau/(\Psi\sqrt{|1-M_\infty^2|}) = \text{idem}$ будет и

$$\frac{c_p}{\Psi} = \text{idem}.$$

Как это принято, в правых частях (58)—(60) опущены аргументы ξ и η, которые в сходственных точках сравниваемых потоков одинаковы. Не следует, конечно, забывать, что c_p/Ψ при $\tau/(\Psi\sqrt{|1-M_\infty^2|}) = \lambda = \text{idem}$ представляет собой функцию от ξ и η, зависящую от выбора λ.

Задаваясь различными выражениями произвольной постоянной Ψ через постоянные τ и M_∞, будем получать разные значения λ и соответствующие им различные частные законы подобия. Так, полагая $\Psi = |1-M_\infty^2|^{-1/2}$, будем иметь, согласно (57) и (58), формулу ($\lambda=\tau$)

$$c_p = \frac{f(\tau)}{\sqrt{|1-M_\infty^2|}},$$

в случае *дозвукового* потока совпадающую с ранее установленной формулой (30) и выражающую тот уже известный нам (правило Прандтля — Глауэрта) факт, что если сравниваемые профили имеют одинаковые относительные толщины (в том обобщенном смысле, как это ранее говорилось), то коэффициенты давления в сходственных точках обоих потоков будут обратно пропорциональны корням квадратным из значения разности $1-M^2$ или $1-M_2^2$.

Если положить $\Psi=1$, то соотношение подобия (60) примет вид

$$\lambda = \frac{\tau}{\sqrt{|1-M_\infty^2|}}, \quad c_p = f\left(\frac{\tau}{\sqrt{|1-M_\infty^2|}}\right)$$

и будет выражать другой аспект того же правила Прандтля — Глауэрта, а именно: если в двух сравниваемых дозвуковых потоках относительные толщины тонких профилей будут между собой относиться как корни квадратные из разностей $(1-M_1^2)$ и $(1-M_2^2)$, то коэффициенты давления в сходственных точках таких двух потоков будут одинаковы.

Только что высказанное правило поясняет ранее отмеченное свойство кривых $c_y(M_\infty)$, приведенных на рис. 88 (§ 59). Условие одинаковости отношения $\tau/\sqrt{|1-M_\infty^2|}$ приводит к тому, что чем больше угол атаки, тем при меньших M_∞ можно ожидать совпадения расчетного и экспериментального значений коэффициента подъемной силы.

Интересно еще положить $\Psi=\tau$; тогда

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{|1-M_\infty^2|}}, \quad c_p = \tau f(\sqrt{|1-M_\infty^2|}).$$

Справедливость такого равенства, утверждающего, что при данном значении M_∞ коэффициент давления пропорционален относительной толщине профиля, была неоднократно нами проверена для случая $M_\infty=0$ в § 55 [см. первую из формул (104), а также (107)].

Если, наоборот, относительную толщину профиля менять обратно пропорционально $\sqrt{|1-M_\infty^2|}$, т. е. сохранять неизменной величину $\tau\sqrt{|1-M_\infty^2|}$, то коэффициент давления будет обратно пропорционален $|1-M_\infty^2|$ согласно формуле

$$c_p = \frac{1}{|1-M_\infty^2|} f(\tau\sqrt{|1-M_\infty^2|}),$$

которую получим из (60), если положим $\Psi = 1/|1-M_\infty^2|$ $\lambda = \tau\sqrt{|1-M_\infty^2|}$.

Положим, наконец, в равенстве (60)

$$\Psi = \tau/\sqrt{|1-M_\infty^2|};$$

тогда будем иметь

$$\lambda = 1, \quad c_p = \frac{\tau}{\sqrt{|1-M_\infty^2|}} f(1),$$

где $f(1)$ является, как уже отмечалось, функцией координат ξ, η, определить вид которой из соображений подобия, конечно, нельзя. Полученное выражение для c_p находится в полном соответствии с формулами (30) и (42).

Отмеченное многообразие «правил подобия», позволяющее сравнивать обтекания при различных числах Маха набегающего потока профилей с различными законами связи между относительными толщинами и числами Маха, обусловлено линейностью и однородностью уравнений теории до- и сверхзвукового обтекания тонкого профиля.

Обратимся теперь к случаю *околозвукового* обтекания тонкого профиля, характеризуемого близостью числа M_∞ набегающего потока к единице. В этом *особом* случае изложенный в § 58 простейший способ линеаризации уже неприменим и должен быть дополнен более тонкими соображениями о сравнительной малости членов основного уравнения (7) и выражения скорости звука (8), применяемых к задаче обтекания тонкого профиля. Для этого проще всего рассмотреть общее уравнение (2) и выражение скорости звука (4). Сделаем в них замену u, v и a по формулам (9), причем, в отличие от предыдущей линеаризации (§ 58), в множителях, стоящих перед производными скоростей возмущений $\partial\tilde{u}/\partial x$, $\partial\tilde{u}/\partial y$, $\partial\tilde{v}/\partial x$, $\partial\tilde{v}/\partial y$, представляющими собой малые первого порядка, сохраним не только конечные величины, но и малые первого порядка. С этой целью воспользуемся для квадрата скорости звука приближенной формулой

$$a^2 = a_\infty^2 + \frac{k-1}{2}U_\infty^2 - \frac{k-1}{2}(U_\infty^2 + 2U_\infty\tilde{u} + \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \approx a_\infty^2 - (k-1)U_\infty\tilde{u}.$$

В этом приближении получим

$$[a_\infty^2 - U_\infty^2 - (k+1)U_\infty\tilde{u}]\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - U_\infty\tilde{v}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right) + \\ + [a_\infty^2 - (k-1)U_\infty\tilde{u}]\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} = 0,$$

или, выделяя в левой части малые первого порядка и деля обе части на a_∞^2,

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} = (k+1)M_\infty^2\frac{\tilde{u}}{U_\infty}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \\ + (k-1)M_\infty^2\frac{\tilde{u}}{U_\infty}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} + M_\infty^2\frac{\tilde{v}}{U_\infty}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right).$$

Линеаризация требует отбрасывания правой части, что для случаев до- и сверхзвуковых движений приводило к уравнению (10). В разбираемом сейчас случае околозвукового движения значение $M_\infty = 1$ является *особым*, так как при этом обращается в нуль коэффициент при производной $\partial\tilde{u}/\partial x$. Производную $\partial\tilde{u}/\partial x$ при M_∞, близком к единице, уже нельзя рассматривать как малую величину, а остальные производные $\partial\tilde{u}/\partial y$, $\partial\tilde{v}/\partial y$, $\partial\tilde{v}/\partial x$ сохраняют свою малость. Вот почему первое слагаемое в правой части должно быть сохранено, а остальные могут быть, как и ранее, опущены. Таким образом, в случае *околозвукового* обтекания тонкого профиля линеаризация нарушается, и мы будем

иметь следующую, уже *нелинейную* систему уравнений движения

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}=(k+1)M_\infty^2\frac{\tilde{u}}{U_\infty}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}=0.$$

В рассматриваемом случае проще иметь дело с потенциалом скоростей возмущений $\tilde{\varphi}$, чем с функцией тока возмущений $\tilde{\psi}$. Используя наличие потенциала скоростей малых возмущений $\tilde{\varphi}(x, y)$, приведем полученную систему к одному уравнению

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial y^2}=\frac{(k+1)M_\infty^2}{U_\infty}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2} \tag{61}$$

с соответствующим ему граничным условием (18)

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}=U_\infty h'(x) \text{ при } y=\pm 0, \quad x_A\leqslant x\leqslant x_B.$$

Для установления соотношений подобия двух плоских околозвуковых обтеканий тонких профилей с заданными относительными толщинами τ_1, τ_2, скоростями набегающих однородных потоков U_1, U_2, числами Маха M_1 и M_2 и показателями адиабат k_1 и k_2 составим следующие уравнения и граничные условия:

для первого потока

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_1}{\partial x^2}+\frac{1}{1-M_1^2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_1}{\partial y_1^2}=\frac{(k_1+1)M_1^2}{U_1(1-M_1^2)}\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial x}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_1}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial y_1}=U_1h_1'(x) \text{ при } y_1=\pm 0, \quad x_A\leqslant x\leqslant x_B \tag{62}$$

и для второго

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_2}{\partial x^2}+\frac{1}{1-M_2^2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_2}{\partial y_2^2}=\frac{(k_2+1)M_2^2}{U_2(1-M_2^2)}\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial x}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_2}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial y_2}=U_2h_2'(x) \text{ при } y_2=\pm 0,\ x_A\leqslant x\leqslant x_B. \tag{63}$$

Подобно тому как это уже было сделано в начале параграфа, введем преобразования

$$\tilde{\varphi}_1=\Phi_1\tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi}_2=\Phi_2\tilde{\varphi}, \quad x=\xi, \quad \sqrt{|1-M_1^2|}\,y_1=\sqrt{|1-M_2^2|}\,y_2=\eta, \tag{64}$$

$$h_1(x)=b\tau_1H(\xi), \quad h_2(x)=b\tau_2H(\xi),$$

причем по условию подобия функции $\tilde{\varphi}(\xi, \eta)$ и $H(\xi)$ одинаковы в сравниваемых системах. При помощи этих функций уравнения и граничные условия (62) и (63) перепишутся в форме

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\xi^2}\pm\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\eta^2}=\frac{(k_1+1)M_1^2\Phi_1}{U_1(1-M_1^2)}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\xi^2},$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\eta}=\frac{U_1b\tau_1}{\Phi_1\sqrt{|1-M_1^2|}}H'(\xi) \text{ при } \eta=\pm 0, \quad x_A\leqslant\xi\leqslant x_B, \tag{65}$$

$$\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial\xi^2}\pm\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial\eta^2}=\frac{(k_2+1)\,M_2^2\Phi_2}{U_2(1-M_2^2)}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial\xi^2},$$

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\eta}=\frac{U_2b\tau_2}{\Phi_2\sqrt{|1-M_2^2|}}H'(\xi)\ \text{при}\ \eta=\pm 0,\quad x_A\leqslant\xi\leqslant x_B. \tag{65}$$

Требование совпадения этих двух систем, состоящих из уравнений и граничных условий для первого и второго течений, приводится к двум равенствам

$$\frac{(k_1+1)\,M_1^2\Phi_1}{U_1(1-M_1^2)}=\frac{(k_2+1)\,M_2^2\Phi_2}{U_2(1-M_2^2)},\quad \frac{\Phi_1\sqrt{|1-M_1^2|}}{U_1\tau_1}=\frac{\Phi_2\sqrt{|1-M_2^2|}}{U_2\tau_2}. \tag{66}$$

Выражения коэффициентов давления c_{p1} и c_{p2}, согласно общей формуле

$$c_p=-\frac{2\widetilde{u}}{U_\infty}=-\frac{2}{U_\infty}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x},$$

в сравниваемых потоках будут

$$c_{p1}=-\frac{2\Phi_1}{U_1}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\xi},\quad c_{p2}=-\frac{2\Phi_2}{U_2}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\xi},$$

откуда следует

$$\frac{U_1c_{p1}}{\Phi_1}=\frac{U_2c_{p2}}{\Phi_2}. \tag{67}$$

Исключая из системы равенств (66) и (67) отношения Φ_1/U_1 и Φ_2/U_2, получим искомые *условия подобия двух плоских околозвуковых обтеканий тонких тел*

$$\frac{c_{p1}\sqrt{|1-M_1^2|}}{\tau_1}=\frac{c_{p2}\sqrt{|1-M_2^2|}}{\tau_2},\quad \frac{(k_1+1)\,M_1^2\tau_1}{|1-M_1^2|^{3/2}}=\frac{(k_2+1)\,M_2^2\tau_2}{|1-M_2^2|^{3/2}}, \tag{68}$$

которые с той же условностью, что и раньше, могут быть выражены в виде общей функциональной зависимости

$$\frac{c_p\sqrt{|1-M_\infty^2|}}{\tau}=f\left(\frac{(k+1)\,M_\infty^2\tau}{|1-M_\infty^2|^{3/2}}\right). \tag{69}$$

Поскольку число M_∞ достаточно близко к единице (поток близок к звуковому), оно может быть в числителе аргумента в правой части (69) опущено, а соотношение (69) переписано в форме

$$\frac{c_p\sqrt{|1-M_\infty^2|}}{\tau}=f\left(\frac{(k+1)\,\tau}{|1-M_\infty^2|^{3/2}}\right). \tag{70}$$

Если, кроме того, сравнение производится в потоках с одинаковыми физическими свойствами (одно и то же k), то соотношение подобия (70) еще более упрощается и приобретает форму

$$\frac{c_p\sqrt{|1-M_\infty^2|}}{\tau}=f\left(\frac{\tau}{|1-M_\infty^2|^{3/2}}\right). \tag{71}$$

В отличие от ранее рассмотренных условий подобия для до- и сверхзвуковых обтеканий тонких тел, в случае околозвукового обтекания тонкого тела имеется лишь *одно* соотношение подобия. Этот факт является следствием нелинейности уравнения (62) относительно потен-

циала $\tilde{\varphi}$: слева $\tilde{\varphi}$ входит линейно, справа — нелинейно, в виде произведения двух производных.

Соотношению (69) можно придать и другие формы. Так, например, умножая обе его части на аргумент в правой части, можно освободиться в левой части от относительной толщины τ. Сохраняя то же обозначение для функции f, будем иметь

$$\frac{(k+1)\,c_p M_\infty^2}{|1-M_\infty^2|} = f\left(\frac{(k+1)\,M_\infty^2\tau}{|1-M_\infty^2|^{3/2}}\right). \tag{72}$$

Если обозначить через χ аргумент в правой части, возведенный в степень $(-2/3)$, т. е. положить [1])

$$\chi = \frac{|1-M_\infty^2|}{[(k+1)\,\tau M_\infty^2]^{2/3}}, \tag{73}$$

то соотношение (72) можно после умножения обеих его частей на χ переписать в виде

$$\frac{c_p[(k+1)\,M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{2/3}} = f\left(\frac{|1-M_\infty^2|}{[(k+1)\,\tau M_\infty^2]^{2/3}}\right) = f(\chi) \tag{74}$$

или в упрощенных формах, соответствующих равенствам (70) или (71).

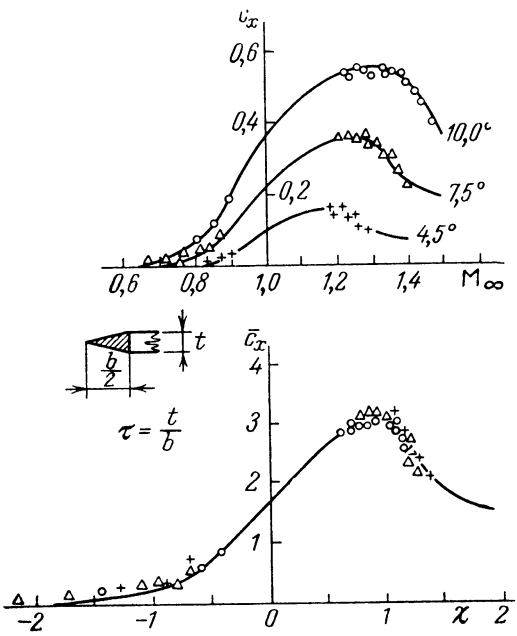


Рис. 94

Из равенства (74) следует, что, в отличие от до- и сверхзвуковых потоков, сравнивать околозвуковые потоки можно только в том случае, когда относительные толщины тонких профилей, числа Маха и показатели адиабаты этих потоков связаны условием *одинаковости параметра подобия χ в обоих потоках.*

Согласно формулам

$$c_x = -\frac{1}{b}\oint c_p dy = -\frac{1}{b}\oint c_p \frac{dy}{dx}\,dx, \quad c_y = \frac{1}{b}\oint c_p dx$$

для *околозвукового* потока будем иметь

$$c_y = \frac{\tau^{2/3}}{[(k+1)\,M_\infty^2]^{1/3}} f\left(\frac{|1-M_\infty^2|}{[(k+1)\,\tau M_\infty^2]^{2/3}}\right),$$
$$c_x = \frac{\tau^{5/3}}{[(k+1)\,M_\infty^2]^{1/3}} f_1\left(\frac{|1-M_\infty^2|}{[(k+1)\,\tau M_\infty^2]^{2/3}}\right). \tag{75}$$

Убедительной иллюстрацией закона подобия околозвукового обтекания тонких тел могут служить кривые [2]), показанные на рис. 94 и

[1]) Липман Г. В., Рошко А. Элементы газовой динамики.— М.: ИЛ, 1960, с. 307.

[2]) Спрейтер Дж. Аэродинамика крыльев и тел при околозвуковых скоростях.— Сборник переводов «Механика», 1960, № 3.

относящиеся к продольному обтеканию тонких клиньев с половинами углов раствора, равными 4,5°; 7,5° и 10°. На верхней половине рисунка показаны три экспериментальные кривые зависимости коэффициента сопротивления c_x от числа M_∞ в околозвуковой области, найденные для указанных трех углов раствора. На нижней половине того же рисунка те же кривые нанесены в параметрах подобия ($\tau = t/b$)

$$\bar{c}_x = \frac{c_x [(k+1)\,M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{5/3}}, \quad \chi = \frac{|M_\infty^2 - 1|}{[(k+1)\,M_\infty^2 \tau]^{2/3}}$$

Совершенно отчетливо обнаруживается факт объединения трех кривых верхней половины рисунка в одну общую кривую на нижней его части, что и подтверждает правильность выведенного закона подобия околозвукового обтекания тонких тел.

§ 62. Сужающийся сверхзвуковой поток. Косой скачок уплотнения

Переходя к рассмотрению *нелинеаризованных* сверхзвуковых течений, соответствующих общему случаю конечных возмущений потока телами, или течений сквозь сопла, остановимся сначала на двух основных явлениях: *торможения*, происходящего в условиях *сужения сверхзвукового потока*, и наоборот, *ускорения течения* при его *расширении*.

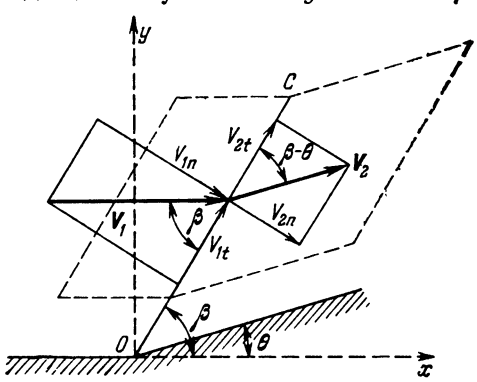


Рис. 95

Начнем с явления торможения сверхзвукового потока, возникающего, например, при набегании на помещенное в него твердое тело. Простейшим случаем, допускающим элементарное рассмотрение, может служить симметричное *сверхзвуковое обтекание бесконечного клина с углом при вершине* 2θ, имеющим некоторую *конечную величину*. По известному свойству идеальных потоков можно заменить нулевую линию тока набегающего на клин потока, направленную в вершину клина O (рис. 95), твердой стенкой и рассмотреть только верхнюю часть потока, которая будет представлять плоское течение внутри тупого угла, равного $\pi - \theta$.

Для выяснения общего характера потока обратим движение и рассмотрим течение, вызываемое в неподвижном газе движущимся со сверхзвуковой скоростью вдоль своей линии симметрии бесконечным клином. Такое течение можно уподобить рассмотренному в § 38 течению, вызываемому в газе толкающим его поршнем.

При движении клина его щеки также играют роль поршней, толкающих находящийся перед ними газ и вызывающих в нем образование волн уплотнения. Эти волны, догоняя друг друга, образуют фронт разрыва параметров движущегося газа, который, в отличие от рассмотренного в § 38 случая ударной волны, параллельной плоскости поршня и перпендикулярной к направлению его движения, будет как-то *наклонен* к направлению движения клина (линии его симметрии).

Выясним, в каких условиях возможно образование исходящей из вершины клина O (рис. 95) плоской головной ударной волны OC, иначе именуемой *косым скачком уплотнения*.

С этой целью аналогично тому, как это делалось в § 38 при расчете прямого скачка уплотнения, применим к произвольной трубке тока, пересекающей косой скачок, три основных закона сохранения: массы, полного импульса и полной энтальпии.

Условимся обозначать в дальнейшем индексом 1 величины до скачка, индексом 2 — после скачка; кроме того, применим индекс t для обозначения составляющей скорости в плоскости скачка OC и индекс n — для нормальной составляющей скорости.

Выбирая контрольную поверхность так, как показано на рис. 95, будем иметь:

а) закон сохранения массы

$$\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n};$$

б) закон сохранения полного импульса в проекции на линию разрыва

$$\rho_1 V_{1n} V_{1t} = \rho_2 V_{2n} V_{2t};$$

в) то же в проекции на нормаль к линии разрыва

$$p_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 V_{2n}^2;$$

г) закон сохранения полной энтальпии

$$h_1 + \frac{1}{2}(V_{1t}^2 + V_{1n}^2) = h_2 + \frac{1}{2}(V_{2t}^2 + V_{2n}^2).$$

Из уравнений пп. а) и б) сразу вытекает основное для теории косого скачка равенство

$$V_{1t} = V_{2t} = V_t,$$

утверждающее, что *при прохождении газа сквозь косой скачок уплотнения касательная составляющая скорости сохраняется*; скачкообразно изменяется лишь нормальная составляющая.

Переписывая, с учетом этого свойства косого скачка, уравнение полной энтальпии (п. г)) в виде

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{1n}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{2n}^2$$

и сравнивая его, а также равенства пп. а) и в) с соответствующими уравнениями (39), (40) и (41) теории прямого скачка (§ 38), убедимся, что три основных равенства, служащих для расчета элементов *косого* скачка

$$\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n}, \quad p_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 V_{2n}^2, \quad h_1 + \frac{1}{2} V_{1n}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{2n}^2,$$

полностью совпадают с соответствующими уравнениями теории *прямого* скачка, если только под скоростью до и после скачка подразумевать нормальную ее составляющую. Это освобождает нас от повторения выводов § 38.

Отсюда следует, что соотношение между давлением и плотностью, получаемое из предыдущих равенств путем исключения скорости, т. е. ударная адиабата Гюгонио, выражаемая равенством (43) гл. VI и графиком на рис. 36, должна в случае *косого* скачка *остаться той же*, что и в случае *прямого* скачка.

Точно так же останутся теми же, что и в случае прямого скачка, основанные на законе сохранения полной энтальпии h_0 равенства

$$h_{10} = h_{20} = h_0, \quad T_{10} = T_{20} = T_0, \quad a_{10} = a_{20} = a_0,$$

а следовательно, и

$$T_1^* = T_2^* = T^*, \quad a_1^* = a_2^* = a^*.$$

Таким образом, при прохождении газа сквозь косой скачок уплотнения сохраняются неизменными: энтальпия, температура и скорость звука в адиабатически и изэнтропически заторможенном газе, а также критическое значение температуры газа и критическая и максимальная его скорости.

Наряду с уравнением ударной адиабаты Гюгонио [(43), гл. VI] в теории скачка сохраняется для нормальных скоростей и формула Прандтля [(49), гл. VI], но с измененной правой частью. Нет необходимости полностью повторять вывод этой формулы. Разница в выводах заключена в том, что в теории косого скачка уравнение Бернулли, написанное в форме [второе равенство в системе (77) гл. V]

$$\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2},$$

заменой $V^2=V_t^2+V_n^2$ может быть переписано в виде

$$\frac{V_n^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}-\frac{V_t^2}{2}=\frac{k+1}{2(k-1)}\bar{a}^{*2},$$

где появившаяся справа «приведенная» критическая скорость $\bar{a}^*$, равная

$$\bar{a}^*=\sqrt{a^{*2}-\frac{k-1}{k+1}V_t^2},$$

будет по условиям сохранения a^* и V_t также сохраняться при прохождении газа сквозь косой скачок. Повторяя вывод, изложенный в теории прямого скачка (§ 38), но используя уравнение Бернулли, только что составленное для нормальной скорости V_n и заключающее в правой части «приведенную» критическую скорость $\bar{a}^*$, получим следующие два вида формулы Прандтля для косого скачка:

$$V_{1n}V_{2n}=\bar{a}^{*2},\quad \bar{\lambda}_{1n}\bar{\lambda}_{2n}=1, \tag{76}$$

где под $\bar{\lambda}_n$ подразумевается отношение $V_n/\bar{a}^*$.

Обращаясь к скоростным треугольникам, показанным на рис. 95, сделаем заключение о справедливости следующей системы равенств (θ – угол отклонения потока скачком, β – угол, образованный линией скачка OC с направлением набегающего потока):

$$\begin{gathered}V_{1n}=V_1\sin\beta,\quad V_{2n}=V_2\sin(\beta-\theta),\\ V_{1t}=V_1\cos\beta=V_{2t}=V_2\cos(\beta-\theta)=V_t.\end{gathered} \tag{77}$$

Пользуясь принятыми ранее обозначениями для проекций скорости на оси прямоугольной декартовой системы координат Oxy

$$V_{1x}=V_1,\quad V_{1y}=0,\quad V_{2x}=V_2\cos\theta=u_2,\quad V_{2y}=V_2\sin\theta=v_2,$$

можем переписать систему (77) еще так:

$$\begin{gathered}V_{1n}=V_1\sin\beta,\quad V_{2n}=u_2\sin\beta-v_2\cos\beta,\\ V_t=V_1\cos\beta=u_2\cos\beta+v_2\sin\beta.\end{gathered} \tag{78}$$

Из последнего равенства системы (78) легко выводятся выражения тригонометрических функций угла β скачка через декартовы проекции скоростей до и за скачком

$$\sin\beta=\frac{V_1-u_2}{N},\quad \cos\beta=\frac{v_2}{N},\quad N=\sqrt{(V_1-u_2)^2+v_2^2}. \tag{79}$$

Эти соотношения и равенства (78) позволяют найти выражения касательных и нормальных компонент скорости через ее декартовы

проекции

$$V_t = \frac{V_1 v_2}{N}, \quad V_{1n} = \frac{1}{N} V_1 (V_1 - u_2), \quad V_{2n} = \frac{1}{N} [u_2 (V_1 - u_2) - v_2^2];$$

подставляя их в первое из равенств (76), получим после простых приведений

$$v_2^2 = \frac{(V_1 - u_2)^2 (V_1 u_2 - a^{*2})}{a^{*2} + \frac{2}{k+1} V_1^2 - V_1 u_2}. \tag{80}$$

Деля обе части этого равенства на a^{*2} или на a_1^2, перепишем его в следующих двух формах:

$$\left(\frac{v_2}{a^*}\right)^2 = \frac{\left(\lambda_1 - \frac{u_2}{a^*}\right)^2 \left(\lambda_1 \frac{u_2}{a^*} - 1\right)}{1 + \frac{2}{k+1}\lambda_1^2 - \lambda_1 \frac{u_2}{a^*}}, \quad \left(\frac{v_2}{a_1}\right)^2 = \frac{\left(M_1 - \frac{u_2}{a_1}\right)^2 \left[M_1 \frac{u_2}{a_1} - \left(\frac{a^*}{a_1}\right)^2\right]}{\left(\frac{a^*}{a_1}\right)^2 + \frac{2}{k+1} M_1^2 - M_1 \frac{u_2}{a_1}} \tag{81}$$

представляющих собой уравнения семейства кривых соответственно в плоскостях $(u_2/a^*, v_2/a^*)$ или $(u_2/a_1, v_2/a_1)$ с параметрами λ_1 или M_1. В последней формуле (81) предполагается, что входящая в правую часть величина a^*/a_1 по известной изэнтропической формуле выражена через M_1. Полученные семейства представляют собой геометрические места точек концов вектора скорости V_2 за косым скачком, отнесенного в первом случае к a^* и во втором — к a_1, причем в качестве параметров семейств используется величина скорости V_1 до скачка, отнесенная к a^* или a_1.

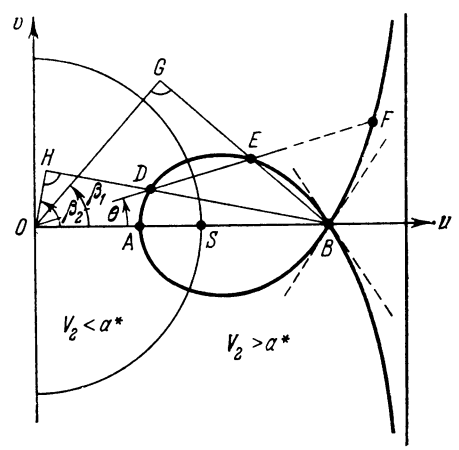


Рис. 96

Кривые семейств (81) представляют собой строфоиды (их еще называют гипоциссоидами или декартовыми листами), графическое построение которых не составляет труда.

На рис. 96 в *размерных* координатах (u, v) показана одна из таких строфоид. Луч OF, проведенный из начала координат под углом θ, равным повороту потока или, например, углу полураствора клина, пересекает строфоиду в трех точках: D, E и F и таким образом определяет *три* значения вектора скорости V_2 за скачком уплотнения.

Как видно из уравнения (80), *двойной* точке B (через нее проходят две касательные, показанные штрихами) соответствует значение $u = V_1$ скорости до скачка.

Поскольку $OF > OB$, а речь идет о торможении потока за скачком, точка F и вообще обе бесконечные ветви строфоиды, расположенные вправо от точки B и уходящие к асимптоте, являются *нерабочими* и *могут быть опущены.*

Физический смысл имеют только *два* значения вектора скорости V_2 за скачком: OD и OE. Как непосредственно следует из формул (77), отрезки OG и OH выражают при этом два возможных значения общей касательной составляющей скоростей V_1 и V_2, а (BG, EG) и (BH, DH) — нормальные составляющие этих скоростей для двух возможных на-

правлений скачка уплотнения, соответствующих двум значениям β_1 и β_2 угла β.

По условию набегающий поток является сверхзвуковым, следовательно, $V_1=OB>a^*$. С другой стороны, из уравнения (80) легко заключить, что точка A пересечения строфоиды с осью Ou будет иметь абсциссу $OA=a^{*2}/V_1=a^*/\lambda_1<a^*$, так как $\lambda_1>1$. Отсюда следует, что точка S на оси Ou, соответствующая критической скорости $OS=a^*$, должна располагаться между точками A и B, причем так, чтобы выполнялось условие *инверсии* $OA\cdot OB=OS^2$. Окружность радиуса $OS=a^*$ разграничивает области до- и сверхзвуковых течений. Скорости за скачком

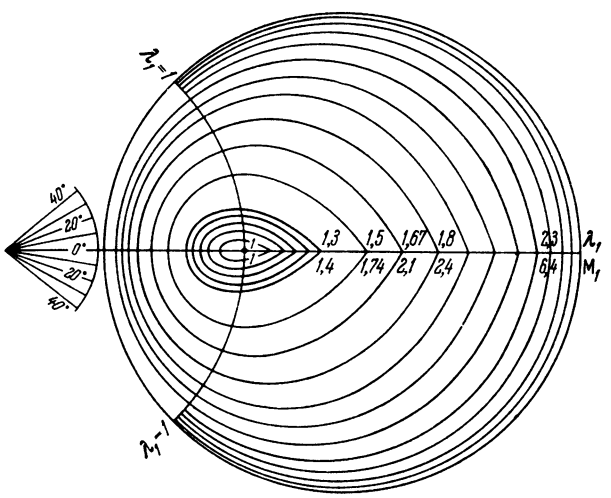


Рис. 97

могут быть как до-, так и сверхзвуковыми. Подробнее этот вопрос будет разобран далее.

Заметим еще, что в каждом данном случае, т. е. при задании чисел λ_1 или M_1, существует такое значение $\theta=\theta_{max}$, при котором точки D и E сольются в одну и, следовательно, этим значениям θ, λ_1 или M_1 будет отвечать лишь одно значение угла β и лишь одно расположение косого скачка. Если при данных λ_1 или M_1 угол поворота потока задать бо́льшим θ_{max}, то решение станет невозможным. Это означает, что рассмотренная схема (рис. 95) прямолинейного скачка OC, исходящего из вершины угла (вершины клина), не может быть в этом случае осуществлена, а должна быть заменена другой схемой, а именно «отошедшей» от вершины O головной ударной волны; об этом будет сказано далее.

На рис. 97 приведена диаграмма семейства ударных поляр — строфоид, построенная для значения $k=1{,}4$ по первому уравнению (81). Бесконечные ветви, как нерабочие, опущены. Каждой строфоиде соответствуют свои значения параметров λ_1 или M_1, указанные в двойной точке кривой (λ_1 — сверху, M_1 — снизу).

Перейдем к более детальному, аналитическому рассмотрению явления прохождения газа сквозь косой скачок уплотнения. Прежде всего воспользуемся указанным в начале параграфа приемом получения формул косого скачка из соответствующих формул прямого скачка путем замены V_1 и V_2 на $V_{1n}=V_1\sin\beta$, $V_{2n}=V_2\sin(\beta-\theta)$, а следовательно, M_1 и M_2 на $M_{1n}=M_1\sin\beta$ и $M_{2n}=M_2\sin(\beta-\theta)$.

Наличие этого простого правила позволяет без труда составить отношения давлений, плотностей и давлений торможения после и до косого скачка и облегчает их запоминание.

Так, вместо формул (53) и (55) гл. VI будем в случае косого скачка иметь следующие выражения для отношений давлений и плотностей до- и за скачком:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2\beta - \frac{k-1}{k+1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{2} M_1^2 \sin^2\beta}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2\beta}. \tag{82}$$

Аналогичным путем преобразуется характеризующее потери механической энергии газа при прохождении его через косой скачок отношение давлений адиабатически и изэнтропически заторможенного газа за скачком p_{20} и до скачка p_{10} (§ 39). Формула (59) гл. VI в случае косого скачка переходит в такую:

$$\varkappa = \frac{p_{20}}{p_{10}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{(M_1 \sin\beta)^{\frac{2k}{k-1}}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2\beta\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(k M_1^2 \sin^2\beta - \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \tag{83}$$

Как и в теории прямого скачка, будем иметь следующие асимптотические выражения для этого отношения:

а) при $M_1 \sin\beta \gg 1$ ($\sim$ — символ асимптотического равенства)

$$\varkappa = \frac{p_{20}}{p_{10}} \sim \left[\frac{(k+1)^{k+1}}{2k(k-1)^k}\right]^{\frac{1}{k-1}} (M_1 \sin\beta)^{-\frac{2}{k-1}} \tag{84}$$

и для изменения энтропии

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = -\ln\frac{p_{20}}{p_{10}} \sim \frac{2}{k-1} \ln(M_1 \sin\beta). \tag{85}$$

Заметим, что правая часть в этой формуле всегда положительна, так как ($\beta > \alpha$)

$$M_1 \sin\beta = \frac{\sin\beta}{1/M_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} > 1.$$

Согласно асимптотической формуле (84) в потоке воздуха ($k=1{,}4$) при $M_1 \sin\beta \gg 1$ величина $\varkappa$ обратно пропорциональна *пятой* степени произведения $M_1 \sin\beta$;

б) при числах $M_1 \sin\beta$, близких к единице,

$$\varkappa = \frac{p_{20}}{p_{10}} \approx 1 - \frac{2k}{3(k+1)^2}[(M_1 \sin\beta)^2 - 1]^3,$$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{2k}{3(k+1)^2}[(M_1 \sin\beta)^2 - 1]^3. \tag{86}$$

Как только что указывалось, выражение в квадратной скобке всегда положительно. Формулы (86) представляют собой обобщение на случай косого скачка формул (61) и (64) гл. VI.

Определим связь между углами β и θ при заданном значении числа M_1 набегающего потока.

С этой целью, по-видимому, проще всего воспользоваться основным соотношением (76), которое, если принять во внимание соотношения

(77), может быть переписано в форме

$$V_{1n}V_{2n} = V_1 \sin\beta \cdot V_2 \sin(\beta - \theta) = V_1^2 \sin\beta \cos\beta \operatorname{tg}(\beta - \theta) = \bar{a}^{*2} = a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} V_1^2 \cos^2\beta;$$

отсюда непосредственно получается зависимость между углами β, θ и скоростным коэффициентом λ_1

$$\left[\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}(\beta - \theta) + \frac{k-1}{k+1}\right] \cos^2\beta = \frac{1}{\lambda_1^2}. \tag{87}$$

Заменяя здесь λ_1 через число Маха M_1 по формуле (78) гл. V, получим

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{(k+1) M_1^2 \sin^2\beta} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2\beta}{\frac{k+1}{2} M_1^2 \sin^2\beta}. \tag{88}$$

Это равенство может быть разрешено относительно $\operatorname{tg}\theta$ и дает

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin^2\beta - \frac{1}{M_1^2}}{\frac{k+1}{2} - \sin^2\beta + \frac{1}{M_1^2}} \operatorname{ctg}\beta. \tag{89}$$

На рис. 98 приведен график зависимости θ от β в виде семейства кривых с параметром M_1. Как уже ранее было отмечено, каждому заданному значению $\theta < \theta_{max}$ соответствуют *два* значения β. Если обозначить через β_m значение β, отвечающее максимуму θ при данном M_1, то по кривым рис. 98 можно заключить, что одно из полученных значений β будет лежать в интервале (α, β_m), где α — угол Маха при заданном M_1, другое — в интервале $(\beta_m, \pi/2)$. Для определения первого значения β следует пользоваться сплошными кривыми, для определения второго — штриховыми. Сплошные кривые отделены от штриховых линией, проведенной через точки максимальных значений $\theta = \theta_{max}$.

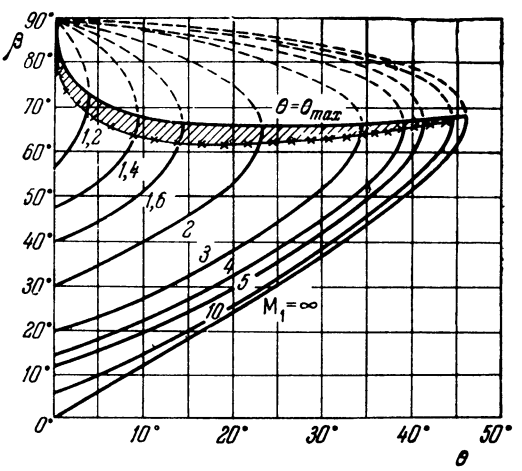


Рис. 98

Эта *двузначность* в определении β по заданному значению θ соответствует сущности явления прохождения газа сквозь косой скачок уплотнения. Так же, как в теории сопла Лаваля, выбор режима течения за косым скачком зависит от давления за скачком. Как это следует из первой формулы системы (82), бóльшему β отвечает и бóльшее значение отношения p_2/p_1 давлений за скачком и перед скачком, а меньшему β — соответственно меньшее отношение этих давлений.

Припоминая, что рассматриваемое отношение давлений служит мерой интенсивности (мощности) скачка, будем называть косые скачки, определяемые верхней областью диаграммы (рис. 98) по значени-

ям $\pi/2>\beta>\beta_m$, заданным штриховыми кривыми, *сильными*, а скачки, соответствующие диапазону углов $\alpha<\beta<\beta_m$, рассчитываемые по нижним сплошным кривым,— *слабыми*. Фронт сильного скачка служит поверхностью (в плоском движении — линией) сильного изменения кинематических, динамических и термодинамических характеристик потока газа, фронт слабого скачка — поверхностью (линией) слабого изменения этих величин. Оба типа изменений наблюдаются, например, в «отсоединенных» волнах (рис. 99).

Выясним условия, при которых поток за косым скачком уплотнения будет до- или сверхзвуковым. Найдем связь между числами Маха M_1 и M_2 до и за скачком. Для этого воспользуемся формулой (51) гл. VI для прямого скачка и, следуя общему уже неоднократно примененному приему, произведем в этой формуле замену M_1 на $M_1\sin\beta$, а M_2 на $M_2\sin(\beta-\theta)$. Тогда получим искомую формулу связи

$$M_2^2\sin^2(\beta-\theta)=\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2\sin^2\beta}{kM_1^2\sin^2\beta-\frac{k-1}{2}}. \qquad (90)$$

Пользуясь этим выражением и соотношением (89), можно выразить число Маха за скачком M_2 через число Маха до скачка M_1 и угол β. При этом при одном и том же M_1 двум различным значениям β, соответствующим *сильному* и *слабому* скачкам, будут отвечать два отличных друг от друга значения M_2, причем сильный скачок, подобно прямому скачку, переводит сверхзвуковой поток в дозвуковой, а слабый скачок почти всегда сохраняет поток сверхзвуковым. Исключением является незначительная по размерам область диаграммы на рис. 98, граничащая с $\theta=\theta_{max}$. Кривой с крестиками на диаграмме отмечено геометрическое место точек, в которых $M_2=1$. Выше этой кривой $M_2<1$, ниже $M_2>1$.

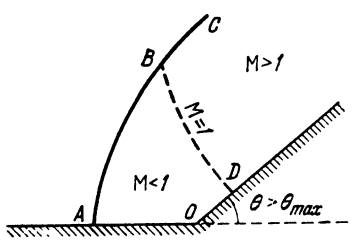


Рис. 99

Из диаграммы следует, что при θ, близких к θ_{max}, и любых M_1 оба значения β могут соответствовать переходу от сверхзвуковой скорости к дозвуковой, т. е. в этой области значений θ как сильный, так и слабый косые скачки ведут себя как прямые, переводя сверхзвуковой поток в дозвуковой. Следует, однако, заметить, что в этом случае направление сильного скачка отличается от направления слабого скачка менее чем на 10°, так что и разница в интенсивности скачков становится малозаметной.

Пользование расчетными формулами затруднено, так как они достаточно громоздки. Существуют подробные таблицы для воздуха ($k=1{,}41$), связывающие величины M_1, β, θ, M_2, p_2/p_1, ρ_2/ρ_1 и приращение энтропии $\Delta s=s_2-s_1$ [1]), но они при интервале чисел M_1 от 1,05 до 4,00 через 0,05 и сравнительно грубом делении углов θ и соответствующих им β занимают 27 страниц только что цитированной книги.

В связи с этим можно рекомендовать при не требующих большой точности расчетах пользоваться составленной также для воздуха ($k=1{,}41$) несложной номограммой [2]) на с. 244 и 245. В отличие от диаг-

[1]) Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений: Пер. с англ.— М.: Гостехиздат, 1953, табл. 5, с. 431—458.

[2]) Липман Г. В., Пакет А. Е. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости.— М.: ИЛ, 1949.

раммы на рис. 98 в основу этой номограммы положено семейство кривых $\beta(M_1; \theta)$ с параметром θ. Эти кривые показаны на номограмме сплошными *куполообразными* кривыми (если смотреть вдоль оси M_1), представляющими *двузначную* связь β и M_1. Заметим, что семейство кривых $\beta(M_1; \theta)$ построено по уравнению (89) при нескольких значениях θ, рассматриваемого как параметр, и это семейство не следует смешивать с семейством кривых на рис. 98, где аргументом является θ, а M_1 — параметром.

Пользование номограммой заключается в следующем. По требуемому значению θ, находящемуся на вертикальной шкале справа, выделяем ту кривую семейства $\beta(M_1; \theta)$, которая отвечает выбранному значению θ. После этого, задаваясь входящим в число известных величин числом M_1, находим два соответствующих ему значения β. Через каждую из этих двух точек пересечения выбранной кривой $\beta(M_1)$ с вертикалью $M_1=\text{const}$ проходят по две кривые: одна (сплошная) выводит на правую крайнюю вертикальную шкалу чисел M_2, вторая (штриховая) — на верхнюю горизонтальную шкалу мощности скачка p_2/p_1. Бóльшему значению β соответствует бóльшая мощность скачка, меньшему — меньшее значение мощности p_2/p_1.

В нижнем левом углу номограммы приведен ключ к номограмме. Вход показан стрелками, направленными от шкал θ и M_1 к точке пересечения кривых, выход — стрелками, направленными от этой точки к шкалам β, p_2/p_1 и M_2, на которых можно прочесть ответы. Ключ указан для одного значения β; он остается тем же и для второго значения β.

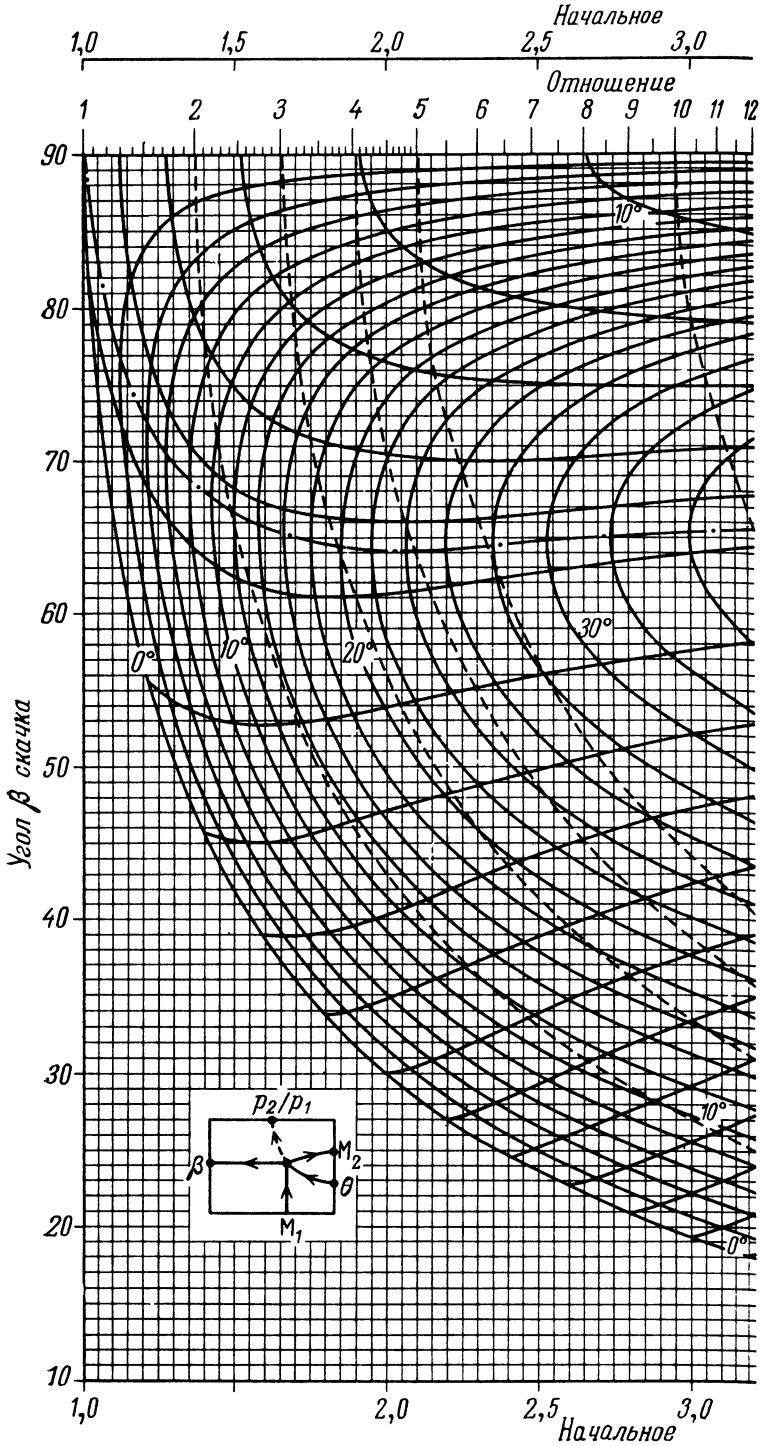
Изложенное справедливо только до тех пор, пока угол поворота потока (угол полураствора клина) θ не превосходит максимально допустимого при данном M_1 значения θ_{max}. В интервале $1 \leqslant M_1 \leqslant 4$ величина θ_{max} меняется от 0 до 38°47′. При $M_1 \to \infty$ $\theta_{max} \to 45°22'$. Как это непосредственно видно из диаграммы на рис. 98, при $\theta=\theta_{max}$ поток за скачком всегда дозвуковой (линия $\theta=\theta_{max}$ лежит выше показанной крестиками линии $M_2=1$).

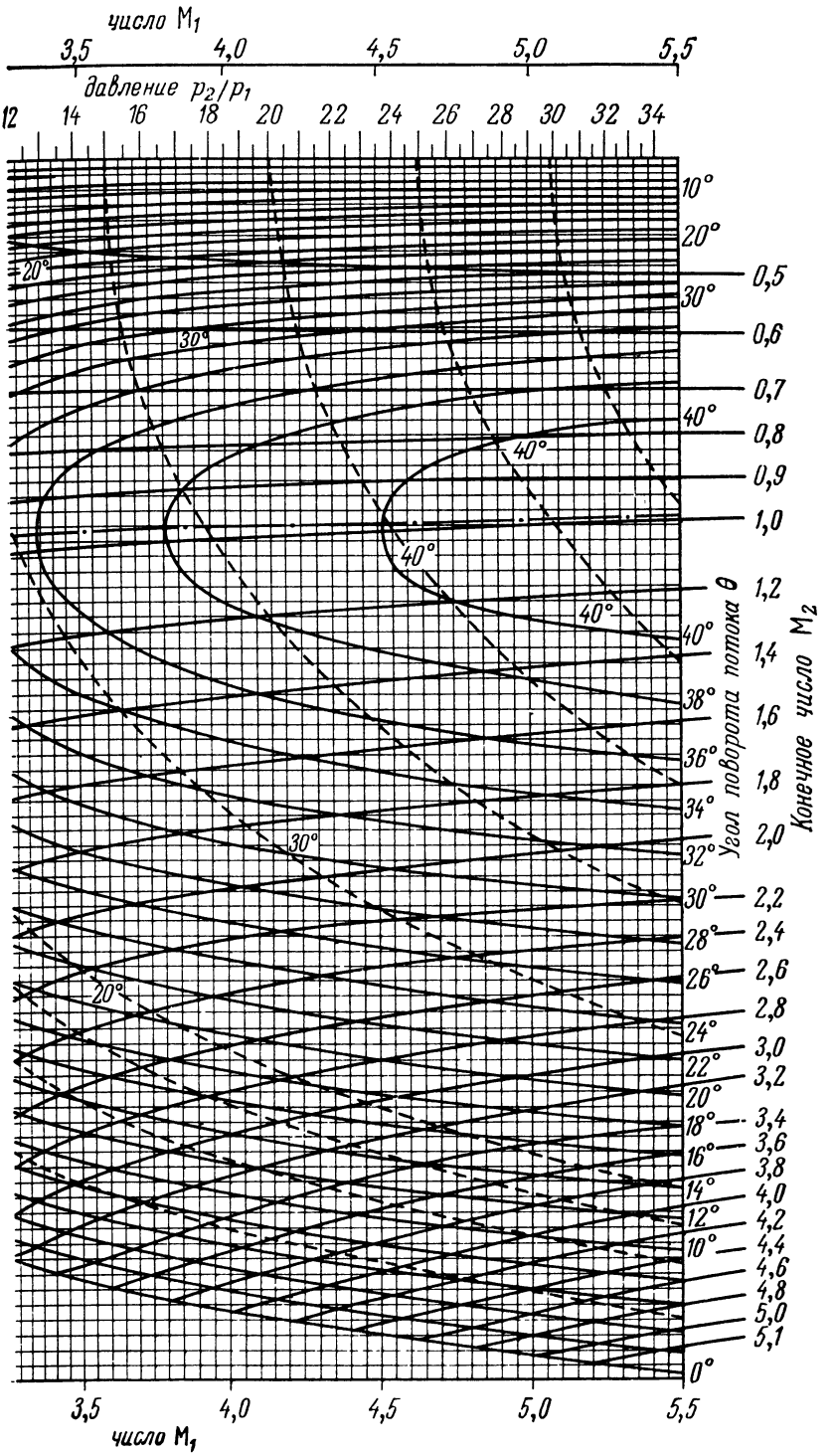
Если $\theta > \theta_{max}$, то, как уже ранее указывалось, наличие прямолинейного *присоединенного* к вершине угла (клина) O косого скачка уплотнения невозможно. Вверх по течению перед точкой O возникает криволинейная «головная» ударная волна или *отсоединенный скачок уплотнения* AC (рис. 99).

В непосредственной близости к точке A отсоединенный скачок AC ведет себя как прямой, а при удалении от точки A — сначала как *сильный* косой скачок, а затем с уменьшением местного угла β постепенно «ослабевает» и переходит в прямолинейный косой скачок. При этом вниз по потоку за отсоединенным скачком имеет место как до-, так и сверхзвуковое течение газа. За участком AB скачка образуется дозвуковая зона течения газа, за участком BC — сверхзвуковая зона. Эти две характерные зоны потока за скачком разделяются линией BD, вдоль которой скорость газа равна местной *скорости звука*. Течение за отсоединенной криволинейной волной является «смешанным», *трансзвуковым*. Аналитические методы исследования таких потоков представляют до сих пор большие математические трудности, преодолеваемые только при помощи электронных вычислительных машин [1]).

В отличие от прямолинейного присоединенного скачка поток за отсоединенным криволинейным скачком будет вихревым, а поле энтропии станет неоднородным. Действительно, по определению, данному

[1]) Обтекание затупленных тел потоком реального газа/Под ред. О. М. Белоцерковского.— М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1966; Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред.— М.: Наука, 1980.


Начальное
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
Отношение
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
90
80
70
60
50
40
30
20
10
Угол β скачка
0°
10°
20°
30°
10°
0°
p2/p1
M2
M1
β
θ
1,0
2,0
2,5
3,0
Начальное


число M_1
3,5
4,0
4,5
5,0
5,5
давление p_2/p_1
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
10°
20°
30°
40°
20°
30°
40°
40°
40°
30°
20°
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
2,8
3,0
3,2
3,4
3,6
3,8
4,0
4,2
4,4
4,6
4,8
5,0
5,1
40°
38°
36°
34°
32°
30°
28°
26°
24°
22°
20°
18°
16°
14°
12°
10°
0°
Угол поворота потока θ
Конечное число M_2
3,5
4,0
4,5
5,0
5,5
число M_1

еще в (62) гл. VI, изменение энтропии при прохождении газа сквозь скачок определяется равенством (R — газовая постоянная)

$$s_2 - s_1 = -R \ln (p_{20}/p_{10});$$

согласно (83) изменение энтропии будет зависеть от местного значения β, которое меняется вдоль криволинейной волны AC.

Наличие в головной отсоединенной волне участков сильных волн (включая центральный участок, близкий к прямому скачку) естественно вызывает мысль о необходимости создания такого «волнолома», который разрушал бы отошедшую волну и заменял ее системой косых скачков, сопровождающихся, как мы уже знаем, меньшими потерями механической энергии.

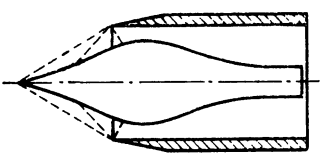


Рис. 100

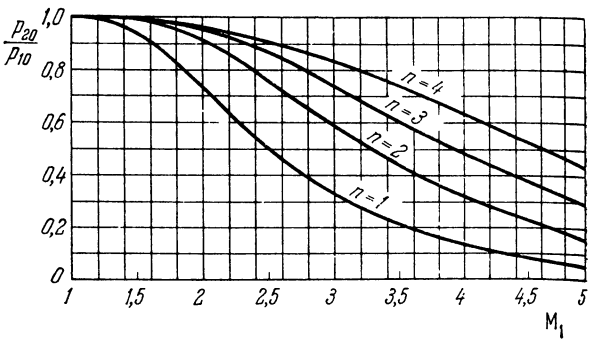


Рис. 101

С этой целью тупой носок тела, или превосходящий допустимый угол раствора клина или конуса, заменяют заостренной, постепенно расширяющейся «иглой», на поверхности которой в сверхзвуковом потоке образуются *слабые* скачки со сравнительно малыми углами β. Как это видно из ранее выведенной формулы (83), потери механической энергии благодаря наличию у числа Маха M_1 множителя $\sin\beta$ при этом будут снижаться.

На рис. 100 показан вход в камеру реактивного двигателя с «иглой», разбивающей головную волну на косые конические (см. далее § 82) скачки. Напомним, что той же цели служил сверхзвуковой диффузор, теория которого была изложена в § 41.

Такого рода «игла», имеющая целью уменьшить входные потери механической энергии, носит наименование *иглы Осватича* по имени немецкого ученого, впервые в 1944 г. опубликовавшего [1]) подробное исследование зависимости отношения полных давлений в набегающем потоке и на входе в камеру реактивного двигателя после прохождения потоком системы косых скачков (на рис. 100 их два), замыкаемой прямым скачком. Им было найдено также возможное оптимальное значение этого отношения при заданном числе n скачков: $n-1$ косых и одного прямого.

На рис. 101 приведены кривые зависимости этого оптимального отношения от числа M набегающего потока для $n=1, 2, 3, 4$. Нижняя кривая ($n=1$) соответствует расположению на входе обычной ударной волны. График на рис. 101 показывает, что применение «иглы» позво-

[1]) Теория К. Осватича подробно изложена в книге: Герман Р. Сверхзвуковые входные диффузоры.— М.: Физматгиз, 1960, с. 161—180. См., также Петров Г. И., Ухов Е. П. Расчет восстановления давления при переходе от сверхзвукового потока к дозвуковому при различных системах плоских скачков уплотнения.— М., 1947 (цитируем по книге Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика.— М.: Наука, 1976, с. 457).

ляет и при больших числах Маха улучшить восстановление полного давления, в то время как сверхзвуковой диффузор, описанный в § 41, дает реальные результаты лишь при числах Маха полета, не превышающих 1,6—1,8. Сводку практических данных по воздухозаборникам на скоростных самолетах можно найти в руководствах по прикладной аэродинамике [1]).

§ 63. Расширяющийся сверхзвуковой поток. Движение газа в секторе разрежения

Рассмотрим принципиально отличающуюся от предыдущей задачу Прандтля — Майера [2]) о повороте сверхзвукового потока вокруг кромки *выпуклого* угла O (рис. 102). Как далее станет ясным, нисколько не нарушая общности, можно предполагать, что начальный поток слева от прямой OC_0 (OC_0 перпендикулярна к первоначальному потоку) является звуковым ($\lambda_0=M_0=1$). Потоку после полного поворота на угол $\bar{\theta}$ соответствует однородное течение справа от прямой $O\bar{C}$ с безразмерной скоростью $\bar{\lambda}$ и числом $\bar{M}$, бо́льшими единицы, так как поток расширяется (будем предполагать, что давление $\bar{p}$ на линии $O\bar{C}$ удовлетворяет условию перехода к сверхзвуковому течению). Поворот на конечный угол $\bar{\theta}$ можно рассматривать как результат совокупности последовательных малых поворотов в области C_0OC', а затем в области $C'OC''$ и т. д. Нелинеаризованная задача расчленяется, таким образом, на ряд линеаризованных. Отсюда сразу следует, что лучи OC_0, OC', OC'', ... являются *линиями возмущения* и вместе с тем *характеристиками*. Вдоль них возмущения потока постоянны; переходя вниз по потоку от одной линии возмущения к следующей, бесконечно близкой, заполним линиями возмущения весь сектор $C_0O\bar{C}$, называемый *сектором разрежения*.

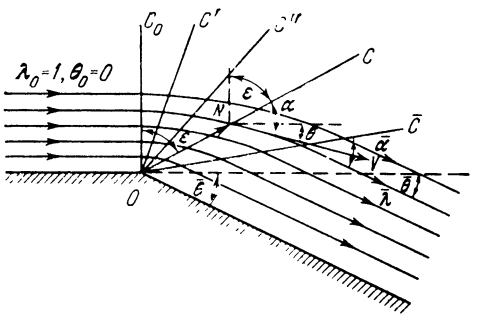


Рис. 102

В теории линеаризованных сверхзвуковых потоков была получена формула

$$\frac{\tilde{u}}{U_\infty}=\frac{\mp\theta_{1,2}}{\sqrt{M_\infty^2-1}}, \tag{91}$$

выражающая величину малого приращения скорости газа $\tilde{u}$ при повороте потока на малый угол θ. Применяя здесь эту формулу к любому текущему элементарному сектору разрежения (поток в целом не линеаризуется) и считая $d\theta>0$, перепишем ее в виде

$$\frac{dV}{V}=\frac{d\theta}{\sqrt{M^2-1}}. \tag{92}$$

[1]) Мартынов А. К. Прикладная аэродинамика.— М.: Машиностроение, 1972, гл. XII, с. 388—405.

[2]) Prandtl L. Neue Untersuchungen über die strömende Bewegung der Gase und Dämpfe Vorträge und Diskussionen von der 78 Naturforschersammlung zu Stuttgart.— Phys Zeitschr, 1907, Bd 8, S 23; Meyer Th Uber zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt.—Forschungsheft des VDI, 1908, Bd. 62.

Входящие сюда величины V, θ и M представляют *текущие значения* этих величин для некоторой промежуточной линии OC сектора разрежения.

Чтобы проинтегрировать уравнение (92), перейдем от числа M к скоростному коэффициенту λ. Тогда по известной формуле перехода (80) гл. V будем иметь (в рассматриваемом движении $d\lambda>0$; θ, $d\theta>0$ при отсчете по часовой стрелке)

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{d\theta}{\sqrt{\dfrac{\lambda^2-1}{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}}}. \tag{93}$$

Переменные разделяются, и интегрирование дает

$$\theta=\theta(\lambda)=$$
$$=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\right)-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}}, \tag{94}$$

причем здесь использовано ранее поставленное начальное условие $\theta=0$ при $\lambda=1$.

По определению линии возмущения угол возмущения α, образованный ею с направлением потока в данной точке, равен

$$\alpha=\arcsin\frac{1}{M}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{M^2-1}}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}{\lambda^2-1}}. \tag{95}$$

Зададим положение линии возмущения OC углом ε, образованным ею с начальной линией OC_0. Тогда из рис. 102 легко заключить, что

$$\varepsilon=\frac{\pi}{2}+\theta-\alpha=\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\right)-$$
$$-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}{\lambda^2-1}}.$$

Замечая, что аргументами последних двух арктангенсов служат взаимно обратные величины и что сумма таких арктангенсов равна $\pi/2$, получим

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\right). \tag{96}$$

Совокупность формул (94)—(96) дает параметрическое решение поставленной задачи, причем роль параметра играет λ.

Пользуясь установленным выше соотношением между λ и M

$$\frac{\lambda^2-1}{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}=M^2-1,$$

заменим совокупность предыдущих формул, связывающих θ, α и ε с λ,

соответствующей группой формул связи с числом M

$$\theta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{M^2-1}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{M^2-1}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{M^2-1}\right). \tag{97}$$

К этим соотношениям можно было прийти и непосредственным интегрированием уравнения (92), переписанного в форме

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}\,dM}{M\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)},$$

легко выводимой из изэнтропической формулы (72) гл. V и очевидного равенства $V=Ma$.

Давление и плотность в секторе разрежения определим по обычным изэнтропическим формулам

$$\frac{p}{p_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-\frac{k}{k-1}} = \left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{k-1}} = \left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}; \tag{98}$$

здесь, как обычно, индекс 0 обозначает условие адиабатически и изэнтропически заторможенного газа.

Некоторая громоздкость полученных формул заставляет пользоваться таблицами и графиками, которые могут быть раз навсегда составлены для любых значений k. Приводим табл. 7, где сопоставлены характерные величины θ, α, ε, p/p_0, M, λ, а также график (рис. 103), на котором показаны кривые зависимости тех же величин, кроме ε, от угла θ для воздуха ($k=1{,}41$).

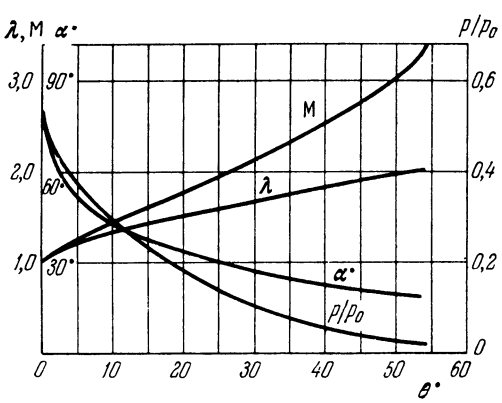


Рис. 103

Проанализируем полученные результаты. Прежде всего следует отметить, что все характеризующие поток величины не зависят от радиус-векторов r точек области течения относительно полюса O, т. е. от расстояния до вершины угла, а зависят лишь от полярного угла ε. Мы здесь вновь встречаемся с особым случаем, когда уравнение в частных производных, описывающее плоское, *двумерное* движение, сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, т. е. уравнению с *одной* независимой переменной.

Подобно случаю *центрированных* волн разрежения за поршнем (§ 44), исследование которых привело к простой *автомодельной* задаче в плоскости (x, t), в случае плоского движения в секторе разрежения также имеем автомодельную задачу, но в плоскости (x, y) или (r, ε). Прямолинейные характеристики, заполняющие сектор разрежения, яв-

Таблица 7

θ°	ε°	α°	M	λ	p/p_0	θ°	ε°	α°	M	λ	p/p_0
0	0,00	90,00	1,000	1,000	0,527	28	89,02	28,98	2,062	1,657	0,116
1	23,72	67,28	1,084	1,068	0,477	29	90,58	28,42	2,098	1,673	0,110
2	30,04	61,96	1,133	1,107	0,449	30	92,12	27,88	2,135	1,688	0,104
3	34,82	58,18	1,178	1,141	0,424	31	93,66	27,34	2,174	1,704	0,097
4	38,88	55,12	1,220	1,173	0,401	32	95.18	26,82	2,214	1,720	0,092
5	42,34	52,66	1,258	1,201	0,381	33	96,68	26,32	2,251	1,735	0,086
6	45,42	50,58	1,295	1,227	0,363	34	98,20	25,80	2,296	1,752	0,080
7	48,30	48,70	1,332	1,253	0,345	35	99,67	25,33	2,339	1,767	0,075
8	50,93	47,07	1,366	1,276	0,329	36	101,13	24,87	2,378	1,781	0,071
9	53,46	45,54	1,401	1,299	0,313	37	102,58	24,42	2,422	1,795	0,066
10	55,84	44,16	1,435	1,322	0,298	38	104,02	23,98	2,466	1,810	0,062
11	58,16	42,84	1,470	1,344	0,284	39	105,46	23,54	2,508	1,824	0,058
12	60,38	41,62	1,505	1,366	0,270	40	106,88	23,12	2,550	1,837	0,054
13	62,49	40,51	1,539	1,387	0,257	41	108,30	22,70	2,595	1,851	0,051
14	64,52	39,48	1,572	1,407	0,245	42	109,71	22,29	2,640	1,864	0,047
15	66,53	38,47	1,608	1,428	0,233	43	111,11	21,89	2,689	1,878	0,044
16	68,47	37,53	1,641	1,448	0,221	44	112,51	21,49	2,734	1,891	0,041
17	70,33	36,67	1,675	1,467	0,210	45	113,89	21,11	2,778	1,903	0,038
18	72,18	35,82	1,710	1,486	0,199	46	115,27	20,73	2,826	1,917	0,036
19	73,98	35,02	1,744	1,504	0,189	47	116,63	20,37	2,873	1,928	0,033
20	75,74	34,26	1,779	1,523	0,179	48	118,00	20,00	2,920	1,939	0,031
21	77,49	33,51	1,815	1,541	0,170	49	119,36	19,64	2,968	1,951	0,029
22	79,20	32,80	1,850	1,559	0,161	50	120,71	19,29	3,021	1,963	0,027
23	80,90	32,10	1,884	1,576	0,153	51	122,07	18,93	3,074	1,975	0,025
24	82,55	31,45	1,918	1,592	0,145	52	123,41	18,59	3,131	1,987	0,023
25	84,20	30,80	1,954	1,609	0,137	53	124,74	18,26	3,188	1,999	0,021
26	85,81	30,19	1,989	1,625	0,130	54	126,03	17,97	3,250	2,012	0,019
27	87,42	29,58	2,025	1,641	0,123	219,32	219,32	0,000	∞	2,437	0,000

ляются также *центрированными*, так как все проходят через вершину угла O. Независимость от радиус-вектора r, а тем самым и *автомодельность* задачи, конечно, связаны с наличием условия *однородности* потока слева от первой линии возмущения.

Далее, из полученного решения сразу следует, что при возрастании λ до максимально возможного значения

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

или числа M до $M=\infty$, т. е. *при истечении с максимальной скоростью* $V_{\max}$ *в абсолютный вакуум*, угол θ возрастает до своего максимального значения

$$\theta_{\max} = \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1\right)\frac{\pi}{2}.$$

При этом, согласно (95) и (96), будет

$$\alpha = 0, \quad \varepsilon_{\max} = \frac{\pi}{2} + \theta_{\max} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Таким образом, существует *предельный угол поворота потока* $\theta_{\max}$, для воздуха ($k=1{,}41$) равный 129,32°, который мог бы осуществиться только в идеальном случае расширения газа до абсолютного вакуума. На практике могут иметь место повороты потока только на углы, меньшие $\theta_{\max}$.

Найдем уравнение линий тока в секторе разрежения в полярных координатах ($r=ON$, ε). С этой целью заметим, что по известной

формуле дифференциальной геометрии $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}=\operatorname{ctg}\alpha$. С другой стороны, из формул (95) и (96) легко исключить параметр λ и найти непосредственную связь между α и ε; будем иметь

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon\right).$$

Интегрирование приводит к следующему уравнению семейства линий тока с параметром r_0, равным начальному радиус-вектору линии тока на прямой OC_0 ($\varepsilon=0$):

$$r=r_0\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon\right)\right]^{-\frac{k+1}{k-1}}.$$

Линии тока образуют семейство подобных друг другу кривых с центром подобия в точке O.

Изложенное решение задачи об обтекании внешности угла является общим и не зависит от ранее поставленного ограничения $\lambda_0=M_0=1$ при $\theta=0$. Это условие было выдвинуто лишь для упрощения формулы (94) и дальнейших с нею связанных соотношений. По известному свойству сверхзвуковых потоков полученное решение может быть использовано для начального потока с любыми значениями чисел $\lambda>1$ или $M>1$. В этом случае следует только *начинать с характеристики* (линии возмущения), *соответствующей заданному начальному значению* λ *или* M, и *подводить к ней однородный прямолинейный поток.*

Точно так же и конец поворота потока определяется заданием θ или λ и M на выходе и построением выходного однородного прямолинейного потока со скоростью и углами, рассчитанными по изложенной теории.

Откажемся от условия $\lambda_0=M_0=1$ при $\theta=0$ и примем за начальную любую характеристику OC_1, соответствующую значению $M=M_1>1$.

Обозначим индексом 1 параметры потока на входной характеристике OC_1 и сохраним величины без индекса для текущих значений параметров внутри сектора разрежения. При этом условимся отсчитывать угол поворота потока θ от направления потока на входе, а ε — от начальной характеристики; определение α останется прежним. Тогда равенства (97) примут вид

$$\theta=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{M^2-1}\right)-\right.$$
$$\left.-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{M_1^2-1}\right)\right]-\operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1}+\operatorname{arctg}\sqrt{M_1^2-1},$$
(99)

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{M^2-1}},$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{M^2-1}\right)-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{M_1^2-1}\right)\right].$$

К этим равенствам можно присоединить известные изэнтропические формулы для давления и плотности

$$\frac{p}{p_1}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{k}{k-1}},\quad \frac{\rho}{\rho_1}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}.\qquad(100)$$

Расчеты этих величин можно вести по ранее указанной табл. 7 или кривым на рис. 103.

§ 64. Случай больших чисел Маха. Закон подобия гиперзвуковых потоков

Рассмотрим случай обтекания тонкого профиля с очень большими числами Маха ($M \gg 1$); такое обтекание называют *гиперзвуковым*. Будем продолжать считать газ однородным, отвлекаясь от тех сложных процессов, которые на самом деле возникают в гиперзвуковых потоках за счет высоких температур, образующихся при торможении газа на поверхности тела и при прохождении сквозь поверхности сильных разрывов. Условимся в настоящем параграфе пренебрегать явлениями диссоциации и последующей возможной рекомбинации молекул газа, ионизации газа и другими физическими и химическими процессами, характерными для гиперзвуковых движений газа. К некоторым из этих существенных явлений мы впоследствии вернемся, чтобы изучить более близкую к действительности модель газа, обладающего внутренним трением (вязкостью) и теплопроводностью.

Строгая математическая постановка задач гиперзвукового обтекания тел представляет большие трудности, так как в этих условиях возникают сложные взаимодействия потока с сильными разрывами, вызывающими, как уже указывалось, неизэнтропичность потока в тонком слое вблизи поверхности тела. Наличие в этой области значительного влияния таких процессов, как вязкое трение, теплопроводность, диссипация механической энергии, излучение, и повторим еще раз, диссоциация — рекомбинация молекул и ионизация газа, делают этот вопрос очень сложным.

Остановимся на дополнительном рассмотрении изложенных в двух предыдущих параграфах простейших явлений торможения и ускорения однородного потока газа с точки зрения тех особенностей, которые возникают *при больших значениях числа Маха* набегающего потока ($M_1 \gg 1$) и *малых углах поворота потока*.

Обращаясь сначала к прохождению газа сквозь *косой скачок*, рассмотрим формулы (88) и (82). По условию тонкости тела будем считать тело заостренным с малым углом θ при вершине. Тогда в случае слабых скачков и достаточно больших M_1 угол косого скачка с набегающим потоком β будет иметь тот же порядок малости, что и θ. Это позволит произвести в рассматриваемых формулах замену синусов углов на сами углы, а косинусов — на единицы. Откидывая малые величины высших порядков, будем иметь, согласно (88), квадратное уравнение относительно $M_1\beta = K_c$:

$$K_c^2 - \frac{k+1}{2}(M_1\theta)K_c - 1 = 0, \tag{101}$$

решение которого при очевидном условии

$$K_c = M_1\beta > 0$$

может быть представлено так:

$$K_c = M_1\beta = \frac{k+1}{4}K + \sqrt{\left(\frac{k+1}{4}\right)^2 K^2 + 1}, \tag{102}$$

где введено обозначение

$$K = M_1\theta \tag{103}$$

для величины, играющей, как будет видно из дальнейшего, роль критерия подобия обтекания газом тонких заостренных тел при больших значениях числа M_1.

Формулы (82) перейдут в следующие:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2k}{k+1}K_c^2-\frac{k-1}{k+1},\quad \frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\frac{k+1}{2}K_c^2}{1+\frac{k-1}{2}K_c^2}. \tag{104}$$

При сохранении числа K_c будут сохраняться, очевидно, и отношения (104) давлений и плотностей за скачком и до скачка.

По первой из формул (104) найдем коэффициент давления в потоке за скачком

$$c_p=\frac{p_2-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1V_1^2}=\frac{2p_1}{\rho_1V_1^2}\left(\frac{p_2}{p_1}-1\right)=\frac{2}{kM_1^2}\frac{2k}{k+1}[(M_1\beta)^2-1]=\frac{4}{k+1}\frac{(M_1\beta)^2-1}{K^2}\theta^2, \tag{105}$$

пропорциональный при постоянном K квадрату угла θ поворота потока при его торможении, причем коэффициент пропорциональности представляет собой функцию числа K. Пользуясь непосредственно квадратным уравнением (101) и его решением (102), можем переписать (105) в форме явной зависимости от K

$$c_p=\left[\frac{k+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{4}{K^2}}\right]\theta^2. \tag{106}$$

Формула (106) выражает *закон подобия гиперзвуковых слабо сужающихся потоков*, в частности обтекания клинообразных профилей с малыми углами полураствора θ. Согласно этому закону, если в двух таких обтеканиях величины K одинаковы, то коэффициенты давления будут относиться как квадраты углов полураствора клиньев.

Убедимся теперь, что аналогичный закон подобия имеет место и в случае *расширяющихся* потоков, если угол расширения мал, а начальное число Маха велико. Применим к первому равенству системы (99) *асимптотические*, верные для достаточно больших x равенства ($\sim$ – знак асимптотического равенства)

$$\operatorname{arctg} x\sim\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x},\quad \sqrt{x^2-1}\sim x.$$

Тогда получим

$$\theta\sim\frac{2}{k-1}\left(\frac{1}{M_1}-\frac{1}{M}\right),$$

откуда следует

$$\frac{M_1}{M}\sim 1-\frac{k-1}{2}M_1\theta=1-\frac{k-1}{2}K. \tag{107}$$

Максимально возможный угол поворота θ_{max} будет соответствовать истечению в вакуум ($T=0$, $a=0$, $M=\infty$)

$$\theta_{max}=\frac{2}{(k-1)M_1}. \tag{108}$$

Коэффициент давления c_p равен

$$c_p=\frac{p-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1V_1^2}=\frac{2}{kM_1^2}\left(\frac{p}{p_1}-1\right),$$

а согласно (100) и (107)

$$c_p \sim \frac{2}{kM_1^2}\left[\left(\frac{M_1}{M}\right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1\right] = \frac{2}{kM_1^2}\left[\left(1 - \frac{k-1}{2}M_1\theta\right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1\right]. \qquad (109)$$

Как и в случае торможения газа при прохождении сквозь косой скачок, в полной аналогии с равенством (106) можем предыдущую формулу переписать в виде

$$c_p \sim \frac{2}{kK^2}\left[\left(1 - \frac{k-1}{2}K\right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1\right]\theta^2, \qquad (110)$$

что приводит к следующему общему закону подобия гиперзвуковых потоков около тонких тел: *если в двух подобных плоских гиперзвуковых потоках значения K одинаковы, то коэффициенты давления относятся как квадраты углов отклонения.*

Вводя, как и ранее, обобщенное понятие «относительной толщины» τ, которая может быть равна либо относительной толщине профиля в собственном смысле этого слова, либо относительной вогнутости дужки, либо, наконец, углу атаки, будем считать величину K, равную произведению характерного числа Маха, например числа Маха M_∞ однородного набегающего потока, на относительную толщину τ, *критерием подобия* двух гиперзвуковых потоков, слабо отклоняющихся от заданного однородного гиперзвукового потока, и записывать закон подобия в этом случае в общей форме

$$c_p = \tau^2 f(K). \qquad (111)$$

Переходя от коэффициента давления c_p к коэффициентам подъемной силы c_y и волнового сопротивления c_x, связанным с c_p интегральными соотношениями

$$c_y = \oint c_p d\bar{x}, \quad c_x = -\oint c_p d\bar{y} = -\oint c_p \frac{dy}{dx} d\bar{x},$$

убедимся, что (среднее значение dy/dx пропорционально τ) в потоках с одинаковыми значениями критерия K коэффициенты подъемной силы, так же как и коэффициенты давления, будут относиться как *квадраты*, а коэффициенты волнового сопротивления — как *кубы* относительной толщины. Указанный закон подобия содержится, очевидно, как частный случай в общем законе (60), где надо только положить $\Psi = \tau^2$ и пренебречь под знаком корня единицей по сравнению с M_∞^2.

Пользуясь формулами (106) и (110), легко получить выражения коэффициентов подъемной силы и волнового сопротивления для пластинки AB (рис. 104), расположенной под малым углом атаки $\bar{\theta}$ (на рис. 104 этот угол атаки показан сильно преувеличенным) к набегающему на нее однородному потоку с числом Маха M_∞, значительно превосходящим единицу. Обозначая, как и раньше, индексами 1 и 2 соответственно верхнюю и нижнюю поверхности пластинки, будем, очевидно, иметь

$$c_y = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = c_{p_2} - c_{p_1} = \frac{c_x}{\bar{\theta}},$$

а подставляя сюда значения c_{p2} и c_{p1}, заданные формулами (106) и (110), окончательно получим[1]) (угол атаки $\bar{\theta}$ соответствует углу

[1]) Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью.— М.: Физматгиз, 1959, с. 47.

полного поворота потока)

$$c_y=\frac{c_x}{\bar{\theta}}=\left\{\frac{k+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{4}{K^2}}+\frac{2}{kK^2}\left[1-\left(1-\frac{k-1}{2}K\right)^{\frac{2k}{k-1}}\right]\right\}\bar{\theta}^2. \tag{112}$$

В этой формуле при $K\geqslant\frac{2}{k-1}$, что согласно формуле (108) соответствует $\bar{\theta}\geqslant\bar{\theta}_{max}$, квадратную скобку надо считать равной единице. Это обозначает, что на верхней поверхности пластинки при $\bar{\theta}=\bar{\theta}_{max}$ образовалось и при $\bar{\theta}>\bar{\theta}_{max}$ сохраняется нулевое давление (абсолютный вакуум).

На рис. 105, заимствованном из только что цитированной монографии Г. Г. Черного, сплошными кривыми показаны зависимости $c_y(\bar{\theta})$ при различных M_∞ в интервале $(3<M_\infty<\infty)$, рассчитанные по

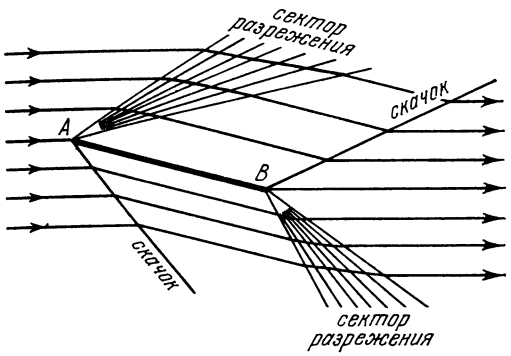


Рис. 104

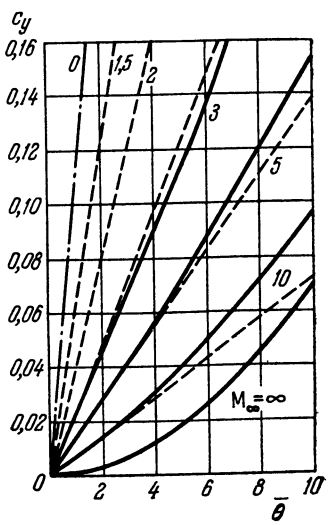


Рис. 105

формуле (112) для воздуха ($k=1{,}4$), штриховыми прямыми нанесены соответствующие значения $c_y(\bar{\theta})$ по формуле (44) линейной теории Аккерета (§ 60). Наконец, верхняя прмая ($M_\infty=0$), показанная штрихпунктиром, отвечает известной формуле $c_y=2\pi\bar{\theta}$ для несжимаемой жидкости.

Рассмотрение кривых на рис. 105 показывает, что при $M_\infty\geqslant5$ формула Аккерета дает заниженные значения коэффициента подъемной силы.

Можно еще заметить, что с возрастанием чисел M_∞ кривые $c_y(\bar{\theta})$ все более отходят от линейного закона и приближаются к квадратичному закону. Так, в предельном случае $M_\infty=\infty$ формула (112) приобретает чисто квадратичный вид

$$c_y=(k+1)\,\bar{\theta}^2 \tag{113}$$

и только численным коэффициентом отличается от соответствующей формулы «ударной» теории Ньютона, заключающейся вкратце в следующем.

При значениях M_∞, близких к бесконечности, косой скачок в точке A (рис. 104) пластинки становится очень близким к нижней поверхности, так что можно без большой ошибки считать линии тока набегающего потока подходящими вплотную к нижней поверхности пластинки и давление на ней равным полной потере количества движения, со-

ответствующей *абсолютно неупругому* удару частиц газа о нижнюю поверхность пластинки со скоростью, равной нормальной компоненте скорости набегающего потока (касательная компонента скорости сохраняется),

$$p_2 = \rho_\infty (U_\infty \sin \bar{\theta})^2 \approx \rho_\infty U_\infty^2 \bar{\theta}^2.$$

С другой стороны, на *верхней* поверхности пластинки при $M_\infty = \infty$ достигается полный вакуум, т. е. в этом случае $p_1 = 0$. Таким образом, коэффициент подъемной силы будет равен (l — длина пластинки)

$$c_y = \frac{(p_2 - p_1)\, l}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 l} = 2\bar{\theta}^2,$$

что при $k=1$ совпадает с формулой (113), а при $k=1{,}4$ (воздух) дает результат, примерно на 17% меньший.

§ 65. Уравнения газовой динамики в плоскости годографа скорости

Фундаментальное значение для развития современной газовой динамики имело установленное С. А. Чаплыгиным [1]) в его докторской диссертации, защищенной в 1904 г., преобразование общих уравнений к независимым переменным *в плоскости годографа.* Этот переход из физической плоскости в плоскость годографа скоростей приводит к замечательному результату: *нелинейные уравнения газовой динамики становятся линейными.*

Из условия отсутствия завихренности

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0$$

можно сделать заключение о наличии потенциала скоростей φ и функции тока ψ, так что

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{114}$$

где ρ_0 — плотность в покоящемся газе. Отсюда следует

$$u\,dx + v\,dy = d\varphi, \quad -v\,dx + u\,dy = \frac{\rho_0}{\rho} d\psi.$$

Умножим второе из этих уравнений на $i = \sqrt{-1}$ и сложим с первым; тогда получим

$$(u - iv)\, d(x + iy) = d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi.$$

Производя замену (V — величина вектора скорости, θ — угол его с осью Ox)

$$u - iv = Ve^{-i\theta}, \quad x + iy = z,$$

найдем следующую, обобщенную на случай сжимаемого газа известную связь между сопряженной скоростью и производной от комплексного

---

[1]) Чаплыгин С. А. О газовых струях.— Ученые записки Московского университета, Отд. физ.-матем. наук, 1904, в. 21.

потенциала по координате:

$$dz = \left(d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right)\frac{1}{V}e^{i\theta}. \tag{115}$$

Совершим переход в плоскость годографа (V, θ). С этой целью примем в равенстве (115) переменные x, y (а следовательно, и z), а также φ и ψ за функции новых переменных V и θ; тогда равенство (115) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial z}{\partial V}dV + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial V}dV + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}d\theta + i\frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{\partial \psi}{\partial V}dV + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}d\theta\right)\right]\frac{1}{V}e^{i\theta} =$$

$$= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial V} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial V}\right)e^{i\theta}dV + \frac{1}{V}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)e^{i\theta}d\theta.$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при дифференциалах независимых переменных, получим

$$\frac{\partial z}{\partial V} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial V} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial V}\right)e^{i\theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)e^{i\theta}. \tag{116}$$

Входящее сюда отношение ρ_0/ρ является функцией скорости V или скоростного коэффициента λ. Действительно, по известной изэнтропической формуле

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{-\frac{1}{k-1}}. \tag{117}$$

Чтобы исключить из системы уравнений (116) независимую переменную z, продифференцируем первое уравнение системы по θ, второе – по V и результаты вычтем друг из друга; тогда в силу очевидного соотношения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta\, \partial V} = \frac{\partial^2 z}{\partial V\, \partial \theta}$$

получим равенство

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta\, \partial V} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta\, \partial V}\right)e^{i\theta} + \frac{1}{V}ie^{i\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial V} - \frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{V}e^{i\theta}\frac{\partial \psi}{\partial V} =$$

$$= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial V\, \partial \theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial^2 \psi}{\partial V\, \partial \theta}\right)e^{i\theta} - \frac{1}{V^2}e^{i\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + ie^{i\theta}\frac{d}{dV}\left(\frac{1}{V}\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

которое после сокращений и сравнения действительных и мнимых частей приведет к системе уравнений

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \varphi}{\partial V} = \frac{d}{dV}\left(\frac{1}{V}\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial V}. \tag{118}$$

Перейдем от величины V к скоростному коэффициенту λ и вычислим производную в правой части первого уравнения системы (118)

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{-\frac{1}{k-1}}}{\lambda}\right];$$

тогда система (118) примет следующую форму:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -\frac{1-\lambda^2}{\lambda\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \tag{119}$$

Вводя вместо λ переменную τ,

$$\tau=\frac{k-1}{k+1}\lambda^2=\left(\frac{V}{V_{\max}}\right)^2,\quad V_{\max}=\sqrt{2h_0}=\sqrt{\frac{2}{k-1}}a_0=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}a^*,$$

получим систему уравнений Чаплыгина

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=-\frac{1}{2\tau}\frac{1-\frac{k+1}{k-1}\tau}{(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\frac{1}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}. \tag{120}$$

Перекрестным дифференцированием и вычитанием можно получить раздельные уравнения для φ и ψ, причем эти уравнения будут *линейными* уравнениями второго порядка в частных производных. Так, например, уравнение для функции тока ψ будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{k-1}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right]+\frac{1-\frac{k+1}{k-1}\tau}{2\tau(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \tag{121}$$

Остановимся на случае *дозвукового* течения ($\lambda<1$). Заменяя в уравнении (119) λ на новую переменную s, связанную в случае дозвукового течения с λ дифференциальным соотношением

$$ds=\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{122}$$

приведем систему (119) к форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial s},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{123}$$

где величина K представляет следующую функцию λ:

$$K=\frac{1-\lambda^2}{\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}. \tag{124}$$

Выведенные Чаплыгиным уравнения (120) и (121) были приведены к различным, так называемым *каноническим* формам Л. С. Лейбензоном [1]), Н. А. Слезкиным [2]) и С. А. Христиановичем [3]).

§ 66. Влияние сжимаемости на распределение скоростей и давлений в плоском дозвуковом потоке

Важное практическое значение задачи об учете влияния сжимаемости или, иначе говоря, числа M_∞ набегающего дозвукового потока на распределение давления по поверхности крылового профиля и на его подъемную силу вызвало появление ряда приближенных приемов этого учета.

---

[1]) Лейбензон Л. С. О теории движения газов.— ДАН СССР, 1935, № 9.

[2]) Слезкин Н. А. К вопросу о плоском движении газа.— Труды Московского гос. ун-та, 1935, а также ДАН СССР, 1936, нов. сер., т. 3, № 9.

[3]) Христианович С. А. Обтекание тела газом при больших дозвуковых скоростях — Труды ЦАГИ, 1940, вып. 481, а также Христианович С. А., Юрьев И. М. Обтекание крылового профиля при докритической скорости потока.— Прикл. мат. и мех., 1947, т 11, вып. 1.

Правило Прандтля — Глауэрта, как уже было указано ранее, пригодно лишь в случае тонких, слабо изогнутых профилей, расположенных под малым углом атаки в потоке со сравнительно малыми значениями числа M_∞. Излагаемые в настоящем параграфе приемы позволяют вводить поправку на сжимаемость для более толстых и изогнутых профилей при бо́льших углах атаки и диапазонах чисел M_∞. Функция $\sqrt{K(\lambda)}$, входящая в систему уравнений (123), при значениях λ, не слишком близко подходящих к единице, мало отличается от единицы, как об этом можно заключить из табл. 8, составленной для воздуха (k=1,41).

Таблица 8

λ	M	$\sqrt{K}$	λ	M	$\sqrt{K}$	λ	M	$\sqrt{K}$
0	0	1,0000	0,35	0,3228	0,9965	0,70	0,6668	0,9221
0,05	0,0457	1,0000	0,40	0,3701	0,9940	0,75	0,7192	0,8925
0,10	0,0913	1,0000	0,45	0,4179	0,9899	0,80	0,7727	0,8416
0,15	0,1372	0,9999	0,50	0,4663	0,9840	0,85	0,8274	0,7740
0,20	0,1832	0,9996	0,55	0,5152	0,9754	0,90	0,8834	0,6788
0,25	0,2294	0,9991	0,60	0,5649	0,9632	0,95	0,9409	0,5092
0,30	0,2759	0,9982	0,65	0,6154	0,9461	1,00	1,0000	0

Там же для сравнения приводится зависимость $\sqrt{K}$ от M, аналитически выражаемая легко выводимой из (124) формулой

$$\sqrt{K} = (1 - M^2)^{1/2}\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (125)$$

Так, например, при λ=0,65 (M=0,615) величина $\sqrt{K}$ только на 5% отличается от единицы. Заменив в системе (123) приближенно $\sqrt{K}$ на единицу, получим в плоскости (s, θ) систему равенств

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad (126)$$

аналогичную точным условиям Коши — Римана (далее индекс 0 при величине означает, что она относится к потоку несжимаемой жидкости)

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta_0} = \frac{\partial\psi_0}{\partial s_0}, \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial s_0} = -\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta_0} \qquad (127)$$

в плоскости (s_0, θ_0), причем, согласно определению (122), принятому при введении функции s, в случае очень малых λ_0 будет

$$ds_0 = \frac{d\lambda_0}{\lambda_0}. \qquad (128)$$

Совпадение приближенных равенств (126) в плоскости (s, θ) с точными условиями (127) в плоскости (s_0, θ_0) еще ничего не говорит о связи между сжимаемым и несжимаемым потоками, так как граничные условия в плоскостях s_0, θ_0 и s, θ отличны друг от друга.

Ввиду этого становится невозможным непосредственное получение универсальных (т. е. пригодных для всевозможных типов дозвуковых течений) «пересчетных» формул. Для пояснения высказанного утверждения рассмотрим два простейших течения — от вихря и от источника,— для которых имеются *точные* решения.

Можно показать, что в случае *вихря* (при одинаковой циркуляции Г) распределения скоростей в потоках газа и несжимаемой жидкости ничем не различаются, и, следовательно, $\lambda_0 = \lambda$.

В случае *источника* (при одинаковом массовом расходе Q) в потоке газа $Q=2\pi r\lambda a^*\rho(\lambda)$, а в несжимаемой жидкости $Q=2\pi r\lambda_0 a^*\rho_0$, где ρ_0 — постоянная плотность несжимаемой жидкости (ее можно принять, например, равной плотности в изэнтропически заторможенном газе $\rho(0)$). Таким образом, для этого потока имеем уже иную зависимость между λ и λ_0:

$$\lambda_0=\lambda\rho(\lambda)/\rho_0,$$

которая, вероятно, соответствует наибольшей из возможных поправок на сжимаемость [1]). Обе зависимости приведены на рис. 106 (прямая *1* — для вихря, кривая *2* — для источника).

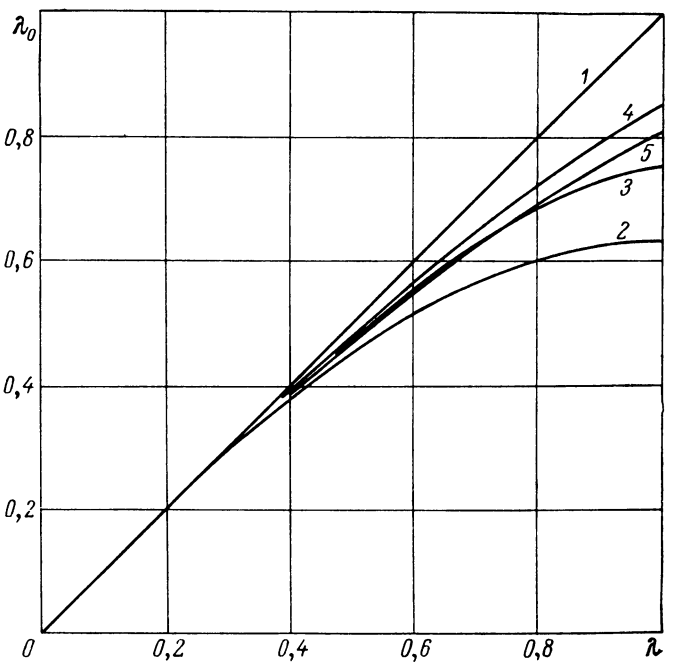


Рис. 106

Существуют различные приближенные методы учета сжимаемости, точность и границы применимости которых можно оценить только путем сравнения с экспериментом. Рассмотрим ниже некоторые из этих методов.

Отвлечемся от разницы между ds [формула (122)] и ds_0 [формула (128)] и положим

$$ds=\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\,\frac{d\lambda}{\lambda}=ds_0=\frac{d\lambda_0}{\lambda_0}. \tag{129}$$

Проинтегрируем это обыкновенное уравнение первого порядка, связывающее λ и λ_0, а постоянную интегрирования найдем из условия совпадения скоростных полей при предельном переходе к несжимаемой жидкости

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{\lambda_0}=1. \tag{130}$$

[1]) Эти примеры, дающие верхнюю и нижнюю границы поправок на сжимаемость, были любезно указаны автору Г. Ю. Степановым.

Интегрирование приведет нас к некоторой, не зависящей ни от формы профилей, ни от характера их обтекания, приближенной связи между λ и λ_0, которую ввиду громоздкости аналитического выражения представим кривой *3* (рис. 106) и табл. 9.

Имея эту связь, нетрудно получить зависимость коэффициента давления c_p в газе от коэффициента c_{p0} в несжимаемой жидкости.

Таблица 9

λ	M	λ_0	λ	M	λ_0	λ	M	λ_0
0	0	0	0,35	0,3228	0,3410	0,70	0,6668	0,6251
0,05	0,0457	0,0500	0,40	0,3701	0,3862	0,75	0,7192	0,6568
0,10	0,0913	0,0998	0,45	0,4179	0,4307	0,80	0,7727	0,6857
0,15	0,1372	0,1493	0,50	0,4663	0,4734	0,85	0,8274	0,7110
0,20	0,1832	0,1983	0,55	0,5152	0,5144	0,90	0,8834	0,7324
0,25	0,2294	0,2467	0,60	0,5649	0,5535	0,95	0,9409	0,7483
0,30	0,2759	0,2943	0,65	0,6154	0,5904	1,00	1,0000	0,7577

По известным изэнтропическим соотношениям

$$\frac{p}{p_\infty}=\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_\infty^2}\right)^{\frac{k}{k-1}},\qquad \frac{a_\infty^2}{a^{*2}}=\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_\infty^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\cdot 1}=\frac{k+1}{2}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_\infty^2\right),$$

найдем при наличии сжимаемости

$$c_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}=\frac{2p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2}\left[\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_\infty^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}-1\right]=$$

$$=\frac{k+1}{k}\,\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_\infty^2}{\lambda_\infty^2}\left[\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_\infty^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}-1\right]. \qquad (131)$$

Присоединяя сюда равенство, соответствующее несжимаемой жидкости,

$$c_{p_0}=1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0\infty}}\right)^2 \qquad (132)$$

и соотношение между λ и λ_0, представленное табл. 9, будем рассматривать совокупность формул (131) и (132) как параметрическую связь между c_p и c_{p0} через параметр λ. В этом заключается приближенный способ учета сжимаемости по С. А. Христиановичу. При выбранном числе M_∞ находим λ_∞, а, следовательно, по табл. 9 и $\lambda_{0\infty}$, после чего, задаваясь различными значениями λ_0 и определяя соответствующие λ, получим по формулам (131) и (132) искомую связь между c_p и c_{p0}.

На рис. 107 и 108 приводятся сетки кривых [1]), выражающих эту связь при различных числах M_∞ отдельно для положительных и отри-

[1]) Полядский В. С. Расчет распределения давления при больших скоростях полета.— Изд. Бюро новой техники НКАП, 1943; там же см. таблицы пересчета и указание поправок по более точному приближению.

цательных c_p. Штриховая линия $\lambda=0{,}85$ на рис. 108 показывает предел применимости метода; при бóльших λ результаты получаются неудовлетворительными; отрезками кривых справа от этой линии пользоваться нельзя.

К числу недостатков изложенного приближенного приема относится отсутствие явной зависимости между c_p и c_{p0} и вытекающая отсюда необходимость использования приведенных сеток кривых. Этот

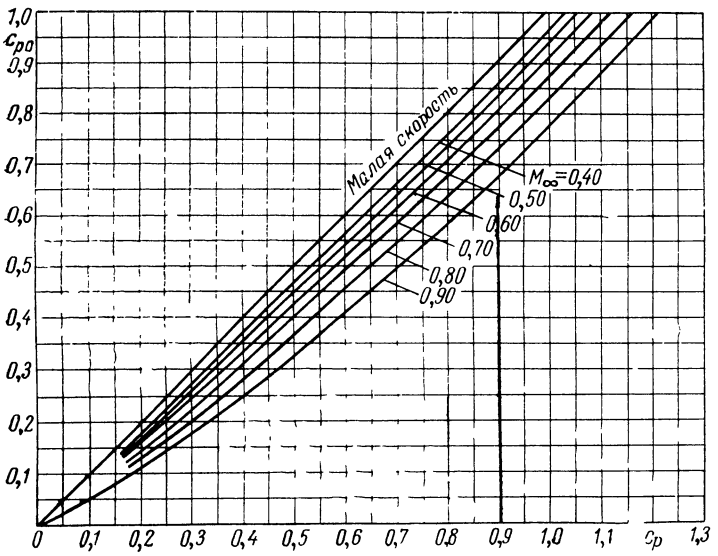


Рис. 107

недостаток можно устранить, если применить метод, предложенный впервые С. А. Чаплыгиным[1]). Обратимся вновь к уравнениям (118), приняв в них в качестве аргументов $\lambda=V/a^*$ и θ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\lambda\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}.$$

Аналогичные уравнения для несжимаемой ($\rho=\rho_0$) жидкости будут иметь в прежних обозначениях вид

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\lambda_0}=\lambda_0\frac{d}{d\lambda_0}\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta_0},\quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta_0}=\lambda_0\frac{\partial\psi_0}{\partial\lambda_0}.$$

Приближенный метод С. А. Чаплыгина заключается в сведении уравнений движения сжимаемого газа к уравнениям движения несжимаемой жидкости путем замены переменной λ некоторой ее функцией $\tilde{\lambda}(\lambda)$. Как будет ясно из дальнейшего, такое преобразование эквивалентно использованию вместо действительной зависимости $\rho(\lambda)/\rho_0$ некоторой приближенной. Уравнение движения сжимаемого газа после этой замены приведется к виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{\lambda}}=\lambda\frac{d}{d\tilde{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\lambda\frac{\rho_0}{\rho}\frac{d\tilde{\lambda}}{d\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\lambda}}.$$

[1]) Чаплыгин С. А. О газовых струях.— Ученые записки Московского университета. Отд. физ. мат. наук, 1904, вып. 21.

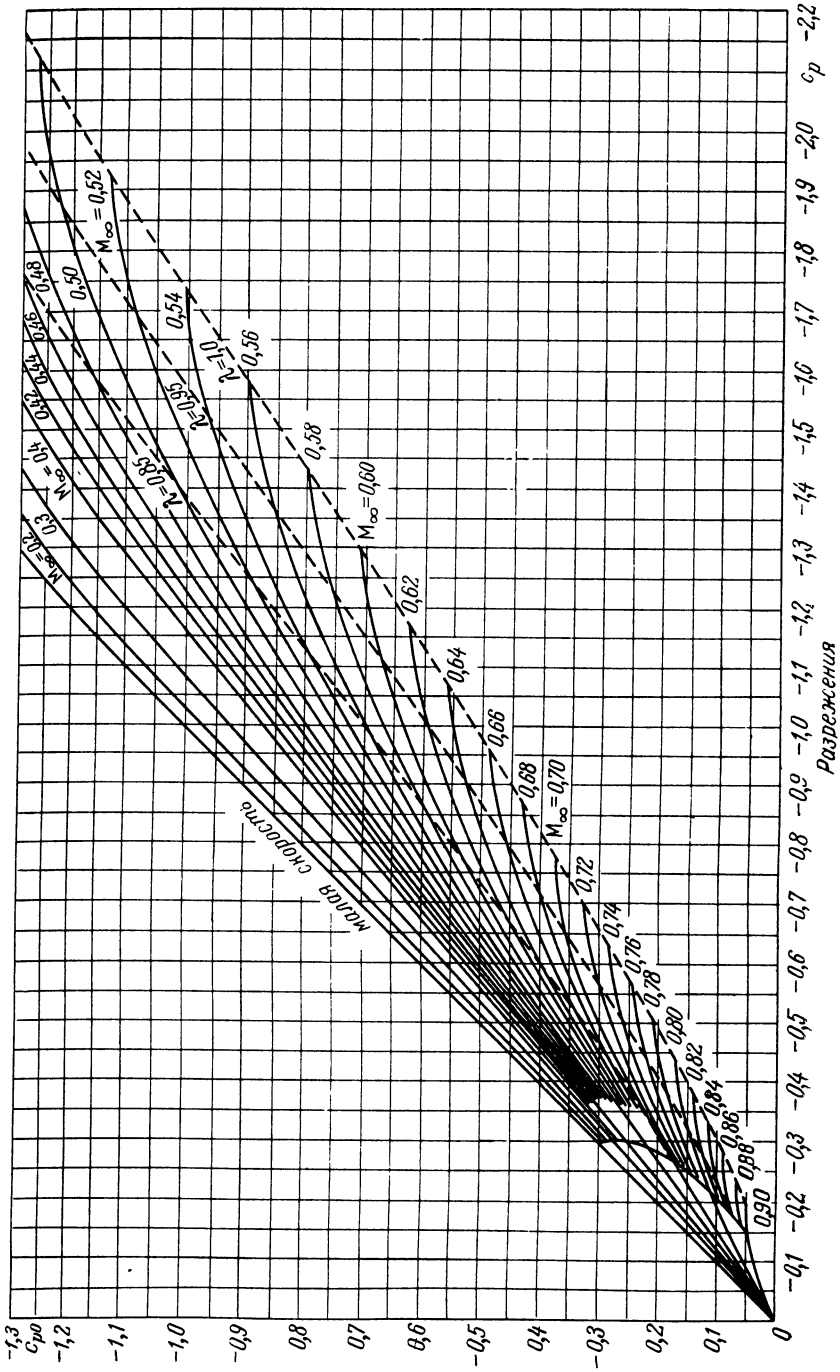

c_{p0}
c_p
Разрежения
Малая сжимаемость
$M_\infty = 0{,}52$
$M_\infty = 0{,}60$
$M_\infty = 0{,}70$
$\lambda = 1{,}2$
$\lambda = 1{,}4$
$\lambda = 1{,}6$
$\lambda = 1{,}8$
$\lambda = 2{,}0$

Рис. 108

Будем считать $\varphi=\varphi_0$, $\psi=\psi_0$ при одинаковых ($\widetilde{\lambda}=\lambda_0$, $\theta=\theta_0$) значениях аргументов, потребовав совпадения соответствующих дифференциальных уравнений. Для этого должны выполняться равенства

$$\lambda\frac{d}{d\lambda_0}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\rho_0}{\rho}\right)=\lambda_0\frac{d}{d\lambda_0}\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)=-\frac{1}{\lambda_0},\quad \lambda\frac{\rho_0}{\rho}\frac{d\lambda_0}{d\lambda}=\lambda_0.$$

Данная система обыкновенных дифференциальных уравнений определяет зависимости $\lambda(\lambda_0)$ и $\rho(\lambda_0)/\rho$. Принимая во внимание условие совпадения λ и λ_0 при малых скоростях [$\lim_{\lambda\to 0}(\lambda/\lambda_0)=1$], получим решения

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{1-C\lambda_0^2},\quad \frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1-C\lambda_0^2}{1+C\lambda_0^2}=\frac{1}{\sqrt{1+4C\lambda^2}},$$

где C — постоянная интегрирования.

Как видно, получившаяся для гипотетического «газа Чаплыгина» зависимость плотности от скоростного коэффициента

$$\frac{\rho}{\rho_0}=(1+4C\lambda^2)^{-1/2}=1-2C\lambda^2+O(\lambda^4)$$

отличается от известной зависимости для адиабатического движения

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}=1-\frac{1}{k+1}\lambda^2+O(\lambda^4).$$

Выбором постоянной C можно воспользоваться для наилучшего приближения к действительной зависимости $\rho(\lambda)/\rho_0$. Так, полагая $2C=1/(k+1)$, $C=0{,}2083$ [$k=1{,}4$; кривая *4* на рис. 106], имеем погрешность аппроксимации порядка λ^4. Как показывают расчеты, для $C=0{,}296$ (кривая *5* на том же рисунке) максимальная относительная погрешность при $\lambda<0{,}95$ не превышает 2% [1]).

Использование тех или иных зависимостей $\rho(\lambda)/\rho_0$ соответствует замене действительной адиабаты Пуассона аппроксимирующими ее различными простыми кривыми или прямыми [2]). Так, Карман и Чень [3]), используя прямолинейную адиабату, предложили простую приближенную аналитическую формулу связи c_p и c_{p0}:

$$c_p=\frac{c_{p0}}{\sqrt{1-M_\infty^2}+\frac{1}{2}\frac{M_\infty^2}{1+\sqrt{1-M_\infty^2}}c_{p0}}=\frac{c_{p0}}{\sqrt{1-M_\infty^2}+\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-M_\infty^2})c_{p0}},\tag{133}$$

не заключающую в своем составе показателя адиабаты k.

При малых M_∞ формула (133) переходит в формулу Прандтля — Глауэрта

$$c_p=\frac{c_{p0}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}.$$

---

[1]) Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин.— М.: Физматгиз, 1962, с. 197.

[2]) Детальное изложение такого рода методов можно найти в монографии: Домбровский Г. А. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа.— М.: Наука, 1964.

[3]) Kármán Th. v. Compressibility effects in aerodynamics.— Journ. Aeron. Sci., July 1941, v. 8; Tsien H. S. Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids.— Journ. Aeron. Sci., August 1939, v. 6 (см. 4-е изд. настоящего учебника, с. 303—307).

В отличие от последней формула (133), содержащая в знаменателе c_{p_0}, не позволяет установить простое соотношение между c_y и c_{y_0}, вычисление c_y приходится проводить интегрированием пересчитанного распределения давления в каждом отдельном случае.

Формула Кармана — Ченя удобна для вычислений и, как показывает сравнение с опытами, дает удовлетворительную оценку влияния сжимаемости (числа M_∞) на коэффициент давления c_{p_0} при обтекании того же профиля несжимаемой жидкостью даже при достаточно больших, но, конечно, меньших единицы значениях чисел Маха.

На рис. 109 приведено для иллюстрации сравнение с опытом результатов расчета коэффициента давления c_p в точке, находящейся на расстоянии 30% хорды от носика, при угле атаки $\alpha=-2°$ и при различных значениях числа M_∞ для верхней поверхности крылового профиля NACA 4412.

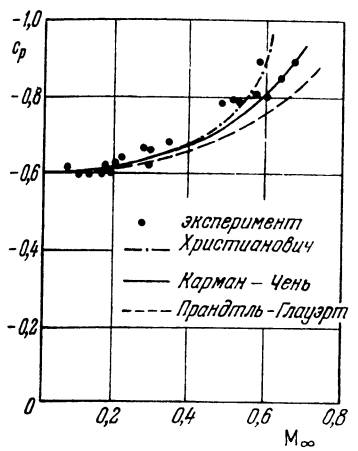


Рис. 109

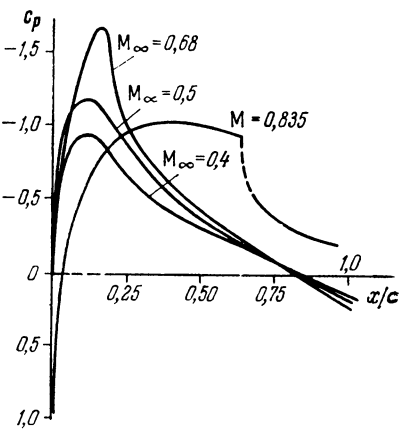


Рис. 110

Если отнести верхнюю экспериментальную точку при $M_\infty=0,6$ к числу выпадающих, то можно заметить, что кривая, составленная по формуле Кармана — Ченя, хорошо соответствует опытным точкам.

Влияние сжимаемости при дозвуковом обтекании профилей проявляется в возрастании разрежений на верхней поверхности профиля — факт, который уже был отмечен при изложении теории малых возмущений Прандтля — Глауэрта. На рис. 110 показаны полученные экспериментально распределения давления по верхней поверхности некоторого крылового профиля при различных числах M_∞ набегающего потока. Можно заметить, что с возрастанием числа M_∞ от значения 0,4 до 0,68 пик разрежения возрос почти вдвое.

Формулу, близкую по структуре к формуле Кармана — Ченя, можно еще получить из простых, не связанных с теорией Чаплыгина соображений, если, согласно Лэйтону[1]), предположить, что коэффициент давления в данной точке сжимаемого дозвукового потока может быть выражен через соответствующий коэффициент давления в несжимаемом потоке по формуле Прандтля — Глауэрта, в которой только под числом M_∞ следует подразумевать *местное*, переменное от точки к точке число M.

[1]) Laitone E. V. New compressibility correction for two-dimensional subsonic flow.— Journ Aeron. Sci, 1951, v. 18, № 5, p. 350.

На самом деле в дозвуковом потоке, описываемом дифференциальными уравнениями в частных производных эллиптического типа, влияние сжимаемости не сводится к *местному*, характеризуемому числом M в данной точке, а требует учета влияния сжимаемости на поток в целом. В этом заключается *приближенность* допущения Лэйтона.

Согласно этому допущению коэффициенты давления в соответствующих точках связаны формулой

$$c_p = \frac{c_{p0}}{\sqrt{1-M^2}}. \tag{134}$$

Исключим M, пользуясь изэнтропическим соотношением

$$c_p = \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2}\frac{p-p_\infty}{p_\infty} = \frac{2}{kM_\infty^2}\left[\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} - 1\right]. \tag{135}$$

Отсюда, находя M^2 и разлагая полученное для него выражение в ряд по степеням малой величины $\frac{kM_\infty^2}{2}c_p$, будем иметь

$$M^2 = \left(M_\infty^2 + \frac{2}{k-1}\right)\left(1+\frac{kM_\infty^2}{2}c_p\right)^{-\frac{k-1}{k}} - \frac{2}{k-1} = M_\infty^2 - \left(1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2\right)M_\infty^2 c_p + \ldots$$

Подставляя в (134), получим формулу Лэйтона

$$c_p = \frac{c_{p0}}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \frac{M_\infty^2\left(1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2\right)}{2\sqrt{1-M_\infty^2}}c_{p0}}, \tag{136}$$

заключающую, так же как и формула Кармана — Ченя, поправочные слагаемые в знаменателе в формуле Прандтля — Глауэрта. Сравнение формул Лэйтона и Кармана — Ченя показывает, что при приближении M_∞ к единице поправка Лэйтона возрастает значительно быстрее, чем поправка в формуле Кармана — Ченя. При относительно небольших c_p и не слишком близких к единице значениях M_∞ формула Лэйтона дает лучшее совпадение с опытом, чем формула Прандтля — Глауэрта, и близка к формуле Кармана — Ченя.

Все изложенные только что упрощенные методы расчета не были связаны с определением полного решения задачи о дозвуковом обтекании, в частности с влиянием сжимаемости на присоединенную циркуляцию, обеспечивающую плавный сход газового потока с задней острой кромки крылового профиля [1]).

Заметим, что в настоящее время есть возможность *точного* численного расчета распределения скоростей и давлений при обтекании тел газом с любыми скоростями [2]).

---

[1]) Точные в этом смысле решения были получены одновременно Л. И. Седовым и Ц. Ц. Линем. См. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М.: Наука, 1980.

[2]) Давыдов Ю. М. Таблицы расчета внешних околозвуковых течений газа.— М.: Выч. центр АН СССР, 1983.

§ 67. Околокритическое обтекание крылового профиля

При возрастании числа M_∞ вблизи поверхности обтекаемого крылового профиля возникают сложные явления, трудно поддающиеся теоретическому анализу. Вернемся к кривым рис. 110. Прежде всего обращает на себя внимание явление смещения пика разрежения вниз по потоку, начиная примерно с $M_\infty=0{,}5$.

Последняя кривая на рис. 110, относящаяся к числу $M_\infty=0{,}835$, резко выпадает из общей закономерности развития кривых давления с ростом M_∞. Прежде всего бросается в глаза значительное уменьшение по абсолютной величине и сглаживание по форме пика разрежения, затем ясно видно *скачкообразное* восстановление давления, показанное на рисунке штрихами. Эти явления можно объяснить образованием критического сечения в трубке тока, суживающейся к точке максимальной скорости в дозвуковом потоке. Дальнейшее расширение трубки тока создает движение, аналогичное движению в сопле Лаваля. Скорость становится сверхзвуковой и затем в скачке уплотнения возвращается к дозвуковому значению. Наличие скачков уплотнения приводит к возникновению значительных потерь механической энергии и вредно отражается на аэродинамических характеристиках крылового профиля. Одной из мер борьбы с этим явлением стало создание профилей с возможно поздним образованием критической скорости на их поверхности.

Назовем *критическим числом* $M_{кр}$ такое значение числа M_∞ набегающего на крыло потока, при котором где-то на поверхности крыла местное число M становится равным единице, т. е. *возникает скорость, равная местной скорости звука.*

Легко связать величину $M_{кр}$ с *минимальным значением коэффициента давления* c_{pm}. Для этого, пользуясь выражением c_p (135), предположим, что где-нибудь на профиле скорость достигла местной скорости звука и местное число M стало равным единице; тогда c_p достигает минимального по сравнению с другими точками потока значения c_{pm}, а число M_∞ становится равным $M_{кр}$. Следовательно, если в только что указанной формуле положить

$$c_p=c_{pm},\quad M_\infty=M_{кр},\quad M=1,$$

то тем самым определится искомая связь между $M_{кр}$ и c_{pm}

$$c_{pm}=\frac{2}{kM_{кр}^2}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(1+\frac{k-1}{2}M_{кр}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}-1\right], \tag{137}$$

где, подчеркнем это, величина c_{pm} обозначает коэффициент давления при заданном $M_\infty=M_{кр}$, т. е. в действительном течении газа при наличии учета сжимаемости.

В практических расчетах полезнее располагать связью между $M_{кр}$ и коэффициентом давления c_{p0m} при обтекании того же профиля несжимаемой жидкостью, так как последняя величина легко рассчитывается методами, изложенными в предыдущей главе, или определяется продувками в трубах малых скоростей. Пользоваться для пересчета c_{pm} в c_{p0m} изложенным выше правилом Прандтля — Глауэрта или приближенным способом Христиановича было бы мало оправданным, так как c_{pm} относится к числу $M_\infty=M_{кр}$, при приближении к которому указанные приемы расчета становятся необоснованными.

Вспоминая чисто экспериментальный факт сравнительной удовлетворительности формулы Кармана — Ченя и при M_∞, близких к $M_{кр}$, можем использовать эту формулу и определять $M_{кр}$ как функцию от

c_{p0m} из совокупности равенств (133) и (137), переписанных в виде

$$c_{p0m} = \frac{c_{pm}\sqrt{1-M_{кр}^2}}{1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-M_{кр}^2})\,c_{pm}}, \qquad (138)$$

$$c_{pm} = \frac{2}{kM_{кр}^2}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(1+\frac{k-1}{2}M_{кр}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}-1\right].$$

Подставляя значение c_{pm} из второго равенства в первое, получим искомую связь между c_{p0m} и $M_{кр}$; однако, ввиду громоздкости окончательного результата, не будем его выписывать.

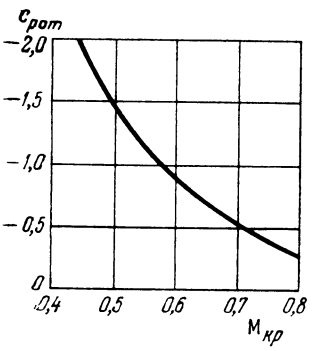


Рис. 111

Предложены различные приближенные формулы для определения $M_{кр}$ по рассчитанному c_{p0m}. Приводим одну из них, составленную Темплем[1]) для воздуха ($k=1{,}4$),

$$c_{p0m} = 1 - 0{,}522\,\frac{(1+0{,}2M_{кр}^2)^2}{M_{кр}^2\,(1-0{,}05M_{кр}^2)^2}, \qquad (139)$$

практически эквивалентную совокупности равенств (138) и приводящую к хорошему совпадению с опытом. Соответствующая кривая показана на рис. 111.

Из определения понятия критического числа $M_{кр}$ можно заключить, что в дозвуковых потоках следует отдать предпочтение таким профилям, которые при том же значении потребной величины подъемной силы (коэффициента c_y) имеют по возможности бóльшее значение $M_{кр}$, а следовательно, меньшее c_{pm}. Иными словами, надо стремиться к тому, чтобы одна и та же площадь, заключенная между кривыми распределения давления по верхней и нижней поверхностям крыла, достигалась при пологих кривых распределения давления, а не за счет резких пиков разрежения. Такого рода профили с повышенными значениями $M_{кр}$ были созданы у нас в стране и за рубежом и получили широкое распространение в авиации и турбостроении.

§ 68. Плоский сверхзвуковой поток. Общие свойства характеристик. Графический метод расчета сверхзвуковых течений

Переход в плоскость годографа привел к созданию аналитических методов интегрирования дифференциальных уравнений *сверхзвукового* течения идеального газа. Однако при практических расчетах предпочитают пользоваться численными методами или простыми графическими приемами интегрирования этих уравнений, основанными на применении *метода характеристик*.

Вернемся к основной системе уравнений плоского безвихревого движения газа (2) и (3) настоящей главы

$$(a^2-u^2)\frac{\partial u}{\partial x} - uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) + (a^2-v^2)\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (140)$$

[1]) Хилтон У. Ф. Аэродинамика больших скоростей. — М.: ИЛ, 1955, с. 29.

Обобщая прием, изложенный в § 43 при решении задачи Римана о *распространении конечных возмущений*, составим линейную комбинацию уравнений (140); умножим соответственно первое из этих уравнений на неопределенный множитель Λ_2, второе — на Λ_1 и сложим их. Тогда получим

$$\Lambda_2(a^2-u^2)\frac{\partial u}{\partial x}+(\Lambda_1-\Lambda_2 uv)\frac{\partial u}{\partial y}-(\Lambda_1+\Lambda_2 uv)\frac{\partial v}{\partial x}+\Lambda_2(a^2-v^2)\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

или, собирая по отдельности члены с производными от u и от v,

$$\Lambda_2(a^2-u^2)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\Lambda_1-\Lambda_2 uv}{\Lambda_2(a^2-u^2)}\frac{\partial u}{\partial y}\right]-(\Lambda_1+\Lambda_2 uv)\left[\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\Lambda_2(a^2-v^2)}{\Lambda_1+\Lambda_2 uv}\frac{\partial v}{\partial y}\right]=0. \tag{141}$$

Попытаемся теперь, распоряжаясь величинами Λ_1 и Λ_2, определить в каждой точке плоскости (x, y) такое направление с угловым коэффициентом $m=dy/dx$, чтобы выражения в квадратных скобках равенства (141) представили соответствующие этому направлению производные по x от u и v:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\Lambda_1-\Lambda_2 uv}{\Lambda_2(a^2-u^2)}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}m=\frac{du}{dx},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\Lambda_2(a^2-v^2)}{\Lambda_1+\Lambda_2 uv}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}m=\frac{dv}{dx},$$

и, следовательно, уравнение (141) превратилось в дифференциальное уравнение в плоскости годографа (u, v)

$$\frac{dv}{du}=\frac{\Lambda_2(a^2-u^2)}{\Lambda_1+\Lambda_2 uv}. \tag{142}$$

Для выполнения этих условий необходимо подчинить величины Λ_1 и Λ_2 пропорции

$$\frac{\Lambda_1-\Lambda_2 uv}{\Lambda_2(a^2-u^2)}=\frac{\Lambda_2(a^2-v^2)}{-(\Lambda_1+\Lambda_2 uv)}=m, \tag{143}$$

или, что все равно, системе однородных уравнений

$$\Lambda_1-\Lambda_2[m(a^2-u^2)+uv]=0,\quad m\Lambda_1+\Lambda_2[a^2-v^2+muv]=0,$$

которая будет иметь отличные от нуля решения только при равенстве нулю определителя системы, т. е. при

$$(u^2-a^2)m^2-2uvm+v^2-a^2=0. \tag{144}$$

Составляя дискриминант этого квадратного уравнения

$$u^2v^2-(u^2-a^2)(v^2-a^2)=a^2(u^2+v^2-a^2)=a^2(V^2-a^2),$$

убедимся, что действительные решения будут иметь место при выполнении условия $V\geqslant a$ или $M\geqslant 1$.

Итак, в каждой точке *сверхзвукового* потока можно определить два характеристических направления с угловыми коэффициентами m_1 и m_2, равными корням квадратного уравнения (144)

$$m_{1,2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2}=\frac{uv\pm a\sqrt{V^2-a^2}}{u^2-a^2}, \tag{145}$$

так, чтобы дифференциалам dx, dy, соответствующим этим направлениям в физической плоскости течения, сопоставлялись дифференциалы du, dv в плоскости годографа, связанные уравнением (142).

Фундаментальное значение имеет тот факт, что дифференциальное уравнение (142) может быть проинтегрировано в конечном виде для про-

извольного сверхзвукового течения. Переписывая уравнение (142) в тождественном виде

$$\frac{dv}{du} = \frac{\Lambda_2 (a^2 - u^2)}{\Lambda_1 + \Lambda_2 uv} = \frac{\Lambda_2 (a^2 - v^2)}{\Lambda_1 + \Lambda_2 uv} \frac{a^2 - u^2}{a^2 - v^2}$$

и сравнивая с (143) и (144), получим

$$\frac{dv}{du} = -m \frac{a^2 - u^2}{a^2 - v^2} = \frac{uv \pm a\sqrt{V^2 - a^2}}{a^2 - v^2}. \tag{146}$$

Перейдем теперь от проекций скорости u, v к величине вектора скорости V и углу θ, образованному этим вектором с осью Ox физической плоскости, положив

$$u = V\cos\theta, \quad v = V\sin\theta,$$

$$du = dV\cos\theta - V\sin\theta\, d\theta, \quad dv = dV\sin\theta + V\cos\theta\, d\theta.$$

Тогда уравнение (146) перейдет в следующее:

$$\frac{\sin\theta\, dV + V\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta\, dV - V\sin\theta\, d\theta} = \frac{V^2 \sin\theta\cos\theta \pm a^2\sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - V^2\sin^2\theta}.$$

Соберем члены с dV и $d\theta$; тогда после простых преобразований и сокращений получим

$$d\theta = \pm\sqrt{M^2 - 1}\,\frac{dV}{V}, \tag{147}$$

т. е. известное уже нам по § 63 уравнение (92), интеграл которого представлен формулой (94), а в данном случае может быть записан в общей форме

$$\theta = \pm\sigma(\lambda) + \text{const},$$

$$\sigma(\lambda) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}. \tag{148}$$

Семейства интегральных кривых уравнения (145), соответствующие наличию разных знаков перед радикалом, образуют *характеристики в физической плоскости* (x, y), а величины m_1 и m_2 представляют собой угловые коэффициенты касательных к характеристикам или *характеристические направления* в физической плоскости.

Будем называть для определенности интегральные кривые, соответствующие дифференциальному уравнению (145) с *положительным* знаком перед радикалом, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv + a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2},$$

характеристиками *первого* семейства, а интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv - a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2}$$

— характеристиками *второго* семейства.

Точно так же дифференциальные уравнения (146) или их интегралы (148) определяют в каждой точке плоскости годографа скоростей два семейства кривых — *характеристик в плоскости годографа*. Пусть знаку плюс соответствуют характеристики *первого* семейства, знаку минус —

второго семейства. Обозначая через n угловой коэффициент характеристических направлений в плоскости годографа, будем иметь по (146)

$$n_{1,2}=\left(\frac{dv}{du}\right)_{1,2}=\frac{uv\pm a\sqrt{V^2-a^2}}{a^2-v^2}. \tag{149}$$

Характеристические направления в физической плоскости и плоскости годографа, как это сразу следует из (145) и (149), связаны между собой очевидными соотношениями

$$n_1m_2+1=0,\quad n_2m_1+1=0.$$

Отсюда следует, что при выборе осей Ox и Oy параллельными осям $O'u$ и $O'v$, характеристические направления первого семейства в физической плоскости будут *перпендикулярны* к характеристическим направлениям второго семейства в соответствующей точке плоскости годографа и, наоборот, характеристические направления второго семейства в физической плоскости окажутся перпендикулярными к характеристическим направлениям первого семейства в плоскости годографа.

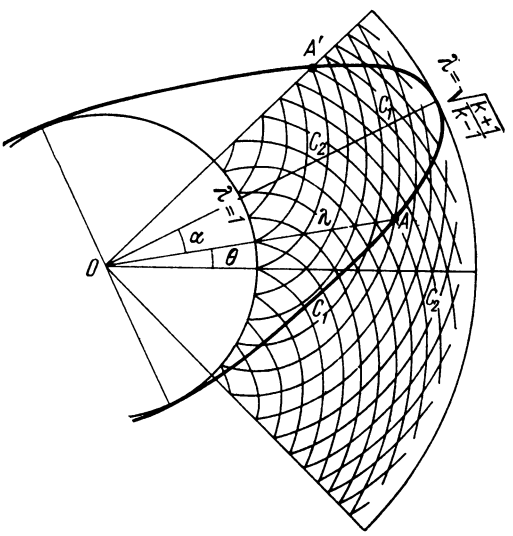


Рис. 112

Таким образом, характеристические направления в физической плоскости жестко сопряжены с характеристическими направлениями в плоскости годографа. Но дифференциальные уравнения характеристик в плоскости годографа (147) были проинтегрированы и привели к конечным формулам (148) характеристик, представляющих два совершенно определенных, *одинаковых для всех плоских сверхзвуковых течений* семейства кривых.

Замечая, что в сверхзвуковых течениях безразмерная скорость λ меняется в пределах $1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, причем левая граница соответствует критической скорости $V=a^*$, а правая — предельной *максимальной* скорости $V=V_{\max}$, проведем концентрические окружности $\lambda=1$ и $\lambda=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ и заполним пространство между ними сеткой кривых (148). Эти кривые представляют собой два семейства *эпициклоид* (рис. 112), описываемых точками окружности радиуса $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}-1\right)$, катящейся по окружности $\lambda=1$.

Располагая такой раз навсегда для данного k (на рис. 112 для воздуха, $k=1{,}4$) вычерченной *сеткой эпициклоид*, нетрудно при помощи простых графических приемов строить характеристические направления в точках физической плоскости, проводя через эти точки перпендикуляры к соответствующим, заданным семействам (148), характеристическим направлениям в плоскости годографа.

Прежде чем перейти к изложению этих графических приемов, остановимся предварительно на рассмотрении некоторых общих свойств характеристик в физической плоскости.

1. Характеристики уравнений плоского сверхзвукового течения образуют с вектором скорости газа в данной точке углы, равные углам возмущений (углам Маха)

$$\alpha = \pm \arcsin \frac{1}{M},$$

т. е. совпадают с линиями возмущений (линиями Маха).

Для доказательства воспользуемся известной формулой аналитической геометрии для тангенса угла δ между направлениями с заданными угловыми коэффициентами m и v/u; будем иметь по (145)

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{m - \frac{v}{u}}{1 + m\frac{v}{u}} = \frac{\frac{uv \pm a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2} - \frac{v}{u}}{1 + \frac{uv \pm a\sqrt{V^2 - a^2}}{u^2 - a^2}\frac{v}{u}} =$$

$$= \frac{a^2 v \pm au\sqrt{V^2 - a^2}}{u(V^2 - a^2) \pm av\sqrt{V^2 - a^2}} = \pm \frac{a}{\sqrt{V^2 - a^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}},$$

так что действительно

$$\sin\delta = \pm \frac{1}{M} = \sin\alpha.$$

Отсюда сразу вытекает *второе* свойство характеристик в физической плоскости (рис. 113).

2. Вектор скорости направлен по биссектрисе угла между характеристиками в физической плоскости.

Отметим, наконец, еще *третье* свойство характеристик.

3. Проекции скорости газа на нормали к характеристикам в данной точке физической плоскости равны по абсолютной величине местной скорости звука.

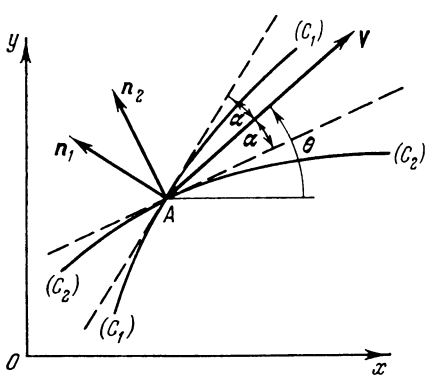


Рис. 113

Действительно (рис. 113),

$$V_{n1} = V\cos(90° + \alpha) =$$

$$= -V\sin\alpha = -V \cdot \frac{1}{M} = -a,$$

$$V_{n2} = V\cos(90° - \alpha) =$$

$$= V\sin\alpha = V \cdot \frac{1}{M} = a.$$

Пользуясь последним свойством характеристик в физической плоскости, легко показать, что кривая зависимости $\lambda(\alpha)$ для любого сверхзвукового потока представляет собой *эллипс*, форма которого зависит только от показателя адиабаты k, выражающего физические свойства газа.

Используем для этого известное изэнтропическое соотношение (V_{max} — скорость истечения в вакуум, когда $a = 0$)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{V_{max}^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k-1}a^{*2}.$$

Обозначим через u и v проекции вектора скорости V на оси координат, первая из которых направлена по касательной к характеристике, а вторая — по нормали к ней. Тогда v по свойству 3 будет равно $\pm a$,

и предыдущее равенство можно переписать в форме

$$\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{v^2}{k-1}=\frac{1}{2}\frac{k+1}{k-1}a^{*2},$$

или, полагая $\lambda_u=u/a^*$, $\lambda_v=v/a^*$,

$$\frac{k-1}{k+1}\lambda_u^2+\lambda_v^2=1, \tag{150}$$

что представляет в плоскости (λ_u, λ_v) эллипс с большой полуосью $\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ и малой полуосью, равной единице. Эллипс (150) — его называют *эллипсом Буземана* — расположен в области между окружностями $\lambda=1$ и $\lambda=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, причем в соответствии со сказанным выше *большая* его *полуось* направлена по *касательной к характеристике в данной точке физической плоскости*, а *малая* — по *перпендикуляру к ней*, т. е. по касательной к сопряженной характеристике в плоскости годографа скоростей.

Возможное расположение эллипса Буземана по отношению к сетке эпициклоид показано на рис. 112. Если эллипс, нанесенный на кусок прозрачного материала, совмещен своим центром O с центром окружностей, ограничивающих семейство эпициклоид, и так повернут, чтобы некоторая его точка A совпала с заданной точкой (λ, θ) плоскости годографа, то большая полуось эллипса, образующая с вектором скорости угол α, укажет направление одной из характеристик (линий возмущения) в физической плоскости. Направление другой характеристики получим, если совместим с концом вектора скорости, т. е. точкой (λ, θ), точку A' эллипса, служащую зеркальным отражением точки A эллипса относительно его большой оси.

Таким образом, пользуясь эллипсом Буземана, можем, зная величину и направление скорости в некоторой точке физической плоскости, без дополнительных вычислений чисто графическим путем провести через нее два характеристических направления в этой (физической) плоскости. При этом малая полуось эллипса укажет сопряженное характеристическое направление в плоскости годографа.

На использовании изложенных свойств семейств характеристик в физической плоскости течения и плоскости годографа скоростей основан графический метод расчета плоских сверхзвуковых потоков[1]).

По своей общей идее он аналогичен графическому методу расчета распространения волн конечной амплитуды, изложенному ранее в § 43. Некое его своеобразие заключается лишь в удобстве использования заранее раз навсегда вычерченных: 1) сетки характеристик в плоскости годографа — известных уже нам эпициклоид (148) — и 2) эллипса Буземана (150), изготовленного в виде прозрачного шаблона.

Перепишем уравнения характеристик в плоскости годографа (148) в форме двух отдельных уравнений

$$\theta=C_1-\sigma(\lambda), \quad \theta=\sigma(\lambda)-C_2,$$

первое из которых представляет собой семейство эпициклоид, идущих снизу вверх, а второе — сверху вниз (знак угла θ оговорен на с. 247).

Складывая и вычитая эти равенства почленно, получим

$$\theta=\frac{1}{2}(C_1-C_2), \quad \sigma(\lambda)=\frac{1}{2}(C_1+C_2), \tag{151}$$

[1]) Prandtl L., Busemann A. Näherungsverfahren zur zeichnerischen Ermittlung von ebenen Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit.— Zürich: Stodola Festschrift, 1929. Детали метода и многочисленные иллюстрации его применения можно найти в обзоре одного из создателей этого метода А. Буземана, помещенном в Handbuch der Experimental Physik.— Leipzig, 1931, Bd. 4, Teil 1, § 26, S. 421.

так что радиально расходящиеся из точки O (рис. 112) лучи ($\theta=\text{const}$) будут определяться условием $C_1-C_2=\text{const}$, а изотахи ($\lambda=\text{const}$), а следовательно, и изобары ($p/p_0=\text{const}$) — условием $C_1+C_2=\text{const}$.

На рис. 114 приводим эскиз общепринятой разметки семейств эпициклоид.

Применяемая в графических операциях сетка эпициклоид имеет более густую разбивку, соответствующую обычно интервалу изменения C_1 и C_2, равному единице. На семействе эпициклоид C_1 стоят цифры от 560 до 615, на семействе C_2 — от 360 до 415. Вместо ранее указанной на

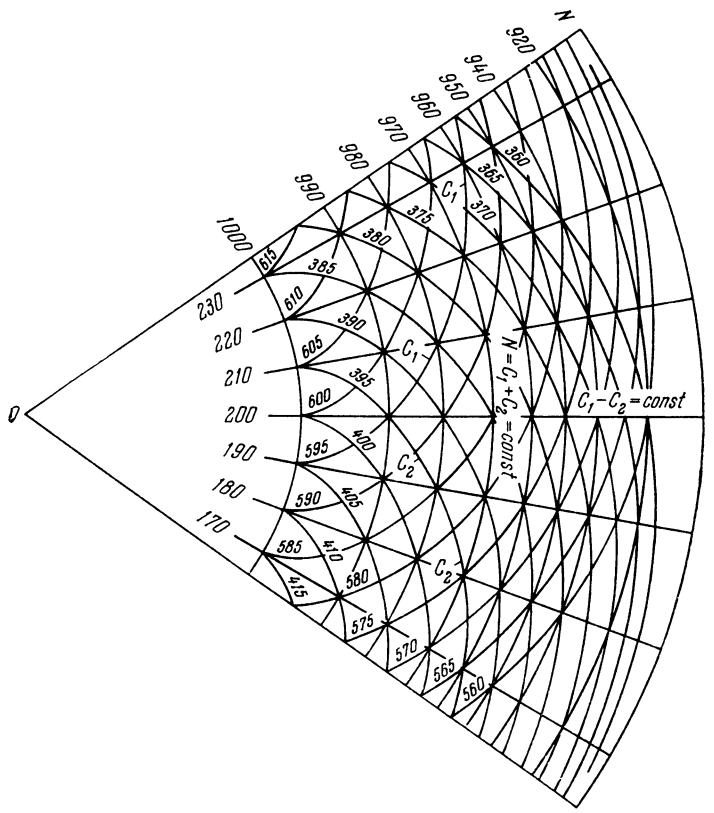


Рис. 114

рис. 112 разметки углов θ здесь принята разметка радиусов разностями постоянных C_1-C_2 от 165 до 235 (например, метка 210 стоит на пересечении эпициклоид 605 и 395). Окружности, концентрические с основными $\left(\lambda=1 \text{ и } \lambda=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\right)$, размечаются суммами констант $N=C_1+C_2$. Согласно (151) эта сумма является характерным в принятой разметке числом, определяющим безразмерные значения: λ или M, давления p/p_0, температуры T/T_0, плотности ρ/ρ_0.

Существуют подробные таблицы этих величин, рассчитанные для воздуха в зависимости от числа $N=C_1+C_2$. Приводим в качестве образца табл. 10[1]). Остальные характерные величины можно при желании определить по известным изэнтропическим соотношениям или таблицам.

[1]) См. цитированный ранее обзор А. Буземана, а также книгу Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений.— М.: Гостехиздат, 1953, с. 424, табл. 2.

Задаваясь скоростями потока на некоторой начальной кривой, не совпадающей с характеристиками физической плоскости, например на входе в рассчитываемое сопло, и пользуясь эллипсом Буземана, нанесем в достаточно близких друг к другу точках начальной кривой характеристические направления в физической плоскости. Точки пересечения их определят новую кривую, разбитую на малые интервалы. Сетка характеристик в плоскости годографа позволит найти сопряженные с характеристиками в физической плоскости эпициклоиды и тем самым получить

Таблица 10

N	λ	M	p/p_0	N	λ	M	p/p_0	N	λ	M	p/p_0
1000	1,000	1,000	0,527	982	1,486	1,718	0,200	964	1,776	2,378	0,071
999	1,073	1,090	0,476	981	1,503	1,750	0,190	963	1,791	2,421	0,067
998	1,110	1,142	0,449	980	1,520	1,780	0,180	962	1,805	2,460	0,062
997	1,141	1,186	0,424	979	1,539	1,815	0,171	961	1,819	2,506	0,057
996	1,172	1,228	0,402	978	1,556	1,850	0,162	960	1,832	2,548	0,055
995	1,200	1,265	0,382	977	1,575	1,885	0,153	959	1,845	2,592	0,051
994	1,227	1,305	0,363	976	1,590	1,923	0,145	958	1,858	2,636	0,048
993	1,253	1,342	0,345	975	1,608	1,958	0,137	957	1,872	2,680	0,044
992	1,278	1,376	0,329	974	1,625	1,995	0,130	956	1,884	2,730	0,041
991	1,300	1,413	0,313	973	1,640	2,028	0,123	955	1,898	2,778	0,039
990	1,322	1,443	0,298	972	1,656	2,065	0,116	954	1,910	2,825	0,036
989	1,343	1,474	0,284	971	1,671	2,101	0,109	953	1,923	2,875	0,033
988	1,365	1,506	0,270	970	1,686	2,138	0,103	952	1,936	2,920	0,031
987	1,387	1,542	0,257	969	1,700	2,178	0,097	951	1,948	2,978	0,029
986	1,409	1,575	0,245	968	1,718	2,215	0,091	950	1,960	3,028	0,027
985	1,426	1,608	0,233	967	1,732	2,258	0,086	949	1,972	3,078	0,025
984	1,447	1,643	0,221	966	1,748	2,298	0,081	948	1,984	3,135	0,023
983	1,466	1,680	0,210	965	1,763	2,338	0,076	947	1,995	3,180	0,021

числа C_1, C_2 и их сумму. По этим числам, пользуясь ранее указанной таблицей, найдем термодинамические величины в точках новой кривой, которая может быть опять принята за начальную и т. д.

Таким образом, часть физической плоскости, в которой происходит сверхзвуковое течение газа, окажется заполненной характеристиками,

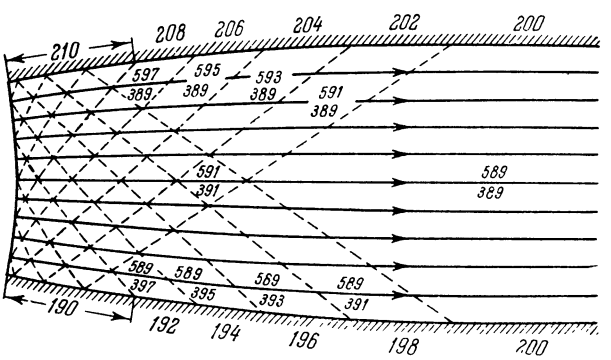


Рис. 115

разбивающими ее на малые «ромбы», по диагоналям которых будут направлены искомые отрезки линий тока. Внутри каждого такого ромба помещают одно над другим значения отметок эпициклоид (характеристик в плоскости годографа), относящихся к данному ромбу физической плоскости. Верхнее число (большее) относится к характеристике, идущей снизу вверх, нижнее (меньшее) — к характеристике, идущей сверху вниз.

Наличие в потоке твердых границ или свободных поверхностей мало усложняет графическое построение. Процесс *отражения* сводится к переходу от одного семейства характеристик в физической плоскости к другому. Суммы индексов при помощи существующих таблиц легко переводятся в средние значения термодинамических параметров, относящиеся к малой области данного ромба. Пример графического построения сопла показан на рис. 115; поток представляет собой переход от радиально расширяющегося с полным углом раствора в 20° к плоскопараллельному потоку. Шаг сетки по углам равен 2° (см. верхние и нижние цифры).

При наличии сужений потока, вызывающих возникновение косых скачков, в графическом построении удобно пользоваться диаграммой ударных поляр (строфоид) (см. рис. 97).

Кроме только что изложенного графического метода, обладающего полной общностью, имеются еще различные приближенные аналитические методы, особенно для такого важного случая, как плоское безвихревое движение газа при очень больших значениях чисел Маха. Уже был ранее упомянут метод Ньютона, позволяющий в некоторых случаях, несмотря на его приближенность, получать при определении суммарных динамических характеристик удовлетворительную точность.

К вопросу о приближенных методах расчета сверхзвуковых обтеканий тонких тел мы еще вернемся в конце следующей главы в связи с рассмотрением пространственных сверхзвуковых потоков.

ГЛАВА IX

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

§ 69. Потенциалы скоростей простейших пространственных потоков

На основании общих соображений, приведенных в начале гл. VII, задачу о внешнем обтекании тела можно значительно упростить, сделав предположение о безвихревом характере движения. В этом предположении во всей области движения имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = 0,$$

и, следовательно, вектор скорости имеет потенциал φ, определяемый равенством $\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} \varphi$. В прямоугольной декартовой системе

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В проекциях на оси *криволинейных* координат [см. (84) гл. I]

$$V_{q_i} = (\operatorname{grad} \varphi)_{q_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

В цилиндрической и сферической системах криволинейных координат, согласно (85) и (86) гл. I, имеем формулы:

цилиндрические координаты:

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad V_\varepsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \tag{2}$$

сферические координаты:

$$V_R = \frac{\partial \varphi}{\partial R}, \quad V_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad V_\varepsilon = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}. \tag{3}$$

Предполагая еще, что жидкость несжимаема, составим равенство

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0, \tag{4}$$

представляющее собой известное *уравнение Лапласа*. Искомый потенциал скоростей φ является решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим определенным граничным условиям. Рассмотрим задачу о внешнем обтекании неподвижного твердого тела с поверхностью σ и ортом внешней нормали $\boldsymbol{n}$ безграничной жидкостью, причем поток на бесконечности считаем однородным и имеющим скорость $\boldsymbol{V}_\infty$. Тогда граничными условиями будут:

условие непроницаемости поверхности тела

$$V_n = \operatorname{grad}_n \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на поверхности } \sigma;$$

условие на бесконечности

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{V}_\infty \text{ при } r \to \infty,$$

где r — радиус-вектор точек области течения относительно начала координат, расположенного вблизи обтекаемого тела.

Как доказывается в теории потенциала, при весьма широких предположениях о виде поверхности σ и при только что указанных граничных

условиях, уравнение Лапласа имеет единственное решение (задача Неймана). Не останавливаясь на общей теории, перейдем к рассмотрению некоторых простейших частных гидродинамических задач, а затем и более общих пространственных течений.

Начнем, как и в случае плоского движения, с установления потенциалов простых движений.

1. *Безграничный однородный прямолинейный поток*, имеющий заданную скорость V_∞ с проекциями u_∞, v_∞, w_∞, удовлетворяет очевидной системе равенств

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u_\infty=\text{const},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v_\infty=\text{const},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=w_\infty=\text{const}.$$

Следовательно, потенциал скоростей в этом случае равен

$$\varphi=u_\infty x+v_\infty y+w_\infty z=V_\infty(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma), \tag{5}$$

где α, β, γ — углы заданного направления потока с осями координат Ox, Oy и Oz.

2. *Поток от источника* (*стока*) мощности Q, помещенного в начало координат O в безграничной жидкости, симметричен и дает поле скоростей, отвечающее очевидному условию сохранения расхода

$$V\cdot 4\pi R^2=Q,$$

где R — расстояние точки потока от источника; отсюда получим

$$V=\frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Замечая, что в сферической системе координат

$$V_R=\frac{\partial\varphi}{\partial R}=V=\frac{Q}{4\pi R^2},\quad V_\theta=\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0,\quad V_\varepsilon=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}=0,$$

найдем искомый потенциал скоростей

$$\varphi=-\frac{Q}{4\pi R}, \tag{6}$$

причем в случае источника $Q>0$, в случае стока $Q<0$. В выражении (6) нетрудно узнать простейший случай ньютонова потенциала, встречающегося в теории притяжения, электростатике и др.

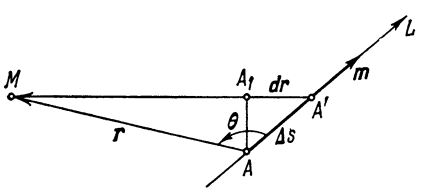


Рис. 116

3. *Поток диполя в безграничной жидкости* получим, используя прием наложения потоков. Определим сначала потенциал скоростей поля, создаваемого совокупностью источника и стока с равными по абсолютной величине мощностями $\pm Q$.

Расположим сток (рис. 116) в точке A прямой линии AL, источник — в точке A', находящейся от точки A на расстоянии $AA'=\Delta s$. Определим потенциал скоростей φ в некоторой точке M с вектором-радиусом $\overrightarrow{AM}=r$, образующим угол θ с направлением прямой AL; найдем ($r'=A'M$)

$$\varphi=-\frac{Q}{4\pi r'}+\frac{Q}{4\pi r}.$$

Предположим теперь, что источник сближается со стоком, а мощность увеличивается до бесконечности и при этом выполняется равенство

$$\lim_{\substack{A'\to A\\ Q\to\infty}} Q\cdot AA' = m.$$

Тогда, переписывая потенциал скоростей φ в виде

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} Q\cdot AA'\cdot\frac{1/r'-1/r}{AA'}$$

и переходя к пределу, получим

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{7}$$

или, вычисляя производную и замечая, что, согласно рис. 116,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds} = \frac{\cos\theta}{r^2},$$

получим

$$\varphi = -\frac{m\cos\theta}{4\pi r^2}. \tag{8}$$

Полученный предельный поток с потенциалом скоростей φ, определенный формулами (7) или (8), называют потоком *диполя* в точке A с осью AL и моментом m. Иногда момент диполя рассматривают как вектор $\boldsymbol{m}$, имеющий величину m и направленный по оси диполя AL; при этом потенциал диполя можно представить при помощи скалярного произведения момента на вектор-радиус так:

$$\varphi = -\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}.$$

4. *Непрерывное распределение источников в безграничной жидкости.* Пусть внутри некоторого объема τ непрерывно распределены источники (стоки) так, что на единицу объема приходится мощность q. Величина q, представляющая собой функцию координат точек в объеме τ, играет роль объемной плотности распределения источников ($q>0$) или стоков ($q<0$). Элементу объема $d\tau$, находящемуся в некоторой точке A объема τ, соответствует источник мощности $q\,d\tau$, и потенциал скоростей этого элементарного источника в любой точке M пространства, заполненного жидкостью, как внутри, так и вне объема τ равен

$$d\varphi = -\frac{q\,d\tau}{4\pi r},$$

где r — длина вектора-радиуса $\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{r}$, соединяющего элементарный источник в точке A с текущей точкой пространства M. Пользуясь приемом наложения потоков, определим потенциал скоростей в точке M от непрерывно распределенных в объеме τ источников в виде

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_{\tau}\frac{q\,d\tau}{r}. \tag{9}$$

Подчеркнем, что интегрирование производится по всем элементарным объемам, образующим объем τ, т. е. по переменным координатам точки A, в то время как точка M, в которой определяется потенциал скоростей, является фиксированной. Если обозначить через a, b, c декартовы координаты точки A, а через x, y, z — координаты точки M, то

формулу (9) можно переписать явно так:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(\tau)} \frac{q(a, b, c)\,da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}. \tag{10}$$

Если область течения жидкости *безгранична*, то функция φ при удалении точки M в бесконечность будет стремиться к нулю. Обозначим через R среднее расстояние точки M от частиц конечного объема τ; тогда при достаточном удалении точки M можно сказать, что потенциал скоростей φ будет стремиться к нулю, как $1/R$ при $R\to\infty$, или, иначе, что функция φ имеет порядок малой величины $1/R$:

$$\varphi = O(1/R).$$

Потенциал скоростей (9) совпадает по форме с общим выражением ньютонова потенциала. Если под q понимать плотность распределения массы в объеме τ, то выражение (9) даст потенциал сил тяготения единичной массы в точке M к некоторой в общем случае неоднородной массе, заключенной в объеме τ; если под q понимать плотность распределения электрических зарядов, то φ будет потенциалом электростатического поля.

Вспоминая определение дивергенции вектора скорости как отнесенного к единице объема расхода жидкости из непрерывно распределенных источников, можем, очевидно, для любой точки объема τ написать

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = q,$$

откуда, используя равенства $\boldsymbol{V} = \operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\boldsymbol{V} = \nabla^2\varphi$, получим следующее *уравнение Пуассона*:

$$\nabla^2\varphi = q. \tag{11}$$

Отсюда следует, что функция φ, определенная формулой (9) в некоторой *безграничной* области, заключающей в себе заполненный источниками конечный объем τ, является решением уравнения Пуассона (11) внутри объема; в остальной области, где $q=0$, функция φ представляет собой решение уравнения Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0,$$

причем $\varphi = O(1/R)$.

В теории потенциала доказывается, что ньютонов потенциал (9) дает единственное конечное, непрерывное и однозначное решение уравнения Пуассона (11), обращающееся на бесконечности в нуль.

Следует, конечно, иметь в виду, что указанное решение является лишь *простейшим частным решением уравнения* Пуассона, отвечающим *безграничной* области и не подчиненным граничным условиям, которые возникают в задачах определения потенциала в *ограниченных* областях.

Наряду с объемным распределением источников в гидродинамике, также как и в других отделах физики, рассматриваются еще поверхностные и линейные распределения источников. Сохраняя для поверхностной и линейной плотности распределения источников то же обозначение q, будем иметь соответствующие потенциалы скоростей в виде поверхностного и линейного интегралов

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma}\frac{q\,d\sigma}{r}, \quad \varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{L}\frac{q\,ds}{r}. \tag{12}$$

Первое из этих выражений, представляющее потенциал скоростей непрерывного распределения источников по некоторой поверхности σ, дает гидродинамическую интерпретацию известного в теории тяготения и электростатического притяжения *потенциала простого слоя*. Потенциал простого слоя является решением уравнения Лапласа, причем, как дока-

зывается в теории потенциала, потенциал простого слоя конечен и непрерывен во всей области, включая и поверхность σ[1]). Производная от потенциала простого слоя по направлению нормали к поверхности σ претерпевает при переходе текущей точки M через поверхность σ разрыв непрерывности — конечный скачок.

Подобно тому как только что рассматривались потенциалы скоростей непрерывных распределений источников, можно ввести аналогичные понятия и для непрерывного распределения диполей. Остановимся на одном, наиболее важном распределении диполей, образующем так называемый *двойной слой*. Возьмем некоторую поверхность σ и покроем ее непрерывно распределенными диполями так, чтобы моменты их (или оси) совпали по направлению с внешними нормалями n к поверхности σ. Обозначив плотность распределения диполей через m, получим вектор момента диполя, приходящегося на элементарную площадку $d\sigma$ с ортом внешней нормали n, в виде $m d\sigma n$, а элементарный потенциал скоростей $d\varphi$, согласно (7) или (8), будет равен

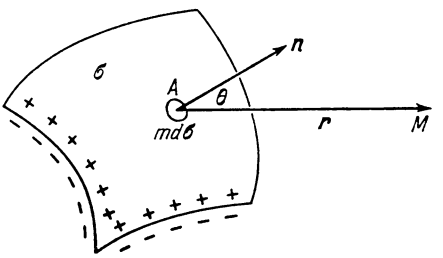


Рис. 117

$$d\varphi = -\frac{1}{4\pi} m \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{m\cos\theta}{r^2} d\sigma,$$

где θ (рис. 117) — угол между внешней нормалью к поверхности σ и вектором-радиусом $r=\overrightarrow{AM}$ текущей точки M относительно точки A, взятой на поверхности.

Полный потенциал скоростей от покрытой диполями поверхности σ

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma m \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{m\cos\theta}{r^2} d\sigma \qquad (13)$$

служит гидродинамической аналогией известного в теории электричества и магнетизма потенциала двойного слоя. Если потенциал простого слоя представляет, например, электростатический потенциал заряженной поверхности, то потенциал двойного слоя дает магнитный потенциал намагниченной поверхности (магнитного листка).

Упомянем, что потенциал двойного слоя (13) также является решением уравнения Лапласа, но, в отличие от простого слоя, потенциал двойного слоя претерпевает разрыв непрерывности при переходе текущей точки M через поверхность σ.

Комбинируя потенциалы простого и двойного слоев, можно решать различные задачи обтекания тел.

§ 70. Поле скоростей, индуцируемое заданной системой вихрей в безграничной жидкости. Формула Био — Савара

Наряду с основными *особенностями* скоростного поля: источниками, стоками и диполями, рассмотрим еще вихревые трубки и линии.

Предположим, что в некотором объеме τ (конечном или бесконечном, как, например, в случае бесконечно длинной вихревой трубки) задано непрерывное распределение завихренности Ω и требуется разыскать рас-

[1]) В точках поверхности σ потенциал простого слоя выражается, согласно (12), через несобственный интеграл, который берется в смысле своего главного значения.

пределение скоростей во всей области течения. Простейшей задачей такого рода является определение по заданному полю вихрей поля скоростей в *безграничной* области. В этом случае вопрос сводится к составлению такого решения относительно $\boldsymbol{V}$ уравнения

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}, \tag{14}$$

которое стремилось бы к нулю при удалении на бесконечность от области, занятой вихрями.

Введем в рассмотрение *векторный потенциал* $\boldsymbol{A}$, связанный с вектором скорости $\boldsymbol{V}$ соотношением

$$\boldsymbol{V}=\operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \tag{15}$$

причем подчиним векторный потенциал дополнительному условию

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}=0.$$

Тогда уравнение (14), если вспомнить последнюю формулу (88) гл. I

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A}-\nabla^2 \boldsymbol{A},$$

превратится в следующее:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\Omega}. \tag{16}$$

Рассматривая это уравнение как *векторный аналог уравнения* Пуассона (11), можем составить решение уравнения (16) в форме обобщения ньютонова потенциала (9)

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\boldsymbol{\Omega}\, d\tau}{r}, \tag{17}$$

где r — радиус-вектор текущей точки поля M по отношению к элементу объема $d\tau$.

Согласно (15) получим искомое значение вектора скорости

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int_{\tau}\frac{\boldsymbol{\Omega}\, d\tau}{r}. \tag{18}$$

Остановимся подробнее на случае окружающей в поле вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}$ вихревую нить L (рис. 118) элементарной вихревой трубки с конечной циркуляцией Γ. Обозначим через $d\boldsymbol{r}$ элемент нити, ориентированный в ту же сторону, что и $\boldsymbol{\Omega}$; тогда, производя под знаком интеграла (18) по известной теореме Стокса о связи между интенсивностью вихревой трубки и циркуляцией скорости по охватывающему трубку контуру замену

$$\boldsymbol{\Omega}\, d\tau=\boldsymbol{\Omega}\, d\sigma\, ds=\boldsymbol{\Omega}\, d\sigma\, d\boldsymbol{r}=\Gamma d\boldsymbol{r},$$

получим вместо (18)

$$\boldsymbol{V}=\frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{rot}\int_{L}\frac{1}{r}\,d\boldsymbol{r}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{L}\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\,d\boldsymbol{r}\right).$$

Используя третье равенство (88) гл. I

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\,d\boldsymbol{r}\right)=\frac{1}{r}\operatorname{rot}(d\boldsymbol{r})+\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\times d\boldsymbol{r}$$

и замечая, что $d\boldsymbol{r}$ является *потенциальным* вектором, так что $\operatorname{rot}(d\boldsymbol{r})\equiv 0$, сможем предыдущее выражение $\boldsymbol{V}$ переписать в виде

$$\boldsymbol{V}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{L}\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\times d\boldsymbol{r}. \tag{19}$$

Полученное решение задачи о поле скоростей вокруг заданной вихревой нити L с циркуляцией Γ можно еще упростить, непосредственно

вычисляя градиент под знаком интеграла:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\operatorname{grad} r = -\frac{1}{r^2}\frac{r}{r} = -\frac{r}{r^3};$$

это приводит к *гидродинамическому аналогу* известной в теории электромагнетизма *формулы Био — Савара*

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \frac{dr \times r}{r^3}. \tag{20}$$

Если рассмотреть элементарную скорость dV, образованную (*индуцированную*) в точке M элементом вихревой нити dr, то можно вместо (20) написать

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{dr \times r}{r^3},$$

или, переходя к величине элементарной скорости,

$$|dV| = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{|dr \times r|}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{ds\sin\theta}{r^2}. \tag{21}$$

По аналогичной формуле Био — Савара определяют магнитное поле от элемента электрического тока.

Чтобы проиллюстрировать применение формулы (20), определим скорость, индуцированную в точках пространства *прямолинейным отрезком AB вихревой нити* с циркуляцией Γ (рис. 119).

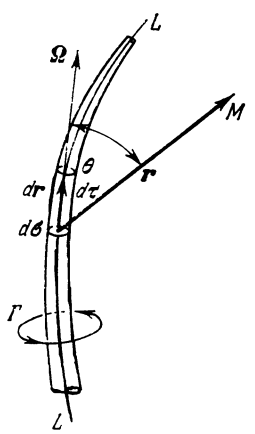


Рис. 118

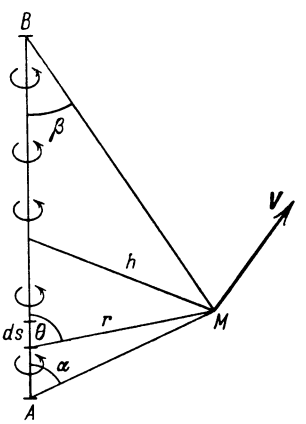


Рис. 119

Замечая, что все элементы прямолинейного вихря будут в данной точке M давать одинаково направленные элементарные скорости dV (по перпендикуляру к плоскости, проведенной через отрезок AB и точку M, в сторону вращения, создаваемого вихрем), и пользуясь очевидными равенствами (h — кратчайшее расстояние точки M от отрезка AB)

$$h = r\sin\theta, \quad ds = -d(h\operatorname{ctg}\theta) = h\frac{d\theta}{\sin^2\theta},$$

найдем по (21) выражение для $|dV|$

$$|dV| = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\sin\theta\sin^2\theta}{h^2}\frac{h\,d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\Gamma}{4\pi h}\sin\theta\,d\theta.$$

Интегрирование по θ от $\theta=\alpha$ до $\theta=\pi-\beta$ дает искомую величину скорости V, индуцированной вихревым отрезком AB:

$$V=\frac{\Gamma}{4\pi h}\int_{\alpha}^{\pi-\beta}\sin\theta\,d\theta=\frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\alpha+\cos\beta). \tag{22}$$

Формула (22) играет основную роль в расчетах поля скоростей вокруг вихревых линий и будет в дальнейшем использована в теории крыла конечного размаха.

Полагая в формуле (22) $\alpha=\beta=0$, вновь получим известную из теории плоского движения формулу скорости, индуцированной бесконечно длинной прямолинейной вихревой нитью,

$$V=\frac{\Gamma}{2\pi h}.$$

§ 71. Потенциал поля скоростей, индуцированного замкнутой вихревой нитью

В случае замкнутой вихревой нити легко получить простое выражение потенциала скоростей.

Рассмотрим замкнутую вихревую нить L интенсивности Γ в поле вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ (рис. 120), ограничивающую некоторую разомкнутую поверхность σ, и составим интеграл

$$\int_L \boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{r}.$$

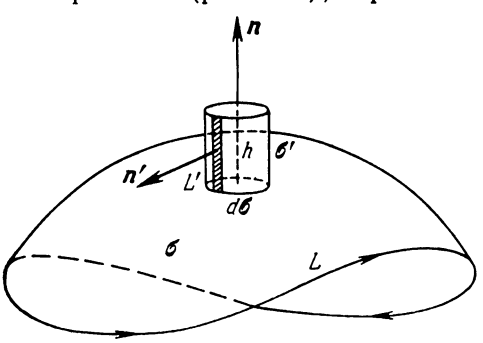


Рис. 120

Построим элементарный цилиндр с образующими, параллельными орту нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности σ, и с направляющей L', ограничивающей элементарную площадку $d\sigma$; тогда

$$\int_{L'}\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{r}'=\frac{1}{h}\int_{\sigma'}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}')\,d\sigma',$$

где σ' — полная поверхность элементарного цилиндра, состоящая из боковой поверхности и двух оснований $d\sigma$, а $d\boldsymbol{r}'$ и $d\sigma'$ — соответственно элементы контура L' и поверхности σ' элементарного цилиндра ($d\sigma'$ на рис. 120 представлено заштрихованной полоской). Применив формулу тройного векторного произведения, найдем

$$\int_{L'}\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{r}'=\frac{1}{h}\int_{\sigma'}\boldsymbol{n}a_{n'}\,d\sigma'-\frac{1}{h}\int_{\sigma'}\boldsymbol{n}'a_n\,d\sigma'=\boldsymbol{n}\frac{d\tau}{h}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\operatorname{grad}\left(a_n\frac{d\tau}{h}\right)=$$

$$=\boldsymbol{n}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,d\sigma-\operatorname{grad}(a_n\,d\sigma).$$

Суммируя обе части последнего равенства по всем элементарным контурам L' слева и по всем элементарным площадкам $d\sigma$ справа, получим

$$\int_L\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{r}=\int_\sigma\boldsymbol{n}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,d\sigma-\operatorname{grad}\int_\sigma a_n\,d\sigma. \tag{23}$$

Положим в этой формуле $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}(1/r)$; тогда будем иметь вместо (19)

$$V=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_\sigma\boldsymbol{n}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma-\frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{grad}\int_\sigma\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma.$$

Но, как уже ранее упоминалось, функция $1/r$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0,$$

так что окончательно найдем

$$V=-\frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{grad}\int_\sigma \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma. \tag{24}$$

Искомый потенциал поля скоростей замкнутой вихревой нити, следовательно, равен

$$\varphi=-\frac{\Gamma}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma. \tag{25}$$

Сравнивая (25) с выражением потенциала двойного слоя (13), заключим, что *потенциал скоростей замкнутой вихревой нити L с циркуляцией Γ совпадает с потенциалом двойного слоя диполей, расположенных по поверхности σ, опирающейся на контур L, и имеющих одинаковую по всей поверхности плотность распределения момента, равную циркуляции вихревой нити.*

Доказанная только что гидродинамическая теорема представляет собой аналог известной теоремы электродинамики об эквивалентности кругового электрического тока полю магнитного листка.

§ 72. Функция тока в пространственных движениях

В пространственных движениях нельзя ввести функцию тока в общем случае движения, как это было сделано при изучении плоских движений; функция тока существует только в отдельных частных случаях; некоторые из них будут рассмотрены ниже.

Согласно второму равенству системы (84) гл. I уравнение несжимаемости (4) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3V_{q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1V_{q_2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2V_{q_3})=0.$$

Предположим, что одна из составляющих скоростей движения, например V_{q_3}, повсюду равна нулю или сохраняет не зависящую от q_3 величину, причем в последнем случае коэффициенты Ляме H_1 и H_2 также не зависят от q_3. Тогда предыдущее уравнение сводится к более простому

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3V_{q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1V_{q_2})=0$$

и можно утверждать существование функции ψ, удовлетворяющей системе равенств

$$H_2H_3V_{q_1}=\pm\frac{\partial\psi}{\partial q_2},\quad H_3H_1V_{q_2}=\mp\frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \tag{26}$$

откуда следует

$$V_{q_1}=\pm\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_2},\quad V_{q_2}=\mp\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}. \tag{27}$$

Такого рода функцию ψ будем по аналогии со случаем плоского движения называть *функцией тока в криволинейных координатах.* Выбор верхних или нижних знаков произволен и определяется из дополнительных соображений.

Подчеркнем, что наличие функции тока зависит не только от характера движения, но и от выбора криволинейной системы координат, при помощи которой движение описывается.

Рассмотрим, например, осесимметричное относительно оси Oz движение несжимаемой жидкости в меридианных плоскостях, проходящих через ось Oz. При таком движении существуют все три декартовы проекции скорости u, v, w, и все они зависят от трех координат x, y, z, так что из уравнения несжимаемости $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$, составленного в декартовых координатах, можно заключить об отсутствии функции тока. Вместе с тем при пользовании цилиндрической системой координат r, ε, z при меридианности движения ($V_\varepsilon=0$) уравнение несжимаемости имеет вид

$$\frac{\partial (rV_r)}{\partial r}+\frac{\partial (rV_z)}{\partial z}=0 \tag{28}$$

и позволяет найти функцию тока $\psi(r, z)$, связанную с проекциями скорости на оси *цилиндрических* координат соотношениями (выбор знаков будет вскоре пояснен)

$$rV_r=-\frac{\partial \psi}{\partial z},\quad rV_z=\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

откуда

$$V_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z},\quad V_z=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{29}$$

Аналогично в сферической системе координат (R, θ, ε) при $V_\varepsilon=0$ уравнение несжимаемости имеет вид

$$\frac{\partial (R^2V_R\sin\theta)}{\partial R}+\frac{\partial (RV_\theta\sin\theta)}{\partial \theta}=0 \tag{30}$$

и проекции скорости на оси *сферической* системы координат выражают через соответствующую функцию тока ψ следующим образом:

$$V_R=\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta},\quad V_\theta=-\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial R}. \tag{31}$$

Введенная уравнениями (27) функция тока обладает свойствами, аналогичными функции тока в плоском движении. Замечая, что в ортогональных криволинейных координатах уравнение линии тока при $dq_3=0$ имеет вид

$$\frac{H_1dq_1}{V_{q_1}}=\frac{H_2dq_2}{V_{q_2}},\quad V_{q_1}=H_1\frac{dq_1}{dt},\quad V_{q_2}=H_2\frac{dq_2}{dt},\quad V_{q_3}=H_3\frac{dq_3}{dt}=0,$$

по (27) найдем

$$d\psi=\frac{\partial \psi}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial \psi}{\partial q_2}dq_2=0,\quad dq_3=0.$$

Следовательно, вдоль линии тока

$$\psi=\text{const},\quad q_3=\text{const}.$$

В случае ранее рассмотренного осесимметричного движения жидкости по меридианным плоскостям ($\varepsilon=\text{const}$) равенства $\psi=\text{const}$ представят поверхности, образованные вращением линий тока вокруг оси Oz. Поверхности $\psi=\text{const}$ назовем *поверхностями тока*. В рассмотренном только что частном случае осесимметричного движения можно на оси Oz положить $\psi=0$; тогда значения ψ будут пропорциональны секундным

объемным расходам жидкости через ортогональное к оси сечение трубки тока, ограниченной данной поверхностью тока.

Действительно, секундный объемный расход сквозь ортогональное к оси Oz сечение, ограниченное окружностью данного радиуса r, будет, согласно (29) и условию $\psi(0)=0$, равен

$$Q=\int_0^r V_z\cdot 2\pi r\,dr=2\pi\int_0^r \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,r\,dr=2\pi\psi(r).$$

Теперь понятно, что выбор знаков в правых частях (27) произведен так, чтобы при $Q>0$ было и $\psi>0$.

Функцию тока можно рассматривать как одну из составляющих векторного потенциала скоростей $\boldsymbol{A}$, связанного с вектором скорости равенством (15). Действительно, согласно этому равенству и формулам (84) гл. I, имеем

$$V_{q_1}=\operatorname{rot}_{q_1}\boldsymbol{A}=\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_3A_{q_3})}{\partial q_2}-\frac{\partial(H_2A_{q_2})}{\partial q_3}\right],$$

$$V_{q_2}=\operatorname{rot}_{q_2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(H_1A_{q_1})}{\partial q_3}-\frac{\partial(H_3A_{q_3})}{\partial q_1}\right],$$

$$V_{q_3}=\operatorname{rot}_{q_3}\boldsymbol{A}=\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(H_2A_{q_2})}{\partial q_1}-\frac{\partial(H_1A_{q_1})}{\partial q_2}\right].$$

Выбирая вектор $\boldsymbol{A}$ ортогональным во всем пространстве координатным поверхностям $q_3=\text{const}$, найдем

$$A_{q_1}=A_{q_2}=0,\quad V_{q_3}=0,\quad V_{q_1}=\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial(H_3A_{q_3})}{\partial q_2},\quad V_{q_2}=-\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial(H_3A_{q_3})}{\partial q_1};$$

положив $H_3A_{q_3}=\pm\psi(q_1,q_2)$, а коэффициенты Ляме и величину A_{q_3} — не зависящими от q_3, получим формулы (27). Так, например, в сферической или цилиндрической системах координат вектор $\boldsymbol{A}$ должен быть направлен по касательной к параллельным кругам, соответствующим изменению одного ε, и не зависеть от ε.

Приведем несколько примеров функций тока для простейших движений.

1. *Однородный прямолинейный поток* со скоростью $\boldsymbol{V}_\infty$, параллельной оси Oz.

В *цилиндрической* системе координат имеем

$$V_r=0=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad V_z=V_\infty=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

следовательно,

$$\psi=\frac{1}{2}V_\infty r^2. \tag{32}$$

В *сферической* системе координат

$$V_R=V_\infty\cos\theta=\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad V_\theta=-V_\infty\sin\theta=-\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial R}.$$

Интегрирование этой системы уравнений в полных дифференциалах дает

$$\psi=\frac{1}{2}V_\infty R^2\sin^2\theta. \tag{33}$$

2. *Источник* (*сток*). Выражение функции тока в сферической системе координат найдем, интегрируя систему уравнений

$$V_R=\frac{Q}{4\pi R^2}=\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad V_\theta=0=-\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial R}.$$

Получим

$$\psi = -\frac{Q\cos\theta}{4\pi} + \text{const},$$

или, подбирая константу из условия $\psi = 0$ при $\theta = 0$,

$$\psi = \frac{Q}{4\pi}(1 - \cos\theta). \tag{34}$$

3. *Диполь.* Используя выражение потенциала скоростей (8), будем иметь в сферических координатах систему уравнений

$$V_R = \frac{m\cos\theta}{2\pi R^3} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad V_\theta = \frac{m\sin\theta}{4\pi R^3} = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial R},$$

откуда следует

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{m}{2\pi R}\sin\theta\cos\theta, \quad \frac{\partial\psi}{\partial R} = -\frac{m}{4\pi R^2}\sin^2\theta.$$

Легко найти интеграл этой системы

$$\psi = \frac{m\sin^2\theta}{4\pi R}, \tag{35}$$

обращающийся в нуль при $\theta = 0$.

§ 73. Обтекание сферы. Парадокс Даламбера

Точно так же, как и в случае плоского обтекания круглого цилиндра, можно найти пространственное обтекание *сферы*, накладывая однородный поток, параллельный, например, оси Oz, со скоростью V_∞ на

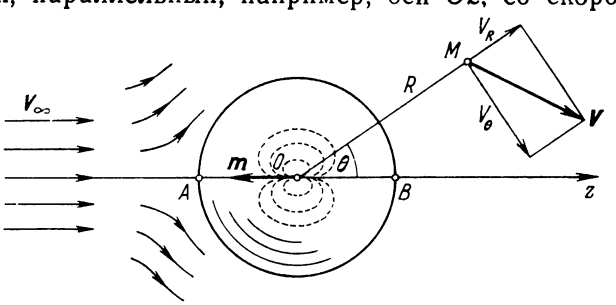


Рис. 121

поток от диполя с моментом, ориентированным вдоль этой оси, но в сторону, противоположную набегающему потоку (рис. 121). Складывая функции тока (33) и (35), найдем функцию тока составного потока[1])

$$\psi = \frac{1}{2}V_\infty R^2\sin^2\theta - \frac{m}{4\pi R}\sin^2\theta = \left(\frac{1}{2}V_\infty R^2 - \frac{m}{4\pi R}\right)\sin^2\theta. \tag{36}$$

Уравнение нулевой поверхности тока

$$\psi = \left(\frac{1}{2}V_\infty R^2 - \frac{m}{4\pi R}\right)\sin^2\theta = 0$$

разбивается на уравнение поверхности сферы

$$R = \sqrt[3]{\frac{m}{2\pi V_\infty}} = a,$$

[1]) В соответствии с выбором направления момента m в формуле (35) заменено на $-m$, где $m > 0$.

где a — радиус сферы, и уравнение оси Oz

$$\theta = 0, \pi.$$

Отсюда следует, что, желая найти функцию тока обтекания сферы радиуса a потоком со скоростью V_∞ на бесконечности, направленным вдоль оси Oz, надо положить в выражении функции тока (36)

$$m = 2\pi a^3 V_\infty;$$

тогда получим

$$\psi = \frac{1}{2} V_\infty R^2 \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3\right] \sin^2\theta. \tag{37}$$

Нетрудно найти и потенциал скоростей, проинтегрировав систему уравнений связи потенциала φ с функцией тока ψ или, проще, непосредственно составляя сумму потенциалов слагаемых потоков (5) и (8),

$$\varphi = V_\infty z + \frac{m\cos\theta}{4\pi R^2} = V_\infty R\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\cos\theta. \tag{38}$$

Исследуем полученный поток. Прежде всего найдем распределение скоростей

$$V_R = \frac{\partial\varphi}{\partial R} = V_\infty\left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\cos\theta,$$

$$V_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -V_\infty\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\sin\theta. \tag{39}$$

Сразу видно, что на поверхности сферы ($R = a$) выполняется основное граничное условие непроницаемости твердой стенки

$$V_n = V_R = 0,$$

а на бесконечности ($R \to \infty$)

$$V_R = V_\infty \cos\theta, \quad V_\theta = -V_\infty \sin\theta,$$

т. е. скорость однородного потока на бесконечности равна по величине V_∞ и направлена по оси Oz в положительную сторону.

Распределение скорости по *поверхности* сферы характеризуется равенством

$$V_\theta = -\frac{3}{2} V_\infty \sin\theta.$$

Точки A и B (рис. 121) *критические*, в них скорость обращается в нуль. Максимальная скорость имеет место в миделевой плоскости при $\theta = \pi/2$; она равна по абсолютной величине

$$|V_\theta|_{\max} = \frac{3}{2} V_\infty.$$

Сравнивая этот результат со случаем обтекания круглого цилиндра (гл. VII), видим, что в случае пространственного обтекания сферы максимальная скорость на ее поверхности достигает только трех вторых скорости набегающего потока, в то время как в случае плоского обтекания круглого цилиндра максимальная скорость в два раза превышает скорость набегающего потока, т. е. цилиндр производит более значительное возмущение однородного потока, чем сфера. Это и естественно, так как сечение цилиндра, нормальное к потоку, бесконечно, а у сферы ограничено. Заметим, что (так же как и в случае плоского потока) в действительности максимальная скорость не достигает столь большого значения; сфера представляет собой плохо обтекаемое тело; поток реальной жидкости срывается с поверхности сферы, не доходя при одних

условиях даже до миделевой плоскости, при других — несколько заходя за нее.

Распределение давления по поверхности сферы получим по уравнению Бернулли

$$p+\rho\frac{V^2}{2}=p_\infty+\rho\frac{V_\infty^2}{2},$$

из которого следует выражение коэффициента давления

$$c_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}=1-\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2=1-\frac{9}{4}\sin^2\theta.$$

Как видно непосредственно из последней формулы, главный вектор сил давления потока идеальной жидкости на поверхность сферы равен нулю. Сфера не оказывает сопротивления набегающему на нее однородному на бесконечности потоку, или, иначе, сфера при своем равномерном движении в идеальной жидкости не испытывает сопротивления.

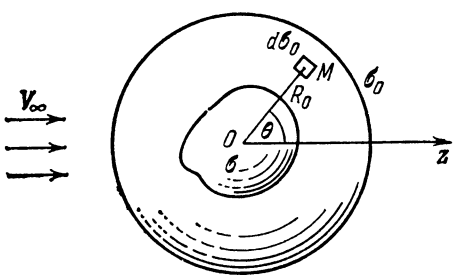


Рис. 122

В этом заключается частный случай известного *парадокса Даламбера*, о котором уже была речь ранее. В рассмотренном только что случае сферы этот парадокс следует из соображений симметрии распределения давления по поверхности сферы, однако парадокс верен и в общем случае.

Докажем справедливость *парадокса Даламбера* для пространственного безвихревого обтекания конечного по размерам тела *произвольной формы*. Для этого определим прежде всего порядок убывания скоростей возмущения однородного потока некоторым ограниченным замкнутой поверхностью σ телом (рис. 122) при удалении от этого тела.

Разобьем потенциал φ обтекания тела на потенциал однородного потока со скоростью V_∞, параллельной, например, оси Oz, и на потенциал скоростей возмущения φ', вызванный возмущающим действием тела на однородный поток, в который оно помещено.

Покажем сначала, что при удалении на бесконечность ($R\to\infty$) потенциал возмущений φ' убывает как $1/R^2$. На примере обтекания сферы в этом легко убедиться, обратившись к формуле (38) и отделив в ней потенциал возмущения; найдем

$$\varphi'=\frac{1}{2}V_\infty\frac{a^3}{R^2}\cos\theta=O\left(\frac{1}{R^2}\right);\quad V_R',\ V_\theta'=O\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

Если, имея в виду общее свойство решений уравнения Лапласа — возмущения потока при удалении от источника этих возмущений убывают,— допустить, что на больших средних расстояниях от возмущающего поток тела детали его формы не могут влиять на закон убывания потенциала скоростей возмущений, то можно заключить, что и для любого тела конечных размеров закон убывания φ' будет

$$\varphi'=O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

К тому же результату можно прийти из более строгих соображений, если заметить, что потенциал возмущений φ', вызываемый телом

произвольной формы, должен удовлетворять уравнению Лапласа, которое в сферических координатах можно записать в виде [(86) гл. I]

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial\varepsilon^2}=0. \tag{40}$$

Желая разыскать общий вид решения этого уравнения, положим

$$\varphi'(R,\ \theta,\ \varepsilon)=X(R)\,Y(\theta,\ \varepsilon). \tag{41}$$

Подставляя это произведение в предыдущее уравнение, будем иметь

$$Y\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dX}{dR}\right)+\frac{X}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{X}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varepsilon^2}=0,$$

или, отделяя функцию R от остальных переменных,

$$\frac{1}{X}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dX}{dR}\right)=-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varepsilon^2}\right]. \tag{42}$$

Слева стоит функция только R, справа — только ε и θ. Поскольку переменные R, θ и ε независимы друг от друга, из предыдущего равенства следует

$$\frac{1}{X}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dX}{dR}\right)=\text{const}.$$

Легко видеть, что в число решений $X(R)$ этого уравнения будут входить целые положительные или отрицательные степени переменного R, если только произвольную константу положить равной $n(n+1)$. Останавливаясь лишь на целых отрицательных значениях чисел $n=-k$ ($k>0$), так как потенциал возмущения φ' должен *убывать с ростом* R, получим по (41) систему частных решений уравнения Лапласа (40) в виде

$$\frac{Y_k(\theta,\ \varepsilon)}{R^k}\qquad(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty).$$

Среди функций $Y_k(\theta,\ \varepsilon)$ — их называют *сферическими функциями*,— удовлетворяющих, согласно (42) и условию выбора $\text{const}=k(k-1)$, уравнению в частных производных

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_k}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y_k}{\partial\varepsilon^2}+k(k-1)\,Y_k=0,$$

будем выбирать только решения, ограниченные при всех значениях θ и ε.

При $k=1$ решением этого уравнения, ограниченным при всех значениях $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, будет $Y_1=\text{const}$, что соответствует простейшему частному решению const/R, представляющему известный уже нам ньютонов потенциал единичного источника (стока). При $k=2$ уравнение имеет решением $\text{const}\cdot\cos\theta$, что приводит к потенциалу скоростей диполя.

В силу линейности уравнения Лапласа искомый потенциал φ' можно представить как сумму частных решений:

$$\varphi'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k(\theta,\ \varepsilon)}{R^k}=\frac{C}{R}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{Y_k(\theta,\ \varepsilon)}{R^k}. \tag{43}$$

Докажем, что постоянная C равна нулю. Для этого окружим обтекаемое тело сферой C_0 большого радиуса R_0 и, замечая, что между поверхностью тела σ и поверхностью сферы σ_0 нет источников или стоков,

напишем условие равенства нулю суммарного расхода жидкости сквозь поверхность σ_0

$$\int_{\sigma_0} V'_R\, d\sigma_0 = \int_{\sigma_0} \frac{\partial \varphi'}{\partial R}\, d\sigma_0 = -\frac{C}{R_0^2} \int_{\sigma_0} d\sigma_0 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{R_0^{k+1}} \int_{\sigma_0} Y_k(\theta, \varepsilon)\, d\sigma_0 = 0.$$

Используя равенства

$$d\sigma_0 = R_0^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varepsilon, \quad \int_{\sigma_0} d\sigma_0 = 4\pi R_0^2,$$

получим

$$-4\pi C - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{R_0^{k-1}} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} Y_k(\theta, \varepsilon) \sin\theta\, d\theta = 0,$$

откуда при $R_0 \to \infty$ при ограниченности функций $Y_k(\theta, \varepsilon)$ следует, что $C = 0$.

Итак, общий вид потенциала скоростей возмущений будет

$$\varphi' = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{Y_k(\theta, \varepsilon)}{R^k};$$

следовательно, потенциал φ', а по (3) и величина скорости возмущения V', будут иметь при больших R соответственно порядки

$$\varphi' = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad V' = O\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

После этого уже нетрудно доказать парадокс Даламбера. Применим теорему количеств движения в форме Эйлера к объему жидкости, заключенному между контрольными поверхностями σ и σ_0, предполагая, что между ними нет источников (стоков) ($\boldsymbol{F}$ — главный вектор сил давления на тело):

$$-\rho \int_{\sigma_0} V_{n_0} \boldsymbol{V}\, d\sigma_0 - \int_{\sigma_0} p \boldsymbol{n}_0\, d\sigma_0 - \boldsymbol{F} = 0,$$

так как перенос количества движения через поверхность твердого тела σ равен нулю.

При безвихревом характере движения в рассматриваемой области течения справедлива теорема Бернулли

$$p = \text{const} - \frac{\rho V^2}{2}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим

$$\boldsymbol{F} = -\rho \int_{\sigma_0} V_{n_0} \boldsymbol{V}\, d\sigma_0 + \frac{\rho}{2} \int_{\sigma_0} V^2 \boldsymbol{n}_0\, d\sigma_0,$$

так как поверхностный интеграл $\int_{\sigma_0} \boldsymbol{n}_0 d\sigma_0$ равен нулю.

Разбивая, по предыдущему, скорость потока на основную скорость натекания $\boldsymbol{V}_\infty$ и скорость возмущения $\boldsymbol{V}'$, будем иметь

$$\boldsymbol{F} = -\rho \boldsymbol{V}_\infty \int_{\sigma_0} V_{n_0}\, d\sigma_0 - \rho \int_{\sigma_0} V_{n_0} \boldsymbol{V}'\, d\sigma_0 + \frac{\rho}{2} \int_{\sigma_0} |\boldsymbol{V}_\infty + \boldsymbol{V}'|^2 \boldsymbol{n}_0\, d\sigma_0;$$

замечая, что

$$\int_{\sigma_0} V_{n_0}\, d\sigma_0 = 0, \quad \int_{\sigma_0} \boldsymbol{n}_0\, d\sigma_0 = 0,$$

найдем

$$\boldsymbol{F} = -\rho \int_{\sigma_0} V_{n_0} V' \, d\sigma_0 + \rho \int_{\sigma_0} (\boldsymbol{V}_\infty \cdot \boldsymbol{V}') \boldsymbol{n}_0 \, d\sigma_0 + \frac{\rho}{2} \int_{\sigma_0} V'^2 \boldsymbol{n}_0 \, d\sigma_0.$$

Но, по только что доказанному, скорость возмущения V' имеет при больших R_0 порядок $1/R_0^3$, тогда как элемент интегрирования $d\sigma_0$ — порядок R_0^2. Устремляя R_0 к бесконечности, убедимся, что главный вектор F сил давления потока на тело стремится к нулю. Но $\boldsymbol{F}$ не может зависеть от произвольного радиуса R_0 мысленно проведенной сферы; следовательно, главный вектор $\boldsymbol{F}$ равен нулю, что и доказывает парадокс Даламбера: *при безвихревом стационарном обтекании тела конечного размера идеальной несжимаемой жидкостью и отсутствии вокруг тела источников либо стоков главный вектор сил давления потока на тело равен нулю.*

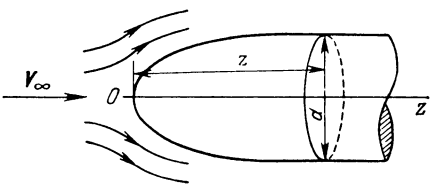


Рис. 123

Парадокс Даламбера справедлив для тел конечных размеров, ограниченных замкнутой поверхностью. Главный вектор сил давления потока на тело, распространяющееся до бесконечности, например на полутело (рис. 123), зависит от закона возрастания ширины d сечения этого полутела с увеличением расстояния z до бесконечности. Так, сопротивление полутела с поперечным размером сечения, стремящимся к конечной величине при удалении на бесконечность, например у полутела, образованного наложением однородного потока на источник, равно нулю.

Параболоид вращения дает пример полутела бесконечно большого сопротивления. Среди полутел, ширина которых возрастает медленнее, чем у параболоида, могут быть тела конечного сопротивления [1]).

§ 74. Уравнение продольного осесимметричного движения. Течение сквозь каналы

Одним из наиболее распространенных видов пространственных течений является движение, симметричное относительно некоторой оси (например, оси Ox), называемое *осесимметричным*. Сюда относятся движения в соплах круглого сечения, в конфузорах и диффузорах, осевое обтекание тел вращения, дирижабельных и других форм.

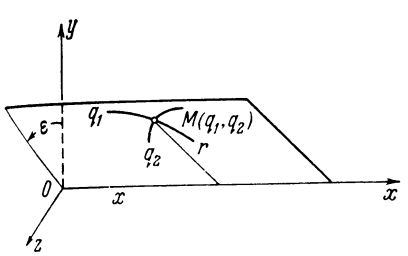


Рис. 124

Составим общее уравнение продольного осесимметричного движения, происходящего в меридианных плоскостях (рис. 124), образующих с плоскостью xOy угол ε, и выберем в них некоторую, не зависящую от угла ε систему ортогональных криволинейных координат q_1, q_2. Тогда будем иметь в каждой из меридианных плоскостей

$$r = r(q_1, q_2), \quad x = x(q_1, q_2)$$

[1]) Специальное исследование вопроса о влиянии формы полутела на его сопротивление проведено в статье: Гуревич М. И. Обтекание осесимметричного полутела конечного сопротивления.— Прикл. мат. и мех., 1947, т. 11, № 1.

и вообще для любой точки M

$$y=r(q_1, q_2)\cos\varepsilon, \quad z=r(q_1, q_2)\sin\varepsilon, \quad x=x(q_1, q_2);$$

отсюда по формулам (83) гл. I легко найти коэффициенты Ляме

$$H_1=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2},$$

$$H_2=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2}, \quad (44)$$

$$H_3=H_\varepsilon=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right)^2}=r(q_1, q_2).$$

Уравнение Лапласа для определения потенциала скоростей будет, согласно шестому равенству (84) гл. I, иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2}{H_1}r\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2}r\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)=0, \quad (45)$$

так как третий член этого равенства, содержащий производную по координате ε, в силу принятой симметрии движения обращается в нуль.

Подчеркнем, что уравнение осесимметричного движения (45), составленное в координатах q_1 и q_2, не совпадает с уравнением плоского движения в тех же координатах.

Выберем в меридианных плоскостях в качестве криволинейных координат прямоугольные координаты x, r; будем иметь $H_x=1$, $H_r=1$ и, следовательно, уравнение движения приведется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0, \quad (46)$$

соответствующему уравнению Лапласа в цилиндрических координатах при отсутствии зависимости движения от ε.

Остановимся на решении задачи об осесимметричном протекании несжимаемой жидкости сквозь канал, поверхность которого представляет собой поверхность вращения, причем будем полагать, что вращательное движение жидкости вокруг оси канала отсутствует. Рассмотрим лишь сравнительно простую, «обратную» задачу об определении формы поверхности канала и поля скоростей в канале по заданному закону изменения скорости вдоль оси канала.

Задача эта представляет практический интерес для проектирования формы каналов по заданным их общим габаритам.

Такого рода задачи встают, например, при проектировании конфузоров и диффузоров аэродинамических труб, вентиляционных и других каналов, ограниченных по своим размерам объемом отведенных помещений. Аналогичный метод может быть с успехом применен также при расчете по возможности малых по длине патрубков, соединяющих две цилиндрические трубы разных диаметров, и в других вопросах.

Докажем сначала, что решение уравнения (46), обращающееся в заданную на оси симметрии функцию $\varphi_0(x)$, может быть представлено в виде определенного интеграла

$$\varphi(x, r)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0(x+ir\cos\omega)\,d\omega, \quad (47)$$

где $\varphi_0(x+ir\cos\omega)$ — аналитическая функция комплексного переменного

$$t=x+ir\cos\omega \quad (48)$$

в некоторой области плоскости t, заключающей внутри себя начало координат $t=0$[1]). Составляя производные

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0'(t)\cos\omega\,d\omega,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0''(t)\cos^2\omega\,d\omega$$

и применяя интегрирование по частям, найдем второе слагаемое в уравнении (46)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{r}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0''(t)\cos^2\omega\,d\omega+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0'(t)\cos\omega\,d\omega=$$

$$=-\frac{r}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0''(t)\cos^2\omega\,d\omega+\frac{i}{\pi}[\varphi_0'(t)\sin\omega]_{\omega=0}^{\omega=\pi}-\frac{r}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0''(t)\sin^2\omega\,d\omega=$$

$$=-\frac{r}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0''(t)\,d\omega.$$

Первое слагаемое уравнения (46), равное

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=r\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=r\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0''(t)\,d\omega,$$

отличается от второго только знаком. Таким образом, убеждаемся, что действительно выражение (47) дает интегральное представление решения уравнения (46). Исследуем это решение. Подставляя в правую часть (47) $r=0$, непосредственно убеждаемся, что функция $\varphi_0(x)$ представляет распределение потенциала скоростей $\varphi(x, r)$ вдоль оси симметрии движения Ox. Перейдем к *скоростям*; найдем по формуле (47)

$$V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0'(t)\,d\omega,\quad V_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_0'(t)\cos\omega\,d\omega.\qquad(49)$$

При $r=0$ будем иметь

$$V_x=\varphi_0'(x),\quad V_r=\frac{i}{\pi}\varphi_0'(x)\int_0^{x}\cos\omega\,d\omega=0.$$

Введем в рассмотрение вместо функции $\varphi_0(t)$ функцию $f_0(t)=\varphi_0'(t)$. Вид этой функции зависит от распределения скорости V_x вдоль оси Ox, так как, по определению,

$$f_0(x)=\varphi_0'(x)=(V_x)_{r=0}.$$

Будем в дальнейшем считать это распределение заданным. Тогда формулы (49) представятся так:

$$V_x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_0(t)\,d\omega,\quad V_r=\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}f_0(t)\cos\omega\,d\omega.\qquad(50)$$

Введем еще *функцию тока* $\psi(x, r)$. По (29) и (50) имеем, учитывая, что осевая координата z в формуле (29) теперь соответствует x,

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=rV_x=\frac{r}{\pi}\int_0^{\pi}f_0(t)\,d\omega,$$

[1]) Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. II.— М.: Физматгиз, 1963, с. 250, 251.

откуда интегрированием по r получим

$$\psi = \frac{1}{\pi}\int_0^r r\,dr\int_0^\pi f_0(x + ir\cos\omega)\,d\omega; \tag{51}$$

появляющаяся при этом частном интегрировании по r функция координаты x равна нулю, так как ось $Ox(r=0)$ может быть принята в силу симметрии потока за нулевую линию тока ($\psi=0$ при $r=0$ и любом x).

Полученные выражения (47), (50) и (51) можно рассматривать как решение задачи *о безвихревом осесимметричном протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь канал*, границей которого служат поверхности вращения

$$\psi(x, r) = \text{const}, \tag{52}$$

а закон изменения продольной скорости V_x вдоль оси канала Ox задан функцией $f_0(x)$. Такого типа решение не позволяет непосредственно находить течение жидкости в канале произвольного заданного наперед профиля[1]); можно, однако, проектировать разнообразные каналы и отбирать среди них те, которые наилучшим образом удовлетворяют поставленным условиям, например требуемой степени однородности поля скоростей в данном сечении канала.

С этой целью составим разложение в ряд

$$f_0(x+ir\cos\omega) = f_0(x) + ir\cos\omega f_0'(x) + \ldots$$

и подставим его в формулы (50) и (51). Замечая, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^{2n}\omega\,d\omega = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^{2n-1}\omega\,d\omega = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} V_x(x, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} r^{2n} f_0^{(2n)}(x), \\ V_r(x, r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2} r^{2n-1} f_0^{(2n-1)}(x), \\ \psi(x, r) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2} r^{2n} f_0^{(2n-2)}(x). \end{aligned} \tag{53}$$

Пользуясь разложениями (53), можно строить различные формы конфузоров, диффузоров и других каналов. Так, например, положим[2])

$$f_0(x) = 0{,}55 + 0{,}90\int_0^x \Phi(x)\,dx, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

$$\int_0^x \Phi(x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad \operatorname{Erf}(\pm\infty) = \pm 1,$$

что дает изменение V_x вдоль оси Ox от 0,1 при $x=-\infty$ до 1 при $x=\infty$, показанное на рис. 125. Последовательные производные функции $f_0(x)$

---

[1]) По этому поводу см. Саноян В. Г. Движение жидкости в осесимметричном канале заданного профиля и расчет действительных давлений.— Труды Ленингр. политехн. ин-та им. Калинина, 1955, № 176, с. 160—174.

[2]) Tsien H. S. On the design of the contraction cone for a wind tunnel.— Journ. Aeron. Sci., 1943, v. 10, № 2, p. 68—70

определяются очевидным равенством

$$f_0^{(n+1)}(x) = 0{,}90\Phi^{(n)}(x),$$

причем

$$\Phi^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right).$$

Вспоминая определение полиномов Эрмита [1])

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right),$$

будем иметь такое выражение для последовательных производных заданной функции $f_0(x)$:

$$f_0^{(n+1)}(x) = (-1)^n 0{,}90 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x).$$

Пользуясь таблицами полиномов Эрмита и производя указанные в системе (53) суммирования, найдем искомые значения продольной и радиальной скоростей, а приравнивая различным константам выражение функции тока, определим возможные формы каналов. На рис. 126 приводятся линии тока и распределения продольных скоростей, соответствующие рассматриваемому осесимметричному потоку в конфузоре.

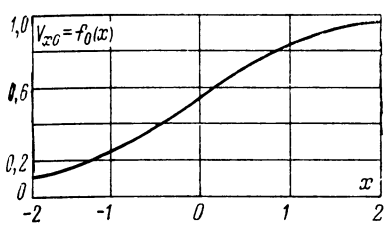


Рис. 125

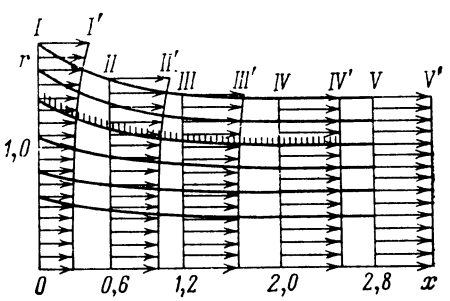


Рис. 126

Римскими цифрами отмечены сечения трубок тока, а римскими цифрами со штрихами — соответствующие этим сечениям эпюры скоростей. Принимая линию тока за твердую стенку, получим профиль конфузора, причем эпюры покажут, насколько однородно поле скоростей в различных сечениях конфузора. Так, например, видно, что профиль конфузора, показанный на рис. 126 штриховкой, имеет достаточно хорошую форму; неизбежное повышение скорости у стенок конфузора не вредит делу, так как подтормаживание жидкости из-за вязкости вблизи стенок должно выправить поле.

§ 75. Осесимметричное продольное обтекание тел вращения

При исследовании пространственных течений приходится пользоваться различными криволинейными системами координат: цилиндрической, сферической, эллиптической и др. Такой подход не только упрощает описание картины движения, но иногда просто неизбежен: от удачного выбора системы координат зависит возможность разделения пере-

[1]) Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы.— М.: Наука, 1977, с. 149.

менных в дифференциальных уравнениях, простота приемов удовлетворения граничных условий. В плоском безвихревом движении переход от физической плоскости $z=x+iy$ к вспомогательной плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ был эквивалентен пользованию в физической плоскости криволинейными координатами ξ, η вместо прямолинейных x, y. В пространстве трех измерений столь удобного аналитического аппарата, как функции комплексных переменных, нет, и приходится непосредственно применять формулы перехода от прямолинейных координат к криволинейным, выражая в этих координатах сами дифференциальные уравнения и соответствующие граничные условия.

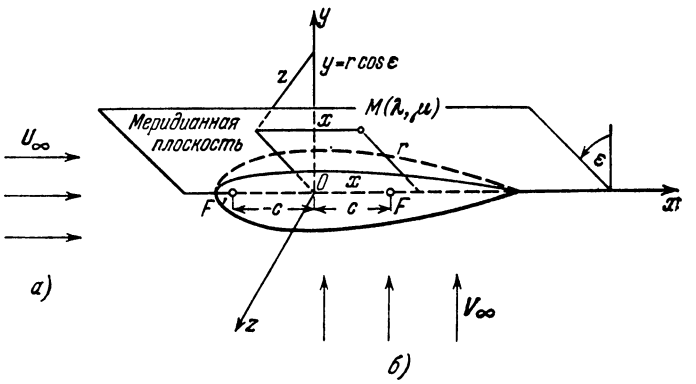


Рис. 127

Для расчета внешнего осесимметричного обтекания тел вращения (рис. 127, *а*) возьмем в меридианных плоскостях r, x *эллиптическую* систему координат ξ, η, связанную с r, x соотношениями

$$x=c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta,\quad 0\leqslant\xi<\infty,$$
$$r=c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta,\quad 0\leqslant\eta\leqslant\pi,$$

где величина c представляет собой расстояние фокусов семейства координатных линий — софокусных эллипсов и гипербол — от начала координат.

Положим

$$\mathrm{ch}\,\xi=\lambda,\quad \cos\eta=\mu,\quad 1\leqslant\lambda<\infty,\quad -1\leqslant\mu\leqslant 1;$$

тогда связь между координатами r, x и λ, μ будет иметь вид

$$x=c\lambda\mu,\quad r=c\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\mu^2}. \tag{54}$$

Определив производные

$$\frac{\partial r}{\partial\lambda}=c\lambda\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}},\quad \frac{\partial r}{\partial\mu}=-c\mu\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}},\quad \frac{\partial x}{\partial\lambda}=c\mu,\quad \frac{\partial x}{\partial\mu}=c\lambda,$$

найдем коэффициенты Ляме [(83) гл. I]

$$H_\lambda=\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2}=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}},$$
$$H_\mu=\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2}=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}, \tag{55}$$
$$H_\varepsilon=r=c\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\mu^2}.$$

После этого уже нетрудно составить и основное дифференциальное

уравнение Лапласа для потенциала скоростей. По шестому равенству системы (84) гл I получим

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right]=0. \tag{56}$$

Будем искать частное решение этого уравнения в виде произведения двух функций от переменных λ и μ в отдельности

$$\varphi=L(\lambda)M(\mu); \tag{57}$$

тогда в уравнении (56) переменные разделятся и из равенства

$$\frac{1}{L(\lambda)}\frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda^2-1)\frac{dL}{d\lambda}\right]=-\frac{1}{M(\mu)}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]$$

в силу независимости λ и μ будет следовать, что каждая из частей равенства должна быть постоянной. Полагая эту постоянную равной $n(n+1)$, где n — целое положительное число, получим для определения $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ два обыкновенных линейных уравнения второго порядка *лежандрова* типа

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\lambda}\left[(1-\lambda^2)\frac{dL}{d\lambda}\right]+n(n+1)L=0,\\ \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]+n(n+1)M=0.\end{gathered} \tag{58}$$

Этим уравнениям удовлетворяют[1]) два класса независимых решений:

1) *функции Лежандра 1-го рода — полиномы Лежандра* $P_n(x)$, определяемые равенствами

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\ \ldots$$

и рекуррентным соотношением для вычисления последующих полиномов

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x);$$

2) *функции Лежандра 2-го рода* $Q_n(x)$, определяемые равенствами

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\quad Q_1(x)=\frac{1}{2}x\ln\frac{x+1}{x-1}-1,$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{2}x,$$

$$Q_3(x)=\frac{1}{4}(5x^3-3x)\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3},\ \ldots$$

и рекуррентным соотношением

$$(n+1)Q_{n+1}(x)=(2n+1)xQ_n(x)-nQ_{n-1}(x),$$

совпадающим с предыдущим соотношением для полиномов Лежандра.

Представим решение уравнения (56) как сумму двух потенциалов: 1) потенциала φ_∞ однородного потока, набегающего на тело со скоростью U_∞; этот потенциал по первой из формул (54) равен

$$\varphi_\infty=U_\infty x=U_\infty c\lambda\mu$$

и 2) потенциала φ' скоростей возмущений, который выразим суммой частных решений (57).

---

[1]) Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. II.— М.: Физматгиз, 1963, с. 109 и след.

Функция $P_n(x)$, как полином n-й степени, обращается в бесконечность при бесконечно возрастающем аргументе, функция же $Q_n(x)$ при этом стремится к нулю, но зато логарифмически бесконечна при $x=\pm 1$. В случае внешнего обтекания тела координата $\lambda=\operatorname{ch}\xi$ может достигать бесконечных значений, а координата μ ограничена. Примем во внимание, что потенциал скоростей возмущенного движения (т. е. обтекания за вычетом однородного потока со скоростью, равной скорости на бесконечности) должен стремиться к нулю при удалении от поверхности тела, причем по предыдущему (§ 73) должно быть

$$\varphi' = O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Из приведенных соображений следует, что искомые частные решения должны иметь вид произведений

$$Q_n(\lambda)P_n(\mu) \quad (n=1, 2, \ldots);$$

подчеркнем, что отсчет n при суммировании начинается с единицы, а не с нуля. Это подтверждается наличием следующих очевидных асимптотических равенств, справедливых при больших значениях величины λ, а следовательно, согласно (54), и величины $R=\sqrt{x^2+r^2}$, имеющей тот же порядок, что и λ:

$$Q_0(\lambda) = \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \sim \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda^3} + \ldots = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = O\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$Q_1(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1} - 1 = \lambda\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda^3} + \ldots\right) - 1 \sim \frac{1}{3\lambda^2} + \ldots = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Таким образом, будем иметь необходимый порядок убывания φ' на бесконечности, если положим

$$\varphi' = cU_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_n(\lambda) P_n(\mu), \tag{59}$$

где A_n — постоянные коэффициенты, зависящие от формы поверхности тела.

Складывая потенциалы φ_∞ и φ', получим искомый потенциал скоростей продольного обтекания тела вращения со скоростью на бесконечности, равной U_∞,

$$\varphi = cU_\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_n(\lambda) P_n(\mu) + \lambda\mu\right). \tag{60}$$

Для определения коэффициентов A_n найдем выражение функции тока ψ. По формулам (1), (26) и (55) будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\frac{H_\lambda H_\varepsilon}{H_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = -c(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mu} = \frac{H_\mu H_\varepsilon}{H_\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = c(\lambda^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$$

или, после подстановки разложения (60),

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -c^2U_\infty\left[(1-\mu^2)\sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_n \frac{dP_n}{d\mu} + \lambda(1-\mu^2)\right],$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = c^2U_\infty\left[(\lambda^2-1)\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{dQ_n}{d\lambda} P_n + \mu(\lambda^2-1)\right].$$

Переписывая второе равенство в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = c^2U_\infty(\lambda^2-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{dQ_n}{d\lambda} P_n + \mu\right),$$

подставим под знак суммы выражение для P_n из основного дифференциального уравнения функций Лежандра (58)

$$P_n = -\frac{1}{n(n+1)}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right].$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = -c^2U_\infty(\lambda^2-1)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n(n+1)}\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right]-\mu\right\}.$$

Интегрируя по μ и добавляя необходимую функцию от λ, получим окончательное выражение для функции тока

$$\psi = -\frac{1}{2}c^2U_\infty(\lambda^2-1)(1-\mu^2)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A_n}{n(n+1)}\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{dP_n}{d\mu}+1\right]. \qquad (61)$$

Уравнение *нулевой* поверхности тока будет

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A_n}{n(n+1)}\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{dP_n}{d\mu}+1=0. \qquad (62)$$

Сравнивая его с заданным уравнением профиля тела вращения в эллиптических координатах, можно определить коэффициенты A_n[1]). В только что цитированной статье определение коэффициентов A_n сведено к решению алгебраической системы уравнений первой степени, что при современном состоянии вычислительной техники представляет простую задачу.

Имея выражение потенциала скоростей, найдем скорость по формуле

$$V^2 = V_\lambda^2 + V_\mu^2 = \frac{1}{H_\lambda^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{1}{H_\mu^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 =$$

$$= \frac{U_\infty^2}{\lambda^2-\mu^2}\left[(\lambda^2-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{dQ_n}{d\lambda}P_n+\mu\right)^2+(1-\mu^2)\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_nQ_n\frac{dP_n}{d\mu}+\lambda\right)^2\right]. \qquad (63)$$

Проиллюстрируем метод простейшим примером. Рассмотрим обтекание эллипсоида вращения, меридианное сечение которого имеет уравнение $\lambda=\lambda_0$. Полагая в уравнении (62) $A_n=0$ при $n>1$ и $\lambda=\lambda_0$, получим

$$A_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dQ_1}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_0+1}{\lambda_0-1}-\frac{\lambda_0}{\lambda_0^2-1}}.$$

Потенциал скоростей будет равен по (60)

$$\varphi(\lambda,\mu) = -cU_\infty\left(\frac{\frac{1}{2}\lambda\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}-1}{\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_0+1}{\lambda_0-1}-\frac{\lambda_0}{\lambda_0^2-1}}-\lambda\right)\mu. \qquad (64)$$

Этому выражению можно придать несколько иной вид, если ввести явно полуоси эллипсоида a и $b<a$, расположенные соответственно по

[1]) См. Kaplan C. Potential flow about elongated bodies of revolution.— NACA Rep., 1935, № 516

осям Ox и Or. Будем иметь, согласно (54), уравнение эллипса $\lambda=\lambda_0$ в виде

$$\frac{x^2}{c^2\lambda_0^2}+\frac{r^2}{c^2(\lambda_0^2-1)}=1,$$

откуда следует

$$c\lambda_0=a,\quad c\sqrt{\lambda_0^2-1}=b$$

или, вводя эксцентриситет $e=c/a$,

$$\lambda_0=\frac{1}{e},\quad \sqrt{\lambda_0^2-1}=\frac{b}{c}.$$

В этих обозначениях получим

$$\varphi(\lambda,\mu)=-U_\infty a\left(\frac{\frac{1}{2}\lambda\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}-1}{\frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}-\frac{1}{1-e^2}}-e\lambda\right)\mu. \tag{65}$$

Для проверки можно, пользуясь этим выражением, получить потенциал обтекания сферы радиуса a, если заметить, что, по определению эллиптических координат, в этом случае будет $e\to 0$, $c\lambda\to R$, $\mu\to\cos\theta$ при $c\to 0$, где R и θ — сферические координаты. Производя разложения ($\lambda>1$, $e<1$)

$$\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}=\ln\frac{1+\frac{1}{\lambda}}{1-\frac{1}{\lambda}}=2\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{3\lambda^3}+\ldots\right),\quad \ln\frac{1+e}{1-e}=2\left(e+\frac{1}{3}e^3+\ldots\right)$$

и заменяя e на c/a, убедимся, что φ при $c\to 0$ стремится к

$$U_\infty R\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\cos\theta,$$

т. е. к известному уже выражению (38).

Проекции скорости на оси эллиптических координат будут

$$V_\lambda=\frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=-U_\infty\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}}\left(\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}-\frac{\lambda}{\lambda^2-1}}{\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e}-\frac{e}{1-e^2}}-1\right)\mu,$$

$$V_\mu=\frac{1}{H_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}=-U_\infty\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}}\left(\frac{\frac{1}{2}\lambda\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}-1}{\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e}-\frac{e}{1-e^2}}-\lambda\right).$$

Полагая здесь $\lambda=\lambda_0$, убедимся, что на поверхности эллипсоида $V_\lambda=0$; это и естественно, так как координатные линии (λ) перпендикулярны к поверхности эллипсоида и условие $V_\lambda=0$ эквивалентно условию равенства нулю нормальной к поверхности составляющей скорости. Распределение скоростей по поверхности эллипсоида определится равенством

$$V=V_\mu=\frac{e^3U_\infty}{e-\frac{1}{2}(1-e^2)\ln\frac{1+e}{1-e}}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{1-e^2\mu^2}}.$$

Полученное только что решение относится к обтеканию эллипсоида вращения, удлиненного вдоль по течению. Подобным же образом мож-

но исследовать случай обтекания сплюснутого эллипсоида, фокусы меридианного сечения которого лежат не на оси Oz, а в меридианных плоскостях[1]). В только что цитированных курсах приводится также решение более общей задачи об обтекании эллипсоида, у которого все оси различны.

§ 76. Поперечное обтекание тел вращения

Наряду с продольным обтеканием тел вращения представляет интерес и поперечное обтекание, перпендикулярное (рис. 127, *б*) к оси симметрии тела. Из сложения этих двух потоков можно получить обтекание тела вращения под *любым углом атаки*. Изложим решение задачи *о поперечном* обтекании тела вращения.

В этом случае уже не получается осесимметричного движения. Уравнение Лапласа, определяющее потенциал скоростей, в ортогональной системе криволинейных координат, согласно шестому равенству системы (84) гл. I, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)=0.$$

Сохраняя ту же систему координат (λ, μ, ε), что и в случае осесимметричного обтекания тела вращения, и припоминая выражения коэффициентов Ляме (55), перепишем предыдущее уравнение в форме

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right]+\left(\frac{1}{\lambda^2-1}+\frac{1}{1-\mu^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon^2}=0. \quad (66)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения двух функций

$$\varphi=N(\lambda,\mu)E(\varepsilon);$$

тогда, подставляя последнее выражение в уравнение (66) и разделяя функции независимых переменных, получим систему уравнений (k — произвольное число, которое будем считать положительным и целым)

$$\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}+k^2E=0,\quad \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda^2-1)\frac{\partial N}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial N}{\partial\mu}\right]-k^2\frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}N=0.$$

Первое уравнение имеет решение

$$E=A\cos k\varepsilon+B\sin k\varepsilon,$$

второе, если положить $N=L(\lambda)M(\mu)$ и разделить переменные, может быть приведено к системе уравнений

$$\frac{d}{d\lambda}\left[(1-\lambda^2)\frac{dL}{d\lambda}\right]+\left[n(n+1)-\frac{k^2}{1-\lambda^2}\right]L=0,$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{k^2}{1-\mu^2}\right]M=0,$$

имеющей в качестве частных решений так называемые *присоединенные функции* Лежандра[2])

$$P_n^k(\mu)=(1-\mu^2)^{k/2}\frac{d^kP_n(\mu)}{d\mu^k},\quad Q_n^k(\lambda)=(\lambda^2-1)^{k/2}\frac{d^kQ_n(\lambda)}{d\lambda^k}. \quad (67)$$

---

[1]) См., например, Кибель И. А., Кочин Н. Е., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I.— М.: Физматгиз, 1963, с. 365, а также Ламб Г. Гидродинамика.— М.: Гостехиздат, 1947, с. 175—181.

[2]) Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. II.— М.: Физматгиз, 1963, с. 140—144.

Комбинируя эти функции так, чтобы выражение потенциала скоростей возмущенного движения было ограниченным при $\lambda \to \infty$, получим общее выражение потенциала скоростей,

$$\varphi(\lambda, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} Q_n^k(\lambda) P_n^k(\mu) (A_{nk} \cos k\varepsilon + B_{nk} \sin k\varepsilon) + V_\infty y;$$

здесь последнее слагаемое представляет собой потенциал скоростей набегающего на тело однородного потока со скоростью на бесконечности V_∞, направленной параллельно оси Oy (рис. 127, *б*).

Полагая в только что выведенной общей формуле потенциала

$$A_{n1} = cV_\infty C_n, \quad A_{n2} = A_{n3} = \ldots = 0, \quad B_{n1} = B_{n2} = \ldots = 0,$$

т. е. довольствуясь решением, содержащим $\cos\varepsilon$, и, кроме того, представляя y по формулам, помещенным в начале предыдущего параграфа, как функцию λ, μ и ε:

$$y = r\cos\varepsilon = c \operatorname{sh}\xi \sin\eta \cos\varepsilon = c\sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}\cos\varepsilon,$$

получим следующее выражение потенциала скоростей поперечно набегающего со скоростью V_∞ вдоль оси Oy потока:

$$\varphi = cV_\infty \cos\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_n^1(\lambda) P_n^1(\mu) + cV_\infty \sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}\cos\varepsilon,$$

или, используя определение присоединенных функций Лежандра (67),

$$\varphi = cV_\infty \sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{dP_n}{d\mu} + 1\right)\cos\varepsilon. \tag{68}$$

Для определения постоянных C_n, как и ранее, следует составить граничное условие на заданной поверхности обтекаемого тела. В этом случае неосесимметричного движения функция тока отсутствует и приходится непосредственно вычислять нормальную скорость $V_n = \partial\varphi/\partial n$ и приравнивать ее нулю.

Несколько облегчая вычисления, выпишем в выбранной системе координат (λ, μ) условие того, что при непроницаемости поверхности обтекаемого тела элемент дуги его меридианного сечения параллелен составляющей скорости в меридианной плоскости (условие скольжения жидкости по поверхности тела):

$$\frac{ds_\lambda}{V_\lambda} = \frac{ds_\mu}{V_\mu},$$

или, вспоминая выражения элементов дуг координатных линий и проекций градиента потенциала на направления этих линий,

$$H_\lambda d\lambda : \frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = H_\mu d\mu : \frac{1}{H_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}.$$

Отсюда вытекает искомое граничное условие

$$H_\mu^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = H_\lambda^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{d\lambda}{d\mu}, \tag{69}$$

в котором λ является заданной функцией μ согласно уравнению контура обтекаемого тела в меридианной плоскости. Составляя частные

производные $\partial\varphi/\partial\lambda$, $\partial\varphi/\partial\mu$, по (68) будем иметь

$$\frac{1}{cV_\infty\cos\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=$$

$$=\lambda\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{dP_n}{d\mu}+1\right)+\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{d^2Q_n}{d\lambda^2}\frac{dP_n}{d\mu},$$

$$\frac{1}{cV_\infty\cos\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}=$$

$$=-\mu\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{dP_n}{d\mu}+1\right)+\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{d^2P_n}{d\mu^2}.$$

Заменив входящие сюда выражения вторых производных на основании дифференциальных уравнений для функций P_n и Q_n

$$(1-\lambda^2)\frac{d^2Q_n}{d\lambda^2}=2\lambda\frac{dQ_n}{d\lambda}-n(n+1)Q_n,\quad(1-\mu^2)\frac{d^2P_n}{d\mu^2}=2\mu\frac{dP_n}{d\mu}-n(n+1)P_n,$$

получим после простых преобразований

$$\frac{1}{cV_\infty\cos\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=-\lambda\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{dP_n}{d\mu}+$$

$$+\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)C_nQ_n\frac{dP_n}{d\mu}+\lambda\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}},$$

$$\frac{1}{cV_\infty\cos\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}=\mu\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{dP_n}{d\mu}-$$

$$-\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)C_n\frac{dQ_n}{d\lambda}P_n-\mu\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}.$$

Подставляя эти выражения производных в (69) и используя ранее выведенные значения коэффициентов Ляме

$$H_\lambda^2=c^2\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1},\quad H_\mu^2=c^2\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2},$$

получим после очевидных сокращений

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left[\left(\lambda+\mu\frac{d\lambda}{d\mu}\right)\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{dP_n}{d\mu}-n(n+1)\left(Q_n\frac{dP_n}{d\mu}+\frac{dQ_n}{d\lambda}P_n\frac{d\lambda}{d\mu}\right)\right]=\lambda+\mu\frac{d\lambda}{d\mu}.$$

Имея в виду, что на поверхности тела λ представляет заданную функцию от μ, перепишем граничное условие в окончательной форме так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left[\frac{d(\lambda\mu)}{d\mu}\frac{dQ_n}{d\lambda}\frac{dP_n}{d\mu}-n(n+1)\frac{d}{d\mu}(Q_nP_n)\right]=\frac{d(\lambda\mu)}{d\mu}.\qquad(70)$$

Рассмотрим поперечное обтекание *эллипсоида вращения* $\lambda=\lambda_0$, продольное осесимметричное обтекание которого было изучено в предыдущем параграфе.

В этом случае граничное условие (70) можно выполнить, положив $C_n=0$ при $n>1$; тогда будем иметь ($P_1=\mu$)

$$C_1\left[\lambda_0\left(\frac{dQ_1}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}-2Q_1(\lambda_0)\right]=\lambda_0,$$

откуда, согласно ранее приведенному выражению $Q_1(\lambda)$, следует

$$C_1 = \frac{\lambda_0}{2 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 1} - \frac{1}{2}\lambda_0 \ln\frac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0 - 1}}.$$

Напомним, что здесь $\lambda_0 = 1/e$, где e — эксцентриситет эллипса, представляющего меридианное сечение эллипсоида. Потенциал скоростей рассматриваемого поперечного обтекания эллипсоида вращения равен по (68)

$$\varphi = cV_\infty \sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}\left\{C_1\left[Q_0(\lambda) + \frac{1}{1 - \lambda^2}\right] + 1\right\}\cos\varepsilon; \qquad (71)$$

скорости определяются простым дифференцированием (71)

$$V_\lambda = \frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}, \quad V_\mu = \frac{1}{H_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}, \quad V_\varepsilon = \frac{1}{H_\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}.$$

Решение задач о продольном и поперечном обтекании тела вращения приводит, как это видно из содержания настоящего и предыдущего параграфов, к необходимости проведения в каждом отдельном случае трудоемких вычислений. Эти вычисления могут быть облегчены применением приближенных методов, использование которых ограничено лишь случаем обтекания тел большого удлинения с отношением длины к максимальной толщине порядка 8—12 (см. § 76 четвертого издания настоящего курса). При современной машинной технике вычислений такого рода приближенные методы в значительной мере потеряли свое значение.

§ 77. Применение метода особенностей для расчета продольного и поперечного обтеканий тел вращения. Тела большого удлинения

Изложенный в предыдущих параграфах метод исследования продольного и поперечного обтеканий тел вращения, основанный на непосредственном решении уравнения Лапласа в эллиптических координатах, не является единственным методом решения этой задачи. Первоначально формы обтекаемых тел вращения для дирижаблей определялись наложением однородного, параллельного некоторой оси потока на поток от системы источников (стоков), распределенных вдоль той же оси. Для этой цели применялись вначале дискретные *особенности* потока — системы источников (стоков) или диполей, а впоследствии — непрерывные их распределения.

Предположим для определенности, что на отрезке $(-c, +c)$ оси Ox задано непрерывное распределение источников (стоков) интенсивности $q(x)$. Тогда потенциал φ' возмущенного движения, созданного этой системой особенностей, будет, согласно второй из формул (12), равен (знак минус введем в определение интенсивности q)

$$\varphi'(r, x) = \frac{1}{4\pi}\int_{-c}^{c}\frac{q(x')\,dx'}{\sqrt{r^2 + (x - x')^2}}. \qquad (72)$$

Если задаться видом функции $q(x')$, то, вычисляя интеграл (72), получим потенциал скоростей возмущений, а дифференцирование по r и x позволит вычислить и проекции скорости V_r' и V_∞'. Наоборот, задаваясь формой обтекаемого тела, можно, переходя от потенциала скоростей возмущенного движения к полному потенциалу продольного обтекания тела однородным потоком с заданной скоростью на бесконеч-

ности и написав условие непроницаемости поверхности тела, получить *интегральное уравнение*, в котором $q(x')$ будет неизвестной функцией. Заменяя потенциал скоростей на функцию тока, Карман [1]) разработал метод приближенного интегрирования соответствующего интегрального уравнения, основанный на замене интеграла конечной суммой. Однако метод Кармана не был достаточно общим и, кроме того, требовал решения в каждом отдельном случае системы большого числа линейных алгебраических уравнений, что делало его по тому времени слишком трудоемким.

Аналогично, пользуясь выражением потенциала диполя (8), можно составить и потенциал φ_1 *поперечного* обтекания тела вращения, складывая потенциал однородного натекания с заданной скоростью на бесконечности с потенциалом скоростей возмущенного движения жидкости от непрерывно распределенных по отрезку $-c<x<c$ диполей интенсивности $m(x')$ с осями, направленными вдоль Oy:

$$\varphi_1'(r, x, \varepsilon) = \frac{r\cos\varepsilon}{4\pi}\int_{-c}^{c}\frac{m(x')\,dx'}{[r^2+(x-x')^2]^{3/2}}. \tag{73}$$

Здесь также можно задаваться распределением интенсивности $m(x')$ или, наоборот, определять эту интенсивность из интегрального уравнения, представляющего условие непроницаемости заданной поверхности тела по отношению к потоку, складывающемуся из возмущенного и однородного на бесконечности.

Не останавливаясь на изложении этих в настоящее время уже малоупотребительных методов, укажем лишь на простую их связь с методами, изложенными в предыдущих параграфах. Покажем, что при заданной форме поверхностей обтекаемых тел вращения неизвестные функции $q(x')$ и $m(x')$ могут быть выражены через ранее введенные коэффициенты A_n и C_n [2]).

Разобьем ось симметрии тела вращения Ox на две области: одну, определяемую интервалом $-c\leqslant x\leqslant c$, заполненным особенностями, и вторую, представляющую остальную часть оси Ox, где $|x|>c$. В эллиптических координатах λ, μ, введенных в начале § 75, отрезок, на котором расположены особенности, представится согласно второй из формул (54), как

$$\lambda=1,\quad -1\leqslant\mu\leqslant 1,$$

а остальная часть оси Ox, как

$$\mu=\pm 1,\quad 1<\lambda<\infty.$$

Тогда, сравнивая между собой вне отрезка $(-c<x'<c)$ выражения потенциалов возмущений (72) и (73) с соответственными выражениями тех же потенциалов, взятыми из формул (60) и (68), и приняв во внимание, что $P_n(1)=1$, $dP_n/d\mu|_{\mu=1}=n(n+1)/2$, получим следующие два равенства:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{q(c\mu')\,d\mu'}{\lambda-\mu'}=cU_\infty\sum_{n=1}^{\infty}A_nQ_n(\lambda), \tag{74}$$

$$\frac{1}{4\pi c^2}\int_{-1}^{+1}\frac{m(c\mu')\,d\mu'}{(\lambda-\mu')^3}=V_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}C_n\frac{dQ_n}{d\lambda}, \tag{75}$$

[1]) Kármán Th. v. Berechnung der Druckverteilung an Lüftschiffkörpern.— Abhandlungen aus dem Aerodyn. Inst. Aachen, 1927, H. 6. Подробное изложение этого и других методов, а также применение их к расчетам см. Фабрикант Н. Я. Курс аэродинамики. Ч. I, гл. III.— М.: Гостехиздат, 1938.

[2]) См. ранее цитированную статью Каплана.

которые при заданных коэффициентах A_n и C_n можно рассматривать как два интегральных уравнения для определения неизвестных функций q и m.

Интегральное уравнение (74) может быть решено, если искать решение в виде ряда

$$q(c\mu') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\mu'), \quad -1 \leqslant \mu' \leqslant 1.$$

Подставляя это разложение в (74), получим

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\mu')\, d\mu'}{\lambda - \mu'} = cU_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_n(\lambda).$$

Замечая, что по известной формуле теории функций Лежандра[1])

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\mu')\, d\mu'}{\lambda - \mu'} = 2Q_n(\lambda),$$

перепишем предыдущее интегральное уравнение в виде

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n(\lambda) = cU_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_n(\lambda),$$

откуда будет сразу следовать искомое решение

$$a_n = 2\pi c U_\infty A_n, \quad q(x') = 2\pi c U_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(x'/c). \tag{76}$$

Для разыскания второй неизвестной функции $m(x')$ продифференцируем раз по λ и другой раз по μ' известное разложение[2])

$$\frac{1}{\lambda - \mu'} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, Q_n(\lambda)\, P_n(\mu');$$

тогда получим

$$\frac{1}{(\lambda - \mu')^3} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{dQ_n}{d\lambda} \frac{dP_n}{d\mu'}.$$

Подставляя это разложение в интегральное уравнение (75), преобразуем его к виду

$$-\frac{1}{8\pi c^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{dQ_n}{d\lambda} \int_{-1}^{1} m(c\mu') \frac{dP_n}{d\mu'} d\mu' = V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} C_n \frac{dQ_n}{d\lambda}.$$

Используя далее разложение неизвестной функции $m(c\mu')$ в форме

$$m(c\mu') = -2\pi c^2 V_\infty (1 - \mu'^2) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{dP_k}{d\mu'}$$

и замечая, что, в силу ортогональности полиномов Лежандра,

$$\int_{-1}^{1} (1 - \mu'^2) \frac{dP_n}{d\mu'} \frac{dP_k}{d\mu'} d\mu' = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n, \\ \dfrac{2n(n+1)}{2n+1} & \text{при } k = n, \end{cases}$$

[1]) Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. II.—М.: Физматгиз, 1963, с. 135.

[2]) Там же, с. 138.

убедимся в справедливости равенства

$$c_n = C_n.$$

Итак, имеем

$$m(c\mu') = m(x') = -2\pi c^2 V_\infty \left[1 - \left(\frac{x'}{c}\right)^2\right] \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{dP_k}{d\left(\frac{x'}{c}\right)}. \qquad (77)$$

Совокупности формул (72) и (76), (73) и (77) позволяют при желании пользоваться потенциалами скоростей возмущений в цилиндрических координатах, если уже заранее вычислены коэффициенты A_n и C_n. Заметим, что эти коэффициенты проще определять при помощи разложений уравнения контура меридианного сечения в ряды по функциям от эллиптических координат, а уже затем проводить расчеты в эллиптических или цилиндрических координатах.

Заметим еще в заключение, что для тел с *очень большим удлинением* можно определить $q(x)$ и $m(x)$ из следующих двух простейших предположений:

1) в случае *продольного* обтекания будем считать нормальную к поверхности тела составляющую скорости возмущения V_n' равной скорости *плоского* движения от источника, расположенного в ближайшей точке оси. Тогда условие непроницаемости поверхности даст

$$V_n' = \frac{q(x)}{2\pi r} = U_\infty \frac{dr}{dx},$$

откуда

$$q(x) = 2\pi U_\infty r \frac{dr}{dx} = U_\infty \frac{dA}{dx}, \qquad (78)$$

причем заданная функция $r(x)$ описывает контур меридианного сечения, A — площадь поперечного сечения;

2) в случае *поперечного* обтекания тела вращения выберем $m(x)$ из условия, чтобы элемент тела, вырезанный плоскостями x и $x+dx$, обтекался так же, как элемент бесконечного цилиндра в *плоском* движении. Это приведет к равенству

$$m(x) = 2\pi V_\infty r^2(x) = 2V_\infty A(x). \qquad (79)$$

§ 78. Элементарная теория крыла конечного размаха

При рассмотрении *плоского* обтекания цилиндрического крыла бесконечного размаха уже указывалось, что образующиеся в результате взаимодействия крыла с потоком вихри могут быть заменены одним *присоединенным вихрем*, обусловливающим наличие подъемной силы крыла. Этот присоединенный вихрь, в согласии с классической теоремой Гельмгольца, не может начинаться или заканчиваться в жидкости. Совпадая по направлению с осью крыла бесконечного размаха, присоединенный вихрь приходит из бесконечности и в бесконечность же уходит. Интенсивность присоединенного вихря одинакова вдоль оси цилиндрического крыла, одинаковы и циркуляция скорости по контуру, охватывающему любое сечение крыла, и подъемная сила единицы длины крыла.

Опыт показывает, что на крыле *конечного* размаха, например на крыле самолета, циркуляция не сохраняется вдоль оси, а достигает своего максимального значения посередине крыла и обращается в нуль на его концах. Объясняется это возможностью выравнивания давлений на нижней и верхней поверхностях крыла за счет возникающих перетека-

ний воздуха на концах крыла из области повышенного давления на нижней поверхности в область разрежения на верхней.

Выравнивание давлений приводит к исчезновению подъемной силы, а следовательно, и циркуляции присоединенного вихря на концах крыла. Наличие перетекания воздуха с нижней поверхности на верхнюю образует на крыле поперечные течения, которые смываются с его поверхности набегающим потоком и, сходя с задней кромки крыла, образуют вихри.

Первые шаги на пути создания теории крыла конечного размаха были сделаны у нас в России Чаплыгиным[1]) и в Германии Финстервальдером[2]) в 1910 г., однако широкое распространение благодаря своей исключительной простоте и наглядности получила относящаяся к периоду 1913—1918 гг. теория несущей линии Прандтля[3]), основы которой и излагаются в настоящем параграфе.

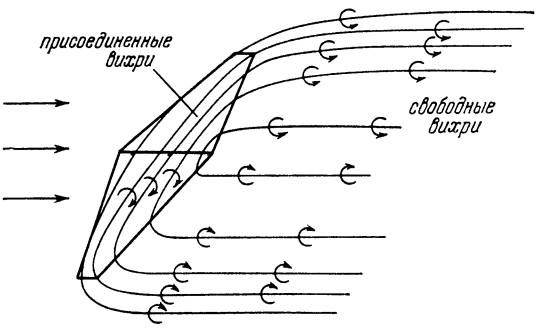


Рис. 128

Сущность этой схемы крыла конечного размаха заключается в следующем. От основного *присоединенного* вихревого шнура крыла отделяются и уносятся потоком так называемые *свободные* вихри, оси которых в некотором удалении от крыла совпадают с линиями тока уносящей их жидкости. При поступательном равномерном движении крыла конечного размаха в перпендикулярном к оси крыла направлении или, что то же, при набегании однородного потока на крыло *можно заменить крыло некоторой воображаемой стационарной системой неподвижных вихрей, состоящей из присоединенных вихрей крыла и сошедших с крыла свободных вихрей*; эта схема показана на рис. 128.

Несколько идеализируя схему, заменим присоединенный вихрь крыла *несущей вихревой линией*, представленной отрезком $-l \leqslant z \leqslant l$ оси Oz, а свободные вихри расположим в плоскости xOz в виде уходящих в бесконечность лучей, параллельных оси Ox, вдоль которой набегает поток (рис. 129). Свободные вихри образуют вниз по потоку за несущей линией *вихревую пелену*, представляющую, так же как и *вихревой слой* (§ 52), поверхность разрыва составляющих скоростей, параллельных оси Oz.

Пусть непрерывная и дифференцируемая функция $\Gamma(z)$ характеризует распределение циркуляции вдоль несущей линии $(-l \leqslant z \leqslant l)$. Изменению циркуляции присоединенного вихря от значения $\Gamma(\zeta)$ в точке M $(z=\zeta)$ до $\Gamma(\zeta)+\frac{d\Gamma}{d\zeta}d\zeta$ в точке M' $(z=\zeta+d\zeta)$ на $d\Gamma=\frac{d\Gamma}{d\zeta}d\zeta$ соответствует сход вихревой полоски (на рис. 129 заштрихованной), образующей элемент вихревой пелены, циркуляция которого равна также $d\Gamma$.

Вихревая система крыла конечного размаха индуцирует поле скоростей, которое складывается с однородным набегающим потоком. В ре-

[1]) Чаплыгин С. А. Результаты теоретических исследований о движении аэропланов. Доклад 9/XI 1910 г.— Собрание сочинений. Т. II.— М.: Гостехиздат, 1948, с. 230—245.

[2]) Finsterwalder. Die Aerodynamik als Grundlage der Luftschiffahrt.— Zeits. für Flugtechn. und Motorluftschiffahrt (ZFM), 1910, № 1, 2.

[3]) Prandtl L. Ergebnisse und Ziele der Göttinger Modellversuchanstalt.— ZFM, 1913, № 3, а также Tragflügeltheorie I, II.— Göttinger Nachrichten, 1918.

зультате такого наложения создается неоднородное поле скоростей, допускающее приближенное рассмотрение.

Проведем через точки несущей линии перпендикулярные к ней плоскости, одна из которых $\Pi(x'O'y')$ показана на рис. 130. Рассмотрим проекцию действительного поля скоростей в точках плоскости П на эту

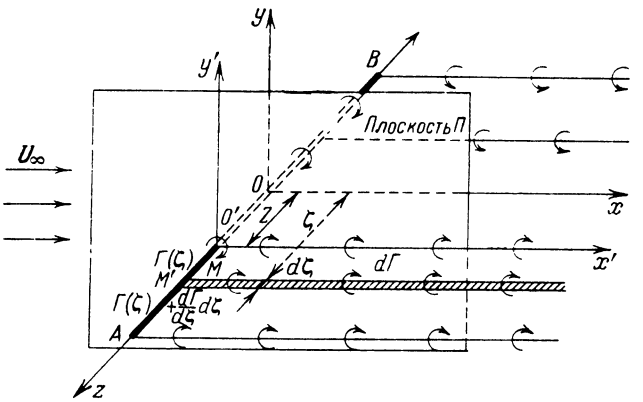


Рис. 129

плоскость и назовем соответствующий, лишенный поперечных скоростей w поток *сечением* действительного потока плоскостью П или, для краткости, *плоским сечением* потока.

Если бы крыло имело бесконечный размах, поток был бы плоским; тогда, удалив крыло, мы получили бы однородное поле набегающего потока с некоторой скоростью на бесконечности $\boldsymbol{U}_\infty$. В случае крыла конечного размаха это не так. Если в плоском сечении из полного поля скоростей вычесть поле возмущений от расположенного в этой плоскости элемента несущей линии, то оставшееся поле плоского сечения потока будет содержать как *однородную* часть $\boldsymbol{U}_\infty$ от набегающего потока, так и добавочную *неоднородную* часть $\boldsymbol{V}_i$, индуцируемую свободными вихрями *пелены*, расположенными в плоскости xOz. Неоднородность поля этих *индуктивных скоростей* $\boldsymbol{V}_i$ является следствием различия расстояний отдельных точек плоскости от элементов свободных вихрей пелены.

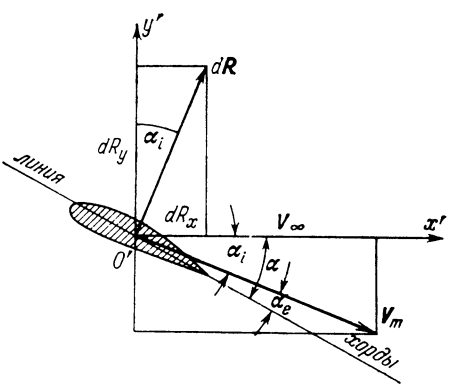


Рис. 130

Анализируя количественное различие между индуктивными скоростями в точках плоскости П вблизи точки O', можно было бы доказать[1]), что во всех плоских сечениях потока, удаленных от концов A и B несущей линии, различия между полями индуктивных скоростей вблизи точки пересечения несущей линии с близкими друг к другу плоскостями сечения тем меньше, чем больше удлинение крыла, т. е. отношение его размаха к средней хорде.

Представляется допустимым для каждого плоского сечения потока ввести понятие о своей местной скорости на бесконечности $\boldsymbol{V}_m$ (рис. 130),

[1]) Дородницын А. А. Обобщение теории несущей линии на случай крыла с изогнутой осью, не перпендикулярной потоку.— Прикл. мат. и мех., 1944, т. 8.

равной сумме векторов скорости потока на бесконечности перед крылом $\boldsymbol{U}_\infty$ и *индуктивной скорости* $\boldsymbol{V}_i$ от свободных вихрей пелены

$$\boldsymbol{V}_m=\boldsymbol{U}_\infty+\boldsymbol{V}_i. \tag{80}$$

Как видно из рис. 130, вектор индуктивной скорости $\boldsymbol{V}_i$ в точке O' несущей линии должен быть направлен по оси $O'y'$. Расположение его в отрицательную сторону оси $O'y'$ соответствует показанным на рисунке направлениям вращения частиц жидкости вокруг свободных вихревых линий.

Примем следующую *гипотезу плоских сечений*: *при достаточно больших удлинениях крыла конечного размаха обтекание каждого плоского сечения потока, удаленного от концов крыла, можно рассматривать как плоский поток с местной скоростью на бесконечности, равной сумме векторов скоростей потока на бесконечности впереди крыла и скорости, индуцированной свободными вихрями пелены в соответствующей точке несущей линии.*

Эта гипотеза, сообщающая условным плоским сечениям потока смысл подлинных плоских движений, сводит расчет крыла конечного размаха к решению изложенной в гл. VII задачи о плоском обтекании крыловых профилей, образующихся в пересечении крыла конечного размаха плоскостями, нормальными к оси крыла, и к последующему суммированию результатов по всем плоским сечениям крыла. Такое допущение имеет смысл только для крыльев большого удлинения.

Обозначим через α (рис. 130) угол атаки набегающего потока на бесконечности перед крылом, т. е. угол между вектором $\boldsymbol{U}_\infty$ и хордой сечения крыла, и назовем этот угол *геометрическим углом атаки*. Введем в рассмотрение также *действительный* (или *эффективный*) *угол атаки* α_e как угол между *местной* скоростью на бесконечности $\boldsymbol{V}_m$ и той же хордой. Угол между скоростями $\boldsymbol{U}_\infty$ и $\boldsymbol{V}_m$ обозначим через α_i и назовем *углом скоса потока*, или *индуктивным углом*. Как видно из рис. 130,

$$\alpha_e=\alpha-\alpha_i. \tag{81}$$

Найдем проекцию dv_i на ось Oy элементарной индуцированной скорости в точке O' (рис. 129) от вихревой полоски, ограниченной вихревыми лучами, выходящими из точек M и M'. Рассматривая эту полоску как вихревую нить с циркуляцией $d\Gamma$ и применяя формулу (22) при $\alpha=90°$, $\beta=0°$, получим

$$dv_i=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Gamma}{z-\zeta}=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\frac{d\zeta}{z-\zeta}. \tag{82}$$

Здесь (рис. 129) $d\Gamma<0$, $d\zeta>0$, $z<\zeta$ и по (82) $dv_i<0$, что как раз и соответствует показанному на рисунке расположению точки O', где определяется элементарная индуктивная скорость по отношению к вихревому лучу, выходящему из точки M. От элементарной индуктивной скорости dv_i перейдем к полной индуктивной скорости v_i в точке O', производя суммирование величин dv_i по всем элементарным полоскам вихревой пелены, исключая ту, которая исходит из отрезка несущей линии $(z-\varepsilon,\ z+\varepsilon)$, заключающего внутри себя точку O' с координатой z. Это объясняется тем, что, как известно, вихревая нить не индуцирует определенных скоростей в своих точках, которые являются особыми точками поля скоростей вокруг вихревой нити. Величина ε может быть выбрана сколь угодно малой и в результате указанного суммирования будем иметь следующее выражение индуктивной скорости:

$$v_i=-\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-l}^{z-\varepsilon}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\frac{d\zeta}{z-\zeta}+\int_{z+\varepsilon}^{l}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\frac{d\zeta}{z-\zeta}\right). \tag{83}$$

Входящий в эту формулу предел носит наименование *главного значения* (в смысле Коши) *несобственного интеграла*[1])

$$\int_{-l}^{l} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \frac{d\zeta}{z-\zeta}. \tag{84}$$

Подразумевая в дальнейшем, что интеграл (84) должен быть вычислен в смысле своего главного значения, определенного в правой части (83), будем иметь в кратком обозначении

$$v_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^{l} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \frac{d\zeta}{z-\zeta}. \tag{85}$$

Будем предполагать, что индуцированные скорости v_i малы по сравнению со скоростью набегающего потока U_∞. Это как раз соответствует, как из дальнейшего станет ясным, случаям малых углов атаки, для которых справедлив линейный закон связи между коэффициентом подъемной силы и углом атаки. Тогда, замечая, что (рис. 130)

$$\alpha_i \approx \operatorname{tg} \alpha_i = -\frac{v_i}{U_\infty},$$

получим, согласно (85), формулу для индуктивного угла или скоса потока

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{-l}^{l} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \frac{d\zeta}{z-\zeta}. \tag{86}$$

Для вычисления индуктивной скорости и индуктивного угла будем предполагать заданным распределение циркуляции по размаху $\Gamma(z)$. Представим его в форме тригонометрического ряда

$$\Gamma(\theta) = 4U_\infty l \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta, \tag{87}$$

где угол θ связан с переменной по размаху координатой z равенством

$$z = -l \cos \theta. \tag{88}$$

Концам отрезка несущей линии ($z=-l$, $z=l$) соответствуют значения $\theta=0$ и $\theta=\pi$; при этом циркуляция Γ обращается в нуль.

Если распределение циркуляции симметрично относительно начала координат ($z=0$, $\theta=\pi/2$), то должно быть $\Gamma(\theta)=\Gamma(\pi-\theta)$ и, следовательно,

$$A_2 = A_4 = \ldots = A_{2n} = \ldots = 0.$$

Вычислим по (87) производную $d\Gamma/d\zeta$, полагая параллельно с (88) $\zeta=-l\cos\theta'$; будем иметь

$$\frac{d\Gamma}{d\zeta} = \frac{d\Gamma}{d\theta'} : \frac{d\zeta}{d\theta'} = 4U_\infty l \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos n\theta' \frac{1}{l \sin \theta'} = 4U_\infty \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \frac{\cos n\theta'}{\sin \theta'}.$$

Подставляя это выражение в формулу (85), получим выражение индуктивной скорости

$$v_i(\theta) = -\frac{U_\infty}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n \cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = -\frac{U_\infty}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta'.$$

[1]) См., например, Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III.— М.: ГТТИ, 1933, с. 415; Т. IV.— М.: Гостехиздат, 1941, с. 240.

Интеграл, стоящий под знаком суммы, вычисляется в смысле своего главного значения и равен [1])

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta}\, d\theta' = \frac{\pi \sin n\theta}{\sin\theta},$$

так что окончательно получим следующие выражения: индуктивной скорости

$$v_i(\theta) = -U_\infty \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \tag{89}$$

а по (86) и угла скоса

$$\alpha_i(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}. \tag{90}$$

Перейдем к определению сил, действующих на крыло конечного размаха. Для отрезка несущей линии длины dz будем по теореме Жуковского иметь элементарную силу, перпендикулярную к *местной скорости на бесконечности* $\boldsymbol{V}_m$ (рис. 130) и равную по величине

$$dR = \rho V_m \Gamma\, dz,$$

причем с точностью до малых величин второго порядка относительно α_i можно положить

$$V_m = \sqrt{U_\infty^2 + v_i^2} \approx U_\infty \sqrt{1 + \alpha_i^2} \approx U_\infty;$$

таким образом, вместо предыдущей формулы получим

$$dR = \rho U_\infty \Gamma\, dz. \tag{91}$$

Вычисляя составляющие по осям координат, получим в принятом приближении (рис. 130)

$$dR_x = dR \sin\alpha_i \approx dR \cdot \alpha_i = \rho U_\infty \Gamma \alpha_i\, dz,$$
$$dR_y = dR \cos\alpha_i \approx dR = \rho U_\infty \Gamma\, dz$$

и, интегрируя по размаху,

$$R_x = \rho U_\infty \int_{-l}^{l} \Gamma(z)\, \alpha_i(z)\, dz, \quad R_y = \rho U_\infty \int_{-l}^{l} \Gamma(z)\, dz. \tag{92}$$

Для вычисления интегралов воспользуемся вновь тригонометрическими представлениями циркуляции (87) и индуктивного угла (90). Будем иметь

$$R_x = 4\rho U_\infty^2 l^2 \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sum_{m=1}^{\infty} mA_m \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} \sin\theta\, d\theta =$$
$$= \rho U_\infty^2 (2l)^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} mA_nA_m \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta\, d\theta.$$

Замечая, что по свойству ортогональности функций синусов кратных дуг

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta\, d\theta = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m, \end{cases}$$

[1]) Вычисление этого интеграла можно найти, например, в книге: Голубев В. В. Лекции по теории крыла.— М.: Гостехиздат, 1949, с. 215—216.

получим

$$R_x = \pi \frac{\rho U_\infty^2}{2} (2l)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2. \quad (93)$$

Аналогично найдем

$$R_y = \rho U_\infty \int_{-l}^{l} \Gamma(z)\, dz = 4\rho U_\infty^2 l^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \rho U_\infty^2 (2l)^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin\theta\, d\theta.$$

Но по только что указанному свойству ортогональности синусов кратных дуг

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin\theta\, d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n > 1 \end{cases}$$

в сумме, входящей в предыдущее равенство, сохранится лишь один член, так что будет

$$R_y = \pi \frac{\rho U_\infty^2}{2} (2l)^2 A_1. \quad (94)$$

Рассматривая обтекание крыла конечного размаха как равномерное, поступательное и прямолинейное его движение со скоростью U_∞ в покоящейся на бесконечности жидкости, естественно назвать составляющую R_x, направленную в сторону, противоположную движению тела, *сопротивлением* крыла, а составляющую R_y, перпендикулярную к направлению движения и несущей линии, *подъемной силой*. Вместе с тем, отмечая *вихревую природу* сопротивления, представляющего часть подъемной силы в потоке, скошенном вблизи несущей линии благодаря индуктивному действию вихревой пелены, это сопротивление называют *индуктивным сопротивлением*.

Обозначим через S площадь крыла в плане, т. е. проекцию его на плоскость xOz, содержащую скорость набегающего потока и ось крыла (несущую линию). Введем в рассмотрение коэффициенты индуктивного сопротивления c_{xi} и подъемной силы c_y, положив

$$c_{xi} = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \cdot S}, \quad c_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \cdot S}.$$

Тогда, пользуясь (93) и (94), найдем

$$c_{xi} = \pi \frac{(2l)^2}{S} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2, \quad c_y = \pi \frac{(2l)^2}{S} A_1. \quad (95)$$

Величина

$$\lambda = \frac{(2l)^2}{S}, \quad (96)$$

в случае крыла, прямоугольного в плане, равная отношению размаха крыла $2l$ к его хорде b, называется *удлинением крыла*. Вводя эту величину в (95), получим окончательно следующие формулы коэффициентов индуктивного сопротивления и подъемной силы:

$$c_{xi} = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2, \quad c_y = \pi\lambda A_1. \quad (97)$$

Как это непосредственно следует из первого равенства системы (95), индуктивное сопротивление представляет собой сумму существенно положительных величин. Отсюда следует, что индуктивное сопротивление крыла конечного размаха при отличной от нуля подъемной силе ($A_1 \neq 0$) будет минимальным, если все коэффициенты в разложении циркуляции, кроме первого, равны нулю. Это, согласно равенству (87), соответствует распределению циркуляции

$$\Gamma = 4U_\infty l A_1 \sin\theta, \tag{98}$$

или, если вернуться к переменной z по (88),

$$\Gamma = 4U_\infty l A_1 \sqrt{1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2}. \tag{99}$$

Переписывая последнее равенство в виде

$$\frac{\Gamma^2}{(4U_\infty l A_1)^2} + \frac{z^2}{l^2} = 1,$$

убедимся, что эпюрой распределения циркуляции по размаху крыла (несущей линии) будет эллипс с полуосями: по оси z — равной полуразмаху крыла l, по оси Γ — максимальной по размаху циркуляции Γ_m, причем коэффициент A_1 можно выразить через эту максимальную циркуляцию Γ_m так:

$$4U_\infty l A_1 = \Gamma_m, \quad A_1 = \frac{\Gamma_m}{4U_\infty l}. \tag{100}$$

Уравнение эллипса будет

$$\frac{\Gamma^2}{\Gamma_m^2} + \frac{z^2}{l^2} = 1. \tag{101}$$

Полученное распределение циркуляции называется *эллиптическим*. По только что доказанному при *эллиптическом распределении циркуляции индуктивное сопротивление минимально.* В связи с этим крыло с эллиптическим распределением циркуляции имеет в теории крыла принципиальное значение; рассмотрим основные его свойства. Прежде всего из формул (89) и (90) сразу следует, что *при эллиптическом распределении циркуляции индуктивная скорость и индуктивный угол (скос) одинаковы вдоль всего размаха.* Действительно, подставляя в формулы (89) и (90) значения коэффициентов A_n

$$A_1 = \frac{\Gamma_m}{4U_\infty l}, \quad A_2 = A_3 = \ldots = 0,$$

получим

$$v_i = -\frac{\Gamma_m}{4l}, \quad \alpha_i = \frac{\Gamma_m}{4U_\infty l}. \tag{102}$$

Крыло с постоянным по размаху геометрическим углом атаки называют *геометрически незакрученным*; крыло с постоянным по размаху *действительным* углом атаки называют *аэродинамически незакрученным.*

Из доказанного только что свойства одинаковости угла скоса вдоль размаха крыла с эллиптическим распределением циркуляции следует, что *геометрически незакрученное крыло с эллиптическим распределением циркуляции будет и аэродинамически незакрученным.*

Из формул (102) заключим, что с возрастанием размаха при заданной максимальной циркуляции индуктивная скорость и угол скоса стре-

мятся к нулю, как это и должно быть при переходе к крылу бесконечного размаха.

Докажем, что *геометрически незакрученное крыло с эллиптическим распределением циркуляции и одинаковыми по всему размаху аэродинамическими характеристиками сечений имеет эллиптическую форму в плане.*

Для доказательства свяжем коэффициент подъемной силы c_y' сечения крыла с соответствующим ему значением циркуляции $\Gamma(z)$. По теореме Жуковского будем иметь для единицы длины крыла (b — хорда)

$$\rho U_\infty \Gamma = c_y' \frac{\rho U_\infty^2}{2} b,$$

или, вспоминая еще, что для малых углов атаки α_e', отсчитываемых от направления нулевой подъемной силы,

$$c_y' = \left(\frac{dc_y'}{d\alpha}\right)_{c_y'=0} \cdot \alpha_e' = a_0 \alpha_e',$$

где a_0 — наклон кривой зависимости c_y' от α, а α_e' — действительный угол атаки, найдем общую формулу искомой связи в виде

$$\Gamma = \frac{1}{2} a_0 b U_\infty \alpha_e'. \tag{103}$$

Отсюда сразу следует, что у крыла с эллиптическим распределением циркуляции при постоянной вдоль размаха аэродинамической характеристике сечений крыла a_0 и отсутствии геометрической закрученности ($\alpha=\text{const}$, $\alpha_i=\text{const}$, $\alpha_e'=\text{const}$) закон изменения хорды b вдоль размаха совпадает с законом изменения циркуляции Γ, т. е. также будет эллиптическим. Форма крыла в плане, согласно (101), (103) и очевидному соотношению $\Gamma_m = \frac{1}{2} a_0 b_m U_\infty \alpha_e'$, представится уравнением (b_m — максимальная хорда сечения, соответствующего $z=0$)

$$\frac{b^2}{b_m^2} + \frac{z^2}{l^2} = 1. \tag{104}$$

Итак, при принятых условиях геометрической незакрученности и одинаковости аэродинамических характеристик вдоль размаха, крыло с эллиптическим распределением циркуляции будет иметь и эллиптическую форму в плане; такое крыло может быть названо *эллиптическим.*

Определим связь между коэффициентами индуктивного сопротивления и подъемной силы эллиптического крыла. По (97) при $A_2 = A_3 = \ldots = 0$

$$c_{xi} = \pi\lambda A_1^2, \quad c_y = \pi\lambda A_1.$$

Исключая отсюда A_1, получим

$$c_{xi} = \frac{1}{\pi\lambda} c_y^2. \tag{105}$$

Аналогичную формулу можно вывести и для крыла любой формы в плане. Положим

$$\frac{1}{A_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 = 1 + \frac{1}{A_1^2} \sum_{n=2}^{\infty} n A_n^2 = 1 + \delta. \tag{106}$$

где δ тем меньше, чем ближе рассматриваемое крыло к эллиптическому. Тогда из (97) в общем случае получим

$$c_{xi} = \frac{1+\delta}{\pi\lambda} c_y^2. \tag{107}$$

Предположим, что при полете на режиме максимальной скорости потребные для поддержания самолета в воздухе c_y невелики ($c_y \approx 0{,}15$—$0{,}20$). При этом коэффициенты индуктивного сопротивления c_{xi} будут малы по сравнению с коэффициентами профильного сопротивления c_{xp}, обусловленного сопротивлением трения и сопротивлением давления, возникающими из-за неидеальности воздуха. Наоборот, при малых скоростях полета основное значение приобретает индуктивное сопротивление.

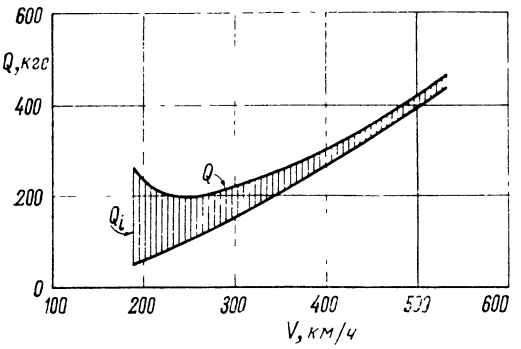


Рис. 131

Приводим на рис. 131 для иллюстрации типичную кривую полного лобового сопротивления Q самолета с выделением роли индуктивного сопротивления (заштрихованная полоска) при различных скоростях полета [1]). При полете со сравнительно большими значениями c_y (например, транспортные самолеты с большой дальностью) выгодно увеличивать удлинение, границы выбора которого ставятся прочностью крыла и другими конструктивными соображениями.

Все эти вопросы, так же как и вопросы применения формул (97) к конкретным крыльям, рассматриваются в специальных курсах теории крыла и аэродинамики самолета.

Обратимся к рассмотрению наиболее сложной задачи теории крыла, а именно к задаче определения циркуляции, образующейся на крыле заданной формы в плане с заданными аэродинамическими характеристиками сечений.

Сохраним обозначения $b(z)$, $\alpha(z)$ и $a_0(z)$ для заданных переменных вдоль размаха величин: хорды, геометрического угла атаки и производной коэффициента подъемной силы по углу атаки. Тогда для циркуляции $\Gamma(z)$ получим по формулам (103) и (81)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} a_0(z) b(z) U_\infty \alpha_e' = \frac{1}{2} a_0(z) b(z) U_\infty [\alpha(z) - \alpha_i(z)]. \tag{108}$$

Если в этом равенстве заменить индуктивный угол $\alpha_i(z)$ согласно его выражению (86), то для определения неизвестной циркуляции $\Gamma(z)$ найдем следующее интегро-дифференциальное уравнение Прандтля:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} a_0(z) b(z) U_\infty \left[\alpha(z) - \frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{-l}^{l} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \frac{d\zeta}{z-\zeta} \right]. \tag{109}$$

В этом уравнении, подчеркнем еще раз, под геометрическим углом атаки $\alpha(z)$, так же как и под *действительным* углом в предыдущем равенстве, подразумевается угол, отсчитанный от направления нулевой подъемной силы.

---

[1]) См. Горощенко Б. Т. Аэродинамика скоростного самолета.— М.. Оборонгиз, 1948, с. 25.

В современных специальных курсах аэродинамики самолета излагаются методы решения уравнения Прандтля (109), в том числе и методы, использующие машинную технику счета. Как уже упоминалось, изложенная теория «несущей линии» пригодна лишь для расчета крыльев самолета с *большим относительным удлинением*. Теория крыльев малого удлинения основывается на замене крыла вихревой поверхностью, приходящей на смену вихревой «несущей линии». Литература в этой области как в Советском Союзе, так и за рубежом весьма обширна. Отошлем читателя к «Сборнику теоретических работ по аэродинамике» (Оборонгиз, 1957), где (в статьях П. И. Чушкина и Г. А. Колесникова) излагаются методы расчета крыльев малого удлинения и приводится основная библиография по этому вопросу.

Благодаря в значительной степени исследованиям советских ученых, широкое развитие получила теория *нестационарного* движения крыла в безвихревом потоке несжимаемой жидкости и газа [1]).

§ 79. Общий случай движения твердого тела в безграничной идеальной несжимаемой жидкости. Задача Кирхгофа

При рассмотрении внешнего обтекания твердого тела до сих пор предполагалось, что тело неподвижно, а набегающий на него поток однороден и стационарен, или же жидкость вдалеке от тела неподвижна, а тело движется сквозь нее поступательно, прямолинейно и равномерно. Именно в этом предположении был доказан парадокс Даламбера о равенстве нулю главного вектора сил давления жидкости на поверхность тела конечных размеров.

Обратимся теперь к рассмотрению общего случая *неравномерного* и *непоступательного движения* твердого тела в безграничной, несжимаемой идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности.

Условимся в дальнейшем все величины, относящиеся к твердому телу, обозначать индексом «звездочка», а для тех же величин в окружающей тело жидкости сохраним обычные обозначения. Так, вектор скорости точек твердого тела обозначим через $\boldsymbol{V}^*(u^*, v^*, w^*)$ и будем считать равным

$$\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{V}_0^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{r}^*, \tag{110}$$

где $\boldsymbol{V}_0^*(u_0^*, v_0^*, w_0^*)$ — скорость произвольной точки O^* твердого тела, принятой за полюс; $\boldsymbol{\omega}^*$ — угловая скорость вращения тела вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс O^*; $\boldsymbol{r}^*$ — вектор-радиус точки твердого тела относительно полюса O^*.

Введем в рассмотрение две системы координат: 1) *абсолютную, неподвижную* систему $Oxyz$ и 2) *относительную, подвижную*, связанную с твердым телом систему $O^*x^*y^*z^*$. Если по ходу вывода отсутствует дифференцирование по времени, то время теряет свое значение как независимое переменное, а становится просто *параметром*, отмечающим следующие одну за другой пространственные картины явления. При этом, нисколько не нарушая общности, можно в любой фиксированный момент времени считать обе системы координат совпадающими и пользоваться для описания явления либо координатами x^*, y^*, z^*, либо x, y, z.

В тех же случаях, когда время является аргументом, по которому производят дифференцирование, уже нельзя пренебрегать взаимным движением координатных систем и становится необходимым различать два рода производных: *абсолютную* d/dt, вычисляемую в неподвижной системе координат $Oxyz$, и *относительную* d^*/dt, определенную в под-

[1]) Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа.— М.: Наука, 1971 (там же — обширная библиография).

вижной, связанной с твердым телом системе $O^*x^*y^*z^*$. Напомним, что абсолютная и относительная производные по времени от некоторой вектор-функции $\boldsymbol{a}(t)$ связаны соотношением [1])

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{d^*\boldsymbol{a}}{dt}+\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{a}. \tag{111}$$

Согласно доказанной в начале гл. VII теореме Лагранжа можно считать, что движение, вызванное в жидкости перемещающимся в ней телом, будет *безвихревым*. Потенциал скоростей φ, в отличие от предыдущих — стационарных движений,— является функцией *не только координат, но и времени.*

Из равенства $\boldsymbol{V}=\operatorname{grad}\varphi$ и уравнения несжимаемости жидкости $\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0$ следует, что искомый потенциал $\varphi(x, y, z, t)$ должен удовлетворять *в каждый данный момент времени* уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi=0. \tag{112}$$

Граничное условие непроницаемости поверхности твердого тела σ, требующее, чтобы проекции на нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности σ скорости $\boldsymbol{V}$ частиц жидкости, скользящих по поверхности, совпадали с соответствующими проекциями скорости $\boldsymbol{V}^*$ точек твердой поверхности, и условие убывания потенциала φ при удалении от тела могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned}V_n=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=V_n^*=V_{0n}^*+(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}^*)\cdot\boldsymbol{n}=u_0^*n_x+v_0^*n_y+w_0^*n_z+\\+\omega_x^*(yn_z-zn_y)+\omega_y^*(zn_x-xn_z)+\omega_z^*(xn_y-yn_x)\ (\text{на }\sigma);\\ \varphi=O(1/R^2)\to 0\ \text{при}\ R\to\infty.\end{aligned} \tag{113}$$

В равенствах приняты обозначения: $V_{0x}^*=u_0^*$, $V_{0y}^*=v_0^*$, $V_{0z}^*=w_0^*$, причем проекции взяты на оси $Oxyz$, в данный момент времени совпадающие с $O^*x^*y^*z^*$.

Подчеркнем, что для определения нестационарного поля потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$ никакие *начальные* условия не требуются, так как уравнение (112) не содержит частной производной по времени. Решение в любой данный момент времени t не зависит от предыстории потока. Время служит в этой задаче только параметром, влияние которого проявляется в конкретном виде правой части граничного условия (113), содержащей характеристики движения твердого тела.

Пользуясь линейностью уравнения (112), будем, следуя Кирхгофу [2]), искать решение этого уравнения в форме

$$\varphi=u_0^*\varphi_1+v_0^*\varphi_2+w_0^*\varphi_3+\omega_x^*\varphi_4+\omega_y^*\varphi_5+\omega_z^*\varphi_6. \tag{114}$$

Тогда уравнение (112) распадается на систему следующих шести уравнений Лапласа для каждой из функций φ_i:

$$\nabla^2\varphi_i=0\qquad(i=1, 2, \ldots, 6) \tag{115}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=n_x,\quad\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=n_y,\quad\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}=n_z,\\ &\frac{\partial\varphi_4}{\partial n}=yn_z-zn_y,\quad\frac{\partial\varphi_5}{\partial n}=zn_x-xn_z,\quad\frac{\partial\varphi_6}{\partial n}=xn_y-yn_x;\\ &\varphi_i=O(1/R^2)\to 0\ \text{при}\ R\to\infty.\end{aligned} \tag{116}$$

---

[1]) Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. I.— М.: Наука, 1982, с. 303, формула (12).

[2]) Кирхгоф Г. Р. Механика. Лекции по математической физике.— М.: Изд-во АН СССР, 1962, 18-я лекция, с. 122—197.

Уравнения (115) не содержат производных по времени. Замечая, что правые части граничных условий (116) в системе координат $Oxyz$ тождественны с соответствующими выражениями в совпадающей с ней и связанной с телом системе координат $O^*x^*y^*z^*$, убедимся, что решения φ_i уравнений (115) при граничных условиях (116) также от времени не зависят. Отсюда следует, что равенство (114) представляет искомое решение для потенциала $\varphi(x, y, z, t)$ в виде суммы произведений заданных наперед функций времени $u_0^*(t)$, $v_0^*(t)$, $w_0^*(t)$; $\omega_x^*(t)$, $\omega_y^*(t)$, $\omega_z^*(t)$, определяющих движение тела в жидкости, на неизвестные функции $\varphi_i(x, y, z)$ только от координат.

Функции $\varphi_i(x, y, z)$ можно интерпретировать как потенциалы скоростей следующих движений жидкости относительно связанной с твердым телом координатной системы: первые три потенциала φ_1, φ_2, φ_3 соответствуют обтеканиям рассматриваемого тела при его *поступательных и равномерных движениях со скоростями, равными единице*, вдоль осей координат; последние три потенциала φ_4, φ_5, φ_6 — *вращательным движениям тела с единичными угловыми скоростями вокруг осей координат.* Функции φ_i в связи с этим называют *единичными потенциалами.*

Предполагая, что функции φ_i определены, перейдем к разысканию *главного вектора и главного момента сил давления жидкости на движущееся в ней твердое тело.* Заключим движущееся тело внутрь некоторой жидкой сферы большого радиуса R_0 с поверхностью σ_0 и применим теорему количеств движения к жидкой массе, находящейся в *переменном во времени* объеме τ между поверхностями σ и σ_0. Обозначим через $\boldsymbol{Q}$ главный вектор количеств движения жидкости в объеме τ, через $\boldsymbol{F}$ — искомый главный вектор сил давления *жидкости на поверхность тела* σ и через $\boldsymbol{F}'$ — главный вектор сил давления, приложенных извне к поверхности σ_0; тогда будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = -\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}',$$

откуда следует, что

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' - \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}. \tag{117}$$

Отметим, что в равенстве (117) и в предыдущем равенстве производная по времени является *абсолютной* производной, т. е. выражает быстроту изменения во времени главного вектора количеств движения жидкости по отношению к неподвижной системе координат $Oxyz$.

Вектор $\boldsymbol{F}'$ найдем по формуле

$$\boldsymbol{F}' = -\int_{\sigma_0} p\boldsymbol{n}_0 d\sigma_0,$$

куда вместо давления p следует, согласно интегралу Лагранжа — Коши (§ 48), подставить выражение

$$p = \rho f(t) - \frac{\rho V^2}{2} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

причем по условиям покоя жидкости на бесконечности

$$p \to p_\infty, \quad V \to 0, \quad \varphi \to 0 \text{ при } R \to \infty$$

функция $f(t)$ в последнем равенстве может быть заменена на постоянную величину p_∞/ρ. Отбрасывая интеграл от постоянного слагаемого p_∞, получим

$$\boldsymbol{F}' = \rho\int_{\sigma_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\boldsymbol{n}_0 d\sigma_0 + \frac{\rho}{2}\int_{\sigma_0} V^2\boldsymbol{n}_0 d\sigma_0. \tag{118}$$

Главный вектор количеств движения жидкости в объеме τ, заключенном между поверхностями σ и σ_0, выразим через поверхностные интегралы так:

$$\boldsymbol{Q} = \int_\tau \rho \boldsymbol{V} d\tau = \rho \int_\tau \operatorname{grad} \varphi d\tau = -\rho \int_\sigma \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma + \rho \int_{\sigma_0} \varphi \boldsymbol{n}_0 d\sigma_0; \tag{119}$$

знак минус перед первым интегралом в правой части объясняется тем, что *внешняя* нормаль к поверхности тела σ является *внутренней* нормалью по отношению к объему жидкости τ, заключенному между поверхностями σ и σ_0.

Возвратимся теперь к вычислению главного вектора $\boldsymbol{F}$ сил давления потока на движущееся в нем тело. Согласно (117) для определения вектора $\boldsymbol{F}$ необходимо вычислить индивидуальную производную от главного вектора количеств движения $\boldsymbol{Q}$, представленного правой частью формулы (119). Составляя выражение производной

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho\varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma + \frac{d}{dt}\int_{\sigma_0} \rho\varphi \boldsymbol{n}_0 d\sigma_0, \tag{120}$$

сохраним пока без изменения первое слагаемое в правой части, а второе выразим как сумму *локальной производной по времени*, легко вычисляемой при неподвижности (независимости от времени) поверхности σ_0 в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma_0} \rho\, \varphi \boldsymbol{n}_0\, d\sigma_0 = \int_{\sigma_0} \rho\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \boldsymbol{n}_0 d\sigma_0,$$

и *конвективной* производной, которая требует для своего вычисления непосредственного составления предела отношения разности приращенного и первоначального значений дифференцируемого интеграла к приращению времени. Такой предел, как известно (§ 24), сводится к *переносу количества движения* сквозь поверхность, т. е. в данном случае к интегралу

$$\int_{\sigma_0} \rho V_{n_0} \boldsymbol{V} d\sigma_0.$$

Подставляя полученные выражения локальной и конвективной производных в правую часть (120), получим

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho\, \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_{\sigma_0} \rho\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \boldsymbol{n}_0 d\sigma_0 + \int_{\sigma_0} \rho V_{n_0} \boldsymbol{V} d\sigma_0$$

и, возвращаясь к (117) и (118), найдем следующее выражение главного вектора сил давления, приложенных со стороны жидкости к поверхности движущегося в ней тела:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\int_\sigma \rho\varphi \boldsymbol{n} d\sigma + \rho \int_{\sigma_0} \left(\frac{1}{2} V^2 \boldsymbol{n}_0 - V_{n_0} \boldsymbol{V}\right) d\sigma_0. \tag{121}$$

Устремим теперь радиус R_0 поверхности σ_0 к бесконечности. Тогда, рассуждая так же, как при доказательстве парадокса Даламбера (§ 73), убедимся, что выражение, стоящее под знаком интеграла в последнем слагаемом правой части равенства (121), имеет порядок $1/R_0^6$, в то время как поверхность интегрирования имеет порядок R_0^2; следовательно, при $R_0 \to \infty$ слагаемое это стремится к нулю. Окончательно найдем иско-

чую формулу *главного вектора сил давления жидкости на поверхность* ела

$$F = \frac{d}{dt}\int_{\sigma} \rho\varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma. \tag{122}$$

Проводя аналогичные рассуждения, найдем выражение *главного* омента *сил давления жидкости на поверхность тела*

$$M = \frac{d}{dt}\int_{\sigma} \rho\varphi \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\, d\sigma. \tag{123}$$

Следуя принятым ранее обозначениям, зададим главный вектор Q^* и главный момент K^* количеств движения твердого тела, движущегося в жидкости. Тогда, согласно теоремам количеств и момента количеств движения в применении к твердому телу, получим *уравнения движения твердого тела*

$$\frac{dQ^*}{dt} = F^* + F, \quad \frac{dK^*}{dt} = M^* + M,$$

где F^* и M^* обозначают соответственно главный вектор и главный момент внешних сил, приложенных к твердому телу, помимо реакций жидкости F и M. Принимая во внимание (122) и (123), перепишем предыдущие уравнения в виде

$$\frac{d}{dt}\left(Q^* - \int_{\sigma} \rho\varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma\right) = F^*, \quad \frac{d}{dt}\left(K^* - \int_{\sigma} \rho\varphi \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\, d\sigma\right) = M^*. \tag{124}$$

Введя обозначения

$$-\int_{\sigma} \rho\varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma = B, \quad -\int_{\sigma} \rho\varphi \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\, d\sigma = I, \tag{125}$$

перепишем уравнения (124) в сокращенной форме:

$$\frac{d}{dt}(Q^* + B) = F^*, \quad \frac{d}{dt}(K^* + I) = M^*. \tag{126}$$

Полученным уравнениям дадим следующую трактовку: *уравнения движения твердого тела в жидкости можно рассматривать как уравнения движения тела в пустоте, если к главным векторам количеств и моментов количеств движения твердого тела прибавить соответственно дополнительные векторы* B и I, определенные равенствами (125). Назовем их векторами количеств и моментов количеств движения жидкости, *присоединенными* к твердому телу.

Рассмотрим теперь детальнее полученные выражения (122) главного вектора F и (123) главного момента M сил давления жидкости на поверхность. С этой целью, воспользовавшись (125), перепишем их для краткости в форме

$$F = -\frac{dB}{dt}, \quad M = -\frac{dI}{dt} \tag{127}$$

и перейдем от примененных в этих равенствах абсолютных производных к относительным согласно равенству (111).

Будем иметь для вектора F выражение

$$F = -\frac{d^*B}{dt} - \omega^*\times B. \tag{128}$$

Что касается выражения (123) главного момента M, то здесь надо принять во внимание существенную для правильного вычисления абсо-

лютной производной по времени разницу между вектор-радиусом r в абсолютной системе координат и совпадающим с ним в данный момент времени относительным вектор-радиусом r^*. При принятом нами *мгновенном совпадении подвижной* $O^*x^*y^*z^*$ и *неподвижной* $Oxyz$ *систем координат* абсолютный вектор-радиус r следует рассматривать как предельное значение суммы вектор-радиуса точки O^* и относительного вектор-радиуса r^*

$$r=(r_{O^*}+r^*)_{r_{O^*}=0},$$

что нельзя не учитывать при вычислениях абсолютной производной. Будем иметь, согласно вторым равенствам систем (125) и (127),

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho\varphi r\times n\,d\sigma=\left[-\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho\varphi(r_{O^*}+r^*)\times n\,d\sigma\right]_{r_{O^*}=0}=$$

$$=-\left[\frac{dr_{O^*}}{dt}\times\int_\sigma \rho\varphi n\,d\sigma+r_{O^*}\times\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho\varphi n\,d\sigma+\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho\varphi r^*\times n\,d\sigma\right]_{r_{O^*}=0}=$$

$$=V_0^*\times B+\frac{d}{dt}(I)_{r=r^*}.$$

Переходя после этого от абсолютных производных к относительным, окончательно получим искомую формулу *главного момента сил давления потока на поверхность тела*

$$M=-\frac{d^*I}{dt}-\omega^*\times I-V_0^*\times B, \tag{129}$$

где под I понимается его выражение в относительной системе координат

$$I=-\int_\sigma \rho\varphi r^*\times n\,d\sigma. \tag{130}$$

Разберем два частных случая общего движения твердого тела в жидкости.

1. Тело движется в жидкости *поступательно* и *равномерно*. В этом случае $\omega^*=0$, B не зависит от времени, и равенство (128) приводит к известному уже нам парадоксу Даламбера (§ 73). Как это следует из (129), *главный момент сил давления при этом не равен нулю*

$$M=-V_0^*\times B.$$

Равновесию тела соответствует выполнение условия параллельности векторов V_0^* и B.

2. Движение тела складывается из равномерных движений полюса и вращения вокруг полюса. Парадокс Даламбера в этом случае уже несправедлив; имеем по (128)

$$F=-\omega^*\times B.$$

Главный момент состоит из двух слагаемых

$$M=-\omega^*\times I-V_0^*\times B.$$

Для дальнейшего полезно изменить обозначения проекций векторов скорости V_0^* полюса тела и угловой скорости ω^* его вращения, положив

$$u_0^*=q_1,\ v_0^*=q_2,\ w_0^*=q_3;\ \omega_x^*=q_4,\ \omega_y^*=q_5,\ \omega_z^*=q_6;$$

точно так же примем обозначения

$$B_x=B_1,\quad B_y=B_2,\quad B_z=B_3;\quad I_x=B_4,\quad I_y=B_5,\quad I_z=B_6.$$

В новых обозначениях выражение потенциала скоростей (114) будет

$$\varphi = \sum_{k=1}^{6} q_k \varphi_k. \tag{131}$$

Воспользуемся теперь выполняющейся в любой момент времени на поверхности тела σ системой равенств (116); тогда в новых обозначениях будем иметь по (131)

$$B_i = -\rho \int_\sigma \varphi \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} d\sigma = -\rho \int_\sigma \sum_{k=1}^{6} q_k \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} d\sigma = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik} q_k \quad (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{132}$$

где введено обозначение

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_\sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k d\sigma. \tag{133}$$

Величины λ_{ik}, вычисленные в связанной с твердым телом координатной системе, представляют собой некоторые *постоянные*, зависящие лишь от *плотности жидкости* и *формы поверхности тела*, так как, по ранее доказанному, φ_i *не зависят от времени.*

Являясь коэффициентами в выражениях (132) присоединенных количества и момента количества движения через скорости q_k, величины λ_{ik} играют роль *инерционных коэффициентов, присоединяемых к инерционным коэффициентам, входящим в аналогичные выражения количества движения и момента количества движения самого твердого тела.*

Так, например, проекция на ось Ox количества движения твердого тела, массу которого обозначим через m^*, равна

$$Q_x^* = \int_{m^*} V_x^* dm^* = \int_{m^*} (u_0^* + \omega_y^* z - \omega_z^* y)\, dm^* =$$

$$= m^* u_0^* + \omega_y^* \int_{m^*} z\, dm^* - \omega_z^* \int_{m^*} y\, dm^* = m^* u_0^* + m^* z_c \omega_y^* - m^* y_c \omega_z^*,$$

где y_c и z_c — координаты центра тяжести тела; отсюда в новых обозначениях следует

$$Q_1^* = m^* q_1 + m^* z_c q_5 - m^* y_c q_6.$$

Проекция на ось Ox суммы количества движения $\boldsymbol{Q}^*$ и «присоединенного» количества движения $\boldsymbol{B}$ будет равна

$$Q_1^* + B_1 = (m^* + \lambda_{11}) q_1 + \lambda_{12} q_2 + \lambda_{13} q_3 + \lambda_{14} q_4 + (m^* z_c + \lambda_{15}) q_5 +$$

$$+ (-m^* y_c + \lambda_{16}) q_6.$$

Как видно из структуры этого выражения, инерционные коэффициенты λ_{ik} *присоединяются* к инерционным коэффициентам в выражении проекции количества движения твердого тела: λ_{11} — к массе, λ_{15} и λ_{16} — к статическим моментам масс; остальные коэффициенты в общем случае составляют члены, отсутствующие в выражении проекции главного вектора количества движения твердого тела. Инерционные коэффициенты λ_{ik} называют *коэффициентами присоединенных масс.*

Тридцать шесть коэффициентов присоединенных масс

$$\lambda_{ik} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, 6 \\ k = 1, 2, \ldots, 6 \end{pmatrix}$$

обладают свойством симметрии, т. е. не зависят от порядка индексов. Чтобы это доказать, составим применительно к объему τ, ограниченно-

му поверхностями тела σ и сферы σ_0 большого радиуса R_0, следующее известное соотношение (применено второе из равенств (88) гл. I при $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\varphi_k$):

$$\int_\tau \varphi_i \nabla^2\varphi_k d\tau = \int_\tau \varphi_i \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi_k)\,d\tau = \int_\tau \operatorname{div}(\varphi_i \operatorname{grad}\varphi_k)\,d\tau - \int_\tau \operatorname{grad}\varphi_i \cdot \operatorname{grad}\varphi_k d\tau$$

и вычтем из него аналогичное соотношение с измененным порядком индексов; тогда получим общую формулу

$$\int_\tau (\varphi_i \nabla^2\varphi_k - \varphi_k \nabla^2\varphi_i)\,d\tau = \int_\tau \operatorname{div}(\varphi_i \operatorname{grad}\varphi_k)\,d\tau - \int_\tau \operatorname{div}(\varphi_k \operatorname{grad}\varphi_i)\,d\tau.$$

Замечая, что единичные потенциалы φ_i и φ_k удовлетворяют уравнению Лапласа, и применяя к правой части формулу Гаусса — Остроградского, приходим к равенству

$$\int_\sigma \left(\varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right) d\sigma = \int_{\sigma_0} \left(\varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n_0} - \varphi_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial n_0}\right) d\sigma_0.$$

Примем во внимание, как и раньше, что интеграл справа при удалении поверхности сферы σ_0 на бесконечность стремится к нулю (φ_i имеет порядок $1/R_0^2$, $\partial\varphi_i/\partial n_0$ — порядок $1/R_0^3$); тогда будем иметь

$$\int_\sigma \varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} d\sigma = \int_\sigma \varphi_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} d\sigma$$

или, по определению коэффициентов присоединенных масс,

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki},$$

что и доказывает свойство симметрии этих величин.

Присоединенные массы λ_{ik} входят коэффициентами в выражение квадратичной зависимости кинетической энергии T возмущенного движения жидкости от скоростей движения твердого тела.

Подсчитывая кинетическую энергию жидкости в объеме τ между поверхностями σ и σ_0 и замечая, что *внешняя* нормаль на σ совпадает с *внутренней* по отношению к объему τ, получим

$$T = \frac{\rho}{2}\int_\tau V^2 d\tau = \frac{\rho}{2}\int_\tau \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi\, d\tau =$$

$$= \frac{\rho}{2}\int_\tau \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi)\,d\tau - \frac{\rho}{2}\int_\tau \varphi\nabla^2\varphi\, d\tau = -\frac{\rho}{2}\int_\sigma \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma + \frac{\rho}{2}\int_{\sigma_0} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n_0} d\sigma_0$$

и, вновь замечая, что при удалении поверхности σ_0 на бесконечность второй интеграл справа обратится в нуль, получим

$$T = -\frac{\rho}{2}\int_\sigma \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma. \tag{134}$$

Подставим сюда разложение потенциала скоростей φ на единичные потенциалы составных движений φ_i; тогда, перемножая суммы, найдем искомое выражение кинетической энергии возмущенного движения жидкости через скорости тела и присоединенные массы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik} q_i q_k. \tag{135}$$

Сравнивая это выражение с выражением (132), получим связь между присоединенной кинетической энергией возмущенного движения T и

присоединенным количеством движения B_i

$$B_i = \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{136}$$

Если написать в развернутом виде выражение кинетической энергии самого движущегося твердого тела

$$T^* = \frac{1}{2}\int_{m^*} V^{*2}\, dm^* = \frac{1}{2}\left[m^*\left(u_0^{*2} + v_0^{*2} + w_0^{*2}\right) + 2m^* x_c\left(v_0^*\omega_z^* - w_0^*\omega_y^*\right) + \right.$$

$$+ 2m^* y_c\left(w_0^*\omega_x^* - u_0^*\omega_z^*\right) + 2m^* z_c\left(u_0^*\omega_y^* - v_0^*\omega_x^*\right) + J_x\omega_x^{*2} + J_y\omega_y^{*2} + J_z\omega_z^{*2} -$$

$$\left. - 2J_{yz}\omega_y^*\omega_z^* - 2J_{zx}\omega_z^*\omega_x^* - 2J_{xy}\omega_x^*\omega_y^*\right],$$

то легко убедиться, что при присоединении кинетической энергии T возмущенной телом жидкости к энергии самого движущегося тела T^* коэффициенты λ_{ik}, так же как и в случае векторов количеств и моментов количеств движения, присоединяются к соответствующим инерционным коэффициентам в выражении T^*: массе, статическим моментам, моментам инерции и центробежным моментам. Это еще раз поясняет смысл коэффициентов λ_{ik} и происхождение названия *присоединенных масс*.

Приведем расчеты нескольких простейших «присоединенных масс». Пусть круглый цилиндр радиуса a, окруженный безграничной идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ, совершает поступательное движение вдоль оси Ox, перпендикулярной к оси цилиндра, со скоростью u_0, являющейся заданной функцией времени t. В этом случае потенциал скоростей возмущенного движения будет

$$\varphi = -\operatorname{Re}\left(u_0\frac{a^2}{z}\right) = -u_0(t)\, a^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = -u_0(t)\, a^2 \frac{x}{x^2+y^2} =$$

$$= -u_0(t)\, a^2 \frac{x}{r^2} = -u_0(t)\, a^2 \frac{\cos\varepsilon}{r},$$

и коэффициент при $u_0(t)$

$$\varphi_1 = -\frac{a^2\cos\varepsilon}{r}$$

будет играть роль *единичного потенциала*, а коэффициент присоединенной массы по (133) будет равен

$$\lambda_{11} = -\rho\int_0^{2\pi}\varphi_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=a}\right) a\, d\varepsilon = \rho a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\varepsilon\, d\varepsilon = \pi\rho a^2 = m,$$

где m — масса жидкости в объеме цилиндра, приходящаяся на единицу его длины.

Реакция жидкости на цилиндр будет определяться по формуле

$$F_x = -\frac{dB_x}{dt} = -\lambda_{11}\frac{du_0}{dt} = -m\frac{du_0}{dt}.$$

В случае равномерного движения цилиндра ($du_0/dt = 0$) эта сила пропадает и имеет место парадокс Даламбера. При ускоренном движении цилиндра реакция жидкости существует, причем она тем больше, чем больше ускорение цилиндра.

Составляя дифференциальное уравнение движения цилиндра (m^* — масса единицы длины цилиндра, F^* — внешняя сила, помимо реакции жидкости)

$$m^*\frac{du_0}{dt} = F_x^* + F_x,$$

видим, что его можно переписать так:

$$(m^* + m)\frac{du_0}{dt} = F_x^*.$$

Под действием приложенной силы F^* цилиндр будет двигаться в жидкости так же, как в пустоте, если только *массу его увеличить на присоединенную массу жидкости в объеме цилиндра.*

Столь же просто решается задача о прямолинейном движении шара. В этом случае будем иметь

$$\varphi = -\frac{a^3\cos\theta}{2R^2}u_0(t), \quad \varphi_1 = -\frac{a^3}{2}\frac{\cos\theta}{R^2},$$

$$\lambda_{11} = -\rho\int_0^{2\pi}d\varepsilon\int_0^{\pi}\left(-\frac{a^3}{2}\frac{\cos\theta}{a^2}\right)\left(\frac{a^3}{2}\frac{2\cos\theta}{a^3}\right)a^2\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\pi\rho a^3 = \frac{1}{2}m,$$

где m — масса жидкости в объеме шара.

Дифференциальное уравнение движения шара будет

$$m^*\frac{du_0}{dt} = F_x^* + F_x = -\frac{1}{2}m\frac{du_0}{dt} + F_x^*,$$

или

$$\left(m^* + \frac{1}{2}m\right)\frac{du_0}{dt} = F_x^*.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением прямолинейного движения шара под действием той же силы F^* в пустоте

$$m^*\frac{du_0}{dt} = F_x^*,$$

приходим к заключению, что движение шара в жидкости можно рассматривать как происходящее в пустоте, если только к массе шара *присоединить дополнительную массу, равную половине массы жидкости в объеме шара.*

Если масса жидкости в объеме движущегося тела мала по сравнению с массой самого движущегося тела (например, снаряд или самолет в воздухе), то присоединенной массой можно пренебречь. В других случаях (дирижабль в воздухе, корабль или торпеда в воде и др.), наоборот, роль присоединенных масс оказывается первостепенной.

Следует, конечно, иметь в виду, что присоединенные массы при обтекании тел реальной жидкостью отличаются от вычисленных здесь в модели безотрывного обтекания невязкой несжимаемой жидкостью.

Имея в виду особенно большое прикладное значение понятия присоединенной массы для тел вращения (дирижабельные и торпедные формы), выведем общие формулы присоединенных масс для продольного относительно оси симметрии и поперечного по отношению к ней движения тела вращения.

В случае продольного движения вдоль оси Ox имеем

$$\lambda_{11} = \lambda_{xx} = -\rho\int_\sigma \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}d\sigma,$$

или, в силу граничного условия (116) на поверхности тела и очевидного равенства $d\sigma = 2\pi r\,ds$,

$$\lambda_{11} = -\rho\int_\sigma \varphi_1 n_x d\sigma = -2\pi\rho\int \varphi_1 r n_x ds = -2\pi\rho\int \varphi_1 r\,dr.$$

Используя (54), получим

$$\lambda_{11} = 2\pi\rho c^2 \int_{-1}^{1} \varphi_1 \left[(1-\mu^2)\lambda \frac{d\lambda}{d\mu} - (\lambda^2-1)\mu \right] d\mu.$$

Согласно (59) для потенциала возмущенного движения с единичной скоростью будем иметь

$$\varphi_1 = -c \sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_n(\lambda) P_n(\mu),$$

так что для присоединенной массы в продольном движении, или, короче, *продольной присоединенной массы*, получим следующее общее выражение:

$$\lambda_{11} = -2\pi\rho c^3 \int_{-1}^{1} \left\{ \left[(1-\mu^2)\lambda \frac{d\lambda}{d\mu} - (\lambda^2-1)\mu \right] \sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_n(\lambda) P_n(\mu) \right\} d\mu,$$

где подразумевается, что координата λ есть заданная функция μ согласно уравнению обвода меридианного сечения тела.

В случае эллипсоида вращения с большей осью a, направленной вдоль оси Ox, имеющего уравнением обвода $\lambda = \lambda_0 = 1/e$ (e — эксцентриcет), предыдущий интеграл легко вычисляется. Как ранее в § 75, получим

$$\lambda_{11} = \frac{4}{3}\pi\rho c^3 (\lambda_0^2 - 1) \frac{\frac{1}{2}\lambda_0 \ln\frac{\lambda_0+1}{\lambda_0-1} - 1}{\frac{\lambda_0}{\lambda_0^2-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_0+1}{\lambda_0-1}} = \frac{4}{3}\pi\rho ab^2 \frac{\frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e} - 1}{\frac{1}{1-e^2} - \frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}},$$

где, напоминаем, a и b — большая и малая полуоси, e — эксцентриситет. Полагая в последней формуле $e=0$ и раскрывая неопределенность, вновь получим присоединенную массу шара

$$(\lambda_{11})_{e=0} = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{3}e^2 + \ldots\right) - 1}{1 + e^2 + \ldots - \left(1 + \frac{1}{3}e^2 + \ldots\right)} \right]_{e=0} = \frac{2}{3}\pi\rho a^3.$$

Аналогичным путем определим и присоединенную массу тела вращения при поперечном его поступательном движении вдоль оси Oy, или *поперечную присоединенную массу*.

Сохраняя обозначения § 76, найдем

$$\lambda_{22} = \lambda_{yy} = \pi\rho c^3 \int_{-1}^{1} (1-\mu^2)(\lambda^2-1)\left(\mu\frac{d\lambda}{d\mu} + \lambda\right) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{dP_n}{d\mu}\frac{dQ_n}{d\lambda}\, d\mu$$

и в частном случае поперечного движения *эллипсоида вращения* (в направлении, перпендикулярном бо́льшей оси)

$$\lambda_{22} = \frac{4}{3}\pi\rho ab^2 \frac{\frac{1}{e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3}\ln\frac{1+e}{1-e}}{2 - \frac{1}{e^2} + \frac{1-e^2}{2e^3}\ln\frac{1+e}{1-e}};$$

при $e=0$ последняя формула также переходит в формулу для присоединенной массы шара.

Присоединенные массы играют важную роль в расчетах нестационарных движений тела в жидкостях, явлений удара тел о свободную поверхность жидкости и др.[1]).

Задача о плоском нестационарном движении жидкости, вызываемом неравномерно движущимся профилем, представляет частный случай изложенной общей теории, если циркуляция вокруг профиля принимается постоянной. Классическое исследование этого случая движения профиля и установление формул силы и момента принадлежит С. А. Чаплыгину и относится к 1926 г.[2]), а дальнейшее развитие этого вопроса — Л. И. Седову[3]). Основная трудность в изучении нестационарных движений крылового профиля заключается в переменности во времени циркуляции и возникновении в связи с этим в потоке сходящей с профиля вихревой пелены, оказывающей индуктивное влияние на его обтекание.

Изложение классических теорий нестационарного движения крыла в жидкости можно найти в специальной монографии А. И. Некрасова «Теория крыла в нестационарном потоке» (изд-во АН СССР, 1947) и в только что цитированной монографии Л. И. Седова; последняя содержит также исследование колебаний крыла в газе.

Теория нестационарного движения крыла конечного размаха и различной формы в плане изложена в специальных монографиях[4]).

§ 80. Осесимметричное до- и сверхзвуковое обтекание тонкого тела вращения

Так же как и в случае плоского обтекания, уравнения пространственного безвихревого движения идеального совершенного газа можно получить, используя условия: 1) неразрывности течения, 2) отсутствия в потоке завихренности и 3) адиабатичности и изэнтропичности процесса.

Уравнение неразрывности в *цилиндрических* координатах легко получить при помощи приведенной формулы (85) гл. I для дивергенции. Считая окружную (трансверсальную) скорость V_ε равной нулю и движение не зависящим от азимута ε, будем иметь

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r V_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0.$$

Условимся обозначать: продольные, параллельные оси симметрии движения координату и скорость через x и u, а поперечные — через r и

---

[1]) Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М.: Наука, 1980. В этой монографии даны таблицы присоединенных масс для цилиндрических тел. См. также монографию: Басин А. М. Теория устойчивости на курсе и поворотливости судна. Сер. Современные проблемы механики — М.: Гостехиздат, 1949, где можно найти графики присоединенных масс для эллипсоидов и других тел, и курсы: Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I, гл. VII.— М.: Физматгиз, 1963; Фабрикант Н. Я. Курс аэродинамики. Ч. I.— М., ГОНТИ, 1938.

[2]) Чаплыгин С. А. О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло.— Труды ЦАГИ, 1926, вып. 19; см. также Собрание сочинений — М.: Наука, 1964.

[3]) Седов Л. И К теории неустановившихся движений крыла в жидкости.— Труды ЦАГИ, 1935, вып. 229, а также О неустановившемся движении внутри жидкости тел вращения — Труды ЦАГИ, 1940, вып. 515.

[4]) Поляхов Н. Н. Теория нестационарных движений несущей поверхности.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1960; Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа.— М.: Наука, 1971; Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев несжимаемой жидкостью.— М.: Наука, 1978.

v. Тогда уравнение неразрывности приобретет вид

$$\frac{\partial(\rho r u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho r v)}{\partial r}=0. \tag{137}$$

При симметрии потока единственной, не равной тождественно нулю компонентой вихря будет азимутальная компонента, так что условие отсутствия завихренности в принятых обозначениях сведется к одному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{138}$$

совпадающему с уравнением (3) для плоского движения газа (§ 58). Уравнение (137) отличается от уравнения (1) § 58 наличием под знаками производных множителя r.

Принимаемое нами условие адиабатичности и изэнтропичности процесса движения газа будет в дальнейшем использовано в разнообразных, наиболее подходящих для данного этапа рассуждения формах, аналогично тому, как уже это делалось в плоском случае (§ 58).

Пользуясь уравнениями (137) и (138), можно ввести две функции: потенциал скоростей $\varphi(x, r)$ и функцию тока $\psi(x, r)$, положив, согласно (138),

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{139}$$

и удовлетворив уравнению (137) при помощи равенств (ρ_∞ — плотность в невозмущенном однородном потоке; выбор знака был пояснен в § 72)

$$\frac{\rho}{\rho_\infty}ru=\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad \frac{\rho}{\rho_\infty}rv=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{140}$$

Подставляя значения u и v из (139) в (137), получим уравнение для определения *потенциала скорости* $\varphi(x, r)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho r\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0, \tag{141}$$

а производя аналогичную операцию с выражениями проекций скоростей (140) и уравнением (138), найдем уравнение для определения *функции тока* $\psi(x, r)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho r}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0. \tag{142}$$

Уравнения (141) и (142) *нелинейны*, так как плотность ρ представляет собой, согласно уравнению Бернулли, функцию скорости V. Напомним вывод этого и, кстати, еще необходимого для дальнейшего соответствующего соотношения для давления p. Используя формулу Сен-Венана и Вантцеля (равенство (30) гл. V), будем иметь, определяя константу по условиям на бесконечности,

$$\frac{V^2}{2}-\frac{k}{k-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left[1-\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]=\frac{U_\infty^2}{2},$$

откуда следует ($kp_\infty/\rho_\infty=a_\infty^2$, $U_\infty/a_\infty=\mathrm{M}_\infty$)

$$\frac{p}{p_\infty}=\left[1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2\left(1-\frac{V^2}{U_\infty^2}\right)\right]^{\frac{k}{k-1}}, \tag{143}$$

а по изэнтропическому соотношению $p/p_\infty=(\rho/\rho_\infty)^k$ найдем и искомое выражение для ρ/ρ_∞

$$\frac{\rho}{\rho_\infty}=\left[1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\left(1-\frac{V^2}{U_\infty^2}\right)\right]^{\frac{1}{k-1}}. \tag{144}$$

Линеаризация уравнений (141) и (142) применительно к задаче пространственного обтекания тонкого тела вращения, вызывающего в набегающем потоке *малые* возмущения, приводит к некоторым затруднениям[1]).

Разобьем так же, как это делалось в плоском случае, потенциал скоростей и функцию тока на части, соответствующие невозмущенному однородному потоку φ_∞, ψ_∞ и малым возмущениям $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, положив

$$\varphi=\varphi_\infty+\widetilde{\varphi},\quad \psi=\psi_\infty+\widetilde{\psi}.$$

Аналогично, считая однородный поток параллельным оси симметрии Ox, а скорость его равной U_∞, представим проекции скорости u, v и плотность ρ также разбитыми на величины, соответствующие невозмущенному потоку U_∞, 0, ρ_∞, и малые возмущения $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{\rho}$

$$u=U_\infty+\widetilde{u},\quad v=\widetilde{v},\quad \rho=\rho_\infty+\widetilde{\rho}.$$

Подставляя эти выражения в (139), (140), получим

$$U_\infty+\widetilde{u}=\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x},\quad \widetilde{v}=\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial r}+\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial r},$$

$$\left(1+\frac{\widetilde{\rho}}{\rho_\infty}\right)r(U_\infty+\widetilde{u})=\frac{\partial\psi_\infty}{\partial r}+\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial r},\quad \left(1+\frac{\widetilde{\rho}}{\rho_\infty}\right)r\widetilde{v}=-\frac{\partial\psi_\infty}{\partial x}-\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}. \tag{145}$$

Отсюда в *нулевом* приближении ($\widetilde{\varphi}=\widetilde{\psi}=\widetilde{u}=\widetilde{v}=\widetilde{\rho}=0$) будем иметь

$$U_\infty=\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial x},\quad 0=\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial r},\quad rU_\infty=\frac{\partial\psi_\infty}{\partial r},\quad 0=\frac{\partial\psi_\infty}{\partial x},$$

что приведет к обычным выражениям для потенциала скоростей и функции тока невозмущенного потока φ_∞ и ψ_∞:

$$\varphi_\infty=U_\infty x,\quad \psi_\infty=\frac{1}{2}U_\infty r^2. \tag{146}$$

Из первой строки системы равенств (145) непосредственно следует

$$\widetilde{u}=\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x},\quad \widetilde{v}=\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial r}. \tag{147}$$

Для вывода аналогичных связей проекций скоростей возмущения с соответствующей им функцией тока необходимо в последних двух строках системы (145) исключить возмущение плотности $\widetilde{\rho}$. С этой целью заметим прежде всего, что

$$V^2=(U_\infty+\widetilde{u})^2+\widetilde{v}^2=U_\infty^2+2U_\infty\widetilde{u}+\widetilde{u}^2+\widetilde{v}^2,$$
$$1-\frac{V^2}{U_\infty^2}=-2\frac{\widetilde{u}}{U_\infty}-\left(\frac{\widetilde{u}}{U_\infty}\right)^2-\left(\frac{\widetilde{v}}{U_\infty}\right)^2,$$

[1]) См. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967, с. 236—242.

и перепишем равенства (143) и (144) в следующей форме:

$$\frac{\tilde{p}}{p_\infty} = -\frac{k}{2}\mathbf{M}_\infty^2\left[2\frac{\tilde{u}}{U_\infty} + \left(\frac{\tilde{u}}{U_\infty}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{v}}{U_\infty}\right)^2 + \dots\right],$$
$$\frac{\tilde{\rho}}{\rho_\infty} = -\frac{1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\left[2\frac{\tilde{u}}{U_\infty} + \left(\frac{\tilde{u}}{U_\infty}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{v}}{U_\infty}\right)^2 + \dots\right]. \tag{148}$$

Напомним, что при рассмотрении линеаризованных уравнений плоского течения газа мы в предыдущей главе пользовались аналогичными формулами, но сохраняли только первые члены в квадратных скобках, пренебрегая квадратичными членами.

Как будет далее показано, в случае *пространственного осесимметричного* обтекания тонких тел вращения такое отбрасывание допустимо только для члена $(\tilde{u}/U_\infty)^2$, который по сравнению с малой величиной $\tilde{u}/U_\infty$, конечно, представляет малую высшего порядка. Что же касается величины $(\tilde{v}/U_\infty)^2$, то она, как это будет следовать из дальнейших оценок, не имеет второй порядок малости по сравнению с $\tilde{u}/U_\infty$, так что отбрасывание в квадратной скобке слагаемого $(\tilde{v}/U_\infty)^2$ при сохранении первого члена $2\tilde{u}/U_\infty$ не является оправданным.

Для рассмотрения этого не столь простого вопроса применим следующий прием: сначала произведем обычную, аналогичную *плоскому* случаю *грубую линеаризацию*, сохранив в квадратных скобках равенств (148) только первый член $2\tilde{u}/U_\infty$, т. е. положив

$$\frac{\tilde{p}}{p_\infty} \approx -k\mathbf{M}_\infty^2\frac{\tilde{u}}{U_\infty}, \quad \frac{\tilde{\rho}}{\rho_\infty} \approx -\mathbf{M}_\infty^2\frac{\tilde{u}}{U_\infty}, \tag{149}$$

а затем, используя полученное таким образом — не будем его называть «первым приближением» — приближенное решение, оценим, как говорят, a posteriori величину отброшенного члена $(\tilde{v}/U_\infty)^2$.

Подставляя второе из соотношений (149) в последние два равенства (145) и приравнивая коэффициенты при малых величинах первого порядка, найдем выражения проекций скоростей возмущений через функцию тока возмущений

$$\tilde{u} = \frac{1}{1-\mathbf{M}_\infty^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r}, \quad \tilde{v} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}. \tag{150}$$

Формулы (147) совпадают с соответствующими формулами (13) плоского линеаризованного движения (гл. VIII), а формулы (150) отличаются от формул (15) той же главы на множитель $1/r$ перед производными в правых частях.

Подставляя полученное значение возмущения плотности $\tilde{\rho}$ (149) в (141) и приравнивая малые первого порядка, составим линеаризованное уравнение для *потенциала скоростей* возмущений

$$(1-\mathbf{M}_\infty^2)\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r} = 0 \tag{151}$$

и аналогичным путем линеаризованное уравнение для *функции тока* возмущений

$$(1-\mathbf{M}_\infty^2)\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r} = 0, \tag{152}$$

отличающееся от предыдущего знаком при последнем члене в левой части.

Обратимся к рассмотрению граничных условий на поверхности обтекаемого тела.

Для уравнения (151) граничное условие может быть получено как условие *непроницаемости* поверхности тела. Пусть уравнение поверхности тела в цилиндрических координатах будет $r=r_0(x)$. Тогда условие непроницаемости поверхности тела можно записать как равенство углов наклона к продольной оси касательной к контуру тела и линии тока

$$\frac{dr_0}{dx}=r_0'(x)=\left(\frac{\tilde{v}}{U_\infty+\tilde{u}}\right)_{r=r_0(x)}\approx\frac{\tilde{v}_{r=r_0(x)}}{U_\infty}. \tag{153}$$

Это граничное условие не может быть, как в плоском случае, «снесено» на ось тела, т. е. применено при $r=0$, так как в случае осесимметричного движения ось Ox является особой линией — на ней $\tilde{v}=\infty$, что непосредственно следует из второго равенства (150). Избежать эту особенность можно приближенно, заменив предыдущее условие таким:

$$r_0(x)\,r_0'(x)=\frac{(r\tilde{v})_{r=0}}{U_\infty}. \tag{154}$$

Иначе будет обстоять дело при пользовании уравнением (152) для функции тока. В этом случае граничное условие выражает тот факт, что поверхность тела является нулевой поверхностью тока

$$\psi=(\psi_\infty+\tilde{\psi})_{r=r_0(x)}=\frac{1}{2}U_\infty r_0^2+\tilde{\psi}_{r=r_0(x)}=0,$$

или

$$\tilde{\psi}=-\frac{1}{2}U_\infty r_0^2(x)\ \text{при}\ r=r_0(x).$$

Это условие может быть «снесено» на ось Ox и сводится к следующему приближенному:

$$\tilde{\psi}=-\frac{1}{2}U_\infty r_0^2(x)\ \text{при}\ r=0. \tag{155}$$

Рассмотрим в указанной простейшей постановке задачу Кармана[1]) о продольном *сверхзвуковом* обтекании тонкого тела вращения.

Основное дифференциальное уравнение этого течения в цилиндрических координатах может быть, согласно (151), представлено в виде

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2}-\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\right)=0,\quad \omega^2=\mathbf{M}_\infty^2-1. \tag{156}$$

Следуя Карману, докажем, что уравнение (156) имеет интеграл

$$\tilde{\varphi}=\int_0^{x-\omega r}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\omega^2r^2}}, \tag{157}$$

где $x=\xi=0$ соответствует лобовой точке тела, а $f(\xi)$ — некоторая непрерывная, дважды дифференцируемая функция, тождественно равная нулю при $\xi\leqslant 0$. Замечая, что дифференцирование затруднено тем обстоятельством, что функция, подлежащая интегрированию, в верхнем пределе обращается в бесконечность, произведем замену переменной интегрирования, положив

$$\xi=x-\omega r\operatorname{ch}t,\quad d\xi=-\omega r\operatorname{sh}t\,dt. \tag{158}$$

---

[1]) Карман Т. Проблема сопротивления в сжимаемой жидкости: Пер. с англ.— В кн.: Газовая динамика.— М: ГОНТИ, 1939, с. 81—90.

Интеграл (157) примет при этом более простой вид

$$\widetilde{\varphi}(x, r) = \int_0^{\operatorname{arch}\frac{x}{\omega r}} f(x - \omega r \operatorname{ch} t)\, dt, \tag{159}$$

который может быть еще более упрощен, если заметить, что изменению переменной t в области

$$\operatorname{arch}\frac{x}{\omega r} \leqslant t < \infty$$

соответствует область изменения ξ

$$0 \geqslant \xi > -\infty,$$

где, по сделанному предположению, $f(\xi) \equiv 0$. Это позволяет заменить верхний предел интегрирования в (159) на ∞ и получить

$$\widetilde{\varphi}(x, r) = \int_0^{\infty} f(x - \omega r \operatorname{ch} t)\, dt. \tag{160}$$

Интеграл определен во всем пространстве (x, r), но в области вне конуса (рис. 132)

$$x = \omega r \tag{161}$$

с половиной угла раствора α, равной

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{r}{x} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\omega} = \arcsin\frac{1}{M_\infty},$$

тождественно равен нулю, так как в этой области аргумент функции f, стоящей под интегралом, становится отрицательным; действительно,

$$x - \omega r \operatorname{ch} t < x - \omega r < 0 \text{ при } x < \omega r.$$

Это показывает, что рассматриваемые возмущения однородного потока сосредоточены внутри конуса (161), который носит наименование *конуса возмущений* — конуса Маха. Угол раствора этого конуса 2α равен удвоенному *углу возмущения* (углу Маха), подобно тому, как это имело место в плоском сверхзвуковом потоке.

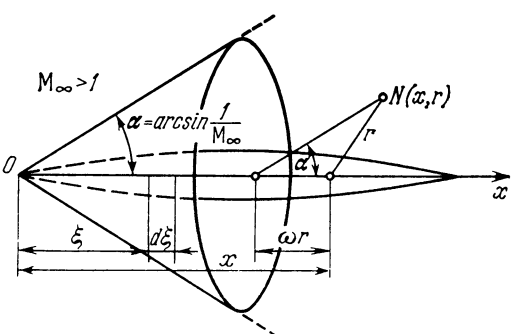


Рис. 132

Нетрудно доказать, что интеграл (160), а следовательно, и равный ему интеграл (159) удовлетворяют дифференциальному уравнению малых возмущений в сверхзвуковом потоке (156).

Вычислим непосредственно по формуле (160) производные [1])

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x} = \int_0^{\infty} f'(x - \omega r \operatorname{ch} t)\, dt, \qquad \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial x^2} = \int_0^{\infty} f''(x - \omega r \operatorname{ch} t)\, dt,$$

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial r} = -\omega\int_0^{\infty} f'(x - \omega r \operatorname{ch} t)\operatorname{ch} t\, dt, \qquad \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial r^2} = \omega^2\int_0^{\infty} f''(x - \omega r \operatorname{ch} t)\operatorname{ch}^2 t\, dt$$

[1]) Штрихи при f под знаком интеграла обозначают производные по всему аргументу, стоящему в скобках.

и заметим, что интегрирование по частям дает

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r} = -\omega\int_0^\infty f'(x-\omega r\operatorname{ch}t)\,d(\operatorname{sh}t) =$$

$$= -\omega\,[f'(x-\omega r\operatorname{ch}t)\operatorname{sh}t]_0^\infty - \omega^2 r\int_0^\infty f''(x-\omega r\operatorname{ch}t)\operatorname{sh}^2 t\,dt.$$

Из условия $f(\xi)\equiv 0$ при $\xi<0$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty}[f'(x-\omega r\operatorname{ch}t)\operatorname{sh}t] = 0,$$

и подстановка обращается в нуль; получим, вычисляя левую часть (156),

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\right) = \int_0^\infty [f'' - (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)f'']dt \equiv 0.$$

Интеграл (157) можно рассматривать как сверхзвуковой аналог потенциала скоростей возмущений от распределенных вдоль положительной части оси Ox источников, в случае несжимаемой жидкости ($M_\infty=0$, $\omega^2=-1$) представленного равенством (72). Между этими двумя гидродинамическими образами имеется принципиальное различие, с математической стороны выражающееся в том, что соответствующий потенциал скоростей в несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению эллиптического типа (уравнению Лапласа), а потенциал (157) — уравнению гиперболического типа — волновому уравнению (156). С физической стороны это различие заключается в том, что влияние возмущений в первом случае распространяется на всю область, заполненную жидкостью, во втором — только на часть ее, расположенную внутри конуса возмущений с вершиной в точке O, откуда начинается распределение вдоль оси конуса (ось Ox) сверхзвуковых источников.

Потенциал скоростей возмущений (160) может быть использован для расчета сверхзвукового обтекания удлиненных тел вращения однородным потоком, параллельным их оси симметрии. Подчиним с этой целью неизвестную функцию $f(\xi)$ условию непроницаемости поверхности обтекаемого тела. Это условие в принятом приближении можно записать, выразив равенство тангенсов углов с осью Ox касательных к линии тока и контуру меридианного сечения обтекаемого тела в точках его поверхности

$$\left(\frac{\tilde{v}}{U_\infty+\tilde{u}}\right)_{r=r_0} \approx \left(\frac{\tilde{v}}{U_\infty}\right)_{r=r_0} = \frac{dr_0}{dx}, \tag{162}$$

где $r=r_0(x)$ представляет уравнение меридианного сечения тела. Для вычисления скоростей возмущений $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ используем равенства (147) и (160); будем иметь

$$\tilde{u} = \int_0^\infty f'(x-\omega r\operatorname{ch}t)\,dt, \quad \tilde{v} = -\omega\int_0^\infty f'(x-\omega r\operatorname{ch}t)\operatorname{ch}t\,dt, \tag{163}$$

или, возвращаясь к переменной ξ,

$$\tilde{u} = \int_0^{x-\omega r}\frac{f'(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2-\omega^2r^2}}\,d\xi, \quad \tilde{v} = -\frac{1}{r}\int_0^{x-\omega r}\frac{(x-\xi)f'(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2-\omega^2r^2}}\,d\xi. \tag{164}$$

Подставляя последнее выражение в равенство (162), найдем следующее интегральное уравнение для определения неизвестной функции $f(\xi)$:

$$\int_0^{x-\omega r_0(x)} \frac{(x-\xi)f'(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2-\omega^2 r_0^2(x)}}\,d\xi = -U_\infty r_0(x)\,r_0'(x). \tag{165}$$

Это уравнение в грубом приближении легко интегрируется, если для тел большого удлинения положить под знаком интеграла и в верхнем его пределе

$$\omega r_0 \ll x-\xi, \qquad \omega r_0 \ll x.$$

Тогда получим (напомним, что $f(0)=0$)

$$\int_0^x f'(\xi)\,d\xi = f(x) = -U_\infty r_0(x)\,r_0'(x), \tag{166}$$

или, характеризуя тело законом изменения площади его поперечного сечения $A(x)=\pi r_0^2(x)$,

$$f(x) = -\frac{U_\infty}{2\pi}A'(x). \tag{167}$$

Это приближение эквивалентно отмеченному в конце § 77 выражению (78) для несжимаемой жидкости.

Подставляя полученное значение $f(x)$ в равенство (157), найдем искомое выражение потенциала

$$\tilde{\varphi}(x,r) = -\frac{U_\infty}{2\pi}\int_0^{x-\omega r} A'(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\omega^2 r^2}}. \tag{168}$$

Отсюда уже нетрудно определить проекции скоростей возмущений на оси цилиндрической системы координат

$$\tilde{u} = -\frac{U_\infty}{2\pi}\int_0^{x-\omega r} A''(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\omega^2 r^2}},$$

$$\tilde{v} = \frac{U_\infty}{2\pi r}\int_0^{x-\omega r} A''(\xi)\frac{(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\omega^2 r^2}}, \tag{169}$$

и выражение коэффициента давления

$$c_p = -\frac{2\tilde{u}}{U_\infty} = \frac{1}{\pi}\int_0^{x-\omega r} A''(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\omega^2 r^2}}. \tag{170}$$

Суммируя давления по поверхности тела вращения данной длины l и считая $r_0(0)=r_0(l)=0$, можно получить *волновое сопротивление* тела. Опуская вычисления, приведем окончательную формулу, принадлежащую *Карману*

$$R_x = -\pi\rho_\infty \int_0^l\int_0^l f'(\xi)f'(x)\ln|x-\xi|\,dx\,d\xi. \tag{171}$$

Вычисление сопротивления по этой формуле облегчается, если заметить формальную аналогию между выражением (171) и первым из равенств (92), выражающим индуктивное сопротивление крыла конеч-

ного размаха. Действительно, заменяя в равенстве (92) $\alpha_i(z)$ по формуле (86), получим

$$R_x = \frac{\rho_\infty}{4\pi} \int_{-l}^{l} \Gamma(z) \left[\int_{-l}^{l} \Gamma'(\zeta) \frac{d\zeta}{z-\zeta} \right] dz$$

и после интегрирования по частям

$$R_x = -\frac{\rho_\infty}{4\pi} \int_{-l}^{l} \int_{-l}^{l} \Gamma'(z)\,\Gamma'(\zeta) \ln|z-\zeta|\, d\zeta\, dz.$$

Таким образом, можно формулировать следующий результат: *волновое сопротивление тела вращения при продольном его обтекании может вычисляться по формулам индуктивного сопротивления крыла конечного размаха, если вместо распределения циркуляции по размаху задавать распределение мощности источников по оси тела вращения.*

Это позволяет при вычислении волнового сопротивления тела в сверхзвуковом потоке применять тот же метод разложения в тригонометрические ряды, что при расчете индуктивного сопротивления крыла конечного размаха по теории несущей линии.

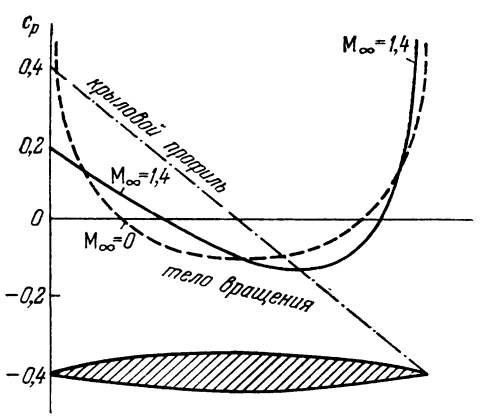


Рис. 133

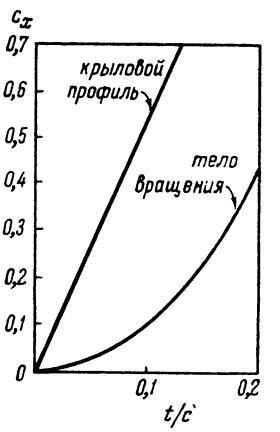


Рис. 134

В частности, в полной аналогии с теорией крыла конечного размаха, можно заключить, что *при заданном удлинении тела вращения коэффициент волнового сопротивления будет минимален, если принять, что мощность источников распределена по эллиптическому закону.*

Чтобы составить представление о разнице между распределениями давления по поверхности удлиненного тела вращения и соответствующего ему по форме поперечного сечения крылового профиля, приведем сравнительные графики распределения коэффициента давления для чечевицеобразного десятипроцентного симметричного профиля, образованного дугами параболы и имеющего то же меридианное сечение тела вращения при $M_\infty=1,4$ (рис. 133). На графике отчетливо видно резкое падение давления на крыловом профиле по сравнению с соответствующим ему телом вращения. Это отличие приводит к значительной разнице (рис. 134) и в законах возрастания волнового сопротивления с увеличением относительной толщины крылового профиля и тела вращения. Естественно, что *в случае тела вращения этот рост значительно слабее.*

Происхождение волнового сопротивления, поясненное уже в § 60 гл. VIII, подтверждается графиками, изображенными на рис. 133. Сравнивая распределение давления по телу вращения, обтекаемому несжи-

маемой жидкостью ($M_\infty = 0$), с соответствующим распределением при $M_\infty = 1{,}4$, обнаруживаем появление асимметрии в распределении давлений.

За счет частичной задержки восстановления давления в кормовой части тела вращения при сверхзвуковом обтекании (сдвиг сплошной кривой относительно штриховой вниз по потоку) и возникает волновое сопротивление. Отсутствие восстановления давления, наблюдаемое в случае плоского крыла, приводит к резкой разнице между волновыми сопротивлениями крыла и тела вращения, имеющего меридианное сечение, совпадающее с профилем крыла.

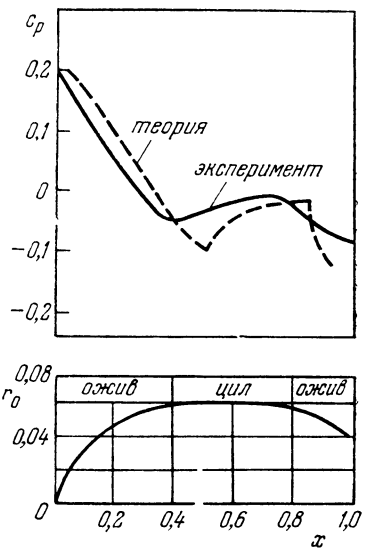


Рис. 135

На рис. 135 приведено сравнение теоретического распределения коэффициента давления по формулам настоящего параграфа с экспериментом [1]) для снаряда, имеющего *оживальные* нос и корму и цилиндрическую среднюю часть, при числе $M_\infty = 1{,}87$.

Для решения задачи об обтекании тонкого тела вращения, расположенного в набегающем потоке под некоторым малым углом атаки, в полном соответствии с теорией обтекания тел несжимаемой жидкостью (§ 76), приходится наряду с продольным рассматривать еще поперечное обтекание тела вращения.

Дифференциальное уравнение малых возмущений в однородном сверхзвуковом потоке, направленном перпендикулярно к оси тела вращения (поперечный поток), будет содержать полярный угол ε в плоскости Oxy. В этом случае уже нельзя откидывать производные по углу ε, и уравнение для определения потенциала скоростей возмущений $\tilde{\varphi}_1$ в случае *поперечного* обтекания будет

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \varepsilon^2}\right) = 0,$$

а его интеграл имеет вид

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial r}\left[\int_0^{x-\omega r} \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \omega^2 r^2}}\right]\cos\varepsilon = \frac{\cos\varepsilon}{r}\int_0^{x-\omega r} \frac{(x-\xi)\,m(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \omega^2 r^2}};$$

$m(\xi)$ определяет плотность распределения интенсивности *сверхзвуковых диполей* на оси симметрии тела вращения.

Для вычисления коэффициента давления в случае очень тонких тел применяется тот же упрощенный прием, что и в случае продольного обтекания, но основанный на приближенной формуле (79), связывающей плотность распределения моментов диполей и закон изменения площади поперечного сечения тела вращения.

Потенциал поперечного обтекания в этом грубом приближении, справедливом только для *очень тонких тел*, может быть представлен в конечной форме

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{\pi} V_{1\infty} \frac{A(x)}{r}\cos\varepsilon.$$

[1]) Рисунки 133—135 заимствованы из книги: Shapiro A. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. Vol. I, II — N. Y., 1953.

Наличие потенциалов продольного и поперечного обтекания позволяет путем сложения решений получить обтекание тонкого тела при любом угле атаки α, а затем и вычислить коэффициенты подъемной силы и сопротивления. Опуская вычисления[1]), укажем лишь, что коэффициент подъемной силы оказывается равным $c_y=2\alpha$, а к коэффициенту сопротивления в продольном обтекании, который может быть вычислен по (171), от поперечного обтекания присоединяется еще член $c_{xi}=\alpha^2$, называемый *коэффициентом индуктивного сопротивления*. Эти результаты, выражающие независимость коэффициентов c_y и c_{xi} от формы тела, имеют весьма приближенный характер и не могут конкурировать с более точными теориями, отличающимися от только что изложенной теории Кармана в первую очередь тем, что в них принимается во внимание наличие головной ударной волны на носовой части тела, а в случае тела вращения с заостренным носком — наличие конического присоединенного скачка уплотнения (см. далее § 82).

Вернемся теперь к поставленному еще в начале параграфа вопросу о допустимости использованной только что линеаризации. Для оценки порядков величин скоростей возмущений $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ в зависимости от основного *малого параметра*, характеризующего осесимметричное обтекание тонкого тела вращения — его относительной толщины τ, воспользуемся формулами (164) и применим их к простейшему случаю $f'(x)=\text{const}$, что, согласно (167), будет соответствовать обтеканию *конуса с малым углом полураствора* θ_0, определяемым равенством

$$\frac{dr_0}{dx}=\frac{r_0}{x}=\operatorname{tg}\theta_0\approx\theta_0. \tag{172}$$

Простые вычисления показывают, что в этом случае будут справедливы следующие выражения проекций скоростей на поверхности конуса $(r=r_0(x))$:

$$\tilde{u}_0=-\text{const}\cdot\operatorname{arch}\frac{x}{\omega r_0},\quad \tilde{v}_0=\text{const}\cdot\omega\sqrt{\left(\frac{x}{\omega r_0}\right)^2-1},$$

или, принимая во внимание (172),

$$\tilde{u}_0=-\text{const}\cdot\operatorname{arch}\frac{1}{\omega\theta_0},\quad \tilde{v}_0=\text{const}\cdot\omega\sqrt{\frac{1}{(\omega\theta_0)^2}-1}.$$

Замечая, что θ_0 мало, и предполагая, что число Маха не настолько велико, чтобы произведение

$$\omega\theta_0=\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2-1}\,\theta_0\approx\mathrm{M}_\infty\theta_0$$

перестало быть малым, получим следующие простые асимптотические оценки[2]), справедливые при $\omega\theta_0\ll 1$:

$$\tilde{u}_0\sim-\text{const}\cdot\ln\frac{2}{\omega\theta_0},\quad \tilde{v}_0\sim\text{const}\cdot\frac{1}{\theta_0}. \tag{173}$$

Но из граничного условия (162) и равенства (172) сразу следует, что $\tilde{v}_0=O(\theta_0)$. Таким образом, по второму из равенств (173) убедимся, что введенная константа имеет порядок θ_0^2, а проекция скорости возмущения $\tilde{u}_0$ при заданном числе Маха — порядок $\theta_0^2\ln\theta_0$. Возвращаясь к принятому обозначению τ для обобщенного понятия относительной толщины тела вращения $[\tau=O(\theta_0)]$, окончательно получим следующую

---

[1]) См. Липман Г. В. и Рошко А. Элементы газовой динамики: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1960, с. 290—294.

[2]) См., например, Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Пер. с англ.— М.: Наука, 1983.

общую оценку порядка малости проекций скорости возмущений:

$$\tilde{u}=O(\tau^2\ln\tau),\quad \tilde{v}=O(\tau). \tag{174}$$

Отсюда следует, что слагаемые $\tilde{u}/U_\infty$ и $(\tilde{v}/U_\infty)^2$ в квадратных скобках равенств (148) имеют один и тот же порядок, так как при не слишком малых τ сомножитель $\ln\tau$ слабо влияет на порядок произведения $\tau^2\ln\tau$. Так, например, если $\tau=10^{-1}$, то $\tilde{u}/U_\infty$ будет иметь порядок $2\cdot10^{-2}$, а $(\tilde{v}/V_\infty)^2$ порядок 10^{-2}, т. е. тот же порядок.

Сохранив в выражении (148) относительной величины возмущения плотности $\tilde{\rho}/\rho_\infty$ квадратичный член $(\tilde{v}/U_\infty)^2$, имеющий, как мы только что убедились, тот же порядок, что и первый член $2\tilde{u}/U_\infty$, мы тем самым отказываемся от допустимости линеаризации уравнения малых возмущений.

Однако, как показывает детальное исследование[1]), можно все же построить *корректное первое приближение*, основанное на использовании *линеаризованных* уравнений (151) и (152) с граничными условиями (154) и (155), если для расчета коэффициента давления

$$c_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}=\frac{2\tilde{p}}{\rho_\infty U_\infty^2}=2\,\frac{p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}\,\frac{\tilde{p}}{p_\infty}=\frac{2}{kM_\infty^2}\,\frac{\tilde{p}}{p_\infty}$$

применить вместо неточной формулы (149) разложение (148), сохранив в квадратной скобке два члена, имеющие одинаковые порядки, так что будет

$$c_p=-2\,\frac{\tilde{u}}{U_\infty}-\left(\frac{\tilde{v}}{U_\infty}\right)^2. \tag{175}$$

Такой подход и используется обычно, когда разыскивается первое приближение в задачах сверхзвукового обтекания тонких тел вращения.

Приведем без доказательства полученные в этом первом приближении формулы[2]) коэффициента давления c_p и сопротивления c_x передней части тела (т. е. без учета так называемого донного давления на кормовом срезе; l — длина тела, $A(x)$ — площадь нормального к оси сечения):

$$c_p=\frac{A''(x)}{\pi}\ln\frac{2}{\omega r_0}+\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x A''(\xi)\ln(x-\xi)\,d\xi-\left(\frac{dr_0}{dx}\right)^2,$$

$$c_x=\frac{[A'(l)]^2}{2\pi}\ln\frac{2}{\omega r_0(l)}+\frac{A'(l)}{\pi}\int_0^l A''(\xi)\ln(l-\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^l\int_0^x A''(x)\,A''(\xi)\ln(x-\xi)\,d\xi\,dx.$$

Если $A'(l)=0$, последняя формула сводится к ранее выведенной формуле Кармана (171). Это имеет место в двух случаях: 1) если $r_0(l)=0$, т. е. тело не имеет кормового среза, 2) $r_0'(l)=0$, т. е. наклон контура тела к направлению набегающего потока на границе кормового среза равен нулю, что непосредственно следует из очевидного равенства $A'(x)=2\pi r_0(x)r_0'(x)$.

Определенное уравнением (152), граничным условием (155) и равенством (175) *первое приближение* справедливо как для сверхзвуково-

[1]) Lighthill M. Supersonic flow past bodies of revolution.— Rep. & Mem. Aero. Res. Council, 1945, № 2003.

[2]) См. только что цитированную книгу Г. В. Липмана и А. Рошко, с. 281—286.

го, так и для дозвукового движений. Это приближение может быть положено в основу теории подобия осесимметричных пространственных обтеканий тонких тел вращения.

§ 81. Законы подобия обтекания тонких тел вращения и тонких крыльев конечного размаха

Применим вновь, в полной аналогии с тем, как это было сделано в § 61 для плоского движения, соображения подобия, позволяющие вести пересчет с одного до- или сверхзвукового обтекания на другое, ему подобное.

Не будем полностью повторять рассуждения § 61. Заметим, что в осесимметричном случае, так же как и в плоском, преобразование, аналогичное (54) предыдущей главы, сохраняет свою силу и сводит дифференциальное уравнение (152), составленное для двух сравниваемых потоков, к одному и тому же

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}\pm\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}\mp\frac{1}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=0,$$

причем никаких условий подобия преобразование (54) не дает.

Различие намечается в условиях подобия граничных условий (155). Полагая, как и в плоском случае, для обоих сравниваемых потоков

$$r_{01}(x)=b\tau_1 h(\xi),\quad r_{02}(x)=b\tau_2 h(\xi),$$

будем иметь два граничных условия

$$\widetilde{\Psi}_1(0,\xi)=\Psi_1\theta=-\frac{1}{2}U_1b^2\tau_1^2h^2(\xi),\quad \widetilde{\Psi}_2(0,\xi)=\Psi_2\theta=-\frac{1}{2}U_2b^2\tau_2^2h^2(\xi),$$

откуда следует *первое условие подобия*

$$\frac{U_1\tau_1^2}{\Psi_1}=\frac{U_2\tau_2^2}{\Psi_2}. \tag{176}$$

Коэффициент давления c_p определим формулой (175), в которую подставим значения $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ по (150) и воспользуемся вновь преобразованием, аналогичным (54) предыдущей главы. Будем иметь для двух сравниваемых движений

$$c_{p_1}=\mp\frac{2\Psi_1}{U_1}\frac{1}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\frac{|1-M_1^2|\Psi_1^2}{U_1^2}\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2,$$

$$c_{p_2}=\mp\frac{2\Psi_2}{U_2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\frac{|1-M_2^2|\Psi_2^2}{U_2^2}\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2,$$

или

$$\frac{U_1c_{p_1}}{\Psi_1}=\mp\frac{2}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\frac{|1-M_1^2|\Psi_1}{U_1}\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2,$$

$$\frac{U_2c_{p_2}}{\Psi_2}=\mp\frac{2}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\frac{|1-M_2^2|\Psi_2}{U_2}\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2.$$

Отсюда следуют еще *два условия подобия* сравниваемых течений

$$\frac{U_1c_{p_1}}{\Psi_1}=\frac{U_2c_{p_2}}{\Psi_2},\quad \frac{(1-M_1^2)\Psi_1}{U_1}=\frac{(1-M_2^2)\Psi_2}{U_2}, \tag{177}$$

которые присоединяются к условию (176). Исключая отношения U_1/Ψ_1 и U_2/Ψ_2, получим два условия подобия

$$\frac{c_{p_1}}{\tau_1^2}=\frac{c_{p_2}}{\tau_2^2},\quad (1-M_1^2)\tau_1^2=(1-M_2^2)\tau_2^2,$$

которые можно трактовать как одно, общее для осесимметричных до- и сверхзвуковых потоков соотношение подобия

$$c_p = \tau^2 f(\tau \sqrt{|1 - M_\infty^2|}). \tag{178}$$

Легко заметить, что равенство (178) содержится как частный случай ($\Psi = \tau^2$) в общем законе (60) предыдущей главы, выведенном для плоских до- и сверхзвуковых течений.

Подчеркнем, что в случаях осесимметричного до- или сверхзвукового обтекания тонких тел нет такого широкого разнообразия законов подобия, как в случае плоского обтекания. В частности, нельзя получить аналог соотношения Прандтля — Глауэрта (30) предыдущей главы, позволявшего по распределению коэффициента давления c_{p0} на поверхности данного тела в потоке несжимаемой жидкости непосредственно судить о распределении того же коэффициента c_p в дозвуковом потоке газа. Как это следует из формулы (178), можно лишь составить отношение коэффициентов давления c_p в газе к c_{p0} — в несжимаемой жидкости

$$\frac{c_p}{c_{p_0}} = \frac{f(\tau \sqrt{1 - M_\infty^2})}{f(\tau)}. \tag{179}$$

Зная распределение коэффициента давления по поверхности некоторого тонкого тела вращения в потоке несжимаемой жидкости, по формуле (179) можно получить распределение того же коэффициента в потоке газа, но только на тонком теле, аффинно в поперечном к потоку направлении измененном в $\sqrt{1 - M_\infty^2}$ раз.

Закон подобия (178), выраженный для *сверхзвуковых* потоков в форме

$$c_p = \tau^2 f(\tau \sqrt{M_\infty^2 - 1}),$$

при очень больших значениях $M_\infty \gg 1$ переходит в соотношение

$$c_p = \tau^2 f(M_\infty \tau) = \tau^2 f(K),$$

совпадающее с (111) предыдущей главы.

Сравнительно просто решается вопрос о *законе подобия для тонких крыльев конечного размаха в потоках до- и сверхзвуковых скоростей.* Пользуясь тем же выбором осей координат, что и в § 78, составим уравнение малых возмущений в декартовых координатах

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - M_\infty^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2}\right) = 0. \tag{180}$$

В этом трехмерном случае функция тока возмущений отсутствует и надлежит пользоваться потенциалом скоростей возмущений $\tilde{\varphi}(x, y, z)$. Граничное условие непроницаемости поверхности крыла может быть снесено в плоскость Oxz:

$$\tilde{v} = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}\right)_{y=0} = U_\infty \tau \frac{\partial h}{\partial (x/b)}, \tag{181}$$

где форма поверхности крыла предполагается заданной уравнением

$$y = b\tau h\left(\frac{x}{b}, \frac{z}{l}\right); \tag{182}$$

здесь b — средняя хорда крыла, l — его размах.

Обозначая в двух сравниваемых движениях, как и в плоском случае, буквами Φ_1 и Φ_2 масштабы потенциалов скоростей и произведя

замену переменных

$$x_1 = x_2 = \xi, \quad y_1 \sqrt{|1 - M_1^2|} = y_2 \sqrt{|1 - M_2^2|} = \eta,$$
$$z_1 \sqrt{|1 - M_1^2|} = z_2 \sqrt{|1 - M_2^2|} = \zeta, \qquad (183)$$
$$\widetilde{\varphi}_1 = \Phi_1 \theta(\xi, \eta, \zeta), \quad \widetilde{\varphi}_2 = \Phi_2 \theta(\xi, \eta, \zeta),$$

аналогичную (64) предыдущей главы, будем иметь вместо уравнений (180) для каждого потока следующее одно уравнение:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \pm \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \right) = 0.$$

Граничное условие (181) в двух сравниваемых потоках приведется к таким:

$$\Phi_1 \sqrt{|1 - M_1^2|} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = U_1 \tau_1 b \frac{\partial h}{\partial \xi}, \quad \Phi_2 \sqrt{|1 - M_2^2|} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = U_2 \tau_2 b \frac{\partial h}{\partial \xi}.$$

Чтобы они в подобных течениях совпали, следует положить

$$\frac{U_1 \tau_1}{\Phi_1 \sqrt{|1 - M_1^2|}} = \frac{U_2 \tau_2}{\Phi_2 \sqrt{|1 - M_2^2|}}, \qquad (184)$$

что дает *первое условие подобия.*

В условие геометрического подобия по (182) и (183) будет входить соотношение

$$\frac{l_1}{b} \sqrt{|1 - M_1^2|} = \frac{l_2}{b} \sqrt{|1 - M_2^2|},$$

откуда, замечая, что относительное удлинение крыла $\lambda = l^2/S$, где S — площадь крыла в плане, в подобных крыльях пропорционально произведению lb, найдем *второе условие подобия*

$$\lambda_1 \sqrt{|1 - M_1^2|} = \lambda_2 \sqrt{|1 - M_2^2|}. \qquad (185)$$

Коэффициенты давлений в подобных системах определяются равенствами [1])

$$c_{p_1} = -\frac{2\widetilde{u}_1}{U_1} = -\frac{2}{U_1} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial x} = -\frac{2\Phi_1}{U_1} \frac{\partial \theta}{\partial \xi},$$
$$c_{p_2} = -\frac{2\widetilde{u}_2}{U_2} = -\frac{2}{U_2} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial x} = -\frac{2\Phi_2}{U_2} \frac{\partial \theta}{\partial \xi},$$

из совпадения которых для подобных течений будет следовать *третье условие подобия*

$$\frac{c_{p_1} U_1}{\Phi_1} = \frac{c_{p_2} U_2}{\Phi_2}. \qquad (186)$$

В системе равенств (184) и (186) величины Φ_1 и Φ_2 совершенно произвольны. Введя обозначения для новых произвольных величин

$$\frac{\Phi_1}{U_1} = A_1, \quad \frac{\Phi_2}{U_2} = A_2,$$

будем иметь окончательно следующую совокупность условий подобия (символ «idem» означает «одно и то же», в последнем условии

---

[1]) В этом случае характерная для осесимметричного движения особенность отсутствует и можно пользоваться обычной линейной связью коэффициента давления c_p и скорости возмущения $\widetilde{u}$.

подразумевается «в сходственных точках сравниваемых движений»):

$$\frac{\tau}{A\sqrt{|1-M_\infty^2|}} = \text{idem}, \quad \lambda\sqrt{|1-M_\infty^2|} = \text{idem}, \quad \frac{c_p}{A} = \text{idem}, \tag{187}$$

которая может быть заменена одной условной функциональной зависимостью

$$c_p = Af\left(\frac{\tau}{A\sqrt{|1-M_\infty^2|}};\quad \lambda\sqrt{|1-M_\infty^2|}\right). \tag{188}$$

Как и в плоском случае, величина A здесь совершенно произвольна; пользуясь этим произволом, можно получать разнообразные законы подобия.

Полагая, например, в случае дозвукового обтекания $A=\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$, получим обобщение на случай тонкого крыла конечного размаха правила Прандтля — Глауэрта (30) предыдущей главы

$$c_p = \frac{f\left(\tau;\ \lambda\sqrt{1-M_\infty^2}\right)}{\sqrt{1-M_\infty^2}}. \tag{189}$$

Это правило позволяет после изменения относительного удлинения крыла λ в $\sqrt{1-M_\infty^2}$ раз пользоваться для плоских сечений крыла в *дозвуковом потоке обычным правилом Прандтля — Глауэрта.*

Если положить $A=|1-M_\infty^2|^{-1}$, то соотношение (188) приобретает *симметричный по отношению к обоим поперечным к потоку направлениям* вид

$$c_p = \frac{1}{|1-M_\infty^2|} f\left(\tau\sqrt{|1-M_\infty^2|};\quad \lambda\sqrt{|1-M_\infty^2|}\right), \tag{190}$$

который выражает такой *закон подобия*: если, сохраняя неизменными хорды плоских сечений, изменить в $\sqrt{|1-M_\infty^2|}$ раз поперечные к потоку размеры крыла, т. е. относительные толщину и удлинение, то коэффициент давления при этом изменится в $|1-M_\infty^2|^{-1}$ раз.

Наконец, полагая, $A=\tau/\sqrt{|1-M_\infty^2|}$, получим наиболее простое условие подобия

$$c_p = \frac{\tau}{\sqrt{|1-M_\infty^2|}} f\left(\lambda\sqrt{|1-M_\infty^2|}\right). \tag{191}$$

Только что разобранный случай обтекания газом тонкого крыла был основан на той же гипотезе плоских сечений, что и упоминавшаяся в § 78. Малость скорости возмущения в направлении оси Oz (размаха крыла) предполагает наличие большого удлинения крыла, что делает обтекание крыла почти плоским. Именно этим объясняется бросающееся в глаза сходство полученных законов подобия с соответствующими законами для плоского движения (§ 61). Различие сказывается лишь в наличии дополнительного аргумента $\lambda\sqrt{|1-M_\infty^2|}$, определяющего влияние *конечности* размаха крыла.

Интересно хотя бы приближенно оценить влияние этого фактора на распределение коэффициента давления по крылу. С этой целью можно воспользоваться материалами теоретического расчета, выполненного Гессом и Гарднером [1]) для семейства трехосных эллипсоидов, формулы

[1]) Hess R. V., Gardner C. S. Study by the Prandtl — Glauert method of compressibility effects and critical Mach-number for ellipsoids of various aspect ratios and thickness ratios.— NACA Rep. NL7BO3a, 1947.

распределения скоростей по поверхности которых в потоке несжимаемой жидкости известны[1]). Рассмотрим эллипсоиды (рис. 136) с фиксированной малой относительной толщиной $\tau = t/b$ и различными относительными удлинениями $\lambda = \frac{(2a)^2}{S} = \frac{(2a)^2}{\pi ab} = \frac{4}{\pi}\frac{a}{b}$. Значение $\lambda = \infty$ отвечает обтеканию тонкого эллиптического цилиндра бесконечного размаха; при $a = t$ и, следовательно, $\lambda = \frac{4}{\pi}\tau$ будем иметь продольное обтекание эллипсоида вращения с относительной толщиной τ и осью вращения, совпадающей с направлением набегающего потока.

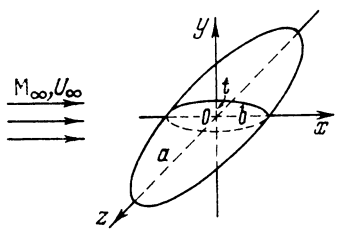


Рис. 136

Гесс и Гарднер вычислили зависимость отношения $\tilde{u}_{max}/U_\infty$ (только множителем 2 отличающимся от величины $c_{p\,min}$) от числа M_∞ в *дозвуковом* газовом потоке при различных удлинениях λ крыла для данного значения относительной его толщины $t/b = 15\%$. Отношение $\tilde{u}_{max}/U_\infty$ дает наглядную оценку возмущения, вносимого крылом в однородный поток.

Результаты расчетов приведены на рис. 137. Верхняя кривая соответствует эллиптическому цилиндру ($\lambda = \infty$), нижняя — эллипсоиду вращения ($t = a$); в последнем случае удлинение равно

$$\lambda = \frac{4}{\pi}\frac{a}{b} = \frac{4}{\pi}\frac{t}{b} = \frac{4}{\pi}0{,}15 = 0{,}191.$$

Различие между двумя крайними кривыми изменения максимальной безразмерной скорости возмущения в функции от числа M_∞ весьма отчетливо. Верхняя кривая следует правилу Прандтля — Глауэрта

$$\frac{\tilde{u}_{max}}{U_\infty} = \frac{\tilde{u}_{0\,max}}{U_\infty}\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

и дает сравнительно значительное изменение рассматриваемого отношения. Нижняя кривая представляет *более слабое изменение* того же отношения с числом M_∞, что *характерно для тела вращения*. Можно получить аналитическую формулу этого изменения, если воспользоваться последней формулой § 75, выражающей распределение скоростей по поверхности эллипсоида вращения при его обтекании несжимаемой жидкостью. Максимальное значение этой скорости получим при $\mu = 0$; будем иметь

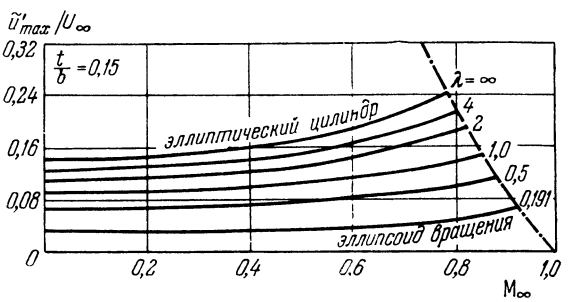


Рис. 137

$$\frac{\tilde{u}_{0\,max}}{U_\infty} = \frac{U_{0\,max}}{U_\infty} - 1 = \frac{e^3}{e - \frac{1}{2}(1-e^2)\ln\frac{1+e}{1-e}} - 1 = \frac{(1-e^2)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e} - e\right)}{e - \frac{1}{2}(1-e^2)\ln\frac{1+e}{1-e}}.$$

[1]) См., например, Кочин Н. Е., Кибель Н. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I.— М.: Физматгиз, 1963, с. 387—396, а также Аэродинамика/Под ред. Дюрэнда. Т. 1.— М.: ОНТИ, 1937, с. 317—327.

Заметим, что эксцентриситет эллипса будет равен

$$e=\frac{\sqrt{b^2-t^2}}{b}=\sqrt{1-\left(\frac{t}{b}\right)^2}=\sqrt{1-\tau^2},$$

так что

$$\frac{\tilde{u}_{0\max}}{U_\infty}=\frac{\tau^2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}}-\sqrt{1-\tau^2}\right)}{\sqrt{1-\tau^2}-\frac{1}{2}\tau^2\ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}}}.$$

Учитывая малость величины τ, что необходимо при пользовании линеаризованной теорией, и разлагая радикалы в ряд, найдем следующее приближенное соотношение для потока *несжимаемой жидкости*.

$$\frac{\tilde{u}_{0\max}}{U_\infty}=\tau^2\left(\ln\frac{2}{\tau}-1\right)+O(\tau^4\ln^2\tau)$$

Возвращаясь к ранее сформулированному правилу (178) расчета коэффициента давления c_p или пропорциональной ему величины отношения $\tilde{u}/U_\infty$ скорости возмущения по заданному c_{p0} или $\tilde{u}_0/U_\infty$ в потоке *несжимаемой жидкости* для тела с сокращенными поперечными к потоку размерами, т. е. относительной толщиной $\tau\sqrt{1-M_\infty^2}$, получим

$$\frac{\tilde{u}_{\max}}{U_\infty}=\tau^2\left(\ln\frac{2}{\tau\sqrt{1-M_\infty^2}}-1\right). \qquad (192)$$

Эту формулу можно еще преобразовать к виду

$$\frac{\tilde{u}_{\max}}{\tilde{u}_{0\max}}=\frac{c_{p\min}}{c_{p0\min}}=1+\frac{1}{2}\frac{\ln(1-M_\infty^2)}{1-\ln 2+\ln\tau}. \qquad (193)$$

На рис. 138 приводятся кривые, соответствующие зависимости от M_∞ этого отношения при различных удлинениях крыла. Верхняя кривая соответствует формуле Прандтля — Глауэрта (30) предыдущей главы, нижняя — формуле (193).

Из графика, изображенного на рис. 138, видно, что относительное увеличение коэффициента давления за счет сжимаемости при $M_\infty=0{,}7$ для эллиптического цилиндра достигает 40%, в то время как при том же M_∞ для эллипсоида вращения это увеличение не достигает и 20%. Этот факт отражает известное свойство течений: эллиптический цилиндр, как тело бесконечного размаха, приводит к более значительному возмущению потока, чем имеющее то же меридианное сечение тело вращения.

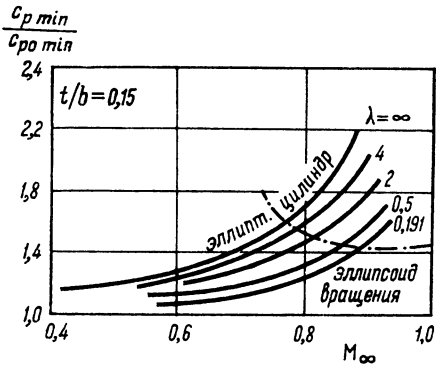


Рис. 138

Промежуточные кривые на рис. 137 и 138 позволяют заключить, что влияние числа M_∞ при пространственном дозвуковом обтекании тем меньше, чем меньше относительное удлинение тела. Штрих-пунктирные кривые в правой части графиков, пересекающие сетки сплошных кривых, ограничивают области применимости их. Абсциссы точек пересечения штрих-пунктирных кривых со сплошными соответствуют критическим

значениям $M_\infty = M_{кр}$, т. е. таким, при которых в точке максимального возмущения на поверхности тела возникает звуковая скорость.

Обратим внимание на существенный факт: критическое число $M_{кр}$ увеличивается с уменьшением относительного удлинения λ. Если для эллиптического цилиндра 15-процентной относительной толщины $M_{кр} \approx 0{,}78$, то для эллипсоида вращения с той же относительной толщиной оно достигает значения $M_{кр} \approx 0{,}93$, что еще раз подтверждает сравнительную слабость влияния сжимаемости на пространственное дозвуковое обтекание тел.

Приведенные соображения относятся, конечно, только к рассмотренному обтеканию семейства эллипсоидов. Однако они качественно отражают особенности пространственного обтекания и других тел, отличных от эллипсоидов.

Отмеченное ранее сходство обтекания крыльев конечного размаха с плоскими течениями позволяет путем тех же соображений, что и в конце § 61, установить следующий закон подобия для *околозвуковых* «квазиплоских» течений:

$$\frac{c_p [(k+1) M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{2/3}} = f\left\{\frac{1 - M_\infty^2}{\tau^{2/3} [(k+1) M_\infty^2]^{2/3}};\quad \lambda \sqrt{|1 - M_\infty^2|}\right\},$$

представляющий аналог закона подобия (74) предыдущей главы для плоского движения.

§ 82. Продольное сверхзвуковое обтекание кругового конуса. Конический скачок уплотнения

Основной особенностью сверхзвукового обтекания заостренных тел вращения является образование вблизи лобовой части тела поверхности разрыва, при известных условиях имеющей форму присоединенного конического скачка уплотнения. Как об этом можно заключить из рис. 139,

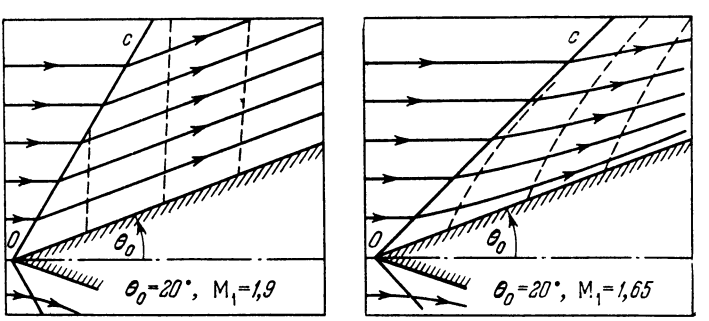


Рис. 139

представляющего картины плоского (слева) обтекания клина и пространственного (справа) обтекания конуса, течение газа за коническим скачком принципиально отличается от течения за плоским скачком уплотнения тем, что в случае пространственного течения газа линии тока криволинейны.

Также криволинейны и линии Маха, показанные на рисунке штрихами.

В отличие от плоского косого скачка, в котором направление вектора скорости непосредственно за скачком уплотнения было известно — оно совпадало с направлением щеки клина,— в случае конического скачка такое упрощающее решение задачи условие уже не имеет места, оно

должно быть заменено решением задачи о криволинейном движении частиц газа за коническим скачком, удовлетворяющим граничным условиям на поверхности разрыва и на поверхности конуса, обтекание которого разыскивается.

Для рассмотрения этой задачи воспользуемся сферической системой координат (R, θ, ε) и, довольствуясь частным случаем чисто меридианного движения, опустим азимутальные (по оси ε) компоненты и производные по координате ε. Составим уравнение неразрывности в сферических координатах [см. (86) гл. I]

$$\operatorname{div}(\rho V) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(\rho R^2 V_R)}{\partial R} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial(\rho V_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} = 0.$$

Производя дифференцирование, с целью исключения плотности ρ преобразуем его к виду

$$\sin\theta\frac{\partial(R^2V_R)}{\partial R} + R\frac{\partial(V_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial R}R^2V_R\sin\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}RV_\theta\sin\theta = 0. \tag{194}$$

Заметив, что (a — местная скорость звука)

$$\frac{\partial\rho}{\partial R} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial R}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\theta} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial\theta} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial\theta},$$

исключим производные от давления, воспользовавшись для этого уравнениями Эйлера в сферических координатах [(46) гл. V]

$$V_R\frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_R}{\partial\theta} - \frac{V_\theta^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial R},$$
$$V_R\frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{V_RV_\theta}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial\theta}.$$

Будем иметь

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial R} = -\frac{1}{a^2}\left(V_R\frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_R}{\partial\theta} - \frac{V_\theta^2}{R}\right),$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = -\frac{1}{a^2}\left(RV_R\frac{\partial V_\theta}{\partial R} + V_\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + V_RV_\theta\right),$$

а уравнение (194) после подстановки в него этих выражений перейдет в такое:

$$(a^2-V_R^2)\frac{\partial V_R}{\partial R} - V_RV_\theta\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V_R}{\partial\theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial R}\right) + (a^2-V_\theta^2)\frac{1}{R}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{2V_R + V_\theta\operatorname{ctg}\theta}{R}a^2 = 0. \tag{195}$$

В силу прямолинейности образующих конической поверхности разрыва движение за нею будет *безвихревым*. Это позволяет к уравнению (195) присоединить еще условие отсутствия завихренности, которое в разбираемом частном случае осесимметричного меридианного движения будет, согласно (86) гл. I, иметь вид

$$\operatorname{rot}_\varepsilon V = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial(RV_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial\theta}\right] = 0,$$

или

$$R\frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial\theta} + V_\theta = 0. \tag{196}$$

При отсутствии завихренности во всей области течения имеет место уравнение Бернулли, которое можно записать в форме (C — константа)

$$a^2 = C - \frac{k-1}{2}(V_R^2 + V_\theta^2). \tag{197}$$

Совокупность уравнений (195), (196) и (197) представляет собой замкнутую систему уравнений, которые и должны быть положены в основу решения поставленной задачи осесимметричного сверхзвукового обтекания кругового конуса.

Граничными условиями будут:

а) условие непроницаемости поверхности обтекаемого конуса ($\theta = \theta_0$)

$$V_\theta = 0 \text{ при } \theta = \theta_0; \tag{198}$$

б) условия на поверхности разрыва (β — угол образующей конического скачка с направлением набегающего потока)

$$V_{R2} = V_1 \cos\beta, \quad V_{\theta 2} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} V_1 \sin\beta \text{ при } \theta = \beta, \tag{199}$$

которые идентичны условиям на плоском косом скачке (§ 62); первое из них выражает условие постоянства проекции скорости на направление образующей конического скачка, а второе — сохранение секундной массы газа при прохождении газа сквозь скачок.

Решение поставленной задачи будет *автомодельным*, т. е. таким, которое позволяет вместо системы уравнений в частных производных

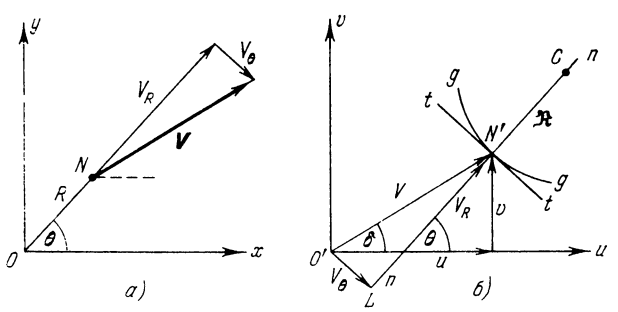


Рис. 140

(195) и (196) использовать систему обыкновенных дифференциальных уравнений. С такого рода автомодельными задачами мы уже имели дело ранее (центрированные волны в нестационарном одномерном и стационарном плоском двумерном движениях). Используем коническую симметрию граничных условий задачи и будем искать решение уравнений из условия, что все параметры движения и состояния газа являются функциями только полярного угла θ и не зависят от радиус-вектора R.

Такое решение является частным случаем более общего класса пространственных конических движений газа, которые могут быть и не меридианными, т. е. заключать и азимутальную компоненту скорости[1]).

При сделанном предположении уравнения (195) и (196) приведутся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$V_R V_\theta \frac{dV_R}{d\theta} + (V_\theta^2 - a^2)\frac{dV_\theta}{d\theta} - (2V_R + V_\theta \operatorname{ctg}\theta)\, a^2 = 0, \quad \frac{dV_R}{d\theta} - V_\theta = 0,$$

[1]) См, например, Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Пер. с англ.— М.: Гостехиздат, 1953, гл. XII.

которая в силу второго уравнения еще упростится и окончательно примет вид

$$\frac{dV_\theta}{d\theta}+V_R=\frac{a^2(V_R+V_\theta\operatorname{ctg}\theta)}{V_\theta^2-a^2},\quad \frac{dV_R}{d\theta}-V_\theta=0. \tag{200}$$

Классическую интерпретацию первого из этих уравнений и основанный на ней простой графический метод интегрирования системы (200) предложил А. Буземан [1]).

Обозначим через u, v проекции вектора скорости V соответственно на ось симметрии Ox (рис. 140) и перпендикулярное к ней направление Oy.

Проекции u, v связаны со сферическими компонентами V_R и V_θ равенствами

$$u=V_R\cos\theta-V_\theta\sin\theta,\quad v=V_R\sin\theta+V_\theta\cos\theta, \tag{201}$$

так что

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{dV_R}{d\theta}\cos\theta-\frac{dV_\theta}{d\theta}\sin\theta-V_R\sin\theta-V_\theta\cos\theta,$$
$$\frac{dv}{d\theta}=\frac{dV_R}{d\theta}\sin\theta+\frac{dV_\theta}{d\theta}\cos\theta+V_R\cos\theta-V_\theta\sin\theta.$$

С учетом второго равенства (200) первый и последний члены в правых частях взаимно уничтожаются, и остается

$$\frac{du}{d\theta}=-\left(V_R+\frac{dV_\theta}{d\theta}\right)\sin\theta,\quad \frac{dv}{d\theta}=\left(V_R+\frac{dV_\theta}{d\theta}\right)\cos\theta. \tag{202}$$

Обозначим через ds дифференциал дуги годографа gg (рис. 140, *б*). Тогда из (202) следует, что

$$ds=\sqrt{du^2+dv^2}=\left(V_R+\frac{dV_\theta}{d\theta}\right)d\theta. \tag{203}$$

Кроме того, косинусы углов между касательной tt (рис. 140, *б*) к годографу в точке N' и осями $O'u$ и $O'v$, пропорциональные $du/d\theta$ и $dv/d\theta$, связаны с косинусами $\cos\theta$ и $\cos(\pi/2-\theta)=\sin\theta$, определяющими направление радиус-вектора $ON=R$ по отношению к осям Ox, Oy или $O'u$, $O'v$, равенством

$$\frac{du}{d\theta}\cos\theta+\frac{dv}{d\theta}\sin\theta=0.$$

Отсюда следует, что касательная tt перпендикулярна к ON, а нормаль nn образует с осью $O'u$ угол θ, который можно рассматривать как дополнительный к углу *смежности* (*кривизны*).

Таким образом, из равенства (203) с точностью до знака вытекает формула радиуса кривизны $\mathfrak{R}$ годографа gg в точке N':

$$\mathfrak{R}=\frac{ds}{d\theta}=V_R+\frac{dV_\theta}{d\theta}. \tag{204}$$

При этом первое из уравнений системы (200) сводится к выражению радиуса кривизны годографа через сферические компоненты вектора скорости, угол радиус-вектора точки потока с осью абсцисс в физической плоскости и местную скорость звука

$$\mathfrak{R}=\frac{V_R+V_\theta\operatorname{ctg}\theta}{(V_\theta/a)^2-1}. \tag{205}$$

---

[1]) Busemann A. Drücke auf Kegelförmige Spitzen bei Bewegung mit Überschallgeschwindigkeit.— Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1929, Bd. 9, № 6.

Радиус кривизны годографа имеет, естественно, *размерность скорости*. Можно привести формулу (205) к безразмерному виду, если, например, разделить обе части последнего равенства на максимальную скорость $V_{max}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,a^*$. Тогда, пользуясь обозначением (22) гл. VI, получим

$$\frac{\mathfrak{R}}{V_{max}}=\frac{V_R/V_{max}+(V_\theta/V_{max})\operatorname{ctg}\theta}{\frac{2}{k-1}(V_\theta/V_{max})^2/(1-V^2/V_{max}^2)-1}=\frac{\sqrt{\tau_R}-\sqrt{\tau_\theta}\operatorname{ctg}\theta}{[2/(k-1)]\,\tau_\theta/(1-\tau)-1}; \tag{206}$$

$$\tau_R=(V_R/V_{max})^2,\quad \tau_\theta=(V_\theta/V_{max})^2,\quad \tau=(V/V_{max})^2.$$

Пользуясь формулой (205) или ее безразмерным видом (206), можно простым графическим приемом строить *годографы скоростей* частиц газа.

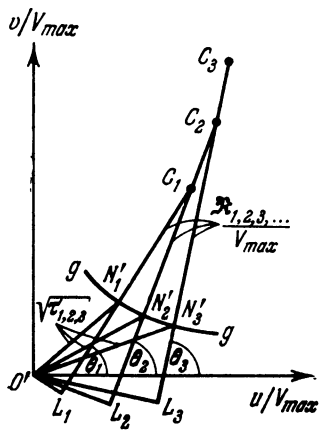


Рис. 141

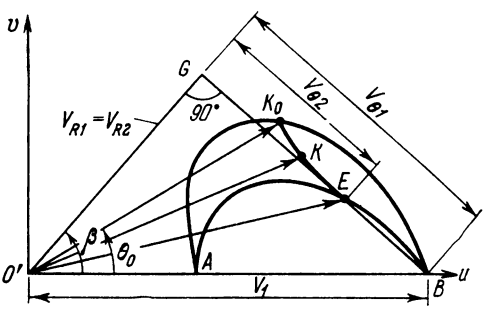


Рис. 142

Располагая заданной скоростью V_1 или величиной $\sqrt{\tau_1}$ и углом θ_1 в точке N_1 физической плоскости, найдем положение точки N_1' в плоскости годографа (рис. 141). Проектируя вектор V_1 на направление радиус-вектора и перпендикулярное к нему направление, находим V_{1R} и $V_{1\theta}$ или $\sqrt{\tau_{1R}}$ и $\sqrt{\tau_{1\theta}}$, в плоскости годографа равные соответственно отрезкам L_1N_1' и $O'L_1$. По формуле (206) находим радиус кривизны годографа в точке N_1', в безразмерном виде равный

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{V_{max}}=\frac{\sqrt{\tau_{1R}}-\sqrt{\tau_{1\theta}}\operatorname{ctg}\theta_1}{[2/(k-1)]\,\tau_{1\theta}/(1-\tau_1)-1}.$$

Проводя дужку круга N_1N_2' радиусом $\mathfrak{R}_1$, примем ее приближенно за искомую дужку годографа gg. После этого найдем вновь значения $\sqrt{\tau_2}=O'N_2'$, $\sqrt{\tau_{2R}}=L_2N_2'$, $\sqrt{\tau_{2\theta}}=O'L_2$ и новое значение угла $\theta=\theta_2$, определяемое направлением $N_2'C_1$. Определив затем по (206) новое значение $\mathfrak{R}_2/V_{max}$, проведем этим радиусом дужку $N_2'N_3'$ и т. д. Таким образом, *искомый годограф представляется приближенно совокупностью соприкасающихся дужек окружностей.*

Остается лишь показать, как в изложенном графическом методе используются граничные условия. Зададимся наперед некоторым значени-

ем угла β между образующими конического скачка и направлением набегающего потока, а также числами M_1 и λ_1 набегающего потока. Тогда, выбирая соответствующую этим числам *строфоиду* (рис. 97), по заданному β определим точку E (рис. 142) на строфоиде. Для этого можно, например, провести луч $O'G$ под заданным углом β к оси $O'u$, а затем из двойной точки B строфоиды опустить на луч $O'G$ перпендикуляр BG. Точка пересечения этого перпендикуляра со строфоидой даст искомую точку E, а отрезки $O'G$ и EG — радиальную V_{R2} и поперечную $V_{\theta 2}$ компоненты вектора скорости газа на поверхности конического скачка непосредственно после прохождения через него. Отрезки $O'G$ и BG равны соответственно тем же компонентам до скачка: V_{R1} и $V_{\theta 1}$.

Имея эти данные, можно применить графический метод Буземана и, вычисляя последовательно по формуле (205) или (206) центры кривизны годографа, построить при помощи малых дужек кругов кривизны искомый годограф. Построение следует вести до тех пор, пока угол радиус-вектора текущей точки K годографа с осью $O'u$ (рис. 142) не станет равным углу полураствора θ_0 обтекаемого газом кругового конуса. Эта точка K_0 станет конечной точкой графического построения, а отрезок $O'K_0$ определит предельное значение скорости на поверхности обтекаемого конуса.

Задаваясь различными значениями угла β (но сохраняя значение M_1) и повторяя указанное построение, получим геометрическое место точек K_0, которое представляет собой кривую, благодаря ее специфической форме обычно называемую «яблоковидной».

Таким образом, можно заранее сетку строфоид, построенную для различных значений M_1 и λ_1 (рис. 97) дополнить сеткой яблоковидных кривых и годографов, что позволит сравнительно просто решать задачи продольного обтекания круговых конусов, угол раствора которых отвечает условию наличия присоединенной к вершине конуса ударной волны.

Практический способ построения фронта конического скачка весьма прост (рис. 142). Выбрав по значению безразмерной скорости набегающего на конус потока соответствующие ударную поляру и яблоковидную кривую и построив угол θ_0, равный углу полураствора конуса, найдем положение точки K_0, определяющей величину и направление скорости на поверхности конуса. Спускаясь из этой точки по отрезку кривой годографа в точку E, определим вектор скорости непосредственно за фронтом скачка. Опуская затем, так же как это делалось при решении задачи о плоском скачке, перпендикуляр $O'G$ на прямую BG, проходящую через точку E, определим угол β направления фронта конического скачка.

Приводим график (рис. 143), иллюстрирующий разницу в максимальных углах полураствора $\theta_{0\,max}(M_\infty)$, допускающих существование присоединенного косого скачка в случае клина и присоединенного конического скачка в случае обтекания конуса. Как это отчетливо видно из приведенного графика, особенностью пространственного течения является факт значительно большего значения $\theta_{0\,max}$ для конуса при том же числе Маха набегающего потока, чем в случае плоского обтекания клина. Как всегда, мы имеем здесь дело со *смягчающим влиянием симметричного растекания газа вблизи вершины конуса.*

Для практических расчетов пользуются графиками, на которых, кроме строфоид, яблоковидных кривых и годографов, нанесены еще сетки кривых, позволяющих непосредственно снимать с графиков значения давлений и других термодинамических параметров [1]).

---

[1]) См. ранее неоднократно цитированную книгу А Ферри и обзор А. Буземана в Handbuch der Experimental Physik, Bd. 4, Teil 1, Leipzig, 1931, S. 421, а также Краснов Н. Ф. Аэродинамика тел вращения.— М : Оборонгиз, 1958

В заключение приведем еще график (рис. 144) [1]), позволяющий судить о том, насколько теоретическии расчет угла полураствора β конического скачка (угол полураствора конуса $\theta_0=30°$) правильно предсказывает действительные его значения при различных числах Маха; к сожалению, диапазон экспериментальных чисел Маха на графике невелик. Как видно из графика, левая ветвь кривой, соответствующей слабому коническому скачку, отклоняется вверх и вправо, чтобы образовать еще

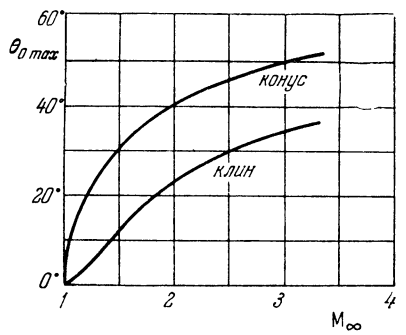


Рис. 143

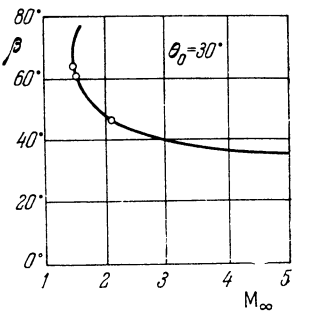


Рис. 144

ветвь, отвечающую сильному, отсоединенному скачку. Такая же двузначность, естественно, будет иметь место и в распределении коэффициента давления по поверхности конуса. Пояснение возможности возникновения слабого или сильного конического скачка сохраняется таким же, как и в случае плоского косого скачка.

§ 83. Сверхзвуковое обтекание тонкого тела вращения при очень больших числах Маха

В случае продольного сверхзвукового обтекания тонкого тела вращения ($M_\infty \gg 1$) выведенные в начале предыдущего параграфа дифференциальные уравнения имеют простые асимптотические решения.

Вернемся к рассмотрению системы уравнений (200) и граничных условий (198) и (199).

При очень больших числах Маха и выполнении условия, что головная волна представляет собой присоединенный к вершине конуса конический скачок, можно принять, что разность $\theta-\theta_0$ во всей области течения между поверхностями конуса и скачка будет малой величиной.

Тогда для приближенного определения функций $V_R(\theta)$ и $V_\theta(\theta)$ можно воспользоваться их разложениями в ряды по степеням малой разности $\theta-\theta_0$ [2]).

Обозначим через $V_k=V_R(\theta_0)$ постоянное значение скорости газа на поверхности конуса и заметим, что по условию непроницаемости поверхности конуса нормальная составляющая скорости $V_\theta(\theta_0)$ равна нулю. Кроме того, из системы уравнений (200) сразу следует, что на поверхности конуса справедливы равенства

$$\frac{dV_R}{d\theta}=0, \quad \frac{dV_\theta}{d\theta}=\frac{d^2V_R}{d\theta^2}=-2V_k. \tag{207}$$

Искомые первые члены разложений можно, таким образом, представить в виде

$$V_R/V_k=1-(\theta-\theta_0)^2, \quad V_\theta/V_k=-2(\theta-\theta_0). \tag{208}$$

[1]) Ferri A. Elements of aerodynamics of supersonic flow.— New-York: Mac-Millan Company, 1949, p. 254, fig. 174.

[2]) Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью.— М.: Физматгиз, 1959, с. 107, 108.

Подставляя эти выражения в граничные условия (199) на коническом скачке ($\theta=\beta$), будем иметь два равенства

$$2(\beta-\theta_0)V_k=\frac{\rho_1}{\rho_2}V_1\sin\beta,\quad [1-(\beta-\theta_0)^2]V_k=V_1\cos\beta,$$

из которых при малых β (соответствующих условию тонкости тела вращения) сразу следует простое приближенное соотношение

$$\beta-\theta_0=\frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2}\beta. \tag{209}$$

Входящее сюда отношение плотностей ρ_1/ρ_2 выражается формулой

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{k-1}{k+1}+\frac{2}{k+1}\frac{1}{M_1^2\sin^2\beta},$$

совпадающей в случае конического скачка со второй формулой системы (82) гл. VIII для плоского косого скачка. Подставляя это значение отношения плотностей в (209) и используя те же обозначения: $K=M_1\theta_0$, $K_c=M_1\beta$, что и в § 64, где излагалась теория плоского гиперзвукового обтекания клина, составим квадратное уравнение

$$\frac{k+3}{2(k+1)}K_c^2-KK_c-\frac{1}{k+1}=0,$$

положительным корнем которого будет

$$\frac{K_c}{K}=\frac{k+1}{k+3}+\sqrt{\left(\frac{k+1}{k+3}\right)^2+\frac{2}{k+3}\frac{1}{K^2}}. \tag{210}$$

Как показывает сравнение результатов расчета по этой формуле с точной теорией, формула (210) может с успехом применяться для не слишком больших углов полураствора конуса, примерно до $\theta_0=15°$, при всех $K<3$, а при несколько больших углах и при $K>3$.

Определим с той же степенью приближения давление на поверхности конуса, которое обозначим через p_k. Для этого составим выражение

$$\frac{p_k}{p_1}=\frac{p_k}{p_2}\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{a_k}{a_2}\right)^{\frac{2k}{k-1}}\frac{p_2}{p_1} \tag{211}$$

и заметим, что первый сомножитель справа может быть вычислен по теореме Бернулли, так как движение газа за коническим скачком безвихревое, а второй сомножитель — по известному соотношению давлений за и перед скачком.

Будем иметь

$$\frac{a_k^2}{k-1}+\frac{V_k^2}{2}=\frac{a_2^2}{k-1}+\frac{V_{R2}^2+V_{\theta 2}^2}{2},$$

откуда после деления обеих частей на первое слагаемое справа следует

$$\frac{a_k^2}{a_2^2}=1+\frac{k-1}{2}\frac{V_{R2}^2}{a_2^2}\left(1-\frac{V_k^2}{V_{R2}^2}+\frac{V_{\theta 2}^2}{V_{R2}^2}\right).$$

Используя приближенные соотношения (208), перепишем предыдущее равенство в форме

$$\frac{a_k^2}{a_2^2}=1+\frac{k-1}{2}\frac{V_1^2}{a_1^2}\frac{a_1^2}{a_2^2}\left\{1-\left[\frac{1}{1-(\beta-\theta_0)^2}\right]^2+\left[\frac{2(\beta-\theta_0)}{1-(\beta-\theta_0)^2}\right]^2\right\}=$$

$$=1+\frac{k-1}{2}M_1^2\frac{a_1^2}{a_2^2}\{1-[1+2(\beta-\theta_0)^2]+4(\beta-\theta_0)^2\}=$$

$$=1+(k-1)M_1^2\frac{a_1^2}{a_2^2}(\beta-\theta_0)^2=1+(k-1)\frac{a_1^2}{a_2^2}(K_c-K)^2.$$

Подставим это выражение в (211) и применим еще формулы (104) гл. VIII, согласно которым будет

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} K_c^2 - \frac{k-1}{k+1},$$

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{2k}{k+1} K_c^2 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{-1} \frac{k+1}{2} K_c^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} K_c^2\right)^{-1}.$$

Тогда после простых преобразований получим следующую формулу для коэффициента давления c_p на поверхности конуса:

$$\frac{c_p}{\theta_0^2} K^2 = \frac{2}{k}\frac{p_k - p_1}{p_1} = \frac{4}{k+1}(K_c^2 - 1) + 2(K_c - K)^2 \frac{k+1}{k-1+2/K_c^2}, \quad (212)$$

в которой при желании K_c может быть выражено через K согласно (210).

Формула (212) также хорошо совпадает с точными расчетами в вышеуказанном интервале угла полураствора обтекаемого конуса.

Пользуясь общей идеей метода Ньютона, изложенного в предыдущей главе для плоского гиперзвукового движения, можно с некоторой степенью приближения применять только что полученные формулы к тонким телам вращения, отличным от кругового конуса. Для этого достаточно сопоставлять углы полураствора конуса θ_0 с местными углами атаки на заданной поверхности тела вращения, т. е. полагать

$$K = \mathbf{M}_1 \frac{dy}{dx} = \mathbf{M}_1 \tau \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = K_0 \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}, \quad (213)$$

где $y = y(x)$ представляет собой уравнение меридианного сечения тела вращения, а τ — относительную толщину тела в том обобщенном смысле, как об этом говорилось ранее.

Такой приближенный метод, по своей идее опирающийся на метод Ньютона, был предложен в 1947 г. *С. В. Валландером* и получил наименование *метода касательных конусов* (в плоском случае — *касательных клиньев*).

Рассмотрим, например, тело «оживальной» формы с параболическим контуром меридианного сечения

$$\bar{y} = \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{x}^2,$$

для которого по (213) $K = K_0(1 - \bar{x})$. В этом случае[1]), как показывает расчет по формулам (210) и (212), распределение давления по поверхности тела вращения выбранной оживальной формы определится для воздуха ($k = 1{,}4$) формулой

$$\frac{2}{k}\left(\frac{p}{p_1} - 1\right) = 1{,}041 K_0^2 (1 - \bar{x})^2 - 0{,}454 + \sqrt{1{,}084 K_0^4 (1 - \bar{x})^4 + 1{,}656 K_0^2 (1 - \bar{x})^2}.$$

Формула сопротивления при этом будет иметь вид

$$c_x \mathbf{M}_1^2 = 0{,}347 K_0^2 - 0{,}454 - \frac{1}{K_0^4}\left[4{,}278 N^3 - (1{,}382 K_0^2 + 1{,}055)^2 N + (0{,}608 K_0^2 + 0{,}464) \ln (2{,}400 N + 1{,}309 K_0^2 + 1)\right],$$

где

$$N = \sqrt{0{,}297 K_0^4 + 0{,}454 K_0^2}.$$

[1]) Probstein R. F., Bray K. Hypersonic similarity and the tangent-cone approximation for unyawed bodies of revolution.— Journ. Aeron. Sci., 1955, v. 22, № 1.

Сравнение приведенных приближенных соотношений, составленных по методу касательных конусов для выбранной оживальной формы, с точным решением приведено на рис. 145 и 146 и может быть признано вполне удовлетворительным.

В ранее уже неоднократно цитированных специальных монографиях, посвященных сверхзвуковым течениям при очень больших числах Маха, излагаются и другие приближенные методы расчета, как, например, метод плоских сечений, метод ударного слоя и др.

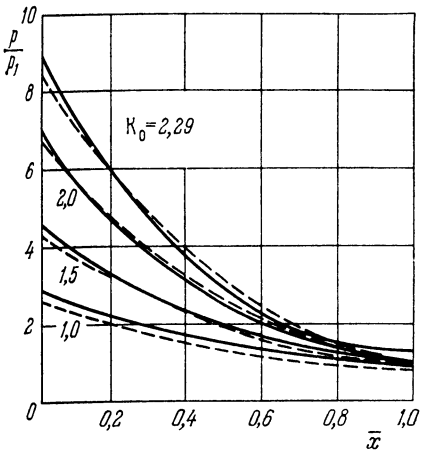


Рис. 145

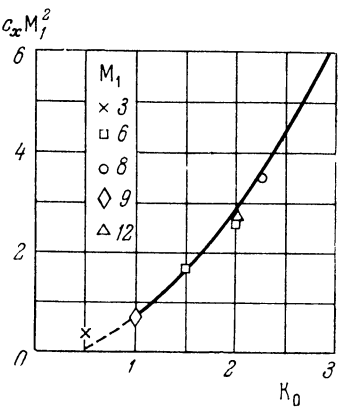


Рис. 146

Задача о сверхзвуковом обтекании тонких тел вращения при очень больших числах Маха в том случае, когда головная волна «отходит» от острого носика тела вследствие слишком большого значения угла при вершине либо наличия затупления носика, представляет значительные трудности. Так же, как и в плоском случае, отошедший скачок имеет вблизи оси симметрии потока почти плоский участок, соответствующий прямому скачку, и соседние с ним участки «сильного» разрыва, за которыми поток является дозвуковым. Движение в области между головной волной и поверхностью обтекаемого тела имеет в связи с этим смешанный до-, сверх- и трансзвуковой характер.

Наличие конечной кривизны у поверхности головной волны приводит к вихревому характеру течения газа за поверхностью волны и переменности энтропии. Все это увеличивает трудности рассмотрения обтеканий тел с отошедшей волной. Между тем на практике приходится обычно иметь дело с телами, у которых носовая часть затуплена. Это объясняется наличием процессов разрушения заостренной части тела при полете его с большими сверхзвуковыми скоростями (оплавление, иногда испарение — сублимация) из-за сильного разогрева за счет тепла, возникающего в результате диссипации механической энергии.

Наряду с этим при разогреве газа до сравнительно высоких температур, порядка 1000 К, в газе возникают физико-химические превращения, изменяющие его первоначальный состав. Так, в воздухе при достижении 2000 К значительная часть молекулярного кислорода диссоциирует и превращается в атомарный; при 4000 К начинается диссоциация азота, а при более высоких температурах, порядка 7000—10 000 К, наблюдается заметная ионизация воздуха, сопровождающаяся образованием свободных электронов (электронного газа). В этих условиях в газе происходит резкое возрастание теплопроводности и электропроводности, между его молекулами возникают кулоновы силы взаимодействия. Все

это позволяет приписать газу особое агрегатное состояние, именуемое *плазмой* (точнее, *низкотемпературной плазмой*).

Изучение подобных газовых потоков представляет значительные трудности и не может войти в настоящий общий курс. Это составляет предмет специального курса гиперзвуковой аэродинамики. Желающих расширить и углубить свои знания в области аэротермодинамики гиперзвуковых движений невязкого газа отошлем к монографии: Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика.— М.: Машиностроение, 1975.

Исследование сверхзвуковых течений газа в настоящее время все в большей степени связывается с применением численных методов. Наибольшее распространение получили конечноразностные методы в своих различных вариантах (см. далее § 102), а также метод «крупных частиц», начало которого было заложено Ф. Харлоу[1]) в 1957 г. и получило у нас в стране интенсивное развитие в работах О. М. Белоцерковского и его сотрудников[2]).

Численные методы позволили решить сложные задачи сверхзвукового обтекания идеальным газом тел разнообразных геометрических форм[3]).

---

[1]) См. русский перевод: Харлоу Ф. Численный метод частиц в ячейках.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967, с. 316—342.

[2]) Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике: Вычислительный эксперимент.— М.: Наука, 1982.

[3]) Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение многомерных задач газовой динамики.— М.: Наука, 1976.

ГЛАВА X

ДИНАМИКА НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ)

§ 84. Ньютоновская вязкая жидкость и ее реологическое уравнение

Дифференциальные уравнения движения, баланса энергии и вещества в потоках жидкости и газа, выведенные в гл. IV, относились к совершенно произвольным средам, лишь бы только эти среды обладали двумя достаточно общими свойствами — *сплошностью* и *текучестью*. При выводе уравнений были использованы: второй закон динамики в применении к сплошной системе материальных частиц и общий термодинамический закон сохранения полной энергии системы.

В последующих главах рассматривались простейшие модели сплошной среды: идеальная (лишенная внутреннего трения) несжимаемая жидкость или газ в условиях движения с малыми значениями числа Маха, характеризующего сжимаемость газа, и более общая модель идеального газа при больших до- и сверхзвуковых скоростях, когда свойство сжимаемости среды приобретает первостепенное значение. В последнем случае для определенности принятой модели приходилось еще дополнительно накладывать условие «совершенства» газа, выражаемого уравнением состояния газа, или задаваться наперед термодинамическим характером процесса движения газа (адиабатичность, изотермичность).

Напомним, что свойство *идеальности* жидкости или газа выражалось отсутствием касательных напряжений в них и выводимым отсюда условием *сферичности* тензора напряжений (E — тензорная единица)

$$P = -pE, \tag{1}$$

при наличии которого все нормальные напряжения в данной точке среды могут быть выражены через одну скалярную величину — давление. Уравнение (1) представляет простейший пример *реологического* уравнения среды. Под реологическими уравнениями (законами) сред понимают уравнения, связывающие компоненты тензоров *напряжений*, *деформаций* и *их производных по времени*. Такие уравнения могут быть одинаковыми при разнообразных движениях рассматриваемой среды, либо зависеть от характера различных возможных ее движений, в частности от конструкции аппаратов, в которых движения происходят, от предыстории потоков и т. п. Наиболее общим учением о текучести сплошных сред, как уже упоминалось во введении, является *реология*.

Следующим в порядке сложности после (1) реологическим уравнением служит уравнение текучести обычной *вязкой* жидкости, в простейшем случае прямолинейного «сдвигового» ламинарного движения сводящееся к известному реологическому закону Ньютона[1]) пропорциональности между касательной компонентой тензора напряжений (трения) τ и поперечной к направлению потока производной скорости сдвига — касательной компонентой тензора скоростей деформации du/dy (рис. 147):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \tag{2}$$

[1]) **Ньютон** И. Математические начала натуральной философии, отд. VII и IX, предположение/Пер. А. Н. Крылова, изд. Морской Академии, 1915, с. 436. См. также Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. VII.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

Коэффициент пропорциональности μ, который может зависеть только от температуры жидкости, но не от давления (об этом подробнее будет сказано далее; на самом деле в реальных жидкостях при очень больших давлениях μ зависит также и от давления), носит наименование *динамического коэффициента вязкости*, в отличие от *кинематического коэффициента вязкости* ν, равного

$$\nu = \mu/\rho, \qquad (3)$$

т. е. отношению динамического коэффициента вязкости к плотности жидкости.

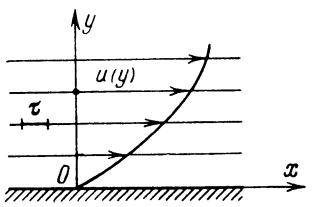


Рис. 147

Размерность динамического коэффициента вязкости μ, согласно формуле (2), будет

$$\frac{\textit{сила} \cdot \textit{длина}}{\textit{длина}^2 \cdot \textit{скорость}} = \frac{\textit{сила}}{\textit{скорость} \cdot \textit{длина}}.$$

В *физической* системе единиц (СГС) динамический коэффициент вязкости (или, как иногда для краткости говорят, просто *вязкость*) выражают в *пуазах* (П), по имени французского исследователя Пуазейля, равных

$$1\,\text{П} = 1\,\frac{\text{дина} \cdot \text{с}}{\text{см}^2} = 1\,\frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}.$$

Обычно пользуются в сто раз меньшей единицей — *сантипуазом*, которой соответствует динамическая вязкость воды при 20,5° С.

В технической системе за единицу вязкости можно принять величину

$$\frac{\text{кгс} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}.$$

В Международной системе (СИ) единицей вязкости является *паскаль-секунда*

$$1\ \text{Па} \cdot \text{с} = 10\ \text{П} = 1\ \text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = 1\ \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}),$$

равная 10^3 *сантипуаз*.

Коэффициент кинематической вязкости выражается в $\text{см}^2/\text{с}$, $\text{м}^2/\text{с}$; величину, равную 1 $\text{см}^2/\text{с}$, называют *стоксом*; в сто раз меньшую — *сантистоксом*.

Динамический и кинематический коэффициенты вязкости жидкостей и газов значительно зависят от температуры; приводим табл. 11 и 12 этих зависимостей. Заметим, что, как видно из этих таблиц, *оба коэффициента вязкости воды*, динамический и кинематический, *убывают с возрастанием температуры, коэффициенты же вязкости воздуха*, а также и других газов, *увеличиваются*.

Таблица 11. **Зависимость коэффициентов вязкости воды от температуры**

Температура, °С	$\mu \cdot 10^2$, П	$\nu \cdot 10^2$, $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	Температура, °С	$\mu \cdot 10^2$, П	$\nu \cdot 10^2$, $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$
0	1,792	1,792	40	0,656	0,661
5	1,519	1,519	45	0,599	0,605
10	1,308	1,308	50	0,549	0,556
15	1,140	1,141	60	0,469	0,477
20	1,005	1,007	70	0,406	0,415
25	0,894	0,897	80	0,357	0,367
30	0,801	0,804	90	0,317	0,328
35	0,723	0,727	100	0,284	0,296

Таблица 12. **Зависимость коэффициентов вязкости воздуха от температуры**

Температура, °С	$\mu \cdot 10^4$, П	ν, $\frac{см^2}{с}$	Температура, °С	$\mu \cdot 10^4$, П	ν, $\frac{см^2}{с}$
0	1,709	0,132	260	2,806	0,424
20	1,808	0,150	280	2,877	0,451
40	1,904	0,169	300	2,946	0,481
60	1,997	0,188	320	3,014	0,507
80	2,088	0,209	340	3,080	0,535
100	2,175	0,230	360	3,146	0,565
120	2,260	0,252	380	3,212	0,595
140	2,344	0,274	400	3,277	0,625
160	2,425	0,298	420	3,340	0,656
180	2,505	0,322	440	3,402	0,688
200	2,582	0,346	460	3,463	0,720
220	2,658	0,371	480	3,523	0,752
240	2,733	0,397	500	3,583	0,785

Существуют очень вязкие жидкости, как, например, глицерин, для которого при 3° С $\mu=42{,}20$ П, $\nu=33{,}40$ см^2/с; машинное масло при 10° С имеет $\mu=6{,}755$ П, $\nu=7{,}34$ см^2/с.

Вязкость этих жидкостей, как правило, быстро уменьшается с ростом температуры (см. прилагаемую таблицу вязкости глицерина). Применяются различные эмпирические формулы[1]) зависимости вязкости жидкостей от температуры.

t, °С	3	18	21
μ, П	42,20	10,69	7,78
ν, $\frac{см^2}{с}$	33,40	8,48	6,18

Зависимость коэффициента вязкости газа от температуры представляется формулой Саттерлэнда, выводимой теоретически в кинетической теории газов (константы зависят от рода газа)

$$\mu = \frac{\text{const} \cdot T^{3/2}}{T + C}, \tag{4}$$

где $C \approx 122$ (для воздуха). На практике предпочитают пользоваться приближенной степенной формулой

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n, \tag{5}$$

где показатель степени n различен для разных газов и, кроме того, сам зависит от интервала температур. С возрастанием температуры показатель степени n в формуле (5) убывает. Для приближенных оценок принимают $n=1$ для сравнительно малых и $n=0{,}76$ для больших температур.

В настоящей главе внимание будет, по преимуществу, сосредоточено на простейших случаях *изотермического* движения вязкой *несжимаемой* жидкости с постоянными значениями плотности и коэффициентов вязкости. Более сложные движения *газов* с переменными физическими свойствами отнесены к последней главе.

[1]) См. статью П. А. Ребиндера «Вязкость», помещенную во втором томе «Физического словаря», БСЭ, 1960.

Реологическое уравнение (2) представляет собой частный случай более общего, соответствующего *любому пространственному* движению вязкой жидкости закона *линейной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций*. Этот закон, носящий наименование *обобщенного закона Ньютона*, справедлив для не слишком разреженных газов и для большинства жидкостей, именуемых *«ньютоновскими»*. Динамика «неньютоновских» жидкостей излагается в специальных курсах *реологии*. Некоторые простейшие реологические законы движения «неньютоновских» жидкостей будут изложены в следующем параграфе; кроме того, в § 90 будет дано решение задачи о движении наиболее распространенной «вязкопластической» (Бингама—Шведова) жидкости по цилиндрическому каналу кругового сечения.

Среди разнообразных по внутренней природе вязкости текучих сред особо распространены и привлекают своей простотой *изотропные* вязкие жидкости и полностью относящиеся к ним газы. Изотропия означает *одинаковость* механизма вязкого взаимодействия во всех направлениях и, как следствие, наличие *скалярных* (инвариантных) коэффициентов вязкости: *одного*, вышеупомянутого динамического коэффициента вязкости — в *несжимаемых* средах, *двух* — при движениях газов с большими скоростями (см. начало гл. XV).

Обобщенный закон Ньютона дает линейную связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций, выражаемую в случае *изотропной среды* тензорным соотношением

$$P=a\dot{S}+bE, \tag{6}$$

где a и b — скаляры, E — тензорная единица

$$E_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если } j\neq i,\\ 1, & \text{если } j=i.\end{cases}$$

Для того чтобы уравнение (6) давало *линейную* связь между тензорами, скаляр a не должен зависеть от компонент тензоров P и $\dot{S}$; этот скаляр представляет собой физическую константу, которая из условия совпадения (6) со своим частным случаем (2) должна быть положена равной 2μ. Скаляр b может быть связан линейно с тензорами P и $\dot{S}$, причем в силу изотропности вязкости должен представлять собой *линейную* комбинацию первых инвариантов этих тензоров (§ 6). Первым инвариантом тензора напряжений P служит сумма трех нормальных напряжений

$$p_{11}+p_{22}+p_{33}.$$

Первым инвариантом тензора скоростей деформаций $\dot{S}$ является сумма

$$\dot{S}_{11}+\dot{S}_{22}+\dot{S}_{33}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=\operatorname{div} V,$$

которая в рассматриваемом в настоящей главе случае *несжимаемой* жидкости равна нулю. Первый инвариант тензорной единицы E равен 3.

Чтобы найти скаляр b, приравняем линейные инварианты тензоров в левой и правой частях основного равенства (6). Тогда получим

$$p_{11}+p_{22}+p_{33}=3b,$$

откуда

$$b=\frac{1}{3}(p_{11}+p_{22}+p_{33}). \tag{7}$$

Обобщая понятие *давления*, введенное в динамику *идеальной* жидкости согласно системе равенств $p_{11}=p_{22}=p_{33}=-p$, примем в качестве простейшего допущения, что в *ньютоновской несжимаемой вязкой жид-*

кости взятое с обратным знаком среднее арифметическое трех нормальных напряжений, приложенных к взаимно перпендикулярным площадкам в данной точке среды, представляет давление в этой точке

$$-\frac{1}{3}(p_{11}+p_{22}+p_{33})=p. \tag{8}$$

Сделанное предположение является *дополнительной* гипотезой к обобщенному закону Ньютона, так как, исходя из общих гидродинамических соображений, нельзя доказать, что определенная таким образом инвариантная *скалярная* величина p будет действительно той самой термодинамической характеристикой жидкости или газа, которая, например, в случае совершенного газа будет связана с другими термодинамическими характеристиками газа — плотностью и температурой — формулой Клапейрона. Правильность принятой гипотезы (8) оправдывается практикой применения ее в расчетах движений ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости.

Согласно (6), (7) и (8) получим следующее выражение обобщенного закона Ньютона для несжимаемой вязкой жидкости

$$P=2\mu\dot{S}-pE=-pE+2\mu\,\mathrm{def}\,V \tag{9}$$

или, в компонентной (аналитической) форме,

$$p_{ij}=\begin{cases}\mu\left(\dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) & \text{при } j\neq i,\\[2ex] -p+2\mu\dfrac{\partial V_i}{\partial x_i} & \text{при } j=i \text{ (не суммировать по } i).\end{cases} \tag{10}$$

Равенство (9) представляет собой реологическое уравнение ньютоновской несжимаемой вязкой жидкости. Выпишем в развернутом виде формулы принятой связи (9) в трех основных системах координат: прямоугольной декартовой (x_1, x_2, x_3), цилиндрической (r, ε, z) и сферической (R, θ, ε):

в *прямоугольной декартовой* системе (x_1, x_2, x_3)

$$p_{11}=-p+2\mu\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\quad p_{22}=-p+2\mu\frac{\partial V_2}{\partial x_2},\quad p_{33}=-p+2\mu\frac{\partial V_3}{\partial x_3},$$
$$p_{12}=p_{21}=\mu\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right),\quad p_{23}=p_{32}=\mu\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3}+\frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right), \tag{11}$$
$$p_{13}=p_{31}=\mu\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right);$$

в *цилиндрической* (полярной при $V_z=0$) системе (r, ε, z), вспоминая компоненты $\mathrm{def}\,V$ в этой системе [(100) гл. I], получим

$$p_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial V_r}{\partial r},\quad p_{\varepsilon\varepsilon}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}+\frac{V_r}{r}\right),\quad p_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z},$$
$$p_{r\varepsilon}=p_{\varepsilon r}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r}-\frac{V_\varepsilon}{r}\right),\quad p_{\varepsilon z}=p_{z\varepsilon}=\mu\left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon}\right), \tag{12}$$
$$p_{zr}=p_{rz}=\mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\right);$$

в *сферической* системе (R, θ, ε) [см. компоненты $\mathrm{def}\,V$ в этой системе (101) гл. I]

$$p_{RR}=-p+2\mu\frac{\partial V_R}{\partial R},\quad p_{\varepsilon\varepsilon}=-p+2\mu\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}+\frac{V_R}{R}+\frac{V_\theta\operatorname{ctg}\theta}{R}\right),$$
$$p_{\theta\theta}=-p+2\mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{V_R}{R}\right), \tag{13}$$

$$p_{R\theta} = p_{\theta R} = \mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V_R}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{R}\right),$$

$$p_{\theta\varepsilon} = p_{\varepsilon\theta} = \mu\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{R}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \theta} - \frac{V_\varepsilon \operatorname{ctg}\theta}{R}\right),$$

$$p_{\varepsilon R} = p_{R\varepsilon} = \mu\left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial R} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V_R}{\partial \varepsilon} - \frac{V_\varepsilon}{R}\right).$$

Приведенные только что выражения обобщенного закона Ньютона, так же как и аналогичные выражения его в любой ортогональной криволинейной системе координат, которые легко составить, пользуясь (99) гл. I, должны лежать в основе рассмотрения *пространственных* движений вязкой несжимаемой жидкости. Подчеркнем, что пользование классической формулой Ньютона (2) для *криволинейных* линий тока путем замены в ней производной d/dy на d/dn, где n — нормальное к линиям тока направление, недопустимо, что легко проиллюстрировать следующим простым примером. В *квазитвердом* вращении жидкости вокруг неподвижной оси с распределением скоростей по закону $V=\omega r$ (r — расстояние до оси вращения) сдвиги, а следовательно, и скорости сдвигов отсутствуют. По приведенному в § 25 определению *текучести* в квазитвердом движении не могут существовать и касательные напряжения. Однако по *произвольно примененной* формуле (2) получим $\tau = \mu\, dV/dr = \mu\omega \neq 0$. Правильный результат дает в этом случае ($V_r = 0$) формула для $p_{r\varepsilon}$ (12)

$$p_{r\varepsilon} = \mu\left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} - \frac{V_\varepsilon}{r}\right) = \mu(\omega - \omega) = 0.$$

Упомянем, что в *анизотропных* вязких жидкостях обобщенный закон Ньютона значительно усложняется, так как *скалярные* коэффициенты вязкости заменяются *тензорами,* выражающими пространственную *анизотропию вязкости* жидкости и не связанными с тензорами напряжений, деформаций и их производными по времени.

§ 85. Реологические законы неньютоновских вязких несжимаемых жидкостей

Свойствами ньютоновских жидкостей, описываемых реологическим уравнением (9), обладает большинство жидкостей, а также все газы.

Тонкие суспензии, глинистые растворы, масляные краски дают примеры жидкостей, отличных по своим свойствам от ньютоновских. Наличие у неньютоновских жидкостей разнообразных свойств, отличающих их от ньютоновских, объясняется особенностями молекулярных структур и внутренних, молекулярных движений.

Особый интерес благодаря своему широкому распространению представляют «вязкопластические» жидкости, в которых наряду с вязкостью проявляются также *пластические* свойства, заключающиеся в наличии некоторого предельного напряжения сдвига, после достижения которого только и возникает «текучесть» среды. Реологические законы вязкопластических жидкостей обычно приписывают Бингаму (1916 г.), хотя они были известны уже задолго до этого (в 1889 г.) Ф. Н. Шведову.

Довольствуясь ранее упомянутым (рис. 147) простейшим случаем плоского сдвигового прямолинейного движения вдоль оси Ox со скоростью сдвига $\dot{\varepsilon} = du/dy$, приведем реологическое уравнение такой вязкопластической жидкости в форме

$$\tau = \tau_0 + \mu'\dot{\varepsilon} \text{ при } \tau > \tau_0, \qquad (14)$$

где τ_0 — предельное напряжение сдвига, μ' — динамический коэффициент *структурной* вязкости (точка над буквой — производная по времени). При $\tau<\tau_0$ *текучесть отсутствует*, т. е. среда ведет себя, как *твердое* тело. Пример движения вязкопластической жидкости вдоль цилиндрической трубы кругового профиля разобран в § 90.

Только что описанной вязкопластической модели удовлетворяют, например, движения таких встречающихся в практике сред, как применяемые на нефтепромыслах для промывания скважин глинистые и цементные растворы[1]), масляные краски, сточные грязи, а также некоторые пасты. Физическое объяснение особых свойств всех этих жидкостей основывается на представлении о наличии в них при покое некоторой пространственной жесткой структуры, которая в состоянии сопротивляться любому внешнему воздействию до тех пор, пока вызванное им напряжение сдвига не превзойдет соответствующее этой структуре предельное напряжение. После этого структура полностью разрушается и жидкость начинает вести себя, как обычная ньютоновская вязкая жидкость при кажущемся напряжении, равном избытку $\tau-\tau_0$ действительного напряжения над предельным. При уменьшении этого кажущегося напряжения до нуля, т. е. при возвращении действительного напряжения к предельному его значению, пространственная жесткая структура восстанавливается[2]).

Другие, так называемые «псевдопластические» жидкости лишены предельного напряжения текучести, но их кажущаяся вязкость определяется коэффициентом, зависящим от скорости сдвига. Такие «нелинейные» жидкости (суспензии асимметричных частиц, растворы высокополимеров) подчиняются реологическим уравнениям типа (Оствальд, Рейнер)

$$\tau = k\dot{\varepsilon}^n, \tag{15}$$

где k и $n<1$ почти постоянны в широких интервалах напряжений и скоростей деформаций, а кажущийся коэффициент вязкости $\tau/\dot{\varepsilon}=k\dot{\varepsilon}^{n-1}$ убывает с ростом $\dot{\varepsilon}$.

Отсутствие предельного напряжения роднит псевдопластические жидкости с так называемыми «дилатантными» жидкостями, у которых, в отличие от псевдопластических, кажущаяся вязкость с увеличением напряжения увеличивается ($n>1$). Такая закономерность характерна для суспензий твердых частиц при высоких их концентрациях, а также крахмальных клейстеров, которые нельзя отнести к концентрированным суспензиям твердых частиц.

Особенно большое внимание привлекают в настоящее время *вязкоупругие* среды, обладающие как свойством вязкости, так и упругости. К числу таких сред относятся очень вязкие синтетические материалы, а также слабые растворы полимеров в ньютоновских жидкостях. Замечательно, что иногда даже небольшие по весу добавки полимеров превращают ньютоновские жидкости в неньютоновские, сообщая им специфические вязкоупругие свойства.

В зависимости от подхода к определению совместного действия упругости и вязкости, различают две реологические модели:

1) модель Ф о й х т а, основанную на наложении упругого и вязкого *напряжений*

$$\tau = G\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}, \tag{16}$$

[1]) См. М и р з а д ж а н з а д е А. Х., М и р з о я н А. А., Г е в и н я н Г. М. и С е и д-р з а М. К. Гидравлика глинистых и цементных растворов — М.: Недра, 1966, с. 31—43.

[2]) См. монографию: У и л к и н с о н У. Л. Неньютоновские жидкости: Перев с англ.— М.: Мир, 1964, с. 20, 21.

где G — модуль сдвига, ε — деформация сдвига, $\dot{\varepsilon}=du/dy$ — скорость сдвига, μ — динамический коэффициент вязкости, причем рассматривается *плоское сдвиговое* движение, подобное тому, которое изображено на рис. 147 [$v=0$, $u=u(y)$];

2) модель Максвелла, основанную на наложении *скоростей* упругой и вязкой *деформаций*

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\tau}}{G}+\frac{\tau}{\mu}, \tag{17}$$

где сохранены те же обозначения и рассматривается то же плоское сдвиговое движение.

Различие этих моделей наглядно выявляется, если положить в первой модели (16) $\tau=\text{const}=\tau_0$, а во второй — $\dot{\varepsilon}=0$. Для модели Фойхта, интегрируя (16), получим при $\tau=\tau_0$ равенство

$$\varepsilon=\frac{\tau_0}{G}\left[1-\exp\left(-\frac{Gt}{\mu}\right)\right], \tag{18}$$

выражающее *запаздывание* при росте времени t установления упругой деформации τ_0/G, соответствующей постоянному напряжению $\tau=\tau_0$. Постоянная μ/G является характерным *временем запаздывания*.

Модель Максвелла при интегрировании уравнения (17), в предположении $\dot{\varepsilon}=0$ приводит к решению

$$\tau=\tau_0\exp\left(-\frac{Gt}{\mu}\right), \tag{19}$$

описывающему *возвращение* с ростом времени t напряжения τ к тому нулевому значению, которое соответствовало бы *равновесному* состоянию среды при отсутствии скорости деформации $\dot{\varepsilon}$.

Процесс *возвращения к равновесному состоянию* среды, выведенной из этого состояния каким-то возмущением, именуют *релаксацией*, а характерное время развития этого процесса — *временем релаксации*.

Убывание напряжения в модели Максвелла, выраженное уравнением (19), дает пример *релаксации напряжения* в потоке вязкоупругой жидкости. Величина

$$\lambda=\frac{\mu}{G}, \tag{20}$$

фигурирующая как в модели Фойхта, так и в модели Максвелла, может трактоваться в первом случае как «время запаздывания» установления упругой деформации, а во втором — как «время релаксации» напряжения.

Уравнение Максвелла (17), с учетом характера прямолинейного сдвигового движения ($v=0$, $\dot{\varepsilon}=du/dy$), можно переписать в виде

$$\lambda\dot{\tau}+\tau=\mu\dot{\varepsilon}=\mu\frac{du}{dy}; \tag{21}$$

при нулевом времени релаксации ($\lambda=0$) равенство (21) приводит к закону Ньютона (2), соответствующему *мгновенному* следованию напряжения за скоростью деформации (иными словами, бесконечной скорости распространения возмущений). Вспомним содержание § 32, из которого следовала бесконечно большая скорость распространения возмущений в несжимаемой жидкости и *конечная* скорость этого процесса в сжимаемой среде — газе. Наличие свойства упругости в вязкоупругой

среде приводит, так же как в газе, к *конечной* скорости распространения возмущений.

Для определения величины этой скорости заметим, что в рассматриваемом плоском прямолинейном сдвиговом движении основному уравнению динамики «в напряжениях» [(8), гл. IV] при отсутствии объемных сил можно придать вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial y}. \tag{22}$$

Взяв от обеих частей уравнения (21) производную по времени, получим

$$\lambda \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} + \frac{\partial \tau}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial t},$$

или, согласно (22),

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\nu}{\lambda} \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}. \tag{23}$$

Это уравнение в частных производных *гиперболического* типа («телеграфное» уравнение) описывает *волновое распространение напряжения*, причем скорость этого распространения определяется значением корня квадратного из коэффициента при $\partial^2\tau/\partial y^2$, не зависит от вязкости среды и равна

$$w = \sqrt{\frac{\nu}{\lambda}} = \sqrt{\frac{\nu G}{\mu}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{24}$$

Наличие у вязкоупругих сред *конечной* скорости распространения возмущений имеет следствием возникновение в движущейся вязкоупругой жидкости зависимости движения в данной точке потока от предшествующих движений в точках, расположенных *вверх* по потоку. Такое явление называют «влиянием предыстории» потока, а жидкости, обладающие этим свойством,— «наследственными». Вязкоупругая жидкость служит примером такого рода «наследственных» жидкостей.

Отметим существенную разницу между моделями Фойхта и Максвелла.

Для модели Фойхта характерным является тот факт, что при действии постоянного напряжения скорость сдвига $\dot{\varepsilon}$, которую можно получить из (18) дифференцированием по времени, при $t \to \infty$ быстро стремится к нулю, т. е. «тело» Фойхта под действием постоянной нагрузки не обладает свойством *беспредельной текучести*. «Тело» Максвелла, для которого, как легко видеть из (17), при условиях: $\tau = \tau_0$, $\tau = 0$ имеет место соотношение

$$\dot{\varepsilon} \to \frac{\tau_0}{\mu} \neq 0 \text{ при любых } t,$$

в противоположность «телу» Фойхта, будет течь под действием постоянной нагрузки с постоянной скоростью сдвига $\varepsilon_0 = \tau_0/\mu$. Вот почему среду, подчиненную реологическому закону Фойхта, часто называют вязкоупругим, «наследственным» *твердым телом*, в отличие от «тела» Максвелла, которое представляет вязкоупругую «наследственную» *жидкость*.

Перечисленные примеры не исчерпывают всего разнообразия специфических свойств неньютоновских жидкостей. Механические свойства многих жидкостей существенно зависят не только от скорости деформирования, но и от продолжительности деформирования, а также от предистории потока. Такие жидкости именуют *тиксотропными*. Некоторые из них, *реопектические* жидкости, обладают способностью увеличивать

жесткость своей структуры при наличии сдвигового движения, другие, наоборот, разрушать структуры. К первому типу можно отнести, например, цементные растворы в режиме «цепенения», расплавленные металлы, которые в жидком состоянии представляют собой чисто ньютоновские жидкости, а на начальной стадии затвердевания заполняются мельчайшими кристаллическими образованиями, приближающими их к дилатантным жидкостям.

Тиксотропия может проявляться и в обратном, также связанном с временем, эффекте разрушения жесткой структуры под действием сдвигового деформационного движения, как это имеет место, например, в жидкостях типа кефира. Под влиянием встряхивания кефир, представляющий желеобразное тело, свободно выливается из бутылки, а после некоторого времени покоя вновь восстанавливает свою структуру.

Современные синтетические материалы, используемые в машиностроительной, текстильной, пищевой и других видах промышленности, дают много примеров разнообразных неньютоновских (их иногда называют *реологическими*) жидкостей, механические законы движения которых очень сложны и могут, с известной степенью приближения, представляться комбинацией простейших законов, кратко описанных в настоящем параграфе.

Реология неньютоновских жидкостей граничит с *динамикой неоднородных жидкостей*, под которыми понимают *многофазные* и *многокомпонентные* среды. В такого рода средах, как, например, тонкие суспензии частиц, вообще трудно отличить неоднородную среду от неньютоновской жидкости. Существует мнение, что в некоторых случаях неньютоновские жидкости при переходе от ламинарного движения к турбулентному могут потерять свою первоначальную молекулярную микроструктуру и стать неньютоновскими, несущими примеси, т. е. *неоднородными* жидкостями.

Особенную сложность представляет вопрос о разыскании тензоров напряжений для отдельных фаз в движущейся смеси и общих закономерностей для «межфазных» тензоров напряжений, в которых само понятие деформации, так же как и скорости деформаций, становится особо сложным [1]).

Основной линией преодоления этих трудностей является приближенный подход, заключающийся в сохранении для смеси в целом *реологического* уравнения однородной, ньютоновской или неньютоновской среды, физические константы которой как-то в среднем учитывают особенности отдельных составляющих неоднородной смеси.

Для сред с малыми *объемными* концентрациями примесей широко распространено применение *поправки Эйнштейна* к динамическому коэффициенту вязкости несущей фазы. Исправленный динамический коэффициент вязкости смеси μ^* выражается через соответствующие коэффициенты: μ — для «чистой» несущей фазы и $\bar{\mu}$ для жидкой или газообразной примеси со сферической формой частиц по формуле [2])

$$\frac{\mu^*}{\mu} = 1 + \alpha \frac{\mu + \frac{5}{2}\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}}, \tag{25}$$

где α — объемная доля примеси.

---

[1]) См. по этому поводу: Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей.— Прикл. мат. и мех., 1970, т. 34, № 6, с. 1097—1112, и монографию: Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.—М.: Наука, 1978, гл. I.

[2]) Обоснование этой формулы можно найти в курсе: Батчелор Дж. Введение в динамику жидкости/Перев с англ.— М.: Мир, 1973, с. 313—321.

В случае *твердой* примеси следует положить $\bar{\mu}=\infty$; тогда предыдущая формула приводится к более простой, справедливой для *твердых* суспензий сферических частиц:

$$\mu^*=\mu\left(1+\frac{5}{2}\alpha\right). \tag{26}$$

В случаях примесей *несферических* частиц вязкость смеси возрастает. Так, для твердых частиц, имеющих форму эллипсоидов вращения с отношением полуосей 6 : 1, будет

$$\mu^*=\mu(1+5\alpha). \tag{27}$$

Заметим, что поправка Эйнштейна весьма существенна. Например, для крови, состоящей из *ньютоновской* несущей фазы — *плазмы* с динамическим коэффициентом вязкости $\mu=0{,}015$ П — и переносимых плазмой кровяных телец с объемной концентрацией $\alpha\approx 40\%$, если рассматривать эти тельца как твердые эллипсоиды вращения[1]) с относительной толщиной 1 : 6 (что близко к действительности), будем иметь $\mu^*=3\mu$.

Реология неньютоновских жидкостей представляет в настоящее время большую самостоятельную область механики сплошных сред[2]). В ее современном развитии большая роль принадлежит известной советской школе, группирующейся под руководством З. П. Шульмана в Институте тепломассообмена (ИТМО АН БССР) в Минске[3]).

§ 86. Уравнения Навье — Стокса динамики ньютоновской несжимаемой среды

Для вывода основных дифференциальных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости используем уравнения динамики сплошных сред «в напряжениях» [(6), (8) гл. IV] и присоединим к ним уравнение несжимаемости (10), гл. III.

Подставим в правые части системы уравнений «в напряжениях» (8) гл. IV, записанных с употреблением числовой индексации,

$$\begin{aligned}
\rho\frac{dV_1}{dt}&=\rho F_1+\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{31}}{\partial x_3},\\
\rho\frac{dV_2}{dt}&=\rho F_2+\frac{\partial p_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{32}}{\partial x_3},\\
\rho\frac{dV_3}{dt}&=\rho F_3+\frac{\partial p_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{33}}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{28}$$

или

$$\rho\frac{dV_i}{dt}=\rho F_i+\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\qquad (i,k=1,2,3)$$

значения напряжений p_{ij} по (11) настоящей главы. Останавливаясь на случае *изотермического* движения, когда $\mu=\text{const}$, $\rho=\text{const}$ и $\nu=\text{const}$,

---

[1]) Jones R. T. Blood flow.— Annual Review of Fluid Mechanics, 1969, v. 1, p. 223, 224.

[2]) Среди общих руководств по реологии можно рекомендовать следующие: Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей.— М.: Мир, 1973; Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— М.: Мир, 1975; Рейнер М. Деформация и течение. Введение в реологию.— М.: ГНТИ нефт. и горно-топлив. литературы, 1963; Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continous media — Arch Rat. Mech. Anal., 1958, v. 2, № 3, p. 197—226, а также ранее цитированную монографию Уилкинсона.

[3]) См., например, Шульман З. П., Хусид Б. М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах.— Минск: Наука и техника, 1983 и помещенную там обширную библиографию.

получим для первого уравнения системы (28)

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{31}}{\partial x_3}=-\frac{\partial p}{\partial x_1}+2\mu\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right)+$$
$$+\mu\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}+\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2}\right)+$$
$$+\mu\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+\frac{\partial V_3}{\partial x_3}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu\nabla^2 V_1+\mu\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div}\boldsymbol{V}.$$

В несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0$, а следовательно, и последнее слагаемое справа равно нулю.

Повторяя подобные действия применительно к остальным двум уравнениям системы (28), деля обе части на ρ, раскрывая выражение производной dV_i/dt и присоединяя еще уравнение несжимаемости (10) гл. III, получим следующую систему уравнений Навье—Стокса:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_1}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial V_1}{\partial x_3}=F_1-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\nu\nabla^2 V_1,\\
&\frac{\partial V_2}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial V_2}{\partial x_3}=F_2-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}+\nu\nabla^2 V_2,\\
&\frac{\partial V_3}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial V_3}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=F_3-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3}+\nu\nabla^2 V_3,\\
&\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=0
\end{aligned}\qquad(29)$$

или кратко

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}=F_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 V_i,\quad\frac{\partial V_k}{\partial x_k}=0\qquad(i,k=1,2,3).$$

Впервые на основании соображений о взаимодействии молекул эти уравнения были получены Навье в 1822 г. и Пуассоном в 1829 г., а затем близким к только что изложенному путем Сен-Венаном в 1843 г. и затем Стоксом в 1845 г.[1]).

В векторной форме уравнения (29) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\nabla^2\boldsymbol{V},\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0,
\end{aligned}\qquad(30)$$

где символ $\nabla^2\boldsymbol{V}$ — *лапласиан* $\boldsymbol{V}$ — обозначает вектор с проекциями $\nabla^2 V_i$ $(i=1, 2, 3)$.

В приложениях приходится иметь дело с уравнениями Навье—Стокса в проекциях на оси ортогональных *криволинейных* координат. Для составления такой формы уравнений полезно учесть тождество (50) гл. II

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right)+\operatorname{rot}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V},$$

а также следующее из последней строки системы (88) гл. I при условии несжимаемости ($\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0$) равенство

$$\nabla^2\boldsymbol{V}=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{V},\qquad(31)$$

в силу чего уравнения Навье—Стокса при условии потенциальности

[1]) Цитируем по фундаментальному курсу: Ламб Г. Гидродинамика.— М.: Гостехиздат, 1947, с. 723.

объемных сил могут быть приведены к форме, аналогичной уравнениям Громека—Ламба [(8) гл. V] для идеальной жидкости,

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} = -\operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho}\right) - \nu \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{V}, \qquad (32)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0.$$

Пользуясь проекциями на криволинейные оси операторов rot, grad и div, получим следующие выражения уравнений Навье — Стокса в цилиндрических и сферических координатах (объемные силы опущены):

цилиндрические координаты (r, ε, z):

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varepsilon^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right),$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + V_z \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} + \frac{V_r V_\varepsilon}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \nu\left(\nabla^2 V_\varepsilon + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} - \frac{V_\varepsilon}{r^2}\right), \qquad (33)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 V_z,$$

$$\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (rV_z)}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

сферические координаты (R, θ, ε):

$$\frac{\partial V_R}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_R}{\partial \theta} + \frac{V_\varepsilon}{R\sin\theta}\frac{\partial V_R}{\partial \varepsilon} - \frac{V_\theta^2 + V_\varepsilon^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial R} + \nu\left(\nabla^2 V_R - \frac{2V_R}{R^2} - \frac{2}{R^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2V_\theta \operatorname{ctg}\theta}{R^2} - \frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right),$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\varepsilon}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varepsilon} + \frac{V_R V_\theta}{R} - \frac{V_\varepsilon^2 \operatorname{ctg}\theta}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 V_\theta + \frac{2}{R^2}\frac{\partial V_R}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right),$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{V_\varepsilon}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{V_\varepsilon V_R}{R} + \frac{V_\theta V_\varepsilon \operatorname{ctg}\theta}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \nu\left(\nabla^2 V_\varepsilon - \frac{V_\varepsilon}{R^2\sin^2\theta} + \frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial V_R}{\partial \varepsilon} + \frac{2\cos\theta}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varepsilon}\right), \qquad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial R}(R^2 V_R \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(RV_\theta \sin\theta) + \frac{\partial (RV_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0,$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}.$$

Совокупность уравнений (29) представляет собой *нелинейную* систему четырех уравнений в частных производных второго порядка с четырьмя неизвестными функциями V_1, V_2, V_3 и p; величины ρ и ν являются

заданными постоянными, а проекции объемной силы F_1, F_2, F_3 (силы тяжести, инерционные, центробежные или кориолисовы силы) — заданными функциями координат и скоростей. Нелинейность системы обусловлена наличием *конвективной* составляющей ускорения в левой части уравнений (29).

Для получения конкретных решений при интегрировании системы уравнений (29) должны быть использованы *граничные*, а в случае *нестационарного* движения и *начальные* условия. Вспомним, что в идеальной жидкости основное граничное условие на омываемой жидкостью твердой поверхности заключалось в *непроницаемости* поверхности и в связи с этим в совпадении нормальных к поверхности составляющих скоростей частиц жидкости и точек самой поверхности. В случае вязкой жидкости это граничное условие заменяется *условием «прилипания»* частиц жидкости к твердой стенке. Это означает *отсутствие как нормальной к твердой поверхности относительной скорости между частицами жидкости и близлежащими точками поверхности, так и касательных составляющих относительной скорости, т. е. отсутствие скорости скольжения жидкости по поверхности.*

Не следует связывать указанное только что допущение об отсутствии скольжения частиц жидкости по твердой поверхности («прилипание») с явлением «смачиваемости» жидкостью (или отсутствия смачиваемости) твердой поверхности, которое характеризует так называемый «краевой эффект» (образование мениска) на границе трех фаз (твердая, жидкая, газообразная), или твердой поверхности и двух жидкостей разной плотности. Ртуть не смачивает внутреннюю поверхность стеклянной трубки, по которой течет, но «прилипает» к ней.

Таким образом, в отличие от идеальной жидкости, при обтекании твердых поверхностей вязкой жидкостью должно выполняться граничное условие *равенства нулю скорости жидкости на неподвижной обтекаемой поверхности* или *совпадения скоростей частиц жидкости со скоростями точек движущейся твердой поверхности*, с которыми жидкие частицы соприкасаются. Это граничное условие даже в конце XIX века оспаривалось отдельными авторами, но в настоящее время уже полностью оправдано[1]). Исключением из этого общего положения являются граничные условия в сильно разреженных газах, где возможно скольжение газа по твердой поверхности, пропорциональное производной по нормали к поверхности от касательной составляющей скорости.

В число граничных условий входит также задание скорости вдалеке от обтекаемого тела в случае *внешнего* обтекания или *расхода* в случае протекания жидкости *сквозь канал*, а также задание давления в какой-нибудь одной точке потока, в частности, в бесконечном удалении от обтекаемого тела.

Начальные условия фигурируют в задачах нестационарных движений и представляют задания распределения скоростей в области течения в некоторый начальный момент, изменения во времени давления в данной точке пространства и т. д.

Для частных классов задач о движении вязкой жидкости существуют строгие доказательства теорем о существовании и единственности решений. Эти теоремы, помимо своего общего математического содержания, важны еще потому, что указывают, каковы должны быть присоединенные к дифференциальным уравнениям граничные и начальные условия, а также и другие дополнительные требования, без выполнения которых реше-

---

[1]) См. очерк «Заметка об условиях на поверхности соприкосновения жидкости с твердым телом», помещенный в конце второго тома монографии «Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости» (Под ред. С. Голдстейна).— М.: ИЛ, 1948, с. 356.

ние задачи не будет *единственным*, а иногда и вообще может не существовать. Таковы требования плавности обтекаемой поверхности или наличия на ней конечного числа изломов или разрывов кривизны, условия, налагаемые на распределения физических величин, непрерывность, существование производных и т. п.

Иногда в число условий единственности входят некоторые интегральные равенства, подобно тому, как это имело место в *идеальной* жидкости, где при расчете подъемной силы крылового профиля (гл. VII) использовалась «присоединенная» циркуляция. В динамике *вязкой* жидкости аналогичную роль играют задание величины импульса струи при расчете явления распространения струи в пространстве, затопленном той же жидкостью, задание сопротивления тела для определения течения в аэродинамическом следе за ним и т. п.

§ 87. Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости

Метод подобия весьма плодотворен при изучении не только гидродинамических, но и многих других физических и технических вопросов. Прежде всего следует отметить прямое назначение этого метода как научного обоснования приемов моделирования действительных, «натурных» процессов в лабораторных условиях. Метод подобия позволяет устанавливать требования, которые следует предъявлять к лабораторной модели и проведению на ней исследуемого процесса для того, чтобы результаты моделирования могли быть использованы для проектирования реальных объектов. Кроме того, обработка лабораторных измерений и обобщение результатов этих измерений в виде эмпирических формул также ведется согласно указаниям метода подобия.

Но это чисто прикладное значение метода подобия далеко не исчерпывает общую его ценность. Вот уже много лет, как метод подобия используется и при теоретическом изучении явлений как способ предсказания внутренней структуры переменных и параметров, входящих в выводимые из теории аналитические соотношения, а иногда даже и самой формы этих соотношений. Стоит вспомнить, например, выведенные в гл. VIII и IX соотношения подобия до- и сверхзвуковых обтеканий тонких тел, а также изложенные в тех же главах построения «автомодельных» решений. В настоящей и последующих главах придется встретиться со многими примерами использования идей метода подобия.

Два физических явления называют *подобными*, если величины, характеризующие одно явление, могут быть получены из соответствующих величин другого, взятых в сходственных пространственно-временных точках, простым умножением на *одинаковые во всех точках множители*, называемые *коэффициентами подобия*.

Пусть $\varphi(\boldsymbol{r};\ t)$, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r};t)$, $Q(\boldsymbol{r};\ t)$ соответственно представляют некоторые в общем случае нестационарные поля распределений физических скалярных, векторных или тензорных величин в пространственно-временной области $(\boldsymbol{r};\ t)$; здесь $\boldsymbol{r}$ — вектор-радиус точки, а его проекции (x, y, z) — координаты этой точки. Сравним с этим явлением некоторое другое, характеризуемое соответственно скалярными, векторными или тензорными функциями $\bar{\varphi}(\bar{\boldsymbol{r}};\ \bar{t})$, $\bar{\boldsymbol{a}}(\bar{\boldsymbol{r}};\ \bar{t})$, $\bar{Q}(\bar{\boldsymbol{r}};\ \bar{t})$ в области $(\bar{\boldsymbol{r}};\ \bar{t})$. Пространственно-временную точку $\bar{M}(\bar{\boldsymbol{r}};\ \bar{t})$ будем называть «сходственной» по отношению к точке $M(\boldsymbol{r};\ t)$, если векторы-радиусы этих точек (или их координаты) и соответствующие моменты времени могут быть получены одни из других простыми линейными преобразованиями

$$\bar{\boldsymbol{r}} = k_l \boldsymbol{r} \ (\text{или } \bar{x} = k_l x,\ \bar{y} = k_l y,\ \bar{z} = k_l z);\quad \bar{t} = k_t t, \tag{35}$$

в которых коэффициенты подобия k_l и k_t одни и те же для всех точек

сравниваемых областей и, кроме того,— подчеркнем этот факт — коэффициент подобия k_l — один и тот же для всех координат, т. е. не зависит от направления координатных осей в пространстве.

Рассматриваемые два физических явления будем считать *подобными* (в первоначальном смысле этого слова), если характеризующие их функции φ, $\boldsymbol{a}$, Q и $\bar{\varphi}$, $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{Q}$, определенные в сходственных точках областей $(r; t)$ и $(\bar{r}; \bar{t})$, могут быть получены одни из других также простыми линейными преобразованиями

$$\bar{\varphi} = k_\varphi \varphi, \quad \bar{\boldsymbol{a}} = k_a \boldsymbol{a}, \quad \bar{Q} = k_Q Q \tag{36}$$

с одинаковыми для различных сходственных точек значениями коэффициентов подобия k_φ, k_a, k_Q и — подчеркнем это опять — одинаковыми коэффициентами подобия: k_a для *всех* проекций вектора $\boldsymbol{a}$ и k_Q — для *всех* компонент тензора Q.

Расширяя только что высказанное определение подобия, введем еще *аффинное* подобие; о нем уже была речь в гл. VIII и IX. В случае аффинного подобия совокупность преобразований (35) и (36) заменяется следующими более общими преобразованиями:

$$\begin{gathered}\bar{\varphi} = k_\varphi \varphi, \quad \bar{a}_x = k_{a_x} a_x, \quad \bar{a}_y = k_{a_y} a_y, \quad \bar{a}_z = k_{a_z} a_z, \\ \bar{Q}_{xx} = k_{Q_{xx}} Q_{xx}, \quad \bar{Q}_{xy} = k_{Q_{xy}} Q_{xy} \text{ и т. д.},\end{gathered} \tag{37}$$

справедливыми в «сходственных» точках, определяемых формулами перехода

$$\bar{x} = k_x x, \quad \bar{y} = k_y y, \quad \bar{z} = k_z z, \quad \bar{t} = k_t t. \tag{38}$$

Коэффициенты подобия k_φ, k_{a_x}, ..., $k_{Q_{xx}}$, $k_{Q_{xy}}$, ..., k_x, k_y, k_z, так же как и ранее, не меняются при переходе от одной точки к другой, но изотропии уже нет и $k_{a_x} \neq k_{a_y} \neq k_{a_z}$, $k_{Q_{xx}} \neq k_{Q_{xy}} \neq \ldots$, $k_x \neq k_y \neq k_z$.

Преобразования (35) и (36), характеризующие обычное подобие, или (37) и (38) — аффинное подобие, можно интерпретировать еще иначе, если для каждого из рассматриваемых явлений ввести некоторые постоянные величины, характеризующие количественный порядок (масштаб) переменных физических величин, описывающих явления. Эти постоянные величины будем в дальнейшем называть *масштабами* соответствующих переменных величин (длин, времени, скоростей, давлений и др.). В области одного из сравниваемых явлений, скажем первого, в котором обозначения не имеют черточек сверху, обозначим через L и T какие-нибудь характерные длину и время и примем их за масштабы этих величин; в области другого явления аналогичным образом выделим соответствующие масштабы $\bar{L}$ и $\bar{T}$. Ограничиваясь для простоты пока случаем простого подобия, будем иметь, согласно (35),

$$\bar{L} = k_l L, \quad \bar{T} = k_t T. \tag{39}$$

Точно так же определим и масштабы Φ, A, Q^* и $\bar{\Phi}$, $\bar{A}$, $\bar{Q}^*$ для величин φ, $\boldsymbol{a}$, Q, $\bar{\varphi}$, $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{Q}$; при этом будет

$$\bar{\Phi} = k_\varphi \Phi, \quad \bar{A} = k_a A, \quad \bar{Q}^* = k_Q Q^*. \tag{40}$$

Исключая из равенств (39) и (40) коэффициенты подобия k_l, k_t, k_φ и т. д., можем преобразования (36), справедливые для сходственных точек, в которых, согласно (35), будет

$$\frac{\bar{x}}{\bar{L}} = \frac{x}{L}, \quad \frac{\bar{y}}{\bar{L}} = \frac{y}{L}, \quad \frac{\bar{z}}{\bar{L}} = \frac{z}{L}, \quad \frac{\bar{t}}{\bar{T}} = \frac{t}{T}, \tag{41}$$

переписать в форме безразмерных соотношений

$$\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\Phi}} = \frac{\varphi}{\Phi}, \quad \frac{\bar{a}}{\bar{A}} = \frac{a}{A}, \quad \frac{\bar{Q}}{\bar{Q}^*} = \frac{Q}{Q^*}. \tag{42}$$

Применяя обозначение «idem» для указания одинаковости сравниваемых безразмерных величин в сходственных точках областей, где протекают исследуемые явления, будем иметь следующее, заменяющее (41) и (42) *определение подобия* явлений:

$$\frac{\varphi}{\Phi} = \text{idem}, \quad \frac{a}{A} = \text{idem}, \quad \frac{Q}{Q^*} = \text{idem}, \tag{43}$$

если

$$\frac{x}{L} = \text{idem}, \quad \frac{y}{L} = \text{idem}, \quad \frac{z}{L} = \text{idem}; \quad \frac{t}{T} = \text{idem}.$$

Иными словами, *два подобных явления в сходственных пространственно-временных точках областей их протекания отличаются между собой только масштабами описывающих явления величин.*

Отсюда сразу следует, что если в дифференциальных уравнениях, граничных и начальных условиях, а также других условиях единственности решений этих дифференциальных уравнений перейти от обычных *размерных* переменных к *безразмерным*, которые могут быть получены путем отнесения размерных величин к их масштабам, то как сами теперь уже *безразмерные дифференциальные уравнения*, так и соответствующие им *безразмерные граничные, начальные и другие условия единственности, станут одинаковыми для обоих сравниваемых явлений.*

Все, что утверждалось сейчас для подобных явлений в обычном употреблении термина «подобие», полностью относится и к случаю *аффинного подобия*, с той лишь разницей, что при аффинном подобии для разных координат должны быть выбраны разные масштабы длин: X, Y, Z; точно также и для разных проекций векторов a_x, a_y, a_z различные масштабы, скажем, A_x, A_y, A_z и т. д. Напомним, что как раз такое применение метода аффинного подобия имело уже место в гл. VIII и IX настоящего курса.

Подобие обтеканий тел идеальной *несжимаемой* жидкостью (или, что то же, идеальным газом при *малых* числах Маха) обеспечивалось простым геометрическим подобием обтекаемых тел и их подобным расположением относительно набегающих на них потоков в сравниваемых течениях (равенством углов атаки и других углов, определяющих положение тела относительно набегающего на него однородного потока).

Так, плоские обтекания двух круглых цилиндров идеальной несжимаемой жидкостью при условии $\Gamma/(V_\infty a) = \text{idem}$ (см. § 50) были подобны между собой независимо от того, каковы радиусы цилиндров, скорости набегающих потоков и плотности жидкостей в сравниваемых течениях. При этом в сходственных точках потоков были одинаковы и коэффициенты давлений c_p, а следовательно, в конечном счете и коэффициенты подъемной силы c_y.

Для двух *геометрически подобных крыловых профилей* гидродинамическое подобие потребовало бы еще *одинаковости углов атаки* и, кроме того, *выполнения постулата* Жуковского — Чаплыгина о конечности скорости на задней острой кромке. Пространственные обтекания геометрически подобных тел, подобно размещенных в однородных потоках идеальных несжимаемых жидкостей с различными скоростями, подобны.

Перейдем к рассмотрению условий подобия двух *изотермических потоков ньютоновских вязких несжимаемых жидкостей* с различными, но постоянными плотностями и вязкостями. Следуя только что указанно-

му приему сравнения безразмерных дифференциальных уравнений и соответствующих им граничных и начальных условий, приведем уравнения Навье — Стокса (29) к безразмерному виду, выбрав в качестве масштабов времени, длин (в частности, координат), скоростей, давлений и объемных сил соответственно некоторые характерные для потока постоянные величины: T, L, V, P, F.

Обозначая штрихом безразмерные значения времени, координат, скоростей, давлений и сил, положим (здесь удобнее пользоваться буквенной индексацией: x, y, z, u, v, w)

$$t = Tt'; \quad x = Lx', \quad y = Ly', \quad z = Lz';$$

$$u = Vu', \quad v = Vv', \quad w = Vw'; \quad p = Pp', \tag{44}$$

$$F_x = FF'_x, \quad F_y = FF'_y, \quad F_z = FF'_z.$$

Подставляя эти значения $t, x, \ldots, u, \ldots, p, F_x, \ldots$ в уравнения (29), получим

$$\frac{V}{T}\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{V^2}{L}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right) = FF'_x - \frac{P}{\rho L}\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu V}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right),$$

$$\frac{V}{T}\frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{V^2}{L}\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right) = FF'_y - \frac{P}{\rho L}\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{\nu V}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}\right), \tag{45}$$

$$\frac{V}{T}\frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{V^2}{L}\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right) = FF'_z - \frac{P}{\rho L}\frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{\nu V}{L^2}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}\right),$$

$$\frac{V}{L}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) = 0,$$

после чего, сокращая обе части первых трех уравнений на соответствующим образом выбранную комбинацию масштабов T, L, V, P и физических констант, уменьшим на единицу число составленных из них комплексов в уравнениях. Так, предполагая в общем случае, что конвективные ускорения не опущены, разделим обе части первых трех уравнений на V^2/L; будем иметь

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{1}{\mathrm{Fr}}F'_x - \mathrm{Eu}\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right),$$

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial v'}{\partial t'} + u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'} = \frac{1}{\mathrm{Fr}}F'_y - \mathrm{Eu}\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}\right), \tag{46}$$

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial w'}{\partial t'} + u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{1}{\mathrm{Fr}}F'_z - \mathrm{Eu}\frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}\right),$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0$$

В уравнения (46) вошли следующие безразмерные одночленные комплексы, называемые «числами подобия»:

$$\frac{L}{VT}=\mathrm{Sh}\text{ — число Струхала, }\frac{P}{\rho V^2}=\mathrm{Eu}\text{ — число Эйлера,}$$
$$\frac{VL}{\nu}=\mathrm{Re}\text{ — число Рейнольдса, }\frac{V^2}{FL}=\mathrm{Fr}\text{ — число Фруда.} \tag{47}$$

Уравнения (46) представляют собой безразмерные уравнения Навье — Стокса динамики вязкой несжимаемой жидкости. К этим уравнениям присоединяются соответствующие данной конкретной задаче безразмерные начальные и граничные условия, а в ряде случаев и другие условия единственности решений уравнений Навье — Стокса.

Предположим, что два в общем случае нестационарных потока ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости подобны между собой. Тогда, по предыдущему, безразмерные начальные, граничные и другие условия единственности, так же как и сами безразмерные уравнения Навье — Стокса (46), должны быть одинаковыми для обоих сравниваемых между собою движений. Но, по предположению о существовании подобия, все безразмерные, обозначенные штрихами переменные в сходственных точках потоков одинаковы, следовательно, для совпадения дифференциальных уравнений остается потребовать, чтобы были одинаковыми числа подобия, т. е.

$$\mathrm{Sh}=\mathrm{idem},\quad \mathrm{Eu}=\mathrm{idem},\quad \mathrm{Fr}=\mathrm{idem},\quad \mathrm{Re}=\mathrm{idem}. \tag{48}$$

Перечисленные условия подобия, включая последнюю систему равенств, являются *необходимыми* условиями подобия. Трудности стоят на пути выяснения *достаточных* условий подобия. Эти трудности связаны с тем обстоятельством, что для строгого установления достаточных условий подобия должна быть в широком аспекте граничных условий доказана теорема о существовании и единственности решений уравнения Навье — Стокса[1]). Большое разнообразие неизбежно встающих перед практикой задач (наряду с обычными задачами обтекания тел и протекания жидкости сквозь трубы и каналы существуют еще задачи свободной конвекции, распространения струй, образования следов за телами, развития пограничных слоев и т. д.) не позволяет считать вопрос об установлении достаточных условий подобия движений вязкой несжимаемой жидкости исчерпанным.

Условимся среди чисел подобия (47) особо выделять составленные только из тех масштабов сравниваемых потоков и физических констант среды, которые содержатся в постановке задачи об определении движения, т. е. *наперед заданы*. Одинаковость таких чисел подобия обусловливает подобие двух сравниваемых течений, и поэтому сами числа могут быть названы *критериями* подобия. Критериев подобия меньше, чем чисел подобия для соответствующего класса течений, так как не все масштабные величины, введенные при составлении безразмерных уравнений и граничных и начальных условий, на самом деле могут быть заданы наперед. Значения некоторых из них определяются только после того, как будет получено единственное решение данной конкретной задачи. Отсюда следует, что число *достаточных* условий, представленных системой равенств вида (48), будет меньше общего числа *необходимых*

[1]) Для ознакомления с этим вопросом рекомендуем монографию: Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Современные проблемы математики.— М. Физматгиз, 1961 Доказательства существования и единственности решений уравнений Навье — Стокса для отдельных задач можно найти в монографии: Гольдштик М. А Вихревые потоки.— Новосибирск: Наука, Сибирское отд-ние, 1981.

условий, а оставшиеся после выделения *критериев* подобия *числа* подобия окажутся *выраженными через критерии подобия*. Этот результат будет вскоре (§ 88) подтвержден теорией размерностей.

Проиллюстрируем высказанные положения несколькими примерами; многие другие примеры будут сопутствовать изложению в дальнейшем.

Поместим в однородный поток вязкой несжимаемой жидкости с кинематическим коэффициентом вязкости ν, плотностью ρ и постоянной скоростью V_∞ цилиндр диаметра d и поставим задачу об определении сопротивления цилиндра набегающему на него потоку в предположении, что движение стационарно, а объемных сил нет. Тогда среди необходимых условий подобия (48) остаются лишь два: $\mathrm{Eu}=\mathrm{idem}$ и $\mathrm{Re}=\mathrm{idem}$. Число Рейнольдса, в данном случае равное $\mathrm{Re}=V_\infty d/\nu$, является критерием подобия, так как содержит заданные наперед масштабы: скоростей — V_∞, длин — d и также заданную физическую константу ν. Сила сопротивления — обозначим ее величину через W — может быть определена только после решения задачи обтекания, так как она вычисляется суммированием по поверхности цилиндра сил *давления* потока на поверхность и сил *трения* жидкости о поверхность цилиндра, которые в свою очередь зависят от решения задачи обтекания. Число Эйлера, содержащее в своем составе масштаб неизвестного наперед давления, не может при этом быть *критерием* подобия, а будет функцией критерия — числа Рейнольдса.

Коэффициент сопротивления c_w единицы длины цилиндра, определяемый отношением (σ — площадь миделевого сечения цилиндра)

$$c_w = \frac{W}{(1/2)\rho V_\infty^2 \sigma},$$

играет роль числа Эйлера (так как W/σ имеет размерность перепада давления) и зависит от числа Рейнольдса. Эксперимент полностью оправдывает это заключение. Результаты опытов, проведенных над цилиндрами различных диаметров, помещенных в разные по скоростям и физическим свойствам жидкости потоки, вполне удовлетворительно легли на одну и ту же кривую зависимости c_w (Re), показанную на рис. 148.

Если детальнее присмотреться к экспериментальной картине обтекания цилиндра, то можно заметить, что оно не является ***стационарным***: в кормовой части цилиндра то с одной, то с другой стороны его поверхности срываются вихреобразные массы подторможенной цилиндром жидкости, создавая в потоке колебания с частотой, зависящей от скорости потока, его вязкости и диаметра цилиндра, точнее, от рейнольдсова числа.

Такие колебания цилиндра в потоке постоянной скорости, происходящие за счет внутренних явлений в пограничном слое на поверхности цилиндра, приводящих к только что отмеченным отрывам масс жидкости с поверхности цилиндра, относятся к числу *автоколебаний*. Их можно наблюдать на всевозможных плохо обтекаемых телах. Возникая в жидкости, эти периодические процессы вызывают вибрации тел, погруженных в жидкость. Известны автоколебания фабричных труб и высотных зданий во время ветра, причем частота этих колебаний не связана с частотой порывов ветра, как это имело бы место при вынужденных колебаниях. Аналогичные автоколебания совершают перископ подводной лодки, трубки конденсатора паровой турбины и др.

Чешский физик Струхал [1]) еще в конце девятнадцатого века изучал колебания струн в однородном потоке воздуха (подобные вибрациям те-

[1]) Strouhal. Ann. der Phys. u. Chem. (Wiedemann's Ann.), 1878, Bd. 5, S. 216–251.

леграфных проводов в ветреную погоду) и по высоте звука определял частоту колебаний $N=1/T$ (T — период колебаний). Он первый заметил, что безразмерная одночленная комбинация частоты колебаний N, диаметра струны d и скорости набегающего потока V_∞, ныне называемая *числом Струхала*

$$\mathrm{Sh}=\frac{Nd}{V_\infty},$$

сохраняет определенное постоянное значение, близкое к 0,2.

Рассмотрим это явление с точки зрения метода подобия. Отвлекаясь от действия объемных сил, получим три числа подобия: Sh, Eu (или c_w) и Re. Среди них только число Re состоит из заданных наперед величин V_∞, d и ν и, следовательно, представляет *критерий* подобия автоколебательных движений вязкой несжимаемой жидкости, возникающих при

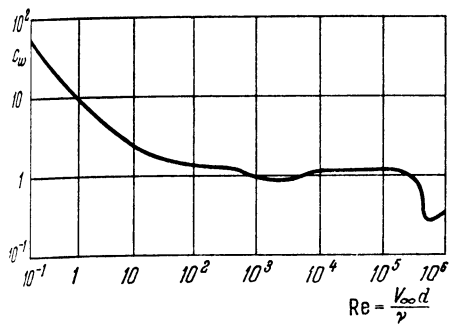


Рис. 148

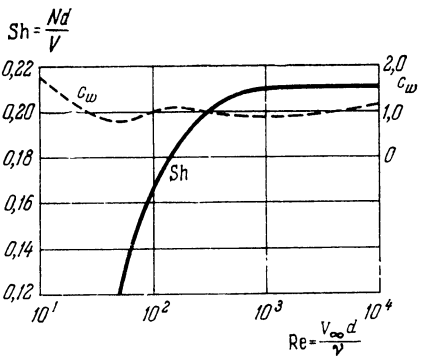


Рис. 149

обтекании цилиндра. Числа подобия Sh и c_w содержат неизвестные наперед частоту автоколебаний $N=1/T$ и сопротивление W и являются поэтому функциями критерия подобия Re. Опыты подтверждают это положение. На рис. 149 приводятся кривые Sh (Re) и c_w (Re), составленные по опытам А. Рошко[1]). Опыты над цилиндрами проводились в широком диапазоне диаметров от 0,235 до 6,35 мм. Судя по кривой, при больших значениях Re устанавливается значение Sh = 0,21. Это хорошо оправдывается при не слишком больших значениях чисел Re, однако известно, что при достижении числом Рейнольдса значений порядка $5\cdot10^5$ сопротивление резко падает (см. рис. 148), изменяется характер обтекания цилиндра и стремление числа Струхала к постоянному значению 0,21 нарушается. Этому вопросу будет уделено внимание в гл. XIII при рассмотрении явления «кризиса обтекания» круглого цилиндра.

Изменим теперь постановку задачи. Поместив цилиндр в однородный поток постоянной скорости V_∞, приведем его в заданный по желанию колебательный режим с частотой N. В этом случае число Струхала Sh станет наряду с числом Рейнольдса Re *критерием подобия*, а коэффициент сопротивления c_w будет уже функцией двух критериев подобия Sh и Re

$$c_w=f(\mathrm{Sh},\ \mathrm{Re}).$$

[1]) Rochko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets.— NACA Rep., 1954, v. 1191.

Любопытный пример различия в выборе *критериев* подобия среди *чисел* подобия относится к разбираемому далее в § 89 случаю движения вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе кругового профиля.

Жидкость плотности ρ и с коэффициентом вязкости μ течет сквозь горизонтальную цилиндрическую круглую трубу диаметра d под действием постоянного перепада давлений, на участке трубы l равного Δp; при этом сквозь трубу проходит также постоянный секундный объемный расход Q.

Выясним, какие указания может дать метод подобия относительно общего вида зависимости между перепадом давлений в трубе Δp (обеспечиваемым работой насоса или напором столба жидкости между резервуаром и трубой) и секундным объемным расходом жидкости сквозь трубу Q.

Возможны две постановки этой задачи:

1) задан потребный расход Q, надо рассчитать необходимый для его получения перепад давления Δp на заданном участке длины трубы l;

2) задан перепад давления Δp на участке трубы длины l, требуется определить секундный объемный расход жидкости сквозь трубу Q.

Отвлечемся от действия объемных сил, в данном случае от тяжести, так как труба расположена горизонтально, и примем во внимание стационарность задачи. Тогда среди чисел подобия останутся лишь $\mathrm{Eu}=P/(\rho V^2)$ и $\mathrm{Re}=Vd/\nu$. Примем за масштаб давлений P перепад давлений на характерной для данной трубы длине — ее диаметре d; этот перепад можно выразить через заданный перепад Δp на какой-то длине l по формуле

$$P=\frac{\Delta p}{l}d.$$

За масштаб скоростей выберем *среднюю по сечению трубы скорость* течения жидкости $V_{\text{ср}}$, определенную очевидным отношением

$$V_{\text{ср}}=\frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d^2}.$$

При таком выборе масштабов числа подобия будут

$$\mathrm{Eu}_Q=\frac{\Delta p}{\rho V_{\text{ср}}^2}\frac{d}{l},\quad \mathrm{Re}_Q=\frac{V_{\text{ср}}d}{\nu}.$$

В *первой* постановке (известно Q, подлежит определению Δp на заданном участке трубы длины l) *критерием* подобия будет рейнольдсово число Re_Q, а число Эйлера Eu_Q явится функцией его; тогда, вводя, как это обычно делают, коэффициент сопротивления трубы λ, согласно формуле сопротивления ($\mathrm{Eu}_Q=\lambda/2$)

$$\Delta p=\lambda\frac{l}{d}\frac{\rho V_{\text{ср}}^2}{2},$$

будем иметь

$$\lambda=f(\mathrm{Re}_Q).$$

Опыты многих десятков лет полностью подтвердили правильность этого соотношения для течения самых различных жидкостей в гладких трубах разного диаметра как при ламинарном, так и турбулентном режимах течения, в широком диапазоне секундных объемных расходов, или, что то же, средних по сечению трубы скоростей. Вопрос о виде

функциональной зависимости $f(\mathrm{Re}_Q)$ будет в дальнейшем детально рассмотрен.

Во *второй* постановке задается перепад $P=\frac{\Delta p}{l}d$, но остается неизвестным секундный объемный расход, т. е. средняя по сечению трубы скорость $V_{ср}$. В этом случае среди чисел подобия Eu и Re *нет ни одного критерия*, так как обе эти величины содержат в своем составе наперед неизвестную величину $V_{ср}$. В этом случае легко построить *критерий*, содержащий заданную величину $P=\frac{\Delta p}{l}d$ и не содержащий $V_{ср}=Q/(\pi d^2/4)$; чтобы исключить из числа Eu величину $V_{ср}^2$, составим безразмерный комплекс

$$\mathrm{Eu}\cdot\mathrm{Re}^2=\frac{\rho\Delta p d^3}{\mu^2 l}=\frac{\rho d^2\Delta p}{\mu^2}\frac{d}{l}.$$

Этот комплекс и будет во второй постановке задачи о подобии играть роль *критерия* подобия — числа Рейнольдса Re_P, а число Рейнольдса $\mathrm{Re}_Q=V_{ср}d/\nu$ останется просто числом подобия. Будем иметь в этом случае [1])

$$\mathrm{Re}_Q=\frac{V_{ср}d}{\nu}=\frac{4Q}{\pi\nu d}=f_1\left(\frac{\rho d^2\Delta p}{\mu^2}\frac{d}{l}\right), \tag{49}$$

где f_1 — символ новой функциональной зависимости. Если условиться в обеих сравниваемых системах под величиной Δp понимать перепад давления на сходственном участке $l=d$ или кратном d, то предыдущая формула может быть переписана еще так:

$$Q=\frac{\pi\nu d}{4}f_1\left[\frac{\Delta p}{\rho}\left(\frac{d}{\nu}\right)^2\right].$$

В качестве еще одного примера рассмотрим случай *нестационарного* движения вязкой несжимаемой жидкости, физические свойства которой характеризуются константами ρ и μ, по бесконечно длинной круглой цилиндрической трубе диаметра d под действием перепада давления Δp, представляющего некоторую гармоническую функцию с периодом T (или частотой $N=1/T$) и амплитудой P. В этом случае (опускаем действие объемных сил) никакой характерной скорости не задается и, таким образом, ни одно из чисел подобия Sh, Eu и Re не может быть критерием. Как и в предыдущем случае, поскольку задается перепад давления (за масштаб давлений можно принять, например, амплитуду колебаний давления P) и частота N нестационарного движения (для простоты рассмотрим только установившиеся вынужденные колебания жидкости), то *критерии* подобия составим, комбинируя числа Sh и Eu с числом Рейнольдса Re так, чтобы скорость V исключилась. Будем иметь следующие два *критерия подобия*:

$$\mathrm{Eu}\cdot\mathrm{Re}^2=\frac{P}{\rho V^2}\left(\frac{Vd}{\nu}\right)^2=\frac{P}{\rho}\left(\frac{d}{\nu}\right)^2,$$

$$\mathrm{Sh}\cdot\mathrm{Re}=\frac{Nd}{V}\cdot\frac{Vd}{\nu}=\frac{Nd^2}{\nu}.$$

Число Рейнольдса $\mathrm{Re}=Vd/\nu$ *не будет* в разбираемом случае *критерием* подобия, а определится как функция только что указанных двух критериев подобия

$$\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=f_2\left[\frac{Nd^2}{\nu},\frac{P}{\rho}\left(\frac{d}{\nu}\right)^2\right].$$

[1]) Обозначения Re_Q и Re_P заимствованы из статьи: Рождественский Б. Л., Симакин И. Н. Моделирование турбулентных течений в плоском канале.— Журнал вычисл. мат. и мат. физики, 1985, № 1, с. 97, 98.

В заключение, не останавливаясь на подробностях, заметим, что число Фруда, в частном случае силы веса ($F=g$), равное $\mathrm{Fr}=V^2/(gl)$, в большинстве практических задач движения корабля, так же как и число Рейнольдса, будет являться критерием подобия. Если при испытании моделей кораблей в бассейнах пользоваться в качестве жидкости водой, то осуществить строгое моделирование, требующее одинаковости на модели и в натуре критериев подобия Fr и Re, оказывается невозможным. Действительно, условия

$$\frac{V^2}{gl}=\text{idem},\quad \frac{Vl}{\nu}=\text{idem},\ \text{при}\ g=\text{idem}\ \text{и}\ \nu=\text{idem}$$

приводят к двум следующим:

$$\frac{V^2}{l}=\text{idem},\quad Vl=\text{idem},$$

т. е. V=idem, l=idem, а это означает, что модель и натура должны совпадать по скорости движения корабля и по его размерам; таким образом, моделирование оказывается невозможным. В практике судостроения моделирование ведут раздельно: только по критерию Рейнольдса, когда преимущественное значение имеет сопротивление трения воды об обшивку корабля и сопротивление давлений, обусловленное формой корабля, независимо от его положения по отношению к свободной поверхности, где возникают волны и создается волновое сопротивление, и только по критерию Фруда, если, наоборот, главное значение приобретает волновое сопротивление.

Возможны случаи, когда в изучаемом явлении никакая характерная скорость движения жидкости указана быть не может. В этом случае, как и в предыдущих примерах, можно освободиться от скорости, составляя безразмерный комплекс

$$\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Re}^2}=\frac{V^2}{gl}\,\frac{\nu^2}{V^2l^2}=\frac{\nu^2}{gl^3}.$$

Этот комплекс играет роль критерия подобия в вопросах свободной конвекции жидкости; обратная величина носит наименование *критерия Галилея*. В настоящем параграфе был намеренно рассмотрен лишь сравнительно узкий класс течений: жидкость считалась несжимаемой, поток изотермическим и физически однородным.

Тот же метод будет в дальнейшем изложении применен к более широкому кругу явлений (неизотермические движения жидкости при наличии примесей, движение газа с большими до- и сверхзвуковыми скоростями). Во всех этих случаях в основу всегда будет положена математическая модель явления — дифференциальные уравнения динамики и термодинамики с относящимися к ним начальными и граничными условиями, а иногда еще дополнительными условиями, без которых задача не может быть строго поставленной. Таковы, например, условия *нетривиальности* решений, с которыми придется в дальнейшем встретиться в задачах о развитии струй, следов и других «свободных» от влияния твердых стенок движений.

§ 88. Основы теории размерностей. П-теорема

Параллельно с методом подобия широкое применение на практике получил *метод размерностей*, обычно излагаемый в тех же руководствах, что и метод подобия [1]).

[1]) Литература по теории подобия обширна. Укажем лишь некоторые источники, достаточно широко трактующие этот вопрос: Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1981; Гухман А. А. Введение в теорию подобия.— М.: Высшая школа, 1973; Гухман А. А. Применение теории подобия к исследованию про-

Принципиальное отличие теории размерностей от теории подобия заключается в том, что она не требует задания математической модели явления, а довольствуется установлением перечня основных физических величин, определяющих явление, и рассмотрением их размерностей.

Теория размерностей незаменима в тех случаях, когда математическое моделирование, т. е. составление основных уравнений, еще не проведено. В этих особо сложных случаях теория размерностей позволяет предсказать структуру обобщенных (безразмерных) эмпирических формул, которые с успехом для практики заменяют до поры до времени не установленные теоретические закономерности.

В рассматриваемой в настоящем учебном руководстве сравнительно узкой области физики — механике жидкости и газа — обе теории: подобия и размерностей одинаково удовлетворяют практику, а их применения могут проводиться параллельно.

Так, в теории подобия, изложенной в предыдущем параграфе, была использована система уравнений Навье — Стокса (45), содержащая в качестве коэффициентов постоянные размерные комплексы масштабов: V/T, V^2/L и т. д. Эта система уравнений после деления обеих частей на комплекс V^2/L перешла в систему безразмерных уравнений (46), которую в смысле, разъясненном в § 61, можно условно представить функциональной зависимостью

$$G(\mathrm{Sh}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Eu}, \mathrm{Re}) = 0.$$

Это равенство, выведенное из соображений теории подобия для частного случая нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости при наличии объемных сил, может служить примером общего соотношения, доказываемого в теории размерностей и составляющего содержание так называемой П-теоремы.

Переходя к изложению основ теории размерностей, отметим прежде всего, что вместо характерного для теории подобия выбора масштабов физических величин, так сказать, по *принадлежности*, т. е. *скорости* для скоростей, *давления* для давлений и т. д., в теории размерностей масштабами служат принятые в исследовании *единицы измерений*, комбинации которых определяют размерности входящих в рассуждение физических — как *переменных*, так и *постоянных* — величин. Так, в чисто динамических, не связанных с термодинамикой или другими разделами физики, явлениях основными масштабами будут: масса, длина, время, что соответствует системе MLT; в СИ — килограмм, метр, секунда.

Имея в виду в излагаемом далее рассуждении обратиться к случаю наиболее общего физического явления, обозначим через x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) численные значения входящих в постановку задачи физических величин, через $[x_i]$ — их размерности, а через M_j ($j=1, 2, \ldots, m$) — принятые *единицы измерений*. Тогда размерность x_i представится в виде степенного одночлена

$$[x_i] = M_1^{a_{i1}} M_2^{a_{i2}} \ldots M_m^{a_{im}}, \tag{50}$$

где показатели степеней a_{ij} называют размерностями величин x_i по отношению к выбранным основным единицам M_j ($j=1, 2, \ldots, m$).

Следуя Гёртлеру[1]), введем матрицу

$$A = \|a_{ij}\| \quad (i=1, 2, \ldots, n; \quad j=1, 2, \ldots, m; \quad m \leqslant n),$$

цессов тепломассопереноса.— М.: Высшая школа, 1974; Овсянников Л. В. Введение в механику сплошных сред. Ч. II.— Новосибирский Гос. ун-т, 1976; Лойцянский Л. Г. Методы подобия и размерностей в механике жидкости и газа, Сб. метод. статей по теорет. механике, вып. 11.— М.: Высшая школа, 1981.

[1]) Görtler H. Zur Geschichte des Π-Theorems.— Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1975, Bd. 55, S. 3—8.

называемую *матрицей размерностей*, а ее *ранг*, равный максимальному порядку не равного нулю минора, обозначим буквой r. Рассмотрим совокупность степенных одночленов

$$\Pi_s = x_1^{k_{1s}} x_2^{k_{2s}} \dots x_n^{k_{ns}} \quad (s = 1, 2, \dots, p), \tag{51}$$

размерность которых в системе единиц M_j $(j=1, 2, \dots, m)$ определится в результате подстановки в (51) размерностей x_i по (50) и будет равна $(s=1, 2, \dots, p)$

$$[\Pi_s] = M_1^{a_{i1}k_{is}} M_2^{a_{i2}k_{is}} \dots M_m^{a_{im}k_{is}}, \tag{52}$$

где в показателях степеней подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу i от $i=1$ до $i=n$. Если все показатели степеней в (52) окажутся порознь равными нулю, т. е. k_{is} будут удовлетворять однородной системе линейных алгебраических уравнений (суммирование по i!)

$$a_{i1}k_{is}=0, \quad a_{i2}k_{is}=0, \dots, \quad a_{im}k_{is}=0, \tag{53}$$

то все Π_s $(s=1, 2, \dots, p)$ станут безразмерными. Тогда, по терминологии теории подобия, Π_s смогут выражать числа подобия, но при условии, что все Π_s являются независимыми, т. е. ни одно из них не может быть выражено в виде произведения других.

Если система степенных одночленов $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p$ удовлетворяет условиям независимости и безразмерности и, кроме того, такова, что любая степенная одночленная зависимость Π от $x_1, x_2, \dots, x_n$ может быть выражена степенным одночленом, составленным из Π_s, то такая система Π_s $(s=1, 2, \dots, p)$ образует *фундаментальную* систему безразмерных степенных одночленов.

Легко убедиться в том, что число p *фундаментальных* комплексов Π_s $(s=1, 2, \dots, p)$ равно *разности общего числа рассматриваемых физических величин n и ранга r матрицы размерностей A*, т. е.

$$p=n-r. \tag{54}$$

Действительно, система линейных алгебраических уравнений (53) при ранге матрицы коэффициентов A, равном $r<m$, может быть заменена системой r *неоднородных* уравнений с определителем, не равным нулю. Уравнения эти будут содержать в качестве неизвестных величины в левой части $k_{1s}, k_{2s}, \dots, k_{rs}$ числом r, а в правой — $k_{r+1,s}k_{r+2,s}, \dots, k_{ns}$ числом $n-r$. Эти последние остаются *произвольными* и образуют совокупность показателей степени у *фундаментальных* комплексов $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p$, причем, по только что доказанному, $p=n-r$.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *действительных* переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, определенная в некоторой области D значений этих переменных, называется *размерноодноролной* функцией этих переменных, если существует такая совокупность действительных чисел b_k $(k=1, 2, \dots, m)$, что имеет место равенство

$$f(\alpha_1^{a_{11}}\alpha_2^{a_{12}} \dots \alpha_m^{a_{1m}}x_1, \dots, \alpha_1^{a_{n1}} \dots \alpha_m^{a_{nm}}x_n) = \alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2} \dots \alpha_m^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

справедливое для всех α_k $(k=1, 2, \dots, m)$ и x_i $(i=1, 2, \dots, n)$ в области D.

Переходя от системы единиц M_j $(j=1, 2, \dots, m)$ к единицам, в α_j раз *меньшим*, тем самым заменим систему переменных x_i на систему переменных

$$\bar{x}_i = \alpha_1^{a_{i1}} \dots \alpha_m^{a_{im}} x_i.$$

Если функция

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

выражает некоторую *физическую* связь между переменными x_i, то она должна обладать свойством *размерооднородных функций*, так что величина y имеет размерность

$$[y] = M_1^{b_1} M_2^{b_2} \ldots M_m^{b_m}.$$

Для любой, не обращающейся в нуль размерооднородной функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ существует по крайней мере один степенной одночлен этих переменных

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

такой, что

$$[x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}] = [y],$$

а следовательно, размерность отношения

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}}$$

будет *нулевой*. Отсюда следует основная теорема теории размерностей, именуемая П-*теоремой* и приписываемая обычно Бекингему[1]). Как показало исследование Гёртлера, на статью которого была ранее сделана ссылка, теорема эта за четыре года до появления публикации Бекингема была доказана преподавателем С.-Петербургского политехнического института А. Федерманом[2]), работа которого не получила широкой известности.

П-теорема формулируется так: *если* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *численные значения* n *физических величин,* $A=\|a_{ij}\|$ $(i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m)$ — *матрица их размерностей по отношению к единицам измерения* $M_1, M_2, \ldots, M_m$, f — *произвольная размерооднородная функция переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *а* $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$ $(p=n-r,\ r$ — *ранг матрицы* $A)$ — *фундаментальная система степенных одночленов переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *то при произвольных действительных числах* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *имеет место равенство*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} G(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p). \qquad (55)$$

Если равенство $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ выражает некоторую физическую связь между переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то П-теорема утверждает, что эта связь может быть выражена в форме зависимости

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p)=0 \quad (p=n-r) \qquad (56)$$

между фундаментальными безразмерными степенными одночленами в физических переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Таким образом, не располагая математическими моделями явления, можно из соображений о размерностях физических величин установить

---

[1]) Buckingham E. On physically similar systems; illustration of the use of dimensional equations.— Phys. Rev., 1914, v. 4, p. 345—376 и того же автора: Model experiments and the forms of empirical equations.— Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 1915, v. 37, p. 263—288. См. также: Бриджмен П. В. Анализ размерностей.— М.: ОНТИ, 1934.

[2]) Федерман А. Об общих методах интегрирования уравнений в частных производных первого порядка.— Изв. С.-Петербургского политехнического института, 1911, т. 16, с. 97—154.

количество и состав *чисел подобия*, которыми являются фундаментальные комплексы $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p$.

Проиллюстрируем это на примере несжимаемой вязкой тяжелой жидкости. Введем основные меры — единицы измерения — всех переменных и постоянных физических величин, определяющих движение жидкости, в форме *матрицы* их размерностей. Замечая, что

$$[x, y, z]=L, \quad [t]=T, \quad [u, v, w]=LT^{-1}, \quad [g]=LT^{-2},$$
$$[p]=ML^{-1}T^{-2}, \quad [\rho]=ML^{-3}, \quad [\mu]=ML^{-1}T^{-1},$$

будем иметь следующую *матрицу размерностей* (по строкам — размерности величин, по столбцам — единицы измерения):

	M	L	T
x, y, z	0	1	0
t	0	0	1
u, v, w	0	1	−1
p	1	−1	−2
g	0	1	−2
ρ	1	−3	0
μ	1	−1	−1

Ранг матрицы $r=3$, число размерных, определяющих движение величин $n=7$. Фундаментальная система параметров Π содержит $p=n-r=7-3=4$ параметра. Это ранее введенные *числа подобия* Sh, Fr, Eu и Re.

Как видно из предыдущего, теория размерностей, так же как и теория подобия, устанавливает наличие неявных связей (56) между параметрами — числами подобия, но ничего не говорит о том, какие из чисел подобия являются *критериями* подобия и входят в *достаточные* условия подобия. Решение последнего вопроса, как мы видели в предыдущем параграфе, зависит от постановки задачи, включающей математическую модель (уравнения и краевые — начальные и граничные условия), как и в теории подобия, но менее определенной при использовании теории размерностей.

§ 89. Примеры решения уравнений Навье — Стокса. Простейшие линейные задачи

Остановимся сначала на сравнительно легко решаемых *линейных* задачах. Такие задачи либо точно следуют из самой постановки (установившееся движение с прямолинейными траекториями, когда нелинейные члены отсутствуют), либо получаются в результате приближенной *линеаризации* уравнений Навье — Стокса путем отбрасывания *малых* конвективных ускорений, что соответствует малым рейнольдсовым числам (так называемые «медленные» или «ползучие» движения).

Одним из наиболее простых случаев движения вязкой несжимаемой жидкости является так называемое *ламинарное* (слоистое) движение по цилиндрической трубе произвольного сечения, при котором линии тока — прямые линии, параллельные оси трубы.

Как показывают опыты, такое движение осуществляется в цилиндрических трубах с различными формами сечений, если только число Рейнольдса не превосходит некоторого определенного *критического* своего значения, после чего движение перестает быть ламинарным, частицы жидкости приобретают сложные криволинейные траектории и приводимое в настоящем параграфе решение теряет свою силу. Практически излагаемые сейчас результаты имеют значение лишь при движениях с очень малыми скоростями или в тонких капиллярах, или, наконец, при

движении очень вязких жидкостей. Подробнее об условиях существования ламинарного режима течения и явлений перехода его в более сложный, *турбулентный* режим будет сказано в начале гл. XIII.

Направим (рис. 150) ось Oz по оси трубы и будем предполагать трубу бесконечно длинной, а поток — направленным вдоль оси трубы, так что из трех компонент скорости u, v, w остается лишь одна w, а остальные две равны нулю. Отвлекаясь от действия объемных сил и считая поток *изотермическим*, а следовательно, плотность ρ и коэффициент вязкости μ постоянными, будем иметь, согласно уравнениям Навье — Стокса (29), систему уравнений

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Из последнего уравнения этой системы следует, что w представляет собой функцию только x и y, а из первых двух — что p — функция только z. Иными словами, если провести нормальные к оси трубы сечения, то во всех таких сечениях распределения скоростей одинаковы, а давление меняется только от сечения к сечению, сохраняя в данном сечении одинаковое значение. Такие движения называют *установившимися*.

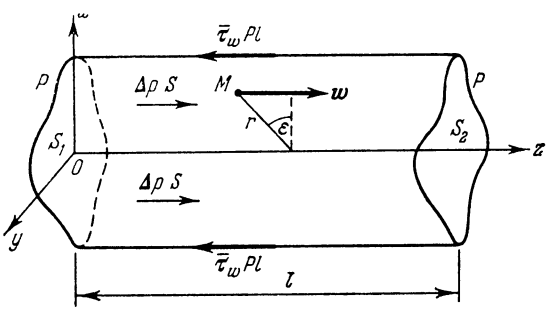


Рис. 150

Предыдущая система равенств сводится к одному

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{dp}{dz}. \qquad (57)$$

Левая часть равенства (57) представляет собой функцию только от x и y, правая — только от z; при независимости координат друг от друга это может быть лишь в случае *постоянства* левой и правой частей равенства по отдельности.

Введем удобное для дальнейшего обозначение

$$\frac{dp}{dz} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l}, \qquad (58)$$

где Δp — постоянное вдоль трубы *падение* давления на произвольно выбранном участке длины l.

При *установившемся* движении вязкой жидкости по цилиндрической трубе перепад давления Δp, будучи умножен на площадь сечения $S_1 = S_2 = S$ (рис. 150), играет роль *движущей* силы $\Delta p \cdot S$, уравновешиваемой силами сопротивлений трения жидкости о поверхность трубы с равнодействующей, равной $\int \tau_w ds \cdot l$, где $\tau_w(s)$ — переменное по периметру напряжение трения.

Отсюда непосредственно следует, что давление в цилиндрической трубе должно уменьшаться вниз по течению, а следовательно, $\Delta p > 0$. Для трубы переменного сечения, где движение может быть как ускоренным, так и замедленным, такое заключение сделать нельзя.

В конкретных расчетах перепад давления Δp на участке трубы длины l либо задается непосредственно, либо может быть выражен через другие заданные величины: секундный расход жидкости сквозь трубу, среднюю по сечению или максимальную скорости.

Уравнение (57) сводится к линейному уравнению в частных производных второго порядка в плоскости Oxy (уравнению Пуассона)

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}, \tag{59}$$

которое должно быть решено при граничном условии обращения в нуль скорости w на контуре C нормального к оси цилиндра сечения и при дополнительном условии, определяющем либо заданный перепад давления на произвольно выбранном участке трубы, либо секундный объемный расход сквозь сечение трубы (или вычисляемую по нему среднюю скорость), либо, наконец, максимальную скорость на оси трубы.

Поставленная задача с математической стороны аналогична известной задаче теории упругости о *кручении призматического стержня*[1]).

В качестве первого, наиболе простого примера интегрирования уравнения (59) разберем *плоское ламинарное движение* вязкой несжимаемой жидкости между двумя плоскостями $y=\pm h$, которое можно представить себе как предельный случай течения по призматической трубе прямоугольного сечения, если одну сторону прямоугольника сохранять равной $2h$, а другую устремить к бесконечности. В этом смысле рассматриваемое движение может быть названо течением жидкости сквозь «плоскую» трубу. В данном случае координата x исчезает, и уравнение (59) сводится к *обыкновенному* дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}, \tag{60}$$

и его интеграл при граничных условиях $w=0$ при $y=\pm h$ будет

$$w = \frac{\Delta p \cdot h^2}{2\mu l}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]. \tag{61}$$

Распределение скоростей представляется *параболой* второго порядка. Максимальная скорость $w_{\max}$ достигается в плоскости симметрии потока ($y=0$) и равна

$$w_{\max} = \frac{1}{2}\frac{\Delta p \cdot h^2}{\mu l}. \tag{62}$$

Вычисляя секундный объемный расход, отнесенный к единице длины в направлении Ox, перпендикулярном к плоскости, параллельно которой происходит движение жидкости, найдем

$$Q = \int_{-h}^{h} w\, dy = \frac{2}{3}\frac{\Delta p \cdot h^3}{\mu l}, \tag{63}$$

откуда определится *средняя* по сечению скорость

$$w_{\text{ср}} = \frac{Q}{2h} = \frac{1}{3}\frac{\Delta p \cdot h^2}{\mu l} = \frac{2}{3} w_{\max}. \tag{64}$$

Можно отметить существенное обстоятельство: при данном, определяемом мощностью и конструкцией насоса перепаде давления на участке плоской трубы выбранной длины *расход пропорционален кубу расстояния между плоскостями*, т. е. резко падает с уменьшением этого расстояния и, наоборот, резко возрастает с его увеличением. Если задаться потребным расходом, то необходимый для его обеспечения перепад давлений, приводящий жидкость в движение, будет меняться обратно пропор-

[1]) См., например, Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел.— М.: Физматгиз, 1963.

ционально *кубу ширины щели* между плоскостями. Как далее будет показано, этот факт еще *усиливается* при переходе к трубе круглого сечения, где расход пропорционален *четвертой* степени диаметра трубы.

Вводя коэффициент сопротивления λ движению жидкости сквозь щель между плоскостями при помощи формулы

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{2h} \frac{\rho w_{ср}^2}{2}, \tag{65}$$

и используя в левой ее части выражение $\Delta p/l$ через $w_{ср}$, согласно (64), получим закон сопротивления для плоской трубы

$$\lambda = \frac{24}{\mathrm{Re}}, \text{ где } \mathrm{Re} = \frac{w_{ср} 2h}{\nu}. \tag{66}$$

Аналогичное движение будет происходить в «плоском» длинном лотке, у которого ширина днища во много раз больше высоты лотка (глубины потока), если лоток наклонить. Благодаря наличию свободной поверхности, вдоль которой давление постоянно (оно равно атмосферному давлению в открытом лотке), продольного перепада давления в потоке не будет, т. е. $dp/dz=0$; поперечный перепад давления будет *гидростатическим*, одинаковым во всех сечениях.

Если лоток наклонен к горизонту под некоторым углом α, то роль объемной силы будет играть вектор ускорения силы тяжести. Проекция его на ось Oz, направленную, как и ранее, по потоку, в данном случае под углом α к горизонту будет, очевидно, равна $F_z=g\sin\alpha$, так что уравнение движения жидкости в направлении оси Oz будет иметь вид

$$\rho g \sin\alpha + \mu \frac{d^2 w}{dy^2} = 0$$

или ($\rho g=\gamma$ — удельный вес жидкости)

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = -\frac{\gamma}{\mu} \sin\alpha. \tag{67}$$

Граничные условия будут определяться «прилипанием» жидкости к днищу лотка и отсутствием трения на свободной поверхности; обозначая глубину потока через h, получим граничные условия (ось Oz расположена вдоль днища)

$$w = 0 \text{ при } y = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0 \text{ при } y = h. \tag{68}$$

Сравнивая уравнение (67) с (60), видим, что движение в лотке будет определяться тем же уравнением, что и напорное движение в плоской трубе, если положить

$$\frac{\Delta p}{l} = \rho g \sin\alpha = \gamma \sin\alpha.$$

Интегрирование уравнений (67) при граничных условиях (68) дает

$$w = \frac{\gamma \sin\alpha}{2\mu} y(2h - y),$$

откуда следует, что и в этом случае профилем скоростей будет служить парабола второго порядка. Приводим формулы секундного объемного расхода, средней и максимальной скоростей:

$$Q = \frac{\gamma h^3 \sin\alpha}{3\mu}, \quad w_{ср} = \frac{Q}{h} = \frac{\gamma h^2 \sin\alpha}{3\mu}, \quad w_{max} = \frac{\gamma h^2 \sin\alpha}{2\mu} = \frac{3}{2} w_{ср}.$$

Рассмотрим далее течение сквозь цилиндрическую трубу *эллиптического сечения*. Если сечение трубы представляет собой *эллипс*

с полуосями a и b, уравнение которого в плоскости Oxy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то решение уравнения (59), удовлетворяющее граничному условию обращения скорости в нуль на контуре сечения, будет

$$w=A\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right), \tag{69}$$

где, согласно уравнению (59), постоянная A определится из условия

$$-2A\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=-\frac{\Delta p}{\mu l}$$

и будет равна

$$A=\frac{\Delta p}{2\mu l}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Таким образом, получим распределение скоростей в сечении эллиптической трубы в виде

$$w=\frac{\Delta p}{2\mu l}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right). \tag{70}$$

Эпюрой векторов скорости, проведенных из точек сечения трубы, будет служить поверхность эллиптического *параболоида*, кривыми одинаковой по величине скорости — *изотахами* — подобные друг другу эллипсы (с одинаковым отношением полуосей).

Из распределения скоростей (70) найдем максимальную по сечению скорость на оси эллиптической трубы

$$w_{\max}=\frac{\Delta p}{2\mu l}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}, \tag{71}$$

после чего распределение скоростей может быть переписано в виде

$$w=w_{\max}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right). \tag{72}$$

Определим секундный объемный расход жидкости Q сквозь сечение эллиптической трубы. Имеем

$$Q=\iint\limits_S w\,dx\,dy=w_{\max}\iint\limits_S\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy.$$

Положим для упрощения вычислений

$$x=ax',\quad y=by',\quad r'=\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Тогда интеграл по площади эллипса сведется к интегралу по площади S' единичного круга и будет равен

$$Q=w_{\max}ab\iint\limits_{S'}(1-x'^2-y'^2)\,dx'\,dy'=w_{\max}ab\int\limits_0^1(1-r'^2)\,2\pi r'\,dr'=\frac{\pi}{2}\,ab w_{\max}.$$

По (71) получим

$$Q=\frac{1}{2}\,\pi ab w_{\max}=\frac{\pi a^3b^3\Delta p}{4\mu l\,(a^2+b^2)}. \tag{73}$$

Среднюю скорость $w_{\text{ср}}$ определим как отношение секундного объемного расхода Q к площади сечения трубы $S=\pi ab$; получим, согласно (73),

$$w_{\text{ср}}=\frac{Q}{\pi ab}=\frac{1}{2}\,w_{\max}=\frac{\Delta p}{4\mu l}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \tag{74}$$

Отметим, что, в отличие от плоской трубы, в эллиптической трубе *средняя скорость равна половине максимальной.* Эта закономерность сохраняется и в частном случае цилиндрической трубы круглого сечения.

Полагая в предыдущих формулах $b=a$, получим основные формулы ламинарного течения сквозь *цилиндрическую трубу круглого сечения.*

Распределение скоростей (72) примет вид (a — радиус трубы. $x^2+y^2=r^2$)

$$w = w_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \tag{75}$$

где по (71)

$$w_{\max} = \frac{a^2\Delta p}{4\mu l} = 2w_{\text{ср}}. \tag{76}$$

Эпюрой скорости в этом случае является параболоид вращения с меридианным сечением в виде параболы (75), называемой обычно *параболой Пуазейля* по имени французского врача и физиолога, исследовавшего законы движения крови по капиллярным сосудам и опубликовавшего результаты своих работ в докладах Парижской Академии наук в 1840 г.

Секундный объемный расход по (73) равен

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\mu l} \tag{77}$$

и выражает известный *закон Пуайзеля*: *при установившемся ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости сквозь цилиндрическую трубу круглого сечения секундный объемный расход пропорционален перепаду давления на единицу длины трубы и четвертой степени ее радиуса* (или диаметра). В формулировке закона Пуазейля подчеркнуто, что движение *установившееся.* Под этим понимается наличие одинакового распределения скоростей во всех сечениях трубы. Такой характер движения достигается в части трубы, достаточно удаленной от входа в нее. Наоборот, на начальном участке трубы, расположенном за входом, движение неустановившееся, и закон Пуазейля несправедлив.

Отметим еще раз существенную особенность течения: потребный для получения заданного расхода перепад давления на данном участке трубы, называемый *сопротивлением* этого участка, обратно пропорционален *четвертой* степени диаметра трубы (напомним, что в случае плоской трубы этот перепад обратно пропорционален *третьей* степени ширины зазора между плоскостями). Это обстоятельство имеет важное значение в вопросах прогонки жидкостей сквозь трубы малого диаметра (например, капиллярные трубки, капиллярные кровеносные сосуды и т. п.), а также в случаях движения очень вязких жидкостей.

Определим, подобно тому как это было ранее сделано для плоской трубы, коэффициент сопротивления λ круглой трубы формулой

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d}\frac{\rho w_{\text{ср}}^2}{2}. \tag{78}$$

Тогда, выражая Δp через $w_{\text{ср}}$ по (76), получим следующий закон сопротивления для цилиндрических круглых труб:

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}, \text{ где } \mathrm{Re} = \frac{w_{\text{ср}} d}{\nu}. \tag{79}$$

Подставляя это выражение λ через Re в (78), убедимся, что в случае ламинарного потока сопротивление круглой трубы, так же как и плоской, пропорционально *первой* степени средней скорости движения жидкости сквозь трубу. Формула сопротивления (78) только внешне

имеет вид квадратичной зависимости от средней скорости. Истинная зависимость от скорости определяется лишь на основании *закона сопротивления* (79), выводимого из уравнения движения жидкости.

Формула (79) останется верна и для эллиптической трубы, если под ее *эффективным диаметром* понимать величину d, квадрат которой представляет собой *среднюю гармоническую* от квадратов большой и малой *осей* эллипса

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(2b)^2}\right]=\frac{1}{8}\frac{a^2+b^2}{a^2b^2},$$

в чем легко убедиться, подставляя в (78) выражение из (74).

Распределение скоростей (75) в цилиндрической трубе круглого сечения можно получить и непосредственно, заменив в левой части уравнения (59) лапласиан его выражением в полярных координатах. Будем иметь по (85) гл. I при цилиндрической симметрии и отсутствии азимутальной составляющей

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)=-\frac{\Delta p}{\mu l}. \tag{80}$$

Интегрируя, найдем общее решение

$$w=-\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2+C_1\ln r+C_2. \tag{81}$$

Из условия ограниченности скорости на оси трубы при $r=0$ следует, что $C_1=0$; вторая постоянная найдется из условия

$$w=0 \text{ при } r=a,$$

что приведет к параболическому профилю скоростей (75).

Решение (81) представляет бóльшую общность, чем ранее приведенное (75). Так, например, пользуясь равенством (81), получим распределение скоростей в области между двумя *соосными* круглыми цилиндрами радиусов a и $b>a$. Подчиняя решение (81) граничным условиям

$$w=0 \text{ при } r=a \text{ и } r=b,$$

получим распределение скоростей в сечении

$$w=\frac{\Delta p}{4\mu l}\left[a^2-r^2+\frac{b^2-a^2}{\ln(b/a)}\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right], \tag{82}$$

а также *формулы расхода и средней скорости*

$$Q=\frac{\pi\Delta p}{8\mu l}\left[b^4-a^4-\frac{(b^2-a^2)^2}{\ln(b/a)}\right],\quad w_{\text{ср}}=\frac{\Delta p}{8\mu l}\left[b^2+a^2-\frac{b^2-a^2}{\ln(b/a)}\right]. \tag{83}$$

Приемом, аналогичным использованному при составлении решения (69) для цилиндрической трубы эллиптического сечения, удается построить решение для призматической трубы, сечением которой служит *равносторонний* треугольник. Направляя ось Ox по основанию треугольника, а ось Oy — по высоте, будем иметь уравнения прямых, образующих стороны треугольника (a — сторона): $y=0$ (основание), $y=\frac{a\sqrt{3}}{2}\pm$ $\pm\sqrt{3}x$ (боковые стороны).

Составляя обращающееся в нуль на контуре сечения треугольной трубы произведение

$$y\left(y-\sqrt{3}x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\left(y+\sqrt{3}x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right),$$

убедимся, что лапласиан в плоскости (x, y) от этого произведения равен постоянной величине $(-2a\sqrt{3})$; следовательно, искомое решение будет

$$w=\frac{\Delta p}{2\sqrt{3}\,\mu a l}\,y\left(y-\sqrt{3}\,x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\left(y+\sqrt{3}\,x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

Секундный объемный расход сквозь сечение *треугольной трубы* и средняя по сечению скорость равны

$$Q=\frac{a^4\sqrt{3}}{320}\,\frac{\Delta p}{\mu l},\quad w_{\text{ср}}=\frac{a^2}{80}\,\frac{\Delta p}{\mu l}.$$

Коэффициент сопротивления λ в формуле

$$\Delta p=\lambda\,\frac{l}{a}\,\frac{\rho w_{\text{ср}}^2}{2}$$

будет, как и в предыдущих примерах, обратно пропорционален рейнольдсову числу

$$\lambda=\frac{160}{\text{Re}},\quad \text{Re}=\frac{w_{\text{ср}}a}{\nu}.$$

Используя разложения в бесконечные ряды, можно решить задачу о протекании несжимаемой вязкой жидкости сквозь трубу *прямоугольного* сечения. Обозначим высоту прямоугольника, параллельную оси Oy, через $2h$, а основание, параллельное оси Ox, через $2\varkappa h$, где $\varkappa$ — любая положительная постоянная. Ось Oz, как и ранее, проведем через центр прямоугольника и направим вниз по потоку.

Преобразуем уравнение (59) к безразмерному виду, приняв за масштаб длин высоту h, а за масштаб скоростей — имеющую размерность скорости величину $\frac{h^2}{\mu}\cdot\frac{\Delta p}{l}$. Введем следующие обозначения для новых безразмерных переменных ξ, η и w^*:

$$\xi=\frac{x}{h},\quad \eta=\frac{y}{h},\quad w^*=\frac{w\mu l}{h^2\Delta p}. \tag{84}$$

Подставляя их в (59), составим безразмерные уравнения и граничные условия

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2}=-1, \tag{85}$$

$$w^*=0 \text{ при } \xi=\pm\varkappa,\ |\eta|<1 \text{ и при } \eta=\pm1,\ |\xi|<\varkappa.$$

Для решения этого уравнения воспользуемся известным рядом Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{2}\pi t=\begin{cases}\pi/4, & \text{если } |t|<1,\\ 0, & \text{если } |t|=1.\end{cases} \tag{86}$$

Тогда уравнение (85) можно представить в виде $(|\xi|<\varkappa)$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2}=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,\frac{\pi}{\varkappa}\,\xi\right). \tag{87}$$

Решение этого уравнения естественно искать в форме ряда

$$w^*=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\eta)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,\frac{\pi}{\varkappa}\,\xi\right), \tag{88}$$

в котором, согласно (86), первое граничное условие системы (85) уже выполнено.

Подставляя разложение (88) в уравнение (87) и приравнивая коэффициенты при косинусах с одинаковыми аргументами, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих означает производную по η)

$$Y_n'' - \left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\varkappa}\right)^2 Y_n = -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1}, \tag{89}$$

$$Y_n = 0 \text{ при } \eta = \pm 1 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Общие решения этих уравнений можно представить в виде

$$Y_n = A_n + B_n \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\varkappa}\eta\right) + C_n \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\varkappa}\eta\right), \tag{90}$$

где постоянные A_n определяются путем непосредственной подстановки выражения (90) в уравнение (89) и оказываются равными

$$A_n = \frac{\dfrac{(-1)^n 2}{\varkappa}}{\left(\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\pi}{\varkappa}\right)^3} = \frac{16\varkappa^2}{\pi^3}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \tag{91}$$

а постоянные B_n и C_n находятся из граничных условий (89), т. е. из системы уравнений

$$B_n \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\varkappa}\right) + C_n \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\varkappa}\right) = -A_n,$$

$$B_n \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\varkappa}\right) - C_n \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\varkappa}\right) = -A_n.$$

Таким образом, найдем

$$B_n = -\frac{A_n}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\pi}{\varkappa}\right)}, \quad C_n = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{92}$$

где числа A_n уже определены равенствами (91). Возвращаясь к (88), найдем искомое решение в *безразмерной* форме

$$w^* = \frac{16\varkappa^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\pi}{\varkappa}\eta\right)}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\pi}{\varkappa}\right)}\right]\cos\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\varkappa}\xi\right) \tag{93}$$

и в *размерной*

$$w = \frac{16\varkappa^2}{\pi^3}\frac{h^2\Delta p}{\mu l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\pi y}{\varkappa h}\right)}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\pi}{\varkappa}\right)}\right]\cos\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi x}{\varkappa h}\right). \tag{94}$$

Опуская простые вычисления, заметим, что секундный объемный расход Q и средняя по сечению скорость $w_{\text{ср}}$ будут определяться равенствами (параметр $\varkappa > 1$ представляет собой отношение ширины прямоугольного сечения $2\varkappa h$ к его высоте $2h$)

$$Q = \frac{\Delta p}{4\mu l}\varkappa h^4 f(\varkappa), \quad w_{\text{ср}} = \frac{Q}{4\varkappa h^2} = \frac{\Delta p h^2}{16\mu l} f(\varkappa),$$

$$f(\varkappa) = \frac{16}{3} - \frac{1024}{\pi^5 \varkappa}\left(\operatorname{th}\frac{\pi\varkappa}{2} + \frac{1}{3^5}\operatorname{th}\frac{3\pi\varkappa}{2} + \ldots\right), \tag{95}$$

а функция $f(\varkappa)$ имеет следующие значения:

$\varkappa$	1	2	3	5	10	12	100	∞
$f(\varkappa)$	2,249	3,659	4,213	4,661	4,997	5,053	5,300	5,333

Относя расход Q к ширине трубы $2\varkappa h$, т. е. вводя величину $Q'=Q/(2\varkappa h)$ и после этого переходя в выражениях Q' и $w_{ср}$ к пределу при $\varkappa\to\infty$, найдем по последнему столбцу таблицы

$$Q'=\frac{\Delta p h^3}{8\mu l}f(\varkappa)\to\frac{\Delta p h^3}{8\mu l}\frac{16}{3}=\frac{2}{3}\frac{\Delta p h^3}{\mu l},\quad w_{ср}\to\frac{\Delta p h^2}{16\mu l}\frac{16}{3}=\frac{1}{3}\frac{\Delta p h^2}{\mu l}$$

в полном соответствии с формулами (63) и (64) для плоской трубы. Полагая в соотношениях (94) и (95) $\varkappa=1$, получим решение задачи о течении несжимаемой вязкой жидкости по призматической трубе *квадратного* сечения.

Вводя, как и ранее, коэффициент сопротивления λ формулой

$$\Delta p=\lambda\frac{l}{2h}\frac{\rho w_{ср}^2}{2}$$

и выражая в левой части Δp через $w_{ср}$ по второму равенству системы (95), найдем после простых преобразований закон сопротивления призматических труб прямоугольного сечения

$$\lambda=\frac{128}{\mathrm{Re}}\frac{1}{f(\varkappa)};\quad \mathrm{Re}=\frac{w_{ср}2h}{\nu}. \tag{96}$$

Переходя к пределу $\varkappa\to\infty$, получим вновь закон сопротивления плоской трубы (66), а при $\varkappa=1$, по только что приведенной табличке, и закон сопротивления трубы квадратного сечения.

Для приближенной оценки сопротивления цилиндрических или призматических труб сложного фигурного профиля применяют прием сравнения сопротивлений этих труб с эквивалентной им по сопротивлению трубой круглого сечения, у которой за радиус (или диаметр) принимается так называемый «гидравлический» радиус $r_г$ (или диаметр $d_г=2r_г$), равный *отношению площади нормального сечения S трубы* (рис. 150) *к периметру P сечения*:

$$r_г=\frac{1}{2}d_г=\frac{S}{P}.$$

Прием этот очень груб и имеет смысл только, если у сравниваемых труб сечения геометрически близки друг к другу.

Чтобы пояснить смысл этого приема, установим сначала связь между перепадом давления Δp на некотором, произвольно выбранном участке трубы l и суммарным трением по внутренней, как говорят, «смоченной» поверхности этой трубы. Примем во внимание, что, как указывалось в начале параграфа, движение жидкости во всех сечениях одинаково. Это соответствует *равновесию* объема жидкости, ограниченного двумя сечениями (рис. 150) $S_1=S_2=S$ трубы, находящимися друг от друга на расстоянии l, и боковой поверхностью трубы, равной произведению периметра сечения P на длину участка l. Условием равновесия служит очевидное равенство (τ_w — переменное по периметру сечения напряжение трения, ds — дифференциал дуги периметра)

$$S\Delta p=\int_P\tau_w ds\cdot l=P\cdot\frac{1}{P}\int_P\tau_w ds\cdot l=P\bar{\tau}_w l,$$

где $\bar{\tau}_w$ означает среднее по периметру напряжение трения τ_w. Отсюда, используя введенное понятие гидравлического радиуса, получим

$$\bar{\tau}_w = \frac{\Delta p}{l} r_г, \tag{97}$$

т. е. *среднее по периметру цилиндрической (призматической) трубы напряжение трения равно перепаду давления на участке трубы длиной в гидравлический радиус.*

В частном случае *плоской* трубы с расстоянием между параллельными плоскостями $2h$ будем иметь на единицу длины в поперечном к потоку направлении

$$S=2h\cdot 1, \quad P=2\cdot 1, \quad r_г=S/P=h, \quad d_г=2h;$$

в *круглой* трубе радиуса a —

$$S=\pi a^2, \quad P=2\pi a, \quad r_г=a/2, \quad d_г=a.$$

Напряжение трения τ_w в *круглой* трубе совпадает по величине с перепадом давления на участке длиной в полрадиуса трубы, т. е.

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{l}\frac{a}{2} = \frac{1}{4}\frac{\Delta p}{l} d. \tag{98}$$

Аналогично для напряжения трения τ на проведенной внутри круглой трубы коаксиальной цилиндрической поверхности произвольного радиуса r будет

$$\tau = \frac{\Delta p}{l}\frac{r}{2};$$

следовательно, деля обе части последних равенств одно на другое, получим соотношение (y — расстояние поверхности от стенки трубы)

$$\tau = \tau_w \frac{r}{a} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{a}\right), \tag{99}$$

выражающее *линейность* связи между напряжением трения, приложенным к площадке, перпендикулярной к вектору-радиусу любой точки некоторого сечения относительно центра сечения, и величиной этого вектора-радиуса. Подчеркнем, что при выводе соотношения (97) никак не использовалась *ламинарность* движения и свойственная этому режиму эпюра скоростей. Соотношение (97) может быть применено и к *турбулентному* движению жидкости по цилиндрической (призматической) трубе произвольной формы сечения, точно так же как равенства (98) и (99) — к ламинарному и турбулентному движениям в цилиндрической трубе *круглого* сечения и в плоской трубе.

Более того, эти равенства, выражающие баланс движущего жидкость перепада давления с тормозящим движение сопротивлением трения, могут применяться к движениям любых сплошных сред по цилиндрическим трубам, в частности к движениям неньютоновских жидкостей. Простейший пример такого движения составит содержание следующего параграфа.

§ 90. Установившееся движение вязкопластической жидкости по цилиндрической трубе кругового профиля

Рассмотрим установившееся ламинарное движение по цилиндрической трубе кругового профиля *вязкопластической* жидкости, реологическое уравнение течения которой, согласно помещенному в начале § 85

равенству (14), представим в форме (r — текущий радиус точки, a — радиус трубы)

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{dw}{dr} = \begin{cases} \dfrac{\tau - \tau_0}{\mu'} & \text{при } \tau_0 < \tau < \tau_w, \\ 0 & \text{при } \tau \leqslant \tau_0. \end{cases} \tag{100}$$

Напомним, что в этом равенстве τ — напряжение трения в любой точке сечения трубы, приложенное к площадке, перпендикулярной к радиусу трубы, τ_0 — характерное для данной вязкопластической жидкости *предельное напряжение*, после достижения которого только и *начинается течение* жидкости; μ' — динамический коэффициент *структурной* (пластической) вязкости.

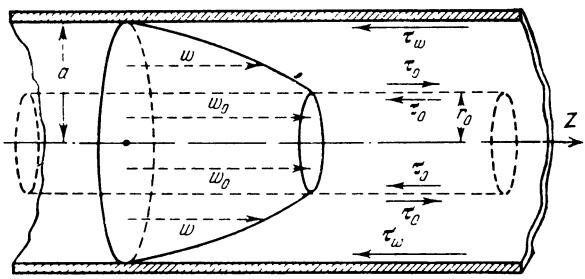


Рис. 151

В связи с тем, что границы применимости реологического закона (100) указаны в величинах τ, для облегчения интегрирования этого равенства полезно принять в качестве аргумента само напряжение τ. С этой целью, пользуясь равенством (99) предыдущего параграфа, перепишем (100) в виде

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{d\tau}\frac{d\tau}{dr} = \frac{\tau_w}{a}\frac{dw}{d\tau} = \begin{cases} -\dfrac{\tau - \tau_0}{\mu'}, & \tau_0 < \tau < \tau_w, \\ 0, & \tau = \tau_0. \end{cases} \tag{101}$$

Несложное интегрирование при выполнении очевидного граничного условия $w=0$ при $\tau=\tau_w$ приведет к следующей связи скорости с напряжением трения в той же точке:

$$w = \begin{cases} \dfrac{\tau_w a}{2\mu'}\left(1 - 2\dfrac{\tau_0}{\tau_w} + \dfrac{\tau}{\tau_w}\right)\left(1 - \dfrac{\tau}{\tau_w}\right), & \tau_0 < \tau < \tau_w, \\ \dfrac{\tau_w a}{2\mu'}\left(1 - \dfrac{\tau_0}{\tau_w}\right)^2 = \text{const} = w_0, & \tau = \tau_0. \end{cases} \tag{102}$$

Напряжение τ_w может быть выражено по (98) через заданный перепад давления Δp на участке длиной l. Уравнение (102) дает следующую *эпюру скоростей* $\left(r_0 = \dfrac{2l\tau_0}{\Delta p}\right)$:

$$w = \begin{cases} \dfrac{a^2\Delta p}{4\mu' l}\left[1 - \dfrac{r^2}{a^2} - \dfrac{4l\tau_0}{a\Delta p}\left(1 - \dfrac{r}{a}\right)\right], & r_0 < r < a, \\ \dfrac{a^2\Delta p}{4\mu' l}\left(1 - \dfrac{2l\tau_0}{a\Delta p}\right)^2 = w_0, & 0 < r \leqslant r_0. \end{cases} \tag{103}$$

Как видно, эпюра скоростей состоит частью из поверхности параболоида вращения (от стенки трубы до цилиндрической поверхности радиуса r_0), а частью из плоской площадки, перпендикулярной к оси трубы (в центральной части трубы внутри только что указанной цилиндрической поверхности) (рис. 151). В этой центральной части трубы вязкопластическая жидкость движется, как *твердый стержень*. При $\Delta p/l \leqslant 2\tau_0/a$ такой «твердый стержень» заполнит все сечение трубы и по свойству «прилипания» вязкой жидкости к твердой поверхности жидкость останется *неподвижной*.

Если в равенствах (103) положить $r_0=0$, что соответствует $\tau_0=0$, т. е. перейти к обычной *ньютоновской* вязкой жидкости, то эпюра скоростей приведется к известному уже параболоиду вращения, а плоская площадка исчезнет.

Имея эпюру скоростей, легко определить секундный объемный расход Q вязкопластической жидкости сквозь сечение трубы. Вычисление Q можно проще всего осуществить, переходя в интеграле расхода

$$Q=\int_0^a 2\pi w r\,dr=\pi\int_0^a w\,d(r^2)=\pi\,[r^2w]_0^a-\pi\int_0^a r^2\frac{dw}{dr}\,dr=-\pi\int_0^a r^2\frac{dw}{dr}\,dr$$

от независимой переменной r к τ по формуле (99). Будем иметь, воспользовавшись реологическим законом (100),

$$Q=\frac{\pi a^3}{\mu'\tau_w^3}\int_{\tau_0}^{\tau_w}\tau^2(\tau-\tau_0)\,d\tau=\frac{\pi a^3}{\mu'\tau_w^3}\left[\frac{1}{4}(\tau_w^4-\tau_0^4)-\frac{\tau_0}{3}(\tau_w^3-\tau_0^3)\right]=$$

$$=\frac{\pi a^3\tau_w}{4\mu'}\left[1-\frac{4}{3}\frac{\tau_0}{\tau_w}+\frac{1}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_w}\right)^4\right]=\frac{\pi a^3\tau_w}{4\mu'}f\left(\frac{\tau_0}{\tau_w}\right).\qquad(104)$$

Заменяя здесь τ_w его выражением через Δp по (98), получим формулу *Бекингема*

$$Q=\frac{\pi a^4\Delta p}{8\mu' l}\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{2\tau_0 l}{a\Delta p}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2\tau_0 l}{a\Delta p}\right)^4\right]=\frac{\pi a^4\Delta p}{8\mu' l}f\left(\frac{2\tau_0 l}{a\Delta p}\right).\qquad(105)$$

При $\tau_0=0$ и $\mu'=\mu$ вернемся к известной уже формуле Пуазейля (77).

Средняя по сечению скорость $w_{ср}$ по (105) будет равна

$$w_{ср}=\frac{Q}{\pi a^2}=\frac{a^2\Delta p}{8\mu' l}\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{2\tau_0 l}{a\Delta p}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2\tau_0 l}{a\Delta p}\right)^4\right]=$$

$$=\frac{d^2\Delta p}{32\mu' l}f\left(\frac{4\tau_0 l}{d\Delta p}\right)=\frac{d^2\Delta p}{32\mu' l}f\left(\frac{\tau_0}{\tau_w}\right).\qquad(106)$$

Используем ту же формулу сопротивления (78), что и для ньютоновской вязкой жидкости. К сожалению, в данном случае равенство (106) относительно Δp просто разрешено быть не может. Поэтому применим следующий прием. Из (106) следует

$$\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}}\left[f\left(\frac{4\tau_0 l}{d\Delta p}\right)\right]^{-1},\quad \mathrm{Re}=\frac{\rho w_{ср} d}{\mu'};\qquad(107)$$

с другой стороны, из (106) можно определить рейнольдсово число

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho d^3\Delta p}{32\mu'^2 l}f\left(\frac{4\tau_0 l}{d\Delta p}\right)=\frac{1}{8}\frac{\rho d^2\tau_0}{\mu'^2}f_1\left(\frac{4\tau_0 l}{d\Delta p}\right);$$

$$f_1\left(\frac{4\tau_0 l}{d\Delta p}\right)=f\left(\frac{4\tau_0 l}{d\Delta p}\right)\Big/\left(\frac{4\tau_0 l}{d\Delta p}\right).\qquad(108)$$

Безразмерное число $\rho d^2\tau_0/\mu'^2$ не содержит Δp. Оно характеризует *вязкопластические свойства жидкости*. Совокупность равенств

$$\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}}\left[f\left(\frac{4\tau_0 l}{d\Delta p}\right)\right]^{-1},\quad \mathrm{Re}=\frac{1}{8}\frac{\rho d^2\tau_0}{\mu'^2}f_1\left(\frac{4\tau_0 l}{d\Delta p}\right)$$

можно рассматривать как *параметрическое* [роль параметра играет величина $4\tau_0 l/(d\Delta p)$] выражение *закона сопротивления* вязкопластических

жидкостей движению в трубах. Исключая из последней системы равенств параметр $4\tau_0 l/(d\Delta p)$, получим

$$\frac{\lambda \mathrm{Re}}{64} = \Omega_1\left(\frac{\mu'^2}{\rho d^2 \tau_0}\,\frac{\rho w_{\mathrm{ср}} d}{\mu'}\right),$$

откуда следует общий вид закона сопротивления движению вязкопластических жидкостей по трубам круглого сечения

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}\,\Omega\left(\frac{\tau_0 d}{\mu' w_{\mathrm{ср}}}\right), \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho w_{\mathrm{ср}} d}{\mu'}. \tag{109}$$

Таким образом, в теории подобия течений вязкопластических жидкостей по круглым цилиндрическим трубам имеют место *два критерия подобия:*

1) число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho w_{\mathrm{ср}} d}{\mu'},$$

характеризующее влияние *структурной вязкости*, и

2) так называемый «параметр пластичности»

$$\Pi = \frac{\tau_0 d}{\mu' w_{\mathrm{ср}}},$$

определяющий эффект *пластичности* жидкости.

Указанные критерии могли бы быть заменены и другими, представляющими различные их комбинации [1]).

На рис. 152 представлен закон сопротивления (109) в логарифмическом масштабе. Закон представлен в координатах ($\lg \mathrm{Re}$, $\lg \lambda$) в виде семейства параллельных прямых с параметром П. Значению П=0 соответствует нижняя прямая, выражающая обычную закономерность $\lambda = 64/\mathrm{Re}$ для нормальной вязкой жидкости. Прямые семейства опираются своими нижними концами на кривую, отвечающую переходу ламинарного движения обычной вязкой жидкости в турбулентное.

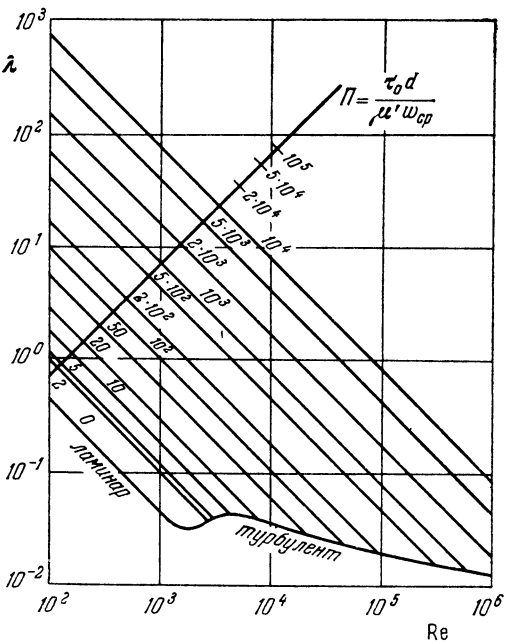


Рис. 152

§ 91. Установившееся движение электропроводной вязкой жидкости по трубам при наличии поперечного магнитного поля

В современных металлургических процессах широко применяют управление движением жидких металлов по трубам и каналам при помощи внешних, постоянных или переменных магнитных полей. Возникающие при этом смешанные гидродинамические и электромагнитные проблемы входят в сравнительно новую область механики жидкости и газа, носящую наименование *магнитной гидродинамики* (МГД) [2]).

---

[1]) См. ранее уже цитированную монографию: Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости/Пер. с англ.— М.: Мир, 1964.

[2]) Основы электродинамики, знание которых необходимо для понимания содержания настоящего параграфа, а также более широкое изложение этих вопросов см. в кни-

Ограничимся разбором случая *стационарного* движения несжимаемой жидкости, имеющей постоянный коэффициент электропроводности и находящейся под действием внешнего стационарного однородного магнитного поля. Будем пренебрегать наличием в жидкости свободных электрических зарядов. Магнитную проницаемость (общепринятое обозначение μ, которое уместно сохранить в настоящем параграфе, не следует смешивать с обозначением динамического коэффициента вязкости; приходится для последнего пользоваться выражением произведения $\rho\nu$ плотности жидкости ρ на кинематический коэффициент вязкости ν) будем считать одинаковой для всех жидкостей и твердых границ, приравнивая ее значению μ_0 в пустоте. Отвлечемся, наконец, от действия всех объемных сил, кроме *пондеромоторной* силы (силы Лоренца) $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{j}$ — плотность электрического тока, возникающего в движущейся со скоростью $\boldsymbol{V}$ электропроводной жидкости с коэффициентом электропроводности σ за счет местного *электрического поля* с напряжением $\boldsymbol{E}$ и *магнитного поля* с магнитной индукцией $\boldsymbol{B}$, определяемая обобщенным законом Ома

$$\boldsymbol{j}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}). \tag{110}$$

При принятых упрощениях подлежащая рассмотрению система уравнений МГД сводится к следующей:

$$\rho(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\operatorname{grad}p+\rho\nu\nabla^2\boldsymbol{V}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B};\ \operatorname{div}\boldsymbol{V}=0;$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0;\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{E}=0, \tag{111}$$

причем к ней должен быть присоединен закон Ома (110).

Основной особенностью магнитогидродинамических исследований является тот факт, что по самому существу явлений оказывается совершенно недостаточным пользоваться обычными уравнениями движения жидкости, добавляя лишь к механическим объемным силам *пондеромоторную* силу Лоренца, выражающую действие внешнего магнитного поля на движущуюся электропроводную жидкость. На самом деле изучению подлежит значительно более сложное явление взаимодействия магнитного поля с потоком жидкости в условиях, когда твердые границы потока в зависимости от своей электропроводности сами влияют на магнитное поле в области течения жидкости.

С математической стороны это означает, что нельзя рассматривать уравнения движения жидкости (уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности) оторвано от уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла). Уравнения движения только в очень упрощенной постановке можно считать «автономными», допускающими самостоятельное интегрирование отдельно от общих уравнений электродинамики сплошных сред.

Переходя к вопросу о *граничных условиях*, соответствующих возможным *стационарным* задачам, заметим, что они состоят из известных уже по предыдущему *гидродинамических условий* («прилипание» жидкости к поверхности обтекаемых тел, условия на бесконечности и др.) и специфических *электромагнитных* условий на границах жидкой и твердой фазы (например, стенки трубы), а также твердой фазы и внешней области (газ, пустота).

гах: Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. I.— М.: Наука, 1983; Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах.— М.: Наука, 1970. См. также обзоры: Гогосов В. В., Полянский В. А. Электродинамика: Задачи и приложения, основные уравнения, различные решения.— Итоги науки и техники, МЖГ, т. 10, М.: ВИНИТИ, 1976, с. 5—85; Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей.— В том же изд., т. 16, 1981, с. 75—208.

Рассмотрим магнитогидродинамическое обобщение изложенной ранее в § 89 задачи о движении несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрическим (призматическим) трубам на случай электропроводной жидкости при наличии *поперечного* к направлению потока жидкости однородного магнитного поля. Теоретические и экспериментальные работы в этом направлении многочисленны [1]). Начало им было положено известной работой Гартмана [2]).

Воспользуемся тем же расположением осей координат относительно трубы, что и на рис. 150. Неизвестными величинами в разбираемой задаче являются: поле скоростей $\boldsymbol{V}$, электрическое напряжение $\boldsymbol{E}$ и магнитная индукция $\boldsymbol{B}$. Покажем, что в рассматриваемом случае бесконечно длинной трубы постоянного сечения со стенками из однородного материала и постоянной толщины δ, которую будем считать малой по сравнению с размерами сечения трубы, решение задачи можно свести к определению *двух* функций $V_z=w(x, y)$ и $B_z=B(x, y)$, а электрическое поле $\boldsymbol{E}$ из уравнений исключить.

Так же как и в ранее рассмотренной в § 89 чисто гидродинамической задаче, из условия равноправности сечений в бесконечно длинной трубе с постоянными геометрическими параметрами сечений следует, что все распределения механических и физических величин будут зависеть только от координат x и y в плоскости сечения трубы. Исключением является давление, уменьшающееся вдоль трубы по линейному закону, но *перепад* давления на участке фиксированной длины также сохраняет свою величину вдоль трубы. В этих условиях электрический ток вдоль трубы невозможен, так что, согласно (110), при $u=0$ и $v=0$ будет

$$j_z=\sigma E_z=0; \quad j_z=0, \quad E_z=0,$$

т. е. *индуцированные токи располагаются в плоскостях нормальных сечений трубы*, а *индуцированная* составляющая *магнитного поля* по закону Био — Савара направлена по оси Oz. Принимая во внимание наличие однородного внешнего поперечного магнитного поля с компонентами $(0, B_0, 0)$ и условие соленоидальности магнитного поля, выражаемое в данном случае равенством $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=\partial B_z/\partial z=0$, заключим [3]), что суммарные компоненты магнитного поля будут равны

$$B_x=0, \quad B_y=B_0=\text{const}, \quad B_z=B(x, y).$$

При этом, как легко заключить из первого электродинамического уравнения системы (111), величину B/μ_0 можно рассматривать как

---

[1]) Регирер С. А. О течении электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля по трубам произвольного профиля.— Прикл. мат. и мех., 1960, т. 24, № 3, с. 541—542; Уфлянд Я. С. Установившееся течение электропроводной жидкости в прямоугольном канале при наличии поперечного магнитного поля.— Журн. техн. физ., 1960, т. 30, вып. 10; Гринберг Г. А. Об установившемся течении проводящей жидкости в прямоугольной трубе с двумя непроводящими стенками и двумя проводящими, параллельными внешнему магнитному полю.— Прикл. мат. и мех., 1961, т. 25, с. 1024—1034, а также: О некоторых случаях течения проводящей жидкости по трубам прямоугольного сечения, находящимся в магнитном поле, там же, 1962, т. 26. с. 80—87; Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика.— М.: Физматгиз, 1962, с. 56—58; Shercliff J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1953, v. 49, № 1, p. 136—144; Chang Chieh C., Lundgren T. S. Duct flow in magnetohydrodynamics.— Zeitschr. angew. Mathem. u. Physik, 1961, Bd. 12, S. 100—114; Sloan D. M., Smith P. Magnetohydrodynamic flow in a rectangular pipe between conducting plates.— Zeitschr. Angew. Mathem. u. Mech., 1966, Bd. 7, S. 439—443; Hunt J. C. R. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts.— J. Fluid Mech., 1965, v. 21, p. 577—590.

[2]) Hartmann J. Hg-Dynamics. 1. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogenous magnetic field.— Mat.-Fys. medd. Kgl. Danske Vissenkab., 1937, v. 15, № 6.

[3]) В изложении общей части задачи о движении электропроводной жидкости сквозь цилиндрическую (призматическую) трубу любого сечения и плоскую трубу использованы только что цитированные работы Шерклифа, Чанга и Лундгрена.

«функцию тока» плоского поля векторов $j(j_x, j_y)$, так что

$$\mu_0 j_x = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad \mu_0 j_y = -\frac{\partial B}{\partial x}. \tag{112}$$

Возвращаясь к первому динамическому уравнению системы (111) — уравнению Навье — Стокса,— перепишем его в проекциях на оси координат в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= j_y B_z = -\frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -j_x B_z = -\frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho\nu\nabla^2 w + j_x B_y - j_y B_x = \rho\nu\nabla^2 w + \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial y}. \end{aligned} \tag{113}$$

Заметим, что первые два из этих уравнений приводятся к равенствам

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = 0,$$

выражающим тот факт, что сумма $p + B^2/(2\mu_0)$ является функцией только z. Вспоминая, что, по предыдущему, B зависит только от x и y, заключим, что $\partial p/\partial z$ представляет собой функцию только z. Но тогда из последнего равенства системы (113), в котором левая часть — функция только z, а правая — только x и y, следует, что каждая из этих частей в отдельности равна постоянной; представим, как и раньше, эту постоянную в виде

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l}.$$

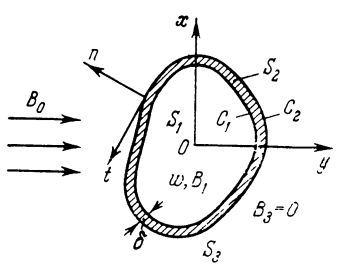


Рис. 153

Таким образом, получаем первое искомое уравнение $\left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ — уравнение движения жидкости в трубе

$$\rho\nu\nabla^2 w + \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{\Delta p}{l}. \tag{114}$$

Второе уравнение можно найти, применяя операцию rot к левой и правой частям уравнения (110), что позволит освободиться от электрического поля $\boldsymbol{E}$, а затем составляя проекцию обеих частей полученного уравнения на ось Oz. Имеем, используя первое уравнение второй строки (111) и (88) гл. I,

$$\text{rot}\, \boldsymbol{j} = \frac{1}{\mu_0}\text{rot rot}\, \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}\text{grad div}\, \boldsymbol{B} - \frac{1}{\mu_0}\nabla^2 \boldsymbol{B} = -\frac{1}{\mu_0}\nabla^2 \boldsymbol{B}, \quad \text{rot}\, \boldsymbol{E} = 0,$$

$$\text{rot}(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{V}\,\text{div}\, \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\,\text{div}\, \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{B};$$

проектируя на ось Oz, получим второе искомое уравнение

$$\nabla^2 B + \sigma\mu_0 B_0 \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{115}$$

выражающее структуру магнитного поля в движущейся жидкости.

Выделим в плоскости Oxy следующие три области (рис. 153):

1) область S_1 внутри трубы, в которой должно быть произведено интегрирование системы уравнений (114) и (115);

2) тонкую (толщину обозначим через δ) область S_2, занятую твердыми стенками трубы; в этой области $w=0$ и для определения функции B достаточно проинтегрировать уравнение Лапласа

$$\nabla^2 B=0 \tag{116}$$

и, наконец,

3) внешнюю по отношению к трубе область S_3, заполненную непроводящей электричество средой ($\sigma=0$), в которой $j_x=j_y=0$, а, следовательно, по первому из электродинамических уравнений в этой области

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}=0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x}=\frac{\partial B_z}{\partial y}=0, \quad B_z=\text{const}.$$

Но в бесконечном удалении от трубы магнитное поле направлено параллельно оси Oy, следовательно, $B_z=B=0$ во всей области S_3.

Обозначим через C_1 и C_2 границы, отделяющие S_1 от S_2 и S_2 от S_3, и условимся обозначать индексами 1, 2 и 3 величины B и σ, соответствующие областям S_1, S_2 и S_3. Перейдем в составленных уравнениях к *безразмерным* величинам, положив (a — некоторая характерная длина, l — длина, на которой задан перепад давления Δp)

$$x=a\xi, \quad y=a\eta, \quad w=\frac{a^2}{\nu\rho}\frac{\Delta p}{l}w^*, \quad B=\frac{a^2\Delta p}{l}\mu_0\left(\frac{\sigma_1}{\nu\rho}\right)^{1/2}B^*. \tag{117}$$

Тогда получим *безразмерную* систему уравнений в области S_1

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2}+\mathrm{Ha}\frac{\partial B_1^*}{\partial\eta}=-1, \quad \frac{\partial^2 B_1^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 B_1^*}{\partial\eta^2}+\mathrm{Ha}\frac{\partial w^*}{\partial\eta}=0, \tag{118}$$

где безразмерное число

$$\mathrm{Ha}=B_0 a\left(\frac{\sigma_1}{\nu\rho}\right)^{1/2} \tag{119}$$

называют *числом Гартмана*.

Во второй области (S_2) будем иметь уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 B_2^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 B_2^*}{\partial\eta^2}=0. \tag{120}$$

В третьей (S_3), как уже указывалось, будет

$$w=0, \quad B_3^*=0.$$

Обратимся к составлению граничных условий на границах C_1 и C_2 раздела областей.

Кроме очевидного гидродинамического условия

$$w=0 \ (\text{на } C_1),$$

совпадающего с обычным условием гидродинамической задачи, и задания перепада давления Δp на участке l или секундного объемного расхода Q (средней скорости $w_{\text{ср}}$), должны быть еще составлены электродинамические граничные условия, которые выводятся из условий сопряжения (непрерывности) значений *касательной* составляющей E_t на контуре и величины B.

На контуре C_1, являющемся общей границей областей S_1 и S_2, скорость $w=0$; поэтому, кроме условия $B_1=B_2$, будем еще, согласно условию непрерывности $(E_t)_1=(E_t)_2$ и закону Ома (110), иметь условие $(j_t/\sigma)_1=(j_t/\sigma)_2$. Это условие легко выразить через условие сопряжения нормальных производных от функции B, если, пользуясь (112), произвести в предыдущем условии сопряжения замену $j_t=(1/\mu_0)(\partial B/\partial n)$. Тогда будем иметь следующую окончательную форму условия сопряжения на

границе C_1 (по сделанному ранее предположению, магнитная проницаемость μ_0 во всех областях одинакова)

$$\frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial B_1}{\partial n}=\frac{1}{\sigma_2}\frac{\partial B_2}{\partial n}. \tag{121}$$

На контуре C_2 в силу непрерывности B будем иметь $B_2=B_3=0$.

Чтобы упростить задачу с выведенными только что условиями сопряжения на границах областей, воспользуемся принятой малостью отношения толщины области S_2 — толщины стенки трубы δ — к характерному размеру a области S_1. Пренебрегая в области S_2 кривизной стенок трубы, можем принять в качестве *приближенного* решения уравнения Лапласа (120) для B_2 линейную функцию, т. е. положить в области S_2

$$\frac{\partial B_2}{\partial n}=-B_2\frac{a}{\delta},$$

а на границе C_1, где $B_2=B_1$,

$$\frac{\partial B_2}{\partial n}=-B_1\frac{a}{\delta}.$$

Такое допущение будет строгим для случая плоской трубы с любой толщиной стенок, а в принятом приближении справедливо лишь в *локальном* смысле.

Таким образом, согласно (121), примем следующую приближенную систему граничных условий в безразмерных координатах

$$w^*=0,\quad \frac{\partial B_1^*}{\partial n}+\frac{B_1^*}{\varphi}=0 \text{ (на } C_1),\quad B_2^*=0 \text{ (на } C_2), \tag{122}$$

где использовано обозначение

$$\varphi=\frac{\sigma_2\delta}{\sigma_1 a}. \tag{123}$$

Если $\sigma_2=0$, что соответствует случаю, когда стенкой трубы служит *изолятор*, то $\varphi=0$ и, следовательно, по (122) на контуре C_1 будет $B_1^*=0$. В этом случае задача упрощается и сводится к решению совокупности дифференциальных уравнений (118) при граничных условиях

$$w^*=0,\quad B_1^*=0 \quad (\text{на } C_1).$$

В противоположном случае ($\sigma_2=\infty$), когда стенки трубы обладают *абсолютной проводимостью*, коэффициент $\varphi=\infty$ и граничные условия для системы уравнений (118) будут

$$w^*=0,\quad \partial B_1^*/\partial n=0 \quad (\text{на } C_1).$$

Приведенная только что постановка задачи о движении вязкой, несжимаемой и электропроводной жидкости по цилиндрической (призматической) трубе с произвольной формой сечения является достаточно общей, так как, наряду с гидродинамической общностью, в ней содержится еще возможность произвольного задания величины φ, характеризующей сравнительную электрическую проводимость жидкости и стенок трубы.

Рассмотрим в качестве иллюстрации наиболее простую из возможных задач, для которой, как сейчас станет ясным, предыдущая постановка является вполне *строгой*,— задачу о движении электропроводной жидкости в *плоской* трубе.

Расположим, как и в § 89, безграничные плоскости, представляющие стенки трубы, перпендикулярно к оси Oy, а тем самым и перпендикулярно к внешнему однородному магнитному полю на расстояниях

$\pm h$ от плоскости симметрии трубы Oxz. Тогда искомые величины не будут зависеть от x или, в безразмерных переменных, от ξ. При этом из уравнения (120) можно будет заключить о *строгой линейности* функции B_1^* по переменной η.

Уравнения (118) сведутся к системе двух обыкновенных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2w^*}{d\eta^2} + \mathrm{Ha}\frac{dB^*}{d\eta} = -1, \quad \frac{d^2B^*}{d\eta^2} + \mathrm{Ha}\frac{dw^*}{d\eta} = 0, \tag{124}$$

которые должны быть решены при граничных условиях (за характерную длину a примем половину расстояния между плоскими стенками трубы, равную h)

$$w^* = 0, \quad \frac{dB^*}{d\eta} \pm \frac{B^*}{\varphi} = 0 \text{ при } \eta = \pm 1. \tag{125}$$

Искомое решение будет

$$w^* = \frac{1}{\mathrm{Ha}}\frac{\varphi+1}{\mathrm{Ha}\,\varphi + \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}\left[1 - \frac{\mathrm{ch}\,(\mathrm{Ha}\,\eta)}{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}\right],$$

$$B^* = -\frac{\eta}{\mathrm{Ha}} + \frac{1}{\mathrm{Ha}}\frac{\varphi+1}{\mathrm{Ha}\,\varphi + \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}\frac{\mathrm{sh}\,(\mathrm{Ha}\,\eta)}{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}. \tag{126}$$

Первое решение этой задачи, относящееся к частному случаю непроводящей стенки ($\varphi=0$), было дано в 1937 г. Гартманом (см. ранее цитированную его статью). Им же был впервые отмечен основной эффект наличия поперечного к потоку магнитного поля: *с ростом магнитной индукции* B_0, точнее, *числа Гартмана*, определенного равенством (119), профили скоростей в сечениях плоской трубы становятся все более *пологими*, или, как иногда говорят, «заполненными».

Вычислим среднюю скорость по сечению $w_{\mathrm{ср}}$. Прежде всего определим секундный объемный расход

$$Q = \int_{-h}^{h} w\,dy = \frac{h^3}{\nu\rho}\frac{\Delta p}{l}\int_{-1}^{1} w^*\,d\eta.$$

Подставляя сюда значение w^* по первому из равенств (126), найдем

$$Q = \frac{2h^3}{\nu\rho}\frac{\Delta p}{l}\frac{\varphi+1}{\mathrm{Ha}^2}\frac{\mathrm{Ha} - \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}\,\varphi + \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}. \tag{127}$$

Сравним это выражение с соответствующим ему при $\varphi=0$ и $\mathrm{Ha}=0$ выражением (63) § 89. Заметив, что

$$\mathrm{th}\,\mathrm{Ha} = \mathrm{Ha} - \frac{1}{3}\mathrm{Ha}^3 + \ldots,$$

убедимся, что раскрытие неопределенности приводит к (63). Из формулы (127) определим искомую среднюю скорость

$$w_{\mathrm{ср}} = \frac{Q}{2h} = \frac{h^2}{\nu\rho}\frac{\Delta p}{l}\frac{\varphi+1}{\mathrm{Ha}^2}\frac{\mathrm{Ha} - \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}\,\varphi + \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}. \tag{128}$$

Отсюда найдем безразмерную скорость

$$\frac{w}{w_{\mathrm{ср}}} = \frac{\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha} - \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}\left[1 - \frac{\mathrm{ch}\,(\mathrm{Ha}\,\eta)}{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}\right]. \tag{129}$$

Отметим, что $w/w_{\mathrm{ср}}$ не зависит от φ, т. е. от проводимости стенок. На рис. 154, где по оси ординат отложено отношение размерной скорости w к ее среднему по сечению значению $w_{\mathrm{ср}}$, а по оси абсцисс — без-

размерное расстояние η от оси трубы, показан отмеченный ранее эффект влияния поперечного магнитного поля на форму профилей скорости в сечениях плоской трубы. Этот эффект, не зависящий, как только что было показано, от проводимости стенок, называют *эффектом Гартмана.*

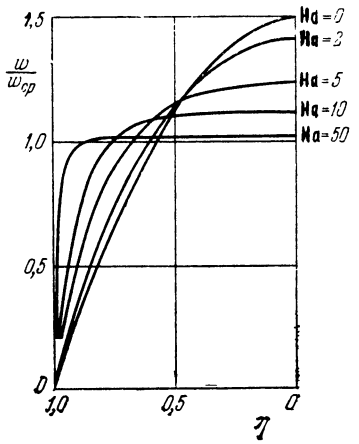


Рис. 154

Легко проверить, что при $\mathrm{Ha}\to 0$ профили скоростей (129) превращаются в обычную параболу второго порядка (61); отношение $w_{ср}/w_{max}$, которое характеризует «полноту» профилей, равно $^2/_3$ при $\mathrm{Ha}=0$ и стремится к единице при $\mathrm{Ha}\to\infty$, что соответствует однородному профилю по всему сечению, исключая пристеночную область толщины $1/\mathrm{Ha}$.

Введем, как и в случае отсутствия магнитного поля, формулу сопротивления в виде

$$\Delta p=\lambda\frac{l}{2h}\frac{\rho\omega_{ср}^2}{2}\quad\left(\mathrm{Re}=\frac{w_{ср}2h}{\nu}\right).$$

Подставляя в левую часть значение Δp из (128), после простых сокращений найдем *закон сопротивления* для движения электропроводной жидкости в плоской трубе, расположенной в поперечном магнитном поле

$$\lambda=\frac{8}{\mathrm{Re}}\frac{\mathrm{Ha}^2}{\varphi+1}\frac{\mathrm{Ha}\,\varphi+\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}-\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}. \tag{130}$$

Предельный переход при $\mathrm{Ha}\to 0$ приводит к закону сопротивления (66) при отсутствии магнитного поля

$$(\lambda)_{\mathrm{Ha}=0}=\lambda_0=\frac{24}{\mathrm{Re}}.$$

Отношение

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{Ha}^2}{\varphi+1}\frac{\mathrm{Ha}\,\varphi+\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}-\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}} \tag{131}$$

представляет собой функцию φ и Ha, график которой показан на рис. 155. Можно заметить, что отношение λ/λ_0 совпадает с обратным отношением Q_0/Q, где $Q_0=(Q)_{\mathrm{Ha}=0}$.

Некоторые детали анализа распределения плотности электрического тока можно найти в ранее процитированной работе Чанга и Лундгрена.

Никаких принципиальных трудностей по сравнению со случаем непроводящей жидкости (§ 89) не представляет рассмотрение потока проводящей жидкости в призматической трубе прямоугольного сечения.

В работе Слоана и Смита[1]) рассматривается (рис. 156) движение электропроводной жидкости (коэффициент электропроводности σ_1) в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, по каналу прямоугольного сечения S_1 между двумя плоскими проводящими стенками (коэффициент электропроводности σ_2), перпендикулярными к оси Oy, вдоль которой направлено внешнее однородное магнитное поле с индукцией B_0. Толщина проводящих стенок может считаться конечной, име-

[1]) Sloan D. M., Smith P. Magnetohydrodynamic flow in a rectangular pipe between conducting plates.— Zeitschr. f. angew. Mathemat. u. Mech., 1966, Bd. 46, S. 439—443.

ющей тот же порядок, что и высота канала $2h$, и равной $(q-1)h$. Две другие стенки непроводящие.

При сохранении выбора безразмерных величин (117) задача сведется к необходимости интегрирования системы дифференциальных уравнений (118) и (120) при граничных условиях

$$\begin{aligned}
&w^* = 0 \text{ при } \xi = \pm\varkappa,\ |\eta| < 1 \text{ и } \eta = \pm 1,\ |\xi| < \varkappa,\\
&B_1^* = 0 \text{ при } \xi = \pm\varkappa,\ |\eta| < 1,\\
&B_2^* = 0 \text{ при } \xi = \pm\varkappa,\ 1 < |\eta| < q \text{ и } \eta = \pm 1,\ |\xi| < \varkappa,\\
&\sigma_2 \frac{\partial B_1^*}{\partial \eta} = \sigma_1 \frac{\partial B_2^*}{\partial \eta},\quad B_1^* = B_2^* \text{ при } \eta = \pm 1,\ |\xi| < \varkappa.
\end{aligned} \tag{132}$$

Следуя примененному в § 89 методу для течения непроводящей жидкости по призматической трубе прямоугольного профиля

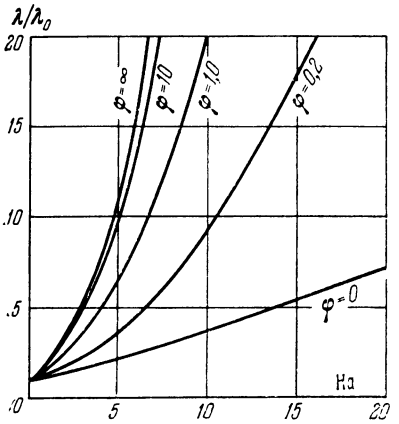


Рис. 155

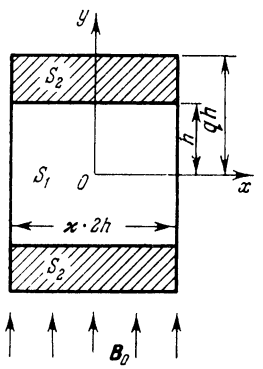


Рис. 156

в отсутствие магнитного поля, будем искать решение уравнений (118) и (120) в форме рядов Фурье

$$\begin{aligned}
w^* &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\eta)\cos(a_n\xi),\\
B_1^* &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\eta)\cos(a_n\xi),\\
B_2^* &= \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(\eta)\cos(a_n\xi), & 1 < \eta < q,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n(\eta)\cos(a_n\xi), & -q < \eta < -1, \end{cases}
\end{aligned} \tag{133}$$

где положено

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\varkappa}; \tag{134}$$

граничные условия по ξ уже выполнены.

Используя еще, как и ранее в § 89, разложение

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(a_n\xi) \text{ при } |\xi| < \varkappa$$

и подставляя его и ряды (133) в уравнения (118) и (120), получим, приравнивая коэффициенты при косинусах с одинаковыми аргументами, следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (штрих — производная по η):

$$\begin{gathered} f_n'' - a_n^2 f_n + \mathrm{Ha}\, g_n' = -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1}, \\ g_n'' - a_n^2 g_n + \mathrm{Ha}\, f_n' = 0, \\ h_n'' - a_n^2 h = 0; \quad s_n'' - a_n^2 s_n = 0 \end{gathered} \tag{135}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} h_n = 0 \text{ при } \eta = q, \\ f_n = 0,\ g_n = h_n,\ \sigma_2 g_n' = \sigma_1 h_n' \text{ при } \eta = 1, \\ f_n = 0,\ g_n = s_n,\ \sigma_2 g_n' = \sigma_1 s_n' \text{ при } \eta = -1, \\ s_n = 0 \text{ при } \eta = -q. \end{gathered} \tag{136}$$

Не останавливаясь на деталях решения этой сравнительно простой с математической стороны задачи, приведем в окончательной форме выражения для безразмерных скорости w^* и магнитной индукции поля B_1^* в области S_1 течения жидкости

$$w^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{\varkappa a_n^3}\left(1 - \frac{D_n \operatorname{ch}\alpha_n\eta - E_n \operatorname{ch}\beta_n\eta}{D_n \operatorname{ch}\alpha_n - E_n \operatorname{ch}\beta_n}\right)\cos a_n\xi,$$

$$B_1^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{\varkappa a_n^3}\,\frac{E_n \operatorname{sh}\beta_n\eta - D_n \operatorname{sh}\alpha_n\eta}{D_n \operatorname{ch}\alpha_n - E_n \operatorname{ch}\beta_n}\cos a_n\xi;$$

здесь положено

$$\begin{gathered} D_n = \sigma_1 a_n \operatorname{sh}\beta_n - \sigma_2\beta_n \operatorname{th}[a_n(1-q)]\operatorname{ch}\beta_n, \\ E_n = \sigma_1 a_n \operatorname{sh}\alpha_n - \sigma_2\alpha_n \operatorname{th}[a_n(1-q)]\operatorname{ch}\alpha_n, \\ \alpha_n, \beta_n = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{Ha} \pm \sqrt{\mathrm{Ha}^2 + 4a_n^2}\right). \end{gathered}$$

Удовольствуемся указанием общего вида решения, отсылая интересующихся подробностями к ранее цитированной статье Слоана и Смита.

Эффективность примененного для построения только что указанного решения метода Фурье зависит от *быстроты сходимости* рядов. Получение численных результатов требует достаточно быстрой сходимости этих рядов в интересующих практику интервалах изменения числа Гартмана и других физических параметров, характерных для отдельных конкретных задач. При очень больших значениях числа Гартмана могут быть построены специальные *асимптотические* решения.

Следует заметить, что метод Фурье не является единственным методом решения задач этого рода. В работах Г. А. Гринберга [1]) путем применения метода функций Грина выводятся интегральные уравнения, численные решения которых могут проводиться при помощи последовательных приближений. Вопрос об эффективности метода, конечно, и в этом случае решается рассмотрением быстроты сходимости приближений.

---

[1]) См. ранее цитированные две работы этого автора.

§ 92. Пульсирующее ламинарное движение вязкой жидкости по цилиндрической трубе кругового профиля

Задача о нестационарном движении вязкой жидкости по цилиндрической трубе кругового профиля уже давно привлекала внимание исследователей. Простейший случай этой задачи в 1879 г. рассмотрел еще Гельмгольц[1]). В общей постановке для любых начальных условий и заданного закона зависимости перепада давлений в трубе от времени задача была систематически исследована в сочинении казанского профессора И. С. Громека, относящемся к 1882 г.[2]). Частные случаи той же задачи были разобраны различными авторами[3]).

В настоящем параграфе изложено решение задачи об установившемся пульсирующем движении вязкой жидкости в круглой трубе под действием *гармонически* изменяющегося со временем перепада давления.

Основное дифференциальное уравнение ламинарного нестационарного движения в цилиндрической трубе круглого сечения получим тем же путем, который указан в § 89, с той лишь разницей, что в левой части сохраним локальное ускорение $\partial w/\partial t$. Будем иметь в цилиндрических координатах[4])

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = \frac{1}{\rho} f(t), \tag{137}$$

где положено в общем случае

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = f(t).$$

Уравнение это надо интегрировать при граничном условии

$$w = 0 \text{ при } r = a \tag{138}$$

и начальном условии (в случае осесимметричного движения)

$$w = w_0(r) \text{ при } t = 0. \tag{139}$$

В качестве примера рассмотрим *установившееся пульсирующее* движение, соответствующее *гармоническому* закону изменения перепада давления в трубе

$$f(t) = \rho A \cos \omega t.$$

Начальное условие при этом теряет свое значение, сохраним лишь граничное условие (138). Положив

$$w(r, t) = \varphi(r, t) + \frac{A}{\omega} \sin \omega t \tag{140}$$

и введя вместо t новую переменную $\tau = \nu t$, перепишем уравнение (137) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \tag{141}$$

---

[1]) Helmholtz H. Über electrische Grenzschichten — Ann d. Phys. u. Chem., 1879, Bd. 7, S. 337—382.

[2]) Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках.— Ученые записки Казанского ун-та, 1882, а также Соб. соч.— М.: Изд-во АН СССР, 1952, с. 149—171.

[3]) Szymanski P. Quelques solutions exactes des equations de l'hydrodynamique de fluide visqueux dans un tube cylindrique.— Journ de Mathem, 1932, t. 11, p. 67—107; Лурье А. И. Операционное исчисление.— М: ОНТИ, 1935, с. 205—209; Лямбоси П. Вынужденные колебания несжимаемой вязкой жидкости в жесткой горизонтальной трубе.— В сб. «Механика», вып. 3.— М.: ИЛ, 1953, с 67—77.

[4]) Так же, как и в стационарном случае, поле скоростей зависит не от z, а только от r и t; давление p — линейная функция z.

соответственно преобразуем граничное условие (138)

$$\varphi(a, \tau) = -\frac{A}{\omega}\sin\frac{\omega}{\nu}\tau. \tag{142}$$

Уравнение (141) относится к *параболическому* типу и совпадает с уравнением *теплопроводности*. Поставленная задача эквивалентна задаче распространения тепла в бесконечном цилиндре, на поверхности которого температура пульсирует со временем по закону (142).

Составим частное решение уравнения (141) в форме произведения функций от r и τ

$$\varphi = R(r)e^{-i\lambda\tau}, \tag{143}$$

где λ — пока неопределенная, но *действительная* величина. Подставляя (143) в (141), получим для определения $R(r)$ обыкновенное линейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + i\lambda R = 0. \tag{144}$$

Частное решение его, конечное при $r=0$ (на оси трубы), будет[1])

$$R(r) = J_0(r\sqrt{\lambda i}) = \mathrm{ber}(r\sqrt{\lambda}) - i\,\mathrm{bei}(r\sqrt{\lambda}). \tag{145}$$

Здесь $J_0(x\sqrt{i})$ — бесселева функция нулевого порядка от комплексного аргумента, а действительные функции *Кельвина* $\mathrm{ber}(x)$ и $\mathrm{bei}(x)$ представляют собой действительную и взятую с обратным знаком мнимую части $J_0(x\sqrt{i})$ (Re — действительная часть, Im — мнимая часть)

$$\begin{aligned}
\mathrm{ber}(x) &= \mathrm{Re}\,J_0(x\sqrt{i}) = 1 - \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \ldots, \\
\mathrm{bei}(x) &= -\mathrm{Im}\,J_0(x\sqrt{i}) = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{x^{10}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2} - \ldots
\end{aligned} \tag{146}$$

Вводя комплексную постоянную интегрирования $B - iC$, составим общее решение уравнения (141) в виде действительной части выражения

$$\begin{aligned}
\varphi(r, \tau) = \mathrm{Re}\{(B - iC)[\mathrm{ber}(r\sqrt{\lambda}) - i\,\mathrm{bei}(r\sqrt{\lambda})](\cos\lambda\tau - i\sin\lambda\tau)\} = \\
= B[\mathrm{ber}(r\sqrt{\lambda})\cos\lambda\tau - \mathrm{bei}(r\sqrt{\lambda})\sin\lambda\tau] - \\
- C[\mathrm{bei}(r\sqrt{\lambda})\cos\lambda\tau + \mathrm{ber}(r\sqrt{\lambda})\sin\lambda\tau].
\end{aligned} \tag{147}$$

Подставляя это выражение в граничное условие (142), приравнивая аргументы тригонометрических функций и коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему уравнений для определения λ и констант B и C

$$\lambda = \frac{\omega}{\nu},$$

$$B\,\mathrm{ber}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) - C\,\mathrm{bei}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) = 0,$$

$$B\,\mathrm{bei}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) + C\,\mathrm{ber}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) = \frac{A}{\omega}.$$

---

[1]) См., например, Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения в физике и механике.— М.: ИЛ, 1949, с. 39; применяемая нами формула (145) легко выводится из формулы (64) цитируемой страницы курса переходом от функции I_0 к J_0 от соответствующего аргумента. Таблицы функций $\mathrm{ber}(x)$ и $\mathrm{bei}(x)$ можно найти в книге: Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций.— М.: Наука, 1977.

Вычисляя константы, найдем

$$B=\frac{A}{\omega}\,\frac{\operatorname{bei}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)}{\operatorname{ber}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)+\operatorname{bei}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)},$$

$$C=\frac{A}{\omega}\,\frac{\operatorname{ber}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)}{\operatorname{ber}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)+\operatorname{bei}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)}. \qquad (148)$$

Возвращаясь к переменной $t=\tau/\nu$ и подставляя полученное значение $\varphi(r, \tau)$ из (147) в (140), окончательно получим следующее выражение для искомого распределения скоростей:

$$w(r,t)=\frac{A}{\omega}\left\{\left[1-\frac{\operatorname{bei}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)\operatorname{bei}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)}{\operatorname{ber}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)+\operatorname{bei}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{ber}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)\operatorname{ber}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)}{\operatorname{ber}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)+\operatorname{bei}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)}\right]\sin\omega t+$$

$$\left.+\frac{\operatorname{bei}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)\operatorname{ber}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)-\operatorname{ber}\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)\operatorname{bei}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)}{\operatorname{ber}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)+\operatorname{bei}^2\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)}\cos\omega t\right\}. \qquad (149)$$

Входящие сюда функции затабулированы, так что вычисление эпюр скоростей в различные моменты времени не составляет труда.

Чтобы дать некоторое представление о характере изменения эпюр скоростей со временем, приводим на рис. 157 заимствованные из ранее процитированной статьи Лямбоси эпюры скоростей в указанные на оси абсцисс моменты времени для значений параметра

$$a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}=2{,}849 \text{ и } 7{,}237,$$

являющихся корнями функции $\operatorname{ber}(a\sqrt{\omega/\nu})$, что облегчает вычисления по формуле (149). Судя по этим кривым, убедимся, что при рассмотренных колебаниях давления в трубе возникают обратные токи. Наблюдается также опережение слоев, расположенных вблизи оси трубы, пристеночными слоями.

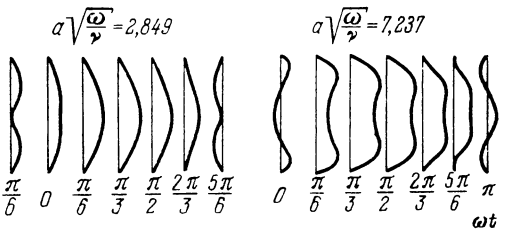


Рис. 157

Решение задачи о приведении в движение покоящейся в круглой цилиндрической трубе вязкой жидкости под действием внезапно приложенного заданного постоянного перепада давления можно найти в монографии Н. А. Слезкина[1]).

[1]) Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости — М.: Гостехиздат, 1955, с. 322—326.

В правой части уравнения (137) в этом случае надо принять

$$f(t) = \text{const} = \frac{\Delta p}{l},$$

а начальное и граничное условия будут

$$w = 0 \text{ при } t = 0, \quad w = 0 \text{ при } r = a.$$

Решение этой задачи сводится к рядам, содержащим бесселевы функции. Отсылая за выводом к только что цитированной монографии, приведем формулу распределения скоростей

$$w(r, t) = a^2 \frac{\Delta p}{4\mu l}\left[1 - \frac{r^2}{a^2} - 8\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\nu\lambda_k^2 t}{a^2}\right)\frac{J_0(\lambda_k r/a)}{\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)}\right].$$

В этой формуле λ_k — корни уравнения

$$J_0(\lambda_k) = 0,$$

а J_0 и J_1 — бесселевы функции нулевого и первого порядка. Первые два слагаемых в квадратной скобке выражают установившееся (при $t \to \infty$) движение и соответствуют ранее уже полученной параболе Пуазейля.

Приведем еще формулу секундного объемного расхода

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\mu l}\left[1 - 32\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\nu\lambda_k^2 t/a^2)}{\lambda_k^4}\right].$$

Все рассмотренные в настоящей главе примеры движений вязкой несжимаемой жидкости основывались на *точном* решении уравнений Навье—Стокса, которые в связи с отсутствием в прямолинейном установившемся движении *конвективного* ускорения были *линейными*. *Приближенные* решения, получаемые благодаря пренебрежению конвективными членами и, тем самым, *линеаризации* уравнений Навье—Стокса, так же как некоторые точные автомодельные решения нелинеаризованных уравнений и *численные* решения *неавтомодельных* задач, будут рассмотрены в следующей главе.

§ 93. Диссипация механической энергии в потоке вязкой жидкости. Вариационный принцип Гельмгольца

В отличие от случая стационарного движения *идеальной* жидкости, полная механическая энергия в потоке *вязкой* жидкости не сохраняется, а *рассеивается* в пространстве. Это явление называется *диссипацией механической энергии*. Диссипация происходит за счет той части работы (мощности) внутренних сил, которая определяется *вязкостью*.

Для выяснения количественной стороны этого явления вспомним, что, согласно второму закону термодинамики, необратимые потери механической энергии в виде превращения ее в тепло связаны с ростом удельной *энтропии* s среды. В свою очередь приращение энтропии определяется в соответствии с основным (первым) законом термодинамики равенством $T\,ds = c_v dT + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = dU + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$, откуда для несжимаемой жидкости следует

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{dU}{dt}. \tag{150}$$

Обратимся теперь к уравнению баланса внутренней энергии, в общем виде выражаемому равенством (22) гл. IV; тогда получим

$$\rho T\frac{ds}{dt} = \rho q - N_{\text{in}}. \tag{151}$$

Согласно этому уравнению изменение энтропии в потоке вязкой жидкости происходит по двум причинам: либо за счет притока тепла q, либо за счет потерянной мощности внутренних сил ($-N_{\text{in}}$). Отвлекаясь от притока тепла извне, т. е. считая движение *адиабатическим* ($q=0$), докажем, что при течении *несжимаемой* вязкой жидкости, удовлетворяющей обобщенному закону Ньютона (9), величина ($-N_{\text{in}}$) *неотрицательна* и, согласно (151), соответствует в общем случае *увеличению энтропии.*

Имеем по (19) гл. IV и (9) настоящей главы

$$-N_{\text{in}} = P \cdot \dot{S} = 2\mu \dot{S} \cdot \dot{S} - pE \cdot \dot{S}$$

или, замечая, что для несжимаемой жидкости (в буквенной индексации)

$$E \cdot \dot{S} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0,$$

$$-N_{\text{in}} = 2\mu \dot{S}^2 \geqslant 0, \tag{152}$$

где (при составлении этой суммы учтено, что квадраты одинаковых недиагональных членов попарно объединяются)

$$\dot{S}^2 = \dot{S} \cdot \dot{S} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2. \tag{153}$$

Равенство (151) приобретает теперь вид

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -N_{\text{in}} = 2\mu \dot{S}^2, \tag{154}$$

откуда прямо следует, что *мощность внутренних сил вязкости вызывает увеличение энтропии*, так что работе сил вязкости соответствует *необратимый* переход механической энергии в тепло — ее *диссипация.* Введем для взятой со знаком минус мощности внутренних сил вязкости ($-N_{\text{in}}$) обозначение $N_{\text{дис}}$, положив

$$N_{\text{дис}} = 2\mu \dot{S}^2, \tag{155}$$

где $\dot{S}^2$ определено правой частью (153).

Энергия, диссипированная в единицу времени в конечном объеме τ, определится интегралом

$$\overline{N}_{\text{дис}} = \int_{\tau} N_{\text{дис}} d\tau = 2\mu \int_{\tau} \dot{S}^2 d\tau. \tag{156}$$

Формула (155) позволяет ответить на вопрос, существуют ли такие движения вязкой жидкости, при которых механическая энергия *не рассеивается* (*не диссипируется*) по потоку.

Подчеркнем, что диссипированная энергия как сумма квадратов является величиной неотрицательной, что соответствует ранее отмеченной положительности прироста энтропии, выражающей *необратимость* перехода механической энергии потока вязкой жидкости в тепло. Из выражений (153) и (155) следует, что единственным движением вязкой несжимаемой жидкости, не сопровождаемым диссипацией механической энергии, является *квазитвердое ее движение*, в котором все слагаемые в квадратных скобках — квадраты скоростей деформаций — обращаются в нуль по отдельности.

Понятие диссипированной энергии легло в основу установленного Гельмгольцем [1]) принципа «минимума диссипированной энергии», спра-

[1]) Helmholtz H. Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten.—Verhandl der naturalist.-med. Vereines, 30 Okt. 1868.

ведливого для всякого «медленного» стационарного движения, допускающего отбрасывание инерционных членов в уравнениях движения несжимаемой вязкой жидкости, под действием консервативного поля объемных сил.

Сравним между собой действительное «медленное» движение в некоторой области, ограниченной замкнутой поверхностью σ, с произвольным другим движением той же (несжимаемой, вязкой, ньютоновской) жидкости, совпадающим с ним по скоростям на поверхности σ. Обозначим через $\boldsymbol{V}$, P и $\dot{S}$ вектор скорости, тензоры напряжений и скоростей деформаций в действительном движении, а буквами со штрихами — разности между этими величинами для произвольного и действительного движений, так что для произвольного движения вектор скорости и тензоры напряжений и скоростей деформаций будут равны

$$\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}', \quad P+P', \quad \dot{S}+\dot{S}'.$$

Составим, согласно (156), выражение мощности $\overline{N}^{*}_{\text{дис}}$, диссипируемой при *произвольном* движении жидкости в объеме, ограниченном поверхностью σ; найдем

$$\overline{N}^{*}_{\text{дис}} = \int_{\tau} (P+P') \cdot (\dot{S}+\dot{S}')\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau} P \cdot \dot{S}\, d\tau + \int_{\tau} P \cdot \dot{S}'\, d\tau + \int_{\tau} P' \cdot \dot{S}\, d\tau + \int_{\tau} P' \cdot \dot{S}'\, d\tau. \qquad (157)$$

Первый интеграл представляет мощность $\overline{N}_{\text{дис}}$, диссипированную в *действительном* движении. Второй и третий интегралы равны между собой. Действительно, согласно равенству (9) настоящей главы,

$$P \cdot \dot{S}' = 2\mu \dot{S} \cdot \dot{S}' - pE \cdot \dot{S}', \quad P' \cdot \dot{S} = 2\mu \dot{S}' \cdot \dot{S} - p'E \cdot \dot{S},$$

причем для несжимаемой жидкости $E \cdot \dot{S}' = \operatorname{div} \boldsymbol{V}' = 0$, $E \cdot \dot{S} = \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0$, следовательно,

$$P \cdot \dot{S}' = P' \cdot \dot{S}.$$

Докажем, что при сделанных предположениях эти два интеграла равны нулю. Для этого вычислим выражение (суммирование по повторяющемуся индексу!)

$$\boldsymbol{V}' \cdot \operatorname{Div} P - \operatorname{div}(P\boldsymbol{V}') = V'_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij} V'_i) = -p_{ij} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} =$$

$$= -\frac{1}{2} p_{ij} \left(\frac{\partial V'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} p_{ij} \left(\frac{\partial V'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right) = -p_{ij} \dot{S}'_{ij} = -P \cdot \dot{S}',$$

после чего получим

$$\int_{\tau} P \cdot \dot{S}'\, d\tau = \int_{\tau} \operatorname{div}(P\boldsymbol{V}')\, d\tau - \int_{\tau} \boldsymbol{V}' \cdot \operatorname{Div} P\, d\tau.$$

По формуле Гаусса — Остроградского

$$\int_{\tau} \operatorname{div}(P\boldsymbol{V}')\, d\tau = \int_{\sigma} (P\boldsymbol{V}')_n\, d\sigma = 0,$$

так как по условию $\boldsymbol{V}' = 0$ на поверхности σ. Принимая далее во внимание, что действительное медленное стационарное движение при наличии консервативного поля объемных сил с потенциалом Π удовлетворяет уравнению в напряжениях

$$-\operatorname{grad} \Pi + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} P = 0$$

и что вследствие этого ($\operatorname{div} \boldsymbol{V}' = 0$ по условию несжимаемости)

$$\frac{1}{\rho} \boldsymbol{V}' \cdot \operatorname{Div} P = \boldsymbol{V}' \cdot \operatorname{grad} \Pi = \operatorname{div} (\Pi \boldsymbol{V}') - \Pi \operatorname{div} \boldsymbol{V}' = \operatorname{div} (\Pi \boldsymbol{V}'),$$

получим, вновь применяя формулу Гаусса — Остроградского и используя условие $\boldsymbol{V}' = 0$ на σ,

$$\frac{1}{\rho} \int_{\tau} \boldsymbol{V}' \cdot \operatorname{Div} P \, d\tau = \int_{\tau} \operatorname{div} (\Pi \boldsymbol{V}') \, d\tau = \int_{\sigma} \Pi V_n' \, d\sigma = 0.$$

Наконец, четвертый интеграл, по предыдущему, может быть представлен в виде неотрицательной величины

$$2\mu \int_{\tau} \dot{S}'^2 \, d\tau.$$

Вернемся теперь к равенству (157) и перепишем его в виде

$$\bar{N}^*_{\text{дис}} - \bar{N}_{\text{дис}} = 2\mu \int_{\tau} \dot{S}'^2 \, d\tau \geqslant 0. \tag{158}$$

Отсюда вытекает следующий принцип Гельмгольца: *механическая энергия, диссипируемая при действительном «медленном» стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости в некотором объеме, не больше, чем в аналогичном произвольном движении несжимаемой жидкости с тем же распределением скоростей на поверхности, ограничивающей этот объем.*

Принцип Гельмгольца можно трактовать как *вариационный принцип минимума диссипируемой энергии*

$$\delta \int_{\tau} \dot{S}^2 \, d\tau = 0. \tag{159}$$

Этот принцип является в известной степени аналогом принципа минимума потенциальной энергии деформаций, широко используемого в теории упругости. Принцип Гельмгольца в гидродинамике вязкой жидкости, так же как принцип минимума потенциальной энергии в теории упругости, может быть положен в основу применения прямых методов вариационного исчисления для решения задач о «медленном» движении.

Необратимость процесса диссипации механической энергии обусловливает тот факт, что приведенная в движение и предоставленная сама себе вязкая жидкость рассеивает (диссипирует) сообщенную ей механическую энергию до тех пор, пока не придет в состояние покоя. При этом механическая энергия, сообщенная некоторому объему жидкости, будет диссипироваться не только в том же самом объеме жидкости, а начнет постепенно распространяться по всей области, занятой потоком, перераспределяться в ней. Это распространение, или, как говорят, *дисперсия* механической энергии осуществляется двумя отличными друг от друга процессами. Первый заключается в простом переносе энергии потоком жидкости и носит наименование *конвекции*. Второй является результатом наличия в жидкости внутримолекулярного переноса; его называют *диффузией*. Природа этого процесса та же, что и у вязкого трения, которое, как уже ранее упоминалось, представляет собой макроскопическое проявление микроскопического (молекулярного) переноса количества движения.

У молекулярного переноса — диффузии механической энергии и аналогичного переноса количества движения — вязкого трения — общий носитель и, как далее будет выяснено, общий коэффициент переноса (диффузии) — кинематический коэффициент вязкости ν. В дальней-

шем придется встретиться с процессами переноса других величин: *завихренности*, *тепла* (теплоперенос), *вещества* (массоперенос). Носителями всегда будут служить молекулы в их тепловом движении, но наряду с коэффициентом ν для завихренности, появятся и другие коэффициенты переноса. Так, в случае теплопереноса будет использован коэффициент *температуропроводности*, в случае переноса вещества — коэффициент *массопроводности*.

§ 94. Диффузия завихренности

Выпишем уравнение Навье—Стокса в форме, аналогичной уравнению Громека—Ламба (32), но вернемся к исходной форме записи вязкого члена

$$-\nu \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{V}=\nu\nabla^2\boldsymbol{V}.$$

К левой и правой частям таким образом полученного уравнения

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\operatorname{rot}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}=-\operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2}+\Pi+\mathcal{P}\right)+\nu\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{160}$$

применим операцию вихря rot.

Тогда, не повторяя выкладок, произведенных в конце § 29 гл. V при выводе уравнения Гельмгольца (16), и замечая еще, что

$$\operatorname{rot}(\nabla^2\boldsymbol{V})=\nabla^2(\operatorname{rot}\boldsymbol{V})=\nabla^2\boldsymbol{\Omega},$$

получим уравнение *дисперсии* (распространения) завихренности в вязкой несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}=(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega} \tag{161}$$

или в более короткой форме, вводя в левой части индивидуальную производную $\boldsymbol{\Omega}$ по t,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}=(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega}. \tag{162}$$

Уравнения (161) и (162) можно рассматривать как *обобщение* уравнения Гельмгольца (16) гл. V на случай несжимаемой *вязкой* жидкости.

Последний член справа представляет собственно *диффузию завихренности* $\boldsymbol{\Omega}$, причем роль коэффициента диффузии играет кинематический коэффициент вязкости ν.

В случае *плоского* потока вектор $\boldsymbol{\Omega}$ перпендикулярен к плоскости течения, а величина $(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$, пропорциональная производной от $\boldsymbol{V}$ по направлению перпендикуляра к этой плоскости, равна нулю, так что уравнение (162) в плоском потоке примет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}=\nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega}. \tag{163}$$

Рассмотрим простейший процесс *диффузии* отдельной прямолинейной вихревой нити в неподвижной на бесконечном удалении от нее жидкости.

Пусть в некоторый момент времени $t=0$ в вязкую несжимаемую жидкость введена бесконечная прямолинейная вихревая нить, которой в перпендикулярной к ней плоскости соответствует вихрь с циркуляцией Γ и полем скоростей

$$V=\frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Такое поле может существовать как в вязкой, так и в идеальной жидкости, поскольку плоское безвихревое поле скорости с потенциалом $\varphi = \operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z\right)$ удовлетворяет условию $\nabla^2\varphi = 0$, а единственное граничное условие $V \to 0$ при $r \to \infty$, очевидно, выполняется. Разница лишь в том, что в *идеальной* жидкости нет рассеяния (диссипации) энергии и введенный в идеальную жидкость вихрь будет существовать *бесконечно долго*, а в *вязкой* жидкости для поддержания движения с полем скоростей $V = \Gamma/(2\pi r)$ необходимо все время подводить энергию, например, вращая в жидкости тонкий цилиндр, являющийся *источником* завихренности.

Рассмотрим теперь *нестационарный* процесс, который возникнет, если в начальный момент $t = 0$ из индуцированного вихрем движения вязкой жидкости изъять источник завихренности.

Предполагая движение плоским и, в силу симметрии, с *круговыми* линиями тока, опустим в уравнении (163) конвективный член $V \cdot \operatorname{grad}\Omega$, равный нулю, так как вдоль линий тока завихренность сохраняет постоянное значение. Тогда уравнение (163), спроектированное на ось Oz, примет вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \Omega$$

или в полярных координатах при $\partial\Omega/\partial\varepsilon = 0$, согласно (85) гл. I,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right).$$

Уравнение это может быть переписано в форме известного уравнения теории распространения тепла

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right). \tag{164}$$

Интегралом его, удовлетворяющим начальному условию $\Omega = 0$ при $t = 0$ и $r > 0$ и граничному условию $\Omega \to 0$ при $r \to \infty$ служит известное решение типа «источника тепла»

$$\Omega = \frac{A}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}, \tag{165}$$

в чем легко убедиться простой подстановкой этого выражения в уравнение, начальное и граничное условия. Чтобы найти величину A, воспользуемся теоремой Стокса и напишем, что в любой момент времени интенсивность вихревой трубки радиуса r

$$\int_0^r \Omega \cdot 2\pi r\, dr$$

равна циркуляции скорости по окружности радиуса r, равной $V \cdot 2\pi r$.

Будем иметь

$$V = \frac{1}{2\pi r}\int_0^r \frac{A}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} 2\pi r\, dr = \frac{2A\nu}{r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)$$

и, сравнивая с начальным распределением скоростей

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r} \text{ при } t = 0,\ r > 0,$$

найдем

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi\nu}.$$

Таким образом, получим окончательные формулы: распределения вихря

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \tag{166}$$

и распределения скоростей

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \tag{167}$$

Легко убедиться, что полученные результаты соответствуют *автомодельному* решению уравнения (164), которое существует в связи с отсутствием в постановке задачи масштабов длин и скоростей. *Тривиальное* решение уравнения (164) $\Omega \equiv 0$ и $V \equiv 0$ не удовлетворяет условию заданной интенсивности вихря или циркуляции Γ.

Проанализируем полученные результаты. В начальный момент времени $t=0$ движение повсюду ($r>0$) было безвихревым. После удаления источника завихренности, т. е. при $t>0$ во всем пространстве мгновенно возникло некоторое распределение распространяющейся завихренности, которое представляется быстро убывающей с возрастанием расстояния r функцией (166). Завихренность в центре ($r=0$) монотонно убывает с ростом времени, а в точке, находящейся на некотором расстоянии от центра, сначала возрастает, а затем убывает до нуля при $t=\infty$.

Рассмотрим какую-нибудь окружность радиуса $r=a$. Изменение со временем завихренности в точках этой окружности представится в виде

$$(\Omega)_{r=a} = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{a^2}{4\nu t}}.$$

Исследуя эту функцию на максимум — минимум, заключим, что в момент времени $t_m = a^2/(4\nu)$ завихренность достигнет своего *максимального* значения

$$\Omega_m = \frac{\Gamma}{4\pi\nu e t_m} = \frac{\Gamma}{\pi a^2 e}.$$

При дальнейшем возрастании времени завихренность будет убывать.

Об общем характере зависимости от времени завихренности в точках, находящихся на разных расстояниях от центра, можно судить по кривым, приведенным на рис. 158.

Кривые распределения скоростей в различные последовательные моменты времени приведены на рис. 159.

Пользуясь полученными формулами и графиками, можно составить общее представление о явлении диффузии *единичного* вихря в безграничной вязкой жидкости. Более сложно с математической стороны решается вопрос о диффузии в безграничной вязкой жидкости *вихревой трубки конечных размеров*, а также плоского и цилиндрического вихревых слоев [1]).

---

[1]) Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II.— М.: Физматгиз, 1963, с. 453—460

Уравнение (164) в этом случае остается в силе, но *начальные* условия усложняются и принимают вид

$$\Omega(r, 0) = \text{const} = \Omega_0 \quad \text{при } 0 \leqslant r \leqslant a,$$
$$\Omega(r, 0) = 0 \quad \text{при } r > a.$$

Отсылая интересующихся к только что цитированному руководству, приведем окончательный результат:

$$\Omega(r, t) = \begin{cases} \Omega_0 e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^k \mathrm{I}_k\left(\frac{ar}{2\nu t}\right) & \text{при } r \geqslant a, \\ \Omega_0 - \Omega_0 e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k \mathrm{I}_k\left(\frac{ar}{2\nu t}\right) & \text{при } r < a, \end{cases} \tag{168}$$

где I_k — бесселева функция, определяемая через бесселеву функцию $J_k(z)$ с мнимым аргументом равенством

$$\mathrm{I}_k(z) = \frac{1}{i^k} J_k(iz). \tag{169}$$

Желая определить быстроту рассеивания завихренности в зависимости от начального радиуса вихревой трубки a, заметим, что по второй из формул (168)

$$\Omega(0, t) = \Omega_0(1 - e^{-\frac{a^2}{4\nu t}}), \tag{170}$$

и чтобы оценить *время релаксации* τ вихревой трубки конечного

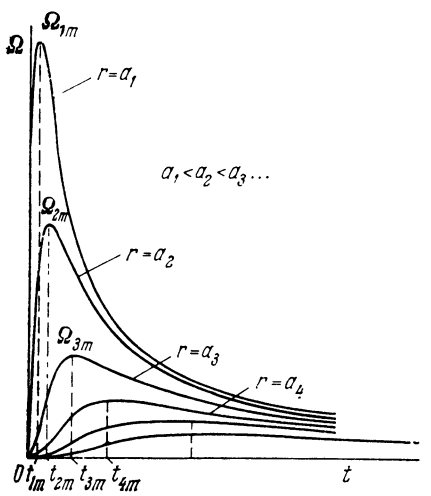


Рис 158

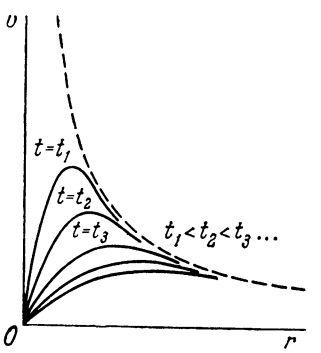


Рис. 159

радиуса a, т. е. промежуток времени, по истечении которого Ω в центре трубки достигнет половины своего начального значения, найдем, решая уравнение

$$1 - e^{-\frac{a^2}{4\nu\tau}} = \frac{1}{2}, \quad \tau = \frac{a^2}{4\nu \ln 2} \approx 0{,}36\frac{a^2}{\nu}.$$

Если жидкостью является *вода* ($\nu = 0{,}01$ см^2/с), то $\tau = 36\ a^2$, так что при $a = 1$ см время релаксации будет равно 36 с. Для *воздуха* ($\nu = 0{,}133$ см^2/с) $\tau = 2{,}7\ a^2$, т. е. при $a = 1$ см $\tau = 2{,}7$ с. При $a = 1$ м τ окажется равным 450 мин (!). Эти соображения, заимствованные из статьи Н. Е. Кочина, помещенной в только что цитированном руководстве (с. 458, 459), будут полезны в дальнейшем при рассмотрении *релаксационных явлений в мелко- и крупномасштабной турбулентности.*

Заметим, что *диффузия вихрей тем значительнее, чем мельче их размеры; быстрее всего релаксируют мелкие вихри.*

§ 95. Диффузия тепла и вещества в потоках несжимаемой вязкой жидкости

Считая вязкую жидкость несжимаемой, т. е. не изменяющей при движении свою плотность, откажемся от ее *изотермичности* и однородности, но вместе с тем удовольствуемся тем простейшим случаем, когда переменность температуры и концентрации примеси не влияют на вязкость, теплопроводность, теплоемкость и другие термодинамические свойства жидкости, в частности, на коэффициент диффузии примеси. При слабых нагревах среды отвлечемся от лучистого теплообмена и будем считать перенос тепла полностью осуществляемым *теплопроводностью*.

Имея в виду важность в некоторых случаях учета *свободной конвекции*, возникающей в среде за счет разности ее плотностей в неоднородном поле температур, включим в рассмотрение объемную архимедову силу

$$\boldsymbol{F}=\frac{\Delta\rho}{\rho}\boldsymbol{g}.$$

Понятие об архимедовой силе, действующей на твердое тело, погруженное в жидкость, непосредственно обобщается на случай жидкого тела плотности ρ, отличной от плотности ρ_0 окружающей его жидкости. Возникающая при этом равнодействующая силы тяжести $\rho\boldsymbol{g}\delta\tau$ элементарного объема $\delta\tau$ и приложенной к нему архимедовой силы $(-\rho_0\boldsymbol{g}\delta\tau)$, будучи отнесена к элементарной массе $\rho\,\delta\tau$, даст ту объемную силу

$$\boldsymbol{F}=\frac{\rho\boldsymbol{g}\,\delta\tau-\rho_0\boldsymbol{g}\,\delta\tau}{\rho\,\delta\tau}=\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\,\boldsymbol{g}=\frac{\Delta\rho}{\rho}\,\boldsymbol{g},$$

которая должна учитываться при составлении дифференциального уравнения свободной конвекции жидкости. Вводя термический коэффициент расширения жидкости β, определяемый равенством

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\beta\,\Delta T,$$

где $\Delta\rho$ и ΔT — соответственно «избыточные» плотность и температура, можно представить $\boldsymbol{F}$ в форме

$$\boldsymbol{F}=\beta\boldsymbol{g}\Delta T. \tag{171}$$

Уравнения Навье — Стокса (30), характеризующие *динамическую* сторону явления, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\beta\boldsymbol{g}\,\Delta T+\nu\nabla^2\boldsymbol{V},\\&\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0.\end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Для вывода уравнения распространения тепла в *несжимаемой* среде — случай газа рассмотрен в § 149 — используем общее уравнение баланса энергии (22) гл. IV, положив в нем $U=cT$, где c — теплоемкость среды, а T — абсолютная температура. Для вектора потока тепла $\boldsymbol{q}$, отнесенного к единице площади и единице времени, примем закон Фурье

$$\boldsymbol{q}=-\lambda\operatorname{grad}T, \tag{173}$$

где λ — коэффициент теплопроводности среды. Удельный приток тепла ρq (на единицу объема) извне к данной точке среды определится пределом

$$\rho q=-\lim\frac{1}{\tau}\int_\sigma q_n\,d\sigma=\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\int_\sigma(\lambda\operatorname{grad}T)_n\,d\sigma=\operatorname{div}(\lambda\operatorname{grad}T).$$

В случае однородной среды с постоянным коэффициентом теплопроводности λ этот приток тепла определится равенством

$$\rho q = \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \lambda \nabla^2 T.$$

Мощность внутренних сил, входящая в уравнение (22) гл. IV, как это было показано в § 93, в случае несжимаемой вязкой жидкости сводится к *диссипируемой* в тепло механической энергии (155), при малых скоростях, точнее, малых числах Маха ничтожна и может быть опущена; это непосредственно следует из предпоследнего безразмерного уравнения (33) гл. XV, в котором члены, содержащие диссипацию механической энергии, пропорциональны числу Маха в квадрате.

Искомое уравнение теплопроводности, иногда именуемое *уравнением баланса тепла*, примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \operatorname{grad} T = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T = a \nabla^2 T, \tag{174}$$

где константа a носит наименование *коэффициента температуропроводности*. Уравнение (174) присоединяется к уравнению (172), образуя с ним общую систему уравнений процесса теплопередачи в несжимаемой среде.

Применим к этой системе уравнений обычный прием теории подобия, служащий для установления чисел и критериев подобия. Составим систему безразмерных уравнений

$$\begin{gathered} \mathrm{Sh} \frac{\partial V'}{\partial t'} + (V' \cdot \nabla') V' = - \mathrm{Eu} \operatorname{grad}' p' + \frac{1}{\mathrm{Fr}} g' + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla'^2 V', \\ \mathrm{Sh} \frac{\partial T'}{\partial t'} + V' \cdot \operatorname{grad}' T' = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \nabla'^2 T'. \end{gathered} \tag{175}$$

Здесь, помимо известных нам уже по предыдущему чисел Струхала, Эйлера и Рейнольдса

$$\mathrm{Sh} = \frac{NL}{V}, \quad \mathrm{Eu} = \frac{P}{\rho V^2}, \quad \mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu}, \tag{176}$$

появилось *число Пекле*

$$\mathrm{Pe} = \frac{VL}{a}, \tag{177}$$

и, кроме того, число Фруда имеет специфическое для неизотермического движения жидкости значение (ΔT — масштаб перепада температур)

$$\mathrm{Fr} = \frac{V^2}{gL} \frac{1}{\beta \Delta T}. \tag{178}$$

Укажем, что вместо чисел Пекле и Фруда обычно пользуются двумя их комибнациями с остальными числами подобия (176); числом Прандтля Pr, равным отношению числа Пекле Pe к числу Рейнольдса Re

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}} = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c}{\lambda}, \tag{179}$$

и числом Грасгофа

$$\mathrm{Gr} = \frac{\mathrm{Re}^2}{\mathrm{Fr}} = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2}. \tag{180}$$

Число Грасгофа используют при изучении явлений *свободной конвекции*, так как оно не содержит масштаба скорости, отсутствующего в задании свободной конвекции.

Перейдем к рассмотрению близкого к предыдущему явления распространения (*диффузии*) примеси в однородной среде — «носителе». Отсылая за подробным описанием диффузии к § 149, заметим здесь, что явления теплопередачи и массопередачи находятся в тесной связи и допускают одну и ту же математическую модель. Аналогом вектора потока тепла $\boldsymbol{q}$ (173) в процессах диффузии вещества служит вектор плотности потока массы $\rho C\boldsymbol{V}^*$ примеси, содержащий, кроме плотности, скорость диффузии $\boldsymbol{V}^*$ и концентрацию примеси C (сохраняя обозначение, близкое к общепринятому, введем для концентрации заглавную букву C, чтобы не смешивать ее с теплоемкостью c). Скорость диффузии примеси в «носителе» определяется законом Фика

$$\boldsymbol{V}^* = -\frac{D}{C}\operatorname{grad} C, \tag{181}$$

аналогичным закону Фурье распространения тепла (173) с той лишь разницей, что вместо коэффициента *теплопроводности* λ входит коэффициент *массопроводности* D, именуемый обычно *коэффициентом диффузии* примеси

Дифференциальное уравнение *диффузии* примеси выводится подобно уравнению баланса тепла (174) и имеет ту же форму:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad} C = D\nabla^2 C. \tag{182}$$

Полученное уравнение (182), так же как (174), присоединяется к уравнениям (172), причем обычно предполагается отсутствие влияния примеси на динамическую часть явления (условие *пассивности* примеси). Более общий подход, относящийся к *многокомпонентным смесям газов*, излагается в § 149 применительно к теории ламинарного пограничного слоя в потоке газа больших до- и сверхзвуковых скоростей. Переходя в уравнении (182) к безразмерным переменным, получим

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial C'}{\partial t'} + \boldsymbol{V}'\cdot\operatorname{grad}' C' = \frac{1}{\mathrm{Pe}_d}\nabla'^2 C', \tag{183}$$

где Pe_d — диффузионное число Пекле, отличающееся от числа Pe (177) коэффициентом диффузии вещества (примеси) D, заменяющим коэффициент температуропроводности a:

$$\mathrm{Pe}_d = \frac{VL}{D}. \tag{184}$$

Отношение

$$\mathrm{Sc} = \mathrm{Pr}_d = \frac{\mathrm{Pe}_d}{\mathrm{Re}} = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D} \tag{185}$$

носит наименование *числа Шмидта*, или *диффузионного числа Прандтля*.

Численные значения коэффициента переноса D для различных жидкостей и газов можно найти в руководствах и справочниках[1]). Решение линейных уравнений распространения тепла и примеси часто требует сложных вычислений[2])

Уравнения теплопереноса, учитывающие приток тепла за счет диссипации механической энергии, рассмотрены в последней главе курса.

---

[1]) См., например, Белащенко Д. К., Жуховицкий А. А. Диффузия — Физ. энцикл. словарь. Т. 1. — М.: Советская энциклопедия, 1960, с. 622, 623.

[2]) Примеры применения только что выведенных уравнений тепломассопереноса потребовали бы значительного места в настоящем, не претендующем на изложение этих самостоятельных вопросов учебнике. Отошлем интересующихся к специальным курсам: Сполдинг Д. Б. Конвективный массоперенос. — М.; Л.: Энергия, 1965; Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. — М.: ИЛ, 1958; Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса. — М.: Госэнергоиздат, 1963; Жукаускас А. А. Конвективный перенос в теплообменниках. — М.: Наука, 1982.

ГЛАВА XI

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА: ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ, АВТОМОДЕЛЬНЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 96. Обтекание шара при малых значениях числа Рейнольдса; формула Стокса и ее обобщения

Получение в предыдущих параграфах *точных* решений уравнений Навье — Стокса сравнительно простыми математическими средствами было обусловлено *линейностью* основных уравнений, которая следовала из предположения о прямолинейности линий тока в цилиндрических (призматических) трубах. Решение задач *внешнего* обтекания тел вязкой жидкостью требует решения *нелинейных* уравнений, причем нелинейность заключена в стоящем в левой части уравнения инерционном члене, выражающем конвективную часть ускорения. Откидывание этого члена или замена его приближенным линейным выражением приводит к *линеаризации* уравнений.

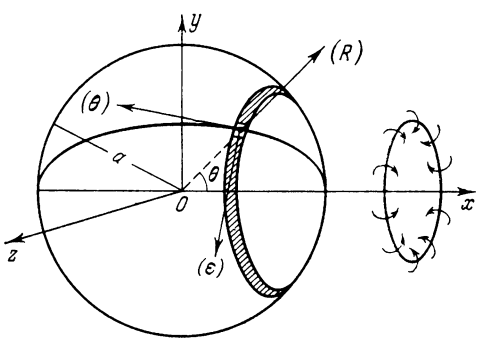


Рис. 160

Простейшим примером такой линеаризации может служить классическая *задача Стокса о медленном стационарном обтекании шара*; под этим понимают такое обтекание, при котором основное значение придается силам трения и давлений, а инерционные члены откидываются.

Обозначим скорость однородного потока на бесконечности через $\boldsymbol{V}_\infty$, а радиус шара через a. Направим основную ось Ox (рис. 160) сферической системы координат (R, θ, ε) параллельно вектору $\boldsymbol{V}_\infty$. Пренебрегая объемными силами и инерционными членами, приведем уравнение Навье — Стока (30) гл. X к виду

$$\begin{gathered}\operatorname{grad} p+\mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}=0, \\ \boldsymbol{\Omega}=\operatorname{rot} \boldsymbol{V}, \ \operatorname{div} \boldsymbol{V}=0.\end{gathered} \tag{1}$$

Исключим давление p, для чего к обеим частям первого из уравнений системы (1) применим операцию вихря. Получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}=0. \tag{2}$$

Замечая, что благодаря осевой симметрии обтекания вихревые линии представляют собой окружности в плоскостях, перпендикулярных к оси Ox, с центрами на этой оси, заключим, что вектор вихря имеет лишь одну составляющую Ω_ε, которую для краткости обозначим просто Ω, включая в это обозначение знаки $\pm$; составляющие Ω_R и Ω_θ, очевидно, равны нулю, так как вихрь вектора направлен по касательной к вихревой линии. В силу той же симметрии имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}=0, \quad \Omega=\Omega(R, \theta).$$

Вспоминая (86) гл. I, будем иметь выражения компонент вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega}$ в сферической системе координат

$$\operatorname{rot}_R\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Omega\sin\theta),\quad \operatorname{rot}_\theta\boldsymbol{\Omega}=-\frac{1}{R}\frac{\partial(R\Omega)}{\partial R},\quad \operatorname{rot}_\varepsilon\boldsymbol{\Omega}=0$$

и, повторяя ту же операцию,

$$\operatorname{rot}_R(\operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega})=0,\ \operatorname{rot}_\theta(\operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega})=0,$$

$$\operatorname{rot}_\varepsilon(\operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega})=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\operatorname{rot}_\theta\boldsymbol{\Omega})-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{rot}_R\boldsymbol{\Omega})=$$

$$=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[-R\frac{1}{R}\frac{\partial(R\Omega)}{\partial R}\right]-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Omega\sin\theta)\right]=$$

$$=-\frac{1}{R}\frac{\partial^2(R\Omega)}{\partial R^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Omega\sin\theta)\right].$$

Таким образом, уравнение (2) в сферических координатах сведется к более простому

$$R\frac{\partial^2(R\Omega)}{\partial R^2}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Omega\sin\theta)\right]=0, \tag{3}$$

решение которого $\Omega(R,\theta)$ можно пока подчинить лишь одному граничному условию

$$\Omega\to 0 \text{ при } R\to\infty. \tag{4}$$

Разыскивая решение уравнения (3) в виде произведения двух функций $P(R)$ и $\Theta(\theta)$, каждая из которых зависит лишь от одной переменной, подставим значение $\Omega=P(R)\Theta(\theta)$ в уравнение (3); получим

$$\frac{R}{P(R)}\frac{d^2}{dR^2}[RP(R)]=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}[\Theta(\theta)\sin\theta]\right\}.$$

В силу независимости координат R и θ левая и правая части этого равенства должны быть порознь постоянными; отсюда следует (α — произвольная постоянная)

$$\frac{R}{P(R)}\frac{d^2}{dR^2}[RP(R)]=\alpha,\quad \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}[\Theta(\theta)\sin\theta]\right\}=-\alpha.$$

Используя произвол в выборе постоянной, подберем ее так, чтобы второе из только что полученных уравнений имело соответствующее по смыслу задачи периодическое решение. Заметим, что при $\alpha=2$ это уравнение имеет очевидное решение

$$\Theta(\theta)=\sin\theta,$$

а первое уравнение системы превращается в

$$\frac{d^2}{dR^2}[RP(R)]=\frac{2}{R}P(R).$$

Единственное решение последнего уравнения, удовлетворяющее условию обращения в нуль при $R\to\infty$, будет const/R^2. Обозначая константу через A, получим искомое решение для вихря $\boldsymbol{\Omega}$ в виде

$$\Omega=\frac{A\sin\theta}{R^2}. \tag{5}$$

Обратимся теперь к задаче разыскания сферических составляющих скорости V_R и V_θ ($V_\varepsilon=0$ в силу симметрии обтекания); имеем для их определения два уравнения: 1) уравнение (5), которое, пользуясь выражением вихря скорости $\boldsymbol{\Omega}$ через составляющие скорости в сферических

координатах V_R и V_θ, можно переписать в форме

$$\frac{1}{R}\frac{\partial(RV_\theta)}{\partial R} - \frac{1}{R}\frac{\partial V_R}{\partial\theta} = \frac{A\sin\theta}{R^2}, \tag{6}$$

и 2) уравнение несжимаемости в сферических координатах (при $V_\varphi = 0$)

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2V_R)}{\partial R} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial(V_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} = 0. \tag{7}$$

Систему уравнений (6) и (7) надо решить при граничных условиях

$$\begin{aligned} &V_R = 0, && V_\theta = 0 && \text{при } R = a,\\ &V_R = U_\infty\cos\theta, && V_\theta = -U_\infty\sin\theta && \text{при } R = \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Принимая во внимание эти граничные условия, будем искать решение в виде

$$V_R = \left(U_\infty + \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{R^k}\right)\cos\theta, \quad V_\theta = \left(-U_\infty + \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k'}{R^k}\right)\sin\theta, \tag{9}$$

где число n считаем неопределенным. Подставляя выражения (9) в уравнения (6) и (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим равенства

$$\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k + (1-k)\lambda_k']R^{1-k} = A, \quad \sum_{k=1}^{n}[(2-k)\lambda_k + 2\lambda_k']R^{1-k} = 0.$$

В силу произвольности величины R будем иметь при $k=1$

$$\lambda_1 = A, \quad \lambda_1 + 2\lambda_1' = 0, \quad \lambda_1' = -\frac{1}{2}\lambda_1 = -\frac{1}{2}A,$$

а при $k>1$

$$\lambda_k + (1-k)\lambda_k' = 0, \quad (2-k)\lambda_k + 2\lambda_k' = 0.$$

Последняя однородная система имеет решения, отличные от нуля, только при равенстве нулю определителя системы

$$2-(1-k)(2-k) = 0.$$

Корни этого уравнения: $k=0$ и $k=3$, причем первый отбрасывается, так как $k\geqslant 1$. Отсюда следует равенство

$$\lambda_3' = \frac{1}{2}\lambda_3;$$

все остальные λ_k и λ_k' тождественно равны нулю.

Возвращаясь теперь к (9), составляем общие выражения скоростей

$$V_R = \left(U_\infty + \frac{A}{R} + \frac{\lambda_3}{R^3}\right)\cos\theta, \quad V_\theta = \left(-U_\infty - \frac{A}{2R} + \frac{\lambda_3}{2R^3}\right)\sin\theta;$$

подчиняя эти скорости граничным условиям (8), получим два уравнения для определения коэффициентов A и λ_3:

$$\frac{A}{a} + \frac{\lambda_3}{a^3} = -U_\infty, \quad -\frac{A}{2a} + \frac{\lambda_3}{2a^3} = U_\infty.$$

Найдем

$$A = -\frac{3}{2}aU_\infty, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}a^3U_\infty.$$

Окончательно получим следующие выражения компонент скорости в сферической системе координат:

$$V_R = U_\infty \left[1 - \frac{3}{2}\frac{a}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\cos\theta,$$

$$V_\theta = -U_\infty \left[1 - \frac{3}{4}\frac{a}{R} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\sin\theta. \tag{10}$$

Выделяя из полученных выражений составляющие скорости на бесконечности: $U_\infty \cos\theta$ и $(-U_\infty \sin\theta)$, получим составляющие *скорости возмущения* шаром безграничной вязкой жидкости

$$V'_R = -U_\infty \left[\frac{3}{2}\frac{a}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\cos\theta, \quad V'_\theta = U_\infty \left[\frac{3}{4}\frac{a}{R} + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\sin\theta.$$

Отметим, что, в отличие от обтекания шара идеальной жидкостью, где порядок скоростей возмущения был $1/R^3$, в вязкой жидкости имеет место более сильное возмущение, убывающее при удалении от шара лишь как $1/R$.

Распределение завихренности определится по (5) в виде

$$\Omega = -\frac{3}{2} a U_\infty \frac{\sin\theta}{R^2}.$$

Остается найти распределение давления в потоке и трение на поверхности шара, а затем и полное сопротивление шара. Из первого уравнения (1) имеем

$$\operatorname{grad} p = -\mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega},$$

или в сферических координатах

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\mu \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Omega\sin\theta) = 3\mu a U_\infty \frac{\cos\theta}{R^3},$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial\theta} = \mu \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\Omega) = \frac{3}{2}\mu a U_\infty \frac{\sin\theta}{R^3}.$$

Эта система уравнений в полных дифференциалах легко интегрируется и дает искомое выражение давления

$$p = -\frac{3}{2}\mu a U_\infty \frac{\cos\theta}{R^2} + p_\infty;$$

тогда, составляя по предыдущему коэффициент давления, получим

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = -\frac{3\mu}{\rho U_\infty a}\frac{\cos\theta}{(R/a)^2} = -\frac{6}{\mathrm{Re}}\frac{\cos\theta}{(R/a)^2}, \tag{11}$$

где под Re подразумевается характерное для обтекания шара число Рейнольдса ($d = 2a$ — диаметр шара)

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_\infty d}{\mu} = \frac{U_\infty d}{\nu}.$$

Отметим характерные отличия распределений давлений при «медленном» обтекании шара вязкой жидкостью от обтекания его идеальной жидкостью:

1) в идеальной жидкости коэффициент давления на поверхности зависит только от относительного расположения точки (угла θ), в которой давление определяется, и не зависит от размеров тела, скорости и плотности жидкости; в вязкой жидкости *коэффициент давления явля-*

ется функцией числа Рейнольдса обтекания, т. е. зависит от абсолютного размера тела, от скорости, плотности и вязкости жидкости;

2) распределение давления по поверхности шара *не симметрично* относительно миделевой плоскости, так что *главный вектор сил давления* при обтекании шара вязкой жидкостью *отличен от нуля* (парадокс Даламбера не имеет места);

3) коэффициент давления в критических точках не равен единице; он зависит от числа Рейнольдса и имеет разные знаки в передней и задней критических точках; в *миделевом сечении* ($\theta=\pi/2$) *давление на поверхности шара равно давлению в невозмущенном потоке, а максимальное разрежение достигается в задней критической точке.*

Касательная составляющая напряжения трения на поверхности шара $\tau_{R\theta}$ будет равна, согласно (13) гл. X,

$$\tau_{R\theta}=p_{R\theta}=\mu\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial V_R}{\partial\theta}-\frac{V_\theta}{R}\right)_{R=a}=\mu\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial R}\right)_{R=a}=-\frac{3}{2}\mu\frac{U_\infty}{a}\sin\theta.$$

Взяв на поверхности шара поясок (на рис. 160 показанный штриховкой) с площадью $2\pi a\sin\theta\cdot a\,d\theta=2\pi a^2\sin\theta\,d\theta$, умножим на эту площадь напряжение трения $\tau_{R\theta}$ и давление p; полученные таким образом элементарные силы спроектируем на ось Ox и просуммируем по всей поверхности шара (от $\theta=0$ до $\theta=\pi$). Тогда получим проекцию на направление скорости набегающего потока силы сопротивления движению тела в вязкой жидкости, приложенную к телу со стороны жидкости, в виде

$$W_x=\int_0^\pi(-\tau_{R\theta}\sin\theta-p\cos\theta)\cdot 2\pi a^2\sin\theta\,d\theta=3\pi\mu aU_\infty\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta=6\pi\mu aU_\infty. \tag{12}$$

Это выражение силы сопротивления называют *формулой Стокса.*

Полученное решение пригодно лишь при очень малых значениях числа $\mathbf{Re}=U_\infty d/\nu$. Это следует из того, что отношение величин откинутых инерционных членов к членам, характеризующим силы трения, имеет порядок рейнольдсова числа. Действительно,

$$\frac{\rho\,|(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{V}|}{\mu\,|\operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega}|}\sim\frac{\rho U_\infty^2}{d}:\frac{\mu U_\infty}{d^2}=\mathbf{Re}.$$

Можно вообще утверждать, что число **Re** служит мерой сравнительной роли инерционных и вязкостных членов в уравнениях движения. *Чем меньше число* **Re**, *тем больше роль сил вязкости* в рассматриваемом движении.

Переходя в формуле (12) от силы сопротивления к коэффициенту сопротивления c_x, будем иметь

$$c_x=\frac{W_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2\pi a^2}=\frac{6\pi\mu aU_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2\pi a^2}=\frac{24}{\mathbf{Re}}. \tag{13}$$

Более точные теории Озеена и Озеена — Голдстейна дают для коэффициента сопротивления вместо (13) разложение в ряд по степеням числа **Re**, принимаемого малым,

$$c_x=\frac{24}{\mathbf{Re}}\left(1+\frac{3}{16}\mathbf{Re}-\frac{19}{1280}\mathbf{Re}^2+\ldots\right).$$

Сохраняя только первый член ряда, получим формулу Стокса; два члена дают формулу Озеена

$$c_x = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{3}{16}\mathrm{Re}\right) = \frac{24}{\mathrm{Re}} + 4{,}5. \qquad (14)$$

На рис. 161 [1]) показаны кривые: *1* — по Стоксу, *2* — по Озеену, *3* — по опытам. После значения числа Рейнольдса, имеющего порядок единицы, кривые *1* и *2* заметно отходят от кривой *3*, причем в разные стороны. Как можно судить по этим результатам, формулу Стокса [(12) или (13)] можно применять только в случаях очень малых чисел Рейнольдса, например для мелких дождевых капель или пыли в атмосфере, падения стальных шариков в очень вязких жидкостях и т. п.

При больших рейнольдсовых числах указанные только что формулы становятся неудовлетворительными.

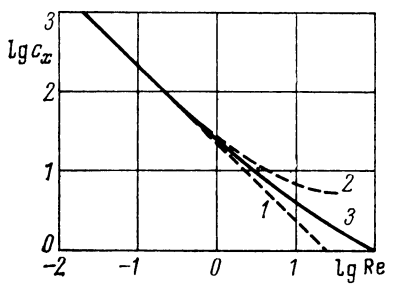


Рис. 161

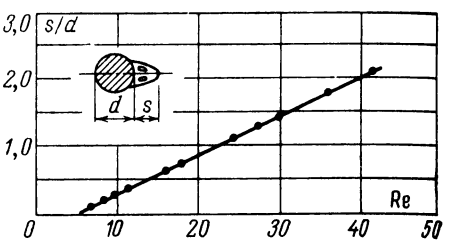


Рис. 162

Объясняется это тем, что с возрастанием числа Re в кормовой области шара (так же как и других «плохо обтекаемых» тел) образуется отрыв и сложные *нестационарные* явления типа *автоколебаний*, о которых уже была речь в § 87. Явления эти развиваются в области за кормой тела, причем относительные размеры этой области возрастают с ростом числа Рейнольдса, как об этом, например, можно судить по рис. 162 [2]), относящемуся к плоскому обтеканию кругового цилиндра.

Для широкого диапазона рейнольдсовых чисел приходится пользоваться эмпирическими данными (см. гл. XIII). Что касается приближенных расчетов сопротивления сферы или круглого цилиндра бесконечного размаха, то в связи с развитием численных методов они стали вполне осуществимыми. Пример *численного* решения задачи об обтекании круглого цилиндра будет вскоре разобран (§ 104). Литература по методам линеаризации уравнений Навье — Стокса в случае обтекания кругового цилиндра и сферы очень обширна [3]).

Наряду с рассмотренной *стационарной* задачей подробно исследован и *нестационарный* ее аналог. Приведем без вывода [4]) формулу Бус-

---

[1]) Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973, с. 298.

[2]) Там же, с. 328.

[3]) Классической монографией, содержащей методы линеаризации, явилась в свое время книга: Oseen C. W. **Hydrodynamik.— Leipzig: Akad. Verlag, 1927.** Среди наиболее распространенных в настоящее время курсов, где этому вопросу уделяется достаточное внимание, укажем: Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика Ч. II.— М.: Физматгиз, 1963, с. 504—534; Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Гостехиздат, 1955, а также только что цитированную монографию Дж. Бэтчелора. Критические замечания по поводу методов линеаризации имеются в монографии: Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М: Мир, 1967.

[4]) Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики.— М.: ГОНТИ, 1938, с. 209—216.

синеска сопротивления W сферы радиуса a, движущейся поступательно с заданной переменной скоростью $\boldsymbol{V}(t)$ в безграничной области, заполненной вязкой жидкостью $[V(0)=0]$

$$W=-6\pi\mu aV(t)-\frac{2}{3}\pi\rho a^3V'(t)-6\pi\mu a^2\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\frac{V'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Здесь первый член представляет формулу Стокса (12), во втором нетрудно узнать инерционную составляющую сопротивления, соответствующую наличию *присоединенной массы* шара.

В случае шара, приведенного импульсивно из покоя в поступательное, прямолинейное и равномерное движение со скоростью V_0, будем иметь величину сопротивления [1])

$$W=6\pi\mu aV_0\left(1+\sqrt{\frac{a^2}{\pi\nu t}}\right).$$

Из этой формулы при $t=\infty$ вновь получается формула Стокса (12).

§ 97. Пространственное движение вязкой жидкости между близкими параллельными плоскостями. «Спектры» Хили-Шоу. Закон Дарси

Соответствующая представлению о «медленном» движении вязкой жидкости, т. е. о движении с пренебрежимо малыми инерционными силами по сравнению с вязкими силами и силами давления, *линеаризация* применяется также в задачах о движении вязкой жидкости сквозь тонкие щели. Сюда относятся такие важные для практики вопросы, как *фильтрация* вязких жидкостей (воды, нефти) сквозь пористые среды (песок, грунт, каменистые трещиноватые породы), движение жидких смазочных масел в тонком зазоре между вращающимся валом и подушкой подшипника и др.

Начнем с рассмотрения пространственного движения несжимаемой вязкой жидкости между двумя безграничными параллельными плоскостями, расположенными на *малом* расстоянии $2h$ друг от друга, точнее, на таком, что $\mathrm{Re}=u\cdot 2h/\nu$ мало. Между плоскостями могут располагаться перпендикулярные к плоскостям цилиндрические препятствия той же высоты $2h$.

Расположим координатную плоскость Oxy в срединной плоскости, а ось Oz направим перпендикулярно к ограничивающим поток плоскостям.

Будем считать, что движение происходит в плоскостях, параллельных границам потока, тем самым примем, что $w=0$. Кроме того, с целью *линеаризации* уравнений откинем в них конвективные члены (ускорения). Пренебрегая действием объемных сил и считая движение стационарным, составим следующую линеаризованную систему уравнений Навье — Стокса

$$\begin{aligned}
\mu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)&=\frac{\partial p}{\partial x},\\
\mu\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}\right)&=\frac{\partial p}{\partial y},\\
0&=\frac{\partial p}{\partial z},\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0.
\end{aligned}\qquad(15)$$

[1]) См. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Гостехиздат, 1955, с. 341—349.

Подчиним компоненты скорости u, v граничным условиям

$$u=v=0 \text{ при } z=\pm h. \tag{16}$$

Согласно третьему уравнению системы давление p является функцией только x и y. С другой стороны, взяв производную по x от обеих частей первого уравнения системы (15), по y — от обеих частей второго уравнения той же системы и сложив результаты, для определения $p(x, y)$ получим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0. \tag{17}$$

Пользуясь (17) и припоминая равенство (61) гл. X, легко простой подстановкой убедиться, что уравнениям (15) и граничным условиям (16) можно удовлетворить, положив

$$u=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right], \quad v=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]. \tag{18}$$

Составляя средние по нормали к ограничивающим поток плоскостям скорости $\bar{u}$ и $\bar{v}$ по формулам

$$\bar{u}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u\,dz=-\frac{h^2}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \bar{v}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} v\,dz=-\frac{h^2}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{19}$$

или определяя максимальные скорости по (18)

$$u_{\max}=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_{\max}=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{20}$$

убедимся, что поля этих местных средних или максимальных скоростей в плоскости Oxy соответствуют некоторым воображаемым *плоским*[1]) *безвихревым* движениям идеальной жидкости с одним из следующих потенциалов скоростей:

$$\bar{\varphi}=-\frac{h^2}{3\mu}p, \quad \varphi_m=-\frac{h^2}{2\mu}p, \tag{21}$$

пропорциональных действительному давлению p в данной точке потока вязкой жидкости. При этом *изопотенциальные* кривые будут совпадать с *изобарами*.

Помещая модели тел малой высоты данного контура между двумя очень близкими друг к другу параллельными плоскостями и пропуская через такого рода щель несжимаемую вязкую жидкость, можно получить сбтекания, аналогичные *плоским* безвихревым обтеканиям тел такого же контура, но бесконечно длинных по размаху (§ 51 гл. VII). В этом смысле рассматриваемое воображаемое движение можно назвать «вязкой аналогией» плоского безвихревого потока идеальной жидкости. Однако стоит отметить интересную особенность такого рода обтекания, заключающуюся в том, что для определения поля давлений уже нельзя пользоваться уравнением Бернулли, которого в этом случае, как и в других случаях вязких потоков, просто нет. Следует оговориться, что предыдущие рассуждения, использованные при выводе решений (18) и вытекающих из него следствий (19)—(21), теряют свою силу вблизи поверхности помещенного в поток короткого цилиндрического тела, однако область эта по сравнению с размерами тела невелика, и

[1]) Подчеркнем, что, как это непосредственно следует из равенств (18), в действительности никакого плоского движения в рассматриваемом случае нет Плоскими являются лишь поля средних и маскимальных скоростей, определенных равенствами (19) и (20).

ее влиянием на потенциальный поток можно пренебречь. Как показывают наблюдения, этот эффект еле заметен даже в кормовой области обтекаемого тела и в следе за ним.

Указанной аналогией пользуются для демонстрации при помощи реальной вязкой жидкости плоских безвихревых обтеканий идеальной жидкостью контуров заданной формы[1]) («спектры» Хили-Шоу). С этой целью испытуемый контур вырезают из тонкого листа и зажимают между ограничивающими поток пластинами из прозрачного материала. Для визуализации линий тока в поток между плоскостями вводят тонкие струйки подкрашенной жидкости. При этом удается получать отчетливые «спектры» плоских обтеканий.

Близким по механизму к только что рассмотренному движению вязкой жидкости сквозь тонкую щель между параллельными плоскостями является *фильтрационное* движение вязких жидкостей сквозь пористые среды. Лежащий в основе теории этих движений закон был открыт в середине прошлого века известным французским гидравликом Дарси на основании проведенных им опытов[2]), хотя по своей сущности закон этот представляет простое и естественное обобщение линейных зависимостей (19) средней скорости от градиента давления.

В общем случае пространственного фильтрационного потока[3]), проникающего сквозь пористую среду, обычно под действием веса жидкости, закон Дарси выражается так:

$$\mathfrak{b} = -k \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right). \tag{22}$$

Здесь $\mathfrak{b}$ — вектор «скорости фильтрации» в данной точке, определенный как предел отношения секундного расхода жидкости через площадку, перпендикулярную к направлению максимального расхода, к величине площадки, когда эта величина стремится к нулю. В круглой скобке стоит известный трехчлен Бернулли $V^2/(2g)+p/\gamma+z$, который в данном случае выродился в двучлен, так как скорость движения сквозь поры, как правило, имеет порядок нескольких миллиметров в секунду, а иногда и меньше. При этом квадратом скорости можно пренебречь по сравнению с остальными слагаемыми: пьезометрической высотой p/γ и нивелирной высотой z. Вместе с тем малая скорость или, точнее, малое рейнольдсово число протекания вязкой жидкости сквозь поры позволяет *пренебрегать конвективными ускорениями*, вызываемыми кривизной пор и переменностью площади их сечений.

Эти особенности пористой среды при малых числах Рейнольдса незначительно сказываются на среднем сопротивлении пор, а тем самым и на расходной составляющей фильтрационной скорости. В этом и заключается причина сходства закона Дарси (22), выведенного на основании обработки опытных материалов и представляющего по существу результат пространственного осреднения движения вязкой жидкости по случайно ориентированным и разнообразным по геометрической форме порам фильтрующей среды, с законами строго определенных движений той же жидкости в тонкой щели между параллельными плоскостями.

Коэффициент пропорциональности k, входящий в формулу Дарси (22), называют *коэффициентом фильтрации*; он является постоянной

---

[1]) Hele-Shaw H. S. Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream motion under certain experimental conditions.— Trans. Inst. Nav. Arch. XI, 1898, v. 25, а также Riegels F. Zur Kritik des Hele-Shaw-Versuches.— Zeitschr. angew. Math. u. Mech., 1938, Bd 18, S. 95—106

[2]) Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon — Paris, 1856

[3]) Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.— М: Наука, 1973; Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод.— 2-е изд.— М: Наука, 1977.

величиной, если фильтрующая среда однородна, а жидкость обладает постоянными физическими свойствами. Чтобы выявить влияние вязкости движущейся жидкости на коэффициент фильтрации, его выражают в форме (μ и ν — соответственно динамический и кинематический коэффициенты вязкости, γ — удельный вес жидкости, g — ускорение силы тяжести)

$$k = \frac{\gamma c}{\mu} = \frac{gc}{\nu}.$$

Величина c носит наименование *коэффициента пористости среды* и зависит только от геометрического характера пор, зернистости грунта и т. п.

При движении вязких жидкостей сквозь пористые среды со сравнительно большими средними размерами пор (крупнозернистые породы, галька, руда, каменный уголь) *линейный* закон Дарси уже не оправдывается и должен быть заменен более сложным *нелинейным*. Физически это объясняется в первую очередь влиянием конвективных ускорений в потоке, а затем и потерей устойчивости *ламинарного* движения жидкости в порах и перехода к режиму *турбулентной* фильтрации. О последнем судят по изменению *фильтрационного числа Рейнольдса*, равного kd/ν, где d — средний диаметр пор.

Методы решения задач фильтрационного движения воды под гидротехническими сооружениями, так же как и нефти при просачивании ее сквозь грунт, в настоящее время хорошо разработаны. Если оставить в стороне сложные комплексные задачи фильтрации многофазных сред (например, нефть — газ, вода — твердая взвесь) через неоднородные, анизотропные грунты, движения с физико-химическими превращениями (испарение, конденсация, химические реакции в «засыпках»), то методы эти близки к применяемым в гидродинамике плоских безвихревых потоков идеальной жидкости [1]).

§ 98. Движение вязкой жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами. Задача о скольжении ползуна вдоль плоскости, покрытой вязкой жидкостью

Предполагая в следующем параграфе остановиться на гидродинамической теории смазки подшипников, изложим сейчас решение двух задач, каждая из которых упрощенно отражает движение вязкой несжимаемой жидкости в тонкой пленке между валом и подшипником. Первая из них относится к движению вязкой жидкости между поверхностями двух вращающихся друг по отношению к другу *коаксиальных* цилиндров, т. е. не учитывает влияния их эксцентричности, характерной для действительных подшипников. Вторая задача рассматривает поступательное движение ползуна с опорной плоскостью, наклоненной под *малым* углом к плоскости скольжения, покрытой вязкой жидкостью. Область движения жидкости имеет вид клинообразной щели, куда жидкость всвлекается благодаря свойству прилипания к стенке. Эту задачу иногда называют задачей о «вязком клине». Эффект «вязкого клина» с учетом криволинейности стенок служит основой гидродинамической теории подшипников.

Рассмотрим *плоское* движение вязкой жидкости между двумя вращающимися с разными угловыми скоростями ω, ω' коаксиальными цилиндрами соответственно с радиусами R и R' (штрих относится к внешнему цилиндру). Считая движение стационарным и происходящим по

[1]) См. только что цитированные монографии В. И. Аравина и С. Н. Нумерова и П. Я. Полубариновой-Кочиной.

концентрическим окружностям, расположенным в плоскости, перпендикулярной к общей оси цилиндров Oz, из соображений симметрии заключим, что (в настоящем параграфе обычное обозначение азимутального угла ε заменим на φ)

$$V_r \equiv 0, \quad V_z \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0.$$

Тогда уравнения Навье — Стокса (33) гл. X в **полярных координатах** сведутся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2V_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi}{r^2} = 0, \quad \frac{V_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} \tag{23}$$

с граничными условиями

$$V_\varphi = R\omega \text{ при } r = R, \; V_\varphi = R'\omega' \text{ при } r = R'. \tag{24}$$

Общее решение первого из уравнений (23) можно представить в виде

$$V_\varphi = \frac{C_1}{r} + C_2 r, \tag{25}$$

а постоянные C_1 и C_2 определить из граничных условий (24). Опуская простые выкладки, получим

$$V_\varphi = \frac{1}{R'^2 - R^2}\left[(\omega' R^2 - \omega R'^2)r + \frac{(\omega - \omega')R^2R'^2}{r}\right],$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{(R'^2 - R^2)^2}\left[(\omega' R^2 - \omega R'^2)^2 \frac{r^2}{2} + 2R^2R'^2(\omega - \omega') \times \right. \tag{26}$$

$$\left. \times (\omega' R^2 - \omega R'^2) \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{(\omega - \omega')^2 R^4 R'^4}{2r^2}\right] + \text{const}.$$

Касательное напряжение трения между кольцевыми слоями окажется равным

$$\tau_{r\varphi} = -2\mu \frac{(\omega - \omega')R^2R'^2}{(R'^2 - R^2)r^2}, \tag{27}$$

а суммарный момент относительно оси вращения сил трения по какой-нибудь окружности радиуса r

$$L = \int_0^{2\pi} \tau_{r\varphi} r^2 d\varphi = -4\pi\mu \frac{(\omega - \omega')R^2R'^2}{R'^2 - R^2} \tag{28}$$

не будет зависеть от радиуса этой окружности.

Полагая в последней формуле $\omega' = 0$, $R' - R = \varepsilon$ и считая зазор между цилиндрами ε малым по сравнению с радиусами цилиндров, получим исторически одну из первых, принадлежащую Н. П. Петрову [1]) формулу для момента сопротивления вращению шипа в *соосном* подшипнике

$$L = -\frac{4\pi\mu\omega R^2(R + \varepsilon)^2}{\varepsilon(R' + R)} \approx -\frac{2\pi\mu\omega R^3}{\varepsilon}. \tag{29}$$

Момент этот пропорционален динамическому коэффициенту вязкости и обратно пропорционален ширине зазора между цилиндрами.

---

[1]) Петров Н. П. Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости.— Инженерный журнал, 1883 г. См. также сборник статей «Гидродинамическая теория смазки» (под ред. Лейбензона Л. С.).— М.: ОНТИ, 1934.

Перейдем ко второй задаче, решение которой было выполнено Рейнольдсом и Рэлеем[1]).

Удовольствуемся плоским случаем ($V_z=0$), зададим (рис. 163) отрезком CD опорную плоскость ползуна, а отрезок OB расположим в плоскости, вдоль которой ползун движется (отрезок OB равен проекции CD на эту плоскость). Угол между CD и OB считается малым, так же как и среднее расстояние между этими плоскостями в интервале OB.

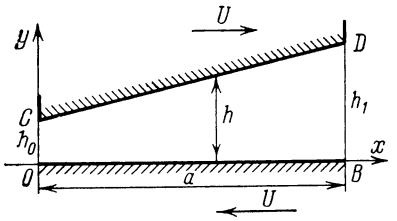


Рис. 163

Предполагая перемещение ползуна поступательным, прямолинейным и равномерным со скоростью U, параллельной OB, обратим движение, сообщив рисунку такую же скорость в противоположном направлении. Ползун при этом представится неподвижным, а отрезок OB будет двигаться в плоскости со скоростью U в направлении от широкой части щели BD к узкой OC. По свойству прилипания вязкой жидкости к твердой поверхности она будет увлекаться в том же направлении.

Обозначим через h_0 и h_1 соответственно высоты выходного и входного сечений щели, h — текущую ординату отрезка CD, a — проекцию CD на ось Ox, направленную вдоль OB, как это показано на рисунке. Уравнение отрезка CD зададим формулой

$$h=h_0\left(1+k\frac{x}{a}\right), \tag{30}$$

где k — постоянный коэффициент, равный

$$k=\frac{h_1}{h_0}-1>0. \tag{31}$$

Заметим, что (штрих означает производную по x)

$$h'=\frac{kh_0}{a}>0. \tag{32}$$

При составлении уравнений движения вязкой жидкости, увлекаемой в клинообразную щель движущимся отрезком OB, примем во внимание тонкость щели и непроницаемость стенок, ограничивающих щель. Это позволит считать поперечную скорость V_y пренебрежимо малой по сравнению с V_x, а производную $\partial^2V_x/\partial y^2$ значительно большей, чем $\partial^2V_x/\partial x^2$. Пренебрегая, кроме того, конвективными членами, приведем систему уравнений Навье — Стокса к виду

$$\mu\frac{\partial^2V_x}{\partial y^2}=\frac{\partial p}{\partial x},\quad 0=\frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0. \tag{33}$$

Граничные условия будут:

$$\begin{aligned} &V_x=-U,\quad V_y=0 \text{ при } y=0,\\ &V_x=0,\qquad V_y=0 \text{ при } y=h,\\ &p=p_0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=a, \end{aligned} \tag{34}$$

причем последнее условие соответствует выравниванию давления вне вязкого клина.

---

[1]) Сошлемся на два наиболее доступных источника: Ламб Г. Гидродинамика: Перев. с англ.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947, с. 730, 731; Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951, с. 319—324.

Интегрируя обе части первого уравнения системы (33) по y и принимая во внимание граничные условия (34), получим

$$V_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - hy) - \frac{U}{h}(h - y). \tag{35}$$

Условие *одинаковости расхода* жидкости сквозь любое сечение потока дает

$$\int_0^h V_x dy = \text{const}$$

или, после подстановки V_x из (35) и интегрирования,

$$\frac{h^3}{6\mu}\frac{dp}{dx} + Uh = \text{const}.$$

Судя по последнему граничному условию системы (34), в промежуточной точке с абсциссой x_m в интервале $0<x_m<a$ должно выполняться условие $dp/dx=0$. Вводя обозначение $h=h_m$ при $x=x_m$, из предыдущего равенства найдем

$$Uh_m = \text{const}.$$

Исключая константу, из последних двух уравнений получим

$$\frac{h^3}{6\mu}\frac{dp}{dx} + Uh = Uh_m,$$

откуда следует

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{6\mu U}{h^3}(h - h_m). \tag{36}$$

Вычислив в точке $x=x_m$ производную $(d^2p/dx^2)_{x_m} = -6\mu Uh'(x_m)/h_m^3$, убедимся в том, что в силу условия (32) она имеет отрицательное значение. Отсюда следует, что в точке $x=x_m$ давление *максимально*.

Перейдем от аргумента x к h, используя для этого основное геометрическое соотношение (30), согласно которому

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dh}\frac{dh}{dx} = k\frac{h_0}{a}\frac{dp}{dh}.$$

Перепишем после этого равенство (36) в форме

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{6\mu Ua}{kh_0}\frac{h - h_m}{h^3} \tag{37}$$

и проинтегрируем его по h; будем иметь

$$p = \frac{6\mu Ua}{kh_0}\left(\frac{1}{h} - \frac{h_m}{2h^2}\right) + b. \tag{38}$$

Используя граничные условия (34) и равенство (30), найдем постоянные интегрирования h_m и b:

$$h_m = 2h_0\frac{1+k}{2+k}, \qquad b = p_0 - \frac{6\mu Ua}{kh_0^2}\frac{1}{2+k}. \tag{39}$$

Подставляя эти значения постоянных в (38) и возвращаясь к переменной x, получим следующее окончательное выражение для $p(x)$:

$$p(x) = p_0 + \frac{6\mu aU}{h_0^2 k}\left[\frac{a}{a+kx} - \frac{1}{2+k} - \frac{1+k}{2+k}\frac{a^2}{(a+kx)^2}\right], \tag{40}$$

причем абсцисса x_m, как это непосредственно следует из (30) и первого равенства системы (39), будет равна

$$x_m = \frac{a}{2+k}. \tag{41}$$

Решим теперь основной вопрос о величине направленной вдоль Oy силы R, *поддерживающей* ползун. Имеем по (40) (над CD давление равно p_0)

$$R = \int_0^a (p - p_0)\,dx = \frac{6\mu U a^2}{k^2 h_0^2}\left[\ln(1+k) - \frac{2k}{2+k}\right]. \tag{42}$$

Сила R достигает своего максимума при $k \approx 1{,}2$, т. е. при $h_1/h_0 \approx 2{,}2$, и равна при этом

$$R_{\max} \approx 0{,}16\,\mu\frac{Ua^2}{h_0^2}. \tag{43}$$

Для определения сопротивления F движению ползуна найдем сначала напряжение трения τ на его опорной поверхности или, что все равно, в силу малости угла раствора клинообразной щели, на отрезке OB

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=0},$$

откуда, согласно (35),

$$\tau = \mu\frac{U}{h} - \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}$$

и, после подстановки значения dp/dx по (36) и h по (30),

$$\tau = \mu\frac{U}{h_0}\left[\frac{4a}{a+kx} - \frac{6(1+k)}{2+k}\frac{a^2}{(a+kx)^2}\right]. \tag{44}$$

Интегрируя по x от $x=0$ до $x=a$, определим полную силу *сопротивления* движению ползуна

$$F = \frac{\mu a U}{h_0}\left[\frac{4}{k}\ln(1+k) - \frac{6}{2+k}\right]. \tag{45}$$

При $k=1{,}2$, соответствующем *максимальной поддерживающей силе*, будет

$$F = F_{\max} \approx 0{,}753\frac{\mu a U}{h_0}. \tag{46}$$

Коэффициент трения, условно определяемый *отношением величины сопротивления к величине поддерживающей силы*, как видно из формул (45) и (42), пропорционален h_0/a, т. е. очень мал.

Отсылая за дополнительными сведениями к цитированным выше источникам, проиллюстрируем основной факт достижения *больших поддерживающих сил ползуна* за счет *малости* зазора между опорной поверхностью ползуна и плоскостью его скольжения. При оптимальном значении отношения $h_1/h_0 = 2{,}2$ рассмотрим случай квадратного в плане ползуна, $a = 0{,}1$ м, $h_0 = 10^{-4}$ м, $U = 1$ м/с, $\mu = 0{,}706 \cdot 10^{-1}$ Н·с/м^2.

Расчет по формуле (43) показывает, что в этих условиях $R_{\max}$ достигает значения 1130 Н. Это делает понятным существование больших поддерживающих сил в обильно смазанных подшипниках скольжения и указывает на главную причину образования таких сил — эффект «вязкого клина».

Найдем абсциссу x_R точки приложения равнодействующей $\boldsymbol{R}$ распределенных по отрезку CD элементарных поддерживающих сил. С этой целью составим момент равнодействующей L_C как интеграл (малость угла раствора «клина» позволяет принять косинус этого угла равным единице)

$$L_C = \int_0^a (p - p_0)\, x\, dx = \frac{6\mu U a^3}{2h_0^2 k^3 (2+k)} [6k + k^2 - 2(3+2k)\ln(1+k)], \quad (47)$$

после чего абсцисса x_R определится как $x_R = L_C/R$, т. е., согласно (42) и (47), будет равна

$$x_R = \frac{6k + k^2 - 2(3+2k)\ln(1+k)}{2k[(2+k)\ln(1+k) - 2k]}\, a. \quad (48)$$

При $k=1,2$ будет $x_R \approx 0{,}42a$, т. е. точка приложения поддерживающей силы $\boldsymbol{R}$ находится не посередине несущей поверхности (отрезка CD), а несколько ближе к точке C, что объясняется значительным сдвигом точки максимума давления ($x_m = 0{,}31a$ при $k=1,2$) к левому краю ползуна.

§ 99. Гидродинамическая теория смазки подшипника. Плоская задача

Переходя к более близкому к гидродинамической теории подшипника случаю *эксцентрического* расположения шипа по отношению к подшипнику, рассмотрим следующую задачу Зоммерфельда[1]). Будем пренебрегать «концевыми» эффектами в подшипнике, иными словами, примем, что подшипник имеет бесконечную длину в направлении оси вращения, а движение в зазоре между шипом и вкладышем подшипника является *плоским*.

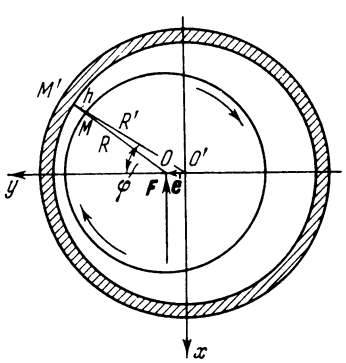


Рис. 164

В этой схематической постановке задача сведется к рассмотрению движения вязкой несжимаемой жидкости между двумя эксцентрично расположенными окружностями (рис. 164), из которых одна с центром в точке O' (внешняя) неподвижна, а другая (внутренняя) с центром в точке O вращается с заданной угловой скоростью ω, причем эксцентриситет $e = O'O$ принимается очень малым по сравнению с радиусами окружностей R и $R' > R$

$$e \ll R,\ R'.$$

Диапазон изменения радиус-вектора r в зазоре между окружностями будет $R \leqslant r \leqslant R + h$.

Используя последнее условие и считая движение жидкости в зазоре между окружностями *медленным* в том смысле, что можно пренебречь инерционными членами по сравнению с членами, учитывающими вязкие силы и изменение давления, приведем уравнения Навье — Стокса в полярных координатах [(33) гл. X] к упрощенному виду

$$\mu \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \mu \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (49)$$

[1]) См. ранее цитированный сборник «Гидродинамическая теория смазки»/Под ред. Лейбензона Л. С — М.: ОНТИ, 1934, а также Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений.— М.: Гостехиздат, 1951, и ранее уже цитированную монографию Слезкина Н. А.

При составлении этих уравнений учтена относительная тонкость зазора, позволяющая считать, что

$$V_\varphi \gg V_r;\ \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} \gg \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial r},\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2},\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi},\ \frac{V_\varphi}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} \gg \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r},\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2},\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi},\ \frac{V_r}{r^2};\ \frac{\partial V_r}{\partial r} \gg \frac{V_r}{r}.$$

По той же причине

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} \ll \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2},$$

и из первых двух равенств системы (49) следует

$$r\frac{\partial p}{\partial r} \ll \frac{\partial p}{\partial \varphi},$$

что позволяет в дальнейшем принять

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0,\ p = p(\varphi).$$

Кроме того, в последнем уравнении системы (49) можно заменить вне знака производной r на R, а от переменной r ($R \leqslant r \leqslant R+h$) перейти к переменной $\zeta = r - R$, изменяющейся в интервале $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, где под $h = h(\varphi) = MM'$ (рис. 164) понимается местная толщина зазора между цилиндрами. Ее легко разыскать из треугольника $O'OM'$, положив приближенно

$$O'O\cos\varphi + OM' = O'M',$$

или

$$e\cos\varphi + R + h = R'.$$

Вводя в дальнейшем обозначение $R' - R = \varepsilon$ и относительный эксцентриситет $\lambda = e/\varepsilon$, будем с принятой точностью иметь

$$h(\varphi) = \varepsilon - e\cos\varphi = \varepsilon(1 - \lambda\cos\varphi).$$

На рисунке ось Oy проведена через линию центров $O'O$, так что при выбранном начале отсчета углов φ будет

$$h_{\min} = \varepsilon - e \text{ при } \varphi = 0,$$
$$h_{\max} = \varepsilon + e \text{ при } \varphi = \pi.$$

Уравнения (49) могут быть переписаны так:

$$\mu\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{R}\frac{dp}{d\varphi},\ \frac{\partial V_r}{\partial \zeta} + \frac{1}{R}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \tag{50}$$

Первое из уравнений допускает повторное интегрирование по переменной ζ и дает

$$V_\varphi = \frac{1}{2\mu R}\frac{dp}{d\varphi}\zeta^2 + C_1(\varphi)\zeta + C_2(\varphi).$$

Удовлетворяя граничным условиям

$$V_\varphi = \omega R \text{ при } \zeta = 0,$$
$$V_\varphi = 0 \text{ при } \zeta = h,$$

получим

$$V_\varphi = \frac{1}{2\mu R}\frac{dp}{d\varphi}(\zeta - h)\zeta + \frac{\omega R}{h}(h - \zeta). \tag{51}$$

Перейдем к средней по сечению зазора h скорости $\overline{V}_\varphi$, определив ее как

$$\overline{V}_\varphi = \frac{1}{h}\int_0^h V_\varphi d\zeta;$$

тогда из предыдущего равенства найдем

$$\overline{V}_\varphi = -\frac{h^2}{12\mu R}\frac{dp}{d\varphi} + \frac{1}{2}\omega R. \tag{52}$$

Проинтегрируем по ζ от 0 до h также обе части второго уравнения системы (50). Тогда, замечая, что по условию неподвижности в радиальном направлении и непроницаемости обеих твердых стенок будет $V_r=0$ при $\zeta=0$ и $\zeta=h$, получим

$$\frac{d}{d\varphi}(h\overline{V}_\varphi)=0, \quad h\overline{V}_\varphi = Q = \text{const}.$$

Это равенство выражает условие сохранения секундного объемного расхода жидкости через любое сечение зазора. Сравнивая его с (52), получим уравнение для определения давления

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{6\mu\omega R^2}{h^2} - \frac{12\mu RQ}{h^3}, \tag{53}$$

интеграл которого, если включить новую аддитивную постоянную интегрирования в определение p, считая, например, $p=0$ при $\varphi=0$, будет иметь вид

$$p(\varphi) = 6\mu\omega R^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{h^2(\varphi)} - 12\mu RQ\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{h^3(\varphi)}. \tag{54}$$

Постоянную Q, наперед неизвестную, можно исключить, если воспользоваться условием периодичности распределения давления

$$p(\varphi+2\pi)=p(\varphi),$$

или, в частности, соотношением

$$p(2\pi)=p(0)=0.$$

Это дает

$$Q = \frac{1}{2}\omega R\,\frac{\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{h^2}}{\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{h^3}}. \tag{55}$$

Таким образом, распределение давлений в зазоре подшипника полностью определено. Уровень давления в точке минимального зазора или какой-нибудь другой точке может быть задан произвольно и в выражение поддерживающей силы не войдет.

Напряжение трения τ_w определим, пользуясь выражением скорости V_φ по (51). Согласно (53) будем иметь

$$\tau_w = \mu\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0} = -\frac{h}{2R}\frac{dp}{d\varphi} - \mu\frac{\omega R}{h} = \frac{6\mu Q}{h^2} - \frac{4\mu\omega R}{h}. \tag{56}$$

Введем в рассмотрение интегралы

$$S_k(\varphi;\lambda)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-\lambda\cos\varphi)^k}\qquad(k=1,2,3).$$

Выполнив интегрирование, получим

$$S_1(\varphi;\lambda)=\frac{2}{(1-\lambda^2)^{1/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$S_2(\varphi;\lambda)=\frac{2}{(1-\lambda^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\frac{\sin\varphi}{1-\lambda\cos\varphi},$$

$$S_3(\varphi;\lambda)=\frac{2+\lambda^2}{(1-\lambda^2)^{5/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^2}\frac{\sin\varphi}{1-\lambda\cos\varphi}+\frac{1}{2(1-\lambda^2)}\frac{\sin\varphi}{(1-\lambda\cos\varphi)^2}.$$

Замечая, что при $\varphi=2\pi$ арктангенсу соответствует значение π, получим необходимые для дальнейшего значения этих функций при $\varphi=2\pi$:

$$S_1(2\pi;\lambda)=\frac{2\pi}{(1-\lambda^2)^{1/2}},\quad S_2(2\pi;\lambda)=\frac{2\pi}{(1-\lambda^2)^{3/2}},\quad S_3(2\pi;\lambda)=\frac{\pi(2+\lambda^2)}{(1-\lambda^2)^{5/2}}.$$

Пользуясь этими величинами, найдем по (55)

$$Q=\omega R\varepsilon\frac{1-\lambda^2}{2+\lambda^2}.\tag{57}$$

Возвращаясь к (53) и (54), получим

$$p(\varphi)=\frac{6\mu\omega R^2}{\varepsilon^2}\left[S_2(\varphi;\lambda)-\frac{2(1-\lambda^2)}{2+\lambda^2}S_3(\varphi;\lambda)\right],\tag{58}$$

а по (56) и напряжение трения

$$\tau_w(\varphi)=\frac{2\mu\omega R}{\varepsilon(1-\lambda\cos\varphi)}\left[\frac{3(1-\lambda^2)}{(2+\lambda^2)(1-\lambda\cos\varphi)}-2\right].\tag{59}$$

Сравнивая последние два выражения между собой, заключим, что

$$p(\varphi)=O\left(\frac{R^2}{\varepsilon^2}\right),\quad \tau_w(\varphi)=O\left(\frac{R}{\varepsilon}\right);$$

это позволяет при вычислении главного вектора $\boldsymbol{F}$ реакций жидкости суммировать лишь силы давления и пренебрегать при этом в принятом приближении силами трения. Будем иметь, относя главный вектор $\boldsymbol{F}$ к единице длины вдоль оси подшипника,

$$F_x=\int_0^{2\pi}p\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)Rd\varphi=R\int_0^{2\pi}p\sin\varphi d\varphi,\quad F_y=-R\int_0^{2\pi}p\cos\varphi d\varphi.$$

Заметим, что, в силу периодичности и нечетности давления p и четности $\cos\varphi$, второй интеграл тождественно равен нулю. Первый интеграл проще всего вычислить по частям; найдем

$$F_x=-R\int_0^{2\pi}pd(\cos\varphi)=-Rp\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}+R\int_0^{2\pi}\frac{dp}{d\varphi}\cos\varphi d\varphi.$$

По условию периодичности давления первое слагаемое обращается в нуль; подставляя вместо $dp/d\varphi$ его выражение (53), получим

$$F_x = \frac{6\mu\omega R^3}{\varepsilon^2}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\lambda\cos\varphi)^2} - \frac{2(1-\lambda^2)}{2+\lambda^2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\lambda\cos\varphi)^3}\right].$$

Замечая, что

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\lambda\cos\varphi)^2} = \frac{1}{\lambda}\left[S_2(2\pi;\lambda) - S_1(2\pi;\lambda)\right] = \frac{2\pi\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2}},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\lambda\cos\varphi)^3} = \frac{1}{\lambda}\left[S_3(2\pi;\lambda) - S_2(2\pi;\lambda)\right] = \frac{3\pi\lambda}{(1-\lambda^2)^{5/2}},$$

найдем после простых преобразований

$$F_x = -\frac{12\pi\mu\omega R^3\lambda}{\varepsilon^2(2+\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}}. \tag{60}$$

Вектор $\boldsymbol{F}$ показан на рис. 164 приложенным к центру внутренней окружности. Можно указать векторную формулу (вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения вала направлен внутрь рисунка, а вектор $\boldsymbol{e}$ эксцентриситета — от точки O' к точке O)

$$\boldsymbol{F} = \frac{12\pi\mu R^3}{\varepsilon^3(2+\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}. \tag{61}$$

Сила $\boldsymbol{F}$ может уравновесить вертикальную нагрузку (вес вала с ротором и др.), если при горизонтальной оси вала смещение его $\boldsymbol{e}$, как показано на рис. 164, будет также лежать в горизонтальной плоскости. При этом главный вектор $\boldsymbol{F}$ играет роль *поддерживающей силы*.

Обратимся к вычислению отнесенного к единице длины вала *момента сопротивления* жидкости вращению вала. Имеем (ось Oz направлена внутрь рисунка)

$$L_z = \int_0^{2\pi}\tau_\omega R^2\,d\varphi = \frac{2\mu\omega R^3}{\varepsilon}\left[\frac{3(1-\lambda^2)}{2+\lambda^2}S_2(2\pi;\lambda) - 2S_1(2\pi;\lambda)\right] =$$

$$= -\frac{4\pi\mu\omega R^3(1+2\lambda^2)}{\varepsilon(2+\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}}. \tag{62}$$

В ранее цитированном труде Н. П. Петров рассмотрел случай *коаксиальных* цилиндров, или, что все равно, концентрических окружностей. Это соответствует $e=0$ и $\lambda=0$. Как видно из (60), в этом случае поддерживающая сила отсутствует, что и непосредственно вытекает из соображений симметрии, а формула (62) переходит в формулу Петрова (29).

При современном состоянии гидродинамической теории смазки подшипников решаются гораздо более сложные задачи, связанные с учетом конечности ширины подшипника, нарушающей плоский характер движения смазки в зазоре между валом и подушкой подшипника, неполным заполнением зазора смазкой, влиянием конвективных ускорений и т. п.

§ 100. Пространственная задача гидродинамической теории смазки. Сферические подшипники и подвесы

Приведем пример *пространственного* движения смазки в *сферическом* подшипнике, сделав те же предположения, что и раньше, о «медленности» движения смазки в полости между вращающейся внутренней

сферой и неподвижной внешней, что позволит линеаризовать задачу, откинув нелинейные члены в уравнениях Навье — Стокса, и о сравнительно малом поперечном к потоку размере полости [1]).

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в полости между двумя эксцентрически расположенными сферами с центрами O и O' (рис. 165, *а*) и радиусами R и R', причем $R'>R$. Разность радиусов $\varepsilon=R'-R$ будем считать малой по сравнению с радиусами сфер, а величину отношения ε/R примем за малую первого порядка и условимся в дальнейшем все величины сравнивать с нею.



Рис 165

Используем сферическую систему координат r, θ, φ, приняв ось Oz, проведенную через центры сфер, за полярную ось, а плоскость Oxz начала отсчета долгот φ оставляя произвольной. Широте θ и долготе φ какой-нибудь точки M поверхности внутренней сферы соответствуют дуги ZM и XN. Поперечный размер полости в точке M обозначим через $h(\theta, \varphi)$ и определим как расстояние между точками M и M' на внутренней и внешней сферах, расположенными на одном и том же радиусе, проведенном из центра O внутренней сферы. С ошибкой порядка $(\varepsilon R)^2$ будет справедливо равенство (рис. 165, *б*)

$$h=\varepsilon+e\cos\theta, \tag{63}$$

где *эксцентриситет* e определяется как расстояние OO' между центрами сфер.

Считая движение стационарным, пренебрегая инерционными членами и учитывая, как в предыдущем примере плоского подшипника, преимущественное значение производных поперек полости (по r) по сравнению с производными по θ и φ, приведем уравнения Навье — Стокса в сферических координатах (34) гл. X к виду (далее для текущего радиус-вектора принято обозначение r, а для азимута — φ)

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\mu\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2},\quad \frac{\partial p}{\partial\theta}=\mu r\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2},\quad \frac{\partial p}{\partial\varphi}=\mu r\sin\theta\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2},$$
$$\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}=0. \tag{64}$$

Из уравнения неразрывности (последнее уравнение) следует, что производная $\partial V_r/\partial r$ имеет одинаковый порядок с величинами V_θ/R или

[1]) Лойцянский Л. Г. Гидродинамическая теория сферического подшипника.— Прикл. мат. и мех., 1955, т. 19, вып 5, с. 531—540, а также: К теории сферического подшипника, там же, 1956, т 1, вып 1, с 133—135; Wannier G. H. A contribution to the hydrodynamics of lubrication — Quart of Appl Mathem, 1950, v 8, № 1, p. 1—32.

V_φ/R. На этом основании, обращаясь к первым трем равенствам системы (64), заключим, что

$$\frac{r\,\partial p/\partial r}{\partial p/\partial\theta} = O\left(\frac{\varepsilon}{R}\right), \quad \frac{r\,\partial p/\partial r}{\partial p/\partial\varphi} = O\left(\frac{\varepsilon}{R}\right),$$

так что в принятом приближении можно пренебречь величиной $\partial p/\partial r$ по сравнению с величинами $\partial p/\partial\theta$ и $\partial p/\partial\varphi$ и считать давление p функцией только θ и φ. Кроме того, с той же ошибкой можно во втором, третьем и четвертом уравнениях системы (64) заменить величину r, не входящую под знак дифференцирования, на R.

Вводя, как и в предыдущем примере, вместо r переменную $\zeta = r - R$, изменяющуюся поперек потока в полости, заполненной жидкостью, в пределах $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, приведем на основании указанных упрощений систему (64) к виду

$$\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\zeta^2} = \frac{1}{\mu R}\frac{\partial p}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\zeta^2} = \frac{1}{\mu R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial V_r}{\partial\zeta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} = 0. \tag{65}$$

Выпишем граничные условия на внутренней и внешней сферах, отмечая нулем в верхнем индексе компоненты скорости точек поверхности движущейся внутренней сферы, причем, в отличие от разобранного ранее примера плоского подшипника, будем предполагать, что внутренняя сфера не только вращается, но и совершает в данный момент некоторое малое (порядка толщины зазора) поступательное движение. Имеем

$$\begin{gathered} V_r = V_r^0, \quad V_\theta = V_\theta^0, \quad V_\varphi = V_\varphi^0 \text{ при } \zeta = 0, \\ V_r = V_\theta = V_\varphi = 0 \text{ при } \zeta = h. \end{gathered} \tag{66}$$

Интегрирование первых двух уравнений системы (65) при граничных условиях (66) дает

$$\begin{aligned} V_\theta &= -\frac{h^2}{2\mu R}\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\zeta}{h}\left(1-\frac{\zeta}{h}\right) + V_\theta^0\left(1-\frac{\zeta}{h}\right), \\ V_\varphi &= -\frac{h^2}{2\mu R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\frac{\zeta}{h}\left(1-\frac{\zeta}{h}\right) + V_\varphi^0\left(1-\frac{\zeta}{h}\right). \end{aligned} \tag{67}$$

Перейдем, в полной аналогии с предыдущим примером, к средним скоростям

$$\begin{aligned} \overline{V}_\theta &= \frac{1}{h}\int_0^h V_\theta d\zeta = -\frac{h^2}{12\mu R}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \frac{1}{2}V_\theta^0, \\ \overline{V}_\varphi &= \frac{1}{h}\int_0^h V_\varphi d\zeta = -\frac{h^2}{12\mu R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}V_\varphi^0. \end{aligned} \tag{68}$$

Проинтегрируем теперь обе части последнего уравнения системы (65) — уравнения неразрывности — по ζ от 0 до h; тогда в только что принятых обозначениях будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(h\overline{V}_\theta\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(h\overline{V}_\varphi) = V_r^0 R\sin\theta \tag{69}$$

и, подставляя сюда выражения $\overline{V}_\theta$ и $\overline{V}_\varphi$ из (68), получим следующее уравнение для распределения давления по поверхности внутренней

сферы (при проведении преобразований принято во внимание, что, согласно (63), h не зависит от φ и поэтому вынесено за знак дифференцирования по этой переменной)

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\sin\theta\right)+h^3\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}=$$
$$=6\mu R\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(hV_\theta^0\sin\theta)+h\frac{\partial V_\varphi^0}{\partial\varphi}\right]\sin\theta-12\mu R^2V_r^0\sin^2\theta. \quad (70)$$

Для вычисления величин V_r^0, V_θ^0, V_φ^0 заметим, что по известной формуле кинематики твердого тела

$$\boldsymbol{V}^0=\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}^0, \quad (71)$$

где вектор $\boldsymbol{V}_0$ определяет малую скорость центра O внутренней сферы, $\boldsymbol{\omega}$ — конечную угловую ее скорость, а $\boldsymbol{r}^0$ — вектор-радиус точки на сфере. Тогда, задавая вектор $\boldsymbol{V}_0$ его величиной V_0, углом α с осью Oz и углом β его проекции на плоскость Oxy с осью Ox и аналогично вектор $\boldsymbol{\omega}$ его величиной ω и углами γ и δ, будем, применяя формулы сферической тригонометрии ($r_r^0=R$, $r_\theta^0=r_\varphi^0=0$) (см. рис. 165, *а* и *в*) иметь

$$V_r^0=V_{0r},\ V_\theta^0=V_{0\theta}+R\omega_\varphi,\ V_\varphi^0=V_{0\varphi}-R\omega_\theta;$$
$$V_{0r}=V_0\cos(\boldsymbol{V}_0,OM)=V_0[\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos(\varphi-\beta)],$$
$$V_{0\theta}=V_0\cos(\boldsymbol{V}_0,OM_1)=V_0[-\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta\cos(\varphi-\beta)],$$
$$V_{0\varphi}=V_0\cos(\boldsymbol{V}_0,ON_1)=-V_0\sin\alpha\sin(\varphi-\beta);$$
$$\omega_\theta=\omega\cos(\boldsymbol{\omega},OM_1)=\omega[-\cos\gamma\sin\theta+\sin\gamma\cos\theta\cos(\varphi-\delta)],$$
$$\omega_\varphi=\omega\cos(\boldsymbol{\omega},ON_1)=-\omega\sin\gamma\sin(\varphi-\delta);$$

и, следовательно,

$$V_\theta^0=V_0[-\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta\cos(\varphi-\beta)]-\omega R\sin\gamma\sin(\varphi-\delta),$$
$$V_\varphi^0=-V_0\sin\alpha\sin(\varphi-\beta)+\omega R[\cos\gamma\sin\theta-\sin\gamma\cos\theta\cos(\varphi-\delta)]. \quad (72)$$

Подставляя эти выражения в правую часть уравнения (70), заметим, что наряду с последним членом в правой части этого уравнения, имеющим порядок R^2V_0, после подстановки и использования (63) появятся члены, содержащие множителем V_0eR, отношение которых к только что указанному члену будет иметь порядок e/R, и, следовательно, эти члены могут быть опущены. Таким образом, составим окончательный вид приближенного уравнения, служащего для разыскания распределения давления $p(\theta,\varphi)$ по поверхности подвижной сферы

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\sin\theta\right)+h^3\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}=6\mu R^2\omega e\sin\gamma\sin^3\theta\sin(\varphi-\delta)-$$
$$-12\mu V_0R^2\sin^2\theta[\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos(\varphi-\beta)]. \quad (73)$$

Будем искать решение этого уравнения в форме

$$p(\theta,\varphi)=\Theta_0(\theta)+\Theta_1(\theta)\cos(\varphi-\beta)+\Theta_2(\theta)\sin(\varphi-\delta). \quad (74)$$

Подставляя выражение p в (73) и приравнивая коэффициенты при $\cos(\varphi-\beta)$ и $\sin(\varphi-\delta)$ в обеих частях полученного при этом уравнения, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(h^3\sin\theta\frac{d\Theta_0}{d\theta}\right)=-12\mu V_0R^2\cos\alpha\sin^2\theta\cos\theta,$$
$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(h^3\sin\theta\frac{d\Theta_1}{d\theta}\right)-h^3\Theta_1=-12\mu V_0R^2\sin\alpha\sin^3\theta, \quad (75)$$
$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(h^3\sin\theta\frac{d\Theta_2}{d\theta}\right)-h^3\Theta_2=6\mu R^2\omega e\sin\gamma\sin^3\theta,$$

из которых последние два отличаются только постоянным множителем в правой части.

Первое из уравнений (75) легко непосредственно интегрируется. Действительно, сокращая обе его части на $\sin\theta$ и один раз интегрируя, получим

$$h^3\frac{d\Theta_0}{d\theta} = -6\mu R^2 V_0\cos\alpha\sin\theta + \frac{C_1}{\sin\theta}.$$

Из условия *конечности* величины $\partial p/\partial\theta$, согласно (74), следует конечность $d\Theta_0/d\theta$, что в свою очередь требует равенства нулю константы интегрирования C_1. Повторное интегрирование дает

$$\Theta_0(\theta) = -6\mu V_0 R^2\cos\alpha\int_0^\theta\frac{\sin\theta\,d\theta}{h^3},$$

причем новая константа интегрирования выбрана так, чтобы $\Theta_0(0)=0$; это определяет выбор постоянного уровня давлений в полости между сферами. Интеграл в правой части после замены h его выражением по (63) легко вычисляется и дает

$$\Theta_0(\theta) = -\frac{3\mu V_0 R^2\cos\alpha}{\varepsilon^3(1+\lambda)^2}\,\frac{(2+\lambda+\lambda\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\lambda\cos\theta)^2}, \qquad (76)$$

где, как и в случае плоского подшипника, введено обозначение $\lambda=e/\varepsilon$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$.

Второе и третье уравнения системы (75) должны быть проинтегрированы при граничных условиях

$$\Theta_1=\Theta_2=0 \quad \text{при} \quad \theta=0 \quad \text{и} \quad \theta=\pi,$$

которые непосредственно вытекают из условия конечности величины $\overline{V}_\varphi$, определяемой вторым равенством системы (68), а следовательно, необходимости обращения в нуль производной $\partial p/\partial\varphi$ при $\theta=0$ и $\theta=\pi$, что при наличии (74) и приводит к только что поставленным граничным условиям.

Решения второго и третьего уравнений системы (75) при указанных граничных условиях могут быть также найдены в замкнутой форме, а именно:

$$\begin{aligned}\Theta_1(\theta) &= \frac{12\mu V_0 R^2\sin\alpha}{\varepsilon^3}\,\frac{2+\lambda\cos\theta}{(4+\lambda^2)(1+\lambda\cos\theta)^2}\sin\theta,\\ \Theta_2(\theta) &= -\frac{6\mu R^2\omega e\sin\gamma}{\varepsilon^3}\,\frac{2+\lambda\cos\theta}{(4+\lambda^2)(1+\lambda\cos\theta)^2}\sin\theta.\end{aligned} \qquad (77)$$

Совокупность уравнений (74), (76) и (77) полностью определяет распределение давлений $p(\theta, \varphi)$ по поверхности сферического шипа в подшипнике, после чего уже без труда можно рассчитать «поддерживающую» силу, распределение скоростей и напряжений трения, необходимые для расчета момента сопротивления вращению шипа.

При вычислении главного вектора $\boldsymbol{F}$ реакций жидкости, приложенного к внутренней сфере, можно пренебречь вязкими нормальными и касательными напряжениями, имеющими с точностью до квадрата характерной длины порядок соответственно $\mu R^2 V_0/\varepsilon$ и $\mu R^2\overline{V}_\theta/\varepsilon$, по сравнению с давлением, с точностью до характерной длины имеющим порядок $\mu R^2\overline{V}_\theta/\varepsilon^2$. Получим ($\sigma$ — поверхность внутренней сферы, $\boldsymbol{n}$ — орт внешней нормали к ней)

$$\boldsymbol{F} = -\int_\sigma p\boldsymbol{n}\,d\sigma = -R^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi p\boldsymbol{n}\sin\theta\,d\theta$$

или в проекциях на оси координат (рис. 165, *а*)

$$F_x = -R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} p\sin\theta\cos(\widehat{MOx})\,d\theta = -R^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi} p\sin^2\theta\,d\theta,$$

$$F_y = -R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} p\sin\theta\cos(\widehat{MOy})\,d\theta = -R^2\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi} p\sin^2\theta\,d\theta,$$

$$F_z = -R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} p\sin\theta\cos(\widehat{MOz})\,d\theta = -R^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} p\sin\theta\cos\theta\,d\theta.$$

Подставляя сюда выражение $p(\theta, \varphi)$ по (74) и выполняя интегрирование по φ, составим следующие формулы для проекций F_x, F_y и F_z:

$$F_x = -\pi R^2\cos\beta\int_0^{\pi}\Theta_1(\theta)\sin^2\theta\,d\theta + \pi R^2\sin\delta\int_0^{\pi}\Theta_2(\theta)\sin^2\theta\,d\theta,$$

$$F_y = -\pi R^2\sin\beta\int_0^{\pi}\Theta_1(\theta)\sin^2\theta\,d\theta - \pi R^2\cos\delta\int_0^{\pi}\Theta_2(\theta)\sin^2\theta\,d\theta, \qquad (78)$$

$$F_z = -\pi R^2\int_0^{\pi}\Theta_0(\theta)\sin 2\theta\,d\theta.$$

Остается подставить значения функций $\Theta_0(\theta)$ по (76) и функций $\Theta_1(\theta)$, $\Theta_2(\theta)$ по (77). Вычисляя интегралы, окончательно получим

$$F_x = -\frac{4\pi\mu R^4(2V_0\sin\alpha\cos\beta + \omega e\sin\gamma\sin\delta)}{\varepsilon^3}K_1(\lambda),$$

$$F_y = -\frac{4\pi\mu R^4(2V_0\sin\alpha\sin\beta - \omega e\sin\gamma\cos\delta)}{\varepsilon^3}K_1(\lambda), \qquad (79)$$

$$F_z = -\frac{8\pi\mu R^4 V_0\cos\alpha}{\varepsilon^3}K_2(\lambda),$$

где для краткости введены обозначения

$$K_1(\lambda) = \frac{3}{2(4+\lambda^2)}\left[\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^3}\right)\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda} - \frac{2}{\lambda^2}\right],$$

$$K_2(\lambda) = \frac{3}{4\lambda^3}\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} - \ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right); \qquad (80)$$

$$K_1(0) = K_2(0) = 1.$$

Совокупность формул (79) эквивалентна одной векторной формуле

$$\boldsymbol{F} = -\frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}K_1(\lambda)\boldsymbol{V}_0 + \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}K_1(\lambda)\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e} + \frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^5}\frac{K_1(\lambda)-K_2(\lambda)}{\lambda^2}(\boldsymbol{V}_0\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}, \qquad (81)$$

в которой введен вектор $\boldsymbol{e} = \overrightarrow{O'O}$ смещения центра внутренней сферы относительно внешней.

При отсутствии поступательного движения внутренней сферы ($\boldsymbol{V}_0 = 0$) формула (81) значительно упрощается и приводится к следующей:

$$\boldsymbol{F} = \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}K_1(\lambda)\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}. \qquad (82)$$

Согласно этой векторной формуле при вращении внутренней сферы вокруг некоторой оси, не сопровождаемом поступательным движением сферы, главный вектор реакций вязкой несжимаемой жидкости перпен-

дикулярен к плоскости, проведенной через эту ось и линию центров внутренней и неподвижной внешней сфер. Формула (82) по своей структуре аналогична ранее выведенной формуле (61) для плоского движения цилиндрического шипа в подшипнике.

В частном случае ($\boldsymbol{V}_0=0$, $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{e}$) получим формулу Ванье[1])

$$F=\frac{6\pi\mu R^4\omega}{e^2(4\varepsilon^2-e^2)}\left[(\varepsilon^2+e^2)\ln\frac{\varepsilon+e}{\varepsilon-e}-2\varepsilon e\right].$$

В момент совпадения центров сфер ($\lambda=0$) главный вектор $\boldsymbol{F}$ определится только *поступательным* движением внутренней сферы и будет равен

$$\boldsymbol{F}=-\frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\boldsymbol{V}_0.$$

Обращает на себя внимание резко выраженная зависимость этого вектора от радиуса сферы R и поперечного размера полости ε. Сравнительно с формулой Стокса, относящейся к движению сферы в *безграничной* вязкой несжимаемой жидкости, *сопротивление* той же жидкости *движению сферы внутри близкой по размеру оболочки по порядку в* $(R/\varepsilon)^3$ *раз превосходит сопротивление движению в безграничной жидкости.*

Вычислим в заключение главный момент $\boldsymbol{L}$ сил вязкого трения, приложенных к поверхности внутренней сферы. Пользуясь для этой цели группой формул (13), помещенных в начале гл. X, будем иметь (применяя обозначения τ вместо p_{ij}, r — вместо R, φ — вместо ε, $\partial\zeta$ — вместо ∂R)

$$\tau_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{\partial V_\theta}{\partial\zeta}-\frac{V_\theta}{r}\right)_{\zeta=0}=\mu\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0},$$

$$\tau_{r\varphi}=\mu\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial\zeta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}-\frac{V_\varphi}{r}\right)_{\zeta=0}=\mu\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0}.$$

Произведенные здесь упрощения очевидны; величины

$$V_\theta,\ V_\varphi,\ \frac{\partial V_r}{\partial\theta},\ \frac{\partial V_r}{\partial\varphi}$$

малы по сравнению с сохраненными слагаемыми.

Подставляя в только что приведенные выражения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{r\varphi}$ значения V_θ и V_φ по (67), получим

$$\tau_{r\theta}=-\frac{h}{2R}\frac{\partial p}{\partial\theta}-\frac{\mu V_\theta^0}{h},\qquad \tau_{r\varphi}=-\frac{h}{2R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}-\frac{\mu V_\varphi^0}{h},$$

а используя после этого ранее выведенные выражения (72) для V_θ^0 и V_φ^0 и трехчленное представление давления p (74), найдем

$$\tau_{r\theta}=-\frac{h}{2R}[\Theta_0'(\theta)+\Theta_1'(\theta)\cos(\varphi-\beta)+\Theta_2'(\theta)\sin(\varphi-\delta)]+\\+\frac{\mu\omega R}{h}\sin\gamma\sin(\varphi-\delta),\qquad(83)$$

$$\tau_{r\varphi}=\frac{h}{2R\sin\theta}[\Theta_1(\theta)\sin(\varphi-\beta)-\Theta_2(\theta)\cos(\varphi-\delta)]-\\-\frac{\mu\omega R}{h}[\cos\gamma\sin\theta-\sin\gamma\cos\theta\cos(\varphi-\delta)].$$

Элементарные моменты сил трения dL_x, dL_y и dL_z относительно прямоугольных декартовых осей координат определим как суммы

[1]) См цитированную в начале этого параграфа работу Ванье.

моментов относительно этих осей касательных к поверхности сферы сил, имеющих сферические компоненты

$$dF_\theta = \tau_{r\theta} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \qquad dF_\varphi = \tau_{r\varphi} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

и соответствующие декартовы компоненты

$$dF_\theta \cos\theta\cos\varphi, \quad dF_\theta \cos\theta \sin\varphi, \quad -dF_\theta \sin\theta,$$
$$-dF_\varphi \sin\varphi, \quad dF_\varphi \cos\varphi, \quad 0.$$

Замечая, что точка M приложения этих сил имеет координаты $(R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$, по обычному правилу составим формулы моментов относительно осей координат:

$$dL_x = -R^3(\tau_{r\theta}\sin\varphi + \tau_{r\varphi}\cos\theta\cos\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$
$$dL_y = R^3(\tau_{r\theta}\cos\varphi - \tau_{r\varphi}\cos\theta\sin\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$
$$dL_z = R^3\tau_{r\varphi}\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Подставляя сюда значения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{r\varphi}$ по (83), собирая члены с тригонометрическими функциями угла φ и произведя сначала интегрирование по φ от 0 до 2π, а затем и по θ от 0 до π, найдем

$$L_x = -\frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon}\left[\frac{2}{3}(1+\lambda^2)\,\omega\sin\gamma\cos\delta - \frac{1}{\varepsilon^2}V_0 e\sin\alpha\sin\beta\right]K_1(\lambda),$$
$$L_y = -\frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon}\left[\frac{2}{3}(1+\lambda^2)\,\omega\sin\gamma\sin\delta + \frac{1}{\varepsilon^2}V_0 e\sin\alpha\cos\beta\right]K_1(\lambda), \qquad (84)$$
$$L_z = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}\,\omega(1-\lambda^2)\cos\gamma\, K_2(\lambda),$$

где функции $K_1(\lambda)$ и $K_2(\lambda)$ — те же, что и раньше.

Полученная совокупность формул для моментов относительно осей координат эквивалентна одной векторной формуле для момента относительно начала координат

$$\boldsymbol{L} = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}(1+\lambda^2)K_1(\lambda)\,\boldsymbol{\omega} - \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}K_1(\lambda)\,\boldsymbol{V}_0\times\boldsymbol{e} + \frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon^3}\,\frac{(1+\lambda^2)K_1(\lambda) - (1-\lambda^2)K_2(\lambda)}{\lambda^2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}. \qquad (85)$$

При чисто вращательном движении внутренней сферы ($\boldsymbol{V}_0 = 0$) будем иметь

$$\boldsymbol{L} = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}(1+\lambda^2)K_1(\lambda)\,\boldsymbol{\omega} + \frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon^3}\,\frac{(1+\lambda^2)K_1(\lambda) - (1-\lambda^2)K_2(\lambda)}{\lambda^2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}, \qquad (86)$$

а в частном случае перпендикулярности оси вращения и линии центров сфер ($\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{e} = 0$), рассмотренном ранее Ванье, получим более простую формулу

$$L = \frac{4\pi\mu R^4\omega}{e^3}\,\frac{\varepsilon^2+e^2}{4\varepsilon^2+e^2}\left[(\varepsilon^2+e^2)\ln\frac{\varepsilon+e}{\varepsilon-e} - 2\varepsilon e\right].$$

При концентрическом расположении сферы ($e = 0$) формула (86) приведется к виду

$$\boldsymbol{L} = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}\,\boldsymbol{\omega}, \qquad (87)$$

представляющему собой обобщение формулы Петрова (29) для цилиндрического подшипника на случай сферического подшипника.

Уравнения движения смазки в сферическом подшипнике относятся к тому же типу, что и уравнения для расчета сферического *подвеса*, или, как его иногда называют, *гидростатического подшипника.*

Схема такого рода подвеса показана на рис. 166. Тяжелая сфера неподвижно висит в потоке несжимаемой вязкой жидкости, создаваемом за счет подвода этой жидкости через отверстие S в дне также неподвижной сферической чаши, охватывающей подвешенную в потоке сферу; при этом зазор h между поверхностями сферы и чаши предполагается очень малым по сравнению с их радиусами R и R'.

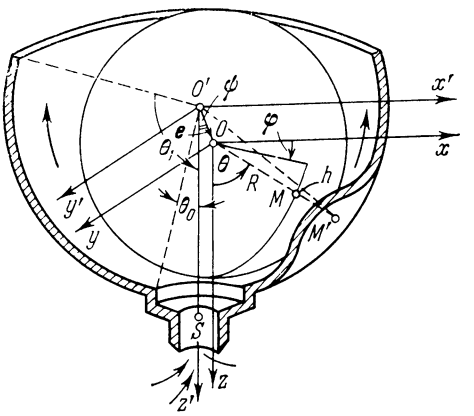


Рис. 166

Проводя оси координат, как показано на рис. 166, приходится по соображениям упрощения расчетов выбирать направление оси $O'z'$ так, чтобы она проходила через центр отверстия подвода жидкости S. В связи с этим равенство (63), определявшее ширину зазора h между сферами в случае сферического подшипника, усложняется.

Как легко видеть из чертежа,

$$h = MM' \approx O'M' - O'O\cos(\overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{O'M'}) - OM,$$

$$O'M' - OM \approx R' - R = \varepsilon, \quad O'O = e,$$

$$\cos(\overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{O'M'}) = \cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\theta\cos\varphi,$$

так что (ψ — постоянный при данном расположении сферы относительно чаши угол между вектором смещения e центра сферы O и осью Oz)

$$h(\theta, \varphi) = \varepsilon - e(\cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\theta\cos\varphi). \tag{88}$$

Таким образом, в случае подвеса величина h является функцией как θ, так и φ, что уже не позволяет при выводе уравнения (70) выносить ее за знак производной по φ. Кроме того, $V^0 = 0$, так что вместо (70) надлежит интегрировать следующее уравнение:

$$\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right) = 0, \tag{89}$$

где h задается равенством (88).

Разработкой методов интегрирования уравнений типа (89) занимается теория смазки. Удовольствуемся рассмотрением простейшего случая подвеса вертикально смещенной сферы ($\psi = 0, \pi$), когда ширина зазора h определяется равенством (63). Более общая задача, когда наряду с вертикальным смещением центра сферы O имеется и горизонтальное (боковое) смещение, в приближенной постановке (малые $\lambda = e/\varepsilon$) может быть также без особого труда рассмотрена [1]).

[1]) Лойцянский Л. Г., Степанянц Л Г. Гидродинамическая теория сферического подвеса.— Тр. ЛПИ, 1958, № 198, с. 89—98.

Схематизируем подвод жидкости из отверстия в дне чаши, поместив в точку S ($\theta=0$) источник с секундным объемным расходом Q и приняв, что сток происходит из круговой щели ($\theta=\theta_1$) на верхнем краю чаши в пространство с абсолютным давлением p_1. Уравнение (89) переписывается в виде

$$\frac{d}{d\theta}\left(h^3\frac{dp}{d\theta}\sin\theta\right)=0$$

и имеет первый интеграл

$$h^3\frac{dp}{d\theta}\sin\theta=\text{const}.$$

Для определения константы составим условие постоянства расхода сквозь горизонтальное сечение зазора

$$2\pi Rh\sin\theta\cdot\overline{V}_\theta=\text{const}=Q,$$

или по первому из равенств (68) при $V_\theta^0=0$

$$-\frac{\pi h^3}{6\mu}\frac{dp}{d\theta}\sin\theta=Q.$$

Итак, имеем

$$\frac{dp}{d\theta}=-\frac{6\mu Q}{\pi}\frac{1}{(\varepsilon-e\cos\theta)^3\sin\theta}. \tag{90}$$

Интегрируя еще раз и используя граничное условие

$$p=p_1 \quad \text{при} \quad \theta=\theta_1,$$

получим искомое распределение давления

$$p-p_1=\frac{6\mu Q}{\pi\varepsilon^3}[\Phi(\theta_1)-\Phi(\theta)], \tag{91}$$

где положено

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{2}\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\frac{1}{(1-\lambda\cos\theta)^2}+\frac{2\lambda}{(1-\lambda^2)^2}\frac{1}{1-\lambda\cos\theta}-$$
$$-\frac{\lambda(3+\lambda^2)}{(1-\lambda^2)^3}\ln(1-\lambda\cos\theta)-\frac{1}{2(1+\lambda)^3}\ln(1+\cos\theta)+\frac{1}{2(1-\lambda)^3}\ln(1-\cos\theta). \tag{92}$$

При $\theta=0$, т. е. непосредственно в самом источнике S, давление равно бесконечности. Чтобы сделать решение более физичным, допустим, что на самом деле вблизи точки S в корпусе чаши имеется пазуха с постоянным давлением p_0; размер этой пазухи можно задать углом θ_0. Тогда рабочий перепад давлений p_0-p_1 в подвесе будет, согласно (91), связан с расходом формулой

$$p_0-p_1=\frac{6\mu Q}{\pi\varepsilon^3}[\Phi(\theta_1)-\Phi(\theta_0)]. \tag{93}$$

Несмотря на сравнительную сложность формулы распределения давления (91), сила $\boldsymbol{F}$, поддерживающая сферу, вычисляется просто. Заметим, что порядки напряжения трения и давления будут

$$\tau=\mu\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0}\sim\frac{\mu Q}{R\varepsilon^2},\quad p_0-p_1\sim\frac{\mu Q}{\varepsilon^3},$$

так что

$$\tau/(p_0-p_1)=O(\varepsilon).$$

Это доказывает возможность пренебречь трением при определении поддерживающей силы $\boldsymbol{F}$ и находить силу как интеграл только элемен-

тарных сил давления. Имеем, производя интегрирование по частям и отсчитывая давление от значения p_1,

$$F_z = -2\pi R^2 p_0 \int_0^{\theta_0} \sin\theta\cos\theta\, d\theta - 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} p \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \pi R^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{dp}{d\theta} \sin^2\theta\, d\theta = \\ = -\frac{3\mu R^2 Q}{\varepsilon^3} \frac{1}{f(\lambda;\theta_1)}, \quad (94)$$

где положено

$$f(\lambda;\theta_1) = \frac{(1-\lambda\cos\theta_0)^2 (1-\lambda\cos\theta_1)^2}{\left(1-\lambda\cos\frac{\theta_1+\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\right)\sin\frac{\theta_1+\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}}. \quad (95)$$

Зависимость компоненты поддерживающей силы F_z от безразмерного вертикального смещения внутренней сферы λ очень сложна, так как Q при заданном рабочем перепаде давлений p_0—p_1 является в свою очередь функцией безразмерного смещения λ. На самом деле вопрос еще сложнее, так как обычно поддерживают перепад давлений $p_н$—p_1, где $p_н$— абсолютное давление в камере нагнетания, откуда газ сквозь некоторый канал подводится к отверстию S.

Рассмотрение вопроса об устойчивости равновесия тяжелой сферы в несколько упрощенной постановке устройства поддува (точечный источник в точке S) можно найти в четвертом издании настоящего курса[1]). Выясняется, что при $\theta_1 < 90°$ возможно только одно, а при $\theta_1 > 90°$— два положения равновесия сферы.

Изложенная теория относилась к использованию *несжимаемой* жидкости или газа в условиях, когда его сжимаемостью можно пренебречь. При значительных нагрузках на подвес или на вращающийся вал в подшипнике вопрос существенно усложняется ввиду необходимости учета сжимаемости среды в уравнении Рейнольдса. Это уравнение даже при изотермическом подходе *нелинейно* и требует для своего интегрирования применения приближенных численных методов.

§ 101. Применение теории размерностей к определению структуры решений уравнений Навье — Стокса. Автомодельные решения

Составление матрицы размерностей (§ 88) и основного соотношения П-теоремы (56) гл. X позволяет в ряде случаев упростить разыскание решений *нелинейных* уравнений Навье — Стокса, сводя эти дифференциальные уравнения в частных производных к *обыкновенным* дифференциальным уравнениям. Такое упрощение всегда возможно, если по самой сути постановки задачи в ней отсутствуют некоторые масштабные величины, например длина или скорость. Задачи, допускающие указанное упрощение, относятся к числу *автомодельных* (сравните с содержанием § 44). Проиллюстрируем это на классической задаче Кармана о стационарном движении вязкой жидкости в полупространстве над равномерно вращающимся в своей плоскости диском бесконечного радиуса.

Выберем цилиндрическую систему координат z, r, ε, поместив начало в центр диска и направив ось z перпендикулярно к плоскости его вращения. Описывающими явление *переменными* и *постоянными* служат следующие девять величин: координаты r и z (ε в силу симметрии выпадает), угловая скорость вращения диска ω, составляющие скорости частиц жидкости V_r, V_ε, V_z, перепад давления $\Delta p = p - p_\infty$, плотность

[1]) Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа — 4-е изд — М.: Наука, 1973, с. 483.

жидкости ρ и кинематический коэффициент вязкости ν. Уравнения движения представляют собой сложную нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных (производные по ε в силу симметрии движения опущены), имеющую, согласно (33) гл. X, вид

$$\begin{gathered}
V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{V_\varepsilon^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}-\frac{V_r}{r^2}\right),\\
V_r\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z}+\frac{V_rV_\varepsilon}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial z^2}-\frac{V_\varepsilon}{r^2}\right),\\
V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{\partial}{\partial z}(rV_z)=0,
\end{gathered}\tag{96}$$

при граничных условиях

$$\begin{gathered}
V_r=0,\quad V_\varepsilon=\omega r,\quad V_z=0 \text{ при } z=0,\\
V_r\to 0,\quad V_\varepsilon\to 0 \text{ при } z\to\infty.
\end{gathered}\tag{97}$$

Решение системы (96) при граничных условиях (97) не содержит масштабов длин и скоростей. Их можно составить из соображений размерности. За масштаб длин примем имеющую размерность длины величину $\sqrt{\nu/\omega}$, за масштаб скоростей — величину $\sqrt{\nu\omega}$ и за масштаб давлений — величину $\rho\nu\omega$. Принимая во внимание, что граничные условия, помещенные в первую строку (97), выполняются при любых значениях r, а V_ε при $z=0$ равна $V_\varepsilon=\omega r$, будем искать решение в форме ($V_z<0$)

$$\begin{gathered}
V_r=\omega rF(\zeta),\quad V_\varepsilon=\omega rG(\zeta),\quad V_z=\sqrt{\nu\omega}H(\zeta),\\
p-p_0=-\rho\nu\omega P(\zeta),
\end{gathered}\tag{98}$$

где положено $\zeta=z\sqrt{\omega/\nu}$. Убедимся, что результат подстановки выражений составляющих скорости и давления (98) в систему дифференциальных уравнений (96) приведет к системе *обыкновенных* дифференциальных уравнений (штрих означает производную по ζ) [1])

$$\begin{gathered}
F^2-G^2+F'H=F'',\\
2FG+G'H=G'',\\
HH'=P'+H'',\\
2F+H'=0
\end{gathered}\tag{99}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered}
F=0,\quad G=1,\quad H=0,\quad P=0 \text{ при } \zeta=0,\\
F\to 0,\quad G\to 0 \text{ при } \zeta\to\infty.
\end{gathered}\tag{100}$$

Этим доказана *автомодельность* решения задачи Кармана. Из первого, второго и четвертого уравнений (99) определяются F, G и H, а из третьего — P. Приближенное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (99) с граничными условиями (100) было вы-

[1]) Уравнения (99) и граничные к ним условия (100) были установлены Карманом (Kármán Th. Über laminare und turbulente Reibung.— Zeitschr. f. angew. Math u. Mech., 1921, Bd. 1, S. 233—252).

полнено Кокреном[1]) методом разложения функций $F(\zeta)$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$ в ряды

$$F = a_0\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{3}b_0\zeta^3 - \frac{1}{12}b_0^2\zeta^4 - \ldots,$$
$$G = 1 + b_0\zeta + \frac{1}{3}a_0\zeta^3 + \frac{1}{12}(a_0b_0 - 1)\zeta^4 + \ldots, \qquad (101)$$
$$H = -a_0\zeta^2 + \frac{1}{3}\zeta^3 + \frac{1}{6}b_0\zeta^4 + \ldots$$

при малых ζ и

$$F = Ae^{-c\zeta} - \frac{A^2+B^2}{2c^2}e^{-2c\zeta} + \frac{A(A^2+B^2)}{4c^4}e^{-3c\zeta} + \ldots,$$
$$G = Be^{-c\zeta} - \frac{B(A^2+B^2)}{12c^4}e^{-3c\zeta} + \ldots, \qquad (102)$$
$$H = -c + \frac{2A}{c}e^{-c\zeta} - \frac{A^2+B^2}{2c^3}e^{-2c\zeta} + \frac{A(A^2+B^2)}{6c^5}e^{-3c\zeta} + \ldots$$

при больших ζ, где константы a_0, b_0, A, B и c определялись из условий *непрерывного* перехода функций F, G, H, F', G' от малых значений ζ к большим. Таким путем были найдены следующие значения констант:

$$a_0 = 0{,}510, \quad b_0 = -0{,}616, \quad c = 0{,}886, \quad A = 0{,}934, \quad B = 1{,}208 \qquad (103)$$

и составлены таблицы зависимостей F, G, H и P от ζ, содержащиеся в цитированной статье Кокрена.

Удовольствуемся приведением графиков трех первых из этих функций (рис. 167). Из графиков следует, что функции F и G стремятся экспоненциально к нулю при $\zeta \to \infty$, причем, если величина ν/ω мала, то F и G практически отличны от нуля только в пределах тонкого слоя на поверхности диска. Этот случай дает первый в курсе пример *пограничного слоя*, теория которого будет освещена в следующей главе. Пока подчеркнем лишь, что отношение порядка толщины этого слоя $\sqrt{\nu/\omega}$ к искусственно для условий задачи Кармана вводимому радиусу диска a будет иметь порядок

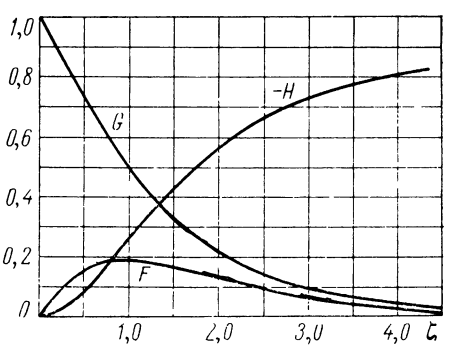


Рис. 167

$$\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} : a = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \quad \mathrm{Re} = \frac{a^2\omega}{\nu}. \qquad (104)$$

Отметим характерное для рассматриваемого движения явление. Вдалеке от поверхности диска ($\zeta \to \infty$), согласно разложению функции H (102), будет $(H)_{\zeta=\infty} = -c$, а следовательно, по (98) $(V_z)_{\zeta=\infty} = -c\sqrt{\nu\omega}$, или по (103)

$$(V_z)_{\zeta=\infty} = -0{,}886\sqrt{\nu\omega}. \qquad (105)$$

С такой скоростью вращающийся диск бесконечно большого радиуса будет *подсасывать* [знак минус в правой части (105)] окружающую

[1]) Cochran W. G. The flow due to a rotating disc.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1934, v. 30, p. 365—375.

его жидкость и отбрасывать ее благодаря центробежным объемным силам к периферии диска (в задаче Кармана — в бесконечность).

Отвлекаясь от концевого эффекта при $r=a$, где a — радиус диска, можем применить полученное решение задачи Кармана к диску конечного радиуса a. Вычисляя секундный расход Q жидкости, отбрасываемой центробежной силой с поверхности диска,

$$Q = 2\pi a \int_0^\infty V_r\, dz,$$

получим

$$Q = 0{,}886\pi a^2 \sqrt{\nu\omega}; \tag{106}$$

в полном согласии с (105)

$$(V_z)_{\zeta=\infty}\pi a^2 = Q.$$

В том же приближении определим момент сопротивления жидкости вращению диска конечного радиуса a

$$M = -2\pi \int_0^a r^2 p_{z\varepsilon} dr,$$

где положено

$$p_{z\varepsilon} = \mu \left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z}\right)_{z=0} = \rho \sqrt{\nu\omega^3}\, rG'(0).$$

Момент сопротивления диска, смачиваемого жидкостью *с двух сторон*, будет равен

$$2M = -\pi\rho a^4 \sqrt{\nu\omega^3}\, G'(0) = 0{,}616\pi\rho a^4 \sqrt{\nu\omega^3}, \tag{107}$$

а вводя коэффициент сопротивления

$$c_M = \frac{2M}{\frac{1}{2}\rho\omega^2 a^5} = -\frac{2\pi\sqrt{\nu}\, G'(0)}{a\sqrt{\omega}},$$

можно получить *формулу сопротивления*

$$c_M = \frac{3{,}87}{\sqrt{\mathrm{Re}}}; \quad \mathrm{Re} = \frac{a^2\omega}{\nu}. \tag{108}$$

Формула эта находится в хорошем соответствии с опытными данными по сопротивлению дисков, *радиусы которых велики по сравнению с толщиной пограничного слоя* на их поверхности, т. е. по (104) при больших, но все же ограниченных критическими значениями (см. далее § 118) рейнольдсовых числах, при которых режим течения остается *ламинарным*

Подробно изложенный пример точного решения уравнений Навье — Стокса в случае движения безграничной вязкой жидкости при равномерном вращении в ней диска является одним из наиболее простых и наглядных. Данный пример автомодельного решения далеко не единственный. Так, уже давно был рассмотрен класс автомодельных точных решений, соответствующих *плоским* радиальным течениям несжимаемой вязкой жидкости в *конфузоре* (*диффузоре*) с прямолинейными стенками, пересекающимися в источнике мощности Q [1]).

Замечая, что размерность Q (*в плоском* движении $[Q]=VL$) совпадает с размерностью ν, убедимся в невозможности выразить по отдель-

[1]) Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zähen Flüssigkeiten, Jahr.— Ber Dtsch. Math. Ver., 1917, Bd. 25, S. 34—60.

ности V и L через Q и комбинацию физических констант μ и ρ. Это говорит о существовании автомодельных решений типа (в полярных координатах r, ε)

$$V_r = \frac{\nu}{L} f_r\left(\frac{r}{L}, \varepsilon\right), \quad V_\varepsilon = \frac{\nu}{L} f_\varepsilon\left(\frac{r}{L}, \varepsilon\right), \tag{109}$$

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \left(\frac{\nu}{L}\right)^2 P\left(\frac{r}{L}, \varepsilon\right).$$

Отсутствие в постановке задачи характерной длины L заставляет принять функции f_r, f_ε и P в форме

$$f_r\left(\frac{r}{L}, \varepsilon\right) = \frac{L}{r} F(\varepsilon), \quad f_\varepsilon\left(\frac{r}{L}, \varepsilon\right) = \frac{L}{r} G(\varepsilon), \tag{110}$$

$$P\left(\frac{r}{L}, \varepsilon\right) = \left(\frac{L}{r}\right)^2 E(\varepsilon),$$

что приведет к структуре решений

$$V_r = \frac{\nu}{r} F(\varepsilon), \quad V_\varepsilon = \frac{\nu}{r} G(\varepsilon), \quad \frac{p - p_0}{\rho} = \frac{\nu^2}{r^2} E(\varepsilon). \tag{111}$$

Не будем воспроизводить выкладки, но заметим лишь, что, подставляя эти значения скоростей и давления в систему стационарных уравнений Навье — Стокса (33) гл. X для плоского течения (штрих означает производную по ε) будем иметь

$$\begin{gathered} G(\varepsilon) = \text{const}, \\ F'' + F^2 = -2P, \\ P' = 2F'. \end{gathered} \tag{112}$$

Отсюда вытекает (C — постоянная интегрирования)

$$P = 2F + C,$$

а единственная неизвестная функция $F(\varepsilon)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$F'' + F^2 + 4F + 2C = 0, \tag{113}$$

на подробностях интегрирования которого[1]) останавливаться не будем. Подчернем лишь, что рассмотренный класс движений, так же как и предыдущий, допускает точные *автомодельные* решения. Отметим, что хотя подобная *пространственная* задача с заданной интенсивностью источника уже не будет автомодельной (см. только что процитированное четвертое издание (1973 г.) настоящего курса, с. 432, 433), но все же анализ размерностей, подчеркнем этот существенный факт, сохранив необходимость решения дифференциальных уравнений с частными производными, уменьшит число независимых переменных на единицу.

К точным *автомодельным* решениям уравнений Навье — Стокса относится класс движений, рассмотренных первоначально с чисто математической стороны Н. А. Слезкиным[2]), а впоследствии конкретизиро-

---

[1]) См. Rosenhead L (ed) Laminar boundary layers — Oxford: Clarendon Press, 1963, p. 144—150, а также Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. 4-е изд.— М.: Наука, 1973, с. 491—494.

[2]) Слезкин Н. А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости.— Уч. записки МГУ, вып. II, 1934, с. 89, 90.

ванных Л. Д. Ландау[1]). Это — случай пространственных круглых струй вязкой жидкости, распространяющихся в среде с теми же физическими свойствами (*затопленные незакрученные струи*). Воспользуемся сферической системой координат (R, θ, ε) с осью, расположенной вдоль оси симметрии струи. Условием незакрученности струи будет $V_\varepsilon = 0$ и равенство нулю производных по ε.

Автомодельное решение задачи можно получить, полагая

$$V_R = \frac{\nu}{R} F(\eta), \quad V_\theta = \frac{\nu}{R} G(\eta), \quad \frac{p - p_0}{\rho} = \left(\frac{\nu}{R}\right)^2 P(\eta), \tag{114}$$

где вместо θ оказывается целесообразным ввести аргумент $\eta = \cos\theta$.

Подставляя выражения (114) составляющих скоростей V_R, V_θ и давления $p - p_0$ в систему стационарных уравнений Навье — Стокса (34) гл. X и вводя функцию $f(\eta)$, связанную с F и G равенствами (штрих означает производную по η)

$$F(\eta) = -f'(\eta), \quad G(\eta) = -\frac{f(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \tag{115}$$

и являющуюся с точностью до множителя νR функцией тока, придем к системе *обыкновенных* дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\eta}\left[ff' - (1-\eta^2)f''\right] + \frac{f^2}{1-\eta^2} + 2P = 0, \\ \frac{d}{d\eta}\left[\frac{f^2}{2(1-\eta^2)}\right] + f'' + P' = 0. \end{gathered} \tag{116}$$

Из второго уравнения системы (116) сразу следует (C_1 — произвольная постоянная интегрирования)

$$P = -\frac{f^2}{2(1-\eta^2)} - f' - \frac{1}{2}C_1, \tag{117}$$

а из первого после этого легко получить автономное уравнение для f (C_2 — новая постоянная интегрирования)

$$(1-\eta^2)f'' - ff' + 2f + C_1\eta + \frac{1}{2}C_2 = 0,$$

которое непосредственно интегрируется и дает (C_3 — еще одна произвольная постоянная интегрирования)

$$2(1-\eta^2)f' - f^2 + 4\eta f + C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3 = 0. \tag{118}$$

Уравнение (118) относится к уравнениям типа Риккати и в известных функциях не интегрируется. Подстановкой

$$f = -\frac{2(1-\eta^2)g'}{g} \tag{119}$$

оно сводится к *гипергеометрическому* уравнению

$$-4(1-\eta^2)^2 g'' + (C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3)g = 0, \tag{120}$$

которое в случае

$$C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3 = A(1-\eta^2) \tag{121}$$

имеет простые степенные решения

$$g = (1+\eta)^\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+A}). \tag{122}$$

---

[1]) Ландау Л. Д. Новое точное решение уравнений Навье — Стокса.— Докл. АН СССР, 1944, т. 44, с. 311—314.

Случаю неограниченной круглой струи, бьющей из точечного источника, как показал Л. Д. Ландау (см. предыдущую ссылку), соответствуют значения констант $C_1=C_2=C_3=0$, а следовательно, и $A=0$. При этом функция f равна

$$f=\frac{2(1-\eta^2)}{a+1-\eta}. \tag{123}$$

Задавая струю проекцией на ее ось *полного* (включающего в себя, кроме потока количества движения, еще давление и вязкие напряжения) импульса J — единственной физической величины, характеризующей конкретную затопленную круглую струю из точечного источника,— найдем связь между a и J:

$$\frac{J}{2\pi\rho\nu^2}=\frac{32(1+a)}{3a(2+a)}+8(1+a)-4(1+a)^2\log\left(\frac{2+a}{a}\right). \tag{124}$$

В рассматриваемом сейчас случае *конечности* величины J мощность точечного источника Q должна равняться нулю, так как при бесконечной скорости жидкости в точечном источнике мощность его Q пропорциональна *первой* степени скорости, а J — *второй* степени скорости, что при *конечности* J влечет за собой равенство нулю Q.

Случай *конечности обеих этих величин* приведет к появлению двух *размерных* масштабов *длин* и *скоростей*

$$L=\frac{\mu Q}{J},\quad V=\frac{J}{\rho Q}.$$

Как раньше было разъяснено, при наличии масштабов длин и скоростей движение уже *не будет определяться автомодельным решением уравнений Навье — Стокса.* Соответствующее заданию Q, J, μ и ρ *неавтомодельное* решение было с математической стороны изучено В. И. Яцеевым[1]), а физическая интерпретация этого решения как движения вязкой жидкости, эжектируемой струей, бьющей из отверстия *конечной* ширины, причем для области вдалеке от источника, была указана Ю. Б. Румером[2]).

Рассмотренные в настоящем параграфе и другие, не нашедшие в нем места *автомодельные* решения уравнений Навье — Стокса сводились к интегрированию систем *обыкновенных* дифференциальных уравнений, которое могло осуществляться различными приближенными или классическими численными методами. Отыскание общих *неавтомодельных* решений, требующее интегрирования уравнений в частных производных, представляло в свое время непреодолимые трудности. Однако сейчас в связи с появлением ЭВМ, прочно вошедших в практику расчетов, большое развитие получили *машинные численные методы*, изложению которых, проиллюстрированному несколькими примерами, посвящены последние параграфы настоящей главы. Следует признать, что привлечение всеобщего внимания к этим методам, позволяющим достаточно близко подойти к точным решениям, вполне заслужено. Однако не следует преуменьшать и значение разнообразных *приближенных аналитических* методов, представляющих, как правило, решения задач в легко *обозримой форме*, наглядно выражающей основные *тенденции* исследуемых явлений. В дальнейшем будут приведены примеры как численных, так и приближенных аналитических решений задач механики жидкости и газа[3]).

---

[1]) Яцеев В. И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости.— Журн. эксп. и теор. физики, 1950, т. 20, вып. 11.

[2]) Румер Ю. Б. Задача о затопленной струе.— Прикл. мат. и мех., 1952, т. XVI, вып. 2.

[3]) Обширный обзор решений уравнений Навье — Стокса см.: Berker R. Integration des équations du mouvement d'un fluid visqueux incompressible.— Handbuch der Physik, Berlin, 1963, VII, 2, S. 1—384.

§ 102. Методы численного решения уравнений Навье — Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости [1])

В последние годы исключительно интенсивно развиваются методы приближенного численного решения уравнений гидрогазодинамики. Именно эти методы и составляют теперь, наряду с физическим экспериментом, главные инструменты исследования задач механики жидкости и газа.

Чтобы понять причины стремительного распространения вычислительных методов в рассматриваемой области механики, достаточно обратить внимание на уже известные читателю особенности основных уравнений движения сплошных текучих сред. Характерными чертами большинства практически интересных задач являются *многомерность* и *нелинейность*, из-за чего возможность их аналитического решения становится, по существу, нереальной. Даже в случае линейных задач возникают затруднения, если расчетная область имеет достаточно сложную форму. К этому стоит добавить, что в решении могут встречаться особые точки, а сами уравнения — менять свой тип (например, когда число M становится равным единице). Поэтому вполне естественно, что общие идеи, относящиеся к отысканию приближенных численных решений уравнений, сразу нашли в задачах гидрогазодинамики самую благодатную почву.

Численные методы широко используются для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а также одномерных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, к которым сводятся отдельные задачи механики жидкости и газа. Однако самый значительный вклад в гидрогазодинамику связан с применением численных методов к непосредственному интегрированию уравнений в частных производных, описывающих движение, тепломассообмен и более сложные физические явления в жидкостях и газах. В ряде случаев численное моделирование становится основным способом исследования задач (движение тел с космическими скоростями, в агрессивных средах и т. п.).

Развитие ЭВМ не обесценило традиционные аналитические подходы, но несколько изменило их роль. Так, асимптотические методы, будучи средством исследования предельных режимов течений, дают информацию о порядках величин искомых функций, масштабах их изменения в тех или иных частях расчетных областей, необходимую для того, чтобы постановка задач численного моделирования учитывала особенности изучаемого явления. Аналитические решения, обычно относящиеся к упрощенным частным случаям, имеют значительную ценность как «эталоны» для оценки свойств разностных схем и точности численных решений.

Естественно, что в развитии численных методов возник ряд собственных проблем. Среди центральных находится вопрос об *адекватности* численных результатов решению исходной задачи, особенно острый в тех случаях, когда в уравнениях присутствуют *малые параметры при старших производных* (например, $1/\mathrm{Re}$).

В численных методах, ориентированных на задачи гидрогазодинамики, к настоящему времени определился ряд направлений. Среди них выделяются методы конечных разностей, «крупных частиц», конечных элементов, интегральных соотношений, сеточно-вариационные и другие. Что касается задач динамики вязкой жидкости, то здесь наибольшие успехи связаны с применением *метода конечных разностей*, который и будет рассматриваться далее. Этот метод выделяется простотой и уни-

---

[1]) Настоящий и следующие два параграфа составлены по просьбе автора С. Б. Колешко.

версальностью своих основ и может обеспечить высокую точность результатов.

В настоящем параграфе, помимо изложения некоторых общих представлений метода конечных разностей, дано краткое описание ряда конкретных методов этого направления, предназначенных для уравнений Навье — Стокса движения несжимаемой жидкости. Следующие два параграфа посвящены примерам численных решений внутренней (§ 103) и внешней (§ 104) задач гидродинамики. Разумеется, в рамках малого объема можно только обозначить основные представления метода и его приложений, отослав читателя для основательного изучения этих вопросов к специальным руководствам и оригинальным статьям [1]).

Сущность конечноразностных методов состоит в следующем.

1. Область непрерывного изменения аргумента заменяется *дискретной*, т. е. состоящей из отдельных точек (*узлов*). Расстояния между узлами называют *шагами*. Совокупность узлов составляет *сетку*, которая может быть *равномерной* (с постоянными в каждом направлении шагами) или *неравномерной*.

2. Производится приближенная замена (*аппроксимация*) дифференциальных уравнений, граничных, начальных и других условий их *разностными аналогами*. Совокупность узлов, которым принадлежат величины, входящие в отдельные аппроксимирующие соотношения, образует *разностный шаблон*. Множество таких алгебраических соотношений дает *разностную схему*.

Содержание двух первых этапов составляет *дискретизацию* задачи.

3. В качестве приближенного решения дифференциальной задачи принимается решение соответствующей разностной задачи — *сеточная функция* в виде одно- или многомерной таблицы.

Разностная схема и ее решение зависят от шагов сетки, как от параметров.

Далее кратко остановимся на некоторых основных понятиях и определениях теории разностных схем, в ряде случаев иллюстрируя изложение простыми примерами.

1. *Сходимость*, *аппроксимация*, *устойчивость*. Следующим за введением разностной сетки этапом является построение *аппроксимирующей системы*.

Существует несколько способов получения алгебраических соотношений, которыми аппроксимируется исходная дифференциальная задача. Самый простой и наглядный способ состоит в том, что каждой производной непосредственно ставится в соответствие тот или иной ее разностный аналог. Часто пользуются на этой стадии различными полиномиальными аппроксимациями функций и другими более формальными методами. Заметим, кроме того, что в качестве исходных объектов аппроксимации не обязательно должны выступать сами дифференциальные

---

[1]) Метод конечных разностей вообще и применительно к задачам механики жидкости и газа имеет обширную литературу. Отметим лишь некоторые монографии и учебные руководства, в которых можно найти многочисленные ссылки и на другие источники: Самарский А. А. Теория разностных схем — М.: Наука, 1983, Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1980; Марчук Г. И. Методы вычислительной математики — М.: Наука, 1980; Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Введение в теорию — М.: Наука, 1973; Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972; Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред — М.: Наука, 1984; Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики — Новосибирск: Наука, Сибирское отд-ние, 1981; Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики —М.: Наука, 1976; Роуч П. Вычислительная гидродинамика.— М.: Мир, 1980; Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости.— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.

уравнения. Можно использовать также и *интегральные формы* законов сохранения физических величин (§ 21—24), записанные для ячеек сеточной области.

Характерной особенностью аппроксимации является ее *многовариантность*. Так, для аппроксимации одной лишь производной du/dx в некотором узле $x_m=m\Delta x$ равномерной разностной сетки с шагом Δx могут быть выбраны в соответствии с принятым шаблоном, например, следующие выражения (u_m — значение сеточной функции в узле x_m):

$$\frac{u_{m+1}-u_m}{\Delta x},\quad \frac{u_m-u_{m-1}}{\Delta x},\quad \frac{u_{m+1}-u_{m-1}}{2\Delta x},\quad \frac{-3u_m+4u_{m+1}-u_{m+2}}{2\Delta x},$$

$$\frac{3u_m-4u_{m-1}+u_{m-2}}{2\Delta x},\quad s\frac{u_m-u_{m-1}}{\Delta x}+(1-s)\frac{u_{m+1}-u_m}{\Delta x}$$

(s — весовой коэффициент) и т. д.

При аппроксимации уравнений в частных производных количество возможных вариантов многократно возрастает. В дальнейшем некоторые свойства разностных схем будет удобно пояснять на примере уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t) \tag{125}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \tag{126}$$

где $a(x,t)$ и $f(x,t)$ — известные функции пространственной координаты x и времени t, ν — положительный коэффициент. Левая часть уравнения (125), как следует из § 16, представляет собой *индивидуальную* (*лагранжеву*) производную от величины u, характеризующей жидкую частицу, при движении последней со скоростью a вдоль оси Ox в нестационарном неоднородном поле $u(x,t)$. Функция $f(x,t)$ имеет смысл заданного *источника* изменения u. Уравнение (126) дополнено членом $-\nu\partial^2u/\partial x^2$, выражающим, обобщенно говоря, *диффузионные* явления (собственно диффузию, теплопроводность, вязкость в зависимости от физического содержания функции u). Первое уравнение относится к *гиперболическому*, второе — к *параболическому* типам.

Приведенные модельные уравнения схожи по виду с уравнениями нестационарного одномерного течения *идеальной* [уравнение (125)] и *вязкой* [уравнение (126)] жидкостей, с тем, однако, существенным упрощением, что множитель a в конвективном члене принят заранее известным (иногда даже постоянным). Указанное упрощение, снимая принципиальные трудности, связанные с нелинейностью уравнений гидродинамики, оставляет возможность оценивать на модельных уравнениях разностные схемы с точки зрения передачи ими тех или иных свойств, присущих явлениям конвекции и диффузии.

Пусть для уравнений (125), (126) поставлена в области $-\infty<x<\infty$, $0<t\leqslant T$ задача Коши с начальным условием $u(x,0)=u^{(0)}(x)$. Введем в этой полосе прямоугольную равномерную сетку с шагами Δx и Δt и обозначим u_m^n, a_m^n, f_m^n значения сеточных функций в узле сетки $x_m=m\Delta x$, $t_n=n\Delta t$. Предположим, что производная du/dt в узле x_m, t_n аппроксимирована выражением $(u_m^{n+1}-u_m^n)/\Delta t$. Тогда дифференциальному уравнению (125) можно поставить в соответствие, например,

следующие алгебраические соотношения:

$$\begin{gathered}\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t}+a_m^n\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{\Delta x}=f_m^n,\\ \frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t}+a_m^n\frac{u_{m+1}^n-u_m^n}{\Delta x}=f_m^n,\\ \frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t}+a_m^n\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2\Delta x}=f_m^n\end{gathered}\qquad(127)$$

$$(m=0,\pm1,\pm2,\ldots;\quad n=0,1,2,\ldots,T/\Delta t-1),$$

дополненные начальным условием $u_m^0=u^{(0)}(x_m)$. Соответствующие этим схемам шаблоны показаны на рис. 168, *а*, *б*, *в*, *г*.

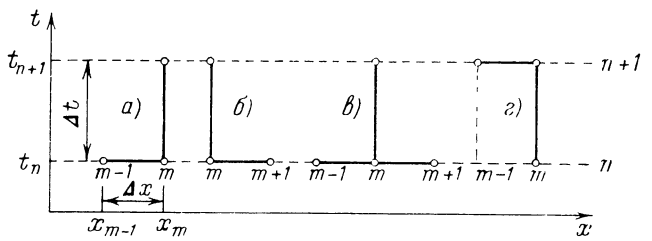


Рис. 168

Для уравнения (126) в левые части аппроксимирующих выражений войдет еще член, соответствующий второй производной $\partial^2u/\partial x^2$. Ее обычно представляют в узле x_m достаточно понятным выражением

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u_{m+1}-u_m}{\Delta x}-\frac{u_m-u_{m-1}}{\Delta x}\right)=\frac{u_{m-1}-2u_m+u_{m+1}}{\Delta x^2}.$$

В результате получатся разностные уравнения вида

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t}+a_m^n\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{\Delta x}-\nu\frac{u_{m-1}^n-2u_m^n+u_{m+1}^n}{\Delta x^2}=f_m^n\qquad(128)$$

и т. п.

Выписанные алгебраические формулы *непосредственно дают алгоритм определения сеточной функции* u_m^n во всех узлах расчетной области. Действительно, положив $n=0$ и зная начальное распределение u_m^0, вычислим u_m^1 для всех m (при $t=\Delta t$), затем u_m^2 (при $t=2\Delta t$) и т. д. «послойно» вплоть до $t=T$.

Очевидно, что количество разновидностей аппроксимирующих соотношений легко увеличить, используя хотя бы иные варианты аппроксимации производной $\partial u/\partial x$. Кроме того, пространственные производные можно было бы отнести не к «нижнему» временному слою t_n, а к «верхнему» t_{n+1} или же к некоторому промежуточному, вводя весовые коэффициенты α $(0\leqslant\alpha\leqslant1)$: например, $\partial u/\partial x\sim\alpha(u_m^n-u_{m-1}^n)/\Delta x+(1-\alpha)(u_m^{n+1}-u_{m-1}^{n+1})/\Delta x$.

Такое многообразие видов аппроксимирующих соотношений, дающих, вообще говоря, весьма различные по своим особенностям разностные схемы, делает необходимым *предварительную оценку* схем. В результате этих оценок конструируется разностная схема, обладающая свойствами, перечень которых во многом определяется классом рассматриваемых задач. Общие требования к разностным схемам, как правило, включают *устойчивость вычислений к различным возмущениям* и определенную *точность результатов* при условии *приемлемых затрат* ресурсов ЭВМ. Разностную схему принято называть *экономичной*, если

количество операций ЭВМ, требуемых для ее реализации, *пропорционально числу узлов* разностной сетки. Заметим, что приведенные схемы были именно такими.

Физическую достоверность и точность решений обычно связывают с наличием у разностной схемы некоторых свойств, *аналогичных свойствам исходных уравнений* (см. ниже о *консервативности*), а также с выбором разностной сетки и схемных параметров, учитывающих особенности решения. Качества, выступающие на первый план в одних задачах, могут не играть значительной роли в других. Отметим, кроме того, что построение разностной схемы может не сводиться (и чаще всего не сводится) к простому арифметическому соединению разностных аналогов отдельных элементов исходной задачи.

Рассмотрим теперь свойство аппроксимации с более общих позиций, а также определим два других фундаментальных понятия: *сходимость* и *устойчивость*.

В теории разностных схем принято кратко и обобщенно записывать математическую формулировку дифференциальной задачи, включая начальные и граничные условия, в виде

$$Lu=f, \tag{129}$$

где L — дифференциальный оператор, u и f — соответственно искомая функция непрерывного аргумента и заданная правая часть. Обозначение L символизирует те операции над функцией u, которые предписаны дифференциальными уравнениями и дополнительными условиями задачи. В той части, которая относится к уравнениям, оператор L для уравнения (125) имеет вид $\partial/\partial t+a\partial/\partial x$, а для уравнения (126) $\partial/\partial t+a\partial/\partial x-\nu\partial^2/\partial x^2$.

Аналогично, разностная задача, поставленная в соответствие дифференциальной (аппроксимирующая последнюю), может быть записана в виде

$$L_h u^{(h)}=f^{(h)}, \tag{130}$$

где L_h — разностный оператор, $u^{(h)}$ — сеточная функция [решение задачи (130)], $f^{(h)}$ — заданная правая часть, h — шаг сетки (совокупность пространственно-временных шагов). Понятие разностного оператора объединяет все алгебраические действия (относящиеся также к начальным и граничным условиям), посредством которых сеточная функция $u^{(h)}$ преобразуется в $f^{(h)}$.

Самым естественным требованием к приближенному решению $u^{(h)}$ является его *сходимость* к u при измельчении шага h. Однако непосредственному сравнению $u^{(h)}$ и u препятствует их *различная природа*: одна функция определена на *дискретном* множестве точек, другая — на *непрерывном*. В связи с этим приходится вводить еще одну функцию $[u]_h$ — *сеточный аналог* u. Правила, согласно которым вводят $[u]_h$, устанавливаются в зависимости от особенностей функции u. Так, для *непрерывной* u естественно определить $[u]_h$ как таблицу, составленную из значений u в узлах сетки («проекция» u на сетку), а для *разрывной* — как таблицу, содержащую средненинтегральные значения u в окрестности каждого узла. Именно $[u]_h$ и рассматривается далее как искомое точное решение («эталонная таблица»), с которым сравнивают решение $u^{(h)}$ задачи (130).

Говорят о сходимости решения $u^{(h)}$ к точному решению $[u]_h$ с k-м порядком точности относительно шага h, если норма[1]) *погрешности*

[1]) Под нормой $\|z^{(h)}\|$ сеточной функции $z^{(h)}$ понимают неотрицательное число, характеризующее отклонение этой функции от нулевой во всех точках. В зависимости от вида задачи используют те или иные определения норм. Так, в качестве нормы можно применять $\|z^{(h)}\|=\max\limits_{m,n}|z_m^n|$ — наибольшую по модулю компоненту $z^{(h)}$ или среднее квадратичное значение от $z^{(h)}$ по всем узлам сетки

$[u]_h - u^{(h)}$ приближенного решения стремится к нулю при $h \to 0$ как величина порядка h^k:

$$\| [u]_h - u^{(h)} \|_{h \to 0} \leqslant c h^k.$$

Как видно, определение сходимости имеет *асимптотический характер*, в то время как реальные вычисления ведутся с малыми, но *конечными* шагами. Поскольку значение постоянной c зависит от вида схемы, то в отдельных случаях переход к схеме формально более высокого порядка может и не дать при конечном h желаемого эффекта.

Непосредственная проверка сходимости, как правило, невозможна, хотя бы уже потому, что неизвестна функция u. Поэтому установление сходимости проводят в два этапа: через проверку *аппроксимации* и анализ *устойчивости* схемы.

Исследование аппроксимации проводится следующим образом. Предположим, что в разностную схему подставлено *точное решение*, т. е. сеточная функция $[u]_h$ (как будет ясно из дальнейшего, для оценки аппроксимации не обязательно фактически располагать этой функцией). В результате указанной подстановки получают *невязку* (погрешность) аппроксимации

$$\delta f^{(h)} = L_h [u]_h - f^{(h)}.$$

Если норма невязки стремится к нулю при $h \to 0$, будучи при этом величиной порядка h^{k_1}, то схему называют *аппроксимирующей* исходную задачу (129) на решении u с *порядком* k_1 *относительно шага* h.

Чтобы практически исследовать аппроксимацию, достаточно представить решение исходной задачи в виде *разложения в ряд Тейлора по степеням* h около соответствующих узлов сетки.

Выясним для примера характер аппроксимации дифференциального уравнения (126) разностным уравнением (128) в окрестности узла x_m, t_n. Используя разложения

$$u(x_m, t_{n+1}) = u(x_m, t_n) + \Delta t \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x_m, t_n} + \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x_m, t_n} + \frac{\Delta t^3}{6} \left.\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_{x_m, t_n} + \ldots, \quad (131)$$

$$u(x_{m \pm 1}, t_n) = u(x_m, t_n) \pm \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_m, t_n} + \frac{\Delta x^2}{2} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_m, t_n} \pm \frac{\Delta x^3}{6} \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x_m, t_n} + \ldots,$$

определив $[u]_h$ выражением $[u]_h|_{x_k, t_s} = u(x_k, t_s)$ и приняв во внимание, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (126), получим после подстановки (131) в схему (128):

$$\delta f^{(h)}|_{x_m, t_n} = \left.\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x_m, t_n} - a_m^n \left.\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_m, t_n} + O(\Delta t^2, \Delta x^2).$$

Отсюда видно, что если при $\Delta x, \Delta t \to 0$ выполняется условие $\Delta t = r \Delta x$ (r=const), то локальная (в окрестности узла) аппроксимация имеет *первый порядок* по обеим переменным. Также легко установить, что схема с симметричной аппроксимацией производной $\partial u / \partial x$ выражением $(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)/(2\Delta x)$ дает невязку порядка $O(\Delta t, \Delta x^2)$.

Проверка аппроксимации чаще всего не составляет большого труда; в случае равномерных сеток достаточно убедиться в аппроксимации в одной произвольной точке.

Может возникнуть впечатление, что если погрешность аппроксимации стремится к нулю при $h \to 0$, то это гарантирует сходимость решения $u^{(h)}$ соответствующей разностной задачи к точному решению $[u]_h$. Однако в общем случае это утверждение неверно.

Дело в том, что входные данные задачи (правые части, коэффициенты, начальные и граничные условия) задаются с некоторой погрешностью. Помимо этого, при вычислениях возникают ошибки округления. Для одной и той же исходной задачи в зависимости от структуры разностной схемы начальные погрешности могут вести себя по-разному. В *устойчивых* схемах не происходит нарастания указанных погрешностей. Наоборот, *неустойчивые* по начальным данным схемы увеличивают случайные погрешности и ввиду лавинообразного характера этого явления непригодны для работы.

Устойчивая схема должна обладать свойствами *однозначной разрешимости* и *непрерывной зависимости от входных данных*. Второе требование означает, что малые изменения условий задачи должны вызывать малые изменения решения.

Можно считать, что для схем, записанных в виде $L_h u^{(h)}=f^{(h)}$, включающем, как уже говорилось, начальные и граничные условия задачи, значения входных данных определяются правой частью $f^{(h)}$. Условие непрерывной зависимости решения $u^{(h)}$ от входных данных $f^{(h)}$ для *линейных* разностных задач означает, что $u^{(h)}$ должно быть того же порядка, что и $f^{(h)}$:

$$\|u^{(h)}\|\leqslant c\|f^{(h)}\|$$

при любой правой части $f^{(h)}$; c не зависит от h. Что касается *нелинейных* задач, то для них пока отсутствуют общие способы исследования устойчивости. Априорную оценку устойчивости реальных нелинейных задач вынужденно заменяют подобной оценкой для *линейных аналогов* этих задач, имеющей, разумеется, лишь ограниченное значение. Достоверное определение границ устойчивости возможно в этих случаях лишь в результате численных экспериментов.

Для схем, соответствующих нестационарным задачам (уравнениям гиперболического и параболического типов), наиболее распространен *спектральный* метод оценки устойчивости. Об устойчивости схемы судят по поведению решений специального вида — *периодических* по пространственным переменным сеточных функций (так называемых *гармоник*) [1]. Для часто встречающихся разностных схем типа

$$u^{n+1}=R_h u^n$$

($n, n+1$ — временные индексы, R_h — линейный разностный оператор с постоянными коэффициентами) собственные функции имеют вид $u_m^n=\lambda^n e^{i\alpha m}$ ($i^2=-1$, α — волновое число). Условие устойчивости заключается в том, чтобы собственные числа — амплитуды каждой гармоники, называемые также *множителями перехода*,— при переходе от t_n к t_{n+1} возрастали не более чем в $1+O(\Delta t)$ раз. На практике ограничиваются просто условием *невозрастания* по модулю амплитуды каждой рассматриваемой гармоники.

Так, для схемы с разностью «назад» по x

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t}+a\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{\Delta x}=0, \qquad a=\text{const}>0 \tag{132}$$

(первое из разностных уравнений (127) с опущенным источником f, аппроксимирующее с 1-м порядком точности по x и t уравнение (125) невязкого движения) применение подстановки $u_m^n=\lambda^n e^{i\alpha m}$ дает

$$\lambda=1-\varkappa+\varkappa e^{i\alpha}, \quad \varkappa=a\frac{\Delta t}{\Delta x}>0.$$

[1]) Сеточные функции $u^{(h)}$ указанного вида являются *собственными функциями* линейных операторов L_h с постоянными коэффициентами, т. е. $L_h u^{(h)}=\lambda u^{(h)}$, а множители λ именуются *собственными числами* (*значениями*) в полной аналогии с определениями гл. I.

Схема устойчива при $\varkappa \leqslant 1$. Устойчивость подобного типа называют *условной*, так как она имеет место при выполнении определенного условия типа неравенства.

Для аналогичной схемы с разностью «вперед» по x

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t}+a\frac{u_{m+1}^n-u_m^n}{\Delta x}=0, \quad a=\text{const}>0 \tag{133}$$

получается $\lambda=1+\varkappa-\varkappa e^{i\alpha}$, и схема *безусловно* (т. е. при любых соотношениях между Δt и Δx) неустойчива.

Приведенные примеры показывают, что даже небольшие изменения вида аппроксимации могут сделать схему неустойчивой и, значит, неработоспособной.

Подчеркнем, что если аппроксимация устанавливает соответствие между разностной схемой и исходными дифференциальными уравнениями, то устойчивость является чисто внутренним свойством разностной схемы и не связана с ее «происхождением».

Для линейных задач справедливо фундаментальное утверждение о том, что *из аппроксимации и устойчивости следует сходимость, причем порядок точности сходимости k равен порядку аппроксимации k_1.*

Укажем некоторые другие существенные свойства и особенности разностных схем.

2. *Консервативность.* Исходные уравнения гидрогазодинамики могут быть записаны как в обычной, так и в *дивергентной* (консервативной) формах. В последнем случае, как уже отмечалось, все пространственные производные выражаются в виде *дивергенции* соответствующих *векторов и тензоров*. Для несжимаемой жидкости различие между этими формами ограничено представлением конвективных членов в виде $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$ или $\nabla(\boldsymbol{VV})$. Одна форма сводится к другой при помощи уравнения неразрывности.

Полезно вспомнить, что закон сохранения массы в виде $d(\rho\delta\tau)/dt=0$ учитывался при выводе дифференциального уравнения количества движения на стадии преобразования интеграла (§ 21):

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau=\int_\tau \frac{d}{dt}(\rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau)=\int_\tau \rho\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\delta\tau+\int_\tau \boldsymbol{V}\frac{d}{dt}(\rho\,\delta\tau)=\int_\tau \rho\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\delta\tau,$$

что приводило к *недивергентной* форме конвективных членов.

Другим вариантом преобразования интеграла $\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau$ является выделение локальной и конвективной производных и запись последней в форме Эйлера (§ 24):

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau=\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho\boldsymbol{V}\,\delta\tau+\int_\sigma \rho\boldsymbol{V}V_n\delta\sigma=\int_\tau\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{V})+\nabla(\rho\boldsymbol{VV})\right]\delta\tau,$$

что приводит к *дивергентному* виду. Так, в прямоугольной декартовой системе координат проекция на ось Ox_i безразмерных уравнений Навье — Стокса несжимаемой жидкости запишется в обычной и в дивергентной формах соответственно:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2V_i,$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(V_kV_i)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2V_i$$

(суммирование по k).

Именно благодаря тому, что во втором случае конвективная производная выражена в виде *переноса* количества движения через замкнутую поверхность (в дифференциальном варианте его заменяет дивергенция тензора $\rho \boldsymbol{VV}$), обеспечивается следующее свойство: после суммирования соотношений такого типа по нескольким *смежным* объемам остаются лишь *потоки через внешнюю поверхность суммарного объема*, а потоки через *соприкасающиеся* поверхности смежных объемов *взаимно уничтожаются.*

Подобное свойство можно придать и аппроксимирующей разностной системе, полученной на основе дивергентной формы исходных дифференциальных или интегральных соотношений.

Если при суммировании разностных уравнений по всем узлам сетки получаются выражения, которые содержат только сеточные величины на границах области, то такую схему называют консервативной. Ценность данного свойства состоит в том, что разностные аналоги интегральных законов сохранения, например теоремы Гаусса — Остроградского, выполняются независимо от шагов сетки. Так, разностный аналог расхода среды через канал с непроницаемыми стенками будет одинаковым в любом поперечном сечении. Неконсервативная разностная схема, вообще говоря, не обеспечит этого свойства.

Для многих типов задач наличие свойства консервативности весьма существенно.

3. *Дифференциальное приближение. Схемная вязкость.* Если подставить в разностную схему разложение функции непрерывного аргумента в ряд Тейлора, приняв, что эта функция совпадает с решением $u^{(h)}$ в узлах сетки, и затем устремить шаг к нулю, то для аппроксимирующей системы все «лишние» члены обратятся в нуль, а оставшиеся образуют исходную дифференциальную задачу. В том случае, когда после подстановки удержаны еще и главные (т. е. при наименьшей степени h) члены погрешности аппроксимации, то получается *первое дифференциальное приближение.* Если, кроме того, сохранить и слагаемые с h в следующей степени, то совокупность оставленных членов даст *второе дифференциальное приближение* и т. д. Очевидно, что о свойствах разностного решения можно судить на основании анализа дифференциальных приближений, причем тем точнее, чем выше приближение.

Для примера приведем первое дифференциальное приближение для схемы (132), считая Δt пропорциональным Δx:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (134)$$

Продифференцировав (134) по t, получим с точностью до величин порядка Δx: $\partial^2 u/\partial t^2 = a^2 \partial^2 u/\partial x^2$. Действительно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x)\right) =$$

$$= -a\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta x) = -a\frac{\partial}{\partial x}\left(-a\frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x)\right) + O(\Delta x) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x).$$

Тогда уравнение (134) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \nu_{\text{сх}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $\nu_{\text{сх}} = a\Delta x(1-\varkappa)/2$, $\varkappa = a\Delta t/\Delta x > 0$.

Видно, что первое дифференциальное приближение отличается от исходного уравнения членом $\nu_{\text{сх}}\partial^2 u/\partial x^2$ в правой части. Множитель $\nu_{\text{сх}}$ естественно назвать *коэффициентом схемной* (*сеточной*) вязкости. При $\varkappa < 1$ $\nu_{\text{сх}} > 0$, и данный член оказывает *сглаживающее* влияние на реше-

ние, а при $\varkappa>1$ эффект отрицательной вязкости *дестабилизирует* вычисления, приводя к *возрастанию ошибок*.

Полученный результат имеет принципиальное значение. Обратим внимание на то, что хотя само по себе разностное уравнение (132) появилось в результате аппроксимации уравнения *невязкого* движения $\partial u/\partial t+a\,\partial u/\partial x=0$, поведение разностного решения, как это следует из только что полученного дифференциального приближения, на самом деле отражает свойства некоего воображаемого *вязкого* потока *с коэффициентом вязкости* $\nu_{сх}$. Этим обстоятельством объясняются многие особенности разностного решения, не имеющие места при движении физически невязкой среды и порой приводящие к неправильной трактовке результатов расчета. Помимо упоминавшегося и наиболее существенного для практики свойства *сглаживания*, отметим *повышение энтропии* и другие более сложные проявления *схемных диссипативных эффектов*.

Для схемы (133) с разностью «вперед» по пространству при $a>0$ и любых соотношениях шагов $\nu_{сх}<0$ — схема безусловно неустойчива. Этот вывод совпадает с полученным спектральным методом.

Заметим, что если бы разностное уравнение учитывало *физическую вязкость* среды ν (как, например, уравнение (128), аппроксимирующее дифференциальное уравнение (126) вязкого течения), то первое дифференциальное приближение имело бы вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=(\nu+\nu_{сх})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ясно, что если $\nu_{сх}\approx\nu$, то использование такой схемы эквивалентно расчету течения *существенно более вязкой жидкости*. Учет влияния схемной вязкости выходит на первый план при больших числах Рейнольдса. Надо также иметь в виду, что при решении уравнений с *нелинейными* конвективными членами в выражение $\nu_{сх}$ войдет вместо *заданной* скорости *а искомая и*, в связи с чем количественная оценка роли схемной вязкости становится возможной лишь после решения разностной задачи.

4. *Явные и неявные схемы.* Приведенные схемы были *явными*, так как они содержали лишь одну точку на верхнем ($t=t_{n+1}$) временном слое и, таким образом, позволяли *непосредственно вычислить* неизвестное u^{n+1} по известным u^n на нижнем ($t=t_n$) слое.

Явные схемы могут обладать только *условной устойчивостью*. Необходимое условие устойчивости Куранта, Фридрихса и Леви (КФЛ) требует, чтобы *область зависимости решения разностной задачи* (т. е. совокупность узлов, содержащих величины, определяющие решение в этой точке) *включала в себя область зависимости решения дифференциальной задачи*.

Рассмотрим для иллюстрации уже исследованную разностную явную схему (132), аппроксимирующую дифференциальную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t),\quad u(x,0)=u^{(0)}(x).$$

Выясним, какова область зависимости решения разностной задачи в узле $A(x_m, t_{n+1})$ плоскости x, t. В соответствии с шаблоном, показанным на рис. 168, *а*, значение u_m^{n+1} в точке A определяется величинами u_m^n, u_{m-1}^n и f_m^n на слое t_n и только ими. В свою очередь u_m^n определяется $u_m^{n-1}, u_{m-1}^{n-1}, f_m^{n-1}$, а u_{m-1}^n — значениями $u_{m-1}^{n-1}, u_{m-2}^{n-1}, f_{m-1}^{n-1}$ на слое t_{n-1} и т. д. Рассуждая таким образом, придем к выводу, что область зависимости решения в точке A составлена из узлов, попавших в *область прямоугольного треугольника* ABC с гипотенузой AC, проходящей по диагоналям ячеек, вертикальным катетом AB ($x=x_m$) и горизонтальным катетом BC — отрезком оси $t=0$ длины $(n+1)\Delta t$, на котором поставлено начальное условие. На рис. 169, *а* показана такая область для $n=2$.

С другой стороны, решение *исходной дифференциальной* задачи гиперболического типа, имеющей в плоскости x, t *характеристики* с угловыми коэффициентами $dt/dx=a^{-1}$, можно представить в виде

$$u(x, t)=u(x_0, 0)+\int_0^t f[x(\xi), \xi]\, d\xi,$$

где функция $x(t)$ дает закон движения выделенной частицы, $x_0=x(0)$, а интегрирование проводится вдоль характеристики. Таким образом, область зависимости решения дифференциальной задачи в точке A представляет собой *отрезок соответствующей характеристики* между осью $t=0$ и этой точкой. Для случая $a=\text{const}$ характеристики являются прямыми; на рис. 169, *а* характеристика AD показана штриховой линией с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\gamma=1/a>0$. Непосредственно видно, что условие КФЛ (AD находится в пределах треугольника ABC) выполняется для рассмотренной схемы при $\operatorname{tg}\gamma\geqslant\Delta t/\Delta x$ (условная устойчивость), что как раз совпадает с встречавшимся уже условием $\varkappa=a\Delta t/\Delta x\leqslant 1$.

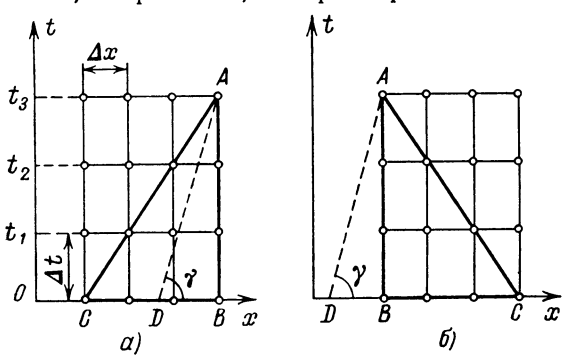


Рис. 169

Треугольник ABC зависимости решения разностной задачи для аналогичной схемы с разностью «вперед» по x (второе из соотношений (127) с шаблоном, изображенным на рис. 168, *б*) показан на рис. 169, *б*; как видно, при $a>0$ условие КФЛ *не выполняется ни при каких соотношениях между* Δt и Δx (*безусловная неустойчивость*). Если $a<0$, то, наоборот, безусловно неустойчивой станет предыдущая схема.

Примем для простоты $f\equiv 0$. Тогда при $a=\text{const}$ дифференциальное уравнение (125) описывает распространение *простой волны*, когда фиксированная форма начального возмущения $u^{(0)}(x)$ смещается как одно целое со скоростью a вдоль оси Ox, а значения функции $u(x, t)$ *постоянны вдоль характеристик*. Интересно выяснить, в какой степени отражает условно устойчивая схема (132) это свойство решения дифференциальной задачи.

Если положить в схеме $\varkappa=1$, то диагональ сеточной ячейки AC совпадет с характеристикой AD (рис. 169, *а*), а из соотношения $u_m^{n+1}=(1-\varkappa)u_m^n+\varkappa u_{m-1}^n$ будет следовать $u_m^{n+1}=u_{m-1}^n=\ldots=u_{m-(n+1)}^0$, т. е. разностное решение *точно* передает распространение простой волны. Однако проводить вычисления на верхней границе устойчивости удается редко. Так, если коэффициент a и вместе с ним $\varkappa=a\Delta t/\Delta x$ переменны на данном временном шаге, то неизбежно имеются узлы, где $\varkappa\leqslant\varkappa_{\max}\leqslant 1$. Тогда, как ясно из предыдущего, область зависимости решения в данном узле включает не одну, а несколько точек при $t=0$, что уже не соответствует свойствам дифференциальной задачи.

Чтобы количественно оценить влияние $\varkappa$, рассмотрим изменение во времени *кусочно-постоянного* («ступенчатого») начального профиля u_m^0 : $u_m^0=0$ при $m\leqslant 0$, $u_m^0=1$ при $m>0$. Замечая, что

$$u_m^{n+1}=(1-\varkappa)u_m^n+\varkappa u_{m-1}^n=(1-\varkappa)^2u_m^{n-1}+2(1-\varkappa)\varkappa u_{m-1}^{n-1}+\varkappa^2u_{m-2}^{n-1}=$$
$$=(1-\varkappa)^3u_m^{n-2}+3(1-\varkappa)^2\varkappa u_{m-1}^{n-2}+3(1-\varkappa)\varkappa^2u_{m-2}^{n-2}+\varkappa^3u_{m-3}^{n-2}=\ldots,$$

и полагая для примера $n=2$, вычислим сеточную функцию для значений схемного параметра $\varkappa=1$, 0,9 и 0,7, сведя результаты в таблицу:

Номер слоя	m						
	—1	0	1	2	3	4	5
3	0	0	0 0,001 0,027	0 0,028 0,216	0 0,271 0,657	1	1
2	0	0	0 0,010 0,090	0 0,190 0,510	1	1	1
1	0	0	0 0,100 0,300	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

В тех клетках, где решение при данном u_m^0 зависит от $\varkappa$, помещены три числа: верхнее — для $\varkappa=1$, среднее — для $\varkappa=0{,}9$, нижнее — для $\varkappa=0{,}7$. Видно, что численный расчет при $\varkappa<1$ *сглаживает* профили u_m^n, причем *тем сильнее, чем больше отличается* $\varkappa$ *от единицы*, а также что ширина области «размазывания» градиентов на фронте ступеньки на каждом временном слое увеличивается на Δx. Вспоминая, что $\nu_{сх}$ пропорционален $1-\varkappa$, легко интерпретировать описанные свойства численного решения как проявления действия *схемной вязкости*.

Выполнение условий устойчивости на практике часто приводит к неоправданному потребностями точности уменьшению шага Δt. С другой стороны, условия устойчивости содержат параметры дискретизации, а не только исходной задачи. В связи с этим возникает проблема построения разностных схем, для которых условия устойчивости в меньшей степени ограничивают шаг Δt или вовсе отсутствуют (в последнем случае схемы называют *безусловно устойчивыми*). Такими соображениями оправдано появление *неявных* схем.

Обратимся вновь к гиперболической задаче $\partial u/\partial t+a\,\partial u/\partial x=0$, $a=\mathrm{const}$. Аппроксимируем ее разностным уравнением

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t}+a\,\frac{u_m^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{\Delta x}=0,$$

отличающимся от (132) только тем, что во втором члене разности взяты на верхнем слое t_{n+1} (шаблон изображен на рис. 168, *г*). Спектральный метод дает $|\lambda|^{-2}=1+2\varkappa\sin^2(\alpha/2)+\varkappa^2\sin^2\alpha$. Поскольку $|\lambda|\leqslant 1$ при любых $\varkappa>0$, то схема при $a>0$ *безусловно устойчива*.

В неявных схемах *несколько неизвестных алгебраически связаны между собой*. Высокая устойчивость таких схем приобретается ценой усложнения алгебраической стороны задач, особенно многомерных и нелинейных. Что касается *нелинейных* разностных уравнений, то их решение, как правило, проводится методом *итераций*. Однако даже решение линейных (или ставших таковыми на данной итерации) *многомерных* сеточных уравнений требует большого числа арифметических действий. Для вычисления u^{n+1} применяют различные варианты *метода прогонки* или используют приемы, приближенно сводящие многомерную задачу к набору одномерных.

Поясним метод решения разностных уравнений, называемый *прогонкой*, на примере простейшей, но достаточно типичной одномерной краевой задачи. Пусть в узлах x_m ($m=0, 1, \ldots, M$) определена неизвестная сеточная функция u_m, удовлетворяющая во внутренних точках аппроксимирующим *трехточечным* соотношениям

$$a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1} = f_m$$

($m=1, 2, \ldots, M-1$; a_m, b_m, c_m — известные коэффициенты, f_m — известные правые части уравнений) и граничным условиям $u_0=U_0$, $u_M=U_M$. Решение этой задачи как системы общего вида при больших M достаточно трудоемко. С учетом вида системы представим ее решение в виде *двухточечных* соотношений

$$u_m = A_m u_{m+1} + B_m, \quad m=0, 1, \ldots, M-1,$$

что приводит после подстановки в исходные уравнения к рекуррентной связи между прогоночными коэффициентами A_m, B_m

$$A_m = -\frac{c_m}{a_m A_{m-1} + b_m}, \quad B_m = \frac{f_m - a_m B_{m-1}}{a_m A_{m-1} + b_m}.$$

Так как из условия $u_0=U_0$ следует $A_0=0$, $B_0=U_0$, то можно на основе этих формул последовательно найти $A_1, B_1, \ldots, A_{M-1}, B_{M-1}$ (этап «прямой» прогонки). Затем, зная прогоночные коэффициенты и используя второе граничное условие $u_M=U_M$, вычислим в порядке убывания индексов $u_{M-1}, u_{M-2}, \ldots, u_1$ (этап «обратной» прогонки).

Если, как и предполагалось, в каждом узле x_m определено одно число u_m, то прогонку называют *скалярной*. Если же величины u_m, a_m, b_m, c_m, f_m обозначают матрицы той или иной размерности, то аналогичные по смыслу операции именуют *матричной* прогонкой.

5. *Схемы, основанные на методе установления.* Предыдущие схемы относились к уравнениям, описывающим нестационарные процессы. Однако и для решения задач в стационарной постановке $Lu=f$ (оператор L содержит только производные по пространственным переменным) часто предпочитают пользоваться аппаратом, развитым для нестационарных задач. Для этого к уравнениям добавляют частные производные по времени от искомых величин, переводя задачу в класс гиперболических или параболических. Стационарное поле величин получается как *предел, к которому стремится при больших t решение нестационарной задачи.* Такой подход, являющийся по существу итерационным, и называют методом *установления.* Примеры применения этого метода встретятся в дальнейшем.

Конструирование схем установления предполагает бóльшую свободу действий в обращении с производными по времени, чем при решении собственно нестационарных задач, поскольку при установлении эти члены обратятся в нуль. Величина шага Δt определяется уже не точностью расчета временны́х зависимостей, а только быстротой сходимости к стационарному решению. В связи с этим более оправданным становится применение неявных схем.

Перейдем теперь от общих вопросов к выяснению тех свойств *уравнений Навье — Стокса несжимаемой жидкости*, которые предопределяют постановку и особенности их численного решения.

Поскольку эти уравнения содержат оператор Лапласа от проекций скорости, то сами уравнения относятся к *эллиптическому* или *параболическому* типам соответственно для *стационарных* или *нестационарных* задач. Это же определяет и постановку граничных условий для скорости — *на всем контуре расчетной области*, как, например, для температуры в задачах о распространении тепла в теплопроводящей среде. Но задачи о движении вязкой жидкости значительно сложнее последних.

Дополнительные проблемы заключаются не только в нелинейности, но и в присутствии в уравнениях движения еще одной неизвестной функции, определяющей характер силового поля — гидродинамического *давления*.

В структуре уравнений Навье — Стокса несжимаемой жидкости давление занимает особое место.

В отличие от задач о течении сжимаемой среды, давление не может быть выражено в этом случае через какие-либо другие физические переменные. Так как в системе нет частной производной от давления по времени, то для него нельзя сформулировать задачу с начальными условиями и непосредственно применить метод установления. Действительно, если наряду с начальным распределением скорости со свойством $\operatorname{div} \boldsymbol{V}(x, y, z; t_0) = 0$ все-таки задать некоторое поле давления $p(x, y, z)$ при $t = t_0$, то из уравнения движения можно будет найти $\partial \boldsymbol{V}/\partial t$ и, следовательно, скоростное поле в следующий близкий момент времени $t_0 + dt$. Однако эта функция уже не будет, вообще говоря, подчиняться уравнению неразрывности $\operatorname{div} \boldsymbol{V}(x, y, z; t_0 + dt) = 0$. Отсюда следует, что поле давления должно формироваться в каждый момент времени так, чтобы обеспечивать *постоянную соленоидальность поля скорости* (отсутствие источников или стоков). При построении разностных схем именно этот аспект задачи диктует применение ряда специальных приемов.

Поскольку давление входит в уравнение под знаком градиента, то оно определяется с точностью до произвольной постоянной. Задание этой постоянной (выбор уровня отсчета) в принципе должно быть единственным граничным условием для p. Вместе с тем при численном решении ряда задач иногда используются и другие комбинации условий для скорости и давления.

В основе решения лежит, как правило, одна из двух форм записи уравнений: а) в переменных *функция тока — вихрь* и б) в «естественных» переменных *скорость — давление*. Подробный сравнительный анализ каждого направления приведен в цитированной книге П. Роуча.

В *первой* группе методов давление исключают из системы посредством операции вихря, т. е. используют уравнение переноса завихренности (§ 94). В случае двумерных течений остается только одна компонента $\Omega = \operatorname{rot} \boldsymbol{V}$, а уравнение несжимаемости выполняется благодаря введению функции тока ψ.

Приведем соответствующие уравнения в безразмерной форме для плоского движения:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right), \tag{135}$$

$$\Omega = \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(- \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = - \nabla^2 \psi. \tag{136}$$

Применяется и консервативная форма с записью конвективных членов в виде $\partial(u\Omega)/\partial x + \partial(v\Omega)/\partial y$. Система двух полученных уравнений с двумя неизвестными состоит из параболического уравнения переноса вихря (135) и эллиптического уравнения Пуассона (136) для функции тока.

Новой задачей является определение отсутствующего в физической постановке граничного условия для вихря на твердой стенке. По сути, при использовании переменных Ω и ψ это условие является *приближенным эквивалентом* обычного *условия прилипания*. Рассмотрим для примера вывод приближенных разностных условий для вихря на твердой поверхности $y = 0$ при выполнении условий прилипания $u_0 = v_0 = 0$, $\psi_0 = \mathrm{const}$. Раскладывая ψ в ряд Тейлора по направлению y около стенки (ψ_1 — значение ψ при $y = \Delta y$)

$$\psi_1 = \psi_0 + \Delta y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 + \frac{\Delta y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 + O(\Delta y^3)$$

и принимая во внимание, что $(\partial\psi/\partial y)_0=0$, $(\partial^2\psi/\partial y^2)_0=-\Omega_0$, получим *условие Тома* первого порядка точности

$$\Omega_0=\frac{2(\psi_0-\psi_1)}{\Delta y^2}. \tag{137}$$

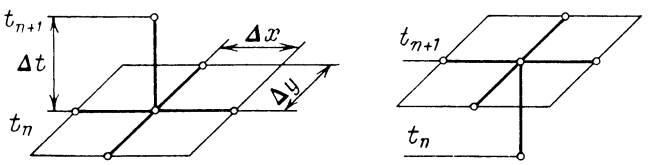
Если выписать в разложении следующий член ряда $\frac{\Delta y^3}{6}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)_0$ и учесть, что

$$\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)_0=-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_0=\frac{\Omega_0-\Omega_1}{\Delta y}+C(\Delta y),$$

то можно прийти к *формуле Вудса* второго порядка точности

$$2\Omega_0+\Omega_1=\frac{6(\psi_0-\psi_1)}{\Delta y^2}. \tag{138}$$

Возможны и другие варианты граничных условий для Ω на стенке[1]).



а) *б)*

Рис. 170

Порядок численного решения системы (135), (136) следующий. Пусть при $t=t_n$ известны сеточные функции Ω^n, ψ^n, u^n, v^n. Тем или иным способом аппроксимируются производные, входящие в параболическое уравнение (135). Предположим, например, что применена *явная* схема первого порядка относительно Δt

$$\frac{\Omega^{n+1}-\Omega^n}{\Delta t}=-(V^n\cdot\nabla)\,\Omega^n+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\Omega^n \tag{139}$$

с шеститочечным шаблоном, изображенным на рис. 170, *а*; для краткости приняты условные обозначения для разностных аналогов пространственных производных, совпадающие с обозначениями обычных производных.

Соотношения (139) дают значения Ω^{n+1} при $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ во *внутренних* узлах сетки и одновременно *правую часть сеточного уравнения Пуассона* (136), предназначенного для определения ψ^{n+1}. Это уравнение с необходимой точностью решается одним из многочисленных методов (прямым, итерационным, установления). Далее численным дифференцированием ψ^{n+1} вычисляются u^{n+1} и v^{n+1} [например, с использованием симметричных разностей: $u^{n+1}(x_m, y_r)=u^{n+1}_{mr}=(\psi^{n+1}_{m,r+1}-\psi^{n+1}_{m,r-1})/(2\Delta y)$] и по формулам (137) или (138) — значения завихренности Ω^{n+1} на границе области, необходимые для следующего временно́го шага.

В том случае, когда уравнения используются в рамках метода установления, не обязательно решать уравнение Пуассона (136) на каж-

---

[1]) См., например: Грязнов В. А., Полежаев В. И. Исследование некоторых разностных схем и аппроксимирующих граничных условий для численного решения уравнений тепловой конвекции.— Препринт ИПМ № 40, 1974; Тарунин Е. Л. О выборе аппроксимирующей формулы для вихря скорости на твердой границе при решении задач динамики вязкой жидкости.— Численные методы механики сплошной среды, 1979, т. 9, № 7.

дом шаге Δt с высокой точностью, а достаточно ограничиться малым числом итераций.

Условие устойчивости явных схем сильно ограничивает величину шага Δt. Последнюю можно значительно увеличить, если обратиться к *неявным* схемам. Такова, например, схема первого порядка точности по времени

$$\frac{\Omega^{n+1}-\Omega^n}{\Delta t} = -(\boldsymbol{V}^n\cdot\nabla)\Omega^{n+1} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\Omega^{n+1} \qquad (140)$$

(ее шаблон для Ω показан на рис. 170, *б*). Схема линейна благодаря тому, что скорость в конвективном члене взята на нижнем слое. Непосредственные вычисления по схеме (140) затруднительны, так как, во-первых, требуется обращение блочно-трехдиагональной матрицы, а во-вторых, необходимо иметь значения Ω^{n+1} на границе области, которые в свою очередь зависят от ψ^{n+1} — решения уравнения Пуассона (136).

Вычисления значительно упрощаются, если использовать двухслойные неявные схемы метода *переменных направлений* или *расщепления*, что сводит задачу к скалярным прогонкам. Так, схема переменных направлений для Ω имеет вид

$$\frac{\Omega^{n+1/2}-\Omega^n}{\Delta t/2} = -u^n\frac{\partial}{\partial x}\Omega^{n+1/2} - v^n\frac{\partial}{\partial y}\Omega^n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega^{n+1/2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Omega^n\right), \qquad (141)$$

$$\frac{\Omega^{n+1}-\Omega^{n+1/2}}{\Delta t/2} = -u^n\frac{\partial}{\partial x}\Omega^{n+1/2} - v^n\frac{\partial}{\partial y}\Omega^{n+1} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega^{n+1/2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Omega^{n+1}\right).$$

Общая идея приведенной схемы переменных направлений заключается в том, что для двумерных задач переход от слоя t_n к слою t_{n+1} делается *в два этапа* с шагами $\Delta t/2$: сначала от t_n к $t_{n+1/2}=t_n+\Delta t/2$ и затем от $t_{n+1/2}$ к t_{n+1}. На первом этапе производные от неизвестных величин по одной пространственной переменной (например, по x) аппроксимируются *неявно* (т. е. на слое $t_{n+1/2}$), а производные по y — *явно* (на слое t_n); вычисления заключаются в скалярных прогонках $\Omega^{n+1/2}$ вдоль отрезков $y=\mathrm{const}$. На втором этапе *неявно* (на слое t_{n+1}) аппроксимируются уже производные по y, а производные по x — *явно* (на слое $t_{n+1/2}$), что требует скалярных прогонок Ω^{n+1} вдоль отрезков $x=\mathrm{const}$.

Схема (141) имела бы второй порядок точности по времени, если бы не использование значений u^n, v^n в конвективных членах. Кроме того, по-прежнему остаются затруднения с граничными условиями для вихря на слоях $t_{n+1/2}$, t_{n+1},, которые преодолеваются итерационным путем.

По известным u^{n+1}, v^{n+1} можно найти, если это представляет интерес, сеточную функцию p^{n+1}. Непосредственное определение p^{n+1} через его градиенты, вычисленные на сетке из уравнения движения, привело бы к результатам, зависящим из-за различных погрешностей от пути численного интегрирования. Поэтому предпочтительнее находить давление из уравнения Пуассона для p, полученного путем применения операции дивергенции к векторному уравнению движения

$$\nabla^2 p = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) - \nabla\cdot[(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}] + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(\nabla\cdot\boldsymbol{V}).$$

Полагая $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$ и преобразуя второе слагаемое справа, получим

$$\nabla^2 p = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n+1} = 2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]^{n+1}.$$

Поскольку после дифференцирования повысился порядок производных от давления, то для замыкания задачи приходится привлекать в качестве дополнительных условий сами исходные уравнения. Обычно на гра-

нице области ставят *условия Неймана*, проектируя уравнение движения на нормаль к границе.

Обобщение данного подхода на трехмерное течение значительно усложняет задачу. При использовании *векторного потенциала* $V=\operatorname{rot}\psi$ число скалярных уравнений возрастает до шести. Поэтому целесообразнее рассчитывать пространственные течения на основе переменных «скорость — давление». Такой подход лучше приспособлен и для расчета потоков с поверхностями раздела.

При обращении к «естественным» переменным основной вопрос состоит в разработке такого способа определения давления, который достаточно эффективно обеспечит соленоидальность поля скорости.

Будем исходить из системы разностных уравнений первого порядка по времени

$$\frac{V^{n+1}-V^n}{\Delta t}+(V^n\cdot\nabla)V^n-\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2V^n+\nabla p=0,\quad \nabla\cdot V^{n+1}=0, \qquad (142)$$

в которой опять приняты условные обозначения для разностных операторов, совпадающие с обозначениями соответствующих производных, и предполагается явная схема для уравнения движения. Подобно тому как это имело место при использовании переменных Ω и ψ, возьмем операцию дивергенции (точнее, ее разностный аналог) от обеих частей уравнения движения, т. е. вновь обратимся к *уравнению Пуассона* для p:

$$\nabla^2 p=-\frac{\nabla\cdot V^{n+1}-\nabla\cdot V^n}{\Delta t}-\nabla\cdot[(V^n\cdot\nabla)V^n]+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(\nabla\cdot V^n).$$

Полагая в первом члене правой части $\nabla\cdot V^{n+1}=0$ и решая получившееся уравнение

$$\nabla^2 p=f=\frac{\nabla\cdot V^n}{\Delta t}-\nabla\cdot[(V^n\cdot\nabla)V^n]+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(\nabla\cdot V^n), \qquad (143)$$

дополненное упоминавшимися выше граничными условиями, мы должны получить как раз такую функцию p, которая после ее подстановки в уравнение движения (142) дает соленоидальное поле V^{n+1} на новом временном слое.

Подчеркнем, что если в методах, использовавших переменные Ω и ψ, давление было «пассивной» функцией, рассчитываемой на основе уже известного при $t=t_{n+1}$ поля скорости и не связанной ни с предыдущим, ни с последующим вычислительным процессом, то теперь, несмотря на известное сходство формул, ситуация в принципе иная. Именно точностью определения поля p из уравнения (143) обусловлена точность выполнения условия $\nabla\cdot V^{n+1}\equiv 0$.

Уравнение (143) чаще всего решается с помощью итераций или методом установления и, следовательно, выполняется с некоторой погрешностью. Кроме того, при постановке граничных условий (проекций уравнения движения на нормаль к контуру) может возникнуть определенное разностное несовпадение с уравнениями во внутренних узлах. В результате на каждом временном шаге разностный аналог уравнения неразрывности выполняется также с погрешностью. Для устранения возможного накопления погрешностей и неустойчивости, вызванных этим явлением, следует учитывать фактическую величину дивергенции скорости на предыдущем временном слое[1]). Для этого надо сохранить первый и последний члены в правой части f уравнения (143).

---

[1]) Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompessible flow of fluid with free surface.— Phys. of Fluids, 1965, v. 8, № 12, p. 2182—2189.

Таким образом, определение сеточной функции V^{n+1} по V^n проводится по явной схеме в следующем порядке. Во внутренних узлах расчетной области вычисляются по формулам (143) значения f. Далее решается разностное уравнение Пуассона с граничным условием Неймана и определяется давление. После этого на основе разностных проекций уравнения движения рассчитывается V^{n+1}.

Усовершенствованием этого метода является применение так называемого *физического расщепления*[1]). В соответствии с идеей этого метода решение задачи (142) разбивается на два этапа.

На первом этапе учитываются только конвективные и вязкостные члены, что дает вспомогательную сеточную функцию $\widetilde{V}$:

$$\frac{\widetilde{V}-V^n}{\Delta t}+(V^n\cdot\nabla)V^n-\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2V^n=0. \tag{144}$$

Сопоставление уравнений (142) и (144) приводит к связи между V^{n+1}, $\widetilde{V}$ и p:

$$\frac{V^{n+1}-\widetilde{V}}{\Delta t}+\nabla p=0,\quad V^{n+1}=\widetilde{V}-\Delta t\,\nabla p. \tag{145}$$

Таким образом, второй этап заключается в добавке к $\widetilde{V}$ такого потенциального вектора $(-\Delta t\,\nabla p)$, который обеспечит соленоидальность функции V^{n+1}. Для этого следует подчинить p условию

$$\nabla\cdot V^{n+1}=\nabla\cdot\widetilde{V}-\Delta t\,\nabla^2p=0,$$

т. е., как и прежде, решить уравнение Пуассона для давления

$$\nabla^2p=\frac{\nabla\cdot\widetilde{V}}{\Delta t}.$$

Как видно, в данном подходе благодаря введению сеточной функции $\widetilde{V}$ общий объем вычислений сокращается по сравнению с изложенным выше. Условие для давления по-прежнему формулируется в виде проекции уравнения движения на нормаль к границе.

Существует несколько вариантов этого подхода, различающихся главным образом постановкой разностных граничных условий. Возможны более существенные модификации метода, не требующие непосредственного решения уравнения Пуассона для давления, но по сути близкие к описанным. Один из таких итерационных методов можно назвать *методом последовательных потенциальных добавок.*

Рассмотрим переход от слоя t_n к слою t_{n+1}. Определим последовательный ряд функций $V^{(0)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(k)}, V^{(k+1)}, \ldots$, приближающих неизвестную скорость V^{n+1}, равенствами вида

$$\frac{V^{(k)}-V^n}{\Delta t}+(V^n\cdot\nabla)V^n-\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2V^n+\nabla p^{(k)}=0, \tag{146}$$

содержащими некоторые функции $p^{(k)}$. Тогда $(k+1)$-е приближение выражается через k-е по формуле

$$V^{(k+1)}=V^{(k)}-\Delta t\,\nabla(p^{(k+1)}-p^{(k)})=V^{(k)}-\Delta t\,\nabla\delta p^{(k+1)}. \tag{147}$$

Величины δp подчиним условию

$$\delta p^{(k+1)}=p^{(k+1)}-p^{(k)}=-\gamma\nabla\cdot V^{(k)}, \tag{148}$$

означающему, что поправки к предыдущему распределению давления

---

[1]) Chorin A J Numerical solution of Navier — Stokes equations — Math. Comput., 1968, v. 22, p 745—762.

пропорциональны (с некоторым коэффициентом $(-\gamma)$, где $\gamma>0$) отклонению поля скорости от соленоидальности, т. е. давление в случае *источника* $(\nabla\cdot V>0)$ должно *уменьшаться*, а в случае *стока* $(\nabla\cdot V<0)$ — *увеличиваться*.

Конвективные и вязкостные члены считают один раз — при определении $V^{(0)}$ по формуле (146); начальное приближение давления $p^{(0)}$ может быть достаточно произвольным. Далее многократно используются формулы (147) и (148) до сходимости с требуемой точностью. Это эквивалентно определению с той же точностью соленоидальной функции $V^{n+1}=V^{(s)}$, удовлетворяющей равенству

$$\frac{V^{(s)}-V^n}{\Delta t}+(V^n\cdot\nabla)V^n-\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2V^n+\nabla\left(p^{(0)}+\sum_{r=1}^{s}\delta p^{(r)}\right)=0,$$

где $p^{(0)}+\sum_{r=1}^{s}\delta p^{(r)}$ представляет собой искомое давление, соответствующее переходу от t_n к t_{n+1}.

Если для решения стационарной задачи воспользоваться методом *установления*, то итерация примет вид временно́го шага, а итерационное соотношение (148) для приращения δp можно трактовать как разностный аналог нестационарного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\gamma'(\nabla\cdot V)$$

или

$$A\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot V=0, \tag{149}$$

где $A>0$ — параметр, выбор значения которого позволяет влиять на быстроту сходимости итерационного процесса.

В рамках метода установления, как уже отмечалось, целесообразно применение *неявных схем расщепления*. Для пояснения сути метода кратко запишем исходную систему, состоящую из проекций уравнения количества движения и уравнения неразрывности в форме (149), в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t}+LU=0,$$

где U — столбец с компонентами V_1, V_2, V_3, p; L — пространственный оператор.

Запишем для этой системы неявную разностную схему первого порядка по t, аппроксимировав каким-либо образом пространственные производные:

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t}+L^nU^{n+1}=0$$

или

$$(E+\Delta tL^n)U^{n+1}=U^n,$$

где множители в конвективных членах взяты на слое t_n, на что указывает значок n в обозначении L^n; E — единичный, т. е. обладающий свойством $EU\equiv U$, оператор.

Непосредственное решение данной задачи затруднено ее *многомерностью*. Выше рассматривался метод переменных направлений, сводящий многомерную задачу к набору одномерных. В последние годы для решения многомерных задач широкое распространение получил *метод расщепления*[1]). В соответствии с идеей этого метода приближенно за-

[1]) См., например, указанную в начале настоящего параграфа монографию В. М. Ковени и Н. Н. Яненко.

меним оператор $E+\Delta t L^n$, действующий на неизвестную функцию U^{n+1}, произведением $\prod_{s=1}^{3}(E+\Delta t L_s^n)$, в котором L_s^n $(s=1, 2, 3)$ — операторы, содержащие производные только по x_s; $L^n = L_1^n + L_2^n + L_3^n$. Благодаря тому, что оператор теперь представлен произведением одномерных операторов, разностная схема

$$(E+\Delta t L_1^n)(E+\Delta t L_2^n)(E+\Delta t L_3^n)U^{n+1} = U^n$$

легко *разбивается на три подсистемы.* Действительно, введя промежуточные сеточные функции $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ и приняв для удобства обозначения $U^{(3)}=U^{n+1}$, $U^{(0)}=U^n$, будем иметь

$$(E+\Delta t L_s^n)U^{(s)} = U^{(s-1)} \quad (s=1, 2, 3;\ \text{по } s \text{ не суммировать}),$$

т. е. три *одномерные* задачи, каждая из которых содержит только аналоги производных по *одному* направлению x_s. Функции $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ определяются в порядке возрастания номеров.

Особенностью данной схемы расщепления является зависимость результата установления от Δt, что непосредственно видно из развернутой записи системы

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + L^n U^{n+1} + \Delta t\,(L_1^n L_2^n + L_1^n L_3^n + L_2^n L_3^n)U^{n+1} + \Delta t^2 L_1^n L_2^n L_3^n U^{n+1} = 0.$$

От этого недостатка легко освободиться, если сформулировать задачу для определения не самой функции U^{n+1}, а временно́го приращения $\Delta U^{n+1}=U^{n+1}-U^n$. Для разностной задачи

$$\frac{\Delta U^{n+1}}{\Delta t} + L^n(U^n + \Delta U^{n+1}) = 0$$

или

$$(E+\Delta t L^n)\Delta U^{n+1} = -\Delta t L^n U^n$$

приближенно представим оператор $E+\Delta t L^n$ так же, как и выше. Обозначая теперь $U^{(0)}=-\Delta t L^n U^n$, $U^{(3)}=\Delta U^{n+1}$ и вводя две промежуточные функции $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$, придем в этих обозначениях к трем одномерным задачам прежнего общего вида. Развернутая запись схемы

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + L^n U^{n+1} + \Delta t\,(L_1^n L_2^n + L_1^n L_3^n + L_2^n L_3^n)\Delta U^{n+1} + \Delta t^2 L_1^n L_2^n L_3^n \Delta U^{n+1} = 0$$

показывает, что при установлении $(U^{n+1}=U^n,\ \Delta U^{n+1}=0)$ получается, независимо от Δt, решение разностного аналога стационарной задачи $LU=0$.

В следующих двух параграфах изложенные здесь некоторые общие положения и методы решения уравнений гидродинамики найдут применение для конкретных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.

§ 103. Пример численного решения внутренней задачи: циркуляционное течение в каверне

Внутренние задачи динамики вязкой жидкости обычно представляются более простыми, чем внешние, поскольку для них отсутствуют условия на бесконечности. Последние при численном решении ставятся на достаточно большом конечном расстоянии R от тела, и выбор величины R влияет на точность решения. В то же время и для некоторых классов внутренних задач (например, для течений в каналах) возникают сходные проблемы, когда приходится формулировать граничные условия вниз по потоку от начального сечения.

Возьмем в качестве примера уже классическую модельную задачу о плоском стационарном течении в прямоугольной полости (каверне) с верхней стенкой, движущейся в своей плоскости с постоянной скоростью U_0 (рис. 171). Жидкость, целиком заполняющая каверну, вовлекается в движение силами вязкости. Такая постановка, будучи геометрически крайне простой, позволяет отразить многие характерные черты задач, описываемых уравнениями Навье — Стокса: конвективную нелинейность, различные соотношения между инерционными и вязкими силами, одновременное существование областей малых и больших градиентов и т. п., благодаря чему задача о каверне широко распространена в качестве «тестовой» при численном моделировании.

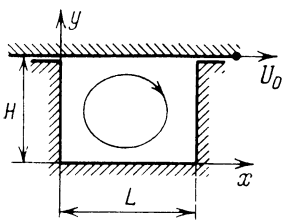


Рис. 171

Рассмотрим далее особенности постановки и некоторые методы, используемые для решения задачи о каверне, а в конце параграфа обратимся к результатам решения.

Примем за масштабы входящие в постановку задачи длину L и скорость U_0; тогда масштабами функции тока и вихря будут LU_0 и U_0/L. Таким образом, единственным критерием подобия является число Рейнольдса $\mathrm{Re}=U_0L/\nu$, а геометрическим параметром задачи — величина $\overline{H}=H/L$.

Для численного исследования течения в каверне применяются как переменные «вихрь — функция тока», так и переменные «компоненты скорости — давление». В первом случае система состоит из уравнения переноса вихря (135) и уравнения Пуассона для функции тока (136). Граничные условия для ψ являются нулевыми на всем периметре, так как все четыре стенки непроницаемы для жидкости. Приближенные условия для вихря Ω на твердой непроницаемой границе были получены в § 102 [формулы (137) и (138)]; в случае подвижной стенки в них вносятся естественные изменения. Так, разложение ψ в ряд Тейлора около верхней границы с учетом безразмерного условия $(\partial\psi/\partial y)_N=1$ вместо прежнего $\partial\psi/\partial y=0$ дает аналог условия Тома первого порядка точности:

$$\Omega_N = -\frac{\psi_{N-1}+\Delta y}{\Delta y^2/2}, \tag{150}$$

где индексы N, $N-1$ соответствуют точке на подвижной стенке и ближайшей к ней точке на нормали.

Введем равномерную сетку с узлами $x_i=i\Delta x$ $(i=0, 1, \ldots, M=1/\Delta x)$; $y_j=j\Delta y$ $(j=0, 1, \ldots, N=\overline{H}/\Delta y)$. Ограничимся пока простейшими симметричными аппроксимациями второго порядка точности всех пространственных производных

$$-v(x_i, y_j)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x_i,y_j}\sim\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta x},$$
$$u(x_i, y_j)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{x_i,y_j}\sim\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta y}\text{ и т. п.} \tag{151}$$

Записав во внутренних точках $(i=1, 2, \ldots, M-1;\ j=1, 2, \ldots, N-1)$ $2(M-1)\times(N-1)$ разностных соотношений, аппроксимирующих стационарную задачу (135) и (136), и присоединив к ним указанные разностные граничные условия для ψ и Ω, получим замкнутую алгебраическую систему, содержащую, очевидно, произведения компонент неизвестных сеточных функций Ω_{ij} и ψ_{ij}. *Нелинейность* делает невозможным прямое решение этой системы и заставляет обращаться к итерациям. Но даже

если и отвлечься от нелинейности, считая, например, на данной итерации значения ψ_{ij} в уравнении переноса вихря известными, то непосредственное определение Ω_{ij} из-за *двумерности* будет весьма трудоемким. Можно организовать итерационный процесс, избрав для решения стационарной задачи метод *установления*. Для этого в уравнения (135) и (136) надо включить соответственно $\partial\Omega/\partial t$ и $\partial\psi/\partial t$, придав итерациям форму временных шагов. Подобный подход на основе *явной* схемы, когда, напомним, пространственные производные берутся на *нижнем* временном слое $t_n = n\Delta t$, был применен для решения данной задачи в 1965 г. Л. М. Симуни[1]).

Т. В. Кускова[2]) использовала *неявную* схему *переменных направлений* первого порядка точности по времени (см. § 102):

$$\frac{\Omega^{n+1/2}-\Omega^n}{\Delta t_1/2} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^n\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^{n+1/2} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right)^{n+1/2} + \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\right)^n\right],$$

$$\frac{\Omega^{n+1}-\Omega^{n+1/2}}{\Delta t_1/2} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^n\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^{n+1/2} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^{n+1} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right)^{n+1/2} + \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\right)^{n+1}\right], \tag{152}$$

$$\frac{\psi^{n+1/2}-\psi^n}{\Delta t_2/2} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^{n+1/2} + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)^n + \Omega^{n+1},$$

$$\frac{\psi^{n+1}-\psi^{n+1/2}}{\Delta t_2/2} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^{n+1/2} + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)^{n+1} + \Omega^{n+1}. \tag{153}$$

Здесь верхние индексы, как и прежде, относятся к временны́м слоям; Δt_1, Δt_2 — временны́е шаги (итерационные параметры). Для краткости записи сохранены обычные обозначения пространственных производных для соответствующих аппроксимирующих выражений. Как видно из (152) и (153), вычисления при указанных аппроксимациях заключаются в скалярных трехточечных прогонках вдоль отрезков $y=\mathrm{const}$ и $x=\mathrm{const}$. Сначала из соотношений (152) по известным Ω^n и ψ^n определяются в два этапа новые значения вихря Ω^{n+1}, а затем на основе Ω^{n+1} и ψ^n находится по (153) функция тока ψ^{n+1}. Итерации прекращаются при достижении требуемой точности сходимости к решению стационарной аппроксимирующей системы:

$$\|\Omega^{n+1}-\Omega^n\| \leqslant \varepsilon_1, \quad \|\psi^{n+1}-\psi^n\| \leqslant \varepsilon_2.$$

Если же рассматривать нестационарные (эволюционные) течения, то характер проведения итераций изменяется. Величина Δt_1 приобретает смысл интервала физического времени, а Δt_2 сохраняет значение итерационного параметра. После перехода от Ω^n к Ω^{n+1} на основе уравнений (152) делаются внутренние итерации в системе (153) до решения с требуемой точностью уравнения Пуассона, вслед за чем обращаются к следующему шагу Δt_1 по времени и т. д.

Как способы аппроксимации конвективных членов в уравнениях (135), (136), так и методы решения стационарной нелинейной разностной задачи отличаются разнообразием.

---

[1]) Симуни Л. М. Численное решение задачи движения жидкости в прямоугольной яме.— Прикл. мех. и техн. физика, 1965, № 6.

[2]) Кускова Т. В. Численное исследование двумерных вязких течений несжимаемой жидкости.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике.— М.: Изд-во МГУ, 1971, вып. 3.

Так, в работе И. А. Белова и С. А. Исаева[1]) для решения уравнения переноса вихря используется *явная трехслойная* по времени схема Адамса — Бэшфорта. Эта схема следует из разложения по t функции

$$\Omega^{n+1}=\Omega^n+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^n\Delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}\right)^n\Delta t^2+O(\Delta t^3),$$

из которого $(\partial^2\Omega/\partial t^2)^n$ исключается при помощи соотношения

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}\right)^n=\frac{(\partial\Omega/\partial t)^n-(\partial\Omega/\partial t)^{n-1}}{\Delta t}+O(\Delta t).$$

В результате имеем

$$\frac{\Omega^{n+1}-\Omega^n}{\Delta t}=\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^{n-1}+O(\Delta t^2).$$

Используя исходное уравнение $\partial\Omega/\partial t+\Lambda\Omega=0$ (Λ — стационарный оператор) для выражения $\partial\Omega/\partial t$ через пространственные производные, получим после аппроксимации последних схему второго порядка точности по t

$$\frac{\Omega^{n+1}-\Omega^n}{\Delta t}=-\frac{1}{2}(\Lambda\Omega)^{n-1}-\frac{3}{2}(\Lambda\Omega)^n. \tag{154}$$

Очевидно, что вычисления по трехслойной схеме можно проводить при условии, что функции на двух «нижних» временных слоях уже известны. В связи с этим на «старте» вычислений определение Ω^1 по известному Ω^0 выполняется по двухслойной схеме.

Конвективные члены в Λ аппроксимировались по схеме Аракавы (см., например, книгу П. Роуча, цитированную в § 102), обладающей консервативностью не только по отношению к Ω, но и к Ω^2 и кинетической энергии. Такое свойство особенно существенно при больших числах **Re**, когда вдали от стенки существует область (ядро) практически невязкого течения. Уравнение Пуассона для функции тока решалось итерационным методом Гаусса — Зейделя. Обсуждение полученных этим методом результатов приведено ниже.

Помимо рассмотренной обычной сетки, часто применяют иные по конструкции сетки. Широкое распространение получила так называемая *гибридная* (со смещенными узлами) разностная сетка. На этой сетке разные физические величины определяются в различных пространственных узлах. Так, для переменных «скорость — давление» элемент сетки в двумерном случае имеет вид, изображенный на рис. 172, *а*; в центре прямоугольной ячейки определено давление p, а на серединах соответствующих сторон — «расходные» (нормальные к сторонам) составляющие скорости u и v. Появление «дробных» индексов типа $i+1/2$, $j+1/2$ у сеточных величин отражает сдвиг узлов расположения этих величин вдоль соответствующих осей на полшага относительно точки x_i, y_j.

На гибридной сетке уравнения неразрывности аппроксимируются в узлах определения p, а проекции уравнения движения на оси Ox и Oy — соответственно в узлах определения u и v. Несомненным достоинством такой сетки является естественный характер аппроксимации со вторым порядком точности уравнения неразрывности [так, в узле $p_{i+1/2,j}$ дивергенция скорости запишется в виде $(u_{i+1,j}-u_{i,j})/\Delta x+(v_{i+1/2,j+1/2}-$

[1]) Белов И. А., Исаев С. А. Циркуляционное движение жидкости в прямоугольной каверне при средних и больших числах Рейнольдса.— Журн. прикл. мех. и техн. физики, 1982, № 1, с. 41—45.

$-v_{i+1/2,j-1/2})/\Delta y]$ и проекций градиента давления в уравнениях движения [например, для продольной проекции в узле u_{ij} имеем $\partial p/\partial x \sim (p_{i+1/2,j} - p_{i-1/2,j})/\Delta x$]. Так как взаимное расположение узлов, в которых определены *одноименные* проекции скорости, сохраняется на гибридной сетке обычным, то и аппроксимация членов $u\,\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$, ... на ней не отличается от применяемой на обычной сетке. Особенности гибридной сетки проявляют себя при аппроксимации конвективных членов с *разноименными* проекциями скорости $u\,\partial v/\partial x$, $v\,\partial u/\partial y$ (или в консервативной форме $\partial(uv)/\partial x$, $\partial(vu)/\partial y$), поскольку u и v определены в различных узлах. Поясним это на примере члена $\partial(vu)/\partial y$, соответствующего переносу в направлении y продольной составляющей импульса («переносящей» величиной является v, «переносимой» — u). Обратимся к фрагменту сетки (рис. 172, *б*), на котором

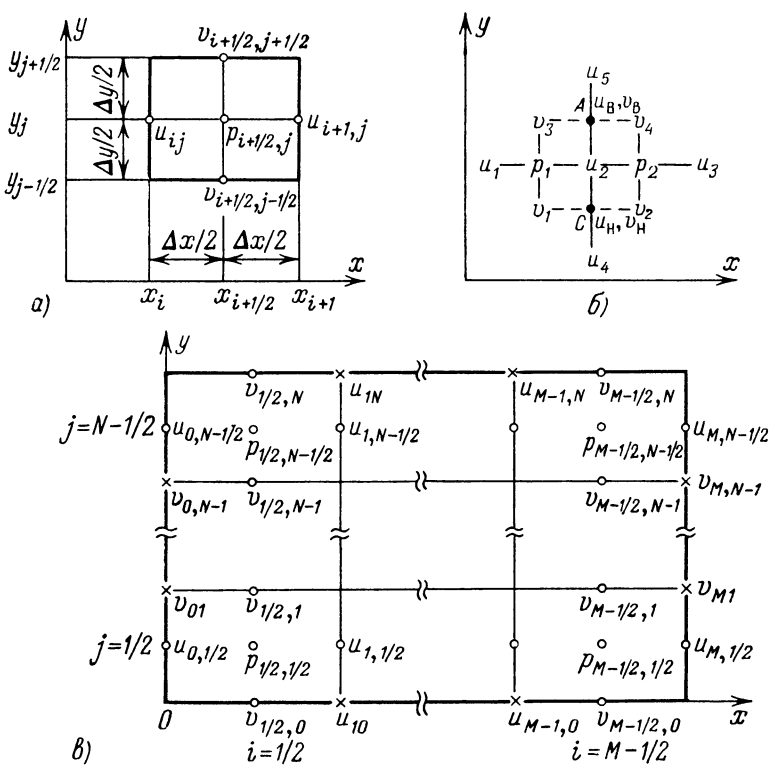


Рис. 172

ради краткости записи последующих выражений использована произвольная нумерация сеточных величин вместо двойных индексов ij, $i+1/2$, j и т. п. Штриховыми линиями выделена контрольная поверхность, ограничивающая элемент, в центре которого расположен узел определения u_2. Введем в точках A и C, т. е. на серединах горизонтальных площадок, «переносящую» (расходную) скорость равенствами $v_в = (v_3+v_4)/2$, $v_н = (v_1+v_2)/2$ и определим тем или иным способом «переносимую» скорость в тех же точках $u_в$, $u_н$. Тогда будем иметь в узле u_2:

$$\frac{\partial}{\partial y}(vu) \sim \frac{v_в u_в - v_н u_н}{\Delta y}.$$

Выражениям $u_в = (u_2+u_5)/2$, $u_н = (u_2+u_4)/2$ соответствует симметричная

аппроксимация второго порядка. Если же использовать условные выражения

$$u_{\text{в}} = \begin{cases} u_2, & \text{если } v_{\text{в}} > 0, \\ u_5, & \text{если } v_{\text{в}} \leqslant 0, \end{cases} \qquad u_{\text{н}} = \begin{cases} u_4, & \text{если } v_{\text{н}} > 0, \\ u_2, & \text{если } v_{\text{н}} \leqslant 0, \end{cases}$$

то получается несимметричная аппроксимация первого порядка, обладающая *транспортивностью*, т. е. отражающая свойство переноса физических величин механизмом конвекции только вниз по потоку.

Оба варианта соответствуют консервативной схеме. В случае записи конвективного члена в форме $v\,\partial u/\partial y$ аналогами приведенных выражений будут

$$\frac{1}{2}\left(v_{\text{в}}\frac{u_5-u_2}{\Delta y}+v_{\text{н}}\frac{u_2-u_1}{\Delta y}\right) \text{ и } \frac{\bar v+|\bar v|}{2}\frac{u_2-u_4}{\Delta y}+\frac{\bar v-|\bar v|}{2}\frac{u_5-u_2}{\Delta y},$$

где $\bar v=(v_{\text{в}}+v_{\text{н}})/2$. Во всех рассмотренных выше случаях совокупность узлов, показанная на рис. 172, *б*, составляет разностный шаблон для аппроксимации продольной проекции уравнения движения в узле u_2. На рис. 172, *в* изображена расчетная область, ячейки гибридной сетки и отдельные сеточные величины, принадлежащие крайним угловым ячейкам и показывающие диапазон изменения каждого из двух пространственных индексов.

Таким образом, аппроксимирующая система содержит:

1) $M\times N$ соотношений, аппроксимирующих со вторым порядком уравнения неразрывности во всех узлах определения p — центрах того же количества ячеек сетки, на которые разделена расчетная область;

2) $(M-1)\times N$ соотношений, аппроксимирующих проекции на ось Ox уравнения движения с первым или вторым (в зависимости от способа аппроксимации конвективных членов) порядком точности во внутренних узлах, предназначенных для продольной скорости u;

3) $M\times(N-1)$ подобных соотношений для проекций уравнения движения на ось Oy во внутренних узлах определения v.

Заметим, что аппроксимация уравнений движения в пристеночных узлах имеет особенности, обусловленные выходом за пределы расчетной области одной точки разностного шаблона. Так, если положить, что u_2 (рис. 172, *б*) соответствует $u_{i,1/2}$ (рис. 172, *в*), то точка шаблона, содержащая u_4, сместится на $\Delta y/2$ ниже дна каверны. Вообще, в пристеночных узлах имеет место аналогичная ситуация при аппроксимации производных по нормали к стенке от касательных к ней компонент скорости, так как последние на сторонах ячеек гибридной сетки не определены. Для выражения таких производных, а также для реализации условий прилипания вводят добавочные узлы для касательных компонент скорости на границах (u_{10}, v_{01}, ..., отмеченные крестиками на рис. 172, *в*) и аппроксимируют в пристеночных узлах производные по нормали нестандартным (из-за неравномерности сетки) способом. Другим вариантом является использование узлов, расположенных за пределами расчетной области на полшага от нее, что позволяет сохранить стандартную форму аппроксимации и приближенно выполнить условия прилипания, например, в виде равенств: $(u_{i,1/2}+u_{i,-1/2})/2=0$ (неподвижная стенка), $(u_{i,N-1/2}+u_{i,N+1/2})/2=1$ (подвижная стенка).

Легко убедиться, что в аппроксимирующей системе число разностных соотношений равно числу неизвестных. Обратим внимание еще на то, что если просуммировать все разностные уравнения неразрывности, умноженные на площадь ячейки $\Delta x\,\Delta y$, то благодаря консервативности этих уравнений получится соотношение

$$\Delta y\sum_{j=1}^{N}(u_{M,j-1/2}-u_{0,j-1/2})+\Delta x\sum_{i=1}^{M}(v_{i-1/2,N}-v_{i-1/2,0})=0, \qquad (155)$$

содержащее только расходные компоненты скорости на границе области. Данный результат выражает равенство нулю сеточного аналога суммарного потока жидкости через эту границу. С другой стороны, поскольку соотношение (155) непосредственно следует и из условий непроницаемости стенок, разностное уравнение неразрывности в одном (любом) узле является *линейной комбинацией* этих уравнений в остальных узлах и граничных условий. Ввиду этого количество независимых разностных соотношений уменьшается на единицу, позволяя произвольно устанавливать величину давления в какой-либо одной точке. Подчеркнем, что никакие иные условия для давления при решении разностной задачи не требуются, что полностью соответствует постановке исходной дифференциальной задачи.

Для численного решения получившейся нелинейной двумерной алгебраической системы, которую запишем кратко в виде $L_h u^{(h)}=0$ (L_h — стационарный оператор, $u^{(h)}$ — искомая сеточная функция), существует несколько способов. Так, можно построить неявную схему установления и для компонент скорости, и для давления, если использовать нестационарное (точнее, итерационное) уравнение для давления в форме (149). По соображениям, изложенным в конце предыдущего параграфа, целесообразно сформулировать задачу для определения на каждом временно́м шаге Δt не самих функций u, v, p, а временны́х приращений к ним. Опуская значок h, указывающий на сеточный характер величин, запишем в обозначениях § 102 неявную схему установления [1])

$$\frac{\Delta U^{n+1}}{\Delta t}+L^n(U^n+\Delta U^{n+1})=0$$

или

$$(E+\Delta t L^n)\Delta U^{n+1}=-\Delta t L^n U^n,$$

где

$$U=\begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}, \quad \Delta U^{n+1}=U^{n+1}-U^n.$$

Приближенная факторизация оператора $E+\Delta t L^n$ в виде $(E+\Delta t L_1^n)\times$ $\times(E+\Delta t L_2^n)$ позволяет расщепить задачу на две одномерные подсистемы

$$(E+\Delta t L_1^n)\Delta\tilde{U}=-\Delta t L^n U^n, \tag{156}$$

$$(E+\Delta t L_2^n)\Delta U^{n+1}=\Delta\tilde{U}, \tag{157}$$

где $\Delta\tilde{U}$ — столбец с элементами $\Delta\tilde{u}$, $\Delta\tilde{v}$, $\Delta\tilde{p}$ — промежуточная функция, полученная в результате решения подсистемы (156),

$$L_1^n=\begin{bmatrix} u^n\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & u^n\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

[1]) Егоров Ю. Э., Колешко С. Б. Применение метода дробных шагов для численного решения уравнений несжимаемой вязкой жидкости в естественных переменных.— В кн.: Динамика неоднородных и сжимаемых сред. Вып. 8: Газодинамика и теплообмен.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.

$$L_2^n = \begin{bmatrix} v^n \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 0 & v^n \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix},$$

A — итерационный параметр. Как и раньше, здесь употребляются символические обозначения для аппроксимаций соответствующих производных. Линейный аналог схемы с постоянными коэффициентами является безусловно устойчивым. Как следует из вида операторов L_1^n и L_2^n, из первого уравнения (для $\Delta\tilde{u}$) подсистемы (156) легко исключается $\Delta\tilde{p}$, а из второго уравнения (для $\Delta\tilde{v}$) подсистемы (157) — Δp^{n+1}, и вычисления, таким образом, реализуются трехточечными скалярными прогонками.

Приведем в развернутой форме уравнения (156) (соотношения для продольных, т. е. вдоль отрезков $y=\mathrm{const}$, прогонок):

$$\left\{E + \Delta t \left[u^n \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{\Delta t}{A}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\right\} \Delta\tilde{u}_{ij} =$$

$$= -\Delta t \left(\Lambda^n u^n + \frac{\partial p^n}{\partial x}\right)_{ij} + \frac{\Delta t^2}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y}\right)\right]_{ij} \qquad (158)$$

$$(j = 1/2,\ 3/2,\ \ldots,\ N - 1/2;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ M - 1),$$

$$\left[E + \Delta t \left(u^n \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right] \Delta\tilde{v}_{ij} = -\Delta t \left(\Lambda^n v^n + \frac{\partial p^n}{\partial y}\right)_{ij} \qquad (159)$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 1;\ i = 1/2,\ 3/2,\ \ldots,\ M - 1/2),$$

$$\Delta\tilde{p}_{ij} = -\frac{\Delta t}{A}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u^n + \Delta\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y} v^n\right]_{ij} \qquad (160)$$

$$(i = 1/2,\ 3/2,\ \ldots,\ M - 1/2;\ j = 1/2,\ 3/2,\ \ldots,\ N - 1/2).$$

Здесь Λ^n — разностный аналог оператора конвективно-вязкостных членов; значения индексов ij соответствуют рис. 172, *в*.

Граничные условия для продольных прогонок: $\Delta\tilde{u}_{0j} = \Delta\tilde{u}_{M,j} = 0$ — для уравнений (158) и $\Delta\tilde{v}_{0j} = \Delta\tilde{v}_{M,j} = 0$ — для уравнений (159), следующие из самого определения приращений и равенства нулю в любой момент времени проекций скорости на вертикальных стенках каверны, замыкают задачу. Уравнения (160) служат для вычисления $\Delta\tilde{p}$ по найденному ранее полю $\Delta\tilde{u}$.

Аналогичным образом посредством поперечных прогонок определяются Δu^{n+1}, Δv^{n+1}, а затем вычисляются и значения Δp^{n+1}. Итерации заканчиваются после достижения условия $\|LU\| \leqslant \varepsilon$, где ε — требуемая точность расчета.

Обратимся теперь к результатам решения задачи о течении в каверне. На рис. 173, *а—в*, взятых из цитированной работы И. А. Белова и С. А. Исаева (переменные «вихрь — функция тока», схема Аракавы), дана картина линий тока для квадратной каверны при числах Рейнольдса соответственно 400, 1000, 2500. Цифрам отвечают следующие значения безразмерной функции тока ψ: *1* — (—0,10); *2* — (—0,06); *3* — (—0,01); *4* — 0; *5* — 0,0001; *6* — 0,001. Выделяются обширная центральная область циркуляционного движения («центральный вихрь») и вторичные «угловые вихри» в нижней части каверны. (Здесь и далее при описании течения в каверне понятие «вихрь» употребляется для условного обозначения ограниченной области циркуляционного движения.)

Вначале с ростом числа Рейнольдса размеры угловых вихрей растут, но при $\mathbf{Re}>1000$ они стабилизируются по величине. Обращает на себя внимание появление, начиная с $\mathbf{Re}\approx1500$, еще одного вторичного вихря — около подвижной стенки.

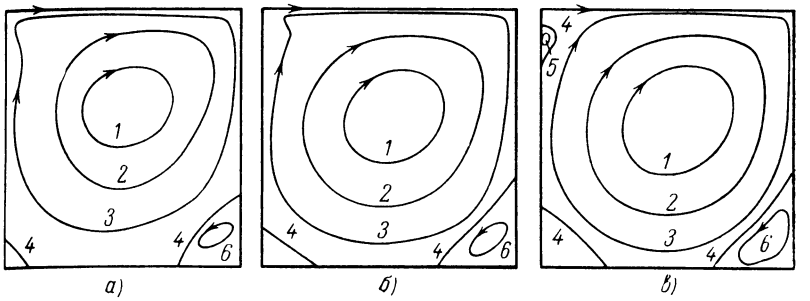


Рис. 173

На рис. 174 изображены профили продольной скорости в среднем поперечном сечении каверны. Относительная максимальная скорость течения в сторону левой стенки растет при увеличении числа **Re**, что говорит об усилении интенсивности циркуляционного движения, а сама точка максимума смещается к дну каверны.

На рис. 175 показаны изобары для течения при $\mathbf{Re}=400$, рассчитанного изложенным выше методом установления по неявной схеме расщепления второго порядка точности с использованием «естественных» переменных и уравнения неразрывности с членом $\partial p/\partial t$ (см. цитированную статью Ю. Э. Егорова и С. Б. Колешко). Цифрами обозначены значения безразмерного давления $(p-p_1)/(\rho U_0^2)\cdot100$, где p_1 — давление в правом нижнем углу каверны. Расчет на «гибридной» сетке 60×60 от начальных нулевых полей u, v, p до выполнения условия $\|LU\|\leqslant10^{-4}$ потребовал около 200 итераций (12 минут на ЭВМ БЭСМ-6). Распределение давления имеет достаточно сложный характер. Выделяются области заметного повышения давления в окрестности верхнего правого угла, где увлекаемая подвижной границей жидкость подводится к вертикальной стенке, и область относительного разрежения в верхней части левой стенки. Расчет на той же сетке при $\mathbf{Re}=1000$ дает качественно такое же распределение давления, но с относительно более слабым возрастанием его в правом и падением в левом верхних углах. Течение вблизи дна квадратной каверны при этих числах **Re** практически изобарическое.

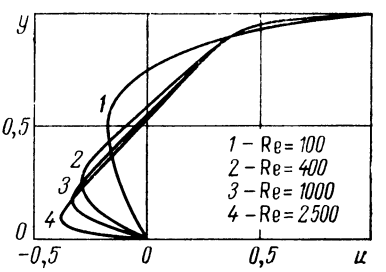


Рис. 174

При измельчении сетки все более ощутимо проявляются особенности в окрестности верхних углов, обусловленные самой постановкой задачи — наличием разрыва в граничных условиях в этих точках, сглаженного в результате дискретизации. Данные особенности должны привести, в частности, к неограниченному возрастанию в окрестности верхних углов при Δx, $\Delta y\to0$ модуля давления.

Следующая серия рисунков (рис. 176, *а—в*, работа И. А. Белова и С. А. Исаева) показывает эволюцию течения при изменении соотношения $\bar{H}=H/L$, соответственно равного 0,5; 1,4; 2,0. Цифровые обозначения *1—6* имеют тот же смысл, что и на рис. 173; *7* — $\psi=0{,}01$; *8* — $\psi=0{,}02$; $\mathbf{Re}=1000$. При малых глубинах (рис. 176, *а*) наблюдаются две

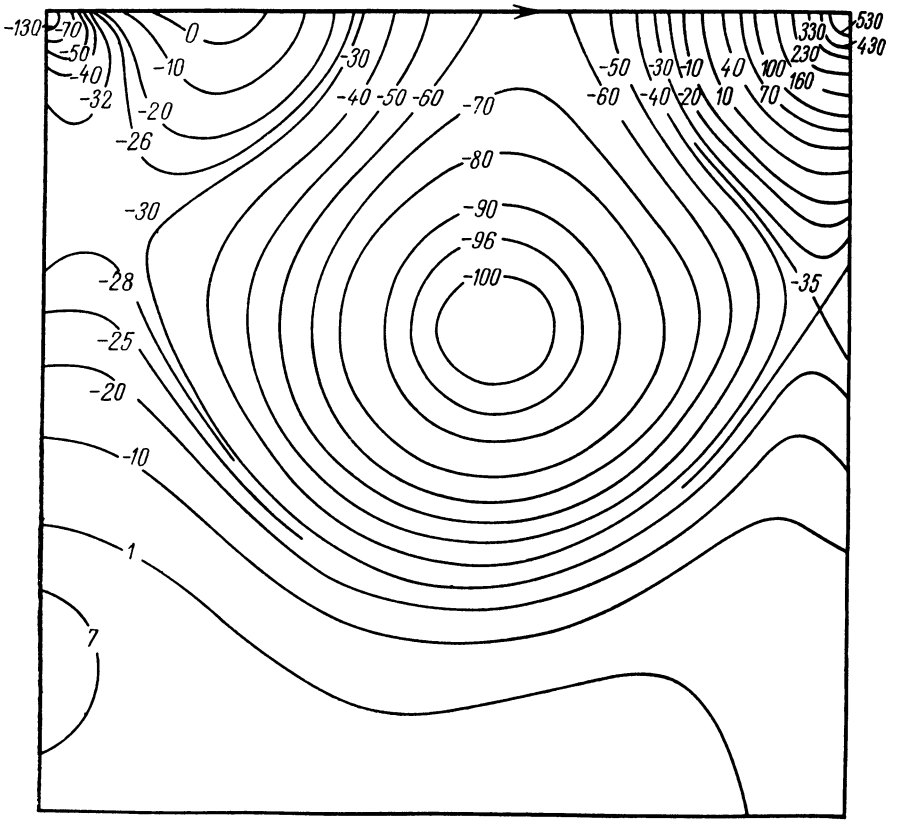


Рис. 175

крупные области циркуляционного течения — основного и менее интенсивного слева внизу; имеется еще один вторичный вихрь у задней стенки. С возрастанием $\overline{H}$ структура вихрей перестраивается: растут размеры и интенсивность центрального вихря; размеры вихря у передней стенки уменьшаются, а у задней — растут. При дальнейшем ($\overline{H}>1$) увеличении высоты каверны угловые вихри сливаются, образуя единый вторичный вихрь во всю ширину каверны, вращающийся в противоположную сторону и значительно меньшей интенсивности, чем основной.

Для каверн с $\overline{H}=1{,}4$ и 2,0 образуются новые вихри в нижних углах, растущие с увеличением глубины. Это соответствует известному из опытов образованию в глубоких кавернах ячеистых структур в виде системы вертикально расположенных вихрей убывающей интенсивности в направлении дна.

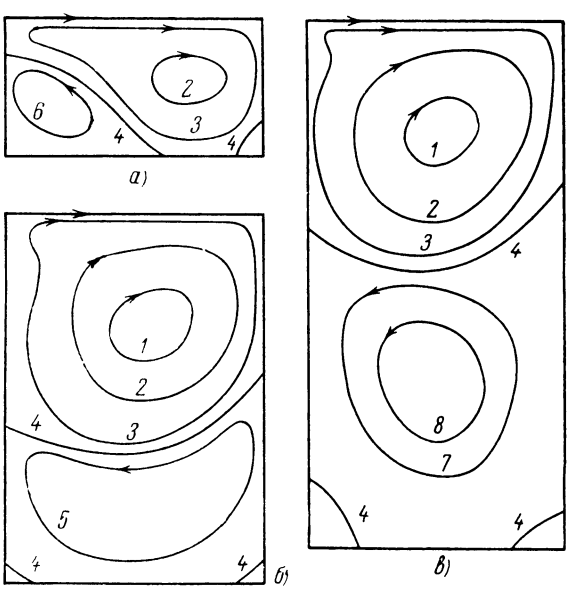


Рис. 176

Отметим в заключение, что расчет течений при больших числах Рейнольдса с типичными для них областями резкого изменения параметров потока требует привлечения неравномерных сеток со сгущением узлов в этих областях. Использование сеток с равноотстоящими в физической плоскости узлами приводит, начиная с некоторых чисел Рейнольдса, к заметному «размыванию» решений в зонах больших градиентов за счет схемных диссипативных эффектов (см. § 102), что может существенно исказить и общую картину. Применяют как заранее заданные, так и подстраивающиеся (адаптируемые) к разностному решению сетки. Решение задачи о течении в каверне может дать иллюстрацию роли сеточных факторов и послужить материалом для соответствующих методических оценок [1]).

§ 104. Численное исследование обтекания кругового цилиндра при умеренных числах Рейнольдса

Среди всевозможных внешних задач динамики вязкой жидкости выделяются задача об обтекании *кругового цилиндра* однородным потоком, перпендикулярным к его оси, и подобная ей задача для *сферы*. Помимо своей очевидной геометрической простоты, они привлекают еще и возможностью сравнения с классическими решениями для крайних случаев: для движения идеальной жидкости (§ 50 и 73) и вязкой при очень малых числах Рейнольдса (§ 96). Кроме того, обращение к задачам таких течений позволяет исследовать ряд интересных гидродинамических явлений, типичных для плохо обтекаемых тел.

Серия численных расчетов обтекания кругового цилиндра была открыта работами А. Тома [2]) (1928, 1933 гг., $\mathbf{Re}=10, 20$). К настоящему времени накоплен обширный материал, демонстрирующий развитие различных численных подходов. Прояснились и трудности, обусловленные, в частности, медленным затуханием возмущений параметров потока при отходе от тела в области *аэродинамического следа*.

Рассмотрим далее на примере задачи обтекания кругового цилиндра особенности постановки и численных решений. Прежде всего подчеркнем, что, начиная с чисел $\mathbf{Re}=U_\infty d/\nu$, составляющих несколько десятков, при граничных условиях *стационарного* типа можно получать, в зависимости от накладываемых дополнительных ограничений, как обычное *стационарное* решение, *симметричное* относительно направления набегающего потока, так и *несимметричное, периодически изменяющееся во времени*. Последний случай соответствует развитию возмущений, обычно присутствующих в реальных потоках, в условиях *неустойчивости* стационарного симметричного течения. Для получения стационарной картины обычно ставят условия симметрии потока и рассматривают течение в одной полуплоскости. В настоящем параграфе будут рассмотрены преимущественно решения в стационарной постановке.

Уравнения Навье — Стокса плоского стационарного течения вязкой жидкости в цилиндрических (полярных) координатах [(33) гл. X] запишем в безразмерной форме, отнеся скорости к U_∞, радиальную координату — к радиусу цилиндра $a=d/2$, давление — к ρU_∞^2. Кроме того, введем вместо r новую переменную $\xi=\ln r$, удобную тем, что постоянному шагу $\Delta\xi$ соответствует относительное сгущение узлов вдоль лучей $\varepsilon=$ $=\text{const}$ в направлении к телу. Тогда проекции уравнения движения

---

[1]) Копченов В. И., Крайко А. Н., Левин М. П. К использованию существенно неравномерных сеток при численном решении уравнений Навье — Стокса.— Журнал вычисл. мат. и мат. физики, 1982, т. 22, № 6, с. 1457—1467.

[2]) См. книгу: Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в физике и технике.— М.; Л.: Энергия, 1964.

после умножения на $r=e^{\xi}$ и уравнение неразрывности примут вид

$$V_r\frac{\partial V_r}{\partial \xi}+V_\varepsilon\frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon}-V_\varepsilon^2=-\frac{\partial p}{\partial \xi}+\frac{2}{\mathrm{Re}}e^{-\xi}\left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial \varepsilon^2}-2\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}-V_r\right], \tag{161}$$

$$V_r\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi}+V_\varepsilon\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}+V_rV_\varepsilon=-\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}+\frac{2}{\mathrm{Re}}e^{-\xi}\left[\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2}+2\frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon}-V_\varepsilon\right],$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial \xi}+\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}+V_r=0. \tag{162}$$

Граничные условия для проекций скорости в случае обтекания однородным потоком неподвижного цилиндра с непроницаемой поверхностью имеют очевидную форму:

на поверхности тела ($\xi=0$):

$$V_r=V_\varepsilon=0;$$

на бесконечности ($\xi\to\infty$):

$$V_r\to\cos\varepsilon,\quad V_\varepsilon\to-\sin\varepsilon.$$

Давление задается в одной точке, например в набегающем потоке.

Как уже отмечалось, из уравнений движения легко исключить давление, перейдя к уравнению переноса вихря Ω. В координатах ξ, ε оно имеет вид

$$V_r\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}+V_\varepsilon\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}=\frac{2}{\mathrm{Re}}e^{-\xi}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial \varepsilon^2}\right), \tag{163}$$

где

$$\Omega=\varepsilon^{-\xi}\left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi}-\frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon}+V_\varepsilon\right). \tag{164}$$

Если ввести равенствами

$$V_r=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}=e^{-\xi}\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon},\quad V_\varepsilon=-\frac{\partial \psi}{\partial r}=-e^{-\xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \tag{165}$$

безразмерную функцию тока ψ, то задача определения зависимых переменных Ω, ψ сведется к интегрированию системы

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}-\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial \varepsilon^2}\right), \tag{166}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial \varepsilon^2}=-e^{2\xi}\Omega. \tag{167}$$

Вывод приближенных условий для вихря на твердой поверхности, необходимых для конечноразностного решения системы в переменных «вихрь — функция тока», обсуждался выше. Условия для функции тока на поверхности цилиндра очевидны:

$$\psi=\frac{\partial \psi}{\partial \xi}=0\ \text{при}\ \xi=0. \tag{168}$$

При неограниченном удалении от тела имеет место переход к однородному потоку:

$$\Omega\to 0,\quad \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\to e^{\xi}\cos\varepsilon,\quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\to e^{\xi}\sin\varepsilon\ \text{при}\ \xi\to\infty. \tag{169}$$

Обратим внимание на существенное обстоятельство, связанное с практической реализацией условий «на бесконечности». Ввиду того, что эти условия в действительности приходится ставить на некотором *конечном* расстоянии $R\gg d$ от тела, в постановку такой геометрически

«урезанной» задачи войдут уже *два* линейных масштаба: d и R и, следовательно, два числа Рейнольдса: $\mathbf{Re}=U_\infty d/\nu$ и $\mathbf{Re}_1=U_\infty R/\nu\gg\mathbf{Re}$. Из-за большой величины $\mathbf{Re}_1$ решение в области внешней границы C_1 (окружности радиуса R) может меняться весьма заметно и даже осциллировать, если условия на C_1 заданы недостаточно аккуратно; подобные неточности могут исказить решение и вблизи тела

Простейший путь, т. е. выбор заведомо большого R, гарантирующий расположение контура C_1 в области практической однородности решения, в ряде случаев оборачивается чрезмерными затратами ресурсов ЭВМ. Величину R удается уменьшить, если применить на C_1 условия в иных формах: учитывающие асимптотику поведения решения при больших r, а также так называемые «мягкие» граничные условия. Последние заключаются в том, что в следе за телом и в прилегающей к нему части потока на расстоянии R ставят условия в виде равенства нулю первой или второй производных по r от искомых функций. Численные эксперименты показывают, что такие условия значительно слабее и в меньшей области деформируют решение, чем поставленные там же обычные «жесткие» условия (169) или соответствующие условия для скорости. Вместе с тем понятно, что мягкие условия можно поставить только на части контура C_1, поскольку они не несут никакой информации о набегающем на тело потоке.

Исследование асимптотики решения при больших r вместе с численным решением задачи об обтекании кругового цилиндра содержится в работах К. И. Бабенко, Н. Д. Введенской и М. Д. Орловой[1]). Установлено, что при данном числе $\mathbf{Re}$ характер затухания возмущений различен внутри следа: $|u-U_\infty|=O(r^{-1/2})$ и вне его: $|u-U_\infty|=O(r^{-1})$. С учетом асимптотического разложения вихря и возмущений скорости при больших r авторы приводят условия на C_1:

$$V_r(\varepsilon)=\cos\varepsilon+\widetilde{V}_r(\varepsilon),\quad V_\varepsilon(\varepsilon)=-\sin\varepsilon+\widetilde{V}_\varepsilon(\varepsilon),\quad \Omega(\varepsilon)=\widetilde{\Omega}(\varepsilon),\qquad (170)$$

где отмеченные знаком $\sim$ величины представляют собой первые члены асимптотических разложений соответствующих функций около C_1. Выпишем для примера $\widetilde{V}_r$:

$$\widetilde{V}_r=\frac{F}{2\pi R}-\frac{F\cos\varepsilon}{2\,(2\pi R/\mathbf{Re})^{1/2}}\exp\left(-\frac{R}{2/\mathbf{Re}}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где F — сила (заранее не известная), действующая на единицу длины цилиндра.

Влияние применения перечисленных видов условий при $r=R$ на точность решения задачи об обтекании кругового цилиндра исследовалось в работе В. А. Гущина[2]).

В цитированных работах К. И. Бабенко с соавторами использовались, в отличие от рассмотренных выше постановок, переменные «вихрь — проекции скорости». При этом система включает, помимо уравнения второго порядка переноса вихря, еще два уравнения первого порядка: неразрывности (162) и связи между вихрем и проекциями скорости (164). Стационарное решение в области $1\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\pi$ определяется методом установления. В уравнении переноса вихря, дополненном членом $\partial\Omega/\partial t$, конвективные члены аппроксимируются явно (на слое

---

[1]) Бабенко К. И, Введенская Н. Д, Орлова М. Г. Расчет стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью.— Журн. вычисл. мат и мат. физики, 1975, т. 15, № 1, с 183—196 и тех же авторов: Результаты расчета обтекания бесконечного кругового цилиндра вязкой жидкостью.— Препринт ИПМ № 38, 1971.

[2]) Гущин В. А. Численное исследование обтекания тела конечного размера потоком несжимаемой вязкой жидкости — Журн вычисл. мат. и мат. физики, 1980, т. 20, № 5, с. 1333—1341.

t_n), а члены, соответствующие вязкости,— неявно (на слое t_{n+1}):

$$\frac{\Omega^{n+1}-\Omega^n}{\Delta t}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\nabla^2\Omega^{n+1}-V_r^n\frac{\partial\Omega^n}{\partial r}-\frac{V_\varepsilon^n}{r}\frac{\partial\Omega^n}{\partial\varepsilon}.$$

Остальные уравнения, для которых зависимость от времени является параметрической, записываются на слое t_{n+1}.

С учетом общего четвертого порядка системы необходимо иметь *четыре* граничных условия. Дополнительно к условиям $V_r=V_\varepsilon=0$ при $r=1$ ($\xi=0$) ставятся два условия на контуре C_1. Если используются асимптотические условия, то ими в принципе могут быть любые два из набора (170). Преимущество того или иного сочетания этих двух условий определяется путем численных экспериментов. В работах К. И. Бабенко с соавторами преимущество отдается условиям для V_ε и Ω.

Таким образом, специфика задачи, записанной в переменных «вихрь — проекции скорости», проявляется в том, что по крайней мере три из четырех условий формулируются для проекций скорости. В итоге отпадает необходимость в самостоятельном приближенном условии для вихря на твердой границе, отсутствующем в физической постановке и часто замедляющем вычислительный процесс.

Способ решения не является обычным конечноразностным по обеим переменным. Для аппроксимации зависимостей V_r, V_ε, Ω от угла ε используются *тригонометрические полиномы* с коэффициентами, зависящими от r и t, совпадающие с искомыми функциями на лучах $\varepsilon=\varepsilon_k=2\pi k/(2M+1)$, $k=1, 2, \ldots, 2M+1$. Выпишем такое представление для радиальной скорости:

$$V_r(r,\varepsilon,t)=\sum_{m=0}^{M}[a_m^{(1)}(r,t)\cos m\varepsilon+a_m^{(2)}(r,t)\sin m\varepsilon].$$

Аналогичные тригонометрические аппроксимации вдоль дуг окружностей (соответственно с другими коэффициентами $b_m^{(1)}$ и $b_m^{(2)}$, $c_m^{(1)}$ и $c_m^{(2)}$) применяются для V_ε и Ω. Подстановка этих рядов в исходные уравнения сводит задачу к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно $a_m^{(1)}(r, t_{n+1})$, $a_m^{(2)}(r, t_{n+1})$,... (не приведенных здесь ввиду громоздкости), решаемых конечноразностным методом.

В цитированных работах К. И. Бабенко с соавторами решается задача обтекания цилиндра в диапазоне чисел Рейнольдса от 1/8 до 100; R при этом меняется от 400 до 50, а число узлов на лучах — от 200 до 75; $M=32$. Затруднения при малых значениях **Re** связаны с необходимостью увеличения радиуса расчетной границы, а при больших — с сужением области следа за телом, что требует большого числа гармоник. Некоторые из полученных в этих работах результатов будут приведены ниже.

Использование для решения задачи внешнего обтекания «естественных» переменных «проекции скорости — давление» рассмотрим на примере работы О. М. Белоцерковского, В. А. Гущина и В. В. Щенникова[1]).

В § 102 была в общих чертах изложена идея метода «физического расщепления», заключающаяся в двухэтапном определении неизвестных скорости $\boldsymbol{V}^{n+1}$ и давления p, соответствующего переходу от t_n к t_{n+1}, по известному полю $\boldsymbol{V}^n$. Напомним, что на первом этапе [уравнение (144)] определяется промежуточная скорость $\tilde{\boldsymbol{V}}$ с учетом только *конвективных*

[1]) Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1975, т. 15, № 1, с. 197—207. См. также цитированную в начале § 102 монографию О. М. Белоцерковского.

и вязкостных членов, а на втором [уравнение (145)] к $\widetilde{V}$ добавляется потенциальный вектор (т. е. учитывается *действие сил давления*), что как раз и обеспечивает результату этой добавки V^{n+1} свойство соленоидальности. Полезно подчеркнуть, что уже на первом этапе полностью воспроизводятся вихревые характеристики искомого поля скорости, так как потенциальная добавка к $\widetilde{V}$, очевидно, является безвихревой.

Обычно применяются «гибридные» сетки со смещенными узлами (§ 102, рис. 172, *а*). При использовании таких сеток существенным вопросом становится способ определения касательной к твердой поверхности компоненты вектора $\widetilde{V}$ для ячеек, смежных с этой поверхностью («пристеночных»). Шаблон на рис. 172, *б* дает представление о расположении компонент скорости на слое t_n, формирующих значение $\widetilde{u}$ в центральном узле, обозначенном u_2. Видно, что если речь идет о вычислении касательной к стенке компоненты $\widetilde{u}$ в пристеночных (удаленных на $\Delta y/2$ от твердой поверхности) узлах, то придется оперировать величинами скоростей в фиктивных ячейках внутри твердого тела. Авторы только что указанной работы предложили способ приближенного вычисления касательных компонент $\widetilde{V}$ в пристеночных узлах, следующий из граничного условия прилипания в комбинации с уравнением движения и не требующий введения подобных ячеек. Сущность этого способа поясним далее для случая декартовой прямоугольной системы; для полярной системы координат получаются аналогичные выражения.

Разложение в ряд Тейлора касательной компоненты скорости $u(x, y)$ по нормали y к твердой стенке в пристеночной точке с индексами i, 1/2 ($x=i\Delta x$, $y=\Delta y/2$) имеет вид

$$u^{n+1}_{i,0}=0=u^{n+1}_{i,1/2}-\frac{\Delta y}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n+1}_{i,1/2}+\frac{\Delta y^2}{8}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{n+1}_{i,1/2}+O(\Delta y^3).$$

Используем проекцию уравнения движения на Ox в той же точке, чтобы выразить $\partial^2 u/\partial y^2$ через $\partial p/\partial x$. Учитывая, что $u^{n+1}_{i,1/2}=O(\Delta y)$, получим

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{n+1}_{i,1/2}=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{n+1}_{i,1/2}+O(\mathrm{Re}\,\Delta y).$$

Кроме того, заменим $(\partial u/\partial y)^{n+1}_{i,1/2}$ на $(\partial u/\partial y)^{n}_{i,1/2}$ с погрешностью $O(\Delta t)$. Тогда придем к выражению

$$u^{n+1}_{i,1/2}=\frac{\Delta y}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n}_{i,1/2}-\frac{\Delta y^2}{8}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{n+1}_{i,1/2}+O(\Delta y^3, \mathrm{Re}\,\Delta y^3, \Delta y\,\Delta t).$$

Применяя те же обозначения, что и для внутренних точек, запишем последнее равенство в виде

$$u^{n+1}_{i,1/2}=\widetilde{u}_{i,1/2}-\Delta t_0\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{n+1}_{i,1/2}+O(\Delta y^3, \mathrm{Re}\,\Delta y^3, \Delta y\,\Delta t), \qquad (171)$$

где

$$\widetilde{u}_{i,1/2}=\frac{\Delta y}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n}_{i,1/2}, \quad \Delta t_0=\frac{\Delta y^2}{8}\mathrm{Re}. \qquad (172)$$

Аппроксимируя далее $(\partial u/\partial y)^{n}_{i,1/2}$ на трехточечном неравномерном шаблоне с шагами $\Delta y/2$ и Δy по значениям $u^n_{i0}=0$, $u^n_{i,1/2}$ и $u^n_{i,3/2}$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n}_{i,1/2}=\frac{u^n_{i,1/2}}{2}+\frac{u^n_{i,3/2}}{6}+O(\Delta y^2),$$

а $(\partial p/\partial x)_{i,1/2}$ — в средней точке двухточечного шаблона по значениям $p_{i+1/2,1/2}$, $p_{i-1/2,1/2}$:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,1/2} = \frac{1}{\Delta x}(p_{i+1/2,1/2} - p_{i-1/2,1/2}) + O(\Delta x^2),$$

придем к приближенному разностному соотношению в пристеночных узлах, связывающему $u^{n+1}_{i,1/2}$ со значениями u^n и давления p:

$$u^{n+1}_{i,1/2} = \tilde{u}_{i,1/2} - \Delta t_0 \frac{p_{i+1/2,1/2} - p_{i-1/2,1/2}}{\Delta x}, \qquad (173)$$

$$\tilde{u}_{i,1/2} = \frac{\Delta y}{2}\left(\frac{u^n_{i,1/2}}{2} + \frac{u^n_{i,3/2}}{6}\right).$$

После дискретизации соотношения (171) временной индекс у функции p в (173) опущен; имеется в виду поле давления, обеспечивающее соленоидальность поля скорости при переходе от t_n к t_{n+1}.

В рассматриваемом методе разностные соотношения для определения p получаются для каждой *внутренней* сеточной ячейки путем подстановки в разностный аналог уравнения неразрывности для этой ячейки значений u^{n+1}, v^{n+1} из разностных аналогов уравнений движения (записанных с использованием «промежуточных» величин $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ в узлах определения соответствующих скоростей на сторонах ячейки). Это эквивалентно применению в разностной форме *операции дивергенции* к уравнениям движения. Однако в *пристеночных* ячейках (см. рис. 172, *а* при $j=1/2$) ситуация иная, так как уравнение движения непосредственно аппроксимируется только в тех узлах, где определена величина $v_{i+1/2,1}$. В разностный аналог уравнения неразрывности для остальных трех узлов подставляют: $v^{n+1}_{i+1/2,0}=0$ (условие непроницаемости), $u^{n+1}_{i,1/2}$, $u^{n+1}_{i+1,1/2}$ — из уравнений (173). В результате получается равенство, связывающее четыре значения p с известными u^n, v^n (или $\tilde{u}$, $\tilde{v}$):

$$\Delta t_0 \frac{p_{i-1/2,1/2} - 2p_{i+1/2,1/2} + p_{i+3/2,1/2}}{\Delta x^2} + \Delta t \frac{p_{i+1/2,3/2} - p_{i+1/2,1/2}}{\Delta y^2} = \frac{\tilde{u}_{i+1,1/2} - \tilde{u}_{i,1/2}}{\Delta x} + \frac{\tilde{v}_{i+1/2,1}}{\Delta y}. \qquad (174)$$

Соотношения (174) являются замыкающими для системы пятиточечных разностных уравнений Пуассона для значений p, соответствующих внутренним ячейкам. В итоге удается обойтись без обычных для методов, использующих «естественные» переменные, граничных условий для p в виде проекций уравнения движения на нормаль к границе.

Вычисления проводятся в следующем порядке.

1. По известному полю $\boldsymbol{V}^n$ с помощью уравнений (144) определяются во всех узлах, кроме пристеночных, сеточные функции $\tilde{u}$, $\tilde{v}$. В пристеночных точках используются только что полученные нестандартные соотношения [вторая формула (173) для $\tilde{u}$ вблизи твердой поверхности с уравнением $y=0$ и подобные им формулы при ином расположении стенок].

2. Решается (обычно методом установления) разностное уравнение Пуассона для давления

$$\nabla^2 p = \frac{\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{V}}}{\Delta t} \qquad (175)$$

с замыкающими соотношениями (174) и аналогичными им вблизи других частей твердой границы.

3. По формулам (145) для внутренних и первым соотношениям (173) для пристеночных узлов вычисляются значения u^{n+1}, v^{n+1}. Если данная схема используется в рамках метода установления для решения стационарной задачи, то вычисления продолжаются до совпадения с заданной точностью величин на последовательных временны́х шагах. При этом, как отмечалось в § 102, нет необходимости на каждом шаге добиваться решения уравнения (175) с высокой точностью.

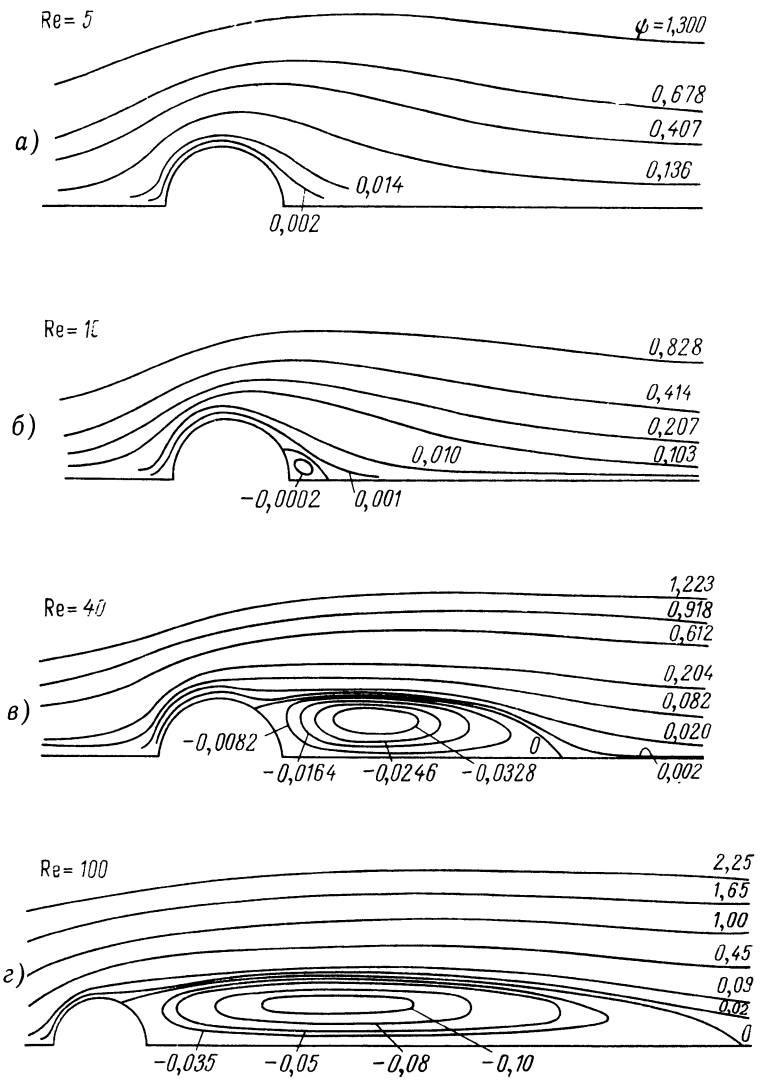


Рис. 177

Рассмотрим теперь некоторые расчетные результаты. Рис. 177, *а—г* из работы Денниса и Чжена [1]) хорошо иллюстрируют развитие общей картины симметричного стационарного обтекания при увеличении числа Рейнольдса, принимающего значения 5, 10, 40, 100. Авторы использовали систему уравнений «вихрь — функция тока» в форме (166),

[1]) Dennis C. R., Chang G.-Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100.— J. Fluid. Mech, 1970, v. 42, part 3, p. 471—489.

Таблица 13

Re	L	ε_s	c_{xf}	c_{xp}	c_x	$c_x(0)$	$c_p(\pi)$
5	—	—	1,917	2,199	4,116	—1,044	1,872
10	0,53	29,6	1,246	1,600	2,846	—0,742	1,489
40	4,69	53,8	0,524	0,998	1,522	—0,509	1,144
100	13,11	66,2	0,282	0,774	1,056	—0,393	1,060

(167), а для решения уравнения Пуассона применили аппроксимацию ψ в направлении ε тригонометрическими рядами. При $\mathbf{Re}=5$ течение еще безотрывное; отрыв начинается при значении $\mathbf{Re}=7$. Угол отрыва потока ε_s, длина L зоны с обратными токами возрастают с увеличением чисел Рейнольдса в рассмотренной области их изменения (см. табл. 13).

Рис. 178, *а*, *б*, взятые из первой цитированной в этом параграфе работы К. И. Бабенко с соавторами, показывают изменение завихренности Ω вдоль поверхности при различных значениях чисел **Re**, а также распределение Ω вдоль лучей $\varepsilon=\text{const}$ при $\mathbf{Re}=100$ (напомним, что угол ε отсчитывается от задней критической точки). Перемена знака Ω соответствует точке отрыва потока от поверхности цилиндра. Рис. 179 изображает для того же числа **Re** изменение радиальной и окружной составляющих скорости при отходе от тела вдоль лучей $\varepsilon=\text{const}$. Отчетливо видно, насколько резко меняется скорость вблизи поверхности тела даже при таком умеренном числе **Re** как 100.

Рис. 180 (Деннис, Чжен) иллюстрирует зависимость коэффициента давления $c_p=2(p(\varepsilon)-p_\infty)/(\rho U^2_\infty)$ от угла ε на поверхности цилиндра. Распределение давления далеко от симметрии относительно плоскости миделева сечения. Полезно сравнить эти результаты с решением задачи о бесциркуляционном обтекании кругового цилиндра идеальной жидкостью, приводящим к зависимости $c_p=1-4\sin^2\varepsilon$. С ростом числа **Re** относительное различие между повышенным давлением в передней и пониженным в задней критических точках уменьшается, что приводит к снижению коэффициента сопротивления давления c_{xp}. Это подтверждается и табл. 13. Коэффициент полного сопротивления c_x также уменьшается с ростом числа **Re**. Рис. 181 (квадратики — расчетные результаты Денниса и Чжена, кружки — расчеты Таками и Келлера, крестики — эксперимент Триттона) говорит, кроме того, о вполне удовлетворительном совпадении расчетных и экспериментальных данных.

В заключение коснемся результатов расчета нестационарного (периодического) обтекания цилиндра[1]). В этой постановке не содержится априорное предположение о симметрии течения относительно направления набегающего потока, и решение рассматривается во всем диапазоне углов $0\leqslant\varepsilon\leqslant 2\pi$. Как уже отмечалось, начиная уже со сравнительно небольших чисел Рейнольдса (50—60) присутствующие в реальном потоке возмущения тех или иных параметров не затухают, а развиваются, что приводит в конечном итоге к установлению периодического (автоколебательного) режима течения. При численном моделировании подобных процессов вводят начальную искусственную асимметрию потока или предполагают начальную неоднородность поля плотности с последующим ее «занулением», т. е. возвратом к однородному

[1]) Белоцерковский О. М., Белоцерковский С. О., Гущин В. А. Численное моделирование нестационарного периодического течения вязкой жидкости в следе за цилиндром.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1984, т. 24, № 8, с. 1207—1216; Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред.—М.: Наука, 1984.

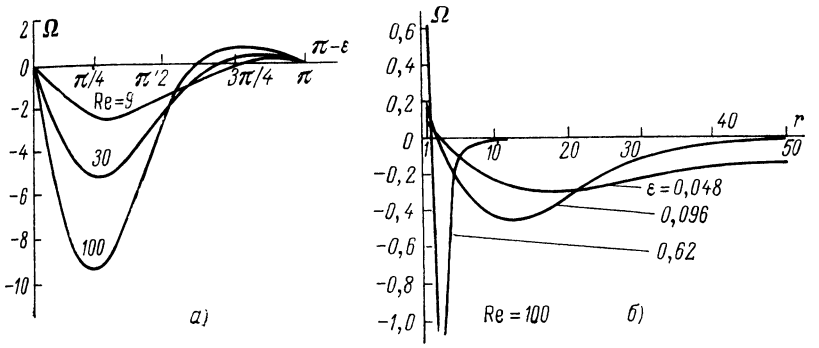


Рис. 178

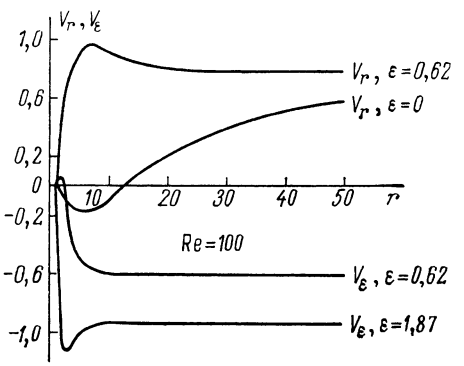


Рис. 179

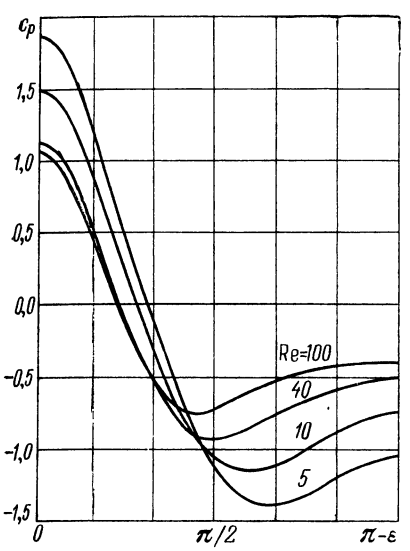


Рис. 180

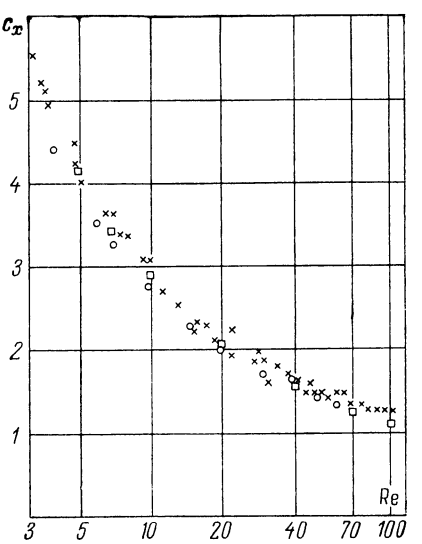


Рис. 181

набегающему потоку. На рис. 182 изображена картина линий тока для $\mathbf{Re}=102$ в последовательные моменты времени с интервалом $\Delta t=2{,}5$ для одного периода $T\approx 12$ ($t_{\text{нач}}=75$, $t_{\text{кон}}=87{,}5$) (масштабом времени

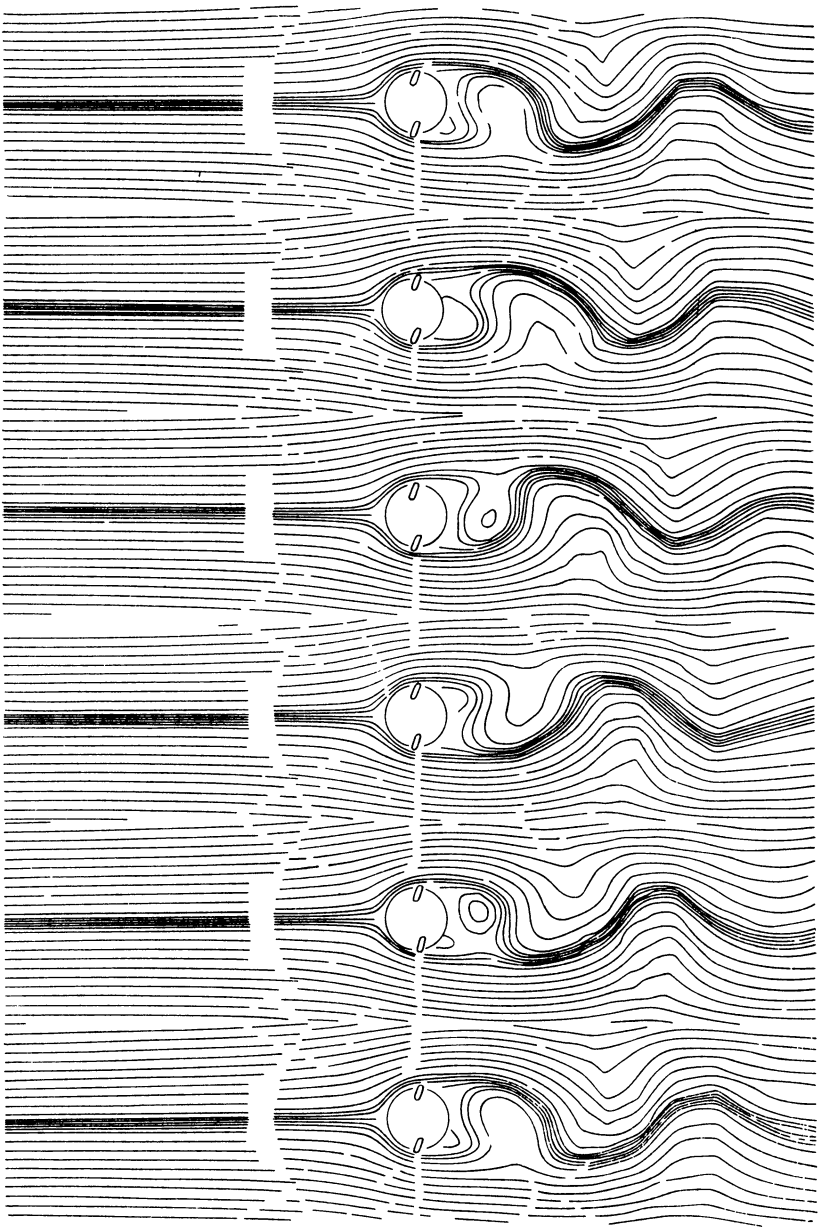


Рис. 182

является величина a/U_∞). Расчет показывает определенный рост застойной зоны, последующее «схлопывание» и выброс жидкости из этой зоны. Число Струхала, определенное по диаметру цилиндра, при этом равно 0,167, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

ГЛАВА XII

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 105. Взаимодействие конвекции и диффузии в потоке несжимаемой вязкой жидкости. Ламинарный пограничный слой

Представление о ламинарном пограничном слое на поверхности твердого тела в потоке вязкой жидкости или при смешении потоков и образовании области взаимодействия между ними, лежит в основе объяснения и использования многих важных для практики явлений.

Под *пограничным слоем* понимают тонкую при известных условиях (см. далее) в поперечном направлении к потоку область течения, где, в отличие от окружающего ее *безвихревого* потока, движение является *вихревым* и характеризуется сосредоточенными в этой области резкими изменениями *скорости* (*скоростной* пограничный слой), *температуры* (*температурный* пограничный слой), концентрации примеси (*концентрационный*, или *диффузионный*, пограничный слой).

Различают *ламинарные* и *турбулентные* пограничные слои в зависимости от ламинарного или турбулентного режима течения в них. В настоящей главе рассматриваются только *ламинарные* пограничные слои, в связи с чем эпитет «ламинарный» часто опускается.

Основным условием образования скоростных *ламинарных* пограничных слоев является *малая вязкость* жидкости, точнее, *большое* значение рейнольдсова числа потока **Re**, не достигающее, однако, той *критической* величины, при которой режим течения в пограничном слое становится *турбулентным*. Аналогично для температурных слоев подобным условием становится достижение больших значений числа Пекле **Pe**, для концентрационных слоев — больших значений $\mathbf{Pe}_d$ (*диффузионного числа Пекле*).

Физическая картина образования пограничных слоев на твердых поверхностях состоит в следующем. Однородный безвихревой поток, достигнув поверхности твердого тела, «прилипает» к нему частицами, непосредственно соприкасающимися с поверхностью тела, в то время как соседние слои продолжают двигаться с резко увеличивающимися по мере удаления от поверхности скоростями, что приводит к завихренности потока. Образовавшиеся вблизи поверхности вихри, с одной стороны, сносятся набегающим потоком, участвуя в *конвекции*, а с другой — *диффундируют* в окружающую тело жидкость. Если конвекция *велика* по сравнению с диффузией (а это, как далее показывается, соответствует *большим* числам Рейнольдса), на поверхности сохраняется весьма *тонкий* слой заметно завихренной жидкости — так называемый *пристенный пограничный слой*. Аналогично, имея некоторую начальную завихренность, возникшую при выходе из резервуара или сходе с поверхности обтекаемого тела, образуются «*свободные*» пограничные слои: «затопленные струи» и «следы» за кормой тела.

Создающийся в процессе течения в области пограничного слоя баланс *конвекции* и *диффузии*, а в случае нестационарного пограничного слоя еще и локального изменения завихренности количественно определяется уравнениями Гельмгольца (162) или (163) гл. X. Этот баланс может дать *количественную оценку порядка «толщины» пограничного слоя* при больших значениях числа Рейнольдса $\mathbf{Re}=U_\infty L/\nu$, со-

ставленного по скорости набегающего на тело потока U_∞, линейному размеру тела L и кинематическому коэффициенту вязкости жидкости ν.

Увеличение числа Рейнольдса означает возрастание роли конвективного ускорения, а тем самым, как это следует из вывода уравнения Гельмгольца, и конвекции завихренности. Повышение роли этого процесса приводит к двум следствиям:

1) уменьшению с ростом числа Рейнольдса поперечного к потоку размера области завихренности;

2) благодаря балансу между процессами конвекции и диффузии, сосредоточению их в этой тонкой области.

Первое из этих следствий служит объяснением существования при больших числах Рейнольдса пограничного слоя, второе говорит о повышенной интенсивности диффузии в области пограничного слоя и об определяющем значении в нем диффузии завихренности в поперечном к поверхности тела направлении.

Прежде чем перейти к анализу движения вязкой жидкости в области пограничного слоя, остановимся на некоторых соображениях, позволяющих дать количественную оценку закона убывания толщины пограничного слоя в зависимости от возрастания числа Рейнольдса потока.

Удовольствуемся сначала случаем *плоского стационарного* движения, когда уравнение баланса между процессами конвекции и диффузии завихренности (163) гл. X может быть записано в простейшей форме

$$\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad}\Omega=\nu\nabla^2\Omega. \tag{1}$$

Для оценки порядка изменения с ростом числа Рейнольдса величин, стоящих в левой (конвекция завихренности) и правой (диффузия завихренности) частях этого уравнения, применим прием, использованный в начале гл. X для вывода условий подобия двух потоков вязкой жидкости и заключающийся в выражении входящих в уравнения переменных величин, выраженных в частях характерных для них постоянных масштабов. При рассмотрении процессов конвекции и диффузии завихренности в области пограничного слоя условимся отличать масштабы продольных длин и скоростей L_0 и U_0 от соответствующих масштабов поперечных длин и скоростей δ_0 и V_0. Введем также масштаб Ω_0 для завихренности.

Что касается первых двух масштабов, то их конкретизация не нуждается в особых разъяснениях. За величину L_0 можно взять, например, диаметр обтекаемого жидкостью кругового контура, хорду или максимальную толщину крылового профиля, внутренний радиус трубы, на входе в которую образовался пограничный слой, и т. д. За масштаб продольных скоростей U_0 естественно выбрать скорость U_∞ набегающего на тело потока или скорость на входе в трубу. Масштаб завихренности Ω_0 из дальнейшего рассуждения выпадает, и его нет необходимости конкретизировать.

Особого разъяснения заслуживает вопрос о выборе поперечного масштаба длин δ_0. Этот масштаб естественно связать с характерным расстоянием, на которое распространяется диффузия завихренности в направлении, поперечном к поверхности обтекаемого тела, представляющей источник завихренности. Такого, конечного по величине расстояния в задачах динамики вязкой жидкости, изложенных в предыдущих главах, не существовало.

Вспомним, например, задачу Стокса об обтекании вязкой жидкостью сферы (§ 96), или расчет диффузии завихренности, образованной вихревой нитью (§ 94). Во всех этих случаях влияние вязкости распространялось мгновенно, а в безграничных потоках на бесконечно большие расстояния. Этот принципиальный факт является прямым следствием обоб-

щенного закона Ньютона, выражающего, линейную связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций, и обусловливает *эллиптический* характер дифференциальных уравнений Навье — Стокса.

Дальнейшее изложение основывается на этих концепциях: *бесконечной скорости диффузии завихренности и безграничной области ее распространения в неограниченном потоке вязкой жидкости.*

Согласно положенному в основу всей динамики вязкой жидкости обобщенному закону Ньютона, для которого, как уже ранее указывалось, характерна бесконечная скорость распространения возмущений, изменение величины скорости соответствовало бы асимптотическому стремлению их к своим предельным значениям. Такую *асимптотическую* постановку обычно сохраняют при составлении граничных условий для дифференциальных уравнений пограничного слоя на внешней его границе и символизируют выражением $y\to\infty$, где y — расстояние данной точки от поверхности тела.

Под толщиной пограничного слоя как некоторой *конечной* величины δ подразумевают расстояние от поверхности обтекаемого тела до такой точки в потоке ($y=\delta$), где практически с заданной степенью приближения можно принять продольную скорость в пограничном слое равной ее значению в той же точке внешнего безвихревого потока. Геометрическое место таких точек дает приближенное, «конечное», представление о *внешней границе* пограничного слоя.

Наличие только что указанных обстоятельств оправдывает исторически сложившееся представление о *конечной* толщине пограничного слоя; однако имеющийся в таком определении произвол в величине допускаемой погрешности делает это определение расплывчатым. В дальнейшем оказалось предпочтительным иметь дело с менее наглядными, но более однозначными определениями толщины пограничного слоя, основанными *на интегральных характеристиках распределений продольных скоростей в нормальных к поверхности тела сечениях пограничного слоя.*

Каждая из них, являясь переменной вдоль поверхности тела величиной, может служить местным *масштабом* для нормального к потоку сечения пограничного слоя. Введенный ранее масштаб *поперечных* длин в потоке δ_0 будем трактовать как общий для всех сечений *порядок толщины* пограничного слоя. Чтобы найти закон зависимости толщины δ_0 от числа Рейнольдса потока $\mathrm{Re}_0=U_0L_0/\nu$, приравняем порядки левой и правой частей уравнения баланса завихренности (1).

Вводя заглавную букву O как символ порядка изменения величины с ростом рейнольдсова числа, заметим, что левая и правая части (1) могут быть оценены так:

$$V\cdot\operatorname{grad}\Omega=O\left(\frac{U_0\Omega_0}{L_0}\right),\quad \nu\nabla^2\Omega=O\left(\frac{\nu\Omega_0}{\delta_0^2}\right).$$

Приравняв эти порядки, получим

$$\frac{U_0\Omega_0}{L_0}=O\left(\frac{\nu\Omega_0}{\delta_0^2}\right),$$

откуда будет следовать

$$\frac{\delta_0}{L_0}=O\left(\sqrt{\frac{\nu}{U_0L_0}}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}\right). \qquad (2)$$

Полученное равенство выражает общий для всех плоских, стационарных ламинарных пограничных слоев закон *изменения их относительных толщин обратно пропорционально корню квадратному из рейнольдсова числа потока.* Это — *первое* основное свойство ламинарного пограничного слоя.

Подчеркнем еще раз, что здесь идет речь об изменении порядка толщин пограничного слоя в результате общего для всех сечений пограничного слоя изменения рейнольдсова числа потока, а не изменения их вдоль поверхности тела при фиксированном рейнольдсовом числе Re_0.

Наряду с только что рассмотренным *скоростным*, или *вихревым*, пограничным слоем, приходится иметь дело и с другими по физическим свойствам переносимой субстанции пограничными слоями, как, например, *температурным* и *диффузионным* (*концентрационным*). Они представляют собой также тонкие в поперечном к поверхности тела направлении области, в которых сосредоточена интенсивная диффузия тепла (температуры) или вещества (концентрации), но тонкость этих областей обусловлена большими значениями не числа Рейнольдса, а числа Пекле (Pe) и диффузионного числа Пекле (Pe_d), о которых была речь в конце гл. X.

Нет необходимости вновь повторять все рассуждения, проведенные только что для скоростного пограничного слоя, применительно к этим двум слоям. Заметим лишь, что в случае плоского стационарного распространения тепла и вещества уравнения баланса конвекции и диффузии могут быть представлены в форме равенств

$$\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad} T = a\nabla^2 T, \quad \boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad} c = D\nabla^2 c,$$

совпадающих с ранее указанным уравнением для завихренности Ω, если в нем заменить Ω на T или c, а ν на a или D. Оценивая порядки входящих в последние уравнения величин и вводя для этого наряду с прежними масштабами еще дополнительные: δ_{0T} и δ_{0d} соответственно для поперечных длин в температурном и в диффузионном (концентрационном) слоях, получим выражения для этих масштабов и выпишем их вместе с ранее полученным соотношением для порядка толщины скоростного пограничного слоя:

$$\frac{\delta_0}{L} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}\right), \quad \frac{\delta_{0T}}{L} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Pe}_0}}\right), \quad \frac{\delta_{0d}}{L} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Pe}_{d0}}}\right). \tag{3}$$

Вводя еще (§ 95) число Прандтля и число Шмидта (диффузионное число Прандтля)

$$\mathrm{Pr}_0 = \frac{\mathrm{Pe}_0}{\mathrm{Re}_0}, \quad \mathrm{Sc}_0 = \mathrm{Pr}_{d0} = \frac{\mathrm{Pe}_{d0}}{\mathrm{Re}_0},$$

получим соотношения между порядками толщин пограничных слоев

$$\frac{\delta_0}{\delta_{0T}} = O(\sqrt{\mathrm{Pr}_0}), \quad \frac{\delta_0}{\delta_{0d}} = O(\sqrt{\mathrm{Sc}_0}) = O(\sqrt{\mathrm{Pr}_{d0}}), \tag{4}$$

выражающие тот факт, что *при больших значениях чисел* Pr_0 и Sc_0 (Pr_{d0}) *температурные и концентрационные пограничные слои значительно тоньше скоростных, а при малых значениях чисел* Pr_0 *и* Sc_0 (Pr_{d0}), *наоборот, значительно толще.*

В настоящее время теория ламинарных и турбулентных пограничных слоев продолжает привлекать внимание исследователей, образуя большую самостоятельную область механики жидкости и газа. Наряду с обширной журнальной научной литературой, относящейся к этой области, существуют и специальные монографии по теории пограничного слоя [1]).

---

[1]) Перечислим главные из них: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя (имеется ряд изданий переводов с немецкого).— М.: Наука, 1974; Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя.— М.: Гостехиздат, 1941; Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962; Laminar boundary layers/Ed. by L. Rosenhead — Oxford: Clarendon press, 1963; Evans H. L. Laminar boundary layer theory.— Addison-Wesley, 1968.

§ 106. Вывод уравнений Прандтля движения вязкой жидкости в ламинарном пограничном слое. Явление отрыва

Переходя к выводу основного дифференциального уравнения движения вязкой среды в области ламинарного пограничного слоя, сосредоточим в настоящем параграфе внимание лишь на случае плоского, *пристенного* стационарного *скоростного* пограничного слоя. В последующих параграфах настоящей главы будут рассмотрены более сложные случаи как нестационарных, так и пространственных течений, причем не только в пристенных, но и в свободных пограничных слоях. В конце главы будут приведены некоторые сведения о температурных и концентрационных пограничных слоях. Понятие о турбулентном пограничном слое и эмпирических и полуэмпирических методах его расчета можно найти в гл. XIII курса, а о ламинарном и турбулентном пограничных слоях в сжимаемой, неизотермической среде — газе при сверхзвуковых скоростях его движения — в заключительной главе.

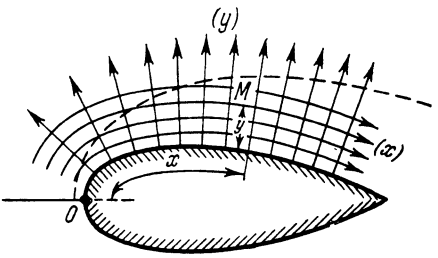


Рис. 183

Малость при больших значениях числа Рейнольдса потока порядка толщин пограничного слоя δ_0 позволяет рассматривать показанную на рис. 183 ортогональную сетку параллельных контуру тела и нормальных к ним кривых как прямолинейную декартову систему (x, y) в области пограничного слоя и сохранить для уравнений Навье — Стокса обычную их форму:

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\ u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0. \end{aligned} \tag{5}$$

Принятое только что упрощение в выборе системы координат не является принципиальным. Весь дальнейший вывод можно было провести, и не считая указанную на рис. 183 сетку координатных линий прямолинейной[1]).

Пользуясь принятым ранее методом оценки порядков отдельных членов системы уравнений (5) при помощи постоянных масштабов: продольных скоростей — U_0, продольных длин — L_0, поперечных — δ_0, определим, прежде всего, масштаб поперечных скоростей V_0. Для этого заметим, что, согласно последнему уравнению системы (5) — уравнению несжимаемости,— будет ($y=0$ соответствует контуру тела)

$$v=-\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy,$$

так что

$$V_0=O(v)=\frac{U_0\delta_0}{L_0}$$

[1]) См. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II.— М.: Физматгиз, 1963, с. 550—552, а также монографию Laminar boundary layers/Ed. by L. Rosenhead.— Oxford: Clarendon Press, 1963, p. 201—203.

и, следовательно,

$$\frac{V_0}{U_0} = \frac{\delta_0}{L_0} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}, \tag{6}$$

т. е. поперечная скорость в области пограничного слоя имеет тот же относительный порядок, что и толщина слоя. Это — *второе* основное свойство ламинарного пограничного слоя.

Оценивая аналогичным образом члены в левой и правой частях второго уравнения системы, найдем:

$$u\frac{\partial v}{\partial x} = O\left(\frac{U_0 V_0}{L_0}\right) = O\left(\frac{U_0 U_0 \delta_0}{L_0^2}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}\right),$$

$$v\frac{\partial v}{\partial y} = O\left(U_0 \frac{\delta_0}{L_0} \frac{U_0 \delta_0}{L_0 \delta_0}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}\right),$$

$$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = O\left(\nu \frac{U_0 \delta_0}{L_0} \frac{1}{L_0^2}\right) = O\left(\frac{\nu}{U_0 L_0} \frac{\delta_0}{L_0} \frac{U_0^2}{L_0}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\mathrm{Re}_0 \sqrt{\mathrm{Re}_0}}\right),$$

$$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O\left(\nu \frac{U_0 \delta_0}{L_0} \frac{1}{\delta_0^2}\right) = O\left(\frac{\nu}{U_0 L_0} \frac{U_0^2 L_0}{L_0} \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}{L_0}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}\right).$$

Согласно приведенным оценкам члены эти имеют при больших значениях рейнольдсова числа Re_0 порядок $1/\sqrt{\mathrm{Re}_0}$ или еще более высокий порядок малости $1/(\mathrm{Re}_0\sqrt{\mathrm{Re}_0})$. Что же касается члена, содержащего производную dp/dy, то он, являясь с точностью до не зависящего от Re_0 множителя разностью величин порядка $1/\sqrt{\mathrm{Re}_0}$, сам должен иметь такой же порядок. Таким образом, в принятом приближении теории пограничного слоя, т. е. при оговоренных выше больших значениях Re_0, можно пренебречь малым значением этого члена и положить $dp/dy=0$, откуда следует *третье* основное свойство пограничного слоя: *во всех точках данного, нормального к поверхности тела сечения пограничного слоя давление имеет одно и то же значение.*

Вспомним, что аналогичным свойством строго обладали все рассмотренные в гл. X, XI равномерные прямолинейные движения вязкой жидкости в цилиндрических или призматических трубах, а также между близкими друг другу параллельными плоскостями и в малых зазорах подшипников. В пограничном слое это свойство обеспечивается малой его толщиной и, как следствие, почти параллельностью линий тока поверхности тела.

Это свойство позволяет в рассматриваемом случае плоского стационарного движения жидкости в области пограничного слоя заменить в правой части первого уравнения системы (5) частную производную dp/dx на полную производную dp/dx. Согласно тому же свойству распределение давления $p(x)$ вдоль пограничного слоя совпадает с распределением давления во внешнем безвихревом потоке. Это распределение по теореме Бернулли, справедливой для набегающего на тело безвихревого потока идеальной жидкости, можно связать со скоростью во *внешнем* потоке. Благодаря тонкости пограничного слоя можно «снести» эту скорость на поверхность тела, положив ее равной той, зависящей только от продольной координаты x *скорости скольжения* $U(x)$ жидкости по поверхности тела, которая имела бы место в идеальной жидкости, т. е. при отсутствии пограничного слоя. Скорость $U(x)$ будем в дальнейшем называть *скоростью на внешней границе пограничного слоя* или, короче, *внешней скоростью.*

Согласно теореме Бернулли имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{dU}{dx}. \tag{7}$$

Используя ранее принятый способ оценки порядка отдельных членов системы уравнений (5) и основываясь на равенстве (7), получим оценку первого члена, содержащегося в правой части первого уравнения системы (5):

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = O\left(\frac{U_0^2}{L_0}\right), \tag{8}$$

которую присоединим к следующей очевидной оценке остальных членов этого уравнения:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = O\left(\frac{U_0^2}{L_0}\right), \quad v\frac{\partial u}{\partial y} = O\left(V_0\frac{U_0}{\delta_0}\right) = O\left(\frac{U_0^2}{L_0}\right),$$
$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\frac{\nu U_0}{L_0^2}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\mathrm{Re}_0}\right), \quad \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left(\frac{\nu U_0}{\delta_0^2}\right) = O\left(\frac{U_0^2}{L_0}\right). \tag{9}$$

Приняв во внимание эти оценки, опустим первое слагаемое в круглых скобках в правой части первого из уравнений системы (5) как малое по сравнению со вторым, а также все второе уравнение системы (5), которое уже использовано для обоснования третьего свойства пограничного слоя.

Перепишем теперь систему (5) в виде

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

или эквивалентном ему по (7), более удобном для последующего изложения виде

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Уравнения эти, представляющие систему нелинейных уравнений в частных производных второго порядка *параболического* типа, были указаны Л. Прандтлем в 1904 г.[1]).

Согласно идее Прандтля *внешняя скорость* $U(x)$, входящая в первое уравнение (11), считается заданной, заранее рассчитанной по теории плоского безвихревого обтекания тела идеальной несжимаемой жидкостью (гл. VII). В такой постановке задачи предполагается, что пограничный слой по всему контуру обтекаемого тела настолько тонок, что его искажающее влияние на внешний поток пренебрежимо мало. Можно сказать, что при этом не учитывается *обратное влияние пограничного слоя на внешний безвихревой поток*. В некоторых случаях (плавное обтекание тонких тел) такое пренебрежение обратным влиянием пограничного слоя на внешний поток вполне допустимо, в других случаях оно настолько велико, что внешнюю скорость $U(x)$ приходится вычислять по (7), используя экспериментально замеренное распределение давления по контуру тела.

---

[1]) Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung Verhandl d. III. Kongr.— Heidelberg, 1904 (имеется русский перевод в издании ЦАГИ, М., 1931).

Уравнения (11) подлежат интегрированию при следующих граничных условиях:

$$u=0,\ v=0 \text{ при } y=0,$$
$$u\to U(x) \text{ при } y\to\infty, \tag{12}$$
$$u=u_0(y) \text{ при } x=x_0.$$

Первые два из них выражают условие *прилипания* вязкой жидкости к твердой стенке ($y=0$) — контуру обтекаемого тела. Третье представляет собой требование асимптотического стремления продольной скорости u в области пограничного слоя к скорости $U(x)$ на границе пограничного слоя с безвихревым потоком. Это граничное условие можно интерпретировать как операцию «сращивания» решения уравнений Прандтля движения вязкой жидкости в пограничном слое с решением уравнений Эйлера для безвихревого обтекания тела идеальной несжимаемой жидкостью.

Характерным для уравнений параболического типа является последнее граничное условие, выражающее задание профиля скоростей $u_0(y)$ в некотором *начальном* сечении пограничного слоя ($x=x_0$). Согласно общей теории дифференциальных уравнений в частных производных решение уравнений параболического типа при заданных граничных условиях определяется только в области течения, расположенной вниз по потоку за этим начальным сечением.

В области течения, описываемого параболическими уравнениями, влияние начального профиля скоростей вверх по потоку не имеет места. Только благодаря существованию внешнего безвихревого потока, описываемого уравнениями эллиптического типа, и ранее упомянутому эффекту обратного влияния пограничного слоя на внешний поток в этой *смешанной* области действия уравнений параболического и эллиптического типов приходится наблюдать влияние начального профиля на области пограничного слоя, расположенные вверх по течению относительно начального сечения.

Если отвлечься от сравнительно узкого класса специальных задач, связанных с необходимостью строгого *продолжения* вниз по потоку в пограничном слое заданного начального профиля скоростей, то можно заметить, что начальное граничное условие не является особенно существенным, так как его влияние вниз по потоку быстро убывает с возрастанием относительного (выраженного в частях начальной толщины слоя) расстояния от этого сечения. По сравнению с продольными расстояниями поперечный размер пограничного слоя настолько мал, что, начиная с некоторого сечения, все остальные будут находиться по числу калибров пограничного слоя достаточно далеко от начального.

Вопрос о существовании и единственности решения уравнений (11) при граничных условиях (12) выходит за рамки настоящего курса[1]).

Теория пограничного слоя позволила объяснить природу явления *отрыва потока от поверхности плавной формы*. Явление это тесно связано со свойством прилипания вязкой жидкости к твердой поверхности обтекаемого ею тела и образованием на ней пограничного слоя.

Механизм вязкого отрыва отличен от механизма описанного в § 57 гл. VII *инерционного* срыва безвихревого потока идеальной жидкости с

---

[1]) Из работ этого направления заслуживают внимания следующие: Олейник О. А. О системе уравнений пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1966, т. 168, № 4, с. 751—754, и ряд других работ того же автора, цитированных в только что указанной статье, а также Nickel K. Ein Eindeutigkeitssatz für instantionäre Grenzschichten — Math. Leitschr., 1960, Bd. 74 и его обзор: Prandtl's boundary layer theory from the viewpoint of a mathematician.— Ann. Rev. of Fluid Mech, Palo Alto, Calif., 1973, v. 5, p. 405—428.

выступающих острых кромок тела. При наличии вязкого отрыва непосредственно за ним в так называемом *ближнем* следе возникают сложные нестационарные *попятные* движения с замкнутыми линиями тока.

Стационарный отрыв является результатом взаимодействия *трех* факторов: *инерции потока, вязкого взаимодействия между смежными слоями жидкости и с твердой поверхностью* и направленного в сторону, противоположную движению, *обратного перепада давления*. Процесс возникновения и развития отрыва в нестационарных условиях будет рассмотрен особо в § 116.

В кормовой области профиля вниз по течению за точкой минимума давления M (рис. 184) происходит возрастание давления и $dp/dx>0$ (эта область носит наименование *диффузорной*); при этом жидкость в пограничном слое движется из области меньшего давления в область большего давления против подтормаживающего ее перепада давлений. Если бы жидкость была идеальна и скорость на поверхности крыла не равнялась нулю, то запас кинетической энергии жидкости оказался бы достаточным для преодоления тормозящего поля давлений. В пограничном слое поле давлений, по предыдущему, не отличается от поля давлений в идеальной жидкости, между тем в непосредственной близости к поверхности тела скорости очень малы, а следовательно, и кинетическая энергия частиц жидкости ничтожна. В этих условиях торможение может вызвать остановку, а далее и попятное (рис. 184) движение под действием перепада давления, направленного против движения. Встреча набегающего потока с попятно движущейся в пограничном слое жидкостью приводит к резкому оттеснению линий тока от поверхности тела, к утолщению пограничного слоя и к отрыву его от поверхности тела. До точки отрыва S, как видно из рис. 184, $(\partial u/\partial y)_{y=0}>0$, за точкой отрыва $(\partial u/\partial y)_{y=0}<0$; в самой точке будем иметь условие отрыва

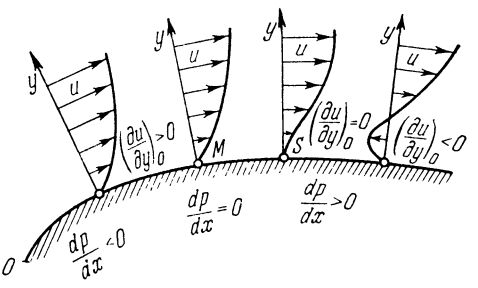


Рис. 184

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=0. \tag{13}$$

Приведенное только что объяснение явления вязкого отрыва показывает, что отрыв такой природы может возникнуть *только в диффузорной области* пограничного слоя, где вязкие взаимодействия в жидкости сосуществуют с обратным по отношению к направлению потока перепадом давлений. Точка отрыва S, таким образом, всегда располагается ниже по течению, чем точка M минимума давления (максимума внешней скорости).

Условие отрыва (13) сохранит свой вид и после перехода к безразмерным величинам $u'=u/U$, $y'=y/\delta$. Замечая, что выраженное в этих новых переменных уравнение для определения положения точки отрыва $(\partial u'/\partial y')_{y'=0}=0$ не будет явно содержать рейнольдсово число, заключим, что безразмерная абсцисса точки отрыва $x_s'=x_s/L$, являющаяся корнем этого уравнения, также *не будет зависеть от рейнольдсова числа*.

Сделанный только что вывод о независимости положения точки отрыва от рейнольдсова числа, конечно, справедлив только в предположении о применимости уравнения Прандтля в предотрывной области. На самом деле в области отрыва — ее размеры требуют специальной оценки по рейнольдсову числу — *уравнения Прандтля* в рассмотренной форме

теряют силу. При приближении к точке отрыва тормозящее влияние стенки резко убывает до нуля, и *преимущественное значение производных по нормали к стенке по сравнению с производными в направлении, параллельном стенке, исчезает.* При этом уже нет оснований пренебрегать величиной $\partial^2 u/\partial x^2$ по сравнению с $\partial^2 u/\partial y^2$ в круглой скобке в правой части первого из уравнений (5). Поперечный размер пограничного слоя, так же как и поперечная скорость, перестают быть малыми, существенным становится и поперечное изменение давления.

Формальное определение положения точки отрыва из соотношения (13), в которое подставлено в качестве u решение уравнений Прандтля (11), не может дать точный результат, поскольку уравнения (11), как уже указывалось, несправедливы вблизи точки отрыва. На смену уравнениям Прандтля должны прийти либо точные уравнения Навье—Стокса, что представило бы значительные трудности, либо имеющиеся в настоящее время приближенные *асимптотические* методы [1]).

Большое значение приобретает также факт заметного в этих условиях искажения внешнего безвихревого потока за счет оттеснения его линий тока от поверхности тела. При этом теряется возможность той прямой постановки решения уравнений пограничного слоя, о которой до сих пор шла речь. Уже нельзя задавать наперед распределения скоростей во внешнем безвихревом потоке, которое имело бы место в идеальной жидкости в отсутствие пограничного слоя. В этом случае, как упоминалось, необходимо учитывать *обратное влияние* пограничного слоя на потенциальное обтекание или пользоваться *экспериментальным* распределением давления по поверхности профиля.

Неучет «обратного влияния» пограничного слоя на внешний безвихревой поток, определенный по теории идеальной жидкости, может привести к значительному искажению явления отрыва. Приведем в связи с этим поучительный исторический пример. Г. Блазиус [2]) рассчитал положение точки отрыва потока от поверхности круглого цилиндра, пренебрегая «обратным влиянием», т. е. считая распределение внешней скорости по «закону синуса» (§ 50), и получил значение угловой координаты точки отрыва $\theta_s^0 \approx 110°$, т. е. за миделевым сечением цилиндра, в то время как опыты дают $\theta_s^0 \approx 82°$.

К. Хименц [3]) указал причину ошибки Блазиуса. Проведя решение уравнений пограничного слоя (11) с использованием *экспериментального* распределения внешней скорости, аппроксимированного степенной зависимостью, он получил полное совпадение результата расчета с опытным значением $\theta_s^0 \approx 82°$, причем, как видно, этот результат не исказился от применения уравнений Прандтля (11) вплоть до точки отрыва. Приведенный факт может служить некоторым оправданием того, что в дальнейшем мы будем довольствоваться приближенным определением точки отрыва на основе уравнений Прандтля (11) и соотношения (13) [или эквивалентного ему равенства нулю в точке отрыва коэффициента трения c_f (см. § 108)], не оговаривая каждый раз условность такого определения положения точки отрыва.

[1]) Сычев В. В. О ламинарном отрыве.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3; Рубан А. А., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Успехи механики, изд. ВИНИТИ, 1979, т. 2, вып. 4, с. 57—95; Brown S. N., Stewartson K. Laminar separation.— Ann. Rev. of Fluid Mech., Palo Alto, Calif., 1969, v. 1, p. 45—72.

[2]) Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.— Zeitschrift Math. u. Phys., Bd 56, 1908.

[3]) Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in der gleichformigen Flüssigkeitstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder.— Dingl. Polytechn. Journ., v. 326, 1911, p. 321. Подробное изложение этого вопроса см. в сборнике обзоров: Laminar boundary layer/Ed. L. Rosenhead.— Oxford: Clarendon Press, 1963, p. 156, 231, 260, 264, 285, 329, а также Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1969, с. 160—166 и Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962, с. 82.

Тормозящее влияние обратного перепада давления является *необходимым условием отрыва пограничного слоя с поверхности тела.* Так, при постоянстве давления вдоль пограничного слоя отрыв произойти не может. Условие постоянства давления возникает, например, при обтекании тела тонкой сравнительно с размерами тела струей. Внешняя граница такой струи является свободной поверхностью, так как граничит с неподвижной средой, в которой давление повсюду постоянно. Отрыв пограничного слоя от поверхности тела в такой струе не происходит; тонкие струи прилипают к поверхности тела, вдоль которой они распространяются. Это любопытное, часто наблюдаемое явление иногда называют *эффектом Коанда* по имени румынского инженера А. Коанда, который обратил внимание на это явление еще в 1910 г. [1]).

Отрыв пограничного слоя обычно относят к числу вредных явлений, вызывающих резкое повышение сопротивления обтекаемых жидкостью тел, опасные вибрации их, а в случае внутренних течений по трубам и каналам к уменьшению полезного расхода жидкости, возрастанию потерь энергии и уменьшению коэффициента полезного действия.

§ 107. Различные формы уравнений Прандтля. Уравнения Мизеса и Крокко

В приложениях теории плоского ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости предпочтительнее вместо двух уравнений (11) иметь дело с одним, получаемым из системы (11) путем введения функции тока $\psi(x, y)$, как известно, связанной с u и v равенствами

$$u=\partial\psi/\partial y, \qquad v=-\partial\psi/\partial x. \tag{14}$$

При этом уравнение несжимаемости [второе уравнение в системе (11)] выполняется тождественно, и уравнения Прандтля приводятся к одному уравнению в частных производных третьего порядка с соответствующими граничными условиями

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3},\\ \psi=0, \quad \partial\psi/\partial y=0 \quad \text{при} \quad y=0,\\ \partial\psi/\partial y\to U(x) \quad \text{при} \quad y\to\infty,\\ \partial\psi/\partial y=u_0(y) \quad \text{при} \quad x=x_0.\end{gathered} \tag{15}$$

Указанные формы уравнений Прандтля (11) и (15) не являются единственно употребительными. Остановимся на двух, часто встречающихся формах: *уравнении Прандтля — Мизеса* [2]) *и уравнении Крокко* [3]).

Уравнение Прандтля — Мизеса основано на использовании, наряду с x, в качестве второй независимой переменной — функции тока ψ.

Переход в уравнениях (15) от переменных x, y к переменным Прандтля — Мизеса $\xi=x$, $\eta=\psi$ может быть произведен по формулам

---

[1]) Подробное описание этого явления, историю его открытия и последующего использования можно найти в статье: Reba J. Applications of the Coanda-effect.— Sci. American, 1966, June, p. 84—92.

[2]) Mises R Bemerkungen zur Hydrodynamik.— Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech, 1927, Bd. 7, S. 425—431. Уравнения эти, судя по некоторым данным, были установлены Прандтлем еще в 1914 г.

[3]) Crocco L A characteristic transformation of the equations of the boundary layer in gases.— ARC Rep., London, 1939, № 4582.

(по определению функции тока: $\partial\eta/\partial x=\partial\psi/\partial x=-v$, $\partial\eta/\partial y=\partial\psi/\partial y=u$)

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}-v\frac{\partial}{\partial\eta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}=u\frac{\partial}{\partial\eta},\tag{16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=u\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u\frac{\partial}{\partial\eta}\right).$$

Применяя это преобразование к первому уравнению системы (11), будем иметь (U зависит только от ξ)

$$u\frac{\partial u}{\partial\xi}=U\frac{dU}{d\xi}+\nu u\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

Вводя в рассмотрение «дефект» кинетической энергии в пограничном слое по сравнению с внешним потоком

$$z=\frac{1}{2}(U^2-u^2),\tag{17}$$

или, согласно основному свойству пограничного слоя — постоянству давления по сечению слоя,— *дефект полного напора*

$$z=\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}U^2\right)-\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}u^2\right),\tag{18}$$

получим *уравнение ламинарного пограничного слоя в форме Мизеса*

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}=\nu u\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\sqrt{2}\,\nu\sqrt{Z-z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2},\tag{19}$$

где положено $Z=(z)_{\eta=0}=\frac{1}{2}U^2$.

Граничные условия для этого уравнения в частных производных второго порядка будут следующими:

$$z=Z(\xi)\ \text{ при }\ \eta=0,\ \ z\to 0\ \text{ при }\ \eta\to\infty;$$
$$z=z_0(\eta)\ \text{ при }\ \xi=\xi_0.\tag{20}$$

Определив в результате интегрирования $z(\xi,\eta)$, можно вернуться к обычной переменной y, обратив интеграл

$$y=\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{u}=\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{2(Z-z)}}.\tag{21}$$

Уравнение пограничного слоя в форме Прандтля — Мизеса (19) по внешнему виду напоминает уравнение теплопроводности, но для того *нелинейного* случая, когда коэффициент температуропроводности — коэффициент при второй производной в правой части, равный $\sqrt{2}\,\nu\sqrt{Z-z}$, — зависит от температуры (в настоящем случае роль температуры играет дефект кинетической энергии).

Л. Крокко предложил выбрать в качестве независимых переменных вместо x, y следующие новые: $\xi=x$, $\eta=u$, а в качестве зависимой переменной использовать напряжение трения $\tau=\mu\,\partial u/\partial y$.

Для вывода формул перехода от x, y к $\xi=x$, $\eta=u$ имеем два очевидных равенства

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi}=0=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\eta}=1=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta},$$

из которых следует:

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\tau}{\mu}=\frac{1}{\partial y/\partial\eta}\quad\text{или}\quad\frac{\partial y}{\partial\eta}=\frac{\mu}{\tau},$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}=-\frac{\tau}{\mu}\frac{\partial y}{\partial\xi}. \tag{22}$$

Пользуясь этими выражениями, установим формулы перехода к переменным Крокко

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\tau}{\mu}\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\tau}{\mu}\frac{\partial}{\partial\eta}. \tag{23}$$

Применяя формулы перехода (23) к первому уравнению системы (11) и сокращая обе части полученного при этом равенства на τ/μ, будем иметь

$$-\rho\eta\frac{\partial y}{\partial\xi}+\rho v=-\frac{dp}{d\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau}{\partial\eta}=-\frac{dp}{d\xi}\frac{\mu}{\tau}+\frac{\partial\tau}{\partial\eta}. \tag{24}$$

Второе уравнение системы (11) — уравнение неразрывности — преобразуется к виду ($\partial\eta/\partial\xi=0$)

$$-\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}=0. \tag{25}$$

Дифференцируя обе части (24) по η, найдем

$$-\rho\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)-\rho\frac{\partial y}{\partial\xi}+\rho\frac{\partial v}{\partial\eta}=-\frac{dp}{d\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu}{\tau}\right)+\frac{\partial^2\tau}{\partial\eta^2}.$$

Чтобы исключить v, вычтем почленно обе части этого равенства из умноженных на ρ обеих частей равенства (25); тогда, замечая еще, что $\partial y/\partial\eta=\mu/\tau$, получим следующее *уравнение пограничного слоя в форме Крокко*:

$$\mu\rho\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\partial^2\tau}{\partial\eta^2}-\mu\frac{dp}{d\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\tau}\right)=0. \tag{26}$$

Граничными условиями к нему, согласно (24), будут

$$\frac{\partial(\tau^2)}{\partial\eta}=2\mu\frac{dp}{d\xi}\ \text{при}\ \eta=0,\quad\tau=0\ \text{при}\ \eta=U;$$
$$\tau=\tau_0(\eta)\ \text{при}\ \xi=\xi_0. \tag{27}$$

§ 108. Простейшие автомодельные решения уравнений ламинарного пограничного слоя. Пограничный слой на продольно обтекаемой пластинке

К числу задач, допускающих простейшие автомодельные решения уравнений Прандтля (11) или (15), относится случай *пристенного* пограничного слоя на продольно обтекаемой пластинке. Направляя (рис. 185) ось Ox по поверхности пластинки, толщину которой будем считать пренебрежимо малой, ось Oy по перпендикуляру к поверхности пластинки, а начало координат выбирая в передней кромке O пластинки, заметим, что в этом случае внешний по отношению к пограничному

слою поток будет *однородным*, с одинаковой во всей области течения скоростью U_∞.

Используем уравнение Прандтля (15), приняв во внимание, что в данном случае $U=\text{const}=U_\infty$, а $dU/dx=0$. Будем иметь уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \tag{28}$$

Граничные условия для этого уравнения *параболического* типа примем в *упрощенной Блазиусом* [1]) форме

$$\begin{aligned}&\psi=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \text{ при } y=0,\ x>0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial y}\to U_\infty \text{ при } y\to\infty,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial y}=U_\infty \text{ при } x=0,\ y>0.\end{aligned} \tag{29}$$

Принятое Блазиусом упрощение постановки задачи (28), (29) заключается прежде всего в замене профиля скоростей, определяемого обратным влиянием (торможением) пластинки на набегающий поток, невозмущенным профилем скоростей $u=U_\infty$ при $x=0$, $y>0$; это выражается последним равенством в системе граничных условий (29). Затем условие прилипания жидкости к поверхности пластинки ($0\leqslant x\leqslant L$, $y=0$) заменяется первым условием в системе (29), выполняемым на *луче* ($x>0$, $y=0$).

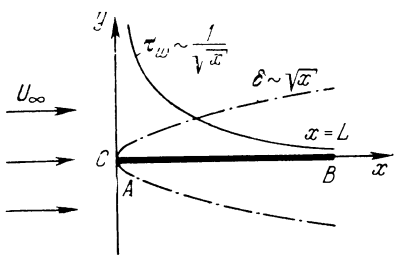


Рис 185

Эти два упрощения следуют обычной постановке параболических задач и имеют простую физическую интерпретацию — отказ от учета «концевых эффектов» на передней и задней кромках пластинки. Тот факт, что скорость в точке $x=0$, $y=0$ претерпевает разрыв непрерывности: $u=U_\infty$ при $x=-0$, $u=0$ при $x=+0$, делает точку $x=0$, $y=0$ *особой*, но нисколько не усложняет приводимого далее решения.

Характерное для параболического уравнения (15) свойство *независимости* его решения в данной точке от *последующих* условий движения делает решение *не зависящим от длины пластинки* L, что будет далее использовано для выяснения общей структуры решения.

Перейдем в уравнении (28) и граничных условиях (29) к безразмерным переменным, положив (штрих соответствует безразмерным переменным; $\mathbf{Re}=U_\infty L/\nu$)

$$x=Lx',\quad y=\frac{L}{\sqrt{\mathbf{Re}}}y'=\sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}y',\quad \psi=\frac{U_\infty L}{\sqrt{\mathbf{Re}}}\psi'=\sqrt{\nu U_\infty L}\,\psi'.$$

Уравнения (28) и граничные условия (29) при этом запишутся в не содержащем характерные постоянные задачи виде

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\,\partial y'}-\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\frac{\partial^2\psi'}{\partial y'^2}=\frac{\partial^3\psi'}{\partial y'^3},\\ &\psi'=0,\quad \frac{\partial\psi'}{\partial y'}=0 \text{ при } y'=0,\ x'>0,\end{aligned} \tag{30}$$

[1]) Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.— Zeitschr. Math. u Physik, 1908, Bd. 56.

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y'} \to 1 \text{ при } x' > 0,\ y' \to \infty;$$

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y'} = 1 \text{ при } x' = 0,\ y' > 0.$$

Пусть искомый интеграл этого уравнения, удовлетворяющий граничным условиям, будет

$$\psi' = \psi'(x', y'),$$

а в *размерных* переменных

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu U_\infty L}\,\psi'\left(\frac{x}{L},\ y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu L}}\right).$$

Решение задачи $\psi(x, y)$ в любой фиксированной точке (x, y), как уже ранее подчеркивалось, не зависит от L. Следовательно, зависимость ψ' от своих аргументов x', y' должна быть такой, чтобы обеспечивалось это свойство. Добиться такого результата можно, положив

$$\psi'(x', y') = \sqrt{x'}\, f\left(\frac{y'}{\sqrt{x'}}\right).$$

Действительно, дело сведется при этом к разысканию решения в форме, не содержащей L:

$$\psi = \sqrt{\nu U_\infty x}\, f\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right) \tag{31}$$

или, если ввести в качестве аргумента

$$\eta = \frac{1}{2} y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \tag{32}$$

в следующем виде:

$$\psi = \sqrt{\nu U_\infty x}\ \varphi(\eta). \tag{33}$$

Вычисляя входящие в уравнение (28) производные (штрих далее обозначает производные по η) и замечая еще, что

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{4} y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x^3}},\quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}},$$

найдем

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{2} U_\infty \varphi'(\eta),\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{4} U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\,\varphi''(\eta),$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = \frac{1}{8}\frac{U_\infty^2}{\nu x}\varphi'''(\eta),\quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\,[\varphi(\eta) - \eta\varphi'(\eta)],$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{4}\frac{U_\infty}{x}\eta\varphi''(\eta).$$

Подставляя полученные выражения производных в уравнение (28), после простых преобразований получим *обыкновенное* дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0,$$

$$\varphi = 0,\quad \varphi' = 0 \text{ при } \eta = 0, \tag{34}$$

$$\varphi' \to 2 \text{ при } \eta \to \infty,$$

т. е. задача Блазиуса имеет автомодельное решение.

Заметим, что начальное условие при $x=0$, $y>0$ выполняется автоматически и выпадает из системы граничных условий. Уравнение (34) в элементарных функциях не интегрируется. Блазиус проинтегрировал его методом сращивания рядов при малых и больших значениях η, аналогично тому, как позже это делал Кокрен (§ 101); впоследствии уравнение (34) было проинтегрировано численно.

Приведем результаты численного решения уравнения (34) в форме зависимости безразмерной скорости u/U_∞ от η (табл. 14)

Таблица 14

η	$\frac{u}{U_\infty}=\frac{1}{2}\varphi'(\eta)$	η	$\frac{u}{U_\infty}=\frac{1}{2}\varphi'(\eta)$	η	$\frac{u}{U_\infty}=\frac{1}{2}\varphi'(\eta)$
0	0	1,0	0,6298	2,0	0,9555
0,1	0,0664	1,1	0,6813	2,1	0,9670
0,2	0,1328	1,2	0,7290	2,2	0,9759
0,3	0,1989	1,3	0,7725	2,3	0,9827
0,4	0,2647	1,4	0,8115	2,4	0,9878
0,5	0,3298	1,5	0,8460	2,5	0,9915
0,6	0,3938	1,6	0,8761	2,6	0,9942
0,7	0,4563	1,7	0,9018	2,7	0,9962
0,8	0,5168	1,8	0,9233	2,8	0,9975
0,9	0,5748	1,9	0,9411	2,9	0,9984

Найдем напряжение трения на поверхности пластинки:

$$\tau_w=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{1}{4}\mu\sqrt{\frac{U_\infty^3}{\nu x}}\varphi''(0).$$

Для этого, пользуясь табл. 14, определим следующее из линейности зависимости u/U_∞ при малых η значение $\varphi''(0)$

$$\varphi''(0)=\frac{\varphi'(0{,}1)-\varphi'(0)}{0{,}1}=1{,}328$$

и получим формулу Блазиуса

$$\tau_w=0{,}332\sqrt{\frac{\mu\rho U_\infty^3}{x}}. \tag{35}$$

Отметим две важные закономерности, выраженные последней формулой: местное напряжение трения пропорционально *полуторной* степени скорости набегающего на пластинку потока и изменяется вдоль по пластинке *обратно пропорционально корню квадратному из расстояния от передней кромки.*

Формула Блазиуса дает хорошее совпадение с опытными данными во всех точках пластинки, кроме точек, близких к ее концам.

Вводя *местный* коэффициент трения c_f, получим

$$c_f=\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}=\frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},\quad \mathrm{Re}_x=\frac{U_\infty x}{\nu}. \tag{36}$$

Суммируя напряжения трения по *обеим сторонам* пластинки, найдем *полное* сопротивление трения пластинки

$$W_f=2\int_0^L\tau_w dx=1{,}328\sqrt{\mu\rho L U_\infty^3} \tag{37}$$

и соответствующий коэффициент полного сопротивления трения пластинки

$$C_f = \frac{W_f}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \quad \mathrm{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}; \tag{38}$$

здесь S – площадь «смоченной» поверхности пластинки, равная $2L \cdot 1$.

Распределение безразмерных продольных скоростей по сечениям пограничного слоя пластинки

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right) \tag{39}$$

изображено на рис. 186 в координатах u/U_∞, $y\sqrt{U_\infty/(\nu x)}$. Там же нанесены опытные точки по экспериментам Ханзена[1]) для сечений пограничного слоя с абсциссами $x=3$; 10; 15 см. При общем хорошем совпадении теории с опытами можно заметить некоторое отклонение точек при $x=3$ см, объясняемое влиянием передней кромки пластинки, имевшей клиновидную форму.

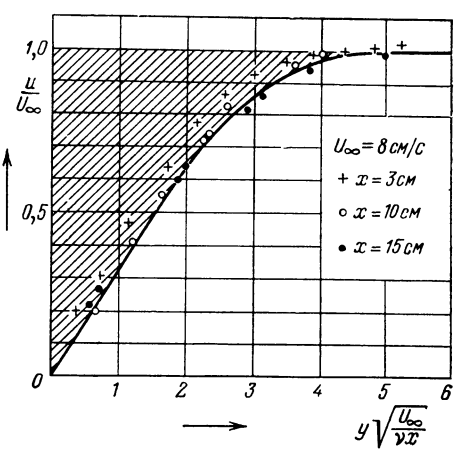


Рис. 186

Пользуясь табл. 14, найдем

$$\delta_{99} \approx 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}, \tag{40}$$

где δ_{99} введено для обозначения ординаты y в точке сечения пограничного слоя, где скорость u равна 0,99 U_∞, т. е. на один процент отличается от U_∞; аналогично можно было бы ввести δ_{999} для ординаты, где скорость отличалась бы на одну десятую процента от U_∞ и т. д. Такого рода толщины пограничного слоя будем в дальнейшем именовать *номинальными*.

Выполняя численное интегрирование профилей скорости в сечениях пограничного слоя, найдем интегральные толщины пограничного слоя: *толщину вытеснения*

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = 1{,}721\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}, \tag{41}$$

и *толщину потери импульса*

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = 0{,}664\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \tag{42}$$

Последние две «толщины» пограничного слоя не дают количественного представления о номинальной толщине пограничного слоя ($\delta_{99} \approx 3\delta^* \approx 7{,}5\delta^{**}$), но имеют то преимущество, что мало зависят от неточности совпадения u с U_∞ на границе слоя (при больших y). Например, δ^* определяется заштрихованной на рис. 186 плоскостью,

[1]) Hansen M. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte.— Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1928, Bd. 8, S. 185—199.

величина которой мало зависит от того, будет ли выполняться интегрирование до конечных абсцисс: 5 или 6.

Из формул (40) — (42) можно заключить, что *толщины слоя растут от передней кромки к задней прямо пропорционально корню квадратному из абсциссы точки на поверхности пластинки.*

Сравнивая (39) с (40) — (42), заметим, что распределение скоростей в сечениях пограничного слоя можно рассматривать в одной из следующих форм *аффинного* подобия:

$$\frac{u}{U_\infty}=f_1\left(\frac{y}{\delta_{99}}\right)=f_2\left(\frac{y}{\delta^*}\right)=f_3\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right),$$

что эквивалентно условию *автомодельности* решения задачи Блазиуса.

§ 109. Примеры плоских «свободных» пограничных слоев: дальний след за телом, «затопленная» струя, бьющая из точечного источника

В примере, рассмотренном в предыдущем параграфе, пограничный слой был «пристенным». Дадим два примера «свободных», не связанных с наличием в потоке твердой стенки пограничных слоев.

Завихренная благодаря прилипанию к поверхности твердого тела вязкая жидкость сходит с поверхности тела, образуя за его кормой «след», состоящий из сохранившей завихренность жидкости. Различают «ближний» и «дальний» следы в зависимости от расстояния рассматриваемой области следа от задней кромки тела. Движение в «ближнем» следе зависит от пограничного слоя на поверхности твердого тела, и поэтому расчет его представляет значительные трудности. Более просто решается вопрос о «дальнем» следе, в котором движение не зависит от формы обтекаемого тела, а только от испытываемого телом сопротивления W, скорости набегающего потока U_∞ и, конечно, физических констант жидкости μ и ρ. Направим ось Ox (рис. 187) по скорости набегающего потока. Возмущение, произведенное телом в набегающем потоке, вызывает «провал» на профилях скорости в сечениях следа (рис. 187). Этот провал будет тем слабее, чем дальше вниз по потоку расположено выбранное сечение. Обозначим возмущение продольной скорости через u_1, положив

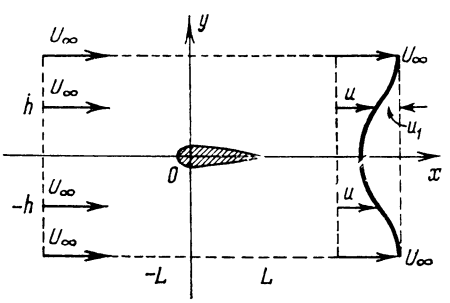


Рис. 187

$$u_1=U_\infty-u,$$

и примем его для больших значений x за малую величину, квадратом и высшими степенями которой и ее производных можно пренебречь. Столь же малы будут и поперечные скорости, как об этом можно судить по уравнению несжимаемости. Уравнение движения в следе сведется при этом к одному

$$U_\infty\frac{\partial u_1}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=0 \text{ при } y=0, \qquad (43)$$

$$u_1\to 0 \text{ при } y\to\pm\infty.$$

Из этого уравнения и предположения о плавности перехода к нулю на бесконечности ($\partial u_1/\partial y \to 0$ при $y \to \pm\infty$) следует интегральное условие

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} u_1\,dy = 0 \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_1\,dy = \text{const}. \tag{44}$$

Чтобы понять смысл константы и вычислить ее, выведем интегральное выражение сопротивления тела через скорости в сечении следа на большом удалении от тела. Применим теорему количеств движения в форме Эйлера к контрольной поверхности, охватывающей тело и имеющей вид прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. На рис. 187 прямоугольник показан штрихами. Считая стороны его $2h$ и $2L$ достаточно большими, будем иметь с тем меньшей ошибкой, чем больше эти стороны, и, в частности, чем больше h,

$$\rho U_\infty^2 \cdot 2h - W - \int_{-h}^{h} \rho u^2 dy = 0,$$

где W – сопротивление тела. В том же приближении получим уравнение расхода

$$\rho U_\infty \cdot 2h = \int_{-h}^{h} \rho u\,dy.$$

Отсюда найдем приближенную формулу сопротивления W тела:

$$W = \rho U_\infty^2 \cdot 2h - \int_{-h}^{h} \rho u^2 dy = U_\infty \int_{-h}^{h} \rho u\,dy - \int_{-h}^{h} \rho u^2\,dy = \int_{-h}^{h} \rho u (U_\infty - u)\,dy,$$

а считая сечение следа достаточно удаленным ($L \to \infty$) и ширину его достаточно большой ($h \to \infty$), получим

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u (U_\infty - u)\,dy. \tag{45}$$

Производя здесь замену $u = U_\infty - u_1$, $U_\infty - u = u_1$, и отбрасывая квадраты малых величин, будем иметь

$$W = \rho U_\infty \int_{-\infty}^{\infty} u_1\,dy,$$

так что интегральное условие (44) может быть переписано в форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_1\,dy = \frac{W}{\rho U_\infty}, \tag{46}$$

где W – сопротивление тела, след которого изучается. Докажем, что в достаточном удалении от тела движение в следе за ним определяется не формой поверхности тела и его размерами, а только одной константой – *сопротивлением* тела.

Уравнение (43) аналогично уравнению распространения тепла и имеет простой интеграл типа источника

$$u_1 = \frac{C}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{U_\infty y^2}{4\nu x}\right), \tag{47}$$

удовлетворяющий поставленным граничным условиям. Для определения постоянной C подставим этот интеграл в равенство (46), тогда после вычисления квадратуры получим

$$C = \frac{W}{2\sqrt{\pi\rho\mu U_\infty}}.$$

Окончательно будем иметь

$$u_1 = U_\infty - u = \frac{W}{2\sqrt{\pi\rho\mu U_\infty x}} \exp\left(-\frac{U_\infty y^2}{4\nu x}\right).$$

Закон убывания максимального возмущения на оси следа ($y=0$) представляется формулой

$$u_{1m} = \frac{W}{2\sqrt{\pi\mu\rho U_\infty}} \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{48}$$

Применяя полученную формулу к следу вдалеке за продольно обтекаемой пластинкой длины L, получим, согласно (37),

$$\frac{u}{U_\infty} = 1 - \frac{0{,}664}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{L}{x}} \exp\left(-\frac{U_\infty}{4\nu}\frac{y^2}{x}\right), \quad \frac{u_m}{U_\infty} = 1 - \frac{0{,}664}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{L}{x}}. \tag{49}$$

Введем понятие условной *ширины* следа $2\delta(x)$ как удвоенной ординаты такой точки, в которой отношение $1-u/U_\infty$ к $1-u_m/U_\infty$ принимает малое заранее фиксированное значение; получим по первому равенству (49)

$$\delta(x) = \text{const} \cdot \sqrt{x}, \tag{50}$$

после чего профили относительных возмущений скорости

$$\frac{u_1}{u_{1m}} = \frac{U_\infty - u}{U_\infty - u_m} = \frac{1 - u/U_\infty}{1 - u_m/U_\infty}$$

можно будет представить в виде

$$\frac{u_1}{u_{1m}} = f\left(\frac{y}{\delta}\right), \tag{51}$$

говорящем о наличии *аффинного подобия* распределения возмущений продольной скорости по нормальным сечениям следа вдалеке от источника возмущений — тела, след которого рассматривается. Задача о «дальнем» следе *автомодельна.*

Другим характерным типом свободных пограничных слоев служат так называемые *затопленные* струи, распространяющиеся в неподвижной среде с теми же физическими константами, что и у самой струи, или, в общем случае, с отличными от них.

В простейшей своей постановке задачи эти относятся к случаю предельно тонкого по поперечному сечению источника струи, но с конечным, благодаря очень большой скорости истечения, начальным импульсом (секундным количеством движения) J_0. К этой упрощенной постановке можно отнести и задачу о *затопленной* струе, вытекающей из сопла конечного диаметра и с конечной начальной скоростью, если рассматривать только область движения, достаточно удаленную от источника струи. В этой далекой от источника области движение также будет определяться импульсом, который можно рассматривать как начальный импульс эквивалентной струи из тонкого источника.

Задача о плоской ламинарной *затопленной струе* была решена Г. Шлихтингом [1]). Применение уравнения Прандтля — Мизеса (§ 107) к задаче о плоской струе было указано Л. Г. Лойцянским [2]).

Направим ось Ox по оси симметрии плоской струи (рис. 188). Равенство нулю внешней скорости U позволяет написать уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости в области плоской струи в одной из следующих двух форм:

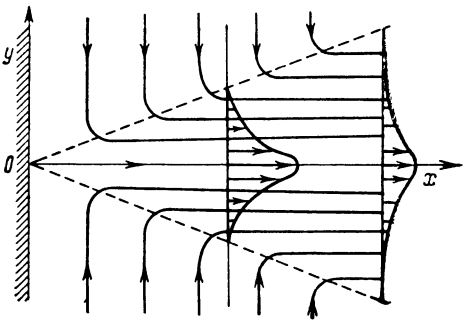


Рис. 188

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{52}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}.$$

В силу симметрии имеем на оси струи

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad v=0\quad\text{или}\quad\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,\quad\psi=0\ \text{при}\ y=0, \tag{53}$$

а на внешней границе струи при переходе к неподвижной, окружающей струю жидкости будет

$$u\to 0\quad\text{или}\quad\frac{\partial\psi}{\partial y}\to 0\ \text{при}\ y\to\pm\infty. \tag{54}$$

Наличие таких *нулевых* граничных условий по y и отсутствие граничного условия по x приводит к *тривиальному* решению $u=0$, $v=0$ во всей области, что противоречит наличию движения жидкости в струе. Чтобы устранить это противоречие, перепишем первое уравнение системы (52), используя второе, так:

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

и проинтегрируем обе его части по y в пределах $(-\infty, \infty)$. Тогда в предположении существования интеграла в бесконечных пределах от первого слагаемого и допустимости перемены порядка операций дифференцирования и интегрирования, получим

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy+uv\Big|_{-\infty}^{\infty}=\nu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Подстановка в левой части этого равенства обращается в нуль вследствие предельного перехода, а в правой — из-за предположения о плавности этого перехода, требующего стремления $\partial u/\partial y\to 0$ при $y\to\pm\infty$. Таким образом, получим

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy=0,\quad\int_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy=\text{const}.$$

---

[1]) Schlichting H. Laminare Strahlausbreitung.— Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1933, Bd. 13, № 4, S. 260.

[2]) Лойцянский Л. Г. К теории плоских ламинарных и турбулентных струй.— Труды ЛПИ, 1955, № 176, с. 101—114

Домножая обе части последнего равенства на постоянную плотность ρ, перепишем его в форме

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2\, dy = \text{const} = J_0. \tag{55}$$

Смысл этого равенства заключается в том, что *секундное количество движения*, переносимое сквозь поперечное сечение струи, *одинаково для всех сечений*. Постоянная J_0 служит такой же характерной постоянной для струи, как интенсивность для точечного источника или стока, момент для точечного диполя и т. п. Задание величины J_0 делает задачу о распространении струи вполне определенной. Решение $u \equiv v \equiv 0$ не удовлетворяет интегральному условию (55), которое можно рассматривать как условие *нетривиальности* решения системы (52) при граничных условиях (53) и (54).

Условимся выражать продольные координаты x в масштабе длин L, поперечные координаты y — в масштабе $Y = L/\sqrt{\mathrm{Re}} = \sqrt{\nu L/V}$. Тогда масштабом Ψ функции тока ψ будет служить величина $\Psi = \sqrt{\nu V L}$, где V — некоторый масштаб скоростей. С другой стороны, согласно (55), будет (штрихом обозначены безразмерные величины)

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy = J_0 \quad \text{и} \quad \frac{\rho \Psi^2}{Y} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y'}\right)^2 dy' = J_0,$$

так что, положив

$$\Psi^2 = \frac{J_0}{\rho} \sqrt{\frac{\nu L}{V}},$$

составим условие (55) в безразмерном виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y'}\right)^2 dy' = 1. \tag{56}$$

Сопоставляя полученные значения Ψ, будем иметь выражения для масштабов L и Ψ через V

$$L = \frac{J_0^2}{\mu \rho V^3}, \quad \Psi = \frac{J_0}{\rho V},$$

причем по самому характеру задачи скорость V как масштаб не должна входить в решение. Напишем общий вид решения в безразмерных координатах:

$$\psi' = \psi'(x', y')$$

и в размерных координатах

$$\psi = \Psi \psi'\left(\frac{x}{L}, y\sqrt{\frac{V}{\nu L}}\right) = \frac{J_0}{\rho V} \psi'\left(\frac{\mu \rho V^3}{J_0^2} x, \frac{\rho V^2}{J_0} y\right).$$

Для того чтобы правая часть этого выражения не зависела от V, общий вид решения должен быть следующим:

$$\psi' = \sqrt[3]{x'}\, \varphi(y'/x'^{2/3}). \tag{57}$$

Действительно, при этом будет

$$\psi = \frac{J_0}{\rho V} \frac{\sqrt[3]{\mu \rho V^3 x}}{J_0^{2/3}} \varphi\left(\frac{\rho V^2}{J_0} \frac{J_0^{4/3}}{\mu^{2/3} \rho^{2/3} V^2} \frac{y}{x^{2/3}}\right) = \sqrt[3]{\frac{\nu J_0 x}{\rho}}\, \varphi\left(\sqrt[3]{\frac{J_0}{\rho \nu^2}} \frac{y}{x^{2/3}}\right). \tag{58}$$

Полагая

$$\frac{y'}{x'^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{J_0}{\rho\nu^2}}\frac{y}{x^{2/3}} = \eta, \tag{59}$$

подставим выражение ψ' из (57), переписанного в форме

$$\psi' = x'^{1/3}\varphi(\eta),$$

в третье уравнение системы (52), преобразованное к безразмерным координатам

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\,\partial y'} - \frac{\partial\psi'}{\partial x'}\frac{\partial^2\psi'}{\partial y'^2} = \frac{\partial^3\psi'}{\partial y'^3}.$$

Предварительно вычислим (φ со штрихами означают соответствующие производные по η)

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y'} = x'^{-1/3}\varphi'(\eta), \quad \frac{\partial^2\psi'}{\partial y'^2} = x'^{-1}\varphi''(\eta),$$

$$\frac{\partial^3\psi'}{\partial y'^3} = x'^{-5/3}\varphi'''(\eta), \quad \frac{\partial\psi'}{\partial x'} = \frac{1}{3}x'^{-2/3}[\varphi(\eta) - 2\eta\varphi'(\eta)],$$

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\,\partial y'} = -\frac{1}{3}x'^{-4/3}[\varphi'(\eta) + 2\eta\varphi''(\eta)].$$

Совершая указанную подстановку, придем к интегрированию обыкновенного уравнения третьего порядка

$$\varphi''' + \frac{1}{3}(\varphi'^2 + \varphi\varphi'') = 0 \tag{60}$$

при граничных условиях

$$\varphi = 0, \quad \varphi'' = 0 \text{ при } \eta = 0,$$
$$\varphi' \to 0 \text{ при } \eta \to \pm\infty \tag{61}$$

и интегральном условии (56), которое можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'^2(\eta)\,d\eta = 1. \tag{62}$$

Интегрируя обе части (60) почленно, получим

$$\varphi'' + \frac{1}{3}\varphi\varphi' = 0,$$

причем уже удовлетворены первые два условия (61). Интегрируя еще раз и вводя обозначение

$$\varphi = \varphi_0 \text{ при } \varphi' = 0,$$

будем иметь

$$\varphi' = \frac{1}{6}(\varphi_0^2 - \varphi^2).$$

Дальнейшее интегрирование дает

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\varphi_0^2 - \varphi^2} = \frac{1}{2\varphi_0}\ln\frac{\varphi_0 + \varphi}{\varphi_0 - \varphi} = \frac{1}{6}\eta,$$

или

$$\frac{\varphi_0 + \varphi}{\varphi_0 - \varphi} = e^{\frac{1}{3}\varphi_0\eta}.$$

Отсюда найдем

$$\varphi = \varphi_0 \frac{e^{\frac{1}{3}\varphi_0\eta} - 1}{e^{\frac{1}{3}\varphi_0\eta} + 1} = \varphi_0 \frac{e^{\frac{1}{6}\varphi_0\eta} - e^{-\frac{1}{6}\varphi_0\eta}}{e^{\frac{1}{6}\varphi_0\eta} + e^{-\frac{1}{6}\varphi_0\eta}} = \varphi_0 \operatorname{th}\left(\frac{1}{6}\varphi_0\eta\right). \qquad (63)$$

Вычисляя производную по η,

$$\varphi'(\eta) = \frac{1}{6}\varphi_0^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{6}\varphi_0\eta\right)},$$

и подставляя в (62), получим следующее уравнение для определения φ_0:

$$\frac{1}{36}\varphi_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{\operatorname{ch}^4\left(\frac{1}{6}\varphi_0\eta\right)} = 1.$$

Положим для вычисления интеграла

$$\frac{1}{6}\varphi_0\eta = \xi;$$

тогда предыдущее уравнение перейдет в такое:

$$\frac{\varphi_0^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{ch}^4\xi} = 1,$$

и, замечая, что определенный интеграл равен $^4/_3$, найдем искомое значение φ_0:

$$\varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} = 1{,}6510.$$

Возвращаясь к (63), а затем к (58), получим

$$\psi = 1{,}6510 \sqrt[3]{\frac{\nu J_0 x}{\rho}} \operatorname{th}\left(0{,}2752 \sqrt[3]{\frac{J_0}{\rho\nu^2}} \frac{y}{\sqrt[3]{x^2}}\right). \qquad (64)$$

По самому смыслу функции тока следует, что секундный объемный расход Q сквозь сечение струи будет равен

$$Q = 2(\psi)_{y=\infty} = 3{,}3020 \sqrt[3]{\frac{\nu J_0 x}{\rho}}.$$

Расход растет от сечения к сечению пропорционально корню кубическому из расстояния сечения от источника струи. На выходе из щели ($x=0$) расход равен нулю. Вместе с тем, как ранее было указано, секундное количество движения повсюду одинаково и конечно; следовательно, и на выходе оно тоже конечно. При бесконечно большой скорости истечения струи из щели и бесконечной тонкости щели в полученном результате нет никакого противоречия. С качественной стороны этот результат выражает известное свойство явления *эжекции*: расход жидкости в струе мал по сравнению с расходом, эжектируемым за счет существенного по величине количества движения струи. Как видно из картины линий тока на рис. 188, в рассматриваемом случае бесконечно тонкой щели струя целиком состоит из частиц жидкости, заполняющей пространство, куда врывается струя. При истечении струи из щели конечной ширины это уже будет не так.

Имея выражение функции тока (64), найдем распределения продольной скорости u по сечениям струи и максимального значения этой скорости u_m вдоль оси струи

$$u = 0{,}4543 \sqrt[3]{\frac{J_0^2}{\rho^2 \nu x}} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(0{,}2752 \sqrt[3]{\frac{J_0}{\rho \nu^2}} \frac{y}{\sqrt[3]{x^2}}\right)}, \quad u_m = 0{,}4543 \sqrt[3]{\frac{J_0^2}{\rho^2 \nu x}}. \tag{65}$$

§ 110. Задача о плоской «пристенной» струе

Рассмотрим пример пограничного слоя смешанного типа — *пристенную струю* [1]), в известном смысле объединяющую пристенный слой на пластинке со свободной струей (рис. 189).

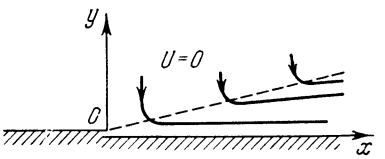


Рис. 189

Конечно, при нелинейности уравнений движения не может быть речи о наложении потоков друг на друга; однако, как далее будет показано, некоторое сходство профиля продольных скоростей вблизи ограничивающей струю плоскости с соответствующим профилем вблизи пластинки и профиля скоростей вдалеке от плоскости с профилем в струе все же наблюдается.

Уравнение движения будет

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3};$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \tag{66}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \to 0 \text{ при } y \to \infty.$$

Для существования нетривиального решения необходимо задать такую интегральную характеристику движения, которая, подобно импульсу струи, отвечала бы некоторому закону сохранения и тем самым служила бы количественной мерой данной конкретной полуограниченной пристенной струи. Заметим, что импульс в данном случае уже не может сохраняться вдоль струи, так как, в отличие от безграничной струи, имеется внешняя сила трения жидкости о границу полуплоскости.

Искомое условие нетривиальности решения выведем, переписав уравнение пограничного слоя, как и раньше, в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{67}$$

умножив обе части почленно на ψ и проинтегрировав поперек слоя от

[1]) Акатнов Н. И. Распространение плоской ламинарной струи жидкости вдоль твердой стенки.— Труды ЛПИ (Энергомашиностроение, Техническая гидромеханика), № 5.— М.: Машгиз, 1953, с. 24—31, а также Glauert M. B. Wall jet.— Journ. Fluid Mech., 1956, v. 1.

0 до ∞, будем последовательно иметь

$$\psi \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \psi \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \nu\psi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi uv) - u^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - uv \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

или, после очевидного сокращения,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi uv) = \nu \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \nu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right);$$

почленное интегрирование дает

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \psi u^2\, dy + \psi uv\Big|_0^\infty = \nu\psi \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_0^\infty - \nu \frac{u^2}{2}\Big|_0^\infty. \tag{68}$$

Замечая, что все подстановки равны нулю, найдем

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \psi u^2 dy = 0,$$

откуда следует, что величина (α представляет собой значение функции тока на внешней границе пограничного слоя)

$$\int_0^\infty \psi u^2\, dy = \int_0^\alpha u\psi\, d\psi = \text{const} = E \tag{69}$$

сохраняет одинаковое значение вдоль всего пограничного слоя, а ее задание может служить условием *нетривиальности* решения.

В дальнейшем в связи с анализом полученного решения будет выяснено, что величина E только числовой постоянной отличается от сохраняющегося в сечениях пограничного слоя *произведения секундных объемного расхода* Q и отнесенного к единице массы *количества движения* K:

$$Q = \int_0^\infty u\, dy, \quad K = \frac{J}{\rho} = \int_0^\infty u^2\, dy.$$

Размерность величины E определится как $[U^3\delta^2] = [U^3L^2/(UL/\nu)]$ и равна

$$[E] = [\nu U^2 L].$$

Соображения размерностей в рассматриваемом случае приведут к общей форме решения $[L = E/(\nu U^2)]$

$$\psi = \sqrt{\frac{E}{U}}\, f\left(\frac{\nu x U^2}{E},\ y\sqrt{\frac{U^3}{E}}\right),$$

которая ввиду отсутствия в условиях задачи характерной скорости должна перейти в следующую:

$$\psi = \sqrt{\frac{E}{U}}\sqrt[4]{\frac{\nu x U^2}{E}}\, F\left[y\sqrt{\frac{U^3}{E}}\Big/\sqrt[4]{\left(\frac{\nu x U^2}{E}\right)^3}\right],$$

т. е. в окончательном виде

$$\psi = \sqrt[4]{\nu E x}\, F(\eta), \quad \eta = \sqrt[4]{\frac{E}{\nu^3}}\frac{y}{\sqrt[4]{x^3}}. \tag{70}$$

Подставив это выражение ψ в уравнение (66), убедимся в автомодельности задачи: уравнение сведется к обыкновенному (штрих — производная по η) дифференциальному уравнению

$$4F'''+FF''+2F'^2=0; \tag{71}$$

граничные условия по (66) примут вид

$$\begin{gathered} F=F'=0 \text{ при } \eta=0, \\ F'\to 0 \text{ при } \eta\to\infty, \end{gathered} \tag{72}$$

причем присоединяется еще интегральное условие

$$\int_0^\infty F'^2(\eta)F(\eta)\,d\eta=1, \tag{73}$$

легко выводимое из системы равенств (69) и (70).

Уравнение (71) допускает интегрирующий множитель F. Найдем, один раз интегрируя и определяя постоянную интегрирования из граничных условий (72),

$$4FF''-2F'^2+F^2F'=0. \tag{74}$$

Совершая в этом уравнении замену переменных $F'=\Phi$ и принимая за независимую переменную F, получим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{d\Phi}{dF}-\frac{1}{2F}\Phi=-\frac{F}{4}, \tag{75}$$

решение которого будет

$$\Phi=F'=C\sqrt{F}-\frac{1}{6}F^2. \tag{76}$$

Обозначим через F_∞ значение F при $\eta=\infty$ и $\Phi=0$. Тогда постоянная C равна

$$C=\frac{1}{6}F_\infty\sqrt{F_\infty},$$

и уравнение (76) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d\theta}{d\eta}=\frac{F_\infty}{6}(\sqrt{\theta}-\theta^2),\quad \theta=\frac{F}{F_\infty}. \tag{77}$$

Постоянную F_∞ определим, подставляя значения

$$F'=\frac{1}{6}(F_\infty\sqrt{F_\infty}\sqrt{F}-F^2),\quad d\eta=\frac{6dF}{F_\infty\sqrt{F_\infty}\sqrt{F}-F^2}$$

в интегральное условие (73). Получим

$$F_\infty=2{,}515. \tag{78}$$

Уравнение (77) интегрируется и приводит к соотношению

$$\eta=0{,}7952\left[\ln\frac{1+\sqrt{\theta}+\theta}{(1-\sqrt{\theta})^2}+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3\theta}}{\sqrt{\theta}+2}\right]. \tag{79}$$

Объединяя его с уравнением (77), переписанным в виде

$$F'=\frac{F_\infty^2}{6}(\sqrt{\theta}-\theta^2)=1{,}054\,(\sqrt{\theta}-\theta^2), \tag{80}$$

получим F' в параметрической форме. Нетрудно определить величины

секундного расхода Q и импульса K; будем иметь

$$Q=\int_0^\infty u\,dy=2{,}515\sqrt[4]{\nu E x},\quad K=\int_0^\infty u^2\,dy=0{,}884\sqrt[4]{\frac{E^3}{\nu x}}. \tag{81}$$

Каждая из этих величин является функцией продольной координаты x, т. е. изменяется при переходе от одного сечения струи к другому, но произведение их сохраняет постоянное значение и просто связано с основной константой E

$$QK=\frac{20}{9}E. \tag{82}$$

Приведем еще формулу касательного напряжения трения на твердой стенке, вдоль которой распространяется струя

$$\tau_w=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=0{,}221\mu\sqrt[4]{\frac{E^3}{\nu^5x^5}}. \tag{83}$$

На рис. 190 и 191 сравниваются между собой распределения скоростей во внутренней (от стенки до точки максимума скорости $u=u_m$

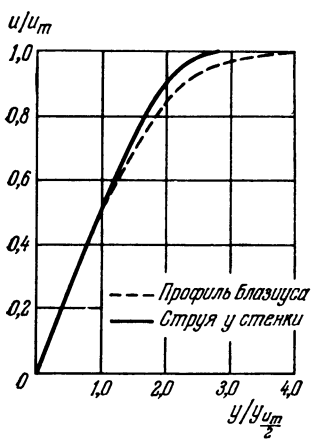


Рис. 190

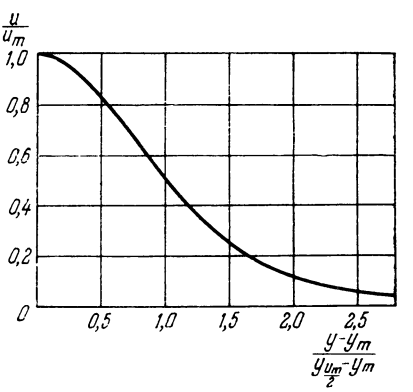


Рис. 191

в сечении с ординатой y_m) и внешней (за точкой максимума скорости) областях струи с распределениями скоростей на продольно обтекаемой пластинке и в безграничной струе. По оси ординат на обоих рисунках отложено одно и то же отношение u/u_m, а по оси абсцисс: для внутренней области отношение $y/y_{u_{m/2}}$ текущей ординаты к ординате, соответствующей точке сечения, где $u=u_m/2$, а для внешней — отношение $(y-y_m)/(y_{u_{m/2}}-y_m)$.

Графики оправдывают высказанное ранее соображение о сходстве между профилями скорости для рассматриваемого случая сложного движения и для ранее рассмотренных более простых случаев. Практически полное совпадение наблюдается во внешней области (рис. 191).

§ 111. Общий случай точных автомодельных решений уравнений стационарного плоского пристенного пограничного слоя

Среди общих решений уравнений плоского стационарного пристенного пограничного слоя, соответствующих произвольному заданию скорости на внешней границе пограничного слоя, своей простотой и наглядностью отличается класс точных *автомодельных* задач со *степенным*

заданием внешней скорости. В этом случае решение сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка.

Выясним условия существования автомодельных решений уравнения (15). Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{y}{\delta}, \quad \Phi = \frac{\psi}{U\delta}, \tag{84}$$

где $U(x)$ — скорость на внешней границе пограничного слоя в данном сечении x и вместе с тем масштаб продольных скоростей u, $\delta(x)$ — толщина пограничного слоя (в одном из возможных ее определений), принимаемая за масштаб ординат в соответствующем сечении пограничного слоя, произведение $U\delta$ — масштаб функции тока; величину Φ назовем *приведенной функцией тока.*

Вытекающие из равенств (84) выражения размерной функции тока через «приведенное» ее значение

$$\psi = U\delta\Phi \tag{85}$$

подставим в уравнение (15) с сопутствующими ему граничными условиями и выясним, каковы должны быть функции $U(x)$ и $\delta(x)$ для того, чтобы в результате этой подстановки уравнение в частных производных (15) привелось к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно приведенной функции тока Φ, которая должна быть функцией только ξ, т. е. не зависеть от x. Предварительно найдем (далее штрих — символ производной по x, точка над буквой — по ξ)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = (U'\delta + U\delta')\Phi - U\delta'\xi\dot{\Phi} = \frac{\nu}{\delta}\left[\left(\beta + \frac{1}{2}\bar{\beta}\right)\Phi - \frac{1}{2}\bar{\beta}\xi\dot{\Phi}\right],$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\nu}{\delta^2}\left(\beta\dot{\Phi} - \frac{1}{2}\bar{\beta}\xi\ddot{\Phi}\right), \tag{86}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = U\dot{\Phi}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{U}{\delta}\ddot{\Phi}, \quad \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = \frac{U}{\delta^2}\dddot{\Phi}.$$

Здесь введены обозначения для «параметров подобия»

$$U'z = \beta, \quad Uz' = \bar{\beta}; \quad z = \frac{\delta^2}{\nu}. \tag{87}$$

Величины β и $\bar{\beta}$ являются неизвестными функциями x, а обозначение одной из них черточкой сверху объясняется наличием своеобразной *сопряженности* между ними, заключающейся в том, что при замене U на z одна из них переходит в другую:

$$\beta \rightleftarrows \bar{\beta} \text{ при } U \rightleftarrows z. \tag{88}$$

Это свойство, как далее будет выяснено, сохраняется и для более широкого класса движений, удовлетворяющих условиям *обобщенного подобия.*

Подстановка значений производных (86) в уравнения и граничные условия (15) приводит к дифференциальному уравнению третьего порядка

$$\dddot{\Phi} + \left(\beta + \frac{1}{2}\bar{\beta}\right)\Phi\ddot{\Phi} + \beta(1 - \dot{\Phi}^2) = 0,$$

$$\Phi = \dot{\Phi} = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad \dot{\Phi} \to 1 \text{ при } \xi \to \infty, \tag{89}$$

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0(\xi) \text{ при } x = x_0,$$

в котором Φ является функцией ξ, тогда как входящие в уравнение величины β и $\bar{\beta}$ представляют собой функции x.

Для того чтобы, по определению автомодельности, уравнение (89) было *обыкновенным* дифференциальным уравнением, следует положить

$$\beta = U'z = \text{const}, \quad \bar{\beta} = Uz' = \text{const} \tag{90}$$

и опустить при этом «начальное» условие, указаное в последней строке (89).

Для определения $U(x)$ и $\delta(x)$ потребуется интегрирование системы обыкновенных уравнений (90). Ставя условие конечности $z=\delta^2/\nu$ при $U=0$ и вводя постоянную интегрирования c, получим следующие выражения для U, а вместе с тем для z и δ

$$U = cx^m, \quad z = \frac{\beta}{cm} x^{1-m}, \quad \delta = \left(\frac{\nu\beta}{cm}\right)^{1/2} x^{(1-m)/2}, \tag{91}$$

где введено обозначение

$$m = \frac{\beta}{\beta + \bar{\beta}}, \quad \beta = \frac{m}{1-m}\bar{\beta}, \quad \bar{\beta} = \frac{1-m}{m}\beta. \tag{92}$$

Как это следует из первого равенства (91), уравнение (89) будет иметь автомодельное решение только при *степенном* распределении скорости $U(x)$. Особый случай равенства нулю суммы $\beta + \frac{1}{2}\bar{\beta}$, приводящий к *показательному* закону распределения $U(x)$, далее исключается. Покажем, что интегральные толщины пограничного слоя δ^* и δ^{**}, определенные равенствами (41) и (42), и напряжение трения τ_w на поверхности тела ($\xi=0$) выразятся также степенными формулами. Имеем, согласно (85),

$$\begin{gathered}\frac{u}{U} = \frac{1}{U}\frac{\partial[\psi/(U\delta)]}{\partial(y/\delta)}\frac{U\delta}{\delta} = \frac{d\Phi}{d\xi} = \dot{\Phi}(\xi;\ \beta,\ \bar{\beta}), \\ \tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu U}{\delta}\left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)}\right]_{y=0} = \frac{\mu U}{\delta}\ddot{\Phi}(0;\ \beta,\ \bar{\beta}),\end{gathered} \tag{93}$$

а следовательно, можно положить

$$\begin{gathered}\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\infty (1 - \dot{\Phi})\, d\xi \cdot \delta = A(\beta, \bar{\beta})\,\delta, \\ \delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\infty \dot{\Phi}(1 - \dot{\Phi})\, d\xi \cdot \delta = B(\beta,\ \bar{\beta})\,\delta, \\ \tau_w = \frac{\mu U}{\delta}\zeta(\beta, \bar{\beta}),\end{gathered} \tag{94}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\int_0^\infty (1 - \dot{\Phi})\, d\xi = A(\beta,\ \bar{\beta}), \quad \int_0^\infty \dot{\Phi}(1 - \dot{\Phi})\, d\xi = B(\beta,\ \bar{\beta}), \\ \ddot{\Phi}(0;\ \beta, \bar{\beta}) = \zeta(\beta,\ \bar{\beta}).\end{gathered} \tag{95}$$

Сохраняя *независимыми* параметры β и $\bar{\beta}$, мы бы пришли к *двухпараметрическому* решению $\Phi(\xi;\ \beta,\ \bar{\beta})$. Ограничимся таким соотношением параметров, при котором коэффициент при втором члене в левой части (89) равен единице, т. е. положим

$$\beta + \frac{1}{2}\bar{\beta} = 1, \quad \bar{\beta} = 2(1 - \beta). \tag{96}$$

Заметим, что при таком выборе $\bar{\beta}$ исключается случай $\beta+\frac{1}{2}\bar{\beta}=0$, приводящий к *экспоненциальному* виду $U(x)$.

Уравнение (89) при условии (96) приобретает более простую однопараметрическую форму

$$\ddot{\Phi}+\Phi\ddot{\Phi}+\beta(1-\dot{\Phi}^2)=0,$$
$$\Phi=\dot{\Phi}=0 \text{ при } \xi=0, \quad \dot{\Phi}\to 1 \text{ при } \xi\to\infty. \tag{97}$$

При этом параметр β будет, согласно (92), связан с m равенствами

$$\beta=\frac{2m}{m+1}, \quad m=\frac{\beta}{2-\beta}, \tag{98}$$

а формулы (91) и (94), служащие для определения толщин δ, δ^*, δ^{**} и напряжения трения τ_w, примут вид

$$z(x)=\frac{\delta^2}{\nu}=\frac{2}{(m+1)c}x^{1-m}, \quad \delta(x)=\left[\frac{2\nu}{(m+1)c}\right]^{1/2}x^{(1-m)/2},$$
$$\delta^*(x)=A(\beta)\delta(x), \quad \delta^{**}(x)=B(\beta)\delta(x), \tag{99}$$
$$\tau_w=\frac{\mu U}{\delta}\zeta(\beta).$$

В этом *однопараметрическом* приближении связь между физическими переменными x, y, ψ и «переменными подобия» ξ, Φ будет по (84) и (91)

$$\xi=\frac{y}{\delta}=\sqrt{\frac{m+1}{2}\cdot\frac{c}{\nu}}\,yx^{(m-1)/2}=\sqrt{\frac{c}{(2-\beta)\nu}}\,yx^{(\beta-1)/(2-\beta)},$$
$$\Phi=\sqrt{\frac{m+1}{2\nu c}}\,x^{-(m+1)/2}\psi=\frac{1}{\sqrt{(2-\beta)\nu c}}\,x^{-1/(2-\beta)}\psi. \tag{100}$$

Уравнение (97), выведенное в несколько другой форме Фокнером и Скэн[1]), было численно проинтегрировано Хартри[2]), указавшим на то, что решение этого уравнения при $m<0$, $\beta<0$ перестает быть единственным и допускает бифуркацию (две различные ветви интегральной кривой). При численном интегрировании уравнения (97) им была выбрана та из ветвей решения, для которой асимптотическое стремление $u/U\to 1$ при $\xi\to\infty$ было быстрейшим. В дальнейшем советскими авторами[3]) было дано обоснование этого требования, опирающееся на рассмотрение асимптотик возмущенного, неавтомодельного решения, близкого к рассматриваемому автомодельному.

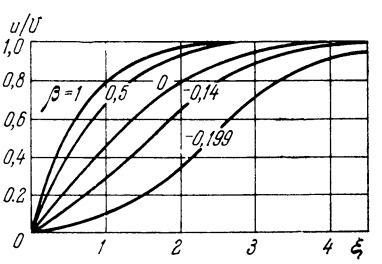


Рис. 192

Табл. 15 содержит значения безразмерной скорости $u/U=\dot{\Phi}(\xi, \beta)$ (рис. 192) в области пограничного слоя при значениях β в интервале от

[1]) Falkner V. M, Skan S. W. Some approximate solutions of the boundary layer equations.— Phil. Mag., 1931, v. 12.

[2]) Hartree D. R. On an equation occuring in Falkner — Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1937, v. 33, p. II.

[3]) Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. О выборе автомодельного решения в теории пограничного слоя — Механика жидкости и газа, 1974, № 4, с. 42—46.

Табл.

ξ \ β	−0,1988	−0,19	−0,18	−0,16	−0,14	−0,10	0	0,1	0,2	0,3
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0010	0,0095	0,0137	0,0198	0,0246	0,0324	0,0469	0,0582	0,0677	0,0760
0,2	0,0040	0,0209	0,0293	0,0413	0,0507	0,0659	0,0939	0,1154	0,1334	0,1490
0,3	0,0089	0,0343	0,0467	0,0643	0,0781	0,1003	0,1408	0,1715	0,1970	0,2189
0,4	0,0158	0,0495	0,0659	0,0889	0,1069	0,1356	0,1876	0,2265	0,2584	0,2858
0,5	0,0248	0,0665	0,0868	0,1151	0,1370	0,1718	0,2342	0,2803	0,3177	0,3495
0,6	0,0358	0,0855	0,1094	0,1427	0,1684	0,2088	0,2806	0,3328	0,3747	0,4100
0,7	0,0487	0,1063	0,1338	0,1719	0,2010	0,2466	0,3266	0,3839	0,4294	0,4672
0,8	0,0636	0,1289	0,1598	0,2023	0,2347	0,2849	0,3720	0,4335	0,4816	0,5212
0,9	0,0803	0,1533	0,1874	0,2341	0,2694	0,3237	0,4167	0,4815	0,5312	0,5718
1,0	0,0991	0,1794	0,2166	0,2671	0,3050	0,3628	0,4606	0,5274	0,5782	0,6190
1,2	0,1423	0,2364	0,2791	0,3362	0,3784	0,4415	0,5453	0,6135	0,6640	0,7033
1,4	0,1927	0,2991	0,3463	0,4083	0,4534	0,5194	0,6244	0,6907	0,7383	0,7743
1,6	0,2498	0,3665	0,4170	0,4820	0,5284	0,5948	0,6967	0,7583	0,8011	0,8326
1,8	0,3126	0,4372	0,4896	0,5555	0,6016	0,6660	0,7610	0,8160	0,8528	0,8791
2,0	0,3802	0,5095	0,5621	0,6269	0,6712	0,7314	0,8167	0,8637	0,8940	0,9151
2,2	0,4509	0,5814	0,6327	0,6944	0,7354	0,7896	0,8633	0,9019	0,9260	0,9421
2,4	0,5230	0,6509	0,6995	0,7561	0,7927	0,8398	0,9011	0,9315	0,9500	0,9617
2,6	0,5946	0,7162	0,7605	0,8107	0,8422	0,8817	0,9306	0,9537	0,9612	0,9754
2,8	0,6635	0,7754	0,8146	0,8574	0,8836	0,9153	0,9529	0,9697	0,9792	0,9847
3,0	0,7278	0,8273	0,8607	0,8959	0,9168	0,9413	0,9691	0,9808	0,9873	0,9908
3,2	0,8158	0,8713	0,8986	0,9265	0,9425	0,9607	0,9804	0,9883	0,9924	0,9946
3,4	0,8364	0,9071	0,9286	0,9499	0,9616	0,9746	0,9880	0,9931	0,9957	0,9970
3,6	0,8789	0,9352	0,9515	0,9669	0,9752	0,9841	0,9929	0,9961	0,9976	0,9984
3,8	0,9132	0,9563	0,9681	0,9789	0,9845	0,9904	0,9959	0,9978	0,9987	0,9991
4,0	0,9399	0,9716	0,9798	0,9871	0,9907	0,9944	0,9978	0,9988	0,9993	0,9995
4,2	0,9598	0,9822	0,9876	0,9924	0,9946	0,9969	0,9988	0,9994	0,9996	0,9997
4,4	0,9741	0,9893	0,9927	0,9957	0,9970	0,9983	0,9994	0,9997	0,9998	0,9999
4,6	0,9839	0,9938	0,9959	0,9977	0,9984	0,9991	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999
4,8	0,9904	0,9965	0,9978	0,9988	0,9992	0,9996	0,9999	0,9999		
5,0	0,9945	0,9981	0,9988	0,9994	0,9996	0,9998	0,9999			
5,2	0,9969	0,9990	0,9994	0,9997	0,9998	0,9999				
5,4	0,9984	0,9995	0,9997	0,9999	0,9999					
5,6	0,9992	0,9997	0,9999	0,9999						
5,8	0,9996	0,9999	0,9999							
6,0	0,9998	0,9999								
6,2	0,9999									
6,4	1,0000									

φ 15

0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0	2,4	β/ξ
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0
0,0834	0,0903	0,0966	0,1080	0,1183	0,1276	0,1441	0,1588	0,1720	0,1
0,1628	0,1756	0,1872	0,2081	0,2266	0,2433	0,2726	0,2980	0,3206	0,2
0,2382	0,2558	0,2719	0,3003	0,3252	0,3475	0,3859	0,4186	0,4472	0,3
0,3097	0,3311	0,3506	0,3848	0,4144	0,4405	0,4849	0,5219	0,5537	0,4
0,3771	0,4015	0,4235	0,4619	0,4946	0,5231	0,5708	0,6096	0,6424	0,5
0,4403	0,4670	0,4907	0,5317	0,5662	0,5959	0,6446	0,6834	0,7155	0,6
0,4994	0,5276	0,5524	0,5947	0,6298	0,6596	0,7076	0,7449	0,7752	0,7
0,5545	0,5834	0,6086	0,6512	0,6859	0,7150	0,7610	0,7858	0,8235	0,8
0,6055	0,6344	0,6596	0,7015	0,7350	0,7629	0,8058	0,8376	0,8624	0,9
0,6526	0,6811	0,7056	0,7460	0,7778	0,8037	0,8432	0,8717	0,8934	1,0
0,7351	0,7615	0,7837	0,8194	0,8467	0,8682	0,8997	0,9214	0,9373	1,2
0,8027	0,8258	0,8449	0,8748	0,8968	0,9137	0,9375	0,9530	0,9640	1,4
0,8568	0,8860	0,8917	0,9154	0,9324	0,9450	0,9620	0,9726	0,9789	1,6
0,8988	0,9141	0,9264	0,9443	0,9569	0,9658	0,9775	0,9845	0,9892	1,8
0,9305	0,9421	0,9514	0,9644	0,9732	0,9793	0,9871	0,9914	0,9944	2,0
0,9537	0,9621	0,9689	0,9779	0,9841	0,9879	0,9928	0,9954	0,9970	2,2
0,9700	0,9760	0,9807	0,9867	0,9905	0,9931	0,9961	0,9976	0,9985	2,4
0,9812	0,9852	0,9884	0,9922	0,9946	0,9962	0,9980	0,9989	0,9993	2,6
0,9886	0,9913	0,9933	0,9956	0,9971	0,9980	0,9990	0,9994	0,9996	2,8
0,9933	0,9952	0,9962	0,9976	0,9985	0,9989	0,9995	0,9997	0,9998	3,0
0,9962	0,9974	0,9979	0,9987	0,9992	0,9995	0,9998	0,9999	0,9999	3,2
0,9979	0,9986	9,9989	0,9993	0,9996	0,9997	0,9999			3,4
0,9989	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999				3,6
0,9994	0,9994	0,9997	0,9998	0,9999					3,8
0,9997	0,9999	0,9999	0,9999						4,0
0,9999									4,2
0,9999									4,4
									4,6
									4,8
									5,0
									5,2
									5,4
									5,6
									5,8
									6,0
									6,2
									6,4

$\beta=-0{,}1988$, что соответствует сечению пограничного слоя в точке отрыва, до $\beta=2{,}4$. Соответственно этому однопараметрическому решению были вычислены переводные коэффициенты $A(\beta)$ и $B(\beta)$ (94). Их значения помещены в табл. 16. В последнем столбце этой таблицы приводятся также значения функции $\zeta(\beta)$, необходимой для определения напряжения τ_w трения на поверхности тела

$$\tau_w=\frac{\mu U}{\delta}\zeta(\beta)=\sqrt{\frac{(m+1)\,c^3\mu\rho}{2}}\,x^{(3m-1)/2}\zeta(\beta)=\sqrt{\frac{c^3\mu\rho}{2-\beta}}\,x^{(2\beta-1)/(2-\beta)}\zeta(\beta). \quad (101)$$

Не будем останавливаться на рассмотрении общего характера полученного однопараметрического решения в зависимости от изменения параметра β. Отошлем интересующихся к специальным монографиям по теории ламинарного пограничного слоя[1]), где подробно описаны

Таблица 16

β	$A(\beta)$	$B(\beta)$	$\zeta(\beta)$	β	$A(\beta)$	$B(\beta)$	$\zeta(\beta)$
—0,1988	2,3588	0,5854	0,0000	0,0500	1,1417	0.4515	0,5311
—0,1950	2,1170	0,5814	0,0552	0,1000	1,0803	0,4355	0,5870
—0,1900	2,0068	0,5765	0,0857	0,2000	0,9842	0,4082	0,6867
—0,1800	1,8716	0,5677	0,1286	0,3000	0,9110	0,3857	0,7748
—0,1700	1,7789	0,5600	0,1621	0,4000	0,8526	0,3667	0,8544
—0,1600	1,7067	0,5522	0,1908	0,5000	0,8046	0,3503	0,9277
—0,1500	1,6470	0,5452	0,2164	0,6000	0,7640	0,3360	0,9958
—0,1400	1,5959	0,5386	0,2397	0,8000	0,6987	0,3118	1,1203
—0,1200	1,5113	0,5263	0,2818	1,00	0,6479	0,2923	1,2326
—0,1000	1,4427	0,5150	0,3193	1,20	0,607	0,276	1,336
—0,0500	1,3124	0,4905	0,4003	1,60	0,544	0,250	1,521
0,0000	1,2168	0,4696	0,4696	2,00	0,498	0,231	1,687

свойства однопараметрического и двухпараметрического решений в зависимости от выбора значений параметров. Там же можно найти решение для случая проницаемой стенки, сквозь которую вдувается или отсасывается жидкость с теми же физическими константами, что и жидкость, омывающая поверхность тела.

Степенное распределение скоростей на внешней границе пограничного слоя соответствует внешнему плоскому безвихревому обтеканию *клина* неограниченной длины, расположенного симметрично по отношению к набегающему однородному потоку[2]). Угол при вершине клина равен $[2m/(m+1)]\pi=\beta\pi$. Значения $m=0$, $\beta=0$ относятся к клину с нулевым углом при вершине, т. е. к *обтеканию бесконечно тонкой и длинной пластинки*, в полном соответствии с условиями в задаче Блазиуса, рассмотренной ранее в § 108. Значения параметров $m=1$, $\beta=1$ делают угол при вершине клина равным π, что приводит к пограничному слою на поверхности тела вблизи *лобовой критической точки*. Толщины пограничного слоя будут, как это следует из формул (99) для δ, δ^*, δ^{**}, в этой области *постоянными* и равными

$$\delta=\sqrt{\frac{\nu}{c}},\quad \delta^*=A(1)\sqrt{\frac{\nu}{c}}=0{,}648\sqrt{\frac{\nu}{c}},\quad \delta^{**}=B(1)\sqrt{\frac{\nu}{c}}=0{,}292\sqrt{\frac{\nu}{c}}, \quad (102)$$

[1]) Laminar boundary layers/Ed. by L. Rosenhead.— Oxford, 1963, p. 243—252, а также Evans H. L. Laminar boundary-layer theory — London: Addison-Wesley Publ. Comp., 1969.

[2]) См. ранее цитированные монографии под редакцией Розенхеда (с. 234) и Эванса (с. 52—60).

а напряжение трения τ_w [см. (101)] меняется вдоль потока по линейному закону

$$\tau_w = \zeta(1)\sqrt{\mu\rho c^3}\,x = 1{,}2326\sqrt{\mu\rho c^3}\,x. \qquad (103)$$

Заметим еще, что сходящемуся потоку во внутренней части клина со скоростью $U=-c/x$ (плоский конфузор) соответствует значение $m=-1$, а следовательно, $\beta=\infty$. Случай больших значений β подробно рассмотрен в монографии [1]), почти целиком посвященной описанию автомодельных плоских и пространственных изотермических и неизотермических движений в пограничных слоях. В этой монографии помещены таблицы, относящиеся к случаю $\beta \gg 1$.

Расходящийся поток внутри клина (плоский диффузор) возможен только при $\beta > -0{,}1988$; $m > -0{,}0904$, так как при этих предельных значениях β (см. табл. 16) $\zeta=0$, что соответствует *отрыву* потока от стенок диффузора и последующему попятному движению жидкости.

Общее автомодельное решение уравнения ламинарного *пристенного* пограничного слоя со *степенным* распределением скорости на внешней его границе было в дальнейшем расширено на область «свободных» пограничных слоев — струй и аэродинамических следов [2]), [3]), а изложенное в настоящем параграфе решение легло в основу *приближенного* метода, пригодного при *произвольном* распределении скорости на внешней границе пограничного слоя [4]).

Последний метод в свое время открыл путь к созданию различных других приближенных методов и до сих пор используется в инженерных расчетах. Его изложение дано в следующем параграфе, содержащем рассмотрение *приближенных* методов расчета пограничного слоя.

§ 112. Приближенные методы расчета ламинарных пограничных слоев. Интегральное соотношение Кармана. Методы Польгаузена и Кочина — Лойцянского

Широко распространенное привлечение для численных расчетов электронных вычислительных машин (ЭВМ) несколько снизило интерес к приближенным методам расчета. Однако по ряду обстоятельств: отсутствие достаточно мощных компьютеров на местах, малая наглядность выходящих из машины результатов и др., приближенные методы далеко еще не потеряли своего практического значения.

Появившиеся в двадцатых-тридцатых годах приближенные методы расчета ламинарных пограничных слоев идейно связаны с методами Ритца и Галеркина — те же полуинтуитивные профили скоростей, не связанные с точными решениями уравнения Прандтля, а удовлетворяющие лишь граничным условиям, установленным для этого уравнения, определение параметров семейств так называемых «конкурирующих» профилей на основании выводимых из уравнения Прандтля «интегральных соотношений».

С одним из них, наиболее употребительным соотношением Кармана, мы вскоре познакомимся, другие можно найти в специальных

---

[1]) Evans H. L Laminar boundary-layer theory.— London: Addison-Wesley Publ. Comp., 1969.

[2]) Stewartson K. Further solutions of the Falkner — Skan equation.— Proc. Camb. Phil. Soc., 1954, v. 50, p. 454—465; Stewartson K. Falkner — Skan equation for wakes — AIAA Journ, July 1964, v. 2, № 7.

[3]) Kennedy E D. Wake-like solutions of the laminar boundary layer equations.— AIAA Journ., 1964, v. 2, p. 225—231.

[4]) Кочин Н. Е., Лойцянский Л. Г. Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя.— Докл. АН СССР, 1942, т. 36, № 9.

руководствах[1]) и отдельных статьях[2]). В соответствии с методом Ритца применялись и интегральные соотношения, вытекающие из вариационных принципов механики[3]).

В конце тридцатых годов эти методы получили принципиальное улучшение. В качестве «конкурирующих» профилей стали применять точные решения уравнения Прандтля для частных заданий распределения скорости на внешней границе пограничного слоя. Первая попытка в этом направлении принадлежала Л. Хоуарту[4]), положившему в основу *точные* профили скоростей, соответствующие линейному «односкатному» распределению скоростей на внешней границе слоя, но четкое оформление этой идеи появилось у нас в стране и за рубежом только в начале сороковых годов, причем, по обстоятельствам военного времени, независимо друг от друга. По тем же обстоятельствам задержалось опубликование первой советской работы этого направления, содержавшей метод Кочина—Лойцянского[5]), в котором «конкурирующие» профили скоростей были взяты из точного автомодельного решения уравнения пограничного слоя при *степенном* распределении скорости на внешней его границе (§ 111).

Завершением развития методов этого направления явился опубликованный в 1965 г. метод «обобщенного подобия»[6]), получивший широкое распространение как в задачах разнообразных ламинарных пограничных слоев в несжимаемой жидкости, так и в потоках газов больших до- и сверхзвуковых скоростей (см. § 114 и 148), а в последнее время и для *турбулентных* пограничных слоев (§ 138).

В основу метода «обобщенного подобия» положен алгоритм построения последовательных приближенных решений, принципиально отличный и от методов Ритца—Галеркина, и от ранее указанных других методов. Заданное произвольное распределение скоростей на внешней границе пограничного слоя заменяется в первом приближении *линейным*, во втором — *квадратичным* и т. д. представлениями, осуществляющими в каждой точке совпадение *приближенного* распределения скорости на внешней границе с заданным по *уклону касательной*, *кривизне* и последующим «кривизнам». Известный факт преимущественного значения совпадения по уклону касательной и первой кривизне и относительно малого значения следующих по порядку кривизн, делает уже *второе* приближение вполне удовлетворительным, что подтверждают расчеты. Это говорит о *быстроте сходимости* метода «обобщенного подобия» (§§ 113 и 114). Каждое приближение приводит к своему уравнению, не зависящему от вида распределения скорости $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя для частных задач и поэтому называемому «универсальным». Универсальное уравнение для каждого приближения можно проинтегрировать раз навсегда, составив соответствующие таблицы. Для расчета отдельной конкретной задачи достаточно проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка или воспользоваться простой квадратурой.

---

[1]) Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II.— М.: Физматгиз, 1963, с. 556—566; см. также Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой.— М: Физматгиз, 1962, с. 92—113

[2]) Лойцянский Л. Г. Приближенный метод интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя в несжимаемом газе.— Прикл. мат. и мех., 1949, т. 13, вып. 5.

[3]) Лойцянский Л. Г. Интегральные методы теории пограничного слоя.— Прикл. мат. и мех., 1941, т. V, вып. 3, с. 453—470.

[4]) Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations.— Proc. of the Roy. Soc., ser. A, 1938, v. 164, № 919, p. 547.

[5]) Кочин Н. Е., Лойцянский Л. Г. Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя.— Докл. АН СССР, нов. серия, 1942, т. 36, № 9.

[6]) Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя.— Прикл. мат. и мех., 1965, т. 29, в. 4.

В основе приближенных методов теории ламинарного пограничного слоя лежит использование в той или другой форме интегрального соотношения Кармана, выражающего теорему *количеств движения* (теорему *импульсов*) в применении к потоку жидкости в области пограничного слоя.

Систему уравнений (11), пользуясь вторым из них, можно тождественно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2)+\frac{\partial}{\partial y}(uv)=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(Uu)+\frac{\partial}{\partial y}(Uv)=u\frac{dU}{dx},$$

после чего вычитанием по отдельности правых и левых частей этих уравнений получить

$$\frac{\partial}{\partial x}[u(U-u)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(U-u)]+(U-u)\frac{dU}{dx}=-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Производя почленное интегрирование по y от $y=0$ до $y=\infty$ либо δ, что соответствует представлению об асимптотическом стремлении $u\to U$ при $y\to\infty$ или понятию *конечности* толщины пограничного слоя ($u=U$ при $y=\delta$), получим

$$\int_0^{\infty,\delta}\frac{\partial}{\partial x}[u(U-u)]\,dy+v(U-u)\Big|_{y=0}^{y=\infty}+\frac{dU}{dx}\int_0^{\infty,\delta}(U-u)\,dy=-\nu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}^{y=\infty,\delta}.$$

Используем граничные условия (12) или соответствующие предположению о конечности толщины пограничного слоя условия $u=U$, $\partial u/\partial y=0$ при $y=\delta$.

Предполагая существование интегралов

$$\int_0^{\infty,\delta}u(U-u)\,dy,\quad\int_0^{\infty,\delta}(U-u)\,dy$$

и допустимость перемены порядка дифференцирования и интегрирования в первом интеграле левой части предыдущего равенства, получим

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\infty,\delta}u(U-u)\,dy+\frac{dU}{dx}\int_0^{\infty,\delta}(U-u)\,dy=\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{104}$$

Вводя следующие обобщения интегральных толщин пограничного слоя (41), (42) на случай *произвольной* скорости $U(x)$ на внешней его границе

$$\delta^*=\int_0^{\infty,\delta}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy,\quad \delta^{**}=\int_0^{\infty,\delta}\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy, \tag{105}$$

сначала получим из (104)

$$\frac{d}{dx}(U^2\delta^{**})+U\frac{dU}{dx}\delta^*=\frac{\tau_w}{\rho U^2},$$

а затем, раскрывая производную в левой части, придем к общепринятому выражению интегрального соотношения Кармана ($U'=dU/dx$) [1])

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{U'}{U}(2\delta^{**}+\delta^*)=\frac{\tau_w}{\rho U^2}, \tag{106}$$

[1]) Kármán Th. Über laminare und turbulente Reibung.— Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1921, Bd. 1.

либо

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{U'\delta^{**}}{U}(2+H)=\frac{\tau_w}{\rho U^2};\quad H=\frac{\delta^*}{\delta^{**}}. \tag{107}$$

В правых частях уравнений (104), (106), (107) использовано обозначение *напряжения трения* на твердой поверхности обтекаемого тела

$$\tau_w=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{108}$$

Наиболее обоснованным из известных в сороковых годах приближенных методов расчета ламинарного пограничного слоя был цитированный в конце предыдущего параграфа метод Кочина — Лойцянского. В этом методе общие автомодельные решения уравнений пристенного стационарного пограничного слоя (см. § 111) использованы применительно к неавтомодельным задачам в предположении, что параметры β и β меняются от сечения к сечению. Ограничимся однопараметрическим подходом, связав между собой β и $\bar{\beta}$ соотношением (96), приводящим уравнение (89) к виду (97). Располагая, таким образом, только параметром β, сможем применять имеющиеся таблицы безразмерной скорости $u/U=\Phi(\xi, \beta)$ и функций $\zeta(\beta)$, $A(\beta)$ и $B(\beta)$, приведенные в предыдущем параграфе.

Сущность метода Кочина — Лойцянского заключается в разыскании неизвестной функции $\beta(x)=U'(x)z(x)=U'\delta^2/\nu$, а тем самым и $\delta(x)$, так как, имея табличное определение безразмерной скорости $u/U=\Phi(\xi, \beta)$ (см. табл. 15) и найдя $\delta(x)$, можно будет получить решение конкретной задачи с заданным распределением $U(x)$ в форме

$$\frac{u(x, y)}{U(x)}=\Phi\left[\frac{y}{\delta(x)}, \frac{U'(x)\delta^2(x)}{\nu}\right].$$

На первый взгляд для определения $\delta(x)$ можно воспользоваться произвольно принятым условием (96) и, согласно (87), получить уравнение

$$U'z+\frac{1}{2}Uz'=1,$$

интегралом которого будет

$$z=\frac{\delta^2}{\nu}=\frac{2}{U^2}\int_0^x U\,dx. \tag{109}$$

Однако это решение, связанное только с заданием скорости $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя и не отражающее влияния профилей скорости в сечениях пограничного слоя, должно быть откинуто и заменено следующим, основанным на применении интегрального соотношения Кармана в любом из видов (104), (106) или (107).

Условимся в дальнейшем использовать в качестве характерной толщины пограничного слоя интегральную «толщину потери импульса» δ^{**} (42). Это упрощает расчетную сторону как рассматриваемого сейчас метода, так и всех дальнейших. При таком выборе толщины пограничного слоя роль параметров β и $\bar{\beta}$ будут играть величины

$$f=U'z^{**}=\frac{U'\delta^{**2}}{\nu},\quad \bar{f}=Uz^{**\prime}=\frac{2U\delta^{**}\delta^{**\prime}}{\nu} \tag{110}$$

Таблица 17

f	$\zeta(f)$	$H(f)$	$F(f)$	f	$\zeta(f)$	$H(f)$	$F(f)$
−0,0681	0,0000	4,03	0,821	0,02	0,257	2,48	0,336
−0,06	0,064	3,35	0,772	0,03	0,274	2,43	0,283
−0,05	0,098	3,12	0,715	0,04	0,291	2,38	0,232
−0,04	0,130	2,96	0,658	0,05	0,307	2,34	0,180
−0,03	0,155	2,84	0,602	0,06	0,323	2,30	0,130
−0,02	0,178	2,74	0,548	0,07	0,338	2,26	0,078
−0,01	0,200	2,66	0,495	0,08	0,352	2,23	0,028
0,00	0,221	2,59	0,441	0,09	0,366	2,20	−0,023
0,01	0,240	2,53	0,388	0,10	0,380	2,18	−0,074

Умножим обе части уравнения (107) на $U\delta^{**}/\nu$; тогда после простых преобразований оно перепишется в одной из следующих форм:

$$\frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} F(f) + \frac{U''}{U'} f, \tag{111}$$

$$\bar{f} = U \frac{dz^{**}}{dx} = F(f), \tag{112}$$

где, кроме (110), введены еще обозначения

$$F(f) = 2\{\zeta(f) - [2 + H(f)] f\},$$
$$\zeta(f) = \left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})}\right]_{y=0} = \ddot{\Phi}(0, f). \tag{113}$$

Выражения $\zeta(f)$, $H(f)$ и $F(f)$ получим, воспользовавшись равенствами (99), (100) и (113). Составим следующую *параметрическую* систему соотношений (параметр β):

$$f = \frac{U'\delta^{**2}}{\nu} = \frac{U'\delta^2}{\nu}\left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^2 = \beta B^2(\beta), \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{A(\beta)}{B(\beta)},$$
$$\frac{\tau_w \delta^{**}}{\mu U} = \ddot{\Phi}(0, \beta) B(\beta) = \zeta(\beta) B(\beta), \tag{114}$$
$$F(\beta) = -4\beta B^2(\beta) - 2\beta A(\beta) B(\beta) + 2\ddot{\Phi}(0, \beta) B(\beta).$$

Задаваясь различными β, определим по табл. 16 значение $A(\beta)$, $B(\beta)$, $\ddot{\Phi}(0, \beta)$, затем по (114) $f(\beta)$, $H(\beta)$, $\zeta(\beta)$ и $F(\beta)$, после чего, исключая β, найдем искомые $\zeta(f) = \tau_w\delta^{**}/(\mu U)$, $H(f)$ и $F(f)$. Числовые значения этих величин помещены в табл. 17, по которой построены графики $\zeta(f)$, $H(f)$, $F(f)$ (рис. 193).

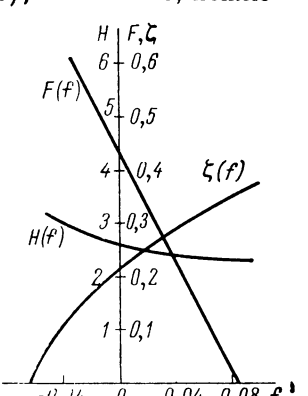


Рис. 193

Как видно из графика функции $F(f)$, ее можно заменить линейным представлением

$$F(f) \approx a - bf, \quad a \approx 0{,}45, \quad b \approx 5{,}35, \tag{115}$$

причем отклонение от линейного закона (115) не превзойдет значения 0,03.

Уравнение (111) при этом переходит в линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dx} = a\frac{U'}{U} + \left(\frac{U''}{U'} - b\frac{U'}{U}\right) f,$$

интегралом которого будет

$$f = \frac{aU'}{U^b} \int_0^x U^{b-1}(x)\,dx + C\frac{U'}{U^b}.$$

Из условия конечности f при $x=0$, $U=0$ следует $C=0$, и искомое решение примет окончательный вид

$$f = \frac{aU'}{U^b} \int_0^x U^{b-1}(x)\,dx, \tag{116}$$

причем параметр f в начальной точке ($x=0$) равен

$$f(0) = \left[\frac{aU'(x)\,U^{b-1}(x)}{bU^{b-1}(x)\,U'(x)}\right]_{x=0} = \frac{a}{b}.$$

Пользование *общей* для всех задач табл. 17 и относящимися к данному распределению $U(x)$ в *конкретной* задаче значениями $f(x)$ по (116) полностью решает вопрос о *приближенном* расчете пограничного слоя по изложенному методу. В точке отрыва S, где, согласно (13), выполняется условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{U}{\delta^{**}}\left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})}\right]_{y=0} = \frac{U}{\delta^{**}}\zeta(f) = 0, \quad \text{т. е. } \zeta(f) = 0,$$

параметр f_s, как это непосредственно следует из табл. 17, равен $f_s = -0{,}0681$.

Судя по проведенным расчетам и сравнению с точными решениями (см. далее), данный метод приводит к *заниженным* значениям напряжения трения на поверхности обтекаемого тела и, сообразно с этим, к сравнительно с другими методами *меньшим* величинам абсциссы точки *отрыва*. Мы остановимся на этом вопросе в следующем параграфе, где будут получены результаты, основанные на более совершенных приближенных методах.

Изложенный приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя основывался на использовании однопараметрического семейства профилей скорости, представлявших точные автомодельные решения уравнений Прандтля (11). Такой подход или несколько более общий, заключавшийся в выборе «конкурирующих» однопараметрических семейств профилей скорости среди других, известных к тому времени точных решений, возник только в самом конце тридцатых годов. Ранее для этой цели использовали искусственно образованные аналитические семейства профилей, схожих по форме с действительными профилями и совпадающих с ними на внешней ($y=\delta$) и внутренней ($y=0$) границах пограничного слоя. Произвол в выборе такого рода *конкурирующих* наборов профилей скорости породил большое число различных приближенных методов.

Основную идею этих методов покажем на примере исторически ранее всех появившегося и вызвавшего многочисленные подражания метода К. Польгаузена[1]). Будучи опубликована одновременно и в том же журнале, что и ранее процитированная статья Кармана, статья Польгаузена ставила целью иллюстрацию применения интегрального соотношения Кармана.

---

[1]) Pohlhausen K. Zur näherungsweisen Integration der Differenzialgleichungen der laminaren Grenzschichten.— Zeitsch. f. angew. Math. u. Mech., 1921, Bd. 1.

Польгаузен предложил принять за однопараметрическое семейство профилей продольных скоростей в сечениях пограничного слоя семейство многочленов четвертой степени

$$\frac{u}{U}=\frac{12+\lambda}{6}\frac{y}{\delta}-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2-\frac{4-\lambda}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3+\frac{6-\lambda}{6}\left(\frac{y}{\delta}\right)^4\equiv$$

$$\equiv 2\xi-2\xi^3+\xi^4+\frac{1}{6}\lambda\xi(1-\xi)^3 \qquad (117)$$

с параметром семейства, равным $\lambda=U'\delta^2/\nu$, где δ — принятая конечной толщина пограничного слоя, а $\xi=y/\delta$. Коэффициенты многочлена (117) были выбраны согласно граничным условиям

$$\begin{aligned} &u=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{UU'}{\nu} \text{ при } y=0,\\ &u=U,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=\delta. \end{aligned} \qquad (118)$$

Первое из этих условий совпадает с аналогичным условием (12), второе получено из уравнения (11) путем применения его к твердой поверхности ($y=0$, $u=v=0$). Третье выражает равенство продольных скоростей в пограничном слое и внешнем потоке в точке их сращивания на конечном расстоянии $y=\delta$ от твердой поверхности, вместо соответствующего асимптотического условия (12). Наконец, четвертое и пятое выражают плавность перехода от u к U в точке сращивания ($y=\delta$).

Последние условия и число их заключают в себе произвол, который, как показали последующие исследования [1]), чувствительно отражается на методе. Так, например, вытекающее из уравнения (11) дополнительное условие $(\partial^3 u/\partial y^3)_{y=0}=0$, введенное вместо последнего условия в системе (118), значительно улучшает точность метода Польгаузена, лишний раз подчеркивая интуитивный характер этого метода.

С оперативной стороны метод Польгаузена во многом аналогичен методу Кочина — Лойцянского. Так же, но на основании профилей скорости в сечениях слоя (117), составляются функции

$$\begin{aligned} A(\lambda)&=\frac{\delta^*}{\delta}=\int_0^1\left(1-\frac{u}{U}\right)d\xi=\frac{3}{10}-\frac{\lambda}{120},\\ B(\lambda)&=\frac{\delta^{**}}{\delta}=\int_0^1\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)d\xi=\frac{37}{315}-\frac{\lambda}{945}-\frac{\lambda^2}{9072},\\ \zeta(\lambda)&=\left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)}\right]_{y=0}=2+\frac{\lambda}{6}. \end{aligned} \qquad (119)$$

Подстановка их в интегральное соотношение Кармана приводит к сложному нелинейному уравнению первого порядка, которое Польгаузен решал графическим методом *изоклин*. Определенное из этого уравнения $\delta(x)$ подставлялось в предыдущие равенства, что и давало решение задачи.

Переход от $\lambda=U'\delta^2/\nu$ к уже использованному в настоящем параграфе и принятому в дальнейшем параметру $f=U'\delta^{**2}/\nu$ позволяет свести решение к интегрированию уравнения (111) при принятом обозначении (113) для функции $F(f)$. В табл. 18 приведены пересчитанные значения

---

[1]) Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя.— М.; Л.: Гостехиздат, 1941, с. 170—189. См. также более позднюю монографию того же автора: Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962, с. 96—98.

Таблица 18

λ	f	$\zeta(f)$	$H(f)$	$F(f)$	λ	f	$\zeta(f)$	$H(f)$	$F(f)$
8	0,0831	0,340	2,29	—0,033	—2	—0,0284	0,199	2,66	0,662
7,052	0,0770	0,332	2,31	0	—3	—0,0429	0,179	2,72	0,764
7	0,0767	0,331	2,31	0,002	—4	—0,0575	0,160	2,78	0,870
6	6,0689	0,321	2,33	0,046	—5	—0,0720	0,140	2,85	0,978
5	0,0599	0,310	2,36	0,098	—6	—0,0862	0,119	2,92	1,085
4	0,0497	0,297	2,39	0,158	—7	—0,0999	0,100	3,00	1,198
3	0,0385	0,283	2,43	0,226	—8	—0,1130	0,079	3,08	1,308
2	0,0264	0,268	2,47	0,300	—9	—0,1254	0,059	3,18	1,417
1	0,0135	0,252	2,51	0,382	—10	—0,1369	0,039	3,28	1,523
0	0	0,235	2,55	0,470	—11	—0,1474	0,019	3,38	1,625
—1	—0,0140	0,217	2,60	0,563	—12	—0,1567	0	3,50	1,724

функций $\zeta(f)$, $H(f)$, $F(f)$, соответствующие методу Польгаузена. Так же, как и раньше, можно, но не столь точно, произвести замену $F(f)$ ее линейным приближением (115) и получить решение в форме (116). Значения постоянных a и b отличны от приведенных ранее для метода Кочина — Лойцянского. Их приближенные значения таковы: $a=0{,}47$, $b=6{,}10$.

Как показывают расчеты, метод Польгаузена, в отличие от метода Кочина — Лойцянского, приводит к *завышенным* значениям напряжения трения на поверхности тела (τ_w) и соответственно к завышенному значению модуля параметра точки отрыва, т. е. к *затянутому* по сравнению с действительным положению точки отрыва.

Описание других приближенных методов расчета ламинарных пограничных слоев можно найти в ранее уже цитированной монографии, изданной под редакцией Л. Розенхеда.

§ 113. Обобщение аффинного подобия на неавтомодельные течения в пограничных слоях. Метод обобщенного подобия

Соотношения аффинного подобия неоднократно фигурировали в предыдущем изложении. В частности, в случае пограничного слоя на продольно обтекаемой пластинке (§ 108) было использовано следующее выражение условия аффинного подобия профилей скорости в сечениях пограничного слоя ($\xi=y/\delta^{**}$):

$$\frac{u}{U_\infty}=\varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right)=\varphi(\xi),$$

где U_∞ и δ^{**} представляли собой масштабы скоростей и ординат точек в области пограничного слоя. Предполагая теперь перейти к рассмотрению *приближенного* метода расчета *любого, не автомодельного*, пограничного слоя, с *произвольным*, а не только *степенным* распределением (§ 111) скорости на внешней его границе, расширим определение аффинного подобия в сторону возможной его зависимости от произвольного числа параметров — будем их называть *параметрами обобщенного аффинного подобия.*

Иными словами, будем рассматривать предыдущее соотношение *обычного* аффинного подобия в форме «аффинного подобия с параметрами»

$$\frac{u}{U}=\varphi(\xi, \chi_1, \chi_2, \ldots),$$

где χ_k ($k=1, 2, \ldots$) — некоторые функции x, а U — произвольная функция x.

Если считать, что входящие в предыдущее выражение величины χ_k могут принимать любые независимые значения, то это выражение представит *многопараметрическое* семейство аффинных преобразований в обычном их смысле. Полагая χ_k непрерывными функциями x, включим их наряду с φ и ξ в общее число «переменных подобия» и, опуская слово «аффинное», назовем такое подобие «обобщенным», а переменные φ, ξ, $\chi_1, \chi_2, \ldots$ — «переменными обобщенного подобия».

Чтобы использовать принятое определение «обобщенного подобия» и «переменных обобщенного подобия» для построения приближенного метода интегрирования уравнения Прандтля (15), предложим следующий эвристический прием.

Примем в качестве «нулевого» приближения обычное аффинноподобное выражение функции тока ψ

$$\psi = U\delta^{**}\Phi(\xi), \tag{120}$$

где U и δ^{**} — произвольные значения скорости на внешней границе пограничного слоя и толщины потери импульса, а $\xi = y/\delta^{**}$. Подставляя, как уже это делалось в предыдущих параграфах, выражение ψ по (120) в уравнение Прандтля (15), придем в результате к уравнению (штрих — производная по x; z, как и прежде, равно δ^{**2}/ν)

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3} + \left(U'z + \frac{1}{2}Uz'\right)\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + U'z\left[1 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right] = 0.$$

При этом, учитывая, что выражение (120) в общем случае не является решением уравнения (15), получим «невязки» принятого допущения (120) в форме функций от x

$$f_1(x) = U'z, \quad \bar{f}_1(x) = Uz'. \tag{121}$$

Наличие в предыдущем дифференциальном уравнении наряду с ξ переменной x по (121) заставляет для выражений производных от Φ принять символы *частных* производных.

Включив в число «переменных обобщенного подобия» указанные только что «невязки» f_1 и $\bar{f}_1$, будем теперь искать решение уравнения Прандтля (15) в форме

$$\psi = U\delta^{**}\Phi(\xi, f_1, \bar{f}_1).$$

Подставим это выражение вновь в уравнение (15). Заметим, что производные, входящие в уравнение (15), приобретут при этом вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\nu}{\delta^{**}}\left[\left(f_1 + \frac{1}{2}\bar{f}\right)\Phi - \frac{1}{2}\bar{f}_1\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + Uz\left(\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}f_1' + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{f}_1}\bar{f}_1'\right)\right],$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\nu}{\delta^{**2}}\left[f_1\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \frac{1}{2}\bar{f}_1\xi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + Uz\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial f_1}f_1' + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\bar{f}_1}\bar{f}_1'\right)\right],$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = U\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{U}{\delta^{**}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}, \quad \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = \frac{U}{\delta^{**2}}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3}.$$

Исключим в правых частях первых двух равенств выражения Uzf_1' и $Uz\bar{f}_1'$, полученные непосредственным дифференцированием по x параметров f_1 и $\bar{f}_1$ (121). Найдем соотношения

$$Uzf_1' = U'zUz' + UU''z^2 = f_1\bar{f}_1 + UU''z^2,$$

$$Uz\bar{f}_1' = U'zUz' + U^2zz'' = f_1\bar{f}_1 + U^2zz''.$$

Вводя следующие по порядку за f_1 и $\bar{f}_1$ новые *переменные* обобщенного подобия

$$f_2 = UU''z^2, \quad \bar{f}_2 = U^2zz'',$$

перепишем предыдущие равенства в виде

$$Uzf_1' = f_1\bar{f}_1 + f_2 = \theta_1,$$
$$Uz\bar{f}_1' = f_1\bar{f}_1 + \bar{f}_2 = \bar{\theta}_1. \tag{122}$$

Производя подстановку полученных выражений в уравнение (15), придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3} + \left(f_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_1\right)\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + f_1\left[1 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right] = \theta_1\frac{D(\Phi, \partial\Phi/\partial\xi)}{D(\xi, f_1)} + \bar{\theta}_1\frac{D(\Phi, \partial\Phi/\partial\xi)}{D(\xi, \bar{f}_1)},$$

где использованы обычные обозначения якобианов

$$\frac{D(\Phi, \partial\Phi/\partial\xi)}{D(\xi, f_1)} = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial f_1} - \frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2},$$
$$\frac{D(\Phi, \partial\Phi/\partial\xi)}{D(\xi, \bar{f}_1)} = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\bar{f}_1} - \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{f}_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}.$$

Развивая дальше тот же прием, будем искать решение уравнения Прандтля (15) в форме

$$\psi = U\delta^{**}\Phi(\xi, f_1, \bar{f}_1, f_2, \bar{f}_2, \ldots) \tag{123}$$

с независимыми переменными ξ, f_k, $\bar{f}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, определенными равенствами $(z=\delta^{**2}/\nu)$

$$\xi = \frac{y}{\delta^{**}}, \quad f_k = U^{k-1}\frac{d^kU}{dx^k}z^k, \quad \bar{f}_k = z^{k-1}\frac{d^kz}{dx^k}U^k \tag{124}$$

и соотношениями

$$Uzf_k' = [(k-1)f_1 + k\bar{f}_1]f_k + f_{k+1} = \theta_k,$$
$$Uz\bar{f}_k' = [(k-1)\bar{f}_1 + kf_1]\bar{f}_k + \bar{f}_{k+1} = \bar{\theta}_k. \tag{125}$$

Введенные переменные f_k, $\bar{f}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ и их функции θ_k и $\bar{\theta}_k$ обладают следующими свойствами:

1°. Непосредственно убедимся, что удовлетворяется условие *симметрии*

$$f_k \rightleftarrows \bar{f}_k, \quad \theta_k \rightleftarrows \bar{\theta}_k, \quad \text{если} \quad U \rightleftarrows z.$$

2°. Согласно оценке (6) масштаба поперечных длин, получим следующее выражение для порядка величины и размерности z:

$$z = \frac{\delta^{**2}}{\nu} = O\left(\frac{L^2}{\mathrm{Re}\,\nu}\right) = O\left(\frac{L}{U}\right),$$
$$[z] = \left[\frac{L}{U}\right] = [T].$$

Таким образом, величина z имеет *размерность времени*. Отсюда следует, что размерности параметров f_k и $\bar{f}_k$ определяются равенствами

$$[f_k] = \left[\frac{U^{k-1}U}{L^k}T^k\right] = \left[\left(\frac{UT}{L}\right)^k\right] = [1],$$
$$[\bar{f}_k] = \left[\frac{T^{k-1}T}{L^k}\left(\frac{L}{T}\right)^k\right] = [1], \tag{126}$$

что говорит о *безразмерности* переменных f_k и $\bar{f}_k$; *независимость их от рейнольдсова* числа вытекает из независимости от него величины z.

Переходя теперь к составлению преобразованного к переменным обобщенного подобия Φ, ξ, f_k, $\bar{f}_k$ ($k=1, 2, \ldots$) уравнения (15), подставим в это уравнение значения ψ и ее производных в переменных обобщенного подобия. То же сделаем и с граничными условиями.

В результате несложных выкладок обнаружим, что левая часть этого уравнения сохранит вид, полученный ею уже на первых ступенях изложенного приема, а к правой части добавится сумма якобианов, учитывающих влияние следующих за f_1 и $\bar{f}_1$ переменных f_k и $\bar{f}_k$ ($k=2, 3, \ldots$). Искомое уравнение в своем наиболее общем виде, еще не упрощенном в результате последующих допущений, будет таким:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3}+\left(f_1+\frac{1}{2}\bar{f}_1\right)\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+f_1\left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\theta_k\frac{D(\Phi,\ \partial\Phi/\partial\xi)}{D(\xi,\ f_k)}+\bar{\theta}_k\frac{D(\Phi,\ \partial\Phi/\partial\xi)}{D(\xi,\ \bar{f}_k)}\right]. \qquad (127)$$

К этому уравнению присоединяются граничные условия

$$\Phi=\dot{\Phi}=0 \text{ при } \xi=0, \quad \dot{\Phi}\to 1 \text{ при } \xi\to\infty,$$

$$\Phi=\Phi_0(\xi) \quad \text{при} \quad f_k=f_{k0}, \quad \bar{f}_k=\bar{f}_{k0} \quad (k=1, 2, \ldots). \qquad (128)$$

Последнее условие, отмеченное индексом 0, выражает тот факт, что искомая интегральная кривая должна выходить из точки, соответствующей некоторому автомодельному решению. Заметим, что общему автомодельному решению, изложенному в § 111, будут соответствовать зависящие от показателя степени m в законе скорости $U=cx^m$ следующие значения параметров f_{k0} и $\bar{f}_{k0}$:

$$f_{k0}=\frac{2^k}{(m+1)^k}m(m-1)\ldots(m-k+1)B^{2k}\left(\frac{2m}{m+1}\right),$$

$$\bar{f}_{k0}=(-1)^k\frac{2^k}{(m+1)^k}(m-1)\ldots(m+k-2)B^{2k}\left(\frac{2m}{m+1}\right), \qquad (129)$$

где $B\left(\frac{2m}{m+1}\right)=B(\beta)$ — функция, приведенная в табл. 16. Как и должно быть в автомодельном решении, параметры f_{k0} и $\bar{f}_{k0}$ не зависят от x.

Уравнение (127) значительно превосходит по сложности уравнение Прандтля (15), однако обладает по сравнению с ним существенными преимуществами. В отличие от уравнения (15), которое должно решаться для каждого конкретного задания $U(x)$ отдельно, уравнение (127) *не содержит явно* $U(x)$ и, следовательно, может быть *проинтегрировано один раз навсегда*, независимо от того, какая задача предлагается для решения. Это позволяет назвать уравнение (127) *универсальным*. В результате численного интегрирования универсального уравнения (127) с «универсальными» граничными условиями (128) составляются таблицы всех характеристик пограничных слоев, в дальнейшем уже непосредственно используемые на *первом этапе* расчета любого пограничного слоя. Решение задачи (127), (128) ценно еще и тем, что оно дает многопараметрическое семейство профилей безразмерной скорости, полученных рациональным образом из уравнений пограничного слоя (15), а не выдвигаемых из тех или других *интуитивных* соображений.

Заслуживает внимания также и тот факт, что *единственное*, объединяющее обширный круг задач теории пограничного слоя решение этого универсального уравнения выражает некоторые *общие закономерности*, связывающие характерные для пограничного слоя величины с такими величинами, как, например, уклон кривой внешней скорости $U(x)$ и ее кривизна. Аналогичные закономерности могут быть выявлены на основе

подобного подхода и для температурных или концентрационных пограничных слоев.

Изложенный метод основан на использовании *бесконечного* процесса последовательных построений решений универсального уравнения (127) при граничных условиях (128) и нуждается, конечно, в математическом доказательстве сходимости этого процесса, к настоящему времени еще не найденном [1]).

С этой оговоркой можно признать, в известном роде, *эквивалентность* универсального уравнения (127) и уравнения Прандтля (15), поскольку первое из них было получено из второго преобразованием *физических* переменных x, y, ψ (довольствуемся *стационарным* случаем) к переменным обобщенного подобия ξ, f_1, $\bar{f}_1$, f_2, $\bar{f}_2$, ..., Φ.

Бесконечное число переменных обобщенного подобия в «универсальной» постановке задачи теории ламинарного пограничного слоя практически сводится к небольшому их числу, оправдываемому подтвержденной расчетами *быстрой сходимостью* процесса. Следующая отсюда *приближенность* метода обобщенного подобия обусловлена при современной технике машинного счета вынужденно небольшим числом переменных. Это заставляет упрощать универсальное уравнение, используя те или иные допущения. К ним прежде всего относится «урезание» числа переменных, затем «локализация» их по данному переменному, заключающаяся в *отбрасывании производных по этой переменной.*

Переходя к конкретному упрощению универсального уравнения (127), откажемся, подобно тому как это имело место в общем случае автомодельных решений (§ 111), от совокупности переменных $\bar{f}_k$ ($k=2, \ldots$) и $\bar{\theta}_k$ ($k=1, 2, \ldots$), сохранив лишь переменную $\bar{f}_1$, явно входящую в левую часть уравнения (127), и выражения θ_k ($k=1, 2, \ldots$) (125) в правой его части. Значение такого упрощения вскоре выяснится. Сохраненную переменную $\bar{f}_1$ выразим через основные переменные f_k ($k=1, 2, \ldots$), воспользовавшись для этого интегральным соотношением Кармана (§ 112). Будем иметь следующее выражение $\bar{f}_1$ [см. (112) и (113)] (точка над буквой означает производную по ξ):

$$\bar{f}_1 = 2\{\zeta(f_1, \ldots) - [2 + H(f_1, \ldots)] f_1\}, \tag{130}$$

где положено

$$\zeta(f_1, \ldots) = \left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})}\right]_{y=0} = \ddot{\Phi}(0, f_1, \ldots),$$

$$H(f_1, \ldots) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\xi = \int_0^\infty [1 - \dot{\Phi}(\xi, f_1, \ldots)]\, d\xi. \tag{131}$$

Уравнение (130) можно было бы вывести интегрированием обеих частей уравнения (127) от $\xi=0$ до $\xi=\infty$ подобно тому, как это делалось в § 112 для уравнения (11). Для этого следовало бы только заметить, что появляющиеся при выводе интегралы равны (за толщину слоя при-

---

[1]) Изложению метода обобщенного подобия в разных его аспектах посвящен ряд работ, среди которых отметим следующие: Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя.— Прикл. мат. и мех., 1965, т. 29, № 1; и того же автора: Универсальные уравнения теории ламинарного пограничного слоя и параметрические методы их интегрирования.— Труды ЛПИ, 1967, № 280; Обобщенно-подобные решения уравнений пограничного слоя.—Сборник, посвященный шестидесятилетнему юбилею Л. И. Седова, М.: Наука, 1969, с. 301; Методы подобия в теории интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя.— Сборник «Вопросы математической физики», посвященный семидесятипятилетнему юбилею Г. А. Гринберга, Л.: 1976, Наука, с. 237—254. Ссылки на статьи, содержащие разнообразные применения метода обобщенного подобия, приводятся далее.

нято δ^{**}; $\xi = y/\delta^{**}$)

$$\int_0^\infty \ddot{\Phi}\, d\xi = (\dot{\Phi})_{\xi=0}^{\xi=\infty} = -\dot{\Phi}\,[0,\ (f_k)] = -\zeta\,[(f_k)],$$

$$\int_0^\infty \Phi\ddot{\Phi}\, d\xi = \int_0^\infty \Phi \frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{\Phi}-1)\, d\xi = \Phi(\dot{\Phi}-1)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} + \int_0^\infty \dot{\Phi}(1-\dot{\Phi})\, d\xi =$$

$$= \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)\frac{dy}{\delta^{**}} = 1,$$

$$\int_0^\infty (1-\dot{\Phi}^2)\, d\xi = \int_0^\infty (1-\dot{\Phi})\, d\xi + \int_0^\infty \dot{\Phi}(1-\dot{\Phi})\, d\xi =$$

$$= \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)\frac{dy}{\delta^{**}} + \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)\frac{dy}{\delta^{**}} = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} + 1 = H + 1.$$

Интегралы от якобианов, как это следует из асимптотических (при $\xi\to\infty$) формул ($\sim$ — знак асимптотического равенства)

$$\Phi \equiv \xi - \int_0^\xi (1-\dot{\Phi})\, d\xi = \xi - \int_0^\infty (1-\dot{\Phi})\, d\xi + \int_\xi^\infty (1-\dot{\Phi})\, d\xi \sim \xi - \frac{\delta^*}{\delta^{**}},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f_k} \sim -\frac{\partial}{\partial f_k}\left(\frac{\delta^*}{\delta^{**}}\right),$$

равны нулю; действительно,

$$\int_0^\infty \frac{D(\Phi,\ \partial\Phi/\partial\xi)}{D(\xi,\ f_k)}\, d\xi = \int_0^\infty \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial f_k} - \frac{\partial\Phi}{\partial f_k}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right) d\xi =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial f_k}\int_0^\infty \left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right] d\xi - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial f_k}\right) d\xi =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial f_k}\left(\frac{\delta^*}{\delta^{**}}+1\right) + \frac{\partial}{\partial f_k}\left(\frac{\delta^*}{\delta^{**}}\right) = 0,$$

что и приводит к уравнению (130).

При таком «урезании» переменных $\bar{f}_k$ ($k=2,\ \ldots$) и задании $\bar{f}_1$ по (130) универсальное уравнение (127) и граничные условия к нему принимают вид

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3} + \left(f_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_1\right)\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + f_1\left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right] = \sum_{k=1}^\infty \theta_k \frac{D(\Phi,\ \partial\Phi/\partial\xi)}{D(\xi,\ f_k)}, \tag{132}$$

$$\Phi = 0,\ \dot{\Phi} = 0 \text{ при } \xi = 0,$$

$$\dot{\Phi} \to 1 \qquad \text{при } \xi \to \infty,$$

$$\Phi = \Phi_*(\xi) \quad \text{при } f_1 = f_2 = \ldots = 0,$$

где подразумевается ради краткости записи, что $\bar{f}_1$ повсюду заменено своим выражением (130).

Граничное условие в последней строчке для простоты отнесено к случаю продольного обтекания пластинки (§ 108), но с аргументом $\xi = y/\delta^{**}$, отвечающим уравнению

$$\ddot{\Phi}_* + \zeta_*\Phi_*\ddot{\Phi}_* = \ddot{\Phi}_* + \ddot{\Phi}_*(0)\,\Phi_*\ddot{\Phi}_* = 0 \tag{133}$$

которое простым аффинным преобразованием — заменой Φ_* на Φ_*/ζ_*, ξ — на ξ/ζ_* — сведется к уравнению (34).

Можно заметить, что уравнение (132) при замене $\bar{f}_1$ по формуле (130), содержащей $\dot{\Phi}(0, f_1, \ldots)$ и интеграл $\int_0^\infty [1-\dot{\Phi}(\xi, f_1, \ldots)]\,d\xi$, приобретает *интегро-дифференциальную* форму, лишь незначительно усложняющую численное интегрирование на ЭВМ.

Проводя указанные два упрощения: «урезание» и «локализацию», будем иметь следующие приближения:

1°. *Локально-однопараметрическое* приближение *с одной* переменной f_1 и локализацией по этой переменной, сводящейся к отбрасыванию правой части уравнения (132).

Приближение основывается на интегрировании уравнения (верхние индексы при Φ и $\bar{f}_1$ — номер приближения)

$$\frac{\partial^3\Phi^{(0)}}{\partial\xi^3}+\left(f_1+\frac{1}{2}\bar{f}_1^{(0)}\right)\Phi^{(0)}\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial\xi^2}+f_1\left[1-\left(\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\xi}\right)^2\right]=0,$$

$$\Phi^{(0)}=0,\quad \dot{\Phi}^{(0)}=0 \text{ при } \xi=0, \tag{134}$$

$$\dot{\Phi}^{(0)}\to 1 \text{ при } \xi\to\infty,$$

$$\Phi^{(0)}=\Phi_*(\xi) \text{ при } f_1=0,$$

причем принято

$$\bar{f}_1^{(0)}=2\{\zeta^{(0)}(f_1)-[2+H^{(0)}(f_1)]f_1\}, \tag{135}$$

$$\zeta^{(0)}(f_1)=\ddot{\Phi}^{(0)}(0, f_1),\quad H^{(0)}(f_1)=\int_0^\infty [1-\dot{\Phi}^{(0)}(\xi, f_1)]\,d\xi.$$

Это *локально-однопараметрическое* приближение соответствует методу Кочина — Лойцянского.

2°. *Полное однопараметрическое* приближение (ξ, f_1). Ему соответствует уравнение

$$\frac{\partial^3\Phi^{(1)}}{\partial\xi^3}+\left(f_1+\frac{1}{2}\bar{f}_1^{(1)}\right)\Phi^{(1)}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi^2}+f_1\left[1-\left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\xi}\right)^2\right]=$$

$$=f_1\bar{f}_1^{(1)}\left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi\,\partial f_1}-\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial f_1}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi^2}\right),$$

$$\Phi^{(1)}=0,\quad \dot{\Phi}^{(1)}=0 \text{ при } \xi=0;\quad \dot{\Phi}^{(1)}\to 1 \text{ при } \xi\to\infty,$$

$$\Phi^{(1)}=\Phi_*(\xi) \text{ при } f_1=0; \tag{136}$$

$$\bar{f}_1^{(1)}=2\{\zeta^{(1)}(f_1)-[2+H^{(1)}(f_1)]f_1\},$$

$$\zeta^{(1)}(f_1)=\ddot{\Phi}^{(1)}(0, f_1),\quad H^{(1)}(f_1)=\int_0^\infty [1-\dot{\Phi}^{(1)}(\xi, f_1)]\,d\xi.$$

3°. *Полное двухпараметрическое* приближение с уравнением

$$\frac{\partial^3\Phi^{(2)}}{\partial\xi^3}+\left(f_1+\frac{1}{2}\bar{f}_1^{(2)}\right)\Phi^{(2)}\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial\xi^2}+f_1\left[1-\left(\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial\xi}\right)^2\right]=$$

$$=(f_1\bar{f}_1^{(2)}+f_2)\left(\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial\xi\,\partial f_1}-\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial f_1}\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial\xi^2}\right)+$$

$$+(f_1+2\bar{f}_1^{(2)})f_2\left(\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial\xi\,\partial f_2}-\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial f_2}\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial\xi^2}\right), \tag{137}$$

$$\Phi^{(2)}=0,\quad \dot{\Phi}^{(2)}=0 \text{ при } \xi=0;\quad \dot{\Phi}^{(2)}\to 1 \text{ при } \xi\to\infty,$$

$$\Phi^{(2)}=\Phi_0(\xi) \text{ при } f_1=0,\ f_2=0;$$

$$\bar{f}_1{}^{(2)}=2\{\zeta^{(2)}(f_1, f_2)-[2+H^{(2)}(f_1, f_2)]f_1\},$$

$$\zeta^{(2)}(f_1, f_2)=\ddot{\Phi}^{2)}(0, f_1, f_2),\quad H^{(2)}(f_1, f_2)=\int_0^\infty [1-\dot{\Phi}^{(2)}(\xi, f_1, f_2)]\,d\xi.$$

Указанным приближениям можно дать следующее пояснение. Полное *однопараметрическое* приближение строго отвечало бы предположению о *линейном* характере изменения $U(x)$. Численное решение уравнения Прандтля (15) для «односкатных» профилей $U^n(x)$ было выполнено Хоуартом[1]).

Однопараметрическое приближение в решении универсального уравнения (127) предполагает учет одной переменной f_1, которая по своему определению учитывает влияние уклона *касательной* к профилю внешних скоростей $U(x)$. Знак f_1 определяет *конфузорный* ($f_1>0$) или *диффузорный* ($f_1<0$) характер области пограничного слоя, в которой ведется расчет.

Двухпараметрическое приближение, которое включает наряду с f_1 также и переменную $f_2=UU''z^2$, позволяет, очевидно, учесть еще *выпуклость* или *вогнутость* кривой $U(x)$ и ее местную *кривизну*. Кроме того, как вскоре будет показано, входящая в оба приближения величина толщины потери импульса позволяет интегрально оценить влияние *предыстории* потока на характеристики пограничного слоя.

Численное интегрирование уравнения (137) было выполнено Е. Ф. Озеровой и Л. М. Симуни[2]), в статье которых можно найти подробное изложение численного метода.

Приводим табл. 19 и 20 двух наиболее существенных для расчета пограничного слоя функций $\zeta^{(2)}(f_1, f_2)$ и $\bar{f}_1{}^{(2)}(f_1, f_2)$. Первая из них фигурирует в определении напряжения трения τ_w на поверхности тела, согласно формуле

$$\tau_w^{(2)}=\frac{\mu U}{\delta^{**}}\zeta^{(2)}(f_1, f_2). \tag{138}$$

Вторая служит для определения зависимости $\delta^{**}(x)$, а тем самым и $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Этот второй *заключительный этап* расчета пограничного слоя основан на интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (111) или (112), которые в случае обобщенного подобия во втором приближении перепишутся ($f=f_1^{(2)}$, $F=\bar{f}_1^{(2)}$) в форме

$$\frac{df_1^{(2)}}{dx}=\frac{U'}{U}\bar{f}_1^{(2)}[f_1^{(2)}, f_2^{(2)}]+\frac{U''}{U'}f_1^{(2)}, \tag{139}$$

$$U\frac{dz^{(2)}}{dx}=\bar{f}_1^{(2)}[f_1^{(2)}, f_2^{(2)}], \tag{140}$$

где

$$f_1^{(2)}=U'z^{(2)}=\frac{U'[\delta^{**(2)}]^2}{\nu},\quad f_2^{(2)}=UU''[z^{(2)}]^2=UU''\left\{\frac{[\delta^{**(2)}]^2}{\nu}\right\}^2.$$

Методы решения нелинейного уравнения первого порядка (140) относительно величины $z^{(2)}=[\delta^{**(2)}]^2/\nu$ изложены в следующем параграфе.

---

[1]) Howarth L. On the solution of the boundary layer equations.— London, Proc. Roy. Soc., 1938, A919, p. 164.

[2]) Озерова Е. Ф., Симуни Л. М. Численное решение уравнений двухпараметрической теории пограничного слоя.— Труды ЛПИ, Аэротермодинамика, 1970, № 313, с. 44—53.

Таблица 19. **Значения функции** $\zeta^{(2)}(f_1, f_2)$

f_2 \ f_1	−0,13	−0,1225	−0,115	−0,11	−0,105	−0,1	−0,095	−0,09	−0,08	−0,06	−0,04	−0,02	0	0,02	0,04	0,06	0,08
−0,25	−0,0012	0,0354	0,0608	0,0751	0,0882	0,1004	0,1118	0,1227	0,1430	0,1787	0,2101	0,2380	0,2639	0,2806	—	—	—
−0,20	—	0,0049	0,0396	0,0570	0,0721	0,0858	0,0985	0,1104	0,1323	0,1704	0,2037	0,2333	0,2608	0,2787	—	—	—
−0,15	—	—	0,0037	0,0293	0,0488	0,0654	0,0802	0,0937	0,1183	0,1598	0,1956	0,2274	0,2569	0,2764	—	—	—
−0,12	—	—	—	0,0035	0,0296	0,0489	0,0655	0,0804	0,1069	0,1514	0,1895	0,2230	0,2538	0,2745	—	—	—
−0,10	—	—	—	—	0,0143	0,0368	0,0548	0,0705	0,0982	0,1444	0,1842	0,2194	0,2514	0,2734	—	—	—
−0,08	—	—	—	—	−0,0090	0,0234	0,0437	0,0606	0,0894	0,1364	0,1776	0,2147	0,2487	0,2721	—	—	—
−0,06	—	—	—	—	—	0,0056	0,0314	0,0501	0,0806	0,1284	0,1699	0,2083	0,2448	0,2704	—	—	—
−0,04	—	—	—	—	—	—	0,0172	0,0391	0,0714	0,1204	0,1620	0,2002	0,2386	0,2687	—	—	—
−0,02	—	—	—	—	—	—	−0,0093	0,0243	0,0614	0,1129	0,1548	0,1926	0,2303	0,2616	0,2923	—	—
0	—	—	—	—	—	—	—	−0,0051	0,0597	0,1036	0,1471	0,1855	0,2208	0,2545	0,2870	0,3190	0,3511
0,02	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0572	0,1031	0,1457	0,1836	0,2187	0,2521	0,2853	0,3131	0,3429
0,04	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0471	0,1026	0,1442	0,1817	0,2166	0,2498	0,2822	0,3127	0,3415
0,06	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0360	0,0934	0,1371	0,1754	0,2103	0,2431	0,2744	0,3045	—
0,08	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0166	0,0849	0,1306	0,1695	0,2046	0,2375	0,2687	0,2986	—

Таблица 20. **Значения функции** $\overline{f_1}^{(2)}(f_1, f_2)$

f_2 \ f_1	−0,13	−0,1225	−0,115	−0,11	−0,105	−0,1	−0,095	−0,09	−0,08	−0,06	−0,04	−0,02	0	0,02	0,04	0,06	0,08
−0,25	1,396	1,337	1,2801	1,2436	1,2080	1,1730	1,1387	1,1049	1,038	0,9083	0,7805	0,6534	0,5277	0,3896	—	—	—
−0,20	—	1,329	1,2704	1,2329	1,1965	1,1611	1,1265	1,0925	1,026	0,8966	0,7702	0,6450	0,5217	0,3826	—	—	—
−0,15	—	—	1,2615	1,2219	1,1838	1,1471	1,1117	1,0772	1,010	0,8818	0,7571	0,6342	0,5139	0,3775	—	—	—
−0,12	—	—	—	1,2156	1,1766	1,1385	1,1020	1,0767	0,9990	0,8703	0,7471	0,6262	0,5075	0,3733	—	—	—
−0,10	—	—	—	—	1,1722	1,1331	1,0957	1,0596	0,9908	0,8611	0,7387	0,6196	0,5028	0,3701	—	—	—
−0,08	—	—	—	—	1,1650	1,1281	1,0897	1,0529	0,9828	0,8511	0,7284	0,6111	0,4974	0,3680	—	—	—
−0,06	—	—	—	—	—	1,1224	1,0840	1,0463	0,9748	0,8411	0,7165	0,5997	0,4895	0,3642	—	—	—
−0,04	—	—	—	—	—	—	1,0783	1,0401	0,9669	0,8308	0,7042	0,5853	0,4771	0,3574	0,2794	—	—
−0,02	—	—	—	—	—	—	1,0711	1,0333	0,9591	0,8216	0,6932	0,5717	0,4606	0,3451	0,2363	—	—
0	—	—	—	—	—	—	—	1,0266	0,9500	0,8110	0,6817	0,5591	0,4416	0,3295	0,2220	0,1196	0,0235
0,02	—	—	—	—	—	—	—	1,0023	0,9485	0,8073	0,6774	0,5547	0,4374	0,3251	0,2210	0,1064	0,0024
0,04	—	—	—	—	—	—	—	—	0,9420	0,8037	0,6732	0,5503	0,4332	0,3211	0,2152	0,0974	—
0,06	—	—	—	—	—	—	—	—	0,9356	0,7932	0,6627	0,5391	0,4207	0,3064	0,1957	0,0884	—
0,08	—	—	—	—	—	—	—	—	0,9282	0,7839	0,6530	0,5287	0,4093	0,2939	0,1820	0,0732	—

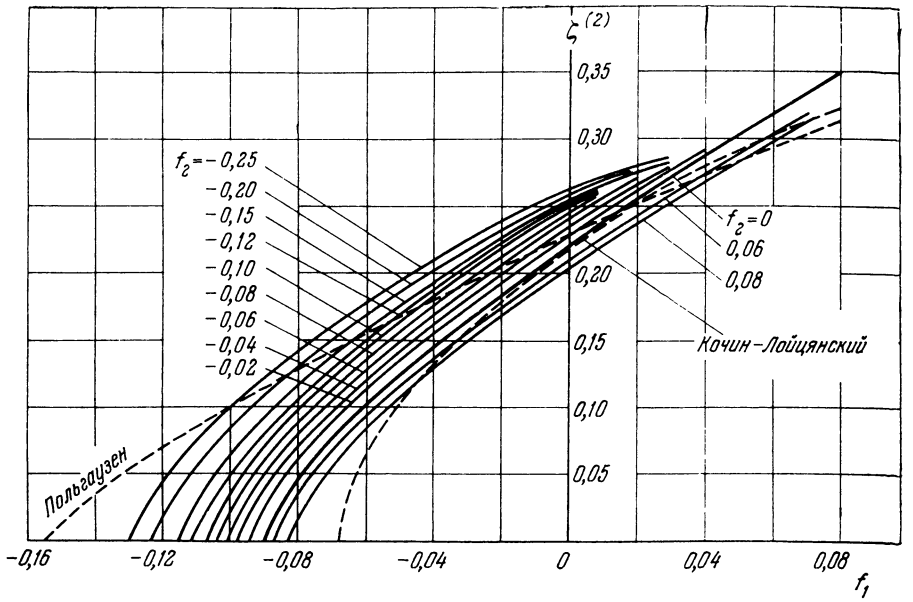


Рис. 194

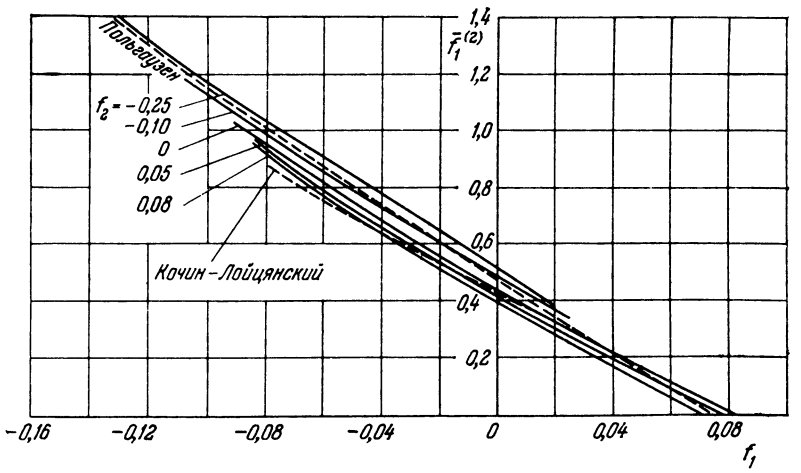


Рис. 195

Интеграл этого уравнения содержит произвольную постоянную, для определения которой требуется задать в начальном ($x = x_0$) сечении некоторую характеристику профиля скоростей; таковой, естественно, является $z_0^{(2)} = [\delta_0^{**(2)}]^2/\nu$. Эта величина заключает в себе весьма ограниченную информацию о начальном профиле скоростей. Можно было бы увеличить объем этой информации, повысив порядок уравнения, для чего достаточно сохранить переменные $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$, ... в правой части уравнения (140), содержащие производные от $z^{(2)}$ порядка выше второго. Однако это чрезмерно усложнило бы практические расчеты, чем и объясняется принятый нами отказ от учета переменных $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$, ...

Рассмотрение графиков $\zeta^{(2)}$ и $\bar{f}_1^{(2)}$ (рис. 194 и 195), составленных по табл. 19 и 20 в форме семейства кривых $\zeta^{(2)}(f_1)$ и $\bar{f}_1^{(2)}(f_1)$, зависящих от параметра f_2, позволяет сделать некоторые общие выводы:

1. Распределения «приведенного» трения $\zeta^{(2)}(f_1, f_2)$ сильно зависят от параметра f_2. В частности, значения f_{1s} в точке отрыва ($\zeta^{(2)}=0$) значительно отличаются друг от друга в зависимости от значения f_2.

2. Кривые распределения $\bar{f}_1^{(2)}(f_1, f_2)$ группируются в узкую полосу, что позволяет приближенно положить

$$\bar{f}_1^{(2)}(f_1, f_2) = a - bf_1,$$

принимая обе величины a и b за постоянные либо считая a функцией f_2, а b — постоянной, равной приблизительно 6. Использование линейности $\bar{f}_1^{(2)}(f_1, f_2)$ приведет, как мы уже знаем, к квадратуре (116). Уравнения (139) или (140) могут также легко интегрироваться по табличным значениям $\bar{f}_1^{(2)}(f_1, f_2)$ на малых ЭВМ и даже на ручных калькуляторах.

3. Результаты *первого* приближения заключены в приведенных таблицах при $f_2=0$. Кривые $\zeta^{(1)}(f_1)$ и $\bar{f}_1^{(1)}(f_1)$ показаны на тех же рис. 194 и 195, что и кривые второго приближения, между которыми они располагаются.

4. Соответствующие методу Кочина — Лойцянского кривые $\zeta(f)$ и $F(f)=\bar{f}_1(f)$ показаны на тех же рисунках штриховыми линиями. Этот метод дает слишком *ранний* отрыв ($\zeta=0$) при $f_s=-0{,}0681$.

5. Метод Польгаузена обособлен от содержания метода обобщенного подобия. Соответствующая ему верхняя штриховая кривая демонстрирует *затягивание* условия отрыва ($f_s=-0{,}1567$).

6. В *конфузорных* областях пограничных слоев ($f_1>0$) кривые $\zeta^{(2)}(f_1, f_2)$ сближаются, что говорит о возможности пользоваться в этой области *первым* приближением ($f_2=0$). В *диффузорных* областях ($f_1<0$) кривые $\zeta^{(2)}(f_1, f_2)$ расходятся, причем можно заметить, что везде, кроме окрестности точки отрыва ($\zeta=0$) пограничного слоя, метод Кочина — Лойцянского дает результаты, близкие к кривым второго приближения метода обобщенного подобия при $f_2>0$ [кривая $U(x)$ обращена при этом к оси Ox своей выпуклостью], а кривая метода Польгаузена, напротив, при тех же условиях ближе к кривым метода обобщенного подобия при $f_2<0$ [кривая $U(x)$ обращена к оси Ox вогнутостью].

Метод обобщенного подобия при наличии табл. 19 и 20 используется без особого труда в практических расчетах пограничных слоев. Следует отметить, что в крупных исследовательских организациях, располагающих мощными ЭВМ, имеются *стандартные программы* расчета ламинарного пограничного слоя, которые позволяют обходиться без приближенных методов вообще и метода обобщенного подобия в частности. Конечно, при этом затрудняются возможности установления общих закономерностей влияния формы кривой $U(x)$ (уклона касательной, кривизны кривой) на характеристики пограничного слоя.

§ 114. Примеры применения метода обобщенного подобия

Установление *сходимости* последовательных приближений при расчете пограничного слоя по методу обобщенного подобия, а при наличии сходимости еще и оценка ее *быстроты* представляют собой очень сложную математическую задачу, пока еще не решенную. Остается предполагать, что *двухпараметрическое* приближение, учитывающее влияние не только уклона касательных к кривой распределения скорости на внешней границе пограничного слоя $U(x)$, но и кривизны этой кривой, должно приводить к достаточно точным результатам. Излагаемый далее пример иллюстрирует справедливость этого предположения.

Отсутствие строгой оценки быстроты сходимости приближений заставляет встать на путь сравнения решений, полученных в первом и во

втором приближениях по методу обобщенного подобия, с имеющимися достаточно точными численными решениями уравнения Прандтля. Примером такого численного решения могут служить опубликованные Терриллом[1]) результаты численного расчета плоского стационарного пограничного слоя на поверхности *поперечно* обтекаемого круглого цилиндра при *теоретическом* законе распределения скорости по обводу цилиндра (§ 50). Отсылая за подробным описанием методики численного интегрирования к указанной статье, отметим, что решение вычислялось в безразмерном виде, причем продольные длины были отнесены к радиусу цилиндра a, продольные скорости в сечениях пограничного слоя — к скорости набегающего потока U_∞, поперечные длины и скорости соответственно к величинам $a/\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}$, $U_\infty/\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}$, где $\mathrm{Re}_\infty = U_\infty a/\nu$. Безразмерной абсциссой, отсчитанной от лобовой критической точки, служил угол x, выраженный в радианах.

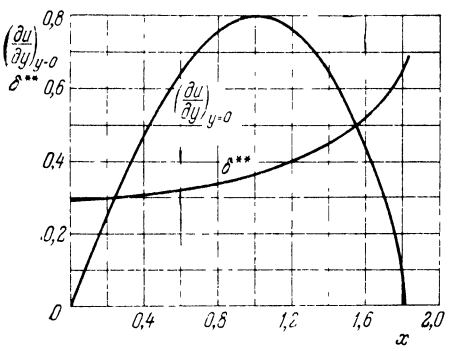


Рис. 196

Приведем сводный график двух представляющих наибольший интерес величин: $\delta^{**}(x)$ и $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ (рис. 196). Как видно из рисунка, безразмерная толщина потери импульса $\delta^{**}(x)$ монотонно возрастает от некоторого начального значения в лобовой критической точке, равного примерно 0,29. Это совпадает со значением $B(\beta)$, определенным по табл. 16 при $m=\beta=1$ и $c=2$, что соответствует закону распределения скоростей на внешней границе пограничного слоя вблизи лобовой критической точки $U=cx$.

Безразмерное напряжение трения растет от нулевого значения при $x=0$ и достигает своего максимального значения в точке $x=1$, что соответствует 57°18′. Затем напряжение трения убывает до нулевого значения при $x_s=1{,}82$, или, в градусах, $x_s^\circ=104°30'$. Эта точка и является точкой отрыва S пограничного слоя с поверхности круглого цилиндра. В этом расчете, напомним еще раз, не учитывается обратное влияние пограничного слоя на внешний поток, т. е. то значительное искажение, которое отрыв вносит в теоретическое потенциальное обтекание.

Пример Террилла, как точное решение, принимается нами за своеобразный эталон (тестовый расчет), с которым сравниваются значения величин, рассчитанных по двухпараметрическому приближению метода обобщенного подобия. Приближенная кривая $\delta^{**}(x)$ оказалась практически совпадающей с точной; максимальное отклонение было вблизи точки отрыва и не превосходило 3% от точного. Кривая *однопараметрического* приближения для величины приведенного трения $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ заметно отклоняется от точной кривой Террилла (рис. 197).

Расчет по двухпараметрическому приближению приводит к величине трения, почти полностью *совпадающей с точным значением*, исключая небольшую область в непосредственной близости к точке отрыва (едва заметное отклонение показано штрихами; на рис. 198 эта область показана в увеличенном масштабе).

Снять ограничение на число используемых параметров можно было бы, применяя вместо непосредственного интегрирования уравнения (132) разложение функции $\Phi[\xi, (f_k)]$ в степенные ряды по параметрам (f_k), однако сходимость таких рядов ограничивается малыми значения-

[1]) **Terrill** R. M. Laminar boundary-layer flow near separation with and without suction — **Phil.** Trans., 1960, A253, p. 55—100.

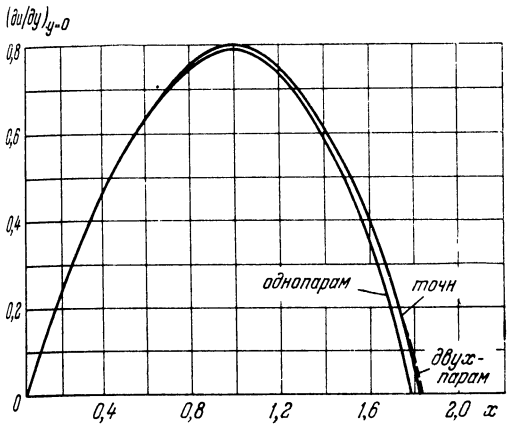


Рис. 197

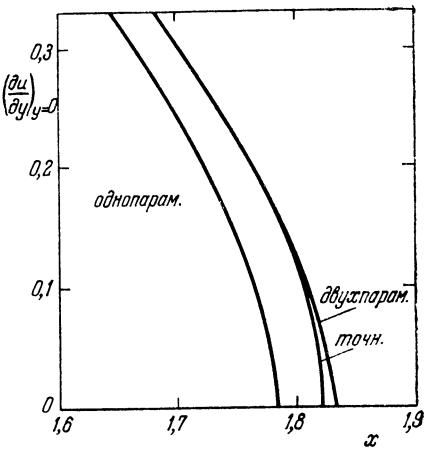


Рис. 198

ми параметров. Как можно судить по рис. 199, малость параметров f_2 и f_3, рассчитанных для примера Террилла, обеспечивается только вдалеке от точки отрыва, которая является особой точкой уравнения (132). Нулевое значение $f_3(x)$ почти во всем интервале x, исключая ближайшую окрестность точки отрыва, по-видимому, является признаком, что можно довольствоваться *вторым* приближением как достаточно точным решением.

Как показала практика расчетов, для определения $\delta^{**}(x)$, а затем f_1, f_2, f_3 можно вполне довольствоваться *первым* приближением, так как относительная погрешность в разыскании δ^{**}, быстро растущей на диффузорном участке, мала. Влияние второго параметра $f_2(x)$ надо учитывать только при вычислении напряжения трения τ_w через $\zeta^{(2)}(f_1, f_2)$ вблизи положения точки отрыва. В этом случае можно полагать: $a=0{,}4408$, $b=5{,}714$.

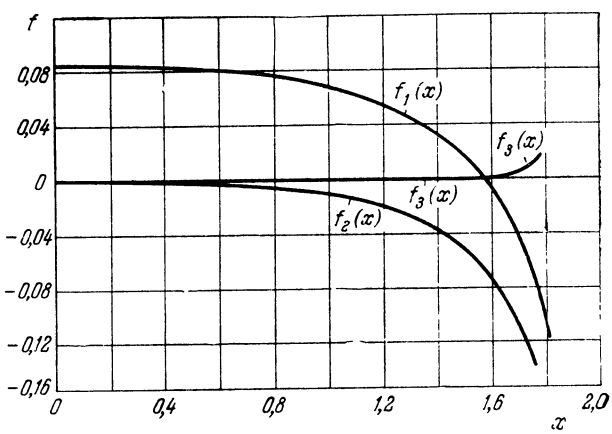


Рис. 199

При более строгом подходе можно учесть погрешность ε, вносимую использованием упрощенного представления

$$\bar{f}_1 = a(f_2) - bf_1 + \varepsilon.$$

Интегрируя формально при этом допущении равенство (140), получим

$$U^b z(x) = \int_{x_0}^{x} U^{b-1}(t)\{a[f_2(t)] + \varepsilon[f_1(t), f_2(t)]\}\,dt + U^b(x_0)\,z(x_0), \qquad (141)$$

где $z(x_0)$ определяется либо через заданное наперед значение $\delta^{**}(x_0) = \delta_0^{**}$, либо через значение z_0 в лобовой критической точке обтекаемого тела ($x=0$, $U=0$).

Значение z_0 может быть определено из условия конечности производной dz/dx при $x=0$, т. е. из уравнения (§ 112)

$$\bar{f}_1^{(2)}(f_{10}, f_{20}) = 0,$$

которое при заданном поведении $U(x)=cx$ вблизи точки $x=0$ сводится в однопараметрическом приближении к уравнению с одной переменной и имеет корень

$$f_{10}=0{,}0854, \quad z_0=\frac{\delta_0^{**2}}{\nu}=\frac{f_{10}}{U_0'}=\frac{0{,}0854}{c},$$

где c зависит от формы носка обтекаемого профиля.

Уравнение (141) можно решить последовательными приближениями вида

$$U^b(x_i)\,z(x_i)=U^b(x_{i-1})\,z(x_{i-1})+$$
$$+\{a[f_2(x_{i-1})]+\varepsilon[f_1(x_{i-1}), f_2(x_{i-1})]\}\int_{x_{i-1}}^{x_i} U^{b-1}(t)\,dt,$$

если весь интервал (x_0, x) разбить на мелкие интервалы с узлами в точках x_i, а $f_2(x)$ и $\varepsilon(x)$ заменить ступенчатым представлением. Такого рода вычисление «шаг за шагом» легко проводится.

Величины ζ, H и $\bar{f}_1$ в функции от f_1, f_2, f_3, ... могут быть представлены [1]) степенными рядами

$$\zeta=0{,}2204+1{,}7350f_1-2{,}4188f_1^2-0{,}2992f_2+$$
$$+18{,}234f_1^3-0{,}1653f_1f_2+0{,}0937f_3-\cdots,$$
$$H=2{,}5919-5{,}4282f_1+21{,}914f_1^2+1{,}4741f_2-$$
$$-163{,}06f_1^3-4{,}8076f_1f_2-0{,}5061f_3+\cdots,$$
$$\bar{f}_1=0{,}4408-5{,}7139f_1+6{,}0189f_1^2-0{,}5984f_2-$$
$$-7{,}3611f_1^3-3{,}2753f_1f_2-1{,}0123f_3+\cdots,$$

использование которых на практике ограничено их радиусами сходимости, определяемыми непосредственными вычислениями. Точка отрыва является *особой* точкой, при приближении к которой быстрота сходимости этих рядов резко падает.

Среди разнообразных применений метода обобщенного подобия в теории ламинарного пограничного слоя остановимся в настоящем параграфе на двух пристенных слоях: на проницаемой поверхности (отсос или сдув жидкости с твердой поверхности) и *магнитогидродинамическом* (МГД) пограничном слое в потоке электропроводной жидкости.

Подробное изложение теории ламинарных пограничных слоев на *проницаемых* поверхностях (вдув и отсос той же, что и в набегающем потоке, жидкости или вдув жидкости с иными свойствами) приведено в специальных монографиях по теории пограничного слоя [2]).

Метод обобщенного подобия к задачам ламинарного пограничного слоя на проницаемой поверхности был впервые применен Чаном [3]), со-

---

[1]) Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя.— Прикл. мат. и мех., 1965, т. XXIX, № 1.

[2]) Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя/Пер. с нем.,— М.: Наука, 1969, с. 359—386, а также неоднократно ранее цитированный мемуар: Laminar boundary layers/ed. by Rosenhead L.— Oxford: Clarendon Press, 1963, p. 339—348.

[3]) Chan Y. Y. Loitsianski's method for boundary layers with suction and injection.— AIAA Journ., 1969, v. 7, № 3, p. 562, 563.

ставившим универсальное уравнение и использовавшим для его решения метод разложения решения в ряд по степеням параметров, относительно которого были только что сделаны критические замечания. Численное решение универсального уравнения в простейших приближениях на ЭВЦМ для случая проницаемой поверхности было выполнено на кафедре гидроаэродинамики ЛПИ имени М. И. Калинина А. Л. Лесниковым[1]) и Л. Г. Шишкиной[2]).

Уравнения ламинарного пограничного слоя на проницаемой поверхности имеют тот же вид (11) или (15), что и на непроницаемой. Различие сказывается лишь на первом граничном условии на поверхности тела. Если обозначить через $v_0(x)$ заданную скорость, с которой жидкость с теми же физическими константами ρ, μ, ν, что и в набегающем потоке, проходит через твердую поверхность [$v_0>0$ при вводе (вдуве) жидкости, $v_0<0$ — при ее отсосе] в нормальном к ней направлении, то первая строка граничных условий для уравнения (11) будет, в отличие от (12), иметь вид

$$u=0, \quad v=v_0 \text{ при } y=0.$$

Вводя обозначение для переменной в этом случае вдоль поверхности тела функции тока $\psi(x, 0)=\psi_0(x)$, изменим граничные условия на поверхности тела ($y=0$) для уравнения (15) на следующие (штрих, как и раньше, обозначает производную по x):

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\psi_0'=-v_0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \text{ при } y=0. \tag{142}$$

Можно сохранить старые граничные условия (15), если ввести новую функцию тока $\psi^*(x, y)$, связанную с $\psi(x, y)$ равенством

$$\psi(x, y)=\psi_0(x)+\psi^*(x, y); \quad \psi^*(x, 0)=0. \tag{143}$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2}-\psi_0'\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2}=UU'+\nu\frac{\partial^3\psi^*}{\partial y^3},\\ \psi^*=0, \quad \frac{\partial\psi^*}{\partial y}=0 \text{ при } y=0,\\ \frac{\partial\psi^*}{\partial y}\to U(x) \text{ при } y\to\infty,\\ \frac{\partial\psi^*}{\partial y}=u_0(y) \text{ при } x=x_0\end{gathered} \tag{144}$$

с дополнительным по сравнению с (15) слагаемым

$$-\psi_0'\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2}=v_0\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2}$$

в левой части уравнения (144).

Попытка решения этого уравнения в аффинноподобной форме

$$\psi^*(x, y)=U(x)\,\delta^{**}(x)\,\Phi^*\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right)=U(x)\,\delta^{**}(x)\,\Phi^*(\xi)$$

приведет, аналогично тому, как это имело место в § 111, к уравнению

$$\ddot{\Phi}^*+\left(f+\frac{1}{2}\bar{f}\right)\Phi^*\ddot{\Phi}^*+f(1-\dot{\Phi}^{*2})+\lambda\ddot{\Phi}^*=0, \tag{145}$$

---

[1]) Лесников А. Л. Ламинарный пограничный слой на проницаемой поверхности.— Инж.-физ. журн.. 1972, № 5.

[2]) Шишкина Л. Г. Двухпараметрическое решение уравнений ламинарного пограничного слоя на проницаемой поверхности.— Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1973, № 6.

где, наряду с прежними параметрами $f=U'z=U'\delta^{**2}/\nu$, $\bar{f}=Uz'$, появляется новый «параметр вдува», равный

$$\lambda(x)=-\frac{v_0\delta^{**}}{\nu}=\frac{\psi_0'\delta^{**}}{\nu}. \tag{146}$$

Повторяя алгоритм, принятый в § 113 для вывода уравнения пограничного слоя в переменных обобщенного подобия для непроницаемой поверхности, введем преобразование

$$\psi^*(x,y)=U(x)\delta^{**}(x)\Phi^*[\xi;\ (f_k),\ (\bar{f}_k),\ (\lambda_k)],$$
$$f_k=U^{k-1}\frac{d^kU}{dx^k}z^k,\quad \bar{f}_k=z^{k-1}\frac{d^kz}{dx^k}U^k, \tag{147}$$
$$\lambda_k=-U^{k-1}\frac{d^{k-1}v_0}{dx^{k-1}}\frac{z^{k-1/2}}{\nu^{1/2}}=U^{k-1}\frac{d^k\psi_0}{dx^k}\frac{z^{k-1/2}}{\nu^{1/2}}.$$

Тогда придем к следующему универсальному уравнению движения вязкой жидкости в пограничном слое на *проницаемой* поверхности:

$$\frac{\partial^3\Phi^*}{\partial\xi^3}+\left(f_1+\frac{1}{2}\bar{f}_1\right)\Phi^*\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}+f_1\left[1-\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi}\right)^2\right]+\lambda_1\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\theta_k\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi\,\partial f_k}-\frac{\partial\Phi^*}{\partial f_k}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}\right)+\bar{\theta}_k\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi\,\partial\bar{f}_k}-\frac{\partial\Phi^*}{\partial\bar{f}_k}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\Lambda_k\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi\,\partial\lambda_k}-\frac{\partial\Phi^*}{\partial\lambda_k}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}\right)\right], \tag{148}$$

где введены старые обозначения (125) для θ_k и $\bar{\theta}_k$ и новое для Λ_k:

$$\Lambda_k=\left[(k-1)f_1+\left(\frac{2k-1}{2}\right)\bar{f}_1\right]\lambda_k+\lambda_{k+1}, \tag{149}$$

причем при выводе уравнения (148) использованы соотношения

$$Uzf_k'=[(k-1)f_1+k\bar{f}_1]f_k+f_{k+1}=\theta_k,$$
$$Uz\bar{f}_k'=[(k-1)\bar{f}_1+kf_1]\bar{f}_k+\bar{f}_{k+1}=\bar{\theta}_k, \tag{150}$$
$$Uz\lambda_k'=\left[(k-1)f_1+\left(\frac{2k-1}{2}\right)\bar{f}_1\right]\lambda_k+\lambda_{k+1}=\Lambda_k.$$

Интегральное соотношение, выводимое аналогичным изложенному в § 113 приемом интегрирования обеих частей уравнения (148) по ξ от $\xi=0$ до $\xi=\infty$, приведется к виду

$$\bar{f}_1=2[\zeta-(2+H)f_1-\lambda_1], \tag{151}$$

отличающемуся от (130) наличием последнего члена в квадратной скобке в правой части (151).

Довольствуясь, как и в предыдущем параграфе, локализацией по всем параметрам, кроме $f_1=f$ и $\lambda_1=\lambda$, и урезанием по параметрам, по которым была проведена локализация, получим универсальное двухпараметрическое уравнение

$$\frac{\partial^3\Phi^*}{\partial\xi^3}+\left(f+\frac{1}{2}\bar{f}\right)\Phi^*\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}+f\left[1-\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi}\right)^2\right]+\lambda\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}=$$
$$=f\bar{f}\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial f\,\partial\xi}-\frac{\partial\Phi^*}{\partial f}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}\right)+\bar{f}\lambda\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi\,\partial\lambda}-\frac{\partial\Phi^*}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}\right); \tag{152}$$
$$\Phi^*=\frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi}=0\ \text{при}\ \xi=0,\quad \frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi}\to 1\ \text{при}\ \xi\to\infty,$$
$$\Phi^*=\Phi_0^*(\xi)\ \text{при}\ f=\lambda=0.$$

Уравнение это было проинтегрировано на ЭВМ Л. Г. Шишкиной. Приведенные в только что цитированной работе графики зависимости $\zeta(f, \lambda)$ и $\bar{f}(f, \lambda)$ показаны на рис. 200 и 201.

Отчетливо видно влияние *отсоса* ($\lambda>0$) на *затягивание* отрыва пограничного слоя. Вдув ($\lambda<0$) со скоростью, нормальной к поверхности, наоборот, *предваряет* отрыв, но способствует *переходу* ламинарного движения в турбулентное, что также приводит к *затягиванию* положения точки отрыва.

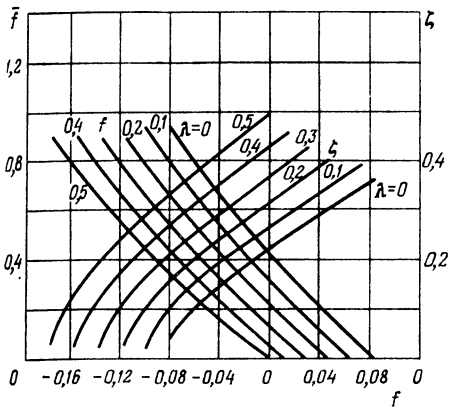


Рис. 200

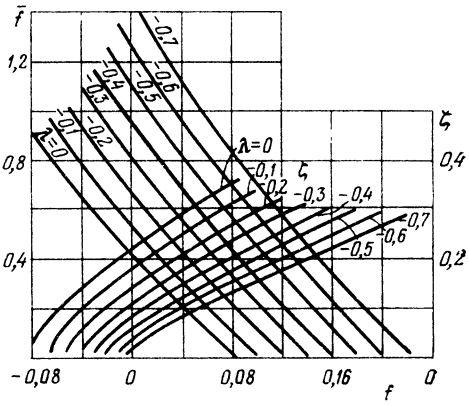


Рис. 201

Для определения толщины пограничного слоя служит уравнение

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\bar{f}(f,\lambda)}{U(x)}=\frac{2\{\zeta(f,\lambda)-[2+H(f,\lambda)]f-\lambda\}}{U(x)}, \qquad (153)$$

причем так же, как и в случае непроницаемой поверхности, числитель справа может быть приближенно заменен линейной функцией

$$\bar{f}(f,\lambda)=a-bf-2a\lambda, \qquad (154)$$

что облегчает интегрирование уравнения (153). Постоянная a была принята равной 0,44, а $b=5{,}15$. Отличие от принятого ранее $b=5{,}75$ не существенно. В качестве эталона сравнения с точным решением было взято уже цитированное в конце предыдущего параграфа решение Террилла для двух значений постоянной безразмерной скорости отсоса $v_s=0$ и $v_s=0{,}5$. Как видно (рис. 202), приближенные решения Л. Г. Шишкиной (нижние кривые) мало отличаются от точных (верхние кривые). Приближенное решение при $v_s=0$ совпадает с однопараметрическим, сравнение которого с двухпараметрическим и точным решением Террилла было показано на рис. 197.

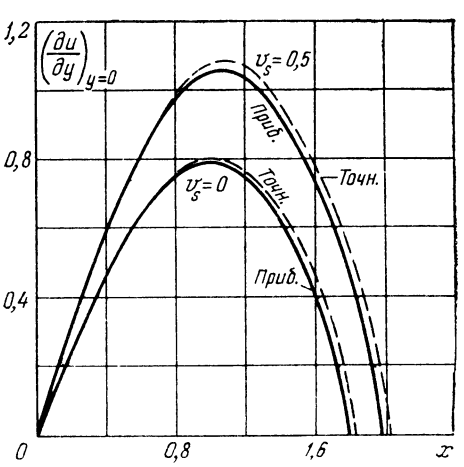


Рис. 202

Исследования МГД-пограничных слоев в конце пятидесятых — начале шестидесятых годов проводились многими учеными (Ликудис, Россов, Ву и др.), использовавшими для этой цели различные методы теории пограничного слоя (автомодельные решения, однопараметрические методы, разложения по малому параметру).

Первые применения метода обобщенного подобия к МГД-пограничному слою были выполнены на кафедре гидроаэродинамики ЛПИ В. С. Юферевым [1]). Расчет следующих приближений был произведен в дальнейшем югославским ученым З. Боричем [2]).

Предполагая внешнее магнитное поле перпендикулярным к поверхности тела ($B_x=0$, $B_y=B$; обозначения те же, что в § 91), внешнее электрическое поле отсутствующим ($E=0$), а жидкость нейтральной, воспользуемся общими уравнениями (110) и (111) гл. X движения вязкой проводящей несжимаемой жидкости, причем остановимся на случае малых магнитных рейнольдсовых чисел $\mathrm{Re}_m=U_\infty L/\nu_m$, где ν_m — кинематический коэффициент магнитной вязкости, когда можно пренебречь зависимостью магнитной индукции B от y и считать, что $B=B(x)$.

Произведя обычные для теории пограничного слоя упрощения, будем иметь (σ — коэффициент электропроводности жидкости)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\sigma B^2}{\rho}u,$$

а на внешней границе пограничного слоя

$$U\frac{dU}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}-\frac{\sigma B^2}{\rho}U,$$

откуда почленным вычитанием левых и правых частей этих уравнений получим при принятых условиях уравнения МГД-пограничного слоя в форме

$$\begin{gathered}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=UU'+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\sigma B^2}{\rho}(U-u),\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\end{gathered}\tag{155}$$

отличающейся от (11) наличием справа дополнительного члена, выражающего влияние *объемной пондеромоторной силы.*

Вводя функцию тока $\psi(x, y)$ и полагая для краткости $\sigma B^2/\rho=N$, составим основное для последующего уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=UU'+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}+N\left(U-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),\\ \psi=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \text{ при } y=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}\to U \text{ при } y\to\infty,\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=u_0(y) \text{ при } x=x_0.\end{gathered}\tag{156}$$

Совершив переход к введенным ранее переменным обобщенного подобия

$$\begin{gathered}\xi=\frac{y}{\delta^{**}},\quad \Phi=\frac{\psi}{U\delta^{**}},\\ f_k=U^{k-1}\frac{d^kU}{dx^k}z^k,\quad \bar f_k=z^{k-1}\frac{d^kz}{dx^k}U^k\end{gathered}\tag{157}$$

---

[1]) Юферев В. С. Параметрический метод расчета ламинарного пограничного слоя в магнитной гидродинамике.— Магнитная гидродинамика, 1966, № 4; Юферев В. С. Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя в магнитной гидродинамике.— Механика жидкости и газа, 1967, № 1, 124—127.

[2]) Боричич З. Локально-двухпараметрические уравнения плоского движения проводящей несжимаемой жи кости.— Магнитная гидродинамика, 1971, № 1, с. 5—10

и используя еще новую последовательность переменных

$$g_k = U^{k-1}\frac{d^{k-1}N}{dx^{k-1}}z^k, \tag{158}$$

получим универсальное уравнение МГД-пограничного слоя в форме

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3}+\left(f_1+\frac{1}{2}\bar{f}_1\right)\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+f_1\left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right]+g_1\left(1-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\theta_k\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial f_k}-\frac{\partial\Phi}{\partial f_k}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\bar{\theta}_k\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\bar{f}_k}-\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{f}_k}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right)+G_k\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial g_k}-\frac{\partial\Phi}{\partial g_k}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right)\right], \tag{159}$$

$$\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0 \quad \text{при } \xi=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\to 1 \text{ при } \xi\to\infty;$$

$$\Phi=\Phi_0(\xi) \text{ при } f_1=f_2=\ldots=0,\ \bar{f}_1=\bar{f}_{10},\ \bar{f}_2=\bar{f}_{20},\ \ldots,$$

$$g_1=g_{10},\ g_2=g_{20},\ \ldots,$$

где наряду с ранее определенными θ_k и $\bar{\theta}_k$ возникают еще коэффициенты

$$G_k=[(k-1)f_1+k\bar{f}_1]g_k+g_{k+1} \tag{160}$$

и при выводе (159) использованы соотношения

$$Uzf_k'=\theta_k, \quad Uz\bar{f}_k'=\bar{\theta}_k, \quad Uzg_k'=G_k. \tag{161}$$

Интегральное соотношение приводит к следующему выражению для $\bar{f}_1$:

$$\bar{f}_1=2[\xi-(2+H)f_1-Hg_1], \tag{162}$$

которое лежит в основе определения толщины потери импульса $\delta^{**}(x)$ согласно уравнению

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\bar{f}_1[(f_k),\ (\bar{f}_k),\ (g_k)]}{U(x)}. \tag{163}$$

Общность метода в различных областях применения и аналогия с предыдущим выступают достаточно наглядно.

В ранее цитированной работе З. Боричича проведено численное интегрирование на ЭВМ уравнения (159), урезанного по переменным f_k, $\bar{f}_k$, g_k при $k>1$ и локализованного по $\bar{f}_1=\bar{f}$, а также попеременно по $f_1=f$ или по $g_1=g$.

Выпишем общий вид этого уравнения:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3}+\left(f+\frac{1}{2}\bar{f}\right)\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+f\left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right]+g\left(1-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)=$$

$$=f\bar{f}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial f}-\frac{\partial\Phi}{\partial f}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right)+\bar{f}g\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial g}-\frac{\partial\Phi}{\partial g}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right), \tag{164}$$

$$\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0 \text{ при } \xi=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\to 1 \text{ при } \xi\to\infty,$$

$$\Phi=\Phi_0(\xi, g) \text{ при } f=0, \quad \Phi=\Phi_1(\xi, f) \text{ при } g=0,$$

но будем иметь в виду, что в случае дополнительной (кроме общей по $\bar{f}$) локализации по g в правой части уравнения (164) отсутствует вторая круглая скобка и принимается во внимание первое граничное условие в последней строке, относящееся к продольному обтеканию пластин-

ки электропроводной жидкостью, т. е. к уравнению

$$\ddot{\Phi}_{00} + \frac{1}{2}\bar{f}_{00}\Phi_{00}\ddot{\Phi}_{00} + g(1 - \dot{\Phi}_{00}) = 0,$$

а при дополнительной локализации по f в правой части уравнения (164) отсутствует первая скобка и используется второе граничное условие для уравнения

$$\ddot{\Phi}_{10} + \left(f_{00} + \frac{1}{2}\bar{f}_{10}\right)\Phi_{10}\ddot{\Phi}_{10} + f_{00}(1 - \dot{\Phi}_{10}^2) = 0,$$

выражающего локально-подобное решение для тела с произвольным распределением скоростей на внешней границе пограничного слоя $U(x)$, но в непроводящей жидкости. Сообразно с той или другой локализацией определяются и функции $\bar{f}_{00}(g)$ или $\bar{f}_{10}(f)$.

Таблицы и графики, приведенные в цитированной статье З. Боричича, отчетливо показывают, что магнитный фактор g, совпадающий с квадратом числа Гартмана (§ 91), в котором в качестве характерной длины принята толщина потери импульса δ^{**}, значительно влияет на течение электропроводной жидкости в МГД-пограничном слое. С ростом параметра g приведенный коэффициент трения ζ возрастает, а отрыв пограничного слоя затягивается. Это отчетливо видно на рис. 203, где цифры $1, 2, \ldots, 5$ на кривых обозначают следующие значения g_1: $1 - g_1=0$; $2 - g_1=0{,}05$; $3 - g_1=0{,}10$; $4 - g_1=0{,}15$; $5 - g_1=0{,}20$.

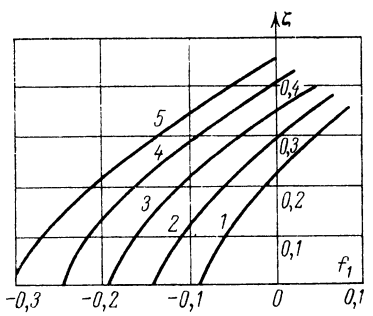


Рис. 203

Главной целью настоящего параграфа была демонстрация возможностей применения метода обобщенного подобия к расчету ламинарных пограничных слоев в разнообразных физических условиях (проницаемости поверхности, наличия электропроводности жидкости, движущейся в магнитном поле). Такая направленность не оставила места для подробного количественного описания отдельных явлений; в связи с этим пришлось ограничиться составлением *универсальных уравнений* и анализом некоторых результатов их численного решения, в частности вопроса о *затягивании* отрыва пограничного слоя.

Метод обобщенного подобия с успехом применяется не только в теории ламинарных пограничных слоев, но и во многих других вопросах. Л. Г. Степанянц недавно применил метод обобщенного подобия к обратной задаче расчета распределений скоростей и температуры по заданному распределению толщины слоя между двумя твердыми поверхностями и для задач пленочного течения в приближении пограничного слоя. Им были рассмотрены следующие задачи: 1) ламинарное неизотермическое течение вязкого газа сквозь тонкую трубу переменного сечения[1]), 2) гидродинамическая теория смазки при больших числах Рейнольдса[2]), 3) движение вязкого газа в тонком слое[3]), 4) теплооб-

[1]) Смирнов Б. И., Степанянц Л. Г. Обобщенное подобие ламинарных неизотермических течений вязкого газа в тонких трубах переменного сечения.— Инж.-физ. журнал, 1982, т. XLII, № 2, с. 285—289.

[2]) **Смага Т. И., Смирнов Б. И., Степанянц Л. Г.** Об одном методе решения задач гидродинамической теории смазки при больших числах Рейнольдса.— Известия АН БССР, сер. физ.-энергетич. наук, 1978, № 1, с. 119—124.

[3]) Смирнов Б. И, Степанянц Л. Г. Метод обобщенного подобия в задачах движения вязкого газа в тонком слое.— Инж.-физ. журнал, 1981, т. XL, № 2, с. 204—213.

мен при пленочном течении [1]). Во всех этих случаях составлены соответствующие универсальные уравнения и получены новые результаты, расширившие границы применимости метода обобщенного подобия.

§ 115. Пространственные пристенные пограничные слои. Свободные пространственные струи

В настоящем общем курсе нет возможности остановиться на многочисленных задачах теории ламинарного пограничного слоя, уже давно объединенных в соответствующих специальных руководствах, на многие из которых уже были даны ссылки. Приведем лишь несколько примеров простейших пространственных задач, дадим в следующем параграфе понятие о нестационарных, а в § 117 — о температурных пограничных слоях при неизотермических движениях однородной по физическому составу жидкости и представление о пограничных *концентрационных* слоях в потоках с примесями.

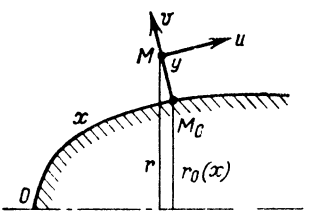


Рис. 204

Простейший пример пространственного пристенного пограничного слоя дает продольное осесимметричное обтекание тела вращения. Как и в плоском случае, можно отсчитывать x *вдоль контура* тела, а y — по *нормали* к нему (рис. 204) и рассматривать эти координаты как прямолинейные, а радиус-вектор r точки M по отношению к оси тела с достаточным приближением считать совпадающим с радиусом поперечной кривизны тела $r_0(x)$ в соответствующем нормальном к оси тела его сечении [2]). При таком подходе основное уравнение пограничного слоя сохранит тот же вид, что и в плоском случае, а уравнение неразрывности примет обычную для продольного осесимметричного движения в цилиндрических координатах форму

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial y} = 0,$$

но с заменой координаты r на $r_0(x)$. Основной системой уравнений в этом случае будет следующая:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial (r_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial (r_0 v)}{\partial y} = 0; \qquad (165)$$

$$u = v = 0 \text{ при } y = 0,\ u \to U(x) \text{ при } y \to \infty.$$

Уравнения (165) при помощи преобразования [3]) (штрих — производная

---

[1]) Котельникова О. П., Степанянц Л. Г. Параметрический метод решения задач теплообмена при пленочном течении жидкости.— Инж.-физ. журнал, 1983, т. XLIV, № 4, с. 632—636.

[2]) Отказ от этого упрощающего предположения значительно увеличил бы вычислительные трудности (см. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой.— М: Физматгиз, 1962, с. 154—167).

[3]) Степанов Е. И. Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движения с осевой симметрией — Прикл мат и мех., 1947, т. 11, в. 1; см. также Mangler W. Ber. aerodyn. Vers.— Anst. Göttingen, 1945, 45/A/17 и того же автора: Zeitschr. f. Math. u. Mech, 1948, Bd. 28, S. 97—103

по x)

$$\bar{x}=\int_0^x r_0^2(\xi)\,d\xi, \quad \bar{y}=r_0(x)\,y,$$

$$\bar{u}=u, \quad \bar{U}=U, \quad \bar{v}=\frac{v}{r_0}+\frac{r_0'(x)\,yu}{r_0^2} \tag{166}$$

с формулами перехода

$$\frac{\partial}{\partial x}=r_0^2\frac{\partial}{\partial\bar{x}}+r_0'y\frac{\partial}{\partial\bar{y}}, \quad \frac{\partial}{\partial y}=r_0\frac{\partial}{\partial\bar{y}}$$

превращаются в уравнения

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=\bar{U}\frac{d\bar{U}}{d\bar{x}}+\nu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2},$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=0; \tag{167}$$

$$\bar{u}=\bar{v}=0 \text{ при } \bar{y}=0, \quad \bar{u}\to\bar{U}(\bar{x}) \text{ при } \bar{y}\to\infty,$$

ничем не отличающиеся от уравнений плоского пограничного слоя. Таким образом, при расчетах пограничных слоев на телах вращения при осесимметричном продольном их обтекании, задача сводится к определению преобразованного к новым координатам (166) заданного распределения $U(x)$ скорости на внешней границе пограничного слоя и последующего рассмотрения плоского пограничного слоя.

Так, например, применим преобразование (166) к случаю пограничного слоя, образующегося вблизи лобовой критической точки тела вращения при продольном его обтекании.

Распределение скоростей во внешнем потоке вблизи критической точки на теле вращения будет линейным ($U=cx$); в этой области можно считать также $r_0(x)=x$. Тогда преобразование (166) сведется к следующему:

$$\bar{x}=\frac{1}{3}x^3, \quad \bar{y}=xy, \quad \bar{u}=u, \quad \bar{v}=\frac{v}{x}+\frac{yu}{x^2}, \quad \bar{U}=c\sqrt[3]{3\bar{x}}=c_1\bar{x}^{1/3}.$$

Как об этом можно судить по последнему равенству, рассматриваемая осесимметричная задача свелась к помещенной в § 111 плоской автомодельной задаче Фокнера—Скэн с показателем степени $m=1/3$ ($\beta=1/2$). Таблицы решения этой задачи были приведены в § 111. Пользуясь табл. 16, можем определить все интересующие нас величины в этой пространственной задаче:

$$\delta^*=\frac{\bar{\delta}^*}{r_0}, \quad \delta^{**}=\frac{\bar{\delta}^{**}}{r_0}, \quad \tau_w=r_0\bar{\tau}_w.$$

Применяя преобразование (166), выведем аналог интегрального соотношения Кармана для случая осесимметричного пограничного слоя на продольно обтекаемом теле вращения. Если пользоваться новыми переменными (166), то, как следует из (167), уравнение Кармана для осесимметричного течения должно иметь тот же вид (106), что и для плоского течения:

$$\frac{d\bar{\delta}^{**}}{d\bar{x}}+\frac{\bar{U}_{\bar{x}}'\bar{\delta}^{**}}{\bar{U}}(2+\bar{H})=\frac{\bar{\tau}_w}{\rho\bar{U}^2}, \tag{168}$$

где

$$\bar{\delta}^{**}=\int_0^\infty \frac{\bar{u}}{\bar{U}}\left(1-\frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)d\bar{y}=r_0\int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy=r_0\delta^{**}$$

и аналогично

$$\bar{\delta}^{*}=\int_0^\infty \left(1-\frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)d\bar{y}=r_0\int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)dy=r_0\delta^{*},$$

так что

$$\bar{H}=\frac{\bar{\delta}^{*}}{\bar{\delta}^{**}}=\frac{\delta^{*}}{\delta^{**}}=H.$$

Напряжение трения $\bar{\tau}_w$ будет равно

$$\bar{\tau}_w=\mu\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)_{\bar{y}=0}=\frac{\mu}{r_0}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{\tau_w}{r_0}.$$

Подставляя полученные возражения $\bar{\delta}^{**}$, $\bar{\delta}^{*}$, $\bar{H}$ и $\bar{\tau}_w$ в уравнение (168), найдем

$$\frac{1}{r_0^2(x)}\frac{d}{dx}(r_0\delta^{**})+\frac{U_x'r_0\delta^{**}}{Ur_0^2(x)}(2+H)=\frac{\tau_w}{\rho r_0U^2},$$

а выполняя в первом члене левой части дифференцирование и простые преобразования, получим искомое выражение интегрального соотношения Кармана для осесимметричного пограничного слоя на теле вращения

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{U'\delta^{**}}{U}(2+H)+\frac{r_0'}{r_0}\delta^{**}=\frac{\tau_w}{\rho U^2},\qquad(169)$$

отличающееся от подобного уравнения для плоского случая последним слагаемым $(r_0'\delta^{**}/r_0)$ в левой части. К тому же результату можно было бы прийти, переписав первое уравнение системы (165) на основании второго в виде

$$\frac{\partial(r_0u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(r_0uv)}{\partial y}=r_0UU'+\nu r_0\frac{\partial^2u}{\partial y^2},$$

а второе уравнение, после умножения обеих его частей на U, так:

$$\frac{\partial(r_0Uu)}{\partial x}+\frac{\partial(r_0Uv)}{\partial y}=r_0uU'.$$

Вычитая почленно эти два уравнения одно из другого, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}[r_0u(U-u)]+\frac{\partial}{\partial y}[r_0v(U-u)]=r_0U'(u-U)-\nu r_0\frac{\partial^2u}{\partial y^2}.$$

Интегрируя обе части по y от $y=0$ до $y=\infty$, найдем

$$\frac{d}{dx}(r_0U^2\delta^{**})+r_0U\frac{dU}{dx}\delta^{*}=r_0\frac{\tau_w}{\rho},$$

а раскрывая выражение производной в первом члене слева, вновь придем к (169). Все только что изложенное верно при сделанном допущении $r=r_0$ или при эквивалентном ему допущении о малости отношения δ/r_0. При приближении к хвостовой части тела вращения, когда δ увеличивается, а r_0 уменьшается, указанные рассуждения теряют свою силу.

Приведем пример простейшего однопараметрического расчета пограничного слоя на удлиненном теле вращения. Сохраняя прежние обозначения, умножим, как это делалось и в случае плоского пограничного слоя, обе части уравнения (169) на $U\delta^{**}/\nu$. Преобразовав после этого левую часть, получим аналог интегрального соотношения Кармана

$$\frac{df}{dx}=\frac{U'}{U}F(f)+\left(\frac{U''}{U'}-\frac{2r_0'}{r_0}\right)f,$$

отличающийся от плоского случая лишь наличием члена $(-2r_0'/r_0)$ в круглой скобке в правой части уравнения. Здесь функция $F(f)=\bar{f}$ та же, что и в плоском случае. Заменяя ее линейным представлением

$$F(f)=a-bf,$$

найдем следующую формулу для параметра f

$$f=\frac{aU'(x)}{U^b(x)\,r_0^2(x)}\int_0^x U^{b-1}(t)\,r_0^2(t)\,dt,$$

что и решает задачу в простейшем однопараметрическом приближении [1]).

Наличие преобразования (166) осесимметричного движения в пограничном слое на удлиненных телах вращения в плоское делает излишним специальное изложение метода обобщенного подобия применительно к этому случаю.

К числу задач о *пространственном* «пристенном» ламинарном пограничном слое относятся задачи о движении вязкой жидкости вокруг вращающегося диска в *безграничном* или *ограниченном* объемах жидкости. Первая из них имеет точное решение на основе уравнений Навье—Стокса (см. задачу Кармана в § 101). Вторая, как и многие другие задачи о пограничных слоях на вращающихся телах (круглом цилиндре, сфере), рассмотрены в монографии Л. А. Дорфмана [2]). Большой интерес представляет пограничный слой вокруг плоскости, индуцируемый перпендикулярной к этой плоскости вихревой нитью (модель смерча). Эта задача подробно изложена в монографии М. А. Гольдштика [3]).

Литература по пространственным (трехмерным) пограничным слоям очень велика. Сошлемся на некоторые журнальные источники [4]). На специальные монографии ссылки уже были даны в начале главы.

---

[1]) Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой на теле вращения.— Докл. АН СССР, 1942, т. XXXVI, № 6.

[2]) Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача.— М.: Физматгиз, 1960.

[3]) Гольдштик М. А. Вихревые потоки — Новосибирск: Наука, Сибирское отд-ние, 1981, с. 190—235.

[4]) Богданова В. В. Универсальные уравнения теории пространственного пограничного слоя — Механика жидкости и газа, 1968, № 6; Карякин Ю. Е. Магнитогидродинамический ламинарный пограничный слой в осесимметричном потоке с закруткой.— Магнитная гидродинамика, 1968, № 2; Струминский В. В. Скольжение крыла в вязкой жидкости.— Докл. АН СССР, 1946, т. 54, № 7, с. 575—578; того же автора: Скольжение крыла в вязком и сжимаемом газе.— Докл. АН СССР, т. 54, № 9, с. 769—772; см. также сводную работу: Струминский В. В. Теория пространственного пограничного слоя на скользящем крыле.— Сборник теоретических работ по аэродинамике (ЦАГИ).— М.: Оборонгиз, 1957, с. 174—205; Sedney R. Some aspects of three-dimensional boundary layers — Quart. Appl. Mathem., 1957, v. 15, № 2; Rott N., Crabtree L. Simplified laminar boundary layers calculations for bodies of revolution and for yawed wing.— Journ. Aeron. Sc., 1952, v. 19, № 8, p. 556—560; Loos H. G. A simple laminar boundary layer with secondary flow.— Journ. Aeron. Sc., 1955, v. 22, p. 35—40; Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя.— М.: Наука, 1977.

Простым примером автомодельного движения в «свободном» *осесимметричном* пограничном слое может служить распространение осесимметричной *незакрученной* струи, бьющей из бесконечно тонкого отверстия в безграничное пространство, заполненное той же жидкостью [1]).

Общие уравнения стационарного осесимметричного движения вязкой жидкости в цилиндрических координатах r, ε, x получим из формул (33) § 86, откидывая производные по t и ε.

Будем иметь, обозначая через u, v и w соответственно осевую V_x, радиальную V_r и трансверсальную V_ε составляющие скорости,

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{w^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right),$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial r}=0.$$

Рассматривая область струи как пограничный слой, поперечный размер которого при больших рейнольдсовых числах мал, будем предполагать радиальную скорость v малой по сравнению с продольной u и трансверсальной w. Вместе с тем откинем в скобках справа $\partial^2 u/\partial x^2$ и $\partial^2 w/\partial x^2$ по сравнению с радиальными производными. Тогда получим следующие уравнения распространения осесимметричной струи, общие для случаев незакрученной и закрученной струи:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad \frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\rho w^2}{r},$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}\right),\quad \frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial r}=0. \tag{170}$$

В рассматриваемом случае движение будет происходить в меридианной плоскости, так что

$$w=0,\quad \frac{\partial p}{\partial r}=0,\quad p=p(x)=\text{const}; \tag{171}$$

последнее равенство является следствием одинаковости давления в безграничном пространстве, окружающем струю. При выполнении равенств (171) уравнения (170) упрощаются и сводятся к следующим:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad \frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial r}=0. \tag{172}$$

Как это непосредственно следует из соображений размерности, решение уравнений (172) для случая незакрученной струи, бьющей из бесконечно тонкого отверстия с нулевым расходом и конечным импульсом, будет *автомодельным*. Действительно, в случае очень больших рейнольдсовых чисел секундный импульс, одинаковый для всех сечений, определится как

$$J_0=\rho\int_0^\infty 2\pi r u^2\,dr=\text{const}, \tag{173}$$

---

[1]) Schlichting H. Laminare Strahlausbreitung — Zeitschr. für Angew. Math. und Mech., 1933, Bd. 13, S. 260.

и будет иметь порядок ($\mathrm{Re}=UL/\nu$)

$$\rho U^2\cdot L^2/\mathrm{Re}=\mu UL,$$

а функция тока $\psi=\int\limits_0^r ru\,dr$ — порядок

$$UL^2/\mathrm{Re}=\nu L.$$

Следовательно, решение задачи должно иметь вид

$$\psi=\nu Lf\left(\frac{x}{L},\ \frac{r}{L}\sqrt{\frac{UL}{\nu}}\right)=\nu Lf\left(\frac{x}{L},\ \frac{r}{L}\sqrt{\frac{J_0}{\rho\nu^2}}\right),$$

а по условию независимости от L

$$\psi=\nu L\cdot\frac{x}{L}\Theta\left(\frac{r}{L}\sqrt{\frac{J_0}{\rho\nu^2}}\Big/\frac{x}{L}\right)=\nu x\Theta\left(\sqrt{\frac{J_0}{\rho\nu^2}}\,\frac{r}{x}\right),\qquad(174)$$

что и доказывает автомодельность задачи.

Для упрощения выкладок будем искать функцию тока в виде

$$\psi=\nu xa(\eta),\quad \eta=\frac{r}{x\sqrt{\nu}},\qquad(175)$$

Найдем (штрих в дальнейшем означает производную по η)

$$u=\frac{1}{x}\frac{a'}{\eta},\quad v=\frac{\sqrt{\nu}}{x}\left(a'-\frac{a}{\eta}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{x^2\sqrt{\nu}}\left(\frac{a'}{\eta}\right)',\quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{1}{\nu x^3}\left(\frac{a'}{\eta}\right)'',\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\left[\eta\left(\frac{a'}{\eta}\right)'+\frac{a'}{\eta}\right],$$

и, подставляя в первое уравнение системы (172), получим искомое обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для определения $a(\eta)$

$$\left(\frac{a'}{\eta}\right)''+\frac{1+a}{\eta}\left(\frac{a'}{\eta}\right)'+\left(\frac{a'}{\eta}\right)^2=0.\qquad(176)$$

Граничные условия будут

$$a=0,\quad a'=0\text{ при }\eta=0,$$

причем второе вытекает из условия ограниченности продольной скорости $u=a'/(x\eta)$ на оси. Кроме того, имеем условие ограниченности a при $\eta\to\infty$, так как по (175) a пропорционально секундному объемному расходу жидкости сквозь данное сечение струи.

Уравнение (176) один раз интегрируется непосредственно и дает

$$\eta a''-a'+aa'=0.$$

Вводя вместо η новую переменную $\zeta=\ln\eta$, получим уравнение

$$\frac{d^2a}{d\zeta^2}-2\frac{da}{d\zeta}+a\frac{da}{d\zeta}=0,$$

которое при принятых граничных условиях после однократного интегрирования сводится к следующему:

$$\frac{da}{d\zeta}=\frac{4a-a^2}{2}.$$

Интегрируя еще раз, получим

$$a(\eta)=\frac{\alpha^2\eta^2}{1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2}.\qquad(177)$$

Для определения константы интегрирования α остается использовать интегральное условие (173), которое при помощи (175) может быть переписано в форме

$$\int_0^\infty [a'(\eta)]^2 \frac{d\eta}{\eta} = \frac{J_0}{2\pi\mu}.$$

Вычислив по (177)

$$a' = \frac{2\alpha^2\eta}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2}$$

и подставив его в предыдущее соотношение, найдем

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{16}\frac{J_0}{\pi\mu}}.$$

Возвращаясь к (175) и к последующим формулам для u и v, получим искомое решение задачи

$$\psi = \nu x \frac{\alpha^2\eta^2}{1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2}, \quad u = \frac{2\alpha^2}{x}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2}, \quad v = \frac{\alpha\sqrt{\nu}}{x}\frac{\alpha\eta\left(1-\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2}. \tag{178}$$

Форма линий тока и профилей продольной скорости в рассматриваемом случае осесимметричного течения по своему общему характеру та же, что и в плоском случае.

Секундный массовый расход жидкости сквозь данное сечение струи будет по (178) равен

$$M = 2\pi\rho\int_0^\infty ur\,dr = 2\pi\rho\psi(\infty) = 8\pi\rho\nu x = 8\pi\mu x. \tag{179}$$

Интересно отметить, что этот расход *не зависит от секундного количества движения*, характеризующего данную струю, а *только от вязкости жидкости*, причем растет пропорционально расстоянию от источника струи.

Распределение максимальной скорости на оси ($\eta=0$) по (178) представится выражением

$$u_{\max} = \frac{2\alpha^2}{x} = \frac{3}{8}\frac{J_0}{\pi\mu x}. \tag{180}$$

Определяя границу струи как геометрическое место точек, где отношение $u/u_{\max}$ сохраняет некоторое малое, но постоянное значение, убедимся, что такой условной границей осесимметричной струи будет служить прямой круговой конус с углом полураствора, пропорциональным $\sqrt{\nu^2\rho/J_0}$. Замечая, что безразмерная величина $J_0/(\rho\nu^2)$ играет в рассматриваемой задаче роль рейнольдсова числа $\mathbf{Re}=UL/\nu$, убедимся, что условная ширина струи уменьшается с ростом числа Рейнольдса по закону $1/\sqrt{\mathbf{Re}}$, что подтверждает возможность применения в этом случае уравнений пограничного слоя.

В качестве примера более сложного, *неавтомодельного* движения рассмотрим задачу о *распространении ламинарной закрученной осесимметричной струи* в пространстве, затопленном той же, но покоящейся

жидкостью[1]). В этом случае удается получить решение в форме асимптотического ряда, построенного по обратным степеням расстояния сечения струи от источника струи.

Уравнения движения вязкой жидкости в пограничном слое — закрученной струе — представляются системой (170). Они содержат наряду с продольной u и поперечной v еще *трансверсальную* компоненту скорости w, характеризующую *крутку струи*. Хотя во внешнем потоке, согласно условию задачи, давление повсюду одинаково, все же в самой струе имеется радиальный перепад давлений, уравновешивающий центробежные силы, вызываемые закрученностью струи. Этот перепад связан с трансверсальной скоростью вторым равенством системы (170). Наличие его вызывает переменность давления и вдоль струи, что не позволяет пренебрегать членом dp/dx в первом уравнении той же системы.

Из системы уравнений (170) могут быть выведены два основных закона сохранения: количеств и момента количеств движения, из которых будут следовать два интегральных условия нетривиальности решений.

Пользуясь последним уравнением системы (170) (уравнением неразрывности), перепишем первое уравнение той же системы после простых преобразований в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}[r(p+\rho u^2)]+\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\rho uv-\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]=0$$

и, интегрируя поперек струи, получим

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty r(p+\rho u^2)\,dr+\left[r\left(\rho uv-\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_{r=0}^{r=\infty}=0.$$

Здесь под p понимается *давление в точке струи, отсчитанное от давления вне струи*; при этом предполагается существование интеграла в левой части. Если считать (это можно проверить по полученному далее решению), что u и du/dr достаточно быстро убывают с ростом r, то подстановка обращается в нуль, и предыдущее равенство приводит к первому интегральному условию задачи

$$2\pi\int_0^\infty r(p+\rho u^2)\,dr=\text{const}=J_0, \tag{181}$$

обобщающему условие (173) на случай закрученной струи. Левую часть этого равенства назовем *потоком полного импульса сквозь сечение струи*. При $x\to\infty$ $p\to 0$, и константа в уравнении (181) совпадает с константой незакрученной струи.

Заметим, что третье уравнение системы (170) после умножения обеих частей на r и использования уравнения неразрывности может быть переписано в форме

$$\frac{\partial(ruw)}{\partial x}+\frac{\partial(rvw)}{\partial r}+vw=\nu r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right],$$

или, после повторного умножения на r, еще так:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^2uw)+\frac{\partial}{\partial r}(r^2vw)=\nu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right]-2\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right\},$$

и проинтегрируем обе части последнего равенства поперек струи. Тогда

[1]) Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— Прикл. мат. и мех., 1953, т. 17, вып. 1.

при аналогичных предыдущим предположениях о быстроте убывания u и w с ростом r получим

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty r^2uw\,dr = 0$$

или, умножая на постоянную $2\pi\rho$ и интегрируя,

$$2\pi\rho\int_0^\infty r^2uw\,dr = \text{const} = L_0. \tag{182}$$

Левая часть представляет *перенос главного момента количеств движения сквозь сечение струи.* Момент этот L_0 одинаков вдоль всей струи и, следовательно, может служить мерой *закрученности* струи.

Наличие двух постоянных вдоль закрученной струи величин J_0 и L_0, однозначно определяющих характерные длину и скорость, служит препятствием к возможности сведения уравнений (170) к одному обыкновенному уравнению, что делает задачу неавтомодельной.

Введем в этом случае функцию тока ψ меридианного течения и будем искать ее в виде разложения

$$\psi = \nu\left(ax + a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right), \tag{183}$$

где a, a_0, a_1, ...— неизвестные функции той же переменной η, что и в случае незакрученной струи. Тогда компоненты скорости в меридианных сечениях будут (штрих, как и ранее, обозначает производную по η)

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{a'}{\eta}\frac{1}{x} + \frac{a_0'}{\eta}\frac{1}{x^2} + \frac{a_1'}{\eta}\frac{1}{x^3} + \ldots,$$

$$v = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\sqrt{\nu}}{x}\left[a' - \frac{a}{\eta} + a_0'\frac{1}{x} + \left(a_1' + \frac{a_1}{\eta}\right)\frac{1}{x^2} + \ldots\right]. \tag{184}$$

Окружную скорость w зададим рядом

$$w = \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots \tag{185}$$

и, наконец, введем еще разложение для давления p, отсчитываемого, напоминаем, от давления окружающей струю жидкости,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots \tag{186}$$

Здесь b_1, b_2, ..., c_1, c_2, ... — неизвестные функции переменной η.

Подставляя указанные разложения в систему уравнений (170) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых коэффициентов.

Из первого уравнения системы (170) получим

$$\begin{gathered} c_1 + \eta c_1' = 0, \\ \left(\frac{a'}{\eta}\right)'' + \frac{1+a}{\eta}\left(\frac{a'}{\eta}\right)' + \left(\frac{a'}{\eta}\right)^2 + 2c_2 + \eta c_2' = 0, \\ \left(\frac{a_0'}{\eta}\right)'' + \frac{1+a}{\eta}\left(\frac{a_0'}{\eta}\right)' + \frac{3a'}{\eta}\frac{a_0'}{\eta} + 3c_3 + \eta c_3' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{187}$$

Из второго уравнения той же системы найдем

$$\eta c_1' = 0, \quad \eta c_2' = b_1^2, \quad \eta c_3' = 2b_1 b_2, \quad \eta c_4' = b_2^2 + 2b_1 b_3, \ \ldots, \tag{188}$$

а из третьего

$$\begin{gathered} b_1'' + \frac{1+a}{\eta} b_1' - \frac{1-a}{\eta^2} b_1 = 0, \\ b_2'' + \frac{1+a}{\eta} b_2' - \frac{1-a-\eta a'}{\eta^2} b_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{189}$$

Кроме того, аналогичная операция над интегральными условиями (181) и (182) приведет к следующей системе интегральных условий:

$$\begin{gathered} \int_0^\infty \eta c_1 \, d\eta = 0, \qquad \int_0^\infty \left(\eta c_2 + \frac{a'^2}{\eta}\right) d\eta = \frac{J_0}{2\pi\mu}, \\ \int_0^\infty \left(\eta c_3 + \frac{2a'a_0'}{\eta}\right) d\eta = 0, \quad \int_0^\infty \left(\eta c_4 + \frac{a_0'^2 + 2aa_1'}{\eta}\right) d\eta = 0, \ \ldots, \\ \int_0^\infty \eta a' b_1 \, d\eta = 0, \qquad \int_0^\infty \eta (a' b_2 + a_0' b_1) \, d\eta = \frac{L_0}{2\pi\mu\sqrt{\nu}}, \ \ldots \end{gathered} \tag{190}$$

Принимая ось струи $\eta = 0$ за нулевую линию тока и используя условие конечности скорости на оси, найдем граничные условия

$$a = a_0 = a_1 = \ldots = 0, \ a' = a_0' = a_1' = \ldots = 0 \text{ при } \eta = 0, \tag{191}$$

а из условия ограниченности секундного объемного расхода сквозь сечение, или, что то же, значения ψ при $\eta = \infty$, получим условие *ограниченности* величин

$$a(\infty), \ a_0(\infty), \ \ldots \tag{192}$$

Далее, по определению скорости закрученности, имеем

$$\begin{gathered} b_1 = b_2 = \ldots = 0 \text{ при } \eta = 0, \\ b_1 = b_2 = \ldots = 0 \text{ при } \eta = \infty, \end{gathered} \tag{193}$$

и, наконец, по определению давления,

$$c_1 = c_2 = \ldots = 0 \text{ при } \eta = \infty. \tag{194}$$

Заметим прежде всего, что из первого уравнения системы (189) сразу следует существование решения $b_1 \equiv 0$, удовлетворяющего граничным условиям (193) и предпоследнему из интегральных условий (190). А тогда из первых трех уравнений системы (188) и граничных условий (194) вытекает, что

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

При этом легко заметить, что функция $a(\eta)$ удовлетворяет тому же уравнению, тем же граничным условиям и интегральному условию, что и в случае незакрученной струи. С точностью до малых порядка $1/x^2$ разница сводится к членам, содержащим функции $a_0(\eta)$ и $b_2(\eta)$, которые нетрудно разыскать.

Полагая в третьем уравнении системы (187)

$$\frac{a_0'}{\eta} = A \tag{195}$$

и переходя от аргумента η к новому аргументу $\xi=a/4$, связанному с уже ранее найденным соотношением

$$\xi=\frac{\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2}{1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2},$$

придем к гипергеометрическому уравнению

$$\xi(\xi-1)\frac{d^2A}{d\xi^2}-\frac{dA}{d\xi}-6A=0,$$

регулярное решение которого при очевидных граничных условиях

$$\xi=0 \text{ при } \eta=0, \quad \xi=1 \text{ при } \eta=\infty$$

будет

$$A(\xi)=C(1-\xi)^2(1-4\xi).$$

Обращаясь после этого к уравнению (195) и повторяя интегрирование, получим

$$a_0(\eta)=\beta\xi(2\xi-1)=-\beta\frac{\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\left(1-\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2},$$

где β — постоянная интегрирования.

Функция $a_0(\eta)$ удовлетворяет условиям (191) и (192).

Для определения $b_2(\eta)$ проинтегрируем второе уравнение системы (189), которое представляется в виде

$$\eta^2b_2''+\eta b_2'-b_2+\eta ab_2'+\eta a'b_2+ab_2=(\eta^2b_2'-\eta b_2+\eta ab_2)'=0.$$

Получим

$$\eta b_2'=(1-a)b_2,$$

откуда следует

$$b_2(\eta)=\gamma\frac{\alpha\eta}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2}, \tag{196}$$

причем постоянная интегрирования γ определяется из последнего интегрального условия системы (190), которое при $b_1=0$ переписывается в виде

$$\int_0^\infty \eta a'b_2\,d\eta=\frac{L_0}{2\pi\mu\sqrt{\nu}}.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\gamma=\frac{3\sqrt{3}}{64\pi\sqrt{\pi}}\frac{L_0\sqrt{\rho J_0}}{\mu^2}. \tag{197}$$

Давление характеризуется функцией $c_4(\eta)$, которая удовлетворяет последнему уравнению системы (188) при $b_1=0$ и равна

$$c_4=-\frac{2}{3}\gamma^2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^3}.$$

Используя полученные выражения неизвестных функций, придем к следующим приближенным формулам теории закрученной струи

($u_{\max}$ обозначает скорость на оси струи):

$$\psi = \nu\left[\frac{\alpha^2\eta^2}{1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2}x - \beta\frac{\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\left(1-\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2}\right],$$

$$u = \frac{2\alpha^2}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\beta\alpha^2\frac{1-\frac{3}{4}\alpha^2\eta^2}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^3}\frac{1}{x^2},$$

$$v = \sqrt{\nu}\left[\frac{\alpha^2\eta\left(1-\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\beta\alpha^2\frac{\eta\left(1-\frac{3}{4}\alpha^2\eta^2\right)}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^3}\frac{1}{x^2}\right], \qquad (198)$$

$$w = \gamma\frac{\alpha\eta}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2}\frac{1}{x^2},$$

$$p = -\frac{2}{3}\gamma^2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^3}\frac{1}{x^4}, \quad u_{\max} = \frac{2\alpha^2}{x} - \frac{1}{2}\beta\alpha^2\frac{1}{x^2},$$

$$Q = 2\pi\mu(4x+\beta).$$

Постоянные α и γ выражаются через характерные для данной закрученной струи величины: импульс J_0, момент L_0 и физические константы ρ, μ. Что касается константы β, то ее появление, собственно говоря, связано не с закрученностью струи, а с уточнением приведенного в предыдущем параграфе решения для незакрученной струи за счет членов порядка $1/x^2$ в выражениях проекций скорости u, v и свободного члена в функции тока. Но предыдущее решение задачи для незакрученной струи было точным для источника с бесконечно малым диаметром выходного сечения. Как об этом легко заключить по последней формуле системы (198), члены, содержащие β, дают поправку на конечность начального расхода струи[1]). Пользуясь этой формулой и полагая в ней $x=0$, получим в принятом приближении (Q_0 — расход в начальном сечении)

$$\beta = \frac{Q_0}{2\pi\mu} = \frac{\pi d^2}{4}\frac{\rho U_0}{2\pi\mu} = \frac{U_0 d^2}{8\nu}. \qquad (199)$$

Отметим несколько важных с качественной стороны выводов. В то время как *продольная* и *поперечная скорости убывают обратно пропорционально первой степени расстояния от источника струи, окружная скорость* (закрутка) *убывает обратно пропорционально квадрату того же расстояния.* Этим объясняется тот факт, что при истечении из отверстия начальная закрутка не остается заметной вдалеке от выхода струи.

Максимальное значение окружной скорости

$$w_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\gamma}{x^2}$$

---

[1]) Решение, соответствующее конечному начальному диаметру истечения незакрученной струи, было получено впервые Ю. Б. Румером в статье: Задача о затопленной струе.— Прикл. матем. и мех., 1952, т. 16, вып. 2.

достигается на конусе [1])

$$\eta = \frac{2\sqrt{3}}{3\alpha}.$$

В дальнейшем вопрос о ламинарных струях подвергся математическому анализу со стороны М. А. Гольдштика [2]).

§ 116. Плоский нестационарный пограничный слой

Причина сравнительной сложности решения задач нестационарного пограничного слоя заключается, во-первых, в наличии в его уравнениях наряду с членами, выражающими конвективное ускорение, еще дополнительного члена — локального ускорения и, во-вторых, в появлении, наряду с граничными, еще начальных условий.

Известно, что соотношение между величинами локального и конвективного ускорений характеризуется порядком величины *числа Струхала*, равного частному от деления характерной для данного движения длины на произведение характерных скорости и времени. Существенные особенности нестационарных движений проявляются с достаточной отчетливостью при сравнительно больших значениях числа Струхала. При малых значениях этого параметра достаточно пользоваться *квазистационарными* приемами, т. е. рассматривать нестационарное явление в каждый момент так, как будто оно стационарно, но имеет в качестве определяющих параметров их мгновенные значения.

В настоящем общем курсе не представляется возможным углубляться в этот сложный раздел теории пограничного слоя и приходится удовольствоваться рассмотрением лишь одной простейшей задачи, представляющей интерес с точки зрения понимания механизма диффузии завихренности от места ее зарождения на поверхности обтекаемого тела. Это — задача о мгновенном (импульсивном) приведении в поступательное, равномерное, прямолинейное движение тела, погруженного в неподвижную безграничную вязкую, несжимаемую жидкость.

Если по условию задачи тело приобретает установившееся движение мгновенно, то этого нельзя сказать об окружающей его жидкости. Естественный интерес вызывают процессы установления движения жидкости во времени: зарождения и развития пограничного слоя на поверхности тела, появления отрыва и перемещения его вверх по течению, перехода пограничного слоя в его установившуюся форму, соответствующую стационарному обтеканию тела.

Возможность сравнительно простого решения этой задачи объясняется тем, что внешний, набегающий на тело безвихревой поток при поступательном, прямолинейном и равномерном движении тела стационарен, и скорость на поверхности тела определяется функцией только одной переменной x. Такое простое решение имеет место до начала возникновения отрыва и до тех пор, пока отрыв еще не получит своего полного развития, т. е. в начале разгонного участка.

Обратное влияние пограничного слоя на внешний поток на этапе развивающегося и перемещающегося отрыва станет заметным и приведет к появлению времени в числе аргументов скорости внешнего потока. Пользуясь сравнительной малостью продолжительности разгона и вводя время в определение толщины пограничного слоя, можно искать реше-

---

[1]) Теоретические исследования более сложных ламинарных струй см.: Коробко В. И. Теория неавтомодельных струй вязкой жидкости.— Изд-во Саратовского университета, 1977, ч. I, с. 3—138.

[2]) Гольдштик М. А. Вихревые потоки.— Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1981, с. 235—259.

ние задачи в виде ряда по степеням времени, сходимость которого при достаточно малых t обеспечена. Это обстоятельство также облегчает решение.

Уравнения нестационарного пограничного слоя будут отличаться наличием локального ускорения $\partial u/\partial t$ в левой части уравнения (11), граничными и начальными условиями. В рассматриваемом сейчас случае уравнения будут иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0;\\ u=U(x),\ v=0 \text{ при } y=0,\ t=0,\\ u=0, \quad v=0 \text{ при } y=0,\ t>0,\\ u\to U(x) \text{ при } y\to\infty,\\ u=U(0) \text{ при } x=0,\ y\geqslant 0,\ t\geqslant 0.\end{gathered} \tag{200}$$

Первая строка приведенных условий выражает тот факт, что в начальный момент $t=0$ пограничного слоя еще нет, и жидкость *скользит по контуру цилиндрического тела.* При малых значениях времени t пограничный слой еще очень тонок, скорости u близки к своему внешнему значению $U(x)$, а v мало отличается от нуля. Тогда первое из дифференциальных уравнений системы (200) можно привести к *линейному* виду, совпадающему по типу с известным уравнением теории теплопроводности в твердом теле (индексы при u, v, f и F в дальнейшем обозначают их принадлежность к соответствующему приближению)

$$\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}-\frac{\partial u_1}{\partial t}=0. \tag{201}$$

Полагая[1])

$$u_1=U(x)f_1(\eta), \quad \eta=y/(2\sqrt{\nu t}), \tag{202}$$

получим для определения $f_1(\eta)$ обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (штрих — производная по η)

$$f_1''+2\eta f_1'=0,$$

которое при принятых условиях (200) имеет решение в форме известной гауссовой функции ошибок

$$f_1=\operatorname{Erf}\eta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

что дает первое приближение для продольной скорости

$$u_1=U(x)\operatorname{Erf}\eta. \tag{203}$$

Пользуясь уравнением неразрывности, введем соответствующее этому первому приближению значение поперечной скорости

$$v_1=-2\sqrt{\nu t}\frac{dU}{dx}\left[\eta\operatorname{Erf}\eta-\frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-e^{-\eta^2})\right]. \tag{204}$$

Чтобы разыскать второе приближение, положим в первом уравнении системы (200) $u=u_1+u_2$, $v=v_1+v_2$.

---

[1]) Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.— Zeitschr. Math. u. Phys., 1908, Bd. 56, S. 1—37.

Тогда поправка u_2 определится из неоднородного также «теплового» по типу уравнения

$$\nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}-\frac{\partial u_2}{\partial t}=-U\frac{dU}{dx}+u_1\frac{du_1}{dx}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}=$$
$$=U\frac{dU}{dx}\left[\operatorname{Erf}^2\eta-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\operatorname{Erf}\eta-1+\frac{2}{\pi}\left(e^{-\eta^2}-e^{-2\eta^2}\right)\right]. \qquad (205)$$

Разыскивая u_2 в форме

$$u_2=tU\frac{dU}{dx}f_2(\eta), \qquad (206)$$

получим для определения функции $f_2(\eta)$ неоднородное уравнение

$$f_2''+2\eta f_2'-4f_2=4\left[\operatorname{Erf}^2\eta-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\operatorname{Erf}\eta-1+\frac{2}{\pi}\left(e^{-\eta^2}-e^{-2\eta^2}\right)\right], \qquad (207)$$

решение которого будет

$$f_2(\eta)=\frac{1}{2}(2\eta^2-1)\operatorname{Erf}^2\eta+\frac{3}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\operatorname{Erf}\eta+1-\frac{4}{3\pi}e^{-\eta^2}+$$
$$+\frac{2}{\pi}e^{-2\eta^2}+\alpha(2\eta^2+1)+\beta\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(2\eta^2+1)\operatorname{Erf}\eta+\eta e^{-\eta^2}\right]. \qquad (208)$$

Входящие сюда постоянные α и β определяются из принятых граничных условий обращения $f_2(\eta)$ в нуль при $\eta=0$ и $\eta=\infty$; найдем

$$\alpha=-\left(1+\frac{2}{3\pi}\right)=-1{,}212;\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)=0{,}804. \qquad (209)$$

Пользуясь вновь уравнением неразрывности, определим поперечную скорость v во *втором* приближении

$$v_2=2\sqrt{\nu t^3}\left[U\frac{d^2U}{dx^2}+\left(\frac{dU}{dx}\right)^2\right]\left\{\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{6}(2\eta^3-3\eta)\operatorname{Erf}^2\eta+\frac{1}{6\sqrt{\pi}}\left[4-(4\eta^2-1)e^{-\eta^2}\right]\operatorname{Erf}\eta-\eta-$$
$$-\frac{1}{3\pi}\eta e^{-\eta^2}-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\operatorname{Erf}(\eta\sqrt{2})+\left(1+\frac{2}{3\pi}\right)\left(\frac{2}{3}\eta^3+\eta\right)-$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)\left[\frac{\sqrt{\pi}}{6}(2\eta^3+3\eta)\operatorname{Erf}\eta+\frac{1}{3}(\eta^2+1)e^{-\eta^2}\right]\right\}. \qquad (210)$$

Поступая аналогичным образом и дальше, можно было бы разыскать и третье приближение [1]). Для этого пришлось бы решить неоднородное уравнение

$$\nu\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}-\frac{\partial u_3}{\partial t}=u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial u_2}{\partial y}+v_2\frac{\partial u_1}{\partial y}. \qquad (211)$$

Функция u_3 должна содержать в качестве множителя t^2 и будет иметь вид

$$u_3=t^2\left[U^2\frac{d^2U}{dx^2}f_3(\eta)+U\left(\frac{dU}{dx}\right)^2F_3(\eta)\right], \qquad (212)$$

где функции f_3 и F_3 удовлетворяют следующим неоднородным уравнениям:

$$f_3''+2\eta f_3'-8f_3=4\theta(\eta),\quad F_3''+2\eta F_3'-8F_3=4\theta(\eta)+4\Phi(\eta).$$

[1]) Goldstein S., Rosenhead L. Boundary-layer growth.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1936, v. 32, p. 392—401.

Выписывать в развернутом виде правые части не будем, отсылая интересующихся к только что цитированной работе Голдстейна и Розенхеда; в этой статье авторы не пожалели труда, чтобы вычислить величину поправки u_3 в замкнутом виде[1]). К сожалению, вопрос об области сходимости получаемых таким образом рядов функций

$$u=u_1+u_2+u_3+\ldots, \qquad v=v_1+v_2+v_3+\ldots$$

остается открытым.

Для разыскания связи между абсциссой точки отрыва x_s и соответствующим ей временем t_s определим корень уравнения $(\partial u/\partial y)_{y=0}=0$ или, что то же, $(\partial u/\partial \eta)_{\eta=0}=0$. Тогда получим во втором приближении

$$1+\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right)_s t_s=0. \tag{213}$$

Отрыв может произойти только в области отрицательного значения продольной производной от скорости на внешней границе слоя $\left(\frac{dU}{dx}<0\right)$ и начнется ранее всего в точке с максимальным по абсолютной величине значением этой производной. Промежуток времени t_s от начала движения до момента возникновения отрыва определится формулой

$$t_s=\frac{1}{\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)\left(-\frac{dU}{dx}\right)_{\max}}=\frac{0{,}702}{\left(-\frac{dU}{dx}\right)_{\max}}. \tag{214}$$

Замечательно, что *момент до начала возникновения отрыва на поверхности тела не зависит от физических свойств жидкости*: плотности и вязкости, а только от *максимального наклона кривой распределения внешней скорости.*

В случае круглого цилиндра радиуса a будет (x — дуга окружности, отсчитываемая от передней критической точки)

$$U(x)=2U_\infty \sin\left(\frac{x}{a}\right), \quad \frac{dU}{dx}=2\frac{U_\infty}{a}\cos\left(\frac{x}{a}\right). \tag{215}$$

Максимальное по абсолютной величине значение этой производной достигается при $x=\pi a$, в кормовой критической точке.

Время, по прошествии которого от момента начала движения отрыв пограничного слоя возникнет в кормовой критической точке, будет, согласно (214), равно

$$t_s=\frac{a}{2\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)U_\infty}=0{,}351\frac{a}{U_\infty}. \tag{216}$$

Путь σ, который цилиндр, двигаясь со скоростью U_∞, пройдет от начала движения до момента зарождения отрыва в задней кромке, определится равенством

$$\sigma=U_\infty t_s=0{,}351a \tag{217}$$

и равен примерно трети радиуса цилиндра. Третье приближение дает несколько меньшее значение

$$\sigma=0{,}32a. \tag{218}$$

На рис. 205 штриховой кривой показана зависимость угловой координаты θ_s^0 точки отрыва (в градусах), отсчитанной от передней крити-

[1]) Авторы допустили в этом расчете ошибки, которые были впоследствии указаны Вундтом (Wundt H. Wachstum der laminaren Grenzschicht an schräg angeströmten Zylinder bei Anfahrt aus der Ruhe.— Ing. Archiv, 1955, Bd. 23, № 3, S. 218) и приняты нами во внимание.

ческой точки круглого цилиндра, от безразмерного времени $\tau=tU_\infty/d$ (d — диаметр цилиндра). Кривая эта рассчитана по изложенному методу последовательных приближений. В промежутке времени от $\tau=0$ до $\tau_s=t_sU_\infty/d=0{,}16$ угол θ_s^0 не меняется и равен 180°. Затем, начиная с этого момента, угол θ_s^0 убывает, что соответствует перемещению точки отрыва по контуру цилиндра вверх по потоку. Сплошной кривой для сравнения показана та же зависимость, определенная приближенным методом, аналогичным методу Польгаузена [1]). В отличие от предыдущей, штриховой кривой, эта сплошная кривая асимптотически ($\tau\to\infty$) стремится к стационарному, завышенному, как раньше уже разъяснялось, значению угла точки отрыва (107°5′).

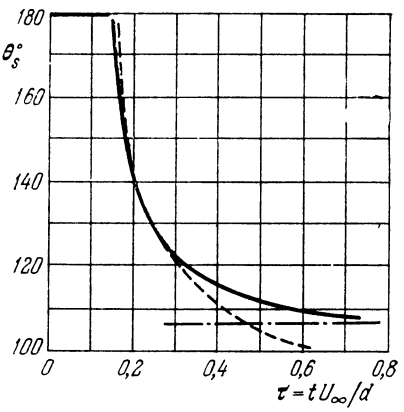


Рис. 205

Оба метода не учитывают обратного влияния развивающегося отрыва на внешний теоретический безвихревой поток, но в степенном методе Блазиуса, кроме того, теряется быстрота сходимости ряда с ростом времени τ, чем можно объяснить отсутствие асимптотического стремления к стационарному значению угловой координаты точки отрыва. По-видимому, степенное решение (в третьем приближении) пригодно по указанной причине лишь при $\tau\leqslant 0{,}3$.

В настоящее время детально изучены не только случай импульсивного приведения тела в равномерное поступательное движение, но также равноускоренное, со степенным и показательным ростом скорости. Решение этих и многих других задач нестационарного пограничного слоя можно найти в ранее упомянутых монографиях по теории пограничного слоя и цитированных в них оригинальных работах.

Вопрос об условиях отрыва нестационарного ламинарного пограничного слоя на движущейся поверхности рассматривается в обзоре Дж. Уильямса [2]).

Применение метода обобщенного подобия в теории нестационарного пограничного слоя, в связи со значительным увеличением числа параметров подобия, становится сложным и при современных возможностях ЭВМ выполнимым лишь в локальных приближениях [3]) либо при дополнительных упрощающих предположениях [4]).

---

[1]) Schuh H. Calculation of unsteady boundary layers in two-dimensional laminar flow.— Zeitschr. f. Flugwiss., 1953, Bd. 1, S. 122—131.

[2]) См. книгу: Вихревые движения жидкости: Устойчивость и отрыв пограничного слоя, свободные и квантовые вихри.— Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 21.— М.: Мир, 1979, с. 58—100.

[3]) Бушмарин О. Н, Сараев Ю. В. Параметрический метод в теории нестационарного пограничного слоя.— Инж.-физ. журн., 1974, т. 27, № 1; Бушмарин О. Н. Параметрический метод расчета нестационарного ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости с отсосом или вдувом.— Инж.-физ. журн., 1976, т. 31, № 4.

[4]) Djuric M. On the universal form of unsteady incompressible boundary layer equation and its solving.— Publ. de l'Instit. Math., Belgrad, 1969, v. 9; Ascović R. Quelques contributions à l'etude de la couche limite laminaire tridimensionelle en regime non stationaire, Rap. A—16 du Labor. d'Aerod. de l'Univ. Laval, Quebec, Canada, Juin, 1970; Saljnikov V. Sur une forme possible d'equations universelles de la couche limite laminaire instationaire.— C. R. Acad. Sci., Paris, 22 mars 1971, v. 272, p. 830—833; Saljnikov V., Djukic Dj. L'universalisation des equations de la couche limite laminaire instationaire, Recentes recherches sur les couches limites instationaires, Jutam Symposium 1971; Eichelbrenner E. A. ed., v. 1, Quebec, Canada, 1972, p. 168—205.

Приведенное решение наглядно показывает своеобразие процесса распространения влияния вязкости на обтекание приводимого в движение тела. Опыты подтверждают теоретическое описание явления. Достаточно внимательно рассмотреть известные фотографии Титьенса [1]), описывающие начало движения круглого цилиндра в водяном лотке, чтобы убедиться в справедливости этого утверждения. На этих фотографиях отчетливо наблюдается, как вначале отсутствующий пограничный слой постепенно *утолщается* до тех пор, пока при некоторой максимальной толщине вблизи *кормовой критической точки* цилиндра не возникает *отрыв* слоя. В дальнейшем этот отрыв развивается и распространяется, стремясь занять свое *предельное положение*, соответствующее *установившемуся обтеканию цилиндра.*

Результаты экспериментов по измерению распределений давления по поверхности круглого цилиндра на разных стадиях его движения из состояния покоя, выполненных М. Швабе [2]), подтверждают, что *в начале движения распределение давлений очень близко к теоретическому,* соответствующему *безвихревому обтеканию цилиндра идеальной жидкостью.* Это также говорит о том, что в начале движения пограничный слой даже на таком плохо обтекаемом в установившемся движении теле, как круглый цилиндр, весьма *тонок, полностью охватывает поверхность тела* и поэтому *не оказывает заметного обратного влияния на внешний поток.* Только после зарождения отрыва и перемещения его от задней кромки цилиндра вверх по потоку появляется резкая деформация кривой распределения давления, заканчивающаяся переходом к тому обычному распределению, которое наблюдается при *реальном* установившемся обтекании цилиндра.

Аналогично, если тело совершает установившееся движение и в некоторый момент времени это движение нарушается, например внезапно меняется угол атаки крыла, то переход к новому установившемуся движению, соответствующему новому положению крыла в потоке, не происходит столь же быстро, как изменение угла атаки, а *запаздывает.* На реконструкцию обтекания, в связи с действием в пограничном слое вязких сил, необходимо некоторое *конечное время.* За счет такого рода затягивания плавного обтекания крыла на закритические углы атаки можно *на короткое время* получить *заметное увеличение коэффициента максимальной подъемной силы крыла* (динамический коэффициент подъемной силы).

Математические трудности, возникающие при рассмотрении задач теории нестационарного ламинарного пограничного слоя, освещены в обзоре Д. Т. Стюарта [3]). Пример периодического слоя [4]) разобран в четвертом издании настоящего курса (с. 602—604).

§ 117. Температурный и концентрационный пограничные слои в несжимаемой жидкости

Удовольствуемся в настоящем параграфе рассмотрением простейшего случая несжимаемой вязкой жидкости с постоянными физическими характеристиками (плотностью, коэффициентами вязкости, тепло-

[1]) См., например, Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем., М.: Наука, 1974, с. 42 или Голдстейн С. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Т. I: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1948, фото 7—8.

[2]) Schwabe M. S. Über Druckermittlung in der nichtstationären ebenen Strömung.— Ing.-Archiv, 1935, Bd. 6.

[3]) Stuart J. T. Unsteady boundary layers, ранее цитированный сборник докладов на симпозиуме в Канаде, т. 1, с. 1; там же приводятся результаты разнообразных исследований нестационарных как ламинарных, так и турбулентных пограничных слоев.

[4]) Lin C. C. Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow.— Proc. 9-th Intern. Congr. Appl. Mech., Brüssel, 1957, v. 4, p. 155—167.

проводности, диффузии), что вполне допустимо, если скорости движения значительно меньше скорости звука и малы разности температур и концентраций примесей. Кроме того, будем пренебрегать диссипацией механической энергии и внутренними источниками возникновения тепла и вещества. В последней главе курса, посвященной динамике и термодинамике газа при больших скоростях, эти ограничения общности постановки задач о тепломассопереносе будут сняты.

Как было указано в начале главы, при больших значениях рейнольдсова числа потока **Re** и чисел **Pe**, $\mathbf{Pe}_d$, наряду со *скоростными* пограничными слоями, будут образовываться *температурные* и диффузионные *концентрационные* пограничные слои. В этих тонких по сравнению с характерным для потока линейным размером слоях быстрота изменения температуры или концентрации в поперечном к потоку направлении будет значительно превышать изменения в продольном направлении.

Этот важный факт позволяет представить уравнения распространения тепла (174) и вещества (182) гл. X при больших значениях теплового и диффузионного чисел Пекле в форме (довольствуемся плоским стационарным движением)

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},\quad u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}=D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \tag{219}$$

Напоминаем, что здесь a и D — коэффициенты температуропроводности и диффузии. Эти уравнения температурного и диффузионного пограничных слоев должны решаться совместно с уравнениями скоростного пограничного слоя

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{220}$$

которые в принятой постановке являются автономными, не зависящими от решений уравнений (219). Наоборот, уравнения (219) требуют для своего решения знания поля скоростей, т. е. предварительного решения динамической задачи (220).

В качестве граничных условий для уравнений (219) примем следующие:

$$\begin{gathered}T=T_w,\quad c=c_w \text{ при } y=0,\quad T\to T_\infty,\quad c\to c_\infty \text{ при } y\to\infty,\\ T=T_0(y),\quad c=c_0(y) \text{ при } x=x_0,\end{gathered} \tag{221}$$

причем будем предполагать, что температура обтекаемой поверхности T_w и температура T_∞ набегающего потока не зависят от x, т. е. одинаковы вдоль температурного пограничного слоя. Точно так же будем считать одинаковыми вдоль потока и концентрации примеси вещества на поверхности c_w и вдалеке от нее c_∞.

Покажем, что в условиях существования автомодельного решения для скоростного пограничного слоя (§ 111) уравнения (219) также будут иметь автомодельные решения. Достаточно показать это для первого из уравнений (219).

Введем безразмерную температуру θ, относя разность температур T_w-T к характерному для нее масштабу — разности T_w-T_∞. Будем иметь

$$\theta(\xi)=\frac{T_w-T}{T_w-T_\infty},\quad \Phi(\xi)=\frac{\psi}{U\delta},\quad \xi=\frac{y}{\delta},$$

$$T=T_w-(T_w-T_\infty)\theta(\xi). \tag{222}$$

Вспоминая выражения (86) для производных $\partial\psi/\partial y=u$, $\partial\psi/\partial x=-v$ и непосредственно вычислив (точка — знак дифференцирования по ξ, штрих — по x) производные:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=(T_\infty-T_w)\,\dot\theta\left(-\xi\frac{\delta'}{\delta}\right)=-\frac{1}{2}\frac{z'}{z}(T_\infty-T_w)\,\xi\dot\theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=(T_\infty-T_w)\,\dot\theta\,\frac{1}{\delta},\quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=(T_\infty-T_w)\,\ddot\theta\,\frac{1}{\delta^2},$$

подставим эти выражения в первое из уравнений (219). Тогда после очевидного сокращения членов, содержащих произведение $\Phi\dot\theta$, получим искомое уравнение в переменных подобия

$$\ddot\theta+\sigma\left(\beta+\frac{1}{2}\bar\beta\right)\Phi\dot\theta=0, \tag{223}$$

где число Прандтля Pr, для краткости обозначенное буквой σ, как уже было указано ранее, равно отношению ν/a кинематического коэффициента вязкости ν к коэффициенту температуропроводности a.

Уравнение (223) интегрируется и дает решение в форме квадратуры. При принятых граничных условиях (221) решение это [$\bar\beta=2(1-\beta)$] имеет вид

$$\theta(\xi;\beta,\sigma)=\left[\int_0^\xi\exp\left(-\sigma\int_0^\xi\Phi\,d\xi\right)d\xi\right]\Big/\left[\int_0^\infty\exp\left(-\sigma\int_0^\xi\Phi\,d\xi\right)d\xi\right], \tag{224}$$

причем входящие сюда значения функции $\Phi(\xi;\beta)$ могут быть получены интегрированием по ξ значений $\dot\Phi(\xi,\beta)$, представленных в табл. 15.

Как об этом легко заключить по (219) и (221), точно такая же квадратура (224) определит и автомодельное распределение концентрации

$$\theta_d=\frac{c_w-c}{c_w-c_\infty}=\theta(\xi;\beta,\sigma_d), \tag{225}$$

где подстрочный индекс d относится к распределению концентраций и соответствующему ему числу Шмидта ($\mathrm{Sc}=\mathrm{Pr}_d=\sigma_d$).

Не имея возможности привести занимающие большой объем таблицы или графики распределений $\theta(\xi;\beta,\sigma)$, эквивалентных им по форме распределений $\theta(\xi;\beta,\sigma_d)$ и даже менее громоздких и наиболее важных для расчетов температурных и концентрационных слоев распределений $\dot\theta(0;\beta,\sigma)$, $\dot\theta(0;\beta,\sigma_d)$, отошлем интересующихся к уже ранее цитированной монографии Эванса, где эти распределения приводятся и подробно анализируются.

Вспоминая помещенные в начале настоящей главы рассуждения о сравнительной толщине скоростных, температурных и концентрационных пограничных слоев в зависимости от величин чисел Прандтля и Шмидта, дополним их аналогичными сведениями, относящимися к одному и тому же значению этих чисел, равному единице, но различным величинам β.

Если $\beta>0$, что соответствует, как уже было выяснено в § 111, конфузорному участку пограничного слоя с ускоряющимся движением жидкости на внешней его границе, то *температурный* (так же, как и *концентрационный*) *пограничный слой толще скоростного*. Если $\beta<0$ (диффузорный участок с замедленным движением жидкости на внешней границе пограничного слоя), то температурный (концентрационный) слой тоньше скоростного. Эта закономерность, строго выполняемая в автомодельных пограничных слоях в несжимаемой жидкости, сохраняет свое

значение и в газовых потоках больших скоростей и перепадов температур.

Остановимся подробнее на двух случаях теплопереноса, соответствующих значениям $\beta=0$ и $\beta=1$.

В первом случае ($\beta=0$) имеет место теплоперенос с поверхности продольно обтекаемой пластинки[1]). Примем за функцию Φ ее *нормированное* значение Φ_0^*, заданное стандартной формой уравнения Блазиуса (34). Тогда, замечая, что, согласно этому уравнению, будет

$$\Phi_0^*=-\frac{\dddot{\Phi}_0^*}{\ddot{\Phi}_0^*},\quad \int_0^\xi \Phi_0^*\,d\xi=-\int_0^\xi \frac{\dddot{\Phi}_0^*}{\ddot{\Phi}_0^*}\,d\xi=-\ln\frac{\ddot{\Phi}_0^*(\xi)}{\ddot{\Phi}_0^*(0)},$$

$$\exp\left(-\sigma\int_0^\xi \Phi_0^*\,d\xi\right)=\left[\frac{\ddot{\Phi}_0^*(\xi)}{\ddot{\Phi}_0^*(0)}\right]^\sigma,$$

найдем искомое решение (224) в следующей простой форме:

$$\theta(\xi)=\frac{\int_0^\xi [\ddot{\Phi}_0^*(\xi)]^\sigma\,d\xi}{\int_0^\infty [\ddot{\Phi}_0^*(\xi)]^\sigma\,d\xi}. \tag{226}$$

При числе Прандтля $\sigma=1$ из этого равенства следует

$$\theta(\xi)=\frac{T_w-T}{T_w-T_\infty}=\dot{\Phi}_0^*(\xi)=\frac{u}{U_\infty}, \tag{227}$$

что выражает условие подобия при $\sigma=1$ распределений: 1) разности между температурой на стенке и в данной точке сечения пограничного слоя и 2) скорости потока в том же сечении.

В общем случае ($\sigma\neq 1$) распределение $\theta(y)$ в температурном пограничном слое не подобно распределению $u(y)$ в гидродинамическом слое. Для обычных газов σ сравнительно мало отличается от единицы и разница между кривыми $\theta(\xi)$ и $\dot{\Phi}_0^*(\xi)$ невелика. Для жидкостей σ изменяется в широких пределах ($\sigma\gg 1$ для вязких масел, глицерина; $\sigma\ll 1$ для жидких металлов) и разница становится весьма заметной. На рис. 206 приведены кривые распределения $\theta(\xi)$ для нескольких значений σ, подтверждающие сказанное; кривая для $\sigma=1$ представляет одновременно и распределение безразмерной скорости u/U_∞.

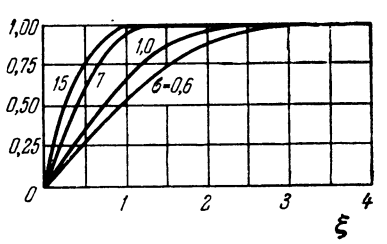


Рис. 206

На рис. 206 отчетливо видна установленная в начале настоящей главы закономерность, заключающаяся в том, что толщина температурного пограничного слоя возрастает с уменьшением числа Прандтля σ, совпадая с толщиной скоростного пограничного слоя только при $\sigma=1$. При $\sigma>1$ *температурный слой тоньше скоростного*, а при $\sigma<1$, наоборот, *скоростной пограничный слой тоньше температурного.*

---

[1]) Pohlhausen E. Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung.— Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1921, Bd. 1, S. 115.

Определим местный коэффициент теплоотдачи $\alpha(x)$, равный

$$\alpha(x)=\frac{q_w}{|T_w-T_\infty|}=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w\frac{1}{|T_w-T_\infty|}=$$

$$=\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}=\frac{1}{2x}\lambda f(\sigma)\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \quad (228)$$

где q_w — проекция вектора потока тепла q^* ((173) гл. X) на нормаль к поверхности, т. е. секундное количество тепла, переносимого через единицу площади этой поверхности, а

$$f(\sigma)=\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0}=[\ddot{\Phi}_0^*(0)]^\sigma\left\{\int_0^\infty[\ddot{\Phi}_0^*(\xi)]^\sigma d\xi\right\}^{-1}; \quad \mathrm{Re}_x=\frac{U_\infty x}{\nu}, \quad (229)$$

и найдем *местное число Нуссельта*

$$\mathrm{Nu}_x=\frac{\alpha x}{\lambda}=\frac{1}{2}f(\sigma)\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \quad (230)$$

характеризующее теплоотдачу в данной точке поверхности пластинки. Функция $f(\sigma)$, вычисленная Э. Польгаузеном, в интервале $0{,}6\leqslant\sigma\leqslant15$ равна [1])

$$f(\sigma)\approx0{,}664\sqrt[3]{\sigma}, \quad (231)$$

так что в этом интервале чисел Прандтля можно пользоваться локальной формулой теплоотдачи

$$\mathrm{Nu}_x\approx0{,}332\sqrt[3]{\sigma}\sqrt{\mathrm{Re}_x}. \quad (232)$$

Производя интегрирование по всей длине пластинки L, получим выражение общего числа Нуссельта Nu пластинки

$$\mathrm{Nu}=\frac{Q}{\lambda|T_w-T_\infty|}=\frac{\int_0^L q_w\,dx}{\lambda|T_w-T_\infty|}=\frac{1}{2}f(\sigma)\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}\int_0^L\frac{dx}{\sqrt{x}}=f(\sigma)\sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}, \quad (233)$$

или в приближенной форме для указанного ранее диапазона чисел Прандтля

$$\mathrm{Nu}\approx0{,}664\sqrt[3]{\sigma}\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}; \quad \mathrm{Re}_\infty=\frac{U_\infty L}{\nu}. \quad (234)$$

Аналогичные формулы получим и для местного коэффициента массопереноса (q_d — секундное количество вещества, переносимого через единицу площади)

$$\alpha_d=\frac{q_d}{|c_w-c_\infty|}=\frac{D\left|\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{y=0}}{|c_w-c_\infty|},$$

и соответственно местное диффузионное число Нуссельта

$$\mathrm{Nu}_{xd}=\frac{\alpha_d x}{D}=\frac{1}{2}f(\sigma_d)\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \quad (235)$$

[1]) Опыты Элиаса (Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1929, Bd. 9, S. 434—453, и в том же журнале, 1930, Bd. 10, S. 1—14) подтвердили теоретические результаты Э. Польгаузена.

и суммарное диффузионное число Нуссельта для всей поверхности пластинки

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{Q_d}{D\,|c_w - c_\infty|} = \frac{\int_0^L D \left|\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{y=0} dx}{D\,|c_w - c_\infty|} = f(\sigma_d)\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}. \tag{236}$$

В случае произвольного β местное число Нуссельта определяется формулой

$$\mathrm{Nu}_x = K(\sigma; \beta)\,\mathrm{Re}_x^{1/2}, \tag{237}$$

где положено

$$K(\sigma; \beta) = (2-\beta)^{-1/2}\left\{\int_0^\infty \exp\left[-\sigma\int_0^\xi \Phi^*(\xi)\,d\xi\right]d\xi\right\}^{-1}. \tag{238}$$

Температурному пограничному слою вблизи лобовой критической точки на цилиндрическом теле соответствует $U = cx$, $\beta = 1$. В этом случае местное число Нуссельта будет равно

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = K(\sigma; 1)\,\mathrm{Re}_x^{1/2} = K(\sigma; 1)\sqrt{\frac{c}{\nu}}\,x, \tag{239}$$

где коэффициент $K(\sigma; 1)$ определяется по следующей таблице:

σ	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7,0	10	15
$K(\sigma; 1)$	0,466	0,495	0,521	0,546	0,570	0,592	1,18	1,34	1,54

Для круглого цилиндра диаметра d вблизи лобовой критической точки

$$U = 2U_\infty \sin\frac{2x}{d} \approx 4U_\infty x/d = cx,$$

так что $c = 4U_\infty/d$, и формула (239) приведется к виду

$$\mathrm{Nu}_x = 2K(\sigma; 1)\left(\frac{U_\infty d}{\nu}\right)^{1/2}\frac{x}{d}. \tag{240}$$

Теория *теплоотдачи* с поверхности вращающегося диска в безграничной и ограниченной областях движения вязкой жидкости в ламинарном режиме изложена в ранее уже цитированной монографии Л. А. Дорфмана. Тепломассообмен в *неньютоновских* жидкостях освещен в сборнике статей [1]).

Для расчета тепловых и концентрационных пограничных слоев с произвольным распределением скорости на внешней границе скоростного пограничного слоя можно применять метод обобщенного подобия. Автономное уравнение гидродинамики (220) известным образом (§ 113) приводится к универсальной форме. Вводя дополнительную последовательность тепловых параметров, можно привести к универсальному виду и уравнения (219) [2]).

[1]) Тепломассообмен в неньютоновских жидкостях/Сб. статей под ред. Лыкова А. В. и Смольского Б. М.— М.: Энергия, 1968.

[2]) Этому вопросу посвящена статья: Saljnikov V., Djordjevic V. Universalisierung der Gleichung vom Temperaturengrenzschichtproblem — Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1968, Bd. 48, № 8, S. 237—241.

Применение метода обобщенного подобия покажем в последней главе курса для более общего случая газового потока больших скоростей и значительных перепадов температур.

Примером задачи, для которой уравнение скоростного пограничного слоя не будет автономным, а окажется связанным с уравнением температурного пограничного слоя, может служить задача о *свободной ламинарной конвекции*[1]) несжимаемой жидкости вблизи поверхности вертикальной пластинки бесконечной длины, но ограниченной нижней кромкой. Температура пластинки T_w поддерживается постоянной; температура окружающей среды вдали от пластинки равна T_∞.

Движение в пограничном слое вызывается в данном случае наличием подъемной (архимедовой) силы, удельное (отнесенное к единице массы) значение которой может быть представлено в форме

$$g\frac{T-T_\infty}{T_\infty}=g\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}\frac{T_w-T_\infty}{T_\infty}=g\Theta\frac{T_w-T_\infty}{T_\infty}. \tag{241}$$

Уравнения движения и распространения тепла в скоростном и температурном пограничных слоях будут

$$\begin{gathered}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\frac{T_w-T_\infty}{T_\infty}\Theta,\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad u\frac{\partial\Theta}{\partial x}+v\frac{\partial\Theta}{\partial y}=a\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2};\\ u=v=0,\quad \Theta=1 \text{ при } y=0;\quad u=0,\quad \Theta=0 \text{ при } y=\infty.\end{gathered} \tag{242}$$

Вводя новые переменные (ψ — функция тока)

$$\begin{gathered}\xi=\left[\frac{g(T_w-T_\infty)}{4\nu^2T_\infty}\right]^{1/4}\frac{y}{x^{1/4}}=C\frac{y}{x^{1/4}},\\ \psi(x,\,y)=4\nu Cx^{3/4}\Phi(\xi),\quad \Theta(x,\,y)=\vartheta(\xi),\\ C=\left[\frac{g(T_w-T_\infty)}{4\nu^2T_\infty}\right]^{1/4},\end{gathered} \tag{243}$$

выбор которых может быть сделан на основании соображений размерностей или из условия автомодельности задачи, придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\dddot{\Phi}+3\Phi\ddot{\Phi}-2\dot{\Phi}^2+\vartheta=0,\quad \ddot{\vartheta}+3\sigma\Phi\dot{\vartheta}=0,\\ \Phi(0)=\dot{\Phi}(0)=0,\quad \vartheta(0)=1;\quad \dot{\Phi}(\infty)=\vartheta(\infty)=0.\end{gathered} \tag{244}$$

Помещая на нижней кромке пластинки начало координат ($x=0$), будем иметь еще условия: $u=0$, $\vartheta=0$ при $x=0$.

Уравнения (244) были проинтегрированы при помощи разложений в ряды Э. Польгаузеном[2]) для воздуха ($\sigma=0{,}733$).

На рис. 207 и 208 показаны безразмерные профили температур и скоростей в сечениях слоя, рассчитанные теоретически; там же приво-

[1]) Обширному кругу задач ламинарной свободной конвекции посвящена монография: Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1972, авторы которой возглавляют пользующуюся широкой известностью школу в Пермском государственном университете. Разнообразные математические методы решения задачи о свободной конвекции вблизи вертикальной поверхности изложены в недавно появившейся монографии: Соковишин Ю. А., Мартыненко О. Г. Введение в теорию свободно-конвективного теплообмена.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.

[2]) Pohlhausen E. Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung.— Zeitschr. f. Angew. Math. u. Mech., 1921, Bd. 1, S. 115.

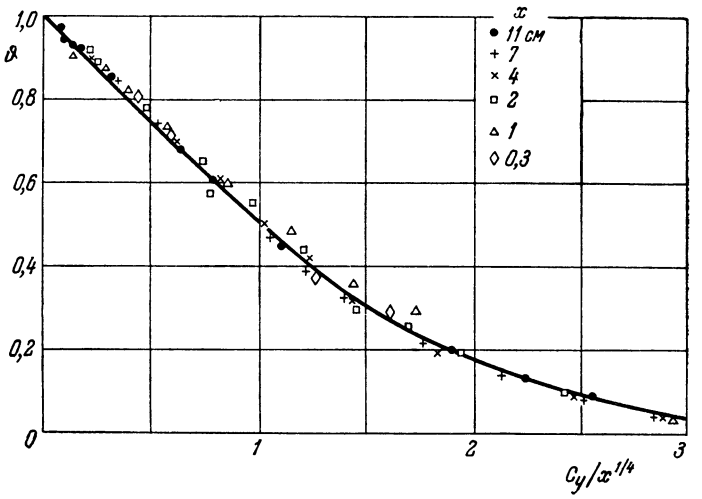


Рис. 207

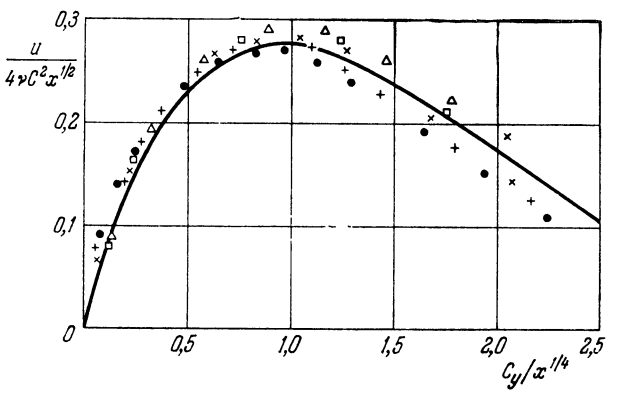


Рис. 208

дятся экспериментальные точки[1]), находящиеся во вполне удовлетворительном совпадении с теорией. Теоретическое значение местного числа Нуссельта в точке, находящейся на высоте h от нижнего края пластинки, равно

$$\mathrm{Nu}_h = \frac{\alpha h}{\lambda} = 0{,}508\left[\frac{gh^3(T_w - T_\infty)}{4\nu^2 T_\infty}\right]^{1/4} = 0{,}359\,(\mathrm{Gr})^{1/4}, \qquad (245)$$

где используется число Грасгофа, равное (§ 95)

$$\mathrm{Gr} = \frac{gh^3(T_w - T_\infty)}{\nu^2 T_\infty}.$$

Неавтомодельный случай свободной конвекции на поверхности вертикально расположенной пластинки при *произвольном* задании температуры или потока тепла на ее поверхности исследовал методом *обобщенного подобия* аспирант кафедры гидроаэродинамики ЛПИ им. М. И. Калинина Н. Л. Золотов[2]).

[1]) Опыты Элиаса (Zeitschr. f. Angew. Math. u. Mech., 1929, Bd. 9, S. 434—453).

[2]) Золотов Н. Л. Метод обобщенного подобия в задачах свободной конвекции с произвольным распределением температуры или теплового потока на вертикальной стенке.— Мех. жидк. и газа. 1980, № 3; Золотов Н. Л. Двухпараметрическое решение задачи о свободной конвекции вблизи вертикальной неизотермической пластины.— Мех. жидк. и газа, 1980, № 5, с. 490—492.

ГЛАВА XIII

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 118. Неустойчивость ламинарных режимов течений и возникновение турбулентности

Рассмотренные в предыдущих двух главах движения вязкой жидкости относились к числу *ламинарных* движений. Траектории частиц, линии тока, поля скоростей и давлений в этих движениях имели совершенно определенный, «регулярный» характер. Выражением этой регулярности ламинарного движения служил тот факт, что общая картина наблюдающихся в действительности ламинарных движений и многие их детали достаточно хорошо описывались решениями уравнений Навье — Стокса при соответствующих, также «регулярных», начальных и граничных условиях. Можно, например, вспомнить *пуазейлево движение* вязкой жидкости по круглой трубе, соответствие теоретически рассчитанных характеристик которого (парабола скоростей, формулы расхода и сопротивления) опытным данным уже давно блестяще подтверждено. То же относится к многочисленным другим примерам ламинарных движений вязкой жидкости: движению *смазки в узких зазорах между валом и цапфой подшипника*, вполне удовлетворительно описываемому гидродинамической теорией смазки подшипников, движениям в *ламинарных пограничных слоях*, с достаточной точностью рассчитываемым по теории, изложенной в предыдущей главе, и др.

Отмеченное совпадение результатов расчетов ламинарных течений с экспериментом служит основой для заключения о справедливости уравнений Навье — Стокса и их применимости для теоретического описания движений вязкой жидкости. Не следует, однако, думать, что отсутствие в ряде случаев возможности сделать такое заключение может служить основанием для утверждения о несоответствии теории действительности.

Наличие в реальных условиях разнообразных, чаще всего малых по величине *случайных* отклонений или «возмущений» может либо очень слабо изменить рассматриваемое движение — это будет говорить об *устойчивости движения по отношению к малым возмущениям*,— либо полностью его исказить, что имеет место при *неустойчивости* движения. Таким образом, в действительности наблюдаются только те из решений уравнений Навье — Стокса, которые являются *устойчивыми* по отношению к возможным возмущениям.

В устойчивых движениях возникшие случайно или введенные по воле исследователя в поток малые возмущения не развиваются с течением времени, а, наоборот, затухают, не влияя заметно на происходящие в потоке жидкости процессы. В противоположность этому в неустойчивых движениях малые вначале возмущения растут, существенно изменяя характер начального движения и способствуя его переходу либо к новому устойчивому движению, если таковое имеется среди возможных решений уравнений Навье — Стокса, либо к некоторому *хаотическому*, образованному нерегулярно движущимися и взаимодействующими между собой жидкими массами. Процессы возникновения и развития такого рода движений, так же как и их разрушения, носят случайный характер, требуя для своего изучения *статистических* подходов.

Эта форма движений вязкой жидкости, широко распространенная в природе и технических устройствах, носит наименование *турбулентных движений*. Турбулентными являются движения воздуха в атмосфере, течения воды в морях, океанах, реках и каналах, в водопроводных трубах, в газопроводах, турбинах, насосах и компрессорах, в соплах ракетных и реактивных двигателей.

Характерные особенности турбулентного движения просто обнаруживаются, если, например, смотреть с моста на поверхность воды в канале, покрытую мелким плавающим сором или налетом нефти. Можно заметить, как отдельные тела, участвуя в среднем течении воды в канале, совершают вместе с тем замысловатые *поперечные*, а вблизи берегов даже *попятные* движения. Аналогичные движения можно наблюдать за бортом корабля, особенно вблизи кормовой его части.

Исторически первыми научными наблюдениями турбулентного движения были известные, относящиеся к 1883 г. опыты английского физика О. Рейнольдса, в которых он изучал движение воды в круглой цилиндрической трубе. При повышении скорости ламинарно движущейся жидкости было замечено, как на подкрашенную и хорошо видимую вначале прямолинейную струйку начинают накладываться волны, распространение которых вдоль струйки говорит о появлении возмущений в ранее спокойном прямолинейном движении. Постепенно с ростом скорости воды число таких волн и их амплитуда возрастают, пока, наконец, струйка не разобьется на нерегулярные, перемешивающиеся между собой более мелкие струйки, хаотический характер которых позволяет судить о переходе ламинарного движения в турбулентное. Описанная картина перехода полностью соответствует указанной ранее причине этого перехода. С возрастанием скорости ламинарное движение *теряет свою устойчивость*; при этом случайные возмущения, которые вначале вызывали лишь колебания струек вокруг устойчивого их прямолинейного положения, быстро развиваются и приводят к новой форме движения жидкости — турбулентному движению.

В этих опытах Рейнольдс впервые обнаружил, что переход ламинарного движения в турбулентное обусловливается достижением критического значения некоторого безразмерного числа, или *критерия*, которое в дальнейшем получило его имя. По опытам самого Рейнольдса критическое число оказалось равным $\mathrm{Re}_{кр} = (u_{ср} d/\nu)_{кр} = 1{,}3 \cdot 10^4$; здесь $u_{ср}$ — средняя по расходу скорость, d — диаметр трубы, ν — кинематический коэффициент вязкости. Впоследствии[1]) им же было открыто существование такого *нижнего критического* значения $\mathrm{Re}_{кр}$, приблизительно равного 2000, что при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ движение в трубе оставалось ламинарным, каковы бы ни были введенные в течение возмущения. Вместе с тем было замечено, что путем удаления возмущений на входе в трубу или уменьшения начальной их интенсивности можно искусственно затянуть ламинарное движение в область значительно больших значений числа Рейнольдса. В частности, значение $1{,}3 \cdot 10^4$, полученное Рейнольдсом, объяснялось наличием плавного входа в трубу в его опытах. Однако не удалось получить определенное значение для *верхней* границы критического числа; эта граница многократно отодвигалась все более и более тщательными опытами[2]) и была доведена чуть ли не до числа $5 \cdot 10^4$. Конечно, такое затянутое ламинарное движение не терпит появления даже очень небольших возмущений и сразу же переходит в турбулентное.

---

[1]) Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion.— Phyl. Trans. of the Royal Soc., 1895 (русский перевод в кн.: Проблемы турбулентности.— М.: ОНТИ, 1936, с. 185 и след.).

[2]) См. гл. V монографии: Шиллер Л. Движение жидкостей в трубах.— М.: ОНТИ, 1936.

Оставляя в стороне вопрос об опытных значениях критического рейнольдсова числа для цилиндрических труб с различной формой сечений[1]), заметим, что на критическое число $\mathrm{Re}_{кр}$ сильно влияет отклонение трубы от цилиндричности, т. е. *диффузорность* или *конфузорность* трубы. Так, в сходящихся трубах (конфузорах) $\mathrm{Re}_{кр}$ превышает соответствующее число для цилиндрической трубы и, наоборот, в расширяющихся каналах (диффузорах) $\mathrm{Re}_{кр}$ сравнительно мало.

Отметим и в дальнейшем подтвердим опытными материалами, что встречающаяся на практике *шероховатость* стенок не влияет на значение критического числа Рейнольдса, что и естественно, так как нижнее число Рейнольдса связано с устойчивостью потока, а не с наличием или отсутствием возмущений в нем.

Математическая теория устойчивости ламинарных течений в настоящее время хорошо разработана. В русском переводе имеется монография: Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971, которая освещает состояние этого вопроса в простом и ясном изложении и с большим числом самых разнообразных приложений, включая магнитогидродинамические и вязкоупругие течения, а также течения газа со взвешенными в нем твердыми частицами. Эта монография в значительной степени может восполнить имеющийся в настоящем курсе пробел.

Простейшим разделом общей теории устойчивости ламинарных движений является теория устойчивости ламинарного потока по отношению к *малым* возмущениям. Эта *линейная* теория получила наибольшее развитие и излагается во многих специальных курсах и монографиях[2]).

В последние годы стала развиваться *нелинейная* теория гидродинамической устойчивости. Основы ее изложены в конце обзора, составленного Дж. Стюартом и помещенного в только что цитированном руководстве под ред. С. Розенхеда (с. 562—578). Эта часть теории устойчивости также пользуется методами теории колебаний, но изучает развитие возмущений конечной амплитуды[3]). Но вопрос об устойчивости ламинарного движения относится лишь к *начальной* стадии явления *перехода* от ламинарного движения к турбулентному. Основное значение приобретают *собственно переходные* явления, представляющие развитие тех случайных возмущений, которые существовали в потоке до потери им устойчивости или в момент потери устойчивости, но заметно возросли только после потери устойчивости и привели в конечном счете к развитому турбулентному движению.

Появившиеся в последние десятилетия исследования в этом направлении показывают, что нелинейные эффекты в вязких потоках крайне своеобразны. Чрезвычайно характерны в этом смысле явления, возни-

---

[1]) См. только что цитированную монографию Л. Шиллера, гл. VI.

[2]) Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II.— 4-е изд.— М.: Физматгиз, 1963, с. 658—686; Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Гостехиздат, 1955, с. 385—432; Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя, гл. XVI и XVII.— М.: Наука, 1974; Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958; Laminar boundary layers, ed. by Rosenhead S.— Oxford: Clarendon Press, 1963, p. 492—578; Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. I. Раздел «Гидродинамическая неустойчивость и возникновение турбулентности».— М.: Наука, 1965, с. 77—161. Этот список дополняет только что цитированная монография Бетчова Р. и Криминале В. См. также Решотко Э. Устойчивость ламинарного пограничного слоя и его переход в турбулентный (ранее цитированный сборник обзоров «Механика. Новое в зарубежной науке». Вып. 21— М.: Мир, 1979, с. 11—57).

[3]) Краткий обзор работ этого направления с подробной библиографией можно найти в докладе Г. Гертлера и В. Вельте на симпозиуме по турбулентности в г. Киото (Япония) 19—24 сентября 1966 г. (Görtler H., Welte W. Recent mathematical treatments of laminar flow transition problems.— Physics of Fluids: P. II, 1966, v. 10, № 9). См. также обзор: Stuart J. T. Nonlinear stability theory.— Annual Review of Fluid Mechanics, 1971, v. 3, p. 347—370.

кающие в круглой трубе при переходе рейнольдсова числа через критическое значение. Явления эти свойственны и другим случаям ламинарного движения вязкой жидкости, в частности куэттовскому движению между движущимися параллельными плоскостями, между поверхностями вращающихся соосных цилиндров и в пограничных слоях.

При входе в начальный участок трубы поток несет возмущения разнообразной природы. Это могут быть либо возмущения, пришедшие извне, например из помещения, в котором расположена всасывающая воздух труба, или из резервуара с водой, вытекающей через трубу, либо возмущения, образовавшиеся из-за неплавности входа в трубу. Последняя причина обычно бывает доминирующей. Как упоминалось выше, уже Рейнольдс в своих первых опытах заметил, что при значениях **Re**, еще далеких от критических, по прямолинейным струйкам краски в начальном участке трубы пробегают дискретные волны или группы волн, затухающие вниз по течению. Эти накладывающиеся на ламинарный поток возмущения по мере приближения его к критическому состоянию становятся все более интенсивными и расплывчатыми, пока, наконец, не заполнят всю область течения и поток станет полностью турбулентным.

Было отмечено последующими исследователями (Л. Шиллер и др.), что первичные возникновения этих сравнительно редких по частоте появления возмущений не оказывают влияния ни на профили скоростей в сечениях трубы, ни на общее сопротивление трубы. Только в непосредственной близости к кризису влияние этих волн становится заметным: искажаются профили скоростей, изменяется закон сопротивления.

Тщательное исследование потока в трубе при рейнольдсовых числах, близких к критическим, показало, что в одном и том же фиксированном сечении трубы и при том же значении рейнольдсова числа $\mathbf{Re}=u_{\text{ср}}d/\nu$ может происходить чередование ламинарных и турбулентных режимов. Это явление получило наименование *перемежаемости* (intermittency). Причина перемежаемости режимов течения заключается в том, что турбулентность, как показали тщательные опыты, образуется вначале в дискретных областях потока в виде «облачков» или «пятен» (spots), в случае трубы заполняющих поперечное сечение трубы «пробками», которые могут достигать протяженности вдоль трубы порядка нескольких десятков диаметров трубы, причем эта протяженность зависит от рейнольдсова числа потока.

Основной количественной характеристикой явления перемежаемости служит *доля времени* существования *турбулентного* режима в данном сечении трубы. Эту безразмерную величину, равную нулю, если течение все время ламинарное, и единице, если течение сохраняет турбулентную форму, называют «коэффициентом перемежаемости» и обозначают буквой γ. Величина эта зависит как от рейнольдсова числа потока, так и от расстояния x от входа в трубу. На рис. 209 и 210 (опущены экспериментальные точки) показано изменение коэффициента перемежаемости в круглой трубе в зависимости от рейнольдсова числа **Re** и относительного расстояния от входа в трубу x/d по опытам И. Ротта[1]) на воздухе и воде и Д. Колза[2]) на воде. Коэффициент перемежаемости резко возрастает в области критического значения числа Рейнольдса, причем в ближних к входу сечениях позже, чем в дальних. На рис. 211 кружками, не связанными с кривой, показан профиль скоростей при $\mathbf{Re}=2550$ и $\gamma=0{,}7$. Там же приводятся относящиеся к тому же рейнольд-

[1]) Rotta J. C. Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung in Rohr.— Ing. Arch., 1956, № 24, S. 258—281.

[2]) Coles D. Interfaces and intermittency in turbulent shear flow. Mecanique de la turbulence.— Colloque Internat. du Centre Nationale de la Recherche Scientifique (Marseille, France). Изд. этого центра, Париж, p. 229—251.

сову числу профили скоростей: при ламинарном режиме ($\gamma=0$, сплошная кривая — парабола Пуазейля, светлые кружки) и при турбулентном режиме ($\gamma=1$, штриховая кривая, треугольники).

Отметим важный для дальнейшего факт *выравнивания* профиля скоростей при переходе от ламинарного движения к турбулентному. При этом на оси трубы скорость уменьшается, а на некотором фиксированном расстоянии от стенки трубы, наоборот, увеличивается. Помещая

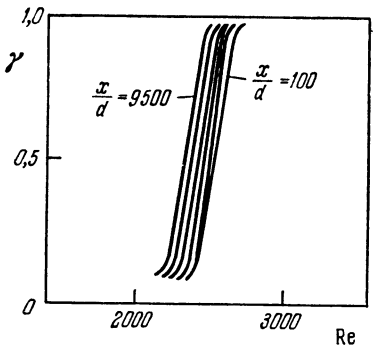


Рис 209

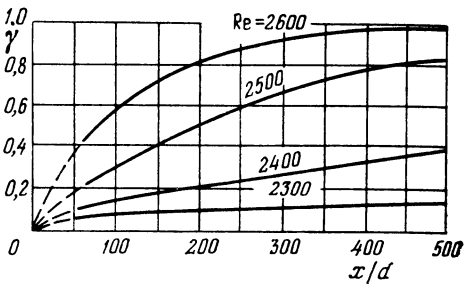


Рис. 210

измеритель скорости на определенном небольшом расстоянии от стенки, можно по увеличению скоростного напора судить о переходе от ламинарного движения к турбулентному. Такой прием, как далее будет показано, с успехом применяется при экспериментальном исследовании перехода в пограничном слое. Более точное исследование перемежаемости связано с изучением возникновения и развития пульсаций скорости в потоке при помощи осциллографической записи показаний термоанемометра.

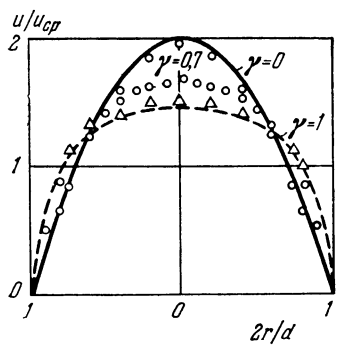


Рис 211

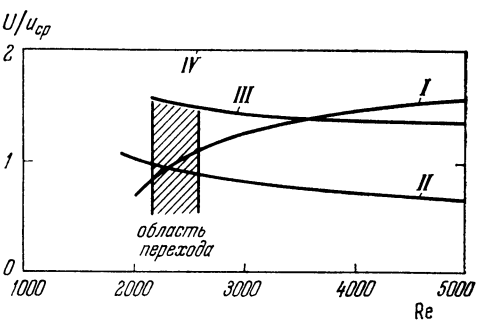


Рис. 212

На рис. 212 приводятся данные о скоростях движения турбулентных «*пробок*» в трубе. Кривая *I* представляет выраженную в частях средней скорости потока скорость передней, а кривая *II* — задней стенки «*пробки*». Как легко заключить из этих двух кривых, передние границы пробок при закритических режимах движутся быстрее задних, вследствие чего «пробки» растягиваются, заполняя при своем движении все большие и большие объемы трубы. Вместе с тем передний край одной «пробки» догоняет задний край смежной «пробки». Все это приводит к тому, что при закритических значениях **Re** в удалении от входа в трубу устанавливается сплошное турбулентное движение. На том же рисунке для сравнения приведены кривые *III* и *IV* скоростей на оси

трубы соответственно турбулентного и ламинарного потока, отнесенных также к средней скорости потока.

Скорость передней стенки «пробки» сначала меньше, но с ростом рейнольдсова числа становится больше, чем скорость турбулентного потока на оси трубы, а скорость задней стенки значительно меньше этой скорости. Можно еще заметить, что до критического значения числа Рейнольдса скорость передней грани «пробки», наоборот, меньше скорости задней грани; это приводит к сокращению длин образующихся «пробок» и их исчезновению в ламинарном потоке.

Наряду с движением вязкой жидкости в круглых цилиндрических трубах Д. Колзом были изучены также и переходные движения в пространстве между соосными вращающимися цилиндрами[1]). При переходе через некоторое значение рейнольдсова числа устойчивое вначале круговое движение частиц жидкости в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, сменяется движением с ячеистой структурой замкнутых вторичных течений, расположенной периодически в направлении, параллельном оси вращения. Такое — его обычно называют *тейлоровским* — движение образуется в случае доминирующего вращения внутреннего цилиндра. В случае же доминирующего значения вращения внешнего цилиндра устойчивое круговое движение частиц переходит в *спиральное*, смешанное ламинарно-турбулентное движение. Эти периодически расположенные в пространстве спирали, сохраняя свою форму и взаимное расположение, вращаются как одно целое вокруг общей оси цилиндров с угловой скоростью, близкой к среднему арифметическому угловых скоростей цилиндров.

Распределение вдоль спиралей турбулентных «пробок» подчиняется качественно тем же закономерностям, что и в случае смешанного ламинарно-турбулентного движения по цилиндрической трубе. Коэффициент перемежаемости γ на среднем радиусе принимает значения от 0,3 до 0,7.

Изменяя угловые скорости вращения внутреннего и внешнего цилиндра, можно отчетливо наблюдать процессы возникновения и разрушения различных режимов движений вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами, от периодических тейлоровских до двоякопериодических спиральных структур. Большой интерес заслуживает факт связи характеристик турбулентности в пробках с тейлоровскими вторичными течениями, которые, таким образом, служат конечными возмущениями, способствующими переходу от ламинарного движения к турбулентному[2]).

Переходные явления в ламинарно-турбулентных потоках привлекают в настоящее время особое внимание теоретиков и экспериментаторов. В добавление к изложенному в начале параграфа следует упомянуть о достигнутых в настоящее время успехах в углубленном понимании процессов перехода ламинарных движений в турбулентные, трактуемых с точки зрения *нелинейной механики*. Широкое применение получил волновой подход к изучению возмущений, развивающихся в потерявшем устойчивость ламинарном потоке. Теоретические исследования относятся главным образом к классическому так называемому *куэттовскому* круговому движению между двумя коаксиальными цилиндрами (преимущественно с неподвижным внешним и вращающимся внутренним). Изучается последовательность преобразований движения потока от

---

[1]) См. предыдущую сноску.

[2]) Рекомендуем интересующимся ознакомиться со статьей: Coles D. Transition in circular Couette flow.— Journ. Fluid Mech, 1965, v. 21, p. 385—482, в которой вопрос о переходных явлениях в куэттовском круговом движении разобран с большими подробностями и где приведены многочисленные фотографии визуализированных потоков.

чисто азимутального к поперечному волновому, вихревому движению, его модуляций и, наконец, переход к непериодическому, *хаотическому*, т. е. собственно турбулентному движению. Анализируются также свободные конвективные движения (вихри Рэлея — Бенара), струйные течения и др. Наиболее характерным для современных исследований явлений в переходной области и последующем развитом турбулентном движении стало обращение к представлениям о дискретных вихреобразованиях сложной структуры, возникновение и взаимодействие которых изучают как экспериментально, так и численными методами.

В основе общей теории переходных явлений лежат представления о нелинейных колебаниях, причем для их изучения с успехом применяется метод *фазовых характеристик*, заключающийся в сопоставлении колебательного режима с движением «изображающей точки» и значительно способствующий пониманию процесса. Теоретическому и экспериментальному изучению подвергается характерное для переходных явлений изменение спектров частот пульсаций, сопровождающее явление перехода. На пути перехода от упорядоченного ламинарного движения к хаотическому турбулентному наблюдается рост частот колебаний от очень редких, дискретных на начальных стадиях перехода до непрерывного спектра при установившемся развитом процессе турбулентного движения. Это явление в настоящее время подверглось подробному *численному* анализу[1]) и подтверждено многочисленными опытами[2]). Несмотря на эти успехи, вопрос о переходе ламинарных режимов течений в турбулентные представляет проблему, еще далекую от разрешения. Известный специалист в этой области Р. Бетчов замечает, что, в отличие от собственно ламинарного и турбулентного течений, допускающих известные «первые приближения», никем до настоящего времени не было предложено плодотворное «первое приближение» для режима перехода. Большое значение в связи с этим придается результатам эксперимента (см. § 119)[3]).

§ 119. Переходные явления в пограничном слое. Кризис сопротивления тел плохо обтекаемой формы

Сходство явлений перехода ламинарных движений в турбулентные в круглой цилиндрической трубе и в куэттовском круговом движении распространяется и на движение вязкой жидкости в пограничных слоях на поверхности твердых тел, в струях и следах за телами. Если условиться при сравнительно грубом подходе количественно сопоставлять скорость на внешней границе пограничного слоя со скоростью на оси трубы, а *толщину* пограничного слоя с радиусом трубы, то следует ввести в рассмотрение *рейнольдсово число пограничного слоя*

$$\mathrm{Re}_\delta = \frac{U\delta}{\nu},$$

характеризующее поток в данном сечении слоя.

[1]) Nonlinear dynamics/Ed. by Helleman R.— Annals of the New York Acad. of Sci, 1980, v. 357, Turbulence, p. 1—55.

[2]) IUTAM symposium on turbulence and chaotic phenomena in fluids (Kyoto, 5—10 sept. 1983).

[3]) Механизм перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный еще недостаточно изучен. Связь его с наличием локальных нестационарных отрывов в вязком подслое, являющихся следствием пульсаций давления, легла в основу полуэмпирического метода определения точки перехода, предложенного А. А. Дородницыным и Л. Г. Лойцянским в статье «К теории перехода ламинарного слоя в турбулентный» (Прикл. мат. и мех., 1945, т. 9, вып. 4). Современное изложение вопроса о переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный см. в обзоре: Гапонов С. А., Левченко В. Я. Современные проблемы перехода пограничного слоя.— Успехи механики, изд. ВИНИТИ, 1981, № 4.

Многочисленные опыты по определению критического числа $Re_{\delta\,кр}$ для пограничного слоя на пластине привели к значениям, близким к критическому числу трубы. Тот же порядок $Re_{\delta\,кр}$ был найден и при обтекании круглого цилиндра, шара и крыловых профилей. При этом было обнаружено, что относительное расположение *критического* сечения пограничного слоя, в котором ламинарный слой переходит в турбулентный, существенно зависит от степени возмущенности набегающего на тело внешнего потока. При изменении этого фактора изменяется и критическое число Рейнольдса пограничного слоя.

В отличие от переходных явлений, рассмотренных в предыдущем параграфе, в пограничном слое наличие того или другого режима движения обусловлено развитием течения *вдоль* пограничного слоя. Так, начальный участок слоя обычно бывает ламинарным, за ним располагается *переходная область*, где одновременно сосуществуют турбулентные зоны потока с ламинарными, и, наконец, область *развитого турбулентного потока*, состоящая из турбулентного *ядра* и тонкого *вязкого подслоя*, граничащего с твердой стенкой.

При малой интенсивности возмущений во внешнем потоке в опытах как с пластинками, так и с крыльями, удавалось *затянуть* переход на бо́льшие значения $Re_{\delta\,кр}$, чем в случае сильно возмущенных потоков. Так, например, в пограничном слое на пластине, помещенной в малотурбулентную аэродинамическую трубу, наблюдалось ламинарное движение вплоть до критического сечения пограничного слоя, где $Re_{\delta\,кр}=6290$, а на полированных металлических крыльях самолета в полете $Re_{\delta\,кр}$ доводилось до величины 9300. Это показывает, что относительный размер ламинарного участка пограничного слоя на крыле, особенно в спокойном набегающем потоке, зависит от *шероховатости* поверхности крыла вблизи передней его кромки или наличия производственных недостатков обработки поверхности в этой области крыла. Такое отличие движения жидкости в пограничном слое от движения в трубе может быть объяснено тем, что вблизи носика крыла пограничный слой еще очень тонок, бугорки шероховатости проникают сквозь пограничный слой и становятся источниками возмущений во внешнем потоке, которые будут проходить внутрь пограничного слоя через внешнюю его границу.

Вместо Re_δ, заключающего в себе неточную величину δ, можно рассматривать числа

$$Re^* = \frac{U\delta^*}{\nu}, \quad Re^{**} = \frac{U\delta^{**}}{\nu},$$

составленные по более точно определяемым величинам: толщине вытеснения и толщине потери импульса. Соответствующие критические их значения могут быть найдены непосредственно по замерам скоростей в сечениях слоя или пересчетом. В настоящее время широко используется число Re^{**}. Значение $Re^{**}_{кр}$ по опытам на различных крыльях в различных аэродинамических трубах колеблется от 600 в сильно турбулентных трубах до 1300 в мало турбулентных (по некоторым данным, относящимся к трубам с очень малой турбулентностью, число $Re^{**}_{кр}$ достигало значения 2300).

Наблюдающееся различие в значениях Re^{**} для разных крыльев имеет еще одну причину. Подобно тому как это имеет место в трубе переменного сечения, критическое значение $Re^{**}_{кр}$ в пограничном слое зависит еще от того, попадет ли критическое сечение в конфузорную или диффузорную части пограничного слоя. В области ускоренного течения (конфузорная часть слоя) $Re^{**}_{кр}$ имеет бо́льшие значения, чем в области замедленного течения (диффузорная часть слоя). В случае *свободного* пограничного слоя, как, например, в струе или в следе вдалеке

за телом, критические значения числа Рейнольдса очень малы, и практически всегда приходится иметь дело с *турбулентными* струями и следами за телом.

Теоретическое определение *нижнего* критического числа Рейнольдса пограничного слоя $\mathrm{Re}^{**}_{кр}$, под которым понимается значение Re^{**} в том сечении пограничного слоя, где теряется устойчивость движения, может быть выполнено с вполне удовлетворительной точностью при помощи *однопараметрического* приближения. Так, обозначая через

$$\mathrm{Re}^{**}_{кр}=\left(\frac{U\delta^{**}}{\nu}\right)_{кр},\quad f_{кр}=\left(\frac{U'\delta^{**2}}{\nu}\right)_{кр}$$

величины Re^{**} и формпараметра f в сечении слоя, где теряется устойчивость ламинарного движения, можно, использовав теорию устойчивости, получить приближенную связь между $\mathrm{Re}^{**}_{кр}$ и $f_{кр}$, представленную сплошной кривой на рис. 213. Этот график в рамках теории устойчивости является *общим* для всех плоских пограничных слоев, т. е. не зависит от распределения скорости $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя.

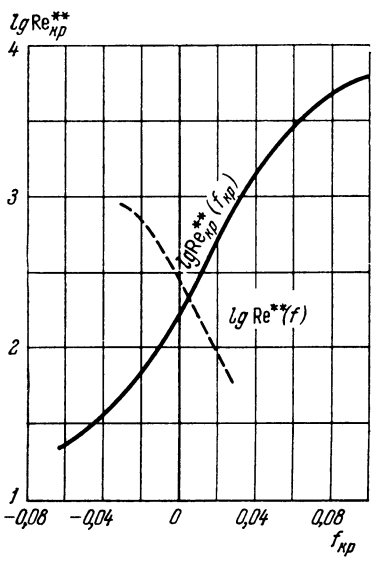


Рис. 213

Из графика непосредственно следует, что критические числа $\mathrm{Re}^{**}_{кр}$, соответствующие положительным значениям $f_{кр}$, т. е. конфузорному участку пограничного слоя, значительно превышают критические числа в области замедленного движения в диффузорной области. Этот факт условно выражают, говоря, что *ламинарный поток в конфузорной части пограничного слоя более устойчив, чем в диффузорной.* При этом за количественную меру устойчивости принимают значение критического рейнольдсова числа $\mathrm{Re}^{**}_{кр}$.

Рассчитав по однопараметрической теории величины $f=f(\bar{x})$ и $\mathrm{Re}^{**}=\mathrm{Re}^{**}(\bar{x})$ для обтекания с заданным распределением скоростей $U(\bar{x})$, исключим безразмерную абсциссу $\bar{x}$ и построим кривую связи *текущих* значений f и Re^{**} в тех же координатах, что и на рис. 213. Это приведет к кривой (на рис. 213 показанной штрихами), имеющей наклон противоположного знака и пересекающей основную кривую. Действительно, в то время как критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}^{**}_{кр}$ в *диффузорной* части пограничного слоя ($f<0$) меньше, чем в *конфузорной* ($f>0$), текущее число Рейнольдса Re^{**}, наоборот, возрастает вдоль поверхности тела вниз по потоку, т. е. при переходе от положительных f к отрицательным. Точка пересечения сплошной кривой со штриховой определит искомое $f_{кр}$ для данного конкретного случая задания распределения внешней скорости $U(\bar{x})$, а тем самым и абсциссу $\bar{x}_{кр}$ точки потери устойчивости.

Не следует смешивать эту точку потери устойчивости ламинарного пограничного слоя ни с началом переходной области, ни с той *точкой перехода* ламинарного движения в турбулентное, которая интересует практику. Под началом переходной области обычно понимают точку (сечение пограничного слоя), где развивающиеся возмущения нарастают настолько заметно, что уже начинают изменять ламинарный характер движения в пограничном слое, а под точкой перехода такую промежу-

точную точку переходной области, где турбулентный характер движения уже значительно проявился, например, в искажении профиля скоростей в сечениях пограничного слоя. В тех случаях, когда протяженность переходной области по сравнению с размерами тела невелика или не требуется большой точности в определении положения перехода, пользование понятием «точки перехода» вполне приемлемо.

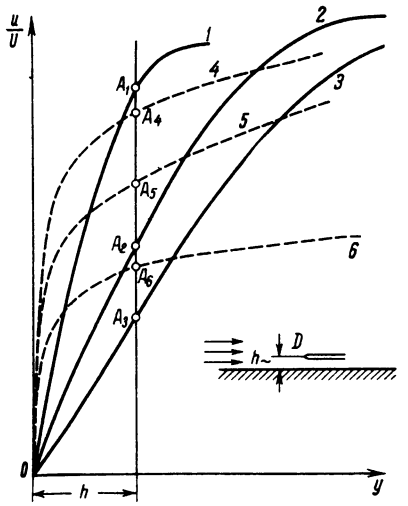


Рис. 214

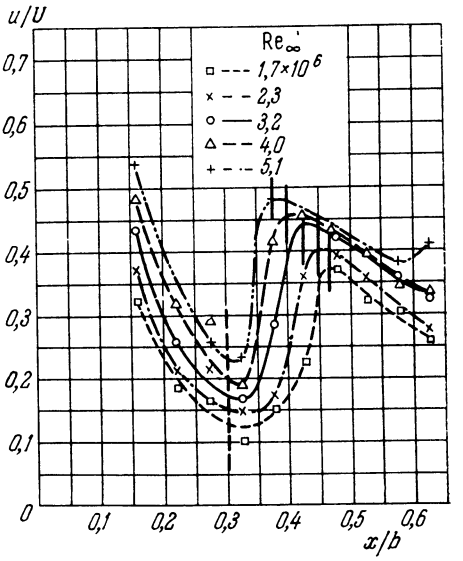


Рис. 215

Экспериментальное определение точки перехода в пограничном слое производят обычно так. Микротрубку полного напора, отверстие которой направлено навстречу потоку, заставляют перемещаться вдоль пограничного слоя, оставляя носик трубки D (динамическое отверстие) на одном и том же малом расстоянии h (рис. 214) от поверхности крыла. Вычитая из полного напора, регистрируемого отверстием D трубки, давление в соответствующем сечении пограничного слоя, замеряемое при помощи отверстия на поверхности крыла, находящегося как раз под носиком микротрубки, можем определить скорость на выбранном фиксированном расстоянии от поверхности в различных сечениях пограничного слоя.

В связи с утолщением ламинарного пограничного слоя вниз по потоку, безразмерная скорость u/U, измеряемая на одном и том же расстоянии от поверхности крыла внутри слоя, должна убывать. Действительно, относительная координата h/δ точки замера при этом уменьшается, а сама точка как бы все глубже погружается в пограничный слой, переходя к относительно меньшим скоростям.

На рис. 214 даны профили скоростей в последовательных сечениях *1–6* ламинарного (сплошные кривые), переходного и турбулентного (штриховые кривые) пограничного слоя на крыле при одном и том же значении **Re** набегающего потока. Как было уже показано на рис. 211, эти профили значительно друг от друга отличаются. Вертикальная прямая соответствует выбранному расстоянию $y=h$ носика микротрубки от поверхности крыла. Точки A_1, A_2, A_3 дают значения u/U, регистрируемые микротрубкой в *ламинарной* части пограничного слоя. Когда носик трубки попадает в область переходного или турбулентного режима, величина u/U от сравнительно малого значения (точка A_3) делает резкий скачок до значения A_4, а затем снова падает, проходя значения A_5, A_6. Если отложить на оси ординат (рис. 215) u/U, а на оси абсцисс относительные

(в частях хорды) расстояния по обводу крыла, то в результате такого рода построения можно получить кривые, подобные приведенным на рис. 215. Область слева от вертикальной штриховой линии соответствует ламинарному пограничному слою, между штриховой линией и вертикальными черточками располагается переходная область, и, наконец, справа от вертикальных черточек имеет место турбулентное движение. На рис. 215 приведено несколько таких кривых, относящихся к различным числам Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty = U_\infty b/\nu$ в интервале от $1{,}7 \cdot 10^6$ до $5{,}1 \cdot 10^6$. Из рассмотрения этих кривых видно, что *протяженность области перехода убывает с ростом рейнольдсова числа набегающего потока*, но все же имеет вполне сравнимые с хордой крыла значения. Экспериментальное определение точки перехода заключает в себе некоторый произвол; одни авторы определяют точку перехода как середину области перехода, другие — как точку минимума на кривой u/U, третьи — как точку максимума.

Многочисленные экспериментальные исследования как лабораторного, так и натурного (самолет, корпус корабля) типа показали, что положение точки перехода существенно зависит от многих параметров движения. Это прежде всего рейнольдсово число Re и количественные характеристики турбулентной структуры набегающего потока. Среди этих характеристик основное значение имеют следующие три: 1) *степень*, или *интенсивность*, турбулентности ε, определяемая отношением осредненной во времени амплитуды пульсаций скорости в набегающем потоке к его средней скорости; 2) *масштаб* турбулентности L, характеризующий пространственную протяженность жидких объемов во внешнем потоке, охваченных возмущениями, статистически связанными между собой в том смысле, что коэффициент корреляции пульсаций скоростей в двух каких-нибудь точках этих объемов отличен от нуля, и 3) *частота* пульсаций во внешнем потоке n, выбранная по максимальному значению функции распределения кинетической энергии пульсаций по частотам [1]).

Явление перехода, как это было уже отмечено, зависит от распределения давления во внешнем потоке: в *конфузорном* участке пограничного слоя, где внешний поток ускоряется, переход *затягивается*, смещаясь вниз по потоку, а в *диффузорном* участке с замедляющимся движением, наоборот, *предваряется*, переходя в верхние по потоку участки. Наконец, важное значение имеет состояние поверхности обтекаемого тела: степень ее шероховатости, волнистости, нагретости и многие другие причины.

В последнее время проводятся эксперименты по выявлению роли примесей, вводимых в малых концентрациях в жидкость в пограничном слое, в затягивании протяженности ламинарного участка или в уменьшении интенсивности уже развившейся турбулентности. Особенно полезными в этом смысле оказываются высокополимерные примеси [2]), введение которых даже в очень малых дозах значительно сказывается на режиме течения (эффект Томса).

Остановимся на иллюстрации влияния некоторых из только что перечисленных факторов на расположение точки перехода ламинарного движения в турбулентное в пограничном слое.

---

[1]) Удовольствуемся пока этими качественными определениями степени, масштаба и частоты турбулентности набегающего потока; количественное их определение будет дано позже.

[2]) Иоселевич В. А., Пилипенко В. Н. Турбулентный пограничный слой жидкости с полимерными добавками.— В кн.: Методы расчета турбулентного пограничного слоя. Сер. Итоги науки и техники, гл. V.— М.: ВИНИТИ, 1977, а также Lumley J. L. Drag reduction by additives.— Ann. Rev. of Fluid Mech. Palo Alto, Calif., USA, 1969, v. 1, p. 367—384.

Влияние рейнольдсова числа на положение точки перехода на поверхности гладкого крыла выражается в смещении точки перехода при возрастании рейнольдсова числа в направлении к передней кромке. Для разных крыловых профилей это смещение происходит различно, причем оно зависит также от условий опыта, т. е. турбулентности набегающего потока и др. Можно, однако, сделать некоторые общие замечания по этому поводу.

Если на поверхности крыла за точкой минимума давления существует точка отрыва ламинарного слоя, то эта точка является самой нижней (по потоку) возможной точкой перехода, так как сорвавшийся слой почти мгновенно переходит в турбулентное состояние. С возрастанием рейнольдсова числа точка перехода перемещается вверх по потоку и оказывается расположенной выше по потоку, чем точка отрыва. При этом ламинарный отрыв перестает осуществляться и заменяется турбулентным, который либо образуется, но значительно ниже по потоку, чем ламинарный, либо совсем отсутствует. Точка перехода перемещается по направлению к точке минимума давления и затем переходит в конфузорную область слоя. Схематически это показано на рис. 216 для верхней поверхности крылового профиля с затянутым конфузорным участком слоя (точка минимума давления примерно на 45% хорды); там же для сравнения приведена кривая перемещения точки потери устойчивости.

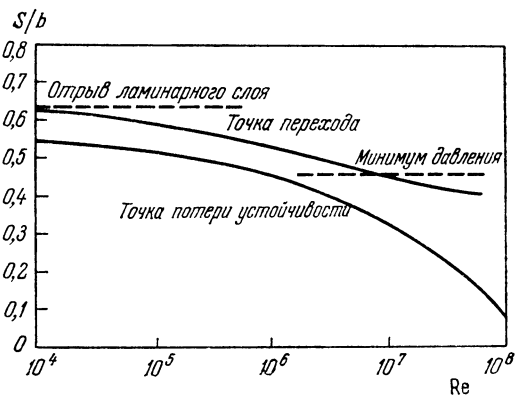


Рис. 216

Как видно из графика, ламинарный участок пограничного слоя на этом профиле простирается почти на всю переднюю область крылового профиля даже при больших значениях рейнольдсова числа. Такого рода крыловые профили называют *ламинаризованными*. На обычных крыловых профилях точка минимума давления на верхней поверхности располагается значительно ближе к носику профиля, соответственно этому уменьшается и участок ламинарного слоя.

Для грубой оценки положения точки перехода на крыловом профиле с гладкой поверхностью в практически наиболее интересной области значений рейнольдсовых чисел 10^6—10^7 можно рекомендовать выбирать *за положение точки перехода точку минимума давления.*

Опыты Шубауера и Скремстеда [1]), проведенные в аэродинамической трубе с интенсивностью турбулентности потока в рабочей части, изменяющейся в широких пределах, начиная от очень малых значений порядка 0,02%, показали существование *двух основных причин возникновения перехода ламинарного слоя в турбулентный: потери устойчивости* ламинарного слоя и наличия *интенсивных возмущений* во внешнем потоке.

На рис. 217 приведены кривые влияния интенсивности турбулентности внешнего потока ε на местное рейнольдсово число $\mathrm{Re}_x = U_\infty x/\nu$, составленное для абсцисс точек, отделяющих ламинарный участок пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине от переходной области и области развитого турбулентного движения в пограничном слое. Как

[1]) Schubauer G. B., Skramstad H. K. Laminar boundary-layer oscillations and transition on a flat plate.— NACA Rep., 1948, v. 909.

можно судить по этим кривым, при интенсивности турбулентности внешнего потока, не превосходящей 0,1%, границы ламинарного и турбулентного участков пограничного слоя не зависят от интенсивности турбулентности внешнего потока. В этом случае явление перехода объясняется первой из указанных ранее причин — *потерей устойчивости ламинарного слоя.* Началу переходной области соответствует значение Re_x, несколько меньшее $3\cdot10^6$; концу переходной области, т. е. началу области развитого турбулентного движения, отвечает значение Re_x, близкое к $4\cdot10^6$.

С возрастанием интенсивности турбулентности внешнего потока преимущественное значение приобретает вторая причина — влияние внешних возмущений. Из рис. 217 отчетливо видно, как с возрастанием интенсивности турбулентности внешнего потока значения рейнольдсовых чисел на границах переходной области начинают резко снижаться, размер ламинарного участка уменьшается почти вдвое при сохранении интенсивности в сравнительно узких пределах (до 0,36%). В обычных аэродинамических трубах интенсивности турбулентности могут достигать 1%, а в других случаях, как, например, в проточной части турбины или компрессора, и значительно больших уровней. При этом ламинарные участки на поверхности обтекаемых тел (крыловые профили, лопатки рабочего колеса) становятся совершенно незначительными. Наоборот, при движении тела сквозь покоящуюся жидкость (самолет в спокойной атмосфере и др.) интенсивность турбулентности набегающего потока может быть очень малой и ламинарный участок по своей протяженности окажется значительным. Обращает на себя также внимание наличие заметной области перехода, которым при детальном расчете пограничного слоя нельзя пренебрегать.

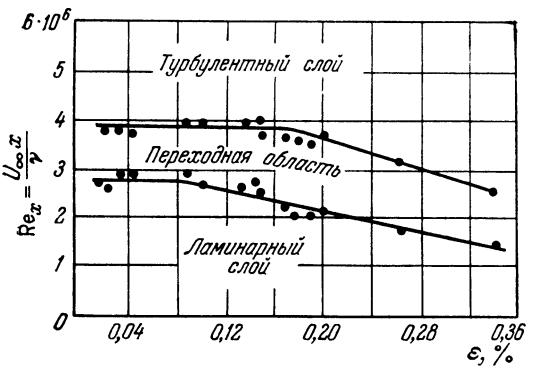


Рис. 217

О влиянии интенсивности турбулентности набегающего потока на длину переходного участка можно судить по эмпирической кривой Гренвилла (рис. 218) [1]), составленной по данным опытов Шубауера — Скремстеда, Холла — Хислопа и Драйдена (опытные точки опущены) на продольно обтекаемой пластинке. В отличие от рис. 217, по оси ординат отложена разность $\mathrm{Re}_t^{**} - \mathrm{Re}_{кр}^{**}$ рейнольдсовых чисел, заключающих в качестве длины толщину потери импульса в точках перехода и потери устойчивости. Судя по этой кривой, длина переходного участка быстро убывает с ростом *интенсивности турбулентности* ε (см. далее § 121), достигая малых значений при ε порядка 2,5—2,8%.

К числу менее изученных факторов следует отнести влияние масштаба турбулентности (см. далее § 121) набегающего потока на положение точки перехода. Примером этого влияния могут служить приведенные на рис. 219 результаты опытов [2]) над пограничным слоем на эллиптическом цилиндре, расположенном под нулевым углом атаки в воздушном потоке, турбулизированном решетками, поставленными впе-

[1]) См. неоднократно цитированную ранее монографию Шлихтинга, с. 445, рис. 16.21.

[2]) Драйден Х. Л. Современное развитие механики пограничного слоя.— В кн.: Проблемы механики/Под ред. Р. Мизеса и Т. Кармана.— М.: ИЛ, 1955.

реди цилиндра на некотором от него расстоянии (размеры ячеек решетки приводятся на рисунке).

Вихри, созданные стержнями решетки, перемещаясь вниз по потоку, разрушаются, образуя размытые области возмущенного движения, средние размеры которых представляют *масштаб турбулентности.* Масштаб турбулентности L поддается измерению, а отношение его к линейному размеру обтекаемого тела, в данном случае меньшему диаметру эллипса D, наряду с интенсивностью турбулентности ε служит характеристикой турбулентности набегающего потока.

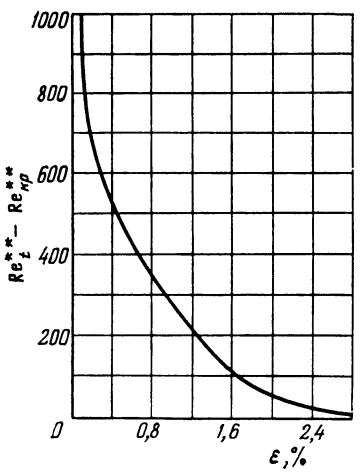


Рис. 218

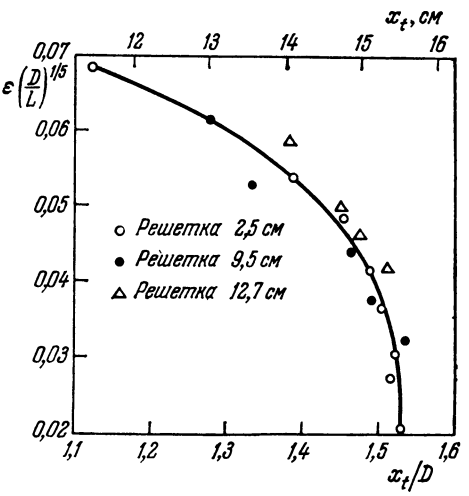


Рис. 219

График на рис. 219 выражает связь между безразмерной абсциссой точки перехода ламинарного слоя в турбулентный на поверхности эллиптического цилиндра и параметром Тейлора[1]), представляющим собой произведение интенсивности турбулентности на корень пятой степени из отношения характерного размера тела D к масштабу турбулентности L. Из этого графика видно, что при *малых значениях параметра Тейлора внешние возмущения слабо влияют на размер ламинарного участка* слоя; здесь все определяется *внутренней устойчивостью движения* в слое. При сравнительно больших значениях параметра это влияние резко усиливается — длина ламинарного участка быстро сокращается.

Для качественной иллюстрации влияния *продольного перепада давления* на положение точки перехода в пограничном слое при различных интенсивностях турбулентности набегающего потока могут служить результаты опытов Е. М. Минского[2]) (рис. 220). На оси ординат отложена относительная дуговая абсцисса точки перехода на верхней поверхности крылового профиля 14-процентной толщины, а на оси абсцисс — степень турбулентности ε. Как показывает график, наблюдается отчетливое смещение точки перехода к носику крыла при возрастании интенсивности турбулентности набегающего потока.

Протяженность ламинарного участка в лобовой части крыла резко сокращается также при увеличении угла атаки (кривые рис. 220 относятся к различным отмеченным на них значениям угла атаки α). Это

[1]) Теоретическое обоснование выбора этого параметра см. Taylor G. I. Statistical theory of turbulence.— Proc. Roy. Soc., London, 1935, v. A151, № 873, p. 421.

[2]) Минский Е. М. Влияние турбулентности набегающего потока на переход.— Труды ЦАГИ, 1939, вып. 415.

естественно, так как при возрастании угла атаки увеличивается быстрота восстановления давления, что приводит к повышению диффузорности пограничного слоя, а это вызывает ослабление устойчивости ламинарного участка пограничного слоя.

Как было отмечено в предыдущей главе, кривизна поверхности при малых отношениях толщины ламинарного пограничного слоя к радиусу кривизны сказывается только через скорость внешнего потока. Можно отметить, что *на вогнутых поверхностях даже сравнительно малая кривизна поверхности оказывает существенное влияние на переход.* На выпуклых поверхностях такое влияние незаметно; явление перехода происходит так же, как и на пластине с соответствующим распределением давлений.

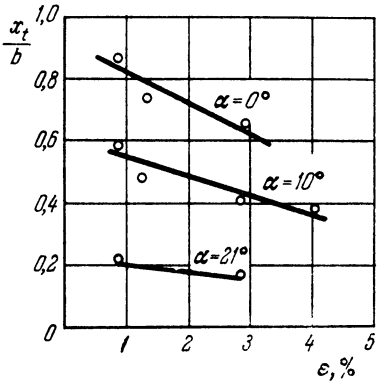


Рис. 220

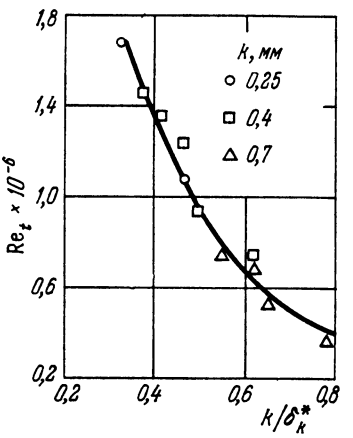


Рис. 221

Большой практический интерес представляет вопрос о влиянии состояния (обработки) поверхности на положение точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Бугорки шероховатости поверхности играют роль источников возникновения возмущений в пограничном слое. Эти возмущения присоединяются к тем, которым вносятся в пограничный слой из внешнего потока.

За количественную характеристику влияния одиночного элемента (бугорка) шероховатости на возникновение перехода в следе за ним или на положение точки перехода принимают отношение k/δ_k^* высоты k бугорка шероховатости к толщине вытеснения δ_k^* в точке расположения этого бугорка на поверхности тела. В качестве оправдания выбора такой характеристики можно привести кривую Драйдена (рис. 221), выражающую зависимость рейнольдсова числа в точке перехода $\mathbf{Re}_t = x_t U_\infty/\nu$ от относительной шероховатости k/δ_k^*. Как видно, использование этой характеристики позволяет объединить на одной кривой результаты опытов, относящихся к различным абсолютным шероховатостям k. Об общности механизма влияния на положение точки перехода возмущений, возникающих из-за наличия отдельных бугорков шероховатости и затем развивающихся в области следа за бугорком, и существующих в самом набегающем потоке, можно судить по графику, представленному на рис. 222[1]). Из кривых этого графика следует, что *при малой относительной шероховатости* k/δ_k^* *положение точки перехода определяется интенсивностью турбулентности набегающего потока* ε, *а при сравни-*

[1]) Драйден Х. Л. Переход ламинарного течения в турбулентное (обзорная статья в кн.: Турбулентные течения и теплопередача.— М.: ИЛ, 1963).

тельно большой относительной шероховатости не зависит от этой интенсивности.

В процитированном обзоре Х. Л. Драйдена можно найти разнообразные экспериментальные материалы по вопросу о влиянии шероховатости поверхности на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

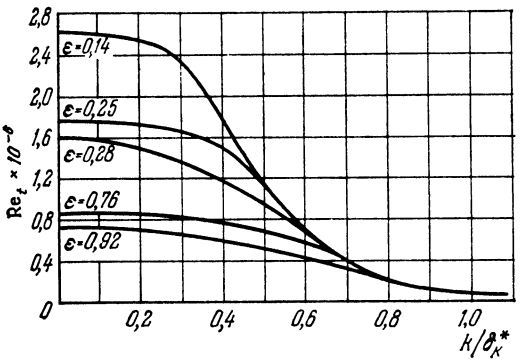


Рис. 222

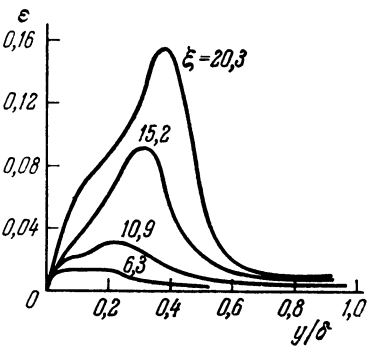


Рис. 223

Экспериментальные исследования структуры пограничного слоя, выполненные на базе современных методов измерения, показали большую сложность механизма перехода ламинарного режима течения в турбулентный. Отсылая интересующихся к подробному докладу И. Тани[1]), отметим лишь некоторые, наиболее своеобразные особенности рассматриваемого явления.

Прежде всего обращает на себя внимание *неустойчивость плоской формы возмущений.* Если при помощи специального устройства, например колеблющейся нити, натянутой вдоль размаха пластины, вызывать плоские, одинаковые по размаху возмущения, то они очень быстро *теряют свой плоский характер* и приобретают *волновое строение с периодически чередующимися вдоль размаха вершинами и провалами* в распределениях продольной (по потоку) и поперечной (по размаху) осредненных скоростей и средней интенсивности пульсаций продольной скорости.

Вершинам в этих распределениях соответствует *сосредоточенность завихренности потока.* Скоростная киносъемка отчетливо показывает возникновение вихревых петель типа П-образных вихрей с распространяющимися вдоль потока вихревыми «жгутами». Эти «свободные», совпадающие по направлению с линиями тока вихри индуцируют скорости в плоскостях, нормальных к направлению потока, что способствует переплетению этих вихревых жгутов и еще большему усложнению структуры потока.

Общая неустойчивость потока в области перехода приводит к росту амплитуды продольных пульсаций потока и тем самым к росту местной интенсивности турбулентности ε. При этом, как можно судить по опытным кривым Клебанова, Тидстрема и Саржента[2]), приведенным на рис. 223, интенсивность ε резко возрастает с удалением от источника возмущения (на рисунке значения ξ расстояния от источника возмущений в сантиметрах нанесены в виде отметок на кривых).

Максимум ε *с удалением от источника возмущений смещается от стенки,* достигая при ξ=20,3 см положения, соответствующего *двум*

[1]) Tani I. Review of some experimental results on boundary-layer transition.— Phys. of Fluids, part II, 1967, v. 10, № 9, p. 11—16.

[2]) Цитируем по только что упомянутому обзорному докладу И. Тани.

пятым толщины пограничного слоя. Эти кривые относятся к *вершинам поперечного к направлению потока волнообразного распределения возмущений.* В долинах (провалах) этого распределения наблюдаются возмущения очень малой интенсивности, низкие частоты которых заставляют предполагать, что в этих областях долго сохраняются ламинарные режимы.

Таким образом, в пограничном слое, так же как и в течениях в трубах, *турбулентность возникает в ограниченных областях, сосуществующих с областями ламинарного течения.* Эти турбулентные «облачки» или «пятна», аналогичные турбулентным пробкам в потоках в трубах, распространяются по течению в пограничном слое и образуют в переходной области явление перемежаемости ламинарных и турбулентных режимов течения.

Наряду с этой очень характерной для переходной области перемежаемостью, являющейся следствием образования внутри пограничного слоя замкнутых турбулентных областей — только что упомянутых «облачков» или «пятен»,— вблизи внешней границы пограничного слоя наблюдается еще другого типа перемежаемость, обусловленная взаимным проникновением сквозь границу пограничного слоя жидких объемов из сравнительно слабо возмущенного внешнего потока в заполненную возмущениями бóльшей амплитуды область пограничного слоя.

Следует заметить, что, вообще, о внешней границе турбулентного слоя, так же как и о границе между вязким подслоем и турбулентным ядром, можно говорить только как о некоторых, малых по поперечной толщине зонах, заполненных то ламинарными, то турбулентными по своей внутренней структуре «протуберанцами», пронизывающими пограничный слой со стороны внешнего потока и вязкого подслоя и придающими всему потоку перемежающийся характер. Во внешней зоне — так называемом «надслое» — происходит резкое изменение степени турбулентности потока от значительной по сравнению с внешним потоком величины до малой степени турбулентности во внешнем потоке.

Несмотря на столь сложный механизм внутренних движений, область пограничного слоя, если рассматривать ее в сравнительно грубом, осредненном виде, соответствующем данным таких общеупотребительных измерительных приборов, как микротрубки полного напора, соединенные со стандартными микроманометрами, оказывается достаточно простой.

Так, пользуясь экспериментальными профилями скоростей в сечениях переходной области пограничного слоя, Ж. Перш[1]) вычислил условные толщины δ^* и δ^{**}, а также их отношение H. Ему удалось показать, что независимо от продольного перепада давления в пограничном слое (и даже при переменных числах Маха) величина H непрерывно падает от своего ламинарного значения (примерно 2,6) до турбулентного (1,3—1,4). На основании обработки большого числа экспериментальных данных он установил закон изменения безразмерной скорости в сходственных точках сечений переходного слоя в зависимости от падения параметра H и показал, что *профили скоростей в сечениях пограничного слоя в области перехода образуют однопараметрическое семейство с параметром H.*

Явления в переходной области пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине были рассмотрены С. Дхаваном и Р. Нарасимхой[2])

---

[1]) Persh J. The behaviour of the boundary layer in the region of transition from laminar to turbulent flow.— Journ. Aeron. Sci., 1955, v. 22, № 6, p. 443, 444.

[2]) Dhawan S., Narasimha R. Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion.— Journ. Fluid Mech., 1958, v. 3, № 4, p. 418—436.

в *количественной* постановке с точки зрения схемы «перемежаемости» возникновения в пограничном слое турбулентных «пятен». *Коэффициент перемежаемости* γ, определение которого уже приводилось в предыдущем параграфе, был найден экспериментально при помощи обработки осциллограмм пульсаций скорости, замеренных малоинерционным тепловым анемометром. Аналитическим выражением изменения γ в функции от продольной координаты x может служить следующая экспоненциальная функция:

$$\gamma = 1 - \exp(-A\xi^2), \tag{1}$$

где $A = \text{const} = 0{,}412$, а $\xi = (x - x_t)/\lambda$ — безразмерная разность между продольными координатами: x — внутри переходной области, x_t — начала переходной области, λ — условная длина области перехода, определяемая по кривой $\gamma(x)$ в виде

$$\lambda = x_{\gamma=0{,}75} - x_{\gamma=0{,}25}.$$

Эта длина, входящая в основное соотношение (1), является характерным *линейным масштабом области перехода.*

Сравнение профилей осредненных скоростей в переходной области u_P, определенных экспериментально при помощи трубки полного напора, с теоретическими ламинарными u_L и турбулентными u_T, показывает, что имеется простая связь

$$u_P^2 = (1 - \gamma)\, u_L^2 + \gamma u_T^2. \tag{2}$$

Для средней во времени скорости $\bar{u}$, получаемой в результате обработки осциллограмм, соотношение это еще проще и сводится к линейному

$$\bar{u} = (1 - \gamma)\, u_L + \gamma u_T. \tag{3}$$

Формула (2) может служить для приближенного определения коэффициента перемежаемости γ по показаниям трубки полного напора.

Для отношения условных толщин пограничного слоя $H = \delta^*/\delta^{**}$ было установлено соотношение

$$H = H_T + (H_L - H_T)\, e^{-A\xi^2}. \tag{4}$$

Изложенная только что *эмпирическая* теория движения жидкости в переходной области пограничного слоя — с такого рода теориями нам придется в дальнейшем еще неоднократно встречаться — позволяет с достаточной для практики точностью описывать количественно не только кинематическую (профили скоростей, отношение толщин слоя), но и динамическую (местный и полный коэффициент трения) стороны явлений. Однако при этом остается неизвестной основная величина — абсцисса x_t начала переходной области, входящая в определение переменной ξ.

При *очень малой интенсивности турбулентности* ε внешнего потока можно считать, что *начало области перехода совпадает с точкой потери устойчивости ламинарного движения* в пограничном слое, расчет положения которой по графику $\mathbf{Re}^{**}_{\text{кр}}$ $(f_{\text{кр}})$ был уже разъяснен ранее.

Явление перехода ламинарного движения в турбулентное родственно с обратным ему возвратом (реверсом) турбулентного движения в ламинарное, наблюдаемым в конфузорных участках $(dp/dx < 0)$ пограничных слоев. Такого рода «реламинаризация» пограничного слоя может быть определена на основании существующих модельных схем турбулентного движения при сравнительно малых значениях рейнольдсова числа. Установленные локальные критерии реламинаризации, выражаемые «критическими» числовыми значениями определяющих движение

параметров [1]). Таковы

$$K_{кр} = \frac{\nu}{U^2}\frac{dU}{dx} = 3{,}7 \cdot 10^{-6}\ [2]),$$

$$\Delta_{р.кр} = -\frac{\nu}{\rho v_*^3}\frac{dp}{dx} = 0{,}025\ [3]),$$

где $U(x)$ и $p(x)$ — распределения вдоль пограничного слоя скорости на его внешней границе и давления в сечениях пограничного слоя; $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — «динамическая» скорость, о которой будет речь в дальнейшем.

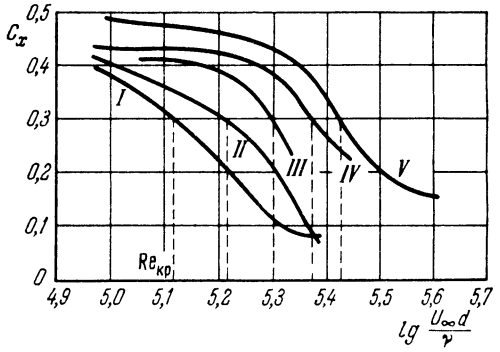


Рис. 224

Обратимся к рассмотрению некоторых эффектов, связанных с явлением перехода. Если проанализировать кривые (рис. 224) зависимости коэффициента сопротивления c_x шара от рейнольдсова числа, то можно заметить резкое уменьшение c_x в области $\mathbf{Re}$ порядка $(1\text{—}3)\cdot 10^5$. Такое явление получило наименование *кризиса сопротивления*. Соответствующее ему *критическое* число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр}$, определенное как значение $\mathbf{Re}$ при $c_x = 0{,}3$, оказалось сильно зависящим от тех параметров, которые влияют на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, в частности от интенсивности турбулентности.

Чем менее турбулентен поток в трубе, тем выше величина $\mathbf{Re}_{кр}$, достигаемая при измерениях сопротивления шара в этой трубе. Так, кривая V ($\mathbf{Re}_{кр} \approx 270\,000$) соответствует опытам в аэродинамической трубе с интенсивностью турбулентности 0,5%, кривая I ($\mathbf{Re}_{кр} \approx 125\,000$) — потоку с интенсивностью турбулентности 2,5%; остальные кривые соответствуют трубам с промежуточными значениями степени турбулентности.

Чтобы понять причину отмеченного явления резкого уменьшения сопротивления шара, обратимся к рассмотрению кривых распределения *давлений* по его поверхности (рис. 225). Из этих кривых следует, что уменьшение сопротивления шара связано с коренной перестройкой всего окружающего потока. Наблюдаемое вблизи $\mathbf{Re} = \mathbf{Re}_{кр}$ резкое возрастание максимального разрежения, смещение вниз по потоку линий минимума давления M и линий отрыва пограничного слоя S говорит об *улучшении обтекания шара*. Это объясняет уменьшение коэффициента сопротивления, так как при лучшем охвате поверхности шара потоком распределение давлений как бы приближается к тому идеальному (на рис. 225 показанному штрихами), при котором, согласно парадоксу Даламбера, сопротивление должно равняться нулю.

Следует заметить, что визуальные наблюдения (рис. 226) подтверждают описанную картину улучшения обтекания шара в указанной области рейнольдсовых чисел. Явление это, получившее еще наименование

---

[1]) См. составленный А. Н. Секундовым § 1, п. 4 в обзоре: Гиневский А. С., Иоселевич В. А., Колесников А. В., Лапин Ю. В., Пилипенко В. Н., Секундов А. Н. Методы расчета турбулентного пограничного слоя.— Итоги науки и техники, Механика жидкости и газа, 1978, т. 11, с. 166—170.

[2]) Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W. The structure of turbulent boundary layers.— Journ. Fluid Mech., 1967, v. 30, p. 741—773.

[3]) Patel V. C., Head M. R. Reversion of turbulent to lamimar flow.— Journ. Fluid Mech., 1968, v. 34, p. 371.

кризиса обтекания, объясняется изменением расположения на шаре линии перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. При Re, меньших $1{,}5 \cdot 10^5$, на поверхности шара происходит *отрыв ламинарного пограничного слоя, переходящего в турбулентный вне шара в оторвавшемся слое.*

При возрастании рейнольдсова числа точка перехода T, расположенная в следе за шаром, перемещается навстречу потоку вначале к поверхности шара. Как только точка T достигнет точки S ламинарного отрыва слоя, *движение в оторвавшемся слое вблизи точки отрыва станет турбулентным*, перемешивание с подтекающей вдоль поверхности шара из отрывной области жидкостью усилится, пограничный слой увлечет ее за собой, обтекание улучшится, и точка отрыва (рис. 225) начнет смещаться вниз по потоку. Теперь уже точка отрыва S будет соответствовать *отрыву турбулентного слоя*, так как точка перехода будет находиться выше по потоку, чем точка отрыва турбулентного пограничного слоя.

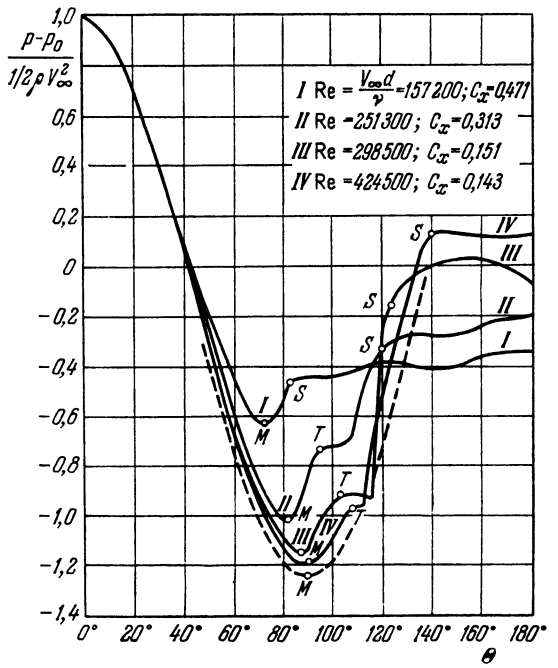


Рис. 225

В дальнейшем будет доказано, что точка отрыва турбулентного пограничного слоя при том же распределении скоростей во внешнем потоке всегда расположена ниже по потоку, чем точка отрыва ламинарного слоя. В точке перехода T происходит местный, не получающий дальнейшего развития отрыв ламинарного слоя, сопровождающийся обратным прилипанием уже турбулентного пограничного слоя к поверхности шара. Такой турбулентный *пузырь* (английский термин bublle) отрыва

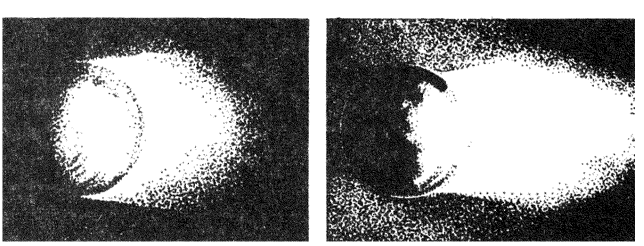


Рис. 226

в развитом своем виде уже давно наблюдался на лобовых участках крыловых профилей. Появление его и исчезновение приводило к «загадочным» изменениям подъемной силы и сопротивлений крыльев на больших углах атаки, к «гистерезису» коэффициента подъемной силы при начальных

ном возрастании и последующем убывании угла атаки и др. Одно из первых описаний этого явления можно найти в сборнике статей, вышедшем под редакцией С. Голдстейна [1]).

Сущность явления возникновения пузыря заключается в том, что при сравнительно больших значениях рейнольдсова числа потока оторвавшийся ламинарный слой крайне неустойчив и сразу же переходит в турбулентное состояние. При этом оторвавшаяся от поверхности тела пристеночная граница слоя благодаря возникновению интенсивного ее обмена жидкими массами с отрывной зоной, где движение жидкости носит *попятный* характер, размывается и подсасывается, прилипает к поверхности тела, образуя замкнутую отрывную зону, как раз и являющуюся пузырем отрыва. Такой пузырь, аналогично развитому отрыву, но значительно слабее, чем последний, искажает внешний поток, приводит к так называемому сильному взаимодействию между пограничным слоем и внешним безвихревым потоком.

Аналогичные замкнутые отрывные зоны наблюдались в окрестности передней кромки крыловых профилей при сравнительно больших углах атаки [2]) и на поверхности эллиптического цилиндра [3]). Следует отметить, что образование пузыря наблюдалось только в трубах малой турбулентности. Увеличение турбулентности набегающего потока приводит к исчезновению пузыря отрыва. Можно думать, что описанное явление всегда сопровождает кризис сопротивления, если влияние внешних возмущений мало.

Кризис сопротивления может осуществляться при рейнольдсовых числах, значительно меньших критических, если искусственно турбулизировать пограничный слой путем введения в него специальных изолированных шероховатостей — *турбулизаторов*. Так, например, в своих классических опытах Прандтль получал улучшение обтекания шара и уменьшение его сопротивления, помещая на поверхности шара тонкое проволочное кольцо (рис. 226).

В опытовых судостроительных бассейнах применяли такого рода турбулизаторы, чтобы их эффектом заменить недоступное для бассейна увеличение рейнольдсова числа и тем самым приблизить лабораторные условия к натурным. Не всегда, конечно, увеличение степени турбулентности потока приводит к тому же изменению сопротивления или подъемной силы, что и увеличение рейнольдсова числа [4]). Это особенно относится к крыловым профилям, вблизи лобовой точки которых развиваются явления кризиса, подобные тем, которые имеют место на поверхности круглого цилиндра.

В частности, явлением кризиса обтекания объясняется наблюдаемый факт резкого различия между максимальными значениями $c_{y\max}$ коэффициента подъемной силы крыла, полученными при лабораторных исследованиях в аэродинамических трубах (сравнительно малые рейнольдсовы числа) и на самолете (большие рейнольдсовы числа). Известно, что коэффициент подъемной силы c_y растет с углом атаки α до некоторого критического значения $\alpha_{кр}$, при котором достигает своего максимального значения. Отход c_y от линейной зависимости от α объясняется утолщением пограничного слоя в кормовой (диффузорной) части слоя и тем самым усилением обратного влияния пограничного слоя на внешний безвихревой поток. Это влияние приводит к значительному

[1]) Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости/Под ред. С. Голдстейна, т. II, § 209.— М.: ИЛ, 1948.

[2]) Gault D. E. Boundary-layer and stalling characteristics of the NACA 63—009 airfoil section.— NACA Techn. Note, 1949, № 1894.

[3]) Schubauer G. B. Air flow in boundary layer of an elliptic cylinder.— NACA Rep., 1939, v. 652.

[4]) Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя.— М.: Гостехиздат, 1941, с. 257—260.

искажению внешнего потока и, как следствие, к нарушению теоретически предсказываемой в значительно более широком интервале углов атаки линейности зависимости $c_y(\alpha)$.

Утолщение ламинарного пограничного слоя на лбу крылового профиля приводит к раннему отрыву в области передней кромки, где слой ламинарен и легко под действием обратного перепада давления отрывается. В этом случае, если наблюдение производится в малотурбулентных трубах или в натурных условиях полета в малотурбулентной атмосфере, вероятно образование пузыря отрыва, т. е. замкнутой отрывной области, которая, расширяясь с возрастанием угла атаки, превратится в полный разомкнутый срыв потока с поверхности крыла, приводящий к резкому нарушению циркуляции и уменьшению коэффициента подъемной силы.

С возрастанием числа **Re** при фиксированном угле атаки, в полном соответствии с только что описанным явлением кризиса, обтекание крыла улучшается и появляется возможность перейти на большие углы атаки и получить более высокие значения c_y, а следовательно, и $c_{y\max}$. При этом увеличивается как само $c_{y\max}$, так и критический угол $\alpha_{кр}$. Продолжая увеличивать рейнольдсово число, можно добиться высоких значений $c_{y\max}$.

Все сказанное относится, конечно, только к таким крыловым профилям, на лобовой части которых при больших углах атаки создаются условия для появления кризиса обтекания, т. е. к профилям, форма носка которых обеспечивает наличие ламинарного слоя на верхней поверхности профиля и отрыв пограничного слоя при ламинарном режиме движения в нем. Таковы, например, симметричные и малоизогнутые профили со сравнительно значительным удалением от носка максимальной толщины («ламинаризованные» профили).

Существующие так называемые *несущие* профили, имеющие обычно значительную кривизну, не обладают этим свойством. С поверхности такого рода крыловых профилей при больших углах атаки срывается турбулентный слой. На таких профилях возрастание рейнольдсова числа не приводит к увеличению критического угла атаки $\alpha_{кр}$, а даже, наоборот, может привести к уменьшению их. Это объясняется уменьшением ламинарного участка на верхней поверхности крыла за счет смещения вверх по потоку точки перехода и, как следствие, утолщения турбулентного слоя, что приводит к смещению точки отрыва турбулентного слоя в направлении носка крыла, т. е. к ухудшению обтекания[1]).

Положение точки перехода оказывает большое влияние не только на подъемную силу, но и на сопротивление крыла. Как будет далее выяснено, сопротивление трения поверхности при ламинарном пограничном слое значительно меньше, чем при турбулентном. В связи с этим представляется естественным как можно дальше оттянуть вниз по потоку положение точки перехода и увеличить относительную протяженность ламинарного участка пограничного слоя. Это достигают прежде всего тем, что повышают устойчивость ламинарного движения в пограничном слое выбором такой формы профиля крыла, чтобы максимальная толщина профиля располагалась на 40—60% хорды от носка крыла.

За счет оттягивания максимальной толщины увеличивают длину конфузорного участка пограничного слоя, в котором, как уже ранее указывалось, ламинарное движение сохраняет свою устойчивость при значительно бо́льших местных рейнольдсовых числах **Re****, чем в диффузорном. Кроме того, подвергают тщательной полировке лобовую часть

[1]) См., например, Красильщиков П. П. Влияние числа Рейнольдса и турбулентности потока на подъемную силу крыла.— Труды ЦАГИ, 1936, вып. 268, а также Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя.— Л.; М.: Гостехиздат, 1941, с. 256—262.

поверхности крыла, чтобы свести к минимуму возмущения, имеющие своим источником шероховатость крыла или отдельные выступы на его поверхности в лобовом участке крыла, где пограничный слой еще относительно тонок.

Опыт показывает, что такие крылья с затянутым ламинарным пограничным слоем действительно обладают весьма малым сопротивлением, но легко теряют свое преимущество при малейшем налете на поверхность крыла пыли, капель дождя или даже прилипании насекомых.

В настоящее время разработаны и продолжают разрабатываться многие другие методы уменьшения сопротивления. Применяют, например, отсос с поверхности крыла сквозь щели или пористую поверхность воздуха, накопившего возмущения при прохождении сквозь лобовую часть пограничного слоя. На место этого возмущенного воздуха поступает извне почти лишенный возмущений в условиях спокойной атмосферы воздух, который сохраняет ламинарный режим движения в пограничном слое. Экономичность такого рода «управления» пограничным слоем достигается благодаря тому, что отсасывать приходится очень небольшие количества воздуха, соответствующие малому его расходу сквозь сечения пограничного слоя.

§ 120. Уравнения Рейнольдса осредненного турбулентного движения

Для описания турбулентного движения Рейнольдс[1]) предложил следующий, получивший общее применение прием. Регистрируя во времени скорости и давления в данной точке потока, можно положить

$$u=\bar{u}+u', \quad v=\bar{v}+v', \quad w=\bar{w}+w', \quad p=\bar{p}+p', \tag{5}$$

где u, v, w, p — действительно существующие в потоке мгновенные — будем называть их *актуальными* — проекции скорости и давление, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{p}$ — *осредненные* во времени их значения, u', v', w', p' — *пульсационные* значения, короче, *пульсации* скорости и давления. Под *осредненным* значением актуальной величины φ, обозначаемым $\bar{\varphi}$ или $\langle\varphi\rangle$, будем понимать обычное интегральное среднее по времени t за промежуток времени T, называемый *периодом осреднения*:

$$\bar{\varphi}(x, y, z; t)=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}\varphi(x, y, z; \tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Будем предполагать, что для каждого турбулентного движения существует такой достаточно большой по сравнению с периодом турбулентных пульсаций, но малый по сравнению с характерным для осредненного турбулентного движения интервалом времени (периодом колебательного процесса, временем прохождения телом своей длины или др.) постоянный период осреднения T, что сглаживание во времени (6) приводит к осредненной величине, при повторном сглаживании уже не изменяющейся. Это значит, что

$$\bar{\bar{\varphi}}=\bar{\varphi}. \tag{7}$$

Если в результате осреднения (6), проведенного в данной точке в разные моменты времени t, будут получаться одни и те же значения $\bar{\varphi}$, то такое осредненное движение называется *стационарным*, а само турбулентное движение — *квазистационарным*.

[1]) Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion — Phil. Trans. of the Roy. Soc, 1895 (имеется русский перевод в кн.: Проблемы турбулентности.— М.: ОНТИ, 1936, с. 185 и след.).

Предположение (7) эквивалентно утверждению о равенстве нулю средних значений пульсаций $\varphi' = \varphi - \overline{\varphi}$ величины φ. Действительно, в силу линейности операции осреднения (6) и равенства (7) имеем

$$\overline{\varphi'} = \overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}} = 0. \tag{8}$$

В дальнейшем нам придется иметь дело исключительно с *квазистационарными* турбулентными движениями. В этом случае осредненное значение $\overline{\varphi}$ будет функцией только *координат*, так что если ψ означает еще одну пульсирующую функцию времени и координат, то, согласно (6), получим (черта сверху означает операцию осреднения (6), проведенную над всем выражением, стоящим под этой чертой)

$$\overline{\overline{\varphi}\psi} = \overline{\varphi}\,\overline{\psi}. \tag{9}$$

Если турбулентное движение не квазистационарно, то равенство (9) приходится вводить как дополнительное свойство осреднения (6).

По определению осреднения (6) сразу следует, что среднее значение производной от некоторой функции по координате равно производной от среднего значения функции по той же координате

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}, \ldots, \tag{10}$$

так как операции дифференцирования по координате и интегрирования по времени независимы. Таким же свойством обладает и производная по времени. Действительно, по известной формуле дифференцирования интеграла с переменными пределами получим

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi(x, y, z; \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\varphi\left(x, y, z; t + \frac{T}{2}\right) - \varphi\left(x, y, z; t - \frac{T}{2}\right)\right] = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\, d\tau$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}. \tag{11}$$

Принятый закон осреднения (6) не является единственно возможным. Не нарушая линейности операции осреднения по времени (6), можно под знак интеграла вводить некоторую *весовую* функцию, распределение которой будет соответствовать преимущественной роли одних моментов времени по отношению к другим при осреднении по периоду T (об этом см. в конце гл. XV).

Кроме осреднения по времени, можно производить и другое осреднение — по результатам многократно повторяемых опытов. Такое осреднение называют осреднением *по ансамблю*. В дальнейшем будет всегда подразумеваться простейшее осреднение по времени (6) и справедливость соответствующих ему правил (7)—(11).

Величина $\overline{\varphi\psi}$, полученная в результате осреднения произведения двух пульсирующих функций φ и ψ, носит наименование *одноточечной* (в знак того, что значения φ и ψ при интегрировании берутся в одной и той же пространственно-временной точке) *двойной корреляции*, а отношение

$$R = \frac{\overline{\varphi\psi}}{\sqrt{\overline{\varphi^2}}\,\sqrt{\overline{\psi^2}}}$$

называют *коэффициентом корреляции* между двумя статистически связанными величинами. Равенство коэффициента корреляции плюс либо минус единице говорит о полной, *детерминированной* связи явлений, описываемых функциями от координат и времени φ и ψ, причем знак минус — отрицательное значение коэффициента корреляции — говорит о противоположных фазах колебаний, а равенство коэффициента корреляции нулю — о статистической *независимости* явлений. Промежуточным степеням статистической связанности (корреляции) пульсирующих величин отвечают абсолютные значения коэффициента корреляции между нулем и единицей. Коэффициент корреляции между пульсациями, происходящими в двух разных точках пространства и, вообще говоря, в различные моменты времени, будет именоваться *коэффициентом двухточечной пространственно-временной корреляции*, причем, в зависимости от количества коррелируемых пульсирующих функций, двойной, тройной и т. д. корреляции.

Понятие о *корреляции* как об отражении *статистической связанности* явлений и о коэффициенте корреляции как о нормированной интервалом $(-1, 1)$ *мере* этой связанности лежит в основе статистических теорий турбулентности. Корреляции $\overline{\varphi'\psi'}$, $\overline{\varphi'\psi'\chi'}$ и т. д. именуют еще «моментами связи»[1]) или просто «моментами» второго, третьего и т. д. порядков, присоединяя эпитеты «одноточечный», «двухточечный» и т. д.

Понятие «момента связи» второго и высших порядков предполагает наличие по крайней мере *двух* коррелируемых величин. Введем для общности условный термин «моменты первого порядка», понимая под ним осредненные величины $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{p}$.

Пользуясь частью постулированными, частью выведенными из определения закона осреднения (6) свойствами, можно получить дифференциальные уравнения *осредненного* движения несжимаемой жидкости. Следует лишь предположить, как это и сделал Рейнольдс, что действительное (актуальное) движение, несмотря на всю его иррегулярность и влияние на него случайных обстоятельств, связанных с предысторией потока, все же строго описывается уравнениями Навье—Стокса. В этом простом, но далеко не очевидном допущении заключается основная идея общего подхода к описанию турбулентных движений, выдвинутая Рейнольдсом. Надо заметить, что существующие попытки создания чисто статистической теории турбулентных движений, не опирающейся на уравнения Навье—Стокса, не привели к сколько-нибудь существенным результатам.

Положив в основу дальнейшего это принципиальное положение, обратимся к составлению уравнений для осредненных по предыдущему приему скоростей и давлений. Для этого уравнения Навье—Стокса в актуальных скоростях и давлениях (опускаем объемные силы и подразумеваем суммирование по дважды повторяемому в одночленах индексу j)

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j},$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

[1]) Термин «момент связи» был впервые введен А. А. Фридманом и Л. В. Келлером в их основополагающем докладе «Дифференциальные уравнения турбулентного движения сжимаемой жидкости», сделанном на Первом международном конгрессе по прикладной механике в Дельфте (Голландия) в 1924 г. (см. Proceed. of the First Intern. Congr. for Appl. Mech.— Delft, Holland, 1924, p. 395—405).

используя последнее уравнение, перепишем в виде

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \qquad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Произведем в этой системе уравнений замену актуальных скоростей v_i и давлений p на осредненные $\bar{v}_i$, $\bar{p}$ и пульсационные v_i', p' по (5)

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \quad (i = 1, 2, 3), \quad p = \bar{p} + p'.$$

Тогда, замечая, что

$$v_i v_j = (\bar{v}_i + v_i')(\bar{v}_j + v_j') = \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{v}_i v_j' + \bar{v}_j v_i' + v_i' v_j',$$

и осредняя обе части равенства по времени согласно (6), будем в соответствии с принятыми правилами (7) – (11) иметь

$$\overline{v_i v_j} = \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v_i' v_j'}. \tag{13}$$

Осредняя по (6) обе части уравнений Навье – Стокса и используя (13), получим

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\rho \overline{v_i' v_j'}), \qquad \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \tag{14}$$

или, используя последнее уравнение системы (14),

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\rho \overline{v_i' v_j'}), \qquad \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0. \tag{15}$$

Заметим, что из последних равенств систем (12) и (15) непосредственно следует равенство

$$\frac{\partial v_j'}{\partial x_j} = 0, \tag{16}$$

выражающее условие несжимаемости жидкости при пульсационном движении.

Уравнения Рейнольдса (15) можно рассматривать как *первые* в общей системе уравнений *переноса* турбулентных характеристик потока, а именно как уравнения переноса *количеств движения* $\rho \bar{v}_i$, или, как еще говорят, *переноса импульса*, и, соответственно этому, уравнения (15), содержащие в качестве искомых неизвестных $\bar{v}_i$ ($i = 1, 2, 3$) и $\bar{p}$, называть «уравнениями моментов первого порядка».

Отметим положение, которое будет далее подтверждено в более общем случае: уравнения (15), служащие для определения $\bar{v}_i$, содержат в своем составе «моменты второго порядка» $\overline{v_i' v_j'}$, делающие эту систему незамкнутой. Как вскоре будет показано, уравнения, которые должны определять входящие в уравнения (15) «моменты второго порядка», окажутся содержащими «моменты третьего порядка» и т. д.

Так уже с самого начала установления уравнений переноса турбулентных характеристик потока обнаруживается *незамкнутость* системы уравнений переноса. Проблема замыкания этих уравнений не получила до сих пор рационального решения и требует в каждом отдельном случае введения дополнительных, имеющих только приближенный характер, допущений.

Вспоминая общие уравнения динамики жидкости «в напряжениях»

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}=\mathrm{Div}_i P \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

можем сказать, что уравнения осредненного турбулентного движения (15) отличаются от уравнений Навье–Стокса наличием дополнительного тензора турбулентных напряжений

$$\Pi\begin{pmatrix} -\rho\overline{v_1'^2} & -\rho\overline{v_1'v_2'} & -\rho\overline{v_1'v_3'} \\ -\rho\overline{v_1'v_2'} & -\rho\overline{v_2'^2} & -\rho\overline{v_2'v_3'} \\ -\rho\overline{v_1'v_3'} & -\rho\overline{v_2'v_3'} & -\rho\overline{v_3'^2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

с компонентами

$$\pi_{ij}=-\rho\overline{v_i'v_j'}. \tag{18}$$

Тензор П, очевидно, *симметричен*; компоненты его (18) называют *рейнольдсовыми напряжениями*. Рейнольдсовы напряжения имеют физический смысл компонент осредненного *переноса* количеств пульсационного движения (импульса) пульсационными скоростями. Вот почему первое уравнение (15), содержащее в правой части производные рейнольдсовых напряжений, носит еще наименование *уравнения переноса импульса* (*количества движения*) *пульсаций скорости*. В дальнейшем будем придерживаться краткого наименования первого уравнения (15) как «уравнения переноса импульса».

Будем называть *тензором полного* (суммарного) *напряжения* тензор P, равный

$$P=-\bar{p}E+2\mu\bar{S}+\Pi \tag{19}$$

и имеющий компоненты

$$p_{ij}=-\bar{p}\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i}\right)+(-\rho\overline{v_i'v_j'}). \tag{20}$$

Опуская аналогичный предыдущему вывод, выпишем уравнения переноса импульса в *цилиндрических* координатах

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial t}+\bar{v}_r\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial r}+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\theta}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial z}-\frac{\bar{v}_\theta^2}{r}\right)=$$
$$=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2\bar{v}_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\bar{v}_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_r}{\partial z^2}-\frac{\bar{v}_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-r\rho\overline{v_r'^2})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(-\rho\overline{v_r'v_\theta'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v_r'v_z'})-\frac{1}{r}(-\rho\overline{v_\theta'^2}),$$
$$\rho\left(\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial t}+\bar{v}_r\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial r}+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial z}+\frac{\bar{v}_r\bar{v}_\theta}{r}\right)=$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}+\mu\left(\frac{\partial^2\bar{v}_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\bar{v}_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_\theta}{\partial z^2}-\frac{\bar{v}_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial r}(-\rho\overline{v_r'v_\theta'})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(-\rho\overline{v_\theta'^2})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v_\theta'v_z'})+\frac{2}{r}(-\rho\overline{v_r'v_\theta'}), \tag{21}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t}+\bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}+\frac{\bar{v}_\varepsilon}{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \varepsilon}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right)=$$

$$=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\rho\overline{v_r' v_z'}\right)+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(-\rho\overline{v_\varepsilon' v_z'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho\overline{v_z'^2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(r\bar{v}_\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial z}(r\bar{v}_z)=0.$$

Компоненты *полных* напряжений в цилиндрических координатах будут:

$$p_{rr}=-\bar{p}+2\mu\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r}-\rho\overline{v_r'^2},\quad p_{\varepsilon\varepsilon}=-\bar{p}+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}+\frac{\bar{v}_r}{r}\right)-\rho\overline{v_\varepsilon'^2},$$

$$p_{zz}=-\bar{p}+2\mu\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}-\rho\overline{v_z'^2},$$

$$p_{r\varepsilon}=\mu\left(\frac{\partial \bar{v}_\varepsilon}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \varepsilon}-\frac{\bar{v}_\varepsilon}{r}\right)-\rho\overline{v_r' v_\varepsilon'},\tag{22}$$

$$p_{rz}=\mu\left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z}+\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}\right)-\rho\overline{v_r' v_z'},\quad p_{\varepsilon z}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial \bar{v}_\varepsilon}{\partial z}\right)-\rho\overline{v_\varepsilon' v_z'}.$$

Тот же прием осреднения, что и при выводе уравнения (16), но примененный к уравнению (174) гл. X, позволит получить следующее уравнение *распространения тепла в турбулентном движении*:

$$\rho c_p\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}-\rho c_p\overline{u'T'}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}-\rho c_p\overline{v'T'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}-\rho c_p\overline{w'T'}\right).\tag{23}$$

Здесь действительная (актуальная) температура T представлена суммой осредненной температуры $\bar{T}$ и пульсационной T'. Физические константы: плотность ρ, коэффициенты теплоемкости c_p и теплопроводности λ предполагаются *постоянными*.

Вектор $\boldsymbol{q}$ с компонентами

$$q_x=-\rho c_p\overline{u'T'},\quad q_y=-\rho c_p\overline{v'T'},\quad q_z=-\rho c_p\overline{w'T'}\tag{24}$$

выражает *турбулентный поток тепла*.

Уравнение (23) в цилиндрических координатах будет иметь вид

$$\rho c_p\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}+\bar{v}_r\frac{\partial \bar{T}}{\partial r}+\frac{\bar{v}_\varepsilon}{r}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \varepsilon}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial \bar{T}}{\partial r}-\rho c_p r\overline{v_r' T'}\right)+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\lambda}{r}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \varepsilon}-\rho c_p\overline{v_\varepsilon' T'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}-\rho c_p\overline{v_z' T'}\right).\tag{25}$$

Заменяя в уравнении (23) удельное теплосодержание (энтальпию) c_pT на концентрацию примеси некоторого вещества c, получим уравнение *турбулентной диффузии* этого вещества

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{c}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}-\rho\overline{u'c'}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D\frac{\partial \bar{c}}{\partial y}-\rho\overline{v'c'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho D\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}-\rho\overline{w'c'}\right),\tag{26}$$

где D — коэффициент обычной молекулярной диффузии вещества в смеси, а вектор $\boldsymbol{m}=-\rho\overline{\boldsymbol{V}'c'}$ с компонентами

$$m_x=-\rho\overline{u'c'},\quad m_y=-\rho\overline{v'c'},\quad m_z=-\rho\overline{w'c'} \tag{27}$$

является вектором *турбулентного потока вещества.*

Можно заметить, что уравнение (26) отличается от (23) заменой $c_p\bar{T}$ на $\bar{c}$ и λ — на ρD; по такому же правилу получим из (25) уравнение турбулентной диффузии в цилиндрических координатах.

Возвращаясь к системе (15) уравнений неразрывности и переноса импульса, заметим, что в совокупности этих *четырех* уравнений имеется *десять* неизвестных ($\bar{v}_i$, $\bar{p}$, π_{ij}; i, $j=1$, 2, 3). Уравнения (15) не представляют, таким образом, *замкнутую* (определенную) систему уравнений, а поскольку избыток неизвестных относится к рейнольдсовым напряжениям $\pi_{ij}=-\rho\overline{v_i'v_j'}$, естественно попытаться вывести из уравнений Навье — Стокса уравнения *переноса рейнольдсовых напряжений* и тем самым замкнуть систему уравнений (15). Составление уравнений переноса π_{ij} не представляет труда. Обратимся к первому уравнению системы (12) и выразим в нем каждую актуальную величину как сумму осредненной и пульсирующей величин. Результат этой замены можно представить в виде

$$\rho\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial t}+\rho\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_i\bar{v}_j)+\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}-\mu\frac{\partial^2\bar{v}_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{v_i'v_j'})+$$
$$+\rho\frac{\partial v_i'}{\partial t}+\rho\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_iv_j'+\bar{v}_jv_i')+\frac{\partial p'}{\partial x_i}-\mu\frac{\partial^2v_i'}{\partial x_j\partial x_j}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_j}(-\rho v_i'v_j')-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{v_i'v_j'})=0.$$

Замечая, что, согласно первому уравнению (14), первая строка равна нулю, придем к следующему уравнению для пульсаций скорости:

$$\rho\frac{\partial v_i'}{\partial t}+\rho\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_iv_j'+\bar{v}_jv_i')+\frac{\partial p'}{\partial x_i}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}-\rho v_i'v_j'+\rho\overline{v_i'v_j'}\right)\quad(i=1,2,3). \tag{28}$$

Меняя в этой системе уравнений «свободный» индекс i на n, получим аналогичное (28) уравнение для v_n'

$$\rho\frac{\partial v_n'}{\partial t}+\rho\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_nv_j'+\bar{v}_jv_n')+\frac{\partial p'}{\partial x_n}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial v_n'}{\partial x_j}-\rho v_n'v_j'+\rho\overline{v_n'v_j'}\right)\quad(n=1,2,3). \tag{29}$$

Умножим обе части (28) на v_n', а обе части (29) на v_i' и сложим результаты. При этом примем во внимание вытекающее непосредственно из последнего уравнения системы (15) равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i'v_n'\bar{v}_j)=\bar{v}_j\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i'v_n'),$$

а также заметим, что

$$v_i'\frac{\partial}{\partial x_j}(v_n'v_j')+v_n'\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i'v_j')=\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i'v_n'v_j').$$

Группируя в полученных равенствах члены и деля обе части на ρ, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_i'v_n') + \bar{v}_j\frac{\partial v_i'v_n'}{\partial x_j} = -\left(v_i'v_j'\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial x_j} + v_n'v_j'\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) -$$
$$-2\nu\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_n'}{\partial x_j} + \frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial v_n'}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i'}{\partial x_n}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i'v_n'v_j') - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_n'p') -$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_n}(v_i'p') + \nu\frac{\partial^2 v_i'v_n'}{\partial x_j\partial x_j} + v_n'\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{v_i'v_j'}) + v_i'\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{v_n'v_j'}), \quad (30)$$

где j — «немой» индекс, i, $n=1, 2, 3$.

Введем обозначение для *двойной одноточечной корреляции*, или *момента второго порядка*,

$$\overline{v_i'v_n'} = \tau_{in} = -\frac{1}{\rho}\pi_{in}. \quad (31)$$

Проведем операцию осреднения (6) над обеими частями уравнений системы (30), используя правила осреднения (7)—(11); тогда получим искомую систему уравнений

$$\frac{\partial \tau_{in}}{\partial t} + \bar{v}_j\frac{\partial \tau_{in}}{\partial x_j} = -\left(\tau_{ij}\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial x_j} + \tau_{nj}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) - 2\nu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_n'}{\partial x_j}} +$$
$$+\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial v_n'}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i'}{\partial x_n}\right)} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{v_i'v_n'v_j'}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{v_n'p'}) -$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_n}(\overline{v_i'p'}) + \nu\frac{\partial^2 \tau_{in}}{\partial x_j\partial x_j} \quad (32)$$

или, объединяя последние четыре члена в правой части и используя очевидные равенства (δ_{ij} — символы Кронекера)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{v_n'p'}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij}\overline{v_n'p'}),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n}(\overline{v_i'p'}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{nj}\overline{v_i'p'}),$$

приведем уравнения (32) к виду

$$\frac{\partial \tau_{in}}{\partial t} + \bar{v}_j\frac{\partial \tau_{in}}{\partial x_j} = -\left(\tau_{ij}\frac{\partial \bar{v}_n}{\partial x_j} + \tau_{nj}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) - 2\nu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_n'}{\partial x_j}} +$$
$$+\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial v_n'}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i'}{\partial x_n}\right)} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{v_i'v_n'v_j'} + \frac{\delta_{ij}}{\rho}\overline{v_n'p'} + \frac{\delta_{nj}}{\rho}\overline{v_i'p'} - \nu\frac{\partial \tau_{in}}{\partial x_j}\right). \quad (33)$$

Останавливаясь на этой форме *уравнения переноса корреляции пульсаций скорости* $\tau_{in} = \overline{v_i'v_n'}$, поясним физическое значение слагаемых, входящих в уравнение (33). Слева стоит индивидуальная производная τ_{in} по времени, складывающаяся из локальной и конвективной производных, причем последняя соответствует переносу τ_{in} осредненным потоком. Обычно явление, выраженное этой частью уравнения (33), именуют *адвекцией*. Уравнение (33) представляет собой баланс адвекции со стоящей справа суммой слагаемых. Первое из них содержит отнесенные к единице массы компоненты тензорных произведений *тензора турбулентных напряжений* Π на дифференциальный тензор поля осредненных скоростей. Совокупность этих произведений естественно тракто-

вать как *мощность, затраченную полем осредненных скоростей на образование рейнольдсовых напряжений.* Сообразно с этим первое слагаемое справа называют *генерацией*, или *порождением* турбулентности.

Эти два члена уравнения (33) имеют наглядное значение и поддаются измерению. Второе слагаемое справа, как содержащее кинематический коэффициент молекулярной вязкости и осредненную сумму попарных произведений компонент дифференциального тензора поля пульсационных скоростей, представляет «скорость диссипации». Менее наглядным и трудно измеримым является слагаемое $\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial v_n'}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i'}{\partial x_n}\right)}$, имеющее смысл корреляции пульсаций давления с тензором скоростей деформации поля пульсационных скоростей. Наконец, последняя группа слагаемых, стоящая под общим знаком дифференцирования $\partial/\partial x_j$, представляет «дивергентную» часть, имеющую смысл *диффузии* как за счет пульсаций скоростей и давлений, так и за счет вязкости.

Из уравнения (33) легко выводится уравнение переноса отнесенной к единице массы и осредненной обычным образом *кинетической энергии пульсационного движения*

$$k=\frac{1}{2}\overline{v_i'v_i'}=\frac{1}{2}\tau_{ii}. \tag{34}$$

Для вывода этого уравнения положим в уравнении (33) $n=i$ и сохраним правило суммирования по повторяющемуся дважды в одночленах индексу. Непосредственно получим

$$\frac{\partial\tau_{ii}}{\partial t}+\bar{v}_j\frac{\partial\tau_{ii}}{\partial x_j}=-2\tau_{ij}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j}-2\nu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}+$$
$$+2\overline{\frac{p'}{\rho}\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{v_iv_iv_j'}+\frac{2}{\rho}\overline{v_j'p'}-\nu\frac{\partial\tau_{ii}}{\partial x_j}\right)$$

или, принимая во внимание обозначение (34) и замечая, что, согласно (16), третий член справа равен нулю, придем, сокращая на множитель 2, к искомому уравнению переноса кинетической энергии пульсаций

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\bar{v}_j\frac{\partial k}{\partial x_j}=-\tau_{ij}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j}-\nu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{v_j'\left(\frac{v_i'v_i'}{2}+\frac{p'}{\rho}\right)}-\nu\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]. \tag{35}$$

Уравнения (33) и (35) получат применения в следующей главе и вместе с уравнением *переноса скорости диссипации*, вывод которого опустим, послужат основой современных методов расчета турбулентного пограничного слоя.

Все только что упомянутые уравнения переноса, а также и другие (уравнения переноса пульсаций вихря, коэффициента турбулентной вязкости и др.) обладают основным недостатком: кроме искомых, они содержат еще дополнительные характеристики турбулентности (тройные корреляции пульсаций скорости, корреляции этих пульсаций с пульсациями давления и др.), причем по мере присоединения к системе уравнений переноса новых уравнений возникают и новые неизвестные корреляционные члены. Так, при составлении предыдущим методом уравнений переноса тройных корреляций пульсаций скорости появляются четверные корреляции и т. д., причем доказано экспериментально, что двойные, тройные и следующие по порядку корреляции пульсаций скорости растут по абсолютной величине, что препятствует сходимости методов.

Так возникла основная в теории турбулентности проблема *замыкания* системы уравнений турбулентного движения, уже давно привлекающая внимание исследователей, но пока еще далекая от своего разрешения. На пути решения этой фундаментальной проблемы созданы многочисленные приближенные методы статистического подхода к решению задач теории турбулентных движений и, в частности, достаточно достоверные методы расчета турбулентных пограничных слоев, о чем будет идти речь в дальнейшем. Все эти поиски сводятся к выражению входящих в уравнения переноса сложных корреляций через более простые, относительно которых *легче* выдвигать дополнительные соображения, замыкающие постановку задачи. На этом пути достигнуты большие успехи, подкрепляемые широкими возможностями методов численного расчета на ЭВМ, которые день ото дня совершенствуются.

В задачи настоящего учебника не может входить изложение этих чрезвычайно разнообразных, подчас идейно схожих между собой методов, одно перечисление которых заняло бы много места. Отошлем читателя к нескольким монографиям и обзорам по этому вопросу [1]).

§ 121. Некоторые сведения о внутренней структуре турбулентных потоков

Изложенные в предыдущем параграфе уравнения переноса носят общий статистический характер, но отражают в какой-то мере физические процессы, происходящие в действительности. Понимание этих процессов требует проникновения во *внутреннюю структуру* турбулентных движений, которую мы сейчас вкратце осветим.

Как уже упоминалось в §§ 119 и 120, турбулентный поток обладает сложной *вихревой* структурой, содержащей разнообразные вихревые образования, разнящиеся как по форме, так и по размерам. Говоря о размерах вихрей, подразумевают их некоторые средние размеры и при этом различают *мелкомасштабные* и *крупномасштабные* вихревые системы.

В процессах переноса количества движения и кинетической энергии пульсаций, а также рейнольдсовых напряжений и других турбулентных характеристик, участвуют вихри разных масштабов. Особое место занимают крупномасштабные, «большие» вихри. Изучением их взаимодействий занимается сравнительно новый раздел теории турбулентности, посвященной так называемой *когерентной* турбулентности [2]), которая образуется в турбулентных струях, «следах» за обтекаемыми телами, в предотрывных областях «пристенных» турбулентных пограничных слоев, а также в природных условиях (смерчи, циклоны) [3]).

[1]) Теория турбулентных движений подробно и с большой глубиной изложена в фундаментальной монографии: Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1.— М.: Наука, 1965; Ч. 2.— М.: Наука, 1967.

Большой интерес сохраняет уже сравнительно давно появившийся обзор: Phillips O. M. Shear-flow turbulence.— California: Ann. Review of fluid mechanics, 1969, v. 1, p. 245—264.

Наиболее доступна по простоте изложения монография Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J. Engineering calculation methods for turbulent flow.— London: Acad. Press, 1981.

Из переводных, достаточно обстоятельных обзоров отметим следующие: Турбулентность, принципы и применения/Под ред. У. Фроста и Т. Моулдена.— М.: Мир, 1980; Турбулентность/ Под ред. П. Брэдшоу.— М.: Машиностроение, 1980. Отметим также краткий, но содержательный обзор: Белов И. А. Модели турбулентности.— Л.: Изд. Ленинградского механического института, 1986.

[2]) Гиневский А. С., Власов Е. В. Когерентные структуры в турбулентных струйных течениях.— В кн.: Модели механики сплошной среды.— Новосибирск: Сиб. отд-ние АН СССР, Институт теор. и прикл. мех., 1983, с. 91—117.

[3]) Особенности вихревых структур турбулентных потоков изложены в монографии: Albring W. Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen.— Berlin: Acad. Verlag, 1981. S. 305.

К числу основных процессов, вызывающих образование, развитие и исчезновение вихрей, относятся *конвекция* (*адвекция*), *генерация* (порождение), *диффузия* и в последней стадии вырождения *диссипация* (переход в тепло), о которых уже ранее упоминалось.

В процессе турбулентной диффузии происходит распад крупных вихрей на более мелкие, в которых еще инерционные явления преобладают над вязкими. Такие находящиеся, как говорят, в «инерционном интервале масштабов» вихри участвуют в конвекции и турбулентной диффузии, но в пренебрежимо малой степени подвержены действию вязкости. Общий процесс дальнейшей деградации вихрей приводит их в конечном счете к мелким вихрям с *малым масштабом*, на которые уже действует *вязкая* диффузия и последующая вязкая диссипация кинетической энергии в тепло. Такая «каскадная» схема [1]), конечно, несколько грубо передает действительные процессы, происходящие в турбулентных потоках, но правильно описывает общие тенденции. Вихри малого масштаба, быстро угасая, не способны сколько-нибудь долго хранить и переносить вниз по потоку информацию о возмущениях, возникших в выше расположенных областях потока. Эту роль выполняют вихри большого и частично инерционного масштабов, благодаря наличию которых возможно появление «эффекта памяти» в турбулентных движениях.

Кинетическая энергия крупных вихрей имеет порядок удельной энергии местного осредненного движения, затем она уменьшается с уменьшением масштаба и становится пренебрежимо малой у *мелких вихрей*.

Количественное определение «масштаба турбулентности» тесно связано со *статистической связанностью* пульсаций скоростей в исследуемой области возмущенного потока. Мерой этой связи служит *коэффициент корреляции* между пульсациями скоростей в точках жидкого объема, несущими в себе следы того первоначального вихревого возмущения, которое постепенно переносится от объемов одного масштаба к другим, более мелким масштабам. Определив пространственное распределение коэффициента корреляции, мы тем самым сможем оценить пространственную структуру турбулентных возмущений и найти на каждом этапе разрушения вихря его *масштаб*.

Современная измерительная техника указывает разнообразные пути изучения внутренней структуры турбулентных течений. Сюда входит прежде всего непосредственная *фотокиносъемка* сделанных видимыми при помощи твердых примесей или газовых пузырьков водяных потоков [2]), позволяющая получить картину линий тока, измерить среднюю интенсивность пульсаций скорости и другие статистические характеристики, в том числе коэффициент корреляции и масштаб.

В воздушных потоках с успехом используется метод *тепловой анемометрии*, основанный на эффекте охлаждения потоком тонкой корот-

[1]) Истоки ее восходят к Л. Ричардсону (Richardson L. F. Weather prediction by numerical process.— Cambr. Univ. Press, 1922) и послужили основой известных работ А. Н. Колмогорова, в которых эта общая схема была применена к установлению конкретных количественных закономерностей в потоках с большими рейнольдсовыми числами (сам Ричардсон никаких количественных выводов из предложенной им схемы не сделал, хотя в последующей работе 1926 г. интуитивно использовал эту схему; см. исторический очерк во введении к ч. 1 монографии: Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1965).

[2]) Минский Е. М. О пульсации скоростей в открытом потоке.— Техн. заметки ЦАГИ, 1936, № 105; Минский Е. М., Фидман Б. А. Об экспериментальном определении некоторых статистических характеристик турбулентных потоков.— Изв. Энергетич. ин-та им. Г. М. Кржижановского, т. 9; Фидман Б. А. Применение высокоскоростной киносъемки к исследованию поля скоростей турбулентного потока.— Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз., 1946, т. 12, № 2, а также другие работы того же автора (Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 11 и др.).

кой платиновой нити, разогреваемой электрическим током. В равновесном состоянии по электрическому сопротивлению нити можно судить об осредненной скорости потока. По отклонениям от равновесия в компенсационной схеме (колебания шлейфа осциллографа, помещенного в нулевую ветвь моста) можно судить об интенсивности пульсаций скорости в потоке и записать эти пульсации в некотором масштабе [1]).

Используя разнообразные оптические, электрические, тепловые, электродинамические, а в настоящее время и лазерные [2]) приборы, можно непосредственно регистрировать *средние квадратичные значения пульсаций скорости, средние значения их произведений в одной и той же или двух различных точках потока.* Это дает величину интенсивности турбулентности, напряжение турбулентного трения и коэффициент корреляции между пульсациями скорости в двух точках потока. Как далее будет показано, отсюда нетрудно найти и средний *масштаб* турбулентности. За деталями эксперимента отсылаем к специальным руководствам [3]).

Примем в дальнейшем обозначение заглавными буквами U, V, W проекций осредненной скорости и соответствующими строчными буквами u, v, w проекций пульсационной составляющей скорости. Сохраняя принятый знак осреднения во времени в виде черты сверху, составим три основные осредненные характеристики пульсационных скоростей —

---

[1]) Первые экспериментальные исследования в этом направлении были проведены голландским физиком И. Бюргерсом и под его руководством Ван дер Хегге Цийненом в 1924 г. в Дельфте (см Bürgers J. M. The motion of a fluid in the boundary layer along smooth surface.— Proc. of the 1-st Intern. Congr. of Appl. Mech.— Holland: Delft, 1924, p. 116—120, а также ряд статей указанных авторов в Известиях Голландской академии наук).

[2]) Лазерные методы измерения локальных скоростей изложены в обзоре: Ринкевичюс Б. С. Допплеровский метод измерения локальных скоростей с помощью лазеров.— Успехи физич. наук, 1973, т. 111, вып. 2, с. 305—330. Экспериментальная методика лазерных измерений в струях с твердыми примесями разработана и внедрена в инженерную практику группой таллинских ученых: М. К. Лаатсом, Ф. А. Фришманом, А. З. Розенштейном и др. Под редакцией М. К. Лаатса выпущен сборник материалов III Всесоюзного совещания по теоретическим и прикладным аспектам турбулентных течений «Турбулентные двухфазные течения», Таллин, 1979. См. также другие сборники института термофизики и электрофизики АН ЭстССР под тем же названием, а также работы М. К. Лаатса, относящиеся к периоду 1979—1982 гг.

[3]) Повх И. Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении.— Л : Машиностроение, 1974, гл. X—XII; Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя.— Л.; М.: Гостехиздат, 1941, с. 382—402. Среди работ по термоанемометрии выделяется недавно вышедшая монография: Ярин Л. П., Генкин А. Л., Кукес В. И. Термоанемометрия газовых потоков.— Л.: Машиностроение, 1983. См. также статьи: Захаров Ю. Г., Минский Е. М. Исследование турбулентности с помощью термоанемометра.— Техн. заметки ЦАГИ, № 172, 1938; Захаров Ю. Г., Минский Е. М., Филиппов М. С. К методике измерения турбулентности термоанемометром.— Труды ЦАГИ, 1939, № 402. Анализ погрешностей при измерениях термоанемометром можно найти в работе: Захаров Ю. Г. Измерение средних и пульсационных скоростей воздушного потока при помощи термоанемометра.— Труды ЦАГИ, 1946, № 599. Некоторые полезные схемы описаны в работах: Смирнов Г. В. Термоанемометр с подогревом нити переменным током.— Труды ЛПИ, № 217.— Л.: 1961, с. 168—175; Некоторые электрорадиотехнические методы измерения аэродинамических величин.— Труды ЛПИ, № 280.— Л.: 1967, с. 107—116. Зарубежная литература по термоанемометрии также весьма обширна; отметим некоторые работы: Dryden H. Turbulence investigations at the National Bureau of Standardts.— Proc. 5-th Intern. Congr. Appl. Mech., 1938; Dryden H., Schubauer G., Mock W., Skramstad H. Measurements of intensity and scale of wind tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of spheres.— Techn. Rev. NACA, 1937, v. 581; Hall A. Measurements of the intensity and scale of turbulence, ARC R&M, 1938, № 1842; Corrsin S. Extended applications of the hot wire anemometer — Rev. Sci. Instruments, 1947, v. 18, p. 469; Townsend A. The measurement of double and triple correlation derivatives in isotropic turbulence.— Proc Camb. Phil. Soc, 1947, v. 43, p. 560; Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками/Пер. с франц.— М.: Мир, 1968; сборник статей: Beiträge zur Turbulenzforschung und Messtechnik/Herausgegeben von Hoffmeister M. und Förste J.— Berlin: Acad. Verlag, 1973.

корни квадратные из средних квадратичных пульсаций скорости

$$\sqrt{\overline{u^2}},\ \sqrt{\overline{v^2}},\ \sqrt{\overline{w^2}}.$$

Эти величины, отнесенные к местной или общей осредненной скорости, определяют *первые статистические характеристики турбулентного потока — интенсивности турбулентности* в разных направлениях.

Возьмем в данный момент времени t две точки в пространстве: $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$, обозначим проекции *пульсационных* скоростей жидкости в этих двух точках пространства соответственно: u, v, w и u', v', w'. В общем случае *несимметричный* тензор второго ранга с таблицей

$$\begin{pmatrix} \overline{uu'} & \overline{uv'} & \overline{uw'} \\ \overline{vu'} & \overline{vv'} & \overline{vw'} \\ \overline{wu'} & \overline{wv'} & \overline{ww'} \end{pmatrix} \tag{36}$$

представит *тензор моментов двухточечной корреляции* между пульсационными скоростями в точках M и M'.

Устремив точку M' к точке M, получим в пределе *симметричный* тензор моментов одноточечной связи

$$\begin{pmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{vu} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{wu} & \overline{wv} & \overline{w^2} \end{pmatrix}, \tag{37}$$

компоненты которого отличаются только постоянными множителями $(-\rho)$ от компонент тензора П турбулентных напряжений (17). Удаляя точку M' от точки M, будем получать моменты двухточечной связи между пульсационными скоростями точек потока, все менее и менее между собою статистически связанными. Компоненты тензора (36) при этом будут стремиться к нулю.

Введем *коэффициенты пространственной корреляции* между пульсациями скоростей в двух точках: $u_i(x_1, x_2, x_3)$ и $u_j(x_1', x_2', x_3')$, где $x_1' = x_1 + \delta_{1m} r$, $x_2' = x_2 + \delta_{2m} r$, $x_3' = x_3 + \delta_{3m} r$ (δ_{km} — символ Кронекера, $m = 1, 2, 3$), положив

$$R_{ij}^{(1)}(r, 0, 0) = \frac{\overline{u_i(x_1, x_2, x_3)\, u_j(x_1 + r, x_2, x_3)}}{\sqrt{\overline{u_i^2(x_1, x_2, x_3)}}\ \sqrt{\overline{u_j^2(x_1 + r, x_2, x_3)}}},$$

$$R_{ij}^{(2)}(0, r, 0) = \frac{\overline{u_i(x_1, x_2, x_3)\, u_j(x_1, x_2 + r, x_3)}}{\sqrt{\overline{u_i^2(x_1, x_2, x_3)}}\ \sqrt{\overline{u_j^2(x_1, x_2 + r, x_3)}}}, \tag{38}$$

$$R_{ij}^{(3)}(0, 0, r) = \frac{\overline{u_i(x_1, x_2, x_3)\, u_j(x_1, x_2, x_3 + r)}}{\sqrt{\overline{u_i^2(x_1, x_2, x_3)}}\ \sqrt{\overline{u_j^2(x_1, x_2, x_3 + r)}}}.$$

Здесь *нижние* индексы при R в левой части относятся к номерам проекций коррелируемых скоростей пульсаций, *верхний* индекс — к номеру координатной оси, в направлении которой расположены точки M и M'.

В общем случае пространственной структуры турбулентности приходится, таким образом, иметь дело с большим числом коэффициентов двухточечной корреляции.

Интегралы

$$L_{ij}^{(k)} = \int_0^\infty R_{ij}^{(k)} dr, \tag{39}$$

где $R_{ij}^{(k)}$ — один из введенных системой равенств (38) коэффициентов корреляции, дают систему «масштабов турбулентности» $L_{ij}^{(k)}$, в общем случае крайне сложную.

Обычно довольствуются рассмотрением лишь «продольного» и двух «поперечных» по отношению к направлению потока масштабов, задавая их интегралами

$$L_x = \int_0^\infty R_{11}^{(1)}\, dr, \quad L_y = \int_0^\infty R_{11}^{(2)}\, dr, \quad L_z = \int_0^\infty R_{11}^{(3)}\, dr, \tag{40}$$

наиболее просто определяемых экспериментально. Масштаб турбулентности представляет *вторую статистическую характеристику* турбулентности. В зависимости от величины отношения масштабов турбулентности к характерным размерам потока (радиус трубы, «номинальная» толщина пограничного слоя и др.) различают «мелкомасштабную» и «крупномасштабную» турбулентности.

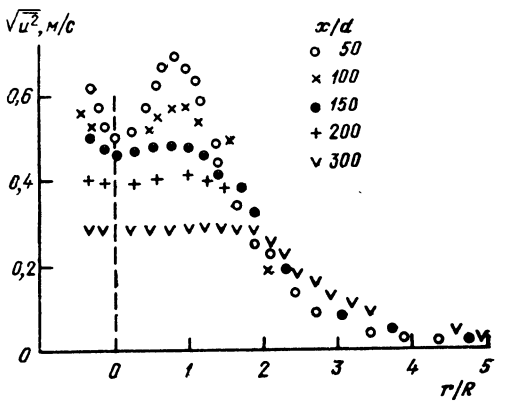


Рис. 227

Введем, наконец, *третью характеристику турбулентности — спектр* турбулентности — функцию $F(k)$ распределения кинетической энергии пульсаций по частотам k этих пульсаций во времени. Бесконечно малая величина $F(k)dk$ определяет долю энергии пульсаций с частотой, лежащей в интервале $(k,\ k+dk)$, в общей, отнесенной к единице массы осредненной энергии пульсационного движения. Опуская численный множитель $^1/_2$, определим эту *среднюю по частотам* энергию выражением (u здесь и далее — пульсационная скорость)

$$\overline{u^2} = \frac{\int_0^\infty \overline{u^2}(k)\, F(k)\, dk}{\int_0^\infty F(k)\, dk} = \int_0^\infty \overline{u^2}(k)\, F(k)\, dk, \tag{41}$$

так как из самого определения функции распределения следует, что

$$\int_0^\infty F(k)\, dk = 1. \tag{42}$$

Приведем некоторые количественные результаты, относящиеся к введенным только что характеристикам турбулентного движения. Начнем со *свободной* турбулентности. Картина убывания интенсивности турбулентности наблюдается в струе, окруженной спутным потоком (рис. 227). Приводятся кривые [1]) распределения $\sqrt{\overline{u^2}}$ в сечениях, нормальных к потоку и находящихся на различных относительных расстояниях x/d от среза сопла. Скорость на выходе из сопла 10,2 м/с, скорость спутного потока 8,5 м/с. Из кривых следует, что вблизи границы струи

[1]) Kobashi Y. Experimental studies on compound jets.— Proc. of the 2nd Japan Nat. Congr. for Appl. Mech., 1952, p. 223—226.

и спутного потока на выходе из сопла ($r/R=1$) возникают возмущения большой интенсивности, убывающие вниз по потоку. Убывает при этом и интенсивность турбулентности потока, выходящего из сопла.

Аналогичное, но более детальное исследование провели А. С. Гиневский, Л. И. Илизарова и Ю. М. Шубин [1]). Пользуясь методом тепловой анемометрии, авторы измерили целый ряд турбулентных характеристик струи в спутном потоке: распределение *интенсивностей* продольной $\varepsilon_u=\sqrt{\overline{u^2}}/U$ и поперечных $\varepsilon_v=\sqrt{\overline{v^2}}/U$, $\varepsilon_w=\sqrt{\overline{w^2}}/U$ пульсаций скорости, двухточечный коэффициент корреляции $R_{11}^{(2)}(0, y)=R_{uu}(y)$ и соответствующий ему масштаб турбулентности $L_{11}^{(2)}=L(y)$, а также одноточечный коэффициент корреляции r между продольной u и поперечной

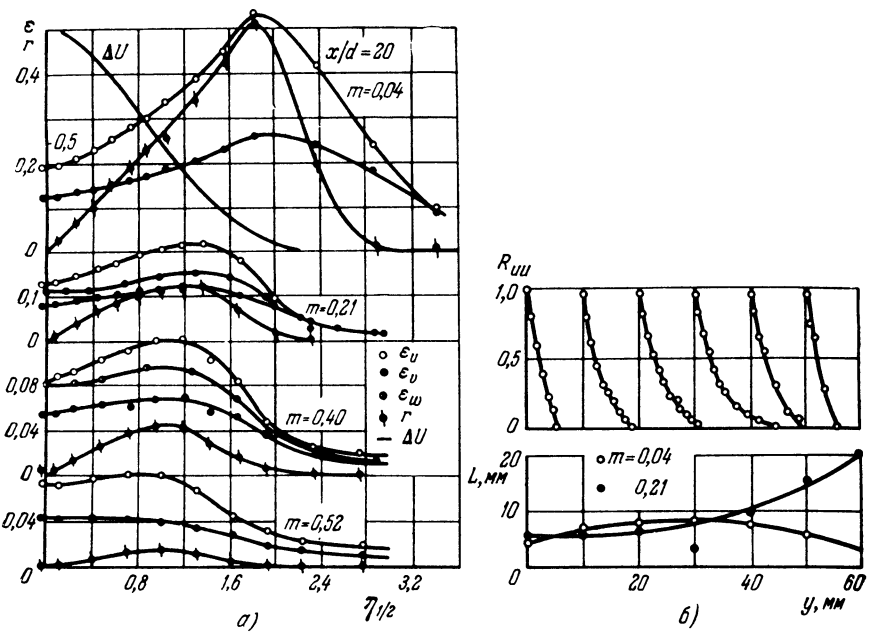


Рис. 228

v пульсациями [2]). Измерения производились при различных отношениях $m=U_\infty/U_0$ скорости спутного потока U_∞ к скорости U_0 на срезе сопла, из которого вытекала струя. На рис. 228, *а* приводится сводный график, который полезно детально рассмотреть. На этом рисунке, относящемся к сечению струи $x/d=20$ (x — расстояние сечения от среза сопла, d — диаметр выходного сечения сопла), приводятся все *одноточечные* характеристики: ε_u, ε_v, ε_w; r и отдельно расположенный график величины $\Delta U=(U-U_\infty)/(U_m-U_\infty)$ избыточной безразмерной осредненной скорости $U-U_\infty$, отнесенной к разности скоростей на оси U_m и в спутном потоке U_∞. По оси абсцисс отложено безразмерное расстояние $\eta_{1/2}=y/\delta_{1/2}$ от оси струи, отнесенное к такому значению $y=\delta_{1/2}$, которое соответствует точке, где $\Delta U=1/2$. Как бы в дополнение к рис. 227, где было показано убывание интенсивности продольной пульсации с удалением от сре-

[1]) Гиневский А. С., Илизарова Л. И., Шубин Ю. М. Исследование микроструктуры турбулентной струи в спутном потоке.— Мех. жидк. и газа, 1966, № 4, с. 81—88.

[2]) Используемые здесь обычные обозначения ε_u, ε_v, ε_w; r интенсивности турбулентности и коэффициента корреляции не следует смешивать с встречающимися далее обозначениями ε для скорости диссипации и r — для радиальной координаты.

за сопла, на рис. 228, *а* приводятся данные по убыванию интенсивностей пульсаций в результате уменьшения скорости струи на срезе сопла или увеличения скорости спутного потока.

Обращает на себя внимание, во-первых, наличие максимумов интенсивности пульсаций и затем быстрое спадание интенсивностей при приближении к «границе» струи, а во-вторых, отличие понятия «границы струи» как точки данного сечения, в которой избыточная скорость равна нулю ($\eta_{1/2}=2{,}2$), и такой воображаемой точки, где все возмущения, производимые струей в окружающем ее спутном потоке, равнялись бы нулю.

Можно заметить, что понятие о такой второй, физически мыслимой границе было бы количественно трудно определимым, так как между

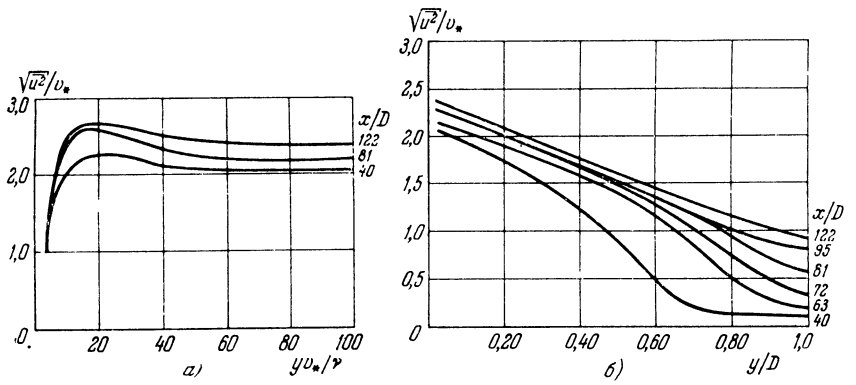


Рис. 229

струей и спутным потоком имеется «пограничный слой», где происходит плавный переход от струи к спутному потоку. При малых значениях параметра m вторая граница оказалась бы заметно различной для разных турбулентных характеристик. Заимствуем из только что процитированной работы график (рис. 228, *б*) распределения по сечению струи коэффициента двухточечной корреляции продольных скоростей пульсаций $R_{uu}(y)$ и *поперечного* масштаба $L(y)$, определенного по изменению коэффициента корреляции (верхние кривые) согласно первому интегралу (40). Обращает на себя внимание факт почти постоянства масштаба в центральной области струи и изменение его в разные стороны при разных значениях параметра m на краю струи.

Многочисленные экспериментальные данные по турбулентной структуре потока в плоской трубе можно найти в книге Ж. Конт-Белло [1]). Рассмотрим некоторые из них. На рис. 229, *а* и *б* представлены относящиеся к сечениям на разных относительных расстояниях x/D от входа в трубу распределения интенсивности продольных пульсаций, отнесенной к динамической скорости $v_*=\sqrt{\tau_w/\rho}$, в функции от безразмерного расстояния от стенки, составленного различным образом для пристеночной и центральной частей потока (D — полурасстояние между стенками плоской трубы; экспериментальные точки опущены).

Рис. 229, *а* описывает «пристеночную» область; на оси абсцисс отложена так называемая «универсальная» координата (безразмерное расстояние от стенки) $\eta=yv_*/\nu$. В вязком подслое ($\eta<11{,}5$) интенсивность продольных пульсаций резко возрастает с удалением от стенки, достигая максимума примерно в центре переходной области от вязкого подслоя

[1]) Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками.— М.: Мир, 1968.

к логарифмической зоне. Затем интенсивность плавно убывает до своего значения на оси трубы, как это показано на рис. 229, *б*, отличающемся от рис. 229, *а* масштабом абсцисс. Приведенные графики относятся к потоку с числом Рейнольдса $\mathbf{Re}=U_{ср}D/\nu=120\,000$. Как показывают графики, приведенные в цитированной книге, интенсивности продольных и поперечных пульсаций, отнесенные к динамической скорости, *слабо зависят от рейнольдсова числа* потока.

Опуская графики спектров частот и коэффициентов корреляций — они имеются в большом количестве в цитированной книге Ж. Конт-Белло, — покажем лишь один общий график (рис. 230) (экспериментальные точки опущены; их разброс сравнительно с другими графиками значителен) распределений продольного L_x и двух поперечных L_y и L_z масштабов турбулентности по сечению трубы $x/D=118$ при рейнольдсовом числе $\mathbf{Re}=120\,000$. Продольный масштаб L_x значительно превосходит по величине оба поперечных.

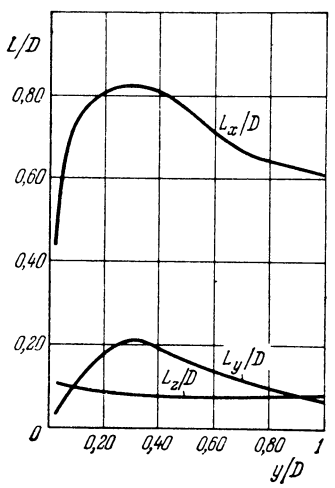


Рис. 230

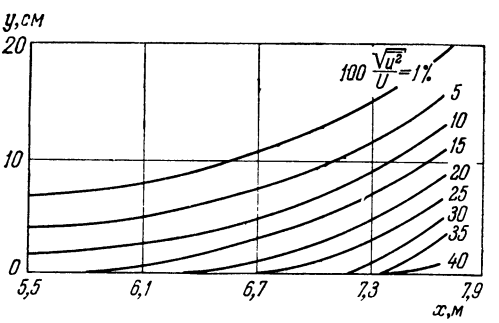


Рис. 231

Для масштабов L_x и L_y характерно наличие максимумов примерно на 30% полурасстояния между стенками трубы D, считая от стенки трубы.

Исследования турбулентности в области пограничного слоя также многочисленны. Изучены как распределения интенсивностей, так и корреляции масштабов и частотных спектров.

Отсылая читателя к имеющемуся на русском языке обзору Х. Драйдена[1]), где собраны систематические материалы по *структуре турбулентного пограничного слоя* при наличии продольного отрицательного и положительного перепадов давления, приведем в качестве примера диаграмму распределения местной интенсивности турбулентности $\sqrt{\overline{u^2}}/U$ в диффузорной области пограничного слоя (рис. 231). Кривые представляют собой геометрические места точек одинаковой интенсивности турбулентности, показанной справа в процентах.

Возрастание интенсивности турбулентности в данном поперечном сечении слоя при приближении к стенке объясняется влиянием двух факторов: увеличением при приближении к стенке абсолютной среднеквадратичной пульсации скорости $\overline{u^2}$, подобным показанному на рис. 229, *а*, и одновременным уменьшением скорости осредненного движения U. Распределение местной интенсивности турбулентности вдоль пограничного слоя при данном значении ординаты ($y=\text{const}$) показывает сильный рост интенсивности в диффузорной части слоя ($x>5{,}5$ м). Исклю-

[1]) Драйден Х. Современное развитие механики пограничного слоя.— В кн.: Проблемы механики.— М.: ИЛ, 1955, с. 277—290.

чительно высокая интенсивность (40%) имеет место вблизи точки отрыва турбулентного пограничного слоя ($x_s = 7{,}84$ м).

Частотные (спектральные) характеристики турбулентного пограничного слоя показывают, что внутри слоя преимущественное значение имеют колебания частоты, низкой по сравнению с частотами колебаний вне пограничного слоя. Так, в пограничном слое на пластине в сечении, соответствующем числу Рейнольдса $\mathrm{Re}_x = 650\,000$, преимущественное значение имеют частоты до 40—50 Гц, при $\mathrm{Re}_x = 1\,600\,000$ — до 20 Гц, а вне пограничного слоя — порядка 100 Гц. Доля высоких частот (порядка 1000 Гц) совершенно невелика. Понижение частот при переходе к бóльшим Re_x говорит о возрастании масштаба турбулентности с увеличением толщины пограничного слоя.

Можно заметить простую связь между частотой пульсаций и масштабом турбулентности. При прохождении крупномасштабного вихря мимо неподвижного датчика частотомера будет зарегистрировано большее время, чем при прохождении мелкомасштабного вихря. Отсюда следует общая закономерность: бóльшим по масштабу вихрям соответствует меньшая частота и, наоборот, меньшим — более высокая частота. Пользуясь взамен частоты обратной по отношению к ней величиной — длиной волны, убедимся в полном соответствии ранее отмеченного различия в процессах рассеяния вихрей известному общему закону о более быстром рассеянии коротких волн по сравнению с длинными[1]).

Значительное развитие получило учение о «когерентной» турбулентности, объясняющее турбулентное перемешивание на поверхностях раздела, образующихся, например, в свободных струях или струях в спутных потоках и следах за обтекаемыми телами, наличием дискретных вихревых структур (кольцевых и тороидальных, П-образных и др.). Для многих прикладных вопросов и особенно для представляющей большой интерес теории турбулентного пограничного слоя существование «когерентных» структур служит объяснением такого специфического явления, как *отрыв* турбулентного пограничного слоя от плавной поверхности. Подобный вопрос уже был рассмотрен в гл. XII для случая ламинарного пограничного слоя, в котором явление отрыва подчинялось простому математическому моделированию. Иначе обстоит дело с турбулентным пограничным слоем. По современным представлениям во внешней части турбулентного пограничного слоя развивается *крупномасштабная* турбулентность, по своей структуре представляющая динамически равновесный процесс взаимодействия крупных, имеющих порядок размера толщины пограничного слоя вихрей, с одной стороны, распадающихся на более мелкие, с другой — коагулирующих (срастающихся) в более крупные вихри, образуя так называемую «когерентную» структуру. Увлекаемые оторвавшимся пограничным слоем, они заполняют «след» за телом, имеющий также когерентную структуру. Подчеркнем, что в такого рода областях излагаемая далее теория турбулентного переноса теряет свою справедливость и на смену ей приходит еще не получившая своего конечного развития теория взаимодействия вихревых систем.

§ 122. Перенос импульса, тепла и примесей в турбулентных движениях. Гипотезы Буссинеска, Фурье и Фика

Предложенное Рейнольдсом выделение из общего турбулентного движения некоторого более простого *осредненного* движения не исключает необходимости учета тех физических процессов, которые в дей-

[1]) Для ознакомления с общей теорией турбулентности рекомендуем наиболее доступную для этой цели монографию: Хинце И. О. Турбулентность.— М.: Физматгиз, 1963.

ствительности происходят в турбулентных движениях. Линии тока осредненного движения, непроницаемые для этого условно вводимого движения, *проницаемы для пульсационного движения*, которое *переносит* из слоя в слой сквозь линии тока осредненного движения *количество движения* (*импульс*), *тепло*, *вещество* и *другие виды физических субстанций*. Этот перенос аналогично тому, как это имеет место в случае молекулярного переноса в ламинарных движениях, определяет турбулентное трение между слоями в осредненном движении, тепломассоперенос между ними и другие разнообразные явления переноса.

Отличие от ламинарного (молекулярного) переноса здесь в том, что *носителями субстанции* в турбулентном переносе являются не сравнительно ничтожные по массе отдельные молекулы, а *конечные объемы жидкости*, как иногда говорят, «моли». В соответствии с этим и сами процессы турбулентного переноса называют «молярными», в отличие от «молекулярных» процессов переноса в ламинарных движениях.

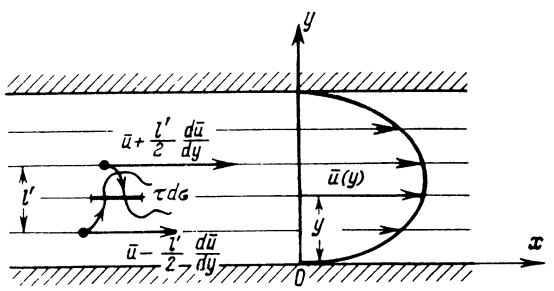


Рис 232

С этой точки зрения прием выделения осредненного движения можно представить себе так. Действительное турбулентное движение с характерными для него извилистыми, хаотически переплетающимися линиями тока и траекториями, заменяется некоторым упорядоченным *слоистым* (но не *ламинарным*!) движением. Такую замену можно выразить принятым в метеорологических применениях теории турбулентности термином *стратификация* (от латинского слова stratus — слой). Стратификация может производиться по различным характеристикам потоков: скорости, плотности, температуре и др.

Рассматривая, например, установившееся осредненное турбулентное движение в плоской трубе (рис. 232), представляют себе линии тока осредненного движения в виде прямых, параллельных оси трубы. Это — стратификация по скорости. При установившемся движении во всех сечениях трубы имеет место одинаковый профиль осредненных скоростей $\bar{u}(y)$. Форма профиля зависит от свойств турбулентного движения и будет в дальнейшем определена. Линии тока пульсационного движения пересекают линии тока осредненного движения, проникают из одного слоя осредненного движения в другой и создают при этом перемешивание жидкости сквозь площадки, расположенные вдоль линий тока осредненного движения.

Такого рода перемешивание — его называют *турбулентным* или *молярным перемешиванием* — сопровождается, подчеркнем еще раз, переносом сквозь границу между слоями импульса, энергии и других механических или термодинамических параметров осредненного движения жидкости, тепла, а также заключенных в жидкости примесей (например, дыма или пыли в воздухе, ила или песка в воде и т. п.).

Перенос количества движения (импульса) создает *турбулентное трение* между слоями, перенос тепла обусловливает турбулентную теплопроводность, перенос примесей — турбулентную диффузию этих примесей. *Механизм турбулентного перемешивания одинаков как для трения, так и для теплопроводности или диффузии; разница заключается лишь в особых свойствах переносимой пульсационным движением субстанции — количества движения, тепла или примеси.*

В 1877 г. Ж. Буссинеск[1]), опираясь на аналогию между *ламинарным* движением вязкой жидкости и *турбулентным осредненным* ее движением, предложил получившую широкую известность формулу для касательного напряжения τ_t между слоями *осредненного* движения (рис. 232)

$$\tau_t = A\frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{43}$$

Это равенство по своему внешнему виду напоминает формулу Ньютона (1) гл. X. Разница лишь в том, что, вместо динамического коэффициента обычной (молекулярной) вязкости μ, в формуле (43) стоит существенно больший динамический коэффициент *турбулентной* (молярной) вязкости A, получивший вначале наименование *коэффициента турбулентного перемешивания* (Austauschgrösse по Прандтлю), а под $\bar{u}$ подразумевается осредненная скорость турбулентного движения жидкости.

Подобно тому как динамический коэффициент вязкости представляет физическую константу жидкости или газа при данных их термодинамических состояниях, коэффициент пропорциональности A также вначале рассматривался как *постоянный*, совпадающий по размерности с μ коэффициент. Расчеты турбулентных движений жидкости, произведенные в этом простейшем предположении о постоянстве величины A, показали, что для согласования результатов этих расчетов с опытом величина A должна на много порядков превосходить μ. Как исторический курьез можно отметить, что известный специалист по динамике атмосферных движений воздуха Ричардсон сравнил *динамический* коэффициент турбулентной вязкости воздуха A с аналогичным коэффициентом вязкости μ сиропа, а *кинематический* коэффициент A/ρ с *кинематическим* коэффициентом ν вязкости сапожной ваксы. Объяснение этому на первый взгляд аномальному обстоятельству дал, по-видимому, впервые Г. А. Лоренц[2]), указавший, что в турбулентных движениях *трение* — турбулентная вязкость, в отличие от обычной вязкости, обусловливается переносом сквозь слои движущейся жидкости количеств движения не *микроскопических* частиц, а перемешивающихся *конечных* объемов среды.

Эта идея Лоренца получила свое дальнейшее развитие в период 1915—1925 гг. в работах Тейлора, Ричардсона и Шмидта[3]), создавших до появления работы Прандтля (см. далее) модель турбулентного перемешивания и указавших роль понятия «пути перемешивания».

Выведем общую формулу *турбулентного трения* в простейшем случае установившегося плоского прямолинейного осредненного движения, представленного на рис. 232. Рассмотрим элементарную площадку $d\sigma = dx \cdot 1$, параллельную линии тока осредненного движения и находящуюся на расстоянии y от твердой стенки. Через эту площадку проходят линии тока пульсационного движения и переносят количества движения (импульсы) смежных слоев, расположенных как сверху, так и снизу от площадки на некотором расстоянии $l'/2$, причем скоростью переноса служит *поперечная* к осредненному потоку пульсационная ско-

---

[1]) Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes.— Paris: Mémoires présentées par diverses savants á l'Acad. d. Sci., 1877, v. 23.

[2]) Lorentz H. A. Vorschlagen der Akad. von Wetenschapen.— Amsterdam, 1897, Bd. 6.

[3]) Келлер Л. В. Теория конвекции в турбулентной атмосфере по Тэйлору, Ричардсону и Шмидту.— Изв. Гл. Геофизической обсерватории, 1931, № 4, с. 3; там же обширная библиография.

рость v'. Касательное напряжение турбулентного трения $\pi_{xy}=\pi_{yx}$ для краткости обозначим через τ_t и определим как *среднюю во времени проекцию на ось Ox отнесенного к единице площади переноса количества осредненного турбулентного движения через площадку, расположенную вдоль линии тока.* Понимая под $\tau_t d\sigma$ *силу* трения, приложенную от *верхнего* слоя, где осредненные скорости больше, к *нижнему*, будем считать количество движения, прошедшее из верхнего слоя в нижний, *приобретенным*, т. е. *положительным*, а количество движения, перенесенное из нижнего слоя в верхний, *потерянным*, т. е. *отрицательным*. Тогда, обозначая чертой сверху среднюю во времени, найдем

$$\tau_t d\sigma = \overline{\rho v' \left[\bar{u}\left(y+\frac{l'}{2}\right)-\bar{u}\left(y-\frac{l'}{2}\right)\right]} d\sigma$$

или, заменяя приближенно

$$\bar{u}\left(y \pm \frac{l'}{2}\right) = \bar{u}(y) \pm \frac{l'}{2}\frac{d\bar{u}}{dy}$$

и произведя очевидные сокращения, получим

$$\tau_t = -\rho\overline{u'v'} = \rho\overline{v'l'}\frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{44}$$

Сравнивая равенство (44) с (43), получим выражение для коэффициента турбулентного перемешивания A (ρ — константа)

$$A = \rho\overline{v'l'}, \tag{45}$$

придающее благодаря наличию скорости v' и l' этой эмпирической величине внутренний, связывающий ее с механизмом турбулентного перемешивания смысл. Конкретизированная выражением (45) формула Буссинеска (43), выведенная для простейшего прямолинейного сдвигового движения, в полной аналогии с рассуждением, изложенным в начале гл. X, обобщается на случай любого пространственного движения.

Введем допущение о *локальной изотропности* механизма турбулентного перемешивания. Это означает, что коэффициент A является *скалярной* величиной. Предположение об *анизотропии* этого механизма привело бы к резкому усложнению математической стороны задачи, вызванному тем, что величина A стала бы в этом случае тензором *четвертого ранга.*

Будем иметь, предполагая связь между тензором рейнольдсовых напряжений Π [см. (17), (18)] и тензором скоростей деформаций в осредненном движении $\bar{S}$ *линейной*,

$$\Pi = a\bar{S} + bE, \tag{46}$$

где a и b — зависящие от структуры турбулентного движения скаляры, E — тензорная единица, компоненты которой равны символам Кронекера δ_{ij}. Сравнение (46) с выражением (43) для простейшего вида осредненного движения дает

$$a = 2A, \tag{47}$$

а приравнивание линейных инвариантов слева и справа в формуле (46) позволяет заключить, что

$$b = -\frac{1}{3}\rho\left(\overline{v_1'^2}+\overline{v_2'^2}+\overline{v_3'^2}\right) = -\frac{1}{3}\rho\overline{\left(v_1'^2+v_2'^2+v_3'^2\right)} = -\frac{2}{3}\rho k, \tag{48}$$

где, по-предыдущему, k представляет собой приведенную к единице

массы кинетическую энергию пульсационного движения

$$k = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'}. \tag{49}$$

В дальнейшем остановимся на общепринятых обозначениях

$$A = \mu_t, \quad \frac{A}{\rho} = \nu_t, \tag{50}$$

где μ_t и ν_t — соответственно динамический и кинематический коэффициенты «турбулентной вязкости». Тогда придем к следующей форме обобщенной гипотезы Буссинеска:

$$\Pi = 2\mu_t \bar{S} - \frac{2}{3}\rho k E, \tag{51}$$

а в прямоугольной декартовой системе

$$\pi_{ij} = -\rho\overline{v_i' v_j'} = 2\mu_t \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} = \mu_t\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\rho\,(\overline{v_m' v_m'})\,\delta_{ij}. \tag{52}$$

Величину

$$\frac{\rho}{3}\overline{v_m' v_m'} = p_t \tag{53}$$

можно было бы назвать «турбулентным давлением», а равенству (52) придать форму

$$\pi_{ij} = -\rho\overline{v_i' v_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}\right) - p_t \delta_{ij}, \tag{54}$$

в правой части аналогичную обобщенному закону Ньютона вязкой жидкости (10) гл. X.

Формула Буссинеска в своем начальном виде (43), а в дальнейшем и в обобщенной форме (51) или (52) получила широкое применение в гидравлике, метеорологии, океанологии и других областях техники и естествознания. При этом делались различные допущения о характере изменений в потоках величин μ_t и ν_t, от постоянства которых вскоре отказались [1]). Как заметил сам Буссинеск, и это потом было подтверждено опытами, μ_t и ν_t изменяются по сечению, нормальному к потоку в трубе или в пограничном слое, возрастая от нулевого значения на обтекаемой твердой поверхности до некоторого максимума, после чего убывают до минимального значения на оси трубы или на внешней границе турбулентного пограничного слоя. О резком возрастании $\mu_t = A$ с удалением от твердой поверхности можно судить по рис. 233, изображающему результаты опытов Дж. Лауфера по трубам (кружки на графике) и Г. Шубауера (крестики) по пограничным слоям [2]). По оси абсцисс отложено расстояние от твердой стенки, отнесенное к имеющей размерность длины величине ν/v_*, где $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, а τ_w — напряжение трения на стенке. По оси ординат для сравнения с обычной молекулярной вязкостью нанесено

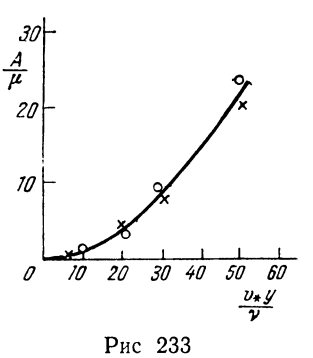


Рис 233

[1]) См. по этому поводу содержащий много интересных замечаний исторического характера курс: Форхгеймер Ф.: Гидравлика/Пер. с нем — М.; Л.: ОНТИ, 1935.

[2]) Цитируем по монографии: Хинце И. О. Турбулентность.— М.: Физматгиз, 1963, с. 607.

отношение $\mu_t/\mu = A/\mu$. Можно заметить, что при приближении к твердой стенке коэффициент турбулентной вязкости быстро убывает. В метеорологии и океанологии часто рассматривают величину $A=\mu_t$ как возрастающую функцию расстояния точки измерения от поверхности Земли или дна океана.

Формула Буссинеска исторически явилась крупным шагом по пути замыкания уравнения переноса импульса (16), позволив выразить *шесть* неизвестных рейнольдсовых напряжений через одну неизвестную μ_t, но все же не дала полного решения проблемы замыкания. Составленная по аналогии с обобщенным определяющим соотношением Ньютона для ламинарного движения вязкой жидкости формула Буссинеска легла в основу подавляющего числа методов расчета турбулентных движений жидкости в гидравлике, гидродинамике и их технических применениях. И вместе с тем эта формула заслуживает ряда критических замечаний. Так же как и формула Ньютона, формула Буссинеска относится к числу так называемых *локальных* формул в том смысле, что она определяет значения турбулентных (рейнольдсовых) напряжений в данной точке потока жидкости в зависимости от осредненных скоростей деформаций в окрестности *той же точки*, т. е. не содержит влияния на определяющее соотношение удаленных от этой точки областей потока. Такая ограниченность формулы Буссинеска лишает ее ряда важных применений, как, например, в *несимметричных* потоках в каналах с разной шероховатостью стенок. В таких каналах, в явном несоответствии с формулой Буссинеска, точки *нулевого турбулентного трения не совпадают с точками максимальной скорости* ($\partial\bar{u}/\partial y=0$). Вообще можно заметить, что формула Буссинеска (43) не отражает *вихревой* структуры потока и размеры обменивающихся количеством движения вихревых масс, хотя учет этих факторов может быть очень существен для описания некоторых характерных для турбулентности явлений. Как будет показано в § 140, расчет затухания напряжений турбулентного трения в следе за возмущающим поток телом, выполненный на основании локальной формулы Буссинеска, отражает только *общую тенденцию* этого явления, но не может дать достаточно точное количественное описание этого «наследственного» процесса. Другие примеры недостаточности формулы Буссинеска можно найти в обзорной части диссертации голландского ученого Буйлтьеса[1]).

При рассмотрении турбулентных потоков в реальных жидкостях и газах, наряду с переносом количества движения (импульса), часто приходится иметь одновременно дело с *переносом тепла и вещества* (массы). Практически интересные задачи тепломассопереноса в турбулентных потоках обычно допускают простую стратификацию по температуре и концентрации, совпадающую со стратификацией по скорости. Пользуясь идеей Буссинеска о придании формуле турбулентного трения того же вида, что и «ламинарный» закон Ньютона, можно и турбулентным потокам тепла и вещества (массы) придать вид, формально обобщающий известные уже нам по предыдущим главам законы *Фурье* и *Фика*.

Обозначим соответственно через $A_\tau=\mu_t$, A_q и A_m *коэффициенты турбулентного переноса импульса* (количества движения), *тепла и концентрации примеси*. Вспоминая выражения потоков тепла и вещества (24) и (27) и довольствуясь простейшим случаем установившегося прямолинейного сдвигового движения вблизи стенки, в котором осредненные скорости $\bar{u}$, температура $\bar{T}$ и концентрация взвешенной в жидкости примеси $\bar{c}$ будут функциями только расстояния от стенки y, найдем сле-

[1]) Builtjes P. J. H. Memory effects in turbulent flows.— Depart. of Mech. Eng., Delft, Netherland, WTHD, April 1977, № 97, p. 5—8.

дующие выражения для турбулентных потоков импульса, тепла и вещества

$$\tau_t = -\rho\overline{u'v'} = A_\tau \frac{d\bar{u}}{dy},$$

$$q_t = -\rho c_p \overline{v'T'} = -c_p A_q \frac{d\bar{T}}{dy}, \tag{55}$$

$$m_t = -\rho\overline{v'c'} = -A_m \frac{d\bar{c}}{dy},$$

где штрихи отличают *пульсации* входящих величин от осредненных их значений, отмеченных черточкой сверху [1]).

Чтобы подчеркнуть роль поперечной пульсационной скорости v' как одинаковой для всех рассматриваемых процессов скорости переноса «субстанции» (импульса, тепла, вещества) из слоя в слой движущейся жидкости, выразим *коэффициенты переноса* A_τ, A_q, A_m через v' и некоторые характерные для каждой отдельной субстанции *длины* «путей переноса» l'_τ, l'_q, l'_m, положив аналогично (45)

$$A_\tau = \rho\overline{v'l'_\tau}, \quad A_q = \rho\overline{v'l'_q}, \quad A_m = \rho\overline{v'l'_m}. \tag{56}$$

Смысл определений этих «путей переноса», данный им Прандтлем, разъясняется в следующем параграфе. Иногда вместо коэффициентов переноса A_τ, A_q, A_m вводят отношения их к плотности среды

$$\varepsilon_\tau = \frac{A_\tau}{\rho} = \frac{\mu_t}{\rho} = \nu_t, \quad \varepsilon_q = \frac{A_q}{\rho}, \quad \varepsilon_m = \frac{A_m}{\rho}. \tag{57}$$

Наряду с выражениями турбулентного (молярного) переноса указанных субстанций составим выражения *полных* переносов, объединяющих ламинарный (молекулярный) и турбулентный (молярный) переносы количества движения, тепла и вещества

$$\tau = \mu\frac{d\bar{u}}{dy} + \tau_t = (\mu + A_\tau)\frac{d\bar{u}}{dy} = (\mu + \rho\varepsilon_\tau)\frac{d\bar{u}}{dy},$$

$$q = -\lambda\frac{d\bar{T}}{dy} + q_t = -(\lambda + c_p A_q)\frac{d\bar{T}}{dy} = -(\lambda + \rho c_p \varepsilon_q)\frac{d\bar{T}}{dy}, \tag{58}$$

$$m = -\rho D\frac{d\bar{c}}{dy} + m_t = -(\rho D + A_m)\frac{d\bar{c}}{dy} = -(\rho D + \rho\varepsilon_m)\frac{d\bar{c}}{dy}.$$

Ламинарным (молекулярным) коэффициентам переноса — коэффициентам вязкости μ, теплопроводности λ и диффузии ρD, введенным в § 117, соответствуют коэффициенты *турбулентных* вязкости A_τ, теплопроводности A_q и диффузии A_m.

Формулы (56) дают зависимость величин A_τ, A_q, A_m от остающихся неизвестными v', l'_τ, l'_q и l'_m. Заслуга уменьшения числа этих неизвестных и, таким образом, приближения к решению проблемы замыкания уравнений переноса импульса, тепла и вещества принадлежит Л. Прандтлю, который, сохранив роль поперечной пульсационной скорости в механизме переноса, выразил эту скорость через аналоги величин l'_τ, l'_q, l'_m и поперечную производную осредненной скорости $d\bar{u}/dy$.

---

[1]) Считая невозможным отказаться от общепринятых обозначений: c для концентрации и c_p для коэффициента теплоемкости при постоянном давлении, предостерегаем от смешения этих схожих по обозначениям величин.

§ 123. Теория «пути смешения» Прандтля

Как уже указывалось в конце предыдущего параграфа, развитие проблемы замыкания уравнений переноса импульса, тепла и вещества не свелось только к установлению формул (46)—(48), далеко не полно отражающих действительный механизм переноса этих субстанций. На рубеже первой четверти нашего века появилась тесно связанная с предыдущим теория переноса, в значительной степени углубившая представления в этой области и, в известном смысле, практически замкнувшая уравнения переноса импульса, тепла и вещества.

Теория эта была создана Л. Прандтлем[1]). Исходя из аналогии между переносом *конечных по объему вихревых масс в турбулентном движении* и переносом *молекул* в *ламинарном* движении, Прандтль предложил простую и наглядную модель *переноса субстанции* между слоями осредненного турбулентного движения. По его идее вихревая масса, выделенная в данном «начальном» слое как некоторый индивидуальный объем, перемещается в процессе обмена в нормальном направлении к осредненному потоку и движется в этом направлении до тех пор, пока не смешается с некоторым смежным слоем, потеряв свою индивидуальность — отличие в продольной осредненной скорости или, что при постоянной плотности все равно, импульсе. До сих пор никакой разницы между описанной только что картиной переноса и изложенной в предыдущем параграфе нет. Как и прежде, используется представление о «вихревом объеме», который перемещается из одного слоя в другой, проходя некоторое расстояние между слоями, определяющее характерный для этого объема «путь перемешивания», *количественное* определение которого до появления теории Прандтля сохраняло неясность.

Новое в модели Прандтля заключается в допущении о том, что вихревая масса во все время перемещения из начального слоя в конечный *сохраняет* свое отличие в импульсе и только в момент смешения сразу теряет свою индивидуальность, вызвав тем самым в этом конечном слое *возмущение* в осредненной скорости. Это возмущение принимается пропорциональным расстоянию l' между начальным и конечным слоями и величине разности между осредненными скоростями в этих слоях $\Delta\bar{u} \approx \approx l' d\bar{u}/dy$. По мысли Прандтля, данное возмущение в осредненной скорости слоя является причиной возникновения в нем пульсационной скорости с проекциями u', v', так что естественно положить ($\propto$ — знак пропорциональности)

$$u' \propto l' \frac{d\bar{u}}{dy}, \qquad v' \propto l' \frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{59}$$

Эта центральная формула теории Прандтля приводит к выражению касательной составляющей рейнольдсова напряжения в случае рассматриваемого простейшего прямолинейного сдвигового движения

$$\tau = -\rho\overline{u'v'} = -\rho\overline{l'^2}\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2.$$

Если условиться понимать под τ напряжение трения, приложенное к верхней границе слоя со стороны области бóльших скоростей ($\tau > 0$) и, кроме того, ввести осредненную длину $l^2 = \overline{l'^2}$, то предыдущее выра-

[1]) Prandtl L. Untersuchungen zur ausgebildete Turbulenz.— Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1925, v. 5. См. статью того же автора «Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности», помещенную в русском переводе в кн.: Проблемы турбулентности.— М.: ОНТИ, 1936, с. 14—16.

жение для τ примет окончательный вид

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2. \tag{60}$$

Единственную остающуюся здесь неопределенной величину l Прандтль назвал *путем смешения* (Mischungsweg), почему и вся теория получила наименование *теории пути смешения.*

Чтобы не делать оговорки о знаке τ, Прандтль предложил придать формуле (60) вид

$$\tau = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{61}$$

Для динамического коэффициента турбулентного трения $A_\tau = \mu_t$ и кинематического его значения $A_\tau/\rho = \mu_t/\rho = \nu_t$ имеют место формулы

$$A_\tau = \mu_t = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|, \quad \nu_t = l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|. \tag{62}$$

Принимая во внимание общность механизмов турбулентного переноса импульса, тепла и вещества (массы), составим выражения коэффициентов перемешивания (56) в форме

$$A_\tau = \mu_t = \rho l_\tau^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|, \quad A_q = \rho l_q^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|, \quad A_m = \rho l_m^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|. \tag{63}$$

Для кинематических коэффициентов справедливы равенства

$$\frac{A_\tau}{\rho} = \nu_t = \varepsilon_\tau = l_\tau^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|, \quad \frac{A_q}{\rho} = \varepsilon_q = l_q^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|, \quad \frac{A_m}{\rho} = \varepsilon_m = l_m^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|, \tag{64}$$

где допускается разница в выражениях путей смешения для импульса, тепла и вещества, определенных равенствами

$$l_\tau^2 = \overline{l_\tau'^2}, \quad l_q^2 = \overline{l_\tau' l_q'}, \quad l_m^2 = \overline{l_\tau' l_m'}. \tag{65}$$

Вспоминая введенные в теории молекулярного (ламинарного) тепломассообмена число Прандтля и число Шмидта (*диффузионное* число Прандтля)

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \mathrm{Sc} = \mathrm{Pr}_d = \frac{\mu}{\rho D}, \tag{66}$$

обобщим эти определения на случай турбулентного тепломассообмена, положив

$$\mathrm{Pr}_t = \frac{c_p A_\tau}{c_p A_q} = \frac{A_\tau}{A_q} = \frac{\varepsilon_\tau}{\varepsilon_q}, \quad \mathrm{Sc}_t = \frac{A_\tau}{A_m} = \frac{\varepsilon_\tau}{\varepsilon_m}. \tag{67}$$

Конечно, эти турбулентные критерии принципиально отличаются от своих ламинарных прототипов прежде всего тем, что они зависят от *формы движения*, а не только от физических постоянных среды. Более того, характеризуя соотношения между молярными (посредством конечных объемов) переносами, на много порядков превосходящими молекулярные переносы, турбулентные числа Прандтля и Шмидта лишь слабо зависят от своих *молекулярных* значений. Если, скажем, числа Прандтля (молекулярные) для вязких масел и жидких металлов разнятся в миллионы раз, то турбулентные числа Прандтля в подобных движениях столь физически друг от друга отличающихся сред близки друг к другу.

«Носителями» переноса различных субстанций являются одни и те же «вихревые» массы, но процессы их смешения с окружающей средой могут быть различными для разных субстанций. Отвлекаясь от активно-

сти этого процесса на пути перемещения «носителя» из начального слоя в конечный, т. е. считая субстанцию *пассивной*, можно полагать, что коэффициенты переноса должны быть равны между собой, а следовательно, по (67) *турбулентные числа Прандтля и Шмидта равны единице*. На самом деле переносимая субстанция не полностью пассивна, а имеет место некоторая *разница в активности тепломассопереноса по сравнению с переносом импульса* (трением). Это приводит к тому, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта отличаются (не слишком сильно) от единицы то в одну, то в другую сторону.

Существует обширная литература по экспериментальному определению турбулентного числа Прандтля, особенно для такого «крайнего» случая, как турбулентные движения жидких металлов, в которых молекулярная теплопроводность очень велика по сравнению с вязкостью (числа Прандтля в ламинарном движении имеют порядок 10^{-3}—10^{-4}). Однако и в этих случаях турбулентное число Прандтля оказывается близким к единице, оставаясь в пределах $0{,}5<\mathrm{Pr}_t<2$ [1]). В исследованиях по турбулентному теплообмену в газах чаще всего полагают $\mathrm{Pr}_t=1$ или 0,7.

К сожалению, результаты экспериментальных работ по определению средних величин турбулентного числа Прандтля из-за многих усложняющих обстоятельств (определение производных от скоростей и температур, заданных неточными экспериментальными кривыми, загрязненность поверхностей и др.) мало точны, а иногда даже противоречивы. Так, например, по опытам Людвига (1956) [2]) Pr_t возрастает от стенки к оси трубы, а по опытам Сляйхера (1957) [3]), наоборот, убывает. Теоретическая сторона этого вопроса плохо поддается изучению даже в полуэмпирической постановке. Некоторые шаги в этом направлении все же сделаны как в Советском Союзе [4]), так и за рубежом [5]).

Простейшим и практически часто достаточным является допущение о *пассивности переносимой субстанции* и, следовательно, о *равенстве чисел* Pr_t и Sc_t *единице*. Это допущение с успехом использовалось в исследованиях теплоотдачи со стенок труб и в других случаях *пристеночной* турбулентности, но оказалось непригодным для движений в условиях *свободной* турбулентности (струи, следы за телом).

Возвращаясь к теории Прандтля, можно отметить сходство введенного в ней понятия «пути смешения» с длиной свободного пробега молекулы, фигурирующей в кинетической теории газов.

Отдавая должное теории «пути смешения», нельзя не заметить ее ограниченности, заключающейся в применимости только в той области потока, где $d\bar{u}/dy\neq 0$. При приближении к оси трубы или внешней границе пограничного слоя, где $d\bar{u}/dy=0$, роль первой производной от осредненной скорости исчезает. Равенство ее нулю по формулам Прандтля (59) означала бы равенство нулю пульсационных скоростей u', v', что не отвечает действительности. Необходимость замены в формуле Прандтля входящей в нее первой производной *старшими по порядку* производными была, в частности, указана самим Прандтлем, но не получила свое-

---

[1]) Обзор исследований этого направления можно найти в монографии: Кутателадзе С. С., Боришанский В. М., Новиков И. И., Федынский О. С. Жидкометаллические теплоносители.— М · Атомиздат, 1967.

[2]) Ludwieg H. Bestimmung des Verhaltnisses der Austauschkoeffizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten — Zeitschr. f. Flugwiss., 1956, Bd. 4, H. 1/2.

[3]) Sleicher C. Experimental velocity and temperature profiles for air in turbulent pipe flow.— Paper ASME, 1957, № 57-HT-9.

[4]) Воскресенский К. Д, Турилина Е. С — В кн.: Теплопередача и тепловое моделирование — М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 87.

[5]) Dwyer E. O. Eddy transport in liquid-metal heat transfer.— Amer. Inst. Chem. Engnr. Journal, 1963, v. 9, № 2, p. 261—268.

го практического развития[1]). Это заставляет ограничиваться в применении теории пути смешения только пристенными областями турбулентных движений жидкости или, во всяком случае, удаленными от точек потока, где $d\bar{u}/dy=0$ (ось струи или следа).

Формулы Прандтля (60) и (61), опубликованные в 1926 г., выдержали испытание временем и до сих пор с успехом применяются в расчетах разнообразных турбулентных движений. В условиях чрезвычайной сложности хаотических движений и взаимодействий отдельных «вихревых» объемов формулы Прандтля смогли выделить главные определяющие факторы явления турбулентного переноса. Эти крайне простые и наглядные по виду формулы и поныне являются фундаментальными в теории турбулентных движений.

Что касается сохраняющейся в формулах Прандтля единственной неопределенной величины — пути смешения, то, как указал в последующих своих работах сам Прандтль, эта величина поддается убедительному интуитивному определению, по крайней мере, в ряде простейших случаев, о которых пойдет речь в дальнейшем. Это позволяет в некотором ограниченном смысле признать за теорией «пути смешения» Прандтля значение теории, замыкающей уравнения переноса импульса, тепла и вещества (массы).

Теория Прандтля, так же как и лежащая в ее основе теория Буссинеска, относится к числу *локальных* теорий турбулентных движений, основанных на предположении, что турбулентное смешение в данной точке потока *полностью определяется физическими константами* ρ, μ, ν и *осредненным движением в непосредственной близости к этой точке*. Аналитически это выражается в зависимости коэффициентов переноса от совокупности производных $d\bar{u}/dy$, $d^2\bar{u}/dy^2$ и т. д. Сама скорость $\bar{u}(y)$ не должна входить в число этих аргументов, так как, соединяя с частицей жидкости, перемещающейся с постоянной вдоль данного слоя скоростью $\bar{u}(y)$ поступательно движущуюся систему координат, мы должны были бы в такой инерциальной (галилеевой) системе отсчета наблюдать те же динамические явления, что и в неподвижной системе, какова бы ни была скорость $\bar{u}$ поступательного движения.

Приведенный ранее вывод формулы Прандтля (60) и других связанных с нею формул сохранил стиль изложения теории пути смешения близким к стилю цитированной выше оригинальной статьи Прандтля. Если положить в основу вывода локальный характер теории пути смешения, то, основываясь на методе *размерностей*, можно прийти к той же формуле Прандтля (60). По свидетельству лиц, сотрудничавших с Прандтлем в то время, сам Прандтль вначале пришел к своей формуле из соображений размерности, а только потом уже подвел под нее тот физический образ, о котором шла речь в настоящем параграфе.

Примем, что уже в небольшом удалении от стенки коэффициент турбулентного перемешивания A настолько превышает μ, что влиянием обычной молекулярной вязкости на турбулентную вязкость можно пренебречь. Иными словами, рассмотрим процесс турбулентного перемешивания без учета влияния на него молекулярной вязкости, хотя такое влияние на самом деле имеет место, о чем будет сказано далее. Тогда этот коэффициент *чисто турбулентного* перемешивания A может быть представлен одночленной степенной зависимостью (∞ — знак пропорциональности, коэффициент пропорциональности безразмерен)

$$A \infty \rho^a \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^b \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^c \ldots \qquad (68)$$

[1]) Лойцянский Л. Г. О некоторых приложениях метода подобия в теории турбулентности.— Прикл. мат. и мех., 1935, т. 2, вып. 2, с. 180—206.

Попытаемся удовольствоваться сначала зависимостью только от плотности ρ и первой производной от скорости $d\bar{u}/dy$, положив

$$A \sim \rho^a \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^b. \tag{69}$$

Замечая, что в физической системе размерностей масса — длина — время (M, L, T)

$$[A] = \left[\frac{\tau}{(d\bar{u}/dy}\right] = \left[\frac{M}{T^2L}T\right] = [ML^{-1}T^{-1}],$$

$$[\rho] = [ML^{-3}], \quad \left[\frac{d\bar{u}}{dy}\right] = [T^{-1}],$$

убедимся, что из равенства (69) при сравнении показателей степеней при M, L и T вытекает *невыполнимая* система равенств

$$a=1, \quad 3a=1, \quad b=1,$$

т. е. формула вида (69) *невозможна*. Дополняя ее множителем, содержащим некоторую степень длины, т. е. полагая

$$A \sim \rho^a l^m \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^b, \quad [l] = [L], \tag{70}$$

получим, приравнивая показатели степеней при M, L и T, систему уравнений

$$a=1, \quad -1=-3a+m, \quad b=1,$$

которая имеет единственное решение

$$a=1, \quad m=2, \quad b=1,$$

что, согласно (70), приводит к формулам (коэффициент пропорциональности включаем в определение l)

$$A = \rho l^2 \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad \tau = A\frac{d\bar{u}}{dy} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy},$$

совпадающим с формулами Прандтля (60) и (61).

Примем теперь во внимание роль второй производной $d^2\bar{u}/dy^2$, для чего положим

$$A \sim \rho^a \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^b \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^c. \tag{71}$$

В этом случае нет необходимости дополнительно привлекать длину, так как отношение $(d\bar{u}/dy)/(d^2\bar{u}/dy^2)$ имеет, очевидно, размерность длины и, следовательно, должно быть

$$l = -\frac{\varkappa (d\bar{u}/dy)}{d^2\bar{u}/dy^2}; \tag{72}$$

здесь $\varkappa$ — некоторая безразмерная константа, а знак в правой части выбран так, чтобы вблизи твердой стенки, где $d\bar{u}/dy>0$, $d^2\bar{u}/dy<0$, величина l была положительной. Подставляя величину l из формулы (72) в (62) и (61), получим

$$A = \varkappa^2 \rho \frac{(d\bar{u}/dy)^3}{(d^2\bar{u}/dy^2)^2}, \quad \tau = \varkappa^2 \rho \frac{(d\bar{u}/dy)^4}{(d^2\bar{u}/dy^2)^2}. \tag{73}$$

Формулы (73) были из других, значительно более сложных соображений выведены впервые Карманом [1]), который исходил из предположе-

[1]) Kàrmàn Th. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz.— Nachr. d. Gesellsch. d. Wissen. zu Göttingen, Math. Phys. Kl., 1930 (имеется русский перевод в ранее цитированном сб. Проблемы турбулентности.— М : ОНТИ, 1936, с. 271—286).

ния о *подобии полей пульсационных скоростей* в различных слоях сдвигового турбулентного потока.

Формулы Кармана (72) и (73) типичны для *локального* подхода к изучению турбулентных движений. Формула Прандтля (60) в этом смысле менее типична, так как остающаяся неизвестной величина пути смешения l оставляет открытой возможность использования для ее определения других подходов, о чем можно будет судить из излагаемых далее примеров применения формул Прандтля и Кармана.

Остановимся на двух примерах, содержащих прямое использование теории Прандтля с некоторыми дополнениями интуитивного порядка относительно закона изменения пути смешения. Обращение к этим интуитивным соображениям предполагает, кроме того, введение некоторых постоянных, значения которых определяются путем обобщения экспериментальных данных. Это лишает теорию Прандтля строгой внутренней замкнутости и вынуждает отнести ее к области так называемых *полуэмпирических* теорий. Следует подчеркнуть, что количество подобных теорий не только в механике жидкости и газа, но и в других областях наук гораздо больше, чем это принято считать. В настоящей и следующей главах будем широко пользоваться термином «полуэмпирическая теория».

§ 124. «Свободная» турбулентность. Затопленные струи. Дальний след

Переходя к применениям полуэмпирических методов расчета турбулентных потоков, выделим особо два класса движений: 1) *свободные*, происходящие вдалеке от твердых поверхностей и подчиняющиеся закономерностям так называемой *свободной турбулентности*, и 2) *пристенные*, в отличие от предыдущих развивающиеся вблизи твердых поверхностей и описываемые закономерностями *пристеночной турбулентности*.

К первому классу относятся всевозможные случаи распространения турбулентных струй в неподвижной жидкости и в спутных потоках, образования следа за телом и др.

Особенностью свободной турбулентности является отсутствие в движениях этого класса взаимодействия молекулярных и молярных процессов переноса. В этих случаях приходится иметь дело с *чисто турбулентными движениями* и только *молярными процессами переноса*, что значительно упрощает расчет. Наиболее простыми в этом случае оказываются и приемы задания коэффициентов переноса и пути смешения.

Практическое значение теории турбулентных струй в современной технике(реактивные и ракетные двигатели, камеры горения парогенераторов, отопительные и вентиляционные системы, аппараты химических производств и др.) настолько велико, что эта теория давно стала самостоятельным разделом прикладной гидродинамики и ей посвящены обширные монографии[1]). Удовольствуемся поэтому лишь изложением некоторых наиболее интересных с теоретической стороны результатов с целью иллюстрации применений полуэмпирических методов к этому разделу общей гидроаэродинамики.

Начнем с примера непосредственного применения формулы Прандтля (60). Рассмотрим осредненное *турбулентное движение в пограничном слое*, образующемся *в области смешения струи очень большого диаметра с окружающей ее жидкостью* той же плотности.

---

[1]) Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй.— М.: Физматгиз, 1960 и вышедшее под его редакцией в 1984 г. новое издание этой книги; Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов.— М.: Машиностроение, 1969; Коробко В. Н. Теория неавтомодельных струй вязкой жидкости. Ч. II.— Изд. Саратовского ун-та, 1977.

Выбор осей координат показан на рис. 234. Диаметр струи принят бесконечно большим, так что движение в пограничном слое можно рассматривать как *плоское*.

Уравнения осредненного турбулентного движения в пограничном слое струи могут быть выведены из уравнений Рейнольдса (15) точно так же, как уравнения ламинарного пограничного слоя из уравнений Навье – Стокса. Получим, отбрасывая черточки как обозначение осреднения в буквенных обозначениях,

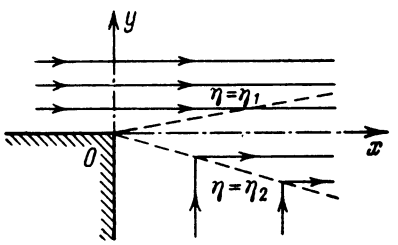


Рис. 234

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \qquad (74)$$

В этих уравнениях в связи с отсутствием твердых, ограничивающих поток поверхностей (влияние стенки трубы вниз по потоку за точкой O не учитываем) *опущены вязкие члены*; кроме того, пренебрегаем производной $\rho\,\overline{du'^2}/dx$ по сравнению с $\partial\tau/\partial y$, а давление принимаем постоянным во всей области. Следуя Прандтлю, будем считать величину l постоянной по поперечному сечению области смешения струи с окружающей жидкостью и изменяющейся от сечения к сечению. Уравнение (74) представится в форме

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=l^2(x)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

или, если использовать функцию тока $\psi(x, y)$ осредненного движения,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=l^2(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \qquad (75)$$

Составим граничные условия. Считая скорость в невозмущенной части струи равной U_0, будем иметь [1])

$$\psi\to U_0 y,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\to U_0 \text{ при } y\to\infty,\ x>0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=U_0 \text{ при } x=0,\ y>0. \qquad (76)$$

Форма границы остается пока неизвестной. Недостающее третье граничное условие составляется на нижней границе ($y\to-\infty$) и будет, очевидно, иметь вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\to 0 \text{ при } y\to-\infty,\quad x>0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \text{ при } x=0,\quad y<0, \qquad (77)$$

так как область смешения граничит снизу с жидкостью, не имеющей продольной скорости ($u=0$). Отметим, что вовлечение окружающей жидкости в струю (так называемая *инжекция*) имеет место и осуществляется благодаря наличию на нижней границе *поперечной* скорости v (рис. 234).

Чтобы определить $l(x)$ и выяснить, не является ли поставленная задача *автомодельной*, т. е. не сводится ли в рассматриваемом случае урав-

[1]) Tollmien W. Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge.— Zeitschr. Angew. Math. u. Mech., 1926, Bd. 6, S. 468—478.

нение *в частных производных* (75) с граничными условиями (76) и (77) к *обыкновенному дифференциальному уравнению*, применим рассуждение, аналогичное тому, которое уже неоднократно использовалось в теории ламинарного пограничного слоя.

Обозначим через L совершенно произвольный, условиями задачи не определенный масштаб длин. В отличие от ламинарного слоя, где масштаб поперечных длин получался из масштаба продольных длин делением последнего на $\sqrt{\mathrm{Re}}$, в теории турбулентного слоя при пренебрежении в уравнениях вязкими членами, а следовательно, и числом Рейнольдса, продольные и поперечные длины имеют одинаковый масштаб.

Переходя, как обычно, к безразмерным величинам, убедимся, что уравнение (75) никакой связи между масштабами функции тока Ψ и длин L не даст, так как оно однородно относительно ψ. Из первого граничного условия (76) получим связь между масштабами функции тока, скоростей и длин

$$\Psi = U_0 L.$$

Следовательно, решение уравнения (75) должно иметь общий вид (штрихи временно приняты для обозначения безразмерных координат и функции тока)

$$\psi' = \psi'(x', y')$$

или

$$\psi = U_0 L \psi' \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}\right).$$

Но масштаб L отсутствует в постановке задачи, следовательно, ему нет места и в решении. Отсюда заключим, что функция ψ' должна иметь форму

$$\psi' = x' \varphi \left(\frac{y'}{x'}\right).$$

Действительно, при этом масштаб L выпадает и размерная функция тока будет иметь вид

$$\psi = U_0 x \varphi \left(\frac{y}{x}\right) = U_0 x \varphi(\eta); \quad \eta = \frac{y}{x}. \tag{78}$$

Определим теперь вид функции $l(x)$, при котором такое решение уравнения (75) возможно. Вычисляя производные (далее штрих — символ производной по η)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 \varphi'(\eta), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U_0 \frac{1}{x} \varphi''(\eta), \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = U_0 \frac{1}{x^2} \varphi'''(\eta),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = U_0 [\varphi(\eta) - \eta \varphi'(\eta)], \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y} = -\frac{U_0}{x} \eta \varphi''(\eta)$$

и подставляя их в уравнение (75), получим после простых преобразований

$$-\varphi \varphi'' = \frac{l^2}{x^2} \varphi'' \varphi'''. \tag{79}$$

Согласно (78) величина φ является функцией только η; следовательно, в предыдущем уравнении переменная x должна отсутствовать. Это приводит к равенству

$$l = cx, \tag{80}$$

где c — *эмпирическая постоянная*, зависящая, как показывают опыты, от турбулентной структуры пограничного слоя, т. е. от предыстории потока.

Уравнение (79) сводится после этого к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\varphi''(c^2\varphi'''+\varphi)=0,$$

распадающемуся на два:

$$c^2\varphi'''+\varphi=0, \tag{81}$$

$$\varphi''=0. \tag{82}$$

Уравнение (82) соответствует движению в *невозмущенном ядре струи*, т. е. двум первым равенствам (76), которые, согласно (78), можно теперь переписать в виде

$$\varphi(\eta)=\eta, \quad \varphi'(\eta)=1. \tag{83}$$

Обозначим через η_1 *наименьший положительный корень* уравнения $\varphi'(\eta)=1$ и через η_2 *наименьший по абсолютной величине отрицательный корень* уравнения $\varphi'(\eta)=0$. Тогда, согласно (76), (77) и (78), равенства

$$\eta=\frac{y}{x}=\eta_1 \text{ и } \eta=\frac{y}{x}=\eta_2 \tag{84}$$

представят уравнения *прямолинейных границ пограничного слоя смешения струи с окружающей ее жидкостью*, а ширина струи $b(x)$ определится разностью

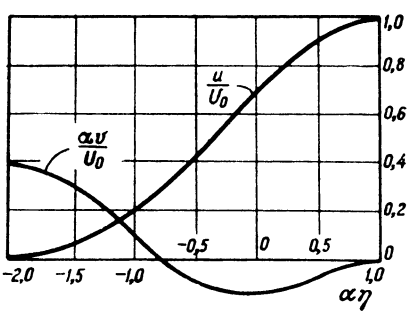


Рис. 235

$$b(x)=(\eta_1-\eta_2)x. \tag{85}$$

Сравнивая (80) и (85), убедимся, что принятое ранее допущение о постоянстве пути смешения по сечению струи эквивалентно допущению о *пропорциональности пути смешения ширине струи в данном ее сечении*. Такое предположение вместе с допущением о зависимости введенной постоянной c от *предыстории* потока, т. е. от движения до выхода струи в затопленное той же жидкостью безграничное пространство, уже лишено того *локального* характера, как сама формула Прандтля (60).

Интегрируя обыкновенное (задача автомодельна!) линейное дифференциальное уравнение третьего порядка (81), получим общий его интеграл в форме

$$\varphi(\eta)=C_1e^{-\alpha\eta}+e^{\frac{1}{2}\alpha\eta}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\eta+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\eta\right),$$

где $\alpha=c^{-2/3}$ представляет *единственную эмпирическую постоянную задачи*. Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2 и C_3, и граничных значений η_1 и η_2 имеем четыре уравнения

$$\varphi''(\eta_1)=0, \quad \varphi'(\eta_1)=1, \quad \varphi(\eta_1)=\eta_1, \quad \varphi'(\eta_2)=0$$

и одно дополнительное

$$\varphi''(\eta_2)=0,$$

выражающие условие плавности *перехода скоростей к заданным значениям на границах области смешения*.

Опуская простые выкладки, связанные с вычислением этих постоянных, приведем результаты:

$$C_1=-0{,}0062, \quad C_2=0{,}987, \quad C_3=0{,}577, \quad \alpha\eta_1=0{,}981, \quad \alpha\eta_2=-2{,}04.$$

На рис. 235 показаны кривые распределения продольных и поперечных скоростей в области смешения. Проведенные в лаборатории Прандт-

ля опыты прекрасно подтвердили теорию и дали возможность определить значения постоянных c или α; они оказались равными: $c=0{,}0246$, $\alpha=11{,}8$. Ширина b области смешения, согласно (85), при этом равна

$$b=\frac{3{,}021}{11{,}8}x=0{,}255x.$$

Изложенный расчет может быть применен при проектировании аэродинамической трубы с открытой рабочей частью, на границе которой образуется описанная выше область смешения [1]).

Рассмотрим теперь затопленную *осесимметричную незакрученную* струю [2]). Примем ось струи за ось Ox. Обратимся к уравнениям Рейнольдса в цилиндрических координатах (21) и произведем в них упрощения, соответствующие общим положениям пограничного слоя. Заметим, что в рассматриваемом случае $\bar{v}_\varepsilon=0$ и равны нулю производные по ε. Кроме того, из соображений симметрии следует равенство нулю касательных турбулентных напряжений: $\pi_{\varepsilon r}=-\rho\overline{v'_\varepsilon v'_r}$ и $\pi_{\varepsilon x}=-\rho\overline{v'_\varepsilon v'_x}$. По тем же соображениям, что и в теории ламинарной струи (безграничность затопленного пространства), откинем член, содержащий давление; пренебрежем еще изменением вдоль оси величины $\overline{v'^2_x}$.

Обозначим для краткости

$$\pi_{rx}=\tau=-\rho\overline{v'_r v'_x},\quad \bar{v}_x=u,\quad \bar{v}_r=v;$$

тогда уравнения турбулентного распространения струи, как это следует из последних двух уравнений системы (21), будут

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau}{\partial r}+\frac{\tau}{r}\right)\equiv\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau),\quad \frac{\partial}{\partial x}(ru)+\frac{\partial}{\partial r}(rv)=0.$$

Используя формулу Прандтля для турбулентного трения, которая, как легко сообразить, в настоящем случае ($\partial u/\partial r<0$ при любых r) запишется в форме

$$\tau=\rho l^2\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|\frac{\partial u}{\partial r}=-\rho l^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2,$$

получим уравнения *распространения струи* в виде

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rl^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right],\quad \frac{\partial}{\partial x}(ru)+\frac{\partial}{\partial r}(rv)=0. \tag{86}$$

Вводя функцию тока ψ, связанную со скоростями u, v формулами

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad v=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{87}$$

сведем задачу к решению одного уравнения третьего порядка

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}\left\{rl^2\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right]^2\right\}. \tag{88}$$

К этому уравнению присоединяется условие сохранения импульса

$$2\pi\rho\int_0^\infty ru^2\,dr=2\pi\rho\int_0^\infty\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2dr=J_0, \tag{89}$$

---

[1]) Абрамович Г. Н. Аэродинамика потока в открытой рабочей части аэродинамической трубы.— Труды ЦАГИ, 1935, вып. 223, 236.

[2]) См. только что цитированную статью В. Толлмина.

и граничные условия

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0 \text{ при } r = 0, \tag{90}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Введем масштаб функции тока Ψ и масштаб длин L. Переходя к безразмерным величинам, убедимся, что уравнение (88) и граничные условия (90), так же как в первой задаче этого параграфа, никаких ограничений на Ψ и L не накладывают. Из условия (89) получим одну связь между масштабами Ψ и L:

$$\Psi = \sqrt{\frac{J_0}{2\pi\rho}}\, L.$$

Отсюда следует, что искомое решение для ψ должно иметь общий вид (штрих — символ безразмерных координат и функции тока)

$$\psi = \Psi\psi'(x', r') = \sqrt{\frac{J_0}{2\pi\rho}}\, L\psi'\left(\frac{x}{L}, \frac{r}{L}\right).$$

Но в условия задачи масштаб L не входит, не должен он присутствовать и в решении. Для выполнения этого условия потребуем, чтобы функция $\psi'(x', r')$ имела форму

$$\psi' = x'\varphi\left(\frac{r'}{x'}\right).$$

Тогда действительно масштаб L выпадает, а размерная функция тока ψ определится выражением

$$\psi = \sqrt{\frac{J_0}{2\pi\rho}}\, x\varphi(\eta); \quad \eta = \frac{r}{x}. \tag{91}$$

Полагая, как и ранее, путь смешения l функцией только x и подставляя выражение (91) в уравнение (88), убедимся, что при наличии функции тока вида (91) должно выполняться равенство $l = cx$.

Вводя в уравнение (88) новую переменную η, согласно (91), и принимая во внимание формулу для l, убедимся, что задача автомодельна; будем иметь *обыкновенное дифференциальное уравнение* (штрих — производная по η)

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\varphi\varphi'}{\eta}\right) = \frac{d}{d\eta}\left[\frac{c^2}{\eta}\left(\varphi'' - \frac{\varphi'}{\eta}\right)^2\right].$$

После почленного интегрирования обеих частей этого уравнения придем к уравнению второго порядка

$$\varphi\varphi' = c^2\left(\varphi'' - \frac{\varphi'}{\eta}\right)^2 + \text{const}\cdot\eta. \tag{92}$$

Постоянная интегрирования здесь равна нулю. В самом деле, при стремлении $\eta \to 0$ ($r \to 0$), т. е. на оси струи, скорость u остается конечной, а v стремится к нулю. Вычисляя эти скорости, получим (∞ — знак пропорциональности)

$$u \infty \frac{1}{x}\frac{\varphi'}{\eta}, \quad v \infty \frac{1}{x}\left(\varphi' - \frac{\varphi}{\eta}\right);$$

следовательно, φ'/η стремится к конечной величине, а $\varphi \to 0$ при $\eta \to 0$. Составляя далее производную du/dr и требуя, чтобы она стремилась к нулю, когда $\eta \to 0$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial r} \infty \frac{1}{\eta x^2}\left(\varphi'' - \frac{\varphi'}{\eta}\right) \to 0 \text{ при } \eta \to 0;$$

следовательно,

$$\frac{1}{\eta}\left(\varphi'' - \frac{\varphi'}{\eta}\right) \to 0 \text{ при } \eta \to 0,$$

откуда и следует равенство нулю константы в уравнении (92).

Выбирая в уравнении (92) вместо η переменную $\eta/\sqrt[3]{c^2}$, получим уравнение и граничные условия, не зависящие от частных значений констант. Уравнение это интегрируется численным методом.

Поставленная только что задача о распространении круглой струи может быть решена значительно проще, если вместо теории Прандтля, изложенной в предыдущем параграфе, использовать другую, также полуэмпирическую теорию Прандтля, относящуюся уже к 1942 г.[1]). Заменим при решении задач свободной турбулентности, где обычно профили продольных осредненных скоростей имеют перегиб (рис. 235), выражение (62) коэффициента турбулентного трения A некоторым упрощенным, основанным на следующих соображениях. Предположим, что в сечении M_1M_2 (рис. 236) скорость непрерывно переходит от некоторого значения $u=u_1$ к значению $u=u_2$. Так, в струе, распространяющейся сквозь затопленное безграничное пространство, скорость u_1 на внешней границе струи равна нулю, u_2 представляет максимальную скорость u_{max} на оси струи. В случае аэродинамического следа вдалеке за телом скорость u_1 соответствует минимальной скорости на оси следа, а $u_2=U_\infty$ — скорости невозмущенного внешнего потока, набегающего на тело.

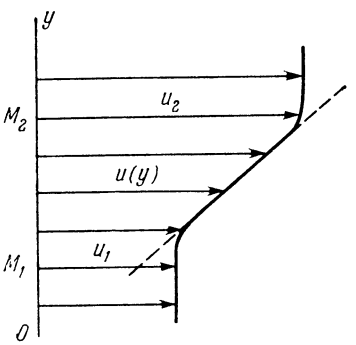


Рис. 236

Производная du/dy на краях интервала M_1M_2 обращается в нуль как при переходе к однородным потокам, так и в тех случаях, когда точки M_1 и M_2 соответствуют максимуму или минимуму скорости. При этом эпюра скоростей имеет в рассматриваемом интервале точку перегиба, где $d^2u/dy^2=0$, и становится *близка к прямой линии* повсюду, за исключением областей, прилежащих к краям интервала. Пользуясь близостью эпюры скоростей к прямой линии, можем в выражении (62) коэффициента турбулентного обмена A произвести приближенную замену

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \approx \frac{|u_2 - u_1|}{b}$$

и положить

$$A \approx \rho l^2 \frac{|u_2 - u_1|}{b},$$

где $b=M_1M_2$ — *ширина области турбулентного перемешивания*. Возникающая при этом на краях области ошибка не существенна, так как в выражении турбулентного трения (62) величина A умножается на производную du/dy, обращающуюся на краях области в нуль. Таким образом, *коэффициент турбулентного обмена в задачах свободной турбулентности может быть принят постоянным по сечению*, т. е. не зависящим от y (но, вообще говоря, зависящим от x, т. е. *переменным вдоль течения*). Принимая постоянный по сечению слоя путь смешения l, как это уже ранее указывалось, пропорциональным ширине области обмена b, полу-

[1]) Prandtl L. Bemerkungen zur Theorie des freien Turbulenz.— Zeitschr. Angew. Math. u. Mech., 1942, Bd. 22, H. 5, S. 241; Görtler H. Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neues Näherungsansatzes, ibid., S. 244.

чим следующую общую для большинства задач теории свободной турбулентности формулу коэффициента турбулентного трения

$$A=k\rho b|u_2-u_1|, \tag{93}$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности; величины b и $|u_2-u_1|$ меняются от сечения к сечению и представляют собой неизвестные функции координаты, отсчитываемой вдоль по течению.

Докажем, что в интересующем нас сейчас случае осесимметричного распространения турбулентной *незакрученной* струи коэффициент турбулентного трения A *постоянен* во всей области струи, т. е. не зависит ни от x, ни от r. Вспомним, что путь смешения l пропорционален ширине струи b и, как уже ранее было доказано, $b\backsim x$.

С другой стороны, в настоящем случае

$$u_1=0, \quad u_2=u_{\max}(x)=u(x, 0),$$

а из равенств (87) и (91) следует

$$u_{\max}(x)=u|_{r=0}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=0}=\sqrt{\frac{J_0}{2\pi\rho}}\frac{1}{x}\left[\frac{\varphi'(\eta)}{\eta}\right]_{\eta=0},$$

т. е.

$$u_{\max}\backsim\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}\frac{1}{x}.$$

Следовательно, по (93) имеем (σ — новая эмпирическая константа)

$$A=\text{const}=\sigma\sqrt{\rho J_0}, \quad \varepsilon_\tau=\frac{A}{\rho}=\text{const}=\sigma\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}. \tag{94}$$

Гипотеза постоянства коэффициента турбулентного перемешивания неоднократно применялась в задачах турбулентного движения в свободной атмосфере, в океанах и реках. Для случая турбулентного движения жидкости в аэродинамическом и тепловом следе та же гипотеза была сформулирована в 1938 г. Б. Я. Трубчиковым [1]).

Уравнения (86) могут быть теперь переписаны в форме

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=\sigma\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial(ru)}{\partial x}+\frac{\partial(rv)}{\partial r}=0,$$

отличающейся от уравнений распространения ламинарной струи только тем, что постоянный кинематический коэффициент молекулярной вязкости ν заменен на кинематический коэффициент турбулентной вязкости $\varepsilon_\tau=\sigma\sqrt{J_0/\rho}$, где σ представляет некоторую эмпирическую постоянную, зависящую от турбулентной структуры потока.

Нет необходимости, таким образом, вновь решать задачу, так как аналогичная с математической стороны задача уже была решена в § 115. Для сопоставления решений заметим, что при расчете турбулентной струи необходимо в формулах (178) гл. XII произвести замену

$$\alpha=\sqrt{\frac{3}{16\pi\sigma}}\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}=\sqrt{\frac{3}{16\pi\sigma}}\sqrt[4]{\frac{J_0}{\rho}},$$

$$\alpha\eta=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\frac{r}{x}, \quad \alpha\sqrt{\nu}=\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}. \tag{95}$$

---

[1]) Трубчиков Б. Я. Тепловой метод измерения турбулентности в аэродинамических трубах.— Труды ЦАГИ, 1938, вып. 372, с. 16. См. также только что цитированные статьи Прандтля и Гёртлера.

Будем иметь

$$\psi = \frac{3}{16\pi\sigma}\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}\,x\,\frac{\left(\frac{r}{x}\right)^2}{1+\frac{3}{64\pi\sigma^2}\left(\frac{r}{x}\right)^2},$$

$$u = \frac{3}{8\pi\sigma}\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{\left[1+\frac{3}{64\pi\sigma^2}\left(\frac{r}{x}\right)^2\right]^2}, \qquad (96)$$

$$v = \frac{3}{16\pi\sigma}\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}\,\frac{r}{x^2}\,\frac{\left[1-\frac{3}{64\pi\sigma^2}\left(\frac{r}{x}\right)^2\right]}{\left[1+\frac{3}{64\pi\sigma^2}\left(\frac{r}{x}\right)^2\right]^2}.$$

По равенству (179) гл. XII найдем *секундный массовый расход* сквозь сечения струи

$$M = 8\pi\sigma\rho\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}\,x, \qquad (97)$$

а по (180) той же главы — формулу *максимальной скорости* на оси струи

$$u_{\max} = \frac{3}{8\pi\sigma}\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}\,\frac{1}{x}. \qquad (98)$$

Для облегчения экспериментальной проверки правильности полученных закономерностей преобразуем формулу продольной скорости [второе равенство системы (96)] к виду

$$\frac{u}{u_{\max}} = F\left(\frac{r}{R}\right),$$

где под R будем подразумевать значение r, при котором $u=\frac{1}{2}u_{\max}$. Из равенства

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{64\pi\sigma^2}\frac{R^2}{x^2}\right)^2}$$

получим

$$\frac{3}{64\pi\sigma^2}\frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{R^2} = \frac{0{,}414}{R^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{1}{\left(1+0{,}414\frac{r^2}{R^2}\right)^2}.$$

На рис. 237 показан график этой функции и там же нанесены опытные точки[1]); совпадение можно признать вполне удовлетворительным.

В случае *незакрученной* турбулентной струи, вытекающей из отверстия конечного диаметра с конечным начальным расходом, а также турбулентной *закрученной* струи сделаем допущение о том, что формулы

[1]) Kuethe A. Investigations of the turbulent mixing regions, formed by jets.— Journ. of Appl. Mech.. 1935, v. 11, № 3.

динамического и кинематического коэффициентов турбулентного трения (94) остаются справедливыми [1]).

Обобщая на турбулентную струю ранее выведенные формулы для ламинарной струи и производя замену ν на $\sigma\sqrt{J_0/\rho}$, будем иметь вместо равенства (199) гл. XII

$$\beta = \frac{U_0 d^2}{8\sigma\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}}$$

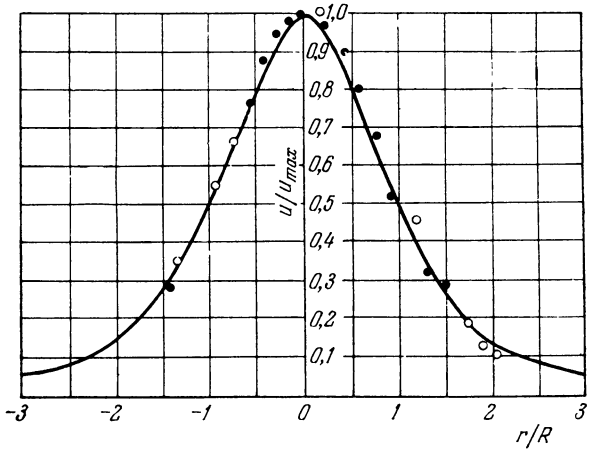


Рис. 237

или, полагая импульс в начальном сечении струи равным

$$J_0 = \rho\frac{\pi d^2}{4}U_0^2,$$

следующее выражение для константы β:

$$\beta = \frac{d}{4\sqrt{\pi}\sigma}.$$

Формула максимальной скорости на оси струи, согласно предпоследнему соотношению системы (198) предыдущей главы и принятым выражениям (95) для α и $\alpha\eta$, имеет вид

$$u_{\max} = \frac{3}{8\pi\sigma}\sqrt{\frac{J_0}{\rho}}\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{16\sqrt{\pi}\sigma}\frac{d}{x}\right).$$

Замечая, что коэффициент, стоящий впереди скобки, представляет максимальную скорость $u^{(1)}_{\max}$, в первом приближении ($d=0$) определенную формулой (98), перепишем предыдущее равенство в виде

$$\frac{u_{\max}}{u^{(1)}_{\max}} = 1 - \frac{1}{16\sqrt{\pi}\sigma}\frac{d}{x}. \qquad (99)$$

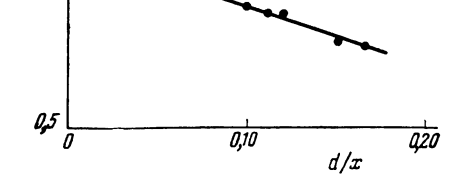


Рис. 238

Эту формулу можно рассматривать как выражение поправки на конечность диаметра выходного сечения в распределении максимальной скорости на оси струи. Использовав опытные материалы В. С. Дубова [2]), мы нанесли их (рис. 238) на прямую (99). Совпадение получилось вполне удовлетворительным, если положить $\sigma = 0{,}21$. Существенность поправки очевидна: при $d/x = 0{,}18$ она достигает 30%.

Заменяя в формулах (198) предыдущей главы α, $\alpha\eta$, μ и ν их *турбулентными аналогами*, получим решение задачи о *закрученной* турбулентной струе. Не выписывая преобразованных формул, что не представило бы затруднений, приведем результаты сравнения теоретического

---

[1]) Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— Прикл. мат. и мех., 1953, т. 17, вып. 1, с. 14.

[2]) Дубов В. С. Распространение свободной закрученной струи в затопленном пространстве.— Труды ЛПИ, 1955, № 176, с. 137—145.

расчета с опытными данными, помещенными в выше цитированной статье В. С. Дубова. Опыты подтвердили правильность допущения о постоянстве коэффициента турбулентного обмена в незакрученной струе с конечным диаметром выхода, а также в закрученной струе.

Чтобы дать об этом представление, на рис. 239, *а* и *б* приведены распределения продольных u, а также окружных w скоростей на разных расстояниях x от выходного отверстия струи. Интенсивность закрутки характеризовалась безразмерным параметром

$$\varkappa = \frac{4L_0}{J_0 d}$$

и в случаях, изображенных на рис. 239, соответствовала значению $\varkappa = 0{,}52$. Отсутствие провалов в графиках продольной скорости вблизи оси при небольших расстояниях от выходного отверстия показывает, что этому значению параметра отвечает сравнительно *слабая закрученность струи.* Наряду

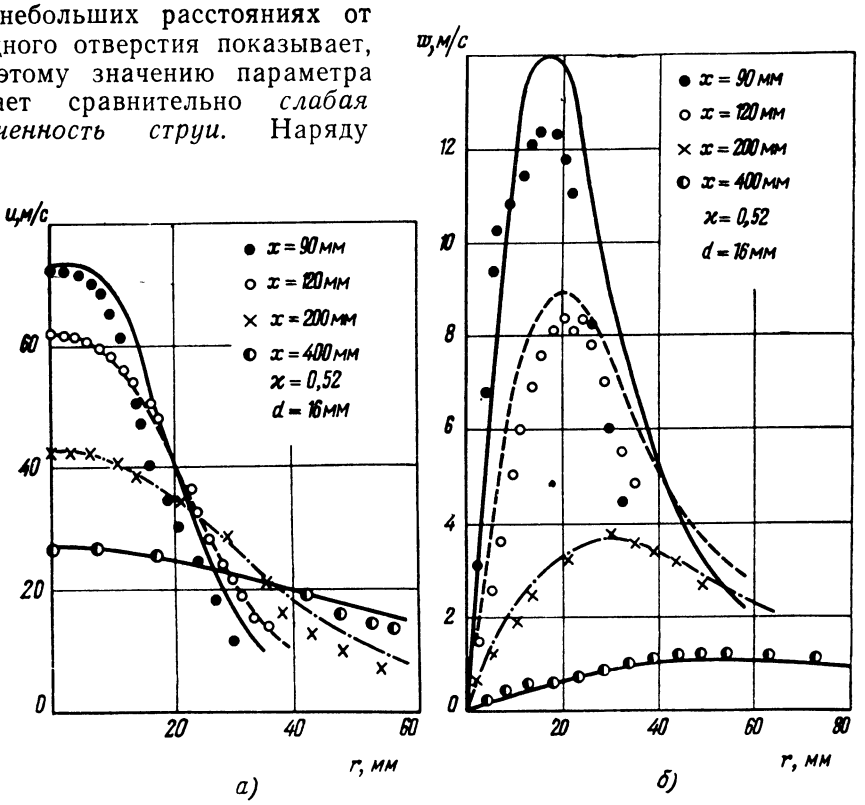


Рис 239

с экспериментальными точками проведены и теоретические кривые, рассчитанные В. С. Дубовым. Как это следует из графиков, с удалением от выходного отверстия совпадение теории с опытом улучшается.

Чтобы показать влияние увеличения закрутки, на рис. 240 приведены графики продольной скорости при сравнительно сильной закрутке ($\varkappa = 1{,}25$). При небольших значениях x отчетливо видны провалы в графиках продольной скорости, убывающие с удалением от выходного отверстия струи.

В непосредственной близости к соплу, из которого происходит истечение, можно наблюдать даже попятные движения. Нижняя кривая

подтверждает тот факт, что в достаточном удалении от сопла закрученная струя ведет себя как незакрученная.

Задача о распределении скоростей в *турбулентном следе* вдалеке за телом в случае плоского движения полностью аналогична задаче о ламинарном следе, решенной в § 109. В этом легко убедиться, если опять ввести малую разность скоростей вне следа и внутри его

$$u_1 = U_\infty - u$$

и принять, что путь смешения l пропорционален ширине следа $2b$, а модуль производной $|du/dy|$ в выражении кинематического коэффициента турбулентной вязкости ε_τ заменить приближенно на отношение $u_{1\max}/b$, где $u_{1\max}$ — максимальное значение u_1 в сечении следа, имеющее место на его оси. При этом получим

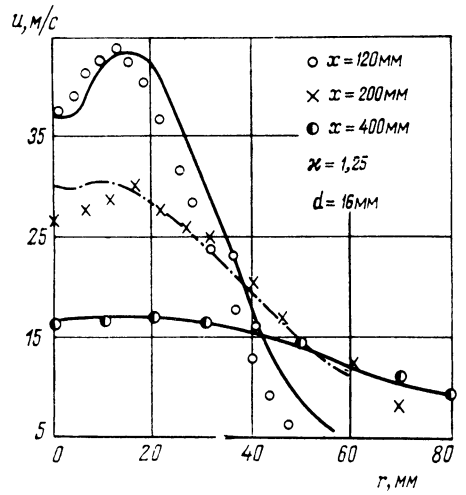


Рис. 240

$$\varepsilon_\tau = l^2 \left|\frac{du}{dy}\right| \sim b^2 \frac{u_{1\max}}{b} = b u_{1\max}.$$

С другой стороны, положив $u_1 = u_{1\max}\varphi(y/b)$, как и в ламинарном следе, будем иметь

$$\rho U_\infty \int_{-b}^{b} u_1\, dy = \rho U_\infty b u_{1\max} \int_{-1}^{1} \varphi\left(\frac{y}{b}\right) d\left(\frac{y}{b}\right) = W,$$

следовательно,

$$b u_{1\max} = \text{const} \cdot \frac{W}{\rho U_\infty}. \tag{100}$$

Отсюда заключим, что (k — эмпирическая константа, зависящая от турбулентной структуры следа)

$$\varepsilon_\tau = \frac{kW}{\rho U_\infty} = \text{const}. \tag{101}$$

Уравнение Рейнольдса, если откинуть квадраты и высшие степени малых величин, сведется к уравнению

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \varepsilon_\tau \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \tag{102}$$

совершенно аналогичному уравнению (43) гл. XII для ламинарного следа. Решая его при тех же граничных условиях, получим

$$u_1 = U_\infty - u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{W}{k\rho x}}\, e^{-\frac{\rho U_\infty^2 y^2}{4kWx}}$$

Вводя величину Y как ординату y, при которой $u_1 = \frac{1}{2} u_{1\max}$, найдем

$$\frac{u_1}{u_{1\max}} = e^{-0{,}7(y/Y)^2}. \tag{103}$$

На рис. 241 это равенство представлено в виде кривой в координатах $(u_1/u_{1\max},\ y/Y)$; там же нанесены результаты экспериментальных замеров в значительном удалении от тела. Как видно, совпадение вполне

удовлетворительно повсюду, кроме непосредственной близости к границе следа, где экспериментальные точки ложатся несколько ниже, что объясняется, вероятно, явлениями «перемежаемости» на границе следа.

Аналогичными методами рассчитываются струи в спутных потоках и пространственные следы за телом и системами тел. Изложение этих вопросов можно найти в специальной литературе [1]).

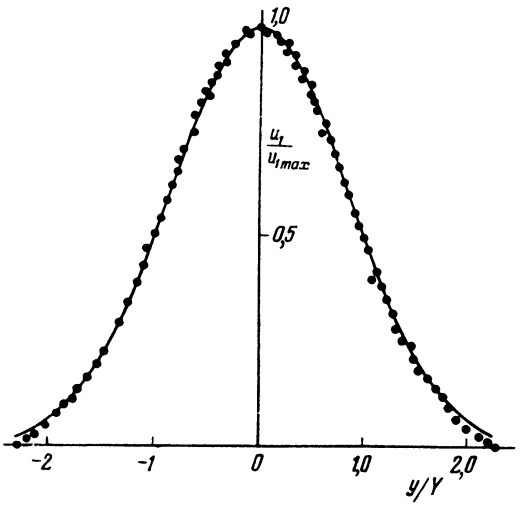


Рис. 241

Вопрос о распределении *температуры* или *концентрации примеси* в потоках в условиях свободной турбулентности упирается в необходимость правильного выбора соответствующих коэффициентов переноса тепла ε_q и концентрации примеси ε_m. В настоящее время приходится довольствоваться рассмотрением экспериментальных материалов, которые до сих пор нельзя еще назвать исчерпывающими.

Если бы турбулентные числа Прандтля и Шмидта (67) были равны единице, т. е. $\varepsilon_\tau = \varepsilon_q = \varepsilon_m$, то профили скоростей, относительных избыточных температур и концентраций в турбулентных струях и следах оказались бы *подобными* между собой. Опыты подтверждают наличие *подобия профилей избыточных температур и концентраций*, но отчетливо показывают *отсутствие подобия между профилями скоростей и избыточных температур*, а следовательно, и *концентраций*.

Приводим для примера заимствованный из неоднократно уже цитированной монографии Г. Н. Абрамовича график (рис. 242) результатов опытов автора монографии и В. Я. Бородачева на плоской нагретой и содержащей примесь углекислого газа затопленной воздушной струе. Кривые скорости (штриховая) и избыточной температуры (штрих-пунк-

---

[1]) Сошлемся на уже цитированные на с. 635 монографии Г. Н. Абрамовича, а также монографии: Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости/Под ред. С. Голдстейна, т. II.— М.: ИЛ, 1948; Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя.— Л.; М · Гостехиздат, 1941; Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя/Пер. с нем.— М.· Наука, 1974; Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости.— М.: Наука, 1965; Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов.— М.: Машиностроение, 1969; Коробко В. Н. Теория неавтомодельных струй вязкой жидкости. Ч. II.— Изд. Саратовского ун-та, 1977.

Укажем еще некоторые из многочисленных отдельных журнальных статей: Гродзовский Г. Л. Решение осесимметричных задач свободной турбулентности по теории турбулентной диффузии.— Прикл. мат. и мех., 1950, т. 14, вып. 4; Бушмарин О. Н. Турбулентная осесимметричная струя несжимаемой жидкости, вытекающая в спутный однородный поток той же жидкости.— Труды ЛПИ, Энергомашиностроение, Техническая гидромеханика, 1953, № 5, с. 15—23, и того же автора: Закрученная струя в спутном потоке жидкости той же плотности.— Труды ЛПИ, 1955, № 176; Лойцянский Л. Г. К теории плоских ламинарных и турбулентных струй.— Труды ЛПИ, 1955, № 176; Гиневский А. С. Турбулентный след и струя в спутном потоке при наличии продольного градиента давления.— Изв. АН СССР, Механика, Машиностроение, 1959, № 2, а также: Приближенные уравнения движения в задачах теории турбулентных струй, там же, 1963, № 5, и большое число работ Л. А. Вулиса и его сотрудников как в только что указанной монографии, так и в сб.: Исследование физических основ рабочего процесса топок и печей.— Алма-Ата, 1956.

тирная) приведены без указания экспериментальных точек; распределение безразмерной концентрации представлено экспериментальными точками, соответствующими различным безразмерным, отнесенным к ширине устья струи расстояниям от выхода струи. Индекс m отмечает значения величин на оси, ΔT — разность температур в данной точке струи и во внешнем пространстве.

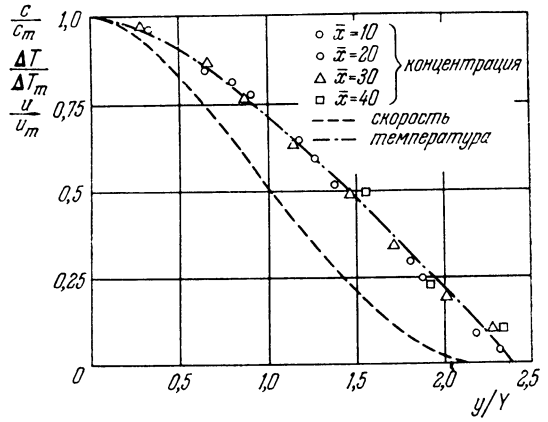


Рис. 242

График наглядно показывает, что профили избыточной температуры и концентраций в плоской струе подобны (безразмерные профили совпадают), а профиль скоростей не подобен им. Числа Pr_t и Sc_t в рассматриваемом случае оказываются близкими к 0,5.

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что Дж. Тейлор [1]) предложил другую полуэмпирическую теорию турбулентного движения, получившую наименование «теории переноса завихренности». Согласно этой теории в случае прямолинейного осредненного движения с распределением скорости $u=u(y)$ будет ($\tau=-\rho\overline{u'v'}$ — не зависящее от вязкости *чисто турбулентное напряжение трения*)

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=A_\omega\frac{\partial\omega}{\partial y}=A_\omega\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\rho l_{\mathrm{Ta}}^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad A_\omega=\rho l_{\mathrm{Ta}}^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|, \tag{104}$$

где положено $\omega=\partial u/\partial y$, а l_{Ta} — тейлоровский путь смешения, отличный от прандтлевского. Как заметил Тейлор, и это подтверждено экспериментом, *коэффициент турбулентного переноса осредненной завихренности* A_ω в условиях свободной турбулентности *совпадает по величине с коэффициентами переноса тепла* A_q *и вещества* A_m, но *не равен коэффициенту переноса импульса* A_τ.

Подробности вопроса о тепломассообмене в потоках со свободной турбулентностью можно найти в ранее цитированных специальных монографиях.

§ 125. Двухслойная схема «пристенной» турбулентности. Логарифмический профиль скоростей

Закономерности пути смешения и коэффициента турбулентного переноса при движении жидкости около твердой стенки принципиально отличаются от закономерностей только что рассмотренных свободных турбулентных движений вдалеке от твердых поверхностей. Наличие существенного влияния молекулярной вязкости на процессы турбулентного переноса значительно усложняет изучение пристенной турбулентности.

Чтобы подчеркнуть главную особенность турбулентного движения около твердой стенки, рассмотрим следующий идеализированный случай [2]), просто и наглядно поясняющий суть дела. Предположим, что за-

[1]) Taylor G. I. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1932, v. 5. Русск. перевод в кн.: Проблемы турбулентности.— М.: ОНТИ, 1938.

[2]) Prandtl L. Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung.— VDI, 1933, № 5. Русский перевод в ранее цитированном сб. «Проблемы турбулентности», с. 9.

полняющая верхнюю полуплоскость жидкость совершает плоское стационарное осредненное движение (рис. 243), параллельное *безграничной* твердой стенке, совпадающей с осью Ox, причем объемные силы отсутствуют. При такой стратификации по осредненным скоростям любые два поперечные линиям тока сечения идентичны в кинематическом и динамическом смысле, т. е. все производные по x равны нулю, а элементы движения могут зависеть только от ординаты y. Такое движение является «установившимся».

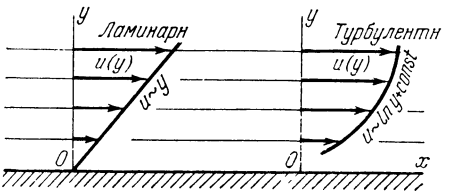


Рис. 243

Сравним между собой *ламинарное* и *осредненное турбулентное* движения такого типа. Замечая, что $u=u(y)$, $v=0$, $p=p(y)$, приведем уравнения ламинарного движения к виду

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2}=0, \quad \frac{dp}{dy}=0,$$

откуда следует

$$u=C_1y+C_2, \quad p=\text{const}.$$

В рассматриваемом движении единственным граничным условием является

$$u=0 \text{ при } y=0,$$

что дает $C_2=0$. Для определения C_1 примем в качестве заданной постоянной напряжение трения на стенке

$$\tau_w=\mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}.$$

Тогда распределение скоростей $u(y)$ в ламинарном потоке будет

$$u=\frac{\tau_w}{\mu}y, \tag{105}$$

и профиль скоростей окажется *линейным* (рис. 243, слева), а напряжение трения между любыми слоями в осредненном движении постоянным и равным напряжению трения на стенке

$$\mu\frac{du}{dy}=\text{const}=\tau_w.$$

Перейдем теперь к *турбулентному* движению, описываемому в настоящем случае уравнением Рейнольдса (τ—чисто турбулентное трение)

$$\mu\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d\tau}{dy}=0.$$

Интегрируя его, получим

$$\mu\frac{du}{dy}+\tau=C_3,$$

или, замечая, что напряжение турбулентного трения $\tau=-\rho\overline{u'v'}$ на стенке равно нулю, так как на стенке не могут существовать нормальные к ней пульсации v', получим $C_3=\tau_w$ и, следовательно,

$$\mu\frac{du}{dy}+\tau=\tau_w. \tag{106}$$

В непосредственной близости к стенке турбулентное трение τ значительно меньше слагаемого $\mu du/dy$, соответствующего молекулярному тре-

нию; в этой области уравнение (106) совпадает с уравнением ламинарного движения, и интегрирование его приведет к линейному профилю скоростей (105).

Наоборот, в области, удаленной от стенки, слагаемое $\mu\, du/dy$ мало по сравнению с турбулентным трением τ и может быть опущено. Уравнение (106), если напряжение турбулентного трения задать формулой Прандтля, будет

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \tau_w. \tag{107}$$

Замечая, что расстояние y данной точки от твердой стенки представляет собой *единственную* характерную для этой точки в безграничном потоке длину, Прандтль полагает в этом простейшем случае путь смешения l пропорциональным y:

$$l = \varkappa y, \tag{108}$$

где коэффициент пропорциональности $\varkappa$ представляет собой некоторую числовую константу, определяемую из опыта [1]).

Уравнение (107) при наличии соотношения (108) просто интегрируется, а интеграл его выражается в логарифмической форме:

$$u = \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C. \tag{109}$$

Сравнение этого распределения скоростей с ранее полученным «ламинарным» распределением (105) показывает глубокое различие между ними. С математической стороны это различие выражается в том, что *линейный* профиль *скоростей* при *ламинарном* движении становится *логарифмическим* при *турбулентном* движении. Существенно, что эта особенность турбулентного движения сохраняется вблизи стенки и в случаях движений более сложных, чем рассмотренная выше упрощенная схема.

Для определения постоянной интегрирования C нельзя использовать граничное условие на стенке, так как в пристеночной области уравнение (107) несправедливо. Приходится выделить вблизи твердой границы тонкий «вязкий подслой» с линейным профилем скоростей, а затем провести сращивание логарифмического решения с линейным (105).

Примем следующую упрощенную схему. Представим себе поток разбитым на две резко отличные по структуре области: тонкую пристеночную область чисто вязкого движения — *вязкий* (*ламинарный*) *подслой* — и область не зависящего от вязкости полностью турбулентного движения — *турбулентное ядро* потока. Принятое разделение, конечно, очень схематично. На самом деле при удалении от стенки влияние вязкости убывает непрерывно, а не сосредоточивается в некоторой резко очерченной области. В порядке уточнения такой схемы можно было бы ввести еще промежуточную между вязким подслоем и турбулентным ядром потока переходную область, где наряду с турбулентным трением фигурировало бы и молекулярное трение. Введение такой переходной области оказывается особенно полезным при изучении тепломассопередачи и будет в дальнейшем, так же как и теория *непрерывного* убывания влияния

---

[1]) Нельзя не отметить, что в текущей литературе, особенно по техническим приложениям теории турбулентности, эту простейшую, введенную Прандтлем в только что процитированной популярной статье формулу (108) принимают за общий закон, справедливый для всех турбулентных пограничных слоев, и приписывают ей даже наименование «закона Прандтля». Между тем эта формула имеет место лишь в пристеночной области. Важность этой формулы и непосредственно выводимого из нее логарифмического закона скоростей, как выражающих особенность турбулентного движения *вблизи стенки*, неоспорима и должна быть подчеркнута.

вязкости, изложено. Удовольствуемся пока схемой двух областей: вязкого подслоя и турбулентного ядра.

Обозначим через $\delta_в$ толщину вязкого подслоя и через $u_в$ скорость на границе между вязким подслоем и турбулентным ядром потока, общую для обеих областей. Движение в вязком подслое характеризуется величиной напряжения трения на стенке τ_w и физическими константами жидкости μ и ρ. Рассматривая эти величины с точки зрения теории размерности, составим из них две возможные комбинации:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad l_* = \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}} = \frac{\nu}{v_*}. \tag{110}$$

Первая из этих величин v_* имеет размерность скорости, хотя по своей природе состоит из динамических величин: напряжения и плотности; назовем ее поэтому *динамической скоростью*. Вторая имеет размерность длины и по той же причине может быть названа *динамической длиной*[1]). Для облегчения запоминания этих важных для дальнейшего выражений можно заметить, что если принять динамическую длину и динамическую скорость за масштабы длин и скоростей, то составленное при их помощи число Рейнольдса $v_* l_*/\nu$ будет *равно единице*.

Легко убедиться, что определенные равенствами (110) выражения динамических скорости и длины могут отличаться только безразмерными множителями от любых других, имеющих размерности скорости или длины одночленных комбинаций величин τ, ρ, μ. Действительно, предположим, что длина δ может быть представлена в виде степенного одночлена, зависящего от физических констант μ, ρ и напряжения трения на стенке τ_w,

$$\delta = \alpha \mu^a \rho^b \tau_w^c,$$

где α — некоторая безразмерная константа.

Составляя уравнение связи размерностей $[L] = \left[\frac{M}{TL}\right]^a \left[\frac{M}{L^3}\right]^b \left[\frac{M}{LT^2}\right]^c$ и сравнивая показатели степени при M, L, T слева и справа, получим систему уравнений

$$a+b+c=0, \quad -a-3b-c=1, \quad -a-2c=0,$$

имеющую *единственное* решение

$$a=1, \quad b=-\frac{1}{2}, \quad c=-\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует

$$\delta = \alpha \mu \rho^{-\frac{1}{2}} \tau_w^{-\frac{1}{2}} = \alpha \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}} = \alpha l_*.$$

Аналогично убедимся в том, что всякая одночленная комбинация ρ, μ и τ_w, имеющая размерность скорости, может отличаться от v_* только безразмерным множителем.

Из доказанного следует, что толщина вязкого подслоя $\delta_в$ и скорость на границе подслоя $u_в$ должны быть пропорциональны соответственно динамической длине l_* и динамической скорости v_*.

---

[1]) В заграничной литературе для этих величин применяются термины: Schubspannunggeschwindigkeit, friction-velocity, friction-lenght, затруднительные для буквального русского перевода. Мы обошли эту трудность, введя для этих «приведенных» скорости и длины эпитет «динамические», так как они выражаются через динамические величины τ_w и ν.

Докажем, что коэффициенты пропорциональности у них одинаковы. Положим

$$\delta_в = \alpha l_* = \alpha \frac{\nu}{v_*} = \alpha \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}}, \tag{111}$$

где α — безразмерная константа. Тогда по (105) будем иметь

$$u_в = \frac{\tau_w}{\mu}\delta_в = \alpha \frac{\tau_w}{\mu}\frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}},$$

т. е. действительно

$$u_в = \alpha\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \alpha v_*. \tag{112}$$

Пользуясь полученными формулами, определим постоянную C в равенстве (109), которое теперь можно переписать в виде

$$u = \frac{v_*}{\varkappa}\ln y + C. \tag{113}$$

На границе вязкого подслоя имеем

$$u_в = \frac{1}{\varkappa} v_* \ln \delta_в + C,$$

так что по (111) и (112) будет

$$C = \alpha v_* - \frac{1}{\varkappa} v_* \ln\left(\alpha\frac{\nu}{v_*}\right) = v_*\left(\alpha - \frac{1}{\varkappa}\ln\alpha\right) - \frac{1}{\varkappa} v_* \ln\frac{\nu}{v_*}.$$

Подставляя это значение константы в формулу (113), найдем

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa}\ln\eta + \alpha - \frac{1}{\varkappa}\ln\alpha, \tag{114}$$

где

$$\varphi = \frac{u}{v_*}, \quad \eta = \frac{yv_*}{\nu} = \frac{y}{l_*},$$

или, переходя от натуральных логарифмов к *десятичным* (lg),

$$\varphi = \frac{2{,}303}{\varkappa}\lg\eta + \alpha - \frac{2{,}303}{\varkappa}\lg\alpha. \tag{115}$$

И. Никурадзе[1]) проводил опыты над турбулентным движением воды в длинных цилиндрических трубах круглого сечения с гладкими стенками в широком диапазоне чисел Рейнольдса $\mathbf{Re} = u_{ср}d/\nu$ ($u_{ср}$ — средняя по расходу скорость, d — диаметр трубы, ν — кинематический коэффициент вязкости) от критического их значения до $\mathbf{Re} \approx 3{,}24 \cdot 10^6$.

На рис. 244 приведены результаты его точных, систематически поставленных опытов по измерению скоростей в сечении трубы. Как это следует из графика, экспериментальные точки вполне удовлетворительно располагаются по *прямой*, соответствующей *логарифмическому профилю скоростей*

$$\frac{u}{v_*} = \varphi = A\lg\eta + B = 5{,}75\lg\eta + 5{,}5 = 5{,}75\lg\frac{yv_*}{\nu} + 5{,}5. \tag{116}$$

Принципиальное значение имеет тот факт, что логарифмическая формула (116) сохраняет свою форму для всех рейнольдсовых чисел течения, или, как принято говорить, *универсальна*. В дальнейшем будут

[1]) Nikuradse J. Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren.— VDI, Forschungsheft, 1932, Bd. 356. Русский перевод см. в неоднократно цитированном сб. «Проблемы турбулентности», с. 75—150.

введены *степенные* формулы для скорости, не обладающие свойством универсальности. Структура логарифмических формул такова, что влияние рейнольдсова числа, т. е. вязкости, полностью входит в масштабы длин l_* и скоростей v_*; это и делает формулу (116) универсальной. С физической стороны указанное свойство логарифмических формул объясняется наличием вязкого подслоя, в котором сосредоточено все влияние вязкости, и отмеченной ранее пропорциональностью масштабов l_* и v_*.

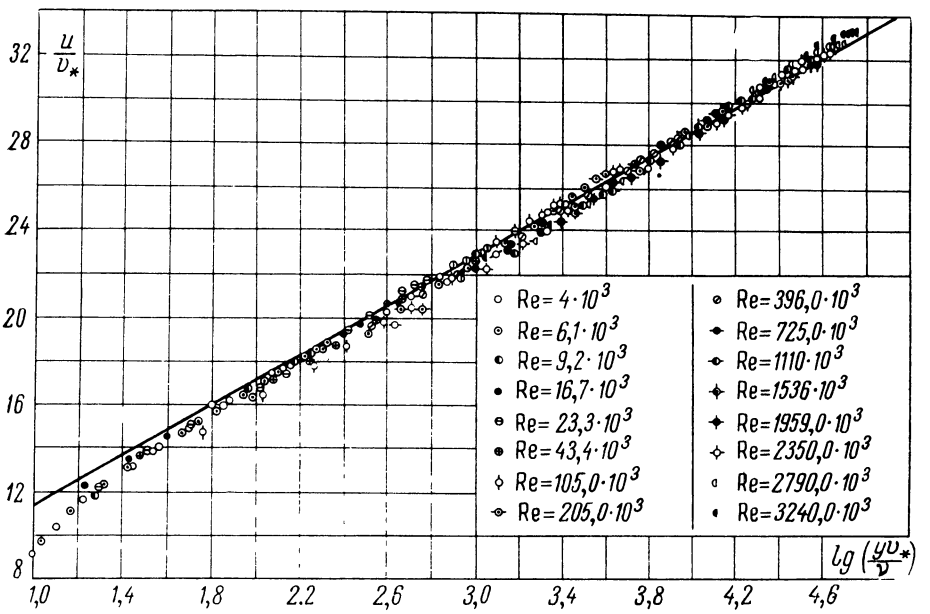


Рис. 244

толщине подслоя $\delta_в$ и скорости на его внешней границе $u_в$. Приведенные соображения могут служить оправданием именования масштабов $l_*=\nu/v_*$ и $v_*=\sqrt{\tau_w/\rho}$ *универсальными*, а величин $\varphi=u/v_*$ и $\eta=y/l_*=yv_*/\nu$ соответственно *универсальными скоростью* и *координатой*.

Согласно (105) в ламинарном подслое в универсальных переменных будет существовать равенство

$$\varphi=\eta, \tag{117}$$

а на границе подслоя по (111)

$$\eta_в=\frac{\delta_в}{l_*}=\frac{\delta_в v_*}{\nu}=\alpha.$$

Сравнивая формулу (116) с логарифмическим распределением скоростей (115), убеждаемся в том, что для количественного совпадения необходимо положить

$$\varkappa\approx 0{,}4; \quad \alpha\approx 11{,}5.$$

Экспериментальные данные отклоняются от прямой (116) лишь в области сравнительно малых значений $\eta=yv_*/\nu$, соответствующих точкам, близким к стенке трубы, где уже становится заметным влияние вязкости (переходная область); крайней левой точке горизонтальной шкалы $\lg\eta\approx 1$ соответствует примерно граница вязкого подслоя. Пользуясь координатами φ, η, перепишем линейный профиль скоростей (117) в вязком подслое в форме

$$\varphi=\eta=10^{\lg\eta}.$$

При логарифмическом масштабе абсцисс, принятом на рис. 244, этому профилю будет соответствовать не показанная на рисунке *цепная* линия, переход на которую с прямой (116) и намечается при малых значениях $\lg \eta$. Расположение этой цепной линии будет показано далее. Заметим еще намечающееся отклонение экспериментальных точек вверх от прямой (116) в правой ее части, зависящее от влияния отличия движения в круглой трубе от рассмотренного упрощенного случая плоского движения вблизи безграничной плоскости.

Может вообще возникнуть вопрос о правомерности сравнения теоретических результатов, относящихся к идеализированному движению в безграничной области (рис. 243), с результатами экспериментов в круглой трубе, проведенных Никурадзе. Ответом служит соображение, что рассмотренное плоское движение можно представить как *предельный случай движения в трубе*, если при фиксированном расстоянии y точки потока в трубе от ее стенки устремить к бесконечности расстояние между плоскостями в плоской трубе или радиус в круглой цилиндрической трубе. Правильность такой трактовки будет подтверждена ниже.

Имея в виду некоторое различие между теоретическим логарифмическим профилем скоростей (114) и кривой Никурадзе (рис. 244) вблизи оси трубы, все же применим равенство (114) к оси трубы, где $y=a$, $u=u_{\max}$, и из полученного результата почленно вычтем (114). Тогда придем к следующей формуле «дефекта скорости», как называют разность $u_{\max}-u$,

$$\frac{u_{\max}-u}{v_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{a}{y}, \tag{118}$$

содержащей только одну эмпирическую константу $\varkappa$; подставляя $\varkappa=0{,}4$, получим

$$\frac{u_{\max}-u}{v_*}=5{,}75\lg\frac{a}{y}. \tag{119}$$

Как далее будет показано (рис. 246), эта простая формула дает хорошее совпадение с опытом.

Константы $\varkappa\approx 0{,}4$ и $\alpha\approx 11{,}5$ представляют собой *две основные эмпирические постоянные, характеризующие турбулентное движение.* Иногда бывает удобно вводить еще третью постоянную f, *выражающуюся через первые две и определяющую уклон логарифмической кривой скоростей на границе вязкого подслоя, но со стороны турбулентного ядра.*

Взяв производную от обеих частей (114), получим

$$f=\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_{\eta=\eta_в}=\frac{1}{\varkappa\alpha}=0{,}218. \tag{120}$$

Таким образом, проведенный упрощенный теоретический анализ позволяет уловить основные закономерности распределения скоростей при турбулентном движении в круглой трубе. Необходимость использования двух эмпирических констант сохраняется и в дальнейшем изложении, хотя природа самих констант изменяется.

Отмеченная связь между движениями около безграничной плоскости и вблизи стенки круглой трубы, приводящая к совпадению простых теоретических формул скорости (115) и «дефекта скорости» (118) с опытными данными, говорит об идентичности *локальных* свойств турбулентного движения в этих областях. Можно заметить, что «дефект скорости», вычисленный для *плоской* трубы с конечным расстоянием $2h$ между плоскостями, дает худшее совпадение с опытом. Используем действительные распределения полного напряжения трения τ по сечению

плоской трубы высоты $2h$

$$\tau = \tau_w \left(1 - \frac{y}{h}\right) = \tau_w \frac{z}{h}, \qquad (121)$$

где y — расстояние точки до стенки, а z — от оси, легко выводимые при установившемся движении из условия равновесия элементарного объема жидкости между двумя сечениями трубы, и формулу Кармана для напряжения *турбулентного* трения (73), справедливую *вне* вязкого подслоя ($y \gg \delta_в$) (штрих означает производную по y)

$$\rho \varkappa^2 \frac{u'^4}{u'^2} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Уравнение это может быть переписано в форме (знак минус в правой части выбран в связи с тем, что $u'' < 0$)

$$\frac{u''}{u'^2} = -\frac{\varkappa}{v_*} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y}{h}}},$$

легко интегрируется и дает первый интеграл

$$-\frac{1}{u'} = 2 \frac{\varkappa}{v_*} h \sqrt{1 - \frac{y}{h}} + C.$$

Следуя Карману[1]), примем

$$u' = \infty \text{ при } y = 0,$$

что приближенно соответствует в действительности очень большой величине наклона кривой скорости вблизи стенки. Отсюда следует

$$C = -\frac{2\varkappa h}{v_*}, \quad u'(y) = \frac{v_*}{2\varkappa h} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - y/h}}.$$

Интегрирование последнего уравнения приводит к содержащему лишь одну константу $\varkappa$ распределению «дефекта» скорости

$$\frac{u_{\max} - u}{v_*} = -\frac{1}{\varkappa}\left[\ln\left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{h}}\right) + \sqrt{1 - \frac{y}{h}}\right]. \qquad (122)$$

На рис. 245 приводятся для сравнения теоретические кривые (122) (*сплошная* линия) и (118) (*штриховая* линия) при значении $\varkappa = 0{,}4$; там же в виде вертикальных отрезков нанесены границы экспериментальных данных Никурадзе в диапазоне Re от $4 \cdot 10^4$ до $3{,}24 \cdot 10^6$. Как видно из графика, простая формула (118) при $\varkappa = 0{,}4$ удовлетворительно представляет действительное распределение скоростей; формула (122) при том же значении $\varkappa$ дает несколько заниженные значения «дефекта скорости».

Пользуясь соотношением (122), можно следующим образом интерпретировать формулу (118). Фиксируем в плоской или круглой трубе значение ординаты y и устремим ширину h или диаметр d трубы к бесконечности. При малых y/h в этом случае получим вместо (122)

$$\frac{u_{\max} - u}{v_*} \approx \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{h}{y},$$

т. е. при $h = a$ (a — радиус трубы) формулу (118).

Итак, действительно, рассмотренное Прандтлем течение представляет предельный случай плоской или круглой трубы, если полуширину h или радиус трубы a устремить к бесконечности, а расстояние точки от стенки трубы *фиксировать*. Профиль дефекта скорости (118) в

[1]) Kármán Th. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.— Math. Phys., Kl., 1930. Русский перевод см. в кн.: Проблемы турбулентности.— М.: ОНТИ, 1936, с. 274—276.

центральной части трубы близок к установленному экспериментально Дарси[1]) профилю, показанному на рис. 246 штрихами,

$$\frac{u_{\max}-u}{v_*}=5{,}08\left(1-\frac{y}{a}\right)^{3/2}=5{,}08\left(\frac{r}{a}\right)^{3/2}, \qquad (123)$$

принятому в курсах гидравлики. Покажем, что этот профиль может быть получен на основе полуэмпирической теории Прандтля[2]). С этой целью

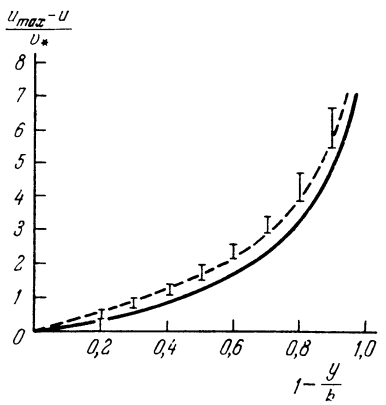


Рис. 245

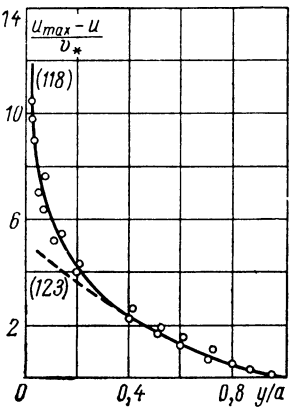


Рис. 246

предварительно заметим, что путь смешения, определенный по экспериментальным данным Никурадзе из формулы Прандтля

$$l=\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\Big/\left(\frac{du}{dy}\right)=\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}\frac{r}{a}}\Big/\left(\frac{du}{dy}\right)=v_*\sqrt{1-\frac{y}{a}}\Big/\left(\frac{du}{dy}\right), \qquad (124)$$

может быть представлен графиком (рис. 247), из которого непосредственно следует, что вблизи оси отношение l/a почти постоянно. Полагая $l=\beta a$, а τ по (121) равным $\tau=\tau_w\, r/a$, получим по формуле Прандтля (60)

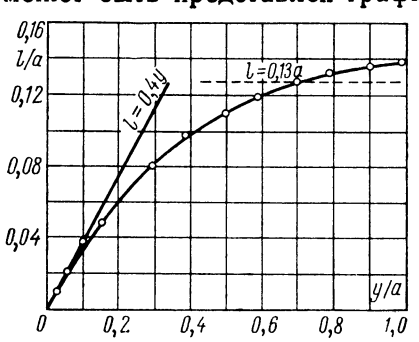


Рис. 247

$$\tau=\rho l^2\left(\frac{du}{dr}\right)^2=\beta^2 a^2\left(\frac{du}{dr}\right)^2=\tau_w\frac{r}{a},$$

откуда следует (знак минус по условию $\frac{du}{dr}<0$)

$$-\frac{d(u/v_*)}{d(r/a)}=\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{r}{a}}.$$

После интегрирования и учета граничного условия

$$u=u_{\max} \text{ при } r=0,$$

получим

$$\frac{u_{\max}-u}{v_*}=\frac{2}{3\beta}\left(\frac{r}{a}\right)=\frac{2}{3\beta}\left(1-\frac{y}{a}\right),$$

что при $\beta=0{,}13$ даст закон Дарси (123). Как видно из рис. 247, данное значение β мало отличается от экспериментального $\beta=0{,}14$ в точке

[1]) Darcy H. Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eaux dans les tuyaux.— Mémoires de diverses savantes étrangers, 1858, t. XV.

[2]) Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя.— М.; Л.: Гостехиздат, 1941, с. 296, 297.

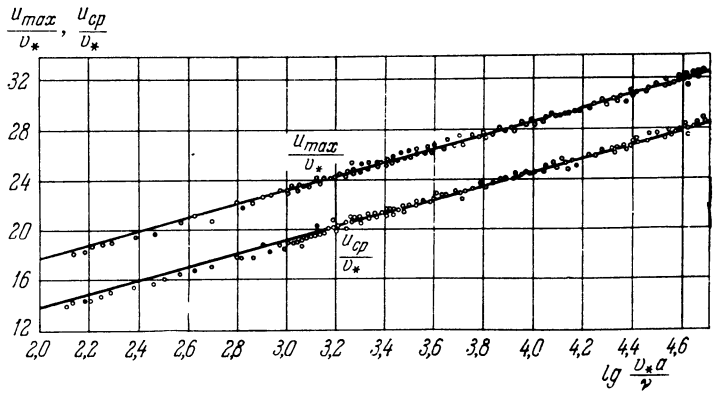


Рис. 248

$\tau=0$, где определение l по формуле (124), в которой при $r=0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль, не точно.

Определим среднюю скорость в трубе $u_{ср}$ как

$$u_{ср}=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a u\cdot 2\pi(a-y)\,dy.$$

Совершая указанное осреднение над обеими частями формулы (118), получим при $\varkappa=0{,}4$

$$\frac{u_{max}-u_{ср}}{v_*}=-\frac{1}{\varkappa\pi a^2}\int_0^a \ln\left(\frac{y}{a}\right)\cdot 2\pi(a-y)\,dy=$$

$$=-\frac{2}{\varkappa}\int_0^1 \ln\left(\frac{y}{a}\right)\left(1-\frac{y}{a}\right)d\left(\frac{y}{a}\right)\approx 4{,}08. \qquad (125)$$

Принятое в правой части численное значение этого отношения 4,08 несколько превышает величину 3,75, определенную интегралом, но ближе к опыту.

Эта формула связи между максимальной (на оси трубы) и средней скоростью по сечению трубы хорошо подтверждается на опыте, как это видно из рис. 248. В отличие от ламинарного движения в круглой трубе, при котором $u_{max}/u_{ср}=2$, в турбулентном движении это отношение уменьшается с ростом рейнольдсова числа от 1,3 при малых его значениях ($Re\approx 5000$) до 1,15 при сравнительно больших ($Re\approx 3\cdot 10^6$). Это говорит о резком от-

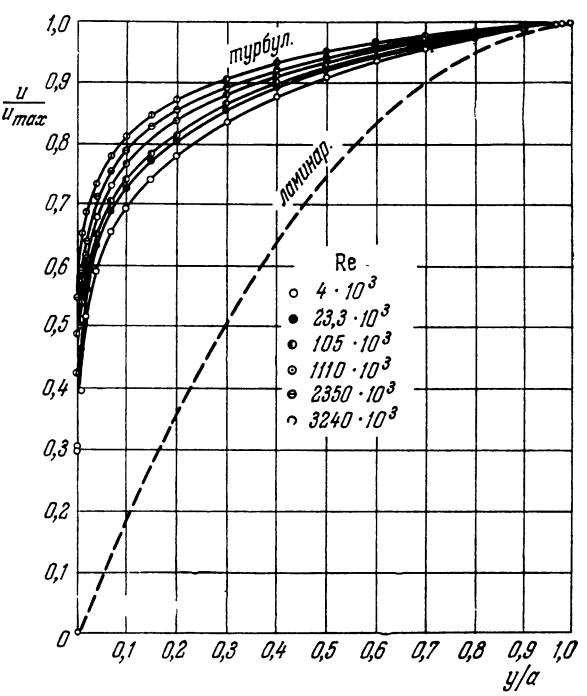


Рис. 249

личии формы профиля скоростей в турбулентном движении от параболы скоростей в ламинарном движении.

На рис. 249 профили скоростей нанесены в координатах $u/u_{\max}$, y/a и это отличие отчетливо видно. Можно заметить, что турбулентные профили располагаются значительно выше или, как принято говорить, более *заполнены*, чем ламинарные, причем степень их *заполненности* возрастает с рейнольдсовым числом. Экспериментальные точки соответствуют цитированным выше опытам Никурадзе.

§ 126. Логарифмические и степенные формулы сопротивления гладких и шероховатых труб

Выведенные формулы распределения скоростей содержат неизвестную заранее величину v_*, связанную с напряжением трения на стенке трубы. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо найти дополнительную связь между величинами v_* и $u_{\max}$ или $u_{\text{ср}}$. Такая связь задается *формулой сопротивления* трубы турбулентному движению жидкости.

Располагая формулами распределения скоростей и выражением для толщины вязкого подслоя и скорости на внешней его границе, легко выведем и искомые формулы сопротивления. Задача сводится к определению зависимости коэффициента сопротивления λ, входящего в известную по гл. X формулу (Δp — перепад давления на участке трубы длины L, d — диаметр трубы, $u_{\text{ср}}$ — средняя скорость)

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}, \tag{126}$$

от рейнольдсова числа $\mathrm{Re} = u_{\text{ср}} d/\nu$.

При равномерном установившемся течении жидкости в трубе движущий перепад $\Delta p \frac{\pi d^2}{4}$ уравновешивается сопротивлением трения $\tau_w \pi d \cdot L$, так что из равенства $\Delta p \frac{\pi d^2}{4} = \tau_w \pi d \cdot L$ следует

$$\Delta p = \frac{4L}{d} \tau_w.$$

Подставляя полученное выражение Δp в формулу (126), получим

$$\tau_w = \lambda \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{8},$$

или, вспоминая еще определение величины динамической скорости $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$,

$$v_*^2 = \frac{\lambda}{8} u_{\text{ср}}^2;$$

отсюда следует

$$\frac{u_{\text{ср}}}{v_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}. \tag{127}$$

Для вывода искомой формулы сопротивления, т. е. связи между коэффициентом сопротивления λ и рейнольдсовым числом $\mathrm{Re} = u_{\text{ср}} d/\nu$, воспользуемся одним из следующих двух приемов: применим формулу скоростей (116), выведенную из условия сращивания турбулентного ядра потока с вязким подслоем, к оси трубы ($u = u_{\max}$, $y = a$) или формулу скоростей (119), при выводе которой использовано граничное условие на оси трубы, к границе вязкого подслоя. И в том и в другом случаях

получим одну и ту же формулу

$$\frac{u_{max}}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{av_*}{\nu} + 5{,}5,$$

которую можно тождественно переписать так ($d=2a$):

$$\frac{u_{max} - u_{ср}}{v_*} + \frac{u_{ср}}{v_*} = 5{,}75 \lg \left(\frac{u_{ср} d}{\nu} \frac{v_*}{2u_{ср}} \right) + 5{,}5,$$

или, используя (125) и (127),

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = C \lg (\mathrm{Re} \sqrt{\lambda}) + D.$$

Многочисленные опыты (Стэнтон и Пэннел, Омбек, Нуссельт, Якоб и Эрк, Шиллер и Герман, Никурадзе) хорошо подтверждают следующую

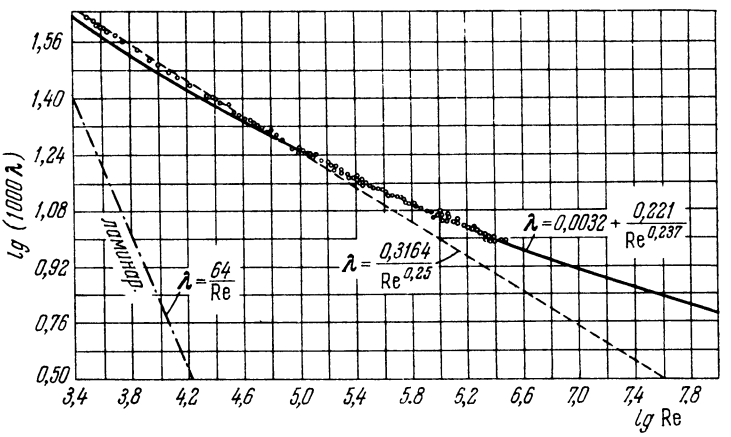


Рис. 250

формулу с округленными коэффициентами [1]):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (\mathrm{Re} \sqrt{\lambda}) - 0{,}8. \qquad (128)$$

Формула (128) дает искомую связь $\lambda(\mathrm{Re})$ в неявном виде. Никурадзе предложил пользоваться следующей *явной* зависимостью:

$$\lambda = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{\mathrm{Re}^{0{,}237}}, \qquad (129)$$

близость которой к эксперименту иллюстрируется сплошной кривой на рис. 250. На том же рисунке штрихами приведена для сравнения прямая, соответствующая широко используемой в гидравлике формуле Блазиуса

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\mathrm{Re}^{0{,}25}}, \qquad (130)$$

применимость которой, как показывает рис. 250, ограничена значениями $\mathrm{Re} < 10^5$. В левом нижнем углу показана штрих-пунктиром прямая, соответствующая закону сопротивления $\lambda = 64/\mathrm{Re}$ при *ламинарном* движении.

Путь расчета установившегося турбулентного движения жидкости в круглой трубе таков. Задается диаметр трубы d, коэффициент кинематической вязкости жидкости ν и потребный объемный расход. По расходу

[1]) Nikuradse J. цитировано раньше; в русском переводе см. сб. «Проблемы турбулентности», с. 143.

и диаметру находим $u_{ср}$, а следовательно, и число Рейнольдса $\mathrm{Re}=u_{ср}d/\nu$. После этого по (129) находим коэффициент сопротивления λ, а затем и перепад давления Δp на заданном участке трубы длины L

$$\Delta p=\lambda\frac{L}{d}\frac{\rho u_{ср}^2}{2}.$$

По величине Δp найдем

$$\tau_w=\frac{\lambda}{8}\rho u_{ср}^2$$

и

$$v_*=\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}=\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}}u_{ср}.$$

Остается воспользоваться формулой скоростей (116), чтобы задача могла считаться полностью решенной.

Наряду с выведенными полуэмпирическими соотношениями — логарифмическим профилем скоростей и логарифмическим законом сопротивления — большую роль до сих пор продолжают играть чисто эмпирические *степенные* соотношения. К числу последних относится только что упомянутая формула Блазиуса (130), которая представляет частный случай общего степенного закона сопротивления

$$\lambda=c/\mathrm{Re}^m. \tag{131}$$

Как показывают опыты, с возрастанием рейнольдсова числа показатель степени m и коэффициент c изменяются, причем m убывает. Пользуясь экспериментальной формулой Блазиуса, Карман[1]) из соображений размерности показал, что степенному закону сопротивления (130) соответствует степенной профиль скоростей

$$u/u_{\max}=(y/a)^{1/7},$$

получивший наименование *закона одной седьмой*.

Точно так же общей формуле (131) соответствует степенной закон скоростей

$$u/u_{\max}=(y/a)^n. \tag{132}$$

Чтобы найти связь между показателями степени m и n, применим тот же способ, что и при выводе логарифмического закона сопротивления из логарифмического профиля скоростей. Используя (132), найдем

$$\frac{u_{ср}}{u_{\max}}=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi(a-y)\left(\frac{y}{a}\right)^n dy=2\int_0^1\left(1-\frac{y}{a}\right)\left(\frac{y}{a}\right)^n d\left(\frac{y}{a}\right)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Применим теперь формулу (132) к границе вязкого подслоя, положив

$$y=\delta_в=\alpha\frac{\nu}{v_*},\quad u=u_в=\alpha v_*.$$

Будем иметь

$$\frac{\alpha v_*}{u_{\max}}=\left(\frac{\alpha\nu}{\alpha v_* a}\right)^n,\quad \frac{v_*}{u_{ср}}\cdot\frac{u_{ср}}{u_{\max}}=2^n\alpha^{n-1}\left(\frac{\nu}{u_{ср}d}\right)^n\left(\frac{u_{ср}}{v_*}\right)^n,$$

откуда, согласно (127), после простых преобразований следует

$$\lambda=\frac{2^{\frac{5n+1}{n+1}}\alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}}[(n+1)(n+2)]^{\frac{2}{n+1}}}{\mathrm{Re}^{\frac{2n}{n+1}}}. \tag{133}$$

[1]) Karman Th. Über laminare und turbulente Reibung.— Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1921, Bd. 1.

Сравнивая это выражение со степенной формулой сопротивления (131), получим

$$m = \frac{2n}{n+1}, \tag{134}$$

$$c = 2^{\frac{5n+1}{n+1}} \alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} [(n+1)(n+2)]^{\frac{2}{n+1}}. \tag{135}$$

Отсюда сразу следует, что закону сопротивления Блазиуса (130), в котором m принято равным $^1/_4$, соответствует закон одной седьмой для профиля скоростей.

Приводим графики Никурадзе (рис. 251), иллюстрирующие уменьшение числа m с ростом рейнольдсова числа.

Наряду со степенной формулой скорости (132) представляет интерес степенной профиль в координатах u/v_*, $y/l_* = yv_*/\nu$, а именно

$$\frac{u}{v_*} = A\left(\frac{yv_*}{\nu}\right)^n. \tag{136}$$

С опытом хорошо согласуются формулы

$$\frac{u}{v_*} = 8{,}74\left(\frac{yv_*}{\nu}\right)^{1/7} \text{ при } 40 < \frac{yv_*}{\nu} < 700,$$

$$\frac{u}{v_*} = 9{,}60\left(\frac{yv_*}{\nu}\right)^{1/8} \text{ при } 70 < \frac{yv_*}{\nu} < 1100,$$

а также и другие формулы с убывающим показателем степени и возрастающим коэффициентом.

Основное *преимущество логарифмического профиля скоростей* (116) заключается в том, что он справедлив в чрезвычайно *широких* пределах изменения yv_*/ν, начиная примерно от значения, равного 40, и, по имеющимся опытным данным, до значения, во всяком случае не меньшего 100 000, что и говорит об *универсальности* этого отношения.

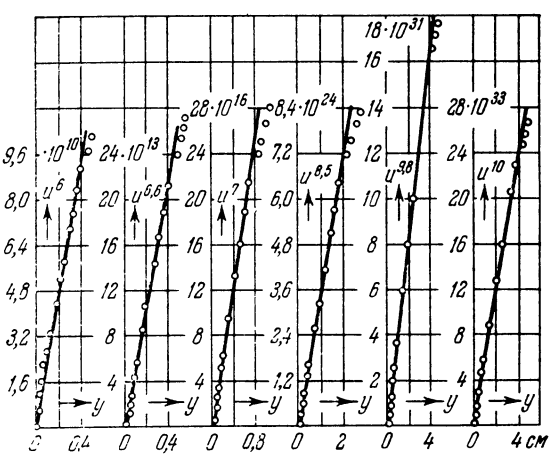


Рис. 251

Можно еще указать степенную формулу сопротивления в такой, легко выводимой из (136) форме (ζ — коэффициент сопротивления, зависящий от n):

$$\tau_w = \zeta \mathrm{Re}_{\max}^{-\frac{2n}{n+1}} \cdot \frac{1}{2}\rho u_{\max}^2, \quad \mathrm{Re}_{\max} = \frac{u_{\max} a}{\nu}. \tag{137}$$

В частности, закон одной седьмой ($n = {}^1/_7$, $A = 8{,}7$) дает

$$\frac{\tau_w}{\rho u_{\max}^2} = 0{,}0225\,\mathrm{Re}_{\max}^{-1/4}. \tag{138}$$

Изложенное относилось лишь к движению в *гладкой* трубе со строго цилиндрической поверхностью. На практике приходится иметь дело

с более или менее *шероховатыми* трубами, а также с трубами с неточной цилиндричностью внутренней поверхности — *волнистостью.*

Изучением влияния различного типа шероховатостей на сопротивление труб занимается гидравлика, располагающая большим числом разнообразных практических формул для определения сопротивлений применяемых в технике труб.

Несколько идеализируя и вместе с тем обобщая понятие шероховатости, представим себе, что внутренняя поверхность трубы покрыта бугорками, имеющими вид зерен примерно одинакового размера. Обозначим через k высоту бугорка шероховатости (практически среднюю высоту) и условимся называть величину k, выраженную в миллиметрах,

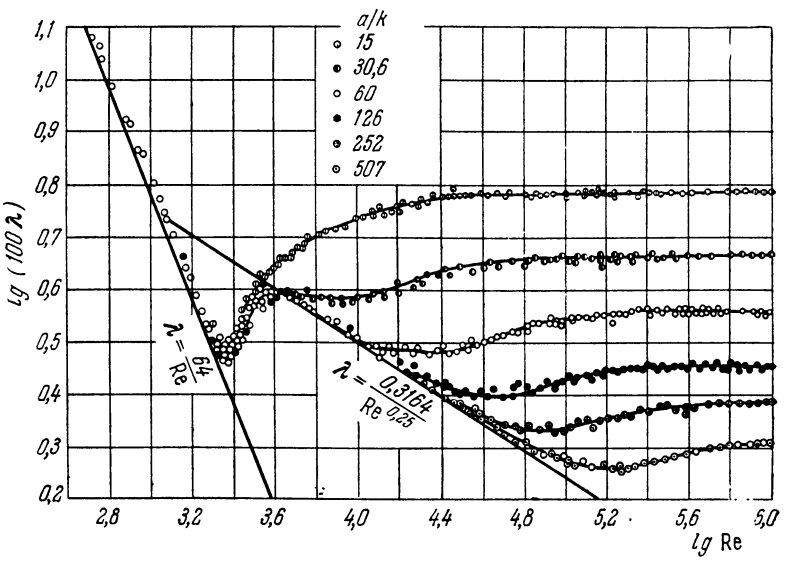


Рис. 252

абсолютной шероховатостью, а отношение высоты бугорка k к радиусу трубы a — *относительной шероховатостью.* В дальнейшем предполагается, что относительная шероховатость сравнительно невелика (от 0,2 до 7%).

Рассмотрение типичных для труб с указанной *зернистой* шероховатостью экспериментальных кривых сопротивления, показанных на рис. 252[1]), приводит к следующим заключениям (на кривых за параметр принята величина a/k, обратная относительной шероховатости):

1) относительная шероховатость не влияет на критическое число $\mathbf{Re}_{кр}$ перехода ламинарного режима в турбулентный; для различных a/k кривые сходят с известной уже нам ламинарной прямой $\lambda = 64/\mathbf{Re}$ при одном и том же значении $\mathbf{Re}_{кр}$, примерно равном $2 \cdot 10^3$ (логарифм критического числа Рейнольдса близок к 3,3);

2) переходный режим также почти не зависит от относительной шероховатости;

3) чем меньше относительная шероховатость, тем в большем диапазоне рейнольдсовых чисел наблюдается обычное турбулентное движение, соответствующее гладким трубам; так, при относительной шероховатости порядка 0,2% кривая сопротивления почти до $\mathbf{Re} = 5 \cdot 10^4$ совпадает с кривой Блазиуса $\lambda = 0{,}3164/\mathbf{Re}^{0{,}25}$ сопротивления гладких труб;

[1]) Nikuradse J. Strömungsgesetze in rauhen Röhren.— VDI Forschungsheft, 1933, № 361.

наоборот, при k/a порядка 3—7% кривые сопротивления пересекаются с кривыми гладких труб и резко от них отличаются;

4) при тем больших числах Рейнольдса, чем меньше относительная шероховатость, коэффициент сопротивления перестает зависеть от числа Рейнольдса и определяется только относительной шероховатостью; при этом значения коэффициента сопротивления растут вместе с относительной шероховатостью.

Этим основным результатам можно дать наглядное истолкование, если сопоставить высоту бугорка шероховатости k с толщиной вязкого подслоя $\delta_в$.

Схематизируя явление, рассмотрим следующие три случая:

1. *Первый предельный режим*: бугорки шероховатости погружены в вязкий подслой ($k \ll \delta_в$); наличие этих бугорков не нарушает ламинарности подслоя, бугорки обтекаются без отрывов и вихреобразований. В этом случае нет никакой разницы между гладкой и шероховатой трубами. *Шероховатая труба является гидродинамически гладкой.*

2. *Второй предельный режим*: бугорки шероховатости выходят за пределы вязкого подслоя ($k \gg \delta_в$). Отрывное обтекание бугорков сводит тормозящее влияние поверхности трубы к сопротивлению плохо обтекаемых тел (бугорков шероховатости), которое не зависит от рейнольдсова числа и пропорционально скоростному напору набегающей жидкости.

Этот режим можно назвать *режимом развитой шероховатости.*

3. *Промежуточный режим*, когда k имеет тот же порядок, что и $\delta_в$. Этот режим является наиболее общим; предыдущие режимы по отношению к нему служат предельными.

Дадим полуэмпирическое обоснование турбулентному течению в шероховатых трубах. Имея в виду, что в общем случае сопротивление τ_w по своей природе представляет собой отнесенное к единице площади суммарное сопротивление бугорков шероховатости, можно допустить справедливость формулы сопротивления (u_k — скорость на высоте бугорка, k — некоторая средняя высота бугорка)

$$\frac{\tau_w}{\rho u_k^2} = f\left(\frac{k u_k}{\nu}\right),$$

где величина $k u_k/\nu$ играет роль *рейнольдсова числа обтекания бугорков.* Отсюда следует, что

$$\frac{v_*^2}{u_k^2} = f\left(\frac{u_k}{v_*} \cdot \frac{k v_*}{\nu}\right)$$

или, если разрешить уравнение относительно u_k/v_*,

$$\frac{u_k}{v_*} = \Phi\left(\frac{k v_*}{\nu}\right).$$

Вид функции Ф неизвестен и будет определен из опытов. Важно лишь отметить, что из предыдущих рассуждений вытекает независимость вида этой функции от рейнольдсова числа и шероховатости.

Воспользуемся линией вершин бугорков шероховатости $y=k$, где $u=u_k$, для составления граничного условия при определении постоянной интегрирования C в выражении (113) логарифмического профиля скоростей. Тогда получим формулу распределения скоростей в шероховатой трубе

$$\frac{u}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{y}{k} + \frac{u_k}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{y}{k} + \Phi\left(\frac{k v_*}{\nu}\right). \qquad (139)$$

Отсюда обычным приемом выведем формулу сопротивления. Применяя (139) к оси трубы, проделаем далее те же выкладки, что при выводе

формулы сопротивления гладкой трубы. Будем иметь

$$\frac{u_{\max}}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{a}{k} + \Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right), \quad \frac{u_{\max} - u_{\text{ср}}}{v_*} + \frac{u_{\text{ср}}}{v_*} - 5{,}75 \lg \frac{a}{k} = \Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right).$$

Заменим здесь

$$\frac{u_{\max} - u_{\text{ср}}}{v_*} = 3{,}75\ ^{1}), \quad \frac{u_{\text{ср}}}{v_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}};$$

тогда получим формулу сопротивления

$$3{,}75 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} - 5{,}75 \lg \frac{a}{k} = \Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right). \tag{140}$$

Сравнивая между собой (139) и (140), убедимся, что для определения неизвестной функции $\Phi(kv_*/\nu)$ имеются два *не зависящих друг от друга пути*: один, согласно (139),— по измеренным профилям скоростей, другой, основанный на применении (140),— по сопротивлениям трубы. Используя ранее цитированные экспериментальные исследования Никурадзе, нанесем на одном графике (рис. 253) функцию $\Phi(kv_*/\nu)$, определенную указанным двояким образом:

$$\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right) = \frac{u}{v_*} - 5{,}75 \lg \frac{y}{k} = 3{,}75 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} - 5{,}75 \lg \frac{a}{k}.$$

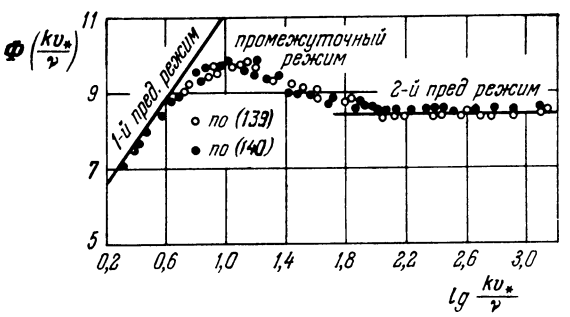


Рис. 253

На рис. 253 светлыми и черными кружочками нанесены экспериментальные данные, полученные соответственно по измеренным скоростям и сопротивлениям. Возможность такого рода сравнения делает определение функции $\Phi(kv_*/\nu)$ более надежным.

В *первом предельном* режиме, где профиль скоростей должен иметь обычный вид логарифмического профиля в гладкой трубе, очевидно, будет

$$\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right) = 5{,}75 \lg \frac{kv_*}{\nu} + 5{,}5,$$

во *втором предельном режиме*

$$\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right) = \text{const} = 8{,}48.$$

Как видно из графика (рис. 253), *первый предельный режим* имеет место до значения

$$\lg \frac{kv_*}{\nu} < 0{,}47, \quad \frac{kv_*}{\nu} < 3,$$

что определяет границу использования формул гладких труб неравенством

$$\frac{k}{\delta_{\text{в}}} < 0{,}25.$$

---

[1]) Ранее вместо этой полуэмпирической величины было принято 4,08 [см. формулу (125)].

Пользуясь определением толщины вязкого подслоя, можем, согласно (111), (127) и (129), написать

$$\frac{\delta_в}{a} = \alpha \frac{\nu}{av_*} = \alpha \frac{\nu}{2a \cdot u_{ср}} \frac{2u_{ср}}{v_*} = \frac{\alpha}{\mathrm{Re}} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{65}{\mathrm{Re}\sqrt{0{,}0032 + 0{,}221\mathrm{Re}^{0{,}237}}},$$

что дает следующую оценку для области использования формул гладких труб:

$$\frac{k}{a} < \frac{16{,}3}{\mathrm{Re}\sqrt{0{,}0032 + 0{,}221\mathrm{Re}^{-0{,}237}}}.$$

Второй предельный режим определится по тому же графику рис. 253 условием

$$\lg \frac{kv_*}{\nu} > 1{,}8, \quad \frac{kv_*}{\nu} > 60$$

или

$$\frac{k}{\delta_в} > 6,$$

что приведет к оценке границы области развитой шероховатости

$$\frac{k}{a} > \frac{390}{\mathrm{Re}\sqrt{0{,}0032 + 0{,}221\,\mathrm{Re}^{-0{,}237}}}.$$

Таким образом, каждому значению рейнольдсова числа **Re** течения в трубе соответствуют определенные границы относительной шероховатости k/a, в которых можно пользоваться теми или другими формулами.

Практически важен *второй предельный режим*, для которого функция $\Phi(kv_*/\nu)$ сохраняет постоянное значение, численно равное 8,48. В этом случае профиль скоростей будет по (139) определяться формулой

$$\frac{u}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{y}{k} + 8{,}48, \tag{141}$$

а формула сопротивления (140) представится так:

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{a}{k} + 1{,}74\right)^2}. \tag{142}$$

Отметим, что приведенные формулы теории идеализированной шероховатости могут применяться для практических расчетов труб, если знать величину *эквивалентной* относительной шероховатости $k_э/a$, которую для различных поверхностей можно установить экспериментально [1]).

Изложенная в настоящем и предыдущем параграфах полуэмпирическая теория установившегося турбулентного движения в плоских и цилиндрических трубах с гладкими и шероховатыми поверхностями имеет уже более чем полувековую давность и стала общепринятой. Нельзя не указать на ряд ее недостатков, в частности на отмеченную уже непри-

[1]) Более подробное изложение теории турбулентного движения жидкости при наличии шероховатости стенок можно найти в монографии: Шлихтинг Г. Пограничный слой: пер. с нем.— М.: Наука, 1974, а также в отдельных статьях: Лойцянский Л. Г. Об универсальных формулах в теории сопротивления шероховатых труб.— Труды ЦАГИ, 1936, вып. 250, и там же: Федяевский К. К. Примерный расчет интенсивности трения и «допускаемых» высот шероховатости для крыла, а также Schlichting H Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeitsproblem.— Ing.-Archiv, 1936, Bd. 7 (в этой работе, по-видимому, впервые было введено понятие *эквивалентной шероховатости*).

менимость предсказанного ею логарифмического профиля скоростей вблизи оси трубы, некоторую необходимую «игру» констант при переходе от логарифмического профиля скоростей к логарифмической формуле сопротивлений и др.

§ 127. Эмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине с гладкой и шероховатой поверхностями

Применение общих уравнений переноса (§ 120) к области турбулентного пограничного слоя имеет до сих пор в известной степени формальный характер. При выводе уравнений турбулентного пограничного слоя аналогично тому, как это делалось в гл. XII при выводе уравнений *ламинарного* пограничного слоя, пренебрегается *продольными* производными от характеристик турбулентности по сравнению с *поперечными*.

Довольствуясь в этом очень сложном и еще до конца не исследованном вопросе *плоским стационарным* движением, представим уравнение *переноса импульса* в области турбулентного пограничного слоя в следующей упрощенной форме:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{143}$$

где τ обозначает полное касательное напряжение трения между слоями осредненного течения и заключает в себе как турбулентное, так и обычное вязкое трение

$$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}-\rho\overline{u'v'}=\mu\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_t.$$

При составлении первого из уравнений (143) откинуты члены $\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'^2})$ и $\mu(\partial^2 u/\partial x^2)$ как малые по сравнению с основным членом $\partial\tau/\partial y$, характеризующим влияние трения. Такое откидывание общепринято, хотя и нет твердой уверенности в том, что оно одинаково справедливо во всех областях пограничного слоя, в частности вблизи отрыва.

Уравнения турбулентного пограничного слоя (143) представляют собой неопределенную систему уравнений, так как, в отличие от случая ламинарного слоя, τ содержит неизвестное слагаемое τ_t. Остановимся на тех простейших приемах расчета турбулентного пограничного слоя, которые широко применяются на практике и в какой-то мере до поры до времени ее устраивают. Приемы эти базируются на использовании *интегрального соотношения импульсов*

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{U'\delta^{**}}{U}(2+H)=\frac{\tau_w}{\rho U^2},\quad H=\frac{\delta^*}{\delta^{**}}, \tag{144}$$

по внешнему виду совпадающего с аналогичным соотношением (107) предыдущей главы для ламинарного пограничного слоя и выводимого из системы уравнений (143).

В уравнении (144) неизвестными являются *три* величины: δ^{**}, H и τ_w. Для разыскания их необходимо добавить еще *два* уравнения, связывающее эти величины, или допустить некоторые упрощения, имеющие, как правило, интуитивный характер.

В основе эмпирических методов, являющихся наиболее старыми из существующих — они относятся к сороковым — пятидесятым годам — лежит соотношение импульсов (144) и следующие эмпирические закономерности, установленные путем обработки большого числа экспериментов:

1) Формула Фокнера[1])

$$c_{f_0} = \frac{2\tau_w}{\rho U_\infty^2} = 0{,}0131\,\mathrm{Re}^{**-1/6}, \quad \mathrm{Re}^{**} = \frac{U_\infty \delta^{**}}{\nu}, \tag{145}$$

пригодная, вообще говоря, для расчета турбулентного слоя на *продольно обтекаемой пластине* (чему соответствует индекс нуль при c_f; U_∞ — скорость набегающего потока).

2) Формула Людвига — Тиллмана[2])

$$c_f = 0{,}246\,\mathrm{Re}^{**-0{,}268} \cdot 10^{-0{,}678H}, \quad \mathrm{Re}^{**} = \frac{U\delta^{**}}{\nu}, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}, \tag{146}$$

рекомендованная для турбулентных пограничных слоев с произвольным распределением $U(x)$ скорости на внешней границе пограничного слоя.

Сравнительно просто решается задача о турбулентном пограничном слое в случае продольного обтекания гладкой и шероховатой пластин, когда $U = \mathrm{const} = U_\infty$, $U' = 0$. При этом интегральное соотношение импульсов (144) сводится к более простому

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}, \tag{147}$$

приобретающему определенный вид, если для правой части применить формулу Фокнера (145), а в левой перейти от δ^{**} и x к величинам

$$\mathrm{Re}^{**} = \frac{U_\infty \delta^{**}}{\nu}, \quad \mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}.$$

Имеем

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{d\,\mathrm{Re}_x} = 0{,}00655\,\mathrm{Re}^{**-1/6},$$

что после непосредственного интегрирования дает

$$\mathrm{Re}^{**7/6} = \frac{7}{6} \cdot 0{,}00655\,\mathrm{Re}_x + C. \tag{148}$$

Предположим сначала, что ламинарный участок пограничного слоя пренебрежимо мал и турбулентный слой устанавливается прямо с передней кромки пластины. Тогда $\delta^{**} = 0$ при $x = 0$ или, что все равно, $\mathrm{Re}^{**} = 0$ при $\mathrm{Re}_x = 0$; это означает, что $C = 0$.

При таком предположении будем иметь по (148)

$$\mathrm{Re}^{**} = 0{,}0153\,\mathrm{Re}_x^{6/7}, \tag{149}$$

или, возвращаясь от рейнольдсовых чисел Re^{**} и Re_x к толщине потери импульса δ^{**} и абсциссе x,

$$\delta^{**} = 0{,}0153 \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/7} x^{6/7}. \tag{150}$$

Таким образом, *толщина потери импульса в турбулентном пограничном слое на пластине растет пропорционально абсциссе в степени шесть седьмых*; этот закон мало отличается от линейного. Вспомним, что в случае *ламинарного* слоя на пластине толщина потери импульса возрастала *пропорционально корню квадратному из абсциссы*, т. е. *гораздо медленнее, чем в турбулентном слое.*

---

[1]) Falkner V. M. The resistance of a smooth flat plate with turbulent boundary layer.— Aircraft Engineering, 1943, v. 15, p. 65.

[2]) Lüdwieg H., Tillman W. Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten.— Ing.-Archiv, 1949, Bd. 17, S. 288.

Отношение толщины потери импульса к абсциссе представляет собой слабую функцию рейнольдсова числа

$$\delta^{**}/x = 0{,}0153\,\mathrm{Re}_x^{-1/7}.$$

Все эти соотношения хорошо соответствуют опытным данным, полученным в аэродинамических трубах и бассейнах.

По формуле Фокнера и (149) найдем (индекс 0 при коэффициенте сопротивления отмечает, что рассматривается продольное обтекание пластинки, при котором dp/dx и dU/dx равны нулю)

$$c_{f0} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 0{,}0131\,\mathrm{Re}^{**-1/6} = 0{,}0131 \cdot 0{,}0153^{-1/6}\mathrm{Re}_x^{-1/7}. \qquad (151)$$

Окончательный вид формулы *местного коэффициента трения*

$$c_{f0} = 0{,}0263\,\mathrm{Re}_x^{-1/7}. \qquad (152)$$

Отсюда уже легко получить и выражение *полного коэффициента сопротивления пластины* длины L, определяемого формулой

$$C_{f0} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L}.$$

Имеем

$$C_{f0} = \frac{\int_0^L \tau_w\,dx}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} = \int_0^1 c_{f0}\,d\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\int_0^{\mathrm{Re}} c_{f0}\,d\,\mathrm{Re}_x,$$

и в силу (152)

$$C_{f0} = 0{,}0307\,\mathrm{Re}^{-1/7}, \qquad (153)$$

где под Re понимается рейнольдсово число обтекания пластины

$$\mathrm{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}.$$

Эмпирические формулы (152) и (153) хорошо совпадают с опытом при больших значениях чисел Рейнольдса и могут с успехом применяться для расчета сопротивления гладких пластин при тех режимах обтекания, когда ламинарный участок достаточно мал.

На рис. 254 приводится сводный график значений C_f (индекс 0 на рисунке опущен), на котором нанесены экспериментальные точки, относящиеся к самым различным условиям опытов в воздухе и в воде на пластинах как полностью гладких, так и со специально помещенными вблизи носовой точки шероховатостями, служащими для преждевременного создания турбулентного пограничного слоя; опыты проведены в широких пределах рейнольдсовых чисел [1]).

Предлагаемая степенная формула (153) в широком диапазоне рейнольдсовых чисел практически не отличается от логарифмической формулы Прандтля — Шлихтинга [2]) (на рисунке — сплошная кривая)

$$C_{f0} = 0{,}455\,(\lg \mathrm{Re})^{-2{,}58} \qquad (154)$$

и прекрасно соответствует опытным точкам чисто турбулентного

[1]) Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Т. II.— М.: ИЛ, 1948, с. 40—42.

[2]) См., например, нашу монографию: Аэродинамика пограничного слоя.— М.: Гостехиздат, 1941, с. 313.

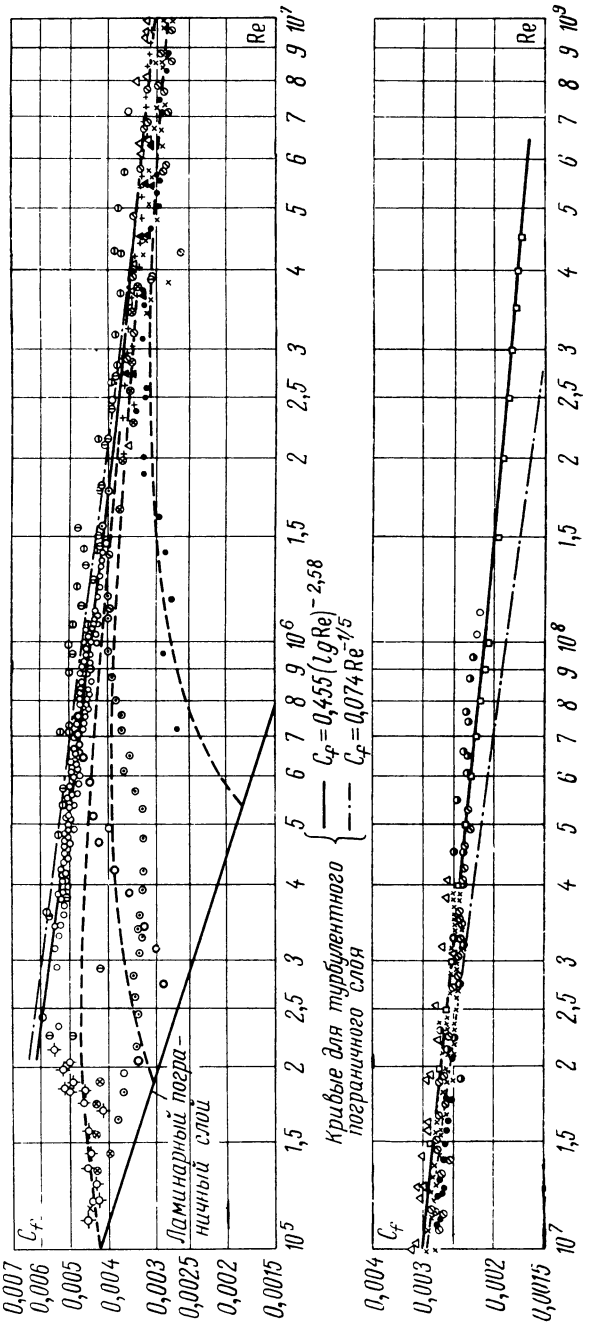

C_f
Re
0,007
0,006
0,005
0,004
0,003
0,0025
0,002
0,0015
10^5
1,5
2
2,5
3
4
5
6
7
8
9
10^6
1,5
2
2,5
3
4
5
6
7
8
9
10^7
Ламинарный пограничный слой
Кривые для турбулентного пограничного слоя
$C_f = 0{,}455(\lg \mathrm{Re})^{-2{,}58}$
$C_f = 0{,}074\,\mathrm{Re}^{-1/5}$
C_f
Re
0,004
0,003
0,002
0,0015
10^7
1,5
2
2,5
3
4
5
6
7
8
9
10^8
1,5
2
2,5
3
4
5
6
7
8
9
10^9

Рис. 254

обтекания пластины без ламинарного участка в носовой части. Показанная штрих-пунктиром степенная зависимость

$$C_{f0} = 0{,}074\,\mathrm{Re}^{-1/6} \tag{155}$$

пригодна лишь при сравнительно малых Re, примерно до $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$. При больших Re эта прямая отходит от экспериментальных точек, как это хорошо видно на нижней части рис. 254. Эмпирическое обоснование формулы (155) связано с использованием для профиля скоростей закона *одной седьмой*, о котором была речь ранее.

Из верхнего графика, приведенного на рис. 254, следует, что коэффициент сопротивления пластины с полностью ламинарным слоем значительно меньше, чем коэффициент сопротивления пластины с полностью турбулентным слоем. Так, например, если бы каким-нибудь образом удалось получить обтекание пластины с полностью ламинарным слоем при $\mathrm{Re} = 500\,000$, то коэффициент сопротивления ее был бы равен $C_{f\text{лам}} = 0{,}0018$; при полностью турбулентном слое и том же Re имеем $C_{f\text{турб}} = 0{,}005$, т. е. примерно в три раза больше. При больших числах Рейнольдса эта разница становится еще разительнее. Отсюда можно заключить о выгодности *затягивания* ламинарного слоя на обтекаемом теле одним из тех путей перемещения точки перехода, о которых говорилось в начале настоящей главы.

Чтобы рассчитать сопротивление пластины, имеющей в носовой части участок ламинарного пограничного слоя, необходимо разыскать входящую в равенство (148) постоянную C, в этом случае уже не равную нулю.

Заменяя область перехода одной точкой, необходимо условиться о способе сращивания решений на стыке областей ламинарного и турбулентного движений. Наиболее естественным с точки зрения принятых в предыдущей и настоящей главах приемов является использование предположения *об одинаковости толщины потери импульса в сечении*, где происходит смыкание ламинарного и турбулентного участков; при этом δ^{**} или Re^{**} в начальной точке турбулентного пограничного слоя приравниваются их значениям в конце ламинарного участка, рассчитанным по теории ламинарного пограничного слоя.

Интегрируя обе части уравнения импульсов по x от переднего края пластины до точки перехода, заключим, что принятое условие сращивания представляет собой естественное с физической стороны требование непрерывности роста полного сопротивления $W_x = \rho U^2_\infty \delta^{**}(x)$ участка пластины от $x = 0$ до данного x при переходе абсциссы конца участка за абсциссу точки перехода.

Обозначая общие для обоих участков пограничного слоя в точке перехода величины соответствующих чисел Рейнольдса через Re_{xt} и Re_t^{**}, получим по (138)

$$\mathrm{Re}^{**7/6} - \mathrm{Re}_t^{**7/6} = 0{,}00765\,(\mathrm{Re}_x - \mathrm{Re}_{xt}), \tag{156}$$

причем, согласно теории ламинарного пограничного слоя на пластине, будет

$$\mathrm{Re}_t^{**} = 0{,}664\sqrt{\mathrm{Re}_{xt}}.$$

Не останавливаясь на деталях, укажем, что учет влияния величины Re_{xt} на полное сопротивление пластины приводит к переходным кривым, показанным на рис. 254 штриховыми линиями. Для потоков в аэродинамических трубах или других искусственных потоков положение и форма этих переходных кривых определяются значением параметра Re_{xt}. Значение Re_{xt} зависит от турбулентности набегающего потока, шероховатости поверхности вблизи передней кромки и других причин.

Изложенный только что эмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя относится только к пластине с *гладкой* поверхностью.

Метод был обобщен на случай *шероховатой пластины* В. Ф. Дробленковым[1]), предложившим для режима установившейся шероховатости, когда $\tau_w/\rho U_\infty^2$ не зависит от рейнольдсова числа, а только от местной относительной шероховатости δ^{**}/k, пользоваться *степенным законом сопротивления*

$$\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = 0{,}0031 \left(\frac{\delta^{**}}{k}\right)^{-1/6}. \tag{157}$$

Применяя вновь уравнение импульсов, получим уравнение

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = 0{,}0031 \left(\frac{\delta^{**}}{k}\right)^{-1/6},$$

которое, будучи проинтегрировано при граничном условии $\delta^{**}=0$ при

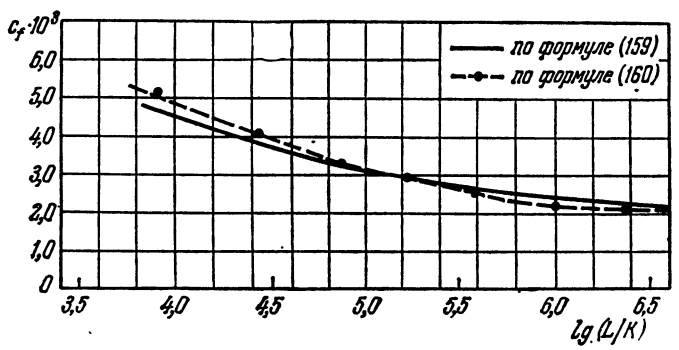


Рис. 255

$x=0$, даст формулу изменения толщины δ^{**} вдоль пластины

$$\delta^{**} = 0{,}008x \left(\frac{x}{k}\right)^{-1/7}.$$

После этого уже нетрудно по (157) найти распределение местного коэффициента трения

$$c_{f0} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 0{,}0139 \left(\frac{x}{k}\right)^{-1/7}, \tag{158}$$

а проинтегрировав по длине пластины L,— и коэффициент полного сопротивления пластины

$$C_{f0} = \frac{\int_0^L \tau_w dx}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} = 0{,}0162 \left(\frac{L}{k}\right)^{-1/7}. \tag{159}$$

[1]) Дробленков В. Ф. Турбулентный пограничный слой на шероховатой криволинейной поверхности.— Изв. АН СССР, ОТН, 1955, т. 8, с. 17—21.

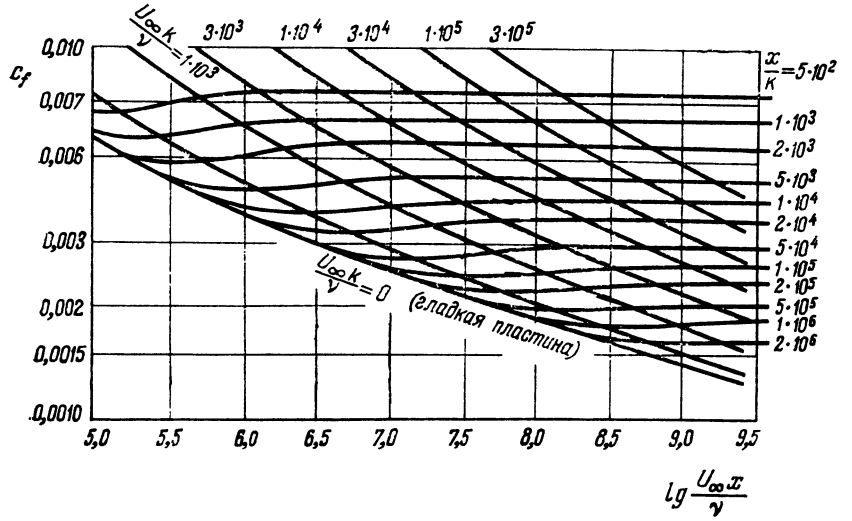


Рис. 256

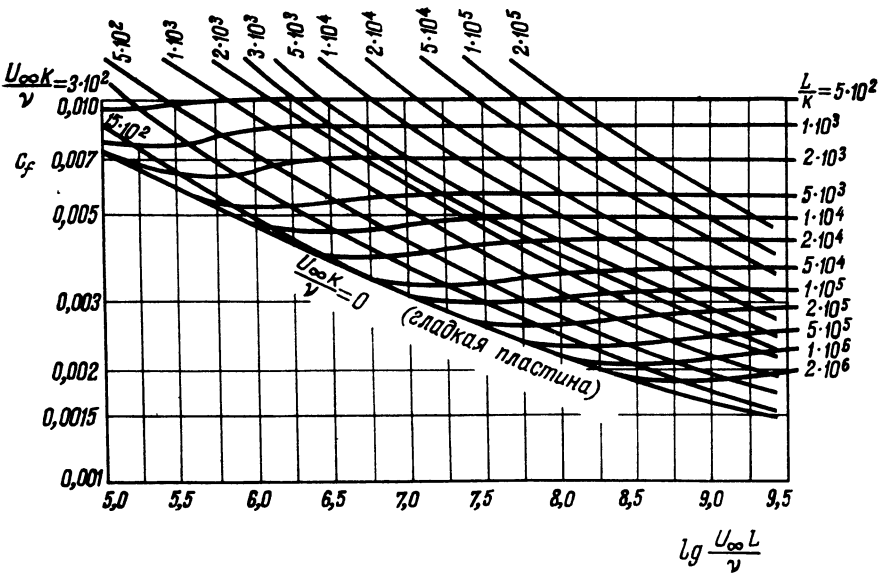


Рис. 257

На рис. 255 приведены для сравнения результаты расчета по формуле (159) и по формуле Шлихтинга [1])

$$C_{f0} = \left(1{,}89 + 1{,}62 \lg \frac{L}{k}\right)^{-2{,}5}, \qquad (160)$$

выведенной из более сложных теоретических соображений.

Не будем останавливаться на рассмотрении вопроса о расчете сопротивления пластины при промежуточном режиме течения в пограничном слое, соответствующем интервалу шероховатости $1/4 < k/\delta_в < 6$. Укажем лишь, что Прандтль и Шлихтинг подробно изучили этот вопрос и

[1]) Schlichting H. Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeitsproblem.— Ing.-Archiv, 1936, Bd. 7.

разработали общие номограммы для расчета c_{f_0} и C_{f_0} при любом режиме шероховатости[1]); приводим их на рис. 256 и 257. Пользуясь этими номограммами, можно производить разнообразные, конечно, только *оценочные* расчеты. Так, например, если задаться абсолютным размером бугорка шероховатости k, то кривые семейства $x/k=\text{const}$ на рис. 256 или $L/k=\text{const}$ на рис. 257 представят зависимости местного коэффициента сопротивления от местного или общего рейнольдсовых чисел при фиксированном x или коэффициента полного сопротивления при фиксированной длине пластины L. Кривые семейств $U_\infty k/\nu=\text{const}$ при заданной абсолютной шероховатости k позволяют определить изменение тех же коэффициентов при переменных x или L. Можно поступать и наоборот, задаваясь величиной x или L, а менять k.

Все изложенное относится, конечно, только к случаю так называемой *общей шероховатости*, одинаковой и распределенной равномерно по всей поверхности пластины. Вопрос усложняется, если шероховатость имеет характер изолированных неровностей, хотя бы и закономерно расположенных по поверхности (сварные швы, заклепки и т. п.). Исследование влияния такого типа *местных* шероховатостей, существенное для авиации, кораблестроения и других областей техники, требует специального рассмотрения[2]). К числу практически важных относится задача о *турбулентном* пограничном слое на диске или круглом цилиндре, вращающихся в безграничной или ограниченной неподвижным кожухом жидкости. Подробное рассмотрение этих задач можно найти в монографии Л. А. Дорфмана[3]).

§ 128. Эмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя с произвольным распределением скорости на внешней границе

Эмпирический метод, подобный по своей простоте изложенному в предыдущем параграфе, может быть построен и для расчета турбулентного пограничного слоя с *произвольным распределением скорости потока на внешней его границе.*

Рассмотрим один из таких методов, представляющий аналогию с однопараметрическим методом расчета ламинарного пограничного слоя[4]). Напомним, что для однопараметрического расчета ламинарного пограничного слоя были введены параметры

$$f=\frac{U'\delta^{**2}}{\nu},\quad \zeta=\frac{\tau_w\delta^{**}}{\mu U},\quad H=\frac{\delta^*}{\delta^{**}},$$

из которых первые два можно переписать в виде

$$f=\frac{U'\delta^{**}}{U}\mathrm{Re}^{**},\quad \zeta=\frac{\tau_w}{\rho U^2}\mathrm{Re}^{**},\quad \mathrm{Re}^{**}=\frac{U\delta^{**}}{\nu}.$$

Наличие в выражениях f и ζ множителя Re^{**} при безразмерных величинах $U'\delta^{**}/U$ и $\tau_w/\rho U^2$, характеризующих отнесенные к удвоенному скоростному напору продольный перепад давления на условной

[1]) Prandtl L., Schlichting H. Der Winderstandsgesetz rauher Platten.— Werft, Reederei, Hafen, 1934, Bd. 14.

[2]) Федяевский К. К. Примерный расчет интенсивности трения и «допускаемых» высот шероховатости для крыла — Труды ЦАГИ, 1936, № 250; Федяевский К. К., Фомина Н. Н. Исследование влияния шероховатости на сопротивление и состояние пограничного слоя.— Труды ЦАГИ, 1939, № 441.

[3]) Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел.— М.: Физматгиз, 1960, с. 68—92, 135—160, 193—206.

[4]) Лойцянский Л. Г. Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя на профиле крыла.— Прикл. мат. и мех., 1945, т. 9, с. 433—448.

толщине δ^{**} пограничного слоя

$$-\delta^{**}\frac{dp/dx}{\rho U^2}=-\delta^{**}\frac{-\rho UU'}{\rho U^2}=\frac{U'\delta^{**}}{U}$$

и напряжения трения на твердой стенке τ_w, приводит к тому, что в ламинарном пограничном слое функциональные зависимости $\zeta(f)$ и $H(f)$ сохраняют свой вид при любых рейнольдсовых числах пограничного слоя. В случае турбулентного пограничного слоя разыскать для величин $U'\delta^{**}/U$ и $\tau_w/\rho U^2$ такой общий множитель $G(\mathrm{Re}^{**})$, чтобы подобно ламинарному пограничному слою величины

$$f=\frac{U'\delta^{**}}{U}G(\mathrm{Re}^{**}),\quad \zeta=\frac{\tau_w}{\rho U^2}G(\mathrm{Re}^{**}), \tag{161}$$

представляющие собой естественное обобщение параметров Бури[1]), оказались связанными зависимостью

$$\zeta=\zeta(f), \tag{162}$$

не содержащей рейнольдсова числа, строго говоря, нельзя. Однако, судя по имеющимся опытным материалам, выбор величины $G(\mathrm{Re}^{**})$ может быть произведен так, чтобы влияние рейнольдсова числа на зависимость (162) было сравнительно невелико. Слабую функцию рейнольдсова числа представляет также и отношение $\delta^*/\delta^{**}=H$. Так, по опытам Ф. Хама[2]) для гладких и шероховатых *пластин* справедливо общее соотношение

$$H_0=\left(1-6{,}8\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right)^{-1}, \tag{163}$$

которое в случае *гладкой* пластины при использовании формулы сопротивления (152) дает

$$H_0=(1-0{,}78\,\mathrm{Re}_x^{-1/14})^{-1}.$$

Показатель степени при Re_x говорит о том, что H_0 является *слабой* функцией Re_x. Действительно, величина H_0 при переходе от $\mathrm{Re}_x=10^6$ к $\mathrm{Re}_x=10^7$ уменьшается от 1,41 до 1,33, т. е. примерно на 6%. На *шероховатой* пластине роль рейнольдсова числа еще меньше, а в случае технической шероховатости вообще отсутствует. Принимая во внимание эту слабую изменяемость величины H_0 с ростом рейнольдсова числа на пластине ($dp/dx=0$), будем либо считать в дальнейшем величину H не зависящей от Re_x и полагать

$$H=H(f),$$

либо учитывать влияние рейнольдсова числа по формулам для пластины.

Не ограничивая себя заранее видом функции $G(\mathrm{Re}^{**})$ и приняв определенную первым из равенств (161) величину f за формпараметр, выведем из интегрального соотношения (144) уравнение для определения формпараметра f. С этой целью умножим обе части (144) на $G(\mathrm{Re}^{**})$; тогда по (161) получим

$$G(\mathrm{Re}^{**})\frac{d\delta^{**}}{dx}+(2+H)f=\zeta. \tag{164}$$

Первое слагаемое в левой части можно преобразовать так (штрих —

[1]) Buri A. Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung.— Zürich: Dissertation, 1931; см также Nikuradse J. Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen.— VDI Forschungsheft, 1929, № 289.

[2]) Hama F. R. Boundary layer characteristics for smooth and rough surfaces.— Trans. Soc. Nav. Architects Marine Engrs., 1954, v. 62, p. 333—358.

производная по x):

$$G(\mathrm{Re}^{**})\frac{d\delta^{**}}{dx}=\frac{d}{dx}\left[G(\mathrm{Re}^{**})\frac{U'\delta^{**}}{U}\frac{U}{U'}\right]-\delta^{**}\frac{dG}{d\,\mathrm{Re}^{**}}\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{dx}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(f\frac{U}{U'}\right)-\delta^{**}\frac{dG}{d\,\mathrm{Re}^{**}}\left(\frac{U}{\nu}\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{U'\delta^{**}}{\nu}\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(f\frac{U}{U'}\right)-\mathrm{Re}^{**}\frac{dG}{d\,\mathrm{Re}^{**}}\frac{d\delta^{**}}{dx}-\mathrm{Re}^{**}\frac{dG/d\,\mathrm{Re}^{**}}{G(\mathrm{Re}^{**})}f=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(f\frac{U}{U'}\right)-\frac{\mathrm{Re}^{**}dG/d\,\mathrm{Re}^{**}}{G(\mathrm{Re}^{**})}G(\mathrm{Re}^{**})\frac{d\delta^{**}}{dx}-\frac{\mathrm{Re}^{**}dG/d\,\mathrm{Re}^{**}}{G(\mathrm{Re}^{**})}f.$$

Вводя величину

$$m=\frac{\mathrm{Re}^{**}dG/d\,\mathrm{Re}^{**}}{G(\mathrm{Re}^{**})}=\frac{d\lg G(\mathrm{Re}^{**})}{d\lg\mathrm{Re}^{**}}, \tag{165}$$

по самой своей структуре слабо зависящую от Re^{**}, найдем из предыдущего уравнения

$$(1+m)G(\mathrm{Re}^{**})\frac{d\delta^{**}}{dx}=\frac{d}{dx}\left(f\frac{U}{U'}\right)-mf.$$

Пользуясь равенством (164), исключим отсюда величину $G(\mathrm{Re}^{**})\frac{d\delta^{**}}{dx}$; тогда получим

$$\frac{d}{dx}\left(f\frac{U}{U'}\right)=(1+m)\zeta-[2+m+(1+m)H]f$$

или, после раскрытия производной в левой части,

$$\frac{df}{dx}=\frac{U'}{U}F(f)+\frac{U''}{U'}f, \tag{166}$$

где для краткости принято обозначение

$$F(f)=(1+m)\zeta-[3+m+(1+m)H]f. \tag{167}$$

Уравнение (166) по форме ничем не отличается от своего ламинарного аналога (111) гл. XII, которое являлось основным для расчета ламинарного пограничного слоя. Различие заключается лишь в виде функциональной зависимости $F(f)$, представленной равенством (113) гл. XII для ламинарного слоя и равенством (167) настоящей главы для турбулентного слоя. Если в (167) положить $m=1$, что соответствует ламинарному слою, то правые части (167) и (113) гл. XII совпадут.

Функцию $G(\mathrm{Re}^{**})$ для области, удаленной от точки отрыва, определим, сообразуясь с тем, что множитель Re^{**}, обеспечивавший параметру ζ в случае ламинарного слоя независимость от рейнольдсова числа, оставался *одним и тем же при наличии и отсутствии продольного изменения давления в слое.* Допустим, что в рассматриваемой сейчас области это свойство сохраняется и в случае турбулентного слоя. Примем величину универсализирующего множителя $G(\mathrm{Re}^{**})$ обратно пропорциональной местному коэффициенту сопротивления трения пластины ($U'=0$), положив (∞ — знак пропорциональности)

$$G(\mathrm{Re}^{**})\infty\frac{2}{c_{f_0}}. \tag{168}$$

Легко видеть, что численное значение коэффициента пропорциональности здесь несущественно, так как изменение этого коэффициента вызовет пропорциональное изменение ζ и f, но не повлияет на m, и следовательно, приведет к такому же изменению $F(f)$, а при этом вид уравнения (166) не нарушится.

Положим, следуя (168) и (145),

$$G(\mathrm{Re}^{**}) = 153{,}2\,\mathrm{Re}^{**1/6}; \tag{169}$$

тогда по (165) найдем $m=1/6$, и функция $F(f)$ будет равна

$$F(f) = \frac{7}{6}\zeta - \left(\frac{19}{6} + \frac{7}{6}H\right)f. \tag{170}$$

Линеаризуем функцию $F(f)$, положив, как на пластине

$$\zeta = (\zeta)_{f=0} = 1, \quad H = H_0 = 1{,}3—1{,}4.$$

Принимая эти значения ζ и H, найдем для $F(f)$ линейное представление

$$F(f) = a—bf, \tag{171}$$

аналогичное представлению (115) гл. XII, но в случае турбулентного слоя с постоянными a и b, равными

$$a = 1{,}17, \quad b = 4{,}7—4{,}8. \tag{172}$$

Уравнение (166) допускает при этом решение в виде простой квадратуры

$$f(x) = \frac{U'(x)}{U^b(x)}\left[a\int_0^x U^{b-1}(\xi)\,d\xi + C\right].$$

Если принять ламинарный участок на поверхности крылового профиля отсутствующим, то будем иметь

$$f(x) = \frac{aU'(x)}{U^b(x)}\int_0^x U^{b-1}(\xi)\,d\xi, \tag{173}$$

причем, так же как и в ламинарном слое, точка разветвления потока ($x=0$) является *особой*. Раскрывая неопределенность, найдем

$$f(0) = aU'(0)\frac{U^{b-1}(0)}{bU^{b-1}(0)\,U'(0)} = \frac{a}{b} = 0{,}24.$$

Если учитывать наличие ламинарного участка в интервале абсцисс ($0<x<x_t$), то выражение для f несколько усложнится и примет вид

$$f(x) = \frac{U'(x)}{U^b(x)}\left[a\int_{x_t}^x U^{b-1}(\xi)\,d\xi + \frac{U_t^b}{U_t'}f_t\right].$$

Здесь U_t, U_t' и f_t представляют собой значения U, U' и f в точке перехода $x=x_t$, причем f_t вычисляется по первой из формул (161)

$$f_t = \frac{U_t'\delta_t^{**}}{U_t}G(\mathrm{Re}_t^{**}) = \frac{\nu U_t'}{U_t^2}\mathrm{Re}_t^{**}G(\mathrm{Re}_t^{**}).$$

Окончательно будем иметь

$$f(x) = \frac{U'(x)}{U^b(x)}\left[a\int_{x_t}^x U^{b-1}(\xi)\,d\xi + \nu U_t^{b-2}\mathrm{Re}_t^{**}G(\mathrm{Re}_t^{**})\right]. \tag{174}$$

Согласно принятому уже ранее для пластины условию смыкания ламинарного и турбулентного пограничных слоев величина Re_t^{**} должна быть рассчитана по теории ламинарного пограничного слоя.

Пользуясь формулами (173) или (174), найдем $f(x)$, после чего, согласно первому равенству системы (161), получим уравнение для определения $\mathrm{Re}^{**}(x)$:

$$\mathrm{Re}^{**}G(\mathrm{Re}^{**}) = \frac{U^2}{\nu U'} f(x).$$

Так, например, для полностью турбулентного пограничного слоя на всей поверхности профиля будем иметь по (173)

$$\mathrm{Re}^{**}G(\mathrm{Re}^{**}) = 153{,}2\mathrm{Re}^{**7/6} = \frac{a}{\nu U^{b-2}(x)} \int_0^x U^{b-1}(\xi)\, d\xi. \qquad (175)$$

Выполнив квадратуру, определим $\mathrm{Re}^{**}(x)$, а следовательно, и $\delta^{**}(x)$, после чего в принятом приближении ($\zeta = 1$), согласно второму равенству системы (161), найдем формулу для местного коэффициента трения

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2}{G(\mathrm{Re}^{**})} = 0{,}0131\,\mathrm{Re}^{**-1/6}, \qquad (176)$$

аналогичную формуле для пластины, но при Re^{**}, рассчитанном для заданного распределения скорости внешнего потока $U(x)$.

Определив таким образом τ_w или c_f в функции от x и просуммировав по поверхности крыла проекции элементарных сил трения $\tau_w dx$ на направление набегающего потока, определим полное сопротивление трения крыла.

Для дальнейшего может представить еще интерес определение толщины вытеснения $\delta^*(x)$. В принятом приближении эта величина равна

$$\delta^*(x) = H_0\delta^{**}(x) = (1{,}3—1{,}4)\,\delta^{**}(x); \qquad (177)$$

числа, стоящие в скобках, показывают границы значений H_0 при различных значениях рейнольдсова числа натекания: первое соответствует высшим значениям, второе — низшим.

Каким бы приближенным ни был изложенный выше эмпирический подход, во многом опирающийся на аналогию с задачей о турбулентном пограничном слое на пластине, т. е. на случай *постоянства* скорости на внешней границе пограничного слоя, все же результаты расчета по этому методу величины $\delta^{**}(x)$, а следовательно, и $\mathrm{Re}^{**}(x)$ не уступают по точности другим, *более совершенным методам*[1]). Что же касается величины c_f, то, если оставаться в рамках только что изложенного метода, ее можно определять по формуле Людвига — Тиллмана (146), задаваясь при этом значениями $H = H_0$ по предыдущему параграфу или пользуясь более сложными эмпирическими методами, например методом Трукенбродта, изложенным в монографии Шлихтинга[2]), а также более современными методами, о которых пойдет речь в следующей главе.

Эмпирические методы, как это станет ясным из последующего, далеко еще себя не исчерпали и смогут в будущем сохранить свое значение, особенно в связи, с одной стороны, со значительным развитием эксперимента и накоплением новых опытных данных, а с другой — с использованием неограниченных возможностей машинного счета. Следует еще принять во внимание, что более совершенные методы могут оттолкнуть практика своей сложностью и малой наглядностью.

[1]) Указание на это можно найти на с. 119 монографии: Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.— Л.: Судостроение, 1973.

[2]) Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1969, с. 624—638.

В совершенствовании эмпирических методов заметную роль могла бы сыграть статистическая обработка накопленных опытных данных по течениям в турбулентных пограничных слоях. Подобное исследование было выполнено в конце шестидесятых годов А. И. Каменецким[1]), предложившим следующие эмпирические формулы зависимости основных характеристик турбулентного пограничного слоя от параметра f:

$$\zeta = \frac{c_f}{c_{f_0}} = 1 + 0{,}1367f + 0{,}015f^2 + 0{,}00333f^3,$$
$$H = H_0 - 0{,}0701f + 0{,}02913f^2 + 0{,}01083f^3 + 0{,}001606f^4, \qquad (178)$$
$$F = F_0 - 4{,}694f + 0{,}0238f^2 - 0{,}0246f^3.$$

Представляется весьма перспективным дальнейшее развитие указанного подхода на основе использования новых экспериментальных материалов[2]).

Существующие эмпирические методы дают особенно заметную погрешность в диффузорной области пограничного слоя ($dp/dx>0$, $dU/dx<0$) при приближении к точке отрыва. Здесь с особой силой проявляется влияние принятых допущений о близости характеристик турбулентного слоя с произвольным распределением давления к их значениям в пограничном слое на пластине в продольном потоке ($dp/dx=0$, $dU/dx=0$). Отметим, что *расчет турбулентного пограничного слоя вблизи точки отрыва до сих пор является слабым местом* во всех, даже современных теориях.

Область *отрыва* характеризуется развитой внешней частью, профиль скоростей в которой может быть уподоблен профилю в аэродинамическом следе за телом или на границе струи. Вблизи точки отрыва и за нею в сорвавшейся струе влияние рейнольдсова числа становится пренебрежимо малым. Это допускает простое решение, служащее для определения δ^{**} — толщины потери импульса. Примем по условию независимости от рейнольдсова числа во всей предотрывной области $m=0$, следовательно,

$$G(\mathrm{Re}^{**}) = \mathrm{const} = G_s$$

и, кроме того,

$$\zeta = 0, \quad H = H_s.$$

Тогда, согласно (166), придем к уравнению

$$\frac{df}{dx} = \left[\frac{U''}{U'} - (3 + H_s)\frac{U'}{U}\right] f, \qquad (179)$$

интегралом которого будет

$$f = C\frac{U'}{U^{3+H_s}}.$$

Если предположить, что в предыдущей области, граница которой со второй, предотрывной, областью характеризуется величиной f_1, расчет был произведен по ранее изложенному методу, то, сращивая решения при $f=f_1$, определим постоянную интегрирования C как

$$C = \frac{U_1^{3+H_s} f_1}{U_1'}$$

---

[1]) Каменецкий А. И. Новый эмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Труды ЛПИ, 1970, № 313, с. 62—67.

[2]) Computation of turbulent boundary layer, 1968.— Proceedings AFOSR—JFR—Stanford Conference (Ed. Coles D. E., Hirst E. A.), 1969, v. 2.

и получим следующее уравнение для расчета f или $\bar{f}=f/f_*$ вблизи отрыва:

$$\frac{f}{f_1}=\frac{\bar{f}}{\bar{f}_1}=\frac{U'}{U_1'}\left(\frac{U_1}{U}\right)^{3+H_s}. \tag{180}$$

Замечая, что вблизи отрыва будет справедливо соотношение

$$f=\frac{U'\delta^{**}}{U}G_s,$$

найдем соответствующее (180) выражение для отношения толщин потери импульса в отрывной области

$$\frac{\delta^{**}}{\delta_1^{**}}=\left(\frac{U_1}{U}\right)^{2+H_s}. \tag{181}$$

Исходя из других теоретических соображений и использовав эмпирические данные, Росс и Робертсон[1]) предложили формулу

$$\frac{\delta^{**}}{\delta_1^{**}}=\left(\frac{U_1}{U}\right)^{4,8}, \tag{182}$$

аналогичную (181) при $H_s=2{,}8$. Следует заметить, что выбор числа $H_s=2{,}8$ не противоречит экспериментальным данным для значения H_s в точке отрыва. Исходя из соображений размерности и некоторых общих для теории пограничного слоя допущений, к тому же результату пришел Г. М. Бам-Зеликович[2]).

Обобщение только что изложенного эмпирического приема на случай шероховатой поверхности было выполнено В. Ф. Дробленковым[3]).

§ 129. Полуэмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине

Переходя от эмпирических методов к *полуэмпирическим*, основанным на использовании полуэмпирических теорий Прандтля и Кармана, укажем, что создатели этих теорий сразу же применили их к расчету турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине[4]). Остановимся на теории Кармана, которую изложим, полностью сохраняя идею вывода и лишь изменяя несколько его математическую сторону[5]). Положив в основу интегральное соотношение импульсов (147) и выражая толщину потери импульса δ^{**} в *универсальных* переменных ($\varphi=u/v_*$, $\eta=yv_*/\nu$, $h=U_\infty/v_*$):

$$\delta^{**}=\int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy=\frac{\nu h}{U_\infty}\int_0^\infty \frac{\varphi}{h}\left(1-\frac{\varphi}{h}\right)d\eta, \tag{183}$$

перейдем от независимой переменной η к независимой переменной φ/h, получив в результате следующее выражение для δ^{**} (точка над

[1]) Ross D., Robertson I. An empirical method for calculation of the growth of a turbulent boundary layer — Journ. Aeron. Sci., 1954, v. 21, № 5, p. 355—358.

[2]) Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя.— Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.

[3]) Дробленков В. Ф. Турбулентный пограничный слой на шероховатой криволинейной поверхности.— Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 8.

[4]) Сводное изложение этих методов расчета можно найти в монографии: Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. Л.; М.: 1941, с. 310—313 и 335—338.

[5]) Лапин Ю. В., Лойцянский Л. Г. Применение метода Кармана к расчету турбулентного пограничного слоя на пластине в газовом потоке.— Труды ЛПИ, 1961 № 217.

буквой — производная по φ):

$$\delta^{**}=\frac{\nu h^2}{U_\infty}\int_0^1\frac{\varphi}{h}\left(1-\frac{\varphi}{h}\right)\dot{\eta}d\left(\frac{\varphi}{h}\right). \tag{184}$$

Величина $\dot{\eta}=d\eta/d\varphi$ в вязком подслое равна единице. В турбулентном ядре для определения η используем соотношение Кармана [вторая формула в равенствах (73)] (штрих означает производную по y)

$$\tau=\frac{\rho\varkappa^2u'^4}{u''^2};$$

$\varkappa$ — константа турбулентности, равная 0,4.

Принимая допущение о *постоянстве напряжения трения поперек слоя* $\tau=\tau_w$ и переходя к универсальным координатам, получим (штрих теперь означает производную по η)

$$\frac{\varphi''}{\varphi'^2}=-\varkappa. \tag{185}$$

Знак минус появляется после извлечения корня в связи с тем, что $\varphi''<0$. В равенстве (185) поменяем местами аргумент и функцию; тогда получим уравнение $\ddot{\eta}/\dot{\eta}=\varkappa$, из которого следует, что

$$\dot{\eta}=Ce^{\varkappa\varphi}. \tag{186}$$

Если обозначить через f значение производной $d\varphi/d\eta$ на границе вязкого подслоя $\eta=\eta_в=\alpha$ (120), то равенство (186) примет вид

$$\dot{\eta}=\frac{e^{-\varkappa\alpha}}{f}e^{\varkappa\varphi}, \tag{187}$$

где α — константа турбулентности, равная 11,5.

Возвращаясь к равенству (184), заметим, что, строго говоря, интеграл в правой части этого равенства следовало бы разбить на два участка: $0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$ и $\alpha\leqslant\varphi\leqslant h$, и в каждом из них подставить свое значение $\dot{\eta}$. Однако ввиду относительной тонкости вязкого подслоя, мало влияющего на значения интеграла (184), можно опустить первый участок, продолжив второй до стенки. Как показывают вычисления, при больших h заметной разницы в значениях интеграла не получается.

Таким образом, исключая $\dot{\eta}$ из равенств (184) и (187), получим следующее выражение для толщины потери импульса:

$$\delta^{**}=\frac{\nu h^2e^{-\varkappa\alpha}}{fU_\infty}\int_0^1\bar{u}(1-\bar{u})\,e^{\varkappa h\bar{u}}d\bar{u}, \tag{188}$$

где $\bar{u}=\varphi/h=u/U_\infty$.

Величина $\varkappa h$, как это видно из ее определения, заметно превосходит единицу. В таких случаях удобно пользоваться следующим общим представлением интеграла, содержащего показательную функцию

$$\int e^{\varkappa h\psi}f(\psi)\,d\psi=\frac{e^{\varkappa h\psi}}{\varkappa h}\left[f(\psi)-\frac{f'(\psi)}{\varkappa h}+\frac{f''(\psi)}{\varkappa^2h^2}-\ldots\right], \tag{189}$$

легко выводимым интегрированием по частям. В том случае, когда ряд в квадратных скобках не обрывается, эту форму можно рассматривать как ряд, выражающий значение интеграла при больших $\varkappa h$.

Выполняя в (188) интегрирование с помощью ряда (189), получим выражение для *толщины потери импульса*

$$\delta^{**} \approx \frac{\nu e^{-\varkappa\alpha}}{f\varkappa^2 U_\infty} e^{\varkappa h}\left(1-\frac{2}{\varkappa h}\right). \tag{190}$$

Найдем еще выражение для формпараметра $H=\delta^*/\delta^{**}$. Способом, аналогичным показанному выше, можно найти следующее выражение для *толщины вытеснения*:

$$\delta^* \approx \frac{\nu e^{-\varkappa\alpha}}{f\varkappa^2 U_\infty} e^{\varkappa h}.$$

Составляя отношение δ^*/δ^{**}, получим выражение для H

$$H \approx \frac{1}{1-2/(\varkappa h)} = \left(1-5\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right)^{-1},$$

которое при числах Рейнольдса 10^6—10^7 дает значение $H=1{,}3$, хорошо согласующееся с опытом.

Возвращаясь к выражению (190), заметим, что при вычислении толщины потери импульса можно пренебречь вторым слагаемым в скобках по сравнению с первым. Как показали расчеты, при больших значениях $\varkappa h$ ошибка, получающаяся в вычислении коэффициента трения при таком приближении, является незначительной.

Приняв для толщины потери импульса такое приближение, подставим ее выражение в интегральное соотношение импульса. После простых преобразований получим следующее уравнение:

$$\frac{e^{-\varkappa\alpha}}{f\varkappa^2} h^2 d\left(e^{\varkappa h}\right) = d\,\mathrm{Re}_x; \quad \mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}.$$

Беря интеграл от обеих частей этого уравнения и используя граничное условие $\mathrm{Re}_x=0$ при $v.=\infty$, т. е. $h=0$, будем иметь в том же приближении

$$\frac{e^{-\varkappa\alpha}}{f\varkappa^2} h^2 e^{\varkappa h} = \mathrm{Re}_x.$$

Логарифмируя обе части этого равенства и возвращаясь от переменной h к c_f по равенству $h=\sqrt{2/c_f}$, получим формулу Кармана

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = A + B\lg\left(\mathrm{Re}_x c_f\right), \tag{191}$$

где A и B выражаются через постоянные $\varkappa$ и α. С опытными данными лучше совпадают близкие к ним значения: $A=1{,}7$; $B=4{,}15$.

Полуэмпирическая формула Кармана представляет *неявную* зависимость между местным коэффициентом сопротивления c_f и рейнольдсовым числом Re_x. Для коэффициента полного сопротивления трения пластины длины L уже была ранее указана также логарифмическая формула Прандтля—Шлихтинга (154).

§ 130. Интегральные методы расчета турбулентных пограничных слоев

Среди далее излагаемых полуэмпирических методов расчета турбулентных пограничных слоев видную роль в свое время сыграли *интегральные* полуэмпирические методы, основанные на применении теории пути смешения Прандтля.

Остановимся коротко на основных приемах интегральных методов, отсылая за подробностями к тщательно составленной монографии[1]), в первой своей части посвященной подробному изложению интегральных методов.

В первоначальной форме идея интегрального метода заключалась в определении профилей скорости в сечениях турбулентного пограничного слоя путем задания *полиномиальных приближений* напряжения турбулентного трения τ и пути смешения l в легко выводимой из закона Прандтля формуле

$$U-u=\int_y^\delta \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\frac{dy}{l}. \tag{192}$$

Исходя из аналогии с методом Польгаузена, задававшего профили скоростей в сечениях ламинарного пограничного слоя полиномом четвертой степени [(117) гл. XII], удовлетворявшим граничным условиям (118) той же главы, в интегральном методе расчета турбулентного пограничного слоя используют аналогичные полиномиальные приближения для напряжения трения

$$\frac{\tau}{\tau_w}=\sum_{i=0}^{n} a_i\eta^i, \quad \eta=\frac{y}{\delta}, \tag{193}$$

где δ — конечная толщина пограничного слоя, либо более удобным для вычислений полиномиальным представлением

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_w}}=\sum_{i=0}^{n} b_i\eta^i. \tag{194}$$

Коэффициенты a_i и b_i в этих формулах выбираются из соответствующих граничных условий, примерами которых могут служить следующие:

$$\begin{aligned}&\frac{\tau}{\tau_w}=1,\ \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)=\beta,\ \frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)=0 \quad \text{при } \eta=0,\\ &\frac{\tau}{\tau_w}=0,\ \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)=0 \qquad\qquad\qquad \text{при } \eta=1,\end{aligned} \tag{195}$$

где β — параметр, равный

$$\beta=\frac{\delta}{\tau_w}\frac{dp}{dx}. \tag{196}$$

Первые условия в обеих строках очевидны, второе в первой строке следует из уравнений пограничного слоя, третье в первой строке выводится дифференцированием обеих частей уравнения пограничного слоя по η при учете уравнения неразрывности, последнее условие во второй строке является дополнительным, требующим *гладкости* перехода τ/τ_w к нулевому значению на внешней границе пограничного слоя.

При использовании пяти граничных условий (195) получим профиль напряжения турбулентного трения соответственно в виде полинома четвертой степени

$$\frac{\tau}{\tau_w}=1-4\eta^3+3\eta^4+\beta\eta(1-3\eta^2+2\eta^3). \tag{197}$$

---

[1]) Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.— Л.: Судостроение, 1973, гл. I и II.

Принимая два условия при $\eta=0$ и одно при $\eta=1$, будем иметь

$$\frac{\tau}{\tau_w}=1-\eta^2+\beta\eta(1-\eta) \quad (-2<\beta\leqslant\infty). \tag{198}$$

Многие другие профили τ, в том числе двух- и трехпараметрические, приведены в цитированной монографии К. К. Федяевского, А. С. Гиневского и А. В. Колесникова.

Путь смешения l также представляется различными приближенными выражениями, из которых отметим следующие:

а) по Прандтлю:

$$l=\varkappa y \quad \text{и} \quad \frac{l}{\delta}=0{,}14-0{,}08\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2-0{,}06\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^4;$$

б) по С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьеву:

$$\frac{l}{\delta}=\frac{\varkappa y}{\delta}-(2\varkappa-3\gamma)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2+(\varkappa-2\gamma)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3, \quad \varkappa=0{,}39, \quad \gamma=0{,}14;$$

в) по работам Стэнфордской конференции (см. сделанную ранее сноску):

$$\frac{l}{\delta}=\left(\frac{l_\delta}{l}\right)\operatorname{th}\left[\frac{\varkappa\,(y/\delta)}{l_\delta/l}\right], \quad \varkappa=0{,}41, \quad \frac{l_\delta}{l}=0{,}085;$$

г) по Чи и Чангу:

$$\frac{l}{\delta}=0{,}4\,\frac{y}{\delta}-0{,}5\left(\frac{y}{\delta}\right)^2+0{,}2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3;$$

д) по Эскудье и Сполдингу:

$$\frac{l}{\delta}=\frac{\varkappa y}{\delta}\quad\left[0\leqslant\frac{y}{\delta}\leqslant\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\frac{l_\delta}{\delta}\right], \quad \frac{l}{\delta}=\frac{l_\delta}{\delta}\quad\left[\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\left(\frac{l_\delta}{l}\right)\leqslant 1\right].$$

Библиографические ссылки см. в цитированной на с. 682 монографии.

В выборе профилей τ и l для сечений пограничного слоя заключается некоторый произвол, смягчаемый иногда дополнительными интуитивными соображениями.

Задавшись распределениями τ/τ_w и l/δ, подставляют их в основное уравнение Прандтля (192); после выполнения интегрирования получают распределение скоростей u/U в функции от y/δ и параметра β, после чего находят δ^*, δ^{**} и H как функции β. Разыскание $\beta(x)$ представляет собой последний этап, в котором для этой цели используют интегральное соотношение Кармана (144). В том случае, когда для отношения τ/τ_w выбирают многопараметрические представления, приходится наряду с (144) применять следующие за ним интегральные соотношения (энергии и другие). Вот почему изложенный только что интегральный метод называют «методом интегральных соотношений».

Удовольствуемся этим кратким обзором, отсылая за деталями и примерами к цитированной монографии, в которой интегральному методу уделено значительное место.

§ 131. Сопротивление тела, движущегося в жидкости. Профильное сопротивление. Сопротивление трения. Сопротивление давления

Расчет турбулентного пограничного слоя лежит в основе определения сопротивления тела при его движении в вязкой жидкости. Примем следующую терминологию. *Полное сопротивление* — его называют еще

лобовым — складывается из *профильного* сопротивления, в свою очередь состоящего из *сопротивления трения* и *сопротивления давления*, и *индуктивного* сопротивления. Последний вид сопротивления обусловлен *конечностью размаха* тела (неплоским характером обтекания), вследствие чего местная подъемная сила может давать отличную от нуля проекцию на направление общего набегающего потока (§ 78). Индуктивное сопротивление по самой своей природе отличается от первых двух составляющих и рассматриваться здесь не будет.

Сопротивление трения определяется как проекция на направление движения главного вектора касательных сил, приложенных со стороны жидкости к поверхности тела, а *сопротивление давления* соответственно аналогичной проекцией главного вектора *нормальных* сил.

Остановимся подробнее на этой *второй* составляющей профильного сопротивления. Согласно общему для ламинарного и турбулентного пограничных слоев представлению, вне области пограничного слоя поток может рассматриваться как движущаяся *безвихревым* образом идеальная, т. е. лишенная вязкого трения, жидкость. При достаточной тонкости пограничного слоя и известном его свойстве передавать по сечениям слоя на поверхность тела давление внешнего по отношению к пограничному слою потока главный вектор нормальных сил, согласно парадоксу Даламбера (§ 73), равен нулю, а следовательно, и сопротивление давления не должно отличаться от нуля. Это было бы близко к действительности, если бы пограничный слой не возмущал внешний безвихревой поток. На самом же деле линии тока вследствие подтормаживающего влияния стенки оттесняются от поверхности крыла; такое искажение картины течения приводит к нарушению идеального распределения давлений по поверхности крыла.

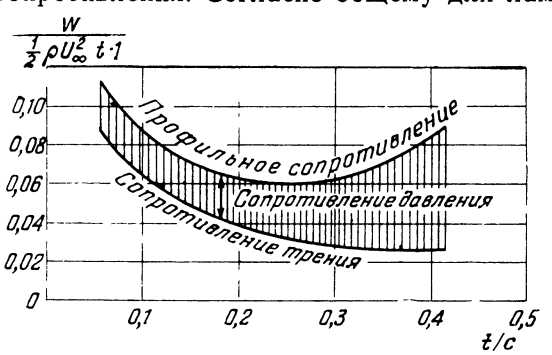


Рис. 258

Пограничный слой не только управляется внешним потоком, но и оказывает на него *обратное влияние*. Строго говоря, даже нельзя задавать наперед распределение давлений или скоростей во внешнем потоке, так как это распределение в свою очередь зависит от развития пограничного слоя, а следовательно, является функцией рейнольдсова числа, шероховатости поверхности и других факторов; однако практически, если тело обтекается без срывов и рейнольдсовы числа достаточно велики, то пренебрежение обратным влиянием пограничного слоя на распределение давлений и скоростей во внешнем потоке оказывается допустимым. Обратное влияние пограничного слоя на внешнее обтекание проявляется особенно сильно на участках пограничного слоя, где слой наиболее толст, как, например, вблизи точки отрыва.

На рис. 258 показаны для сравнения кривые зависимости коэффициентов профильного сопротивления и сопротивления трения серии симметричных профилей Жуковского от относительной их толщины. На диаграмме сила сопротивления отнесена к миделевому сечению крыла, а не к площади в плане; этим объясняется, почему при уменьшении относительной толщины коэффициенты профильного сопротивления и сопротивления трения возрастают. Показанная вертикальными штрихами разность между коэффициентами профильного сопротивления и сопротивления трения определяет коэффициент сопротивления давлений. Рас-

смотрение диаграммы, составленной при фиксированном числе Рейнольдса ($U_\infty c/\nu = 4 \cdot 10^5$), приводит к отчетливому выводу о росте роли сопротивления давления с увеличением относительной толщины профиля и, наоборот, о повышении значения сопротивления трения при переходе к тонким профилям [1]).

Как показывают опыты, сопротивление давления *хорошо обтекаемого* крылового профиля при наличии на его поверхности полностью ламинарного или полностью турбулентного пограничного слоя убывает с ростом рейнольдсова числа, что и естественно, так как при возрастании рейнольдсова числа толщина пограничного слоя уменьшается и внешний поток приближается к безвихревому обтеканию профиля идеальной жидкостью.

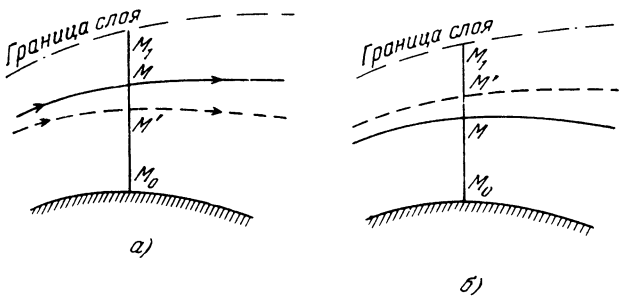


Рис. 259

Чтобы разобраться в причинах искажения теоретического распределения давлений в безвихревом обтекании крылового профиля идеальной жидкостью, сравним какую-нибудь действительную линию тока (рис. 259, *а*, сплошная линия), приходящую в точку M данного сечения M_0M_1 пограничного слоя, и показанную на рис. 259, *а* штрихами линию тока безвихревого потока идеальной жидкости, совпадающую с предыдущей в удалении впереди тела. Отрезок MM' представляет *смещение действительной линии тока по отношению к идеальной.* Из условия одинаковости объемного расхода жидкости в сравниваемых движениях сквозь сечения $M_0M = y$ и $M_0M' = y - MM'$, являющегося следствием совпадения обеих линий тока вдалеке от тела вверх по потоку, заключим, что (через U обозначена продольная скорость на внешней границе слоя)

$$\int_0^y u\,dy = U(y - MM').$$

При составлении правой части этого равенства принято во внимание, что на протяжении малой толщины слоя скорость в безвихревом потоке идеальной жидкости может быть принята постоянной и равной U. Согласно последнему равенству отмеченное смещение линии тока в точке M с координатой y будет равно

$$MM' = \int_0^y \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy.$$

На поверхности обтекаемого тела ($y = 0$) смещение линии тока исчезает; у обоих сравниваемых потоков, действительного и идеального, общая нулевая линия тока совпадает с поверхностью крыла. При удалении

[1]) Подробнее см. в кн.: Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Т. II/Под ред. С. Голдстейна.— М.: ИЛ, 1948, с. 78—85.

от поверхности крыла смещения действительных линий тока по отношению к идеальным возрастают. Наконец, на границе пограничного слоя ($y=\delta$) величина смещения достигает своего максимального значения[1])

$$(MM')_{y=\delta} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta^*.$$

Итак, *смещение действительной линии тока относительно линии тока безвихревого обтекания тела идеальной жидкостью на внешней границе пограничного слоя равно толщине вытеснения* δ^*.

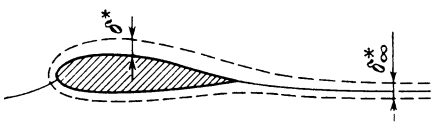


Рис. 260

Докажем, что *действительное распределение давления по поверхности крылового профиля при плоском его обтекании вязкой жидкостью совпадает с распределением давления при безвихревом обтекании идеальной жидкостью полутела* (рис. 260), *образованного наращиванием на профиль крыла и по обе стороны от нулевой линии тока в его следе толщины вытеснения, рассчитанной по действительному распределению давления; контур этого полутела назовем «эффективным».*

Предположим, что задано плоское обтекание крылового профиля реальной (вязкой) жидкостью, сопровождаемое образованием на теле пограничного слоя, а за телом — аэродинамического следа. Наряду с этим *действительным* потоком в пограничном слое рассмотрим в той же области *воображаемый потенциальный поток*, который являлся бы *непрерывным продолжением действительного внешнего потенциального потока на область, занятую пограничным слоем.*

По известному свойству пограничного слоя в построенном таким образом потенциальном потоке давления, а следовательно, и продольные скорости должны совпадать с давлениями и скоростями в потоке на внешней границе пограничного слоя. Вместо характерного для движения в пограничном слое убывания скорости от некоторого значения на внешней границе слоя до нулевого значения на поверхности крыла, в эквивалентном по давлениям потенциальном потоке повсюду на данной нормали будет одинаковая скорость, равная скорости на внешней границе слоя. Отсюда следует, что рассматриваемый потенциальный поток, обладающий тем же объемным расходом через сечение рассматриваемой струйки, что и действительный поток в пограничном слое, *не сможет заполнить всю область пограничного слоя* (включая в понятие пограничного слоя и аэродинамический след).

Для определения новой области течения рассмотрим (рис. 259, *б*) некоторую точку M сечения пограничного слоя. Отметим сплошной линией действительную линию тока, проходящую через точку M, а штриховой, идущей в некоторую точку M' на той же нормали,— линию тока потенциального потока, совпадающую с только что указанной действительной в удалении от тела вверх по потоку.

Подчеркнем отличие фигурирующего в настоящем рассуждении воображаемого потенциального потока, совпадающего с действительным повсюду вне пограничного слоя, от ранее рассмотренного потенциального потока, имеющего с действительным общую нулевую линию тока.

Как видно из рис. 259, действительные линии тока располагаются в одном случае выше идеальных, в другом, наоборот, ниже.

Составляя условие одинаковости расхода в действительном и воображаемом потенциальном потоках сквозь сечения M_1M и M_1M', отсчитан-

[1]) Здесь и далее можно полагать $\delta = \infty$.

ные от внешней границы пограничного слоя, получим

$$\int_y^\delta u\,dy = U(\delta - y - MM'),$$

так что расстояние между сравниваемыми линиями тока в действительном и воображаемом движениях будет равно

$$MM' = \int_y^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy.$$

На границе пограничного слоя ($y=\delta$) $MM'=0$, и обе линии тока совпадут. При углублении в пограничный слой величина MM' будет возрастать, а воображаемые линии тока будут *оттесняться от поверхности крыла*. Когда, наконец, действительная линия тока совпадет с поверхностью крылового профиля, линия тока воображаемого безвихревого потока окажется оттесненной от поверхности на расстояние

$$(MM')_{y=0} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta^*,$$

равное толщине вытеснения[1]). Таким образом, основная, нулевая линия тока действительного движения (рис. 260), разветвляющаяся в передней критической точке контура тела, совпадающая далее с контуром тела и уходящая сквозь аэродинамический след в бесконечность за телом, должна быть в воображаемом безвихревом потоке заменена на некоторое бесконечное *полутело*, образованное наращиванием по нормали к нулевой линии тока толщины вытеснения, рассчитанной по *действительному* распределению давления.

На рис. 260 показаны сплошной линией основной профиль и нулевая линия тока в следе за ним, а штриховой — «эффективный» контур, обтекание которого потенциальным потоком эквивалентно по распределению давления обтеканию профиля *реальной* жидкостью. Воображаемый безвихревой поток, входящий в пограничный слой через внешнюю его границу (на рисунке не показанную) с теми же скоростями, что и действительный поток, но в дальнейшем не подвергающийся действию торможения трением, имеет внутри пограничного слоя бóльшие скорости, чем действительный поток. При этом воображаемый поток не может заполнить всю область пограничного слоя, часть плоскости между нулевой линией тока в действительном движении и границей полутела в воображаемом течении остается не заполненной жидкостью, а линия $y=\delta^*$ является граничной линией тока.

Изложенные в настоящем параграфе соображения о простейшем приеме учета обратного влияния пограничного слоя на внешний безвихревой поток были высказаны в предположении о *несжимаемости* жидкости. Легко убедиться, что аналогичный прием может быть применен и в случае пограничного слоя в сжимаемой жидкости — в потоке газа с до- или сверхзвуковыми скоростями. Достаточно повторить все те же рассуждения, заменив лишь рассмотрение объемных расходов $\int_0^y u\,dy$ или $\int_0^\delta u\,dy$ соответствующими *массовыми* расходами $\int_0^y \rho u\,dy$ или

[1]) В этом можно видеть происхождение названия *толщины вытеснения*.

$\int_0^\delta \rho u\, dy$ и приняв за толщину вытеснения величину

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta U}\right) dy,$$

где ρ_δ — плотность на внешней границе слоя. Кроме того, подчеркнем, что все изложенное в настоящем параграфе относится в одинаковой степени как к *турбулентному*, так и к *ламинарному* пограничным слоям.

Практическое определение формы полутела и последующее вычисление сопротивления давления как проекции на направление набегающего потока главного вектора сил давления безвихревого потока идеальной жидкости на поверхность полутела связано с большими трудностями. Поэтому сопротивление давления предпочитают находить как результат вычитания сопротивления трения из профильного сопротивления; простой приближенный способ вычисления профильного сопротивления сейчас будет изложен. Что же касается сопротивления трения, то оно, по предыдущему, находится суммированием элементарных сил трения по поверхности.

§ 132. Приближенные формулы профильного сопротивления [1])

Рассмотрим крыловой профиль (рис. 261) в безграничном плоском потоке жидкости со скоростью на бесконечности, равной U_∞, и плотностью ρ. Сравним опять два эквивалентных по распределению давлений потока: 1) действительный, сопровождающийся образованием на поверхности крылового профиля пограничного слоя (а затем следа), и 2) воображаемый безвихревой поток идеальной жидкости, набегающий

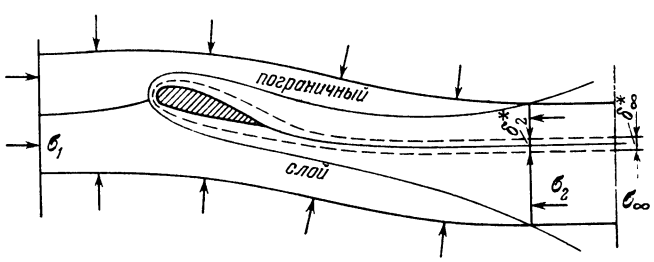


Рис. 261

на полутело (на рис. 261 показанное штрихами) и совпадающий с действительным вне пограничного слоя.

Возьмем какое-нибудь перпендикулярное к направлению скорости на бесконечности, удаленное от тела вниз по потоку сечение σ_2 аэродинамического следа, проведем через крайние точки этого сечения соответствующие им линии тока во внешнем потоке и рассмотрим образованную таким образом трубку тока.

Обозначим через σ_1 сечение этой трубки тока, проведенное параллельно сечению σ_2 вдалеке перед обтекаемым телом. Тогда, применяя к отрезку трубки тока между сечениями σ_1 и σ_2 в действительном и воображаемом потоках теорему количеств движения в форме Эйлера (§ 24) в проекции на ось Ox, направленную по скорости набегающего потока, будем иметь:

---

[1]) При изложении этого параграфа принято, что обтекание профиля происходит без отрыва пограничного слоя.

1) для *действительного* потока

$$\rho \int_{\sigma_1} u^2\,dy - \rho \int_{\sigma_2} u^2\,dy - R_x + X_p = 0;$$

2) для *воображаемого* потока

$$\rho \int_{\sigma_1} u^2\,dy - (\sigma_2 - \delta_2^*)\,\rho u_2^2 - R_{ix} + X_p = 0.$$

В этих равенствах R_x обозначает сопротивление крылового профиля в действительном движении, т. е. искомое профильное сопротивление, R_{ix} — сопротивление давлений части боковой поверхности полутела, отсеченной плоскостью σ_2, X_p — одинаковую для обоих потоков проекцию на ось Ox главного вектора сил давлений, приложенных (как показано на рис. 261 стрелками) к боковой поверхности выделенного объема трубки, u_2 — продольную скорость в потенциальном потоке в сечении σ_2, а δ_2^* — толщину вытеснения в том же сечении. Вычитая почленно друг из друга левые части составленных равенств, получим

$$(\sigma_2 - \delta_2^*)\,\rho u_2^2 - \rho \int_{\sigma_2} u^2\,dy + R_{ix} - R_x = 0.$$

Заметим, что по определению толщины вытеснения δ^*

$$\sigma_2 - \delta_2^* = \sigma_2 - \int_{\sigma_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right) dy = \int_{\sigma_2} \frac{u}{u_2}\,dy;$$

тогда из предыдущего равенства будет следовать

$$R_x = \rho \int_{\sigma_2} u\,(u_2 - u)\,dy + R_{ix}.$$

Устремим теперь сечение σ_2 на бесконечность вниз по течению. Как было указано в конце § 73, сопротивление давлений изображенного на рис. 261 штрихами бесконечного полутела со стремящейся к некоторому конечному пределу δ_∞^* толщиной δ_2^* будет равно нулю; предельный переход в предыдущем равенстве дает при этом

$$R_x = \lim_{\sigma_2 \to \sigma_\infty} \rho \int_{\sigma_2} u\,(u_2 - u)\,dy + \lim_{\sigma_2 \to \sigma_\infty} R_{ix} = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u\,(U_\infty - u)\,dy = \rho U_\infty^2 \delta_\infty^{**},$$

где δ_∞^{**} — толщина потери импульса в сечении следа, удаленном на бесконечность вниз по течению. Выражение коэффициента профильного сопротивления C_{xp} через толщину потери импульса на бесконечности δ_∞^{**} будет (c — хорда крылового профиля)

$$C_{xp} = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} = 2\frac{\delta_\infty^{**}}{c}. \tag{199}$$

Непосредственное нахождение δ_∞^{**} не представляется возможным; поэтому выведем приближенную связь этой величины с толщиной потери импульса *на задней кромке крылового профиля*[1]), допускающей простое теоретическое и непосредственное экспериментальное определение. С этой целью вспомним вывод интегрального соотношения Кармана (107) гл. XII. Аналогичный вывод, примененный к уравнениям турбу-

[1]) Сквайр Г., Юнг А. Расчет профильного сопротивления крыла.— В кн.: К вопросу о максимальной скорости самолета.— М.: Оборонгиз, 1941.

лентного пограничного слоя (143) гл. XIII, приводил к такого же вида интегральному соотношению (144). Имея в виду применение этого соотношения к *следу*, выполним интегрирование в пределах $(-\infty, \infty)$. Тогда член τ_w в правой части выпадет, и интегральное соотношение Кармана в настоящем случае примет вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{2}{U}\frac{dU}{dx}\delta^{**} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}\delta^{*} = 0. \tag{200}$$

Деля обе части этого уравнения на δ^{**} и интегрируя по x вдоль следа от задней кромки (индекс «к») до бесконечно удаленного сечения вниз по потоку (индекс ∞), получим

$$\ln\frac{\delta^{**}_{\infty}}{\delta^{**}_{к}} = \ln\frac{U^2_{к}}{U^2_{\infty}} - \int\limits_{x_к}^{\infty}\frac{\delta^{*}}{\delta^{**}}\frac{U'}{U}dx.$$

Довольствуясь случаем малых продольных перепадов давления (сравнительно тонкое, мало изогнутое крыло при небольших углах атаки), заменим величину $\delta^*/\delta^{**}=H$ под знаком интеграла ее средним значением

$$H_{ср} = \frac{1}{2}(H_к + H_\infty);$$

тогда, выполняя интегрирование в правой части предыдущего соотношения, найдем

$$\ln\frac{\delta^{**}_{\infty}}{\delta^{**}_{к}} = \ln\frac{U^2_{к}}{U^2_{\infty}} - \frac{1}{2}(H_к + H_\infty)\ln\frac{U_\infty}{U_к}$$

или

$$\frac{\delta^{**}_{\infty}}{\delta^{**}_{к}} = \left(\frac{U_к}{U_\infty}\right)^{2+\frac{1}{2}(H_к+H_\infty)}. \tag{201}$$

Подставляя полученное выражение δ^{**}_{∞} в равенство (199), получим следующую приближенную формулу профильного сопротивления

$$C_{xp} = 2\left(\frac{U_к}{U_\infty}\right)^{2+\frac{1}{2}(H_к+H_\infty)}\frac{\delta^{**}_{к}}{c}. \tag{202}$$

Как показывают измерения распределений давлений по поверхности крыловых профилей, отношение $U_к/U_\infty$ мало разнится от единицы, если крыловой профиль сравнительно тонок и слабо изогнут, а угол атаки или соответствующий ему коэффициент подъемной силы c_y невелики; последнее имеет место на режимах полета с максимальной скоростью. Так, например, в этих условиях на крыловом профиле с 14%-ной относительной толщиной (NACA-2414) при $c_y=0{,}18$ отношение $U_к/U_\infty$ равно 0,9, т. е. на 10% меньше единицы; даже при 25%-ной относительной толщине и при $c_y=0{,}25$ это отличие от единицы не превосходит 25%.

Величина H_∞ равна единице, в чем убедимся, полагая $u=U-u'=U_\infty-u'$ под знаком интегралов в выражениях δ^* и δ^{**} и пренебрегая в достаточном удалении от задней кромки крыла второй и старшими степенями малой добавки u'. Величина H, равная, как уже ранее указывалось, вблизи точки минимума давления 1,4—1,3, может при приближении к задней кромке возрастать при сохранении безотрывного обтекания до значения 1,8—2,3.

На первый взгляд наличие сравнительно высокого показателя степени в формуле (202), равного 3,2—3,4, может потребовать точного зна-

ния величины $U_к/U_\infty$, что было бы затруднительно как с точки зрения эксперимента, так и расчета. На самом деле это не так. Если использовать соотношение (175), из которого легко выводится выражение последнего сомножителя $\delta_к^{**}/c$ в формуле (202) через распределение скоростей внешнего потока $U(x)$ по длине пограничного слоя, то легко убедиться, что это выражение будет содержать в качестве сомножителя отношение $U_к/U_\infty$ в отрицательной степени, по абсолютной величине близкой к показателю степени в формуле (202). Таким образом, в окончательном выражении для C_{xp} близкое к единице отношение $U_к/U_\infty$ возводится в степень, немногим разнящуюся от нуля. Этим фактом может быть объяснено, почему формула (202), при $H_\infty=1$, $H_к=1{,}4$ переходящая в известную формулу Сквайра и Юнга

$$C_{xp}=2\left(\frac{U_к}{U_\infty}\right)^{3{,}2}\frac{\delta_к^{**}}{c}, \tag{203}$$

дает хорошее совпадение расчетов с опытными материалами.

Используя в выражении (174) принятое ранее значение постоянной $a=1{,}17$, округляя коэффициент $b=4{,}7$—$4{,}8$ до значения $b\approx 5$, что облегчает вычисления, и принимая, по предыдущему, $G(\mathrm{Re}^{**})=153{,}2\,\mathrm{Re}^{**1/6}$, получим после простых выкладок

$$\frac{\delta^{**}}{c}=\frac{0{,}0153}{\mathrm{Re}^{1/7}}\frac{1}{(U/U_\infty)^{25/7}}\left[\int\limits_{x_t/c}^{x/c}(U/U_\infty)^4\,d(x/c)+131\,\mathrm{Re}^{1/6}(U_t/U_\infty)^{25/6}(\delta_t^{**}/c)^{7/6}\right]^{6/7},$$

где положено (c — хорда крылового профиля)

$$\mathrm{Re}=\frac{U_\infty c}{\nu}.$$

Для определения величины $\delta_к^{**}/c$ следует произвести расчеты по этой формуле при $x/c=x_к/c$ отдельно для верхней и нижней поверхностей крылового профиля и результаты сложить. При подстановке полученных таким образом значений $(\delta^{**}/c)_{x=x_к}$ в предыдущую формулу входящая в знаменатель величина $(U_к/U_\infty)^{25/7}\approx(U_к/U_\infty)^{3{,}6}$ может быть сокращена со стоящей в числителе величиной $U_к/U_\infty$ в степени $2+\frac{1}{2}(H_к+H_\infty)$, равной 3,2—3,4. Это приведет к следующей расчетной формуле для коэффициента профильного сопротивления C_{xp}:

$$C_{xp}=\frac{0{,}0307}{\mathrm{Re}^{1/7}}\left[\int\limits_{x_t/c}^{1}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^4 d\left(\frac{x}{c}\right)+131\,\mathrm{Re}^{1/6}\left(\frac{U_t}{U_\infty}\right)^{25/6}\left(\frac{\delta_t^{**}}{c}\right)^{7/6}\right]^{6/7},$$

где, напоминаем, сомножитель, представленный квадратной скобкой, должен быть вычислен отдельно для верхней и нижней поверхностей, а результаты сложены. Как видно из этой формулы, распределение $U(x)$ входит только под знак интеграла. Значение U_t в точке перехода при больших рейнольдсовых числах мало отличается от соответствующего значения U_m в точке максимальной скорости, или, что то же, минимального давления. Отсутствие необходимости в определении величин $U_к$ и $H_к$ на задней кромке делает последнюю формулу удобной для расчетов профильного сопротивления крыла. Заметим, что в случае продольного обтекания пластины ($U=\mathrm{const}=U_\infty$) при полностью турбулентном пограничном слое последняя формула совпадает с формулой (153); следует только обратить внимание на разницу в определении коэффициентов C_f и C_{xp}: в первом коэффициенте суммарная сила трения относится ко

всей смоченной поверхности, т. е. для пластины в плоском потоке к *удвоенной* ее длине, во втором — суммарная сила профильного сопротивления делится на хорду, т. е. в случае пластины на ее длину.

Выведенная только что формула пригодна для расчета профильного сопротивления при больших рейнольдсовых числах. В случае относительно малых рейнольдсовых чисел (примерно для $\mathrm{Re}<5\cdot10^6$), соответствующих закону (155) для пластины, можно рекомендовать *формулу Шпейделя* [1])

$$C_{xp}=\frac{0{,}074}{\mathrm{Re}^{1/5}}\left[\int\limits_{x_t/c}^{1}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{7/2}d\left(\frac{x}{c}\right)+62{,}5\,\mathrm{Re}^{1/4}\left(\frac{U_t}{U_\infty}\right)^{15/4}\left(\frac{\delta_t^{**}}{c}\right)^{5/4}\right]^{4/5},$$

требующую, как и ранее приведенная формула, суммирования последнего сомножителя для верхней и нижней поверхностей. Существуют номограммы (сетки), по которым, задаваясь геометрическими параметрами

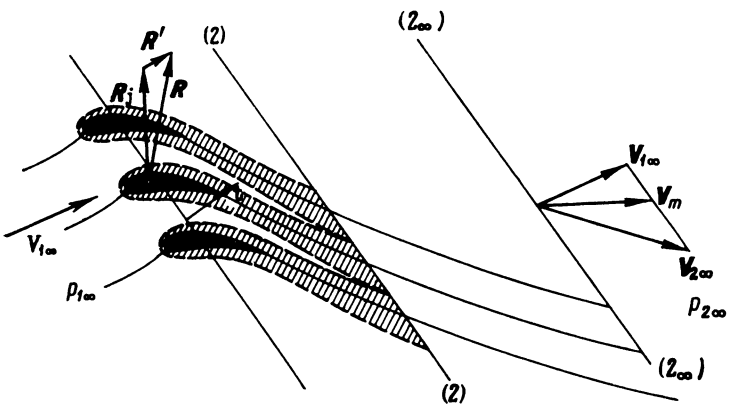


Рис. 262

крылового профиля и положением точки перехода, можно определить коэффициенты профильного сопротивления крыла при данном числе Re набегающего на него потока [2]).

Изложенный только что метод расчета профильного сопротивления крыла можно обобщить [3]) на случай решетки профилей. Рассмотрим обтекание плоской решетки профилей (рис. 262) с давлениями и скоростями на бесконечности: $p_{1\infty}$, $\boldsymbol{V}_{1\infty}$ — до решетки и $p_{2\infty}$, $\boldsymbol{V}_{2\infty}$ — за решеткой. Обозначим плотность жидкости через ρ, вектор-шаг через $\boldsymbol{t}$; тогда, используя теорему количеств движения, будем в случае вязкой жидкости иметь ту же формулу для определения главного вектора приложенных к профилю в решетке сил, что и в случае идеальной жидкости, а именно (§ 56)

$$\boldsymbol{R}=(p_{1\infty}-p_{2\infty})\,\boldsymbol{t}+\rho\,(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_{1\infty})(\boldsymbol{V}_{1\infty}-\boldsymbol{V}_{2\infty}).$$

Разница будет лишь в том, что из-за потерь энергии за счет работы диссипативных сил трения полные напоры перед и за решеткой будут отличны друг от друга; величина потери напора равна

$$p'=\left(p_{1\infty}+\frac{1}{2}\rho V_{1\infty}^2\right)-\left(p_{2\infty}+\frac{1}{2}\rho V_{2\infty}^2\right).$$

[1]) Цитируем по монографии: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем.— М.: Наука, 1974, с. 683.

[2]) См. цитированную работу Сквайра и Юнга.

[3]) Лойцянский Л. Г. Сопротивление решетки профилей, обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью— Прикл. мат. и мех., 1947, т. 11, вып. 4.

Главный вектор $\boldsymbol{R}$ представится как сумма

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{2}\rho(V_{2\infty}^2-V_{1\infty}^2)\boldsymbol{t}+\rho(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_{1\infty})(\boldsymbol{V}_{1\infty}-\boldsymbol{V}_{2\infty})+p'\boldsymbol{t},$$

или в принятых в § 56 обозначениях

$$\boldsymbol{R}=\rho(V_m\cdot V_d)\boldsymbol{t}-\rho(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{V}_m)\boldsymbol{V}_d+p'\boldsymbol{t}=\rho V_m\times(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{V}_d)+p'\boldsymbol{t}.$$

Первое слагаемое справа представляет силу Жуковского и может быть обозначено через $\boldsymbol{R}_j$, второе — силу сопротивления профиля в решетке; обозначим его через $\boldsymbol{R}'$. Итак,

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_j+\boldsymbol{R}',$$

причем сила сопротивления $\boldsymbol{R}'$ связана с потерей напора p' простой формулой

$$\boldsymbol{R}'=p'\boldsymbol{t}.$$

По сравнению с задачей о единичном крыловом профиле задача о расчете профильного сопротивления решетки усложняется тем, что пограничные слои, сходящие с отдельных профилей в решетке, на некотором расстоянии вниз по потоку *смыкаются* (рис. 262), образуя движение, не подчиняющееся уравнениям пограничного слоя. Обозначим это сечение индексом 2 без знака ∞ и предположим, что неоднородность поля скоростей в этом сечении следа за решеткой мала. Тогда легко показать[1]), что потеря напора может быть выражена формулой

$$p'=\rho V_{2\infty}^2\frac{\delta_2^{**}}{t\cos\beta_{2\infty}},$$

где δ_2^{**} — толщина потери импульса в рассматриваемом сечении следа, $\beta_{2\infty}$ — угол между вектором скорости $\boldsymbol{V}_{2\infty}$ и перпендикуляром к оси решетки. Используя, как и в случае единичного профиля, изложенный ранее прием перехода от сечения в следе к сечению на задней кромке профиля ($\delta^{**}=\delta_к^{**}$, $U=U_к$), будем иметь следующие формулы для потери напора p' и силы сопротивления R':

$$p'=\rho V_{2\infty}^2\left(\frac{U_к}{V_{2\infty}}\right)^{3,2}\frac{\delta_к^{**}}{t\cos\beta_{2\infty}},\quad R'=\rho V_{2\infty}^2\left(\frac{U_к}{V_{2\infty}}\right)^{3,2}\frac{\delta_к^{**}}{\cos\beta_{2\infty}}.$$

В последних формулах фигурирует скорость на бесконечности за решеткой $\boldsymbol{V}_{2\infty}$, а не средняя векторная скорость $\boldsymbol{V}_m$, обычно принятая в теории решеток. Замечая, что $V_{2\infty}\cos\beta_{2\infty}=V_m\cos\beta_m$, где β_m — угол между $\boldsymbol{V}_m$ и перпендикуляром к оси решетки, будем иметь

$$p'=\rho V_m^2\left(\frac{U_к}{V_m}\right)^{3,2}\left(\frac{V_m}{V_{2\infty}}\right)^{0,2}\frac{\delta_к^{**}}{t\cos\beta_m}\qquad(204)$$

и соответствующую формулу для силы сопротивления.

Рассматривая среднюю векторную скорость $\boldsymbol{V}_m$ как некоторую *условную скорость на бесконечности*, можно было бы принять за сопротивление величину составляющей $\boldsymbol{D}$ силы $\boldsymbol{R}'$ на направление скорости на бесконечности

$$D=R'\cos\beta_m=\rho V_m^2\left(\frac{U_к}{V_m}\right)^{3,2}\left(\frac{V_m}{V_{2\infty}}\right)^{0,2}\delta_к^{**}\qquad(205)$$

---

[1]) См. только что цитированную нашу статью.

и соответствующий ей коэффициент сопротивления писать в виде

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V_m^2 c \cdot 1} = 2\left(\frac{U_к}{V_m}\right)^{3,2}\left(\frac{V_m}{V_{2\infty}}\right)^{0,2}\frac{\delta_к^{**}}{c}. \qquad (206)$$

Формула (206) аналогична формуле (203) для изолированного крылового профиля; отличием является лишь множитель $(V_m/V_{2\infty})^{0,2}$, практически мало отличающийся от единицы.

Сравнительная простота изложенного метода расчета профильного сопротивления объясняется интегральным характером последнего[1]). Отдельные составляющие профильного сопротивления: сопротивление трения и сопротивление давления не поддаются столь простому расчету.

Как это следует из предыдущего, определение *профильного* сопротивления по приближенным формулам требует знания только *толщины потери импульса* $\delta_к^{**}$ на задней кромке крылового профиля. Это позволяет довольствоваться приближенными эмпирическими и полуэмпирическими методами расчета турбулентного пограничного слоя, изложенными в настоящем параграфе, которые с достаточной для практики точностью дают *интегральную* величину толщины потери импульса $\delta_к^{**}$. Заметим, что эти приближенные методы расчета оказываются недостаточными для определения локального коэффициента трения на поверхности обтекаемого крылового профиля, а следовательно, и суммарного *сопротивления трения.*

Не следует забывать, что при составлении эмпирических методов расчета турбулентного пограничного слоя с *произвольным* распределением давления использовались значения входящих в расчет величин для случая постоянства давления. Этот недостаток особенно сказывается в сильно диффузорных ($dp/dx \gg 0$) и, в частности, в предотрывных областях пограничного слоя.

Этот факт подтверждается опытами по определению потерь в турбинных и компрессорных решетках[2]). Произведенные по формуле (206) расчеты сопротивления турбинных решеток, в которых роль диффузорного участка мала, показали вполне удовлетворительное совпадение с опытными данными. Трудности возникли при попытках расчета по тем же приближенным формулам сопротивлений *компрессорных* решеток, в которых наблюдаются большие продольные градиенты давления. В этих случаях необходимы более точные методы расчета турбулентных пограничных слоев, о которых пойдет речь в следующей главе.

Гидродинамические и гидравлические расчеты некоторых встречающихся в инженерной практике турбулентных течений (криволинейные каналы, решетки, диффузоры, вихревые камеры-циклоны и др.) можно найти в специальных монографиях[3]).

---

[1]) Другой подход к расчету параметров потока за решеткой изложен в монографии: Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин.— М.: Физматгиз, 1962, § 52, 54.

[2]) Зысина-Моложен Л. М. Расчет потерь в решетках профилей турбомашин.— В кн.: Аэрогидродинамика.— М.: Машгиз, 1954, ЦКТИ, книга 27. Сводку результатов по исследованию потерь в турбинных колесах и направляющих аппаратах, содержащую и собственные результаты автора, можно найти в монографии: Кириллов И. И. Газовые турбины и газотурбинные установки.— М.: Машгиз, 1956, с. 134—166.

[3]) Идельчик И. Е. Аэрогидродинамика технологических аппаратов.— М.: Машиностроение, 1983; Гольдштик М. А. Вихревые потоки.— Новосибирск: Наука, Сибирское отд-ние, 1981, гл. IV; Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J. Engineering calculation methods for turbulent flow.— London—New-York: Acad. Press, 1981, p. 210—215.

нуждающиеся в дополнительных эмпирических, а иногда и просто интуитивных «модельных представлениях».

Сравнительно простыми являются уравнения моментов первого порядка. Это — уравнения переноса количества движения (импульса) (16) предыдущей главы. Основными неизвестными в них являются *осредненные скорости* и *давления*, но в состав их входят и моменты *второго* порядка — рейнольдсовы напряжения. Для замыкания системы уравнений моментов первого порядка приходится прибегать во всей области пограничного слоя к гипотезе «турбулентной вязкости» Буссинеска (51) предыдущей главы. Вблизи твердой поверхности используется теория Прандтля «пути смешения» с поправкой на демпфирующий фактор, а в удалении от стенки — гипотеза Клаузера (см. далее). Сложнее обстоит дело с уравнениями для моментов второго порядка, содержащими моменты третьего порядка, что вынуждает пользоваться для их определения так называемыми «модельными соотношениями», уводящими исходные уравнения в область интуитивных догадок и допущений, основанных на соображениях *теории размерностей* (§ 88). Таковы уравнения переноса рейнольдсовых напряжений (32) или (33) предыдущей главы, а также переноса кинетической энергии пульсаций (35) той же главы.

Оправданием возможности использования этих и других подобных им методов, основанных на уравнениях моментов различных порядков, служит подтверждение их пригодности для решения все более усложняющихся задач.

Многообразие и сложность современных методов расчета турбулентных пограничных слоев заставляют ограничиться по необходимости кратким, почти обзорным изложением только некоторых из них, а для расширения сведений об этих и остальных методах рекомендовать следующие сборники статей и монографии, многие из которых переведены на русский язык[1]).

§ 134. Введение в метод моментов первого порядка. Двухслойная схема

Под методом моментов первого порядка расчета турбулентного пограничного слоя в плоском стационарном движении будем понимать задачу решения системы уравнений

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}-\overline{u'v'}\right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1}$$

представляющую собой систему уравнений (15) предыдущей главы, упрощенную обычными допущениями теории пограничного слоя, с характерными для пограничного слоя граничными условиями, которые не будем выписывать, где u, v и p — осредненные значения проекций актуаль-

---

[1]) Труды советских семинаров/Под ред. акад. В. В. Струминского.— В кн.: Турбулентные течения.— М.: Наука, 1974 и 1977; Механика турбулентных потоков.— М.: Наука, 1980, а также следующие переводные издания: Методы расчета турбулентных течений, сборник статей/Под ред. В. Колльмана.— М.: Мир, 1984; Турбулентные сдвиговые течения.— М.: Машиностроение, Сборник 1, 1982; Сборник 2, 1983; Турбулентность, принципы и применения/Под ред. У. Фроста и Т. Моулдена.— М.: Мир, 1980; Турбулентность/Под ред. П. Брэдшоу.— М.: Машиностроение, 1982. Специально приспособлена для практических применений монография: Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J. Engineering calculation methods for turbulent flow.— London — New-York: Acad. Press, 1981.

ГЛАВА XIV

НЕКОТОРЫЕ СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 133. «Моментные» методы теории турбулентного пограничного слоя

Изложенные в предыдущей главе простые эмпирические и полуэмпирические методы расчета турбулентного пограничного слоя не могут вполне удовлетворить современную практику, так как они позволяют рассчитывать главным образом интегральные величины пограничного слоя, такие, как толщина вытеснения и толщина потери импульса. Наиболее важные характеристики пограничного слоя — в первую очередь распределение напряжения трения на твердой границе — эти методы определяют недостаточно достоверно.

Методы, появившиеся в последнее время, значительно превосходят по своим возможностям изложенные в гл. XIII, позволяя вычислять не только трение на поверхности, но и *внутренние* характеристики турбулентных пограничных слоев. Естественно, впрочем, что и их возможности ограничены определенными условиями. Многие методы создавались применительно к конкретным классам задач и поэтому не обладают универсальностью.

Количество публикаций по методам расчетов турбулентных пограничных слоев к настоящему времени настолько велико и они так разнообразны, что не представляется возможным осветить их сколько-нибудь полно на страницах учебника по общей механике жидкости и газа. В данном параграфе лишь кратко обсуждаются общие свойства широкого класса методов, основанных на «моментных» уравнениях двух первых порядков, а конкретные применения некоторых из них будут далее обсуждены в обзорной форме.

Уравнения моментов того или иного порядка были уже ранее введены в § 120 как уравнения переноса импульса осредненного движения, рейнольдсовых напряжений, кинетической энергии пульсаций скорости, но они допускают и иное содержание, отвечающее другим характеристикам турбулентных движений (скорости диссипации, коэффициенту турбулентного трения и др.). Все они основаны на осреднении преобразованных к различной форме уравнений Навье — Стокса движения несжимаемой вязкой жидкости и в этом условном (поскольку условны сами приемы осреднения) смысле могут рассматриваться как *строгие* следствия уравнений Навье — Стокса. Неудивительно поэтому, что моментные уравнения разных порядков рассматриваются сейчас как надежный фундамент современных методов расчета турбулентных пограничных слоев.

Структура моментных уравнений сложна. Мало того, что уравнения, служащие для определения моментов первого порядка, содержат неизвестные моменты второго порядка, а уравнения для моментов второго порядка — моменты третьего порядка и т. д. Это само по себе делает системы моментных уравнений *незамкнутыми*, требующими для своего замыкания дополнительных допущений — так называемых «связок». Уравнения моментов содержат, кроме того, разнообразные *корреляции* пульсационных скоростей и давлений, для своего определения также

ной скорости и давления, u', v' — пульсационные скорости, а единственное рейнольдсово напряжение $(-\rho\overline{u'v'})$ предполагается выраженным через основные неизвестные.

В текущей литературе метод момента первого порядка нередко рассматривается как сравнительно грубый, не позволяющий определять внутренние характеристики турбулентного пограничного слоя, а дающий, да и то лишь приближенно, профили осредненных скоростей, напряжение трения на твердой границе и условные толщины слоя. Однако этот метод широко используется уже в течение нескольких десятилетий и, по-видимому, при умелом подходе может приносить удовлетворительные результаты. Метод наиболее пригоден для тех потоков, которые определяются *одним* масштабом длин и *одним* масштабом скоростей. Этому требованию удовлетворяет общепринятая в методе моментов первого порядка «двухслойная схема» расчета. Согласно этой схеме вся область пограничного слоя разбивается в перпендикулярном к потоку направлении на две подобласти: 1) «пристенную», граничащую с поверхностью обтекаемого тела, и 2) «внешнюю», занимающую остальную часть слоя. «Пристенная» подобласть тоньше «внешней»; так, в случае *безградиентного* внешнего невязкого потока (продольное обтекание пластины) на долю каждой из них приходится примерно 20 и 80 процентов номинальной толщины пограничного слоя.

«Пристенная» подобласть состоит из вязкого подслоя, переходного участка и логарифмической части (§ 125), подчиняющихся «закону стенки», а «внешняя» подобласть управляется так называемым «законом следа».

Для каждой из этих двух подобластей по отдельности характерны свои единственные масштабы длин и скоростей. В безградиентном пограничном слое это ранее (§ 125) названные «универсальными» масштабы: длин — $l_*=\nu/v_*$ и скоростей $v_*=\sqrt{\tau_w/\rho}$ для «пристенной» подобласти и соответственно δ^* или δ^{**} и U (скорость на внешней границе пограничного слоя) — для «внешней» подобласти. Выбор масштабов в общем случае пограничного слоя с конфузорным ($dp/dx<0$) и диффузорным ($dp/dx>0$) участками требует особого рассмотрения (см. далее § 138).

§ 135. «Пристенная» подобласть турбулентного пограничного слоя. Взаимодействие молекулярной и турбулентной вязкостей

Основным вопросом теории «пристенной» подобласти является установление *непрерывного* плавного профиля осредненной скорости в сечениях пограничного слоя взамен ранее изложенного разбиения «пристенной» подобласти на вязкий подслой и турбулентное ядро течения. Это непрерывное распределение скоростей должно служить во всей «пристенной» подобласти от твердой стенки до нижней границы «внешней» подобласти пограничного слоя.

Одно из возможных построений такого профиля скоростей состоит в следующем [1]). Оставаясь в рамках задачи о плоском *сдвиговом*

---

[1]) Лойцянский Л. Г. Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача.— Изв. НИИГ, 1933, т. IX и того же автора: Полуэмпирические теории взаимодействия процессов молекулярного и молярного обмена в турбулентном движении жидкости.— Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (Москва, 1960).— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 145—166. Современное изложение этого вопроса дано в статье того же автора: Демпфирующий фактор к формуле Прандтля для переходного участка турбулентного пограничного слоя.— Инж. физ. журнал, 1983, т. 45, № 6, с. 924—932.

движении (§ 125) с характерным для него постоянством во всем сечении касательного напряжения трения τ, равного его значению на стенке ($\tau=\tau_w$), из основного равенства

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}-\rho\overline{u'v'} \tag{2}$$

получим, согласно гипотезе Буссинеска (43) гл. XIII,

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}+\mu_t\frac{du}{dy}=\mu\left(\frac{du}{dy}\right)\left(1+\frac{\nu_t}{\nu}\right). \tag{3}$$

Здесь под μ_t и $\nu_t=\mu_t/\rho$ будем понимать соответственно динамический и кинематический коэффициенты «турбулентной вязкости», учитывающие, в отличие от прандтлевских μ_{tP} и ν_{tP}, *взаимное влияние процессов молекулярного и молярного (турбулентного) переносов импульса.* Сохраним для τ_t и μ_t *прандтлевскую* форму закона турбулентного трения с неопределенным пока путем смешения l

$$\tau_t=\mu_t\frac{du}{dy}=\rho l^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2,\quad \mu_t=\rho l^2\frac{du}{dy}, \tag{4}$$

но будем отличать их от прандтлевских, не зависящих от молекулярной вязкости и предполагающих линейный закон для l_P:

$$\tau_{tP}=\rho l_P^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2,\quad \mu_{tP}=\rho l_P^2\frac{du}{dy},\quad l_P=\varkappa y. \tag{5}$$

Из равенств (4) и (5) непосредственно следует

$$\tau_t=\rho\left(\frac{l}{l_P}\right)^2 l_P^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2=\left(\frac{l}{l_P}\right)^2\tau_{tP}. \tag{6}$$

Первый сомножитель в правой части последнего равенства

$$D=\left(\frac{l}{l_P}\right)^2 \tag{7}$$

выражает ту поправку, которую надо принять, чтобы перейти от классической формулы Прандтля (5), не учитывающей влияние молекулярной вязкости на турбулентный обмен, к искомой (4). Эту поправку (7), выражающую *демпфирующее* влияние вязкости на турбулентный обмен (трение) в форме множителя, равного квадрату отношения нового, содержащего в себе влияние вязкости, пути смешения l к старому прандтлевскому l_P, пренебрегающему этим влиянием, примем за определение «демпфирующего фактора».

Чтобы найти зависимость «демпфирующего фактора» от расстояния до твердой стенки, обратимся к теории взаимодействия молекулярного и турбулентного обмена, изложенной в только что цитированных работах. В них устанавливается связь между «переходной» функцией

$$f(\mathrm{R})=1+\frac{\nu_t}{\nu}, \tag{8}$$

монотонно изменяющейся от значения $f=1$ непосредственно на твердой стенке до значения в ядре турбулентного течения

$$f=1+\frac{\nu_{tP}}{\nu}=1+l_P^2\frac{du/dy}{\nu}, \tag{9}$$

с «локальным рейнольдсовым числом»[1])

$$\mathrm{R} = l_P^2 \frac{du/dy}{\nu} = \varkappa^2 y^2 \frac{du/dy}{\nu} . \tag{10}$$

В равенстве (9) выражен тот факт, что на внешней границе «переходного участка» и вне его кинематический коэффициент турбулентного трения ν_t перестает зависеть от вязкости и становится равным ν_{tP}. Из (9) и (10) следует, что в этой области будет справедливо равенство

$$f_\infty = 1 + \mathrm{R}. \tag{11}$$

Из равенств (4), (7) и (8) получим

$$f - 1 = \frac{\nu_t}{\nu} = l^2 \frac{du/dy}{\nu} = \left(\frac{l}{l_P}\right)^2 l_P^2 \frac{du/dy}{\nu} = D\mathrm{R}. \tag{12}$$

Вводя известные нам по предыдущей главе *универсальные* переменные

$$\frac{y v_*}{\nu} = \eta, \quad \frac{u}{v_*} = \varphi, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \tag{13}$$

преобразуем (10) к виду

$$\mathrm{R} = \varkappa^2 \eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} , \tag{14}$$

а, согласно определению (8) «переходной» функции f и равенству (3), в тех же универсальных переменных найдем

$$\frac{\tau}{\tau_w} = f \frac{d\varphi}{d\eta} . \tag{15}$$

Деля почленно обе части уравнения (14) на соответствующие части равенства (15), получим после простых преобразований

$$\mathrm{R} f(\mathrm{R}) = \varkappa^2 \eta^2 \tau/\tau_w. \tag{16}$$

Удовольствуемся, как уже упоминалось, частным случаем чисто сдвигового квазипрямолинейного осредненного движения, в котором $\tau = \mathrm{const} = \tau_w$[2]). Тогда, возвращаясь к равенствам (12) и (16) при $\tau = \tau_w$, будем иметь следующее параметрическое (через параметр R) определение «демпфирующего фактора» $D(\eta)$ в функции от универсальной координаты η

$$D(\mathrm{R}) = \frac{f(\mathrm{R}) - 1}{\mathrm{R}} , \quad \mathrm{R} f(\mathrm{R}) = \varkappa^2 \eta^2. \tag{17}$$

Таким образом, дело сводится к заданию вида «переходной» функции $f(\mathrm{R})$.

Простой, рационально обоснованной модели явления перехода от ламинарного движения в «вязком подслое» к чисто турбулентному в

---

[1]) Величины f, R и связанные с ними понятия «переходной функции» и «локального рейнольдсова числа» были позже использованы в работе Мэллора (Mellor G. L. The effects of pressure gradients on turbulent flow near a smooth wall.— Journ. Fluid Mech., 1966, v. 24, part 2, p. 255—274) без ссылок на доклад, сделанный нами на X Международном конгрессе прикладной механики в г. Стреза (Италия) в 1960 г. и опубликованный в Трудах Конгресса (Loïtsianski L. Sur l'action réciproque de la transmission moléculaire et molaire dans l'ecoulement turbulent.— In: Proceed. of the tenth internat. Congr. of appl. mech.— Italy: Stresa, 1960; Elsvier Publ. Comp. Amsterdam.— New-York, 1962, p. 202—204) за шесть лет до появления работы Мэллора.

[2])Этому случаю будет также соответствовать движение в переходном участке в безградиентном ($dp/dx = 0$) турбулентном пограничном слое.

«ядре» течения пока не существует. Оставаясь в рамках *полуэмпирического* подхода к описанию этого процесса, определим его двумя величинами: положением условной «точки перехода» $R=R_{кр}$ и мерой столь же условного с количественной стороны понятия о протяженности «области перехода» в данном сечении турбулентного пограничного слоя[1]).

Обозначим через $f_0(R)$ значение «переходной» функции в переходной области ($R<R_{кр}$), а через $f_\infty(R)$ ее значение в «ядре» течения, т. е. вне переходной области ($R>R_{кр}$).

В качестве грубого приближения, основывающегося только на задании положения «точки перехода» $R=R_{кр}$, можно определить $f(R)$ при помощи *разрывной* функции

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1 \text{ при } x>0, \\ 0 \text{ при } x=0, \\ -1 \text{ при } x<0, \end{cases}$$

приняв

$$f(R)=\frac{1}{2}(f_0+f_\infty)+\frac{1}{2}(f_\infty-f_0)\operatorname{sign}(R-R_{кр}). \tag{18}$$

Действительно, при этом

$$\begin{gathered} f(R)=f_0(R) \text{ при } R<R_{кр} \text{ и } \operatorname{sign}(R-R_{кр})=-1, \\ f(R)=f_\infty(R) \text{ при } R>R_{кр} \text{ и } \operatorname{sign}(R-R_{кр})=1. \end{gathered} \tag{19}$$

От *разрывного* определения «переходной» функции $f(R)$ по формуле (18) можно перейти к *непрерывному*, вспоминая, что по определению функции $\operatorname{sign} x$ будут существовать равенства[2])

$$\begin{gathered} \operatorname{sign} x=\lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\alpha x\right), \\ \operatorname{sign} x=\lim_{\alpha\to\infty}\operatorname{erf}(\alpha x), \quad \operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\xi^2}d\xi, \\ \operatorname{sign} x=\lim_{\alpha\to\infty}\operatorname{th}(\alpha x) \text{ и др.} \end{gathered} \tag{20}$$

Опустив знак предела, получим приближенные *асимптотические* выражения функции $\operatorname{sign} x$ при больших α в виде непрерывных функций. Так, сохранив прежние обозначения для функций $f_0(R)$ и $f_\infty(R)$ и использовав, например, последнее равенство в системе (20), будем иметь следующее непрерывное выражение для «переходной» функции[3])

$$f(R)=\frac{1}{2}[f_0(R)+f_\infty(R)]+\frac{1}{2}[f_\infty(R)-f_0(R)]\operatorname{th}[\alpha(R-R_{кр})]. \tag{21}$$

В этом выражении имеются два свободных параметра: $R_{кр}$ и α. Распоряжаясь ими, можно получить различные приближенные выражения «переходной» функции. Сохраним для $R_{кр}$ значение $R_{кр}=11$, указанное Мэллором. Увеличение параметра α приведет к сужению «переходного» участка. Примем $\alpha=100$ и сохраним для больших R ранее упомянутую асимптотику $f_\infty(R)$ (11). Что касается асимптотики $f_0(R)$ для

[1]) Лойцянский Л. Г. Демпфирующий фактор к формуле Прандтля для переходного участка турбулентного пограничного слоя.— Инж.-физ. журнал, 1983, т. XLV, № 6, с. 924—932.

[2]) См., например, Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1977, с. 832.

[3]) В статье, цитированной в сноске [1]) на этой странице, вместо th была использована первая в системе (20) функция $(2/\pi)\operatorname{arctg}$, что не отразилось сколько-нибудь заметно на расчетах.

малых R, то определим ее выражением

$$f_0(\mathrm{R}) = 1 + \gamma \mathrm{R}^2, \tag{22}$$

оправданным экспериментально «законом четвертой степени» убывания кинематического коэффициента турбулентной вязкости ν_t с приближением к твердой стенке, который зададим формулой

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \gamma \varkappa^4 \eta^4, \tag{23}$$

где $\gamma=0{,}0092$ по опытам Дайслера[1]) и $\gamma=0{,}0125$ по опытам Ханратти[2]), $\varkappa=0{,}4$, а η — универсальная ордината, равная yv_*/ν.

Примем для γ округленное значение $\gamma=0{,}01$. «Переходная» функция $f(\mathrm{R})$, согласно (21), определится интерполяционным выражением

$$f(\mathrm{R}) = \frac{1}{2}(2 + \mathrm{R} + 0{,}01\mathrm{R}^2) + \frac{1}{2}(\mathrm{R} - 0{,}01\mathrm{R}^2)\,\mathrm{th}\,\alpha(\mathrm{R} - 11), \tag{24}$$

а демпфирующий фактор $D(\mathrm{R})$ по первому равенству (17) будет равен

$$D(\mathrm{R}) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}01\mathrm{R}) + \frac{1}{2}(1 - 0{,}01\mathrm{R})\,\mathrm{th}\,\alpha(\mathrm{R} - 11). \tag{25}$$

Совокупность последних двух равенств в соединении со вторым равенством системы (17) представляет собой *параметрическое* определение переходной функции f и демпфирующего фактора D как функций η. На рис. 263 приведен график $D(\eta)$ в виде первой кривой слева. Эту кривую, судя по близости «внешней границы» переходного участка к экспериментально оправданному значению $\eta_1 \approx 35$, можно принять как вполне удовлетворяющее опытным данным представление демпфирующего фактора, что подтверждается расчетом профиля скорости, экспериментальный вид которого хорошо известен (см. далее рис. 264).

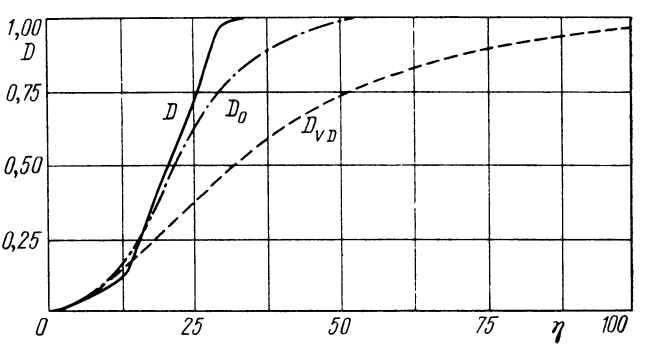


Рис. 263

Некоторая сложность параметрического задания переходной функции и демпфирующего фактора обычно не служит препятствием для их численного определения. Все же стоит указать и *явную* форму этих зависимостей, упрощающую практические вычисления.

Наибольшее распространение получила формула Ван-Дриста

$$D = [1 - \exp(-\eta/A_*)]^2, \quad A_* = 26, \tag{26}$$

представляющая экспоненциальное выражение демпфирующего фактора; здесь A_* — эмпирический коэффициент, а $\eta = yv_*/\nu$, $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$.

Заслуживает внимания тот факт, что эта формула выведена на основе соображений, далеких от полуэмпирических теорий турбулентности.

---

[1]) Deissler R. Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers — NACA Rep., 1959, v. 1210.

[2]) Hanratty Th. Study of turbulence close to a solid wall.— Phys. of Fluids, Supplement, 1967, p. 126—133.

Принятая Ван-Дристом модель покоится на аналогии между двумя совершенно различными по природе явлениями: демпфированием вязкостью *турбулентного* пульсационного движения и *ламинарным* нестационарным движением вязкой жидкости вблизи совершающей гармонические колебания безграничной пластины. При этом, основываясь на простых соображениях размерности, Ван-Дрист сопоставил характерную для турбулентного движения «динамическую скорость» v_* с квадратным корнем из произведения кинематического коэффициента вязкости на круговую частоту колебаний пластинки. Предложим другой вывод формулы Ван-Дриста (26), основанный на изложенных выше представлениях о влиянии вязкости на турбулентное трение. Особенно отметим, что в этом выводе исчезает необходимость введения новой эмпирической константы A_*, а указывается ее выражение через общепринятые константы турбулентности $\varkappa$ и γ.

Примем переходную функцию $f(\mathsf{R})$ и выражающийся через нее демпфирующий фактор $D(\mathsf{R})$ в форме

$$f(\mathsf{R}) = 1 + \mathsf{R}\{1 - \exp[-(\gamma\mathsf{R})^{1/n}]\}^n,$$
$$D(\mathsf{R}) = \{1 - \exp[-(\gamma\mathsf{R})^{1/n}]\}^n, \tag{27}$$

удовлетворяющей при любых n асимптотическим формулам (11) и (22).

Если вторую строку равенства (17) заменить соотношением $\mathsf{R}=\varkappa^2\eta^2$, следующим из нее при $f(\mathsf{R})=1$, то по (27) при $n=2$ получим выражение демпфирующего фактора

$$D(\eta) = [1 - \exp(-\varkappa\sqrt{\gamma}\eta)]^2, \tag{28}$$

совпадающее с формулой Ван-Дриста (26), если в ней положить

$$A_* = 1/(\varkappa\sqrt{\gamma}), \tag{29}$$

что при $\varkappa=0{,}4$ и $\gamma=0{,}0092$ подтверждает принятое Ван-Дристом значение константы $A_*=26$. Приведенное рассуждение дает новое освещение формулы Ван-Дриста и позволяет выразить эмпирическую константу A_* через основные константы турбулентности $\varkappa$ и γ. Заметим, что при $n=1$ переходная функция имеет вид

$$f(\mathsf{R}) = 1 + \mathsf{R}[1 - \exp(-\gamma\mathsf{R})], \tag{30}$$

приводящий при том же выборе R к выражению демпфирующего фактора

$$D_0(\eta) = 1 - \exp(-\eta^2/A_*^2), \tag{31}$$

удовлетворительно описывающему распределение скорости во внутренней части переходной области, но дающему значительное искажение перехода к логарифмической прямой в области турбулентного ядра.

На рис. 263 приведены сравнительные графики функций $D(\eta)$, $D_{\text{v. d}}(\eta)$ и $D_0(\eta)$. Отличие между первыми двумя из них мало сказывается на профиле скорости в переходной области благодаря *интегральному* определению [см. далее формулу (34)] этой скорости.

Несмотря на физическую неубедительность модели Ван-Дриста и на определенный произвол в выборе формы переходной функции (27) и особенно соотношения $\mathsf{R}=\varkappa^2\eta^2$, связанного с предположением $f(\mathsf{R})=1$, расчеты с использованием формулы Ван-Дриста вполне удовлетворительно согласуются с опытом. Можно лишь отметить небольшое отклонение кривой (26) от опытных точек внутри переходной области и несколько запоздалый переход на логарифмическую прямую, расположенную чуть выше экспериментальных точек (см. штриховую кривую на рис. 264).

Формулу Ван-Дриста используют при расчетах как *безградиентных*, так и *градиентных* пограничных слоев, производя при этом замену входящего в определение v_* касательного напряжения трения на стенке τ_w текущим его значением в сечении пограничного слоя $\tau(y)$. Такое обобщение формулы Ван-Дриста или изложенных ранее *параметрических* формул непосредственно следует из равенства (16), в котором стоящий справа член $\tau(y)$ может быть заменен существующими приближенными выражениями распределения трения по сечению пограничного слоя[1]).

Пользуясь так или иначе вводимым демпфирующим фактором, можно взамен рассмотрения распределений скорости по *отдельности* в областях вязкого подслоя и турбулентного ядра течения получить *непрерывное* распределение скорости в сечениях всей пристенной подобласти от

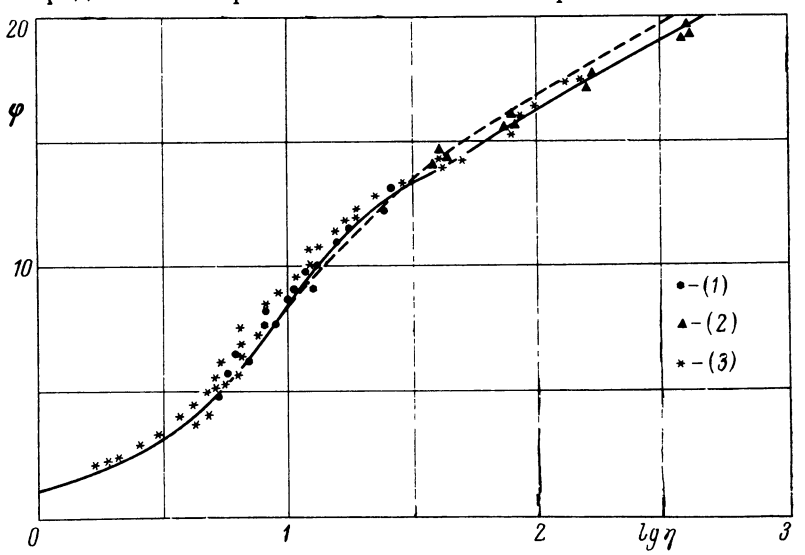


Рис. 264

твердой стенки до внешней границы этой подобласти. Для этого, вспоминая выражение полного напряжения трения τ, примем во внимание равенства (3) и (4) и удовольствуемся в пристеночной подобласти приближенным равенством $\tau=\tau_w$. Тогда τ представится в виде суммы

$$\tau = \tau_w = \mu \frac{du}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2, \tag{32}$$

или, переходя от l к $l_p=\varkappa y$ и пользуясь демпфирующим фактором (7),

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} + \rho \varkappa^2 y^2 D(y) \left(\frac{du}{dy}\right)^2. \tag{33}$$

Введение в это равенство универсальных величин (13) преобразует его к виду

$$1 = \frac{d\varphi}{d\eta} + \varkappa^2 \eta^2 D(\eta) \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2.$$

---

[1]) Coles D. The law of the wall in turbulent shear flow.— 50 Jahre Grenzschichtforschung.— Braunschweig, 1955, S. 153—163; Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости.— М.: Мир, 1967, с. 75—78, а также Лойцянский Л. Г. Об одной общей формуле теории тепломассопереноса в пристенной области турбулентного пограничного слоя.— Сборник научных трудов «Гидроаэродинамика».— Л.: Изд. Ленингр. политехн. инст., 1983, с. 3—10.

Разрешая это квадратное относительно $d\varphi/d\eta$ уравнение, найдем

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{2}{1+\sqrt{1+4\varkappa^2\eta^2 D(\eta)}},$$

$$\varphi = \frac{u}{v_*} = \int_0^{\eta} \frac{2d\eta}{1+\sqrt{1+4\varkappa^2\eta^2 D(\eta)}}. \tag{34}$$

Обозначая через η_1 универсальную ординату точки сечения пограничного слоя, соответствующей концу переходного участка, представим второе равенство системы (34) в форме

$$\varphi(\eta) = \int_0^{\eta_1} \frac{2d\eta}{1+\sqrt{1+4\varkappa^2\eta^2 D(\eta)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\varkappa\eta} =$$

$$= \int_0^{\eta_1} \frac{2d\eta}{1+\sqrt{1+4\varkappa^2\eta^2 D(\eta)}} - \frac{1}{\varkappa}\ln\eta_1 + \frac{1}{\varkappa}\ln\eta. \tag{35}$$

Сравнивая последнее равенство с логарифмическим профилем скоростей в турбулентном ядре течения ($\eta \geqslant \eta_1$), представленным формулой (116) предыдущей главы

$$\varphi = \frac{u}{v_*} = A\lg\eta + B,$$

определим константы A и B:

$$A = \frac{2{,}303}{\varkappa}, \quad B = \int_0^{\eta_1} \frac{2d\eta}{1+\sqrt{1+4\varkappa^2\eta^2 D(\eta)}} - \frac{2{,}303}{\varkappa}\lg\eta_1,$$

где числовой множитель 2,303 — модуль десятичных логарифмов.

Проведенные вычисления с использованием значений констант $\varkappa=0{,}4$, $\gamma=0{,}0092$, $\eta_1=30$ и формул (35) позволили построить график распределения скоростей в «пристенной» подобласти, показанный на рис. 264, и определить константы A и B. Там же для сравнения штриховой линией дан график распределения скоростей, основанный на использовании демпфирующего множителя Ван-Дриста. Можно убедиться, что значительное различие демпфирующих факторов $D(\eta)$ и $D_{\text{v. d.}}(\eta)$, показанных на рис. 263, слабо сказывается на форме профиля скорости. Однако все же штриховая линия, соответствующая расчету демпфирующего множителя по Ван-Дристу, ложится несколько выше опытных точек.

Значение коэффициента B оказалось равным $B=4{,}7$, что близко к опытному 4,8. По Ван-Дристу было бы $B_{\text{v.d.}}=5{,}4$.

Опытные точки соответствуют наиболее достоверным экспериментам: (*1*) — Лауфера[1]), (*2*) — Вигхардта[2]) и (*3*) — Тсуджи и Морикавы[3]). Выполненные в последнее время[4]) более точные вычис-

---

[1]) Laufer J. The structure of turbulence in fully developed flow.— NACA Rep., 1954, v. 1174.

[2]) В сб.: Computation of Turbulent Boundary Layer.— Proceeding AFOSR—IFR—Stanford Conference, 1968; University of Stanford, Thermosciences Division Dep. of Mech. Eng., California, USA, 1969, v. 2; exper. 1400, p. 98—123.

[3]) Tsuji J., Morikawa G. Turbulent boundary layer with pressure gradient alternating in sign.— Aeron. Quart., 1976, v. 27, № 1, p. 15—28.

[4]) Лойцянский Л. Г., Зябриков В. В. Демпфирующий фактор в теории пути смешения Прандтля. Доклад на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.— Ташкент, 24—30 сентября 1986 г.

ления привели к значениям $\mathrm{R}_{кр}=13$, $B=5{,}1$. В цитированной работе разобран общий случай «градиентного» пограничного слоя и предложены параболические аппроксимации демпфирующего фактора, превосходящие по простоте и точности формулу Ван-Дриста (26).

§ 136. Тепломассоперенос в «пристенной» подобласти

В задачу настоящего курса не входит изложение существующих методов расчета тепломассопереноса. Этому вопросу посвящены многочисленные специальные руководства и монографии [1]).

В настоящем параграфе мы остановимся лишь на некоторых принципиальных вопросах, тесно связанных с турбулентным движением и сопровождающим его турбулентным *переносом тепла*. Что касается турбулентного переноса *вещества*, то полуэмпирическая теория этих процессов совпадает с аналогичной теорией процессов распространения тепла, так что все, что будет изложено в настоящем параграфе, в одинаковой степени относится к тому и к другому процессам.

Решение общей задачи переноса в турбулентных потоках упирается, как мы ранее (§ 123) уже видели, в недостаточность наших знаний о коэффициентах переноса ε_τ, ε_q, ε_m. Если для первого из этих коэффициентов удается сконструировать достаточно удовлетворительное полуэмпирическое выражение, содержащее понятие *пути смешения*, то для остальных двух приходится пользоваться либо предположением о *пассивности* переносимой субстанции, или, что то же, о равенстве *турбулентных чисел Прандтля* и *Шмидта единице*, либо задаваться какими-то эмпирическими средними значениями этих чисел, либо, наконец, принимать в расчет эмпирические их распределения по потоку.

В настоящем параграфе мы остановимся исключительно на рассмотрении явлений тепломассопереноса в обстановке «пристенной» турбулентности.

Принципиальное значение для дальнейшего имеет вопрос о том, *сохраняется ли в явлениях переноса тепла деление потока на вязкий подслой с молекулярной природой переноса* (*температурный* подслой) и *турбулентное ядро*, где процессы переноса чисто *молярные*, не зависящие от молекулярной структуры жидкости, и каково должно быть соотношение между толщинами вязкого и температурного подслоев.

Аналогично тому, как это указывалось в теории ламинарного пограничного слоя (§ 117), *совпадение толщин вязкого и температурного подслоев возможно* лишь при *равенстве молекулярного числа Прандтля единице* ($\mathrm{Pr}=1$), так как только при этом осуществляется *подобие профилей распределения скорости и температуры в подслое.*

Если молекулярное число Прандтля меньше единицы ($\mathrm{Pr}<1$), что свидетельствует о повышенной роли теплопроводности жидкости по сравнению с вязкостью ($\lambda>\mu c_p$), *молекулярные процессы теплопроводности сохранят свое значение в области турбулентного ядра*, где молекулярной вязкостью можно пренебречь. Отсюда следует, что при $\mathrm{Pr}<1$ *толщина температурного подслоя будет превосходить толщину вязкого подслоя.* Так, например, в жидких металлах (ртуть, расплавы металлов), для которых $\mathrm{Pr}\ll 1$, процессы молекулярной теплопроводности

[1]) Жукаускас А. А. Конвективный перенос в теплообменниках.— М.: Наука, 1982; Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене.— М.: ИЛ, 1958; Patankar S. V., Spalding D. B. Heat and mass transfer in boundary layers — Intertext Books, London, 1970; Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963, Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое.— М.: Энергия, 1972.

будут иметь первенствующее значение в большей части турбулентного ядра.

Наоборот, при *молекулярных числах Прандтля, больших единицы* ($\mathrm{Pr}>1$), *турбулентный* (молярный) *характер переноса тепла преобладает над молекулярным, т. е. обычной теплопроводностью.* Это *приводит к тому*, что *в некоторой внешней части вязкого подслоя развивается турбулентный перенос тепла*, и, следовательно, *температурный подслой становится тоньше вязкого.* Такого рода соотношение между толщинами вязкого и температурного подслоев особенно резко проявляется в потоках очень вязких жидкостей (смазочных масел, глицерина и др.), у которых $\mathrm{Pr}\gg 1$.

Среди классических результатов в этой области прежде всего надо упомянуть об аналогии Рейнольдса [1]), устанавливающей простую *связь между трением и теплопереносом в турбулентном движении при равных единице ламинарном и турбулентном числах Прандтля*, а кроме того, при *отсутствии продольного перепада давления в потоке.*

В этих условиях ($\mathrm{Pr}=\mu c_p/\lambda=1$, $\mathrm{Pr}_t=\varepsilon_\tau/\varepsilon_q=1$) уравнения плоских скоростного и температурного слоев, согласно (1), а также (23), (55) и (57) гл. XIII будут иметь вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\varepsilon_\tau)\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$
$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\varepsilon_\tau)\frac{\partial T}{\partial y}\right], \tag{36}$$

а граничные условия, применительно к пластине, расположенной вдоль оси Ox,

$$u=v=0,\quad T=T_w \text{ при } y=0,$$
$$u=U_\infty,\qquad T=T_\infty \text{ при } y=\infty, \tag{37}$$

где T_w — температура поверхности, T_∞ — температура вдали от поверхности.

Рассматривая систему уравнений (36) и граничных условий (37), убедимся, что второму уравнению можно удовлетворить, положив

$$\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}=\frac{u}{U_\infty}, \tag{38}$$

а это выражает тот факт, что распределения скоростей и перепадов температур в сечениях потока, нормальных к твердой стенке, *подобны.*

Дифференцируя обе части равенства (38) по y и положив затем $y=0$, получим

$$\frac{1}{U_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{1}{T_\infty-T_w}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Вводя в это равенство напряжение трения $\tau_w=\mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$ и поток тепла $q_w=-\lambda(\partial T/\partial y)_{y=0}$ на поверхности тела, получим соотношение

$$\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}=\frac{q_w}{\rho c_p U_\infty (T_w-T_\infty)}, \tag{39}$$

выражающее вышеупомянутую *аналогию Рейнольдса* и связывающее трение с теплопереносом на твердой непроницаемой стенке в потоке вязкой жидкости.

[1]) Reynolds O. On the extent and action of the heating surface for steam boilers — Proceed of the Manchester Literary and Philosophical Society, 1874, v. 14.

Левая часть последнего равенства равна $c_f/2$, а правая представляет собой число Стэнтона St, которое в данном случае, когда в качестве масштабов скорости и температуры выбраны величины U_∞ и T_∞, соответствующие набегающему потоку, обозначим через St_∞, положив

$$\frac{q_w}{\rho c_p U_\infty (T_w - T_\infty)} = \mathrm{St}_\infty. \tag{40}$$

В дальнейшем встретятся выражения числа Стэнтона, построенного по другим величинам.

Аналогия Рейнольдса (39) для случая потока вдоль *непроницаемой* стенки и отсутствия продольного перепада давления запишется в такой краткой форме:

$$\frac{c_f}{2} = \mathrm{St}_\infty. \tag{41}$$

При установившемся турбулентном движении в плоской или круглой цилиндрической трубе, так же как и в пограничных слоях, на смену масштабам U_∞ и T_∞ приходят скорость и температура жидкости на оси трубы или на внешней границе пограничного слоя. В случае трубы предпочитают иметь дело со *средними* значениями скорости $u_{\text{ср}}$ и температуры $T_{\text{ср}}$ по сечению трубы, а вместо c_f вводят коэффициент сопротивления трубы λ, входящий в известную уже по предыдущему формулу сопротивления

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}.$$

Замечая, что при *установившемся* (безразлично, ламинарном или турбулентном) движении справедливо соотношение

$$\tau_w = \Delta p, \text{ если } L = \frac{d}{4},$$

найдем

$$\frac{\tau_w}{\rho u_{\text{ср}}^2} = \frac{\lambda}{8}. \tag{42}$$

Определяя по (38) указанные *средние величины по сечению трубы*, получим

$$\frac{u_{\text{ср}}}{U_\infty} = \frac{T_w - T_{\text{ср}}}{T_w - T_\infty}, \tag{43}$$

после чего, переписав (39) в форме

$$\frac{\tau_w}{\rho u_{\text{ср}}^2} \left(\frac{u_{\text{ср}}}{U_\infty}\right)^2 = \frac{q_w}{\rho c_p u_{\text{ср}} (T_w - T_{\text{ср}})} \frac{T_w - T_{\text{ср}}}{T_w - T_\infty} \frac{u_{\text{ср}}}{U_\infty}$$

и используя (43), придем к аналогии Рейнольдса *для трубы* в форме

$$\frac{\lambda}{8} = \frac{q_w}{\rho c_p u_{\text{ср}} (T_w - T_{\text{ср}})} = \mathrm{St}. \tag{44}$$

Здесь St обозначает число Стэнтона, построенное по средним величинам $u_{\text{ср}}$ и $T_{\text{ср}}$.

Расширение аналогии Рейнольдса [(39), (41)] на случай молекулярных чисел Прандтля, *не равных, но близких к единице*, было пред-

ложено Тейлором[1]) и Прандтлем[2]). Считая, что в этом случае можно пренебречь малой разницей в толщинах вязкого и температурного подслоев, а распределения скоростей и температур внутри этих тонких, совпадающих по толщине слоев принять линейными, будем иметь ($\tau=\text{const}=\tau_w$, $q=\text{const}=q_w$, $T_в$ – температура на внешней границе вязкого подслоя)

$$\tau=\tau_w=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\mu\frac{u_в}{\delta_в},\qquad q=q_w=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=\lambda\frac{T_w-T_в}{\delta_в}. \tag{45}$$

Согласно принятому условию *равенства единице турбулентного числа Прандтля*, в турбулентном ядре потока, независимо от условия $\mathrm{Pr}\neq 1$, будет существовать *подобие распределений осредненных скоростей и температур*, так что ($U_\infty>u_в$, $T_\infty<T_в<T_w$ – скорость и температура вдалеке от твердой стенки, на внешней границе турбулентного пограничного слоя или на оси трубы)

$$\frac{T-T_в}{T_\infty-T_в}=\frac{u-u_в}{U_\infty-u_в}, \tag{46}$$

и, следовательно, вне вязкого (или температурного, что при $\mathrm{Pr}\approx 1$ одно и то же) подслоя имеет место соотношение

$$\frac{1}{T_\infty-T_в}\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{U_\infty-u_в}\frac{\partial u}{\partial y},$$

которое можно тождественно переписать в форме ($A_q=A_\tau$, $\varepsilon_q=\varepsilon_\tau$)

$$\frac{c_pA_q\,(\partial T/\partial y)}{\rho c_p\,(T_\infty-T_в)\,(U_\infty-u_в)}=\frac{A_\tau\,(\partial u/\partial y)}{\rho\,(U_\infty-u_в)^2}$$

или $[c_pA_q(\partial T/\partial y)=q=\text{const}=q_w;\ A_\tau(\partial u/\partial y)=\tau=\text{const}=\tau_w]$,

$$\frac{q_w}{\rho c_p\,(U_\infty-u_в)\,(T_в-T_\infty)}=\frac{\tau_w}{\rho\,(U_\infty-u_в)^2}, \tag{47}$$

что представляет собой очевидное обобщение формулы (39).

Исключим теперь из системы равенств (45) и (47) две величины: $\delta_в$ и $T_в$. Будем иметь

$$\delta_в=\frac{\mu u_в}{\tau_w},\qquad c_pT_в=c_pT_w-\mathrm{Pr}\,u_в\frac{q_w}{\tau_w},$$

и равенство (47) перейдет в следующее:

$$\frac{q_w}{\rho c_pU_\infty\,(T_w-T_\infty)}=\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2\,[1+(\mathrm{Pr}-1)\,u_в/U_\infty]}, \tag{48}$$

или, по принятым ранее обозначениям,

$$\mathrm{St}_\infty=\frac{c_f/2}{1+(\mathrm{Pr}-1)\,u_в/U_\infty}. \tag{49}$$

---

[1]) Taylor G. J. Conditions at the surface of a hot body exposed to the wind.— Techn. Rep. Adv. Com. Aeron., 1916, v. 2, № 272.

[2]) Prandtl L. Bemerkung über den Wärmeübergang im Rohr.— Phys. Zeitsch., 1928, Bd 29

Переходя в случае плоской или цилиндрической круглой трубы от U_∞ и T_∞ к средним расходным величинам $u_{ср}$ и $T_{ср}$ (при вычислении этих величин можно при числе Прандтля, близком к единице, пренебречь слабым неподобием распределений скоростей и температур в вязком подслое, составляющем ничтожную часть интервала интегрирования), будем иметь вместо (49)

$$\mathrm{St} = \frac{\lambda/8}{1 + (\mathrm{Pr} - 1)\, u_в/u_{ср}}. \tag{50}$$

Полученные соотношения (49) и (50) дают искомые обобщения аналогий Рейнольдса (41) и (44) на случай *малого отличия числа* Pr *от единицы*. Переписывая их в форме ($\alpha \approx 11{,}5$)

$$\frac{1}{\mathrm{St}_\infty} = \frac{2}{c_f} + (\mathrm{Pr} - 1)\frac{u_в}{U_\infty}\frac{2}{c_f} = \frac{2}{c_f} + (\mathrm{Pr} - 1)\frac{u_в}{v_*}\frac{v_*}{U_\infty}\frac{2}{c_f} =$$

$$= \frac{2}{c_f} + (\mathrm{Pr} - 1)\,\alpha\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{2}{c_f} + \sqrt{\frac{2}{c_f}}\, g(\mathrm{Pr}); \tag{51}$$

$$g(\mathrm{Pr}) = \alpha(\mathrm{Pr} - 1),$$

или

$$\frac{1}{\mathrm{St}} = \frac{8}{\lambda} + (\mathrm{Pr} - 1)\frac{u_в}{u_{ср}}\frac{8}{\lambda} = \frac{8}{\lambda} + (\mathrm{Pr} - 1)\frac{u_в}{v_*}\frac{v_*}{u_{ср}}\frac{8}{\lambda} = \frac{8}{\lambda} + g(\mathrm{Pr})\sqrt{\frac{8}{\lambda}}, \tag{52}$$

убедимся, что в рассматриваемом случае малого отличия Pr от единицы дело сводится к поправочному слагаемому к классической формулировке аналогии Рейнольдса (41) и ее преобразованному выражению (44). Новым по сравнению с (41) и (44) является введение промежуточной скорости на внешней границе

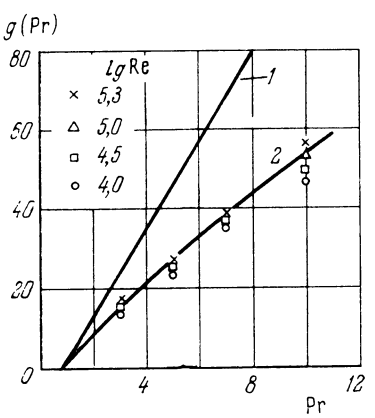


Рис 265

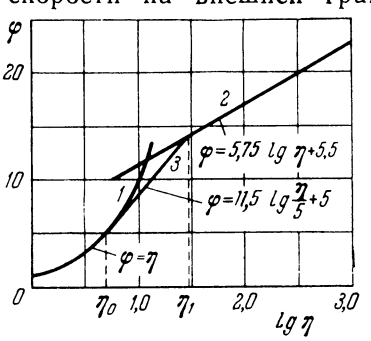


Рис 266

вязкого подслоя $u_в$ и известного по гл. XIII отношения $u_в/v_* = \alpha \approx 11{,}5$. При этом появляется сохраняющая свое значение в последующем функция Кармана $g(\mathrm{Pr})$ (51), вид которой, как сейчас будет показано, изменяется с расширением области допустимых значений числа Прандтля Pr.

На рис. 265 показан график (прямая *1*) функции $g(\mathrm{Pr})$, входящей в формулу (51). Для сравнения там же приведены экспериментальные точки Игла—Фергюссона[1]). Совпадение с опытом формулы Прандтля (51) можно признать удовлетворительным только при числе Pr, близком к единице.

[1]) Eagle A., Fergusson R. On the coefficient of heat transfer from the internal surface of tube walls.— London: Proceed. Roy. Soc, ser. A, 1930, v. 127.

Карман[1]) отказался от «двухслойной» схемы и поместил между вязким подслоем и турбулентным ядром, в которых соответственно

$$\varphi=\eta \text{ при } 0\leqslant\eta\leqslant 5; \quad \varphi=5{,}75\lg\eta+5{,}5 \text{ при } \eta\geqslant 30,$$

новый «переходный» (его тогда называли «буферным») слой с распределением скоростей (рис. 266)

$$\varphi=11{,}5\lg\frac{\eta}{5}+5 \text{ при } 5\leqslant\eta\leqslant 30.$$

Введение переходной области от вязкого подслоя к турбулентному ядру *расширило область применения обобщенной аналогии Рейнольдса* (52). Кривая *3*, соответствующая формуле такой «трехслойной» схемы Кармана (рис. 266)

$$g(\mathrm{Pr})=5\left\{(\mathrm{Pr}-1)+2{,}3\lg\left[1+\frac{5}{6}(\mathrm{Pr}-1)\right]\right\}, \tag{53}$$

очень хорошо совпала с опытными данными Игла и Фергюссона до значений числа Pr порядка 10.

Для дальнейшего продвижения в область больших чисел Прандтля были испробованы «многослойные» схемы, что привело к сложным методам расчета. Этого недостатка лишена теория *непрерывно распределенного* по всей области взаимодействия молекулярных и молярных процессов переноса, представляющая расширение теории, изложенной в предыдущем параграфе, на явление тепломассообмена[2]).

Следуя обозначениям (8) и (10), принятым в § 135, перепишем систему равенств (45) в следующей форме, добавив выражение для плотности потока массы m:

$$\begin{aligned}
\tau&=\mu\frac{du}{dy}\left(1+\frac{\varepsilon_\tau}{\nu}\right)=\mu\frac{du}{dy}f(\mathrm{R}),\\
q&=\lambda\frac{dT}{dy}\left(1+\mathrm{Pr}\frac{\varepsilon_\tau}{\nu}\right)=\lambda\frac{dT}{dy}[1-\mathrm{Pr}+\mathrm{Pr}f(\mathrm{R})],\\
m&=\rho D\frac{dc}{dy}\left(1+\mathrm{Sc}\frac{\varepsilon_\tau}{\nu}\right)=\rho D\frac{dc}{dy}[1-\mathrm{Sc}+\mathrm{Sc}f(\mathrm{R})].
\end{aligned} \tag{54}$$

Сохраняя приближенное условие $\tau=\mathrm{const}=\tau_w$, положенное в основу теории взаимодействия молекулярного и молярного обменов в переходной области от вязкого подслоя к турбулентному ядру, и присоединяя к нему аналогичные предположения $q=\mathrm{const}=q_w$ и $m=\mathrm{const}=m_w$, дополним ранее введенные универсальные масштабы скоростей $v_*=\approx\sqrt{\tau_w/\rho}$ и длин $l_*=\nu/v_*$ аналогичными масштабами *температур* и *концентраций* вещества, положив

$$T_*=\frac{q_w}{\rho c_p v_*}, \quad c_*=\frac{m_w}{\rho v_*}. \tag{55}$$

Выраженные в частях этих масштабов ординаты y, скорости u, температуры T и концентрации вещества c будут далее обозначаться так:

$$\frac{y}{l_*}=\frac{yv_*}{\nu}=\eta, \quad \frac{u}{v_*}=\varphi, \quad \frac{T-T_w}{T_*}=\psi, \quad \frac{c-c_w}{c_*}=\chi. \tag{56}$$

---

[1]) Kármán Th. The analogy between fluid friction and heat transfer.— Trans. Amer. Soc. Mech. Engnr., 1939, v. 61.

[2]) Лойцянский Л. Г. Полуэмпирические теории взаимодействия процессов молекулярного и молярного обмена в турбулентном движении жидкости.— Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 145—166.

Деля обе части равенств (54) соответственно на τ_w, q_w и m_w и переходя к универсальным величинам (56), получим следующую систему уравнений для определения $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ и $\chi(\eta)$:

$$1=f(\mathsf{R})\frac{d\varphi}{d\eta},\quad 1=\frac{1-\mathrm{Pr}+\mathrm{Pr}f(\mathsf{R})}{\mathrm{Pr}}\frac{d\psi}{d\eta},\quad 1=\frac{1-\mathrm{Sc}+\mathrm{Sc}f(\mathsf{R})}{\mathrm{Sc}}\frac{d\chi}{d\eta}. \tag{57}$$

В этой системе трех уравнений заключены четыре неизвестные φ, ψ, χ и R, а переходная функция $f(\mathsf{R})$ уже определена формулой (24). Вспоминая еще равенство (17), согласно которому будет

$$\eta=\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\mathsf{R}f(\mathsf{R})},\quad d\eta=\frac{1}{2\varkappa}\frac{\mathsf{R}f'(\mathsf{R})+f(\mathsf{R})}{\sqrt{\mathsf{R}f(\mathsf{R})}}d\mathsf{R},$$

получим выражения искомых функций $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ и $\chi(\eta)$ в квадратурах в *параметрической* зависимости от R

$$\varphi=\frac{1}{2\varkappa}\int_0^{\mathsf{R}}\frac{\mathsf{R}f'(\mathsf{R})+f(\mathsf{R})}{\sqrt{\mathsf{R}f^3(\mathsf{R})}}d\mathsf{R},\quad \psi=\frac{1}{2\varkappa}\int_0^{\mathsf{R}}\frac{\mathsf{R}f'(\mathsf{R})+f(\mathsf{R})}{\left[\frac{1}{\mathrm{Pr}}+f(\mathsf{R})-1\right]\sqrt{\mathsf{R}f(\mathsf{R})}}d\mathsf{R},$$

$$\chi=\frac{1}{2\varkappa}\int_0^{\mathsf{R}}\frac{\mathsf{R}f'(\mathsf{R})+f(\mathsf{R})}{\left[\frac{1}{\mathrm{Sc}}+f(\mathsf{R})-1\right]\sqrt{\mathsf{R}f(\mathsf{R})}}d\mathsf{R},\quad \eta=\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\mathsf{R}f(\mathsf{R})}. \tag{58}$$

Непосредственное рассмотрение системы (58) обнаруживает, что второе и третье уравнения этой системы при $\mathrm{Pr}=\mathrm{Sc}$ становятся тождественными. Это соответствует сделанному ранее замечанию о количественной эквивалентности процессов тепло- и массопереноса. Кроме того, также непосредственно можно заключить о подобии распределений скоростей и избыточных температур, а следовательно, и избыточных концентраций при $\mathrm{Pr}=\mathrm{Sc}=1$.

Содержащиеся в системе (58) квадратуры при задании $f(\mathsf{R})$ в виде (24) могут быть определены *численным* методом. Оставим в стороне возможные здесь упрощения путем перехода к приближенным формулам демпфирующего фактора.

Обратимся к вопросу о разыскании приближенного явного аналитического выражения функции $g(\mathrm{Pr})$ и чисел Стэнтона и Шмидта при произвольных больших значениях числа Прандтля Pr, что соответствует расположению температурного и концентрационного пограничных слоев глубоко внутри скоростного пограничного слоя.

Используя для выражения $f(\mathsf{R})$ соотношение (22), тем более справедливое, чем больше число Прандтля, произведем в системе (58) замену переменных

$$\gamma\mathsf{R}^2=t^4. \tag{59}$$

Тогда система (58) перейдет в следующую:

$$\varphi=\frac{1}{\varkappa\sqrt[4]{\gamma}}\int_0^t\frac{1+3t^4}{(1+t^4)^{3/2}}dt,$$

$$\psi=\frac{1}{\varkappa\sqrt[4]{\gamma}}\int_0^t\frac{1+3t^4}{(1/\mathrm{Pr}+t^4)(1+t^4)^{1/2}}dt, \tag{60}$$

$$\eta=\frac{1}{\varkappa\sqrt[4]{\gamma}}t(1+t^4)^{1/4}.$$

Уравнение для χ опускаем, так как оно ничем не отличается от уравнения для ψ, если число Шмидта Sc заменить на число Прандтля Pr.

Вычисления интегралов, входящих в правые части (60), проще всего осуществить путем разложения подынтегральных выражений по степеням t с выделением трансцендентной части

$$Б(x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}, \qquad (61)$$

затабулированной Б. А. Бахметьевым и широко применяемой в гидравлике [1]). Получим

$$\varphi=8{,}06\,(t+0{,}3t^5-0{,}291t^9+0{,}264t^{13}-\ldots),$$

$$\psi=8{,}06\Big[(2{,}5t-0{,}225t^5+0{,}09t^9-\ldots)+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Pr}}(1{,}125t-0{,}1625t^5)+\frac{0{,}08125t}{\mathrm{Pr}^2}+\left(1-\frac{2{,}5}{\mathrm{Pr}}-\frac{1{,}125}{\mathrm{Pr}^2}\right)\mathrm{Pr}^{3/4}Б\,(\mathrm{Pr}^{1/4}t)\Big], \qquad (62)$$

$$\eta=8{,}06\,(t+0{,}5t^5-0{,}125t^9+\ldots).$$

Используем это решение в области $0\leqslant\eta\leqslant\eta_0$, $0\leqslant t\leqslant t_0$, соответствующей вязкому подслою, верхнюю границу которого η_0 найдем из условия, чтобы касательная, проведенная в этой точке к профилю скоростей φ [первое равенство системы (60)], прошла через точку $\eta_1=30$, $\varphi_1=13{,}63$ начала логарифмического профиля скоростей, принятого по уточненной формуле Никурадзе (§ 126) в виде

$$\varphi=5{,}75\lg\eta+5{,}24. \qquad (63)$$

Для этого надо положить: $\eta_0=6{,}07$, $t_0=0{,}68$. Тогда уравнение касательной примет вид

$$\varphi=11{,}3\lg\eta-3{,}09 \qquad (6{,}07\leqslant\eta\leqslant30). \qquad (64)$$

При $\eta\geqslant30$ профилем скоростей будет профиль (63). Выбранному универсальному профилю скоростей соответствуют простые аналитические выражения для универсального профиля температуры

$$\psi=11{,}3\lg\left(\eta+4{,}98-\frac{4{,}98}{\mathrm{Pr}}\right)-11{,}3\lg\left(11{,}05-\frac{4{,}98}{\mathrm{Pr}}\right)+\psi_0$$

при $6{,}07\leqslant\eta\leqslant30$,

$$\psi=5{,}75\lg\eta-8{,}49+\psi_1 \qquad \text{при } 30\leqslant\eta, \qquad (65)$$

где под ψ_0 понимается значение ψ, вычисленное по второму равенству системы (62) при $t=t_0=0{,}68$, а под ψ_1 — значение ψ, вычисленное уже по первому равенству системы (65) при $\eta=\eta_1=30$. Приведем значения этих величин:

$$\psi_0=13{,}46+\frac{5{,}976}{\mathrm{Pr}}+\frac{4{,}453}{\mathrm{Pr}^2}+$$

$$+\left(8{,}06-\frac{20{,}15}{\mathrm{Pr}}-\frac{9{,}068}{\mathrm{Pr}^2}-\frac{6{,}549}{\mathrm{Pr}^3}\right)\mathrm{Pr}^{3/4}Б\,(0{,}68\mathrm{Pr}^{1/4}), \qquad (66)$$

$$\psi_1=11{,}3\lg\left(25{,}09+\frac{4{,}91}{\mathrm{Pr}}\right)-11{,}3\lg\left(1{,}16+\frac{4{,}91}{\mathrm{Pr}}\right)+\psi_0.$$

[1]) Есьман И. Е. Гидравлика.— М.: ГОНТИ НКТП СССР, 1938, с. 365, табл. 58

Введем в рассмотрение число Стэнтона St_m, построенное по значениям скорости и избыточной температуры U_m и $\theta_m=T_w-T_m$ на оси трубы. Сохраняя определение числа Стэнтона в ранее указанной форме, будем иметь

$$\mathrm{St}_m=\frac{q_w}{\rho c_p U_m\,(T_w-T_m)}\,. \tag{67}$$

Вспоминая обозначения (56), получим

$$\frac{1}{\mathrm{St}_m}=\frac{U_m}{v_*}\,\frac{\rho c_p v_*}{q_w}\,(T_w-T_m)=\varphi_m\psi_m, \tag{68}$$

причем, согласно (63) и последнему равенству системы (65), будет

$$\psi_m=5{,}75\lg\eta_m-8{,}49+\psi_1=\psi_m-13{,}73+\psi_1;$$

кроме того,

$$\varphi_m=\left(\frac{2}{c_f}\right)^{1/2},\quad c_f=\frac{2\tau_w}{\rho U_m^2}\,.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{\mathrm{St}_m}=\frac{2}{c_f}+\left(\frac{2}{c_f}\right)^{1/2}(\psi_1-13{,}73). \tag{69}$$

Вводя функцию Кармана $g(\mathrm{Pr})$ равенством, обобщающим правую часть первого соотношения (51), и сравнивая (51) и (69), получим искомое выражение функции $g(\mathrm{Pr})$

$$g(\mathrm{Pr})=\psi_1-13{,}73,$$

а используя систему равенств (66), окончательное ее выражение

$$g(\mathrm{Pr})=11{,}3\lg\left(25{,}09+\frac{4{,}91}{\mathrm{Pr}}\right)-11{,}3\lg\left(1{,}16+\frac{4{,}91}{\mathrm{Pr}}\right)-0{,}27+\frac{5{,}976}{\mathrm{Pr}}+$$
$$+\frac{4{,}453}{\mathrm{Pr}^2}+\left(8{,}06-\frac{20{,}15}{\mathrm{Pr}}-\frac{9{,}068}{\mathrm{Pr}^2}-\frac{6{,}549}{\mathrm{Pr}^3}\right)\mathrm{Pr}^{3/4}B\,(0{,}68\mathrm{Pr}^{1/4}), \tag{70}$$

справедливое для любых $\mathrm{Pr}\geqslant 1$.

Последнее равенство включает более простое асимптотическое равенство $g(\mathrm{Pr})$ при больших числах Pr

$$g(\mathrm{Pr})\sim 8{,}97\,\mathrm{Pr}^{3/4}+6{,}26-\frac{22{,}4}{\mathrm{Pr}^{1/4}}+O\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right). \tag{71}$$

Заметим в заключение, что число Стэнтона St, построенное по средним значениям скорости и избыточной температуры $u_{\mathrm{ср}}$ и $T_w-T_{\mathrm{ср}}$, будет, аналогично (68), определяться равенством

$$\mathrm{St}=\frac{1}{\varphi_{\mathrm{ср}}\psi_{\mathrm{ср}}}=\frac{1}{\varphi_m\psi_m}\,\frac{\varphi_m}{\varphi_{\mathrm{ср}}}\,\frac{\psi_m}{\psi_{\mathrm{ср}}}=\mathrm{St}_m\,\frac{\varphi_m}{\varphi_{\mathrm{ср}}}\,\frac{\psi_m}{\psi_{\mathrm{ср}}}\,, \tag{72}$$

причем, по предыдущему,

$$c_f=\frac{2\tau_w}{\rho U_m^2}=2\,\frac{1}{\varphi_{\mathrm{ср}}^2}\left(\frac{\varphi_{\mathrm{ср}}}{\varphi_m}\right)^2,\quad \varphi_{\mathrm{ср}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}\,,$$

так что, переходя в (72) к средним характеристикам, будем иметь

$$\mathrm{St}=\frac{\lambda\psi_m/\psi_{\mathrm{ср}}}{8\varphi_m/\varphi_{\mathrm{ср}}+2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}g(\mathrm{Pr})}\,. \tag{73}$$

Как об этом можно заключить по кривым зависимости безразмерной температуры $\psi/\psi_m=(T-T_w)/(T_m-T_w)$ от безразмерного расстояния от стенки трубы y/a (рис. 267), с ростом числа Pr профили температуры становятся более заполненными, так что отношение ψ_m/ψ_{cp} приближается к единице. Принимая приближенно $\psi_m/\psi_{cp}\approx 1$, используем формулу (125) гл. XIII, переписанную в виде

$$\frac{\varphi_m}{\varphi_{cp}}=1+\frac{4{,}08}{\varphi_{cp}}\approx 1+1{,}44\sqrt{\lambda}. \qquad (74)$$

На основании этих приближенных соотношений и асимптотического представления (71) функции $g(\mathrm{Pr})$, получим по (73) следующее *асимптотическое* выражение (при больших Pr) числа Стэнтона:

$$\mathrm{St}\sim 0{,}04\lambda^{1/4}\mathrm{Pr}^{-3/4}-(0{,}0124+0{,}0175\lambda^{1/2})\,\mathrm{Pr}^{-5/4}+$$
$$+0{,}0985\lambda^{1/2}\mathrm{Pr}^{-7/4}+O(\mathrm{Pr}^{-9/4}). \qquad (75)$$

На рис. 268 приведен график зависимости чисел St и St_d (определенного в терминах концентрации) от числа Pr или эквивалентному ему

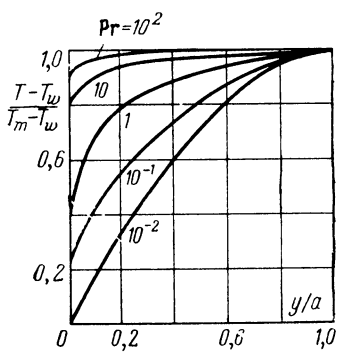


Рис. 267

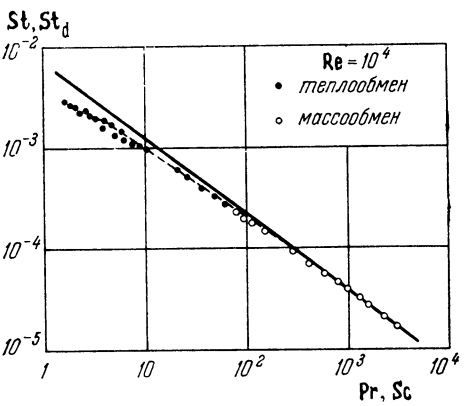


Рис. 268

по величине числа Шмидта Sc. Опытные точки заимствованы из статьи Дайслера[1]). Штриховая кривая построена по формуле (75) и проверена численным интегрированием функции $\psi(\eta)$ по второй и третьей формулам (60). Сплошная прямая соответствует предельной формуле Дайслера

$$\mathrm{St}=0{,}04\lambda^{1/4}\,\mathrm{Pr}^{-3/4}, \qquad (76)$$

справедливой при очень больших значениях чисел Прандтля и Шмидта. График на рисунке соответствует значению рейнольдсова числа $\mathrm{Re}=10^4$, при котором λ определялось по формуле Блазиуса (130) гл. XIII.

Предыдущие рассуждения относились только к тепломассопереносу при *больших* значениях числа Pr и $\mathrm{Pr}_t=1$. Случай *малых* чисел Pr, что соответствует расплавам металлов или сильно ионизованным газам, по своему механизму переноса резко отличается от рассмотренного случая больших чисел Pr.

При *малых* числах Pr *температурный пограничный слой толще скоростного*, температура «размазана» по широкой по сравнению со скоростным пограничным слоем области. Как это видно из рис. 267, про-

[1]) Deissler R. Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers — NACA Rep., 1959, v. 1210.

фили температуры при малых Pr становятся похожими на «ламинарные» аналоги скоростей (рис. 192). Литература в этой области тепломассопереноса весьма обширна [1]).

Изложенное в настоящем параграфе только односторонне и в малой степени осветило общее содержание современного учения о тепломассопереносе в турбулентных потоках жидкости (см. ранее указанные монографии в этой области). Для пополнения материала этого раздела дадим некоторые дополнительные сведения о распределении *температуры* по сечению трубы или пограничного слоя, причем откажемся от принятого ранее ограничения $\mathrm{Pr}_t=1$.

Из второго равенства системы (58) гл. XIII, переписанного в форме (знак включаем в определение производной dT/dy)

$$q=(\lambda+\rho c_p\varepsilon_q)\frac{dT}{dy}=\left(\lambda+\frac{\rho c_p\varepsilon_\tau}{\mathrm{Pr}_t}\right)\frac{dT}{dy},$$

где произведена замена ε_q на $\varepsilon_\tau=\nu_t$, согласно равенству (67) гл. XIII,

$$\varepsilon_q=\frac{\varepsilon_\tau}{\mathrm{Pr}_t}=\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_t}, \tag{77}$$

найдем, пользуясь принятым упрощением ($q=\mathrm{const}=q_w$),

$$q_w=\left[\lambda+\frac{\rho c_p\varkappa^2}{\mathrm{Pr}_t}y^2D(y)\frac{du}{dy}\right]\frac{dT}{dy}.$$

Переходя к универсальным переменным (56) и разделив обе части последнего равенства на q_w, получим

$$1=\left[\frac{1}{\mathrm{Pr}}+\frac{1}{\mathrm{Pr}_t}\varkappa^2\eta^2D(\eta)\frac{d\varphi}{d\eta}\right]\frac{d\psi}{d\eta},$$

откуда следует

$$\frac{d\psi}{d\eta}=\left[\frac{1}{\mathrm{Pr}}+\frac{1}{\mathrm{Pr}_t}\varkappa^2\eta^2D(\eta)\frac{d\varphi}{d\eta}\right]^{-1},$$

$$\psi=\int_0^\eta\frac{d\eta}{\frac{1}{\mathrm{Pr}}+\frac{1}{\mathrm{Pr}_t}\varkappa^2\eta^2D(\eta)\frac{d\varphi}{d\eta}}. \tag{78}$$

Эти равенства вместе с равенствами (34) решают поставленный вопрос о распределении температуры по сечениям трубы или пограничного слоя в интегральной форме, основанной на принятии ранее указанных приближенных выражений демпфирующего фактора (30) или (32).

Формулы вида (78), обычно фигурирующие в монографиях [2]), отличаются тем, что в них, так же как и в формулах (34), явно содержатся характерные для теории Прандтля и ее модификации, изложенной в начале настоящей главы, величины $\varkappa$ и $D(\eta)$. В некоторых случаях, если, например, распределение скоростей задано опытной кривой или известно из предварительного расчета по той или иной теории, для определения температур можно воспользоваться интегральной формулой, не содержащей $\varkappa$ и $D(\eta)$, т. е. не связанной в своем выражении с

---

[1]) Боришанский В. М., Кутателадзе С. С., Новиков И. И., Федынский О. С. Жидкометаллические теплоносители.— М: Атомиздат, 1967; там же см. библиографию.

[2]) См., например, ранее цитированную монографию А. А. Жукаускаса, с. 106, формула (7.39).

теорией пути смешения. Такую формулу нетрудно получить [1]), исключив из системы уравнений

$$\left(1+\frac{\varepsilon_t}{\nu}\right)\frac{d\varphi}{d\eta}=1,$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(1+\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_t}\frac{\varepsilon_t}{\nu}\right)\frac{d\psi}{d\eta}=1, \tag{79}$$

которая была применена при выводе формул (78), величину $\varepsilon_\tau/\nu=\nu_t/\nu$.

Если для краткости ввести обозначения

$$\frac{d\varphi}{d\eta}=\varphi', \quad \frac{d\psi}{d\eta}=\psi', \tag{80}$$

то в результате такого исключения получится следующее простое соотношение:

$$\frac{1}{\psi'}-\frac{1}{\mathrm{Pr}_t}\frac{1}{\varphi'}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}-\frac{1}{\mathrm{Pr}_t}. \tag{81}$$

Как легко заметить, известное условие подобия профилей скорости и избыточной температуры

$$\psi'=\varphi', \quad \psi=\varphi,$$

имеющее место при единичных значениях чисел Прандтля Pr и Pr_t, заключено в этом равенстве.

Формула (81) в общем случае: $\mathrm{Pr}\neq 1$, $\mathrm{Pr}_t\neq 1$ устанавливает *линейную* зависимость между обратными величинами производных φ' и ψ', служащую в известном роде обобщением аналогии Рейнольдса на этот общий случай.

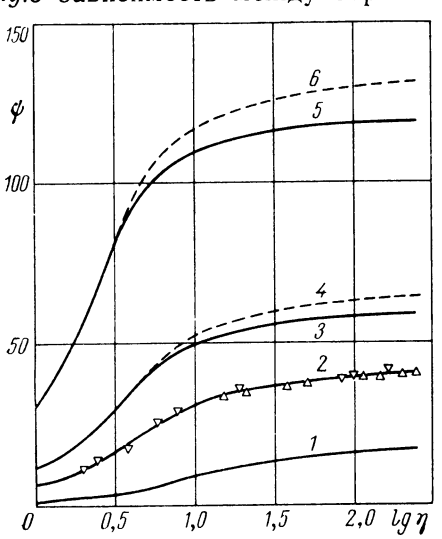


Рис. 269

Из (81) непосредственно вытекает следующая интегральная формула для определения температуры по заданным профилям скоростей и числам Прандтля Pr и Pr_t:

$$\psi=\int_0^\eta \frac{d\eta}{\frac{1}{\mathrm{Pr}_t}\frac{1}{\varphi'}+\frac{1}{\mathrm{Pr}}-\frac{1}{\mathrm{Pr}_t}}. \tag{82}$$

Не будем останавливаться на некоторых общих следствиях, вытекающих из двух последних формул, и возможном их обобщении на случай наличия продольного градиента давления, не представляющем той наглядности, как только что приведенные выражения (81) и (82) [2]).

Проиллюстрируем приведенные только что рассуждения численным расчетом распределения относительной избыточной температуры ψ по формуле (82).

Для отыскания распределения скоростей $\varphi(\eta)$ используем второе равенство (34), в котором демпфирующий фактор определен совокуп-

[1]) Л о й ц я н с к и й Л. Г. Об одной общей формуле теории тепломассопереноса в пристенной области турбулентного пограничного слоя — В кн: Гидроаэродинамика.— Л: Изд ЛПИ, 1983, с. 3—10.

[2]) По этому поводу см. только что цитированную нашу статью.

ностью равенства (25) и второго соотношения системы (17). Этому распределению скоростей соответствует сплошная линия на рис. 264, достаточно хорошо согласующаяся с опытными точками.

Число Pr_t принималось равным 0,8. Числам Pr придавались значения 5,4; 10 и 30. На рис. 269 им соответствуют кривые *2, 3, 5*. Кривая *1* отвечает значениям $\mathrm{Pr}_t=1$, $\mathrm{Pr}=1$, что отражает принятое распределение скорости $\varphi(\eta)=\psi(\eta)$. Насколько допустимо в расчетах пользоваться значением $\mathrm{Pr}_t=1$ вместо действительного, показывают штриховые кривые *4* и *6*. Согласно этим кривым разница в распределениях температуры при $\mathrm{Pr}_t=0{,}8$ и $\mathrm{Pr}_t=1$ для чисел $\mathrm{Pr}=10$ и $\mathrm{Pr}=30$ вполне заметна, но она уменьшается с приближением числа Pr к единице.

Кривая *2* ($\mathrm{Pr}_t=0{,}8$, $\mathrm{Pr}=5{,}4$) аналогична верхней кривой на рис. 7.10, приведенном в ранее уже цитированной монографии А. А. Жукаускаса. Сплошная кривая соответствует нашим расчетным значениям, треугольные точки — экспериментальным данным А. А. Жукаускаса и А. А. Шланчяускаса[1]).

§ 137. «Внешняя» подобласть турбулентного пограничного слоя. Гипотеза Клаузера

Как уже упоминалось в предыдущем параграфе, метод «момента первого порядка» вызывает к себе доверие благодаря тому, что сопровождается схемой двух подобластей в турбулентном пограничном слое: «пристенной», управляемой «законом стенки», заключающем в себе применение теории пути смешения Прандтля с поправкой на влияние «демпфирующего фактора», и «внешней», описываемой «законом следа». О «пристенной» подобласти достаточно полно было сказано в двух предыдущих параграфах.

Обратимся к рассмотрению «внешней» подобласти, занимающей бо́льшую часть пограничного слоя, до 80% его толщины, а в предотрывной зоне практически и всю область пограничного слоя.

Истоки «двухслойной» модели *турбулентного* пограничного слоя принято находить в работах Ф. Клаузера[2]), хотя идея двухслойной модели, применительно к *ламинарному* пограничному слою с характерной для этой модели проблемой «сшивания» внутреннего и внешнего решений, была высказана значительно раньше Карманом[3]).

Внешняя подобласть турбулентного пограничного слоя располагается между внешней границей «пристенной» подобласти и внешней границей (в номинальном ее понимании как *конечной* величины) пограничного слоя. В этой области движение жидкости определяется «законом следа», главной особенностью которого, в соответствии с гипотезой Клаузера, является *постоянство* (независимость от y) коэффициента турбулентной вязкости ν_t поперек пограничного слоя. Действительный

---

[1]) Жукаускас А. А., Шланчяускас А. А. Теплоотдача в турбулентном потоке жидкости.— Вильнюс: Минтис, 1973, с. 107—111 (цитируем по ранее упомянутой монографии А. А. Жукаускаса).

[2]) Clauser F. H. Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients.— Journ. Aeron. Sci, 1954, v. 21, p. 91—108 и последовавший вскоре обзор того же автора: Turbulent boundary layer — In: Advances in applied mechanics.— N.-Y.: Acad. Press, 1956, v. IV, вышедший в русском переводе в сборнике: Проблемы механики, вып. II.— М.: ИЛ, 1959. Термины «закон стенки» и «закон следа» были введены Д. Колзом (Coles D. The law of the wake in the turbulent boundary layer.— Journ. Fluid Mech., 1956, v. I, part 2). Им же была построена однопараметрическая форма профилей скорости в сечениях пограничного слоя в области «закона следа».

[3]) Kármán Th., Millikan C. B. On the theory of laminar boundary layers involving separation — NACA Rep., 1934, № 504, а также: Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя.— Л.; М.: Гостехиздат, 1941, § 6, с. 191—204.

характер изменения ν_t вдоль этой области определяется «модифицированной гипотезой Клаузера», предложенной Ю. В. Лапиным и М. Х. Стрельцом[1]) и излагаемой далее. С развитием турбулентного пограничного слоя и переходом течения в диффузорную часть ($dp/dx>0$) весь пограничный слой и его «внешняя» подобласть утолщаются, а при приближении к точке отрыва «внешняя» подобласть стремится полностью занять все сечение пограничного слоя.

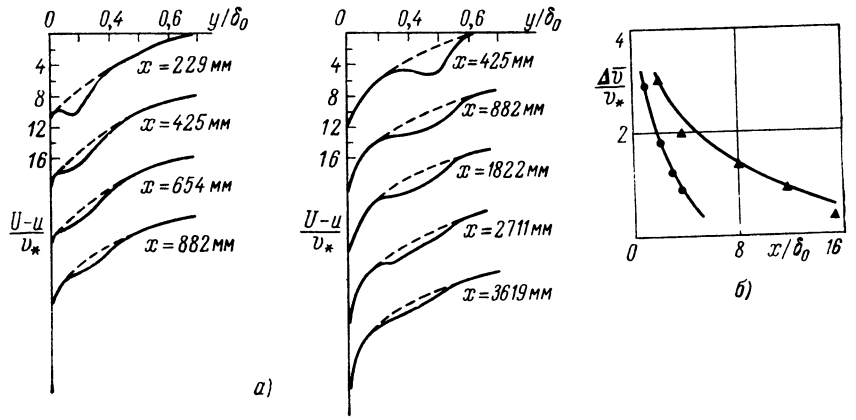


Рис. 270

Различие в структуре турбулентности этих двух подобластей было наглядно показано следующим, сыгравшим исключительно важную роль опытом Клаузера, позволившим не только глубже проникнуть в вихревую структуру этих подобластей, но и поставить под сомнение применимость гипотезы Буссинеска (43) предыдущей главы для «внешней» подобласти пограничного слоя.

Прут диаметра $d=12{,}7$ мм был помещен вблизи твердой стенки нормально к потоку в сечении пограничного слоя толщиной $\delta_0=236$ мм на двух расстояниях y от стенки, определяемых величинами $y/\delta_0=16\%$ и $y/\delta_0=59\%$. Профили скоростей такого возмущенного движения показаны сплошными линиями на двух частях рис. 270, *а*: на левой — для расположения прута, более близкого к стенке ($y/\delta_0=16\%$), на правой — для более удаленного ($y/\delta_0=59\%$). Распределения скоростей, не возмущенные прутом, показаны штриховыми линиями. Из графиков можно сделать заключение, что *внутренняя* часть пограничного слоя быстрее возвращается к невозмущенному состоянию, чем *внешняя*. *Длины релаксации* возмущений можно оценить как 483 мм при $y/\delta_0=16\%$ и 1930 мм при $y/\delta_0=59\%$. Отдельные этапы этого процесса показаны на рис. 270, *а* в виде зависимостей дефектов скорости, отнесенных к динамической скорости, от расстояний x данного сечения пограничного слоя до сечения, содержавшего стержень. На рис. 270, *б* то же показано в виде графика зависимости максимального возмущения $\Delta\bar{v}$ от x/δ_0 для указанных двух расположений стержня. Причину этого различия в быстроте затухания возмущений Клаузер приписал разнице размеров тех «вихревых масс», которые, перемещаясь вместе с потоком и участвуя в поперечном к нему движении, создают турбулентную структуру потока в сечениях пограничного слоя. Вблизи твердой поверхности вихри, образовавшиеся на внешней границе вязкого подслоя (точнее гово-

[1]) Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Модификация гипотезы Клаузера для равновесных и неравновесных турбулентных пограничных слоев.— Теплофизика высоких температур, 1985, т. 23, № 3, с. 522—529.

ря, из-за потери устойчивости ламинарного движения на его границе), имеют размеры порядка толщины вязкого подслоя, т. е. очень *малы* по сравнению с общей толщиной пограничного слоя (примерно 1—2% этой толщины). Возникающая в этой зоне турбулентность может быть определена как «мелкомасштабная». Наоборот, при достижении внешней границы пограничного слоя вихри достигают сравнительно *больших* размеров, имеющих порядок толщины пограничного слоя. Во внешней подобласти при этом возникает «крупномасштабная» турбулентность.

Как было отмечено в конце § 94, «время жизни» больших вихрей, а следовательно, и переносимых ими возмущений, значительно превышает «время жизни» малых вихрей, чем и объясняется замеченная Клаузером разница в быстроте затухания возмущений (рис. 270). Влияние этого своеобразия вихревой структуры турбулентности никак не учитывается гипотезой Буссинеска, в которой турбулентность определяется локальной изотропией некоторой воображаемой «турбулентной жидкости» с обычным для вязкой жидкости законом зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформаций в осредненном движении и лишь с сильно повышенным значением переменного коэффициента турбулентной вязкости. Опыт Клаузера дает пример турбулентного движения с ярко выраженным явлением роли *предыстории*, включая в этот эффект и влияние *неоднородности* вихревой структуры потока. Другие примеры будут указаны в конце настоящей главы.

Клаузер подчеркнул это специфическое влияние вихревой структуры потока на релаксацию возмущений, введя в качестве параметра, учитывающего внешнюю сторону описанного явления, величину

$$\beta = \frac{\delta^* dp/dx}{\tau_w}, \tag{83}$$

имеющую смысл отношения перепада давления на характерной для пограничного слоя длине δ^* к напряжению местного трения τ_w на твердой границе пристенного пограничного слоя.

Далее будет показано, что для описания всего многообразия турбулентных течений в пограничных слоях *одного* параметра *недостаточно*; параметр Клаузера β лишь первый из ряда параметров, но сохраняющий главное значение в описании явления.

Пограничные слои, во всех сечениях которых параметр β сохраняет одну и ту же величину, Клаузер назвал *равновесными*. В таких пограничных слоях профили скоростей в сечениях подобны. В этом смысле «равновесные» турбулентные пограничные слои представляют *автомодельные* решения уравнений турбулентного пограничного слоя. Эта аналогия с ламинарным пограничным слоем строго осуществляется при наличии *степенного* распределения скорости на внешней границе пограничного слоя [1]), причем показатель степени в этом распределении может рассматриваться как параметр, однозначно с ним связанный [2]); так, при $\beta=0$; 0,9; 5,4 этот параметр соответственно равен 0; −0,15; −0,255.

Под *универсальным* профилем осредненных скоростей в турбулентном пограничном слое условимся понимать профиль, заданный в таких универсальных переменных, что форма этого профиля не зависит от местного коэффициента трения c_f, а следовательно, от местного

---

[1]) Alber J. E. Similar solutions for a family of separated turbulent boundary layers.— AIAA-Paper, 1971, № 71—203.

[2]) Bradshaw P. The turbulence structure of equilibrium boundary layers.— J Fluid Mech., 1967, v. 29, p. 625—645.

рейнольдсова числа. В пристенной области (т. е. в вязком подслое, переходной области и области логарифмического закона) таким профилем будет служить ранее рассмотренный в § 125 профиль в «универсальных» переменных $\varphi=u/v_*$ и $\eta=yv_*/\nu$. Этот профиль, как заметили Людвиг и Тиллман[1]), кроме универсальности по c_f (местному рейнольдсову числу), при не слишком больших значениях dp/dx обладает в пристенной области еще универсальностью по продольному изменению давления, т. е. не зависит от параметра β. Как показывают опыты, «универсальность» по местному рейнольдсову числу сохраняется в профилях дефекта скорости $(U-u)/v_*$, выраженного в функции от y/δ. Эта универсальность распространяется на всю область пограничного слоя, что позволяет *выделить собственное влияние продольного градиента давления* на распределение скоростей по всему сечению пограничного слоя. С этой целью, как предложил Клаузер, в качестве условной толщины пограничного слоя вместо δ примем величину

$$\Delta=\int_0^\infty \frac{U-u}{v_*}\,dy \tag{84}$$

и введем в рассмотрение не зависящее от рейнольдсова числа отношение двух интегралов

$$G=\int_0^\infty \left(\frac{U-u}{v_*}\right)^2 dy \Big/ \int_0^\infty \frac{U-u}{v_*}\,dy = \int_0^\infty \left(\frac{U-u}{v_*}\right)^2 d\left(\frac{y}{\Delta}\right). \tag{85}$$

Толщины δ^* и δ^{**} связаны с Δ соотношениями

$$\frac{\delta^*}{\Delta}=\frac{v_*}{U}=\sqrt{\frac{c_f}{2}},\quad \frac{\delta^{**}}{\Delta}=\left(1-G\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right)\sqrt{\frac{c_f}{2}}, \tag{86}$$

а параметр H определится равенством

$$H=\frac{\delta^*}{\delta^{**}}=\left(1-G\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right).$$

Параметр G находится в прямой зависимости от β; при $\beta=0$ он равен 6,8. График функции $G(\beta)$ будет приведен в последнем параграфе настоящей главы в связи с его использованием в качестве *показателя неравновесности рассматриваемого там пограничного слоя*. Роль G как параметра *неравновесности* пограничного слоя проиллюстрируем графиками: дефекта скорости $(U-u)/v_*$ как функции y/δ (рис. 271), где δ — здесь и далее — так называемая «номинальная» толщина пограничного слоя, ранее [формула (40) гл. XII] обозначавшаяся символом δ_{99}, и параметра H в функции от c_f (рис. 272). В качестве параметра на обоих графиках принята величина G. Экспериментальные точки на рис. 271 опущены; они кучно ложатся на приведенные кривые.

Как уже упоминалось выше, Клаузеру принадлежит также модель «закона следа». В основе ее лежит допущение о *постоянстве* кинематического коэффициента турбулентной вязкости ν_t во внешней части сечений пограничного слоя при возможном изменении его от сечения к сечению. Опыты не оправдывают это допущение. Как свидетельствуют современные данные[2]), отношение $\nu_t/(U\delta^*)$ в функции от безразмер-

[1]) Ludwieg H., Tillmann W. Investigation of the wall shearing stress in turbulent boundary layers.— NACA Techn. Memor., 1950, № 1285.

[2]) Цитируем по отчету Брэдшоу: The turbulence structure of equilibrium boundary layers.— NPL, Teddington; см. также ранее цитированную статью того же наименования в J. Fluid Mech.

ной координаты y/δ (рис. 273), построенное для трех значений $\beta=0$; 0,9 и 5,4 (последнее значение β соответствует значительной диффузорности), при приближении к *внешней границе пограничного слоя при всех значениях* β *убывает*. Но, как отмечает в только что цитированной работе Брэдшоу, «терпимое приближение к профилю осредненной скорости было получено в предположении о постоянстве этой величины» (подразумевается ν_t). Это предположение Клаузера с теми или

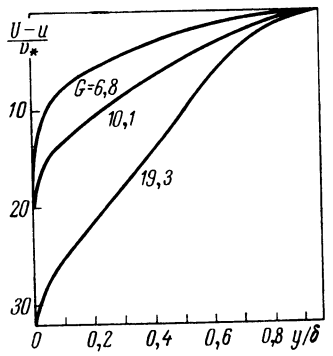


Рис. 271

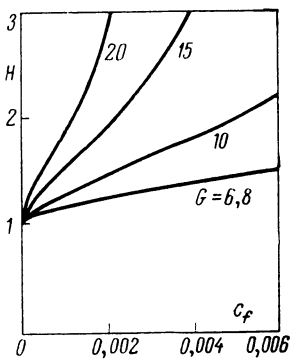


Рис. 272

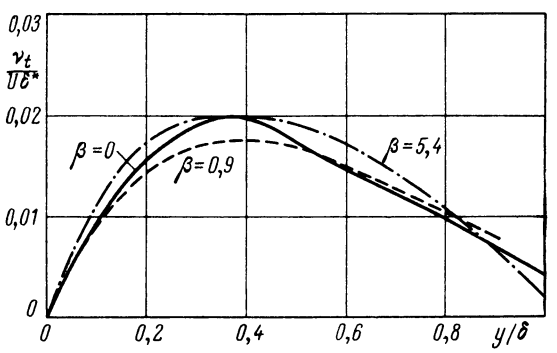


Рис. 273

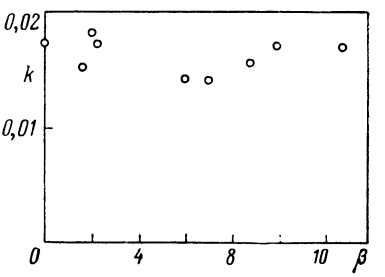


Рис. 274

другими поправками широко используется в современных методах расчета турбулентных пограничных слоев[1]).

Что касается изменения ν_t *вдоль* внешней области пограничного слоя, то и здесь Клаузер пошел на значительные упрощения.

Заметив, что размерность ν_t определяется произведением скорости на длину, Клаузер принял за характерную скорость *динамическую скорость* $v_*=\sqrt{\tau_w/\rho}$, связанную с трением и имеющую определяющее значение во всей области пограничного слоя, а за длину — размер крупных вихрей, заполняющих внешнюю область пограничного слоя, пропорциональный толщине пограничного слоя, введенной им как Δ (84). Это привело Клаузера к формуле для кинематического коэффициента вязкости ν_t

$$\nu_t=kv_*\Delta,$$

или к эквивалентному ей по первому равенству (85) следующему

[1]) См. Cebeci T, Smith A. M O. Analysis of turbulent boundary layer.— Appl. Math. and Mech., 1974, v 15.

выражению *гипотезы Клаузера*:

$$\nu_t = kU\delta^* = k\int_0^\infty (U-u)\,dy, \tag{87}$$

где коэффициент пропорциональности k, вообще говоря, может быть функцией параметра β (83). Обработка имевшихся к тому времени опытов дала показанный на рис. 274 разброс точек, выражающих зависимость $k(\beta)$, достигающий примерно двадцатипятипроцентной величины. Клаузер отнес этот разброс к неточностям экспериментов и предложил на всем протяжении пограничного слоя считать k *постоянной величиной*, равной в среднем $k=0{,}018$. Современные авторы, пользующиеся допущением о постоянстве k, принимают k равным 0,0168.

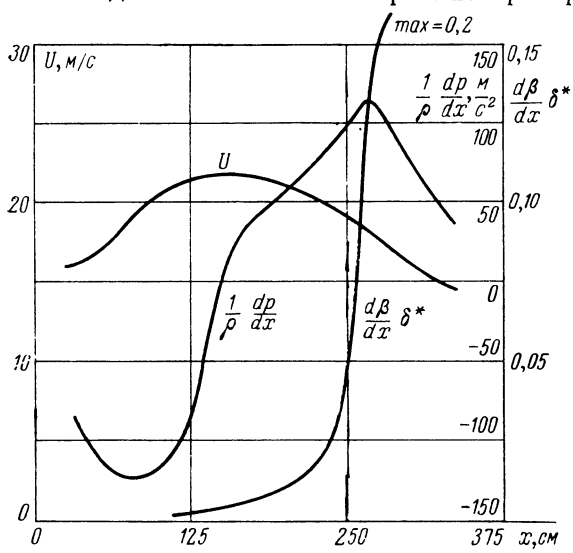


Рис 275

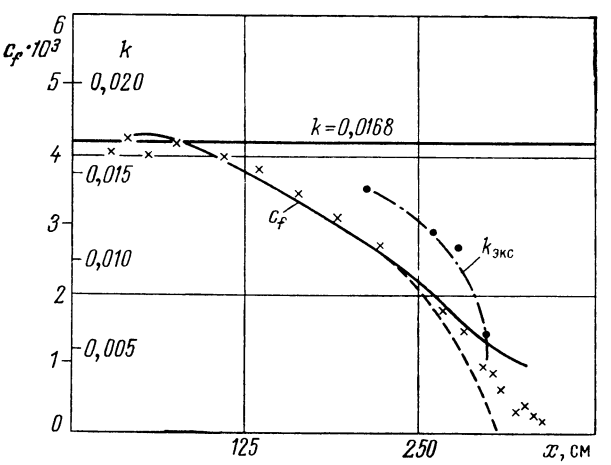


Рис. 276

Последующие опыты показали, что k представляет значительно изменяющуюся, особенно в неравновесной области, функцию параметра β, так что диаграмма на рис. 274 должна была бы быть расширена как на бóльшие β, так и на меньшие k.

Ярким подтверждением этого факта могут служить сравнительно недавно опубликованные экспериментальные данные Симпсона, Чью и Шивапрасада[1]). Основные характеристики исследованного ими турбулентного пограничного слоя приведены на рис. 275. Судя по распределениям скорости $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя, перепада давления $(1/\rho)\times$ $\times(dp/dx)$, а особенно по *быстроте изменения* β вдоль пограничного слоя, представленной безразмерной величиной $(d\beta/dx)\delta^*$, можно заключить о *значительной неравновесности* изученного авторами пограничного слоя.

Экспериментальные данные этих авторов были обработаны Ю. В. Лапиным и М. Х. Стрельцом[2]). Наиболее интересным из этих результатов представляется указанное на рис. 276 штрих-пунк-

[1]) Simpson R. L., Chew Y.-T., Shivaprasad B. G. Structure of separating turbulent boundary layer. Part 1: Mean flow and Reynolds stresses.— Journ. Fluid Mech., 1981, v. 113, p. 23—51.

[2]) См. ссылку на с. 718.

тиром изменение коэффициента Клаузера k вдоль пограничного слоя. Это *резкое падение* k в предотрывной, неравновесной области ($dp/dx>0$) позволяет сделать предположение, что k, а следовательно, и ν_t стремятся к нулю. Утолщение пограничного слоя в предотрывной области свидетельствует о росте вихревых масс, заполняющих пограничный слой и достигающих по своим средним размерам толщины этого слоя. Взаимодействие таких «крупных вихрей» описывается законами «когерентной турбулентности», отличными от законов переноса, выражаемых гипотезой Буссинеска и теорией «пути смешения», что и подчеркивается наблюдаемым в экспериментах равенством нулю коэффициента «турбулентной вязкости» ν_t. Как указывает П. Брэдшоу[1]), в движении жидкости в турбулентном пограничном слое можно выделить «активную» внутреннюю часть, *генерирующую вихри*, перенос которых обеспечивает турбулентное трение, и «пассивную» внешнюю часть, содержащую уже развитые «большие вихри», подверженные пульсациям давления, но *не участвующие в образовании трения*. Механизм взаимодействия этих «больших» вихрей еще полностью не раскрыт, но допускает в некоторых случаях исследование численными методами. Этими вопросами занимается современная теория «когерентной турбулентности».

Только что приведенное высказывание Брэдшоу подчеркивает особую важность для характера движения во *всем* пограничном слое, включая как *внутренние*, так и *внешние* его подобласти, напряжения трения τ_w на *твердой* границе, т. е. нижней границе пристенной подобласти. Этим определяется и значительная роль *динамической* скорости $v_*=\sqrt{\tau_w/\rho}$ как *основного масштаба скоростей* в сечениях пограничного слоя, с чем приходилось неоднократно встречаться на протяжении предыдущей и настоящей глав.

Гипотеза Клаузера о постоянстве k, как показало сравнение расчетов с опытными материалами, сохраняет свое значение в конфузорной ($dp/dx<0$) и безградиентной ($dp/dx=0$) частях пограничного слоя и, с известным приближением, в диффузорной части при малых отклонениях от *равновесного* распределения давления. В предотрывных областях *неравновесных* пограничных слоев Ю. В. Лапин и М. Х. Стрелец с успехом применили предложенную ими полуэмпирическую формулу коэффициента Клаузера k

$$k=0{,}0168\exp\left(-A\beta+B\frac{d\beta}{dx}\delta^*\right), \tag{88}$$

где, напоминаем, $\beta=(dp/dx)(\delta^*/\tau_w)$.

Эта формула, как показали только что упомянутые исследователи, дает хорошие результаты в случае *равновесных* слоев ($d\beta/dx=0$) и может с успехом применяться для *неравновесных* слоев в своем общем виде (88). При этом формула (88) лишена недостатка первоначальной формулы Клаузера (87), не удовлетворяющей условиям вблизи точки отрыва

$$k\to 0 \quad \text{при} \quad \tau_w\to 0, \quad \beta\to\infty. \tag{89}$$

Для определения констант A и B авторы соотношения (88) использовали серии экспериментов (1100, 1200, 1300, 2100, 2200, 2300, 3300), приведенные в ранее цитированных Трудах стэнфордской конференции, причем на каждом шаге численного расчета выбирались значения A и B, приводящие к совпадению с опытом, которые затем усреднялись по методу наименьших квадратов. Рекомендуемые авторами значения констант:

$$A=0{,}177, \quad B=7{,}0. \tag{90}$$

[1]) См. цитированную на с. 719 статью П. Брэдшоу.

§ 138. Результаты численных расчетов турбулентных пограничных слоев по методу моментов первого порядка

Проблема расчета турбулентных пограничных слоев по своей сложности не идет ни в какое сравнение с аналогичной проблемой для ламинарных течений. И дело здесь не столько в объеме вычислений — при современном уровне вычислительной техники это не послужило бы существенным затруднением,— сколько в принципиальных трудностях самой постановки задач о турбулентных движениях. Отсутствие до сих пор полной ясности в представлениях о механизме турбулентных движений проявляется, прежде всего, в *незамкнутости* системы уравнений переноса импульса, рейнольдсовых напряжений и других турбулентных характеристик, а также в недостаточно рациональной обоснованности тех дополнительных соотношений, называемых «связками», которые предназначены для приближенного *замыкания* уравнений переноса. Для излагаемого в настоящем параграфе метода *моментов первого порядка* такого рода «связками» служат: теория пути смешения Прандтля с поправкой на демпфирующий фактор во *внутренней, пристенной* подобласти турбулентного пограничного слоя и гипотеза Клаузера — для внешней подобласти — с модификацией Ю. В. Лапина и М. Х. Стрельца, о которой была речь в конце предыдущего параграфа.

Несмотря на существование большого числа разнообразных методов расчета турбулентного пограничного слоя, а излагаемый в настоящем параграфе метод является среди них едва ли не самым простым,— вопрос о достаточно практически приемлемом методе всегда связывается со степенью совпадения результатов расчета с опытными данными. Даже если при расчете используется *экспериментальное* распределение внешней скорости, что снимает вопрос об отдельном учете обратного влияния пограничного слоя на внешний безвихревой поток, то и при этом сохраняется сомнение в правильности расчетного определения точки отрыва. Дело в том, что так же, как и в случае ламинарного пограничного слоя (вспомнить конец § 106), уравнения турбулентного пограничного слоя (1), представляющие результат отбрасывания в уравнениях (15) предыдущей главы членов: $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial\tau/\partial x$, $\partial p/\partial y$, в соответствии с «приближением пограничного слоя», не могут применяться в области отрыва. В случае турбулентного пограничного слоя положение усугубляется еще тем, что структура потока в области отрыва исключает применение модели Буссинеска и формулы (43) гл. XIII, так как здесь на смену обычному для пристеночных течений механизму турбулентного обмена приходит взаимодействие «больших вихрей», описываемое моделью «когерентной» турбулентности (см. конец § 140). Обычный способ определения положения точки отрыва становится еще более «условным», чем в случае ламинарного пограничного слоя. Общий анализ явления турбулентного отрыва можно найти в монографии Л. В. Гогиша и Г. Ю. Степанова[1]). Экспериментальному исследованию отрыва турбулентного пограничного слоя посвящены работы Стрэтфорда[2]). Существующая литература по *моментным* методам расчета турбулентного пограничного слоя настолько велика, что даже простой библиографический указатель занял бы много места.

---

[1]) Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения.— М.: Наука, 1979.

[2]) Stratford B. S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer.— Journ. of Fluid Mech., 1959, v. 5, part 1, p. 1—16 и там же: An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise, p. 17—35.

Удовольствуемся несколькими рекомендациями монографий и обзоров [1]).

Излагаемый в настоящем параграфе метод моментов *первого* порядка сводится к численному интегрированию системы уравнений (1), в которой положено

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{91}$$

$$\nu_t = \begin{cases} \varkappa^2 y^2 D(y) \dfrac{\partial u}{\partial y} & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant y_m, \\ kU\delta^* \gamma & \text{при } y_m < y < \infty. \end{cases} \tag{92}$$

Здесь, кроме принятых в (1) обозначений, имеются еще следующие: ν_t — кинематический коэффициент «турбулентной вязкости», $D(y)$ — демпфирующий коэффициент, определенный формулой Ван-Дриста (26) или формулой (28), $\varkappa$ — постоянная Кармана, k — множитель в *модифицированной* формуле Клаузера (88), U — скорость на внешней границе пограничного слоя, δ^* — толщина вытеснения, $y_m = y_m(x)$ — граница между «внутренней» и «внешней» подобластями пограничного слоя; γ — коэффициент *перемежаемости* ламинарного и турбулентного пограничных слоев, принимаемый равным ($b \approx 6$ — эмпирический коэффициент)

$$\gamma = \left[1 + 5{,}5\left(\frac{y}{\delta}\right)^b\right]^{-1}.$$

Себеси и Смит [2]), заменив в допущении (29) динамическую скорость v_* на скорость $v_в = 11{,}8\, v_*$, равную скорости на внешней границе вязкого подслоя, ввели в формулу Ван-Дриста вместо постоянной $A_* = 26$ новую постоянную $A = 26\,(1 + 11{,}8\, p_*)^{-1/2}$, где $p_* = \dfrac{dp}{dx}\dfrac{\nu}{\rho v_*^3}$, а в формулу Клаузера в правой части последнего равенства системы (92), — дополнительный множитель, учитывающий влияние рейнольдсова числа.

Пренебрегая этими поправками, но учитывая влияние коэффициента перемежаемости γ, Ю. В. Лапин и М. Х. Стрелец, используя формулы (88) и (90), произвели расчет пограничного слоя, экспериментально изученного Симпсоном, Чью и Шивапрасадом (см. ранее приведенную ссылку). Рассчитывалась наиболее важная характеристика пограничного слоя — коэффициент местного трения на твердой поверхности c_f. Желая выяснить сравнительное значение второго слагаемого в показателе экспоненты (88), Ю. В. Лапин и М. Х. Стрелец провели раздельно два расчета: по полной формуле (88) — на рис. 276 сплошная кривая — и по той же формуле, но без второго слагаемого в экспоненте — на рис. 276 штриховая кривая.

---

[1]) Прежде всего упомянем исчерпывающий обзор: Гиневский А. С., Иоселевич В. А., Колесников А. В., Лапин Ю. В., Пилипенко В. Н., Секундов А. Н. Методы расчета турбулентного пограничного слоя.— Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. Т. 11.— М.: ВИНИТИ, 1978, с. 155—304, содержащий почти 700 ссылок на советские и зарубежные работы. Большой интерес представляют монографии: Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.— Л.: Судостроение, 1973; Сборник: Турбулентность, принципы и применения/Под ред. У. Фроста и Т. Моулдена.— М.: Мир, 1980, гл. 7—10; Белов И. А. Модели турбулентности.— Л.: Изд-во Ленингр. механ. ин-та, 1986; Bradshaw P, Cebeci T., Whitelaw J. Engineering calculation methods for turbulent flow — London: Acad Press, 1981, гл. 1—7.

[2]) Цитируем по монографии Bradshaw P, Cebeci T, Whitelaw J., упомянутой в конце предыдущей сноски; p. 43, 44.

Кривые эти взяли «в вилку» опытные точки, показанные крестиками, что говорит об относительной близости результатов расчета по полной формуле (88) к опыту по крайней мере в области $0<x<300$ см. Экстраполируя кривые до нулевого значения c_f, получим некоторый разброс в положении точки отрыва. Трудно сказать, есть ли это результат недостатков формулы (88), нуждающейся еще в уточнении, например, за счет привлечения следующих производных от β и U, что практически трудно сколько-нибудь точно реализовать, или же непригодности вообще расчета, основанного на гипотезе Буссинеска, в этой переходной к «когерентной турбулентности» области далеко зашедшего за границы равновесности пограничного слоя.

Подтверждением пригодности выражения коэффициента k по формулам (88) и (90) в случае пограничного слоя, слабо отличающегося от равновесного (эксперимент «1100» по классификации, использованной в ранее цитированных Трудах стэнфордской конференции), могут служить приведенные на рис. 277 результаты расчета Ю. В. Лапиным и М. Х. Стрельцом двух характеристик: c_f и $H=\delta^*/\delta^{**}$. Сплошные линии на рис. 277 относятся к расчетам с использованием модифицированной этими авторами формулы для k [(88) и (90)], а штриховые — по классической формуле Клаузера с постоянным значением $k=0{,}0168$. Экспериментальные значения этих величин показаны крестиками для c_f и точками для H. Изображенные на рис. 277 кривые подтверждают высказанные ранее соображения об удовлетворительности применения *модифицированной* формулы Клаузера почти для всего пограничного слоя, если неравновесность его невелика. Отклонения результатов расчета по методу, основанному на первоначальной гипотезе Клаузера о постоянстве коэффициента k, даже в этом случае, соответствующем слабой неравновесности пограничного слоя, заметны.

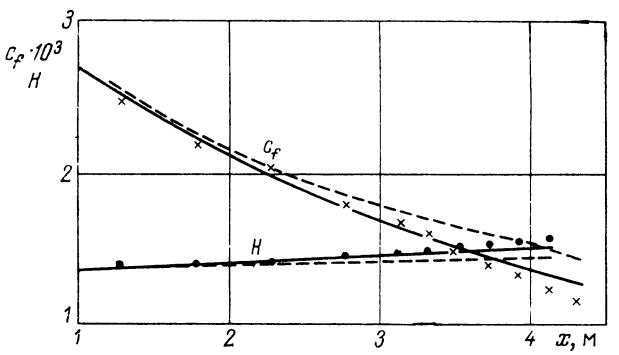


Рис. 277

Априорных суждений о пригодности или непригодности метода моментов первого порядка для отдельных задач с произвольным распределением скорости на внешней границе пограничного слоя сделать нельзя. Необходимость проверки достоверности результатов расчета на основе различных экспериментальных данных сохраняется до сих пор.

Некоторую трудность для численного расчета по двухслойной схеме составляет необходимость *сращивания* «внутреннего» и «внешнего» решений. Вопрос этот подробно изложен в монографии Ю. В. Лапина [1]). Сращивание в этих расчетах производилось по напряжению трения τ и коэффициенту турбулентной вязкости ν_t, а поскольку в основе метода лежит гипотеза Буссинеска (43) предыдущей главы, то тем самым и по производной du/dy. Заметим, что в том случае, когда точка сращивания подобластей в сечениях пограничных слоев, приближающихся к сечению отрыва, попадает сначала в переходную часть «пристенной» подобласти, а затем и в вязкий подслой, определение ординаты y_m точ-

[1]) Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа.— 2-е изд.— М.: Наука, 1982, с 112

ки сращивания сводится к решению сложного трансцендентного уравнения; решение это выполняется по ходу численного расчета и подтверждает стремление y_m к нулю, что соответствует заполнению всего отрывного сечения «внешней» подобластью, подчиненной «закону следа».

Оценивая метод моментов первого порядка, отметим его преимущества по сравнению с эмпирическими и полуэмпирическими методами, изложенными в предыдущей главе. Произведенные расчеты показали его бо́льшую точность по сравнению даже с наилучшим из «старых» методов — методом «интегральных» соотношений.

К недостаткам метода моментов первого порядка можно отнести его *однопараметричность*, имеющую место в *первоначальной* постановке метода, опирающейся на гипотезу Клаузера о постоянстве коэффициента k, а также отсутствие рациональных соображений по поводу выбора величины β как *единственного* параметра, что неубедительно для большинства заведомо неравновесных пограничных слоев. В этом смысле заслуживает особого внимания предложенная Ю. В. Лапиным и М. Х. Стрельцом модификация (88) формулы Клаузера путем введения множителя, содержащего *два* параметра: β и $(d\beta/dx)\delta^*$, ослабляющая упомянутый недостаток метода моментов первого порядка.

Из публикаций, содержащих детали численных расчетов турбулентных пограничных слоев по изложенному выше методу моментов первого порядка, отметим статью Г. Н. Емельяновой[1]), которая использовала в своих расчетах *неявную разностную схему и метод прогонки* (см. § 102 настоящего курса). Формула Клаузера применялась в своем первоначальном, не модифицированном виде, что не позволило автору приблизиться к предотрывной области и определить точку отрыва. Результаты сравнены с опытными данными, помещенными в неоднократно цитированных ранее Трудах стэнфордской конференции.

Метод *обобщенного подобия* в применении к расчету турбулентных пограничных слоев покоится на тех же двух полуэмпирических основах, что и изложенный метод моментов первого порядка. Это — теория «пути смешения», уточненная введением демпфирующего фактора,— для «внутренней» подобласти пограничного слоя и гипотеза Клаузера в своей первоначальной или модифицированной форме — для «внешней» подобласти. Ничего нового с точки зрения уточнения самого механизма турбулентности метод обобщенного подобия не содержит.

Однако роль метода обобщенного подобия в рационализации приемов установления определяющих параметров, а также известные вычислительные преимущества, позволяют считать его перспективным.

Первые, не явившиеся достаточно общими поиски приложения метода обобщенного подобия в теории турбулентного пограничного слоя мало что внесли в широкую постановку проблемы[2]).

В отличие от ламинарного пограничного слоя, для которого метод обобщенного подобия был изложен в § 113 и 114, в случае турбулентного пограничного слоя имеется большая свобода в выборе основных масштабов используемых в методе величин, причем эти масштабы различаются для «пристенной» и «внешней» подобластей. В остальном

---

[1]) Емельянова Г. Н. Численный метод решения уравнений плоского турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости с продольным градиентом давления.— Труды ЦАГИ, 1973, вып. 1543.

[2]) Лойцянский Л. Г. Параметры подобия в теории пограничного слоя — В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (сб. статей к 60-летию акад. Л. И. Седова).— М.: Наука, 1969, с. 301—310, § 4: Параметры подобия в турбулентном пограничном слое; и того же автора: Метод обобщенного подобия в полуэмпирических теориях турбулентного пограничного слоя.— Механика и энергомашиностроение.— Л., Труды ЛПИ, 1976, № 352, с. 4—9.

алгоритм остается прежним и, так же как в случае ламинарного пограничного слоя, приводит к преобразованию основного дифференциального уравнения пограничного слоя к «переменным обобщенного подобия» — «универсальному» для всех задач пристенного пограничного слоя виду, требующему лишь однократного численного интегрирования и составления таблиц решения, используемых при решении отдельных конкретных задач.

Для *внутренней* («пристенной») подобласти турбулентного пограничного слоя характерными масштабами — назовем их «внутренними» — явятся «универсальные» масштабы (§ 125): длин — $l_*=\nu/v_*$, скоростей — динамическая скорость $v_*=\sqrt{\tau_w/\rho}$, напряжений трения — $\tau_w=\mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$, функции тока — $v_*l_*=\nu$.

Для *внешней* подобласти «внешними» масштабами будут: δ^*, δ^{**} или какая-нибудь другая условная толщина пограничного слоя — масштабами длин, скорость на внешней границе пограничного слоя $U(x)$ — масштабом скоростей, подходящая по размерности величина ρU^2 — масштабом напряжений трения, произведения $U\delta^*$, $U\delta^{**}$ или аналогичные — масштабами функции тока.

Наряду с этими, непосредственно относящимися к соответствующим подобластям пограничного слоя, возможны и другие, «смешанные», масштабы. Так, например, во внешней области вместо $U(x)$ можно использовать в качестве масштаба скоростей ту же динамическую скорость v_*, что и во внутренней области, а для масштаба напряжений трения вместо ρU^2 принять τ_w или какое-нибудь другое значение напряжения грения в сечениях пограничного слоя.

Если подчиниться естественному ограничению в выборе масштабов, потребовав, чтобы они в границах их применения не равнялись нулю или бесконечности, то совокупность «внутренних» масштабов придется разбить на две части. К *первой* по ходу течения зоне пограничного слоя, включающей точку *минимума* давления ($dp/dx=0$), но достаточно удаленной от точки отрыва ($\tau_w=0$), можно отнести только что указанную систему «внутренних» масштабов. Для *второй*, следующей за первой, зоны «внутренней» подобласти пограничного слоя предыдущая группа масштабов уже непригодна, так как используемая величина напряжения трения на твердой стенке τ_w, а следовательно, и $v_*=\sqrt{\tau_w/\rho}$ обращаются в точке отрыва в нуль, а l_* — в бесконечность.

В этой *второй* зоне «внутренней» подобласти в основу определения масштабов можно положить нигде в ней не обращающуюся в нуль величину *продольного градиента давления* dp/dx, задав

$$l_S=\frac{\nu}{v_S},\quad v_S=\sqrt[3]{\left(\frac{\nu}{\rho}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)},\quad \tau_S=\rho v_S^2=\rho\sqrt[3]{\left[\left(\frac{\nu}{\rho}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]^2},$$

а масштаб функции тока равным $v_Sl_S=\nu$, как и в первой зоне[1]).

Заслуживает внимания следующее обстоятельство. Если в первой зоне вне вязкого подслоя и переходной области осуществляется *логарифмический* профиль скоростей, то во второй зоне его место занимает степенной профиль скоростей. Действительно, в известном выражении распределения трения τ вблизи твердой стенки, т. е. при малых y,

$$\tau=\tau_w+\left(\frac{dp}{dx}\right)y$$

при приближении к точке отрыва первое слагаемое мало и может быть

[1]) Stratford B. S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer.— Journ. Fluid Mech, 1959, v. 5, part 1, p 5.

опущено по сравнению со вторым. Сохраняя в этой второй зоне *вне вязкого подслоя* и *переходной области* формулу Прандтля и линейный закон пути смешения с той же константой Кармана $\varkappa$, будем иметь уравнение

$$\rho\varkappa^2 y^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2=\frac{dp}{dx}y,$$

интеграл которого, в отличие от *логарифмического* закона в первой зоне пограничного слоя, приобретет вид *степенно́го* закона «корня квадратного»

$$u=\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}}\sqrt{y}+\text{const},$$

хорошо подтверждаемого опытами [1]).

Общий вопрос о рациональном выборе масштабов длин, скоростей и других величин для различных зон вдоль и поперек пограничного слоя получил интересное по своей идее освещение в ряде статей Б. А. Кадера и А. М. Яглома [2]), основанных на теории размерности.

Выбор той или другой совокупности масштабов определяет вид «универсального» уравнения и его решение. В настоящее время на кафедре гидроаэродинамики Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина проводятся исследования возможных применений метода обобщенного подобия к расчету турбулентного пограничного слоя, пока только в рамках уравнения моментов первого порядка. Первое решение универсального уравнения и примеры его применения к ряду конкретных задач содержатся в опубликованной в 1982 г. работе В. В. Зябрикова [3]). В качестве закона турбулентного трения во «внешней» подобласти использовалась формула Клаузера в своем первоначальном виде (87), так как ее модификация (88) появилась позднее. Это обстоятельство не позволило автору получить удовлетворительные результаты для *неравновесных* пограничных слоев и исследовать течение в *предотрывной* области пограничного слоя. Отсылая к цитированным работам В. В. Зябрикова, отметим лишь, что, пользуясь во всей области пограничного слоя «внешними» масштабами δ^{**} и U, автор выбрал для более реального учета изменения напряжения трения τ в сечениях пограничного слоя в качестве масштаба трения его промежуточную величину τ_m в точках $y=\delta^{**}$, положив

$$\tau_m=\tau_w+\frac{dp}{dx}\delta^{**}.$$

Это несколько усложнило второй этап метода — расчет конкретных задач, но привело к хорошему совпадению с опытными данными для *равновесных* пограничных слоев для случаев нулевого и отрицательного

---

[1]) Впервые на этот закон «половинной степени» обратили внимание Е. Е. Солодкин и И. И. Межиров в 1950 г. (см. ранее цитированный обзор под ред. А. С. Гиневского, с. 183). Опытное подтверждение см. в статье: Stratford B. S. An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise.— Journ. Fluid Mech., 1959, v. 5, part 1, p. 17—35.

[2]) Кадер Б. А., Яглом А. М. Применение соображений подобия к расчету замедляющихся турбулентных пограничных слоев.— Доклады АН СССР, 1977, т. 233, № 1, с. 52—55, и тех же авторов: Законы подобия для пристенных турбулентных течений.— Итоги науки и техники, ВИНИТИ, Механика жидкости и газа, 1980, т. 15, с. 81—155.

[3]) Зябриков В. В. Применение метода обобщенного подобия к расчету турбулентного пограничного слоя.— Журн. прикл. механики и технической физики, 1982, № 5, с. 74—77. Более подробное изложение дано в том же году в статье: Дик Е. Д., Зябриков В. В. Расчет турбулентных пограничных слоев методом обобщенного подобия.— Депонирована в ВИНИТИ (регистр. № 4047—82).

градиентов давления (пластинка, конфузорный участок). В этой первой публикации автор удовольствовался *локальным* приближением решения универсального уравнения. Впоследствии им было рассчитано полное *первое* приближение, мало что изменившее в решениях, относящихся к предотрывным областям в неравновесных пограничных слоях. Это обстоятельство лишний раз подтверждает важность *модификации* (88) формулы Клаузера (87), предложенной Ю. В. Лапиным и М. Х. Стрельцом.

§ 139. Обзор применений моделей второго порядка. Модели: «$k-\varepsilon$», «$\overline{u'v'}-k-\varepsilon$»

Внедрение в практику расчетов все более мощных электронных вычислительных машин привлекает внимание исследователей к использованию уравнений переноса турбулентных характеристик (§ 120), содержащих в качестве *неизвестных* моменты *второго* порядка, но имеющих в своем составе моменты *третьего* порядка, причем не только пульсаций скорости, но и пульсаций давления. Для приведения этих уравнений — примем для них общее наименование «моделей второго порядка» — к *замкнутой* форме необходимым становится использование для отдельных членов этих уравнений упрощающих постановку задачи так называемых «определяющих соотношений». Как показали последние исследования[1]), «модели первого порядка» не менее точны, чем «модели второго порядка», однако последние требуют значительно большего машинного времени. Осветим вкратце и эти модели.

Число методов, основанных на использовании моделей второго порядка и отличающихся друг от друга количеством привлекаемых уравнений переноса и составом неизвестных, выражающих характеристики турбулентных движений, в настоящее время велико. В гл. 8 ранее цитированного сборника статей под редакцией У. Фроста и Т. Моулдена можно найти классификацию существующих методов и краткое их содержание[2]).

Наиболее положительные отзывы в текущей литературе относятся к методам, содержащим уравнения переноса кинетической энергии. Среди них выделяется метод, основанный на совместном решении уравнений переноса импульса, кинетической энергии и скорости диссипации — так называемый метод «k—ε». В этом методе совместному решению подлежит система уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}-\overline{u'v'}\right),\\
&u\frac{\partial k}{\partial x}+v\frac{\partial k}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\nu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\varepsilon,\\
&u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+C_1\frac{\varepsilon}{k}\nu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-C_2\frac{\varepsilon^2}{k},
\end{aligned}\tag{93}$$

[1]) Chang K. C., Cebeci T. Numerical aspects of turbulence models.— Intern. Symp. Comput. Fluids Dynamics, Tokyo, 1985.— Prepr. vol. 2, Tokyo, 1985, p. 538—549.

[2]) См. также ранее цитированную монографию Брэдшоу и др. (с. 45—49), в которой некоторые из этих методов изложены в доступной для инженеров форме; критическое рассмотрение можно найти в составленном А. Н. Секундовым § 1 гл. I ранее указанного обзора А. С. Гиневского и др.

где положено

$$k=\frac{1}{2}\overline{(u'^2+v'^2)},\quad \varepsilon=\nu\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2},\qquad(94)$$

$$-\overline{u'v'}=\nu_t\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Для замыкания системы уравнений применяется «связка» Прандтля—Колмогорова

$$\nu_t=C_\nu\frac{k^2}{\varepsilon},\qquad(95)$$

основанная на локальной аналогии с теорией однородной и изотропной турбулентности.

В правых частях последних двух уравнений системы (93) вместо явной записи коэффициентов ν_k для кинетической энергии k и ν_ε — для скорости диссипации ε — введены «числа Прандтля» $\sigma_k=\nu_t/\nu_k$ и $\sigma_\varepsilon=\nu_t/\nu_\varepsilon$.

Система уравнений метода «k—ε» содержит целый ряд эмпирических констант: $C_\nu=0{,}09$, $C_1=1{,}44$, $C_2=1{,}92$, $\sigma_k=1{,}0$, а σ_ε определяется равенством

$$\sigma_\varepsilon=\frac{\varkappa^2}{\sqrt{C_\nu}(C_2-C_1)},\qquad \varkappa=0{,}4.\qquad(96)$$

Подробный разбор этого метода, проиллюстрированный большим числом расчетов пограничных слоев, экспериментальные данные для которых помещены в ранее неоднократно цитированных Трудах стэнфордской конференции, можно найти в статье А. К. Сингхала и Д. Б. Сполдинга[1]). Заметим, что как об этом можно судить по второй строке равенств (94), метод «k—ε» содержит в своей основе гипотезу Буссинеска, которая, как показано в следующем параграфе, неудовлетворительно отражает свойства турбулентного движения в тех областях пограничного слоя, где структура потока определяется «крупномасштабной» турбулентностью. К таковым относится область, расположенная вблизи внешней границы пограничного слоя, а в предотрывном участке почти вся область пограничного слоя. Этот недостаток исключается в методе «$\overline{u'v'}$—k—ε», в котором вместо гипотезы Буссинеска используется уравнение переноса рейнольдсова напряжения, содержащее напряжение турбулентного трения в качестве неизвестной зависимой переменной. Удовольствуемся тем, что приведем систему уравнений метода «$\overline{u'v'}$—k—ε»:

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x}+v\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}&=C_s\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}\right)-C_{\varphi1}\left(\frac{\overline{u'v'}\varepsilon}{k}\right)+C_\mu k\frac{\partial u}{\partial y},\\
u\frac{\partial k}{\partial x}+v\frac{\partial k}{\partial y}&=0{,}9C_s\frac{\partial}{\partial y}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial y}-\overline{u'v'}\frac{\partial u}{\partial y}-\varepsilon,\qquad(97)\\
u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}&=C_s\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)-C_{\varepsilon1}\frac{\overline{u'v'}\varepsilon}{k}\frac{\partial u}{\partial y}-C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{k}.
\end{aligned}$$

В отличие от системы уравнений метода «k—ε» (93), «числа Прандтля» для $\overline{u'v'}$, k и ε полагаются равными единице. Заключающиеся в уравнениях (97) постоянные приняты равными[2])

$$C_s=0{,}1,\quad C_{\varphi1}=2{,}8,\quad C_\mu=0{,}09,\quad C_\varepsilon=0{,}09,\quad C_{\varepsilon1}=1{,}40,\quad C_{\varepsilon2}=1{,}95.$$

[1]) Singhal A. K., Spalding D. B. Prediction of two-dimensional boundary layers with the aid of the «$k-\varepsilon$» model of turbulence.— In: Computer methods in applied mechanics and engineering.— North-Holland publishing company, 1981, v. 25, p. 365—383.

[2]) Цитируем по монографии: Турбулентность, принципы и применения/Под ред. У. Фроста и Т. Моулдена.— М.: Мир, 1980, с. 245.

В ранее цитированном сборнике статей «Турбулентность, принципы и применения» под ред. У. Фроста и Т. Моулдена излагаются разнообразные моментные методы и помещено сопоставление результатов расчета по этим методам (п. 8.3.7, с. 246—255). Можно заключить, что проблема расчета турбулентного пограничного слоя, особенно если в нее естественно включить и расчет положения точки отрыва, еще очень далека от своего практического завершения.

Сложность существующих моделей турбулентного пограничного слоя тесно связана с операцией осреднения уравнений Навье — Стокса и возникающими вследствие этого трудностями в *замыкании* системы полученных уравнений при помощи разнообразных «связок» и определяющих соотношений, приводящих уравнения к численно интегрируемой форме. Всех этих недостатков лишен сравнительно недавно появившийся метод, основанный на непосредственном, без предварительной операции осреднения, интегрировании уравнений Навье—Стокса (В. И. Полежаев, Б. С. Рождественский, С. А. Орзаг, К. С. Паттерсон и др.).

В связи с развитием эффективных численных методов решения уравнений Навье — Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости и появлением мощных ЭВМ возникла возможность проведения так называемых «численных экспериментов», дающих непосредственное моделирование турбулентных движений. Научная литература в этой области как советская, так и зарубежная становится все более обширной. Удовольствуемся указанием на фундаментальные исследования Б. Л. Рождественского и И. Н. Симакина[1]), в которых изучены двумерные и трехмерные нестационарные течения несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале бесконечной длины с параллельными стенками. Авторы отмечают, что результаты их расчетов хорошо отражают характерные особенности турбулентных течений, причем наилучшее совпадение с опытом дают расчеты *трехмерных* течений. Такие характеристики турбулентных потоков, как коэффициент сопротивления канала, профиль средней скорости, распределение среднеквадратичных пульсаций скорости, расчет воспроизводит с высокой точностью.

§ 140. Релаксационные явления в турбулентных пограничных слоях. Релаксационное уравнение Хинце

Подобно тому как особенности молекулярной структуры вязкоупругой жидкости (§ 85) обусловили ряд ее специальных свойств (конечность скорости распространения возмущений, влияние «предыстории» потока на последующее движение), которые оправдывали ее наименование «наследственной» жидкости, так и особенности «вихревой» структуры турбулентных потоков наделяют последние свойствами, аналогичными только что перечисленным у вязкоупругих жидкостей. Этот замечательный факт оправдывается многочисленными опытами, из которых описанный в § 137 опыт Клаузера о *замедленной* релаксации возмущений в потоке с «крупномасштабной» турбулентностью был исторически первым. Существуют и *теоретические* доказательства «наследственно-

---

[1]) Рождественский Б. Л., Симакин И. Н. Моделирование турбулентных течений в плоском канале.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1985, т. 25, № 1, с. 96—121 (там же обширная библиография). См. также: Шуманн В. У., Гретцбах Г., Кляйзер Л. Прямые методы численного моделирования турбулентных течений.— В кн.: Методы расчета турбулентных течений/Под ред. В. Коллльмана.— М.: Мир, 1984; Орзаг С. Численное моделирование турбулентных течений.— В кн.: Турбулентность, принципы и применения/Под ред. У. Фроста и Т. Моулдена.— М.: Мир, 1980.

сти» в потоках с «мелкомасштабной» турбулентностью [1]), где свойство «наследственности» проявляется сравнительно слабо.

Отметим, что подход к *турбулентному* движению вязкой жидкости, как к *ламинарному* движению некоторой воображаемой «турбулентной» жидкости, обладающей особыми свойствами, использованный, как об этом была речь в § 122, Буссинеском, не может считаться полностью оправданным, так как он ни в коей мере не передает все до сих пор до конца не исследованное многообразие процессов, происходящих внутри турбулентных потоков. Это, конечно, относится и к только что отмеченной возможности рассмотрения турбулентного движения как движения некоторой *гипотетической вязкоупругой* жидкости. Однако если ограничиться только *частичной аналогией* между отдельными оговариваемыми заранее свойствами, то такой подход вполне приемлем [2]).

В дальнейшем воспользуемся такой аналогией, сопоставив ее с более строгим, теоретически оправданным подходом.

Обратимся сначала к интересным и широко поставленным опытам японских ученых И. Тсуджи и Г. Морикавы [3]). В отличие от обычно рассматриваемых в экспериментах по пограничным слоям «гладких» распределений ско-

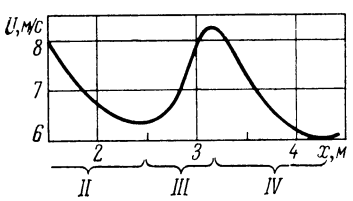


Рис. 278

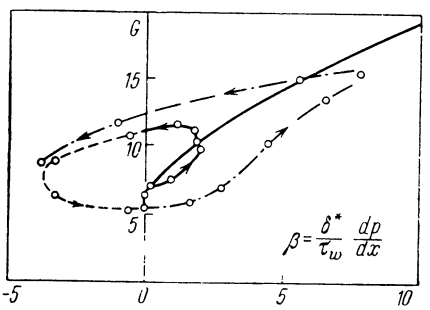


Рис. 279

рости на внешней границе пограничного слоя $U(x)$ с одним максимумом и одним конфузорным и диффузорным участками, эти авторы рассмотрели случай более сложного, своеобразного распределения $U(x)$ (рис. 278) с переменным знаком dp/dx при наличии *двух* диффузорных участков.

На *входном* участке *I*, на рисунке не отмеченном, $U=\text{const}$, $U'=0$. Далее следуют, как видно из рис. 278, диффузорный участок *II* ($U'<0$), конфузорный участок *III* ($U'>0$), диффузорный участок *IV* ($U'<0$) и начинается конфузорный участок *V* ($U'>0$). На конфузорных участках было обеспечено отсутствие «реламинаризации», на диффузорных — отрыва пограничного слоя.

Исследование содержит диаграмму Клаузера (§ 137), по которой можно заключить (рис. 279) о *неравновесности* рассмотренного пограничного слоя, исключая только входной участок. Сплошная кривая на диаграмме соответствует $G(\beta)$ для *равновесных* пограничных слоев с разными, но постоянными вдоль потока значениями β. Штриховая спиралеобразная кривая выражает отклонение от равновесности на последовательных участках пограничного слоя.

Пользуясь методом тепловой анемометрии, авторы подвергли точным измерениям величины $-\overline{u'v'}$ по сечениям пограничного слоя, соответствующим разным значениям абсциссы x (рис. 280, *а*, *б*, *в*).

---

[1]) Crow S. C. Viscoelastic properties of finegrained incompressible turbulence — Journ Fluid Mech, 1968, v 33, № 1, p. 1—20

[2]) Rivlin R. S. Quart. Appl. Math, 1957, v. 15, № 212

[3]) Tsuji J., Morikawa G. Turbulent boundary layer with pressure gradient alternating in sign.— Aeron Quarterly, 1976, v 27, № 1, p 15—28

Отрезки прямых слева показывают уклоны касательных к кривым отнесенного к плотности полного напряжения трения $\tau/\rho=\nu\,\partial u/\partial y-\overline{u'v'}$. На некотором удалении от стенки этот уклон можно отнести к распределению только турбулентного трения.

Как это следует из уравнения моментов первого порядка (1),

$$\left[\frac{\partial(\tau/\rho)}{\partial y}\right]_{y=0}=\frac{dp}{dx}, \tag{98}$$

или, пренебрегая обычной вязкостью,

$$\left[\frac{\partial(-\overline{u'v'})}{\partial y}\right]_{y=0}=\frac{dp}{dx}. \tag{99}$$

Сообразно с этим отрезки прямых, характеризующие уклоны касательных к кривым распределения напряжения трения, должны соответственно представлять положительные уклоны в *диффузорных* участках пограничного слоя ($dp/dx>0$) и отрицательные уклоны — в конфузорных,

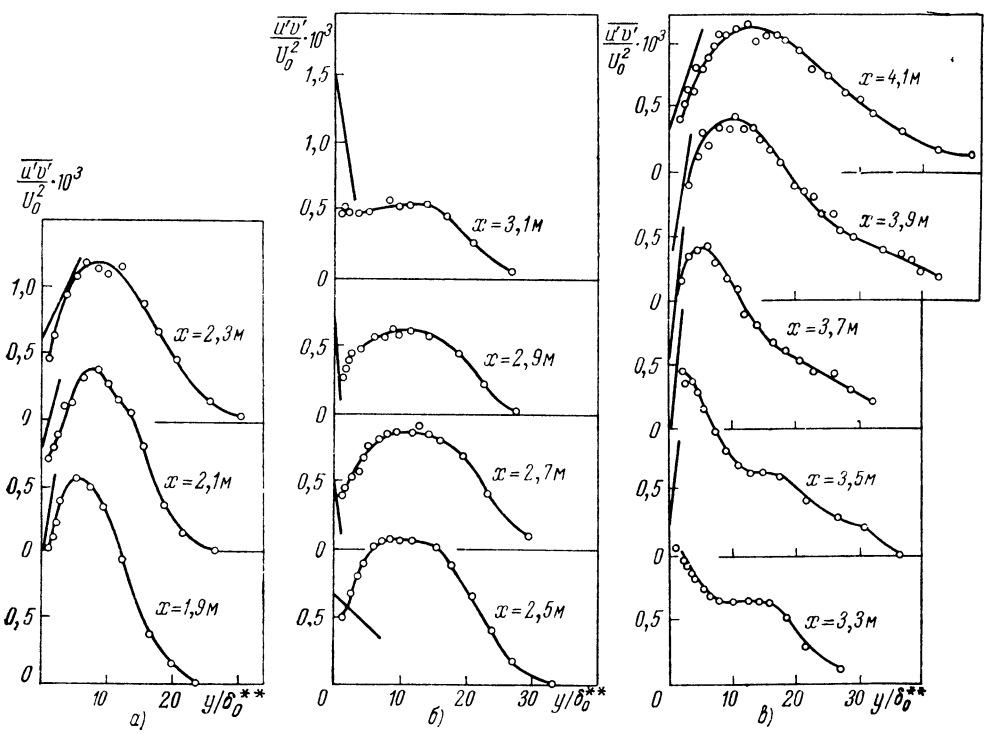


Рис 280

что и отмечено на рис. 280, *а*, *б*, *в*. Как следует из графиков рис. 280, это условие соблюдается только на участке *II* (рис. 280, *а*). В *конфузорном* участке *III* ($2{,}5\leqslant x\leqslant 3{,}1$) (рис. 280, *б*) ближние к стенке экспериментальные точки располагаются по кривым, явно сохраняющим *диффузорный* тип распределения напряжения турбулентного трения. Наконец, в последнем *диффузорном* участке *IV* (рис. 280, *в*) условие положительности уклона полностью восстанавливается. Только в переходных сечениях $x=3{,}1$; $x=3{,}3$ наблюдается некоторая неопределенность в выполнении пристеночных условий. Рассматривая рис. 280 в целом, можно

заключить, что, несмотря на присутствие в потоке как диффузорных, так и конфузорных участков (рис. 278), распределение *напряжения трения сохраняет полученный на участке II диффузорный характер.*

Не останавливаясь на других интересных результатах, изложенных в цитированной статье, подчеркнем, что рис. 280 дает чрезвычайно наглядный пример наличия *наследственных* явлений в *неравновесных* турбулентных пограничных слоях, причем основное проявление этого эффекта относится к удаленным от стенки точкам потока, где наблюдается «крупномасштабная» турбулентность. Как показывают выраженные в «универсальных» масштабах (т. е. отнесенные к динамической скорости v_*) *пристенные профили скоростей*, приведенные в цитированной статье, влияние «наследственности» в этой области «мелкомасштабной» турбулентности мало заметно. В заключение описания этого эксперимента приведем график местного коэффициента трения на стенке $c_f(x)$, сравнив его с рассчитанным по известной нам по § 127 формуле Людвига—Тиллмана (146) (рис. 281). Как видно из этого графика, экспериментальные точки (светлые кружки), начиная от левой границы конфузорного участка *III*, заметно отходят от показанного сплошной кривой распределения c_f по Людвигу—Тиллману.

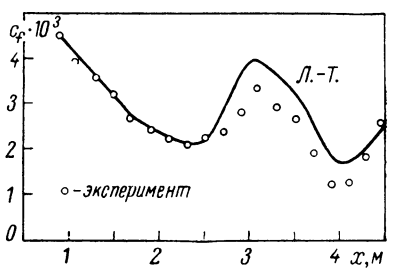


Рис. 281

Из предыдущего сделаем два основных вывода: 1) «наследственные» явления в турбулентных потоках определяются «вихревой» структурой потока и 2) крупные вихри («крупномасштабная» турбулентность) обеспечивают интенсивные эффекты «наследственности», в то время, как мелкие («мелкомасштабная» турбулентность) слабо отражают эффекты «наследственности».

Отсутствие в *ламинарных* пограничных слоях подобных «вихревых» структур лишает их свойства «наследственности», но сохраняет за ними, конечно, обычную молекулярную диффузию возмущений, как, например, это имеет место в задаче о входном участке трубы.

Для учета «наследственности» методы расчета пограничных слоев, содержащие в своей основе гипотезу Буссинеска, непригодны, так как она, по существу, выражает модель *ламинарного* движения с большим переменным в пространстве коэффициентом «вязкости». Как вскоре будет выяснено, использование этой гипотезы может быть сохранено только в областях «мелкомасштабной» турбулентности, где эффекты «наследственности» существенно не проявляются.

Для расчета «наследственности» в турбулентных пограничных слоях необходимо взамен формулы Буссинеска предложить новую формулу напряжения турбулентного трения, которая учитывала бы *релаксационные* процессы. К числу первых, еще, может быть, недостаточно совершенных попыток в этом направлении можно отнести установленное И. О. Хинце[1]) релаксационное уравнение и его интеграл, который должен прийти на смену формуле Буссинеска (43) гл. XIII.

Среди нескольких различных по идее выводов релаксационных соотношений следует предпочесть наиболее естественный, основанный на использовании уравнения переноса касательной компоненты тензора турбулентных напряжений.

---

[1]) Hinze J. O. Gedächniseffekte in der Turbulenz—Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mech, 1976, Bd. 56, S. 403—415.

В основу этого вывода И. О. Хинце положил уравнение

$$u\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x}+v\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}=-\overline{v'^2}\frac{\partial u}{\partial y}-2\nu\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}}+\overline{\frac{\partial u'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial y}}\right)+$$

$$+\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)}-\frac{\partial\overline{u'v'^2}}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{u'p'}}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2\overline{u'v'}}{\partial y^2}, \quad (100)$$

представляющее в случае стационарного плоского турбулентного пограничного слоя уравнение переноса рейнольдсова напряжения (32) или (33) гл. XIII. Это уравнение подверглось ряду упрощений. Прежде всего были опущены члены уравнения, содержащие обычную вязкость. Далее были отброшены, как сравнительно малые, производные по y от величин $\overline{u'v'^2}$ и $\overline{u'p'}$. Остающийся третий член в правой части был разложен на два слагаемых, из которых первое связывалось с осредненным деформационным движением и принималось равным

$$c_1k^2\frac{\partial u}{\partial y},$$

а второе определялось наличием турбулентных пульсаций

$$-c_2\varepsilon(k^2)^{-1}\overline{u'v'},$$

где k — удвоенная осредненная кинетическая энергия пульсаций скорости, ε — скорость диссипации, а c_1 и c_2 — постоянные коэффициенты.

Приняв эти допущения, можно получить уравнение

$$u\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x}+v\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}=-(\overline{v'^2}-c_1k^2)\frac{\partial u}{\partial y}-c_2\frac{\varepsilon}{k^2}\overline{u'v'}. \quad (101)$$

Далее, из соображений размерности принималось

$$\frac{c_2\varepsilon}{k^2}=\frac{1}{\lambda_t}, \quad (\overline{v'^2}-c_1k^2)\lambda_t=\nu_t, \quad (102)$$

где λ_t — величина, имеющая размерность времени,— полагалась равной характерному *времени турбулентной релаксации*. Произведя в уравнении (101) только что указанную замену, умножая обе части полученного таким образом уравнения на λ_t и вводя обозначения

$$\lambda_t u=L_x, \quad \lambda_t v=L_y, \quad (103)$$

получим уравнение Хинце

$$L_x\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x}+L_y\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}+\overline{u'v'}=-\nu_t\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (104)$$

которое приходит на смену уравнению Буссинеска, но *не содержит* его как частный случай при $L_x=L_y=0$, так как при этом было бы $\lambda_t=0$ и $\nu_t=0$.

Имеющие размерность длины и пропорциональные времени релаксации величины L_x и L_y Хинце рассматривает как соответственно «продольные» и «поперечные» *пути релаксации*.

Анализируя вывод уравнения Хинце из общего уравнения переноса рейнольдсовых напряжений, обратим внимание на физическое значение отбрасываемых при выводе слагаемых в уравнении переноса (§ 120). Это, прежде всего, члены, содержащие коэффициент обычной (молекулярной) вязкости. Далее, что очень важно, автор пренебрегает, как малыми, слагаемыми, выражающими *турбулентную диффузию*. Отсюда можно заключить, что уравнение Хинце допускает применение только в тех областях турбулентного пограничного слоя, где господствует «круп-

номасштабная» турбулентность, т. е. во «внешней» подобласти пограничного слоя.

Такое заключение подтверждает ранее сделанное замечание о различии областей применимости формул Буссинеска и Хинце: первой — во внутренней, пристенной подобласти, второй — во внешней подобласти турбулентного пограничного слоя. В дальнейшем это утверждение будет подкреплено примером расчета и сравнением с экспериментом.

Опираясь на высказанные соображения и принимая во внимание тот факт, что основное свойство «крупномасштабной» турбулентности заключается в «запоминании» предыстории потока, приведем простой вывод уравнения Хинце (104), основанный на аналогии «крупномасштабного» турбулентного движения с движением максвелловской *вязкоупругой* жидкости[1]). Подчеркнем еще раз, что тождественность этих двух совершенно различных по природе движений при этом не утверждается, а используется лишь одно их общее свойство — «наследственность».

Подобно тому как формула Буссинеска (43) гл. XIII рассматривалась как обобщение формулы Ньютона для простейшего плоского сдвигового *ламинарного* движения на случай «турбулентной жидкости» Буссинеска, не обладающей «наследственными» свойствами, так вязкоупругая жидкость Максвелла с ее ярко выраженными «наследственными» свойствами может быть положена в основу образа «турбулентной жидкости» Хинце. Для этого надо только в определяющем соотношении (21) § 85 произвести замены: λ на λ_t, μ на μ_t, ν на ν_t, τ на $\tau_t=-\rho\overline{u'v'}$, u на осредненную скорость $\bar{u}$ (черточку над u в дальнейшем опускаем), а стоящую в левой части производную по времени $\dot{\tau}$ на *индивидуальную* производную, в данном плоском стационарном движении равную

$$\dot{\tau}=u\frac{\partial\tau}{\partial x}+v\frac{\partial\tau}{\partial y}\,.$$

При этой замене уравнение (21) гл. X перепишется в виде

$$\lambda_t\left(u\frac{\partial\tau_t}{\partial x}+v\frac{\partial\tau_t}{\partial y}\right)+\tau_t=\mu_t\frac{\partial u}{\partial y}\,, \tag{105}$$

а после замены $\tau_t=-\rho\overline{u'v'}$ и введения обозначения (103) для «длин» («путей») релаксации, совпадает с уравнением (104).

Во внешней подобласти турбулентного пограничного слоя «продольная» релаксация преобладает над «поперечной», и это позволяет пренебречь «путем релаксации» L_y по сравнению с L_x. При этом уравнение (104) перейдет в следующее ($L_x=L$):

$$L\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x}+\overline{u'v'}=-\nu_t\frac{\partial u}{\partial y}\,. \tag{106}$$

Допустив еще, что L является функцией только x, можно получить решение последнего уравнения в форме квадратуры

$$\overline{u'v'}\,(x)=\overline{u'v'}\,(x_0)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{L(\xi)}\right)-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(\nu_t\partial u/\partial y)_\xi}{L(\xi)}\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{x}\frac{d\zeta}{L(\zeta)}\right)d\xi. \tag{107}$$

[1]) Лойцянский Л. Г. Наследственные явления в турбулентных пограничных слоях. Симпозиум по численным методам в гидравлике, Телави, апрель 1980.— Водные ресурсы, 1981, № 3 и того же автора: Наследственные явления в турбулентных движениях. Доклад на V Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Алма-Ата, 1981).— Механика жидкости и газа, 1982, № 9, с. 5—19.

Во втором интеграле выражение в скобках $(\nu_t \partial u/\partial y)_\xi$ означает, что в процессе интегрирования по x (или по ξ) координата y принимает фиксированное значение (является параметром).

Расчеты нескольких примеров[1]) и сравнение результатов этих расчетов с опытом показали, что можно принять для функции $L(x)$ линейную зависимость $L=ax$, где a — константа, имеющая в различных примерах значения в узких пределах 0,3—0,4. При этом предыдущее решение перейдет в следующее:

$$\overline{u'v'} = (\overline{u'v'})_{x=x_0} - \frac{x^{-1/a}}{a}\int_{x_0}^{x}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\xi \xi^{1/a-1}\,d\xi. \qquad (108)$$

Процитированная только что диссертация Буйльтьеса содержит примеры приложения теории Хинце и принадлежащего ему релаксационного уравнения (104). Примеры эти (обтекание полусферического препятствия в пограничном слое на пластине, плоский аэродинамический след за поперечно обтекаемым круглым цилиндром, поток за решеткой) ставили целью показать необходимость применения уравнения Хинце вместо уравнения Буссинеска, во всех этих случаях непригодного. В диссертации указаны и другие примеры неприменимости формулы Буссинеска, в частности в задачах о плоских трубах со стенками различной шероховатости, о пристенных струях и других, не обладающих симметрией потоках. Диссертация содержит также обзор теорий, отличных от теории Хинце.

В заключение укажем, что В. В. Зябриков[2]) исследовал вопрос о применимости методов расчета, основанных на гипотезе Буссинеска и на релаксационном уравнении Хинце, к различным областям пограничного слоя.

Напомним, что в «пристенной» подобласти «мелкомасштабная» структура потока соответствует весьма слабым свойствам «наследственности», а в близкой к внешней границе пограничного слоя части «внешней» подобласти, наоборот, «крупномасштабность» структуры турбулентного течения проявляется в сильных «наследственных» эффектах. При этом естественно предполагать допустимость применения гипотезы Буссинеска в первой из этих подобластей пограничного слоя, а релаксационного уравнения Хинце — во второй.

В. В. Зябриков подтвердил справедливость этих утверждений, произведя сравнительные расчеты экспериментально исследованного Тсуджи и Морикавой[3]) неравновесного пограничного слоя. Автор использовал два метода расчета: упомянутый в конце § 138 метод, основанный на соображениях обобщенного подобия и гипотезе Буссинеска, и второй, использующий релаксационное уравнение Хинце. На рис. 282 и 283 приведены результаты расчетов напряжения турбулентного трения этими методами: штриховые кривые *1* относятся к расчету по первому из методов, сплошные кривые *2* — по второму; светлые кружки соответствуют эксперименту. На рис. 282 изображены распределения безразмерного трения $\tau/(\rho U^2)$ вдоль пограничного слоя на малом расстоянии от стенки $y=0{,}1\,\delta$ (δ — «номинальная» толщина пограничного слоя). Вдоль этой прямой в конце области I (вспомнить разметку областей на рис. 278), во всей области III и начале области IV расчет по гипотезе Буссинеска ближе к эксперименту, чем расчет по релаксационному уравнению Хин-

[1]) Builtjes P. J. H Memory effects in turbulent flows Afdeling der Werktuigbouwkunde — WTHD, 97, Techn Hogeschool, Delft, Univ of Technology, Preprint of doctors thesis, April 1977.

[2]) Зябриков В. В. Релаксация рейнольдсова напряжения трения в неравновесном турбулентном пограничном слое.— Инж.-физ. журнал, 1983, т. 44, № 4.

[3]) См. ранее цитированную их работу.

це. Рис. 283 показывает распределения трения, соответствующие слою на расстоянии от стенки $y=0{,}7\,\delta$. На этой прямой распределение напряжения трения по всей длине пограничного слоя ближе соответствует *релаксационной* теории. Хотя приведенные расчеты носили предварительный характер, чем, возможно, объясняются некоторые отклонения экспериментальных точек от соответствующих кривых, все же общая тенденция выражена достаточно определенно.

Теория «наследственности» в турбулентных пограничных слоях находится пока еще на ранней стадии своего развития. Наряду с изложенной теорией Хинце имеются попытки простого эмпирического учета влияния «наследственности». Укажем одну из работ этого направления[1]), использующую стандартную релаксационную формулу

$$\nu_t = \nu_0 + (\nu_p - \nu_0)\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta x}{l}\right)\right],$$

где ν_0 — турбулентная вязкость в сечении начала релаксации, ν_p — равновесное значение коэффициента ν_t в данном сечении, Δx — расстояние от начального сечения, l — длина релаксации, выражаемая в частях толщин слоя δ в начальном сечении. Как показали эксперименты, l имеет примерно порядок 5—10 δ.

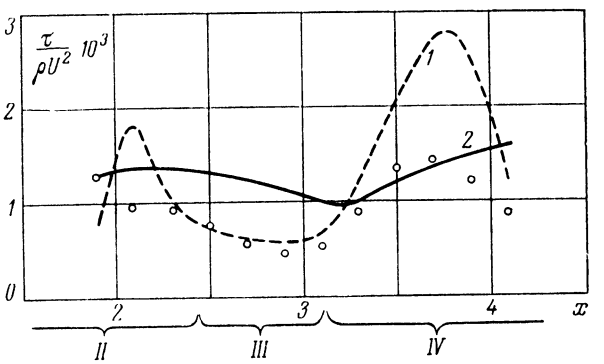


Рис. 282

Каунасские ученые[2]) произвели систематическое исследование *релаксационных* явлений в турбулентном пограничном слое на *подогреваемой* снизу пластине в плоском *скоростном* и *температурном* пограничных слоях с возмущениями в форме препятствий, имеющих вид прямоугольных параллелепипедов. Авторы подвергли детальному анализу области течения, следующие за точкой прилипания к поверхности пластины сорвавшихся с препятствий пограничных слоев. Как и в предыдущих работах, наблюдался рост *интенсивности релаксации* рейнольдсовых напряжений и соответственно турбулентного переноса тепла при удалении от поверхности пластины. Было отмечено сложное взаимодействие крупномасштабных вихрей с мелкомасштабными, генерируемыми вблизи поверхности.

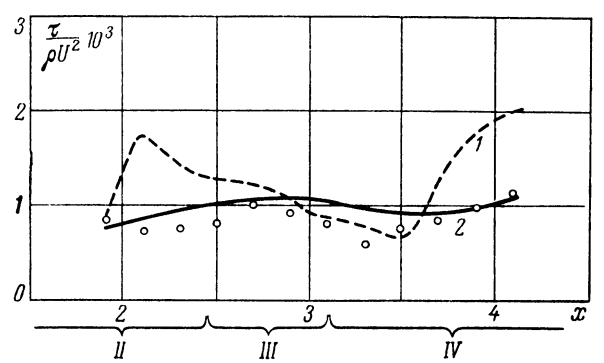


Рис. 283

[1]) Hortsmann C. C. Turbulence model for nonequilibrium adverse pressure gradient flows — AJAA Journ, 1977, v. 15, № 2, p. 131, 132.

[2]) Шланчаускас А. А., Пядишюс А. А., Зигмантас Г. П. Теплоперенос в турбулентном пограничном слое при наличии возмущений и их релаксации.— В кн.: Тепломассообмен — VI, т. 1, ч. 2.— Минск, 1980, с. 185—196.

ГЛАВА XV

ДИНАМИКА ВЯЗКОГО ГАЗА

§ 141. Основные уравнения движения вязкого газа

В основу изучения движения вязкого газа положим следующие общие допущения:

1) газ *совершенен*, т. е. давление p, плотность ρ и абсолютная температура T удовлетворяют уравнению состояния — закону Клапейрона

$$\frac{p}{\rho} = RT, \tag{1}$$

который при *частном* предположении о неизменности коэффициента теплоемкости при постоянном давлении c_p можно еще написать в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{c_p}(c_pT) = \frac{R}{c_p}h, \tag{2}$$

где h — *энтальпия* (тепловая функция), в общем случае c_p, зависящего от температуры, выражаемая интегралом

$$h = \int_0^T c_p(T)\,dT; \tag{3}$$

2) газ представляет собой «ньютоновскую» среду, подчиненную известному уже нам по § 84 *обобщенному закону Ньютона о линейной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций*. В отличие от несжимаемой жидкости в случае газа, который будем считать, так же как и в § 85, средой *изотропной*, скалярный коэффициент b, входящий в основной линейный закон

$$P = a\dot{S} + bE, \tag{4}$$

зависит не только от *линейного инварианта тензора напряжений* $p_{11}+p_{22}+p_{33}$, но и от *линейного инварианта тензора скоростей деформаций* $\partial V_1/\partial x_1+\partial V_2/\partial x_2+\partial V_3/\partial x_3=\operatorname{div} \boldsymbol{V}$, который в случае движения газа с большими скоростями не будет равен нулю.

Как и ранее в § 84, положим $a=2\mu$ и, чтобы найти выражение коэффициента b, приравняем линейные инварианты обеих частей равенства (4). Будем иметь

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} = 2\mu \operatorname{div} \boldsymbol{V} + 3b. \tag{5}$$

Обобщая принятое в § 84 определение давления для несжимаемой жидкости, положим

$$\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) = -p + \mu' \operatorname{div} \boldsymbol{V}, \tag{6}$$

где коэффициент μ' назовем коэффициентом *объемной вязкости*, или *вторым коэффициентом вязкости*.

Подставляя выражение (6) в равенство (5), найдем

$$b = -p - \left(\frac{2}{3}\mu - \mu'\right)\operatorname{div} \boldsymbol{V}, \tag{7}$$

после чего формула обобщенного закона Ньютона для газа (4) примет вид

$$P = 2\mu\dot{S} + \left[-p - \left(\frac{2}{3}\mu - \mu'\right)\operatorname{div} V\right]E. \tag{8}$$

На возможность допущения (6) указывал еще Стокс, а после него в своих лекциях по теории тепла Кирхгоф. Вторая вязкость оказывает существенное влияние на быстро развивающиеся процессы в газе, как, например, взрыв, прохождение газа сквозь скачок уплотнения и др.

В дальнейшем мы удовольствуемся лишь учетом влияния обычной *первой* вязкости, а *второй* вязкостью будем пренебрегать, положив

$$\mu' = 0. \tag{9}$$

При этом

$$P = 2\mu\dot{S} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} V\right)E, \tag{10}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} V\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{11}$$

3) *динамический коэффициент вязкости* μ *является функцией только абсолютной температуры* T. В дальнейшем используются различные законы этой зависимости. Прежде всего приведем формулу Саттерлэнда

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S}, \tag{12}$$

где T_s — постоянная Саттерлэнда, имеющая для воздуха значение, близкое к 122 К, а T_0 и μ_0 — абсолютная температура и коэффициент вязкости, соответствующие некоторому начальному состоянию газа. Широко также применяется степенная формула

$$\mu/\mu_0 = (T/T_0)^n, \tag{13}$$

где $n = 1/2$ для сравнительно высоких температур и $n = 1$ для более низких. По Карману в среднем $n = 0{,}76$. Иногда считают

$$\begin{aligned} n &= 8/9 \text{ при } 90 < T < 300\ \text{К}, \\ n &= 3/4 \text{ при } 250 < T < 600\ \text{К}. \end{aligned} \tag{14}$$

Чепмен и Рубезин [1]) предложили для *пользования в теории пограничного слоя* простой *линейный* закон связи μ и T:

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = C\frac{T}{T_\infty} = C\frac{h}{h_\infty} \tag{15}$$

[1]) Chapman D. R., Rubesin M. W. Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature.— Journ. Aeron. Sci., 1949, v. 16, p. 547. Русский перевод в сб. «Механика», в. 4.— М.: ИЛ, 1950, с. 50.

с постоянной C, выбранной из условия возможного приближения к формуле Саттерлэнда (12) и равной (T_w — температура на стенке, T_∞ — температура на внешней границе пограничного слоя)

$$C=\left(\frac{T_w}{T_\infty}\right)^{1/2}\frac{T_\infty+T_S}{T_w+T_S}; \tag{16}$$

4) *коэффициенты теплоемкости* c_p и c_v, а следовательно, и их отношение k *не зависят от абсолютной температуры газа* и являются физическими константами газа;

5) *коэффициент теплопроводности газа* λ *пропорционален динамическому коэффициенту вязкости* μ, так что число Прандтля $\mathrm{Pr}=\mu c_p/\lambda$, в дальнейшем для простоты письма обозначаемое через σ, рассматривается как физическая постоянная газа

$$\mu c_p/\lambda=\sigma=\text{const}. \tag{17}$$

Для вывода уравнений динамики вязкого газа используем уравнение динамики среды в напряжениях (6) гл. IV

$$\rho\frac{dV}{dt}=\rho F+\operatorname{Div}P \tag{18}$$

и, подставив в него выражение P из (10), составим следующее *основное уравнение Навье — Стокса динамики вязкого газа*:

$$\rho\frac{dV}{dt}=\rho F-\operatorname{grad}\left(p+\frac{2}{3}\mu\operatorname{div}V\right)+2\operatorname{Div}(\mu\dot{S}). \tag{19}$$

В проекциях уравнение (19) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\rho\frac{du}{dt}&=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu\operatorname{div}V),\\
\rho\frac{dv}{dt}&=\rho F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu\operatorname{div}V),\\
\rho\frac{dw}{dt}&=\rho F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\\
&\quad+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\mu\operatorname{div}V).
\end{aligned} \tag{20}$$

К этим уравнениям присоединяется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho V)=0 \tag{21}$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0. \tag{22}$$

Наличие переменной величины T делает полученную систему уравнений *незамкнутой*; число неизвестных: u, v, w, p, ρ, μ, T превосходит на единицу число уравнений. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, составим еще уравнение баланса тепла в движущемся газе. С этой целью используем уравнение *баланса энергии* в дифференциальной

форме (21) гл. IV

$$\rho \frac{d}{dt}\left(c_v T + \frac{V^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V} + \operatorname{div}(P\boldsymbol{V}) + \rho q \tag{23}$$

и, аналогично тому, как это делалось в гл. V, перейдем от внутренней энергии $c_v T$ к энтальпии h, связанной с нею известной формулой

$$h = c_p T = c_v T + \frac{p}{\rho}.$$

Кроме того, удовольствуемся рассмотрением притока тепла только через *теплопроводность*, т. е. положим

$$\rho q = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T),$$

где коэффициент теплопроводности λ будем считать функцией температуры T и пропорциональным μ согласно (17).

Заменяя в уравнении (23) тензор напряжений P его выражением (10), получим

$$\rho \frac{d}{dt}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V} + \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \\ + 2\operatorname{div}(\mu \boldsymbol{V}\dot{S}) - \operatorname{div}\left[\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\boldsymbol{V}\right)\boldsymbol{V}\right] + \operatorname{div}\left(\frac{\lambda}{c_p}\operatorname{grad} h\right),$$

или, используя очевидное преобразование

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad} p + p \operatorname{div}\boldsymbol{V} = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p\boldsymbol{V})$$

и равенство (17), следующую форму *уравнения баланса тепла*

$$\rho \frac{d}{dt}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}\left(2\mu \boldsymbol{V}\dot{S} - \frac{2}{3}\mu \boldsymbol{V}\operatorname{div}\boldsymbol{V} + \frac{\mu}{\sigma}\operatorname{grad} h\right). \tag{24}$$

Входящее под знак дивергенции в правой части произведение вектора скорости $\boldsymbol{V}$ на тензор $\dot{S}$ может быть выражено через дифференциальные векторные операции над вектором $\boldsymbol{V}$ в форме

$$\boldsymbol{V}\dot{S} = \operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\boldsymbol{V}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{V}. \tag{25}$$

Отметим основной для дальнейшего частный случай *стационарного* движения при *отсутствии объемных сил*. Используя (21), получим

$$\rho \frac{d}{dt}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) + \rho \boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = \operatorname{div}\left[\rho \boldsymbol{V}\left(h + \frac{V^2}{2}\right)\right],$$

и уравнение (24) преобразуется к следующему, как иногда говорят, «дивергентному» виду:

$$\operatorname{div}\left[\rho \boldsymbol{V}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) - 2\mu \boldsymbol{V}\dot{S} + \frac{2}{3}\mu \boldsymbol{V}\operatorname{div}\boldsymbol{V} - \frac{\mu}{\sigma}\operatorname{grad} h\right] = 0. \tag{26}$$

Пользуясь выражением (25), можно представить уравнение (26) в следующем развернутом виде:

$$\operatorname{div}\left[\rho \boldsymbol{V}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) - \mu \operatorname{grad}\left(\frac{h}{\sigma} + V^2\right) - \mu \operatorname{rot}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V} + \frac{2}{3}\mu \boldsymbol{V}\operatorname{div}\boldsymbol{V}\right] = 0. \tag{27}$$

Можно указать и другие полезные формы уравнения баланса тепла. Вспомним уравнение изменения кинетической энергии (16) гл. IV

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V} + \operatorname{div}(P\boldsymbol{V}) + N_{\text{in}}. \tag{28}$$

Заменяя в выражении (17) гл. IV мощности внутренних сил тензор P по равенству (10), получим следующее выражение мощности внутренних сил:

$$N_{\text{in}} = -2\mu\dot{S}^2 + p\,\operatorname{div} V + \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div} V)^2. \tag{29}$$

Сравнивая его с соответствующим выражением N_{in} в случае *несжимаемой жидкости*, убедимся, что при наличии сжимаемости в выражении N_{in} добавляются два новых слагаемых

$$p\,\operatorname{div} V + \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div} V)^2;$$

первое из них выражает *секундную работу давления*, а второе — *сил внутреннего трения* при сжатии газа. *Диссипируемая мощность*, т. е. *необратимая часть мощности внутренних сил с противоположным знаком* равна

$$N_{\text{дис}} = 2\mu\dot{S}^2 - \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div} V)^2. \tag{30}$$

Выражение диссипируемой мощности (30) в виде разности квадратов не позволяет судить непосредственно о *знаке* этой величины и об условиях обращения ее в нуль. Покажем, что диссипируемую мощность можно представить в форме *суммы квадратов*. Имеем по (30)

$$N_{\text{дис}} = 2\mu(\dot{S}_{11}^2 + \dot{S}_{22}^2 + \dot{S}_{33}^2 + 2\dot{S}_{12}^2 + 2\dot{S}_{23}^2 + 2\dot{S}_{31}^2) -$$
$$-\frac{2}{3}\mu(\dot{S}_{11}^2 + \dot{S}_{22}^2 + \dot{S}_{33}^2 + 2\dot{S}_{11}\dot{S}_{22} + 2\dot{S}_{22}\dot{S}_{33} + 2\dot{S}_{33}\dot{S}_{11}) =$$
$$= 4\mu(\dot{S}_{12}^2 + \dot{S}_{23}^2 + \dot{S}_{31}^2) + \frac{2}{3}\mu(2\dot{S}_{11}^2 + 2\dot{S}_{22}^2 + 2\dot{S}_{33}^2 - 2\dot{S}_{11}\dot{S}_{22} - 2\dot{S}_{22}\dot{S}_{33} - 2\dot{S}_{33}\dot{S}_{11})$$

или, комбинируя члены во второй скобке,

$$N_{\text{дис}} = 4\mu(\dot{S}_{12}^2 + \dot{S}_{23}^2 + \dot{S}_{31}^2) + \frac{2}{3}\mu[(\dot{S}_{11} - \dot{S}_{22})^2 + (\dot{S}_{22} - \dot{S}_{33})^2 + (\dot{S}_{33} - \dot{S}_{11})^2]. \tag{31}$$

Из последнего выражения сразу следует, что, кроме тривиального случая квазитвердого движения газа, о котором уже была речь в § 93 гл. X при рассмотрении движения вязкой *несжимаемой* жидкости, *механическая энергия вязкого газа не будет диссипироваться в тепло* и при *изотропном радиальном расширении* или *сжатии газа*, когда скорости сдвига равны нулю, а скорости относительных удлинений по любым направлениям в пространстве одинаковы: $\dot{S}_{11} = \dot{S}_{22} = \dot{S}_{33}$. Заметим, что *при учете второй вязкости диссипируемая в тепло механическая энергия при радиальном расширении или сжатии газа уже не была бы равной нулю.*

Вычитая почленно обе части (28) из (23) и вновь переходя от внутренней энергии к энтальпии, получим после простых преобразований следующую форму уравнения баланса тепла:

$$\rho\frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + 2\mu\dot{S}^2 - \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div} V)^2 + \operatorname{div}\left(\mu\operatorname{grad}\frac{h}{\sigma}\right). \tag{32}$$

Сравнив это уравнение с (43) гл. V и приведенными там последующими рассуждениями, убедимся, что *при наличии вязкости движение уже не может быть баротропным*, а *при условиях адиабатичности — изэнтропическим.*

Уравнения (24) или (32) замыкают систему уравнений динамики вязкого газа по крайней мере в той постановке, которая принята в на-

чале настоящего параграфа. Более широкие постановки, учитывающие существенные при сверхзвуковых движениях теплоотдачу путем лучеиспускания, явления диссоциации, ионизации и др., требуют специального изучения.

В число граничных условий, так же как и в несжимаемой жидкости, входит равенство нулю скорости на неподвижной твердой границе, а при движении тела в газе совпадение скорости частиц газа, прилегающих к поверхности тела, с соответствующими скоростями точек поверхности тела («прилипание» частиц газа к твердой поверхности).

В разреженных газах условие прилипания газа к твердой стенке не имеет места; при этом наблюдается *скольжение газа* по стенке, которое можно считать пропорциональным производной по нормали к поверхности обтекаемого тела от касательной составляющей скорости. Не приходится и говорить о том, что условие прилипания совершенно теряет свою силу в сильно *разреженных* газах, когда *длина свободного пробега молекулы становится сравнимой с линейными размерами тела.* В этом случае газ уже нельзя рассматривать как сплошную среду. Такого рода движения газа выходят за рамки механики в узком смысле слова и составляют предмет изучения *кинетической теории газов.* Заметим, что вопросы обтекания тел разреженными газами приобрели в последнее время практическое значение в связи с движением тел на больших высотах.

В случае внешнего обтекания тел безграничным потоком газа в число граничных условий входит задание скорости набегающего потока или скорости движения тела по отношению к покоящемуся вдалеке от тела газу; при протекании газа сквозь каналы обычно задают секундный массовый расход, при изучении распространения струй — секундное количество движения и т. п.

Граничные условия для температуры могут быть также разнообразны. Наиболее часто встречается задание распределения температуры по поверхности обтекаемых тел или на стенках каналов, по которым происходит течение газа, и температуры набегающего газа. В других случаях задается распределение теплоотдачи, т. е. секундного количества тепла, проходящего через единицу площади поверхности.

Согласно закону Фурье последнее эквивалентно заданию производной от температуры по направлению нормали к поверхности обтекаемого тела или канала. В такого рода граничных условиях заложено предположение об отсутствии скачка температур между обтекаемой стенкой и прилипающими частицами газа. Эти граничные условия хорошо подтверждаются опытными исследованиями в неразреженных газах (точнее, при малой по сравнению с размерами обтекаемых тел или каналов величине длины свободного пробега молекул). В случае же разреженных и особенно сильно разреженных газов указанные граничные условия теряют свой смысл. В разреженных газах наряду со *скольжением газа* образуется *скачок температур*, который, так же как и скорость скольжения, можно принять пропорциональным температурному перепаду в газе вблизи стенки. В сильно разреженных газах понятие температуры (так же как и скорости) нуждается в уточнении, которое дается в кинетической теории газов.

В число граничных условий входит еще задание давления в какой-нибудь одной точке, обычно вдалеке от обтекаемого тела, во входном сечении канала или др.

Начальные условия, как и в несжимаемой жидкости, представляют собой задание в начальный момент времени поля скоростей и температур, и, кроме того, давления в какой-нибудь точке.

Вопрос об условиях существования и единственности решений уравнений Навье – Стокса динамики вязкого газа упирается в многообразие

постановок задач и пока не получил своего полного математического завершения.

Простейший пример точного решения уравнений Навье — Стокса динамики вязкого газа дает задача об одномерном стационарном движении газа в безграничной плоскости, сопровождаемом переходом сверхзвукового потока в дозвуковой при прохождении через скачок уплотнения (см. § 110 предыдущего издания настоящего учебника). Однако решение это лишено физического смысла, так как толщина скачка имеет порядок длины свободного пробега молекулы, и, следовательно, в области, занятой скачком, модель сплошной среды некорректна, что исключает возможность использования уравнений Навье — Стокса. В результате этого формального решения получается *заниженное* по сравнению с опытным значение толщины скачка. Заметим, что, несмотря на указанные обстоятельства, теория скачка уплотнения в *сплошной* газообразной среде была предметом многих исследований [1]).

Среди поисков решений этой проблемы, глубже проникающих в сущность явления, но все же основанных на модели сплошной среды и тем самым на уравнениях Навье — Стокса, следует особо выделить работы, учитывающие влияние термодинамической неравновесности движения газа в области скачка [2]). Время пребывания газа в узких пределах скачка настолько мало, что прирост кинетической энергии молекул газа (разогрев газа) не успевает равновесно распределиться по всем степеням свободы молекул двух- или многоатомного газа.

Время релаксации поступательной и вращательной частей энергии молекулы сравнимо со временем прохождения газа сквозь скачок уплотнения, а колебательная часть имеет бо́льшее время релаксации. Это отражается на значениях физических констант газа и существенно изменяет процесс движения, влияя как на толщину скачка, так и на распределение скоростей и температур в нем. В настоящее время под руководством Г. Липмана разработана теория, основанная на *кинетических* соображениях. Толщина скачка, рассчитанная по этой теории, удовлетворительно совпала с результатами экспериментов [3]).

Точные решения задач динамики газа были ранее малочисленны. Отметим принадлежащее Л. Г. Степанянцу [4]) точное решение плоской задачи о движении вязкого газа вокруг вращающегося цилиндра и в полости между вращающимися цилиндрами без ограничительных допущений об изотермичности движения и без отбрасывания инерционных членов, а также численное исследование свободной *конвекции* газа в плоской прямоугольной области, опубликованное В. И. Полежаевым [5]).

---

[1]) Первые решения этой задачи ($\sigma=0,\ 3/4,\ \infty$; независимость μ и λ от температуры) были уже давно даны Рэнкином, Рэлеем, Прандтлем, Тейлором и Гамелем. Более точное решение принадлежит Бекеру (Becker R. Stosswelle und Detonation — Zeitchr. für Phys, 1921—1922, Bd. 8, S. 321—322). Уточнению решения Бекера ($\sigma=3/4$, $\mu\sim\sqrt{T}$) посвящена работа Томаса (Thomas L. G. Note on the Becker's theory of shock front — Journ. Chem. Phys., 1944, v. 12, p. 449—453) и ряд других работ. См. Мордухов М., Либи П. О полном решении уравнений одноразмерного движения вязкого теплопроводного сжимаемого газа.— Механика, вып. I, М.: ИЛ, 1950, а также Либер А., Романо Ф., Лев Г. Приближенные решения для ударной волны в установившемся одномерном течении вязкого и сжимаемого газа.— Механика, вып. I, М.: ИЛ, 1952.

[2]) Лунькин Ю. П. О структуре ударных волн.— Журн. техн. физ., 1957, т. 27, № 6.

[3]) Schmidt B. Electron beam density measurements in shock waves in argon — Intern. Congr. of applied mechanics, Stanford, 1968; Abstracts, 103.

[4]) Степанянц Л. Г. Некоторые случаи движения сжимаемого газа.— Труды ЛПИ; Энергомашиностроение, Техническая гидромеханика, 1953, № 5, с. 111—128.

[5]) Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области.— Механика жидкости и газа, 1967, № 2, с. 103—111.

Создание и внедрение в научную практику ЭВМ вызвало появление большого числа численных решений динамических и тесно связанных с ними тепловых задач о движении газа при сравнительно небольших значениях рейнольдсова числа. Систематическому исследованию подверглись задачи одномерного нестационарного течения реального газа, под которым понимают совершенный газ, обладающий вязкостью, теплопроводностью, диффузией и испытывающий влияние химических реакций. Точные и численные решения задач одномерных нестационарных движений такого газа можно найти в специальной монографии [1]).

Большой технический интерес представляет особый раздел динамики вязкого газа — теория «газовой смазки», являющаяся обобщением изложенной в § 99 и 100 гидродинамической теории смазки несжимаемой вязкой жидкостью на случай «смазки» газом. В этой теории приходится иметь дело с нелинейным уравнением Рейнольдса, решение которого определяется преимущественно приближенными численными методами. В настоящее время это большая самостоятельная область технической газовой динамики. Основная математическая трудность заключается в *нелинейности* уравнений Рейнольдса, обобщенного на случай *сжимаемости* «смазывающего» газа. Даже в предположении *изотермичности* рабочей среды ($\rho \sim p$) в обобщенное уравнение Рейнольдса наряду с давлением p входит его квадрат, что делает уравнение нелинейным. Сложны и граничные условия, учитывающие разнообразные формы вкладышей подшипника и фигурность опор. Интересующихся подробностями отошлем к первоисточникам — отдельным оригинальным научным статьям и обзорам [2]).

Среди возможных подходов к численному решению задач динамики вязкого газа наиболее распространен метод конечных разностей, о котором подробно говорилось в § 102—104 в применении к вязкой *несжимаемой* жидкости. Большим успехом пользуется также метод «крупных частиц», о котором вкратце упоминалось уже ранее в применении к задачам движения идеального газа. Широкое распространение получили как *явные*, так и *неявные* схемы. Для упрощения алгебраической стороны разностной задачи в последнем случае обращаются либо к схемам *переменных направлений*, либо к *«расщеплению»* на одномерные операторы.

Существенной особенностью задач динамики *вязкого газа* является то, что давление связано через уравнение состояния с плотностью и температурой (внутренней энергией) и, следовательно, градиент давления

[1]) Демьянов Ю. А., Секриеру Г. В., Игошин Л И., Киреев В. Т., Пинский В. Л. Одномерные нестационарные течения реального газа — Кишинев: Штиинца, 1980. Там же имеется обширная библиография.

[2]) Шейнберг С. А. Газовая смазка подшипников скольжения — В кн.: Трение и износ в машинах, сб. VIII.— М., Институт машиноведения АН СССР, 1953, Степанянц Л. Г. Некоторые методы газодинамической теории смазки — Тр. ЛПИ, 1967, № 280, Заблоцкий Н. Д, Сипенков И. Е. Один способ постановки задачи о приемлемости газовой смазке подшипников скольжения — Тр. ЛПИ, 1966, № 265; Котляр Я. М. К теории воздушных подвесов сферического типа — Изв. АН СССР, ОТН, 1959, т 6, Stepanyants L G, Zablotsky N D, Sipenkov I E Method of theoretical investigation of externally pressurized gas-lubricated bearings — Trans ASME, 1969, Paper № 68-LUBS-44; Шейнберг С. А., Жедь В. П., Шишеев М Д. Опоры скольжения с газовой смазкой.— М.: Машиностроение, 1968; в том же издательстве. Константинеску В. Н. Газовая смазка, 1968; Pinkus O, Sternlicht B. Theory of hydrodynamic lubrication — N.-Y.: McGraw-Hill, 1961; Saibel E A, Macken N A The fluid mechanics of lubrication — Annual Review of Fluid Mechanics, 1973, v. 5, p 185—212. Присоединим еще к этому списку недавно вышедшую монографию: Пинегин С. В., Табачников Ю. Б, Сипенков И. Е. Статические и динамические характеристики газостатических опор.— М.: Наука, 1982 Вопросы газовой смазки находятся в центре внимания сотрудников кафедры гидроаэродинамики Ленингр. политехнического института им. М. И. Калинина, руководимых Н. Д Заблоцким, и сотрудников института машиноведения АН СССР им. А. А. Благонравова во главе с С. В. Пинегиным.

может быть выражен через эти величины, причем отпадает обычное исключение давления при помощи операции вихря и постановка задачи о переносе вихря.

В стационарных задачах динамики вязкого газа с успехом применяют метод установления, чему способствует наличие в уравнении неразрывности производной по времени от плотности.

Значительные трудности возникают в тех случаях, когда в потоке образуются скачки уплотнения, местоположение которых заранее неизвестно. Хотя в методе «сквозного счета» скачки получаются автоматически, появляется необходимость сгущения узлов сетки в окрестности скачков. В задачах динамики *идеального* газа около скачков могут иметь место осцилляции параметров; для подавления этих осцилляций используют *искусственную вязкость* или различные варианты сглаживания. Сходные проблемы появляются и при расчете течений газов с малой физической вязкостью ($\mathbf{Re} \gg 1$), и тогда в разностные соотношения вводят специальные «монотонизирующие» члены.

Методы численного интегрирования уравнений динамики вязкого газа весьма разнообразны. Сошлемся на сборник статей под редакцией О. М. Белоцерковского[1]); там же приведены некоторые задачи, решенные численными методами, в том числе методом «крупных частиц»[2]).

§ 142. Условия подобия потоков вязкого газа

Следуя по тому же пути, что и в § 87 гл. X при изложении вопроса о подобии при движении несжимаемой вязкой жидкости, составим систему безразмерных уравнений динамики вязкого газа. Ограничимся рассмотрением случая неподвижного тела в безграничном, однородном на бесконечности потоке со скоростью V_∞, плотностью ρ_∞, давлением p_∞, температурой T_∞, энтальпией h_∞, коэффициентом вязкости μ_∞; величины c_p, c_v и отношение $c_p/c_v = k$ будем считать повсюду в данном потоке одинаковыми. Обозначим масштаб длин через L и примем в качестве масштабов других величин их значения на бесконечности. Для случая *стационарного движения без объемных сил* уравнения (1), (13), (20), (22), (27) после выделения масштабов примут вид (штрих обозначает безразмерные величины)

$$\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{L}\left(\rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \ldots\right) = -\frac{p_\infty}{L}\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu_\infty V_\infty}{L^2}\left[2\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial x'}\right) + \ldots\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\rho_\infty V_\infty}{L}\left[\frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho' w')}{\partial z'}\right] = 0,$$

$$\frac{1}{L}\operatorname{div}'\left[\rho_\infty V_\infty \rho' V'\left(h_\infty h' + \frac{1}{2}V_\infty^2 V'^2\right) - \frac{\mu_\infty}{L}\mu' \operatorname{grad}'\left(\frac{h_\infty}{\sigma}h' + V_\infty^2 V'^2\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_\infty V_\infty^2}{L}\mu'\left(\operatorname{rot}' V' \times V' - \frac{2}{3}V' \operatorname{div}' V'\right)\right] = 0,$$

$$\frac{p_\infty p'}{\rho_\infty \rho'} = \frac{k-1}{k}h_\infty h', \quad \mu' = f(h').$$

Разделим обе части первых трех равенств (проекций уравнения движения) на коэффициент $\rho_\infty V_\infty^2/L$ при безразмерном конвективном ускорении. В четвертом равенстве масштабный множитель исключается. Обе

[1]) Прямое численное моделирование течений газа.— М.: Выч. Центр АН СССР, 1978.

[2]) Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике.— М: Наука, 1982.

части пятого равенства разделим на выражение $\rho_\infty V_\infty h_\infty / L$. Тогда будем иметь в безразмерных величинах

$$\rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \ldots = -\frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty L} \left[2 \frac{\partial}{\partial x'} \left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) + \ldots \right],$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\frac{\partial (\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial (\rho' v')}{\partial y'} + \frac{\partial (\rho' w')}{\partial z'} = 0,$$

$$\operatorname{div}' \left[\rho' V' \left(h' + \frac{1}{2} \frac{V_\infty^2}{h_\infty} V'^2 \right) - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty L} \mu' \operatorname{grad}' \left(\frac{h'}{\sigma} + \frac{V_\infty^2}{h_\infty} V'^2 \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty L} \frac{V_\infty^2}{h_\infty} \mu' \left(\operatorname{rot}' V' \times V' - \frac{2}{3} V' \operatorname{div}' V' \right) \right] = 0,$$

$$p' = \frac{k-1}{k} \frac{\rho_\infty h_\infty}{p_\infty} h' \rho', \quad \mu' = f(h').$$

Штрих при символе дифференциальной операции показывает, что *операция производится в безразмерных координатах.*

В бесконечном удалении от тела *скоростное поле однородно, скорости деформаций отсутствуют* и движение *вязкого* газа совпадает с движением *идеального* газа. Следовательно, на бесконечности можно применять формулы идеального газа. Будем, в частности, иметь

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{1}{k} \frac{a_\infty^2}{V_\infty^2} = \frac{1}{k \mathbf{M}_\infty^2}, \quad \frac{V_\infty^2}{h_\infty} = (k-1) \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} = (k-1) \mathbf{M}_\infty^2,$$

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty h_\infty} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{V_\infty^2}{h_\infty} = \frac{1}{k \mathbf{M}_\infty^2} (k-1) \mathbf{M}_\infty^2 = \frac{k-1}{k}.$$

Кроме того, введем обозначение рейнольдсова числа потока

$$\mathbf{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}.$$

Тогда получим окончательно следующую систему безразмерных уравнений стационарного движения вязкого газа:

$$\rho' \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) = -\frac{1}{k \mathbf{M}_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\mathbf{Re}_\infty} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x'} \left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x'} (\mu' \operatorname{div}' V') \right\},$$

$$\rho' \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) =$$

$$= -\frac{1}{k \mathbf{M}_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\mathbf{Re}_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y'} \left(\mu' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\mu' \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y'} (\mu' \operatorname{div}' V') \right\}, \tag{33}$$

$$\rho' \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) = -\frac{1}{k \mathbf{M}_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial z'} +$$

$$+ \frac{1}{\mathbf{Re}_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial}{\partial z'} \left(\mu' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z'} (\mu' \operatorname{div}' V') \right\},$$

$$\frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho' w')}{\partial z'} = 0,$$

$$\operatorname{div}' \left\{ \rho' V' \left(h' + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_\infty^2 V'^2 \right) - \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \mu' \operatorname{grad}' \left[\frac{h'}{\sigma} + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2 V'^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{k-1}{\mathrm{Re}_\infty} \mathbf{M}_\infty^2 \mu' \left(\operatorname{rot}' V' \times V' - \frac{2}{3} V' \operatorname{div}' V' \right) \right\} = 0,$$

$$p' = h'\rho', \quad \mu' = f(h').$$

К этой системе уравнений присоединяются безразмерные граничные условия, о которых было в общих чертах сказано раньше. Для рассматриваемого случая обтекания тела эти граничные условия приведутся к заданию в безразмерном виде уравнения поверхности, равенства нулю на ней величины скорости, заданию распределения безразмерной температуры или нормальной ее производной, а также безразмерных значений скорости, давления и температуры на бесконечности, равных при ранее выбранных масштабах единицам.

Безразмерная система уравнений и граничных условий движения вязкого газа представляет некоторый самостоятельный интерес, так как позволяет изучать не только отдельное *единичное* движение, но одновременно весь класс движений, отличающихся от данного масштабами линейных размеров тел, скоростей, температур и т. д. Вместе с тем безразмерная система уравнений позволяет установить *необходимые условия подобия двух движений газа.* Предположим, например, что рассматриваются два геометрически, кинематически и динамически подобных стационарных обтекания вязким газом тела или системы тел, причем влиянием объемных сил можно пренебречь. Границы обтекаемых тел в обоих движениях должны быть геометрически подобны и подобно расположены по отношению к набегающим потокам, что входит в определение *геометрического подобия*, представляющего часть условий общего подобия явлений.

При наличии геометрического подобия безразмерные (т. е. отнесенные к масштабам длин в сравниваемых потоках) координаты в сходственных точках будут выражаться одинаковыми отвлеченными числами. Безразмерные граничные условия будут также одинаковы; одинаковыми окажутся и безразмерные величины скоростей, давлений, температур в сходственных точках потока, представляющие решения безразмерной системы уравнений (33). Следовательно, одинаковы должны быть и сами безразмерные системы уравнений. Как видно из структуры системы (33), при этом в двух подобных системах должны иметь одно и то же значение величины: Re_∞, M_∞, k и σ; если задана температура на поверхности обтекаемого тела, то из безразмерных граничных условий для температуры будет еще вытекать одинаковость отношения размерных температур на стенке в каких-нибудь сходственных точках к температуре на бесконечности. Это отношение T_w/T_∞ температуры на стенке обтекаемого тела T_w к температуре набегающего потока T_∞ называют *температурным фактором.*

Отсюда следует *прямая теорема подобия: если два стационарных движения однородного* (недиссоциированного и неионизованного) *вязкого газа при отсутствии объемных сил и лучеиспускания подобны между собой, то соответствующие этим движениям числа* Re_∞, M_∞, k, σ и T_w/T_∞ одинаковы для обоих рассматриваемых движений. Естественно, возникает вопрос об установлении *достаточных условий*, т. е. условий, обеспечивающих подобие двух гидроаэродинамических явлений. Однако решение этого вопроса упирается в необходимость строгого доказательства теоремы о существовании и единственности решений уравнений.

В более общем случае наличия объемных сил, например сил веса, пришлось бы еще вводить число Фруда, а при нестационарности движения — число Струхала.

В вопросах динамики вязкого газа наряду с теорией подобия с успехом применяется и теория размерностей во всех тех ее направлениях, о которых говорилось в § 88, 101. При этом, конечно, надо иметь в виду расширение числа параметров, определяющих движение среды.

§ 143. Ламинарный пограничный слой при движении газа с большими скоростями

Для вывода основных уравнений ламинарного движения вязкого газа в пограничном слое применим прием, ничем по существу не отличающийся от ранее уже использованного для несжимаемой жидкости.

Удовольствуемся рассмотрением плоского стационарного движения при отсутствии объемных сил. Уравнения динамики (20) и баланса тепла (27) в этом случае приводятся к виду

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(h+\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2}\right)-\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{\sigma}+\frac{4}{3}\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2}\right)-\mu v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{2}{3}\mu u\frac{\partial v}{\partial y}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v\left(h+\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2}\right)-\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h}{\sigma}+\frac{u^2}{2}+\frac{4}{3}\frac{v^2}{2}\right)-\mu u\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2}{3}\mu v\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0,$$

$$\frac{p}{\rho}=\frac{k-1}{k}h,$$

$$\frac{\mu}{\mu_1}=f\left(\frac{h}{h_1}\right).$$

Перейдем к безразмерной форме этих уравнений, выражая все величины в характерных масштабах, но, в отличие от предыдущего, примем заранее во внимание различие в пограничном слое масштабов продольных и поперечных координат и скоростей. Поэтому сохраним для x и u масштабы: L (какой-то характерный для обтекаемого тела размер, например хорда крыла) и U_∞ (скорость набегающего потока), а для y и v примем свои, пока еще не определенные масштабы Y и V. Сохраняя остальные обозначения, как в § 142, и вынося масштабы, будем иметь, используя, как и ранее, штрихи для обозначения *безразмерных* величин:

$$\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L}\rho' u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\rho_\infty U_\infty V}{Y}\rho' v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{p_\infty}{L}\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{4}{3}\frac{\mu_\infty U_\infty}{L^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu'\frac{u'}{\partial x'}\right)-$$

$$-\frac{2}{3}\frac{\mu_\infty V}{LY}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)+\frac{\mu_\infty U_\infty}{Y^2}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)+\frac{\mu_\infty V}{LY}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial v'}{\partial x'}\right),$$

$$\frac{\rho_\infty U\infty V}{L}\rho' u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+\frac{\rho_\infty V^2}{Y}\rho' v'\frac{\partial v'}{\partial y'}=-\frac{p_\infty}{Y}\frac{\partial p'}{\partial y'}+\frac{\mu_\infty U_\infty}{LY}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)+$$

$$+\frac{\mu_\infty V}{L^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu'\frac{\partial v'}{\partial x'}\right)+\frac{4}{3}\frac{\mu_\infty V}{Y^2}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)-\frac{2}{3}\frac{\mu_\infty U_\infty}{LY}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right),$$

$$\frac{\rho_\infty U_\infty}{L}\frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'}+\frac{\rho_\infty V}{Y}\frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'}=0, \tag{35}$$

$$\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x'}\left[\rho_\infty U_\infty \rho' u'\left(h_\infty h'+U_\infty^2\frac{u'^2}{2}+V^2\frac{v'^2}{2}\right)-\right.$$
$$-\frac{\mu_\infty}{L}\mu'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{h_\infty}{\sigma}h'+\frac{4}{3}U_\infty^2\frac{u'^2}{2}+V^2\frac{v'^2}{2}\right)-\frac{\mu_\infty U_\infty V}{Y}\mu' v'\frac{\partial u'}{\partial y'}+$$
$$\left.+\frac{2}{3}\frac{\mu_\infty U_\infty V}{Y}\mu' u'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right]+\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial y'}\left[\rho_\infty V\rho' v'\left(h_\infty h'+U_\infty^2\frac{u'^2}{2}+V^2\frac{v'^2}{2}\right)-\right.$$
$$-\frac{\mu_\infty}{Y}\mu'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{h_\infty}{\sigma}h'+U_\infty^2\frac{u'^2}{2}+\frac{4}{3}V^2\frac{v'^2}{2}\right)-\frac{\mu_\infty U_\infty V}{L}\mu' u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+$$
$$\left.+\frac{2}{3}\frac{\mu_\infty U_\infty V}{L}\mu' v'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right]=0,$$
$$p'=\rho' h',\quad \mu'=f(h').$$

Разделим обе части первых трех уравнений на постоянные комплексы масштабов, стоящие при первых членах слева в этих уравнениях, а обе части четвертого уравнения на $\rho_\infty U_\infty h_\infty/L$. Тогда, принимая во внимание выражения безразмерных комплексов масштабов через числа $\mathbf{M}_\infty$, $\mathbf{Re}_\infty$ и k, уже ранее примененные в § 142, получим такую систему безразмерных уравнений:

$$\rho' u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{LV}{YU_\infty}\rho' v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{1}{k\mathbf{M}_\infty^2}\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{4}{3}\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)-$$
$$-\frac{2}{3}\frac{LV}{YU_\infty}\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)+\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\left(\frac{L}{Y}\right)^2\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)+\frac{LV}{YU_\infty}\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial v'}{\partial x'}\right),$$
$$\rho' u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+\frac{LV}{YU_\infty}\rho' v'\frac{\partial v'}{\partial y'}=-\frac{1}{k\mathbf{M}_\infty^2}\frac{LU_\infty}{YV}\frac{\partial p'}{\partial y'}+\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{LU_\infty}{YV}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)+$$
$$+\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu'\frac{\partial v'}{\partial x'}\right)+\frac{4}{3}\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\left(\frac{L}{Y}\right)^2\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)-\frac{2}{3}\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{LU_\infty}{YV}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right),$$
$$\frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'}+\frac{LV}{YU_\infty}\frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left\{\rho' u'\left[h'+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{u'^2}{2}+\frac{V^2}{U_\infty^2}\frac{v'^2}{2}\right)\right]-\right. \tag{36}$$
$$-\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\mu'\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{h'}{\sigma}+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{4}{3}\frac{u'^2}{2}+\frac{V^2}{U_\infty^2}\frac{v'^2}{2}\right)\right]-$$
$$\left.-\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{LV}{YU_\infty}(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\mu' v'\frac{\partial u'}{\partial y'}-\frac{2}{3}\mu' u'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)\right\}+$$
$$+\frac{L}{Y}\frac{\partial}{\partial y'}\left\{\frac{V}{U_\infty}\rho' v'\left[h'+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{u'^2}{2}+\frac{V^2}{U_\infty^2}\frac{v'^2}{2}\right)\right]-\right.$$
$$-\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{L}{Y}\mu'\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{h'}{\sigma}+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{u'^2}{2}+\frac{4}{3}\frac{V^2}{U_\infty^2}\frac{v'^2}{2}\right)\right]-$$
$$\left.-\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\frac{V}{U_\infty}\left(\mu' u'\frac{\partial v'}{\partial x'}-\frac{2}{3}\mu' v'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)\right\}=0,$$
$$p'=\rho' h',\quad \mu'=f(h').$$

Пользуясь произволом в выборе масштабов Y и V, подчиним их условию, чтобы безразмерные поперечные координаты и скорости, так же как и составленные с их помощью производные от скоростей по координатам, были *нулевого* порядка по отношению к изменению рейнольдсова числа, т. е. стремились к конечным величинам при $\mathbf{Re}_\infty \to \infty$. Это приводит к двум условиям, которые, если включить в определение масштабов Y и V не зависящие от $\mathbf{Re}_\infty$ коэффициенты пропорциональности, могут быть записаны в виде

$$\frac{LV}{YU_\infty}=1,\quad \frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\left(\frac{L}{Y}\right)^2=1 \text{ или } Y=\frac{L}{\sqrt{\mathbf{Re}_\infty}},\quad V=\frac{U_\infty}{\sqrt{\mathbf{Re}_\infty}}. \tag{37}$$

Используя полученные выражения Y и V, приведем предыдущую систему уравнений к виду

$$\begin{gathered}
\rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'}+\rho' v' \frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{1}{k\mathbf{M}_\infty^2}\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{4}{3}\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial x'}\right)- \\
-\frac{2}{3}\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu' \frac{\partial v'}{\partial y'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right)+\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial v'}{\partial x'}\right), \\
\rho' u' \frac{\partial v'}{\partial x'}+\rho' v' \frac{\partial v'}{\partial y'}=-\frac{1}{k\mathbf{M}_\infty^2}\mathbf{Re}_\infty \frac{\partial p'}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right)+ \\
+\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu' \frac{\partial v'}{\partial x'}\right)+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial v'}{\partial y'}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial x'}\right), \\
\frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'}+\frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'}=0,
\end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x'}\left\{\rho' u'\left[h'+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{u'^2}{2}+\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{v'^2}{2}\right)\right]-\right. \\
-\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\mu' \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{h'}{\sigma}+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{4}{3}\frac{u'^2}{2}+\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{v'^2}{2}\right)\right]- \\
\left.-\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\mu' v' \frac{\partial u'}{\partial y'}-\frac{2}{3}\mu' u' \frac{\partial v'}{\partial y'}\right)\right\}+ \\
+\frac{\partial}{\partial y'}\left\{\rho' v'\left[h'+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{u'^2}{2}+\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{v'^2}{2}\right)\right]-\right. \\
-\mu' \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{h'}{\sigma}+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{u'^2}{2}+\frac{4}{3}\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}\frac{v'^2}{2}\right)\right]- \\
\left.-\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty}(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\mu' u' \frac{\partial v'}{\partial x'}-\frac{2}{3}\mu' v' \frac{\partial u'}{\partial x'}\right)\right\}=0, \\
p'=\rho' h',\quad \mu'=f(h').
\end{gathered}$$

Перейдем в этой системе к пределу при $\mathbf{Re}_\infty \to \infty$ или, что все равно, откинем в ней величины первого и высших порядков относительно малой величины $1/\mathbf{Re}_\infty$. Это даст

$$\begin{gathered}
\rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'}+\rho' v' \frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{1}{k\mathbf{M}_\infty^2}\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right), \\
\frac{\partial p'}{\partial y'}=0,\quad \frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'}+\frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'}=0,
\end{gathered} \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\rho' u'\left(h'+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 u'^2\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y'}\left[\rho' v'\left(h'+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 u'^2\right)\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y'}\left[\mu'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{h'}{\sigma}+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 u'^2\right)\right],$$
$$p'=\rho' h',\quad \mu'=f(h').$$

Заметим, что в силу второго равенства можно произвести замену $\partial p'/\partial x'=dp'/dx'$; кроме того, пользуясь третьим равенством (уравнением неразрывности), перепишем левую часть четвертого равенства (уравнения баланса тепла) в виде

$$\rho' u'\frac{\partial}{\partial x'}\left(h'+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 u'^2\right)+\rho' v'\frac{\partial}{\partial y'}\left(h'+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 u'^2\right). \tag{40}$$

Таким образом, получим следующую *первую основную форму* безразмерных уравнений плоского стационарного ламинарного пограничного слоя в вязком газе при больших скоростях:

$$\rho' u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+\rho' v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{1}{k\mathbf{M}_\infty^2}\frac{dp'}{dx'}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right),$$
$$\frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'}+\frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'}=0,$$
$$\rho' u'\frac{\partial}{\partial x'}\left(h'+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 u'^2\right)+\rho' v'\frac{\partial}{\partial y'}\left(h'+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 u'^2\right)= \tag{41}$$
$$=\frac{\partial}{\partial y'}\left[\mu'\frac{\partial}{\partial y'}\left(h'+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 u'^2\right)\right]+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial h'}{\partial y'}\right),$$
$$p'=\rho' h',\quad \mu'=f(h').$$

Введем в рассмотрение величину энтальпии адиабатически и изэнтропически заторможенного газа, или *полную энтальпию* газа

$$h_0=h+\frac{u^2}{2}. \tag{42}$$

В случае вязкого газа величина h_0 уже не будет постоянной, как в идеальном газе, а представит некоторую неизвестную функцию координат. Относя ее к энтальпии набегающего потока h_∞, получим

$$h_0'=\frac{h_0}{h_\infty}=\frac{h}{h_\infty}+\frac{u^2}{2h_\infty}=\frac{h}{h_\infty}+\frac{U_\infty^2}{2h_\infty}\frac{u^2}{U_\infty^2}.$$

Принимая во внимание, что $h_\infty=a_\infty^2/(k-1)$, найдем

$$h_0'=h'+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 u'^2. \tag{43}$$

Первой основной форме системы безразмерных уравнений пограничного слоя (41) можно, следовательно, придать вид

$$\rho' u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+\rho' v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{1}{k\mathbf{M}_\infty^2}\frac{dp'}{dx'}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right),$$
$$\frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'}+\frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'}=0,$$
$$\rho' u'\frac{\partial h_0'}{\partial x'}+\rho' v'\frac{\partial h_0'}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial h_0'}{\partial y'}\right)+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu'\frac{\partial h'}{\partial y'}\right), \tag{44}$$
$$p'=\rho' h',\quad \mu'=f(h').$$

Вторую основную форму безразмерных уравнений пограничного слоя получим из системы (41) путем простых преобразований третьего уравнения этой системы. Имеем

$$\rho' u' \frac{\partial h'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial h'}{\partial y'} + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2 u' \left(\rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial h'}{\partial y'}\right) + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2 \frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' u' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial h'}{\partial y'}\right) + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2 u' \frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2 \mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2; \quad (45)$$

вместе с тем из первого уравнения системы (41) следует, что

$$u'\left(\rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) = -\frac{1}{k\mathbf{M}_\infty^2} u' \frac{dp'}{dx'} + u' \frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right).$$

Предыдущее равенство переходит при этом в такое:

$$\rho' u' \frac{\partial h'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial h'}{\partial y'} = \frac{k-1}{k} u' \frac{dp'}{dx'} + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2 \mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2 + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial h'}{\partial y'}\right). \quad (46)$$

Имеем, таким образом, *вторую основную форму* системы *безразмерных* уравнений плоского стационарного ламинарного пограничного слоя в вязком газе, движущемся с большими скоростями:

$$\rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{k\mathbf{M}_\infty^2}\frac{dp'}{dx'} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right), \quad \frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'} = 0, \quad (47)$$

$$\rho' u' \frac{\partial h'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial h'}{\partial y'} = \frac{k-1}{k} u' \frac{dp'}{dx'} + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2 \mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2 + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial h'}{\partial y'}\right),$$

$$p' = \rho' h', \quad \mu' = f(h').$$

Третье уравнение этой системы выражает в явной форме баланс между безразмерными конвективным изменением энтальпии (левая часть уравнения), мощностью сил давления (первый член справа), теплом, возникшим за счет диссипации механической энергии (второй член справа), и теплом, отводимым путем теплопроводности (третий член справа).

Нетрудно теперь вернуться и к *размерной форме* тех же уравнений. Вспоминая выбранные в начале параграфа масштабы, получим системы уравнений в *размерных* величинах. *Первой основной формой* уравнений будет

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0,$$

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h_0}{\partial y}\right) + \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h}{\partial y}\right), \quad (48)$$

$$p = \frac{k-1}{k}\rho h, \quad \frac{\mu}{\mu_\infty} = f\left(\frac{h}{h_\infty}\right).$$

Вторая основная форма представится в виде

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0,$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h}{\partial y}\right), \quad (49)$$

$$p = \frac{k-1}{k}\rho h, \quad \frac{\mu}{\mu_\infty} = f\left(\frac{h}{h_\infty}\right).$$

При желании можно от энтальпии h перейти непосредственно к абсолютной температуре T. Тогда третье уравнение системы (49) — уравнение баланса тепла — примет вид

$$\rho c_p \left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=u\frac{dp}{dx}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{c_p}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right). \tag{50}$$

Совершая в системе уравнений (38) предельный переход $\mathrm{Re}_\infty\to\infty$, мы пренебрегли тем обстоятельством, что в уравнении баланса тепла имеются члены порядка $M_\infty^2/\mathrm{Re}_\infty$, которые при сравнительно небольших Re_∞, но, конечно, таких, при которых вообще верна теория пограничного слоя (примерно $\mathrm{Re}_\infty>100$), и значительных числах M_∞ (например, $M_\infty>10$) уже перестают быть малыми, и откидывание этих членов становится неоправданным.

В связи с этим дадим физическую оценку порядка величины $M_\infty^2/\mathrm{Re}_\infty$. Для этого, наряду с ранее введенными характерными размерами тела L и пограничного слоя δ, рассмотрим еще основной молекулярный размер — среднюю длину l свободного пробега молекул газа между двумя последовательными их столкновениями. По известной формуле для динамического коэффициента вязкости

$$\mu=0{,}499\rho\bar{v}l,$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость свободного пробега молекул, выражающаяся через давление и плотность или скорость звука в виде ($k=c_p/c_v$)

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\sqrt{\frac{p}{\rho}}=\sqrt{\frac{8}{\pi k}}a,$$

получим

$$l=1{,}255\sqrt{k}\,\frac{\nu}{a}.$$

Составим[1]) характерное для рассматриваемого явления отношение

$$\frac{l}{\delta}=\frac{l}{L}\frac{L}{\delta}=1{,}255\sqrt{k}\,\frac{\nu_\infty}{a_\infty L}\frac{L}{\delta}=1{,}255\sqrt{k}\,\frac{\nu_\infty}{U_\infty L}\frac{U_\infty}{a_\infty}\frac{L}{\delta}.$$

При больших значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty=U_\infty L/\nu_\infty$ оправдывается соотношение $\delta/L=1/\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}$, так что

$$\frac{l}{\delta}=1{,}255\sqrt{k}\,\frac{M_\infty}{\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}}.$$

Отсюда следует, что интересующая нас величина $M_\infty/\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}$ имеет порядок *отношения длины свободного пробега молекул газа к толщине пограничного слоя.*

Таким образом, можно прийти к заключению, что уравнения пограничного слоя, выведенные в предыдущем параграфе, справедливы, во-первых, при *достаточно больших рейнольдсовых числах* и, во-вторых, *при условии сравнительной малости длины свободного пробега молекулы по отношению к толщине пограничного слоя.* Последнее условие означает, что газ *не должен быть разреженным.*

Если движение газа происходит *при малых значениях рейнольдсова*

---

[1]) Чень Х. Ш. Аэродинамика разреженных газов.— В кн.: Газовая динамика.— М.: ИЛ, 1950, с. 310—357.

числа[1]), то теряется само представление о пограничном слое. Можно сказать, что пограничный слой становится сравнимым по толщине с потоком в целом ($\delta \approx L$), и тогда, в отличие от только что составленной формулы для отношения l/δ при больших рейнольдсовых числах, при малых значениях $\mathbf{Re}_\infty$ будет

$$\frac{l}{\delta} \approx \frac{l}{L} = 1{,}255\sqrt{k}\,\frac{\mathbf{M}_\infty}{\mathbf{Re}_\infty}.$$

Пользуясь отношением l/δ как основным критерием применимости уравнений пограничного слоя, можно приближенно наметить области соотношения чисел Рейнольдса $\mathbf{Re}_\infty$ и Маха $\mathbf{M}_\infty$, для которых при данном k, сравнительно мало меняющемся от газа к газу, должны применяться те или другие методы расчета течений вязкого газа. На заимствованной из цитированной статьи Ченя диаграмме, показанной на рис. 284, нанесены в полулогарифмическом масштабе линии связи между $\mathbf{M}_\infty$ и $\mathbf{Re}_\infty$ при трех заданных значениях параметра l/δ: 0,01; 1; 10. Эти линии, конечно, весьма условно разграничивают области применимости различных методов исследования газовых потоков.

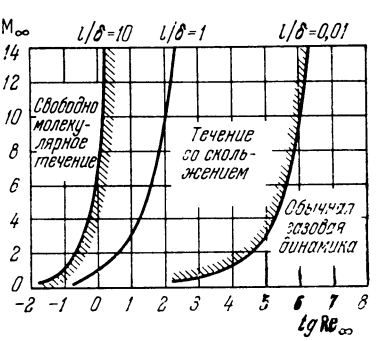


Рис. 284

Правая крайняя область характеризует совокупность значений $\mathbf{Re}_\infty$ и $\mathbf{M}_\infty$, для которой справедливы уравнения Навье — Стокса. При больших рейнольдсовых числах в этой области можно пользоваться уравнениями пограничного слоя в газе при больших скоростях, если числа $\mathbf{M}_\infty$ значительно отличаются от нуля, и уравнениями пограничного слоя в несжимаемой жидкости, если числа $\mathbf{M}_\infty$ мало отличаются от нуля. Асимптотический ход ограничивающей рассматриваемую область кривой при очень малых рейнольдсовых числах показывает, что в этих условиях только **при совершенно незначительных величинах $\mathbf{M}_\infty$, т. е. при очень малых** абсолютных скоростях движения, допустимо применение уравнений гидродинамики; это соответствует классической области «медленных движений», задаче Стокса о шаре и т. п.

Левая крайняя область значений $\mathbf{M}_\infty$ и $\mathbf{Re}_\infty$ относится к сильно разреженным газам, когда уже вообще нельзя говорить о газе как о непрерывной среде. Это — область свободного молекулярного движения газа, описываемого статистическими методами кинетической теории газов. В настоящее время эти методы заняли свое место в расчетах силовых и тепловых воздействий разреженной атмосферы на летящее в ней тело при очень больших высотах полета (*супераэродинамика*) [2]).

Наибольшие трудности представляет промежуточная область. До сих пор нельзя еще говорить об установившихся методах расчета движений в пограничных слоях в этой области значений $\mathbf{Re}_\infty$ и $\mathbf{M}_\infty$, хотя во-

---

[1]) В статье, помещенной в Abhandl. aus dem Aerod. Inst. Aachen, 1925, № 4, Карман заметил, что рейнольдсово число, как это сразу следует из кинетических соображений, примененных при выводе предыдущих формул, может быть представлено в виде $\mathbf{Re}_\infty = (U_\infty/\bar{v})\,(L/l)$. Малость этой величины может иметь место в следующих случаях: 1) $L \approx l$, $U_\infty \ll \bar{v}$ (броуновское движение мелких частиц, взвешенных в жидкости или газе); 2) $L \gg l$, $U_\infty \ll \bar{v}$ (обычные условия «медленного» движения тела в вязкой жидкости); 3) $L \ll l$, $U_\infty \approx \bar{v}$ (движение тел в сильно разреженных газах).

[2]) Некоторое представление о задачах и методах этого раздела аэродинамики можно получить, ознакомясь с содержанием гл. X монографии: Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений.— М.: ИЛ, 1962.

просами этого рода для общих движений вязкого газа еще во второй половине XIX века занимался Максвелл, а в начале нашего века Кнудсен, Милликен и др. Если говорить о той части рассматриваемой промежуточной области, которая граничит с крайней правой областью применимости уравнений Навье — Стокса, то здесь, по-видимому, можно удовольствоваться введением некоторых поправок в обычные методы механики жидкости и газа. Поправки эти идут в двух направлениях. Во-первых, становится существенным введение дополнительных членов в уравнения Навье — Стокса, выражающих необходимость использования в этих случаях некоторых *нелинейных* законов, приходящих на смену *линейным законам Ньютона, Фурье и Фика.*

Из кинетических соображений следует, что в рассматриваемой части переходной области, соответствующей *слабо разреженным газам*, наряду с обычными линейными членами в выражениях компонент тензора вязких напряжений, векторов потока тепла и вещества, должны еще входить нелинейные комбинации производных скоростей по координатам (Д. Барнетт [1])). Отношение этих дополнительных членов к основным, соответствующим линейным законам, имеет как раз порядок величины $\mathbf{M}_\infty^2/\mathbf{Re}_\infty$ или, согласно предыдущему, квадрата отношения l/δ — *длины свободного пробега к толщине пограничного слоя.*

Кроме того, и это, быть может, имеет наибольшее принципиальное значение, коренному изменению подлежат граничные условия на поверхности твердого тела как для скоростей, так и для температур. Еще в 1875 г. Кундт и Варбург, проводя опыты над колеблющимся в разреженном газе диском, обратили внимание на уменьшение амплитуд затухания при снижении давления в окружающем газе. Этот факт, не укладывающийся в законы динамики ньютоновской вязкой жидкости, смог быть объяснен только при помощи отказа от основного свойства вязких газов вообще — «прилипания» частиц газа к твердой стенке. Было выдвинуто предположение о наличии «скольжения» разреженного газа по поверхности диска, причем в случае изотермического движения газа скорость u_w этого «скольжения» была принята равной

$$u_w = \gamma \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Входящий сюда коэффициент γ получил наименование *коэффициента скольжения* газа. Кундт и Варбург на основании своих опытов показали, что коэффициент скольжения, имеющий, очевидно, размерность длины, пропорционален длине свободного пробега молекул и даже близок к ней по своей численной величине; этот коэффициент обратно пропорционален абсолютному давлению в газе. Теория «коэффициента скольжения» была дана в 1879 г. Максвеллом [2]), предложившим формулу

$$\gamma = 0{,}998\,\frac{2-f}{f}\,l,$$

в которой величина f выражает долю касательного к поверхности тела количества движения молекул, теряющегося при ударе молекул о поверхность тела. Эта доля *близка к единице.*

Молекулы газа при встрече с твердым телом попадают на сложную по молекулярной структуре «шероховатую» поверхность тела. При этом

[1]) Barnett D The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas — Proc. London Mathem. Soc., 1935, v. 40, p 382—435 См. также Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1960.

[2]) Maxwell C — Philos. Trans of the Roy. Soc. of London, 1879, v. 170, p. 231—256

только небольшая часть молекул непосредственно отражается от поверхности тела, а подавляющее число молекул «застревает», абсорбируется поверхностью и лишь затем диффузно, т. е. независимо от направления падения на поверхность, испускается, реэмиссирует. Как показывают опыты, коэффициент f имеет близкие к единице значения при течении воздуха над твердой металлической поверхностью или над ртутью и несколько отличается от единицы при течении над стеклом или маслом.

При *неизотермическом* движении *разреженного* газа граничные условия для скорости усложняются. Кроме того, возникает необходимость изменения еще граничного условия для температуры на стенке. Подобно скорости, температура вблизи поверхности тела также претерпевает скачок, пропорциональный длине l пути свободного пробега молекулы, а именно

$$T - T_p = 1{,}996\,\frac{2-\alpha}{\alpha}\,\frac{k}{k+1}\,\frac{\lambda}{\mu c_p}\,l\,\frac{\partial T}{\partial y};$$

здесь α — коэффициент «аккомодации», введенный Кнудсеном и выражающий долю той части молекул, которые после соприкосновения с поверхностью при реэмиссии их приобретают среднюю энергию, аккомодированную (приспособленную) к энергии молекул, имеющих температуру поверхности тела T_p; $k = c_p/c_v$, λ — коэффициент теплопроводности газа. Таблицу коэффициентов аккомодации α, так же как и коэффициентов скольжения γ, можно найти в цитированной статье Ченя и в специальных руководствах по кинетической теории газов.

Применение уравнений движения разреженных газов (уравнений Барнетта) к расчету конкретных потоков, в частности к пограничному слою, представляет пока еще непреодолимые трудности. В работах этого нового направления физической механики газа продолжают пользоваться уравнениями Навье — Стокса, но в качестве граничных условий принимают в том или другом виде условия скольжения и аккомодации. В настоящее время имеются специальные руководства по динамике разреженного газа [1]).

§ 144. Ламинарный пограничный слой на пластине, продольно обтекаемой газом с большими скоростями

Для исследования ламинарного пограничного слоя, образующегося на пластине при продольном ее обтекании вязким газом с большими скоростями, применим вторую основную форму (47) уравнений в безразмерных величинах. Примем во внимание, что в этом случае $dp'/dx' = 0$, $p' = \text{const} = 1$; будем пользоваться *степенным законом вязкости*. Задача сводится к интегрированию системы уравнений

$$\rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right), \quad \frac{\partial (\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial (\rho' v')}{\partial y'} = 0,$$

$$\rho' u' \frac{\partial h'}{\partial x'} + \rho' v' \frac{\partial h'}{\partial y'} = (k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2 \mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^2 + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu' \frac{\partial h'}{\partial y'}\right), \qquad (51)$$

$$\rho' = \frac{1}{h'}, \quad \mu' = h'^n.$$

А. А. Дородницын [2]) указал общее преобразование координат, придающее уравнениям пограничного слоя в газе форму, *близкую к уравнениям пограничного слоя в несжимаемой жидкости*. Преобразование

[1]) Коган М. Н. Динамика разреженного газа.— М.: Наука, 1967; Шидловский В. П. Введение в динамику разреженных газов.— М.: Наука, 1965.

[2]) Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газа.— Прикл. мат. и мех., 1942, т. 6, вып. 6.

это определяется системой равенств

$$\xi = \int_0^x \frac{p}{p_0}\,dx, \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0}\,dy, \tag{52}$$

где p_0 и ρ_0 — давление и плотность в адиабатически и изэнтропически заторможенном внешнем потоке.

Используя в случае пластины ($p = p_\infty$) вместо p_0 и ρ_0 величины p_∞ и ρ_∞, будем иметь (штрих — знак безразмерной величины)

$$\xi' = x', \quad \eta' = \int_0^{y'} \rho'\,dy'. \tag{53}$$

С целью упрощения вида последующих формул откинем временно штрих в обозначении безразмерных величин; возвращение к размерным величинам будет в соответствующих местах оговорено.

Формулы перехода от дифференцирования по x, y к дифференцированию по ξ, η будут

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \rho\frac{\partial}{\partial \eta},$$

так как ρ и η являются функциями не только y, но и x.

Первое равенство системы (51) преобразуется к виду

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho u\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \rho v\cdot\rho\frac{\partial u}{\partial \eta} = \rho\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{54}$$

и после сокращения на ρ и принятия в расчет последних двух равенств системы (51) дает

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(u\frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho v\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(h^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{55}$$

Из второго равенства той же системы (уравнения неразрывности) вытекает наличие функции тока ψ, причем

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho\frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial x}u.$$

Отсюда можно заключить о справедливости соотношений

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad u\frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \tag{56}$$

Сравнивая с уравнением (55), видим, что если ввести обозначение

$$u\frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho v = \tilde{v}, \tag{57}$$

то уравнения (55) и (56) приведутся к виду

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \tilde{v}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(h^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \tilde{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = 0. \tag{58}$$

Аналогичному преобразованию подвергнем и третье уравнение системы (51) — уравнение баланса тепла; будем иметь

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial \xi} + \rho u\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial \eta} + \rho v\rho\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{1}{\sigma}\rho\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu\rho\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2\mu\rho^2\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2$$

или, сокращая обе части на ρ, используя обозначение (57) и последние два соотношения в системе (51),

$$u\frac{\partial h}{\partial \xi} + \tilde{v}\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(h^{n-1}\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2 h^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2. \tag{59}$$

Как и в задаче о пограничном слое на пластине в потоке несжимаемой жидкости будем искать выражение для продольной скорости $u(\xi, \eta)$ и энтальпии $h(\xi, \eta)$ в функции от одного аргумента ζ, равного

$$\zeta = \frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}. \tag{60}$$

Тогда, согласно второму равенству системы (58), получим

$$\psi = \int_0^{\eta} u\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}\right) d\eta = 2\sqrt{\xi} \int_0^{\eta/(2\sqrt{\xi})} u\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}\right) d\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}\right) = 2\sqrt{\xi} \int_0^{\zeta} u(\zeta)\, d\zeta.$$

Введем для краткости обозначение

$$2\int_0^{\zeta} u(\zeta)\, d\zeta = \varphi(\zeta);$$

тогда будем иметь следующие выражения функции тока ψ, скоростей u и $\tilde{v}$, а также производных по ζ (обозначаемых в дальнейшем штрихом) от скорости u и энтальпии h

$$\psi = \sqrt{\xi}\varphi(\zeta), \quad u = \frac{1}{2}\varphi'(\zeta), \quad \tilde{v} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(\zeta\varphi' - \varphi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{4\xi}\zeta\varphi''(\zeta), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{4\sqrt{\xi}}\varphi''(\zeta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{8\xi}\varphi'''(\zeta),$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{1}{2\xi}\zeta h', \quad \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}h'.$$

Подставляя эти выражения в первое из уравнений (58) и в уравнение (59), получим систему следующих двух обыкновенных дифференциальных уравнений, служащих для определения неизвестных функций φ и h:

$$\begin{gathered}(h^{n-1}\varphi'')' + \varphi\varphi'' = 0, \\ (h^{n-1}h')' + \frac{\sigma}{4}(k-1)\mathbf{M}_\infty^2 h^{n-1}\varphi''^2 + \sigma\varphi h' = 0.\end{gathered} \tag{61}$$

Отметим, что задача о ламинарном пограничном слое на пластине, продольно обтекаемой однородным газом, является, так же как и в случае несжимаемой жидкости, *автомодельной*, что выражается в возможности использования в качестве единственной независимой переменной ζ по (60).

Граничные условия для φ будут те же, что и в случае несжимаемой жидкости:

$$\begin{gathered}\varphi = 0, \ \varphi' = 0 \text{ при } \zeta = 0, \\ \varphi' = 2 \text{ при } \zeta = \infty.\end{gathered} \tag{62}$$

Граничные условия для энтальпии h могут быть разнообразны. Если задана постоянная вдоль всей пластины *безразмерная* (отнесенная к T_∞) температура T_w, то граничные условия в *безразмерной* форме будут

$$\begin{gathered}h = h_w \text{ при } \zeta = 0, \\ h = 1 \text{ при } \zeta = \infty.\end{gathered} \tag{63}$$

Если на пластине отсутствует теплоотдача, то граничные условия для энтальпии сведутся к следующим:

$$\frac{dh}{d\zeta}=0 \text{ при } \zeta=0,$$
$$h=1 \text{ при } \zeta=\infty. \tag{64}$$

Интегрирование уравнений (61) в общем случае требует применения численных методов.

Рассмотрим простейший случай, когда *связь между коэффициентом вязкости и температурой линейна* ($n=1$). В этом случае вместо (61) получим систему уравнений

$$\varphi'''+\varphi\varphi''=0,$$
$$h''+\sigma\varphi h'+\frac{\sigma}{4}(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\varphi''^2=0. \tag{65}$$

Первое из этих уравнений, разрешаемое при граничных условиях (62), формально ничем не отличается от соответствующего уравнения задачи о пограничном слое на пластине в несжимаемой жидкости. Интегрируя второе уравнение системы (65), найдем $h(\zeta)$ в форме

$$h(\zeta)=\frac{1}{8}(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\vartheta(\zeta)-\frac{C}{8}\int_\zeta^\infty[\varphi''(\zeta)]^\sigma d\zeta+C_1, \tag{66}$$

где введено обозначение

$$\vartheta(\zeta)=2\sigma\int_\zeta^\infty[\varphi''(\zeta)]^\sigma d\zeta\int_0^\zeta[\varphi''(\zeta^*)]^{2-\sigma}d\zeta^*, \tag{67}$$

а постоянные интегрирования C и C_1 должны быть определены из граничных условий (63) или (64). Полагая $\zeta=\infty$, найдем значение постоянной $C_1=1$; полагая $\zeta=0$, получим [по (63)]

$$C=\frac{1-h_w+\frac{1}{8}(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\vartheta(0)}{\frac{1}{8}\int_0^\infty[\varphi''(\zeta)]^\sigma d\zeta}. \tag{68}$$

Обозначим через h_t и T_t значения энтальпии и температуры пластины в условиях отсутствия теплоотдачи (64). В этом случае пластина может играть роль измерителя температуры потока — *пластинчатого термометра.*

Дифференцируя (66) и замечая, что по (67) будет $\vartheta'(0)=0$, найдем $C=0$, т. е. по (68) при $h_w=h_t$ получим

$$h_t=1+\frac{1}{8}(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\vartheta(0), \tag{69}$$

или, переходя к размерным температурам,

$$T_t=T_\infty\left[1+\frac{1}{8}\vartheta(0)(k-1)\mathbf{M}_\infty^2\right], \tag{70}$$

где, согласно (67),

$$\vartheta(0)=2\sigma\int_0^\infty[\varphi''(\zeta)]^\sigma d\zeta\int_0^\zeta[\varphi''(\zeta^*)]^{2-\sigma}d\zeta^* \tag{71}$$

Постоянную C в общем случае наличия теплоотдачи с поверхности пластины можно представить, согласно (68) и (69), в следующем виде:

$$C=\frac{h_t-h_w}{\frac{1}{8}\int\limits_0^\infty [\varphi''(\zeta)]^\sigma\, d\zeta}. \tag{72}$$

Проанализируем полученные результаты. Прежде всего, легко убедиться, что при $M_\infty\to 0$ соотношения (66) и (72) в переменной ζ совпадут с ранее выведенной формулой (226) гл. XII для несжимаемой жидкости в переменной η; полученное таким путем равенство

$$\frac{T_w-T}{T_w-T_\infty}=\frac{\int\limits_0^\zeta [\varphi''(\zeta)]^\sigma\, d\zeta}{\int\limits_0^\infty [\varphi''(\zeta)]^\sigma\, d\zeta} \tag{73}$$

дает распределение температур в пограничном слое на пластине, обтекаемой *несжимаемой* жидкостью при учете линейного закона связи между коэффициентом вязкости и температурой.

Возвращаясь к случаю газа, движущегося с большими скоростями, когда влиянием сжимаемости (числа M_∞) пренебрегать нельзя, будем предполагать, что функция $\vartheta(\zeta)$ уже затабулирована для различных σ. Для дальнейшего особенно важно знать величины $\vartheta(0)$; приводим их значения при нескольких σ (для газа не превышающих единицу):

$$\sigma=0{,}6;\quad 0{,}8;\quad 1{,}0;$$
$$\vartheta(0)=3{,}08;\ 3{,}58;\ 4{,}00.$$

Обращаясь к формуле (70), видим, что она для случая $n=1$ представляет решение задачи об измерении температуры газового потока $T=T_\infty$ при помощи непосредственного замера температуры $T=T_w=T_t$ поверхности продольно обтекаемой этим газом пластины, при условии, что тепло от пластины не отводится (нет теплоотвода через державку и проволочки измерительной термопары). Как наглядно показывает формула (70), такой пластинчатый термометр будет вместо температуры потока T_∞ показывать тем бо́льшую температуру T_t, чем больше число M_∞, что и естественно, так как пластина тормозит поток и вследствие диссипации механической энергии потока в тепло должна дополнительно нагреваться; это торможение связано с повышением энтропии. Однако, как это сразу следует из формулы (70), при $\sigma=1$ и $\vartheta(0)=4$ термометр будет показывать температуру адиабатического и изэнтропического торможения

$$(T_t)_{\sigma=1}=T_\infty\left(1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2\right)=T_0;$$

при значениях $\sigma<1$ это уже не так, и $T_t<T_0$.

Формула (70) может служить для вычисления поправок на показания пластинчатого термометра в газе с заданным числом σ, отличным от единицы. Величину $\frac{1}{4}\vartheta(0)$ называют *коэффициентом восстановления.* Коэффициент восстановления в широком диапазоне изменения величины $(k-1)M_\infty^2$ представляет собой функцию σ, мало отличающуюся от $\sqrt{\sigma}$, как в этом нетрудно убедиться непосредственной проверкой по приведенной только что таблице значений $\vartheta(0)$.

Ту же примерно температуру (70) будет иметь поверхность ракеты, совершающей полет в атмосфере. При больших M_∞ температура поверхности может превзойти допустимые с точки зрения прочности конструкции значения. Значительное при высоких температурах лучеиспускание способствует охлаждению поверхности [1]).

Для того чтобы определить коэффициент теплоотдачи пластины, имеющей температуру $T=T_w$, вычислим размерную производную от температуры по нормали к пластине $\partial T/\partial y$ на поверхности пластины. Имеем, переходя в правой части к *размерным* величинам,

$$\frac{dh}{d\zeta}=\frac{1}{T_\infty}\,2\sqrt{\xi}\,\frac{\partial T}{\partial \eta}=\frac{2}{T_\infty}\sqrt{\frac{\nu_\infty x}{U_\infty}}\,\frac{\rho_\infty}{\rho}\,\frac{\partial T}{\partial y},$$

откуда следует

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{T_\infty}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_\infty x}}\,\frac{\rho_w}{\rho_\infty}\left(\frac{dh}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}.$$

Но по (66)

$$\left(\frac{dh}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}=\frac{C}{8}\,[\varphi''(0)]^\sigma;$$

кроме того, в случае пластины ($p=p_\infty$) по формуле Клапейрона будет

$$\frac{\rho_w}{\rho_\infty}=\frac{T_\infty}{T_w}.$$

Используя выражение (72) для C, в *размерных* величинах принимающее форму

$$C=\frac{1}{T_\infty}\,\frac{T_t-T_w}{\frac{1}{8}\int\limits_0^\infty [\varphi''(\zeta)]^\sigma\,d\zeta},$$

будем иметь

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{1}{2}(T_t-T_w)\cdot\frac{T_\infty}{T_w}\,f(\sigma)\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_\infty x}}, \tag{74}$$

где, как и в (231) гл. XII, положено

$$f(\sigma)=\frac{1}{\int\limits_0^\infty\left[\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi''(0)}\right]^\sigma d\zeta}\approx 0{,}664\sqrt[3]{\sigma}. \tag{75}$$

Вводя число Нуссельта Nu, получим, подобно (233) гл. XII,

$$\mathrm{Nu}=-\frac{Q}{\lambda_\infty(T_w-T_\infty)}=$$

$$=-\frac{1}{\lambda_\infty(T_w-T_\infty)}\int\limits_0^L\lambda_w\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}dx=\frac{T_w-T_t}{T_w-T_\infty}\,\frac{\lambda_w}{\lambda_\infty}\,\frac{T_\infty}{T_w}\,f(\sigma)\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_\infty}}\int\limits_0^L\frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Принимая во внимание, что коэффициенты теплопроводности находятся в том же соотношении, что и динамические коэффициенты вязко-

---

[1]) Кибель И. А. Пограничный слой в сжимаемой жидкости с учетом излучения.— ДАН СССР, 1939, т. 25, № 4.

сти, т. е. при $n=1$

$$\frac{\lambda_w}{\lambda_\infty}=\frac{T_w}{T_\infty},$$

и выполняя, кроме того, интегрирование, получим

$$\mathrm{Nu}=\frac{T_w-T_t}{T_w-T_\infty}f(\sigma)\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}; \tag{76}$$

входящая сюда величина T_t определяется по (70).

При отсутствии теплоотдачи $T_w=T_t$ и $\mathrm{Nu}=0$. При наличии теплоотдачи, но малых M_∞, т. е. при малых скоростях, когда влияние сжимаемости несущественно, $T_t=T_\infty$ и, следовательно,

$$\mathrm{Nu}=f(\sigma)\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}=0{,}664\sqrt[3]{\sigma}\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}. \tag{77}$$

Это совпадает с ранее полученной в гл. XII формулой (234).

Наконец, при $\sigma=1$ будем иметь

$$\mathrm{Nu}=0{,}664\frac{T_w-T_0}{T_w-T_\infty}\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}. \tag{78}$$

Обращаясь к вопросу о сопротивлении пластины, найдем сначала напряжение трения τ_w. Имеем, переходя к размерным величинам,

$$\varphi''(\zeta)=4\sqrt{\frac{\nu_\infty x}{U_\infty}}\frac{1}{U_\infty}\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда следует

$$\tau_w=\mu_w\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_\infty x}}U_\infty\frac{T_\infty}{T_w}\mu_\infty\frac{T_w}{T_\infty}\varphi''(0),$$

$$c_f=\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty x}}\varphi''(0),$$

причем $\varphi''(0)$ имеет то же значение $\varphi''(0)=1{,}328$, что и в несжимаемой среде. Итак, если при $n=1$ величины μ и ρ в выражении рейнольдсова числа соответствуют параметрам в набегающем потоке, то коэффициент местного трения остается тем же, что и в случае несжимаемой жидкости

$$\tau_w=0{,}332\sqrt{\frac{\mu_\infty\rho_\infty U_\infty^3}{x}},\quad c_f=\frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},\quad C_f=\frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}}. \tag{79}$$

Как можно заключить из проведенных выкладок, для вычисления коэффициентов сопротивления и теплоотдачи нет необходимости иметь явные формулы связи между новым переменным ζ и обычным $y/\sqrt{x}$, так как в окончательные выражения входят лишь значения величин при $y=0$ или $y=\infty$. Сложнее решается вопрос о распределении скоростей и температур в сечениях пограничного слоя, так как полученные распределения скоростей $\frac{u}{U_\infty}=\frac{1}{2}\varphi'(\zeta)$ и температур (энтальпии) (66) выражены через аргумент ζ, связанный с обычными размерными координатами по формуле

$$\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_\infty x}}\int_0^y\frac{T_\infty}{T}dy,$$

в свою очередь зависящей от распределения температур. Дифференцируя по y, получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_\infty x}}\,\frac{h_\infty}{h(\zeta)}.$$

Связь между ζ и $y/\sqrt{x}$ определится интегральным соотношением

$$\frac{1}{h_\infty}\int_0^\zeta h(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_\infty}}\,\frac{y}{\sqrt{x}}.$$

На рис. 285 и 286[1]) приводим графики влияния числа M_∞ на профили скоростей и температур при $n=1$, $\sigma=0{,}7$ и $k=1{,}4$ для пластины,

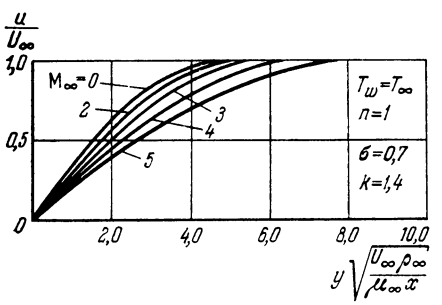


Рис. 285

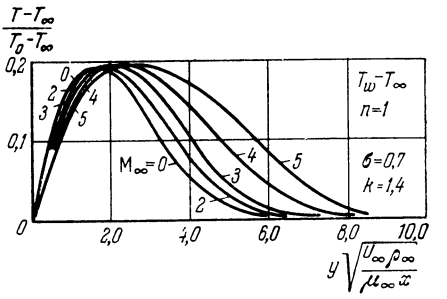


Рис. 286

температура которой путем охлаждения поддерживается равной температуре набегающего потока. На рисунках обращает на себя внимание факт возрастания с числом M_∞ толщины скоростного и температурного пограничных слоев.

Профиль скоростей с ростом числа M_∞ урезывается, становится более пологим. Температура при удалении от стенки сначала возрастает, а затем возвращается к прежнему значению, причем максимум отношения $\dfrac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$ (T_0—температура адиабатически и изэнтропически заторможенного газа для набегающего потока), следуя расширению пограничного слоя, отодвигается от стенки, но сохраняет неизменной свою величину.

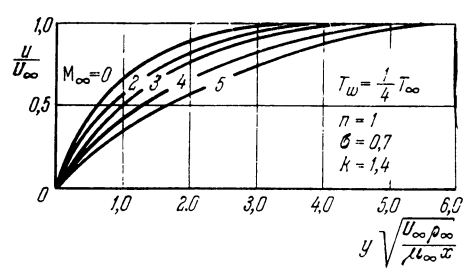


Рис. 287

Сравнение этих кривых с кривыми, показанными на рис. 287 и 288, соответствующими случаю искусственного охлаждения пластины ($T_w=\frac{1}{4}T_\infty$), говорит о некотором уменьшении толщин пограничных слоев.

На рис. 289 демонстрируется спрямление кривых распределения скоростей в координатах u/U_∞, $y\sqrt{U_\infty \rho_w/(\mu_w x)}$ по мере роста M_∞ в случае отсутствия теплоотдачи с поверхности пластины.

Рассмотренное только что решение, справедливое при $n=1$, пригодно лишь при сравнительно невысоких температурах поверхности пла-

[1]) Hantzsche W., Wendt H. Die laminare Grenzschicht der ebener Platte mit und ohne Wärmeübertragung, Jahrbuch 1942 der Deutschen Luftfahrtforschung, 40—51. Из этой работы заимствованы лишь упоминаемые и несколько дальнейших графиков; изложенный выше метод расчета отличен от метода Хантше и Вендта.

стины. Можно без труда и при этом значительно повысить точность расчета, если вместо простейшего закона в безразмерной форме $\mu' = h'$ принять более близкую к действительности, также приближенную *линейную* формулу Чепмена — Рубезина (15), аппроксимирующую закон Саттерлэнда (12). Разница будет лишь в том, что в правой части уравнения

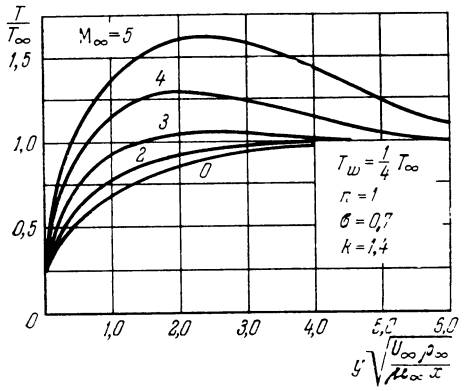


Рис. 288

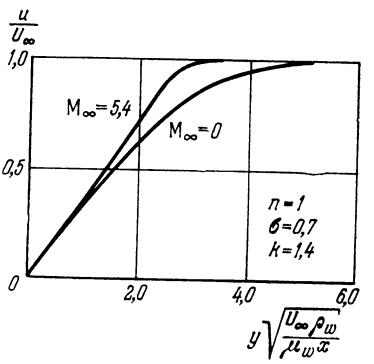


Рис. 289

(54) на место произведения $\mu\rho$ (напоминаем, в *безразмерных* величинах) встанет не единица, а постоянная Чепмена — Рубезина C, равная в безразмерных величинах

$$C = \frac{1 + h_S}{h_w + h_S} h_w^{1/2},$$

где $h_s = T_s/T_\infty$, а $T_s = 122$ К. Все останется по-прежнему, если в масштабы поперечной координаты и функции тока ввести постоянный множитель $\sqrt{C}$.

Тогда для коэффициентов сопротивления вместо (79) будут справедливы формулы

$$c_f = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \sqrt{C}, \quad C_f = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}} \sqrt{C}, \qquad (80)$$

при больших значениях числа Маха значительно приближающиеся к решениям на основе общей формулы Саттерлэнда, что подтверждается графиками на рис. 290. На этих двух графиках, относящихся к низким температурам потока: $T_\infty = -86°$ С (полет на высоте 50 км) и $T_\infty = -233°$ С (эксперимент в аэродинамической трубе сверхзвуковых скоростей), но к высоким, резко возрастающим с ростом числа Маха температурам стенки штриховой линией показаны результаты расчета по простейшей линейной формуле вязкости (79), а сплошными кривыми с отметками «Ч.— Р.» и «Сат.» — соответствующие результаты при принятии формул: (15) — Чепмена — Рубезина и (12) — Саттерлэнда; пользование формулой Чепмена — Рубезина оправдывается.

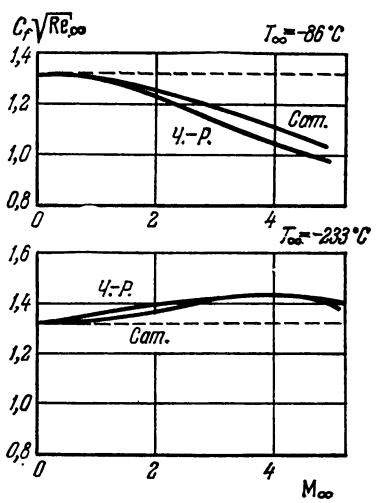


Рис. 290

Простые эмпирические формулы расчета коэффициента сопротивления пластины предложил Юнг [1]). Формулы эти

$$c_f\sqrt{\mathrm{Re}_x}=0{,}664\left[0{,}45+0{,}55\frac{T_w}{T_\infty}+0{,}09\,(k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2\sqrt{\sigma}\right]^{-\frac{1-n}{2}} \tag{81}$$

для *общего случая задания температур пластины и набегающего газа* и

$$c_f\sqrt{\mathrm{Re}_x}=0{,}664\,[1+0{,}365\,(k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2\sqrt{\sigma}]^{-\frac{1-n}{2}} \tag{82}$$

для *случая отсутствия теплоотдачи* (*пластинчатый термометр*) мало (в пределах 1%) отличаются от теоретических решений для практически встречающихся значений σ, n и чисел $\mathbf{M}_\infty<10$.

Сравнение некоторых результатов теоретических расчетов [2]) сопротивления при отсутствии теплоотдачи с эмпирической формулой (82) приведено на рис. 291. Сплошные линии соответствуют теоретическим расчетам, штриховые — формуле (82). Верхняя прямая относится к случаю $n=1$, когда, как было доказано в настоящем параграфе, произведение $c_f\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ не зависит ни от числа Маха, ни от σ.

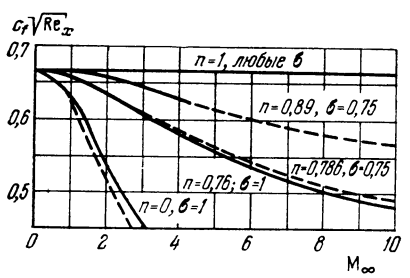


Рис. 291

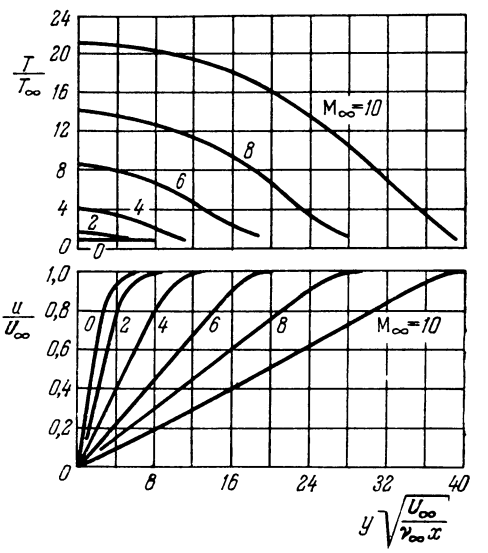


Рис. 292

В заключение приведем еще один график для случая отсутствия теплоотдачи при $\sigma=1$, $n=0{,}76$ (рис. 292) распределения температуры в сечениях слоя при различных числах $\mathbf{M}_\infty\leqslant 10$. Обращает на себя внимание естественный ввиду отсутствия теплоотдачи (охлаждения) с поверхности пластины резкий рост с числом $\mathbf{M}_\infty$ температуры стенки и толщины температурного слоя. Сопоставляя этот график с распределением скоростей, помещенным на том же рисунке, отметим равенство толщин скоростного и теплового слоев, имеющее место при $\sigma=1$. Профили скоростей имеют перегиб, особенно заметный при больших $\mathbf{M}_\infty$ [3]).

---

[1]) Цитируем по статье этого автора: Пограничные слои.— В кн.: Современное состояние аэродинамики больших скоростей/Под ред. Л. Хоуарта, т. I, М.: ИЛ, 1955, с. 433.

[2]) Численные методы решения уравнений пограничного слоя на пластине применялись Эммонсом и Брайнердом (см. Journ. of Appl. Mech. A-105, 1941, v. 8 и A-1, 1942, v. 9). При современном развитии ЭВМ задачи этого рода не представляют трудностей.

[3]) Подробности, относящиеся к решениям задач о ламинарном пограничном слое в газе можно найти в подробном обзоре: Куэрти Г. Ламинарный пограничный слой в сжимаемой жидкости.— В кн.: Проблемы механики/Под ред. Р. Мизеса и Т. Кар-

Мы удовольствовались пока рассмотрением лишь одного простейшего случая интегрирования системы уравнений (61), а именно случая $n=1$, когда первое уравнение этой системы становится *автономным* и интегрируется отдельно от второго. Представляет интерес и другой также простой случай, когда число Прандтля σ принимается равным единице (для воздуха $\sigma=0{,}72$). К этому случаю нам еще придется вернуться при рассмотрении более сложной задачи о ламинарном пограничном слое при наличии продольного перепада давления, а сейчас ограничимся лишь следующим общим анализом этого случая. Обратимся к первой форме уравнений пограничного слоя, представленной системой (48). Полагая в третьем уравнении системы $\sigma=1$, получим линейное относительно h_0 уравнение в безразмерных величинах

$$\rho u\frac{\partial h_0}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h_0}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial h_0}{\partial y}\right),$$

которое в случае $dp/dx=0$, в силу первого уравнения системы (48), имеет очевидный частный интеграл (a и b — постоянные)

$$h_0=au+b.$$

Переходя к размерным величинам, можем этот, носящий имя итальянского аэродинамика Л. Крокко, интеграл переписать в виде

$$\frac{T}{T_\infty}=-\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2+a\frac{u}{U_\infty}+b. \tag{83}$$

Используя очевидные условия

$$T=T_w \text{ при } u=0, \qquad T=T_\infty \text{ при } u=U_\infty, \tag{84}$$

определим a и b; окончательно найдем следующую связь между распределениями температур и скоростей (интеграл Крокко)

$$\frac{T}{T_\infty}=-\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2+\left(1-\frac{T_w}{T_\infty}+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)\frac{u}{U_\infty}+\frac{T_w}{T_\infty}. \tag{85}$$

Обозначая, как и ранее, значком нуль температуру, соответствующую адиабатически и изэнтропически заторможенному газу, будем иметь для любой точки пограничного слоя

$$T_0=T\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)=T\left(1+\frac{k-1}{2}\frac{u^2}{kRT}\right)=$$

$$=T\left(1+\frac{k-1}{2}\frac{U_\infty^2}{kRT_\infty}\frac{T_\infty}{T}\frac{u^2}{U_\infty^2}\right)=T\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\frac{T_\infty}{T}\frac{u^2}{U_\infty^2}\right),$$

и, следовательно, на внешней границе слоя ($u=U_\infty$) и на поверхности пластинки ($u=0$) будет

$$T_{\infty 0}=T_\infty\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right), \quad T_{w0}=T_w.$$

Переписывая (85) в форме

$$\frac{T+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2T_\infty\left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2-T_w}{T_\infty\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)-T_w}=\frac{u}{U_\infty},$$

мана.— М.: ИЛ, 1955. К сожалению, обзор доведен только до 1948 г. и посвящен по преимуществу зарубежным работам. Обзор советских работ примерно за этот же промежуток времени можно найти в статье: Лойцянский Л. Г. Пограничный слой.— В кн.: Механика в СССР за XXX лет.— М.: Гостехиздат, 1950, с. 300—320. См. также монографию. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962, с. 319—352.

получим равенство

$$\frac{T_0 - T_{w0}}{T_{\infty 0} - T_{w0}} = \frac{u}{U_\infty}, \tag{86}$$

служащее обобщением на случай движения совершенного газа при больших скоростях известного уже нам по гл. XII соотношения подобия (227). Согласно (86) можно утверждать, что в любом сечении слоя при $\sigma = 1$ и произвольном показателе степени n в законе зависимости вязкости от температуры поле перепадов температур газа, адиабатически и изэнтропически пересчитанных на покоящийся газ, подобно полю скоростей.

Разыскание в этом случае профиля скоростей по сечению пограничного слоя, а вместе с тем по (85) и профиля температур, представляет некоторую трудность. Эту трудность надо избежать до проведения численного интегрирования нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, к которому сводится задача.

Для составления указанного уравнения исключим φ из совокупности первого уравнения системы (61) и результата дифференцирования того же уравнения по ζ

$$(h^{n-1}\varphi'')' + \varphi\varphi'' = 0, \quad (h^{n-1}\varphi'')'' + \varphi\varphi''' + \varphi'\varphi'' = 0.$$

Умножим с этой целью первое из этих уравнений на φ''', второе на φ'' и вычтем почленно одно из другого. Получим

$$(h^{n-1}\varphi'')''\varphi'' + \varphi'\varphi''^2 - (h^{n-1}\varphi'')'\varphi''' = 0.$$

Примем во внимание, что безразмерная энтальпия h является, согласно интегралу Крокко (85), известной функцией безразмерной скорости u; кроме того, вспомним, что функция $\varphi(\zeta)$ была выбрана из условия $u = \frac{1}{2}\varphi'(\zeta)$. Полагая $h^{n-1}u' = s$, перепишем предыдущее уравнение в форме

$$s\frac{d^2s}{du^2} = -2uh^{n-1}(u), \tag{87}$$

причем предполагается, что $h(u)$ заменено его выражением согласно (85). Исследование случая $\sigma = 1$ связано, таким образом, с интегрированием уравнения (87). При этом уже не используется преобразование Дородницына, так как координата y не входит в число аргументов.

Из первого уравнения системы (61), переписанного в преобразованной форме

$$\left(\frac{ds}{du} + \varphi\right)\varphi'' = 0,$$

и очевидных соотношений $\varphi'' \neq 0$, $\varphi = 0$ при $u = 0$ следует граничное условие

$$\frac{ds}{du} = 0 \text{ при } u = 0. \tag{88}$$

Кроме того, из определения s следует

$$s = 0 \quad \text{при} \quad u = 1. \tag{89}$$

Следовательно, точка $s = 0$, $u = 1$ является *особой* для нелинейного уравнения второго порядка (87). Полагая в правой части уравнения $u = 1$ и замечая, что при этом по (85) будет $h = 1$, составим приближенное уравнение

$$s\frac{d^2s}{du^2} = -2,$$

интегральные кривые которого совпадают с искомыми интегральными кривыми точного уравнения (87) вблизи особой точки $u=1$, $s=0$. Определение интегральных кривых приближенного уравнения не составляет труда. Имеем (A — постоянная интегрирования)

$$\frac{ds}{du}\frac{d^2s}{du^2}=-\frac{2}{s}\frac{ds}{du},\quad \left(\frac{ds}{du}\right)^2=-4\ln(As),$$

откуда при помощи подстановки $-\ln(As)=z^2$ и использования граничного условия (89) можно получить (erf — известное уже нам по предыдущему обозначение интеграла ошибок)

$$u=1-\frac{\sqrt{\pi}}{2A}\operatorname{erf}\left[\sqrt{-\ln(As)}\right]+\frac{\sqrt{\pi}}{2A}.$$

Задаваясь различными значениями произвольной постоянной интегрирования A, выберем такую интегральную кривую, чтобы, выйдя из особой точки по этой кривой и продолжая ее затем численным методом интегрирования точного уравнения (87), прийти, согласно граничному условию (88), в точку, где $u=0$, $ds/du=0$. Такой метод часто приходится применять при решении краевых задач пограничного слоя. Результаты только что описанного расчета при отсутствии теплоотдачи и показателе степени n в законе зависимости коэффициента вязкости от температуры, равном 0,76, были уже приведены на рис. 292 и в соответствующем месте текста обсуждены. Высокие температуры стенки (при $M_\infty=10$ более чем в 20 раз превышающие абсолютную температуру внешнего потока) объяснялись отсутствием охлаждения поверхности пластины. Если, например, потребовать, чтобы за счет сильного охлаждения было $T_w=\frac{1}{4}T_\infty$, то расчет приведет к кривым, показанным на рис. 293. Можно заметить, что при этом максимумы температур сместятся с поверхности пластины внутрь пограничного слоя и значительно уменьшатся по сравнению со случаем отсутствия теплоотдачи. Толщины скоростного и температурного пограничных слоев будут опять совпадать, так как $\sigma=1$.

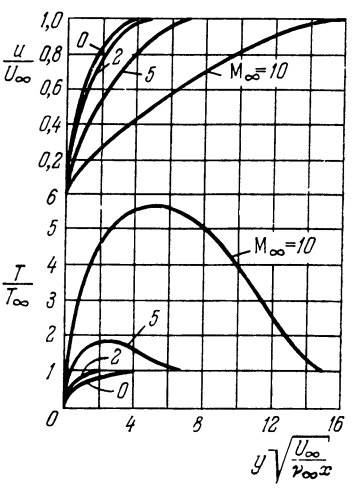


Рис. 293

При решении задач теории ламинарного пограничного слоя в газе при больших скоростях, в частности в случае пластины ($dp/dx=0$), можно с успехом пользоваться переменными Мизеса или Крокко, описанными в гл. XII (§ 107). В настоящем общем курсе мы не имеем возможности останавливаться на этом вопросе и отсылаем читателя к ранее цитированным специальным обзорам по теории ламинарного пограничного слоя в газе при больших скоростях или к нашей монографии [1]). Заметим, что изложенное исследование поведения интегральных кривых уравнения (87) вблизи особой точки проводилось приемом перехода к скорости как независимому переменному, близким к применению переменных Крокко.

---

[1]) Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962, с. 334—346.

Как показано в только что цитированных источниках, применение переменных Крокко позволяет снизить порядок системы уравнений (61), в частности, в случае линейной связи между коэффициентом вязкости и температурой; вместо первого уравнения системы (65), являющегося уравнением третьего порядка, можно получить уравнение второго порядка

$$KK''+2\eta=0,$$

где $K=2\tau\sqrt{\mathrm{Re}_\infty\xi}/(\rho_\infty U_\infty^2)$, а штрихи означают дифференцирование по переменной $\eta=u/U_\infty$. Несмотря на внешнюю простоту, уравнение это не может быть разрешено в квадратурах, а требует применения численных методов интегрирования. Первый случай применения переменных Мизеса к задаче о ламинарном пограничном слое на пластине в продольном газовом потоке был опубликован Карманом и Ченем [1]).

§ 145. Ламинарный пограничный слой на конусе в продольном сверхзвуковом потоке

Можно заметить некоторую *аналогию* пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине и на конусе [2]). Предположим, что угол полураствора конуса θ_0 соответствует при заданном числе Маха M_∞ в набегающем потоке случаю *присоединенной к вершине конуса ударной конической волны.* За этой волной движение идеального (невязкого) газа будет потенциальным и «коническим», т. е. все параметры газа должны сохранять постоянные значения вдоль любой конической поверхности, соосной с обтекаемым конусом, имеющей общую с ним вершину и расположенной между ним и ударной волной. В частности, давление в этом движении идеального газа должно сохранять постоянное значение на поверхности обтекаемого конуса, а следовательно, по известному свойству пограничного слоя, давление будет постоянным и во всем пограничном слое в вязком газе. Этот факт сближает движение в пограничном слое на конусе со случаем продольно обтекаемой пластины. Можно показать, что между этими двумя движениями существует простое соответствие.

С этой целью сопоставим уравнения пограничного слоя на конусе в *сферических* координатах

$$\begin{gathered}\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\theta}\right),\\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v)}{\partial\theta}+\frac{2\rho u}{r}=0,\\ \rho\left(u\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{\sigma}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial h}{\partial\theta}\right)+\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\end{gathered}\tag{90}$$

и соответствующие им граничные условия ($\theta_\infty>\theta_0$ — условный угол, представляющий границу слоя)

$$\begin{gathered}u=0,\ v=0,\ h=h_w\left(\text{или }\frac{\partial h}{\partial\theta}=0\right)\ \text{при }\theta=\theta_0,\\ u\to u_e,\quad h\to h_e\ \text{при }\theta\to\theta_\infty\end{gathered}\tag{91}$$

с уравнениями пограничного слоя и граничными условиями на пласти-

---

[1]) Kármán Th, Tsien H S. Boundary layer in compressible fluid — Journ. Aeron. Sci., 1938, v. 5.

[2]) Hantzsche W., Wendt H Die laminare Grenzschicht an einem mit Überschallgeschwindigkeit angeströmten nicht angestellten Kegel — Jahrbuch 1941 der Deutschen Luftfahrtforschung, 1—77.

не в том же газе

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial y}=0,$$

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{h}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{h}}{\partial y}\right)=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar{h}}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2; \tag{92}$$

$$\bar{u}=0,\quad \bar{v}=0,\quad \bar{h}=\bar{h}_w\left(\text{или } \frac{\partial\bar{h}}{\partial y}=0\right) \text{ при } y=0,$$

$$\bar{u}\to\bar{u}_e,\quad \bar{h}\to\bar{h}_e \text{ при } y\to\infty.$$

Замечая, что обе задачи *автомодельны* (в постановках задач нет характерного масштаба длины), будем искать решение задачи о продольном обтекании пластины в обычном виде:

$$\bar{u}=\bar{u}(\zeta),\quad \bar{v}=\frac{\tilde{V}(\zeta)}{\sqrt{x}},\quad \bar{h}=\bar{h}(\zeta),\quad \zeta=\frac{y}{\sqrt{x}}, \tag{93}$$

а для пограничного слоя на конусе — в аналогичной форме

$$u=u(\zeta),\quad v=\frac{\tilde{v}(\zeta)}{\sqrt{r}},\quad h=h(\zeta),\quad \zeta=\frac{r(\theta-\theta_0)}{\sqrt{r}}=(\theta-\theta_0)\sqrt{r}. \tag{94}$$

Тогда система уравнений (90) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\rho u\zeta}{2}+\rho\tilde{v}\right)\frac{du}{d\zeta}=\frac{d}{d\zeta}\left(\mu\frac{du}{d\zeta}\right),$$

$$\frac{\zeta}{2}\frac{d(\rho u)}{d\zeta}+\frac{d(\rho\tilde{v})}{d\zeta}+2\rho u=0, \tag{95}$$

$$\left(\frac{\rho u\zeta}{2}+\rho\tilde{v}\right)\frac{dh}{d\zeta}=\frac{1}{\sigma}\frac{d}{d\zeta}\left(\mu\frac{dh}{d\zeta}\right)+\mu\left(\frac{du}{d\zeta}\right)^2,$$

а система (92) — в следующую:

$$\left(-\frac{1}{2}\rho\bar{u}\zeta+\rho\tilde{V}\right)\frac{d\bar{u}}{d\zeta}=\frac{d}{d\zeta}\left(\mu\frac{d\bar{u}}{d\zeta}\right),$$

$$-\frac{1}{2}\zeta\frac{d(\rho\bar{u})}{d\zeta}+\frac{d}{d\zeta}(\rho\tilde{V})=0,$$

$$\left(-\frac{1}{2}\rho\bar{u}\zeta+\rho\tilde{V}\right)\frac{d\bar{h}}{d\zeta}=\frac{1}{\sigma}\frac{d}{d\zeta}\left(\mu\frac{d\bar{h}}{d\zeta}\right)+\mu\left(\frac{d\bar{u}}{d\zeta}\right)^2; \tag{96}$$

$$\bar{u}=0,\quad \tilde{V}=0,\quad \bar{h}=\bar{h}_w\left(\text{или } \frac{d\bar{h}}{d\zeta}=0\right) \text{ при } \zeta=0,$$

$$\bar{u}\to\bar{u}_e,\quad \bar{h}\to\bar{h}_e \text{ при } \zeta\to\infty.$$

Если в системе (95) совершить дополнительное преобразование

$$\zeta_1=\sqrt{3}\zeta,\quad \tilde{v}(\zeta)=\sqrt{3}\left[W(\zeta_1)-\frac{2}{3}\zeta_1 u\right], \tag{97}$$

то она переходит в систему [условия в последних строках (96) и (98), как обычно, асимптотические]

$$\left(-\frac{\rho u\zeta_1}{2}+\rho W\right)\frac{du}{d\zeta_1}=\frac{d}{d\zeta_1}\left(\mu\frac{du}{d\zeta_1}\right),$$

$$-\frac{\zeta_1}{2}\frac{d(\rho u)}{d\zeta_1}+\frac{d(\rho W)}{d\zeta_1}=0,$$

$$\left(-\frac{\rho u\zeta_1}{2}+\rho W\right)\frac{dh}{d\zeta_1}=\frac{1}{\sigma}\frac{d}{d\zeta_1}\left(\mu\frac{dh}{d\zeta_1}\right)+\mu\left(\frac{du}{d\zeta_1}\right)^2; \tag{98}$$

$$u=0,\quad W=0,\quad h=h_w\left(\frac{dh}{d\zeta_1}=0\right)\text{ при }\zeta_1=0,$$

$$u\to u_e,\quad h\to h_e\text{ при }\zeta_1\to\infty,$$

ничем не отличающуюся от уравнений и граничных условий (96) для пластины, так что $\tilde{u}=u$, $\tilde{V}=W$.

Отсюда можно заключить, что если функции аргумента ζ

$$\bar{u}=u^*(\zeta),\quad \bar{v}=\frac{\tilde{v}^*(\zeta)}{\sqrt{x}},\quad \bar{h}=h^*(\zeta) \tag{99}$$

представляют собой решение для пластины, то, согласно (97), функции аргумента ζ_1

$$u=u^*(\zeta_1),\quad v=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{r}}\left[W(\zeta_1)-\frac{2}{3}\zeta_1 u^*(\zeta_1)\right],\quad h=h^*(\zeta_1) \tag{100}$$

дадут искомое решение для конуса.

Сопоставляя эти решения, можно прийти к следующим выводам. Условные *толщины слоя* δ^*, δ^{**} *на конусе* при тех же значениях абсциссы $r=x$ в $\sqrt{3}$ *раз меньше, чем на пластине* ($\bar{\delta}^*$, $\bar{\delta}^{**}$). Действительно, имеем, например,

$$\bar{\delta}^*=\int_0^\infty\left[1-\frac{u^*(\zeta)}{u_e^*}\right]dy=\sqrt{x}\int_0^\infty\left[1-\frac{u^*(\zeta)}{u_e^*}\right]d\zeta,$$

$$\delta^*=\int_{\theta_0}^{\theta_\infty}\left[1-\frac{u^*(\zeta_1)}{u_e^*}\right]r\,d\theta=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{3}}\int_0^\infty\left[1-\frac{u^*(\zeta_1)}{u_e^*}\right]d\zeta_1,$$

так что

$$\delta^*=\frac{\bar{\delta}^*}{\sqrt{3}},$$

и аналогичные соотношения для толщин потери импульса.

Сравним еще напряжения трения: τ_w на конусе и $\bar{\tau}_w$ на пластине. Будем иметь

$$\tau_w=\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_0}=\left(\frac{\mu}{r}\frac{du^*}{d\zeta_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta}\right)_{\substack{\zeta_1=0\\ \theta=\theta_0}}=\left(\frac{\mu}{r}\frac{du^*}{d\zeta_1}\sqrt{3}\sqrt{r}\right)_{\zeta_1=0}=$$

$$=\sqrt{3}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_{y=0}=\sqrt{3}\,\bar{\tau}_w,$$

так что при одном и том же значении абсциссы $r=x$ *напряжение трения на конусе в* $\sqrt{3}$ *раз больше, чем напряжение трения на пластине.* Точно так же убедимся, что *коэффициент полного сопротивления трения на конусе* при прочих равных условиях *в* $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ *раз больше соответствующего коэффициента на пластине.* Действительно, первый из этих коэффициентов равен

$$\left(\frac{1}{2}\rho_e u_e^2\pi L^2\right)^{-1}\int_0^L 2\pi r\tau_w\,dr=\left(\frac{1}{2}\rho_e u_e^2\pi L^2\right)^{-1}\int_0^L 2\pi r\sqrt{3}\,\bar{\tau}_w\,dr=\frac{(4/\sqrt{3})\bar{\tau}_w(L)}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2},$$

а второй —

$$\left(\frac{1}{2}\rho_e\bar{u}_e^2 L\right)^{-1}\int_0^L \bar{\tau}_w\,dx = \frac{2\bar{\tau}_w(L)}{\frac{1}{2}\rho_e\bar{u}_e^2},$$

что при равенстве величин u_e и $\bar{u}_e$ приводит к высказанному ранее заключению. Точно *в таких же отношениях* $\sqrt{3}$ *и* $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ *находятся местные и средние коэффициенты теплоотдачи.*

К тем же результатам можно прийти с более общей точки зрения, применяя к уравнениям пограничного слоя на продольно обтекаемом конусе преобразование Манглера[1]), заключающееся в переходе от координат x, y, отсчитываемых вдоль меридианного сечения поверхности тела вращения и по нормали к нему, к координатам $\bar{x}$, $\bar{y}$ в соответствующем *плоском* пограничном слое по формулам ($r_0(x)$ — радиус поперечной кривизны тела вращения)

$$\bar{x} = \int_0^x r_0^2(\xi)\,d\xi, \quad \bar{y} = r_0(x)\,y. \tag{101}$$

Все остальные параметры потока сохраняются:

$$\bar{u} = u, \quad \bar{u}_e = u_e, \quad \bar{\psi} = \psi,$$
$$\bar{p} = p, \quad \bar{\rho} = \rho, \quad \bar{h} = h, \quad \bar{\mu} = \mu, \tag{102}$$

кроме поперечной скорости v, которая преобразуется согласно равенству

$$\bar{v} = \frac{v}{r_0} + \frac{r_0'(x)}{r_0^2}\,yu. \tag{103}$$

Составим уравнения пограничного слоя на теле вращения при продольном его обтекании газом в координатах x и y, причем используем то приближение, о котором шла речь в § 115 при выводе системы уравнений (165) гл. XII; тогда получим (для общности в первом уравнении сохранено слагаемое, определяемое перепадом давления)

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial(r_0\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(r_0\rho v)}{\partial y} = 0, \tag{104}$$
$$\rho\left(u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Введем функцию тока $\psi(x, y)$ равенствами

$$r_0 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad r_0 v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{105}$$

удовлетворяющими второму уравнению системы (104). Применяя преобразование (101), согласно которому

$$\frac{\partial}{\partial x} = r_0^2\frac{\partial}{\partial\bar{x}} + r_0'(x)\,y\frac{\partial}{\partial\bar{y}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = r_0\frac{\partial}{\partial\bar{y}}, \tag{106}$$

[1]) Mangler W. Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten — Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech, 1948, Bd 28, S. 97. Преобразования (101), (103) совпадают с преобразованиями Е. И. Степанова (§ 115).

к системе равенств (105), получим

$$r_0 u = \frac{1}{\rho} r_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}, \quad r_0 v = -\frac{1}{\rho} r_0^2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} - r_0'(x)\, y \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}, \tag{107}$$

откуда следует

$$u = \bar{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{r_0} + \frac{r_0'(x)}{r_0^2} yu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}}. \tag{108}$$

Применяя к первому и третьему уравнениям системы (104) преобразования (106) и используя для второго уравнения той же системы равенства (108), получим по (102) следующую систему уравнений в новых переменных:

$$\begin{gathered} \bar{\rho}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = \bar{\rho}\bar{u}_e \frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right), \\ \frac{\partial (\bar{\rho}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\bar{\rho}\bar{v})}{\partial \bar{y}} = 0, \\ \bar{\rho}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}}\right) = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}}\right) + \bar{\mu}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)^2, \end{gathered} \tag{109}$$

совпадающую с уравнениями пограничного слоя в плоском газовом потоке; совпадут и преобразованные граничные условия.

Пользуясь этим общим преобразованием в рассмотренном в начале параграфа частном случае конуса $[r_0(x) = ax]$, будем иметь по первому равенству системы (101)

$$\bar{x} = \frac{1}{3} a^2 x^3, \quad \bar{y} = axy, \tag{110}$$

где $a = \sin \theta_0$ (θ_0 — половина угла раствора конуса). Сравним между собой, например, напряжения трения для конуса τ_w и для пластины $\bar{\tau}_w$. По второму равенству системы (101) получим в соответствующих точках (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ общее соотношение

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \bar{\mu}_w \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)_{\bar{y}=0} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right)_{y=0} = \bar{\tau}_w r_0 = \bar{\tau}_w ax. \tag{111}$$

Вспомним, что Хантше и Вендт провели сравнение τ_w и $\bar{\tau}_w$ при одинаковых значениях абсциссы на образующей конуса и вдоль пластины; по (110) это означает, что надо положить

$$x = \frac{1}{3} a^2 x^3 \text{ или } ax = \sqrt{3}.$$

Возвращаясь после этого к равенству (111), получим

$$\tau_w = \sqrt{3}\,\bar{\tau}_w$$

в полном соответствии с предыдущим результатом. Аналогичным образом можно получить и остальные соотношения.

В ранее цитированной нашей монографии по теории ламинарного пограничного слоя можно найти многие другие примеры расчета пограничного слоя в газе при отсутствии продольного перепада давления.

§ 146. Ламинарный пограничный слой при больших скоростях и наличии продольного перепада давлений

Изложим сначала наиболее простой приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя в газе при наличии заданного продольного перепада давлений [1]), справедливый, как далее будет указано, при не слишком больших значениях числа Маха, например $M_\infty < 2$.

Рассмотрим случай *теплоизолированной поверхности*, т. е. примем, что поток тепла через поверхность равен нулю и, следовательно, имеет место граничное условие

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0. \tag{112}$$

Удовольствуемся также предположением $\sigma = 1$. Тогда, как легко убедиться, частным интегралом уравнения баланса тепла (третьего уравнения системы (48)), удовлетворяющим предыдущему граничному условию, будет

$$h_0 = \text{const}$$

или, если вспомнить (42),

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0, \tag{113}$$

где h_0 — *постоянная* для всех точек пограничного слоя величина. Последнее равенство эквивалентно следующему (T_0, так же как h_0, одинаково для всех точек пограничного слоя):

$$T = T_0\left(1 - \frac{u^2}{2h_0}\right). \tag{114}$$

Замечая, что вне пограничного слоя поток потенциален, а давление поперек пограничного слоя не меняется, получим для всех точек слоя известное изэнтропическое (гл. V) соотношение

$$p = p_0\left(1 - \frac{u_e^2}{2h_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{115}$$

где u_e — скорость на внешней границе слоя, а p_0 — давление в адиабатически и изэнтропически заторможенном газе, одинаковое для всех точек внешней границы пограничного слоя. По закону Клапейрона найдем соответствующее соотношение для плотности (ρ_0 — плотность адиабатически и изэнтропически заторможенного газа):

$$\rho = \frac{\rho_0\left(1 - \frac{u_e^2}{2h_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}}{1 - \frac{u^2}{2h_0}}. \tag{116}$$

Пользуясь принятой ранее степенной связью между динамическим коэффициентом вязкости и абсолютной температурой, получим

$$\mu = \mu_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^n = \mu_0\left(1 - \frac{u^2}{2h_0}\right)^n. \tag{117}$$

Приняв во внимание, что интеграл (113) уравнения баланса энергии уже найден, остановимся на первых двух уравнениях пограничного слоя

[1]) Дородницын А. А., Лойцянский Л. Г. К теории перехода ламинарного слоя в турбулентный.— Прикл. мат. и мех., 1945, т. 9, вып. 4.

в размерных величинах

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{118}$$

и, введя для краткости обозначения

$$\alpha=\frac{u}{\sqrt{2h_0}},\quad \bar{\alpha}=\frac{u_e}{\sqrt{2h_0}}, \tag{119}$$

совершим над уравнениями (118) преобразование Дородницына [1]), в настоящем случае имеющее вид

$$\xi=\int_0^x\frac{p}{p_0}dx=\int_0^x(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k}{k-1}}dx,\quad \eta=\int_0^y\frac{\rho}{\rho_0}dy=\int_0^y\frac{(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k}{k-1}}}{1-\alpha^2}dy. \tag{120}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{p}{p_0}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}=(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k}{k-1}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k}{k-1}}}{1-\alpha^2}\frac{\partial}{\partial\eta}; \tag{121}$$

кроме того, по первой из этих формул и соотношению (115)

$$\frac{dp}{dx}=(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k}{k-1}}\frac{dp}{d\xi}=-p_0\frac{k}{k-1}(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k+1}{k-1}}\cdot 2\bar{\alpha}\bar{\alpha}'=$$

$$=-\frac{p_0}{h_0}\frac{k}{k-1}(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k+1}{k-1}}u_eu_e'=-\rho_0(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k+1}{k-1}}u_eu_e'; \tag{122}$$

штрих здесь и далее означает дифференцирование по ξ.

Подставляя полученные выражения в первое из равенств (118), преобразуем его к виду

$$u\frac{\partial u}{\partial\xi}+\tilde{v}\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{1-\alpha^2}{1-\bar{\alpha}^2}u_eu_e'+\nu_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\alpha^2)^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right], \tag{123}$$

где положено для краткости

$$\tilde{v}=\frac{v}{1-\alpha^2}+\frac{u}{(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k}{k-1}}}\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{124}$$

Из уравнения неразрывности следует

$$\rho u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\quad \rho v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k}{k-1}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},$$

или

$$u=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\quad \frac{v}{1-\alpha^2}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}-\frac{u}{(1-\bar{\alpha}^2)^{\frac{k}{k-1}}}\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Вводя опять скорость $\tilde{v}$ по (124), перепишем последние два равенства в виде

$$u=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\quad \tilde{v}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},$$

[1]) Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе.— Прикл. мат. и мех., 1942, т. 6, вып. 6.

откуда сразу получим уравнение неразрывности в переменных Дородницына

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}=0. \tag{125}$$

Пользуясь уравнениями (123) и (125), путем, аналогичным уже ранее примененному в гл. XII, выведем уравнение импульсов в переменных Дородницына

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^{\infty,\delta_\eta} u(u_e-u)\,d\eta+u_e'\int_0^{\infty,\delta_\eta}\left(\frac{1-\alpha^2}{1-\bar{\alpha}^2}u_e-u\right)d\eta=\nu_0\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}, \tag{126}$$

где под δ_η понимается конечная толщина пограничного слоя, определенная как значение η, при котором $u\approx u_e$. Введем аналогичные условные толщины пограничного слоя

$$\delta_\eta^*=\int_0^{\infty,\delta_\eta}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)d\eta,\quad \delta_\eta^{**}=\int_0^{\infty,\delta_\eta}\frac{u}{u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)d\eta. \tag{127}$$

Тогда, используя тождество $\frac{1-\alpha^2}{1-\bar{\alpha}^2}u_e-u=\frac{1}{1-\bar{\alpha}^2}\cdot[u_e-u+\alpha\bar{\alpha}(u_e-u)]$, преобразуем уравнение (126) к виду

$$\frac{d\delta_\eta^{**}}{d\xi}+\left(2\frac{u_e'}{u_e}+\frac{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'}{1-\bar{\alpha}^2}\right)\delta_\eta^{**}+\frac{u_e'}{u_e(1-\bar{\alpha}^2)}\delta_\eta^*=\frac{\nu_0}{u_e^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}. \tag{128}$$

Это и есть искомое *уравнение импульсов*. При переходе к малым скоростям (т.е. $\bar{\alpha}\to 0$, $\xi\to x$, $\eta\to y$, $\nu_0\to\nu$) получим известное уже нам по гл. XII уравнение импульсов для *несжимаемой* жидкости.

Предположим теперь, что профили скоростей в сечениях пограничного слоя могут быть заданы *однопараметрическим* семейством

$$\frac{u}{u_e}=\varphi\left(\frac{\eta}{\delta_\eta^{**}};\,f\right), \tag{129}$$

не зависящим *явно* от числа M_∞, т. е. таким же, как и в случае несжимаемой жидкости ($M_\infty=0$). При этом, конечно, сохраняется неявное влияние числа M_∞ через величины u_e, δ_η^{**}, η и f.

Принятое допущение справедливо при не слишком больших значениях M_∞. Так, например, для пластины ($f=0$) величина

$$\zeta=\left[\frac{\partial(u/u_e)}{\partial(y/\delta^{**})}\right]_{y=0}=\left[\frac{\partial(u/u_e)}{\partial(\eta/\delta_\eta^{**})}\right]_{\eta=0}=\varphi'(0;\,0)$$

должна быть независимой от числа M_∞ и равной 0,221. Точные расчеты показывают, что на самом деле эта величина возрастает с числом M_∞, достигая значений: $\zeta=0{,}222$ при $M_\infty=0{,}65$, $\zeta=0{,}227$ при $M_\infty=1{,}59$ и $\zeta=0{,}234$ при $M_\infty=3{,}05$. Изложенное ниже решение, привлекающее к себе своей простотой, применимо, таким образом, лишь при сравнительно небольших числах M_∞. Используя (129), будем иметь

$$\frac{\delta_\eta^*}{\delta_\eta^{**}}=\int_0^\infty\left[1-\varphi\left(\frac{\eta}{\delta_\eta^{**}};\,f\right)\right]d\left(\frac{\eta}{\delta_\eta^{**}}\right)=H(f),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}=\frac{u_e}{\delta_\eta^{**}}\varphi'(0;\,f)=\frac{u_e}{\delta_\eta^{**}}\zeta(f). \tag{130}$$

После подстановки этих выражений в (128) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\delta_\eta^{**2}}{\nu_0}\right)+\left(2\frac{u_e'}{u_e}+\frac{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'}{1-\bar{\alpha}^2}\right)\frac{\delta_\eta^{**2}}{\nu_0}+\frac{u_e'}{u_e(1-\bar{\alpha}^2)}\frac{\delta_\eta^{**2}}{\nu_0}H(f)=\frac{\zeta(f)}{u_e}.$$

Умножим обе части этого уравнения на $1-\bar{\alpha}^2$ и приведем его к виду

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{(1-\bar{\alpha}^2)\,\delta_\eta^{**2}}{\nu_0}\right]=\frac{1-\bar{\alpha}^2}{u_e}\left\{\zeta(f)-\frac{u_e'\delta_\eta^{**2}}{\nu_0(1-\bar{\alpha}^2)}[2+H(f)]\right\}.$$

Теперь можно заметить, что роль формпараметра играет величина

$$f=\frac{u_e'\delta_\eta^{**2}}{\nu_0(1-\bar{\alpha}^2)}, \tag{131}$$

так как при этом выражение, стоящее внутри фигурных скобок, будет являться функцией только формпараметра f. Предыдущее уравнение приводится к виду

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{(1-\bar{\alpha}^2)^2}{u_e'}f\right]=\frac{1-\bar{\alpha}^2}{u_e}F(f)$$

или, после выполнения дифференцирования в левой части,

$$\frac{df}{d\xi}=F(f)\frac{d}{d\xi}\ln\frac{u_e}{\sqrt{1-\bar{\alpha}^2}}+f\frac{d}{d\xi}\ln\frac{u_e'}{(1-\bar{\alpha}^2)^2}. \tag{132}$$

Таково основное уравнение однопараметрической теории, представляющей собой простое обобщение теории гл. XII на разбираемый случай движения газа с большими скоростями. Входящая сюда функция

$$F(f)=2\{\zeta(f)-[2+H(f)]f\} \tag{133}$$

ничем не отличается от соответствующей функции $\bar{f}$ для несжимаемой жидкости.

Вернемся теперь к основной переменной x; будем иметь, сохраняя штрих для обозначения производной по x,

$$\frac{df}{dx}=F(f)\frac{d}{dx}\ln\frac{u_e}{\sqrt{1-\bar{\alpha}^2}}+f\frac{d}{dx}\ln\frac{u_e'}{(1-\bar{\alpha}^2)^{2+\frac{k}{k-1}}}. \tag{134}$$

Из сделанного ранее предположения о независимости формы профиля (129) от числа M_∞ следует, что вид функции $F(f)$ должен быть тем же самым, что и в случае несжимаемой жидкости ($M_\infty=0$). Это позволяет, так же как и в случае несжимаемой жидкости, заменить функцию $F(f)$ ее линейным приближением

$$F(f)=a-bf$$

и после простого интегрирования уравнения (134) получить

$$f=\frac{au_e'}{u_e^b(1-\bar{\alpha}^2)^m}\int_0^x u_e^{b-1}(1-\bar{\alpha}^2)^{m-1}\,dx, \tag{135}$$

где положено

$$m=2+\frac{k}{k-1}-\frac{b}{2}. \tag{136}$$

Для воздуха ($k=1{,}4$) при $b=5{,}75$ будет $m=2{,}63$. Формула (135) может быть преобразована к виду

$$f = a\frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}^b(1-\bar{\alpha}^2)^m}\int_0^x \bar{\alpha}^{b-1}(1-\bar{\alpha}^2)^{m-1}\,dx, \qquad (137)$$

более удобному для расчетов. Для пересчета заданного распределения коэффициента давления $c_{p0}(x)$ по поверхности профиля на распределе-

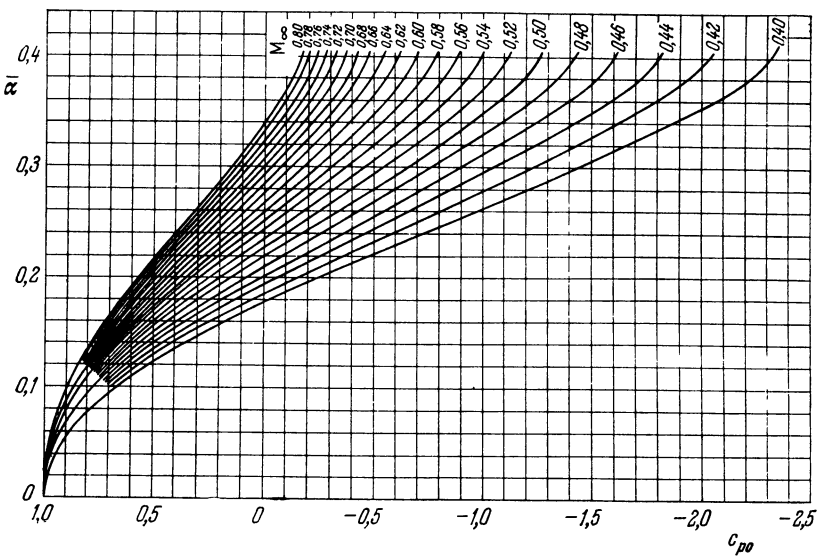


Рис. 294

ние $\bar{\alpha}(x)$ при различных $M_\infty < M_{кр}$ служит предлагаемая на рис. 294 сетка кривых.

Сделанное ранее допущение заставляет считать отрывное значение f_s при больших *докритических* скоростях не зависящим от M_∞. Вспоминая, что возрастание числа M_∞ в докритической области вызывает резкое увеличение разрежения, а следовательно, и уклона $u_e'(x)$ за точкой минимума давления, заключим, согласно (135), что это повлечет за собой убывание x_s, т. е. перемещение «точки» отрыва вверх по потоку. Отсюда следует, что сжимаемость жидкости при докритических скоростях *предваряет* отрыв ламинарного пограничного слоя, т. е. ухудшает обтекание тела. Расчеты подтверждают это соображение. Так, например, точка отрыва ламинарного слоя с верхней поверхности крылового профиля NACA-4412 при $c_y=0{,}146$ и $M_\infty=0$ лежит примерно на 11% хорды от передней кромки, а при $M_\infty=0{,}4$ перемещается в точку, лежащую на 5% хорды от носика.

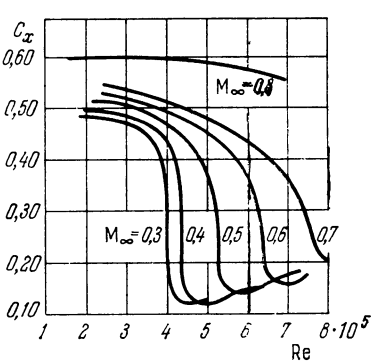


Рис. 295

Наглядным подтверждением явления смещения точки отрыва вверх по потоку с ростом числа M_∞ могут служить результаты опытов *Ферри* над *кризисом сопротивления* шара. В связи с ухудшением обтекания шара при росте M_∞ можно ожидать, что для улучшения обтекания шара,

происходящего при *кризисе обтекания*, потребуются тем большие рейнольдсовы числа, чем больше число M_∞. Наблюдения Ферри над обтеканием шара при разных M_∞, результаты которых приведены на рис. 295, хорошо подтверждают это предположение. С возрастанием числа M_∞ от 0,3 до 0,7 условное значение $Re_{кр}$, соответствующее $c_x=0{,}3$, возрастает от 400 000 примерно до 740 000.

Явлением более раннего отрыва вследствие сжимаемости газа объясняется также уменьшение $c_{y\,max}$ с ростом M_∞ при докритических режимах.

Перейдем к рассмотрению общего случая произвольных (на самом деле не столь больших, чтобы следовало принять во внимание характерные для высоких температур газа явления его диссоциации и ионизации) чисел M_∞ и чисел Прандтля, не равных единице [1]).

В этом случае интеграл (113) уравнений движения и баланса энергии отсутствует, и необходимо решать полную систему уравнений (48), которая после простых преобразований третьего уравнения системы может быть переписана в форме

$$\begin{gathered}\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{dp_e}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0,\\ \rho u\frac{\partial h_0}{\partial y}+\rho v\frac{\partial h_0}{\partial y}=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial h_0}{\partial y}\right)-\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ \frac{k-1}{k}\rho h=p=p_e,\quad \mu=\mu_{e0}a(\chi),\end{gathered}\tag{138}$$

где положено

$$\chi=\frac{T}{T_{e0}}=\frac{h}{h_{e0}},\tag{139}$$

а h_0 представляет собой *переменную* полную энтальпию (42); в рассматриваемом сейчас общем случае, конечно, $h_0\neq h_{e0}$. Входящая в последнее равенство системы (138) функция $a(\chi)$ выражает некоторую общую зависимость коэффициента вязкости от температуры (энтальпии).

По определению параметров адиабатически и изэнтропически заторможенного газа будем иметь

$$p=p_e=p_{e0}(1-\alpha_e^2)^{\frac{k}{k-1}},\quad \rho=\rho_{e0}\frac{(1-\alpha_e^2)^{\frac{k}{k-1}}}{\chi};\quad \alpha_e=u_e/\sqrt{2h_{e0}}.\tag{140}$$

Применим к первым трем уравнениям системы (138) общее преобразование Дородницына

$$\xi=\int_0^x\frac{p_e}{p_{e0}}dx,\quad \eta=\int_0^y\frac{\rho}{\rho_{e0}}dy;\tag{141}$$

найдем

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{p_e}{p_{e0}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_{e0}}\frac{\partial}{\partial\eta};\tag{142}$$

---

[1]) Дородницын А. А. Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе.— В кн.: Теоретические работы по аэродинамике, ЦАГИ,— М.: Оборонгиз, 1957, с. 140—173.

кроме того, по (140) (штрих — производная по ξ)

$$\frac{dp_e}{dx} = \frac{p_e}{p_{e0}} \frac{dp_e}{d\xi} = -\frac{k}{k-1} \frac{p_e}{h_{e0}} u_e u_e' (1-\alpha_e^2)^{\frac{1}{k-1}},$$

и, следовательно,

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho_{e0} (1-\alpha_e^2)^{\frac{k+1}{k-1}} u_e u_e'. \tag{143}$$

Применяя преобразование (142) к первому равенству системы (138) и используя (143), получим

$$\rho \frac{p_e}{p_{e0}} u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\rho}{\rho_{e0}} v \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} =$$

$$= \rho_{e0} (1-\alpha_e^2)^{\frac{k+1}{k-1}} u_e u_e' + \frac{\rho}{\rho_{e0}} \mu_{e0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\chi) \frac{\rho}{\rho_{e0}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right],$$

откуда, деля обе части равенства на величину

$$\rho \frac{p_e}{p_{e0}} = \rho_{e0} \frac{(1-\alpha_e^2)^{\frac{2k}{k-1}}}{\chi},$$

придем к следующему выражению для первого (динамического) уравнения:

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\chi}{\chi_e} u_e u_e' + \nu_{e0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b(\chi) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right], \tag{144}$$

где положено

$$\tilde{v} = \frac{p_{e0}}{p_e} \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\rho}{\rho_{e0}} \frac{p_{e0}}{p_e} v = (1-\alpha_e^2)^{-\frac{k}{k-1}} u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{v}{\chi},$$

$$b(\chi) = \frac{a(\chi)}{\chi}, \quad \nu_{e0} = \frac{\mu_{e0}}{\rho_{e0}}, \quad \chi_e = \frac{T_e}{T_{e0}} = 1 - \alpha_e^2. \tag{145}$$

Вводя функцию тока ψ при помощи равенств

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_{e0}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

$$\rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{p_e}{p_{e0}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\frac{p_e}{p_{e0}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \rho_{e0} u \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

получим

$$u = \frac{1}{\rho_{e0}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \tilde{v} = -\frac{1}{\rho_{e0}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \tag{146}$$

так что будет

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = 0. \tag{147}$$

Наконец, преобразуем аналогичным образом третье уравнение системы (138) — уравнение баланса энергии. Введем вместо полной энтальпии h_0 ее безразмерную величину

$$\vartheta = \frac{h_0}{h_{e0}} = \frac{h}{h_{e0}} + \frac{u^2}{2h_{e0}} = \chi + \alpha^2. \tag{148}$$

Применяя к третьему уравнению системы (138) преобразование (142), получим

$$\rho u \frac{p_e}{p_{e0}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \rho \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\rho v}{\rho_{e0}} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{\mu_{e0}}{\sigma} \frac{\rho}{\rho_{e0}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\chi) \frac{\rho}{\rho_{e0}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right] - \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \frac{\rho \mu_{e0}}{\rho_{e0} h_{e0}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\chi) \frac{\rho}{\rho_{e0}} u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right],$$

после чего, разделив обе части на $\rho p_e / p_{e0}$, окончательно установим следующий вид уравнения баланса энергии в переменных Дородницына:

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = \frac{\nu_{e0}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b(\chi) \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right] - \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \nu_{e0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b(\chi) \frac{\partial (\alpha^2)}{\partial \eta} \right]. \quad (149)$$

Совокупность уравнений (144), (147), (149) и граничных условий

$u = \tilde{v} = 0$ при $\eta = 0$,

$u = u_e(\xi)$ при $\eta = \infty$,

$\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0$ при $\eta = 0$ (если поверхность тела теплоизолирована),

$\vartheta = \vartheta_w(\xi)$ при $\eta = 0$ (если температура поверхности задана),

$\vartheta = 1$ при $\eta = \infty$

представляет собой искомую постановку задачи о плоском ламинарном пограничном слое на крыловом профиле в газовом потоке больших скоростей при заданном распределении давления на внешней границе пограничного слоя.

Рассматривая полученные уравнения, можно заметить, что левые части первых трех основных уравнений задачи, составленных в переменных Дородницына, совпадают с соответствующими уравнениями плоского ламинарного пограничного слоя в потоке несжимаемой жидкости. Однако правые части этих уравнений содержат *явное* влияние сжимаемости через величины χ/χ_e и $b(\chi)$.

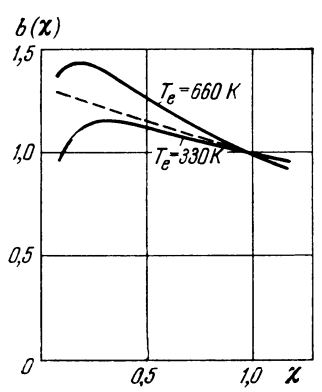


Рис. 296

При использовании зависимости коэффициента вязкости от температуры (энтальпии) в форме Чепмена — Рубезина (15) будем иметь $b(\chi) = 1$. Действительно, по (15)

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \frac{Ch}{h_e}, \quad \frac{\mu_{e0}}{\mu_e} = \frac{Ch_{e0}}{h_e},$$

так что

$$\frac{\mu}{\mu_{e0}} = a(\chi) = \chi b(\chi) = \frac{h}{h_{e0}} = \chi.$$

В только что цитированной работе А. А. Дородницына наряду с приближенной формулой (15) принимается другая, также близкая к формуле Саттерлэнда, но уже нелинейная формула, отвечающая значению функции $b(\chi)$

$$b(\chi) = 1 + 0{,}3(1 - \chi).$$

Соответствующая этому закону на графике (рис. 296) штриховая прямая располагается между кривыми Саттерлэнда для $T_e = 330$ К и $T_e = 660$ К, показанными сплошными линиями.

При наличии такого рода связи между μ и T, для значения $\sigma=14/19$, справедливого для двухатомных газов, и в предположении об отсутствии теплоотдачи А. А. Дородницыным было проведено численным методом определение неизвестных функций u и ϑ для трех случаев задания $u_e(\xi)$:

1) параболического распределения $u_e(\xi)=c_1\xi+c_3\xi^3$;
2) для продольного обтекания пластины $u_e=\text{const}$;
3) односкатного профиля $u_e(\xi)=b_0-b_1\xi$.

Пользуясь этими классами решений последовательно для конфузорного участка пограничного слоя, для области минимума давления и диффузорного участка слоя, А. А. Дородницын построил приближенное однопараметрическое решение рассматриваемой задачи, которое является обобщением решения, изложенного в начале параграфа для случая ограниченных значений числа Маха набегающего потока.

Составим два основных интегральных соотношения (штрих — производная по ξ)

$$\delta^{**\prime}+\frac{u_e'}{u_e(1-\alpha_e^2)}(2-\alpha_e^2+H-H_\vartheta)\delta^{**}=\frac{\nu_{e0}}{u_e^2}b(\chi_w)\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=0},$$

$$(u_e\delta_\vartheta^{**})'=\frac{\nu_{e0}}{\sigma}b(\chi_w)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}, \tag{150}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\delta^*=\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{u_e}\right)d\eta,\quad \delta^{**}=\int_0^\infty\frac{u}{u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)d\eta,$$

$$\delta_\vartheta^*=\int_0^\infty(1-\vartheta)\,d\eta,\qquad \delta_\vartheta^{**}=\int_0^\infty\frac{u}{u_e}(1-\vartheta)\,d\eta, \tag{151}$$

$$H=\frac{\delta^*}{\delta^{**}},\quad H_\vartheta=\frac{\delta_\vartheta^*}{\delta^{**}}.$$

При условии тепловой изоляции поверхности тела ($\partial\vartheta/\partial\eta=0$ при $\eta=0$) второе интегральное соотношение сводится к уравнению

$$(u_e\delta_\vartheta^{**})'=0;$$

интегрируя и имея в виду условие в лобовой критической точке $u_e=0$, заключим, что вообще в этом случае будет $\delta_\vartheta^{**}=0$.

Предположим теперь, *в отличие от ранее принятого допущения, ограничивающего рассуждение небольшими значениями* M_∞ и M_e, что профили скоростей и температур в сечениях пограничного слоя могут быть представлены выражениями

$$\frac{u}{u_e}=\varphi_1\left(\frac{\eta}{\delta^{**}},f,M_e,\sigma\right),\quad \vartheta=\varphi_2\left(\frac{\eta}{\delta^{**}},f,M_e,\sigma\right), \tag{152}$$

где роль параметров играют следующие величины:

1) формпараметр

$$f=\frac{u_e'\delta^{**2}}{\nu_{e0}\chi_e}, \tag{153}$$

аналогичный рассмотренному в начале этого параграфа;

2) местное число Маха M_e, связанное с α_e соотношением

$$\alpha_e^2 = \frac{\frac{k-1}{2} M_e^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_e^2}, \tag{154}$$

3) число Прандтля σ.

Тогда, подставляя выражения (152) в интегральные выражения (151) и первое из интегральных соотношений (150), придем для определения формпараметра f к тем же уравнениям (134) и (135), что и в предыдущем простейшем случае. Разница будет лишь в выражении функции F, которая уже будет зависеть от параметров α_e, σ и примет форму

$$F(f;\ \alpha_e,\ \sigma) = 2\zeta - 2f(2 + H - H_0); \tag{155}$$

при этом приведенный коэффициент трения ζ также будет другим, а именно

$$\zeta = \frac{\delta^{**}}{u_e} b(\chi_w) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}. \tag{156}$$

Как показали расчеты, в интервале изменения M_e от нуля до 2,378 и при $\sigma = 14/19 \approx 0{,}74$, что близко к значению числа Прандтля для воздуха, вид функции $F(f;\ \alpha_e,\ \sigma)$ слабо зависит от α_e. Это подтверждает

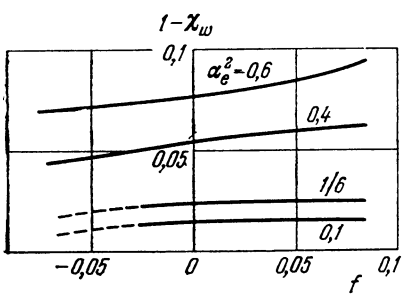


Рис. 297

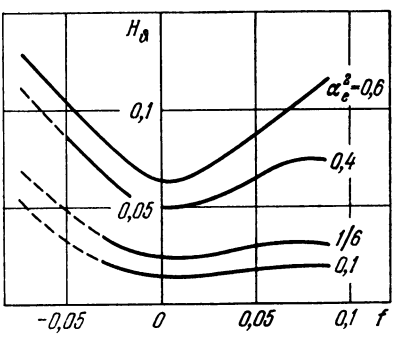


Рис. 298

сделанное в начале параграфа упрощающее допущение о независимости F от M_e при не слишком больших числах Маха и позволяет вновь воспользоваться линейным представлением функции $F(f)$ и получить значение $f(x)$ в форме (137) при тех же значениях констант a и b.

Точно так же и $\zeta(f;\ \alpha_e,\ \sigma)$ при $\sigma = 14/19$ слабо зависит от α_e и может определяться по обычному графику или таблице, как для несжимаемой жидкости. Напряжение трения τ_w, согласно определению ζ (156), выразится как

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu_{e0} u_e}{\delta^{**}} \zeta(f) (1 - \alpha_e^2)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{157}$$

причем δ^{**} вычисляется заранее по известному уже $f(x)$ и формуле (153), переписанной для переменной x в виде

$$f = \delta^{**2} \frac{du_e}{dx} \Big/ [\nu_{e0} (1 - \alpha_e^2)^{\frac{2k-1}{k-1}}]. \tag{158}$$

Таким образом, при числе M_∞, доходящем примерно до значения 2,4, динамические величины рассчитываются просто. На рис. 297 и 298 при-

водятся зависимости $\chi_w = T_w/T_{e0}$ и H_Φ от f при различных α_e^2 в пределах от 0,1 до 0,6. Как видно из приведенных графиков, влияние параметра M_e на эти величины существенно.

§ 147. Преобразование уравнений ламинарного пограничного слоя в газе к форме уравнений для несжимаемой жидкости

Несколько модифицируя преобразование Дородницына, можно при некоторых ограничительных условиях привести первое (динамическое) уравнение системы (138) к *точному совпадению* с соответствующим уравнением для несжимаемой жидкости [1]).

Рассмотрим сначала случай $\sigma = 1$, $n = 1$ и отсутствия теплоотдачи (теплоизолированная поверхность).

Обозначим через a скорость звука и заменим для краткости индексом 1 предыдущий индекс $e0$, отвечающий адиабатически и изэнтропически заторможенному значению величины на внешней границе пограничного слоя. Тогда по известным формулам (гл. V) будет

$$\chi_e = \frac{T_e}{T_1} = \left(\frac{a_e}{a_1}\right)^2 = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_e^2\right)^{-1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{U_e^2}{a_1^2}\right)^{-1}, \qquad (159)$$

где под символом U_e понимается величина

$$U_e = \frac{a_1}{a_e} u_e. \qquad (160)$$

Кроме того, по тем же формулам найдем

$$\frac{p_e}{p_1} = \left(\frac{T_e}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \chi_e^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{\rho_e}{\rho_1} = \chi_e^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (161)$$

Произведем в первых двух уравнениях системы (138) преобразование координат и скоростей, предложенное К. Стюартсоном:

$$X = \int_0^x \frac{p_e}{p_1} \frac{a_e}{a_1} dx, \quad Y = \frac{a_e}{a_1} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_1} dy, \quad U = \frac{a_1}{a_e} u, \quad V = \frac{a_1}{a_e} \tilde{v}, \qquad (162)$$

где выражение $\tilde{v}$ приводится ниже (167). При помощи равенств (159) и (161) преобразование (162) может быть переписано в виде

$$X = \int_0^x \chi_e^{\frac{3k-1}{2(k-1)}} dx, \quad Y = \chi_e^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy, \quad U = \chi_e^{-1/2} u, \quad V = \chi_e^{-1/2} \tilde{v}. \qquad (163)$$

При принятых ограничительных условиях третье уравнение системы (138) — уравнение баланса энергии — может быть заменено своим очевидным интегралом

$$\frac{T}{T_e} = 1 + \frac{k-1}{2} M_e^2 - \frac{k-1}{2} M_e^2 \left(\frac{u}{u_e}\right)^2,$$

который при принятых обозначениях запишется в виде

$$\frac{T}{T_e} = 1 + \frac{k-1}{2a_1^2} \frac{u_e^2}{\chi_e} - \frac{k-1}{2a_1^2} \frac{u^2}{\chi_e} = 1 + \frac{k-1}{2} \frac{U_e^2}{a_1^2} - \frac{k-1}{2} \frac{U^2}{a_1^2} = \frac{1}{\chi_e} - \frac{k-1}{2} \frac{U^2}{a_1^2}. \qquad (164)$$

[1]) Stewartson K. Correlated incompressible and compressible boundary layers — Proc. Roy. Soc., 1949, v. A200, p. 84—100.

Формулы преобразования к новым переменным будут

$$\frac{\partial}{\partial x}=\chi_e^{\frac{3k-1}{2(k-1)}}\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\chi_e^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\frac{\rho}{\rho_e}\frac{\partial}{\partial Y}. \tag{165}$$

Заметим, что из равенств

$$\frac{\mu}{\mu_1}=\frac{T}{T_1},\quad \frac{p}{p_1}=\frac{\rho T}{\rho_1 T_1}=\frac{p_e}{p_1}=\chi_e^{\frac{k}{k-1}}$$

следует

$$\frac{\mu\rho}{\mu_1\rho_1}=\chi_e^{\frac{k}{k-1}}.$$

В силу (165) и полученного только что соотношения перепишем первое равенство системы (138) сначала в форме

$$\rho\chi_e^{\frac{3k-1}{2(k-1)}}u\frac{\partial u}{\partial X}+\left[\rho u\frac{\partial Y}{\partial x}+\rho v\chi_e^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\frac{\rho}{\rho_e}\right]\frac{\partial u}{\partial Y}=$$

$$=\rho_e\chi_e^{\frac{3k-1}{2(k-1)}}u_e\frac{du_e}{dX}+\frac{\rho}{\rho_e}\chi_e^{\frac{2k+1}{k-1}}\frac{\mu_1\rho_1}{\rho_e}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

а затем, разделив обе части на $\chi_e^{\frac{3k-1}{2(k-1)}}\rho$, еще так:

$$u\frac{\partial u}{\partial X}+\tilde{v}\frac{\partial u}{\partial Y}=\frac{\rho_e}{\rho}u_e\frac{du_e}{dX}+\chi_e^{1/2}\nu_1\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \tag{166}$$

где введенная ранее величина $\tilde{v}$ определяется выражением

$$\tilde{v}=\chi_e^{-\frac{3k-1}{2(k-1)}}\left[u\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\rho v}{\rho_e}\chi_e^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\right]. \tag{167}$$

Теперь используем преобразование компонент скорости. Будем иметь, согласно второй строке (163), вместо (166)

$$\chi_e^{1/2}U\frac{\partial}{\partial X}(\chi_e^{1/2}U)+\chi_e V\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{T}{T_e}\chi_e^{1/2}U_e\frac{d}{dX}(\chi_e^{1/2}U_e)+\chi_e\nu_1\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}.$$

Произведя дифференцирование и воспользовавшись (164), получим (штрих — производная по X)

$$\chi_e\left(U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}\right)+\frac{1}{2}\chi_e' U^2=$$

$$=\left(\frac{1}{\chi_e}-\frac{k-1}{2}\frac{U^2}{a_1^2}\right)\left(\chi_e U_e U_e'+\frac{1}{2}\chi_e' U_e^2\right)+\chi_e\nu_1\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}. \tag{168}$$

Пользуясь легко получаемой из (159) связью между χ_e' и U_e'

$$\chi_e'=-\frac{k-1}{a_1^2}\chi_e^2 U_e U_e', \tag{169}$$

найдем следующие два представления для выражения, стоящего во второй круглой скобке в первом члене правой части (168):

1) $\chi_e U_e U_e'+\frac{1}{2}\chi_e' U_e^2=\chi_e U_e U_e'-\frac{k-1}{2a_1^2}\chi_e^2 U_e^3 U_e'=$

$$=\chi_e^2 U_e U_e'\left(\frac{1}{\chi_e}-\frac{k-1}{2}\frac{U_e^2}{a_1^2}\right)=\chi_e^2 U_e U_e';$$

$$2)\ \chi_e U_e U_e' + \frac{1}{2}\chi_e' U_e^2 = -\frac{a_1^2}{k-1}\frac{\chi_e'}{\chi_e} + \frac{1}{2}U_e^2\chi_e' =$$

$$= -\frac{a_1^2}{k-1}\left(\frac{1}{\chi_e} - \frac{k-1}{2}\frac{U_e^2}{a_1^2}\right)\chi_e' = -\frac{a_1^2}{k-1}\chi_e'.$$

Умножая первое из этих представлений на первое слагаемое в первой скобке правой части (168), а второе — на второе слагаемое в той же скобке, получим вместо (168)

$$\chi_e\left(U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y}\right) + \frac{1}{2}\chi_e' U^2 = \chi_e U_e U_e' + \frac{1}{2}\chi_e' U^2 + \chi_e \nu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

и после очевидных сокращений придем к уравнению

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = U_e\frac{dU_e}{dX} + \nu_1\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \qquad (170)$$

полностью соответствующему уравнению пограничного слоя в несжимаемой жидкости.

Покажем, что преобразованные компоненты U и V удовлетворяют условию несжимаемости жидкости. С этой целью введем функцию тока ψ, положив

$$\rho u = \rho_1\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\rho_1\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (171)$$

Воспользуемся вновь формулами преобразования (162) и дифференциальными соотношениями (165); тогда получим

$$U = \chi_e^{-1/2}u = \chi_e^{-1/2}\frac{\rho_1}{\rho}\chi_e^{1/2}\frac{\rho}{\rho_1}\frac{\partial\psi}{\partial Y} = \frac{\partial\psi}{\partial Y}$$

и аналогично по определению (167) приведенной скорости $\tilde{v}$

$$V = \chi_e^{-1/2}\tilde{v} = \chi_e^{-1/2}\chi_e^{-\frac{3k-1}{2(k-1)}}\left(u\frac{\partial Y}{\partial x} + \chi_e^{1/2}\frac{\rho v}{\rho_1}\right) =$$

$$= \chi_e^{-1/2}\chi_e^{-\frac{3k-1}{2(k-1)}}\left\{\chi_e^{1/2}\frac{\partial\psi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} - \chi_e^{1/2}\left[\chi_e^{\frac{3k-1}{2(k-1)}}\frac{\partial\psi}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial Y}\right]\right\} = -\frac{\partial\psi}{\partial X}.$$

Итак, имеем

$$U = \frac{\partial\psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial\psi}{\partial X}, \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \qquad (172)$$

т. е. приведенные компоненты скорости U, V действительно соответствуют некоторому «фиктивному» потоку несжимаемой жидкости, и функция тока для этого движения в плоскости (X, Y) является одновременно и функцией тока рассматриваемого газового потока в плоскости (x, y).

Уравнения пограничного слоя в плоскости (X, Y) могут быть записаны теперь в форме, аналогичной уравнению (15) гл. XII

$$\frac{\partial\psi}{\partial Y}\frac{\partial^2\psi}{\partial X\,\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial X}\frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2} = U_e\frac{dU_e}{dX} + \nu_1\frac{\partial^3\psi}{\partial Y^3}. \qquad (173)$$

Граничные условия для системы уравнений (170) и (172) или для одного уравнения (173) также совпадают с обычными условиями для несжимаемой жидкости

$$U = V = 0 \text{ при } Y = 0,\ U \to U_e(X) \text{ при } Y \to \infty$$

или

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial Y} = 0 \text{ при } Y = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial Y} \to U_e(X) \text{ при } Y \to \infty.$$

Напряжение трения на поверхности тела определится по формуле

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu_1 \chi_e^{\frac{2k-1}{k-1}} \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{Y=0} = \mu_1 \chi_e^{\frac{2k-1}{k-1}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}\right)_{Y=0}. \qquad (174)$$

Основное затруднение, возникающее при практических расчетах по только что изложенному методу, заключается в том, что при наличии простой связи действительной скорости внешнего потока u_e с продольной координатой x соответствующая ей связь $U_e(X)$ в «фиктивном» потоке несжимаемой жидкости может оказаться достаточно сложной, не подходящей под известный класс точных решений. В других случаях, наоборот, простая зависимость $U_e(X)$ будет связана со сложным распределением $u_e(x)$.

Остановимся, наконец, на более *общем случае*, когда число Прандтля σ не равно единице и поверхность тела является *теплоотдающей*, но ограничимся вместе с тем допущением о линейности связи вязкости газа с его температурой или энтальпией. Примем для количественного выражения этой связи неоднократно упоминавшуюся ранее формулу Чепмена — Рубезина, введя входящую в эту формулу константу C множителем в первое из преобразований (163).

Введение этой константы не нарушит преобразования, которые были только что произведены, так что не стоит их повторять. Принципиальная разница лишь в том, что интеграл (164) в рассматриваемом сейчас случае $\sigma \neq 1$ и при наличии теплоотдающей поверхности уже не будет иметь места и в общей системе уравнений придется рассматривать и дифференциальное уравнение баланса тепла.

Введем в рассмотрение тепловую функцию S, положив

$$S = \frac{h_0}{h_1} - 1; \quad S \to 0 \text{ при } Y \to \infty. \qquad (175)$$

Произведя в системе уравнений (138) указанное преобразование и переходя к приведенным скоростям U и V, придем к следующей общей системе уравнений ламинарного пограничного слоя:

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = U_e\frac{dU_e}{dX}(1+S) + \nu_1\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \qquad (176)$$

$$U\frac{\partial S}{\partial X} + V\frac{\partial S}{\partial Y} = \nu_1\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} - \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_e^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_e^2}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\left[\left(\frac{U}{U_e}\right)^2\right]\right\}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &U = V = 0, && S = S_w && \text{при } Y = 0, \\ &U \to U_e(X), && S \to 0 && \text{при } Y \to \infty, \\ &U = U_0(Y), && S = S_0(Y) && \text{при } X = X_0. \end{aligned} \qquad (177)$$

Входящая в граничные условия (177) величина

$$S_w = \frac{h_w}{h_1} - 1 = \frac{T_w}{T_1} - 1 = \frac{T_w}{T_\infty}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{-1} - 1$$

при заданных наперед числе Маха набегающего потока $\mathbf{M}_\infty$ и постоянной адиабаты k играет в случае газового потока больших скоростей роль «температурного фактора», о котором уже была речь в гл. XII.

Можно заметить, что в ранее рассмотренном частном случае $\sigma = 1$ и при отсутствии теплоотдачи с поверхности тела будет иметь место инте-

грал $h_0=h_1$, или, согласно (175), $S=0$. Тогда система уравнений (176) упростится и сведется к ранее выведенной системе (170) и (172).

Система уравнений (176) была использована Коэном и Решотко [1]) для разыскания автомодельного решения, соответствующего степенному заданию $U_e=cX^m$ и представляющего собой обобщение на случай газового потока известного уже нам по гл. XII решения Фокнера — Скэн — Хартри. Коэн и Решотко положили полученное решение в основу создания *приближенного однопараметрического метода расчета ламинарного пограничного слоя в газе при произвольном распределении внешней скорости* [2]), представляющего аналог метода Кочина — Лойцянского (гл. XII), относящийся к случаю газового потока больших скоростей. Как уже указывалось в конце гл. XII, последний метод является только *локально*-однопараметрическим, дает *преуменьшенное трение* и слишком *ранний* отрыв; этим недостатком обладает и метод Коэна — Решотко. Удовольствуемся поэтому приведенными краткими замечаниями по поводу этого метода и перейдем к изложению более точного метода.

§ 148. Метод обобщенного подобия в теории ламинарного пограничного слоя в газовом потоке больших скоростей

Введем в уравнения (176), согласно (172), функцию тока $\psi(X, Y)$ и перепишем их в форме

$$\frac{\partial\psi}{\partial Y}\frac{\partial^2\psi}{\partial X\,\partial Y}-\frac{\partial\psi}{\partial X}\frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2}=U_e\frac{dU_e}{dX}(1+S)+\nu_1\frac{\partial^3\psi}{\partial Y^3},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial Y}\frac{\partial S}{\partial X}-\frac{\partial\psi}{\partial X}\frac{\partial S}{\partial Y}=\frac{\nu_1}{\sigma}\left\{\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}-(1-\sigma)\varkappa\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\left[\left(\frac{1}{U_e}\frac{\partial\psi}{\partial Y}\right)^2\right]\right\};\tag{178}$$

$$\psi=\frac{\partial\psi}{\partial Y}=0,\quad S=S_w \text{ при } Y=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial Y}\to U_e,\quad S\to 0 \text{ при } Y\to\infty,$$

где принято $S_w=\text{const}$ и используется дополнительное обозначение для «параметра сжимаемости»

$$\varkappa=1-\chi_e=\frac{\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_e^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_e^2}.\tag{179}$$

Что касается граничных условий в *начальном сечении* $X=X_0$, помещенных в последней строчке системы (177), то они в полном соответствии с приближенным приемом, изложенным в гл. XII для случая несжимаемой жидкости, будут сейчас заменены некоторыми интегральными условиями.

Пользуясь уравнениями движения и баланса энергии в форме (176), выведем обычным, изложенным в гл. XII приемом следующие два интегральных соотношения:

$$\frac{dZ^{**}}{dX}=\frac{F}{U_e},\quad \frac{dZ_s}{dX}=\frac{F_s}{U_e},\tag{180}$$

---

[1]) Cohen C. B., Reshotko E. Similar solution for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient — NACA Rep., 1956, v. 1293.

[2]) Cohen C. B., Reshotko E. The compressible laminar boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient — NACA Rep., 1956, v. 1294

где приняты обозначения

$$Z^{**}=\frac{\Delta^{**2}}{\nu_1},\quad Z_s=\frac{\Delta_s^2}{\nu_1},$$
$$F=2[\zeta-(2+H)f],\quad F_s=-2(\zeta_s/\sigma+f_s),$$
$$\zeta=\left[\frac{\partial(U/U_e)}{\partial(Y/\Delta^{**})}\right]_{Y=0},\quad \zeta_s=\left[\frac{\partial S}{\partial(Y/\Delta_s)}\right]_{Y=0},$$
$$H=\frac{\Delta^*}{\Delta^{**}},\quad f=U_e'Z^{**},\quad f_s=U_e'Z_s,$$

(181)

$$\Delta^*=\int_0^\infty\left(1+S-\frac{U}{U_e}\right)dY,\quad \Delta^{**}=\int_0^\infty\frac{U}{U_e}\left(1-\frac{U}{U_e}\right)dY,\quad \Delta_s=\int_0^\infty\frac{U}{U_e}S\,dY.$$

Имеют место соотношения

$$\zeta^*=\left[\frac{\partial S}{\partial(Y/\Delta^{**})}\right]_{Y=0}=\zeta_s\cdot\frac{\Delta^{**}}{\Delta_s},\quad f=f_s\cdot\left(\frac{\Delta^{**}}{\Delta_s}\right)^2. \tag{182}$$

Примем в качестве условий в *начальном сечении* ($X=X_0$) следующие интегральные условия:

$$Z^{**}=Z_0^{**},\quad Z_s=Z_{s0}\ \text{при}\ X=X_0. \tag{183}$$

Как вскоре будет выяснено, эти условия должны быть заданы наперед для того, чтобы решения системы (180) двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными величинами Z^{**} и Z_s были определенными.

Введем, в полной аналогии с методом, изложенным ранее в § 113, систему параметров

$$f_n=U_e^{n-1}\frac{d^nU_e}{dX^n}Z^{**n}\quad(n=1,2,\ldots,\infty), \tag{184}$$

которые в случае произвольного задания функции $U_e(X)$ в классе *аналитических функций* могут рассматриваться как *независимые переменные*. Относительно параметра сжимаемости $\varkappa$, определенного равенством (179), в дальнейшем делается *предположение* о наличии лишь *слабого* количественного его влияния на движение и теплоперенос, вследствие чего он не включается в число основных параметров. Это предположение оправдывается тем, что *главная часть влияния сжимаемости* уже учтена в преобразовании Дородницына — Стюартсона. Используя терминологию § 113, можно сказать, что влияние этого *дополнительного* параметра сжимаемости $\varkappa$ учитывается *локально*, т. е. сам параметр $\varkappa$ *сохраняется* в уравнениях (178) и в последующих «универсальных» уравнениях, но *производные по этому параметру опускаются*. Полный учет влияния параметра несколько усложняет вид универсальных уравнений и необходимые для интегрирования этих уравнений вычисления, но может быть также осуществлен [1]).

Процесс приведения уравнений (178) к «универсальному», не содержащему функцию $U_e(X)$ виду ничем не отличается от ранее (§ 113) выполненного для случая несжимаемой жидкости.

---

[1]) Это сделано аспирантом кафедры гидроаэродинамики ЛПИ В. Любеновым (Болгария). Как показали его исследования, использованный в дальнейшем изложении локальный подход является достаточно точным. См. Любенов В. Двухпараметрическое решение уравнений ламинарного пограничного слоя в газе.— Труды ЛПИ, 1970, № 313, с. 28—35.

Перейдем в уравнениях (178) от независимых переменных X, Y и функции тока ψ к новым переменным

$$\xi = B\frac{Y}{\Delta^{**}},\quad f_n\,(n=1, 2, \ldots)\ \text{и}\ \Phi = B\frac{\psi}{U_e\Delta^{**}}. \tag{185}$$

Тогда, повторяя в точности те же преобразования, что и в § 113, получим следующую систему «универсальных» уравнений:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3} + \frac{F+2f_1}{2B^2}\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{f_1}{B^2}\left[1+S-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{B^2}\sum_{n=1}^{\infty}\{[(n-1)f_1+nF]f_n+f_{n+1}\}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial f_n} - \frac{\partial\Phi}{\partial f_n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\xi^2} + \sigma\frac{F+2f_1}{2B^2}\Phi\frac{\partial S}{\partial\xi} + 2(\sigma-1)\varkappa\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right) =$$

$$= \frac{\sigma}{B^2}\sum_{n=1}^{\infty}\{[(n-1)f_1+nF]f_n+f_{n+1}\}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial S}{\partial f_n} - \frac{\partial\Phi}{\partial f_n}\frac{\partial S}{\partial\xi}\right), \tag{186}$$

$$\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = 0,\quad S = S_w \text{ при } \xi = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\to 1,\quad S\to 0 \text{ при } \xi\to\infty,$$

$$\Phi = \Phi_0(\xi),\ S = S_0(\xi) \text{ при } f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots$$

Здесь под $\Phi_0(\xi)$ и $S_0(\xi)$ подразумевается решение задачи продольного обтекания пластины, уже рассмотренное выше (§ 108), а B — нормирующий множитель, выбираемый из условия, чтобы первое из уравнений для этой задачи имело обычный «блазиусовский» вид (точка обозначает производную по ξ)

$$\dddot{\Phi}_0 + \Phi_0\ddot{\Phi}_0 = 0,$$

$$\ddot{S}_0 + \sigma\Phi_0\dot{S}_0 + 2(\sigma-1)\varkappa_0(\ddot{\Phi}_0^2 + \dot{\Phi}_0\dddot{\Phi}_0) = 0, \tag{187}$$

$$\Phi_0 = \dot{\Phi}_0 = 0,\quad S_0 = S_w \text{ при } \xi = 0,$$

$$\dot{\Phi}_0\to 1,\quad S_0\to 0 \text{ при } \xi\to\infty.$$

Оставляя в стороне вопрос о представлении решения системы (186) в виде степенных рядов [1]), рассмотрим результаты численного решения системы (186) в однопараметрическом приближении, проведенного С. М. Капустянским [2]) по программе, разработанной Л. М. Симуни и Н. М. Терентьевым [3]).

Особенно просто рассматриваемая система решается в случае *однопараметрического приближения* при числе Прандтля, равном единице

---

[1]) Капустянский С. М. Ламинарный пограничный слой в газовом потоке больших скоростей.— Труды ЛПИ, 1965, № 248, с. 59—64.

[2]) Капустянский С. М. Однопараметрическое решение уравнений ламинарного пограничного слоя в газовом потоке с произвольными внешней скоростью и перепадом температуры.— Инж.-физ. журнал, 1965, т. 9, № 6, с. 768—774.

[3]) Симуни Л. М., Терентьев Н. М. Численное решение однопараметрического уравнения теории ламинарного пограничного слоя.— Труды ЛПИ, 1965, № 248, с. 56—58.

($\sigma=1$). Система (186) приводится в этом случае к виду

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3}+\frac{F+2f_1}{2B^2}\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+\frac{f_1}{B^2}\left[1+S-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{B^2}Ff_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial f_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\xi^2}+\frac{F+2f_1}{2B^2}\Phi\frac{\partial S}{\partial\xi}=\frac{1}{B^2}Ff_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial S}{\partial f_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial S}{\partial\xi}\right), \tag{188}$$

$$\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0,\quad S=S_w \text{ при } \xi=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\to 1,\quad S\to 0 \text{ при } \xi\to\infty,$$

$$\Phi=\Phi_0(\xi),\quad S=S_0(\xi) \text{ при } f_1=0,$$

где f_1 — аналог формпараметра однопараметрических методов

$$f_1=\frac{U_e'\Delta^{**2}}{\nu_1}.$$

Остановимся на некоторых результатах численного решения уравнений (188).

На рис. 299 приведены кривые зависимости: *а*) безразмерной скорости $U/U_e=\partial\Phi/\partial\xi$ и *б*) тепловой функции S при трех значениях параметра f_1: *1*—$f_1=0$, *2*—$f_1=-0{,}05$, *3*—$f_1=-0{,}0646$ и при значении температурного фактора $S_w=0{,}4$ (пересекающиеся стрелки показывают шкалы, по которым следует вести отсчет).

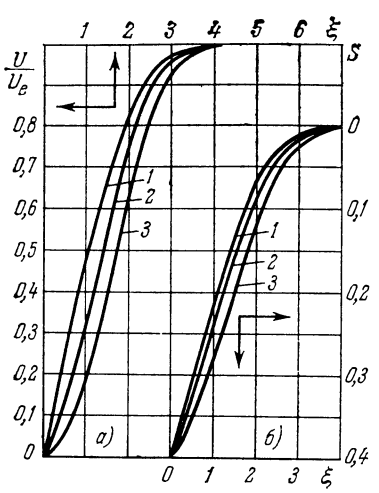


Рис. 299

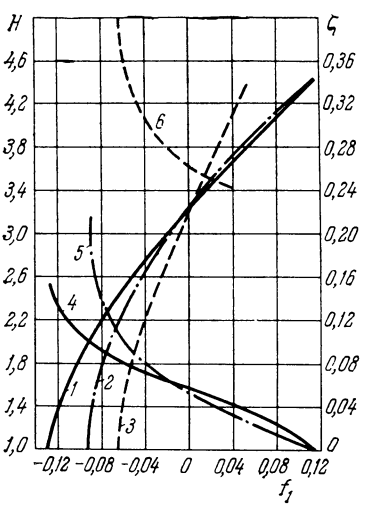


Рис 300

На рис. 300 даны графики двух основных расчетных величин ζ и H в функции от f_1. Цифрами *1* и *2* обозначены кривые $\zeta(f_1)$ при $S_w=-0{,}4$ соответственно по изложенному методу и методу Коэна — Решотко. Обращают на себя внимание преуменьшенные значения ζ и абсолютного отрывного значения параметра f_{1s}, рассчитанных по Коэну — Решотко,

по сравнению с однопараметрическим решением Капустянского, представляющим аналог более точного решения Хоуарта в несжимаемой жидкости. Цифрой *3* отмечена кривая $\zeta(f_1)$ для значения $S_w=0{,}4$. Можно заметить, что параметр S_w сильно влияет на отрывное значение параметра $f_1=f_{1s}$, как это отчетливо показано на рис. 301.

На рис. 300 цифрами *4* и *5* показаны для сравнения соответственно кривые Капустянского и Коэна — Решотко для $H(f_1)$ при $S_w=-0{,}4$, а цифрой *6* — та же величина по Капустянскому при $S_w=0{,}4$.

В аналогичной нумерации на рис. 302 приводятся графики функции $F(f_1)$ и величины отклонения этой кривой от прямой $\varepsilon(f_1)$: *4* — при $S_w=-0{,}4$, *5* — при $S_w=0{,}4$.

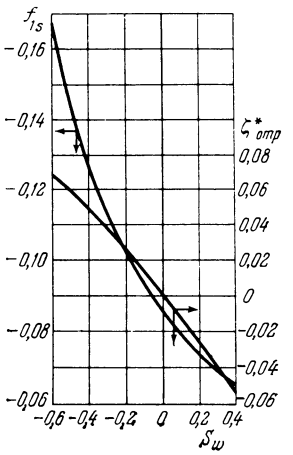


Рис. 301

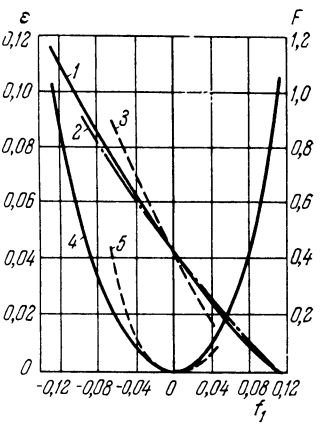


Рис 302

Графики приведенного коэффициента теплоотдачи $\zeta^*(f_1)$ при $S_w=-0{,}4$ показаны на рис. 303: *1* и *2* — соответственно по Капустянскому и Коэну — Решотко, *3* — по Капустянскому для $S_w=0{,}4$. Значения ζ^* в точке отрыва в зависимости от температурного фактора S_w показаны на рис. 301.

Предыдущие результаты относились к простейшему случаю числа Прандтля, равного единице ($\sigma=1$). В последующем

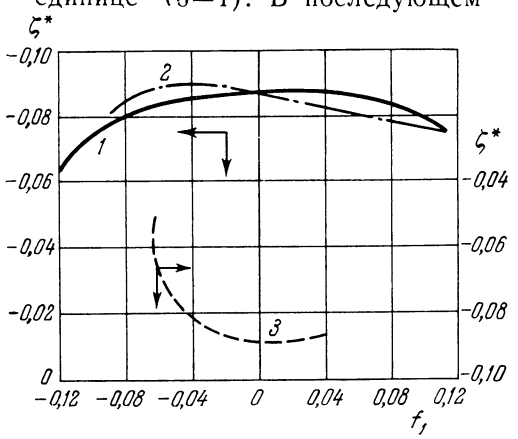


Рис. 303

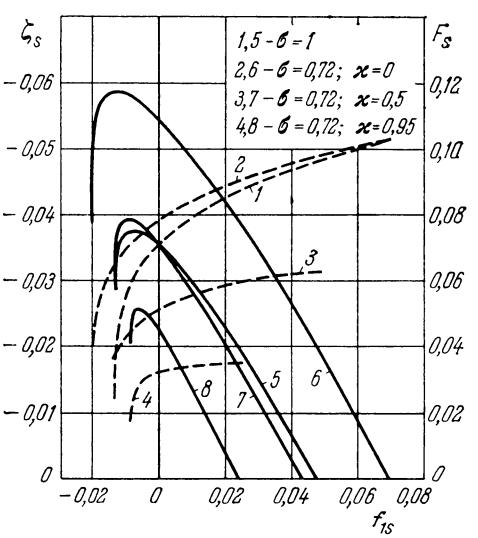


Рис 304

Таблица 21

T_w		1045 K		1465 K		
M_∞		3,606	5	3,606	4,5	6,08
$x_{отр}$	I	0,404	0,800	0,300	0,407	0,867
	II	0,345	0,540	0,260	0,335	0,560

С. М. Капустянский выполнил численное интегрирование системы уравнений (186) в случае $\sigma \neq 1$ [1]). В цитируемой статье автор исследует влияние изменения $\varkappa$ и σ на зависимости $\zeta^*(f_1)$ и $\zeta_s(f_1)$, а также на приведенный коэффициент трения ζ. Подтверждается тот факт, что пренебрежение производными по $\varkappa$, т. е. использование $\varkappa$ как локального параметра, сравнительно слабо отражается на трении, но несколько сильнее на теплоотдаче. Влияние $\varkappa$ и σ на ζ в конфузорной области пограничного слоя ничтожно, а в диффузорной — заметнее; влияние тех же параметров на F, наоборот, заметно в конфузорной области и ничтожно в диффузорной; аналогично ведет себя и величина H.

Значительное количественное воздействие оказывают параметры $\varkappa$ и σ на приведенные коэффициенты теплоотдачи ζ^* или ζ_s. Удовольствуемся (рис. 304) приведением графиков $F_s(f_{1s})$ (сплошные кривые) и $\zeta_s(f_{1s})$ (штриховые). Определение этих величин было дано равенствами (181) и (182). Графики соответствуют значению температурного фактора $S_w = -0{,}4$.

Коэффициент теплоотдачи ζ_s уменьшается по абсолютной величине по мере удаления от лобовой критической точки и приближения к точке отрыва. Кроме того, при данном значении f_s резкое уменьшение абсолютного значения ζ_s имеет место с увеличением $\varkappa$. Большой интерес представляет имеющееся в цитированной статье исследование конкретного течения при различных числах Маха M_∞ и температурах стенки T_w. Приводим табл. 21 результатов расчета абсциссы точки отрыва $x_{отр}$ в примере, рассмотренном ранее Коэном — Решотко (I — по Капустянскому, II — по Коэну и Решотко).

Из приведенной таблицы видно, что в рассматриваемом случае сверхзвукового потока при постоянстве числа M_∞ *увеличение температуры поверхности тела способствует отрыву*; наоборот, *при фиксированной температуре увеличение числа Маха приводит к запаздыванию отрыва*. Таблица подтверждает также ранее уже отмеченный факт преуменьшенности значений абсцисс точки отрыва, рассчитанных по методу Коэна — Решотко; разница между этими значениями и более точными, полученными С. М. Капустянским, возрастает с ростом числа Маха.

Отошлем интересующихся деталями применения метода: таблицами «универсальных» функций и соответствующими им графиками к диссертации С. М. Капустянского [2]).

При скоростях движения газа, сравнимых по величине или не слишком превосходящих скорость распространения в нем малых возмущений

---

[1]) Капустянский С. М. Однопараметрическое решение уравнений ламинарного пограничного слоя в газовом потоке больших скоростей при числе Прандтля, не равном единице.— Труды ЛПИ, 1966, № 265, с. 24—34.

[2]) Капустянский С. М. Параметрический метод решения уравнений ламинарного пограничного слоя в случае движения газа с большими скоростями.— Диссертация, ЛПИ, 1965. См. также: Saljnikov V, Boričič Z Die universelle Grenzschichtgleichungen für den Fall der kompressiblenen laminaren Strömung — Zeitschr Math., Mech. Sonderheft — T, 1974, Bd. 74, S. 146—148.

(скорость звука), возникают специфические для этих режимов движения явления, теоретический анализ которых, как было показано в предыдущих параграфах, представляет скорее вычислительные, чем принципиальные, трудности. Методы интегрирования уравнений пограничного слоя и программы численного их интегрирования на ЭВМ в этих случаях уже разработаны. Более серьезные трудности возникают при рассмотрении движений газа в пограничных слоях при *очень больших сверхзвуковых*, или, как иногда говорят, *гиперзвуковых* скоростях. Сопровождающие такого рода движения физико-химические явления очень сложны, и многие из них и до сих пор еще недостаточно изучены. Основное значение имеют явления, сопровождающиеся переходом механической энергии потока в тепловую. Это, прежде всего, *разогрев газа при прохождении его через скачки уплотнения* и особенно через мощную «головную волну», образующуюся на тупоносых телах. Большое значение имеет также и *диссипация механической энергии в тепло*, происходящая в пограничных слоях.

Возникающие в этих случаях температуры достигают высоких значений. Так, например, при *возвращении космического корабля в плотные слои атмосферы Земли* со *второй космической скоростью* (порядка 11 км/с) температура вблизи поверхности может достигать 12—13 тысяч градусов (при вхождении с первой космической скоростью эта температура имеет порядок восьми тысяч градусов). Еще бо́льшие скорости, а следовательно, и температуры могут достигаться при входе метеоритов в атмосферу Земли.

В условиях такого нагрева воздух уже не может рассматриваться как *однородный* газ. При температурах порядка 1000 К основным в составе воздуха является молекулярный азот N_2 и в значительно меньшей доле молекулярный кислород O_2 (содержание остальных компонент мало). Это позволяет с хорошим приближением считать воздух однородной средой. С повышением температуры энергия столкновений молекул становится столь значительной, что возникает сначала явление *диссоциации* (для кислорода реакция $O_2=O+O$, заметная при температурах порядка 3000 К, для азота $N_2=N+N$ при температурах порядка 6000 К), а затем и *ионизации* (начало образования положительных ионов азота N^+ и выделения электронов e^- примерно при 10 000 К и для кислорода O^+ при 8500 К). Такого рода химические реакции приводят к тому, что воздух при высоких температурах превращается в *многокомпонентную смесь газов* (N_2, N, O, O_2, N^+, O^+, e^- и др.), динамика и термодинамика которой требуют значительно более сложного анализа, чем в случае однородного газа.

Дело усложняется еще тем, что разогрев газа происходит в столь тонкой области (толщина скачка уплотнения имеет порядок длины свободного пути пробега молекулы), что на этом малом пути сообщенная молекулам при нагреве кинетическая энергия не успевает распределиться по всем *внутренним степеням свободы* молекул, и газ не приходит полностью в термодинамически равновесное состояние. В таких случаях говорят, что газ *релаксирует*, а время, потребное для приобретения газом равновесного состояния, и эквивалентную этому времени длину, пройденную газом, называют соответственно *временем* и *длиной релаксации*.

Процесс релаксации определяется количеством столкновений молекул, необходимых для приобретения равновесной энергии в движениях молекулы с отдельными степенями свободы. Так, например, известно, что для установления *равновесного* движения *с поступательными степенями свободы* достаточно *нескольких столкновений* молекул, для *вращательных* это уже *десятки* столкновений, а для *колебательных* — *много тысяч*. Для полного выравнивания энергии молекул по всем степеням свободы необходимы десятки тысяч столкновений.

Таблица 22. **Зависимость c_p кал/(моль·К) от абсолютной температуры T**

Газ	Температура, К					
	1000	3000	5000	7000	9000	11 000
C	4,970	5,170	5,470	5,588	5,810	7,247
CO	7,930	8,895	9,100	9,362	10,11	12,16
CO_2	12,96	14,88	15,32	14,84	14,87	14,88
O	4,997	5,002	5,208	5,410	5,513	5,569
O_2	8,333	9,552	10,20	10,34	9,882	9,098

Неравновесность явлений диссоциации и ионизации газа еще более усложняет задачу расчета таких потоков.

Наличие в двух- и более атомных молекулах внутренних степеней свободы существенно влияет на *коэффициенты теплоемкости*, которые при достаточно высоких температурах уже нельзя считать физическими константами газа. Табл. 22 [1]) дает представление о значительности влияния температуры на коэффициент теплоемкости c_p для различных газов. При учете этой зависимости энтальпию газа определяют интегралом (3).

В конце § 114 отмечалось, что метод обобщенного подобия применяется не только в теории ламинарного пограничного слоя, но и для других, в известном смысле «обратных», задач, в которых искомым являлось распределение давления. Там же были указаны и задачи такого рода применительно к газовым потокам.

§ 149. Ламинарный пограничный слой в сверхзвуковом потоке смеси реагирующих между собой газов

Во многих областях современной техники, таких, как авиационная, космическая, энергетическая, лазерная, химическая технология и многих других, возникают и используются неоднородные, многокомпонентные газовые потоки смесей химически взаимодействующих газов.

Неоднородные по составу среды, все составляющие которых принадлежат к одному и тому же жидкому или газообразному состоянию, носят наименование *гомогенных* или *однофазных*. В зависимости от числа входящих в них компонент различают *двухкомпонентные, трехкомпонентные* и т. д. среды.

Неоднородные среды, включающие вещества в разных агрегатных состояниях (фазах), называют *гетерогенными* или, по числу входящих в них фаз, *двухфазными, трехфазными* и т. д.

Механика и термодинамика неоднородных сред основаны на предположении о возможности перехода от систем *дискретных* частиц к *сплошным* средам, что достигается процессом осреднения по множеству частиц. Отличие от кинетической теории газов заключается в том, что эти частицы по своим размерам далеко превосходят молекулы. Такой статистический переход, конечно, требует присутствия в элементарном объеме осреднения достаточно большого числа частиц. Основные трудности, возникающие при изучении динамики и термодинамики среды, связаны с большой сложностью механизмов межкомпонентных и особенно межфазных взаимодействий, сопровождающих движения таких сред.

[1]) Алексеев Б. В. Пограничный слой с химическими реакциями.— М.: Вычислительный центр АН СССР, 1967, с. 19.

В настоящем параграфе внимание будет сосредоточено лишь на многокомпонентных смесях газов [1]).

Отправляясь от общего приема статистической механики, *постулируем* существование так называемой *функции распределения* частиц, образующих систему, по их положению в пространстве и скоростям. Характеризуя положение отдельных частиц их вектор-радиусами $\boldsymbol{r}$ в данный момент времени t и векторами скорости $\boldsymbol{V}$, введем функцию распределения $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}, t)$ как коэффициент пропорциональности в выражении *вероятного* числа δN частиц, расположенных в окрестности $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})$ данной точки пространства и движущихся со скоростями, находящимися в интервале $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}+\delta\boldsymbol{V})$:

$$\delta N = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}, t)\,(\delta\boldsymbol{r})\,(\delta\boldsymbol{V}), \tag{189}$$

где символы $(\delta\boldsymbol{r})$ и $(\delta\boldsymbol{V})$ обозначают *элементарные объемы* в *геометрическом* пространстве координат x, y, z и пространстве *скоростей* u, v, w, которые выберем равными $(\delta\boldsymbol{r}) = \delta x\,\delta y\,\delta z$ и $(\delta\boldsymbol{V}) = \delta u\,\delta v\,\delta w$. Эти объемы сохранят далее обозначения $(\delta\boldsymbol{r})$ и $(\delta\boldsymbol{V})$, как это принято в кинетической теории газов.

Из определения функции распределения (189) следует выражение полного числа частиц в системе

$$N = \int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}, t)\,(\delta\boldsymbol{r})\,(\delta\boldsymbol{V}) \tag{190}$$

как объемного интеграла по областям изменения положений и скоростей частиц системы. Равенство (190) выражает принятую нормировку функции распределения. Относя вероятное число частиц (189) в объеме $(\delta\boldsymbol{r})$ $(\delta\boldsymbol{V})$ к общему числу частиц (190), можно придать функции распределения смысл *вероятности* нахождения частиц в только что указанном элементарном объеме, и тогда условие нормировки (190) заменится обычным условием равенства единице суммы вероятностей всех возможных положений и скоростей частиц системы.

Относя вероятное число (189) к объему $(\delta\boldsymbol{r})$, получим вероятную плотность распределения частиц по скоростям в интервале $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}+\delta\boldsymbol{V})$

$$\delta n = \frac{\delta N}{(\delta\boldsymbol{r})} = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}, t)\,(\delta\boldsymbol{V}), \tag{191}$$

а затем и вероятную плотность распределения частиц в пространстве в данный момент

$$n = \int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}, t)\,(\delta\boldsymbol{V}). \tag{192}$$

Умножая эту плотность на массу m частицы, расположенной в данной точке пространства, получим массовую плотность, или, короче, *плотность* ρ сплошной среды в данной точке и в данный момент времени

$$\rho = nm. \tag{193}$$

Рассматривая сплошную неоднородную среду как систему частиц, состоящую из определенного числа подсистем — компонент «i-го сорта» — с частицами одинаковой массы, примем для каждой из них свою функцию распределения $f^{(i)}(\boldsymbol{r}^{(i)}, \boldsymbol{V}^{(i)}, t)$. Вводя вместо скоростей отдель-

[1]) По общему вопросу о движениях *гетерогенных* сред отсылаем к наиболее распространенным монографиям: Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978; Соу С. Гидродинамика многофазных систем: Пер. с англ.— М.: Мир. См. также обзор, составленный Р. И. Нигматулиным в соавторстве с А. Н. Крайко, В. К. Старковым и Л. Е. Стерниным, «Механика многофазных сред» (Итоги науки и техники, Гидромеханика, т. 6, ВИНИТИ, 1972). Некоторое представление о трудностях, возникающих при рассмотрении динамики и термодинамики неоднородных сред, можно получить, ознакомившись с содержанием § 13 предыдущего (пятого) издания настоящего учебника.

ных частиц i-го сорта $\boldsymbol{V}^{(i)}$ средние скорости $\overline{\boldsymbol{V}}^{(i)}$ в данной точке пространства, занятого частицами i-го сорта, и принимая за «вес» осреднения функцию распределения $f^{(i)}$, найдем

$$\overline{\boldsymbol{V}}^{(i)} = \frac{1}{n^{(i)}} \int f^{(i)} \boldsymbol{V}^{(i)} (\delta \boldsymbol{V}^{(i)}) = \frac{\int f^{(i)} \boldsymbol{V}^{(i)} (\delta \boldsymbol{V}^{(i)})}{\int f^{(i)} (\delta \boldsymbol{V}^{(i)})}. \tag{194}$$

Для определения средних величин в точках сплошной среды в *целом* (смеси компонент) примем обычные «формулы смешения» по *массе* для *плотности*

$$\rho = \sum_{(i)} n^{(i)} m^{(i)} = \sum_{(i)} \rho^{(i)}. \tag{195}$$

и по *количеству движения* для *скорости*

$$\rho \overline{\boldsymbol{V}} = \sum_{(i)} \rho^{(i)} \overline{\boldsymbol{V}}^{(i)}, \quad \overline{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{\rho} \sum_{(i)} \rho^{(i)} \overline{\boldsymbol{V}}^{(i)}. \tag{196}$$

Отношение плотностей в данной точке

$$\frac{\rho^{(i)}}{\rho} = \frac{n^{(i)} m^{(i)}}{\sum\limits_{(i)} n^{(i)} m^{(i)}} = c^{(i)} \tag{197}$$

определяет «концентрацию» $c^{(i)}$ частиц i-го сорта в данной точке сплошной неоднородной среды. Согласно (197) будет

$$\sum_{(i)} c^{(i)} = \frac{1}{\rho} \sum_{(i)} \rho^{(i)} = 1.$$

В дальнейшем придется встречаться только со средними скоростями $\overline{\boldsymbol{V}}^{(i)}$ и $\overline{\boldsymbol{V}}$, в связи с чем условимся опускать черту над $\boldsymbol{V}$. Разность скоростей

$$\boldsymbol{V}^{*(i)} = \boldsymbol{V}^{(i)} - \boldsymbol{V} \tag{198}$$

можно трактовать как *среднюю скорость распространения i-й компоненты сквозь сплошную неоднородную* среду в данной точке и назвать *скоростью диффузии i-й компоненты.*

Уравнение неразрывности i-й компоненты будет иметь ту же форму (12) или (13) гл. III, что и в случае однородной среды, с той лишь разницей, что вместо ρ и $\boldsymbol{V}$ будут стоять соответственно $\rho^{(i)}$ и $\boldsymbol{V}^{(i)}$, а под $J^{(ji)}$ условимся понимать отнесенную к единице объема скорость прироста массы i-й компоненты за счет реакций перехода от j-й компоненты к i-й. Очевидно,

$$J^{(i)} = \sum_{(j)} J^{(ji)}, \quad \sum_{(i)} J^{(i)} = \sum_{(i,j)} J^{(ji)} = 0. \tag{199}$$

Уравнение (13) гл. III при этом переходит в *уравнение неразрывности i-й компоненты*:

$$\frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho^{(i)} \boldsymbol{V}^{(i)}) = J^{(i)} = \sum_{(j)} J^{(ji)}. \tag{200}$$

Суммируя обе части этого уравнения по всем компонентам, получим, согласно (195) и (196), *уравнение неразрывности для смеси в целом*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{V}) = 0. \tag{201}$$

В уравнении (200) можно освободиться от средней скорости $\boldsymbol{V}^{(i)}$ движения отдельной компоненты, выразив ее, согласно (198), через среднюю скорость среды в целом $\boldsymbol{V}$ и скорость диффузии компоненты $\boldsymbol{V}^{*(i)}$; получим

$$\frac{\partial \rho^{(i)}}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\rho^{(i)}(\boldsymbol{V}^{*(i)} + \boldsymbol{V})\right] = J^{(i)}, \tag{202}$$

или, вводя по (197) концентрацию $c^{(i)} = \rho^{(i)}/\rho$,

$$\frac{\partial (\rho c^{(i)})}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\rho c^{(i)}(\boldsymbol{V}^{*(i)} + \boldsymbol{V})\right] = J^{(i)}. \tag{203}$$

Комбинируя члены

$$c^{(i)}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V})\right] + \rho \frac{\partial c^{(i)}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad} c^{(i)} = J^{(i)} - \operatorname{div}(\rho c^{(i)} \boldsymbol{V}^{*(i)})$$

и используя уравнение неразрывности смеси (201), окончательно получим

$$\rho \frac{\partial c^{(i)}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad} c^{(i)} = J^{(i)} - \operatorname{div}(\rho c^{(i)} \boldsymbol{V}^{*(i)}). \tag{204}$$

Это уравнение носит наименование *уравнения концентрации* компоненты. Левая часть уравнения представляет совокупность локального и конвективного изменения концентрации i-й компоненты в потоке смеси, правая — характеризует возникновение i-й компоненты за счет физико-химических превращений j-х компонент в i-ю и диффузию (распространение) i-й компоненты в смеси. В этом уравнении средняя скорость смеси $\boldsymbol{V}$, величины $J^{(ji)}$ и их сумма $J^{(i)} = \sum\limits_{(j)} J^{(ji)}$, скорости диффузии $\boldsymbol{V}^{*(i)}$ так же неизвестны, как и концентрация $c^{(i)}$. В так называемом диффузионном приближении скорость смеси в уравнении (204) определяют из уравнения динамики *однородной* среды со значениями физических констант, соответствующими смеси. Как будет далее показано, это эквивалентно отбрасыванию в точном уравнении динамики смеси *нелинейного* члена, характеризующего суммарный эффект диффузионных движений компонент. Такое отбрасывание допустимо при сравнительной малости скоростей диффузии. Скорость диффузии $\boldsymbol{V}^{*(i)}$ связывают с градиентом $\operatorname{grad} c^{(i)}$ концентрации i-й компоненты по закону Фика, а скорость образования этой компоненты $J^{(i)} = \sum\limits_{(j)} J^{(ji)}$ выражают через физико-химические параметры, входящие в уравнения кинетики процесса образования компоненты. Такой приближенный «диффузионный» подход, линеаризующий уравнение (204) по отношению к концентрации $c^{(i)}$, оказывается во многих случаях достаточным для изучения движений гомогенных газовых сред.

При требуемом практикой более строгом подходе — это относится в первую очередь к гетерогенным средам — приходится обращаться к рассмотрению уравнений динамики в напряжениях и уравнений баланса энергии как для отдельных компонент, так и для смеси их в целом.

Вывод этих уравнений применительно к отдельным составляющим смеси основан на тех же принципах, что и в случае однородной сплошной среды, отличаясь лишь учетом взаимодействий компонент между собой и возможного наличия физико-химических превращений одних составляющих смеси в другие. Уравнения динамики и баланса энергии смеси выводятся из уравнений отдельных ее составляющих путем почленного суммирования этих уравнений по всем компонентам.

При этом прежде всего встает вопрос о выражении средних по всей смеси механических и термодинамических характеристик суммарного потока, а также средних значений физических констант через заданную совокупность значений их для отдельных компонент. Иногда, как это, например, имеет место для плотностей (195) и скоростей (196), такая связь очень проста, в других случаях (это относится, например, к определению среднего коэффициента вязкости смеси) требует специального анализа, далеко уходящего за пределы чисто физико-химического рассмотрения вопроса и заставляющего учитывать движение среды.

Составим уравнения *плоского стационарного пограничного слоя* в потоке смеси реагирующих между собой газов, считая все процессы *термодинамически равновесными.* Сохраним обозначение плотности ρ, давления p, скорости $\boldsymbol{V}(u, v)$, энтальпии h, абсолютной температуры T для *смеси газов* и условимся обозначать индексом i соответствующие значения этих величин для *отдельных, входящих в смесь компонент.* Символом $J^{(i)}$ обозначим отнесенную к единице объема *секундную массовую скорость образования i-й компоненты смеси* в данной точке потока.

Довольствуясь стационарным случаем, будем иметь, согласно (200), уравнение неразрывности для i-й компоненты смеси

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho^{(i)}u^{(i)}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho^{(i)}v^{(i)}) = J^{(i)}, \tag{205}$$

а для смеси в целом по уравнению (201)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0. \tag{206}$$

Динамическое уравнение пограничного слоя для смеси газов примем тем же, что и для однородного газа с плотностью и коэффициентом вязкости, соответствующими смеси газов, а именно

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{207}$$

Грубая оценка коэффициента вязкости смеси возможна по формуле

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{(i)}\frac{c^{(i)}}{\mu^{(i)}}\sqrt{\frac{m}{m^{(i)}}}, \quad \frac{1}{m} = \sum_{(i)}\frac{c^{(i)}}{m^{(i)}},$$

где введены обозначения: ρ, μ, m — соответственно плотность, динамический коэффициент вязкости и молярная масса в данной точке смеси, а $\rho^{(i)}$, $\mu^{(i)}$, $m^{(i)}$ — то же для i-й компоненты ($\rho^{(i)}$ — плотность при парциальном давлении $p^{(i)}$ компоненты); $c^{(i)} = \rho^{(i)}/\rho$ — массовая, или весовая, концентрация i-й компоненты в данной точке смеси.

Уравнение состояния i-й компоненты смеси примем в форме

$$p^{(i)} = R^{(i)}\rho^{(i)}T^{(i)}. \tag{208}$$

Температуры $T^{(i)}$ отдельных компонент смеси будем считать *одинаковыми и равными общей равновесной температуре* T *смеси* в данной точке. Тогда, определяя по закону Дальтона давление смеси p в данной точке как сумму парциальных давлений $p^{(i)}$, будем иметь

$$p = \sum_{(i)}p^{(i)} = \left(\sum_{(i)}R^{(i)}\rho^{(i)}\right)T = R\rho T, \tag{209}$$

где газовая константа смеси R определяется равенствами

$$R = \frac{1}{\rho}\sum_{(i)}\rho^{(i)}R^{(i)} = \sum_{(i)}\frac{\rho^{(i)}}{\rho}R^{(i)} = \sum_{(i)}c^{(i)}R^{(i)}. \tag{210}$$

При таком выборе газовой постоянной смеси уравнение ее состояния сохраняет ту же форму, что и уравнение состояния однородного газа.

Основные особенности процессов движения и тепломассопереноса в реагирующих смесях газов лежат в термодинамической или, точнее, в *термохимической* области. Рассмотрим вывод уравнения теплового баланса движущейся смеси газов и уравнений диффузии отдельных ее компонент.

Заметим, что конвективный подвод тепла в смеси ничем не отличается от такого же в однородном газе; при составлении левой части уравнения теплового баланса следует лишь принять во внимание, что энтальпия смеси h определяется как сумма произведений энтальпий $h^{(i)}$ отдельных компонент на концентрации $c^{(i)}$ этих компонент

$$h=\sum_{(i)} c^{(i)}h^{(i)}. \tag{211}$$

В правую часть уравнения баланса тепла, так же как и в уравнение (32) для однородного газа, войдут члены, выражающие: мощность сил давления, секундное количество диссипируемой в тепло механической энергии и тепло, подводимое путем теплопроводности, но, кроме этих общих для смеси и однородного газа источников тепла, имеются еще *два специфических для движущейся смеси газов источника теплообразования.*

Во-первых, при образовании i-й компоненты смеси с массовой скоростью $J^{(i)}$ выделяется секундное количество тепла $J^{(i)}h^{*(i)}$, где под $h^{*(i)}$ подразумевается некоторая характерная для каждой компоненты энтальпия, представляющая «скрытую» теплоту образования i-й компоненты. Это приводит к необходимости присоединения к ранее перечисленным членам правой части уравнения баланса еще члена

$$\sum_{(i)} J^{(i)}h^{*(i)},$$

равного, согласно уравнению (205) и соотношению $\rho^{(i)}=\rho c^{(i)}$,

$$\sum_{(i)} h^{*(i)}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho c^{(i)}u^{(i)})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho c^{(i)}v^{(i)})\right]. \tag{212}$$

Приведем табл. 23 «энтальпий образования» некоторых часто встречающихся газовых компонент [1]).

Таблица 23

Компонента	C	CO	CO_2	O	O_2	C^+	CO^+	O^+	O_2^+
Энтальпия $h^{*(i)}$, ккал/моль	264	66,77	0	58,97	0	523,8	390,4	372,9	282,4

Во-вторых, *дополнительной причиной переноса тепла в смеси* является *диффузия компонент в смеси.* Вспоминая, что скорость диффузии частиц i-й компоненты в смеси определяется разностью скоростей i-й компоненты и самой смеси в данной точке, получим выражение последнего дополнительного члена в виде суммы взятых с обратным знаком *дивергенций векторов потоков тепла* отдельных компонент

[1]) Алексеев Б. В. Пограничный слой с химическими реакциями.— М.: Вычислительный центр АН СССР, 1967, с. 21.

$\rho^{(i)}(V^{(i)}-V)h^{(i)}=\rho c^{(i)}(V^{(i)}-V)h^{(i)}$, равной

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\sum_{(i)}c^{(i)}(u^{(i)}-u)h^{(i)}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\sum_{(i)}c^{(i)}(v^{(i)}-v)h^{(i)}\right]. \qquad (213)$$

Таким образом, уравнение *баланса энергии для движущейся смеси газов в пограничном слое* приведется к виду ($h^{*(i)}=\text{const}$)

$$\rho u\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{(i)}c^{(i)}h^{(i)}\right)+\rho v\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{(i)}c^{(i)}h^{(i)}\right)=$$

$$=u\frac{dp}{dx}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{(i)}\rho u^{(i)}c^{(i)}h^{*(i)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{(i)}\rho v^{(i)}c^{(i)}h^{*(i)}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{(i)}\rho(u^{(i)}-u)c^{(i)}h^{(i)}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{(i)}\rho(v^{(i)}-v)c^{(i)}h^{(i)}\right]. \qquad (214)$$

Основные свойства пограничного слоя, позволяющие упростить правую часть уравнения теплового баланса, по отношению к дополнительным членам еще не приняты во внимание. Прежде чем произвести эти упрощения, сделаем во второй строке тождественное преобразование:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{(i)}\rho u^{(i)}c^{(i)}h^{*(i)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{(i)}\rho v^{(i)}c^{(i)}h^{*(i)}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{(i)}\rho(u^{(i)}-u)c^{(i)}h^{*(i)}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{(i)}\rho(v^{(i)}-v)c^{(i)}h^{*(i)}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{(i)}\rho uc^{(i)}h^{*(i)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{(i)}\rho vc^{(i)}h^{*(i)}\right).$$

Перенося последние два члена в левую часть равенства и принимая во внимание уравнение неразрывности для смеси газов (201), перепишем уравнение баланса (214) в форме, содержащей в качестве основной неизвестной разность энтальпий $h^{(i)}-h^{*(i)}$:

$$\rho u\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{(i)}c^{(i)}(h^{(i)}-h^{*(i)})\right]+\rho v\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{(i)}c^{(i)}(h^{(i)}-h^{*(i)})\right]=$$

$$=u\frac{dp}{dx}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{(i)}\rho(u^{(i)}-u)c^{(i)}(h^{(i)}-h^{*(i)})\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{(i)}\rho(v^{(i)}-v)c^{(i)}(h^{(i)}-h^{*(i)})\right].$$

Предпоследним членом справа можно, как всегда в пограничном слое, пренебречь по сравнению с остальными и переписать уравнение баланса в виде

$$\rho u\frac{\partial\bar{h}}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\bar{h}}{\partial y}=u\frac{dp}{dx}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial y}-\sum_{(i)}\rho(v^{(i)}-v)c^{(i)}(h^{(i)}-h^{*(i)})\right], \qquad (215)$$

где для краткости введено обозначение

$$\bar{h}=\sum_{(i)}c^{(i)}(h^{(i)}-h^{*(i)}). \qquad (216)$$

Довольствуясь схемой *бинарной* смеси ($i=1, 2$; $D^{(1)}=D^{(2)}=D$), примем обобщенный закон диффузии, согласно которому скорость диффузии i-й компоненты определяется через градиенты концентрации и температуры по формуле

$$V^{(i)}-V=-\frac{D}{c^{(i)}}\operatorname{grad}c^{(i)}-\frac{D^{T(i)}}{Tc^{(i)}}\operatorname{grad}T. \qquad (217)$$

Слагаемые в правой части выражают последовательно скорости *массодиффузии* и *термодиффузии*, т. е. те скорости распространения i-й ком-

поненты относительно смеси, которые возникают за счет неоднородности полей концентраций этой компоненты, а также температуры, общей для всех компонент смеси.

Величины D, D^T являются соответственно коэффициентами *массодиффузии* (их обычно называют просто *коэффициентами диффузии*) *и термодиффузии.*

Замечая, что входящая в последний член правой стороны уравнения (215) разность скоростей $v^{(i)}-v$, согласно (217), может быть переписана в виде

$$v^{(i)}-v=-\frac{D}{c^{(i)}}\frac{\partial c^{(i)}}{\partial y}-\frac{D^{T(i)}}{Tc^{(i)}}\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{218}$$

получим окончательно следующую форму *уравнения баланса тепла* в пограничном слое, образовавшемся в потоке смеси реагирующих газов:

$$\rho u\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}+\rho v\frac{\partial \bar{h}}{\partial y}=u\frac{dp}{dx}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\sum_{(i)}(h^{(i)}-h^{*(i)})\left(D\frac{\partial c^{(i)}}{\partial y}+\frac{D^{T(i)}}{T}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]. \tag{219}$$

Преобразуем уравнение неразрывности i-й компоненты смеси (200). Выделяя из скоростей u_i, v_i скорости диффузии и выражая их по формуле (217), получим в приближении пограничного слоя уравнение

$$\rho u\frac{\partial c^{(i)}}{\partial x}+\rho v\frac{\partial c^{(i)}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\left(D\frac{\partial c^{(i)}}{\partial y}+\frac{D^{T(i)}}{T}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]+J^{(i)}, \tag{220}$$

именуемое обычно *уравнением диффузии* (иногда говорят *концентрации*) i-й компоненты.

Не останавливаясь на дальнейших преобразованиях и возможных упрощениях [1]) полученной системы уравнений,— это не отвечает задачам настоящего, общего курса,— отметим некоторые трудности, связанные с установлением *граничных условий для концентраций.* Условия, которым подчиняются концентрации компонент смеси на твердой поверхности обтекаемого смесью газов тела, зависят от *каталитических свойств этой поверхности.* Если речь идет о реакции диссоциации, то поверхность тела может в той или другой степени *способствовать рекомбинации* атомов в молекулы. На абсолютно каталитической поверхности обычно концентрации атомов $c_A=0$; на абсолютно некаталитической стенке $\partial c_A/\partial y=0$. Практически приходится иметь дело с промежуточным случаем и вводить условие *баланса потока атомов на стенку* и *абсорбции их на стенке* со скоростью, пропорциональной некоторой степени концентрации атомов:

$$\rho_w D_w\left(\frac{\partial c_A}{\partial y}\right)_w=\varkappa_w(c_{Aw}\rho_w)^n,$$

где показатель степени n определяет порядок реакции абсорбции атомов, а коэффициент $\varkappa_w$ — *каталитическую способность поверхности* тела.

При современных возможностях численного расчета на ЭВМ задачи ламинарного пограничного слоя в диссоциирующем газе поддаются подробному анализу. Особенно просто решаются две предельные задачи:

[1]) Сошлемся на монографию: Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений.— М.: ИЛ, 1962, где на с. 376—400 подробно изложены *автомодельные* решения этих уравнений. Приведенное у нас уравнение (219) в этой монографии преобразовано к уравнению относительно полной энтальпии $h_0=\sum_{(i)}c^{(i)}(h^{(i)}-h^{*(i)})+\frac{1}{2}u^2$, а член, выражающий учет термодиффузии, опущен.

1) случай «замороженного» движения ($J^{(i)}=0$), когда все процессы в диссоциированном газе определяются только конвекцией и диффузией отдельных компонент (скорость реакций равна нулю), и 2) случай «равновесной» диссоциации, когда концентрация является заданной функцией температуры и давления, а уравнение диффузии отсутствует. В этом последнем случае решение может быть получено в «универсальном» виде при помощи метода обобщенного подобия (§ 148) [1]).

Удовольствовавшись этими общими замечаниями, отошлем интересующихся к нашей монографии [2]), где подробно рассмотрен случай интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя в диссоциирующем и рекомбинирующем газе вблизи лба тела вращения [3]), а также к существующим обзорам работ в этой области [4]).

Особую сложность представляют задачи пограничного слоя в гиперзвуковом потоке при наличии *разрушения поверхности тела* из-за высоких температур обтекающего поверхность газа. Появляющиеся в этих условиях процессы *плавления* или непосредственного *испарения* (*сублимации*) поверхности тела создают в пограничном слое многокомпонентные смеси, содержащие наряду с диссоциированными и ионизованными частицами еще сложные молекулы материала разрушающейся поверхности. Это приводит к необходимости установления граничных условий на *деформирующейся поверхности*, учета *тепловых явлений в самом твердом теле*, ограниченном разрушающейся поверхностью, и рассмотрения условий его механического разрушения (образование трещин и их «выветривание»).

Несмотря на исключительную сложность этих явлений, требующих для своего изучения привлечения данных из разнообразных областей механики, термодинамики и термохимии, в настоящее время, особенно благодаря замечательным достижениям отечественных ученых, уже имеются методы расчета [5]), вполне удовлетворяющие практику.

При движениях тел со скоростями, близкими ко второй космической скорости (примерно 11 км/с), существенным становится влияние *излучения газа* на аэротермодинамические параметры пограничного слоя. Этот поток излучения сказывается на тепловом потоке к поверхности тела в носовой его части и оказывается сравнимым с тепловым потоком, возникающим за счет диссипации механической энергии в пограничном

[1]) Кривцова Н. В. Ламинарный пограничный слой в равновесно диссоциированном газе при произвольном распределении внешней скорости.— Мех. жидк. и газа, 1966, № 6.

[2]) Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962, с. 457—470.

[3]) Подробнее см.: Fay J., Riddell F. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air — Journ Aeron. Sci, 1958, v. 25, № 2, p. 73—85; русский перевод в кн.: Проблемы движения головной части ракет дальнего действия.— М.: ИЛ, 1959, с. 217—256.

[4]) Людвиг Г., Хейль М. Теория пограничного слоя с диссоциацией и ионизацией — Проблемы механики, вып. IV.— М.: ИЛ, 1963, с. 37—99.

[5]) Сошлемся на первые советские работы этого направления: Тирский Г. А. Сублимация тупого тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке смеси газов.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 5, с. 884—902; Щенников В. В. Расчет ламинарного пограничного слоя у сублимирующей поверхности.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 5; Анфимов Н. А. Ламинарный пограничный слой на химически активной поверхности.— Изв. АН СССР, Мех. и машин., 1962, № 3, с. 3—12 и того же автора: Горение графита в потоке воздуха при высоких температурах.— Изв. АН СССР, Мех. и машин., 1964, № 5; см. также Овсянников В. М. Разрушение осесимметричного тела вращения из материала сложного химического состава в высокоэнтальпийном потоке воздуха.— Мех. жидк. и газа, 1965, № 5, и обзор в юбилейном сборнике «Механика в СССР за 50 лет»; Динамика вязких жидкостей и газов, теория ламинарных и турбулентных пограничных слоев/Под ред. Л. Г. Лойцянского, § 8, Проблема термозащиты поверхности тела в гиперзвуковом потоке (составлен Г. А. Тирским).— М.: Наука, 1970, с. 552—559.

слое. Для ознакомления с существующими исследованиями в этой области можно рекомендовать монографию Б а й Ш и - и [1]).

Отметим, наконец, большой интерес к вопросам движения ионизованных газов, так называемой «холодной плазмы» (температура до 15 000 К), обладающих электрической проводимостью и повышенной теплопроводностью (движения с малыми числами Прандтля). Особо важное техническое значение имеют задачи движения плазмы в магнитном поле.

§ 150. Взаимодействие ламинарного пограничного слоя с внешним невязким сверхзвуковым потоком

Методы расчета ламинарного пограничного слоя в газовом потоке больших до- и сверхзвуковых скоростей, изложенные в предыдущих параграфах настоящей главы, были выдержаны в стиле классической теории пограничного слоя: распределение давления во внешнем безвихревом невязком потоке считалось *заданным наперед*, а обратное влияние пограничного слоя на внешний поток, даже в случаях таких очевидных нарушений предпосылок теории Прандтля, которые имели место в предотрывной области, где поперечные размеры и скорости в пограничном слое теряют свою сравнительную малость, не принималось во внимание.

В последнее время получил значительное развитие новый, важный для практики раздел теории пограничного слоя — теория *взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком*, расширившая рамки классической теории на случай движений вязкой среды (несжимаемой и сжимаемой) в областях, граничащих с особыми точками течений, такими, как точка отрыва слоя от твердой поверхности и последующего его «прилипания» к ней, точка нарушения «гладкости» контура, движений в «донной» области за срезом снаряда, в «ближнем» следе за телом и др.

Задачи этого рода приобретают особо важное значение в условиях сверхзвуковых, а еще больше *гиперзвуковых* потоков, в которых увеличение роли обратного влияния пограничного слоя на внешний невязкий поток, а следовательно, и усиление взаимодействия между ними обусловливаются сравнительно большой толщиной области гиперзвукового пограничного слоя. Причиной этой особенности гиперзвукового пограничного слоя является расширение газа при тех высоких температурах, которые обычно возникают в движениях с большими числами Маха, и сопутствующее этому расширению уменьшение плотности газа, а тем самым и уменьшение числа Рейнольдса, что влечет за собой увеличение роли вязкого трения на поверхности тела.

Как уже отмечалось, путь непосредственного интегрирования уравнений Навье — Стокса при тех значениях числа Рейнольдса, которые характерны для теории пограничного слоя первого приближения (уравнения Прандтля), в рассматриваемых случаях оказывается недоступным, причем не только для аналитического, но и для численного машинного решения. На помощь приходят асимптотические методы (методы малых возмущений). Мы уже познакомились с частным случаем применения такого рода методов, когда рассматривали основной для теории пограничного слоя прием «сшивания» решений уравнений Прандтля с внешним невязким потоком (§ 106).

Сущность асимптотических методов заключается в следующем. Вся рассматриваемая область течения разбивается на некоторое число подобластей с характерными для каждой из них *внутренними* масштабами: линейными продольными и поперечными размерами, скоростями, дав-

[1]) Б а й Ш и - и. Динамика излучающего газа.— М.: Мир, 1968.

лением и другими механическими или термодинамическими величинами. Вместе с этими внутренними рассматриваются еще *внешние*, общие для всех подобластей масштабы: размер области течения в целом, скорость U_∞ и др. По этим внешним масштабам строится рейнольдсово число $\mathbf{Re}=U_\infty L/\nu$, которое предполагается большим, а обратная величина $1/\mathbf{Re}$ — малой. В каждой из подобластей производится переход от размерных величин к безразмерным, отнесенным к характерным для подобласти масштабам, причем делается основное допущение, что при предельном переходе $\mathbf{Re}\to\infty$ все таким образом нормированные в подобластях величины стремятся к конечным значениям или, как принято говорить, имеют порядок единицы.

В результате такого предельного перехода уравнения Навье — Стокса, составленные для всех подобластей, упрощаются, принимая тот или другой, зависящий от специфических особенностей движения в данной подобласти вид (уравнения Эйлера, уравнения Прандтля, уравнения «медленного» вязкого движения). Решения таких упрощенных уравнений, найденные для каждых двух смежных областей, «сшиваются» друг с другом. Наглядным примером может служить классическая теория пограничного слоя Прандтля. Предельный переход $\mathbf{Re}\to\infty$, что соответствует «исчезновению» вязкости ($\nu\to 0$), превращает уравнения Навье — Стокса в уравнения Эйлера. Но уравнения Эйлера не допускают интегрирования при граничных условиях, соответствующих прилипанию среды к поверхности твердого тела (нулевая относительная скорость на твердой поверхности). Естественно появляется необходимость разбиения всей области течения на две подобласти: внешнюю, описываемую уравнениями Эйлера с граничным условием только «непроницаемости» поверхности, т. е. равенства на ней нулю *нормальной* составляющей относительной скорости, и внутреннюю тонкую пристеночную область — пограничный слой — в которой условие «прилипания» выполняется, но благодаря тонкости этой области уравнения Навье — Стокса упрощаются и переходят в уравнения Прандтля. Напомним, что уравнения Прандтля получаются из уравнений Навье — Стокса предельным переходом $\mathbf{Re}\to\infty$ уже только после того, как все величины в пограничном слое отнесены к своим характерным масштабам: продольным, имеющим порядок единицы, и поперечным с порядком $1/\sqrt{\mathbf{Re}}$.

В интересующих нас сейчас асимптотических теориях, наряду с подобластями типа классического пограничного слоя, появляются еще другие подобласти, порядки которых по продольным и поперечным размерам, скоростям, перепадам давления и др. отличаются от $1/\sqrt{\mathbf{Re}}$. Оценка порядков по рейнольдсову числу масштабов протяженности этих подобластей и механических и термодинамических характеристик движений среды в них представляет основной этап построения асимптотических решений. Вторым этапом служит составление рядов по параметрам, малость которых обеспечивается стремлением внешнего рейнольдсова числа к бесконечности, и определения коэффициентов этих рядов в том или другом простейшем приближении. При этом выполняется «сшивание» асимптотических решений в смежных подобластях.

Не имея возможности в настоящем общем руководстве останавливаться на деталях применения асимптотических методов, укажем лишь, что задача об определении порядков по рейнольдсову числу характерных масштабов подобластей потока требует в каждом отдельном случае применения тех или других, во многом интуитивных, физических соображений, что особенно относится к сложным сверхзвуковым и гиперзвуковым задачам.

Основное значение асимптотических методов не сводится только к учету обратного влияния пограничного слоя на внешний невязкий поток,

выражающегося в искажении внешнего потока за счет оттеснения линий тока в нем от твердой поверхности, обусловленном подтормаживающим влиянием твердой стенки (вспомнить § 131). Особо важно, что эти методы раскрывают природу других весьма важных физических явлений в *сверхзвуковом* пограничном слое, одним из наиболее существенных из которых является противоречащая, на первый взгляд, гиперболическому и параболическому характеру уравнений движения во внешней и внутренней областях пограничного слоя возможность *распространения возмущений вверх по потоку.* Механизм этого распространения становится ясным и получает количественное определение благодаря рассмотрению расположенной непосредственно на твердой поверхности подобласти малых скоростей, свободно пропускающей волны возмущений вверх по потоку. Этот эффект носит наименование *свободного взаимодействия*, а область пограничного слоя, где он имеет место,— *области свободного взаимодействия.*

Остановимся сначала на рассмотрении наиболее простой задачи о взаимодействии ламинарного пограничного слоя с внешним гиперзвуковым потоком на продольно обтекаемой пластинке, причем удовольствуемся лишь учетом влияния оттеснения линий тока и отвлечемся от только что указанного эффекта свободного взаимодействия[1]). В настоящее время эта задача уже рассмотрена в более общем аспекте. Рекомендуем недавно опубликованный, глубокий по идеям и широкий по содержанию обзор по проблеме взаимодействия ламинарного пограничного слоя со сверхзвуковым потоком В. Я. Нейланда[2]).

В основу количественного анализа явления положим известную связь между давлением в гиперзвуковом потоке и углом отклонения линий тока от направления набегающего невозмущенного потока.

Условимся различать «местный угол атаки» θ_w, образованный касательной к контуру обтекаемого тела в данной его точке с направлением невозмущенного потока, и аналогично построенный *эффективный* местный угол атаки θ для *эффективного*, т. е. полученного наращиванием по нормали к обтекаемой поверхности толщины вытеснения $\delta^*(x)$, определенной по (221), контура. Углы θ и θ_w сравниваются между собой для точек, принадлежащих одному и тому же сечению пограничного слоя. Разность этих углов $\theta^*=\theta-\theta_w$ при их малости может быть приближенно приравнена значению производной $d\delta^*/dx$ в точке того же сечения пограничного слоя. В случае сжимаемой среды под «толщиной вытеснения» следует понимать величину

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta}\right) dy, \tag{221}$$

где ρ_δ и u_δ обозначают значения плотности и скорости на внешней границе пограничного слоя, рассчитанные по распределению давления, уже исправленному на оттеснение линий тока из-за влияния пограничного слоя.

Заметим, что в гиперзвуковом потоке ($M_\infty \gg 1$) плотность ρ мала и можно считать $\delta^* \approx \delta$. Тогда будем иметь основные для дальнейшего

---

[1]) Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений.— М.: ИЛ, 1962, с. 430—431.

[2]) Нейланд В. Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа.— Успехи механики, 1981, т. 4, вып. 2; там же обширная библиография. Кроме того, см. отдельные статьи В. Я. Нейланда (Механика жидкости и газа, 1971, № 4 и др.).

равенства

$$\theta = \theta_w + \theta^* \approx \theta_w + \frac{d\delta^*}{dx} \approx \theta_w + \frac{d\delta}{dx}, \tag{222}$$

$$K = \mathbf{M}_\infty \theta = \mathbf{M}_\infty (\theta_w + \theta^*) \approx \mathbf{M}_\infty \left(\theta_w + \frac{d\delta^*}{dx}\right) \approx \mathbf{M}_\infty \left(\theta_w + \frac{d\delta}{dx}\right).$$

В случае продольного обтекания плоской пластинки ($\theta_w = 0$), когда зависимость толщин слоя δ^*, δ от продольной координаты является одночленной степенной, предыдущие равенства перейдут в следующие:

$$\theta = \frac{d\delta^*}{dx} \approx \frac{\delta^*}{x} \approx \frac{\delta}{x}; \quad K = \mathbf{M}_\infty \frac{d\delta^*}{dx} \approx \mathbf{M}_\infty \frac{\delta^*}{x} \approx \mathbf{M}_\infty \frac{\delta}{x}. \tag{223}$$

Считая, что головная ударная волна образуется во внешнем по отношению к пограничному слою невязком потоке, примем следующую модель гиперзвукового обтекания вязким газом тонкого крылового профиля с острой передней кромкой.

Внешний однородный поток со скоростью U_∞, плотностью ρ_∞, давлением p_∞ и температурой T_∞ проходит сквозь головную ударную волну на передней острой кромке профиля и только после этого встречается с внешней границей пограничного слоя $y = \delta(x)$, на которой значения скорости, плотности, давления и температуры соответственно равны u_δ, ρ_δ, p_δ и T_δ. Область потока между головной ударной волной и внешней границей пограничного слоя обычно называют *ударным слоем*. Для оценки порядков величин: толщины пограничного слоя δ и отношения давлений $p_\delta/p_\infty = p/p_\infty$ отвлечемся от завихренности потока в ударном слое и, согласно обычной прандтлевской схеме, положим (черта над буквой означает среднее по сечению слоя значение величины)

$$\delta^2 \approx \delta^{*2} \backsim \frac{\bar{\mu} x}{\bar{\rho} u_\delta} = \frac{\bar{\mu}}{\mu_\infty} \frac{\rho_\infty}{\bar{\rho}} \frac{\mu_\infty x}{\rho_\infty u_\delta}. \tag{224}$$

Примем для зависимости коэффициентов вязкости от температуры линейный закон (15) и заметим, что в гиперзвуковом потоке ($\mathbf{M}_\infty \gg 1$) косой скачок образует столь малый угол с набегающим потоком, что без большой погрешности можно заменить u_δ на U_∞. Кроме того, считая поверхность тела теплоизолированной, положим $\bar{T}/T_\infty \approx \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2$. Тогда вместо (224) получим $\left(\frac{\rho_\infty}{\bar{\rho}} = \frac{p_\infty}{p}\frac{\bar{T}}{T_\infty}\right)$

$$\delta^2 \approx \delta^{*2} \backsim \left(\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^2 C \frac{p_\infty}{p} \left(\frac{\mu_\infty x}{\rho_\infty U_\infty}\right),$$

или, вспоминая (223),

$$\theta \approx \frac{\delta}{x} \approx \frac{\delta^*}{x} \backsim \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 \sqrt{C} \sqrt{\frac{p_\infty}{p}} \Big/ \sqrt{\mathbf{Re}_{x\infty}}, \quad \mathbf{Re}_{x\infty} = \frac{\rho_\infty U_\infty x}{\mu_\infty}. \tag{225}$$

Согласно (106) гл. VIII будем иметь следующее выражение коэффициента давления c_p:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right) = \left[\frac{k+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{K^2}}\right]\theta^2,$$

откуда найдем

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + k\left[\frac{k+1}{4} + \sqrt{\left(\frac{k+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{K^2}}\right]K^2. \tag{226}$$

В рассматриваемом сейчас случае гиперзвукового обтекания «эффективного» профиля известный уже нам по § 64 критерий подобия $K=M_\infty\theta$, как это следует из (225), удовлетворяет соотношению пропорциональности

$$K \backsim \chi \sqrt{\frac{p_\infty}{p}}; \quad \chi = M_\infty^3 \sqrt{C}/\sqrt{\mathrm{Re}_{x\infty}}. \tag{227}$$

Сравнивая (226) и (227), заключим, что искомое действительное значение отношения давлений p/p_∞ определяется как функция параметра χ, который, таким образом, становится *обобщенным критерием подобия* гиперзвуковых обтеканий тел, учитывающим ту часть взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком, о которой только что была речь.

Приведенные соображения относятся к случаю продольного обтекания тонкой пластинки, но допускают обобщение и на случай *тонкого* клина при продольном его обтекании и при наличии малого угла атаки. При этом приходится наряду с параметром χ учитывать еще влияние параметра $K_w=M_\infty\theta_w$, так как в этом случае уже нельзя отбрасывать θ_w по сравнению с $\theta^*=d\delta^*/dx$.

Двумя крайними случаями взаимодействия являются:

1. *Слабое взаимодействие* ($\chi<1$ или порядка единицы). Этот предельный случай подразумевает сравнительно малые гиперзвуковые скорости ($K<1$) и большие значения рейнольдсова числа ($\mathrm{Re}_\infty\gg1$). Распределение давления в этом случае мало отличается от невозмущенного пограничным слоем. Исследование слабого взаимодействия с помощью асимптотических разложений по степеням малого параметра χ не столь сложно и заключает в качестве нулевого приближения движение, не учитывающее взаимодействие.

Подробный анализ влияния слабого взаимодействия на распределение давлений приводит [1]) к формуле (для воздуха $k=1{,}4$)

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + 0{,}31\chi + 0{,}05\chi^2 \quad (0 \leqslant \chi < 4), \tag{228}$$

дающей хорошее совпадение с результатами экспериментов в этой области значения критерия χ.

2. *Сильное взаимодействие* ($\chi\gg1$). В этом случае, отвечающем очень большим значениям числа Маха ($M_\infty\gg1$) и конечным Re_∞, эффекты взаимодействия весьма существенны. При $K\gg1$ правая часть равенства (226) может быть заменена асимптотическим (при больших K) рядом

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{k(k+1)}{2}K^2 + \frac{3k+1}{k+1} - \frac{8k}{(k+1)^3}\frac{1}{K^2} + \ldots, \tag{229}$$

откуда следует оценка величины p_∞/p по K при $K\gg1$

$$\frac{p_\infty}{p} \approx \frac{2}{k(k+1)}\frac{1}{K^2} = \frac{2}{k(k+1)}\frac{1}{M_\infty^2\theta^2} \approx \frac{2}{k(k+1)M_\infty^2}\left(\frac{x}{\delta^*}\right)^2. \tag{230}$$

Согласно этой оценке будем иметь по (225)

$$\frac{\delta^*}{x} \approx \frac{k-1}{2}M_\infty^2\sqrt{C}\sqrt{\frac{2}{k(k+1)M_\infty^2}}\frac{x}{\delta^*}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_{x\infty}}}, \tag{231}$$

---

[1]) См. ранее цитированную монографию Хейза и Пробстина, с. 447.

так что

$$\theta \approx \frac{\delta^*}{x} \approx \frac{\delta}{x} \approx \left[\frac{k-1}{k(k+1)} \frac{M_\infty \sqrt{C}}{\sqrt{Re_{x\infty}}}\right]^{1/2}. \tag{232}$$

Возвращаясь к (231), получим искомую оценку для отношения давлений

$$\frac{p}{p_\infty} \approx \frac{k-1}{2} \frac{M_\infty^3 \sqrt{C}}{\sqrt{Re_{x\infty}}} = \frac{k-1}{2} \chi. \tag{233}$$

Приведем без вывода [1]) дающую хорошее совпадение с результатами экспериментов в воздухе ($k=1{,}4$) формулу

$$\frac{p}{p_\infty} = 0{,}514\chi + 0{,}759 + O\left(\frac{1}{\chi}\right) \quad (1 \leqslant \chi \leqslant 7{,}5).$$

В отличие от слабого взаимодействия, при котором относительная толщина пограничного слоя имеет порядок $\delta/L \backsim Re_L^{-1/2}$ (L — длина пластинки, $Re_L = U_\infty L/\nu_\infty$), в случае сильного взаимодействия будет $\delta/L \backsim Re_L^{-1/4}$; развитие толщины пограничного слоя вдоль пластинки в случае слабого взаимодействия определяется обычной закономерностью $\delta \backsim x^{1/2}$, в то время как в случае сильного взаимодействия имеет место более быстрый рост $\delta \backsim x^{3/4}$; отношение давлений p/p_∞ в обоих случаях представляется функциями от одного и того же параметра $\chi = M_\infty^3 \sqrt{C}/\sqrt{Re_{x\infty}}$; в случае *сильного* взаимодействия будет справедливо соотношение $p/p_\infty \backsim x^{-1/2}$.

Механизм взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком значительно усложняется в случае тонких, но имеющих *затупленную* переднюю кромку тел. Как мы уже знаем, в этих случаях при очень больших значениях числа Маха образуются головные ударные волны сложной криволинейной конфигурации. При прохождении через такую волну набегающий на тело однородный изэнтропический поток становится вихревым и неизэнтропическим, причем в условиях, соответствующих представлению о сильном взаимодействии, индуцированные ударной волной завихренность и градиент энтропии в области между головной волной и внешней границей пограничного слоя могут оказаться очень интенсивными.

Классическая теория ламинарного пограничного слоя не учитывает завихренности внешнего потока, а учитывает только скорость на внешней границе пограничного слоя. Имевшиеся попытки расширения теории Прандтля на этот случай не получили достаточного развития. Разобранный эффект оттеснения линий тока при наличии «вихревого взаимодействия» может значительно исказиться, особенно вблизи передней затупленной кромки тела. Упомянем еще, что при гиперзвуковом обтекании вязким газом тонких тел вращения, помимо только что указанных эффектов, важен еще эффект *поперечной кривизны* тела, который в случае потоков малых скоростей проявляется лишь на *сильно удлиненных* тонких телах.

Значительной частью теории взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком служит изучение явлений *отрыва*, связанных с существованием во внешнем потоке *скачков уплотнения*, которые взаимодействуют с пограничным слоем.

Не имея возможности останавливаться на специальных вопросах, отметим некоторые общие обстоятельства, связанные с изучением местных явлений взаимодействия пограничного слоя с падающими на него скачками уплотнения и возникающими при этом местными отрывами.

[1]) См. ранее цитированную монографию Хейза и Пробстина, с. 460.

Согласно классическим представлениям теории пограничного слоя в сверхзвуковом потоке передача возмущений вверх по потоку невозможна, так как такого рода передача противоречила бы *параболическому* характеру уравнений движения в области пограничного слоя и *гиперболическому* характеру уравнений движения во внешней области. Между тем такое «предварение» влияния внешнего потока на движение в пограничном слое наблюдается.

Как уже было отмечено, вблизи точки отрыва, так же как и вблизи любой другой точки резкого продольного изменения параметров в пограничном слое, нарушается основное допущение, использованное при выводе уравнений пограничного слоя, а именно, предположение о медленности изменения величин вдоль по потоку по сравнению с резким их изменением поперек потока. Восстановление роли продольных производных приводит к возвращению к уравнениям Навье — Стокса, имеющим в случае стационарных движений *эллиптический* характер. Кроме обычного для стационарных параболических уравнений пограничного слоя задания граничных условий в начальном сечении, на стенке и на внешней границе пограничного слоя возникает необходимость задания граничного условия где-то вниз по потоку, без чего эллиптические уравнения не дадут определенного решения.

Широкое распространение получили методы, основанные на *сращивании* асимптотических (при $\mathrm{Re}\to\infty$) решений уравнений движения газа в разных по характеру движения областях. При разработке этих методов было установлено, что, в отличие от классической теории пограничного слоя с характерными для нее *двумя* областями: пограничным слоем и внешним невязким потоком, в асимптотической теории, применительно к рассматриваемому сейчас вопросу о движении газа вблизи особой точки с резким продольным изменением внешних характеристик ламинарного пограничного слоя, приходится иметь дело с задачей сращивания решений в *трех* расположенных вблизи рассматриваемой особой точки пограничного слоя зонах. Следуя В. Я. Нейланду [1]), укажем, что общий для всех этих зон *продольный* размер имеет порядок $\mathrm{Re}^{-3/8}$.

Внешняя зона имеет тот же поперечный размер, а течение в ней в первом приближении может описываться линейной теорией сверхзвуковых потоков. В непосредственно к ней прилегающей второй, «промежуточной», области с поперечным размером порядка $\mathrm{Re}^{-1/2}$ сохраняется движение, в первом приближении совпадающее с тем, которое было в невозмущенном пограничном слое вдалеке от рассматриваемой особой точки. Возмущения в промежуточной области малы и в первом приближении не влияют на распределение давлений.

Наконец, третья, «пристеночная» область, играющая в асимптотических теориях особо важную роль, так как изменение толщины пристеночного слоя является как раз той причиной, которая вызывает возникновение продольного градиента давления во внешнем потоке, обусловливает срыв потока с поверхности тела. Эта область имеет сравнительно меньшую по порядку толщину, а именно $\mathrm{Re}^{-5/8}$. Хотя течение в ней описывается обычными по внешней форме уравнениями ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости, однако эти уравнения имеют принципиальную особенность — стоящий в правой части член dp/dx уже *не является заданным наперед*, а должен быть определен в процессе решения из условия сращивания течения в пристеночной области с внешним сверхзвуковым потоком. Это условие сохраняет *эллиптический* характер уравнения движения в пристеночной области, так как оно вместе с известной по § 60 гл. VIII формулой Аккерета для ко-

---

[1]) См. приведенную на с. 809 ссылку на составленный В. Я. Нейландом обзор.

эффициента давлений, вычисленного по линейной теории сверхзвуковых течений, позволяет выразить величину dp/dx через вторую производную от толщины вытеснения в вязкой части области течения по формуле

$$\frac{dp}{dx} = k\mathrm{M}_\infty p_\infty \frac{d\theta}{dx} \approx \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\mathrm{M}_\infty} \frac{d^2\delta^*}{dx^2}, \qquad (234)$$

непосредственно вытекающей из предыдущего содержания настоящего параграфа. В уравнениях асимптотической теории возникает при этом член, содержащий «старшую» вторую производную по x от неизвестной функции $\delta^*(x)$, что требует задания второго граничного условия по переменной x в точке, расположенной *вниз* по течению за рассматриваемой особой точкой пограничного слоя.

Этот существенный факт приводит к тому, что возмущения, возникающие за точкой отрыва, оказывают влияние на выше по течению расположенные области пограничного слоя, в чем и проявляется *эллиптический* характер исходных уравнений Навье — Стокса.

Расчеты распределений давления по поверхности тела в срывной зоне и вблизи ее по асимптотическим теориям приводят к хорошему совпадению с существующими экспериментальными данными.

Мы лишены возможности в настоящем общем курсе останавливаться на изложении разнообразных методов асимптотических представлений решений уравнений Навье — Стокса и отсылаем интересующихся к соответствующим обзорам [1]).

Изложенные соображения, поясняющие механизм передачи резких изменений во внешнем потоке (падение ударной волны на пограничный слой, отрыв пограничного слоя, угловая точка на поверхности тела) по ламинарному пограничному слою вверх по потоку, описывают широкий класс явлений как в сверхзвуковом и гиперзвуковом, так и в дозвуковом движениях газа. Аналогичные по общей структуре процессы имеют, как уже об этом упоминалось в гл. XII, место и в пограничных слоях в потоках малых скоростей. Желая подчеркнуть характерную особенность всей этой группы явлений, заключающихся в возможности всесторонней, как вниз так и вверх по течению, передачи возмущений в пограничном слое и их обратного влияния на внешний поток, для такого рода движений используют ранее упомянутый термин *течения со свободным взаимодействием* [2]).

Вклад советских ученых в эту новую, актуальную и быстро растущую область общей теории пограничного слоя бесспорно велик. Имена исследователей, особенно много сделавших для ее прогресса, а также ссылки на опубликованные ими работы можно найти в тех из только что цитированных обзоров, которые были составлены советскими авторами.

---

[1]) Brown S. N, Stewartson K Laminar separation.— Ann. Rev. of Fluid Mech, 1969, v. 1, p. 45—72; Ann. Rev. Inc. Palo Alto, California, USA и в третьем томе того же ежегодника за 1971 г.: Mikhailov V. V., Neiland V. Ya., Sychev V. V. The theory of viscous hypersonic flow, p. 371—396. Особенно рекомендуем вышедшую в русском переводе монографию: Чжен П. Отрывные течения. Т. 1—3.— М.: Мир, 1972—1973, с обзором А. И. Голубинского, Г. И. Майкапара и В. Я. Нейланда «Новые результаты исследований отрывных течений», помещенным в 3-м томе.

[2]) Теория течений со свободным взаимодействием в случае *турбулентного* пограничного слоя разработана значительно меньше. С состоянием вопроса можно ознакомиться по книге. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения.— М.: Наука, 1979.

§ 151. Турбулентный пограничный слой на пластинке, продольно обтекаемой газом

Вопрос о влиянии сжимаемости газа на *возникновение турбулентности*, так же как и на механизм *установившейся турбулентности*, еще мало изучен. Теоретические работы по устойчивости ламинарного пограничного слоя при больших скоростях показывают, что при прочих равных условиях с возрастанием числа M_∞ устойчивость ламинарного слоя ослабевает; это надо понимать в том смысле, что с ростом M_∞ должно уменьшаться нижнее критическое число $Re_{кр}$, начиная с которого возмущения в слое перестают затухать.

Однако опыты [1]), подтверждая правильность этого положения примерно до $M_\infty = 3{,}5$, показывают, что при дальнейшем росте M_∞ явление развивается в *противоположном направлении.*

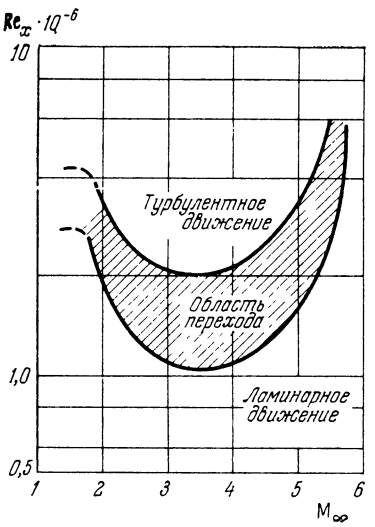


Рис. 305

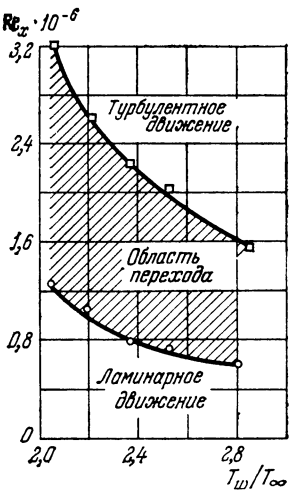


Рис. 306

На рис. 305 приведены экспериментальные данные по изменению с ростом числа M_∞ нижнего критического числа Рейнольдса, соответствующего точке потери устойчивости ламинарного слоя, т. е. началу переходной области, и числа Рейнольдса в точке, за которой имеет место уже развитое турбулентное движение (конец переходной области).

Как следует из приведенных графиков, примерно при $M_\infty = 3{,}5$ достигается максимальное смещение границ переходной области вверх по потоку и максимальная ширина самой области. При дальнейшем росте M_∞ (до $M_\infty = 5{,}8$) границы смещаются *вниз по потоку*, и, по-видимому, имеют тенденцию продолжать смещаться в том же направлении при бо́льших M_∞. Этот факт очень важен с точки зрения решения вопроса о структуре пограничного слоя на поверхности тел, движущихся с большими числами M_∞, без чего, в свою очередь, невозможен сколько-нибудь точный расчет сопротивления и теплоотдачи тел.

Причина расхождения теоретических исследований с опытом лежит в *незаконченности теории устойчивости ламинарного слоя* в сжимаемой жидкости при больших скоростях. В последнее время в литературе (см. только что цитированную статью) высказываются сомнения насчет точности этой теории, в частности в связи с отсутствием до сих пор учета

[1]) Korkegi R. Transition studies and skin-friction measurements on an insulated flat plate at a Mach number of 5,8.— Journ. of the Aeron. Sci., Febr. 1956, v. 23, № 2, p. 97—107.

влияния числа M_∞ на длины волн распространения возмущений и рост их амплитуды при больших сверхзвуковых скоростях. Как показывают опыты, возмущения, созданные в потоке, например, при помощи турбулизирующих решеток, при больших значениях M_∞ почти мгновенно *затухают*, что говорит о *повышенной устойчивости ламинарных течений* при этих значениях M_∞. Можно думать, что в такого рода условиях приведенные ранее соображения об отрывном происхождении явления перехода ламинарного слоя в турбулентный уже становятся несправедливыми. Вероятно, в этом случае причиной перехода служит только потеря устойчивости движения в ламинарном слое, начало которой при больших числах M_∞ затягивается в область значительных по величине рейнольдсовых чисел. Приведенные соображения нуждаются еще в систематической экспериментальной проверке.

Дестабилизирующее влияние на ламинарный пограничный слой оказывает подвод тепла через обтекаемую поверхность и, наоборот, стабилизирующее влияние — теплоотвод от поверхности тела. Этот, по-видимому, бесспорный факт доказан теоретически и экспериментально[1]). На рис. 306 приведен график, иллюстрирующий это положение результатами опытов Хиггинса и Паппаса[2]) над пластиной при $M_\infty = 2{,}40$.

В настоящее время теория устойчивости движений газа в ламинарном пограничном слое при больших до- и сверхзвуковых скоростях продолжает развиваться. Не имея возможности изложить результаты этого специального раздела и указать значительную по объему литературу в этой области, отошлем читателя к цитированному в конце § 118 обзору С. А. Гапонова и В. Я. Левченко в «Успехах механики». Результаты обширных теоретических и экспериментальных исследований ученых Сибирского отделения АН СССР в этом направлении получили обобщение в докторской диссертации С. А. Гапонова «Развитие возмущений в сверхзвуковом пограничном слое».

Сжимаемость газа при $M_\infty \leqslant 1$ оказывает слабое действие на механизм турбулентного обмена. Опыты советских исследователей (Г. А. Варшавский, А. А. Гухман, Н. В. Илюхин, В. Л. Лельчук, В. Н. Тарасова), относящиеся к 1933—1938 гг., так же как и более поздние опыты зарубежных ученых (Фрёссель, Юнг, Кинен и Нейман), показали, что при дозвуковых скоростях можно с успехом пользоваться теми же степенными или логарифмическими формулами сопротивления, как и для несжимаемой жидкости, если под скоростью и плотностью понимать их определенным образом осредненные по сечению трубы значения[3]). Теоретически в бесскачковом потоке такая возможность сохраняется с достаточным приближением и для не слишком больших сверхзвуковых скоростей ($M \leqslant 1{,}7$)[4]), однако в действительности сверхзвуковые движения в трубах сопровождаются образованием сложных систем скачков уплотнения, которые не позволяют рассматривать поток как одномерный и пользоваться представлением об установившемся турбулентном движении.

---

[1]) Van Driest E. Calculation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid on a flat plate with heat transfer.— Journ. Aeron. Sci., 1952, v. 19, № 12, p. 801; Shapiro N. Effects of pressure gradient and heat transfer on a stability of the compressible laminar boundary layer.— Journ. Aeron. Sci., 1956, v. 23, № 1, p. 81—83

[2]) Цитируем по монографии: Shapiro A. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow V. 2.— N. Y., 1953, p. 1077.

[3]) См. монографию: Гухман А. А., Илюхин Н. В. Основы учения о теплообмене при течении газа с большой скоростью — М.: Машгиз, 1951, где можно найти критический обзор большинства советских и зарубежных исследований по этому вопросу и подробную библиографию. В монографии приведены также удобные для практических расчетов степенные формулы сопротивления и теплоотдачи труб.

[4]) Deissler R. Analytical and experimental investigation of adiabatic turbulent flow in smooth tubes — NACA Tech. Note, 1950, № 2138.

Движение газа в турбулентном пограничном слое с большими до- и сверхзвуковыми скоростями представляет актуальную проблему современной аэродинамики. Пути практического решения этой проблемы лежат в обобщении на случай движения газа с большими скоростями эмпирических и полуэмпирических теорий турбулентности в несжимаемой жидкости. Следует заметить, что опытная проверка возможности применения такого рода теорий для движения газа с большими скоростями стала вполне возможной в связи со значительным развитием техники эксперимента в сверхзвуковых аэродинамических трубах и в полете. Произведенное сравнение теоретических и экспериментальных результатов показало, что при помощи эмпирических и полуэмпирических методов можно установить вполне удовлетворяющие практику закономерности.

Остановимся на рассмотрении турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой газом *гладкой пластине*. Довольствуясь сначала случаем *теплоизолированной* пластины и оставляя в стороне вопрос о форме профилей скорости и температуры в сечениях слоя, поставим себе целью составление *эмпирической* формулы зависимости коэффициента местного сопротивления c_f от местного рейнольдсова числа $\mathbf{Re}_x$. Для этого используем известные эмпирические связи между c_f и $\mathbf{Re}_x$ в *изотермическом* движении *несжимаемой* жидкости. В отличие от этого движения, где константы μ и ρ одинаковы во всем потоке, в рассматриваемом случае величины μ и ρ меняются в зависимости от изменения температуры по сечению слоя. Принимать μ и ρ соответствующими температуре T_∞ набегающего потока нет никаких оснований, так как, очевидно, вблизи поверхности пластины газ имеет температуру T_w, при больших $\mathbf{M}_\infty$ значительно превосходящую T_∞. Относить μ и ρ к температуре поверхности T_w представляется более обоснованным[1]), но ясно, что при этом получится преувеличенное влияние температуры на вязкость и плотность газа. Естественно, является мысль отнести физические константы газа к некоторой средней температуре T_m, большей T_∞, но меньшей T_w. Таккер[2]) сделал простейшее допущение, положив T_m равным *среднему арифметическому температур* T_∞ и T_w

$$T_m = \frac{1}{2}(T_\infty + T_w).$$

Пользуясь в этом предположении формулой сопротивления (152) гл. XIII, будем иметь, обозначая индексом m значения констант газа при $T = T_m$,

$$\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_m U_\infty^2} = 0{,}0263\left(\frac{\rho_m U_\infty x}{\mu_m}\right)^{-1/7}, \tag{235}$$

причем ($p = \text{const}$)

$$\frac{\rho_m}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T_m}, \quad \frac{\mu_m}{\mu_\infty} = \left(\frac{T_m}{T_\infty}\right)^n. \tag{236}$$

Замечая, что нашей целью является разыскание связи между c_f и $\mathbf{Re}_x$, которые выражены при помощи заданных наперед характеристик

---

[1]) Впервые такое допущение было сделано Т. Карманом в докладе на конгрессе имени Вольта в Риме в 1935 г.: Карман Т. Проблема сопротивления в сжимаемой жидкости — В кн.: Газовая динамика.— М.: ГОНТИ, 1939, с. 58—59.

[2]) Tucker M Approximate calculation of turbulent boundary layer development in compressible flow — NACA Tech. Note, 1951, № 2337.

набегающего на пластину потока U_∞, ρ_∞, μ_∞, т. е.

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}, \quad \mathrm{Re}_x = \frac{\rho_\infty U_\infty x}{\mu_\infty}, \tag{237}$$

исключим из (235) ρ_m и μ_m на основании (236). Получим сначала

$$\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}\frac{\rho_\infty}{\rho_m} = 0{,}0263\left(\frac{\rho_\infty U_\infty x}{\mu_\infty}\right)^{-1/7}\left(\frac{\rho_\infty}{\rho_m}\right)^{1/7}\left(\frac{\mu_m}{\mu_\infty}\right)^{1/7}, \tag{238}$$

а затем

$$c_f \mathrm{Re}_x^{1/7} = 0{,}0263\left(\frac{T_\infty}{T_m}\right)^{6/7}\left(\frac{T_m}{T_\infty}\right)^{n/7} = 0{,}0263\left(\frac{T_\infty}{T_m}\right)^{\frac{6-n}{7}}. \tag{239}$$

Как известно, показатель степени n в законе зависимости коэффициента вязкости от температуры, в практическом диапазоне температур изменяющийся в пределах от 1 до 1/2, близок к 3/4; не будет большой ошибки, если для простоты положить $n=1$. Далее примем *коэффициент восстановления температуры* на поверхности пластины равным *единице*, т. е. при условии отсутствия теплоотдачи с поверхности пластины будем считать температуру пластины T_w равной температуре адиабатически и изэнтропически заторможенного газа, набегающего со скоростью U_∞ на пластину. Тогда получим

$$\frac{T_\infty}{T_m} = \frac{2T_\infty}{T_\infty + T_w} = \frac{2T_\infty}{T_\infty + T_\infty\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2\right)} = \frac{2}{2 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2}.$$

Подставляя это выражение в (239), найдем

$$c_f \mathrm{Re}_x^{1/7} = 0{,}0263\left(\frac{2}{2 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2}\right)^{6/7}. \tag{240}$$

Интегрируя по всей длине пластины, получим формулу коэффициента *полного* сопротивления

$$C_f \mathrm{Re}^{1/7} = 0{,}0307\left(\frac{2}{2 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2}\right)^{6/7}, \tag{241}$$

представляющую собой обобщение формулы (153) гл. XIII на случай газа.

Как следует из этих эмпирических формул, влияние числа M_∞ на коэффициенты местного и полного сопротивления не зависит от влияния числа Рейнольдса Re_x или Re, так что, принимая обычное обозначение индексом «0» величин при $\mathrm{M}_\infty = 0$, будем иметь

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{c_f}{c_{f0}} = \left(\frac{2}{2 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2}\right)^{6/7}. \tag{242}$$

На рис. 307 приводится сравнение формулы (242) — кривая I — с опытными данными различных авторов[1]). Верхний предел чисел M_∞ доведен почти до $\mathrm{M}_\infty = 8$, причем, как это следует из рис. 307, совпадение

[1]) На рис. 307 светлые кружки представляют результаты опытов Чепмена и Кестера (Chapman D. R, Kester R H Journ. Aero Sci., 1953, v. 20, № 7, p. 441—449), треугольники — опытов Колза (Coles D. Journ. Aero. Sci, 1954, v. 21, № 7, p. 433—449), черные точки — опытов Лобба, Винклера и Перша (Lobb R. K., Winkler E. M., Persh J Journ. Aero. Sci., 1955, v. 22, № 1, p. 1—10).

формулы Таккера с опытными материалами остается вполне удовлетворительным и при этих сравнительно больших значениях числа M_∞. На том же рисунке приводится кривая *II*, отвечающая использованию в качестве характерной средней температуры T_m температуры T_w поверхности пластины, т. е. кривая

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{c_f}{c_{f0}} = \frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2\right)^{1/2}}.$$

Эта кривая подтверждает ранее высказанное соображение о том, что применение температуры поверхности пластины в качестве средней температуры в пограничном слое должно приводить к преувеличению влияния сжимаемости воздуха (чи сла M_∞) на коэффициент сопротивления пластины.

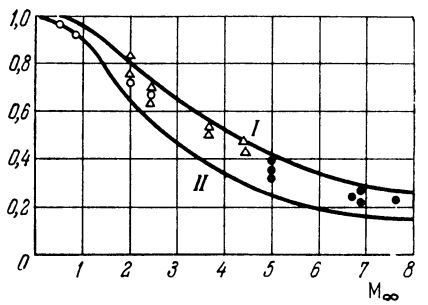


Рис. 307

Другой, также эмпирический, метод расчета турбулентного пограничного слоя в газовом потоке больших скоростей на продольно обтекаемой пластине был опубликован Д. Б. Сполдингом и С. В. Чи[1]). Этот метод, в отличие от предыдущего, может быть применен и при наличии теплоотдачи с поверхности пластины. В методе используются затабулированные эмпирические функции, что определяет простоту применения метода. Наличие двух процитированных распространенных литературных источников позволяет опустить изложение этого метода.

Переходя к *полуэмпирическим* методам, укажем, что они основывались на обобщении на случай потоков газа больших скоростей методов, предложенных в свое время основоположниками полуэмпирических теорий Прандтлем и Карманом для случая несжимаемой жидкости (§ 129).

В полуэмпирической теории турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе при больших скоростях исторически наметились два направления. Первое из них, открытое работой Ф. И. Франкля и В. В. Войшеля[2]), основывалось на *непосредственном переносе в газовую динамику формул полуэмпирической теории Кармана.* В дальнейшем по аналогичному пути пошел Ван-Дрист[3]).

В работах второго направления *использовались переменные Дородницына и предполагалось, что формулы полуэмпирических теорий турбулентности остаются справедливыми, если их составлять в этих переменных.* Ответ на вопрос о том, какое направление дает результаты, более близкие к действительности, мог дать только опыт при больших числах M, а ко времени появления обоих направлений опытные мате-

[1]) Сполдинг Д. Б., Чи С. В. Сопротивление в сжимаемом турбулентном пограничном слое на гладкой плоской пластине с теплопередачей и без нее.— Сб. переводов «Механика», 1964, № 6. См. также ранее уже цитированную монографию Ю. В. Лапина, с. 161—170.

[2]) Франкль Ф. И., Войшель В. В. Трение в турбулентном пограничном слое около пластинки в плоскопараллельном потоке сжимаемого газа при больших скоростях.— Труды ЦАГИ, 1937, № 321.

[3]) Van Driest E. R. Turbulent boundary layer in compressible fluids — Journ. of the Aeron. Sci., 1951, v. 18, № 3 и того же автора: Турбулентный пограничный слой при различных числах Прандтля.— В сб.: Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи.— М.: Энергоиздат, 1960, с. 216—229. В последней из указанных статей проводится приближенный учет влияния коэффициента восстановления.

риалы еще отсутствовали. При числах M, немного превышающих единицу, оба направления давали, естественно, мало отличающиеся друг от друга результаты. Лишь после того, как были получены данные по сопротивлению трения плоских поверхностей при больших числах M (доходящих почти до 8), стало ясно, что только первое направление дает правильные результаты.

В работе Франкля и Войшеля авторы непосредственно обобщили на случай газового потока метод Кармана, упростив его лишь допущением о постоянстве напряжения трения поперек пограничного слоя. Идя по этому пути, они сначала нашли форму профилей скорости в сечениях слоя, затем обычным способом получили так называемый «закон сопротивления», т. е. связь между местным коэффициентом трения и числом Рейнольдса пограничного слоя. Исключая это число Рейнольдса из уравнения «закона сопротивления» и уравнения импульсов, им удалось получить искомую связь между местным коэффициентом сопротивления и числом Рейнольдса, построенным по скорости набегающего потока и абсциссе данной точки на пластине.

Степень приближения, принятая Франклем и Войшелем, позволила им самим провести вычисления лишь до чисел M, мало превышающих единицу. Переход к бóльшим числам M потребовал бы, по-видимому, либо еще большего усложнения и без того сложной вычислительной методики этих авторов, либо непосредственного применения численных методов.

Покажем[1]), что при использовании формулы Кармана и в предположении постоянства напряжения трения поперек пограничного слоя существует более простой путь построения решения, не требующий предварительного введения понятий о числе Рейнольдса пограничного слоя и «законе сопротивления». Этот путь в значительной мере упрощает исследование задач о турбулентном пограничном слое в газовом потоке. Использование простого асимптотического разложения, уже примененного ранее в § 129 для несжимаемой жидкости, позволяет обобщить теорию Кармана сопротивления пластины в несжимаемой жидкости на случай газового потока с большими числами M.

Ограничимся случаем, когда *число Прандтля равно единице* ($\sigma=1$), и будем рассматривать обтекание пластины как теплоизолированной («пластинчатый термометр»), так и с отводом тепла.

Применим к задаче о турбулентном пограничном слое на пластине в потоке газа тот же прием, который был использован в § 129 для случая несжимаемой жидкости. В обозначениях этого параграфа

$$\varphi=\frac{u}{v_*},\quad h=\frac{U_\infty}{v_*},\quad \frac{u}{U_\infty}=\frac{\varphi}{h},\quad \eta=\frac{v_* y}{\nu_w}$$

формула Крокко (85) настоящей главы может быть легко преобразована к виду

$$\frac{T}{T_w}=1-\omega\left(\frac{\varphi}{h}\right)-\gamma\left(\frac{\varphi}{h}\right)^2, \tag{243}$$

где

$\omega=1-\dfrac{T_t}{T_w}$ ($\omega>0$ при нагреве поверхности и $\omega<0$ при охлаждении);

$\gamma=\dfrac{k-1}{2}M_\infty^2\dfrac{T_\infty}{T_w}$;

[1]) Лапин Ю. В., Лойцянский Л. Г. Применение метода Кармана к расчету турбулентного пограничного слоя на пластине в газовом потоке.— Труды ЛПИ, 1961, № 217.

$T_t = T_\infty \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)$ — температура термометра, равная температуре поверхности пластины T_w при отсутствии теплоотдачи ($\omega = 0$).

Замечая, что при постоянстве давления по сечению слоя имеет место равенство

$$\frac{\rho}{\rho_w} = \frac{T_w}{T} = \frac{1}{1 - \omega\left(\frac{\varphi}{h}\right) - \gamma\left(\frac{\varphi}{h}\right)^2}, \tag{244}$$

составим основное соотношение Кармана (185) гл. XIII, которое при наличии сжимаемости среды будет иметь вид

$$\frac{\varphi''}{\varphi'^2} = \frac{-\varkappa}{\sqrt{1 - \omega\left(\frac{\varphi}{h}\right) - \gamma\left(\frac{\varphi}{h}\right)^2}}. \tag{245}$$

Меняя, как и ранее в § 129, аргумент и функцию, получим вместо (245) уравнение

$$\frac{\ddot{\eta}}{\dot{\eta}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{1 - \omega\left(\frac{\varphi}{h}\right) - \gamma\left(\frac{\varphi}{h}\right)^2}}, \tag{246}$$

первым интегралом которого служит равенство

$$\dot{\eta} = C \exp\left(\frac{\varkappa h}{\sqrt{\gamma}} \arcsin \frac{\sqrt{\gamma}\frac{\varphi}{h} + \frac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\gamma}}}\right). \tag{247}$$

Для определения константы C приходится задаваться значением производной $d\varphi/d\eta$ на границе ламинарного подслоя со стороны турбулентного ядра. Простейшим допущением является требование, чтобы эта величина имела то же значение $f = 1/(\varkappa\alpha)$, что и в случае малых скоростей, т. е. чтобы производная $\varphi'(\alpha+0)$ не зависела от коэффициентов γ и ω. Такое допущение эквивалентно пренебрежению изменением плотности на протяжении ламинарного подслоя; оно приводит к следующему результату ($\bar{u} = \varphi/h$):

$$\dot{\eta} = \frac{1}{f} \exp\left[\frac{\varkappa h}{\sqrt{\gamma}}\left(\arcsin \frac{\sqrt{\gamma}\bar{u} + \frac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\gamma}}} - \arcsin \frac{\sqrt{\gamma}\frac{\alpha}{h} + \frac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\gamma}}}\right)\right]. \tag{248}$$

Легко убедиться, что при $\omega = \gamma = 0$ правая часть этого равенства совпадает с соответствующим выражением (187) для несжимаемой жидкости (§ 129).

Толщины вытеснения и потери импульса пограничного слоя в случае газа выразим равенствами

$$\delta^* = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy. \tag{249}$$

Используя равенства (244) и (248) и производя преобразования, аналогичные проведенным в § 129, получим следующее выражение для

толщины потери импульса:

$$\delta^{**}=\frac{(1-\omega-\gamma)\,h^2\nu_w}{fU_\infty}\int\limits_0^1\frac{\bar u\,(1-\bar u)}{1-\omega\,\bar u-\gamma\bar u^2}\times$$

$$\times\exp\left[\frac{\varkappa h}{\sqrt{\gamma}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{\gamma}\,\bar u+\dfrac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4\gamma}}}-\arcsin\frac{\sqrt{\gamma}\,\dfrac{\alpha}{h}+\dfrac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4\gamma}}}\right)\right]d\bar u. \quad (250)$$

Вводя новую переменную

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\arcsin\frac{\sqrt{\gamma}\,\bar u+\dfrac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4\gamma}}}, \quad (251)$$

преобразуем (250) к виду

$$\delta^{**}=\frac{(1-\omega-\gamma)\,\nu_w h^2\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4\gamma}}}{fU_\infty\gamma}\int\limits_{\psi_w}^{\psi_\infty}\frac{\exp\left[\varkappa h\,(\psi-\psi_в)\right]}{\cos\sqrt{\gamma}\,\psi}\times$$

$$\times(\sin\sqrt{\gamma}\,\psi-\sin\sqrt{\gamma}\,\psi_w)(\sin\sqrt{\gamma}\,\psi_\infty-\sin\sqrt{\gamma}\,\psi)\,d\psi, \quad (252)$$

где положено

$$\psi_\infty=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\arcsin\frac{\sqrt{\gamma}+\dfrac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4\gamma}}},\quad \psi_w=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\arcsin\frac{\dfrac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4\gamma}}}, \quad (253)$$

$$\psi_в=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\arcsin\frac{\sqrt{\gamma}\,\dfrac{\alpha}{h}+\dfrac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4\gamma}}}.$$

Для вычисления определенного интеграла, стоящего в правой части равенства (252), вновь применим асимптотическое разложение (189) гл. XIII. Интегрируя с точностью до члена, содержащего $\varkappa^3h^3$ в знаменателе, и представляя приближенно $\psi_в$ в виде

$$\psi_в=\psi_w+\frac{\alpha}{h}, \quad (254)$$

получим следующее выражение для толщины потери импульса:

$$\delta^{**}=\frac{e^{-\varkappa\alpha}\,(1-\omega-\gamma)\,\nu_w}{f\varkappa^2U_\infty}e^{\varkappa h(\psi_\infty-\psi_w)}\left(1-\frac{2-1{,}5\omega-\gamma}{\varkappa h\sqrt{1-\omega-\gamma}}\right). \quad (255)$$

Аналогичным способом может быть получено выражение для толщины вытеснения (249)

$$\delta^{*}=\frac{e^{-\varkappa\alpha}\,(1+\gamma)\,\nu_w}{f\varkappa^2U_\infty}e^{\varkappa h(\psi_\infty-\psi_w)}\left[1-\frac{\gamma\left(3-1{,}5\omega-\gamma+\dfrac{\omega}{2\gamma}\right)}{\varkappa h\,(1+\gamma)\sqrt{1-\omega-\gamma}}\right]. \quad (256)$$

Составляя, согласно последним двум равенствам, отношение $\delta^*/\delta^{**}=H$, найдем

$$H=\frac{(1+\gamma)\left[1-\dfrac{\gamma\left(3-1{,}5\omega-\gamma-\dfrac{\omega}{2\gamma}\right)}{\varkappa h(1+\gamma)\sqrt{1-\omega-\gamma}}\right]}{(1-\omega-\gamma)\left[1-\dfrac{2-1{,}5\omega-\gamma}{\varkappa h\sqrt{1-\omega-\gamma}}\right]}. \tag{257}$$

В предельном случае течения несжимаемого газа ($\gamma=0$) и отсутствия теплопередачи ($\omega=0$) получаем выражение для H, полностью совпадающее с соответствующим равенством в § 129.

Приняв для толщины потери импульса более грубое приближение (пренебрегая вторым слагаемым в последней круглой скобке равенства (255)), подставим ее выражение

$$\delta^{**}=\frac{e^{-\varkappa\alpha}\nu_w(1-\omega-\gamma)}{f\varkappa^2U_\infty}e^{\varkappa h(\psi_\infty-\psi_w)} \tag{258}$$

в интегральное соотношение импульсов. После простых преобразований получим уравнение

$$\frac{e^{-\varkappa\alpha}}{f\varkappa^2}h^2d\left[e^{\varkappa h(\psi_\infty-\psi_w)}\right]=d\,\mathrm{Re}_{xw};\quad \mathrm{Re}_{xw}=\frac{U_\infty x}{\nu_w}. \tag{259}$$

Взяв интеграл от обеих частей этого уравнения и используя граничное условие $\mathrm{Re}_{xw}=0$ при $h=0$, получим в том же приближении

$$\frac{e^{-\varkappa\alpha}}{f\varkappa^2}h^2e^{\varkappa h(\psi_\infty-\psi_w)}=\mathrm{Re}_{xw}. \tag{260}$$

Равенство (260) переходит в пределе в соответствующее выражение для *несжимаемой жидкости* (индекс «0»)

$$\frac{e^{-\varkappa\alpha}}{f\varkappa^2}h_0^2e^{\varkappa h_0}=\mathrm{Re}_{x0}. \tag{261}$$

Далее, разделим обе части равенства (260) соответственно на обе части равенства (261); тогда будем иметь

$$\left(\frac{h}{h_0}\right)^2e^{\varkappa h,\psi_\infty-\psi_w)-\varkappa h_0}=\frac{\rho_w\mu_\infty}{\rho_\infty\mu_w}. \tag{262}$$

Переходя в последнем равенстве от h к c_f и логарифмируя, получим

$$-\lg\frac{c_f}{c_{f0}}+\frac{\varkappa\sqrt{2}\lg e}{\sqrt{c_{f0}}}\left[\frac{(\psi_\infty-\psi_w)\sqrt{1-\omega-\gamma}}{\sqrt{\dfrac{c_f}{c_{f0}}}}-1\right]=\lg\frac{\mu_\infty}{\mu_w}. \tag{263}$$

Принимая для c_{f0} степенную зависимость от числа Re_{x0}

$$c_{f0}=0{,}0263\,\mathrm{Re}_{x0}^{-1/7} \tag{264}$$

и вводя обозначения

$$F=\frac{0{,}25}{\sqrt{c_{f0}}}=1{,}55\,\mathrm{Re}_{x0}^{1/14},\quad G=\lg\frac{\mu_\infty}{\mu_w},$$

$$K=\sqrt{\frac{1-\omega-\gamma}{\gamma}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{\gamma}+\dfrac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4\gamma}}}-\arcsin\frac{\dfrac{\omega}{2\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4\gamma}}}\right), \tag{265}$$

получим зависимость коэффициента трения от параметров набегающего потока и условий на стенке в следующей неявной форме:

$$-\lg\frac{c_f}{c_{f0}}+FK\sqrt{\frac{c_{f0}}{c_f}}=F+G. \tag{266}$$

Это уравнение можно свести к трансцендентному уравнению с одним параметром

$$\lg N+N=L, \tag{267}$$

если положить

$$L=\lg\frac{FK}{2}+\frac{F+G}{2},\quad N=\frac{FK}{2\sqrt{\dfrac{c_f}{c_{f0}}}}. \tag{268}$$

Таким образом, выражение для коэффициента трения запишется в виде

$$\frac{c_f}{c_{f0}}=\frac{F^2K^2}{4N^2}, \tag{269}$$

где F и K — известные функции, а N определяется из решения уравнения (267).

Как показали расчеты, уравнение (267) может быть заменено приближенным, более простым равенством

$$N=0{,}123+0{,}820L, \tag{270}$$

которое оказывается достаточно точным в широком диапазоне изменения всех параметров. В этом случае равенство (269) принимает вид

$$\frac{c_f}{c_{f0}}=\frac{F^2K^2}{4\left[0{,}123+0{,}820\left(\lg\dfrac{FK}{2}+\dfrac{F+G}{2}\right)\right]^2}. \tag{271}$$

Для определения величины G необходимо задаться законом изменения вязкости с температурой. В качестве такого закона может быть принята либо формула Саттерлэнда, либо степенная зависимость вязкости от температуры. В последнем случае выражение для G будет

$$G=n\lg\frac{T_\infty}{T_w},$$

где n — показатель степени в законе $\mu\sim T^n$. Небезынтересно провести сравнение изложенного метода с методом Ван-Дрийста, основанным на переносе в газовую динамику формулы Прандтля. После приведения формулы Ван-Дрийста к виду (266) выясняется, что отличие заключается в величине G, которая при принятии степенного закона изменения вязкости выражается равенством

$$G=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lg\frac{T_\infty}{T_w}.$$

При рассмотрении равенства (271) обнаруживается, что при больших значениях числа Рейнольдса величина отношения c_f/c_{f0} очень *слабо зависит от числа Рейнольдса.* Действительно, устремляя число Рейнольдса к бесконечности ($\mathrm{Re}_{x0}\to\infty$) или, что то же, F к бесконечности, получим следующую предельную формулу для отношения c_f/c_{f0}:

$$\frac{c_f}{c_{f0}}=K^2.$$

Эта формула может оказаться полезной при проведении приближенных расчетов сопротивления трения при больших числах Рейнольдса.

По изложенному методу были проведены расчеты местного коэффициента трения. Результаты расчета для случая отсутствия теплопередачи ($T_w/T_t=1$) и сравнение их с опытными данными различных авторов показаны на рис. 308. Три кривые на этом рисунке соответствуют трем различным значениям числа Рейнольдса (10^6, 10^7 и 10^8).

Как явствует из рисунка, расчетные и опытные данные хорошо совпадают вплоть до больших чисел M_∞. Влияние температурного фактора на коэффициент трения показано на рис. 309.

Рассмотрим два имеющих практическое значение частных случая.

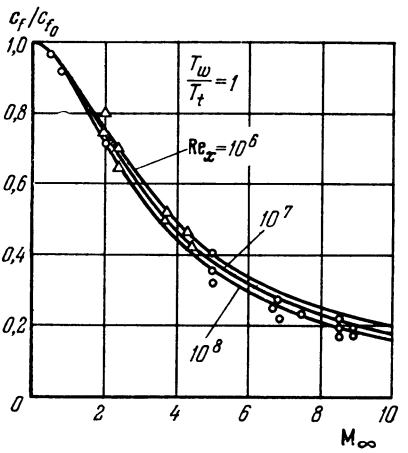


Рис. 308

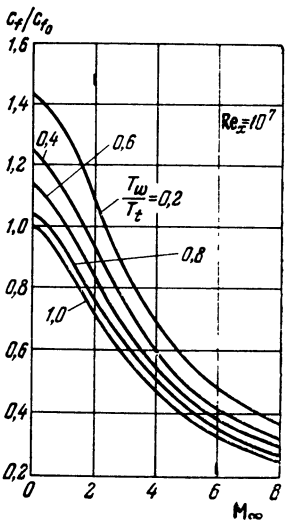


Рис. 309

1) *Теплоизолированная пластина.*

В этом случае температура стенки T_w равна температуре торможения:

$$T_w = T_\infty\left(1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2\right), \tag{272}$$

а величины ω и γ соответственно равны

$$\omega=0,\quad \gamma=\frac{\frac{k-1}{2}M_\infty^2}{1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2}. \tag{273}$$

Определяющая процесс функция K будет выглядеть так:

$$K=\sqrt{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\arcsin\sqrt{\gamma}. \tag{274}$$

2) *Пластина с подогревом или охлаждением при малых скоростях.*

В этом случае, переходя к пределу при $\gamma=0$, получим

$$K=\frac{2\left(\sqrt{1-\omega}+\omega-1\right)}{\omega}. \tag{275}$$

В предельном случае течения несжимаемой жидкости при отсутствии теплоотдачи ($\omega=\gamma=0$) $K=1$.

Изложенное решение относится к числу *полуэмпирических.* Напомним, что формула Кармана, положенная в основу вывода уравнения

(245), становится неверной вблизи внешней границы пограничного слоя, где все последовательные производные по нормальной к поверхности пластинки координате от осредненной скорости стремятся к нулю. Неверно также допущение *о постоянстве напряжения* трения во всей области пограничного слоя. Как это непосредственно следует из уравнений Рейнольдса турбулентного пограничного слоя

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial \tau}{\partial y},\quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0, \tag{276}$$

при условии $dp/dx=0$, отвечающем рассматриваемому случаю продольного обтекания пластинки, будет

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)_{y=0}=0. \tag{277}$$

Дифференцируя обе части первого уравнения системы (276) по y и раскрывая производные во втором уравнении, убедимся, что при $y=0$ будет иметь место система равенств

$$\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]_{y=0}=\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}\right)_{y=0},$$

$$\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0}=0,$$

из которой сразу следует, что

$$\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0. \tag{278}$$

Наличие равенств (277) и (278) позволяет считать, что при *малых* расстояниях от поверхности пластины можно приближенно полагать $\tau=\text{const}=\tau_w$. Это в известной степени оправдывает сделанное ранее допущение, но, конечно, ограничивает справедливость его «пристенной» областью. Более подробное обоснование изложенного полуэмпирического метода и обсуждение его результатов можно найти в § 14 (с. 135—161) монографии Ю. В. Лапина[1]).

Как следует из сравнения результата расчетов с опытными материалами, принятое приближение достаточно хорошо передает влияние числа Маха набегающего потока и температурного фактора на такую характеристику пограничного слоя, как отношение коэффициента поверхностного трения в газовом потоке больших скоростей к соответствующему значению этого коэффициента при отсутствии влияния сжимаемости ($M_\infty=0$). Подчеркнем, что в этом отношении ошибки, возникающие при отдельном определении числителя и знаменателя, могут, в известной степени, скрадываться, чем, по-видимому, и объясняется хорошее совпадение результатов расчета с экспериментальными данными, показанное на рис. 308.

Вопрос о тепловых характеристиках пограничного слоя остался в стороне, но мог быть легко изучен благодаря наличию равенства (243), справедливость которого интуитивно оправдывается допущением о равенстве числа Прандтля единице. При отсутствии этого допущения дело значительно осложняется в связи с необходимостью введения *коэффициента восстановления*. Напомним (§ 144), что в случае ламинарного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине газом с большими сверхзвуковыми скоростями коэффициент восстановления $\vartheta_0(0)/4$ определялся аналитическим выражением (71). В случае турбулентного по-

[1]) Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа.— М.: Наука, 1982.

граничного слоя такого простого решения этого вопроса не существует и обычно довольствуются экспериментальными данными, согласно которым коэффициент восстановления лежит в пределах 0,88—0,90 и не зависит от чисел Рейнольдса и Маха.

§ 152. Турбулентный пограничный слой в газовом потоке при наличии продольного градиента давлений

Проблема расчета турбулентного пограничного слоя в газовом потоке в том общем случае, когда имеется продольный градиент давлений, представляет большую сложность. По сравнению с подобной задачей для несжимаемой жидкости, уже один только факт переменности плотности и появления новой неизвестной — температуры, влияющей на физические «константы»: коэффициенты вязкости и теплопроводности,— говорит о дополнительных трудностях в постановке и решении этой задачи. Если можно было сомневаться в *завершенности* проблемы расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости (§ 138—140), то в рассматриваемом сейчас случае газового потока больших скоростей становится ясным, что аналогичная проблема еще далека от решения. Вот почему в настоящем параграфе приходится довольствоваться лишь указаниями на те пути, по которым происходят поиски решения этой актуальной задачи. Имея в виду практическую сторону возможных технических применений, остановимся лишь на методах, основанных на известной уже нам по предыдущему (§ 135, 137) «двухслойной схеме» с разбиением потока на *внутреннюю* область, подчиненную «закону стенки», и *внешнюю* — «закону следа». Удовлетворимся в дальнейшем случаем плоского стационарного «пристенного» турбулентного пограничного слоя в однородном газовом потоке при отсутствии объемных сил.

Вспомним, что вывод общих уравнений, описывающих турбулентное движение, начинался с установления *законов осреднения* скоростей и других характеристик действительного потока, после чего следовало применение этих законов к осреднению уравнений Навье — Стокса, а уже затем упрощение полученных уравнений применительно к задаче о турбулентном пограничном слое.

Уравнения динамики вязкого газа были выведены в § 141. Их осреднение выполняется обычным способом предварительного разложения величин в потоке на *осредненные* и *пульсационные* слагаемые с последующим осреднением представленных в таком виде уравнений газовой динамики. Опустим этот вывод, так же как и дальнейшие упрощения уравнений по методу пограничного слоя [1]).

Отметим лишь, что с целью упрощения окончательного вида уравнений, вместо введенного в § 120 непосредственного осреднения пульсирующих во времени действительных величин φ по закону

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi \, dt, \tag{279}$$

будем пользоваться более сложным, но, как оказывается, упрощающим уравнения осреднением «взвешенным по плотности»

$$\widetilde{\varphi} = \int_{t-T/2}^{t+T/2} \rho\varphi \, dt \Big/ \int_{t-T/2}^{t+T/2} \rho \, dt, \tag{280}$$

[1]) См. ранее цитированную монографию Ю. В. Лапина, где подробно изложен этот вывод.

которое, согласно (279), можно еще определить как отношение

$$\tilde{\varphi}=\frac{\overline{\rho\varphi}}{\bar{\rho}}. \tag{281}$$

Представляя действительную (пульсирующую) величину φ как сумму осредненной по формулам (280) или (281) $\tilde{\varphi}$ и пульсации, которую, в отличие от соответствующей осреднению (279), будем обозначать двумя штрихами φ'', получим

$$\varphi=\tilde{\varphi}+\varphi''. \tag{282}$$

Отметим, что при осреднении по (279) будет

$$\overline{\rho\varphi}=\overline{(\bar{\rho}+\rho')(\tilde{\varphi}+\varphi'')}=\overline{\bar{\rho}\tilde{\varphi}+\rho'\tilde{\varphi}+\rho\varphi''}=\bar{\rho}\tilde{\varphi}+\overline{\rho'\tilde{\varphi}}+\overline{\rho\varphi''},$$

причем второй член справа $\overline{\rho'\tilde{\varphi}}=\bar{\rho}'\tilde{\varphi}=0$, а по определению (281) найдем, что

$$\overline{\rho\varphi}=\overline{\rho}\tilde{\varphi};$$

тогда предыдущее равенство перейдет в следующее:

$$\overline{\rho\varphi'}=0, \tag{283}$$

которое заменяет присущее осреднению (279) равенство $\overline{\varphi'}=0$ и имеет основное значение для упрощения уравнений переноса. Отметим, что для пульсаций φ'' имеет место условие

$$\overline{\varphi''}\neq 0.$$

В принятых сейчас обозначениях, опуская знак осреднения повсюду, кроме членов с произведениями пульсаций, будем иметь следующую систему уравнений плоского стационарного турбулентного пограничного слоя в газовом потоке:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0,\\ \rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial\tau}{\partial y},\\ \rho u\frac{\partial h_0}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h_0}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(q+u\tau),\end{gathered} \tag{284}$$

где $h_0=h+u^2/2$ — полная энтальпия, а под τ и q понимаются *полные* напряжение трения и поток тепла, содержащие в себе как ламинарные (молекулярные), так и турбулентные (молярные) составляющие и учитывающие взаимодействие молекулярного и молярного обменов.

Последнее уравнение системы (284) может быть заменено на уравнение относительно энтальпии h

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}=u\frac{dp}{dx}+\frac{\partial q}{\partial y}+\tau\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{285}$$

Предполагая, что внешний поток (индекс «e») изэнтропический, а на внешней границе пограничного слоя справедливо уравнение Бернулли (U — скорость на внешней границе пограничного слоя, в индексе «e» нет необходимости)

$$\frac{dp}{dx}=-\rho_e U\frac{dU}{dx}, \tag{286}$$

запишем граничные условия в обычном виде:

$$u=v=0, \quad h_0=h_w \qquad \text{при } y=0,$$
$$u\to U, \qquad h_0\to h_e+\frac{1}{2}U^2 \text{ при } y\to\infty. \tag{287}$$

Для замыкания системы (284) пользуются следующими формулами турбулентных составляющих напряжения трения и потока тепла

$$\tau_t=-\rho\overline{u''v''}=\mu_t\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{288}$$

$$q_t=-\rho\overline{v''h''}=\lambda_t\frac{\partial T}{\partial y}. \tag{289}$$

Первая из них — это формула Буссинеска, вторая — формула Фурье.

В дальнейшем рассмотрим отдельно *внутреннюю* и *внешнюю* подобласти турбулентного пограничного слоя.

Как это уже следовало из предыдущего, *полуэмпирические гипотезы турбулентности сохраняют свою применимость при числах Маха, ненамного превосходящих единицу.* Примем еще в качестве допущения, что эти гипотезы *не зависят от выбора способа осреднения*, иными словами, что, пользуясь теорией Прандтля «пути смешения» как для напряжения турбулентного трения τ_t, так и для турбулентного потока тепла q_t, можно положить

$$\mu_t=\rho l^2\frac{\partial u}{\partial y}=\rho\varkappa^2y^2\left[1-e^{-yv_*/(\nu A)}\right]^2\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\lambda_t=\rho c_p l_q^2\frac{\partial u}{\partial y}=\rho c_p\varkappa_q^2y^2\left[1-e^{-yv_*/(\nu A_q)}\right]^2\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{290}$$

В последнем равенстве $\varkappa_q$ и A_q — постоянные, характеризующие турбулентный поток тепла q_t, отличные от $\varkappa=0{,}4$ и $A=26$. По опытам Мейера и Ротта[1]) постоянные $\varkappa_q$ и A_q определяются равенствами

$$\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_q}\right)^2=0{,}86, \quad \frac{A_q}{A}=1{,}25. \tag{291}$$

Величину A для газового потока предлагается определять по формуле[2])

$$A=26\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{1/2}\left[1-11{,}8\left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right)\left(\frac{\rho_e}{\rho_w}\right)^2\frac{\mu_eU}{\rho_ev_*^3}\frac{dU}{dx}\right]^{-1/2}.$$

Вопрос о численном расчете *внутренней* области турбулентного пограничного слоя на основе приведенных соображений, естественно, нуждается в проверке путем сравнения с опытными данными, которые пока еще немногочисленны.

Более сложна проблема расчета *внешней* области, где применение формулы Клаузера, даже с модификацией Ю. В. Лапина и М. Х. Стрельца, остается до настоящего времени спорным и ожидает появления новых исследований. Также неясен метод сращивания внутренней и внешней областей.

---

[1]) Meier H. V, Rotta J. C. Experimental and theoretical investigations of temperature distribution in supersonic boundary layer.— AIAA Paper, 1970, № 744.

[2]) Cebeci T., Smith A. M. O. Analysis of turbulent boundary layers — N. Y.: Acad Press, 1974.

Использование двухслойной схемы имеет место в капитальной работе Ривза[1]), который отказался от применения во внешней области гипотезы Клаузера, заменив ее тремя интегральными соотношениями: количества движения, первого момента скорости и энергии. Результаты расчета по методу Ривза показали хорошее совпадение с экспериментальными профилями скорости в сечениях пограничного слоя и с распределением местного трения по поверхности тела. Тщательный критический анализ состояния теории турбулентного пограничного слоя в газовых потоках можно найти в § 1 ранее цитированного обзора А. С. Гиневского и др. В указанном параграфе, составленном А. Н. Секундовым, дана характеристика существующих методов расчета, достаточно наглядно рисующая современное положение этого вопроса. Особо рекомендуем для ознакомления п. 5, посвященный эффекту влияния сжимаемости газа (с. 173 и начало с. 174) на процессы развития турбулентного пограничного слоя. Проблема расчета турбулентного пограничного слоя в газовом потоке еще далека от той завершенности, которая позволила бы поместить сколько-нибудь детальное ее изложение в учебном руководстве.

---

[1]) Reews B. L. Tho-layer model of turbulent boundary layer.— AIAA Journ, 1974, v. 12, № 7, p. 932—939 (имеется русский перевод).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрамович Г. Н. 115, 246, 635, 639, 647
Абрамян Б. Л. 388
Акатнов Н. И. 521
Аккерет (Ackeret J.) 224
Албер (Alber J. E.) 719
Алексеев Б. В. 798, 803
Альбринг (Albring W.) 52, 615
Анфимов Н. А. 806
Аравин В. И. 431, 432
Арутюнян Н. Х. 388
Асковић (Ascović R.) 575
Астарита Дж. 369

Бабенко К. И. 489
Бай Ши-и (Pai S. I.) 807
Бам-Зеликович Г. М. 679
Барнетт (Barnett D.) 758
Басин А. М. 330
Батчелор (Batchelor G. K.) 368, 428
Бахметьев Б. А. 712
Бекер (Becker R.) 746
Бекингем (Buckingham E.) 385
Белащенко Д. К. 422
Белов И. А. 480, 485, 615
Белоцерковский О. М. 243, 358, 459, 490, 494, 748
Белоцерковский С. М. 319, 330
Беркер (Berker R.) 457
Бернулли (Bernoulli D.) 88, 90, 96, 163, 192, 210, 502
Бетчов (Betchov R.) 586
Бингам (Bingham E. C.) 364
Блазиус (Blasius H.) 506, 510, 572
Бобылев Д. К. 213
Богданова В. В. 562
Боричић (Borčić Z.) 556—558, 796
Боришанский В. М. 632, 715
Брайнерд (Brainerd J. G.) 768
Браун (Brown S. N.) 506, 814
Бриджмен (Bridgeman P.) 385
Брэдшоу (Bradshaw P.) 615, 694, 696, 719, 721, 723, 725, 730
Брэй (Bray K.) 356
Буземан (Busemann A.) 273, 274, 351, 353
Буйлтьес (Builtjes P. J. H.) 628, 738
Бури (Buri A.) 674
Буссинеск (Boussinesq J.) 625, 627
Бушмарин О. Н. 575, 647
Бюргерс (Burgers J. M.) 627

Валландер С. В. 356
Ван Вийнгарден (van Wijngaarden L.) 105
Ван-Дайк (van Dyke M.) 42, 160, 223, 332
Ван дер Хегге Цийнен (van der Hegge Zijnen) 617
Ван-Дрист (van Driest E.) 816, 819
Ванье (Wannier G. H.) 442, 447
Варбург (Warburg) 758
Варшавский Г. А. 816
Ватажин А. Б. 400
Ватсон (Watson G. N.) 295, 299, 303, 308
Введенская Н. Д. 489
Вельте (Welte W.) 586
Вендт (Wendt H.) 766, 772, 776
Вилля (Willat H.) 213
Винклер (Winkler E. M.) 818
Власов Е. В. 615
Войшель В. В 819, 820
Воскресенский К. Д. 632
Ву 555
Вуд (Wood A. B.) 106
Вулис Л. А. 647
Вундт (Wundt H.) 574

Гамель (Hamel G.) 454, 746
Гапонов С. А. 590, 816
Гарднер (Gardner C. S.) 345
Гартман (Hartmann J.) 401
Гевинян Г. М. 365
Гельмгольц (Helmholtz H.) 207, 409, 413
Генкин А. Л. 617
Герман (Hermann R.) 142, 246, 659
Гёртлер (Görtler H.) 383, 385, 408, 442, 586, 641
Гершуни Г. З. 582
Гесс (Hess R. V.) 345
Гиневский А. С. 602, 615, 620, 635, 647, 677, 682, 683, 725, 830
Глауэрт Г. (Glauert H.) 219
Глауэрт М. (Glauert M. B.) 521
Гогиш Л. В. 213, 724, 814
Гогосов В. В. 400
Годунов С. К. 358, 459
Голдстейн (Goldstein S.) 372, 573, 574, 576, 604, 647, 685
Голт (Gault D. E.) 604
Голубев В. В. 314
Голубинский А. И. 814
Гольдштик М. А. 158, 213, 377, 562, 571, 694
Гонор А. Л. 185, 187
Горлин С. М. 144
Горощенко Б. Т. 318
Гребер (Groeber H.) 422, 705
Грей (Gray A.) 410
Гретцбах Г. (Gretzbach G.) 732
Григуль (Grigull U.) 422, 705
Гринберг Г. А. 401, 408, 542
Гродзовский Г. Л. 647
Громека И. С. 409
Грязнов В. А. 472
Гуревич М. И. 206, 213, 293
Гухман А. А 382, 816
Гущин В. А. 489, 490, 494
Гюгонио (Hugoniot P. H.) 112

Давыдов Ю. М. 266, 358, 748
Дайслер (Deissler R.) 701, 714, 816
Даламбер (d'Alembert J.) 195, 288, 292
Дарси (Darcy H.) 431, 656
Двайер (Dwyer O. E.) 632
Двайт (Dwight H. B.) 340
Демьянов Ю. А. 747
Деннис (Dennis C. R.) 493—495
Джонс (Jones R. T.) 369
Джорджевич (Djordjević V.) 581
Джукић (Djukić Dj.) 575
Дик Е. Д. 729
Домбровский Г. А. 264
Дородницын А. А. 311, 590, 759, 777, 778, 782, 784, 785
Дорфман Л. А. 562, 581, 673
Драйден (Dryden H.) 596, 598, 599, 617, 622
Дробленков В. Ф 671, 679
Дубов В. С 644, 645
Дхаван (Dhawan S.) 600
Дюрэнд (Durand W. F.) 338

Егоров Ю. Э. 483, 484
Емельянова Г. Н 727
Есьман И. Е. 712

Жедь В. П 747
Жукаускас А. А 422, 705, 715, 717
Жуковский Н. Е. 181, 183, 206, 213
Жуховицкий А. А. 422
Жуховицкий Е. М. 582

Заблоцкий Н. Д. 747
Забродин А. В. 358
Захаров Ю. Г. 617
Зельдович Я. Б. 136, 151, 155
Зигмантас Г. П 739

Золотов Н. Л. 583
Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 434
Зысина-Моложен Л. М. 694
Зябриков В. В. 704, 729, 738

Иванов М. Я. 358
Игл (Eagle A.) 709
Игошин Л. И. 747
Идельчик И. Е. 694
Илизарова Л. И. 620
Илюхин Н. В. 816
Иоселевич В. А. 594, 602, 725
Исаев С. А. 480, 485

Кадер Б. А. 729
Каменецкий А. И. 678
Кантровиц (Kantrowitz A.) 157
Каплан (Kaplan C.) 301
Капустянский С. М. 793, 795, 796
Карман (von Kármán Th) 264, 307, 334, 452, 533, 596, 634, 655, 660, 710, 717, 757, 768, 772, 817, 819
Карякин Ю. Е. 562
Каулинг (Cowling T.) 758
Кашкаров В. П. 647
Келлер (Keller H. B.) 495
Келлер Л. В. 608, 625
Кеннеди (Kennedy E. D.) 531
Кестер (Kester R. H.) 818
Кибель И. А. 89, 200, 303, 330, 346, 418, 428, 501, 532, 586
Кинен (Keenan P. C.) 816
Киреев В. Т. 747
Кириллов И. И. 694
Кирхгоф (Kirchhoff G.) 207, 320
Клайн (Kline S. J.) 602
Клаузер (Clauser F. H.) 717—719, 721
Клебанов (Klebanoff P. S.) 599
Кляйзер Л. 732
Кнудсен (Knudsen J. G.) 758
Коанда (Coanda A.) 507
Кобаши (Kobashi Y.) 619
Ковеня В. М. 459, 476
Коган М. Н. 759
Кокрен (Cochran W. G) 453, 512
Колесников А. В. 602, 677, 682, 683, 725
Колесников Г. А. 319
Колешко С. Б. 458, 483, 484
Колз (Coles D.) 587, 589, 678, 703, 717, 818
Колльман (Kollman W) 696, 732
Колмогоров А Н. 616
Константинеску В. Н. 747
Конт-Белло (Conte-Bellot J.) 617, 621
Копченов В. И. 487
Коркеги (Korkegi R) 815
Корн Г. (Korn G) 700
Корн Т. (Korn T.) 700
Коробко В Н. 571, 635, 647
Корсин (Corrsin S) 617
Котельникова О П. 559
Котляр Я. М. 747
Кочин Н. Е. 39, 89 200, 206, 303, 330, 346 418, 428, 501, 531, 532, 586
Коэн (Cohen C B) 791
Крабтри (Crabtree L) 562
Крайко А. Н. 358, 487, 799
Красильщиков П П 605
Краснов Н Ф. 353
Кривцова Н. В. 806
Криминале (Criminale V.) 586
Крокко (Crocco L.) 507, 508
Кроу (Crow S C) 733
Крылов А Н. 359
Кукес В. И 617
Куликовский А Г. 401, 527
Кундт (Kundt A) 758
Кускова Т. В. 479
Кутателадзе С С 632, 683, 705, 713
Куэрти (Kuerti G) 768
Кьюз (Kuethe A) 643

Лаатс М. К. 617
Лаврентьев А. Л. 213
Лаврентьев М. А. 213
Ладыженская О. А. 377
Лайтхилл (Lighthill M) 341
Ламб (Lamb H) 303
Ландау Л. Д. 456, 457
Лапин Ю. В. 602, 679, 718, 722—727, 730, 820, 826, 827, 829
Лаплас (Laplace P S) 104
Лауфер (Laufer J.) 704, 627
Лев (Lew H.) 746
Левин М. П. 487
Леви-Чивитта (Levi-Civitta T.) 213
Левченко В. Я. 590, 816
Лейбензон Л. С. 258, 433, 437
Лельчук В. Л. 816
Леонтьев А. И. 683, 705
Лесников А. Л. 553
Лёш (Lösch F.) 297
Либер (Liber P.) 746
Либи (Libby P. A.) 746
Ликудис (Likoudis P. S.) 555
Линь Цзяо-цзяо (Lin C. C.) 157, 266, 576, 586
Липман (Liepman H W.) 229, 234, 242, 340, 341, 746
Лобб (Lobb R. K.) 818
Лойцянский Л. Г. 46, 60, 69, 77, 94, 320, 383, 442, 449, 451, 455, 500, 506, 517, 531, 532, 537, 542, 552, 559, 562, 566, 590, 604, 605, 617, 633, 644, 647, 656, 665, 668, 673, 679, 692, 697, 700, 703, 704, 710, 716, 717, 727, 737, 769, 771, 777, 806, 820
Лоренц (Lorentz H. A.) 625
Лукьянов Г А 11
Лумли (Lumley J. L.) 594
Лундгрен (Lundgren T. S.) 401
Лунев В В. 358
Лунькин Ю. П. 746
Лурье А И. 39, 46, 60, 69, 77, 94, 320, 409, 428
Лус (Loos H G.) 562
Лыков А. В. 422, 581, 705
Лэйтон (Laitone E V) 265
Лэмбоси (Lambosi P.) 409
Любенов В. 792, 794—796
Любимов Г. А. 400, 401
Людвиг (Ludwieg H.) 632, 667, 720, 806

Майер (Meyer Th) 247
Майкапар Г. И. 814
Максвелл (Maxwell C) 366, 758
Манглер (Mangler W.) 559, 775
Марручи Дж. 369
Мартыненко О Г. 592
Мартынов А. К. 247
Марчук Г. И. 459
Межиров И. И. 729
Мейер (Meier H. V) 829
Мейз (Mase G E) 39
Мещерский И. В. 213
Мизес (Miscs R) 507, 596, 768
Милликен (Millikan C B.) 717, 758
Минский Е. М 597, 615, 617
Мирзаджанзаде А. Х. 365
Мирзоян А А 365
Михайлов В. В. 814
Михайлов Ю А 422, 705
Мок (Mock W) 617
Монин А С 586, 615, 616
Мордухов (Morduchow M) 746
Морикава (Morikawa G) 704, 733, 738
Мортон (Morton K W) 459
Моулден Т 615, 696, 725 730, 732
Мэкин (Macken N A) 747
Мэллор (Mellor G L) 699
Мэтьюз (Mathews G B) 410

Навье (Navier L) 370
Налетова В А 400
Нарасимха (Narasimha R) 600
Нейланд В Я 809, 813, 814
Нейман (Neumann E P) 816
Некрасов А И. 213 330
Нигматулин Р. И 368, 799
Никкель (Nickel K) 504
Николаев Е С 459
Никурадзе (Nikuradse J) 652, 654, 655, 656, 658, 659 661, 662
Ништ М И 330
Новиков И И 632, 715
Нолл (Noll W) 369
Нумеров С Н 431 432
Нуссельт (Nusselt W) 583
Ньютон (Newton I) 104, 359

Овсянников В М 806
Овсянников Л В 383
Озеен (Oseen C W.) 428
Озерова Е Ф 545
Олейник О А 504
Омбек (Ombeck H) 659
Орзаг (Orsag S A) 732
Орлова М. Г. 489

Освatич (Oswatitsch K.) 246
Оствальд (Ostwald W.) 365

Пакет (Pucket A. E.) 242
Паппас (Pappas C. C.) 816
Паскаль (Pascal B.) 78, 81
Патанкар (Patankar S V.) 705
Пател (Patel V. C.) 602
Патерсон (Patterson G. N.) 151
Паттерсон К. С. 732
Пейре (Peyret R.) 459
Перш (Persh J.) 600, 818
Петров Г. И. 246
Петров Н. П. 433, 441
Пилипенко В. Н. 594, 602, 725
Пинегин С. В. 747
Пинкус (Pinkus O.) 747
Пинский В Л 747
Повх И. Л. 617
Полежаев В И 472, 732, 746
Полубаринова-Кочина П. Я 431, 432
Польгаузен К. (Pohlhausen K.) 536
Польгаузен Э. (Pohlhausen E.) 579, 580, 582
Полядский В. Ф. 261
Полянский В. А. 400
Поляхов Н. Н. 330
Прандтль (Prandtl L) 117, 129, 219, 247, 273, 310, 503, 629, 630, 631, 641, 642, 648, 650, 672, 673, 708, 746, 819
Пробстин (Probstein R. F) 356, 757, 805, 809, 811, 812
Пруден (Pruden F. W.) 226
Пуазейль (Poiseuille J. L. M.) 360, 391
Пуассон (Poisson S. D.) 370
Пэннел (Pannel J.) 659
Пядишюс А. А. 739

Райзер Ю. П. 136, 151, 155
Ребиндер П. А. 361
Регирер С. А. 400, 401
Рейнер (Reiner M) 365, 369
Рейнольдс О. (Reynolds O.) 434, 585, 606, 706
Рейнольдс У. (Reynolds W. S.) 602
Реслер (Resler E.) 157
Решотко (Reshotko E) 586, 791, 794—796
Ривз (Reews B. L.) 830
Ривлин (Rivlin R S) 733
Ригельс (Riegels F) 471
Ридел (Ridell F) 806
Риман (Riemann B.) 145
Ринкевичюс Б С. 617
Рихтмайер (Richtmyer R D) 459
Ричардсон (Richardson L F.) 616, 625
Робертсон (Robertson I) 679
Рождественский Б Л. 381, 732
Розе Н В. 89, 200, 303, 330, 346, 418, 428, 501, 532, 586
Розенхед (Rosenhead L.) 455, 500, 501, 506, 530, 538, 552, 573, 574, 586
Розенштейн А З. 617
Романо (Romano F) 746
Росс (Ross D) 679
Россов (Rossov V. I) 555
Ротт (Rott N) 562
Ротта (Rotta J. C) 587, 703, 829
Роуч (Roache P. J.) 459, 480
Рошко (Roshko A) 229, 234, 340, 341, 379
Рубан А А 506
Рубезин (Rubesin M. W.) 741
Румер Ю Б 457, 570
Рунстадлер (Runstadler P W) 602
Рэлей (Rayleigh J W S) 434, 746
Рэнкин (Rankine W) 746
Рябенький В. С 459

Сайбл (Saibel E. A) 747
Сальников (Saljnikov V) 575, 581, 796
Самарский А А 459
Саноян В Г. 296
Сараев Ю В 575
Саржент (Sargent R. F) 599
Себеси (Cebeci T.) 615, 694, 696, 721, 725, 730, 829
Седов Л. И. 39, 154, 200, 206, 213, 219, 266, 330, 382, 400, 542
Сеид-заде М К. 365
Секерж-Зенькович Я. И 213
Секриеру Г. В 747
Секундов А. Н 602, 725, 730, 830
Сен-Венан (Saint-Venant B) 370
Симакин И. Н 381, 732
Симпсон (Simpson R L) 722, 725
Симуни Л. М. 479, 545, 793
Сингхал (Singhal A. K.) 731
Сипенков И. Е. 747
Сквайр (Squire H. B.) 689, 692
Скремстед (Skramstad H. K.) 595, 596
Скрипач Б. К. 319, 330
Скэн (Skan S. W) 527
Слезкин Н. А. 258, 411, 428, 429, 437, 455, 586
Слоан (Sloan D. M.) 401, 406, 408
Слободкина Ф. А. 527
Сляйхер (Sleicher C.) 632
Смага Т. И. 558
Смирнов Б. И. 558
Смирнов В. И. 202, 313
Смирнов Г. В. 617
Смит А. (Smith A. M. O.) 721, 725, 829
Смит П. (Smith P.) 401, 406, 408
Смольский Б. М. 581
Соковишин Ю. А. 582
Солодкин Е. Е. 729
Соу (Soo S) 799
Сполдинг (Spalding D. B.) 422, 683, 705, 731, 819
Спрейтер (Spreiter J. R.) 234
Старков В. К. 799
Степанов Г. Ю. 194, 206, 213, 260, 264, 694, 724, 814
Степанов Е. И. 559, 775
Степанянц Л. Г. 449, 558, 746, 747
Стернин Л. Е. 799
Стокс (Stokes C) 15, 16, 162, 370
Стрелец М. Х. 718, 722—727, 730, 829
Струминский В. В. 562, 696
Струхал (Strouhal V.) 378
Стрэтфорд (Stratford B. S) 724, 728, 729
Стэнтон (Stanton T. E.) 659
Стюарт (Stuart J. T.) 576, 586
Стюартсон (Stewartson K) 506, 531, 787, 814
Сычев В. В. 506, 814
Сэдни (Sedney R) 562

Табачников В. Г. 319, 330
Табачников Ю. Б. 747
Таками (Takami H.) 495
Таккер (Tucker M.) 817
Тани (Tani I) 599
Тарасова В. Н. 816
Тарг С. М. 434, 437
Тарунин Е Л. 472
Таунсенд (Townsend A.) 617
Тейлор Дж. (Taylor G. I) 597, 625, 648, 708, 746
Тейлор (Taylor T D) 459
Темпль Т. (Temple G) 730
Терентьев Н. М. 793
Террилл (Terrill R. M) 550
Тидстрем (Tidstream K. D.) 599
Тиллман (Tillmann W.) 667, 720
Тирский Г. А. 806
Толмин (Tollmien W.) 636, 639
Том (Thom A) 487
Томас (Thomas L. G) 746
Триттон (Tritton D. J.) 495
Трубчиков Б. Я. 642
Трусделл (Truesdell G.) 369
Тсуджи (Tsuji J.) 704, 733, 738
Турилина Е. С. 632

Уайтлоу (Whitelow J) 615, 694, 696, 725
Уилкинсон (Wilkinson W. L.) 365, 399
Уильямс (Williams J.) 575
Уиттекер (Whittaker E. T.) 295, 299, 303, 308
Уфлянд Я. С 401
Ухов Е. П 246
Уэлч (Welch J. E.) 474

Фабрикант Н. Я. 307, 330
Федерман А. 385
Федынский О. С. 632, 715
Федяевский К. К. 665, 673, 677, 682, 683, 725
Фергюссон (Fergusson R.) 709
Ферри (Ferri A.) 115, 242, 274, 350, 354
Фёрсте (Förste J) 617
Фидман Б. А. 616
Филиппов М С 617
Филлипс (Phillips O. M) 615
Финстервальдер (Finsterwalder S) 310
Фойхт (Voigt W) 365
Фокнер (Falkner V. M.) 527, 667
Фомина Н Н 673
Форхгеймер (Forchheimer Ph) 627
Франкль Ф И 819, 820
Фрёссель (Frössel W) 816
Фридман А. А. 89, 90, 608

Фришман Ф. А. 617
Фрост (Frost W.) 615, 696, 725, 730, 732
Фэй (Fay J.) 806

Хама ((Hama F. R) 674
Ханзен (Hansen M.) 513
Ханрати (Hanrathy Th) 701
Хант (Hunt J. C. R.) 401
Хантше (Hantzsche W) 766, 772, 776
Харлоу (Harlow F.) 358, 474
Хартри (Hartree D. R) 527
Хед (Head M. R.) 602
Хейз (Hayes W. D) 757, 805, 809, 811, 812
Хейль (Heil M.) 806
Хелеман (Helleman R)
Херст (Hirst E. A) 678
Хиггинс (Higgins R. M) 816
Хили-Шоу (Hele-Shaw H. S) 431
Хилтон (Hilton W. F.) 226, 227, 268
Хименц (Hiemenz K.) 506
Хинце (Hinze J. O.) 623, 627, 735
Хислоп 596
Холл (Hall A.) 596, 617
Хортсман (Hortsmann C. C) 739
Хоуарт (Howarth L.) 532, 545, 768
Хофмейстер (Hoffmeister M) 617
Христианович С. А. 258, 261
Хусид Б. М. 369

Чан (Chan Y. Y.) 552
Чанг (Chang Ch. C) 401, 683
Чаплыгин С. А. 181, 183, 193, 195, 213, 256, 262, 310, 330
Чень (Tsien H. S) 264, 296, 756, 772
Чепмен Д. (Chapman D. R) 741, 818
Чепмен С (Chapman S) 758
Черный Г. Г. 254, 255, 354
Чжен (Chang G.-Z.) 493—495
Чжен (Chang P. K.) 814
Чи С. В. (Chi S. W.) 683, 819
Чорин (Chorin A. J) 475
Чушкин П. И. 319
Чью (Chew Y.-T.) 722, 725

Шапиро А. (Shapiro A.) 339
Шапиро Н. (Shapiro N) 816
Шапошникова Г. А. 400
Швабе (Schwabe M. S.) 576
Шведов Ф. Н. 364
Шевелев Ю. Д. 562
Шейнберг С. А. 747
Шеркліф (Shercliff J. A.) 401
Шивапрасад (Shivaprasad B. G.) 722, 725
Шидловский В. П. 759
Шиллер (Schiller L.) 585—587, 659
Шиманский (Szymanski P.) 409
Шишеев М. Д. 747
Шишкина Л. Г. 553, 555
Шланчаускас А. А. 717, 739
Шлихтинг (Schlichting H.) 500, 506, 517, 552, 563, 576, 586, 647, 665, 672, 673, 677, 692
Шмидт (Schmidt B.) 625, 746
Шрауб (Schraub F. A.) 602
Штернлихт (Sternlicht B.) 747
Шу (Schuh H) 575
Шубауэр (Schubauer G. B.) 595, 596, 604, 617, 627
Шубин Ю. М. 620
Шульман З. П. 369
Шуманн В. У. 732

Щенников В. В. 490, 806

Эванс (Evans H. L.) 500, 530, 531
Эйлер (Euler L.) 40, 78, 87, 91, 101, 112, 126, 158, 163
Эйплт (Apelt C. J) 487
Эйхелбреннер (Eichelbrenner E. A.) 575
Элиас (Elias F.) 580, 582
Эмде (Emde F.) 297, 410
Эммонс (Emmons H. W.) 768
Эрк (Erk S.) 422, 659, 705
Эскудье (Escudier M. P.) 683

Юнг (Young A.) 689, 692, 816
Юрьев И. М. 258
Юферев В. С. 556

Яглом А. М. 586, 615, 616, 729
Якоб (Jacob M.) 659
Яненко Н. Н. 459, 476
Янке (Janke E.) 297, 410
Ярин Л. П. 617
Яцеев В. И. 457

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания 378
Автомодельность 154, 451
Адвекция 613, 616
Адиабата 85
— изэнтропическая (Пуассона) 98, 100, 127, 128
— ударная Гюгонио 127, 128
Адиабатичность 98
Аналог разностный (сеточный) 459, 462
Аналогия вязкая 430
— Рейнольдса 706
— — обобщенная 709
Анемометрия тепловая 616
Анизотропия 364
Аппроксимация 459
Аэростатика 78

Базис 13
Барботаж 105
Баротропность 80, 88
Бугорок шероховатости 598

Вектор 12
— главный сил давления 81, 82, 323
— переноса 75
— присоединенный количества движения 323
— — момента количества движения 323
— сопутствующий тензору 19
Вектор-шаг решетки профилей 204
Величина физически объективная 14
Ветер звуковой 136
Взаимодействие свободное 809
— сильное 811
— слабое 811
Вихреисточник (вихресток) 173
Вихри Рэлея — Бенара 590
Вихрь 50
— изолированный 172
— полый 52
— присоединенный 194, 309
— свободный 310
— скорости 45
Волна головная 139, 143, 797
— звуковая 103, 135, 136
— Маха 221
— отсоединенная 242
— простая 103, 147
— разрежения 148
— — центрированная 151
— сжатия 147
— ударная отсоединенная 138
— — плоская 124
— — сферическая 136
Восстановление давления 119
Время запаздывания 366
— релаксации 366, 797
— — турбулентной 736
Вход безударный 203
Высота гидравлическая 93
— нивелирная 93
— пьезометрическая 92
— скоростная 92
Вязкость 360
— вторая 740
— динамическая 360, 741
— кинематическая 360
— молярная 625
— объемная 740
— первая 741
— структурная 365
— схемная 466
— турбулентная 625, 696, 698

Газ 10
— вязкий 740
— совершенный 740
Газ Чаплыгина 264
Генерация турбулентности 614, 616
Гидравлика 85, 93, 662
Гидродинамика магнитная 399
Гидростатика 78
Гипотеза Буссинеска 625—627, 696, 731, 735
— Клаузера 696, 718, 722, 724
— плоских сечений 312
— Фика 628, 629
— Фурье 628, 629
Градиент скалярной функции 28

Давление 78, 81, 86, 362, 363
— актуальное 606
— гидродинамическое 86
— гидростатическое 78
— критическое 107
— пульсационное 606
— турбулентное 627
Движение адиабатическое 96
— баротропное 80
— безвихревое 51
— вихревое 50
— изэнтропическое 100
— куэттовское 587, 589
— ламинарное 386
— ламинарное 386
— ползучее 386
— попятное 505
— пуазейлево 584
— слоистое 624
— тейлоровское 589
— турбулентное 585
— — квазистационарное 606
— — осредненное 606
— — — стационарное 606
— установившееся 387
Девиатор 24
Девиация потока 205
Дефект кинетической энергии 508
— полного напора 508
— скорости 654
Деформация векторного поля 34, 35
Диада 17
— дифференциальная 33
— координатная 17
— сопряженная 33
Диполь 172, 278, 288
Дискретизация 459
Дисперсия завихренности 416
— механической энергии 415
Диссипация 412
— турбулентная 614, 616
Диссоциация 797
Диффузия 10, 415, 422, 497
— завихренности 416, 498
— турбулентная 624
Диффузор 117, 586
— сверхзвуковой 137
Длина динамическая 651
— крылового профиля 178
— релаксации 797
Дорожка вихревая Кармана 160

Единица тензорная 18

Жидкость 9 и д.
— аномальная 9
— Бингама — Шведова 362
— вязкая 9, 359
— вязкопластическая 362, 364
— дилатантная 365
— идеальная 88, 359
— изотропная 362
— наследственная 367
— неньютоновская 9

Жидкость неоднородная 368
— несжимаемая 59
— ньютоновская 9, 359, 362
— псевдопластическая 365
— реологическая 368
— реопектическая 367
— тиксотропная 367

Задача автомодельная 154
— Блазиуса 510
— Зоммерфельда 437
— Кармана 452
— Кирхгофа 164
— о вязком клине 433
— Прандтля — Майера 247
— Римана о распространении конечных возмущений 145, 269
— Стокса 423
Закон Архимеда 82
— Дарси 431, 656
— Клапейрона 740
— Максвелла 366
— Ньютона обобщенный 362, 740
— — реологический 359, 366
— одной седьмой 660
— Паскаля 78, 86
— Пуазейля 391
— релаксации напряжений 366
— следа 717, 718, 720
— сохранения массы 59
— — полной энтальпии 127
— — энергии 72
— стенки 717
— термодинамики первый 72
— Фика 422, 628, 629
— Фойхта 365, 366
— Фурье 420, 628, 629
Закрученность струи 567
Запаздывание 366
Запирание потока 107, 115
Звук 103, 135
Значение главное симметричного тензора 25

Игла Осватича 246
Идеальность среды 359
Изобара 59
Изостера 58, 59
Изотропия 362
— нормальных напряжений 78
Изэнтропа 100
Индекс немой 12
— свободный 13
Инварианты Римана 145
— тензора 23
Инжекция 636
Интеграл Бернулли 91
— Кронко 769, 820
— Лагранжа — Коши 163
Интенсивность вихревой трубки 52
— турбулентности 594, 596, 618
Ионизация 797
Источник (сток) 172, 278, 287

Количество движения присоединенное 323
Кольцо вихревое 162
Конвекция 415, 497, 616
— завихренности 498
— свободная ламинарная 582
Консервативность разностной схемы 465, 466
Контур жидкий 43
— эффективный 686
Конус возмущений 222, 335
— Маха 222, 335
Конфузор 586
Концентрация 800
Координата универсальная 653
Координаты лагранжевы 40
— эйлеровы 40
Корреляция 607, 608
— двойная одноточечная 607, 613
Коэффициент аккомодации 759
— волнового сопротивления 225
— восстановления 763
— — полного давления в сверхзвуковом диффузоре 140, 141
— вязкости второй 740
— — динамический 360, 741
— — кинематический 360
— — объемной 740
— — схемной 460
— — турбулентной 625, 629
— диффузии 422, 805
Коэффициент диффузии турбулентной 629
— индуктивного сопротивления 315, 340
— корреляции 608
— Клаузера 722, 723
— — пространственной 618
— — пространственно-временной двухточечной 608
— массодиффузии 805
— массопроводности 420
— перемежаемости 587, 601, 725
— перемешивания турбулентного 625
— подобия 373
— подъемной силы 196, 315
— — — динамический 576
— пористости среды 432
— присоединенных масс 325, 327
— скольжения 758
— скоростной 107
— сопротивления волнового 225
— — индуктивного 315, 340
— — трубы 123, 389, 391, 395, 398, 399
— схемной вязкости 466
— температуропроводности 421
— теплопроводности 420
— — турбулентной 629
— термодиффузии 805
— турбулентного обмена 631, 641, 642
— — переноса завихренности 648
— — — импульса 628
— — — концентрации 628
— — — тепла 628
— — трения 631, 641, 642
— фильтрации 431
Коэффициенты Ляме 30
Кризис обтекания 603, 782
— сопротивления 602, 781
Критерии подобия 377
Критерий Галилея 382
— Рейнольдса 585
Крутка струи 566
Крыло жидкое 194
— конечного размаха 309
— незакрученное аэродинамически 316
— — геометрически 316
— эллиптическое 317

Линеаризация 386
Линия векторная 41
— вихревая 51
— возмущения 221
— изопотенциальная 170
— Маха 221
— тока 41, 168
Лоб профиля 178

Масса переменная 60
— присоединенная 325, 327
— — поперечная 329
— — продольная 329
Массодиффузия 805
Масштаб 374
— турбулентности 594, 596, 597, 616, 619
— универсальный 653
Матрица размерностей 384
— тензора 16
МГД пограничный слой 552, 556
Мера неоднородности векторного поля 33
Метод интегральных соотношений 683
— итераций 469
— касательных клиньев 356
— — конусов 356
— Кирхгофа 212
— конечных разностей 459
— Кочина — Лойцянского 532, 534
— крупных частиц 358
— моментов первого порядка 696, 724
— Ньютона 356
— переменных направлений 473
— плоских сечений 357
— подобия обобщенного 532
— Польгаузена 536—538
— последовательных потенциальных добавок 475
— прогонки 469, 470
— размерностей 382, 383
— расщепления 473, 476, 477
— — физического 475, 490, 491
— спектральный оценки устойчивости 464
— Трукенбродта 677
— ударного слоя 357
— установления 470
— фазовых характеристик 590
— характеристик 268
— Чаплыгина 262

Механика переменной массы 60
Модель второго порядка 730
— Максвелла 366, 367
— Фойхта 365—367
Момент второго порядка 613
— корреляции двухточечной 618
— — одноточечной 618
— связи 608
— сил внутренних 96
— — давления главный 82, 323, 324
Мощность внутренних сил 96

Напор динамический 93
— полный 93
— пьезометрический 93
— скоростной 93
Направление безударного натекания 203
— бесциркуляционного обтекания 183
— характеристическое 146, 270
Напряжение 61
— касательное 63
— нормальное 63
— рейнольдсово 610
— трения 534
— — чисто турбулентное 648
Наследственность в турбулентном движении 732 и д.
Натекание безударное 203
Невязка аппроксимации 463
Непроницаемость 372
Неустойчивость движения 584

Область многосвязная 162
— односвязная 161
Обтекание гиперзвуковое 252
— клина сверхзвуковое 235
— конуса сверхзвуковое 348
— пластины струйное безграничным потоком 211
— — — в канале конечной ширины 212
— — — потоком конечной ширины 211
— — циркуляционное 187
— профиля околокритическое 267
— — тонкого 199
— тел вращения осесимметричное 330
— — — — поперечное 303
— — — — продольное 297
— сферы 288
— цилиндра бесциркуляционное 174
— — циркуляционное 175
Окружность основная 184
Определители взаимные 21
Осреднение по ансамблю 607
— по времени 606
— — — взвешенное по плотности 827
Ось главная тензора симметричного 25
— — — скоростей деформаций 48
Отображение конформное 169
Отрыв вязкий 504
— ламинарный 594
— турбулентный 603

Парабола Пуазейля 391
Парадокс гидростатический 81
— Даламбера 290 и д.
Параметр пластичности 399
— сжимаемости 791
— Тейлора 597
— торможения 93
— Чаплыгина 119
Параметры Бури 674
Паскаль-секунда 360
Пелена вихревая 310
Перемежаемость 587, 600, 601
Переменные Дородницына 759, 760
— Кронко 508
— Лагранжа 40
— Прандтля — Мизеса 507
— Эйлера 40
Перемешивание молярное 624
— турбулентное 624
Перенос завихренности 648
— турбулентный 623 и д.
— физической величины сквозь поверхность 75
Период осреднения 606
Плазма 11
— низкотемпературная 358, 807
Пластичность 364
Плоскость годографа скорости 171
— течения 171
— физическая 171
Плотность 58
— распределения главного вектора поверхностных сил 68
Плотность распределения мощности внутренних сил 71, 72
— — объемных сил 61
— — реактивных сил 69
Поверхность вихревая 92
— изопотенциальная 79, 160
— изостерическая 362
— контрольная 75
— свободная 80
— тока 43, 286
— уровня 41
— — потенциала скоростей 160
Подобие 373—375
— аффинное 374, 375
— — обобщенное 538, 539
— гиперзвуковых потоков 253, 254
— динамическое 227, 229
— кинематическое 228, 229
— обобщенное 525
Подобласть турбулентного пограничного слоя внешняя 697, 717 и д.
— — — — пристенная 697
Подслой вязкий 591, 650, 705
— температурный 705
Подшипник гидростатический 449
Поле скоростей нестационарное 41
— — однородное 41
— — стационарное 41
— физической величины 12
— — — векторное 12
— — — неоднородное 12
— — — нестационарное 12
— — — однородное 12
— — — скалярное 12
— — — стационарное 12
— — — тензорное 12
Поправка Эйнштейна 368
Порождение турбулентности 614, 616
Постоянная Саттерлэнда 741
— Чепмена — Рубезина 767
Постоянные циклические многосвязной области 162
Постулат Жуковского — Чаплыгина 181
Потенциал векторный 282
— двойного слоя 281
— комплексный 171
— объемный действия сил давления 85
— простого слоя 280
— разрывный 206
— скоростей 160
Поток вектора 37
— вещества турбулентный 612
— однородный прямолинейный 278, 287
— спутный 134
— тепла турбулентный 611
Правило Прандтля — Глауэрта 219, 220, 230
Преобразование Дородницына 782
— Дородницына — Стюартсона 787
— Жуковского 183
— конформное 169
— Манглера 775
Прилипание 372, 504
Принцип Гельмгольца минимума диссипируемой энергии 415
Прогонка матричная 470
— скалярная 470
Произведение диадное 17
— тензоров векторное 26
— — скалярное 26
— — тензорное 26
Производная индивидуальная 55, 75
— конвективная 55, 75
— — в лагранжевом представлении 76
— — в эйлеровом представлении 76
— лагранжева 55
— локальная 55, 75
— по заданному направлению 27, 28
— полная 55
— пространственная 28, 29
— — в криволинейной системе 30
— — в прямолинейной системе 29
— — в сферической системе 31, 32
— — в цилиндрической системе 31
— субстанциональная 55
Противодавление 116
Профиль крыловой 178
— — Жуковского — Чаплыгина 190 и д.
— — ламинаризованный 595
— — несущий 605
— — плохо обтекаемый 181
— — хорошо обтекаемый 181
Пуаз 360
Пузырь турбулентный 603, 604
Пульсация давления 606
— скорости 606

Путь перемешивания 625
— релаксации 736
— смешения 683
— — Прандтля 631
— — Тейлора 648

Работа элементарная внутренних сил давления удельная 96
Равенства Коши 63, 64
Равновесие бароклинное 84
— баротропное 80, 84
Радиус гидравлический 395
Размерность 383
Распределение источников непрерывное 279
— циркуляции эллиптическое 316
Релаксация 366
— напряжения 366
— турбулентная 736
Реламинаризация 601
Реология 9, 359
Решение автомодельное 154
Решетка профилей плоская 204
Ротация векторного поля 35
Ротор вектора скорости 45
— Флетнера 178
Руль Жуковского 191

Сантипуаз 360
Сантистокс 360
Связка Прандтля — Колмогорова 731
Сектор разрежения 247
Сетка 459
Сечение критическое 107
— — пограничного слоя 591
Сила архимедова 82
— массовая 60
— объемная 60
— поверхностная 60
— подсасывающая 197
— подъемная 195, 315
— — гидростатическая 82
— пондеромоторная 400, 556
Символы Кронекера 18
— Леви-Чивита 20
Система аппроксимирующая 459
Скачок уплотнения 100
— — конический 348
— — косой 142, 235 и д.
— — — отсоединенный 243
— — — присоединенный 243
— — — сильный 242
— — — слабый 242
— — прямой 125
Скорость актуальная 606
— внешняя 502
— девиации потока 205
— деформационная 46
— динамическая 651, 721, 723
— диссипации 614
— диффузии 800
— звука 101
— — адиабатическая 104
— — изотермическая 104
— — стандартная 104, 105
— индуктивная 311, 312
— критическая 107
— на бесконечности местная 311, 312
— относительного объемного расширения 48
— осреднения 606
— пульсационная 606
— сопряженная 171
— универсальная 653
След 497, 514
— ближний 505, 514
— дальний 514
— турбулентный 646
Сложение тензоров 18
Слой вихревой 189, 310
— пограничный 453, 497
— — диффузионный 497, 500
— — — в несжимаемой жидкости 577
— — концентрационный 597, 500
— — — в несжимаемой жидкости 577
— — ламинарный 497
— — магнитогидродинамический 552, 556
— — нестационарный плоский 571
— — пристенный 497, 501
— — — пространственный 559
— — свободный 497, 514
— — скоростной 497, 499, 501
— — температурный 497, 500
— — — в несжимаемой жидкости 576
— — турбулентный 497
— — — равновесный 719
Слой ударный 810
Смазка газовая 747
Смачиваемость 372
Смесь газожидкостная 105
Соотношение импульсов интегральное 666
— Кармана интегральное 533, 534
Сопло Лаваля 118
— — обратное 139
Сопротивление волновое 224
— давления 684
— индуктивное 315, 684
— крыла 315
— лобовое 683, 684
— полное 683, 684
— профильное 684, 688 и д.
— трения 684
— участка трубы 122, 391
Сохраняемость вихревых линий 89
Спектр потока 42
— турбулентности 619
Спектры Хили — Шоу 431
Способ Лагранжа 40
— Эйлера 40
Среда вязкая 359, 360
— вязкоупругая 365
— гетерогенная 368, 798
— гомогенная 798
— жидкая 10
— идеальная 359
— изотропная 362
— многокомпонентная 368
— многофазная 368, 798
— ньютоновская 740
— сжимаемая 103
— сплошная деформируемая 9
— твердая 10
Степень турбулентности 594
Сток 172
Стокс 360
Стратификация 624, 649
Структура когерентная 623
Струя 43
— затопленная 497, 516
— осесимметричная закрученная 565
— — незакрученная 563
— пристенная 521
— турбулентная осесимметричная закрученная 644
— — — незакрученная 639
Супераэродинамика 757
Схема двухслойная 651
— — расчета пограничного слоя 697
— разностная 459
— — Адамса — Бэшфорта 480
— — консервативная 466
— — экономичная 461
Сход плавный 203
Сходимость 462

Текучесть 364
Тело жидкое 10
— Максвелла 367
— твердое 10
— Фойхта 367
Температура актуальная 611
— осредненная 611
— пульсационная 611
Тензор антисимметричный 19
— второго ранга 15
— единичный 18
— кососимметричный 19
— моментов двухточечной корреляции 618
— мультипликативный 17
— напряжений 50, 63
— — турбулентных 610
— поворота 18
— полного напряжения 610
— симметричный 18
— скоростей деформаций 47
— сопряженный 16
— сферический 24, 26
— транспонированный 16
— шаровой 24, 26
Теорема Бернулли 91
— — в относительном движении 94
— Гаусса — Остроградского 37
— Гельмгольца 90
— — вторая 51
— — первая 46
— Гонора 185
— Жуковского 177, 194
— — для решетки 206
— Кельвина кинематическая 56
— — о баротропном движении 158

Теорема Кельвина о безвихревом движении 165
— количеств движения 67
— Лагранжа 159
— момента количеств движения 69
— о взаимности касательных напряжений 65, 70, 71
— об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме 72
— — — — — в интегральной форме 71
— — — количества движения в интегральной форме 77
— Римана 179
— Стокса 37, 53
— — для многосвязной области 162
— Эйлера количеств движения в сплошной среде 77
П-теорема 385
Теория крыла конечного размаха 309
— Ньютона ударная 224
— переноса завихренности 648
— пути смешения Прандтля 631, 696, 784
— размерностей 382, 383
— смазки гидродинамическая 441
— тонкого профиля 198
— ударной трубы элементарная 155 и д.
Теплопроводность турбулентная 624
Термодиффузия 805
Термометр пластинчатый 762
Течение осесимметричное 293
— струйное 206
Толщина вытеснения 513, 687
— пограничного слоя 497, 499
— — — номинальная 513
— потери импульса 513
— профиля 178
— — относительная 178
Точка отрыва ламинарного пограничного слоя 594
— перехода ламинарного движения в турбулентное 592—594
Точки сходственные 373
Траектория 42
Транспортивность аппроксимации 482
Трение турбулентное 624
Труба ударная 155 и д.
Трубка вихревая 51
— Прандтля 94
— скоростная 94
— тока 43, 168
Турбулентность мелкомасштабная 619
— когерентная 615, 623, 723
— крупномасштабная 619
— пристеночная 635
— свободная 635
Турбулизатор 604

Угол атаки 178
— — геометрический 312
— — действительный 312
— — местный 224
— — практический 183
— — профиля 178
— — теоретический 183
— — эффективный 312, 809
— бесциркуляционного обтекания 183
— возмущения 335
— выноса профиля 204
— индуктивный 312, 313
— Маха 335
— скоса потока 312, 313
— установки профиля 204
Удлинение крыла 315
Узел 459
Умножение тензора на вектор 18
— — на скаляр 18
— тензоров векторное 26
— — скалярное 26
— — тензорное 27
Уравнение баланса тепла 421
— — — для вязкого газа 743, 744
— — энергии 73, 97
— Бернулли 93
— волновое 102, 221
— Гельмгольца — Фридмана 89
— Громека — Ламба 88
— Гюгонио 110, 127
— динамики в напряжениях 68
— — — — для переменной массы 69
— динамической возможности движения 89
— диффузии 805
— концентрации 801, 805
— Крокко 507, 509
— Навье — Стокса динамики вязкого газа 742
— неразрывности 48, 59
Уравнение неразрывности в механике переменной массы 60
— несжимаемости 48, 59
— переноса импульса (количества движения) пульсаций скорости 609, 610
— — корреляции пульсаций скорости 613
— — скорости диссипации 614
— пограничного слоя универсальное 541
— Прандтля 682
— Прандтля — Мизеса 507, 508
— Пуассона 280
— распространения тепла в турбулентном движении 611
— релаксационное Хинце 736
— реологическое 359
— Сен-Венана — Вантцеля 93
— сохранения массы 59
— — — в интегральной форме 76
— сплошности 59
— турбулентной диффузии 611
— характеристическое 24
— Эйлера 87
Уравнения движения твердого тела в жидкости 323
— моментов первого порядка 609
— Навье — Стокса 370
— — в сферических координатах 371
— — в цилиндрических координатах 371
— Прандтля 503
— Рейнольдса осредненного турбулентного движения 609
— Чаплыгина 258
— Эйлера равновесия среды 79
Ускорение конвективное 54
— локальное 54
— полное 54
— — в сферических координатах 56
— — в цилиндрических координатах 56
Условие Вудса 472
— непроницаемости 86
— Тома 472
— устойчивости Куранта, Фридрихса и Леви 467
Условия подобия достаточные 377, 750
— — необходимые 377
Устойчивость движения 584
— разностной схемы 463
— — — безусловная 469
— — — условная 465

Фаза вещества 368, 798
Фактор температурный 750
Формпараметр 592, 674
Формула Аккерета 224, 225
— Бекингема 398
— Био — Савара 283
— Блазиуса 512, 659
— Буссинеска 429, 625—627, 829
— Ван-Дриста 701, 702
— Ванье 447
— Вуда 106
— Дарси 431, 656
— Кармана 681
— — волнового сопротивления 337
— Кармана — Ченя 265
— Кельвина 57
— Клаузера 722
— — модифицированная 723
— Крокко 769, 820
— Лэйтона 266
— Людвига — Тиллмана 667, 735
— Никурадзе 659
— Озеена 428
— Петрова 433, 448
— Прандтля 631
— — для косого скачка 237
— Прандтля — Шлихтинга 668
— Рэлея 211
— Саттерлэнда 361, 741
— Сквайра — Юнга 691
— сопротивления логарифмическая 653, 659
— — степенная 660, 661
— Стокса 37, 427
— Фокнера 667
— Фурье 829
— Чепмена и Рубезина 741
— Шлихтинга 672
— Шпейделя 692
Формулы изэнтропические 99, 108
Функция давления 85
— Кирхгофа 207
— размернооднородная 384
— сеточная 459
— собственная 464

Функция тока 168
— — в криволинейных координатах 285
— — приведенная 525

Характеристика 146, 270
— волнового уравнения 221
Хвост профиля 178
Хорда профиля 178

Центр давления 197
Циркуляция вектора 37
— скорости 53
— — теоретическая 183

Частота пульсаций 594
Числа подобия 377
Число Гартмана 403
— Грасгофа 431
— Маха 107
— — критическое 143, 267
— Нуссельта 580
— — диффузионное 580, 581
— Пекле 421
— — диффузионное 422, 497
— Прандтля 421
— — диффузионное 422
— — молекулярное 705
— — турбулентное 631
— Рейнольдса 377, 585
— — критическое 585
— — локальное 699
— — пограничного слоя 590
— — фильтрационное 432
— собственное 464
— Струкала 377, 379
— Стэнтона 707, 713
— Фруда 377, 421
— характеристическое 24
— Шмидта 422
— — турбулентное 631
— Эйлера 377

Шаблон разностный 459
Шаг решетки профилей 204
— сетки 459
Шероховатость 586, 591, 598, 662
— абсолютная 662
— зернистая 662
— местная 673
— общая 673
— относительная 598, 662
— — эквивалентная 665
— развитая 663, 665
— установившаяся 671
Ширина области турбулентного перемешивания 641
Шнур вихревой 310

Эжекция 520
Эллипс Буземана 273
Энергия внутренняя совершенного газа 96
— кинетическая 71
— — безвихревого движения 166
— — пульсационного движения 614
— полная 73, 88
— потенциальная 88
Энтальпия 740
— полная 100, 754
— торможения 100
— удельная 97
Энтропия 412
Эффект Гартмана 406
— Коанда 507
— Магнуса 177
— Томса 594

Ядро турбулентное 650

П-теорема 385

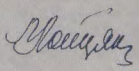
В серии «Классики отечественной науки» готовятся к изданию:

И. М. Бабаков	Теория колебаний
Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье	Курс теоретической механики
К. В. Попкова	Общая фитопатология

Высшее образование

Классики отечественной науки





Наука двадцатого века носит переходный характер — от классической, «феноменологической», довольствующейся простейшими математическими моделями и оставляющей без достаточного внимания многие важные внутренние стороны механизма явлений, к новой, назовем ее условно «физической», науке, глубже проникающей в физическую сущность окружающего нас мира. Не бойся трудностей, а борись с ними. Завоевания вычислительной техники, компьютеризация научных исследований придут к тебе на помощь, но не избавят от необходимости развивать свои теоретические знания. Только во всеоружии глубокого теоретического анализа можно преодолеть встречающиеся трудности, и ты, исследователь двадцать первого века, устранишь их со своего пути и выйдешь из этой борьбы победителем.

Л. Г. Лойцянский

ДРОФА

ISBN 5-7107-6327-6