



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА
«ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОДДЕРЖКА ИНТЕГРАЦИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ»

СЕРИЯ

МЕХАНИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Н.А. Алфутов, К.С. Колесников

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ

Издательство МГТУ
имени Н.Э. Баумана

Устойчивость движения и равновесия

«Механика в техническом университете»

Серия основана в 1999 году

В восьми томах

Том 3

Ответственный редактор К.С. Колесников

Редакционный совет:

К.С. Колесников (председатель)

Н.А. Алфутов

О.С. Нарайкин

Д.Н. Попов

О.А. Ряховский

В.А. Светлицкий

В.И. Усюкин

К.В. Фролов

И.С. Шумилов

Москва

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

2003

Н.А. Алфутов, К.С. Колесников

Устойчивость движения и равновесия

Под редакцией К.С. Колесникова

Издание второе, стереотипное

*Допущено Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по направлению подготовки дипломированных специалистов
в области машиностроения и систем управления*

Москва
Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана
2003

УДК 621.7.014.2 + 621.9.014.2 + 624.074.4(075.8)

ББК 22.251

A45

Рецензенты: академик РАН Д.М. Климов;
д-р техн. наук, проф. В.А. Постнов

A45 Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия: Учеб. для вузов /Под ред. К.С. Колесникова. — 2-е изд., стереотип. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. — 256 с.: ил. — (Сер. Механика в техническом университете; Т. 3).

ISBN 5-7038-1472-3 (Т. 3)

ISBN 5-7038-1371-9

Изложены теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, показано влияние на устойчивость движения консервативной системы диссипативных и гироскопических сил, проведен анализ устойчивости движения потенциально автоколебательных систем: флаттера крыла самолета и шимми автомобиля.

На основе теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной системы даны понятия теории упругой устойчивости, изложен энергетический метод решения задач устойчивости, рассмотрена устойчивость равновесия прямых стержней, прямоугольных пластин, цилиндрических оболочек.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов машиностроительного и приборостроительного профиля.

УДК 621.7.014.2+621.9.014.2+624.074.4(075.8)

ББК 22.251

*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Федеральной целевой программы «Государственная поддержка
интеграции высшего образования и фундаментальной науки»*

ISBN 5-7038-1472-3 (Т. 3)

ISBN 5-7038-1371-9

© Центр «Интеграция», 2001

© Н.А. Алфутов, К.С. Колесников, 2001

Предисловие

В настоящее время, когда машины становятся все более быстроходными, а их конструкции — более тонкостенными, кроме вопросов динамики и прочности современный инженер должен владеть также вопросами устойчивости.

Учебник написан профессорами Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Материал между авторами распределен следующим образом: гл. 1—3 написаны К.С. Колесниковым, гл. 4—8 — Н.А. Алфутовым.

Учебник предназначен для студентов технических университетов машиностроительного профиля; он может быть использован также аспирантами и преподавателями.

Авторы благодарят В.А. Космодемьянского и Б.Г. Попова за помощь при подготовке рукописи. Они также будут признательны читателям, приславшим свои замечания по книге в Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

ТЕОРЕМЫ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Движение (равновесие) механической системы может быть найдено в результате решения системы дифференциальных уравнений, которая может быть нелинейной и иметь высокий порядок. Нахождение ее решений, как правило, сопряжено с большими трудностями. Для малых движений нелинейную систему дифференциальных уравнений обычно линеаризуют. Возникает вопрос: можно ли сделать заключение об устойчивости нелинейной системы на основании анализа уравнений первого приближения?

В рамках теории устойчивости движения (равновесия) механических систем разрабатывают признаки, позволяющие судить о том, будет рассматриваемое движение устойчивым или неустойчивым без нахождения решения дифференциальных уравнений движения (равновесия).

1.1. Основные понятия и определения

Любой инженерный проект опирается, по существу, на решения дифференциальных уравнений движения и равновесия механической системы.

Реализация проекта сопровождается некоторыми допусками при изготовлении, а сама механическая система вынуждена работать под действием случайных возмущающих сил, которые не учтены в дифференциальных уравнениях в силу их неизвестности.

Случайные воздействия на расчетные движения могут приводить к совершенно различным результатам. В одном случае возмущенное движение мало отличается от расчетного, и его называют *устойчивым*, в другом — возмущенное движение совершенно отличается от расчетного и называется *неустойчивым*.

Особо важное значение теория устойчивости движения имеет для техники. Корабль, самолет, ракета при движении должны устойчиво сохранять заданный курс. Турбины, генераторы должны

устойчиво работать в заданном режиме. Гироскопический компас должен устойчиво показывать направление географического меридиана и т.д.

Теория устойчивости движения и равновесия механических систем занимается установлением признаков, позволяющих судить, будет ли рассматриваемое движение или равновесие устойчивым или неустойчивым.

Так как в действительности возмущающие факторы существуют всегда, исследование устойчивости приобретает важное теоретическое и практическое значение.

Задачей устойчивости движения и равновесия занимались многие виднейшие математики и механики: Л. Эйлер, Ж. Лагранж, Э.Дж. Раус, Дж.Дж. Томсон, П. Тэт, Н.Е. Жуковский, А. Пуанкаре. Наиболее общая постановка задачи об устойчивости движения, мощные и вместе с тем строгие методы ее решения были предложены в 1892 г. А.М. Ляпуновым. Основополагающими они являются и в настоящее время.

Рассмотрим механическую систему с голономными связями. Положение механической системы определяется обобщенными координатами $\{q_i\}$, $i = 1, \dots, s$. Движение механической системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (1.1)$$

где T — кинетическая энергия системы, при наличии голономных стационарных связей имеющая вид однородной функции второй степени обобщенных скоростей:

$$T = \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Здесь коэффициенты $\{a_{ij}\}$, $i = 1, \dots, s$, зависят от обобщенных координат; обобщенные силы $\{Q_i\}$ определяются активными силами, действующими на механическую систему, и зависят от времени, обобщенных координат и скоростей.

Отметим, что уравнения Лагранжа определяют движение не только механической, но и электрической, электромеханической или гидравлической систем. В качестве обобщенных координат при этом могут быть выбраны декартовы координаты точек, скорости, токи, напряжения, температуры и т.п. Сказанным подчеркивается общность методов исследования устойчивости

систем любой физической природы, поскольку при этом определяется устойчивость решений дифференциальных уравнений, выражающих их состояние.

Систему дифференциальных уравнений (1.1), разрешив относительно вторых производных от обобщенных координат \ddot{q}_i , можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = G_i\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right), \quad i = 1, \dots, s, \quad (1.2)$$

где $G_i(t, q, \dot{q})$ — известные функции времени, обобщенных координат $q(q_1, \dots, q_s)$, обобщенных скоростей $\dot{q}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$.

Пусть q_i^0, \dot{q}_i^0 — обобщенные координаты и скорости в некоторый момент времени t_0 , принимаемый за начальный. Тогда решение системы дифференциальных уравнений (1.2) будет определять движение механической системы:

$$q_i = q_i(t, q^0, \dot{q}^0), \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.3)$$

Структура общего решения (1.3) показывает, что всякой заданной системе величин q_i^0, \dot{q}_i^0 отвечает вполне определенное движение. Разным системам величин соответствуют разные движения механической системы.

Выберем из всех возможных движений одно, отвечающее при моменте времени t_0 фиксированным начальным условиям $\bar{q}_i^0, \bar{\dot{q}}_i^0$. Соответствующее частное решение

$$q_i = q_i(t, t_0, \bar{q}^0, \bar{\dot{q}}^0), \quad i = 1, \dots, s, \quad (1.4)$$

условимся называть невозмущенным и будем обозначать как

$$q_i = f_i(t), \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.5)$$

Выбор движения, которое принимают за невозмущенное, зависит исключительно от исследователя. Таким образом, при анализе решений механических систем решение, соответствующее движению, должно быть известно и функции $f_i(t)$ определены при всех значениях времени.

Любой другой системе начальных условий, отличных от $\bar{q}_i^0, \bar{\dot{q}}_i^0$, отвечает другое решение, которое соответствует возмущенному движению.

Представим начальные условия для возмущенного движения в виде

$$q_i^0 = \bar{q}_i^0 + \delta_i, \quad \dot{q}_i^0 = \bar{\dot{q}}_i^0 + \dot{\delta}_i, \quad (1.6)$$

где $\delta_i, \dot{\delta}_i$ — некоторые вещественные переменные, называемые *начальными возмущениями*.

Разности

$$q_i - f_i(t), \quad \dot{q}_i - \dot{f}_i(t)$$

для любого момента времени t называют *отклонениями*, или *возмущениями обобщенных координат и скоростей*. Движение системы, отвечающее начальным условиям (1.6), называют *возмущенным движением*.

В качестве меры отклонения возмущенного движения от невозмущенного примем величины

$$\|q - f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^s (q_i - f_i)^2}, \quad \|\dot{q} - \dot{f}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^s (\dot{q}_i - \dot{f}_i)^2},$$

определяющие расстояния от точки q (соответственно \dot{q}) на траектории возмущенного движения до точки f (соответственно \dot{f}) на траектории невозмущенного движения.

Можно ли назначить такие пределы начальных отклонений обобщенных координат и скоростей, при которых последующие возмущения не превзойдут некоторых определенных значений. Это и есть *предмет исследования теории устойчивости*.

Дадим некоторые определения.

Определение 1.1. Невозмущенное движение называют *устойчивым по отношению к величинам q_i, \dot{q}_i* , если при любых произвольно задаваемых малых положительных числах $\varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} > 0$ найдутся такие положительные числа $\delta(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) > 0, \dot{\delta}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) > 0$, что при

$$\|q^0 - f^0\| < \delta, \quad \|\dot{q}^0 - \dot{f}^0\| < \dot{\delta}$$

для всех $t \geq t_0$ выполняются неравенства

$$\|q - f\| < \varepsilon, \quad \|\dot{q} - \dot{f}\| < \dot{\varepsilon}.$$

Определение 1.2. Устойчивое движение называют *асимптотически устойчивым*, если выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q - f\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{q} - \dot{f}\| = 0.$$

Определение 1.3. Невозмущенное движение называют *неустойчивым по отношению к величинам q_i, \dot{q}_i* , если найдутся фиксированные числа $\varepsilon, \dot{\varepsilon}$ и такие сколь угодно малые положительные числа $\delta(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) > 0, \dot{\delta}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) > 0$, что при

$$\|q^0 - f^0\| < \delta, \quad \|\dot{q}^0 - \dot{f}^0\| < \dot{\delta}$$

для всех $t \geq t_0$ выполняется по крайней мере одно неравенство вида

$$|q_i - q_i^0| \geq \varepsilon, \quad |\dot{q}_i - \dot{q}_i^0| \geq \dot{\varepsilon}.$$

В данных выше определениях устойчивости по Ляпунову рассматривается устойчивость невозмущенного движения при возмущении начальных условий. Иначе говоря, возмущенное движение при $t > t_0$ происходит при действии тех же сил, что и невозмущенное. Возмущения начальных условий, так же как вызванные ими отклонения координат и скоростей, предполагаются малыми.

1.2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения

Пусть даны уравнения движения механической системы (1.2) и частное решение, характеризующее невозмущенное движение, определено соотношениями (1.5).

При исследовании устойчивости движения целесообразно наблюдать не поведение обобщенных координат системы в возмущенном движении $q_i(t)$, а только их отклонения (возмущения) $y_i(t)$ от координат $f_i(t)$, которые они имели в невозмущенном движении:

$$y_i(t) = q_i(t) - f_i(t),$$

где $f_i(t)$ — частное решение уравнения (1.2), соответствующее невозмущенному движению, следовательно, $y_i(t)$ — отклонения (возмущения).

Чтобы получить дифференциальное уравнение относительно возмущений, надо из дифференциального уравнения возмущенного движения вычесть дифференциальное уравнение невозмущенного движения. Подставляя $q_i = f_i(t) + y_i$ в уравнения (1.2) и вычитая уравнения невозмущенного движения (1.5), получаем дифференциальные уравнения для возмущений, которые будем в дальнейшем называть дифференциальными уравнениями возмущенного движения:

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = G_i \left(t, y + f(t), \frac{d(y + f(t))}{dt} \right) - G_i \left(t, f(t), \frac{df(t)}{dt} \right), \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.7)$$

Введем следующие обозначения:

$$Y_i \left(t, y, \frac{dy}{dt} \right) = G_i \left(t, y + f(t), \frac{d(y + f(t))}{dt} \right) - G_i \left(t, f(t), \frac{df(t)}{dt} \right),$$

позволяющие представить систему (1.7) в виде

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i \left(t, y, \frac{dy}{dt} \right), \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.8)$$

Эти уравнения являются уравнениями возмущенного движения, причем функции Y_i обращаются в нуль при $y_i = 0, \dot{y} = 0$.

Уравнения (1.8) можно привести к эквивалентной системе $2s$ уравнений первого порядка подстановкой

$$\dot{y}_i = x_{s+i}, \quad y_i = x_i, \quad X_i = x_{s+i}, \quad X_{s+i} = Y_i,$$

тогда система (1.8) примет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n = 2s. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) всегда имеют частное решение $x = 0$, которое соответствует в старых переменных $y = 0$ или $q = f(t)$.

Уравнения (1.9) не будут содержать в явном виде величину t при условии исследования устойчивости равновесия механиче-

ской системы со стационарными голономными связями под действием сил, не содержащих t .

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения не содержат явно t , то невозмущенное движение называют *установившимся*.

Уравнения возмущенного движения можно получить и другим способом, заменив систему (1.2) нормальной системой $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных q, \dot{q} :

$$\dot{q} = z_i, \quad z = G_i(t, q, z), \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.10)$$

Выделим частное решение $q_i = f_i(t)$, $z_i = f_{s+i}(t)$ и перейдем к возмущениям

$$\begin{aligned} y_i &= q_i - f_i(t), & y_{s+i} &= z_i - f_{s+i}(t), \\ \dot{y}_i &= y_{s+i}, & \dot{y}_{s+i} &= G_i(t, y) - G_i(t, f(t)) = Y_i(t, y), \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\dot{y}_i = x_{s+i}, \quad y_i = x_i, \quad X_i = x_{s+i}, \quad X_{s+i} = Y_i,$$

систему дифференциальных уравнений (1.10) представим в виде (1.9).

Итак, всякая задача об устойчивости заданного невозмущенного движения относительно обобщенных координат и скоростей может быть приведена к единообразной математической задаче об устойчивости нулевого решения невозмущенного движения системы дифференциальных уравнений (1.9).

Дадим определения устойчивости применительно к новым переменным и преобразованным дифференциальным уравнениям.

В качестве меры отклонения возмущенного движения от невозмущенного примем положительную величину

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

определяющую расстояние от точки x на фазовой траектории возмущенного движения до начала координат $x = 0$.

Определение 1.4. Невозмущенное движение $x = 0$ называют *устойчивым по отношению к фазовым координатам x* , если при

любом произвольно задаваемом малом положительном числе $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при условии $\|x^0\| < \delta$ для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $\|x\| < \varepsilon$.

Определение 1.5. Устойчивое движение называют *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x\| = 0$.

Определение 1.6. Невозмущенное движение называют *неустойчивым по отношению к величинам x* , если найдутся такое фиксированное число ε и такое сколь угодно малое положительное число δ , что при $\|x^0\| \leq \delta$ выполняется хотя бы одно неравенство $|x_i| \geq \varepsilon$.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение движения физического маятника

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 \sin q = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{mgl}{I_z},$$

где q — угловая координата (угол отклонения маятника от вертикали); m — масса маятника; g — ускорение свободного падения; l — расстояние от центра масс маятника до оси вращения; I_z — момент инерции маятника относительно оси вращения. Требуется получить уравнения возмущенного движения для исследования на устойчивость некоторого частного решения $q = f(t)$, отвечающего начальным условиям q_0, \dot{q}_0 .

Полагая $y = q - f(t)$, найдем дифференциальное уравнение возмущенного движения в виде

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = Y(q, t),$$

$$Y(q, t) = -\omega_0^2 \sin(y + f(t)) + \omega_0^2 \sin(f(t)).$$

Пример 1.2. Рассмотрим сферическое движение твердого тела по инерции. Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0, \quad (a)^*$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0.$$

Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на подвижные оси координат, совпадающие с главными осями инерции тела в закрепленной точке; A, B, C — моменты инерции относительно этих осей. Примем, что $A > B > C$.

Уравнения (а) допускают следующие частные решения:

$$p = p_0 = \text{const}, \quad q_0 = r_0 = 0;$$

$$q = q_0 = \text{const}, \quad p_0 = r_0 = 0;$$

$$r = r_0 = \text{const}, \quad p_0 = q_0 = 0,$$

соответствующие вращению твердого тела вокруг малой, средней и большой осей эллипсоида инерции.

Принимая первый вид движения за невозмущенное, положим

$$x_1 = p - p_0, \quad x_2 = q, \quad x_3 = r.$$

Подставив эти обозначения в уравнения (а), найдем дифференциальные уравнения возмущенного движения в виде

$$A \frac{dx_1}{dt} = (B - C)x_2x_3,$$

$$B \frac{dx_2}{dt} = (C - A)(x_1 + p_0)x_3,$$

$$C \frac{dx_3}{dt} = (A - B)(x_1 + p_0)x_2.$$

1.3. Линеаризация дифференциальных уравнений

Если бы мы сумели проинтегрировать дифференциальные уравнения возмущенного движения механической системы, то

*Здесь и далее в примерах принято буквенное обозначение формул.

решение вопроса об устойчивости или неустойчивости последнего не представляло бы никаких затруднений.

Однако дифференциальные уравнения реальных механических систем обычно бывают нелинейными, и для исследования устойчивости их решений проводят *линеаризацию уравнений*. В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что возмущения координат и скоростей во все время движения остаются малыми, и поэтому в дифференциальных уравнениях удерживаются только члены первого порядка малости. Членами второго и более высоких порядков малости пренебрегают.

Таким образом, *линеаризованные дифференциальные уравнения являются линейными относительно возмущений координат и скоростей. Линеаризованные уравнения называют также уравнениями первого приближения.*

Пусть известны уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad (1.11)$$

для которых $x_0 = 0$ является частным решением.

Проведем разложение правых частей этих уравнений в окрестности нуля в ряды Маклорена по степеням x_i :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(0) + \left(\frac{dX_i}{dx_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{dX_i}{dx_n} \right)_0 x_n + X_i^*,$$

где X_i^* — совокупность членов, зависящих от возмущений x_i в степени выше первой.

Учитывая, что $X_i(0) = 0$ и отбрасывая X_i^* , уравнения (1.11) представляем в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

В этих уравнениях коэффициенты

$$a_{ik} = \left(\frac{dX_i}{dx_k} \right)_{x_k=0}, \quad i, k = 1, \dots, n,$$

в общем случае являются функциями времени t , в частности, они могут быть постоянными числами. Дифференциальные урав-

нения возмущенного движения (1.12) есть уравнения первого приближения. От уравнений (1.11) они отличаются отброшенными членами возмущений в степени выше первой.

Дифференциальные уравнения (1.12) так же, как и прежние уравнения (1.11), являются уравнениями возмущенного движения, однако их отличие от прежних состоит в следующем:

1) эти уравнения являются приближенными, ибо в процессе их вывода были отброшены малые высшего порядка;

2) полученные уравнения являются линейными относительно отклонений x_i .

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1.3. Груз A массой m без начальной скорости размещен на пружине с нелинейной характеристикой жесткости (рис. 1.1, a). В положении статического равновесия $mg = f(x_0)$. Дифференциальное уравнение колебаний груза будет нелинейным:

$$m\ddot{x} + f(x) = mg. \quad (б)$$

Разложим нелинейную функцию $f(x)$ в окрестности x_0 в ряд Тейлора:

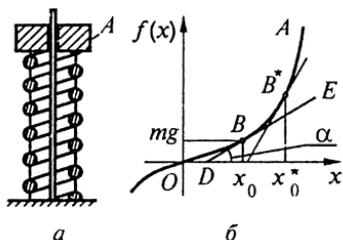


Рис. 1.1

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x_0}$$

и подставим ее в дифференциальное уравнение (б). Полагая $x_1 = x - x_0$ малой величиной и ограничиваясь величинами первого порядка малости, с учетом равенства $mg = f(x_0)$ получим линейризованное дифференциальное уравнение малых колебаний груза около положения статического равновесия:

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0, \quad k = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}. \quad (в)$$

Линеаризация уравнения геометрически может трактоваться как замена первоначальной кривой OA на касательную к ней в точке B (рис. 1.1, $б$), соответствующей положению статического равновесия груза; коэффициент жесткости $k = [df(x)/dx]_{x_0}$ пропорционален $\operatorname{tg} \alpha$.

Из рис. 1.1, б ясно, что эта замена тем точнее, чем с меньшими отклонениями x_1 мы имеем дело и чем ближе кривая OA к прямой DE . Чем меньше отличие от линейности (см. рис. 1.1, б), тем на больших диапазонах изменения x_1 линеаризованное уравнение будет мало отличаться от исходного — нелинейного. На рис. 1.1, б видно, что угол α зависит от x_0 , поэтому коэффициенты линеаризованного уравнения (в) будут другими, если линеаризацию провести в окрестности другого режима невозмущенного движения (скажем, x_0^*). Например, если бы груз был более тяжелым, то положение статического равновесия определялось точкой B^* и коэффициент жесткости имел другое значение:

$$k^* = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0^*}.$$

Предположим, что характеристика пружины задана уравнением кубической параболы. Тогда вместо уравнения (б) будем иметь

$$m\ddot{x} + cx^3 = mg.$$

Линеаризацию проведем около положения статического равновесия; будем полагать $cx_0^3 = mg$, $x = x_0 + x_1$, где x_1 — малое отклонение. Подставляя $x = x_0 + x_1$ в дифференциальное уравнение и удерживая члены только первого порядка малости, получаем дифференциальное уравнение первого приближения

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0, \quad \text{где } k = 3cx_0^2.$$

Линеаризация невозможна, если правая часть дифференциального уравнения (1.11) при каких-либо численных значениях координат или их производных не имеет непрерывных производных.

1.4. Устойчивость линейных систем

Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения линейны и имеют постоянные коэффициенты:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j. \quad (1.13)$$

Решение будем искать в виде

$$x_j = h_j e^{\lambda t},$$

где вектор $h_j (h_1, \dots, h_n)$ называют собственным вектором.

Подставим данное значение x_j в (1.13) и, сократив на $\exp(\lambda t)$, получим систему уравнений, которая связывает собственный вектор системы и подлежащий определению показатель степени λ :

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) h_j = 0,$$

где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$; 0 , если $i \neq j$.

Из алгебры известно, что система однородных относительно h_j уравнений имеет ненулевое решение, если определитель, составленный из коэффициентов этого уравнения, будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Данный определитель называют *характеристическим*. Полученное уравнение n -й степени относительно λ имеет вид

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0. \quad (1.14)$$

Его называют *характеристическим уравнением*.

Пусть корни характеристического уравнения различны. Каждому характеристическому числу λ_j соответствуют собственный вектор $h_j (h_{j1}, \dots, h_{jn})$ и частное решение вида $h_j e^{\lambda_j t}$. Общее решение системы имеет вид

$$x_i = \sum_{j=1}^n c_j h_{ij} e^{\lambda_j t}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.15)$$

где c_j — произвольная постоянная.

Из анализа решения (1.15) следует:

1) если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво;

2) если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один, вещественная часть которого положительна, то невозмущенное движение неустойчиво;

3) если вещественные части некоторых корней характеристического уравнения равны нулю, а вещественные части остальных корней характеристического уравнения отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

характеристическое уравнение для которого

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_0^2}.$$

Возможны четыре варианта:

1. Если дискриминант $D = (\varepsilon^2 - \omega_0^2) > 0$, то оба корня вещественны и отрицательны. Общее решение дифференциального уравнения

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

переменная x со временем будет убывать.

2. Если дискриминант $D < 0$, то имеем два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\sqrt{|D|}$ с отрицательной вещественной частью, переменная x со временем также будет убывать.

3. Когда дискриминант $D = 0$, корни характеристического уравнения кратные: $\lambda_{1,2} = -\varepsilon$, общее решение дифференциального уравнения

$$x = (C_1 + tC_2)e^{\lambda t}.$$

Убывание или возрастание переменной x можно определить по знаку производной:

$$\frac{dx}{dt} = [-\varepsilon C_1 + C_2(1 - \varepsilon t)]e^{-\varepsilon t}.$$

При $(dx/dt) < 0$ переменная x начнет убывать.

4. При $\varepsilon = 0$ корни чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, общее решение дифференциального уравнения

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Координата x будет изменяться по гармоническому закону с постоянной амплитудой, зависящей от начальных условий.

1.5. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению

Линейные уравнения движения механических систем всегда получаются в результате той или иной линеаризации: или при составлении уравнений все зависимости принимают линейными, или, как это было показано, нелинейные величины разлагают в ряд Тейлора и отбрасывают члены, содержащие вторые и высшие степени отклонений переменных и их производных. Возникает вопрос: в какой мере суждение об устойчивости линеаризованной системы уравнений соответствует устойчивости реальной нелинейной системы? Не влияют ли отброшенные члены на устойчивость системы?

Приведем без доказательства *три теоремы Ляпунова о возможности исследования устойчивости по первому приближению.*

Теорема 1. *Если характеристическое уравнение линеаризованной системы с постоянными коэффициентами имеет все корни с отрицательными частями, то нелинейная система будет устойчивой асимптотически (так же, как и линеаризованная), т.е. никакие добавки в виде отброшенных членов второй и высших степеней переменных и их производных не могут в этом случае «испортить» устойчивость системы.*

Теорема 2. *Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то нелинейная система будет так же неустойчива, как и линеаризованная. Никакие добавки в виде отброшенных членов второй и высших степеней переменных и их производных не могут придать системе устойчивость.*

Теорема 3. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один нулевой или чисто мнимый корень и не имеет корней, вещественная часть которых положительна, то об устойчивости нелинейной системы нельзя сделать никакого заключения. Добавки в виде отброшенных членов второго и высших степеней переменных и их производных могут коренным образом повлиять на характер движения.

Поясним сказанное примером.

Пример 1.4. Пусть дифференциальные уравнения невозмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + ax^3, \\ \dot{y} &= x + ay^3,\end{aligned}\tag{г}$$

где a — постоянная.

Линеаризованные уравнения в окрестности $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ имеют вид

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.\tag{д}$$

Их характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

имеет два кратных мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i$, и переменные x и y можно представить тригонометрическими функциями $x = C \cos(t + \alpha)$, $y = C \sin(t + \alpha)$. Следовательно, нулевое решение уравнений (д) устойчиво.

Исследуем теперь устойчивость решения системы нелинейных уравнений (г), не применяя линеаризацию.

Рассмотрим произвольное решение

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

и составим производную от выражения

$$V = x^2 + y^2.$$

Так как функции $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют уравнениям (г), находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) &= 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2[x(-y + ax^3) + y(x + ay^3)] = \\ &= 2a(x^4 + y^4). \end{aligned}$$

Допустим, что $a > 0$. Тогда производная по времени от функции V будет положительной, с течением времени функция V будет возрастать, следовательно, невозмущенное движение неустойчиво. Таким образом, по устойчивости решений линейного приближения в данном случае нельзя судить об устойчивости нелинейной системы.

Такого рода затруднения привели А.М. Ляпунова к созданию особого метода исследования устойчивости, позволяющего установить свойства системы в отношении устойчивости или неустойчивости уравнений возмущенного движения, не интегрируя последних.

В своем классическом труде «Общая задача об устойчивости движения» (1892) А.М. Ляпунов развил два метода решения задач об устойчивости движения:

1) метод характеристических показателей λ , когда решение однородного уравнения возмущенного движения ищется в виде

$$x(t) = C \exp(\lambda t);$$

2) «прямой» (или второй) метод — качественный метод определения устойчивости, когда об устойчивости судят по изменениям в возмущенном движении системы некоторых функций ее координат. Второй метод Ляпунова является наиболее общим, однако подбор функций Ляпунова во многих случаях довольно сложен. В инженерной практике широко распространен метод характеристических показателей для линеаризованных уравнений. Заключение об устойчивости в этом случае будет надежным, если выполняется требование первой теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

1.6. Теоремы второго метода Ляпунова

В большом числе практических задач для исследования устойчивости решения нелинейных систем применяют метод исследования устойчивости соответствующих линейных систем. Случаи, в которых такое исследование некорректно, составляют содержание так называемого второго метода Ляпунова.

Мы будем придерживаться геометрического метода изложения, предпочитая в некоторых случаях наглядное описание исследуемого движения аналитическому.

Представим движение механической системы в n -мерном фазовом пространстве как движение изображающей точки M . Тогда величина $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ определит расстояние изображающей точки до начала координат.

Второй метод основан на привлечении к анализу устойчивости решений функций $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По известным свойствам данных функций, не зная общего решения системы дифференциальных уравнений (1.2), мы имеем возможность сделать заключение об устойчивости исследуемых частных решений.

Рассмотрим, например, функцию

$$V = x_1^2 + x_2^2.$$

Пусть значение этой функции меньше некоторого заданного числа ε^2 ($V \leq \varepsilon^2$). Тогда на основании конструкции V можно утверждать, что каждая из переменных $|x_i| \leq \varepsilon$.

Если функция V имеет вид

$$V = x_1^2 - x_2^2,$$

то при условии $|V| \leq \varepsilon$ каждая из переменных может быть и неограниченной.

Для выделения свойств функции $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем полагать, что $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в окрестности начала координат $\|x\| \leq h$, $h = \text{const} > 0$, и обладает следующими свойствами:

- 1) $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ однозначна, непрерывна;
- 2) $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ обладает непрерывными частными производными $\partial V / \partial x$;
- 3) $V(0, \dots, 0) = 0$.

Определение 1.7. Функцию $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют *знакоопределенной* (положительно-определенной, отрицательно-определенной), если в области $|x_i| \leq h$ она принимает значения одного знака и обращается в нуль только в начале координат.

Определение 1.8. Функцию $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют *знакопостоянной* (положительной или отрицательной), если в области $|x_i| \leq h$ она принимает значения одного знака, но и обращается в нуль при $|x_i| \neq 0$.

Определение 1.9. Функцию $V(x)$ называют *знакопеременной*, если в области $|x_i| \leq h$ она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Отметим, что знакоопределенная функция имеет экстремум в начале координат.

Далее рассмотрим случай положительно-определенной функции V от двух переменных $V = V(x_1, x_2)$. Все рассуждения останутся в силе и при $n > 2$.

Разложим функцию $V(x)$ в ряд Маклорена в окрестности $x = 0$:

$$V(x_1, x_2) = V(0, 0) + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 x_i x_j + o(x^2).$$

Поскольку $V(0, 0) = 0$, $(\partial V / \partial x_i)_0 = 0$, то

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 x_i x_j + o(x^2).$$

Поверхность $V = V(x_1, x_2)$ расположена выше плоскости $x_1 x_2$ и имеет минимум в начале координат.

В области $|x_i| \leq \varepsilon$ поверхность $V = V(x_1, x_2)$ выражается уравнением параболоида

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \right)_0 x_1^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_0 x_1 x_2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right)_0 x_2^2 \right].$$

Область ε представим как область, ограниченную окружностью:

$$x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2. \tag{1.16}$$

Значения функции V на границе области (1.16) представлены соответствующими вертикальными отрезками: минимальное значение отрезком AB , максимальное — отрезком CD (рис. 1.2).

Графики линий поверхности $V(x_1, x_2) = C_i$ определяются как сечения поверхности $V(x_1, x_2)$ плоскостями $V = C_i$.

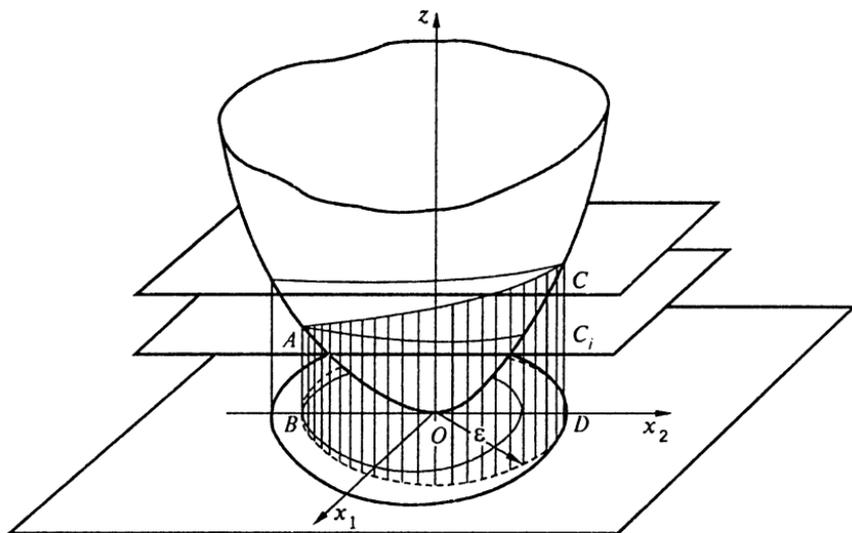


Рис. 1.2

Следовательно, линии $V(x_1, x_2) = C$ замкнуты. Если $C_2 > C_1$, то линия $V(x_1, x_2) = C_1$ находится внутри линии $V(x_1, x_2) = C_2$.

Линия $V(x_1, x_2) = \min V(|x_i| \leq \varepsilon)$ находится внутри окружности (1.16). Линия $V(x_1, x_2) = \max V(|x_i| \leq \varepsilon)$ охватывает окружность (1.16), касаясь ее в точке D .

Производная по времени от V имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i,$$

и, в силу уравнений движения (1.9),

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i. \quad (1.17)$$

Введем вектор градиента к поверхности $V(x_1, x_2) = C$ как

$$\text{grad}V = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial V}{\partial x_i} \bar{e}_i, \quad (1.18)$$

где \bar{e}_i — орты осей x_i .

Известно, что вектор градиента направлен по нормали к поверхности $V(x_1, x_2) = C$ в сторону возрастающих значений C . Введем вектор U с координатами (X_1, X_2) и будем его интерпретировать как вектор скорости точки в двумерном фазовом пространстве. Следовательно, правая часть уравнения (1.17) представляет собой скалярное произведение двух векторов (рис. 1.3):

$$\dot{V} = U \text{ grad } V$$

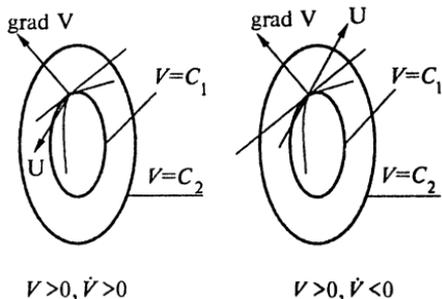


Рис. 1.3

и определяет угол между двумя векторами — вектором градиента $\text{grad } V$ и вектором скорости U изображающей точки, — и, следовательно, определяет направление движения изображающей точки в n -мерном ($n = 2$) пространстве.

Пусть функция V положительно определена. Поверхности $V(x_1, x_2) = C_i$ на плоскости (x_1, x_2) представляют собой эллипсы, и при $\dot{V} < 0$ изображающая точка переходит из области больших значений C_i в область меньших значений C_i . Расстояние от изображающей точки до начала координат уменьшается, уменьшается и $|x|$, следовательно, движение асимптотически устойчиво.

В случае $\dot{V} > 0$ значение функции V возрастает, следовательно, изображающая точка будет пересекать поверхности C_i , удаляясь от центра, $|x|$ возрастает, и движение неустойчиво.

Теорема. Для устойчивости невозмущенного движения достаточно существования знакоопределенной функции $V(x)$, производная которой в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения знакопостоянна, противоположного знака с V или тождественно равна нулю.

Доказательство. Построим ϵ -сферу. Найдем минимум P функции V на ϵ -сфере. По числу $P > 0$ выделим δ -сферу так, чтобы значение P было максимумом функции V на δ -сфере. Выберем начальные возмущения так, что $|x_i^0| \leq \delta$. Тогда $V^0 \leq P$. Из неравенства $V < 0$ следует $V \leq V^0 \leq P$. Таким образом, функция V остается меньше своей нижней границы на ϵ -сфере, и при начальных возмущениях $|x_i^0| < \delta$ изображающая точка не выйдет за пределы ϵ -сферы, т.е. $|x_i| < \epsilon$ и нулевое решение устойчиво.

Признаки знакоопределенности функции Ляпунова можно выявить с помощью *критерия Сильвестра*.

Рассмотрим матрицу коэффициентов квадратичной формы, представив ее в виде

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij} x_i x_j.$$

Составим для нее n главных диагональных миноров.

В алгебре доказывается следующий критерий Сильвестра: для того чтобы квадратичная форма с вещественными коэффициентами была определено-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы $[c_{ij}]$ были положительны:

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (1.19)$$

Если функция $V(x)$ определено-положительная, то функция $-V(x)$ будет определено-отрицательной. Поэтому достаточным условием определенной отрицательности функции $V(x)$ будет критерий Сильвестра для матрицы $-[c_{ij}]$. Эти условия имеют вид

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \dots,$$

т.е. знаки определителей должны последовательно чередоваться, причем знак c_{11} должен быть отрицательным.

Пример 1.5. Рассмотрим функцию $V = 1 - \cos(x_1 - x_2) + \sin^2 x_1$. После разложения в ряды по степеням x_1 и x_2 приводим квадратичную часть функции к виду

$$V = \frac{1}{2} (3x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2).$$

Матрица коэффициентов

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Главные диагональные миноры этой формы имеют вид $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = [3 \cdot 1 - (-1)(-1)] = 2 > 0$, следовательно, функция V определенно-положительна.

Пример 1.6. Выясним условия устойчивости вращения твердого тела относительно угловой скорости. Уравнения возмущенного движения имеют вид (1.12):

$$A \frac{dx_1}{dt} = (B - C)x_2x_3,$$

$$B \frac{dx_2}{dt} = (C - A)(x_1 + p_0)x_3,$$

$$C \frac{dx_3}{dt} = (A - B)(x_1 + p_0)x_2.$$

Уравнения линейного приближения имеют вид

$$A \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad B \frac{dx_2}{dt} = (C - A)p_0x_3, \quad C \frac{dx_3}{dt} = (A - B)p_0x_2.$$

Запишем характеристическое уравнение для системы двух последних уравнений:

$$AB\lambda^2 - (A - C)(B - A)p_0^2 = 0.$$

Корни данного уравнения

$$\lambda_{1,2} = \pm p_0 \sqrt{(A - C)(B - A)} / \sqrt{AB}.$$

При условии $B > A > C$ или $C > A > B$ корни $\lambda_{1,2}$ вещественны и один из корней положителен, следовательно, вращение вокруг средней оси неустойчиво.

Пусть вдоль оси вращения расположена малая или большая ось эллипсоида инерции. Это означает, что $A < B, C$ или $A > B, C$. В этом случае оба корня являются мнимыми, следовательно, судить об устойчивости по уравнениям первого приближения нельзя.

Применим второй метод Ляпунова. В качестве функции Ляпунова возьмем функцию

$$V = (Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Ap_0x_1)^2 \pm [B(B - C)x_2^2 + C(C - A)x_3^2],$$

где знак плюс берется при $A < B, C$, а знак минус — при $A > B, C$.

Функция V обращается в нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и положительна в окрестности нуля; dV/dt обращается в нуль в силу уравнений движения. Следовательно, перманентное вращение относительно большой или малой оси устойчиво.

1.7. Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативных систем

Теорему, впервые сформулированную Лагранжем и строго доказанную Дирихле, обычно излагают следующим образом:

Теорема. *Если в положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет изолированный минимум, то равновесие в этом положении устойчиво.*

Отметим, что функция Ляпунова здесь получает конкретную физическую интерпретацию.

Доказательство. Пусть механическая система с голономными, стационарными связями находится в положении равновесия под действием потенциальных сил.

В положении равновесия обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = -\partial\Pi/\partial q_i = 0,$$

где Π — потенциальная энергия системы.

Решая уравнения $-\partial\Pi/\partial q_i = 0$ относительно q_i , найдем значения обобщенных координат, при которых система находится в равновесии. Найденные положения равновесия могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Рассмотрим одно из возможных положений равновесия. Не уменьшая общности, всегда можно предположить, что для рассматриваемого положения равновесия материальной системы значения q_i равны нулю. Устойчивость положений равновесия рассматривается относительно обобщенных координат и скоростей.

В положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум и может быть принята равной нулю, как функция, определяемая с точностью до произвольной постоянной. Поэтому

потенциальная энергия представляет положительно-определенную функцию переменных q_i .

В качестве функции Ляпунова выберем полную механическую энергию системы:

$$V = T + \Pi.$$

Поскольку кинетическая энергия T представляет собой положительно-определенную функцию скоростей, потенциальная энергия Π — положительно-определенную функцию обобщенных координат, следовательно, является положительно-определенной функцией скоростей, координат. Полная производная по времени от V равна нулю на основании закона сохранения энергии.

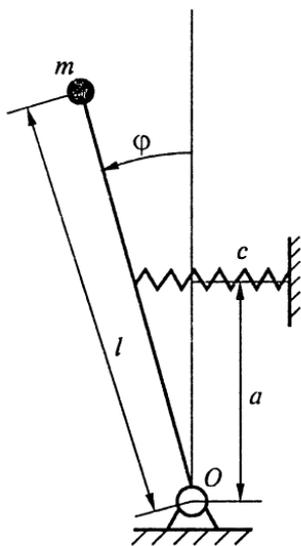


Рис. 1.4

Данная функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, и положение равновесия механической системы устойчиво.

Теорема Лагранжа получила широкое применение при анализе устойчивости равновесия динамических систем.

Пример 1.7. Требуется найти условия устойчивого вертикального положения равновесия математического маятника массой m , опирающегося на цилиндрический шарнир и подкрепленного невесомой пружины с жесткостью c (рис. 1.4.).

Система имеет одну степень свободы, в качестве обобщенной координаты выбираем угол φ , который будем считать малой величиной. Вычисляем функцию потенциальной энергии системы:

$$\Pi = -mgl(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} c(a\varphi^2) = \frac{1}{2}(ca^2 - mgl)\varphi^2 + \frac{mgl}{4!}\varphi^4 - \dots$$

Ограничиваясь квадратичной формой, находим

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = (ca^2 - mgl)\varphi = 0,$$

откуда определяем положение равновесия маятника: $\varphi = 0$.

На основании теоремы Лагранжа положение равновесия маятника при $\varphi = 0$ будет устойчивым, если $d^2 \Pi / d\varphi^2 > 0$. Вычисляем

$$\frac{d^2 \Pi}{d\varphi^2} = ca^2 - mgl.$$

Следовательно, вертикальное положение маятника будет устойчивым при $ca^2 > mgl$.

1.8. Критерии устойчивости линейных систем

Линеаризованные уравнения возмущенного движения являются линейными однородными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, решения которых можно искать в виде

$$y_i(t) = h_i e^{\lambda t}. \quad (1.20)$$

После подстановки y_i в дифференциальные уравнения получим характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами относительно неизвестного параметра λ , которое можно представить в виде (1.14):

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (1.21)$$

Не определяя значения корней уравнения (1.21), *критерии устойчивости позволяют определить условия, когда все корни будут отрицательными или будут иметь отрицательные вещественные части*. В этом случае, как следует из (1.20), при $t \rightarrow \infty$ $y_i(t) \rightarrow 0$.

Алгебраический критерий Гурвица (приводится без доказательства). Напомним правило составления определителя Гурвица n -го порядка. Оно заключается в следующем: 1) выписываем по главной диагонали все коэффициенты от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов; 2) дополняем столбцы вверх и вниз от диагональных членов, причем при дополнении вверх вписываем в столбец коэффициенты с последовательно возрастающим индексом, а вниз — коэффициенты с последовательно убывающим индексом; 3) на место коэффициентов, индексы которых больше, чем n , и меньше, чем нуль, подставляем нули.

Для того чтобы из определителя Гурвица получить миноры первого, второго, третьего и т.д. порядков, надо вычеркнуть все столбцы, стоящие правее, и все строки, расположенные ниже диагональных коэффициентов, с индексами соответственно 1, 2, 3 и т.д.

Формулировка критерия Гурвица. Для того чтобы все корни уравнения (1.21) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & & & & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & & & & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & & & & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & & & & a_{n-2} & a_n & & 0 \\ 0 & & & & a_{n-3} & a_{n-1} & & 0 \\ 0 & & & & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n & \end{vmatrix}$$

и все его диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

были положительны. Как следствие вытекает необходимое, но недостаточное условие, что коэффициенты характеристического уравнения (1.21) должны быть одного знака.

Для уравнения второй степени

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

имеем условия:

1) $a_0 > 0$;

2) $a_1 > 0$;

3) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$,

или окончательно

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

Для уравнения третьей степени

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

имеем

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 > 0,$$

откуда $a_3 > 0$.

Окончательно условия устойчивости для уравнений третьего порядка можно записать так:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (1.22)$$

Для характеристического уравнения четвертого порядка условия устойчивости будут следующими:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \\ \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0. \quad (1.23)$$

Из приведенных примеров видно, как получить условия устойчивости для уравнений любой степени.

Проверить с помощью критерия Гурвица устойчивость любой заданной линейной системы не представляет трудности. Однако при проектировании, когда требуется выбрать параметры системы, чтобы она была устойчивой, для систем высокого порядка требуется проделать громоздкий анализ.

Пример 1.8. Исследуем устойчивость одноосного гиросtabilизатора (рис. 1.5). С внутренней рамкой карданова подвеса связан датчик угла, измеряющий угол β поворота внутренней рамки относительно внешней. Обозначим через α малый угол поворота внешней рамки от некоторого установившегося значения. Двигатель D стабилизации создает прикладываемый к

наружной рамке момент $M = -k\beta - \mu\alpha$, где k, μ — положительные константы.

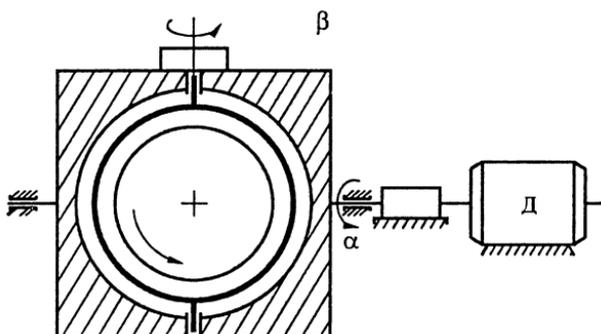


Рис. 1.5

Пусть A — момент инерции всей системы относительно оси наружной рамки, B — момент инерции внутренней рамки вместе с ротором относительно оси внутренней рамки, углы α, β — малые величины. Линеаризованные уравнения движения гиросtabilизатора будут иметь вид

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + \mu\dot{\alpha} + H\dot{\beta} + k\beta &= 0, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (e)$$

где H — кинетический момент ротора.

Частное решение системы (e) определяется $\alpha = 0, \beta = 0$. Следовательно, уравнения (e) являются уравнениями возмущенного движения. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 + \mu\lambda & H\lambda + k \\ -H\lambda & B\lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(AB\lambda^3 + B\mu\lambda^2 + H^2\lambda + Hk)\lambda = 0. \quad (ж)$$

Наличие корня $\lambda = 0$ свидетельствует о том, что система (e) допускает нулевое частное решение.

Рассмотрим уравнение

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0,$$

где

$$a_0 = AB, \quad a_1 = B\mu, \quad a_2 = H^2, \quad a_3 = Hk.$$

Применим критерий Гурвица. Условия устойчивости имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

откуда следуют ограничения на параметры системы. Условия $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ выполняются автоматически. Условие $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$, приводящее к неравенству

$$B\mu H^2 - ABHk > 0,$$

будет выполнено, если

$$\mu H / A > k.$$

При выполнении этого условия нулевое решение уравнений возмущенного движения гиросtabilизатора будет асимптотически устойчиво.

Критерий Вышнеградского. Для систем третьего порядка И.А. Вышнеградский не просто построил границу устойчивости на плоскости параметров, но и разграничил область устойчивости на три области с различным характером отрицательных корней, дающих представление о поведении отклонений во времени, что очень важно при анализе систем автоматического регулирования.

Характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

путем деления на a_3 и введения новой переменной

$$u = \lambda \sqrt[3]{a_0/a_3} \quad (a_0 > 0, \quad a_3 > 0)$$

Вышнеградский привел к нормированному виду

$$u^3 + Au^2 + Bu + 1 = 0, \quad (1.24)$$

где безразмерные коэффициенты

$$A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}, \quad B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}$$

называют параметрами Вышнеградского.

Применяя условия (1.22) к уравнению (1.24), получим границу устойчивости в виде

$$AB = 1 \text{ при } A > 0, B > 0.$$

На плоскости параметров A и B (рис. 1.6) это равенство изобразится в виде гиперболы, называемой гиперболой Вышнеградского. Критерий устойчивости Вышнеградского для уравнения (1.23) имеет вид

$$A > 0, B > 0, AB > 1.$$

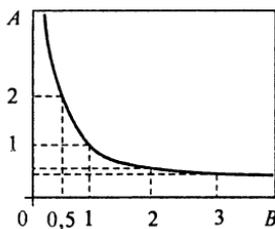


Рис. 1.6

Следовательно, область устойчивости лежит выше и правее гиперболы. Область между гиперболой и осями координат, для которой

$$A > 0, B > 0, AB < 1,$$

так же, как и квадранты плоскости, кроме первого, не удовлетворяет условиям устойчивости.

Анализируя решение кубического уравнения (1.24), Вышнеградский разграничивал области I , II и III расположения корней различного характера (рис. 1.7). На комплексной плоскости α , $i\omega$ корни характеристического уравнения отмечены крестиками.

Две кривые CE и CF симметричны относительно биссектрисы координатного угла. В точке C с координатами $A = B = 3$ все три корня равны между собой. В области III диаграммы Вышнеградского все три корня характеристического уравнения вещественны, в областях I и II один вещественный и пара комплексно-сопряженных, причем в области I комплексные корни расположены ближе к мнимой оси, чем вещественный корень, а в области II наоборот. Последнее обстоятельство существенно влияет на характер протекания отклонения во времени, или, как называют в

теории автоматического управления, на форму кривой переходного процесса.

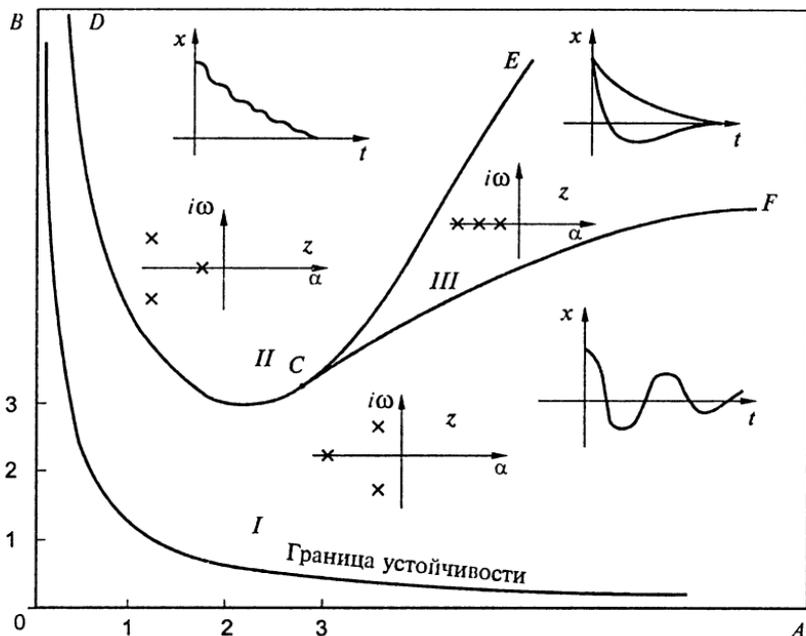


Рис. 1.7

Пример 1.9. Требуется исследовать устойчивость работы двигателя внутреннего сгорания. Стационарный двигатель внутреннего сгорания работает под постоянной нагрузкой и должен иметь постоянную угловую скорость ω_0 , для поддержания которой снабжен центробежным регулятором (рис. 1.8). На рисунке показан простейший регулятор прямого действия. При повышении угловой скорости муфта 1 центробежного регулятора поднимается вверх и задвижка 2 уменьшает подачу топлива в двигатель, а при снижении угловой скорости — увеличивает ее.

Уравнение вращения вала двигателя со всеми другими массами, которые движутся вместе с валом, будет иметь вид

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_1 - M_2 - M_3, \quad (3)$$

где J — момент инерции вала совместно с движущимися вместе с ним массами; M_1 — движущий момент на валу двигателя; M_2 и M_3 — моменты внешней нагрузки и внутреннего сопротивления.

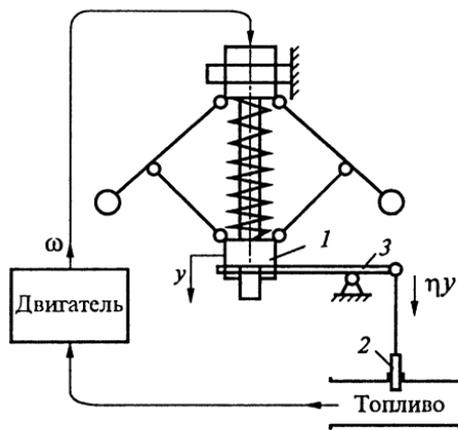


Рис. 1.8

Движущий момент зависит от количества подаваемого в двигатель топлива, т.е. от положения задвижки регулирующего органа 2 и угловой скорости ω . Обозначим через y координату положения муфты 1 регулятора, причем за положительное направление примем перемещение вниз. Тогда координата регулирующего органа будет равна $-\alpha y$, причем коэффициент α определится соотношением плеч рычага 3. Представим, что

$$M_1 = M_1(\alpha y, \omega). \quad (\text{и})$$

Момент внешней нагрузки M_2 будем считать постоянным, момент сопротивления M_3 примем зависящим от угловой скорости:

$$M_3 = M_3(\omega). \quad (\text{к})$$

Уравнение движения муфты 1 будет выглядеть так:

$$m\ddot{y} = F_1 + F_2 + F_3, \quad (\text{л})$$

где m — масса муфты и всех движущихся с ней частей; F_1 — приведенная к муфте сила, возникающая от действия центробежных грузов; F_2 — сила пружины; F_3 — сила сопротивления, пропорционального скорости.

Для этих сил имеют место следующие зависимости:

$$F_1 = -(a_1 \omega^2 + a_2), \quad F_2 = F_2(y_0) - c_1 y, \quad F_3 = -h\dot{y}, \quad (\text{м})$$

причем коэффициенты a_1 , a_2 , c_1 , h определяются конструкцией центробежного регулятора; $F_2(y_0)$ — сила предварительного сжа-

тия пружины в невозмущенном положении, когда $y = y_0$. После подстановки зависимостей (м) в уравнение (л) получим

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + c_1 y = -(a_1 \omega^2 + a_2) + F_2(y_0). \quad (\text{н})$$

Линеаризуем уравнения (з) и (н) в малой окрестности постоянных ω_0 и y_0 , положив

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega, \quad y = y_0 + \Delta y. \quad (\text{о})$$

Невозмущенное движение механической системы характеризуется уравнениями

$$\begin{aligned} M_1(y_0, \omega_0) - M_2 - M_3(\omega_0) &= 0, \\ -(a_1 \omega_0^2 + a_2) + F_2(y_0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{п})$$

В уравнении (з) разложим функции $M_1(y, \omega)$, $M_3(\omega)$ в окрестности ω_0 , y_0 в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} M_1(y, \omega) &= M_1(y_0, \omega_0) + \left. \frac{\partial M_1}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \Delta\omega + \left. \frac{\partial M_1}{\partial y} \right|_{y_0} \Delta y + \dots, \\ M_3(\omega) &= M_3(\omega_0) + \left. \frac{dM_3}{d\omega} \right|_{\omega_0} \Delta\omega + \dots \end{aligned}$$

Осуществив подстановку соотношений (о) в уравнения (з) и (н) и вычтя из последних равенства (п), получим уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} J \frac{d\Delta\omega}{dt} + \left[\left. \frac{dM_3}{d\omega} \right|_{\omega_0} + \left. \frac{\partial M_1}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \right] \Delta\omega &= \left. \frac{\partial M_1}{\partial y} \right|_{y_0} \Delta y, \\ m\Delta\ddot{y} + h\Delta\dot{y} + c_1 \Delta y &= -2a_1 \omega_0 \Delta\omega; \end{aligned}$$

введя обозначения, запишем их в виде

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\omega} + \varepsilon_1 \Delta\omega + k_1 \Delta y &= 0, \\ \Delta\ddot{y} + \varepsilon_2 \Delta\dot{y} + k_2^2 \Delta y + k_3 \Delta\omega &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{J} \left[\left. \frac{dM_3}{d\omega} \right|_{\omega_0} - \left. \frac{\partial M_1}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \right], \quad k_1 = - \left. \frac{1}{J} \frac{\partial M_1}{\partial y} \right|_{y_0},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{h}{m}, \quad k_2^2 = \frac{c_1}{m}, \quad k_3 = \frac{2a_1 w_0}{m}.$$

Характеристическое уравнение будет следующим:

$$\lambda^3 + \lambda^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \lambda(k_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) + \varepsilon_1 k_2^2 - k_1 k_3 = 0,$$

или

$$\lambda^3 + \lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3 = 0.$$

Для приведения этого уравнения к виду (1.24) введем новую переменную

$$u = \lambda \sqrt[3]{1/a_3}, \quad a_3 > 0.$$

Получим

$$u^3 + Au^2 + Bu + 1 = 0,$$

где безразмерные коэффициенты

$$A = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt[3]{\varepsilon_1 k_2^2 - k_1 k_3}}, \quad B = \frac{k_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sqrt[3]{(\varepsilon_1 k_2^2 - k_1 k_3)^2}}.$$

На практике, как правило, коэффициенты $k_1 < 0$, $k_3 < 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Поэтому необходимые условия устойчивости $A > 0$ выполняются. Если при этом $AB > 0$, то работа двигателя внутреннего сгорания при постоянной нагрузке будет асимптотически устойчивой. По произведению коэффициентов AB можно найти области I, II, III на рис. 1.7 и определить характер изменения функции $\omega(t)$, т.е. характер протекания переходного процесса.

Частотный критерий А.В. Михайлова широко применяют при анализе систем автоматического управления. Воспользуемся им для оценки корней характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение (1.21) представим в виде многочлена

$$L(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \quad (1.25)$$

Подставив в него чисто мнимое значение $z = i\omega$, получим

$$L(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega), \quad (1.26)$$

где

$$X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots,$$

$$Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots$$

Комплексную функцию $L(i\omega)$, согласно (1.26), при заданном параметре ω можно изобразить на комплексной плоскости X, iY в виде вектора (рис. 1.9). Если же изменять параметр ω в интервале $0 \leq \omega \leq +\infty$, то конец этого вектора опишет некоторую кривую, каждая точка которой будет соответствовать определенному значению ω . Такую кривую называют кривой Михайлова для многочлена $L(z)$.

Покажем, что по виду кривой Михайлова можно судить о знаках вещественных частей корней указанного многочлена.

Обозначив корни многочлена $L(z)$ через z_1, z_2, \dots, z_n , можно записать его выражение (1.26) в виде

$$L(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n).$$

Тогда выражение для кривой Михайлова будет таким:

$$L(i\omega) = a_0(i\omega - z_1)(i\omega - z_2)\dots(i\omega - z_n). \quad (1.27)$$

Поскольку коэффициенты многочлена являются вещественными числами, для него возможны четыре варианта корней: два вещественных — отрицательный и положительный и две пары комплексно-сопряженных — с отрицательной и положительной вещественными частями.

Рассмотрим поведение вектора $(i\omega - z_1)$ на комплексной плоскости корней $(\alpha, i\omega)$:

1) отрицательный вещественный корень $z_1 = \alpha_1 < 0$ (рис. 1.10, а); по правилу вычитания векторов находим, что комплексное число $(i\omega - z_1)$ изобразится вектором AB . Если изменять ω в пределах $0 \leq \omega \leq +\infty$, то точка B пройдет всю положительную часть мнимой

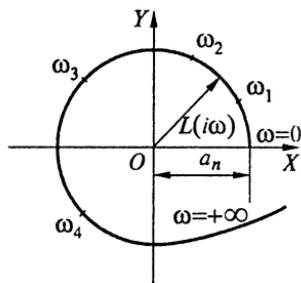


Рис. 1.9

оси, причем вектор AB , удлиняясь, повернется вокруг точки A против направления движения часовой стрелки на угол

$$\varphi_1 = +\frac{\pi}{2};$$

2) положительному вещественному корню $z_1 = \alpha_1 > 0$ соответствует вектор $i\omega - z_1 = AB$ (рис. 1.10, б), который при $0 \leq \omega \leq +\infty$ повернется по направлению движения часовой стрелки на угол

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2};$$

3) паре комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью $z_{1,2} = \alpha_1 \pm i\omega_1$ ($\alpha_1 < 0$) соответствуют два вектора $(i\omega - z_1) = A_1 B$ и $(i\omega - z_2) = A_2 B$ (рис. 1.10, в); как видно на рисунке, первый из них при изменении $0 \leq \omega \leq +\infty$ повернется на угол

$$\varphi_1 = +\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right),$$

а второй — на угол

$$\varphi_2 = +\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right);$$

4) наконец, паре комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью $z_{1,2} = \alpha_1 \pm i\omega_1$ ($\alpha_1 > 0$) отвечают два вектора $(i\omega - z_1) = A_1 B$ и $(i\omega - z_2) = A_2 B$ (рис. 1.10, г), причем первый из них при $0 \leq \omega \leq +\infty$ повернется на угол

$$\varphi_1 = -\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right),$$

а второй — на угол

$$\varphi_2 = -\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right).$$

Подсчитаем теперь, какой угол поворота получит вектор $L(i\omega)$, если $0 \leq \omega \leq +\infty$. Известно, что при перемножении комплексных чисел аргументы складываются, поэтому угол поворота вектора $L(i\omega)$, согласно (1.27), будет равен сумме поворотов всех векторов:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

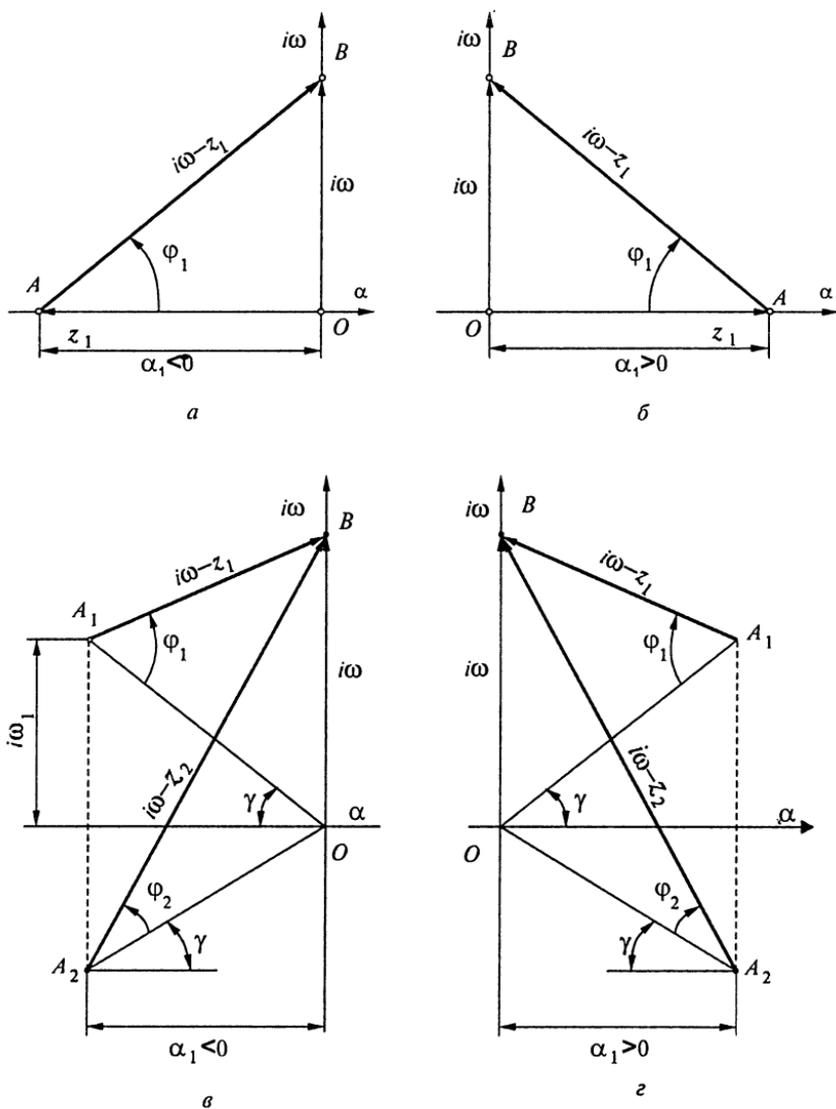


Рис. 1.10

Из приведенного анализа видно, что каждому отрицательному корню соответствует поворот вектора на угол $\varphi = \pi/2$ против направления движения стрелки часов, каждой паре комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью — поворот на угол $\varphi = 2\pi/2$ в том же направлении. Поэтому мно-

гочлен n -й степени $L(z)$ будет иметь все корни с отрицательной вещественной частью, если вектор $L(i\omega)$ при $0 \leq \omega \leq +\infty$ сделает поворот против направления движения стрелки часов на угол $\varphi = n\pi/2$.

Таким образом, частотный критерий Михайлова можно сформулировать следующим образом: *линейная система устойчива, если вектор, вычерчивающий кривую Михайлова на комплексной плоскости корней характеристического уравнения, при $0 \leq \omega \leq +\infty$ повернется на угол $\varphi = n\pi/2$ против направления вращения стрелки часов, где n — степень характеристического уравнения.*

Заметим, что если характеристическое уравнение (1.21) имеет один нулевой корень ($a_n = 0$), то начинается кривая Михайлова из начала координат; если все остальные корни имеют отрицательные вещественные части, то угол поворота кривой Михайлова при $0 \leq \omega \leq +\infty$ будет $\varphi = (n - 1)\pi/2$. Если имеются чисто мнимые корни $z = i\omega$, то при $\omega = \omega_0$ кривая пройдет через начало координат, и таким образом будет определен мнимый корень.

Когда в характеристическом уравнении $a_n \neq 0$, кривая Михайлова берет начало на вещественной оси X в точке $X = a_n$ и при возрастании ω ($0 \leq \omega \leq +\infty$) идет вверх и влево, поочередно пересекая оси координат, а при $\omega \rightarrow +\infty$ всегда уходит в бесконечность. Число точек пересечения с осями координат для устойчивой системы равно n (числу корней характеристического уравнения), включая и начальную точку $\omega = 0$. Можно выразить иначе: *в случае устойчивой системы кривая Михайлова проходит поочередно против направления вращения стрелки часов n квадрантов комплексной плоскости (X, iY).*

ВЛИЯНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ДИССИПАТИВНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

В научной литературе рассматривается довольно широкий класс консервативных систем, для которых в движении сумма кинетической и потенциальной энергии всегда постоянна. Однако в реальных системах всегда имеется диссипация энергии, в некоторых из них присутствуют гироскопические силы. В этой главе сформулированы теоремы, на основании которых можно сделать заключение о том, как влияют на устойчивость движения консервативной системы диссипативные и гироскопические силы.

2.1. Теоремы Кельвина о влиянии диссипативных сил

Существует довольно много механических систем, в которых кроме потенциальных имеются диссипативные силы, пропорциональные первой степени скорости. Для движения систем с одной или двумя степенями свободы оценить устойчивость движения непосредственно по корням характеристического уравнения не представляет труда. Для системы с большим числом степеней свободы дело обстоит сложнее.

Возникает вопрос: нельзя ли изучить свойства механической системы без учета диссипативных сил, принимая во внимание только действие потенциальных сил, что значительно проще, а затем дать качественную оценку действию диссипативных сил. Для инженерной практики такая постановка вопроса имеет много преимуществ, поскольку количественные выражения для диссипативных сил в реальных системах не всегда надежны.

При наличии только потенциальных сил механическая система консервативна, и ее устойчивость равновесия можно оценить на основании теоремы Лагранжа путем исследования функции потенциальной энергии на локальный минимум.

Влияние диссипативных сил, пропорциональных первой степени скорости, на устойчивость равновесия изучал лорд Кельвин. Он обосновал следующие теоремы*.

Теорема 1. *Диссипативные силы не нарушают устойчивости, т.е. если механическая система при действии потенциальных сил устойчива, то при добавлении диссипативных сил она по-прежнему будет устойчивой.*

Теорема 2. *Если равновесие устойчиво при потенциальных силах, то оно становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией (с диссипацией по всем нормальным координатам).*

Теорема 3. *Неустойчивое при потенциальных силах равновесие остается неустойчивым и при добавлении диссипативных сил. Иначе говоря, неустойчивое при потенциальных силах равновесие нельзя сделать устойчивым при добавлении диссипативных сил.*

Для иллюстрации теорем исследуем устойчивость равновесия опрокинутого маятника с одной степенью свободы, имеющего идеальную ось опоры и находящегося под действием потенциальных сил веса и линейной силы упругости цилиндрической пружины с коэффициентом жесткости c (см. рис. 1.4).

На основании теоремы об изменении момента количества движения относительно центра O опоры линеаризованные уравнения возмущенного движения около вертикального положения равновесия маятника имеют вид

$$ml\ddot{\varphi} = mgl\varphi - a^2c\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \quad (2.1)$$

Здесь m , l — масса и длина маятника; g — ускорение силы тяжести; c — жесткость пружины; a — расстояние от оси опоры до оси пружины;

$$k^2 = \frac{a^2c}{l^2m} - \frac{g}{l}.$$

Решение однородного уравнения (2.1) ищем в виде

* Доказательство теорем см.: Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

$$\varphi = Ae^{\lambda t}. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в уравнение (2.1) и принимая во внимание, что $A \neq 0$, получаем характеристическое уравнение для λ :

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

откуда находим два значения корня:

$$\lambda_1 = ik, \quad \lambda_2 = -ik. \quad (2.3)$$

Если $k^2 > 0$, то в выражении (2.3) k — вещественное положительное число; положение равновесия системы устойчиво, и при малых начальных отклонениях

$$t = 0: \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$$

маятник будет совершать гармонические колебания относительно положения равновесия с амплитудой

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}}.$$

Если $k^2 < 0$ (относительно центра O момент от силы пружины меньше момента от веса маятника), то с учетом (2.3) для λ будем иметь два вещественных положительных корня:

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = -k.$$

Решение (2.2) будет выглядеть так:

$$\varphi = A_1 e^{kt} + A_2 e^{-kt}. \quad (2.4)$$

Отсюда заключаем, что система неустойчива, поскольку координата φ со временем будет возрастать.

Рассмотрим теперь, как повлияет на устойчивость равновесия маятника действие дополнительных диссипативных сил.

Пусть этот же маятник находится в сопротивляющейся среде, силы сопротивления которой пропорциональны первой степени скорости. В линеаризованном уравнении возмущенного

движения добавится слагаемое, содержащее момент диссипативных сил, пропорциональных скорости. Будем иметь

$$ml^2 \ddot{\varphi} = mgl\varphi - ac^2\varphi - h\dot{\varphi},$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \quad (2.5)$$

где h — коэффициент момента диссипативных сил относительно центра O , $2\varepsilon = h/ml^2$.

Характеристическое уравнение для (2.5)

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2 = 0 \quad (2.6)$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Если консервативная система (без диссипации, $\varepsilon = 0$) была неустойчивой, т.е. $(mgl - ac^2) < 0$, то при добавлении в нее диссипативных сил ($\varepsilon > 0$) корнями характеристического уравнения будут вещественные числа, причем один из них будет положительным, другой — отрицательным. Решение уравнения (2.5) аналогично решению (2.2):

$$\varphi = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Таким образом, вертикальное положение равновесия маятника неустойчиво ни при каких величинах диссипативных сил, что соответствует третьей теореме Кельвина.

Если консервативная система была устойчивой, т.е. $k^2 > 0$, то при добавлении в нее диссипативных сил ($\varepsilon > 0$) корни характеристического уравнения (2.6) будут комплексно-сопряженными с отрицательной вещественной частью:

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm ik_1,$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$.

Маятник будет совершать затухающие колебания:

$$\varphi = Ae^{-\varepsilon t} \cos(k_1 t + \alpha),$$

амплитуда которых при $t \rightarrow \infty$, стремится к нулю. Устойчивая консервативная система при добавлении к ней диссипативных сил стала устойчивой асимптотически, что находится в соответствии со второй теоремой Кельвина.

2.2. Влияние на устойчивость движения консервативной системы гироскопических сил

Для примера возьмем неустойчивую консервативную систему с двумя степенями свободы, уравнения возмущенного движения которой в нормальных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 - c_1 z_1 &= 0, \\ \ddot{z}_2 - c_2 z_2 &= 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Присоединим к системе гироскопические силы $+H\dot{z}_2$ и $-H\dot{z}_1$, тогда уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 - H\dot{z}_2 - c_1 z_1 &= 0, \\ \ddot{z}_2 + H\dot{z}_1 - c_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Решение системы уравнений (2.8) будем искать в виде

$$z_1 = Ae^{\lambda t}, \quad z_2 = Be^{\lambda t}.$$

После подстановки этих выражений в (2.8) получим

$$\begin{aligned} A(\lambda^2 - c_1) - BH\lambda &= 0, \\ AH\lambda + B(\lambda^2 - c_2) &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Чтобы решение было нетривиальным, определитель системы уравнений (2.9), составленный из коэффициентов при неизвестных A и B , должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\lambda^2 - c_1) & -H\lambda \\ H\lambda & (\lambda^2 - c_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем характеристическое уравнение системы (2.8)

$$\lambda^4 + (H^2 - c_1 - c_2)\lambda^2 + c_1c_2 = 0. \quad (2.10)$$

Так как в этом уравнении λ содержится только в четных степенях, каждому корню λ будет отвечать корень $-\lambda$. Отсюда следует, что неустойчивость исчезнет только в том случае, когда все корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми числами, т.е. корни λ^2 — отрицательными вещественными числами.

Поскольку

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left[-(H^2 - c_1 - c_2) \pm \sqrt{(H^2 - c_1 - c_2)^2 - 4c_1c_2} \right],$$

значение λ^2 будет отрицательным, если

$$H^2 - c_1 - c_2 > 0$$

и

$$(H^2 - c_1 - c_2)^2 - 4c_1c_2 > 0.$$

Эти два условия сводятся к одному:

$$H > \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}. \quad (2.11)$$

Таким образом, если коэффициенты H удовлетворяют условию (2.11), то неустойчивая консервативная система (2.7) будет стабилизирована добавками гироскопических сил $+H\dot{z}_2$ и $-H\dot{z}_1$. Если корни λ будут чисто мнимыми, система (2.8) будет совершать гармонические колебания.

Возникает вопрос: всегда ли можно неустойчивую потенциальную систему стабилизировать гироскопическими силами? Одно из необходимых условий гироскопической стабилизации дает следующая теорема, которую называют теоремой Томсона — Тета — Четаева.

Теорема. *Если неустойчивость изолированного положения равновесия под действием одних потенциальных сил имеет нечетную степень, то гироскопическая стабилизация равновесия невозможна. Равновесие, неустойчивое под действием одних потенциальных сил, можно заставить стабилизировать добавлением гироскопических сил, если степень неустойчивости является четной*.*

* Доказательство см.: Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

Рассмотрим устойчивость волчка (рис. 2.1, а). Малые отклонения оси z волчка от вертикального положения равновесия определим двумя углами α и β (рис. 2.1, б). Волчок находится под действием потенциальной силы веса. При невращающемся волчке обе координаты неустойчивы, так как центр тяжести C находится выше точки опоры. Таким образом, волчок имеет четное число неустойчивых координат, следовательно, необходимое условие гироскопической стабилизации, согласно теореме Томсона — Тета — Четаева, имеется.

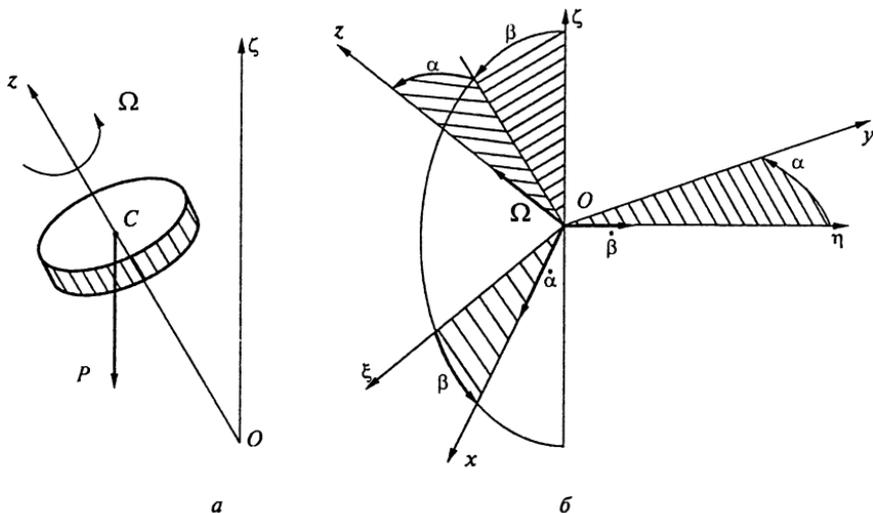


Рис. 2.1

Дифференциальные уравнения возмущенного движения вращающегося с угловой скоростью Ω волчка получим на основании динамических уравнений Эйлера для движения тела с одной неподвижной точкой. В проекциях на оси подвижного трехгранника $Oxuz$, скрепленного с волчком (см. рис. 2.1, б), динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned}
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z &= M_x^{(e)}, \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x &= M_y^{(e)}, \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y &= M_z^{(e)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Здесь J_x, J_y, J_z — главные моменты инерции волчка относительно осей Ox, Oy, Oz , проходящих через точку опоры, из них экваториальные моменты инерции $J_x = J_y$; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции на оси подвижного трехгранника Ox, Oy, Oz вектора угловой скорости волчка, причем $\omega_z = \Omega$ — угловая скорость собственного вращения волчка вокруг оси Oz ; при малых возмущениях $\omega_x = \dot{\alpha}$, $\omega_y = \dot{\beta}$, $\Omega \gg \dot{\alpha}$, $\Omega \gg \dot{\beta}$; $M_x^{(e)}, M_y^{(e)}, M_z^{(e)}$ — проекции вектора момента внешних сил на оси трехгранника. Они равны $M_x^{(e)} = Pl\alpha$, $M_y^{(e)} = Pl\beta$, $M_z^{(e)} = 0$, поскольку вектор силы P пересекает ось Oz .

Перепишем уравнения (2.12) в новых обозначениях:

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\alpha} + (J_z - J_x) \Omega \dot{\beta} &= Pl\alpha, \\ J_x \ddot{\beta} - (J_z - J_x) \Omega \dot{\alpha} &= Pl\beta, \\ J_z \dot{\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из последнего уравнения следует, что угловая скорость вращения волчка $\Omega = \text{const}$. Тогда первые два уравнения системы (2.13) представляют собой уравнения возмущенного движения консервативной системы с гироскопической связью, коэффициентами гироскопической связи служат $(J_z - J_x)\Omega$ и $-(J_z - J_x)\Omega$; чем больше угловая скорость Ω собственного вращения, тем больше гироскопическая связь между угловыми координатами α и β .

Полагая

$$\alpha = Ae^{\lambda t}, \quad \beta = Be^{\lambda t}$$

и подставляя эти выражения в уравнения (2.13), получаем характеристическое уравнение для неизвестного показателя λ :

$$J_x^2 \lambda^4 + \lambda^2 [(J_z - J_x)^2 \Omega^2 H - 2J_x Pl] + (Pl)^2 = 0. \quad (2.14)$$

По своей структуре оно идентично характеристическому уравнению (2.10). Чтобы вертикальное положение оси вращающегося волчка было устойчивым, все корни λ уравнения (2.14) должны быть мнимыми, а λ^2 , следовательно, — отрицательными. Найдем

$$\lambda^2 = \frac{1}{2J_x^2} \left\{ -[(J_z - J_x)^2 \Omega^2 - 2J_x Pl] \pm \sqrt{[(J_z - J_x)^2 \Omega^2 H - 2J_x Pl]^2 - 4J_x^2 (Pl)^2} \right\}.$$

Условиями устойчивости будут:

- 1) $(J_z - J_x)^2 \Omega^2 - 2J_x Pl > 0$;
- 2) $[(J_z - J_x)^2 \Omega^2 - 2J_x Pl]^2 - 4J_x^2 (Pl)^2 > 0$.

Второе условие сводится к следующему:

$$(J_z - J_x)^4 \Omega^4 - 4J_x Pl (J_z - J_x)^2 \Omega^2 > 0,$$

или

$$(J_z - J_x)^2 \Omega^2 [(J_z - J_x)^2 \Omega^2 - 4J_x Pl] > 0.$$

Окончательно условие устойчивого вращения волчка имеет вид

$$(J_z - J_x)^2 \Omega^2 > 4J_x Pl. \quad (2.15)$$

Так как при выполнении условия (2.15) все корни λ являются мнимыми, вертикальная ось вращающегося волчка будет совершать угловые колебания, амплитуда которых определяется малыми начальными отклонениями $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$.

2.3. Влияние на неустойчивую консервативную систему гироскопических и диссипативных сил

Существует теорема о том, что диссипативные силы разрушают гироскопическую стабилизацию потенциально неустойчивой системы. Эту теорему также называют теоремой Томсона — Тета — Четаева.

Теорема. *Если в окрестности изолированного положения равновесия консервативная система неустойчива, то при добавлении ги-*

роскопических сил и сил сопротивления с полной диссипацией равновесие останется неустойчивым*.

Иначе говоря, если консервативная система имела четную степень неустойчивости и была стабилизирована гироскопическими силами, то добавление в систему диссипативных сил с полной диссипацией (диссипацией по всем нормальным координатам) разрушает гироскопическую стабилизацию. Теорема имеет важное значение для практики, поскольку в реальных механических системах всегда имеется диссипация энергии.

Рассмотрим, каким образом осуществляется стабилизация однорельсового вагона. Центр тяжести вагона находится выше рельса, и поэтому положение вагона под действием потенциальных сил неустойчиво. Для обеспечения устойчивости вагона его снабжают гироскопом. На рис. 2.2 представлена схема вагона с расположенным в нем гироскопом Г.

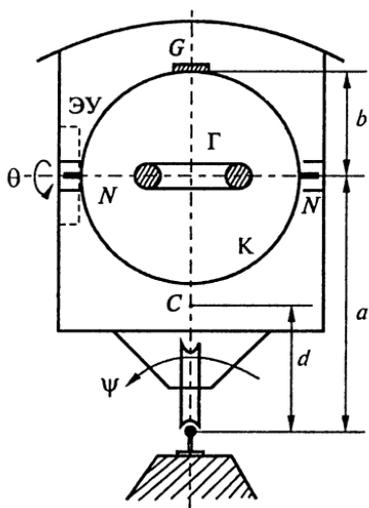


Рис. 2.2

Согласно теореме Томсона — Тета — Четаева, потенциально неустойчивую систему можно стабилизировать гироскопическими силами, если она имеет четное число неустойчивых координат. Вагон имеет одну неустойчивую координату — угол ψ отклонения вагона от вертикали. Вторая неустойчивая координата создается специально креплением груза G на верхней части карданова кольца K . В этом случае второй неустойчивой координатой будет угол θ отклонения карданова кольца от вертикальной плоскости.

В физической системе всегда есть рассеяние энергии, которое может разрушить гироскопическую стабилизацию. Чтобы этого не произошло, по координате θ вводят силы отрицательного сопротивления — силы, действующие в сторону вращения, пропорциональные скорости $\dot{\theta}$. Для этого на корпус вагона крепят электромагнитное устройство ЭУ, которое относительно оси вращения кольца создает момент $-h_2 \dot{\theta}$.

* Доказательство см.: Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения составим, воспользовавшись теоремой об изменении момента количества движения относительно оси, проходящей через точки контакта колес вагона с рельсом, и оси NN карданова подвеса.

Обозначим через J момент инерции вагона относительно рельса; J_{Γ} , $J_{\text{К}}$ — экваториальные моменты инерции гироскопа и кольца; $J_{\text{О}}$ — полярный момент инерции кольца; m_{Γ} , $m_{\text{К}}$ — массы гироскопа и кольца с грузом G ; P , G — вес вагона и добавочного груза; h_1 — коэффициент момента сил сопротивления, действующих на вагон; h_2 — коэффициент момента ускоряющих сил, создающихся электромеханическим устройством; C — центр масс всей системы, включая добавочный груз G ; $H = J\Omega$ — кинетический момент гироскопа; J , Ω — его момент инерции и угловая скорость.

Применяя означенную теорему и принимая во внимание, что в невозмущенном движении $\psi_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} J_{\psi} \ddot{\psi} + h_1 \dot{\psi} - H \dot{\theta} - Pd\psi &= 0, \\ J_{\theta} \ddot{\theta} - h_2 \dot{\theta} + H \dot{\psi} - Gb\theta &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} J_{\psi} &= J + J_{\Gamma} + J_{\text{О}} + (m_{\Gamma} + m_{\text{К}})a^2, \\ J_{\theta} &= J_{\Gamma} + J_{\text{О}} + b^2 G/g, \quad H = J\Omega. \end{aligned}$$

Знак гироскопического момента в уравнениях (2.16) зависит от направления вращения гироскопа и при составлении уравнений принципиального значения не имеет. Важно, что знаки этого момента в уравнениях различны.

Уравнения (2.16) можно рассматривать как результат добавления к неустойчивой консервативной системе

$$\begin{aligned} J_{\psi} \ddot{\psi} - Pd\psi &= 0, \\ J_{\theta} \ddot{\theta} - Gb\theta &= 0 \end{aligned}$$

гироскопических сил $H\Omega$, $-H\Omega$, диссипативных сил $-h_1 \dot{\psi}$ и ускоряющих сил $h_2 \dot{\theta}$.

Для дальнейшего анализа составим характеристическое уравнение однородной системы дифференциальных уравнений (2.16). Получим

$$\begin{vmatrix} J_{\psi}\lambda^2 + h_1\lambda - Pd & -H\lambda \\ H\lambda & J_{\theta}\lambda^2 - h_2\lambda - Gb \end{vmatrix} = \\ = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= J_{\psi} J_{\theta}, & a_1 &= h_1 J_{\theta} - h_2 J_{\psi}, \\ a_2 &= H^2 - J_{\theta} Pd - J_{\psi} Gb - h_1 h_2, \\ a_3 &= h_2 Pd - h_1 Gb, & a_4 &= Pd Gb. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Согласно критерию Гурвица, система будет устойчивой, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны, т.е.

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0$$

и

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0. \quad (2.19)$$

В нашем случае $a_0 > 0$, $a_4 > 0$ по определению. Коэффициенты a_1 и a_3 будут положительными при выполнении следующих условий:

$$h_1 \frac{J_{\theta}}{J_{\psi}} > h_2 \quad \text{и} \quad h_1 \frac{Gb}{Pd} < h_2.$$

Отсюда находим, что значение коэффициента момента h_2 отрицательных сил сопротивления должно находиться в пределах

$$h_1 \frac{J_{\theta}}{J_{\psi}} > h_2 > \frac{Gb}{Pd} h_1. \quad (2.20)$$

Условие (2.19), выраженное через значения параметров системы, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= (h_1 J_{\theta} - h_2 J_{\psi})(H^2 - J_{\theta} Pd - J_{\psi} Gb - h_1 h_2) \times \\ &\times (h_2 Pd - h_1 Gb) - J_{\theta} J_{\psi} (h_2 Pd - h_1 Gb)^2 - \\ &- (h_1 J_{\theta} - h_2 J_{\psi})^2 (Pd Gb) > 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Второе и третье слагаемые в (2.21) — неотрицательные величины, и поскольку они вычитаются из первого слагаемого, то $\Delta_3 > 0$ тогда, когда первое слагаемое больше второго и третьего вместе взятых. В первом слагаемом произведение $a_1 a_3 > 0$ на основании (2.20). Поэтому для обеспечения устойчивости движения значение кинетического момента гироскопа $H = J\Omega$ подбирают таким, чтобы выполнялось условие $\Delta_3 > 0$. При этом автоматически будет выполнено и условие $a_2 > 0$.

Таким образом, если коэффициент h_2 момента отрицательных сил сопротивления подобрать из условия (2.20), а кинетический момент гироскопа $H = J\Omega$ таким, чтобы выполнялось условие (2.21), то однорельсовый вагон будет устойчив к опрокидыванию.

Для определения в полете горизонтального положения самолет снабжен гировертикантом — прибором, который при любых наклонах самолета указывает вертикаль. Гировертикант имеет гироскоп, ротор которого закреплен в кардановом подвесе, центр масс ротора совпадает с центром пересечения осей карданова подвеса, а ось его вращения в невозмущенном положении совпадает с вертикалью к поверхности Земли, которая принимается плоской. Если бы не было сил сопротивления от трения в подшипниках и о воздух, то на основании теоремы об изменении кинетического момента вектор кинетического момента гироскопа, совпадающий по направлению с его осью вращения, сохранял бы свое первоначальное значение. Но силы трения всегда существуют.

Чтобы длительное время гироскоп сохранял вектор кинетического момента постоянным, его подкручивают и вводят коррекцию положения оси вращения.

Схема гировертиканта показана на рис. 2.3. Ротор гироскопа находится в кожухе A , на котором над осями вращения колец карданова подвеса установлены два уровня, заполненные токопроводящей жидкостью. При отклонении оси ротора от вертикали ξ в уровнях создается разность потенциалов, которая управляет электромеханическими устройствами, создающими вращающие моменты на кардановом кольце. Датчик 1 управляет устройством Y_1 , датчик 2 — устройством Y_2 . При отклонении внешнего кольца карданова подвеса на малый угол α устройство Y_2 создает момент $M_\beta = -\mu\alpha$, а при отклонении внутреннего карданова кольца на малый угол β устройство Y_1 создает момент

$M_\alpha = \mu\beta$, где μ — коэффициент усиления момента (крутизна моментной характеристики электромеханического устройства).

Пользуясь теоремой об изменении кинетического момента в проекциях на оси связанной системы координат, получим уравнения возмущенного движения гировертиканта в виде

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} + h\dot{\alpha} - H\dot{\beta} - \mu\beta &= 0, \\ J\ddot{\beta} + h\dot{\beta} + H\dot{\alpha} + \mu\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

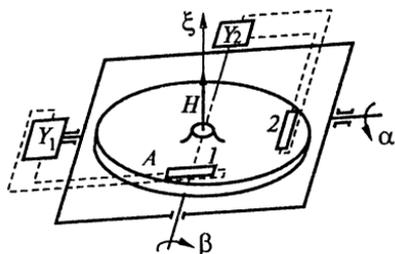


Рис. 2.3

Здесь J — экваториальный момент инерции гироскопа относительно оси, проходящей через его центр масс; $H\dot{\beta}$, $H\dot{\alpha}$ — гироскопические моменты; $H = J\Omega$ — кинетический момент гироскопа; J — момент инерции гироскопа относительно оси собственного вращения;

Ω — угловая скорость гироскопа относительно оси собственного вращения; h — коэффициент момента сил сопротивления.

Характеристическое уравнение системы (2.22) можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} J\lambda^2 + h\lambda & -H\lambda - \mu \\ H\lambda + \mu & J\lambda^2 + h\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрывая определитель,

$$J^2\lambda^4 + 2J^2h\lambda^3 + (H^2 + h^2)\lambda^2 + 2H\mu\lambda + \mu^2 = 0.$$

Так как все коэффициенты этого уравнения положительны, критерий Гурвица сводится к одному неравенству:

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0, \quad (2.23)$$

в котором

$$a_0 = J^2, \quad a_1 = 2Jh, \quad a_2 = (h^2 + H^2),$$

$$a_3 = 2\mu H, \quad a_4 = \mu^2.$$

Преобразуем выражение (2.23):

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= 4\mu hJH(h^2 + H^2) - J^2(2\mu H)^2 - (2hJ)^2\mu^2 = \\ &= 4\mu hJH(h^2 + H^2) - 4\mu^2 J^2(h^2 + H^2) = \\ &= 4\mu J(h^2 + H^2)(hH - \mu J) > 0.\end{aligned}\tag{2.24}$$

При отсутствии сил сопротивления ($h = 0$) это условие не выполняется, что свидетельствует о неустойчивости системы. Для обеспечения условия (2.24) необходимы небольшие силы сопротивления:

$$h > \frac{\mu J}{H} = \frac{\mu J}{J\Omega}.$$

Практически для обеспечения устойчивости достаточно сил сопротивления воздуха и в опорах.

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Существует много систем (механических, электрических), работающих в колебательном режиме от источника энергии, не обладающего колебательными свойствами. Такие системы называют автоколебательными. Есть системы с источником энергии, рабочий режим которых не является колебательным, но при некоторых соотношениях параметров в них возникает неустойчивость, переходящая в автоколебания. В этой главе рассмотрены два таких примера: флаттер крыла самолета и шимми управляемого колеса автомобиля.

3.1. Предварительные замечания

Автоколебательные системы имеют широкое распространение. Ламповый генератор, электромагнитный прерыватель, духовые и скрипичные музыкальные инструменты — все это автоколебательные системы; колебания, возникающие в них — это автоколебания. Часы — также автоколебательная система. К автоколебательным системам следует также отнести поршневые двигатели внутреннего сгорания.

Необычайно широко распространены механические автоколебания, обусловленные трением и выражающиеся в виде разного рода скрипов. Сюда же относятся и автоколебания в технологических системах при лезвийной обработке металла. Важное значение в современной технике имеют колебания разного рода регуляторов, которые при известных условиях приобретают свойства автоколебательных систем.

Целый ряд явлений природы носит автоколебательный характер. Многие процессы в живом организме представляют собой автоколебания. Например, дыхание и работа сердца — автоколебания.

Автоколебания принципиально отличаются от остальных колебательных процессов тем, что для поддержания стационарного

движения в таких системах не нужно периодических воздействий извне, как это имеет место при вынужденных колебаниях. Колебания скрипичной струны происходят при равномерном движении смычка, колебания маятника часов совершаются при постоянном давлении пружины.

Во всякой реальной системе при стационарном колебательном процессе энергия переходит в теплоту или передается другим телам. Поэтому каждая автоколебательная система должна иметь источник энергии, который покрывал бы ее расход. Обычно источник энергии вырабатывает постоянное во времени воздействие. Устройство автоколебательной системы таково, что при колебаниях в ней от источника отбирается энергия, переменная во времени, которая и поддерживает стационарный колебательный процесс.

При анализе автоколебательных систем полезно различать следующие основные элементы (рис. 3.1): основную колебательную систему, источник энергии, систему обратной связи, управляющую отбором энергии от источника.



Рис. 3.1

Основная колебательная система в изолированном виде способна совершать затухающие собственные колебания. Обратная связь соединяет основную колебательную систему с источником, причем так, что от него отбирается переменная сила, действующая на основную колебательную систему.

Рассмотрим для примера простую схему генератора электромагнитных колебаний — лампового генератора (рис. 3.2).

Колебательный контур, состоящий из L , R , C и находящийся в анодной цепи лампы, представляет собой основную колебательную систему. Катушка L' и катодная лампа составляют цепь обратной связи.

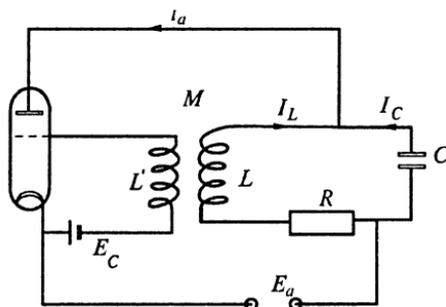


Рис. 3.2

Механизм возникновения колебаний можно представить себе так: от небольшого случайного изменения напряжения в конту-

ре LRC возникают собственные колебания, которые через катушку L' воздействуют на сетку лампы и тем самым изменяют ток i_a , идущий через лампу и контур LRC . Колебания тока i_a , проходя через контур, усиливают колебания в нем. Амплитуда колебаний в контуре начинает возрастать, пока колебания анодного тока в нем не достигнут наибольшей возможной величины. Процесс нарастания колебаний называется самовозбуждением.

Рассмотрим теперь простейшую механическую систему с «падающей» характеристикой трения (рис. 3.3).

Груз массой m , удерживаемый пружиной, является основной колебательной системой (рис. 3.3, а). Груз установлен на вращающуюся с постоянной скоростью v ленту. Сила трения F

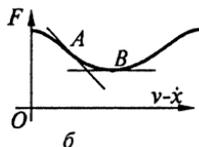
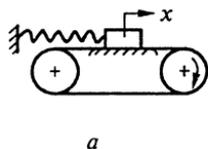


Рис. 3.3

между грузом и лентой зависит от скорости скольжения $v - \dot{x}$, причем так, что в некотором диапазоне с увеличением скорости сила трения уменьшается, в некотором — увеличивается (график этой зависимости показан на рис. 3.3, б).

Дифференциальное уравнение прямолинейных колебаний груза можно представить в виде

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + cx = 0,$$

где $h = dF/d\dot{x}$ — коэффициент трения скольжения.

Источник энергии — движущаяся с постоянной скоростью лента, обратная связь — «падающая» характеристика трения.

Пусть начальное равновесие положения груза на ленте при постоянной скорости скольжения $v - \dot{x} = \text{const}$ определяется координатой $x = F_A/c$, на графике это положение соответствует точке A . В небольшой окрестности точки A $h = dF/d\dot{x} < 0$, поэтому положение груза неустойчиво и малейшее возмущение груза по линии движения приведет к нарастанию его колебаний. Правее точки B коэффициент трения $dF/d\dot{x} > 0$, колебательная система будет рассеивать энергию. Стационарные колебания установятся в окрестности точки B , когда наступит баланс энергии: при движении груза вправо скорость скольжения уменьшается — система берет энергию от источника, при движении груза влево скорость скольжения возрастает — система теряет энергию. Со временем приобретенная и потерянная системой энергии будут равны, нарастающие колебания перейдут в стационарные с по-

стоянной амплитудой и частотой — в автоколебания. Так как приобретение и потеря энергии обусловлены нелинейными характеристиками системы, автоколебательные системы всегда являются системами нелинейными.

Основные характерные особенности автоколебательного процесса:

- 1) «самовозбуждение» колебаний;
- 2) зависимость частоты и амплитуды установившихся колебаний только от параметров системы;
- 3) произвольность фазы автоколебаний.

Здесь уместно вспомнить, что при собственных колебаниях частота определяется параметрами системы, а амплитуда и фаза — начальными условиями; при вынужденных колебаниях частота определяется внешней силой, а амплитуда и фаза определяются системой и внешней силой.

Кроме систем, для которых автоколебательный режим является рабочим и задача исследований заключается в разработке методов их совершенствования, существуют системы, в которых рабочий режим не является колебательным, но в них могут возникать автоколебания, вредные для системы. Такие системы называют потенциально автоколебательными. Здесь задача изучения заключается в том, чтобы находить условия, при выполнении которых рабочий режим системы будет устойчив и, следовательно, автоколебания не возникают.

К таким системам относятся самолеты, ракеты, паровые и газовые турбины, автомобили, мосты и дымовые трубы в потоке воздуха и другие. Возникшая неустойчивость может привести к большим амплитудам колебаний, опасным для прочности конструкции. При создании конструкций необходимо добиваться устойчивых режимов работы.

Для потенциально автоколебательных систем основной задачей является изучение не автоколебаний, а устойчивости движения. Надо находить такие соотношения параметров системы, чтобы ее движение было устойчивым.

3.2. Флаттер

Рассмотрим механизм возникновения опасных колебаний крыльев самолета, возникающих при определенных скоростях полета и чрезвычайно быстро (за несколько секунд после возникновения) приводящих к полному разрушению и гибели самолета. Это явление носит профессиональное название *флаттер*

(англ. flutter — трепетание). В настоящее время его механизм достаточно ясен, и всякая новая конструкция самолета рассчитывается так, чтобы полет был устойчив и флаттер не мог возникнуть.

Механизм флаттера имеет чисто аэродинамическую природу. Энергия, необходимая для возбуждения колебаний, доставляется встречным потоком воздуха.

При флаттере крыло совершает сложные гармонические колебания, но для того, чтобы представить себе физическую сущность этого явления, достаточно рассмотреть плоские колебания в потоке воздуха жесткой модели крыла с упругими связями.

Для объяснения явления флаттера рассмотрим изгибно-крутильные колебания крыла. Чисто изгибные и чисто крутильные колебания невозможны: один вид колебаний порождает другой, так что они существуют совместно.

Разберем механизм связи обоих видов колебаний. Вначале рассмотрим колебания крыла в отсутствие аэродинамического потока. В поперечном сечении крыла отметим две точки, определяющие механические свойства конструкции: центр тяжести и центр жесткости сечения. Центром жесткости называется точка приложения равнодействующей упругих сил, возникающих при деформации крыла.

На рис. 3.4 показаны четыре последовательных положения крыла: а) крыло движется вниз. Это среднее положение крыла, в котором отклонение и ускорение равны нулю, а скорость имеет наибольшее значение; б) крайнее нижнее положение. В этом положении скорость равна нулю, а отклонение и ускорение максимальны. На крыло действует сила упругости F_s , направленная вверх и приложенная в центре жесткости K , и сила инерции F_i' , направленная вниз и приложенная в центре тяжести C . Сила F_i

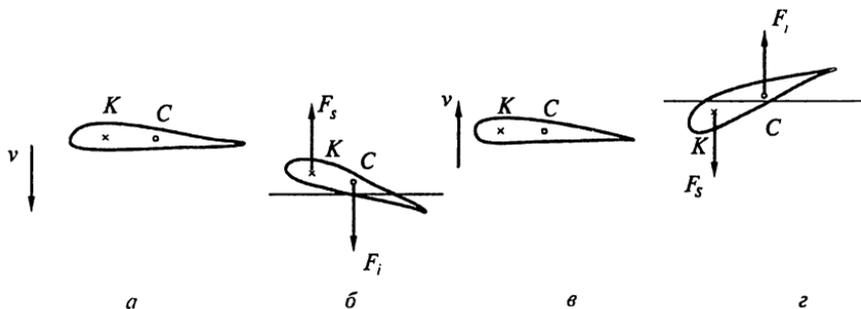


Рис. 3.4

создает инерционный момент относительно центра жесткости, закручивающий крыло по направлению движения часовой стрелки; в) среднее положение, крыло движется вверх; г) крайнее верхнее положение, направления сил и закручивающего момента изменились на обратные.

Таким образом, изгибные колебания порождают крутильные. Аналогично можно показать, что крутильные колебания, также через инерционную связь, порождают изгибные. Но инерционная связь не приводит к поступлению энергии в колебательную систему, и нарастание колебаний в ней невозможно.

Посмотрим теперь, что получится, если крыло находится во встречном потоке воздуха. Этот поток создает распределенные по площади крыла аэродинамические силы, пропорциональные углу атаки α . Нас интересуют, однако, не эти постоянные силы, а те переменные, которые возникают дополнительно при колебаниях крыла. Будем считать их в первом приближении пропорциональными приращению угла атаки $\Delta\alpha$, обусловленному колебаниями крыла.

Относительно точки, соответствующей центру жесткости, распределенные аэродинамические силы приводятся к главному вектору и главному моменту, которые называются аэродинамической подъемной силой Y_a и аэродинамическим моментом M_a , стремящимся закручивать крыло. Углом атаки называют угол между вектором скорости v набегающего потока и касательной плоскостью к обтекаемой поверхности. При колебаниях крыла приращение угла атаки определяется не только углом φ поворота крыла, он зависит также и от скорости \dot{y} изгибных колебаний крыла, в чем нетрудно убедиться, рассмотрев схему на рис. 3.5.

Предположим, что крыло поворачивается на угол φ и совершает поступательное движение со скоростью \dot{y} перпендикулярно горизонтальной скорости потока $v_x = v$ (рис. 3.5, а). Если обратить движение, т.е. крыло считать неподвижным, то частицы воздуха кроме горизонтальной составляющей скорости v будут иметь вертикальную составляющую \dot{y} , направленную вверх (рис. 3.5, б). Поскольку \dot{y} несоизмеримо меньше v , можно принять, что набегающий поток по отношению к крылу будет иметь приращение угла атаки (рис. 3.5, в)

$$\Delta\alpha = \varphi + \frac{\dot{y}}{v}. \quad (3.1)$$

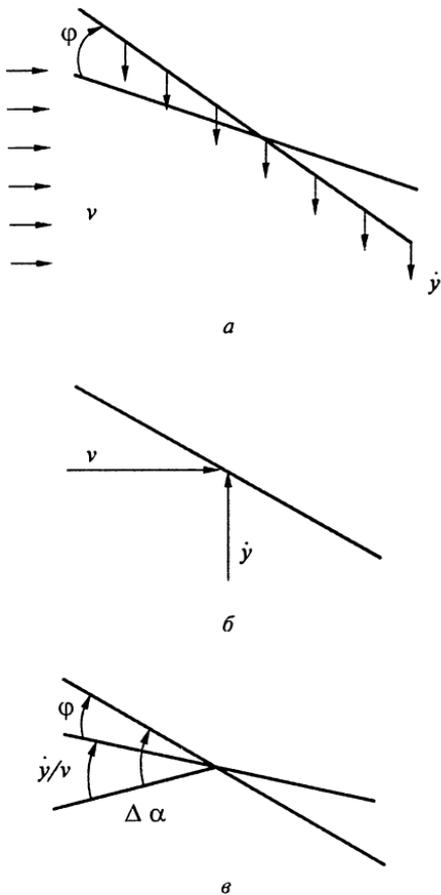


Рис. 3.5

которые при крутильных колебаниях дополнительные аэродинамические моменты направлены против угловых скоростей поперечного сечения крыла.

Направление аэродинамического момента, пропорционального скорости изгибных колебаний $M_a(\dot{y}/v)$, совпадает с направлением угла φ , поэтому момент $M_a(\dot{y}/v)$ будет вызывать нарастание крутильных колебаний крыла, а через инерционную связь последние будут усиливать его изгибные колебания — возникнет флаттер. Отметим, что приведенные качественные рассуждения

Рассмотрим отдельно зависимость силы Y_a и момента M_a от угла φ и от угла \dot{y}/v . Так как сила Y_a и момент M_a пропорциональны приращению угла атаки $\Delta\alpha$, то $Y_a(\varphi)$ и $M_a(\varphi)$ находятся в фазе с углом φ и поэтому оказывают влияние только на частоты собственных колебаний системы. Другое дело, сила $Y_a(\dot{y}/v)$ и момент $M_a(\dot{y}/v)$, пропорциональные скорости \dot{y} изгибных колебаний. При выбранных направлениях отсчета отклонений y и φ сила $Y_a(\dot{y}/v)$ направлена против скорости \dot{y} и будет вызывать гашение изгибных колебаний.

Итак, приращение подъемной силы направлено всегда против скорости. Следовательно, мы имеем положительное сопротивление колебательному движению, и чисто изгибные автоколебания крыла в полете возникнуть не могут.

Аналогичным образом можно убедиться в том, что невозможны и чисто крутильные автоколебания крыла. Это следует из того, что развивающиеся

справедливы при условии, что центр жесткости находится впереди центра тяжести (см. рис. 3.4).

Проведем теперь в первом приближении количественный анализ флаттера. За расчетную модель примем жесткое крыло, закрепленное на пружинах (рис. 3.6). Предположим, что система имеет две степени свободы, пружины обеспечивают только вертикальные движения точек крепления крыла.

Для удобства анализа за обобщенные координаты примем: y — линейную координату для отклонения центра жесткости крыла при изгибе, φ — угловую для отклонения при закручивании. Центром жесткости называется точка, обладающая тем свойством, что сила, приложенная к ней в направлении возможного движения, будет только изгибать крыло, не вызывая его закручивания. Положение центра жесткости можно определить из уравнения

$$c_1 x_0 = c_2 (b - x_0), \quad (3.2)$$

где x_0 — расстояние от передней кромки крыла до центра жесткости; b — длина хорды крыла; c_1, c_2 — коэффициенты жесткости крыла.

Отсчет отклонений y и φ будем вести от положения крыла, которое оно занимает в установившемся движении, когда $y \equiv 0, \varphi \equiv 0$.

Через коэффициенты жесткости c_1 и c_2 будем выражать силы реакций — поперечную силу при изгибе и момент при закручивании крыла, возникающие при отклонениях y и φ .

Составим теперь дифференциальные уравнения малых колебаний крыла, применив для этого уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right) = Q_i.$$

где $q_1 = y, q_2 = \varphi$.

Воспользовавшись теоремой Кенига, выражение кинетической энергии крыла представим в виде

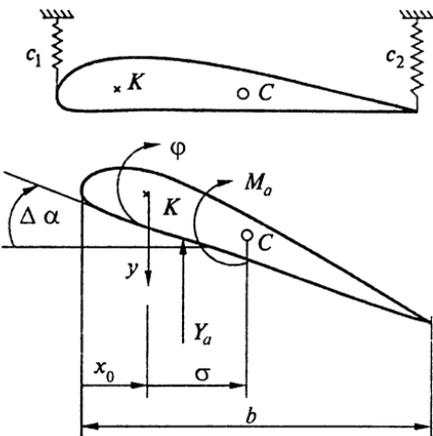


Рис. 3.6

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}_c^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{y} + \sigma \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\phi}^2,$$

где m , J_c — масса и момент инерции крыла относительно центра масс; σ — расстояние между центром жесткости и центром масс крыла, причем здесь принято расположение центра жесткости впереди центра масс.

Потенциальная энергия пружин

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (y - x_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} c_2 [y + (b - x_0) \phi]^2,$$

или с учетом равенства (3.2)

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) y^2 + \frac{1}{2} [c_1 x_0^2 + c_2 (b - x_0)^2] \phi^2.$$

Обобщенными здесь будут аэродинамические силы, причем сила Y_a направлена против направления отсчета координаты y , момент M_a — по направлению отсчета угла ϕ :

$$Q_y = -Y_a, \quad Q_\phi = M_a.$$

Аэродинамические силы пропорциональны скоростному напору $\rho v^2/2$, где ρ — плотность набегающего потока; v — его скорость. В первом приближении они пропорциональны приращению угла атаки, так что с учетом (3.1)

$$\begin{aligned} Y_a &= \frac{\rho v^2}{2} S c_y^\alpha (\phi + \dot{y}/v), \\ M_a &= \frac{\rho v^2}{2} S c_m^\alpha (\phi + \dot{y}/v). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь S — площадь крыла; c_y^α , c_m^α — коэффициенты подъемной силы и аэродинамического момента, отнесенные к единице площади крыла и углу атаки. Для краткости записи обозначим

$$\begin{aligned} \frac{\rho v^2}{2} S c_y^\alpha &= D_y, & D_M &= \frac{\rho v^2}{2} S c_m^\alpha, \\ \frac{\rho v^2}{2} S c_y^\alpha \frac{1}{v} &= D_{yv}, & D_{Mv} &= \frac{\rho v^2}{2} S c_m^\alpha \frac{1}{v}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставив выражения Y_a и M_a в уравнения Лагранжа, получим дифференциальные уравнения возмущенного движения крыла в следующем виде:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + m\sigma\ddot{\phi} + (c_1 + c_2)y &= -Y_a, \\ m\sigma\ddot{y} + J\ddot{\phi} + c\phi &= M_a, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $J = J_c + m\sigma^2$ — момент инерции крыла относительно оси жесткости; $c = c_1x_0^2 + c_2(b - x_0)^2$ — жесткость крыла на кручение.

Первое уравнение (3.5) — уравнение поступательных (изгибных) движений крыла, второе — вращательных вокруг оси, проходящей через центр жесткости, движения взаимосвязаны. Парциальные частоты консервативной системы ω_n и ω_k в пустоте, когда $Y_a = 0$, $M_a = 0$,

$$\omega_n^2 = \frac{1}{m}(c_1 + c_2), \quad \omega_k = \frac{c}{J}$$

соответствуют частоте изгибных колебаний крыла (ω_n) и частоте крутильных колебаний (ω_k). Связь между изгибными и крутильными колебаниями инерционная. Члены инерционной связи $m\sigma\ddot{\phi}$ в первом и $m\sigma\ddot{y}$ во втором уравнениях имеют одинаковые коэффициенты (взаимны); если центр тяжести и центр жесткости совпадают ($\sigma = 0$), то связи нет.

Подставим выражения Y_a и M_a из (3.3), (3.4) в уравнения (3.5). Получим

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + m\sigma\ddot{\phi} + (c_1 + c_2)y + D_{yv}\dot{y} + D_{y\phi}\phi &= 0, \\ m\sigma\ddot{y} + J\ddot{\phi} + c\phi - D_{M\phi} - D_{Mv}\dot{y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Члены связей из-за аэродинамических сил не взаимны: если аэродинамическая сила $D_{yv}\dot{y}$ будет вызывать затухание изгибных колебаний, то момент $D_{Mv}\dot{y}$ — нарастание крутильных колебаний, а коэффициент $D_{M\phi}$ будет уменьшать жесткость крыла на закручивание. Это существенное обстоятельство объясняется тем, что аэродинамические силы, являясь внешними по отношению к механической системе, сами зависят от движений этой системы. С учетом аэродинамических сил консервативная механическая система стала неконсервативной.

Запишем уравнения (3.6) с учетом (3.4) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{y} + b_{11}\dot{y} + c_{11}y + a_{12}\ddot{\phi} + c_{12}\phi &= 0, \\ \ddot{y} + b_{21}\dot{y} + a_{22}\ddot{\phi} + c_{22}\phi &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{m} \frac{\rho v^2}{2} Sc_y^\alpha \frac{1}{v}, & c_{11} &= \frac{1}{m} (c_1 + c_2), \\ a_{12} &= \sigma, & c_{12} &= \frac{1}{m} \frac{\rho v^2}{2} Sc_y^\alpha, \\ b_{21} &= -\frac{1}{m\sigma} \frac{\rho v^2}{2} Sc_m^\alpha \frac{1}{v}, & a_{22} &= \frac{J}{m\sigma}, \\ c_{22} &= -\frac{1}{m\sigma} \left(c - \frac{\rho v^2}{2} Sc_m^\alpha \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Проведем теперь исследование решений уравнений (3.7). Решение однородной системы уравнений (3.7) будем разыскивать в виде

$$y = Ae^{\lambda t}, \quad \phi = Be^{\lambda t}. \quad (3.9)$$

После подстановки этих выражений в (3.7) получим

$$\begin{aligned} A(\lambda^2 + \lambda b_{11} + c_{11}) + B(\lambda^2 a_{12} + c_{12}) &= 0, \\ A(\lambda^2 + \lambda b_{21}) + B(\lambda^2 a_{22} + c_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для ненулевого решения (3.9) определитель системы уравнений (3.10) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda b_{11} + c_{11} & \lambda^2 a_{12} + c_{12} \\ \lambda^2 + \lambda b_{21} & \lambda^2 a_{22} + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение для неизвестного показателя λ :

$$\begin{aligned} (a_{22} - a_{12})\lambda^4 + \lambda^3(b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12}) + \lambda^2(c_{22} + c_{11}a_{22} - c_{12}) + \\ + \lambda(b_{11}c_{22} - b_{21}c_{12}) + c_{11}c_{22} = 0, \end{aligned}$$

или

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{22} - a_{12}, \\ a_1 &= b_{11} a_{22} - b_{21} a_{12}, \\ a_2 &= c_{22} + c_{11} a_{12} - c_{12}, \\ a_3 &= b_{11} c_{22} - b_{21} c_{12}, \\ a_4 &= c_{11} c_{22}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Заключение об устойчивости или неустойчивости системы можно сделать, применив критерий Гурвица, согласно которому движение будет устойчивым, если все коэффициенты характеристического уравнения (3.11) и предпоследний минор определителя Гурвица будут положительными, т.е.

$$\begin{aligned} a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \\ \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Преобразуем коэффициенты (3.12) с учетом обозначений (3.8). Будем иметь

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{22} - a_{12} = \frac{J - \sigma^2 m}{m\sigma} = \frac{J_c}{m\sigma}, \\ a_1 &= b_{11} a_{22} - b_{21} a_{12} = \frac{1}{mv} \frac{\rho v^2}{2} S \left(c_y^\alpha \frac{J}{m\sigma} + c_m^\alpha \right), \\ a_2 &= c_{22} + c_{11} a_{12} - c_{12} = \frac{1}{m\sigma} \left[c + \sigma \frac{c_1 + c_2}{m} J - \frac{\rho v^2}{2} S (c_m^\alpha + \sigma c_y^\alpha) \right], \\ a_3 &= b_{11} c_{22} - b_{21} c_{12} = \frac{c}{m^2 \sigma v} \frac{\rho v^2}{2} S c_y^\alpha, \\ a_4 &= c_{11} c_{22} = \frac{1}{m^2 \sigma} \left[(c_1 + c_2) \left(c - \frac{\rho v^2}{2} S c_m^\alpha \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из полученных выражений ясно, что при постоянном значении величины σ — расстояния между центром жесткости и центром тяжести — знаки коэффициентов a_0, a_1, a_3 не зависят от скорости полета v , знаки коэффициентов a_2 и a_4 , наоборот, зависят от скорости v .

Знак минора Δ_3 — см. (3.13) — также зависит от скорости. Однако при $\sigma > 0$ знак коэффициента a_4 всегда положительный, поскольку выражение $c - \frac{\rho v^2}{2} S c_m^\alpha$ есть жесткость крыла на кручение в набегающем потоке воздуха — на практике величина положительная. Знак коэффициента a_2 также положительный, так как в его выражении со знаком минус находится величина $(c_m^\alpha + \sigma c_y^\alpha) S \rho v^2 / 2$, представляющая собой жесткость аэродинамического момента относительно центра тяжести, которая для крыла всегда меньше жесткости конструкции: $c + (c_1 + c_2) J / m$.

Определяющим для оценки устойчивости является третий минор Гурвица Δ_3 — см. (3.13), — который в развернутом виде здесь не приводится. Вычисляют его на ЭВМ. Последовательно задают значения скорости и находят то, при котором минор меняет знак и становится отрицательным. Это значение скорости $v = v_{кр}$ называют критической скоростью флаттера. При $v > v_{кр}$ будет происходить самовозбуждение, возникнут нарастающие колебания.

Таким образом, кроме инерционной связи между изгибными и крутильными колебаниями существует аэродинамическая связь, пропорциональная скорости полета. Эта связь позволяет отбирать энергию от потока воздуха и направлять ее в колебательную систему. Если за период колебаний работа аэродинамических сил при закручивании крыла станет больше, чем при его изгибах, то колебательная система будет неустойчивой, в ней возникнут нарастающие колебания, переходящие в автоколебания. Полет при наличии автоколебаний недопустим, так как автоколебания приводят к катастрофам.

Наряду с флаттером крыльев наблюдается еще флаттер, усложненный наличием элеронов, хвостового оперения, флаттер винтов. Все они сходны по физической природе с рассмотренным выше, вредны, опасны и подлежат безусловному устранению.

Совершенно аналогичные задачи возникают в теории систем автоматического управления. Там, как правило, автоколебания являются крайне нежелательными, и первостепенное внимание

уделяется исследованиям устойчивости движения, чтобы не допустить возникновения самовозбуждения автоколебаний.

В заключение отметим, что явление флаттера встречается и в природе. Например, трепетание листьев на ветру имеет, по существу, ту же природу, что и флаттер. Наиболее характерно в этом смысле трепетание осинового листа с его косым подвесом на длинном черенке, обладающем очень малой боковой жесткостью.

3.3. Шимми

Этим профессиональным термином обозначают виляющее движение катящегося колеса. Шимми возможно у колес самолетов, автомобилей и других колесных машин. В конструкциях машин имеются вертикальные оси, вокруг которых колеса поворачиваются для изменения направления движения. Однако шимми возникает и при прямолинейном движении, например, автомобиля по ровной горизонтальной дороге, когда водитель держит рулевое колесо неподвижно. Возникает шимми в результате потери устойчивости движения при достижении автомобилем определенной скорости. Самовозбуждение колебаний происходит за счет энергии автомобиля, который движется с постоянной скоростью. С возникновением шимми движение практически невозможно, чтобы погасить шимми, необходимо снизить скорость.

Рассмотрим устойчивость невозмущенного движения управляемых колес автомобиля. За невозмущенное движение принимаем равномерное и прямолинейное движение автомобиля по горизонтальной шероховатой плоскости, при котором управляемые колеса катятся в вертикальной плоскости без скольжения, а их центры масс движутся прямолинейно с постоянной скоростью.

Колесо имеет упругие связи с дорогой и корпусом автомобиля в вертикальной и горизонтальной плоскостях. В связи с тем, что масса колес значительно меньше массы автомобиля, в первом приближении будем считать, что при возмущении колес корпус автомобиля не возмущается и колеса совершают колебания между дорогой и корпусом автомобиля. В силу симметрии ограничимся рассмотрением колебаний лишь одного колеса.

В качестве расчетной модели механической системы примем ведомое колесо с пневматической шиной, упруго подвешенное к корпусу автомобиля и имеющее упругую связь с дорогой. Относительно корпуса автомобиля колесо имеет две степени свободы, в качестве обобщенных координат для которых примем

θ — угол поворота колеса вокруг вертикальной оси AA при изменении направления движения и ψ — угол поворота вокруг горизонтальной оси подвески BB , параллельной продольной оси автомобиля (рис. 3.7). В действительности вертикальная ось AA имеет небольшой наклон в вертикальной плоскости, параллельной продольной вертикальной плоскости автомобиля (угол β). При невозмущенном движении $\theta = \text{const} = 0$ и $\psi = \text{const} = 0$.

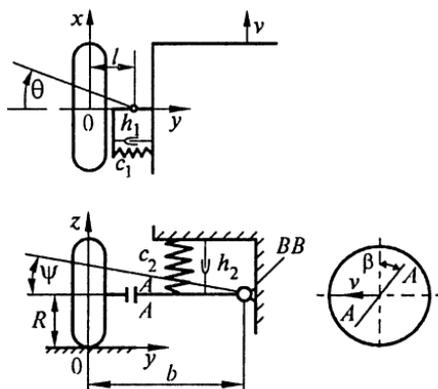


Рис. 3.7

вертикально вверх, Ox — по направлению движения автомобиля, Oy — вправо (см. рис. 3.7).

Для составления уравнений возмущенного движения связи заменим силами, действующими на механическую систему, причем нас интересуют не те силы, которые действуют в невозмущенном движении, а их приращения, вызванные отклонениями колес на углы θ и ψ . Характеристики упругих связей механической системы с корпусом автомобиля и дорогой будем считать линейными, а силы — пропорциональными отклонениям θ и ψ .

Систему распределенных сил по пятну контакта колеса с дорогой приведем к центру O — началу координат $Oxyz$ (рис. 3.8). Получим главный вектор системы сил

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

и главный момент этой системы

$$\bar{M}_0 = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k},$$

В возмущенном движении отклонения θ и ψ будем считать малыми величинами, их квадратами и произведениями, а также квадратами и произведениями их скоростей будем пренебрегать.

Введем поступательно движущуюся вместе с автомобилем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в точке пересечения вертикального диаметра колеса в невозмущенном движении с плоскостью дороги; направление осей координат: Oz — вертикально вверх, Ox — по направлению движения автомобиля, Oy — вправо (см. рис. 3.7).

тем установиться параллельно оси принудительной прецессии таким образом, чтобы направления векторов угловых скоростей совпадали. При стремлении повернуться ось гироскопа оказывает давление на подшипники, создавая гироскопический момент

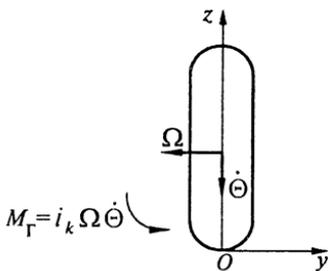


Рис. 3.9

того же направления. Например, если сообщить колесу принудительную прецессию вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\dot{\theta}$, то возникнет гироскопический момент M_G , стремящийся повернуть колесо вокруг горизонтальной оси, и наоборот (рис. 3.9). На основании этого положения и поставлены знаки в уравнениях (3.16) для гироскопических моментов.

Реакции связи колеса с дорогой.

Введем небольшие упрощения не принципиального характера: из-за малости по сравнению с другими силами будем пренебрегать силой и моментом сопротивления качению.

Распределенные силы в пятне контакта и, следовательно, составляющие главного вектора и главного момента в первом приближении приняты пропорциональными отклонениям θ и ψ . Поэтому представим их следующими линейными зависимостями:

$$\begin{aligned} X &= 0, & Y &= k\theta, & Z &= -c_{\text{ш}}z = -c_{\text{ш}}b\psi, \\ M_x &= -c_{\psi}\psi, & M_y &= 0, & M_z &= c_{\theta}\theta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь $c_{\text{ш}}$; k — коэффициенты радиальной и поперечной жесткости шины; c_{ψ} , c_{θ} — коэффициенты угловой жесткости шины. Эти коэффициенты определяют экспериментально и для малых отклонений θ и ψ принимают постоянными.

Силы связей, выраженные формулами (3.17), назовем квазистатическими, поскольку они определяются хотя и при различных, но постоянных значениях углов θ и ψ качения колеса. В отличие от квазистатических сил возникает динамические силы реакций, при которых качение колеса сопровождается его колебаниями. Здесь мы имеем первую задачу динамики, когда по заданному движению требуется определить силы. Как известно, эта задача разрешима всегда.

Рассмотрим возмущенное движение колеса с изменяющимися во времени координатами θ и ψ . В силу малости отклонений

θ и ψ и линейности постановки задачи динамические реакции найдем отдельно от изменения каждой координаты. Условия для задач сформулируем в следующем виде:

1) $\psi = \text{const} = 0$, $\theta = \theta(t)$ — качение колеса с постоянным радиусом и переменной скоростью его центра (рис. 3.10);

2) $\theta = \text{const} = 0$, $\psi = \psi(t)$ — качение колеса с переменным радиусом и постоянной скоростью центра колеса в направлении невозмущенного движения (рис. 3.11).

Для определения динамических реакций применим теорему об изменении момента количества движения относительно оси — см. (3.15).

В первой задаче момент количества движения относительно оси колеса равен произведению момента инерции колеса i_k относительно его оси на угловую скорость его вращения. При качении без скольжения угловая скорость равна $\dot{\theta}/R$, где R — радиус колеса в невозмущенном движении (см. рис. 3.10). На основании (3.15) дифференциальное уравнение качения колеса представим в виде

$$\frac{d}{dt} \left(i_k \frac{l\ddot{\theta}}{R} \right) = -X_1 R,$$

откуда при $i_k = \text{const}$ получаем динамическую реакцию

$$X_1 = -i_k \frac{l}{R^2} \ddot{\theta} \quad (3.18)$$

как результат изменения угловой скорости колеса при неизменном радиусе.

Во второй задаче момент количества движения относительно оси колеса вычисляют так же, как и в первой,

$$K_y = i_k \omega,$$

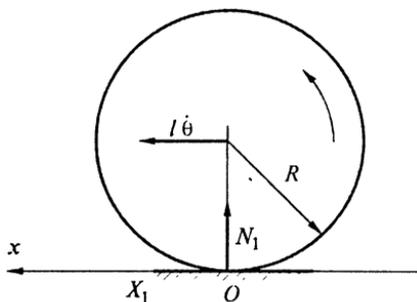


Рис. 3.10

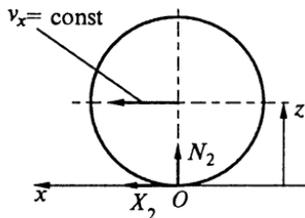


Рис. 3.11

но в выражении угловой скорости $\omega = v/z$, $v = \text{const}$, а $z = z(t)$ — переменный радиус качения, обусловленный отклонением координаты ψ ,

$$z = R + b\psi, \quad R = \text{const}.$$

На основании теоремы (3.15) имеем

$$\frac{d}{dt}(i_k \omega) = -X_2 z.$$

Принимая $i_k = \text{const}$, получим

$$i_k \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{z} \right) = -i_k \left(\frac{v\dot{z}}{z^2} \right) = -i_k \frac{vb}{z^2} \dot{\psi}.$$

Пренебрегая малой, по сравнению с R , величиной $b\psi$, окончательно находим

$$X_2 = \frac{i_k bv}{R^3} \dot{\psi}. \quad (3.19)$$

Полная динамическая реакция опорной поверхности на колесо, проявившаяся только в направлении координатной оси Ox , состоит из двух частей:

$$X = X_1 + X_2 = i_k \frac{l}{R^2} \ddot{\theta} + \frac{i_k bv}{R^3} \dot{\psi}. \quad (3.20)$$

На основании первого уравнения (3.16) можно заключить, что первая часть силы X , пропорциональная $\ddot{\theta}$, способствует снижению собственной частоты при колебаниях колеса относительно вертикальной оси AA ; вторая, пропорциональная $\dot{\psi}$, будет усиливать колебания координаты θ .

Подставим теперь значения реакций связи из (3.17) и (3.20) в уравнения (3.16). Получим

$$\left(J_1 + i_k \frac{l^2}{R^2} \right) \ddot{\theta} = -h_1 \dot{\theta} - (c_1 + c_\theta) \theta + i_k \Omega \left(1 + \frac{bl}{R^2} \right) \dot{\psi},$$

$$J_2 \ddot{\psi} = -h_2 \dot{\psi} - (c_2 + c_\psi) \psi - c_{ш} b^2 \psi - kR\theta - i_k \Omega \dot{\theta}.$$

Введем обозначения и представим дифференциальные уравнения возмущенного движения колеса в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \varepsilon_1 \dot{\theta} + \omega_1^2 \theta + b_{12} \dot{\psi} &= 0, \\ \ddot{\psi} + \varepsilon_2 \dot{\psi} + \omega_2^2 \psi + c_{21} \dot{\theta} + b_{21} \dot{\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{h_1}{J_1^*}, \quad \omega_1^2 = \frac{c_1 + c_\theta}{J_1^*}, \quad b_{12} = -\frac{i_k \Omega}{J_1^*} \left(1 + \frac{lb}{R^2} \right), \\ J_1^* &= J_1 + i_k \frac{l^2}{R^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{h_2}{J_2}, \\ \omega_2^2 &= \frac{c_2 + c_\psi + c_{\text{ш}} b}{J_2}, \quad c_{21} = \frac{kR}{J_2}, \quad b_{21} = \frac{i_k \Omega}{J_2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Величины ε_1 , ε_2 , ω_1 , ω_2 являются удвоенными коэффициентами затухания и частотами собственных колебаний парциальных систем с учетом взаимодействия колеса с дорогой.

Возмущенное движение колеса выражается однородной линейной системой дифференциальных уравнений (3.21) с постоянными коэффициентами. Это уравнения колебаний механической системы с двумя степенями свободы. Если освободить колесо от связи с опорной поверхностью (поднять автомобиль домкратом), то образуются две не связанные между собой парциальные колебательные системы, квадраты собственных частот которых

$$\omega_\theta^2 = \frac{c_1}{J_1}, \quad \omega_\psi^2 = \frac{c_2}{J_2}, \quad J_1 = \frac{i_k}{2} + ml^2.$$

Свободные колебания парциальных систем будут затухающими в связи с наличием в них сопротивлений.

Если у поднятой домкратом машины раскрутить колесо и вызвать колебания какой-либо парциальной системы, то благодаря наличию гироскопической связи возникнут колебания и в другой парциальной системе, однако гироскопическая связь не совершает работу и поэтому не вызывает нарастающих колебаний. Механическая система также будет устойчивой.

Взаимодействие катящегося колеса с дорогой усиливает связь между парциальными системами, вносит в эту связь новое качество — возможность поступления энергии в систему, которое при некоторой скорости и соотношениях параметров системы может приводить к неустойчивости движения, т.е. к нарастанию колебаний. Эта энергия поступает через опорную площадку от автомобиля, который движется с постоянной скоростью. Динамическая сила реакции

$$X_2 = \frac{i_k b v}{R^3} \dot{\psi},$$

пропорциональная угловой скорости $\dot{\psi}$, создает момент для нарастания координаты θ .

Проведем теперь анализ устойчивости системы (3.21). Подставив ее решение в виде

$$\theta = Ae^{\lambda t}, \quad \psi = Be^{\lambda t}$$

в (3.21), получим два однородных алгебраических уравнения относительно неизвестных A и B :

$$\begin{aligned} A(\lambda^2 + \varepsilon_1 \lambda + \omega_1^2) + B(\lambda b_{12}) &= 0, \\ A(\lambda b_{21} + c_{21}) + B(\lambda^2 + \varepsilon_2 \lambda + \omega_2^2) &= 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Нетривиальному решению соответствует равенство нулю определителя этой системы:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \varepsilon_1 \lambda + \omega_1^2 & \lambda b_{12} \\ \lambda b_{21} + c_{21} & \lambda^2 + \varepsilon_2 \lambda + \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим характеристическое уравнение для λ :

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \lambda^3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \lambda^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - b_{12} b_{21}) + \\ + \lambda(\varepsilon_1 \omega_2^2 + \varepsilon_2 \omega_1^2 - b_{12} c_{21}) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Запишем его в стандартной форме:

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, & a_2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - b_{12} b_{21}, \\ a_3 &= \varepsilon_1 \omega_2^2 + \varepsilon_2 \omega_1^2 - b_{12} c_{21}, & a_4 &= \omega_1^2 \omega_2^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

На основании критерия Гурвица все вещественные корни и вещественные части комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения (3.25) будут отрицательными, следовательно, невозмущенное движение колеса будет устойчивым асимптотически, если все коэффициенты характеристического уравнения (3.25) и третий минор Гурвица будут положительными, т.е. для устойчивости необходимо и достаточно:

$$\begin{aligned} 1) & a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0; \\ 2) & \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

В (3.26) коэффициенты a_2 и a_3 имеют слагаемые с отрицательными знаками. Так как всегда $b_{12} < 0$, то $a_2 > 0$ и $a_3 > 0$. Следовательно, выполняется первое условие из (3.27). Если в механической системе отсутствует рассеяние энергии, т.е. $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, то коэффициент $a_1 = 0$. Система будет находиться на границе устойчивости, и в этом случае нельзя на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению сделать заключение, будет система устойчива или неустойчива. Отброшенные члены второго и более высокого порядков в дифференциальных уравнениях могут коренным образом повлиять на выводы о характере движения.

В реальной механической системе трение существует всегда, поэтому заключение об устойчивости можно сделать из анализа третьего минора Гурвица. Для устойчивости необходимо и достаточно иметь $\Delta_3 > 0$.

Подставив сюда выражения коэффициентов из (3.26) и проведя небольшие преобразования, получим

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= (\varepsilon_1 \omega_2^2 + \varepsilon_2 \omega_1^2 - b_{12} c_{21}) [\varepsilon_1 \omega_1^2 + \varepsilon_2 \omega_2^2 + \\ &+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - b_{12} b_{21}) + b_{12} c_{21}] - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \omega_1^2 \omega_2^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Два сомножителя в этом выражении зависят от скорости v . Поскольку $\Omega = v/R$, с учетом (3.22) представим их в следующем виде:

$$b_{12}c_{21} = -v \frac{i_k k}{J_1^* J_2} \left(1 + \frac{lb}{R^2} \right),$$
$$b_{12}b_{21} = -v^2 \frac{i_k^2}{J_1^* J_2 R^2} \left(1 + \frac{lb}{R^2} \right).$$

После подстановки коэффициентов в равенство (3.28) получим многочлен относительно искомой скорости v :

$$\Delta_3 = H_0 v^3 + H_1 v^2 + H_2 v + H_3,$$

из которого при $\Delta_3 = 0$ можно определить $v = v_{\text{кр}}$.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В предыдущих главах в основном рассматривались задачи устойчивости движения. Сейчас мы переходим к задачам устойчивости равновесия деформируемых систем. В общем случае потеря устойчивости одного состояния равновесия системы и переход ее в новое равновесное состояние — это протекающий во времени процесс, полное описание которого требует динамического подхода. Более того, общие теоремы и методы исследования устойчивости тоже базируются на динамическом подходе. Однако для консервативных систем статический подход при определении критических нагрузок и новых состояний равновесия системы после потери устойчивости приводит к точно таким же результатам, что и более общий динамический*.

Во всех дальнейших главах будут рассмотрены задачи устойчивости консервативных систем на основе статического подхода без учета инерционных сил, связанных с деформациями системы. В гл. 4 основные понятия теории упругой устойчивости введены и проиллюстрированы на примерах простейших упругих систем с одной-двумя степенями свободы подобно тому, как это делается в теории механических колебаний.

4.1. Диаграммы равновесных состояний деформируемых систем

Основные особенности поведения деформируемой системы можно выявить, построив зависимость между величиной приложенной к системе нагрузки и перемещением некоторой характерной точки системы. Такие зависимости, изображенные графически, называют *диаграммами* (или *кривыми*) *равновесных состояний системы*.

*См. об этом: Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций: Пер. с англ. М.: Мир, 1971.

Диаграмма равновесных состояний линейной деформированной системы просто прямая линия. Однако поведение нелинейных деформируемых систем бывает весьма сложным, и их диаграммы равновесных состояний необозримо разнообразны. Построим сейчас несколько таких диаграмм, характерных для задач устойчивости.

На рис. 4.1 изображен жесткий стержень длиной l , нижний конец которого закреплен в упругом шарнире, а к верхнему приложена сила P . В исходном ненагруженном состоянии ось стержня строго вертикальна, сила P прикладывается вдоль нее и при отклонениях стержня сохраняет вертикальное направление. Момент в упругом шарнире пропорционален углу отклонения оси стержня φ и равен $k\varphi$, где k — жесткость упругого шарнира. Приравняв момент силы P к моменту в упругом шарнире, получим нелинейное уравнение равновесия

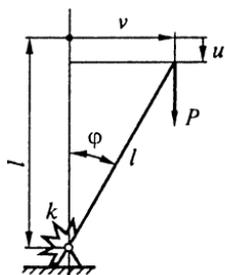


Рис. 4.1

$$Pl \sin \varphi = k\varphi, \quad (4.1)$$

имеющее два независимых решения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi = 0 \text{ при любом } P; \\ \text{б) } P = \frac{k\varphi}{l \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Диаграмму равновесных состояний, соответствующую полученным решениям, можно построить в различных координатах. На рис. 4.2, а такая диаграмма построена в координатах $\varphi - \bar{P}$ для диапазона $|\varphi| < \pi$. Как видим, в рассматриваемом примере диаграмма имеет две ветви: ось $\varphi = 0$, соответствующую первому решению, и кривую, соответствующую второму решению.

Поскольку горизонтальное перемещение точки приложения силы $v = l \sin \varphi$, диаграмму равновесных состояний можно перестроить в координатах $\bar{v} - \bar{P}$ (рис. 4.2, б). А так как вертикальное перемещение точки приложения силы $u = l(1 - \cos \varphi)$, в координатах $\bar{u} - \bar{P}$ эта диаграмма имеет вид, изображенный на рис. 4.2, в.

В качестве второго примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 4.3, а. До нагружения ось стержня строго вертикальна и сила P прикладывается вдоль нее; при отклонениях стержня

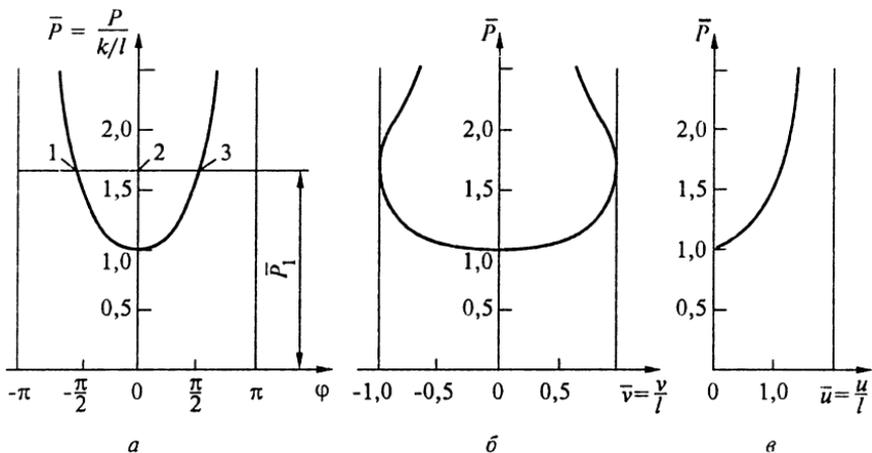


Рис. 4.2

сила P сохраняет вертикальное направление, а пружина жесткостью c остается горизонтальной. Считая упругую характеристику пружины линейной и, следовательно, при отклонении стержня на угол φ силу в пружине равной $ca \sin \varphi$, получаем уравнение равновесия отклоненного стержня

$$Pl \sin \varphi = a \cos \varphi ca \sin \varphi. \quad (4.3)$$

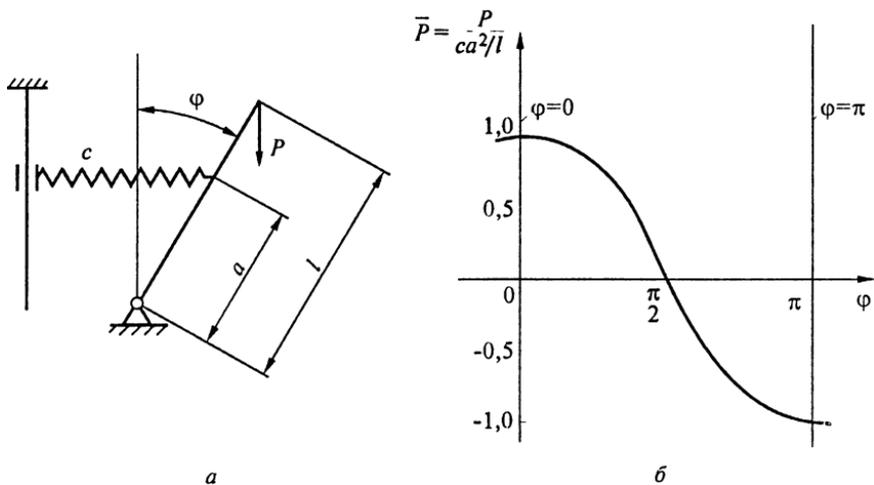


Рис. 4.3

Это нелинейное уравнение имеет решения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin \varphi = 0, \text{ т.е. } \varphi = \pm n\pi \text{ при любом } P, n = 0, 1, 2, \dots; \\ \text{б) } P = ca \frac{a}{l} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

На рис. 4.3, б построена в координатах $\varphi - \bar{P}$ соответствующая диаграмма равновесных состояний для диапазона $|\varphi| < \pi$ (относительно оси $\varphi = 0$ диаграмма симметрична).

Еще одна деформируемая система изображена на рис. 4.4, а: два жестких стержня длиной l соединены шарниром; в исходном ненагруженном состоянии высота стержневой системы равна H ; пружина жесткостью c имеет линейную характеристику. Рассмотрим равновесие системы в деформированном состоянии, получим нелинейное уравнение

$$P = 4cl(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \operatorname{tg} \varphi. \quad (4.5)$$

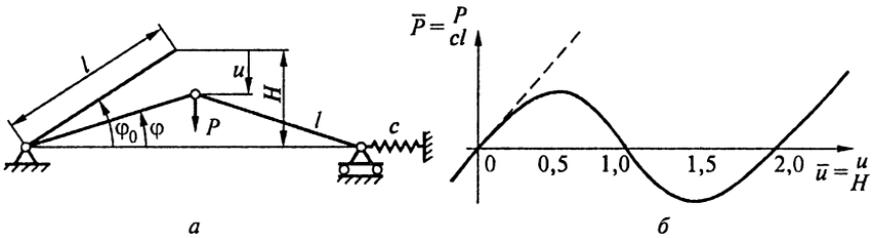


Рис. 4.4

Учитывая, что вертикальное перемещение точки приложения силы P $u = l(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$, нетрудно построить диаграмму равновесных состояний в координатах $\bar{u} - \bar{P}$ (рис. 4.4, б).

Заметим, что при малых значениях отношения H/l можно принять $\cos \varphi = 1 - 1/2 \varphi^2$ и $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \varphi$; тогда уравнение (4.5) сводится к кубическому уравнению

$$\bar{P} = 2\bar{u}(1 - \bar{u})(2 - \bar{u}), \quad (4.6)$$

где $\bar{P} = P/cl(l/H)^3$, $\bar{u} = u/H$.

Из приведенных простых примеров ясно, что упругая система при одной и той же нагрузке и условиях закрепления может иметь несколько различных состояний равновесия. Так, в пер-

вом примере при $P > k/l$ возможны три различных состояния равновесия: точка 2 соответствует вертикальному положению равновесия, а точки 1 и 3 — отклоненным положениям равновесия (см. рис. 4.2, а). Аналогичная множественность состояний равновесия обнаруживается и в двух других примерах.

Подчеркнем, что множественность состояний равновесия деформируемой системы может быть обнаружена только с помощью нелинейных уравнений. Линейная теория упругости строится при трех основных допущениях: материал считается линейно упругим, деформации выражаются через перемещения линейными соотношениями и уравнения равновесия формулируются для недеформированного состояния системы. Именно в силу этих допущений линейная теория упругости дает только одно состояние равновесия деформируемой системы, близкое к начальному недеформированному состоянию. Так, формулируя уравнения равновесия в двух первых примерах для недеформированного состояния, мы не найдем никаких других положений равновесия стержней, кроме исходного вертикального. А в третьем примере, ограничившись линейной постановкой задачи, получим диаграмму равновесных состояний в виде прямой линии, изображенной на рис. 4.4, б штрихами.

Та же самая картина наблюдается и в более сложных задачах: только нелинейная постановка задачи может выявить существование нескольких состояний равновесия при одних и тех же нагрузках и условиях закрепления. В задачу теории упругой устойчивости входит определение условий, при которых у нагруженных систем становятся возможными различные деформированные состояния равновесия, установление форм равновесных состояний и выяснение того, какие из них устойчивы, а какие нет. Для решения этой задачи необходимо отказаться от двух последних допущений линейной теории упругости.

4.2. Устойчивое и неустойчивое равновесие; критические нагрузки

Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной системы с конечным числом степеней свободы может быть обобщена и на системы с распределенными параметрами, причем для решения конкретных задач удобна следующая ее формулировка.

Теорема. *В положении равновесия полная потенциальная энергия консервативной системы имеет стационарное значение; поло-*

жение равновесия устойчиво тогда и только тогда, когда это стационарное значение — изолированный минимум.

Обозначим: W — полная потенциальная энергия системы; U — энергия упругой деформации; Π — потенциал внешних сил. Тогда

$$W = U + \Pi. \quad (4.7)$$

В положении равновесия (не обязательно устойчивого!) в соответствии с теоремой Лагранжа полная потенциальная энергия имеет стационарное значение, т.е. ее первая вариация равна нулю:

$$\delta W = \delta U + \delta \Pi = 0. \quad (4.8)$$

Полученное уравнение называют вариационным уравнением Лагранжа.

Для того чтобы положение равновесия было устойчивым, должно выполняться необходимое и достаточное условие минимума, т.е. условие

$$\Delta W > 0 \quad (4.9)$$

при любых достаточно малых отклонениях системы от рассматриваемого положения, совместимых, конечно, с наложенными на систему связями. Если же при заданных нагрузках и условиях закрепления имеются некоторые малые отклонения, при которых условие (4.9) не выполняется, то рассматриваемое положение равновесия не будет устойчивым.

Вернемся к рассмотренным в предыдущем параграфе простейшим системам и исследуем устойчивость их положений равновесия. Для изображенной на рис. 4.1 системы энергия деформации упругого шарнира $U = 1/2 k\varphi^2$. Потенциал вертикально действующей силы P равен взятому с обратным знаком произведению силы на вертикальное перемещение точки ее приложения u , т.е. $\Pi = -Pl(1 - \cos \varphi)$. Таким образом, полная потенциальная энергия

$$W = W_0 + \frac{1}{2}k\varphi^2 - Pl(1 - \cos \varphi), \quad (4.10)$$

где W_0 — потенциальная энергия системы в начальном состоянии, не зависящая от угла наклона стержня φ (в дальнейшем W_0 иногда будем опускать).

Условие стационарности $\delta W = 0$ для рассматриваемой системы с одной степенью свободы сводится к условию $dW/d\varphi = 0$, которое приводит к уравнению

$$k\varphi - Pl \sin \varphi = 0,$$

тождественному уравнению (4.1). Исследование знака второй производной W по углу φ позволяет установить, в каких из найденных положений равновесия энергия минимальна, а в каких — нет, т.е. установить, какие положения равновесия устойчивы, а какие неустойчивы. Поскольку

$$d^2W/d\varphi^2 = k - Pl \cos \varphi, \quad (4.11)$$

то в вертикальном положении равновесия стержня при $\varphi = 0$

$$d^2W/d\varphi^2 = k - Pl.$$

Отсюда видно, что при $P < k/l$ полная потенциальная энергия минимальна и, следовательно, вертикальное положение стержня устойчиво, а при $P > k/l$ эта энергия максимальна и вертикальное положение перестает быть устойчивым, т.е. становится неустойчивым.

Для исследования устойчивости отклоненного положения стержня найдем вторую производную $d^2W/d\varphi^2$ в этом положении, подставив силу P из второго решения (4.2) в выражение (4.11):

$$d^2W/d\varphi^2 = k(1 - \varphi/\operatorname{tg}\varphi).$$

Следовательно, в интервале $|\varphi| < \pi$, где $\operatorname{tg}\varphi > \varphi$, вторая производная в отклоненном положении всегда положительна и это положение равновесия, которое становится возможным при $P > k/l$, устойчиво.

Остается выяснить характер равновесия стержня в вертикальном положении при $P = k/l$. Как видно из выражения (4.11), в точке диаграммы равновесных состояний при $\varphi = 0$ и $P = k/l$ вторая производная W по φ равна нулю; поэтому для выяснения характера равновесия следует привлечь высшие производные. Последовательно дифференцируя выражение (4.11) для $d^2W/d\varphi^2$, находим значения третьей и четвертой производных при $\varphi = 0$ и $P = k/l$:

$$d^3W/d\varphi^3 = Pl \sin \varphi = 0, \quad d^4W/d\varphi^4 = Pl \cos \varphi > 0.$$

Следовательно, в этой точке диаграммы равновесных состояний полная потенциальная энергия минимальна и положение равновесия стержня при $\varphi = 0$ и $P = k/l$ устойчиво.

Результаты проведенного исследования устойчивости различных положений равновесия стержня с упругим шарниром представлены на рис. 4.5, а.

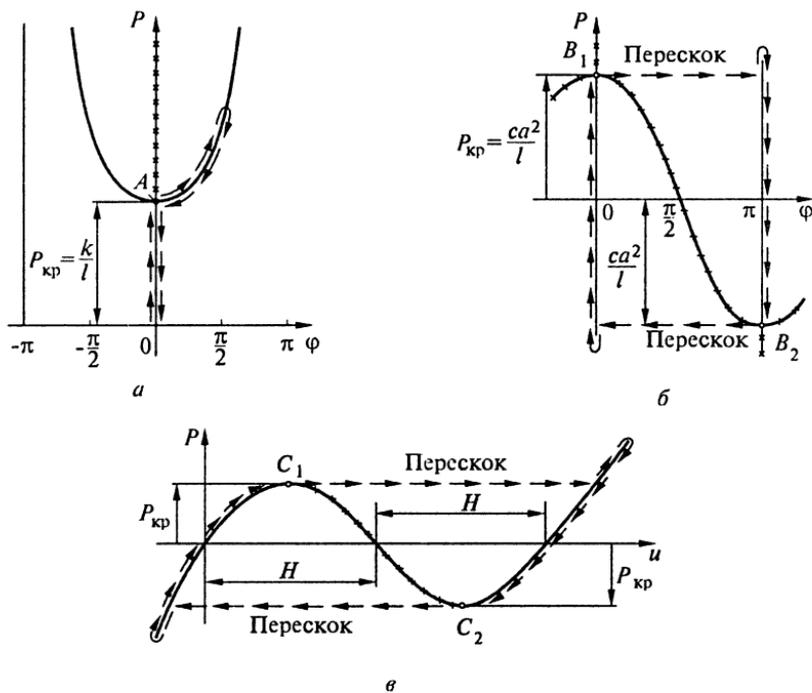


Рис. 4.5.

Совершенно аналогично можно исследовать устойчивость положений равновесия второй из рассмотренных в разд. 4.1 систем. Исходное вертикальное положение стержня при $P < ca^2/l$ остается устойчивым; при $P \geq ca^2/l$ оно становится неустойчивым. Новое отклоненное положение стержня оказывается неустойчивым; но «опрокинутое» положение стержня при $\varphi = \pm \pi$ остается устойчивым, если $P > -ca^2/l$, а если $P \leq -ca^2/l$, то это положение тоже неустойчиво. На рис. 4.5, б все сказанное изображено графически.

Результат аналогичного исследования для третьего примера из разд. 4.1 представлен на рис. 4.5, в. Совершенно аналогично можно исследовать устойчивость состояний равновесия и более сложных упругих систем, однако технические трудности такого анализа, естественно, будут возрастать вместе со сложностью системы.

На диаграммах равновесных состояний, изображенных на рис. 4.5, а и б, характерными являются точки A и B_1, B_2 , в окрестностях которых соответствующие нелинейные уравнения имеют два решения, описывающие качественно различные положения равновесия. Такие точки, в которых решение нелинейных уравнений расщепляется на несколько ветвей, называют *точками бифуркации*, или *ветвления*.

Общим для точек бифуркации A и B_1 является то, что при переходе через них исходное начальное положение равновесия стержней перестает быть устойчивым: точки оси ординат, лежащие ниже точек бифуркации A и B_1 , соответствуют устойчивым положениям равновесия, точки оси ординат выше точек A и B_1 — неустойчивым. В дальнейшем те точки на диаграммах равновесных состояний, при переходе через которые начальное состояние равновесия перестает быть устойчивым, будем называть *критическими*, а соответствующие им значения нагрузок — *критическими значениями нагрузок* или просто *критическими нагрузками*. Критические нагрузки будем обозначать нижним индексом «кр». Например, в первой задаче критическая сила $P_{кр} = k/l$, а во второй $P_{кр} = ca^2/l$.

Критические точки бифуркации A и B_1 принадлежат двум различным типам точек бифуркации, играющим в теории упругой устойчивости первостепенную роль. В критической точке бифуркации первого типа исходная начальная устойчивая форма равновесия сменяется другой качественно новой устойчивой формой равновесия, причем в самой точке бифуркации первого типа состояние равновесия устойчиво (точка A на рис. 4.5, а). В критической точке бифуркации второго типа исходная начальная форма равновесия становится неустойчивой и появляется качественно новая, тоже неустойчивая, форма равновесия (точка B_1 на рис. 4.5, б).

Двумя описанными типами, конечно, не исчерпывается разнообразие возможных точек бифуркации состояний равновесия деформируемых систем, но в задачах устойчивости силовых конструкций эти два типа точек бифуркации представляют наибольший практический интерес.

Кроме точек бифуркации в теории устойчивости деформируемых систем важное значение имеют так называемые *критические предельные точки* на диаграммах равновесных состояний. В отличие от точек бифуркации в критической предельной точке не происходит ветвления решения, однако при переходе через нее исходная начальная форма равновесия системы перестает быть устойчивой, а сама критическая предельная точка обычно соответствует неустойчивому состоянию равновесия (точка C_1 на рис. 4.5, *в*).

На рис. 4.5 поведение простейших рассмотренных систем при нагрузке и разгрузке схематично изображено стрелками. В первой из этих систем при малейшем превышении $P_{кр} = k/l$ исходное начальное положение равновесия перестает быть устойчивым и система переходит в новое устойчивое отклоненное положение. При разгрузке смена устойчивых форм равновесия происходит в обратном порядке (см. рис. 4.5, *а*). Как иногда говорят, в точке бифуркации первого типа A происходит обмен устойчивостью между различными формами равновесия.

Поведение второй системы качественно иное. Исходное положение равновесия остается устойчивым до тех пор, пока $P < P_{кр}$. При достижении точки бифуркации B_1 вертикальное положение стержня становится неустойчивым и любые сколь угодно малые возмущения выведут из него систему. Но, поскольку в окрестности точки B_1 нет новых устойчивых положений, в новое устойчивое положение, удаленное от исходного на конечное расстояние, возможен только скачкообразный переход, «перескок» (в рассматриваемом примере стержень просто опрокидывается). При разгрузке аналогичный «перескок» произойдет при достижении точки бифуркации B_2 . Качественно точно так же ведет себя и третья стержневая система. (Конечно, полное описание таких «перескоков» требует динамического подхода и здесь не рассматривается.)

Кроме понятий устойчивого и неустойчивого равновесия иногда используют понятие *безразличного* равновесия. Если при подсчете полной потенциальной энергии в отклоненном от исследуемого положении ограничиться квадратичными слагаемыми относительно малых отклонений, то в точках бифуркации получим $\Delta W = 0$. Например, в выражении (4.10), раскладывая W в ряд и ограничиваясь квадратичными относительно φ слагаемыми, получаем

$$W = \frac{1}{2} k \varphi^2 - \frac{1}{2} P l \varphi^2,$$

и в точке бифуркации при $P = k/l$ оказывается $\Delta W = 0$. Однако, как только что было установлено, эта точка соответствует устойчивому положению. Совершенно аналогично и во втором примере: если ограничиться при подсчете энергии квадратичными относительно φ слагаемыми, то в точке B_1 получим $\Delta W = 0$. Но, подсчитывая W с бóльшей точностью, можно установить, что в точке B_1 равновесие неустойчиво.

4.3. Способы получения линеаризованных уравнений

В рассмотренных простейших примерах было нетрудно получить полные нелинейные уравнения, описывающие поведение системы при любых перемещениях, и точно их решить. Но подавляющее большинство практически важных задач значительно сложнее, и проведение для них такого исчерпывающего нелинейного анализа просто не представляется возможным. Однако для практических целей обычно совсем не обязательно знать, как ведет себя система при произвольных перемещениях. В расчетах тонкостенных силовых конструкций на устойчивость центральное место занимает задача определения критических точек бифуркации начального напряженно-деформированного состояния, найденного по линейной теории. Получить решение такой ограниченной задачи, естественно, оказывается неизмеримо проще, чем провести полное нелинейное исследование. Это можно сделать с помощью *линеаризованных уравнений*.

Рассмотрим консервативную систему, начальное напряженно-деформированное состояние которой определено по линейной теории. Для определения точек бифуркации этого начального состояния достаточно, не интересуясь поведением системы при больших отклонениях от начального состояния, найти условия появления новых равновесных состояний, отличных от начального, но сколь угодно близких к нему. Те точки диаграммы начального равновесного состояния, в окрестностях которых будут обнаружены такие новые равновесные состояния, и являются искомыми точками бифуркации.

Если перемещения, описывающие новые равновесные состояния, отсчитывать от начального состояния системы, то в соответствующих уравнениях равновесия следует удерживать только первые степени этих бесконечно малых перемещений

(отсюда и термин — «линеаризованные уравнения»). Полученные линеаризованные уравнения будут однородными, ибо входящие в них перемещения отсчитываются от начального равновесного состояния, и при обращении перемещений в нуль эти уравнения должны удовлетворяться тождественно.

Однородные линеаризованные уравнения — основной рабочий инструмент теории устойчивости. С помощью этих уравнений можно не только найти все точки бифуркации начального состояния равновесия, но и описать с точностью до масштаба новые равновесные конфигурации системы в окрестностях точек бифуркации.

В задачах устойчивости равновесия используют три основных способа получения однородных линеаризованных уравнений:

1) Линеаризацией полных нелинейных уравнений в окрестности начального состояния равновесия, устойчивость которого исследуется;

2) Непосредственно из условий равновесия системы в состоянии, смежном с начальным состоянием равновесия.

3) Из условия стационарности полной потенциальной энергии системы в состоянии, смежном с начальным состоянием равновесия.

Для иллюстрации перечисленных способов получения линеаризованных уравнений возьмем систему, состоящую из двух абсолютно жестких стержней с двумя упругими шарнирами (рис. 4.6, *a*). До нагружения оси стержней расположены на одной вертикали и сила P прикладывается вдоль нее, сохраняя свое вертикальное направление при деформациях системы.

Для этого примера нетрудно составить систему полных нелинейных уравнений равновесия: приравнивая моменты в упругих шарнирах к моментам от внешней силы P , получим при произвольных величинах углов φ_1 и φ_2

$$\begin{aligned} k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= Pl_1 \sin \varphi_1, \\ k_2\varphi_2 &= P(l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2), \end{aligned} \tag{4.12}$$

где k_1 и k_2 — жесткости линейно-упругих шарниров. Линеаризуя полученные уравнения, т.е. считая $\varphi_1 \rightarrow 0$ и $\varphi_2 \rightarrow 0$, а следовательно, $\sin \varphi_1 = \varphi_1$ и $\sin \varphi_2 = \varphi_2$, приходим к двум однородным линеаризованным уравнениям:

$$k_1(\varphi_1 - \varphi_2) = Pl_1\varphi_1,$$

$$k_2\varphi_2 = P(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2).$$
(4.13)

Для получения линеаризованных уравнений вторым способом следует сразу ограничиться составлением условий равновесия при бесконечно малых отклонениях стержневой системы от начального вертикального состояния. Очевидно, эти условия равновесия непосредственно приведут к уравнениям (4.13).

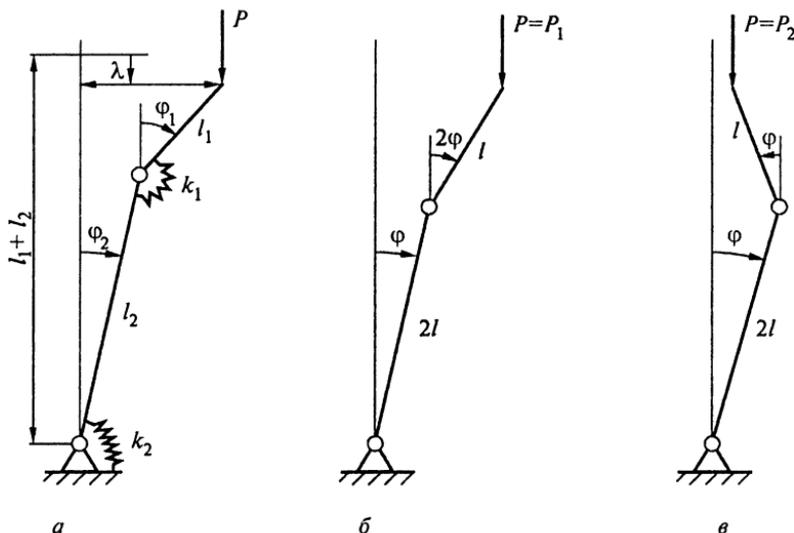


Рис. 4.6

Для получения линеаризованных уравнений третьим способом нужно подсчитать изменение полной потенциальной энергии ΔW при бесконечно малых отклонениях рассматриваемой системы от начального вертикального состояния с точностью до квадратов этих отклонений. Величина ΔW складывается из энергии деформации упругих шарниров, равной $1/2 k_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 1/2 k_2\varphi_2^2$, и изменения потенциала силы P , равного $-P\lambda$, где $\lambda = l_1(1 - \cos \varphi_1) + l_2(1 - \cos \varphi_2)$ — вертикальное перемещение точки приложения силы (см. рис. 4.6, а). Ограничившись в разложении косинусов квадратами φ_1 и φ_2 , получим

$$W = W_0 + \Delta W = W_0 + \frac{1}{2}k_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}k_2\varphi_2^2 - \frac{1}{2}P(l_1\varphi_1^2 + l_2\varphi_2^2), \quad (4.14)$$

где W_0 — потенциальная энергия начального состояния, не зависящая от φ_1 и φ_2 .

Для рассматриваемой системы с двумя степенями свободы условие стационарности $\delta W = 0$ сводится к двум уравнениям $\partial W / \partial \varphi_1 = 0$ и $\partial W / \partial \varphi_2 = 0$. Окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \varphi_1} &= k_1(\varphi_1 - \varphi_2) - Pl_1\varphi_1 = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} &= k_1(\varphi_2 - \varphi_1) + k_2\varphi_2 - Pl_2\varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Нетрудно проверить, что система уравнений (4.15) эквивалентна системе (4.13). Полученную систему уравнений запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} (k_1 - Pl_1)\varphi_1 - k_1\varphi_2 &= 0, \\ -k_1\varphi_1 + (k_1 + k_2 - Pl_2)\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Тривиальное решение $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ однородной системы уравнений возможно, конечно, при любых значениях силы P . Отличные от нуля решения однородная система уравнений имеет только тогда, когда ее определитель равен нулю. В нашем случае это условие приводит к квадратному относительно P уравнению

$$P^2 - P\left(\frac{k_1 + k_2}{l_2} + \frac{k_1}{l_1}\right) + \frac{k_1k_2}{l_1l_2} = 0,$$

дающему два значения силы P_1 и P_2 , при которых существуют нетривиальные решения для φ_1 и φ_2 (рис. 4.6, б и в), т.е. существуют отклоненные состояния равновесия, бесконечно близкие к начальному вертикальному положению стержневой системы. Например, если $k_1 = k$, $k_2 = 2k$; $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, то $P_1 = k/2l$ и $P_2 = k/2l$.

Найденные значения силы P_1 и P_2 определяют две точки бифуркации начального состояния равновесия стержневой системы, но сами линеаризованные уравнения не дают ответа на вопрос, какая из найденных точек бифуркации будет критической (хотя интуитивно можно считать, что $P_{кр} = P_1$, т.е. понятно, что начальное состояние перестанет быть устойчивым при $P > k/2l$). Выяснить это позволяет энергетический путь вывода линеаризованных уравнений.

Выпишем выражение для ΔW при выбранных выше конкретных значениях параметров жесткости стержневой системы:

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + 3\varphi_2^2) - \frac{1}{2}Pl(\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2).$$

На рис. 4.7 показан характер изменения величины ΔW в окрестности начального состояния при различных значениях силы P . Если $P < P_1$ (рис. 4.7, а), то $\Delta W > 0$ при любых малых отклонениях, то полная потенциальная энергия минимальна и начальное состояние системы устойчиво. При $P > P_1$ полная потенциальная энергия перестает быть минимальной; следовательно, $P_{кр} = P_1 = k/2l$. Если $P_1 < P < P_2$ (рис. 4.7, б), то начальное состояние равновесия соответствует точке минимакса: некоторые отклонения приводят к уменьшению полной потенциальной энергии, а некоторые — к увеличению. Когда же сила $P > P_2$ (рис. 4.7, в), полная потенциальная энергия в начальном состоянии становится максимальной: любые малые отклонения дают $\Delta W < 0$.

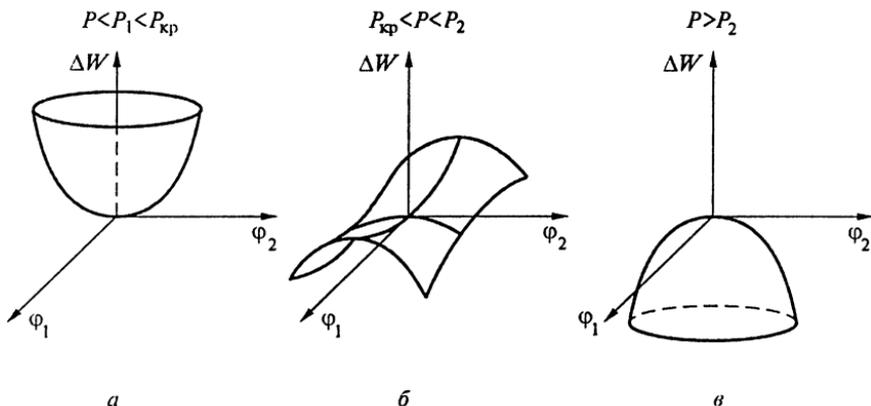


Рис. 4.7

Рассмотренная стержневая система имеет две степени свободы, поскольку ее деформирование полностью описывается двумя независимыми параметрами φ_1 и φ_2 ; для нее найдены две точки бифуркации, соответствующие двум значениям силы P_1 и P_2 , причем $P_1 < P_2$ и $P_{кр} = P_1$.

Совершенно аналогично с помощью линеаризованных уравнений можно исследовать устойчивость начального состояния равновесия дискретных систем с N степенями свободы, нагруженных некоторой обобщенной силой P . В этом случае получим N однородных линеаризованных уравнений и из условия равенства нулю определителя системы этих уравнений найдем N значений параметра нагрузки P_n , т.е. найдем N точек бифуркации; наименьшее значение P_n будет критическим: $P_{кр} = (P_n)_{\min}$.

Для систем с распределенными параметрами, т.е. для стержней, пластин и оболочек, линеаризация условий равновесия вблизи начального напряженно-деформированного состояния приводит к однородным дифференциальным уравнениям с однородными граничными условиями. У таких систем число точек бифуркации и соответствующих им значений P_n , как правило, оказывается бесконечно большим, причем и здесь $P_{кр} = (P_n)_{\min}$.

Важно подчеркнуть, что *линеаризованные уравнения не содержат абсолютно никакой информации о том, как ведет себя система при конечных отклонениях от начального состояния*, поскольку с самого начала было принято, что эти отклонения бесконечно малые. Однако линеаризованные уравнения позволяют с точностью до масштаба определить формы равновесных конфигураций системы в окрестностях точек бифуркации. Так, в нашем примере при $P = P_1$ из системы однородных уравнений будем иметь $\varphi_1 = 2\varphi_2$, а при $P = P_2$ получим $\varphi_1 = -\varphi_2$; на рис. 4.6, б и в изображены соответствующие равновесные формы стержневой системы. Потеря устойчивости системы произойдет по форме $\varphi_1 = 2\varphi_2$.

В заключение отметим, что линеаризованные уравнения теории устойчивости относятся к разделу математики, называемому *задачи на собственные значения*. Значения P_n , при которых эти уравнения имеют отличные от тождественного нуля решения, называются *собственными значениями задачи*, а соответствующие им решения — *собственными функциями задачи* (см. приложение).

4.4. Поведение упругих систем после потери устойчивости

Однородные линеаризованные уравнения дают возможность обнаружить все точки бифуркации начального состояния системы, определить критические нагрузки и найти новые равновесные формы системы в окрестностях точек бифуркации. Однако для описания поведения системы при конечных отклонениях от начального состояния и даже для установления типа критических точек бифуркации линеаризованных уравнений оказывается недостаточно: ответ на эти вопросы может дать только нелинейный подход.

Наибольший практический интерес для силовых конструкций представляет исследование их поведения при конечных, но не слишком больших перемещениях, непосредственно следующих за потерей устойчивости, и определения типа критических точек бифуркации. Такое исследование можно выполнить с помощью *упрощенных нелинейных уравнений*.

Предположим, что задача устойчивости начального состояния равновесия решена: найдена критическая нагрузка и новая равновесная форма системы в окрестности критической точки бифуркации. По мере удаления от начального состояния эта форма, естественно, будет изменяться, но при построении приближенного решения можно принять, что при небольших конечных отклонениях это изменение несущественно, и решение нелинейной задачи в первом приближении искать, используя эту форму, найденную из линеаризованных уравнений. Поясним это конкретными примерами.

В разд. 4.3 была решена задача устойчивости стержневой системы, изображенной на рис. 4.6, и при конкретных соотношениях между ее параметрами найдено значение $P_{кр}$; при этом потеря устойчивости происходит по форме $\varphi_1 = 2\varphi$, $\varphi_2 = \varphi$ (см. рис. 4.6, б). В приближенном нелинейном решении примем, что эта форма сохраняется при конечных, но не слишком больших отклонениях от начального вертикального положения стержней. Тогда, подставив в выражение W (4.14) значения $\varphi_1 = 2\varphi$ и $\varphi_2 = \varphi$ и ограничившись при подсчете λ в разложениях косинусов четвертыми степенями φ , найдем

$$W = W_0 + \frac{3}{2}k\varphi^2 - 3Pl\varphi^2 + \frac{3}{4}Pl\varphi^4 + \dots$$

Условие стационарности $\delta(W) = 0$ теперь сводится к одному уравнению $dW/d\varphi = 0$, поскольку «навязанная» системе форма деформации зависит только от одного параметра — угла φ :

$$\frac{dW}{d\varphi} = (3k - 6Pl)\varphi + 3Pl\varphi^3 = 0.$$

Это нелинейное уравнение, подобно уравнению (4.1), имеет два независимых решения:

а) $\varphi = 0$ при любом значении P ;

б) $P = \frac{P_{кр}}{1 - \varphi^2/2}$, $P_{кр} = \frac{1}{2} \frac{k}{l}$.

На рис. 4.8 в координатах $\varphi - \bar{P}$, где $\bar{P} = P/P_{кр}$, изображена диаграмма равновесных состояний, соответствующая получен-

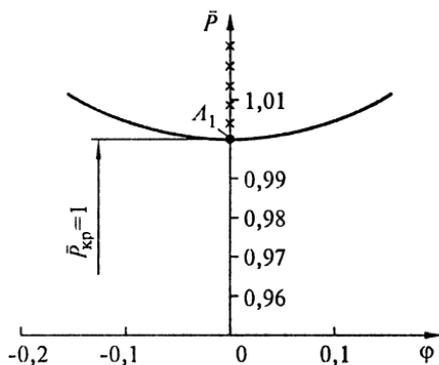


Рис. 4.8

ному упрощенному нелинейному решению. Нетрудно установить, что эта диаграмма имеет критическую точку бифуркации первого типа: в точке A_1 устойчивая начальная форма равновесия сменяется новой устойчивой отклоненной формой равновесия.

Для сравнения возьмем еще одну стержневую систему, состоящую из трех одинаковых жестких стержней, соединенных шарнирами; до нагружения оси стержней рас-

положены на одной прямой и сила P прикладывается вдоль нее (рис. 4.9, а). Пружины при деформации системы сохраняют горизонтальное положение. Обозначив горизонтальные перемещения шарниров v_1 и v_2 , подсчитаем приращение полной потенциальной энергии системы в отклоненном положении:

$$\Delta W = \frac{1}{2} cv_1^2 + \frac{1}{2} cv_2^2 - P \left[\left(l - \sqrt{l^2 - v_1^2} \right) + \left(l - \sqrt{l^2 - (v_1 - v_2)^2} \right) + \left(l - \sqrt{l^2 - v_2^2} \right) \right].$$

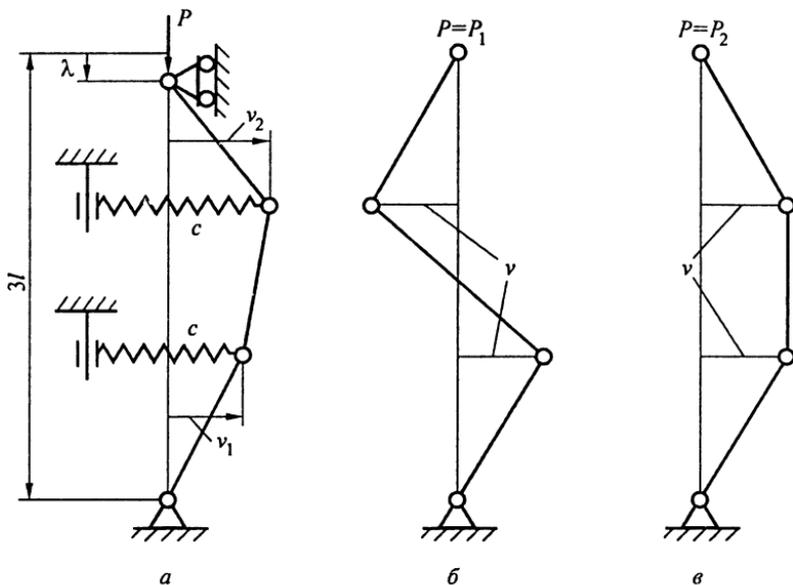


Рис. 4.9

Ограничившись при разложении в ряды квадратичными относительно v_1 и v_2 слагаемыми, из условия $\delta W = 0$, сводящегося к условиям $\partial W / \partial v_1 = 0$ и $\partial W / \partial v_2 = 0$, приходим к двум линейризованным уравнениям:

$$\left(c - 2 \frac{P}{l}\right) v_1 + \frac{P}{l} v_2 = 0,$$

$$\frac{P}{l} v_1 + \left(c - 2 \frac{P}{l}\right) v_2 = 0.$$

Равенство нулю определителя полученной системы однородных уравнений дает $P_1 = cl/3$ и $P_2 = cl$; меньшее из них равно критическому значению силы, т.е. $P_{кр} = cl/3$.

Из полученных линейризованных уравнений следует, что v_1 и v_2 при $P = P_1$ связаны соотношением $v_1 = -v_2$, а при $P = P_2$ — соотношением $v_1 = v_2$. Эти равновесные формы системы изображены на рис. 4.9, б и в; потеря устойчивости системы происходит по первой из них.

В упрощенном нелинейном решении примем $v_1 = v$, $v_2 = -v$ и, удерживая в разложении в ряды четвертые степени v , находим

$$W = W_0 + cv^2 - 3Pl\left(\frac{v}{l}\right)^2 - \frac{9}{4}Pl\left(\frac{v}{l}\right)^4 + \dots$$

Из условия $dW/dv = 0$ приходим к уравнению

$$cv - 3P\left(\frac{v}{l}\right) - \frac{9}{2}P\left(\frac{v}{l}\right)^3 = 0.$$

Полученное нелинейное уравнение имеет два независимых решения:

а) $v = 0$ при любом значении P ;

$$\text{б) } P = P_{\text{кр}} \left/ \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{l} \right)^2 \right] \right., \quad P_{\text{кр}} = \frac{cl}{3}. \quad (4.16)$$

Исследуя знак второй производной d^2W/dv^2 , нетрудно установить, что диаграмма равновесных состояний, соответствующая полученному решению и изображенная на рис. 4.10, имеет

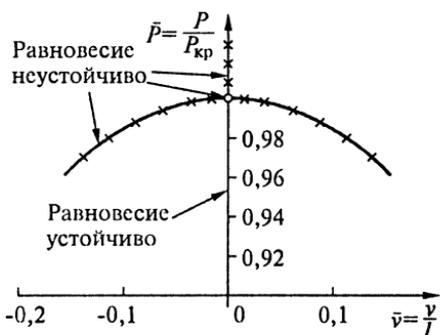


Рис. 4.10

критическую точку бифуркации B_1 второго типа: в ней начальная устойчивая форма равновесия сменяется новой отклоненной неустойчивой формой равновесия. Как было описано в разд. 4.2, потеря устойчивости в этом случае носит скачкообразный характер.

Продемонстрированный прием построения приближенных нелинейных решений применим и для систем с распределенными параметрами.

4.5. О постановке задач устойчивости тонкостенных систем

Обсудим основные упрощающие допущения, используемые при решении классических задач устойчивости тонкостенных систем: стержней, пластин и оболочек.

Во-первых, материал считается линейно-упругим (изотропным или анизотропным). Конечно, многие практически важные задачи устойчивости деформируемых систем требуют учета более сложных реологических свойств материала (вязкоупругость,

пластичность, нелинейная упругость и т.д.). Однако строгая постановка и решение задач устойчивости линейно-упругих систем имеют первостепенное значение по следующим причинам. С одной стороны, четкое понимание этих задач необходимо для правильной постановки и решения задач устойчивости с учетом более сложных реологических свойств материала. С другой стороны, задачи устойчивости линейно-упругих систем имеют и чрезвычайно большое непосредственное практическое значение: работоспособность тонкостенных элементов силовых конструкций из современных высокопрочных материалов чаще всего определяется их устойчивостью в упругой области.

Во-вторых, все внешние нагрузки, действующие на исследуемую систему, считаются консервативными, а наложенные на систему связи — идеальными. При таких нагрузках и связях упругая система является консервативной и для исследования устойчивости ее состояния используют теорему Лагранжа. При этом ограничиваются статическим подходом, при котором условия равновесия в процессе потери устойчивости формулируются без учета инерционных сил, связанных с деформациями изучаемой системы в процессе потери устойчивости. Для консервативных систем такой статический подход всегда приводит точно к тем же значениям критических нагрузок, что и более общий динамический подход.

Далее, необходимо подчеркнуть, что сведение задачи исследования устойчивости нагруженной системы к задаче определения критических точек бифуркации, т.е. к задаче на собственные значения, достигается с помощью предельной геометрической схематизации системы. Так, в рассмотренных примерах считалось, что оси жестких стержней до нагружения расположены абсолютно вертикально, а линия действия внешних сил строго совпадает с этими осями. Возникает естественный вопрос, насколько полно такие предельно идеализированные схемы отражают поведение реальных систем, в которых всегда имеются те или иные геометрические несовершенства.

Рассмотрим снова первый пример (см. рис. 4.1), но будем считать, что в ненагруженном состоянии ось стержня отклонена от вертикали на некоторый угол φ_0 (рис. 4.11, *a*). Полный угол отклонения стержня от вертикали обозначим φ_n ; тогда момент в упругом шарнире будет равен $k(\varphi_n - \varphi_0)$ и условие равновесия стержня в отклоненном положении приведет к уравнению

$$Pl \sin \varphi_n = k(\varphi_n - \varphi_0).$$

Отсюда при $\varphi_0 \neq 0$ получим

$$P = \frac{k}{l} \frac{\varphi_{\text{п}} - \varphi_0}{\sin \varphi_{\text{п}}}. \quad (4.17)$$

Несложный анализ дает возможность установить, какие из ветвей найденного решения соответствуют устойчивым положениям равновесия. Результат такого анализа схематично изображен на рис. 4.11, б.

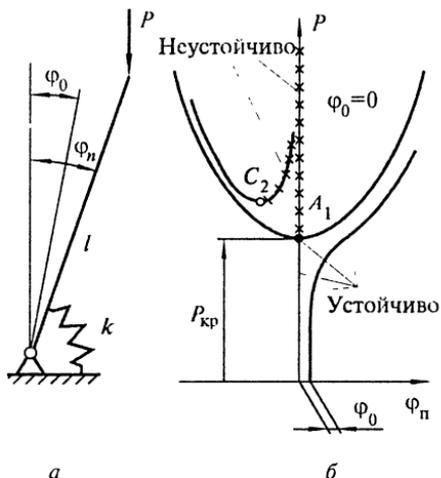


Рис. 4.11

При плавном увеличении нагрузки реализуется правая ветвь, все точки которой соответствуют устойчивым положениям равновесия стержня. Когда $\varphi_0 \neq 0$, на этой ветви нет ни точек бифуркации, ни предельных точек: с ростом нагрузки угол отклонения стержня монотонно увеличивается. На левой ветви при $\varphi_0 \neq 0$ имеется предельная точка C_2 , разделяющая устойчивые и неустойчивые положения равновесия; устойчивые положения равновесия, соответствующие этой

ветви, могут быть реализованы только тогда, когда к нагруженному вертикальной силой стержню будет приложена, а затем снята некоторая поперечная сила.

Рассмотрим влияние начального отклонения φ_0 во втором из рассмотренных ранее простейших примеров (рис 4.12, а). Отклонение стержня на угол $\varphi_{\text{п}}$ вызовет в пружине силу $ca(\sin \varphi_{\text{п}} - \sin \varphi_0)$; условие равновесия стержня приводит к уравнению

$$Pl \sin \varphi_{\text{п}} = ca^2 (\sin \varphi_{\text{п}} - \sin \varphi_0) \cos \varphi_{\text{п}}.$$

Откуда при $\varphi_0 \neq 0$ находим

$$P = \frac{ca^2}{l} \frac{\sin \varphi_{\text{п}} - \sin \varphi_0}{\text{tg} \varphi_{\text{п}}}.$$

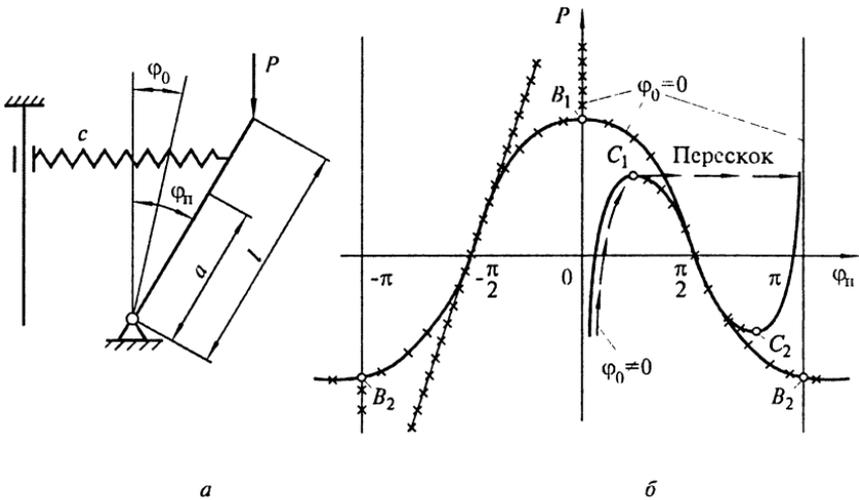


Рис. 4.12

Определив знак второй производной полной потенциальной энергии по углу φ_{Π} , нетрудно установить, какие из ветвей диаграммы равновесных состояний соответствуют устойчивым положениям равновесия. На рис. 4.12,б схематично изображен результат такого анализа. При плавном увеличении нагрузки реализуется правая ветвь; эта ветвь имеет критическую предельную точку C_1 , по достижении которой происходит потеря устойчивости исходной формы равновесия. Поскольку в окрестности предельной точки C_1 нет новых устойчивых положений равновесия, система вынуждена скачком перейти в новое устойчивое положение, удаленное от исходного на конечное расстояние.

Как видно из первого примера, точка бифуркации первого типа A существует только на диаграмме равновесных состояний предельно идеализированной системы; при любых не равных нулю значениях φ_0 , т.е. для всякой реальной системы, точка бифуркации исчезает, и с ростом нагрузки происходит монотонный рост угла отклонения стержня φ_{Π} . При малых значениях φ_0 быстрый рост φ_{Π} начинается только с приближением нагрузки к значению $P_{кр}$, соответствующему точке бифуркации A предельно идеализированной системы.

Из второго примера следует, что точка бифуркации второго типа B_1 тоже существует только на диаграмме равновесных состояний предельно идеализированной системы. При любых не равных нулю значениях φ_0 точка бифуркации B_1 трансформируется в критическую предельную точку C_1 .

Поведение под нагрузкой более сложных реальных упругих систем (стержней, пластин и оболочек) аналогичным образом отличается от поведения их идеализированных схем (подробнее об этом будет рассказано в последующих главах).

Кроме перечисленных упрощающих допущений обсудим еще одно допущение, лежащее в основе всех классических решений задач устойчивости тонкостенных упругих систем: докритическое напряженное состояние системы определяют по уравнениям линейной теории упругости и изменением всех начальных размеров системы до потери устойчивости полностью пренебрегают; например, критическая сила шарнирно опертого стержня определяется формулой Эйлера

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

где EJ — изгибная жесткость стержня; l — его длина.

Если начальную длину стержня обозначить l_0 , то к моменту потери устойчивости его длина $l = l_0(1 - \epsilon_{\text{кр}})$, где $\epsilon_{\text{кр}} = P_{\text{кр}}/EF$ (здесь E и F — модуль упругости и площадь поперечного сечения стержня). А так как при выводе формулы Эйлера изменением длины стержня полностью пренебрегают, эта формула органически содержит погрешность порядка $\epsilon_{\text{кр}}$ по сравнению с единицей. Аналогичную погрешность содержат и все другие формулы для критических нагрузок, если при их выводе не учитывается изменение начальных размеров системы. Но для тонкостенных силовых конструкций «уточнение» этих формул с помощью учета таких погрешностей не имеет никакого практического значения.

Однако имеется ряд задач устойчивости, в которых определение начального состояния равновесия по линейной теории упругости и пренебрежение изменением размеров системы может не только привести к существенным погрешностям, но даже качественно исказить результат решения. Это относится, например, к задачам устойчивости массивных деталей из резиноподобного материала. Нельзя пренебрегать изменением начальных размеров и в задаче устойчивости сжатой витой пружины: критическую силу для нее определяют по формуле, аналогичной формуле Эйлера, но для получения верного результата необходимо учесть докритическое обжатие пружины. Отметим, однако, что для правильно спроектированных силовых конструкций обобщаемое допущение вполне оправдано.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ

В этой главе сформулирован вариационный критерий потери устойчивости консервативных систем и приведены две основные формы записи этого критерия через начальные напряжения (форма Брайана) и непосредственно через внешние нагрузки (форма С.П. Тимошенко*). Изложены основы метода Рэля — Ритца и метода Галеркина применительно к задачам устойчивости равновесия.

Из известных вариационных принципов привлечены только начало возможных перемещений и теорема Лагранжа. Применение других модифицированных вариационных принципов, часто используемых при построении современных эффективных численных решений, не рассматривается; при желании переход к этим принципам может быть осуществлен чисто формальным путем.

5.1. Вариационные подходы в теории упругости

Начало (или принцип) возможных перемещений является наиболее общим в механике деформируемого твердого тела. Этот принцип справедлив для консервативных и неконсервативных систем при любых механических свойствах тела, т.е. при любых зависимостях между напряжениями и деформациями в материале тела.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из деформируемого тела и приложенных к нему распределенных объемных и поверхностных сил $\{g\} = \{g_x, g_y, g_z\}^T$ и $\{p\} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$; тело закреплено с помощью связей, исключающих его перемещение как жесткого целого (рис. 5.1). Пусть эта система находится в состоянии равновесия. Действительные перемещения, описываю-

* См.: Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин, оболочек. М.: Наука, 1967.

щие переход тела из исходного недеформированного состояния в рассматриваемое равновесное деформированное состояние, обозначим $\{u\} = \{u, v, w\}^T$. Вызванные этими перемещениями деформации обозначим как $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\}^T$, а возникающие при этом напряжения как $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}\}^T$.

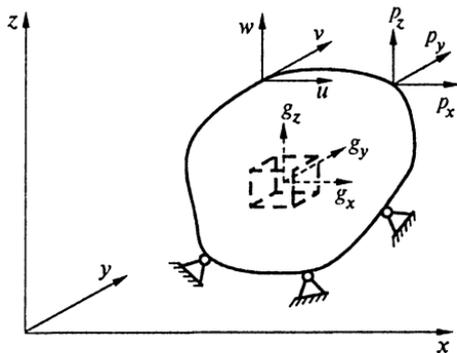


Рис. 5.1

Перемещения и деформации считаем достаточно малыми, поэтому объем и поверхность тела в деформированном состоянии будем отождествлять с его объемом и поверхностью в недеформированном состоянии.

Точкам тела, находящегося в рассматриваемом деформированном равновесном состоянии, мысленно сообщим малые возможные перемещения $\delta\{u\} = \{\delta u, \delta v, \delta w\}^T$; в объеме тела функции $\delta u, \delta v, \delta w$ непрерывны и имеют непре-

рывные производные нужного порядка, а на той части поверхности тела, где перемещения запрещены или имеют заданные значения, соответствующие возможные перемещения обращаются в нуль. Вводимые таким образом возможные перемещения $\delta\{u\}$ можно трактовать как некоторые малые изменения (вариации) действительных перемещений $\{u\}$, не нарушающие внутренних и внешних связей в системе.

Принцип возможных перемещений формулируется так:

если механическая система находится в состоянии равновесия, то сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равна нулю.

Принцип возможных перемещений можно сформулировать и в виде обратного утверждения:

если сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равна нулю, то механическая система находится в состоянии равновесия.

Для аналитической формулировки принципа возможных перемещений подсчитаем работу, совершаемую внешними и внутренними силами при сообщении точкам тела возможных перемещений. Внешние объемные и поверхностные силы совершат

работу непосредственно на возможных перемещениях, и сумма их работ будет

$$\delta R = \int_V \delta\{u\}^T \{g\} dV + \int_S \delta\{u\}^T \{p\} dS,$$

где S и V — поверхность и объем рассматриваемого тела.

Интенсивность внутренних сил в нагруженном теле характеризуется напряжениями. Поскольку для напряжений обобщенными перемещениями являются деформации, то для сообщения телу дополнительных деформаций $\delta\{\epsilon\}$, вызываемых возможными перемещениями $\delta\{u\}$, необходимо *затратить работу*

$$\delta U = \int_V \delta\{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV.$$

В соответствии с принципом возможных перемещений запишем

$$-\delta R + \delta U = 0.$$

Подчеркнем, что в это выражение δU и δR вошли с разными знаками. Как уже отмечалось, принцип возможных перемещений справедлив для тел с любыми механическими свойствами, но особенно наглядно смысл знаков при δR и δU виден в случае консервативных систем. Тогда δR можно рассматривать как *уменьшение* потенциала внешних сил, а δU — как *увеличение* потенциальной энергии деформации тела.

Окончательно аналитическую формулировку принципа возможных перемещений запишем в таком виде:

$$\int_V \delta\{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV + \int_V \delta\{u\}^T \{g\} dV + \int_S \delta\{u\}^T \{p\} dS = 0. \quad (5.1)$$

Поскольку принцип возможных перемещений формулируется для равновесного состояния из уравнения (5.1), можно получить уравнение равновесия внутри тела и на поверхности тела.

Если на деформирование тела внутри его объема не вводить никаких дополнительных ограничений (типа гипотезы плоских сечений или гипотезы прямой нормали, вводимых в теории из-

гиба балок или в теории изгиба пластин) и считать, что деформации связаны с перемещениями обычными линейными соотношениями

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\}, \quad (5.2)$$

где $[L]$ — матрица линейных дифференциальных операторов

$$[L] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.2')$$

то условие (5.1) в развернутом виде приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\sigma_x \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sigma_y \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sigma_z \left(\delta \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \tau_{xz} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dV - \\ & - \int_V (g_x \delta u + g_y \delta v + g_z \delta w) dV + \int_S (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы избавиться от производных под знаком вариаций, входящих в подынтегральные выражения, воспользуемся формулами Гаусса — Остроградского:

$$\int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} dV = \int_S \varphi \psi l dS - \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \psi dV \text{ и т.д.}, \quad (5.3)$$

где φ, ψ — произвольные функции координат; $l = \cos(\hat{n}, x)$.

Тогда, перегруппировав слагаемые, получим

$$\int_S \left[(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - p_x) \delta u + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - p_y) \delta v + \right. \\ \left. + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n - p_z) \delta w \right] dS - \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x \right) \delta u + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y \right) \delta v + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z \right) \delta w \right] dV = 0,$$

где l, m, n — косинусы углов между внешней нормалью к поверхности тела и осями x, y, z .

Поскольку внутри тела на перемещения никаких ограничений не наложено и вариации $\delta u, \delta v, \delta w$ произвольны, для тождественного обращения в нуль тройного интеграла должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Полученные условия (5.4) являются уравнениями равновесия элементарного прямоугольного элемента тела.

Для обращения в нуль интеграла по поверхности должны в каждой точке поверхности тела выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \delta u = 0 \text{ (т.е. } u = \bar{u}) \text{ либо } \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= p_x, \\ \delta v = 0 \text{ (т.е. } v = \bar{v}) \text{ либо } \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= p_y, \\ \delta w = 0 \text{ (т.е. } w = \bar{w}) \text{ либо } \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= p_z. \end{aligned} \quad (5.4')$$

Здесь чертой обозначены заданные значения перемещений на поверхности тела (в частности, может быть задано $\bar{u} = 0, \bar{v} = 0, \bar{w} = 0$).

Условия (5.4) являются тем набором граничных условий, из которого может быть выбран вариант граничных условий в раз-

личных областях поверхности рассматриваемого тела, соответствующий постановке конкретной задачи.

Поскольку при формулировке принципа возможных перемещений не делалось никаких предположений относительно характера внешних сил и закона деформирования тела, полученные выше зависимости справедливы для любых консервативных и неконсервативных систем. Однако этих зависимостей недостаточно для определения напряженно-деформированного состояния тела: зависимости (5.2) и (5.4) дают только девять уравнений, а величины $\{u\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$, описывающие напряженно-деформированное состояние, содержат пятнадцать компонентов. Поэтому для определения напряженно-деформированного состояния тела необходимо конкретизировать механические свойства тела, т.е. требуется ввести еще шесть соотношений, связывающих напряжения и деформации.

В дальнейшем ограничимся консервативными системами, для которых можно, как отмечалось ранее, ввести понятие *полной потенциальной энергии*:

$$W = U + \Pi,$$

где U — потенциальная энергия деформации упругого тела; Π — потенциал внешних сил ($\Pi = -R$).

Величину U определяют интегрированием по объему тела удельной потенциальной энергии деформации U_0 :

$$U = \int_V U_0 dV. \quad (5.5)$$

Здесь U_0 — функция деформаций, обладающая тем свойством, что

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y, \quad \dots, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}. \quad (5.5')$$

Поскольку для деформирования твердого тела всегда необходимо затратить некоторую энергию, функция U_0 является положительно-определенной, т.е. при любых не равных нулю значениях ε_x , ε_y , ..., γ_{xy} выполняется условие $U_0 > 0$.

Для подсчета потенциала внешних сил Π нужно знать характер зависимости внешних сил от перемещений системы. Если

при деформациях системы величины и направления внешних сил не меняются (внешние силы «мертвые»), то их потенциал

$$\Pi = - \int_V \{u\}^T \{g\} dV - \int_S \{u\}^T \{p\} dS. \quad (5.6)$$

Знак минус перед интегралами соответствует случаю, когда объемные и поверхностные силы направлены так же, как соответствующие перемещения; тогда с ростом перемещений потенциал внешних сил уменьшается.

При известных упругих свойствах тела, внешних нагрузках и зависимостях между деформациями и перемещениями полная потенциальная энергия W является функционалом, зависящим от конкретного вида функций $\{u\}$; этот функционал называют *функционалом Лагранжа*. В положении равновесия системы функционал Лагранжа принимает стационарное значение, в чем нетрудно убедиться, непосредственно подсчитав первую вариацию этого функционала с использованием выражений (5.5), (5.5') и (5.1):

$$\begin{aligned} \delta W = \delta U + \delta \Pi &= \int_V \left(\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \dots + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right) dV - \\ &- \int_V (g_x \delta u + g_y \delta v + g_z \delta w) dV - \int_S (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS = \\ &= \int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \delta \{u\}^T \{g\} dV - \int_S \delta \{u\}^T \{p\} dS = 0. \end{aligned}$$

Справедливо и обратное утверждение: если значение функционала Лагранжа стационарно, то система находится в состоянии равновесия.

Условие стационарности функционала Лагранжа иногда формулируют как принцип стационарности полной потенциальной энергии:

среди множества всех допустимых конфигураций системы состояние равновесия характеризуется свойством стационарности полной потенциальной энергии.

Аналитически этот принцип записывается в виде *вариационного уравнения Лагранжа*

$$\delta U + \delta \Pi = 0. \quad (5.7)$$

Подчеркнем, что принцип стационарности полной потенциальной энергии охватывает все консервативные системы — как линейные, так и нелинейные. Нелинейность консервативной системы может быть обусловлена физическими и геометрическими причинами. Физическая нелинейность — это нелинейность зависимостей между напряжениями и деформациями в твердом теле. Геометрическая нелинейность обычно связана с большими перемещениями гибких тонкостенных стержней, мембран и оболочек или с большими деформациями упругих тел из резиноподобных материалов.

Для линейно-упругого тела удельная потенциальная энергия U_0 , как это следует из ее свойства (5.5'), является положительно-определенной квадратичной формой от деформаций:

$$U_0 = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [G] \{\epsilon\}, \quad (5.8)$$

где $[G]$ — симметричная матрица коэффициентов упругости. Отсюда следует матричная запись закона Гука для общего случая анизотропного тела:

$$\{\sigma\} = [G] \{\epsilon\}. \quad (5.9)$$

Закон Гука можно записать и в иной форме, выразив деформации через напряжения:

$$\{\epsilon\} = [C] \{\sigma\}, \quad (5.9')$$

где $[C] = [G]^{-1}$ — симметричная матрица коэффициентов податливости, обратная матрице коэффициентов упругости. Заметим, что конкретный вид этих матриц для анизотропного тела не только определяется упругими свойствами тела, но и зависит от выбора системы координат.

В случае плоского напряженного состояния, когда $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, закон Гука ортотропного тела в главных осях ортотропии будет иметь вид

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (5.10)$$

где $E_1, E_2, G_{12}, \mu_{12}$ — четыре независимые величины, определяющие упругие свойства тела (в силу симметрии матрицы коэффициентов податливости выполняется дополнительное равенство $\mu_{12}E_2 = \mu_{21}E_1$). Матрица коэффициентов упругости для этого случая выглядит так:

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & \frac{\mu_{21}E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.10')$$

В частном случае изотропного тела $E_1 = E_2 = E, \mu_{12} = \mu_{21} = \mu$ и $G_{12} = E/(1 + \mu)2$.

Для изотропного тела формула (5.8) в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$U_0 = \frac{E}{2(1 + \mu)} \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1 - 2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]. \quad (5.11)$$

Для плоского напряженного состояния

$$U_0 = \frac{E}{2(1 - \mu^2)} \left(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1 - \mu}{2} \gamma_{xy}^2 \right). \quad (5.11')$$

В качестве примера использования вариационного уравнения Лагранжа рассмотрим задачу поперечного изгиба балки из изотропного материала (рис. 5.2, а). Примем обычное упрощающее допущение: нормальные сечения к недеформированной оси балки остаются плоскими и нормальными к деформированной оси («гипотеза плоских сечений»). Тогда (рис. 5.2, б) $v = v', u = -\nu v = -\nu v'$ и $\varepsilon_x = \partial u / \partial x = -\nu v'', \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\nu + \nu \equiv 0$, где

штрихом обозначено дифференцирование по x . Тогда $U_0 = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2$, и

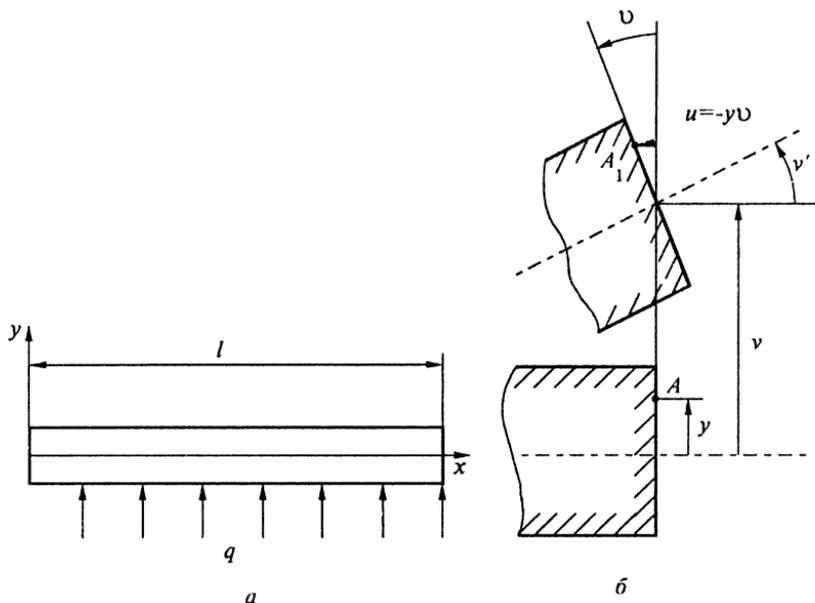


Рис. 5.2

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l dx \left(\int_F E \varepsilon_x^2 dF \right) = \frac{1}{2} \int_0^l E \left(\int_F y^2 dF \right) v''^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v''^2 dx, \quad (5.12)$$

где J и F — центральный момент инерции и площадь поперечного сечения балки. Потенциал внешних сил, согласно (5.6), равен $-\int_0^l qv dx$. Полная потенциальная энергия балки

$$W = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EJ v''^2 - qv \right) dx,$$

и вариационное уравнение Лагранжа (5.7) принимает вид

$$\delta W = \int_0^l (EJ v'' \delta v'' - q \delta v) dx = 0.$$

После двукратного интегрирования по частям, избавившись от производных под знаком вариации, получим

$$(EJv'') \delta v \Big|_0^l - (EJv'')' \delta v \Big|_0^l + \int_0^l [(EJv'')'' - q] \delta v dx = 0.$$

Отсюда следуют дифференциальное уравнение изгиба балки

$$(EJv'')'' = q$$

и набор граничных условий, какие могут быть заданы на ее торцах при $x = 0$ и $x = l$:

1) $EJv'' = 0$ либо $\delta v' = 0$, т.е. $v' = \bar{v}'$;

2) $(EJv'')' = 0$ либо $\delta v = 0$, т.е. $v = \bar{v}$.

Здесь \bar{v} и \bar{v}' — заданные значения перемещений и углов поворота поперечных сечений на торцах балки.

Совершенно аналогичные выкладки приводят к дифференциальным уравнениям и соответствующим наборам граничных условий в задачах теории пластин и оболочек.

5.2. Вариационный критерий потери устойчивости; запись критерия в форме Брайана

В разд. 4.2 и 4.3 был намечен энергетический путь определения критических сил и для простейших систем с одной и двумя степенями свободы продемонстрировано его применение. Сейчас этот путь рассмотрим для общего случая консервативной системы с распределенными параметрами, состоящей из упругого тела, подчиняющегося закону Гука — см. (5.9) — и нагруженного потенциальными силами (см. рис. 5.1). Задачу устойчивости равновесия такой системы решаем в следующей постановке:

1) тело нагружено системой «мертвых» объемных и поверхностных сил, изменяющихся пропорционально одному параметру P ;

2) начальное (докритическое) состояние равновесия описывается уравнениями линейной теории упругости, и изменения формы и размеров тела до потери устойчивости полностью пренебрегаем.

В разд. 4.2 отмечалось, что состояние равновесия системы устойчиво тогда и только тогда, когда полная потенциальная энергия системы W минимальна, т.е. когда условие $\Delta W > 0$ вы-

полняется при любых достаточно малых отклонениях системы от рассматриваемого равновесного состояния. Поскольку потенциальная энергия деформации упругого тела всегда положительна, состояние ненагруженной системы устойчиво: условие $\Delta W > 0$ выполняется при любых отклонениях. Состояние равновесия нагруженной системы может перестать быть устойчивым, когда параметр нагрузки P превысит некоторое конечное значение $P_{кр}$. Другими словами, пока $P < P_{кр}$, любые достаточно малые отклонения приводят к $\Delta W > 0$, а при $P > P_{кр}$ системы становятся возможными такие малые отклонения, при которых $\Delta W \leq 0$. Поэтому естественно дать такое определение:

критическое значение параметра нагрузки $P_{кр}$ — это нижняя граница тех значений P , при которых возможны малые отклонения системы от рассматриваемого состояния равновесия, приводящие к $\Delta W = 0$.

Сформулированное определение дает возможность получить вариационный (энергетический) критерий потери устойчивости состояния равновесия консервативной системы.

Будем считать, что задача определения начального напряженно-деформированного состояния решена и найдены начальные перемещения $\{u_0\}$, напряжения $\{\sigma_0\}$ и деформации $\{\epsilon_0\}$; полная потенциальная энергия W_0 в этом состоянии стационарна, т.е. $\delta W_0 = 0$. Рассмотрим новое, смежное с начальным состояние тела, в котором полная потенциальная энергия будет $W = W_0 + \Delta W$. Приращение полной потенциальной энергии ΔW представим в виде двух слагаемых, одно из которых не зависит от внешних сил, а другое пропорционально параметру P :

$$\Delta W = V_1 + PV_2.$$

В тех случаях, когда при переходе к новому состоянию выполняется условие $\Delta W = 0$, можно записать

$$P = -V_1/V_2.$$

Согласно приведенному определению, наименьшее из всех возможных значений параметра P , получаемых по последнему выражению, будет равно критическому значению $P_{кр}$. В общем случае ΔW , V_1 , V_2 — функционалы (см. приложение), зависящие от перемещений первого порядка малости, переводящих систему в новое состояние, смежное с начальным. Используя необходимое условие минимума отношения двух функционалов (совер-

шенно аналогичное условию минимума отношения двух функций), получаем

$$\delta(V_1/V_2) = \frac{1}{V_2} \left(\delta V_1 - \frac{V_1}{V_2} \delta V_2 \right) = \frac{1}{V_2} (\delta V_1 - P \delta V_2) = 0.$$

Откуда и следует *вариационный критерий потери устойчивости*:

$$\delta(\Delta W) = 0. \quad (5.13)$$

Этот критерий имеет достаточно простой механический смысл. Используя условие (5.13), получаем

$$\delta W = \delta(W_0 + \Delta W) = \delta W_0 + \delta(\Delta W) = 0. \quad (5.13')$$

Поэтому условие (5.13) можно трактовать как условие равновесия системы в состоянии, смежном с начальным. Точки диаграммы начального равновесного состояния, в окрестностях которых существуют новые состояния равновесия, смежные с начальным, есть не что иное, как точки бифуркации начального состояния. Следовательно, условием (5.13) определяются точки бифуркации начального состояния, причем критической будет точка бифуркации, соответствующая наименьшему значению P , а само это наименьшее значение будет критическим значением параметра нагрузки.

Подсчитаем приращение энергии ΔW при переходе системы в новое, смежное с начальным состояние. Перемещения, переводящие точки тела из начального состояния равновесия в это новое состояние, обозначим

$$\alpha\{u_1\} = \alpha\{u_1(x, y, z), v_1(x, y, z), w_1(x, y, z)\}^T, \quad (5.14)$$

причем входящие в этот вектор функции будем считать конечными, а параметр α — бесконечно малой величиной, не зависящей от координат. Тогда полные перемещения, описывающие новое состояние системы,

$$\{u\} = \{u_0\} + \alpha\{u_1\}. \quad (5.14')$$

Задачи устойчивости в принципе нелинейны, и в соотношениях, связывающих деформации с перемещениями, необходимо учитывать при подсчете энергии деформации наряду с линейны-

ми и квадратичные относительно перемещений слагаемые. Вывод таких соотношений для задач устойчивости стержней и пластин будет дан ниже, а в общем случае нелинейные соотношения, связывающие деформации с перемещениями, имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right],$$

..... (5.15)
.....

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Подставив в эти соотношения полные перемещения (5.14'), получим

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + \alpha\{\varepsilon_1\} + \alpha^2\{\varepsilon_2\}, \quad (5.16)$$

где

$$\{\varepsilon_0\} = [L]\{u_0\}, \quad \{\varepsilon_1\} = [L]\{u_1\}; \quad (5.17)$$

здесь $[L]$ — матрица линейных дифференциальных операторов (5.2').

Компоненты вектора $\{\varepsilon_2\}$ определяются формулами, следующими из (5.15):

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right],$$

..... (5.18)
.....

$$\gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y}.$$

Заметим, что в соответствии с соотношениями (5.15) в компоненты вектора $\{\varepsilon_1\}$ входят и слагаемые, содержащие производные начальных перемещений $\{u_0\}$. Однако, согласно принятым допущениям о пренебрежении изменением размеров и формы тела в начальном состоянии, всеми слагаемыми, содержащими

производные начальных перемещений, тоже пренебрегаем и приходим ко второй из формул (5.17).

Полную потенциальную энергию системы в новом, смежном с начальным, состоянии представим в виде разложения по степеням α до α^2 включительно:

$$W = W_0 + \alpha W_1 + \alpha^2 W_2. \quad (5.19)$$

Поскольку перемещения первого порядка малости $\alpha\{u_1\}$ не должны нарушать наложенные на тело связи, эти перемещения можно считать некоторыми вариациями начальных перемещений $\{u_0\}$. Тогда величина αW_1 , равная линейной относительно перемещений $\alpha\{u_1\}$ составляющей изменения полной потенциальной энергии, будет, по определению, первой вариацией полной потенциальной энергии начального состояния (такую вариацию иногда называют первой специальной вариацией). Так как начальное состояние равновесно, эта первая вариация равна нулю. Таким образом, приращение полной потенциальной энергии при переходе системы из начального состояния в бесконечно близкое смежное состояние

$$\Delta W = W - W_0 = \alpha^2 W_2. \quad (5.20)$$

При подсчете значения W_2 , во-первых, обратим внимание на то, что «мертвые» внешние силы $\{g\}$ и $\{p\}$ в нее не входят, как видно из выражений (5.6) и (5.14), они войдут только в W_0 и W_1 . Далее, подставив выражение (5.16) в формулу для удельной потенциальной энергии (5.8) и собрав слагаемые с множителем α^2 , после интегрирования по объему тела найдем

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_V [\{\varepsilon_1\}^T [G] \{\varepsilon_1\} + \{\varepsilon_0\}^T [G] \{\varepsilon_2\} + \{\varepsilon_2\}^T [G] \{\varepsilon_0\}] dV.$$

Использував закон Гука (5.9), запишем

$$\{\sigma_0\} = [G] \{\varepsilon_0\}; \quad \{\sigma_1\} = [G] \{\varepsilon_1\}; \quad \{\sigma_2\} = [G] \{\varepsilon_2\},$$

где $\{\sigma_0\}$ — начальные напряжения, а $\{\sigma_1\}$ и $\{\sigma_2\}$ — некоторые дополнительные напряжения, вызываемые деформациями $\{\varepsilon_1\}$ и $\{\varepsilon_2\}$. В силу закона взаимности работ имеем тождество

$$\{\varepsilon_0\}^T \{\sigma_2\} = \{\varepsilon_2\}^T \{\sigma_0\},$$

т.е.

$$\{\varepsilon_0\}^T [G] \{\varepsilon_2\} = \{\varepsilon_2\}^T [G] \{\varepsilon_0\}.$$

Используя это тождество, можно выражение для ΔW (опустив множитель α^2) записать так:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_1\}^T [G] \{\varepsilon_1\} dV + \int_V \{\varepsilon_2\}^T \{\sigma_0\} dV. \quad (5.21)$$

В дальнейшем условии (5.13), в котором приращение полной потенциальной энергии ΔW выражено через начальные напряжения $\{\sigma_0\}$ с помощью выражения (5.21), будем называть *вариационным (или энергетическим) критерием бифуркационной потери устойчивости или просто вариационным (или энергетическим) критерием устойчивости в форме Брайана*. Этот критерий можно использовать как для получения однородных линеаризованных уравнений теории устойчивости, так и для решения задач устойчивости прямыми вариационными методами типа метода Рэлея — Ритца.

Относительно полученного критерия в форме Брайана сделаем несколько замечаний.

1. Этот критерий дает возможность обнаружить все точки бифуркации начального напряженно-деформированного состояния консервативной системы независимо от причин, вызвавших начальные напряжения $\{\sigma_0\}$. Другими словами, для энергетического критерия в форме Брайана безразлично, чем именно вызваны начальные напряжения: внешними силами, заданными перемещениями, нагревом, структурными превращениями в материале тела и т.д.

2. При выводе этого критерия внешние силы считались «мертвыми». Это ограничение не принципиально: весь вывод нетрудно обобщить и на тот случай, когда действующие на тело консервативные силы изменяются при деформациях системы. Тогда в окончательное выражение (5.21) войдут некоторые дополнительные слагаемые; примеры таких задач будут приведены в дальнейшем изложении.

3. Так же не принципиально предположение о том, что все внешние силы изменяются пропорционально одному параметру. Если на тело действует несколько независимо изменяющихся

сил, то с помощью вариационного критерия можно определить область их значений, в которой начальное состояние системы будет оставаться устойчивым.

4. Более принципиальным является допущение о малости докритических деформаций $\{\varepsilon_0\}$. Величины деформаций $\{\varepsilon_1\}$, как это видно из выражений (5.18), имеют порядок квадратов величин деформаций $\{\varepsilon_1\}$. Поэтому в общем случае трехмерного тела, как это следует из выражения (5.21), значения начальных напряжений $\{\sigma_0\}$ должны иметь порядок значений коэффициентов упругости $[G]$ для выполнения условия $\Delta W = 0$, т.е. для появления у нагруженного тела точек бифуркации. Другими словами, для того чтобы начальное напряженно-деформированное состояние тела перестало быть устойчивым, начальные деформации в нем должны быть порядка единицы. Но тогда весь вывод вариационного критерия, основанный на допущении о пренебрежимо малых начальных деформациях, становится неверным.

Известны два исключения, когда нарушается приведенная общая оценка значений начальных критических деформаций: речь идет о тонкостенных телах (стержни, пластинки, оболочки) и телах с резко выраженной анизотропией упругих свойств. Устойчивости упругих тонкостенных тел посвящены все последующие разделы учебника, а сейчас приведем пример потери устойчивости анизотропного тела.

На рис. 5.3 изображен параллелепипед из анизотропного материала, равномерно сжатый вдоль оси y давлением p ; начальное напряженное состояние считаем одноосным и $\{\sigma_0\} = \{0, -p, 0, 0, 0, 0\}^T$. Материал обладает резко выраженной анизотропией и $G_{xy} \ll E_y$, где G_{xy} и E_y — модуль сдвига в плоскости xu и модуль упругости в направлении оси y . В рассматриваемой задаче возможна сдвиговая форма потери устойчивости начального состояния в плоскости xu , описываемая перемещениями

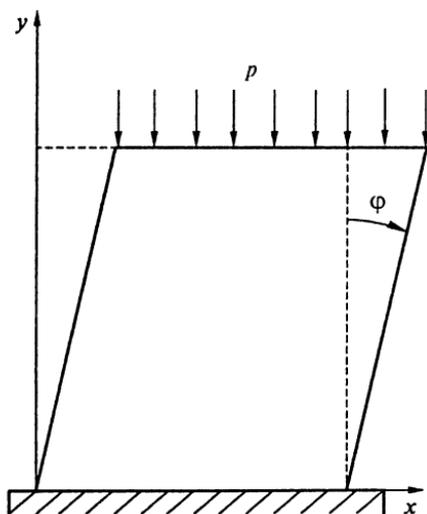


Рис. 5.3

$\{u_1\} = \{\varphi y, 0, 0\}^T$, где φ — некоторый коэффициент. Из общих формул (5.17) и (5.18) находим $\{\varepsilon_1\} = \{0, 0, 0, 0, 0, \varphi\}^T$ и $\{\varepsilon_2\} = \{0, \varphi^2/2, 0, 0, 0, 0\}^T$. Подставив эти величины в выражение (5.21), получим

$$\Delta W = \frac{1}{2} \varphi^2 G_{xy} V - \frac{1}{2} p \varphi^2 V,$$

где V — объем параллелепипеда. Условие стационарности ΔW , т.е. вариационный критерий (5.13), дает

$$\frac{d(\Delta W)}{d\varphi} = \varphi(G_{xy} - p)V = 0.$$

Отсюда при $\varphi \neq 0$ получим критическое значение давления $p_{кр} = G_{xy}$. Как видим, критическое давление не зависит от размеров тела и просто равно модулю сдвига в плоскости xy . В силу резкой анизотропии упругих свойств материала потеря устойчивости произойдет при малых абсолютных значениях начальных деформаций:

$$|(\varepsilon_y)_{кр}| = G_{xy}/E_y \ll 1.$$

Такого рода резкая анизотропия упругих свойств может встречаться в современных композиционных материалах.

5.3. Вариационный критерий потери устойчивости в форме Тимошенко

В курсе «Сопротивление материалов» расчет стержней на устойчивость обычно описывают (в наших обозначениях) следующим образом. Ось стержня считается нерастяжимой, и тогда при изгибе стержня $\lambda = 1/2 \int_0^l v'^2 dx$ (рис. 5.4, а). Изменение полной потенциальной энергии ΔW записывают в виде

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJv''^2 dx - P\lambda, \quad (5.22)$$

где первое слагаемое в правой части — потенциальная энергия изгиба стержня (см. разд. 5.1), а второе слагаемое — изменение

потенциала внешних сил. Из условия $\Delta W = 0$ получают окончательную расчетную зависимость

$$P = \frac{\int_0^l EJv''^2 dx}{\int_0^l v'^2 dx}, \quad (5.22')$$

в которой функция $v(x)$ удовлетворяет граничным условиям задачи и определяется из условия минимума P .

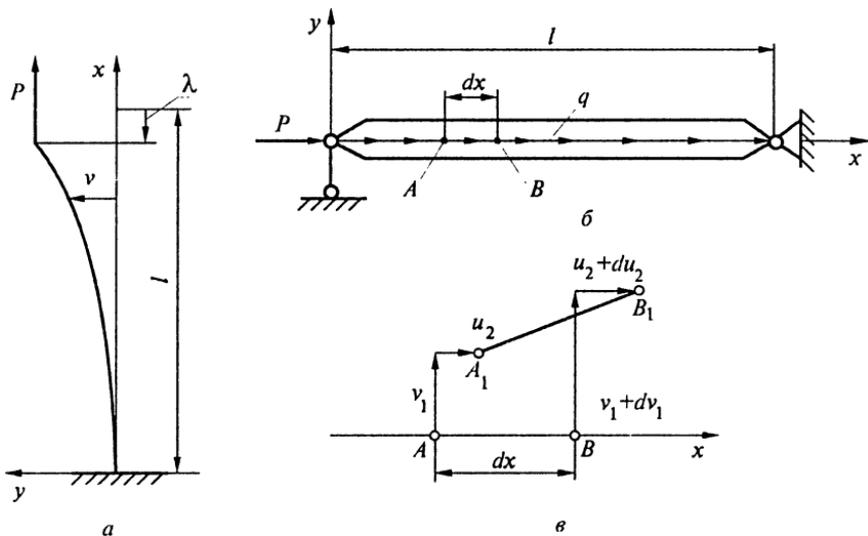


Рис. 5.4

Если для решения той же задачи воспользоваться вариационным критерием в форме Брайана, то из выражения (5.21) получим

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJv''^2 dx + \int_0^l N_0 \varepsilon_2 dx, \quad (5.22'')$$

здесь первое слагаемое в правой части тоже потенциальная энергия изгиба стержня, а второе слагаемое — работа начальных осевых сил N_0 на квадратичных удлинениях ε_2 . Поскольку $N_0 = -P$ и $\varepsilon_2 = 1/2 v'^2$, то выражение (5.22'') сводится к выражению (5.22).

В рассмотренном элементарном примере тождественность результатов, полученных с помощью этих двух подходов, очевидна.

Для установления связи между этими двумя подходами в общем случае рассмотрим стержень, нагруженный распределенными силами q и сосредоточенной силой P (рис. 5.4, б). Будем считать, что начальное напряженно-деформированное состояние стержня с неискривленной осью известно, т.е. известны начальная осевая сила N_0 , начальное осевое перемещение u_0 и начальное осевое удлинение оси стержня ε_0 , причем $\varepsilon_0 = u'$ и $N_0 = EF\varepsilon_0$, где EF — жесткость стержня на растяжение. Новое, смежное с начальным прямолинейным, состояние стержня зададим перемещениями v_1 и u_2 (рис. 5.4, в). Дополнительное удлинение оси стержня $\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} + 1/2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial v} \right)^2$, тогда

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v_1''^2 dx + \int_0^l N_0 \left(u_2' + \frac{1}{2} v_1'^2 \right) dx + \left[-Pu_2(0) - \int_0^l qu_2 dx \right], \quad (5.23)$$

где первое слагаемое равно потенциальной энергии изгиба стержня, второе слагаемое — работа начальных осевых сил на дополнительных удлинениях ε_2 , а выражение в квадратных скобках — изменение потенциала внешних сил. Перегруппировав слагаемые в выражении (5.23), запишем

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v_1''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l N_0 v_1'^2 dx + \left[\int_0^l N_0 u_2' dx - Pu_2(0) - \int_0^l qu_2 dx \right]. \quad (5.24)$$

Дополнительное перемещение u_2 должно, конечно, удовлетворять всем геометрическим граничным условиям, заданным на торцах стержня. Поэтому перемещение u_2 можно трактовать как некоторое возможное перемещение для начального состояния равновесия стержня, а стоящее в скобках выражение — как сумму работ всех внутренних и внешних сил на этих возможных перемещениях. Поскольку начальное состояние стержня равновесно, то в соответствии с принципом возможных перемещений

эта сумма равна нулю (см. разд. 5.1). Поэтому при любых совместимых со связями дополнительных перемещениях u_2 приращение полной потенциальной энергии ΔW не зависит от этих перемещений и определяется формулой (5.22'').

Это обстоятельство позволяет при решении конкретных задач использовать любые функции $u_2(x)$, удобные по тем или иным соображениям (при обязательном удовлетворении всех геометрических граничных условий!). В частности, можно в самом начале положить $u_2 \equiv 0$ и рассматривать только перемещение первого порядка малости v_1 ; тогда мы сразу приходим к выражению (5.22''), непосредственно содержащему начальную осевую силу N_0 . Используя произвол выбора перемещений u_2 , можно получить и выражение (5.22), куда начальная сила N_0 непосредственно не входит.

Если продольное перемещение u запрещено только на одном торце стержня, то перемещение u_2 можно выбрать так, чтобы дополнительное квадратичное удлинение оси стержня ϵ_2 , определяемое согласно (5.18), было равно нулю. Тогда в выражении (5.24) интеграл, содержащий начальную осевую силу, обратится в нуль и N_0 не войдет в окончательную формулу для подсчета ΔW . В этом случае перемещение u_2 определяют из условия $\epsilon_2 = 0$, т.е. из уравнения

$$u_2' = -\frac{1}{2} v_1'^2.$$

Если относительно продольных перемещений неподвижно закреплен правый торец стержня (см. рис. 5.4, б) и $u_2(l) = 0$, то из последнего уравнения

$$u_2 = \frac{1}{2} \int_0^l v_1'^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^x v_1'^2 dx,$$

при этом выражение (5.24) примет «сопроматный» вид:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v_1''^2 dx - P \frac{1}{2} \int_0^l v_1'^2 dx - \int_0^l q u_2 dx, \quad (5.25)$$

где функция $u_2(x)$ определяется предыдущей формулой.

Допущение о нерастяжимости оси стержня при потере устойчивости нельзя использовать в тех задачах, когда продольные перемещения оси стержня запрещены на обоих торцах: в этих случаях изгиб стержня неизбежно вызовет и растяжение его оси (рис. 5.5). Выражение (5.22'), содержащее начальную осевую силу N_0 остается справедливым для любых задач.

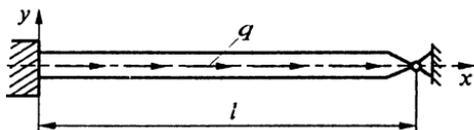


Рис. 5.5

Однако, используя упоминавшийся произвол выбора дополнительных квадратичных перемещений u_2 , при желании можно подсчитать приращение полной потенциальной энергии ΔW , минуса определение начальной осевой силы. Для этого второе слагаемое в правой части выражения (5.24) преобразуют следующим образом:

$$\int_0^l N_0 \varepsilon_2 dx = \int_0^l EF \varepsilon_0 \varepsilon_2 dx = \int_0^l N_2 \varepsilon_0 dx = \int_0^l N_2 u_0' dx,$$

где $N_2 = EF \varepsilon_2$ — дополнительная осевая сила второго порядка малости, возникающая в стержне при потере устойчивости. Проинтегрировав по частям последнее выражение, получают

$$\int_0^l N_2 u_0' dx = N_2 u_0 \Big|_0^l - \int_0^l N_2' u_0 dx = 0 - 0 - \int_0^l N_2' u_0 dx.$$

Для исключения начальных перемещений u_0 , входящих в последний интеграл, достаточно потребовать выполнения условия $N_2' = 0$; это условие дает уравнение для определения дополнительных квадратичных перемещений u_2 :

$$\left[EF \left(u_2' + \frac{1}{2} v_1'^2 \right) \right]' = 0$$

при граничных условиях $u_2(0) = 0$ и $u_2(l) = 0$. В частности, при $EF = \text{const}$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \int_0^l v_1'^2 dx - \int_0^x v_1'^2 dx \right).$$

Теперь из выражения (5.24) получают окончательную зависимость для приращения полной потенциальной энергии, не содержащую в явном виде N_0 :

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v_1''^2 dx - \int_0^l q u_2 dx, \quad (5.25')$$

где функция $u_2(x)$ определена предыдущей формулой.

В разд. 5.2 в общем виде был получен вариационный критерий потери устойчивости в форме Брайана, непосредственно выраженный через начальные напряжения в теле. В настоящем параграфе на примере простой задачи устойчивости прямого стержня была продемонстрирована другая форма записи этого критерия, при которой приращение полной потенциальной энергии ΔW выражается через внешние силы. В дальнейшем вариационный критерий $\delta(\Delta W) = 0$, когда приращение энергии подсчитывают по зависимостям типа (5.25), в которые начальные напряжения в системе не входят, будем называть *вариационным (энергетическим) критерием потери устойчивости в форме С.П. Тимошенко*.

Отметим основное различие в выводах выражений для ΔW по этим двум вариантам энергетического критерия. При выводе энергетического критерия в форме Брайана точкам тела, находящегося в состоянии равновесия, сообщают перемещения $\{u_1\}$ первого порядка малости; возникающие при этом деформации подсчитывают с точностью до квадратов этих перемещений. С той же точностью подсчитывают изменение полной потенциальной энергии системы ΔW ; тогда условие стационарности $\delta(\Delta W) = 0$ дает решение задачи устойчивости рассматриваемого состояния равновесия. Подчеркнем, что в выражение для ΔW входит работа начальных внутренних сил, совершаемая ими на дополнительных квадратичных удлинениях.

При выводе вариационного критерия в форме С.П. Тимошенко точкам тела наряду с перемещениями первого порядка малости $\{u_1\}$ сообщают и перемещения второго порядка малости $\{u_2\}$. Как было показано на примере простой задачи устойчивости стержня, если эти перемещения $\{u_2\}$ не нарушают наложенные

на систему связи, то ими можно распоряжаться по своему усмотрению. В частности, и для стержня, и для тела произвольной формы можно найти такие перемещения $\{u_2\}$, при которых начальные напряжения $\{\sigma_0\}$ не войдут в окончательное выражение для приращения полной потенциальной энергии.

Таким образом, для исследования устойчивости системы с помощью критерия в форме Брайана необходимо предварительно найти начальные напряжения в теле. А исследуя устойчивость системы с помощью критерия в форме С.П. Тимошенко, мы избавляемся от необходимости определять эти начальные напряжения, но вместо этого должны решать другую задачу — по определению дополнительных квадратичных перемещений. Конкретные примеры использования того и другого варианта вариационного критерия потери устойчивости будут рассмотрены в следующих главах.

5.4. Метод Рэлея — Ритца в задачах устойчивости

Метод Рэлея — Ритца* является универсальным методом приближенного решения основной задачи вариационного исчисления — задачи определения экстремумов, или стационарных значений функционалов. Сущность метода состоит в замене задачи поиска экстремума, или стационарного значения функционала, принципиально более простой аналогичной задачей для функции нескольких переменных.

Определение точек бифуркации и критических нагрузок энергетическим методом сводится к определению стационарных значений некоторых функционалов (см. разд. 5.3). Для приближенного решения последней задачи может быть применен метод Рэлея — Ритца. Схему использования этого метода в задачах устойчивости упругих систем поясним на примере задачи устойчивости сжатого прямого стержня. При этом следует особо подчеркнуть: задача устойчивости стержня взята только для простоты и наглядности изложения и все этапы ее решения, рассуждения и выводы носят общий характер.

Для прямого стержня, сжатого продольной силой P , согласно зависимости (5.22''), приращение полной потенциальной энергии

* Впервые метод был предложен Рэлеем для решения задач колебаний упругих систем. Метод детально разработан Ритцем на примерах решения нескольких конкретных задач (без должных ссылок на работы Рэлея). С большим успехом метод был использован С.П. Тимошенко для решения задач устойчивости (независимо от Ритца и практически одновременно с ним).

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l (EJv''^2 - Pv'^2) dx. \quad (5.26)$$

Функция поперечного прогиба $v(x)$ должна быть найдена из условия стационарности этого функционала, т.е. из условия $\delta(\Delta W) = 0$; при этом она должна удовлетворять заданным граничным условиям.

При приближенном решении задачи методом Рэлея — Ритца искомую функцию можно задать в виде ряда

$$v(x) = \sum_{i=1}^N C_i f_i(x), \quad (5.27)$$

где C_i — свободные независимые параметры; базисные функции $f_i(x)$ — допустимые функции задачи (см. приложение), т.е. в нашем случае это дважды дифференцируемые функции, удовлетворяющие (каждая в отдельности) геометрическим граничным условиям задачи. Например, для изображенного на рис. 5.5 стержня граничные условия таковы:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad v''(l) = 0, \quad (5.28)$$

а базисные функции обязательно должны быть подчинены только условиям

$$f_i(0) = 0, \quad f_i'(l) = 0, \quad f_i(l) = 0. \quad (5.28')$$

Подставив ряд (5.27) в выражение (5.26) и выполнив необходимые операции дифференцирования и интегрирования, преобразуем рассматриваемый функционал в функцию Φ независимых переменных C_i и силы P :

$$\Delta W = \Phi(C_1, C_2, \dots, C_N, P), \quad (5.29)$$

где

$$\begin{aligned} & \Phi(C_1, C_2, \dots, C_N, P) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_i C_j \left[\int_0^l EI f_i'' f_j'' dx - P \int_0^l f_i' f_j' dx \right]. \end{aligned}$$

Условие стационарности $\delta(\Delta W) = 0$ заменяется условиями стационарности функции Φ независимых переменных:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.30)$$

Полученная система уравнений будет системой линейных однородных алгебраических уравнений относительно независимых параметров C_i . В матричной форме записи эта система уравнений имеет вид

$$[A]\{C\} - P[B]\{C\} = 0, \quad (5.31)$$

где $\{C\} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}^T$, а $[A]$ и $[B]$ — квадратные матрицы, причем их элементы

$$a_{ij} = \int_0^l EJ f_i'' f_j'' dx, \quad b_{ij} = \int_0^l f_i' f_j' dx.$$

Условие существования отличных от тождественного нуля решений системы однородных уравнений — равенство нулю ее определителя:

$$\det[a_{ij} - Pb_{ij}] = 0. \quad (5.32)$$

Это уравнение степени N относительно P дает N значений P_n , которые приближенно равны первым N собственным значениям исходной задачи. Наименьшее из найденных P_n приближенно равно критической силе, т.е. $(P_n)_{\min} = P_{\text{кр}}$.

Для каждого значения P_n решение системы однородных уравнений (5.31) дает возможность найти с точностью до масштаба соответствующую функцию $v_n(x)$ подобно тому, как это делалось в разд. 4.3 для системы двух однородных уравнений (4.13). В частности, решение при $(P_n)_{\min}$ приближенно описывает форму изогнутой оси стержня при потере устойчивости.

Если система базисных функций полная, то при $N \rightarrow \infty$ решение задачи методом Рэлея — Ритца сходится к точному решению. Но при практическом использовании метода, когда число членов ряда (5.27) невелико, сходимости к точному решению

представляет только теоретический интерес. Значительно важнее удачно выбрать вид первых членов этого ряда.

Представление искомой функции в виде ряда далеко не единственный способ перехода от задачи определения стационарных значений функционала к задаче определения стационарных значений функции нескольких переменных. Например, для этой цели функцию $v(x)$ можно искать среди семейства функций, удовлетворяющих геометрическим граничным условиям задачи и зависящих от N свободных параметров:

$$v(x) = F(x, C_1, C_2, \dots, C_N), \quad (5.33)$$

где C_i — независимые параметры, причем геометрические граничные условия выполняются при любых значениях C_i (ряд (5.27) — частный случай такого семейства функций).

От задачи определения стационарных значений функционала к задаче определения стационарных значений функции нескольких переменных можно перейти, минуя аналитическое представление искомой функции. Например, в исследуемом функционале все производные можно выразить через конечные разности*.

При аналитическом представлении искомой функции метод Рэлея — Ритца приводит к завышенному значению критической нагрузки (для конечных значений N). Это происходит вследствие того, что, ограничивая рядом (5.27) или выражением (5.33) класс функций, среди которых ищут решение задачи, на исследуемую систему как бы накладывают дополнительные связи. В результате жесткость системы возрастает, что и приводит к завышенному значению критической нагрузки. Полученное методом Рэлея — Ритца значение критической нагрузки равно точному только в том случае, если в решении использована точная функция прогиба. Но при численном представлении искомой функции приведенная оценка теряет силу: например, в случае представления ΔW через конечные разности приближенное значение критической нагрузки может оказаться и меньше точного.

В заключение еще отметим, что метод Рэлея — Ритца можно использовать и в нелинейных задачах устойчивости при исследовании поведения системы при конечных отклонениях от начального состояния равновесия.

* Представление искомой функции через конечные разности при исследовании условий стационарности определенных интегралов использовал еще Эйлер.

5.5. Метод Галеркина и его связь с методом Рэлея — Ритца

Одним из наиболее универсальных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений является метод Галеркина (или Бубнова — Галеркина*). Рассмотрим схему решения этим методом задач устойчивости, сводящихся к однородным линейаризованным уравнениям с однородными граничными условиями, причем как и в предыдущем разделе, для простоты и наглядности изложения проанализируем задачу устойчивости прямого сжатого стержня.

Приращение полной потенциальной энергии ΔW при отклонении стержня от прямолинейной формы равновесия определяется выражением (5.26). Из вариационного критерия устойчивости $\delta(\Delta W) = 0$, т.е. из условия стационарности приращения полной потенциальной энергии, следует, что функция $v(x)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$-\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial v''} = 0,$$

где

$$F = EJv''^2 - Pv'^2. \quad (5.34)$$

Выполнив дифференцирование, получают

$$(EJv'')'' + Pv'' = 0.$$

Это линейное однородное уравнение вместе с однородными граничными условиями описывает изгибающую форму равновесия стержня, смежную с исходной прямолинейной.

Приближенное решение полученного уравнения конструируется в виде ряда

$$v(x) = \sum_{i=1}^N C_i g_i(x), \quad (5.35)$$

где C_i — свободные независимые параметры. В методе Галеркина базисные функции $g_i(x)$ — функции сравнения, т.е. в рассматриваемой задаче четырежды дифференцируемые и удовле-

* Впервые метод предложен И.Г. Бубновым для решения задач устойчивости и несколько позже применен Б.Г. Галеркиным в задачах теории упругости.

творяющие всем четырем граничным условиям. Ряд (5.34') подставляют в решаемое уравнение и получают некоторую функцию-ошибку

$$R(x, C_1, C_2, \dots, P) = \left[EJ \sum_{i=1}^N C_i g_i''(x) \right]'' + P \sum_{i=1}^N C_i g_i''(x). \quad (5.36)$$

Основная операция метода Галеркина состоит в ортогонализации функции-ошибки ко всем координатным функциям. Для этого ее поочередно умножают на все координатные функции и интегралы от этих произведений приравнивают нулю. В результате получают систему N линейных однородных алгебраических уравнений с N неизвестными C_i . В матричной форме эта система имеет вид

$$[A]\{C\} - P[B]\{C\} = 0, \quad (5.37)$$

где $\{C\} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}^T$; $[A]$, $[B]$ — квадратные матрицы, причем их элементы

$$a_{ij} = \int_0^l (EJ g_i'')^n g_j dx, \quad b_{ij} = - \int_0^l g_i'' g_j dx. \quad (5.37')$$

Условие существования отличных от нуля решений полученной системы однородных уравнений — равенство нулю ее определителя — приводит к уравнению степени N относительно P :

$$\det[a_{ij} - P b_{ij}] = 0,$$

из которого приближенно можно найти N первых собственных значений P , наименьшее из них приближенно равно $P_{кр}$.

Для каждого найденного значения P_n можно, как и в методе Рэлея — Ритца, с точностью до масштаба найти соответствующую функцию $v_n(x)$ и, в частности, функцию $v_{кр}(x)$.

Связь метода Галеркина с методом Рэлея — Ритца. В предыдущем разделе говорилось, что в приближенных решениях методом Рэлея — Ритца координатные функции должны быть допустимыми функциями соответствующей задачи на собственные значения; в рассматриваемом примере это дважды дифференци-

руемые функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям задачи.

Покажем, что если в методе Рэлея — Ритца в качестве координатных функций взять функции сравнения, то окончательные результаты будут тождественны результатам, полученным методом Галеркина на тех же координатных функциях. Например, если в рассматриваемой задаче устойчивости стержня вместо ряда (5.27) взять ряд (5.35), то после выполнения операций дифференцирования условие стационарности (5.30) приведет вместо матричного уравнения (5.31) к такому уравнению:

$$[\tilde{A}]\{C\} - P[\tilde{B}]\{C\} = 0, \quad (5.38)$$

где $\{C\} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}^T$, а $[\tilde{A}]$ и $[\tilde{B}]$ — квадратные матрицы с элементами

$$\tilde{a}_{ij} = \int_0^l EJ g_i'' g_j'' dx, \quad \tilde{b}_{ij} = - \int_0^l g_i' g_j' dx. \quad (5.38')$$

Уравнение (5.38) тождественно уравнению (5.37), полученному по методу Галеркина: действительно, интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} - P\tilde{b}_{ij} &= \int_0^l EJ g_i'' g_j'' dx - P \int_0^l g_i' g_j' dx = EJ g_i'' g_j' \Big|_0^l - \\ &- \left[(EJ g_i'')' + P g_i' \right] g_j \Big|_0^l + \int_0^l (EJ g_i'')'' g_j dx + P \int_0^l g_i'' g_j dx = a_{ij} - P b_{ij}, \end{aligned}$$

поскольку координатные функции $g_i(x)$ и $g_j(x)$ удовлетворяют всем граничным условиям и все внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль. Следовательно, $[\tilde{A}] = [A]$, $[\tilde{B}] = [B]$ и результат приближенного решения задачи методом Рэлея — Ритца полностью совпадает с результатом решения методом Галеркина (конечно, если в обоих решениях использованы одни и те же координатные функции).

Но из сказанного никак не следует, что эти два метода полностью идентичны: при решении задач методом Рэлея — Ритца можно использовать значительно более широкий класс аппрок-

симирующих функций. Для иллюстрации различия между этими методами рассмотрим задачу устойчивости шарнирно опертого стержня с граничными условиями

$$v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad v''(l) = 0.$$

Решая задачу методом Рэлея — Ритца, в первом приближении можно взять аппроксимирующую функцию в виде квадратичной параболы, удовлетворяющей только геометрическим условиям задачи $v(0) = 0$ и $v(l) = 0$:

$$v(x) = C_1 f_i(x) = C_1 x(l - x). \quad (5.39)$$

Тогда вместо системы уравнений (5.30) получим одно уравнение

$$\frac{d(\Delta W)}{dC_1} = C_1 \left[\int_0^l EJ(2)^2 dx - P \int_0^l (2x - l)^2 dx \right] = 0.$$

Отсюда при $EJ = \text{const}$ из условия $C_1 \neq 0$ находим приближенное значение критической силы $12 EJ/l^2$ (при точном значении $P_{\text{кр}} = \pi^2 EJ/l^2$). Но все же приближенное решение дает верное представление о порядке величины критической силы. Если же попытаться использовать функцию (5.39) для приближенного решения уравнения (5.34) методом Галеркина, то придем к абсурдному результату, так как в данном случае $f_i^{IV}(x) \equiv 0$.

Но если в качестве аппроксимирующей функции взять четырежды дифференцируемую функцию, удовлетворяющую всем граничным условиям задачи, то результаты решений методом Рэлея — Ритца и методом Галеркина совпадут. Примем, например,

$$v(x) = C_1 g_1(x) = C_1 \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right].$$

Тогда оба метода дадут $P_{\text{кр}} = (168 / 17) EJ/l^2$. В этом случае даже первое приближение приводит к значению критической силы с погрешностью всего +0,13 %.

Сделаем еще одно важное замечание относительно двух сравниваемых методов. В формулы (5.37') для a_{ij} изгибная жесткость стержня EJ входит под знаком двойного дифференцирования, а в формулах (5.38') для \tilde{a}_{ij} эта жесткость не дифференцируется. Поэтому в тех случаях, когда изгибная жесткость стержня переменна, задачу следует сводить к подсчету a_{ij} ; более всего это относится к задачам с графически заданными жесткостями $EJ(x)$. Это замечание касается и любых других задач устойчивости упругих систем с переменными жесткостями.

В заключение еще раз подчеркнем, что в двух последних разделах задача устойчивости стержня использовалась только для наглядности изложения: все выводы и замечания носят общий характер и справедливы для любых задач устойчивости упругих систем. Примеры использования изложенных двух методов в более сложных задачах будут даны в последующих главах.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

На примере сравнительно простых задач устойчивости прямых стержней в этой главе будет показано то общее, что присуще большинству задач устойчивости тонкостенных упругих систем. Именно так следует рассматривать детальный перечень упрощающих допущений в задачах устойчивости стержней при продольном сжатии и поперечном изгибе, подробный вывод линейаризованных уравнений и граничных условий как из уравнений равновесия, так и с помощью вариационного критерия устойчивости, демонстрацию вариантов приближенных решений при определении критических нагрузок и описании поведения стержней после потери устойчивости.

6.1. Постановка задачи; основное линейаризованное уравнение

Тонкий упругий стержень отнесем к прямоугольной системе координат, направив ось x по оси стержня (рис. 6.1, *a*) и поместив одну из главных осей поперечного сечения стержня в плоскости xu ; перемещения точек оси стержня по направлениям осей x и y обозначим соответственно u и v . Однородное линейаризованное уравнение, описывающее потерю устойчивости стержня в плоскости xu , получим при следующих допущениях:

1) ось ненагруженного стержня идеально прямая, и равнодействующие всех внешних сил и реакций опор до потери устойчивости действуют строго вдоль нее;

2) изменением всех геометрических размеров стержня в процессе нагружения полностью пренебрегаем, т.е. длину, площадь и момент инерции поперечного сечения стержня считаем неизменными;

3) изгиб стержня при потере устойчивости описывается обычной линейной теорией изгиба балок, основанной на гипотезе плоских сечений.

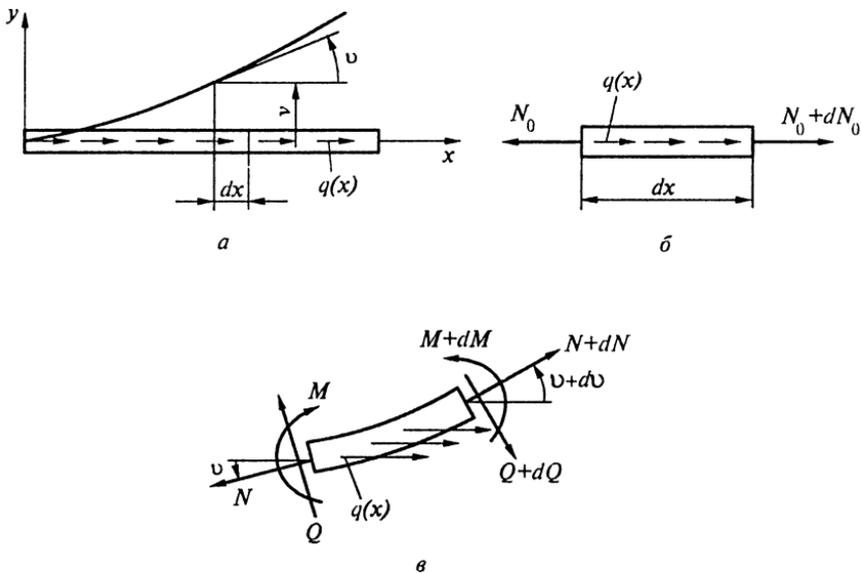


Рис. 6.1

В силу первого допущения всегда возможна начальная форма равновесия нагруженного стержня, при которой его ось остается идеально прямой. Условие равновесия элемента неискривленного стержня (рис. 6.1, б) приводит к уравнению

$$N_0' + q = 0, \quad (6.1)$$

где $N_0(x)$ — начальная осевая сила в поперечных сечениях стержня (здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по x).

Начальное осевое удлинение в стержне $\varepsilon_0 = u_0'$, где u_0 — начальное осевое перемещение. Учитывая зависимость $N_0 = EFu_0'$, где E — модуль упругости материала стержня; F — площадь поперечного сечения, уравнение (6.1) запишем в таком виде:

$$(EFu_0')' + q = 0. \quad (6.2)$$

При заданных на торцах стержня граничных условиях относительно продольного деформирования (по одному на каждом из торцов) уравнение (6.2) всегда может быть решено. В дальнейшем задачу определения $N_0(x)$ будем считать решенной.

В разд. 4.3 было отмечено, что в теории упругой устойчивости имеется несколько путей получения линеаризованных уравнений. Воспользуемся сначала таким: рассмотрим равновесие элемента деформированного стержня (рис. 6.1, в), причем в уравнениях равновесия будем удерживать только первые степени поперечных перемещений v и углов наклона касательной к искривленной оси стержня ϑ . Поэтому, в частности, считаем

$$\sin \vartheta = \vartheta, \quad \sin(\vartheta + d\vartheta) = \vartheta + d\vartheta, \quad \cos(\vartheta + d\vartheta) = 1, \quad \vartheta = v'.$$

Приравняв нулю сумму проекций на ось x всех сил, действующих на искривленный элемент стержня, получим

$$-N \cdot 1 - Q\vartheta + (N + dN) \cdot 1 + (Q + dQ)(\vartheta + d\vartheta) + qdx = 0,$$

где Q — перерезывающая сила, возникающая в изогнутом стержне; N — осевая сила в изогнутом стержне. Отбрасывая произведение $dQd\vartheta$ как величину высшего порядка малости, приходим к уравнению

$$N' + (Q\vartheta)' + q = 0. \quad (6.3)$$

Приравнявая нулю сумму проекций всех сил на ось y и сумму всех моментов и отбрасывая величины высших порядков малости, получим еще два уравнения:

$$-Q' + (N\vartheta)' = 0 \quad (6.4)$$

и

$$Q = M'. \quad (6.5)$$

В силу третьего допущения, входящий в последнее уравнение изгибающий момент M определяется зависимостью

$$M = EJv'', \quad (6.6)$$

где $EJ(x)$ — изгибная жесткость стержня в плоскости xu . Из уравнения (6.5), полностью совпадающего с аналогичным уравнением линейной теории изгиба балок, получим $Q = (EJv'')'$. Поэтому в уравнении (6.3) следует отбросить второе слагаемое, содержащее произведение двух величин первого порядка малости. Тогда полученное уравнение не будет отличаться от уравнения равновесия неискривленного элемента (6.1).

При малых отклонениях стержня от прямолинейной формы равновесия изменения в граничных условиях относительно продольного деформирования могут иметь только высший порядок малости; следовательно, и изменения начальной осевой силы N_0 могут иметь только тот же порядок малости, и в уравнении (6.4) можно положить $N = N_0$. Окончательно, выразив в этом уравнении силу Q и угол наклона касательной ϑ через поперечное перемещение v , получим

$$(EJv'''' - (N_0v')') = 0. \quad (6.7)$$

Это линейное однородное уравнение четвертого порядка является основным уравнением теории устойчивости прямых упругих стержней. Оно справедливо для стержней переменной изгибной жесткости при любых нагрузках и условиях закрепления торцов.

При составлении уравнения равновесия (6.4) внешняя распределенная нагрузка $q(x)$ предполагалась «мертвой», т.е. не изменяющей величины и направления при деформациях стержня, поэтому она не вошла в это уравнение. Если же при деформациях стержня внешняя нагрузка ведет себя иначе, это необходимо учитывать при составлении уравнений равновесия искривленного элемента стержня.

Для однопролетного стержня в соответствии с порядком основного уравнения должны быть сформулированы четыре граничных условия (по два на каждом из торцов). В задачах устойчивости граничные условия относительно поперечных перемещений v должны быть однородными: только в этом случае однородное уравнение всегда будет иметь тривиальное решение $v_0(x) \equiv 0$, соответствующее начальной прямолинейной форме равновесия стержня.

Геометрические граничные условия в задачах устойчивости формулируются точно так же, как и в задачах поперечного изгиба: на торце стержня могут быть запрещены поперечные перемещения v и (или) поворот* касательной v' .

Силовые граничные условия — это условия равновесия примыкающего к торцу элемента стержня. Поэтому формулировка силовых граничных условий в задачах устойчивости принципи-

* Строго говоря, на торце можно запретить поворот нормального сечения стержня, но при использовании обычной гипотезы плоских сечений это приводит к условию $v'' = 0$. При решении задач в уточненной постановке с отказом от обычной гипотезы плоских сечений это условие не имеет смысла.

ально отличается от их формулировки в линейных задачах поперечного изгиба: в первом случае условия равновесия записываются для деформированного элемента (с точностью до первых степеней перемещений), а во втором — для элемента в исходном, недеформированном состоянии. Например, рассмотрим силовые граничные условия при $x = l$ в задаче устойчивости стержня, нагруженного «мертвой» силой P и распределенной нагрузкой q (рис. 6.2, а). Приравняв нулю сумму проекций на ось y всех сил, действующих на торцевой элемент (рис. 6.2, б), получим граничное условие

$$Q - N_0 v' = 0. \quad (6.8)$$

Приравняв нулю сумму моментов относительно точки A , получим второе силовое граничное условие: $M - P dx v' - q dx^2/2 = 0$. Отбросив второе и третье слагаемые, имеющие высший порядок малости, и учитывая формулу (6.6), окончательно получим $v'' = 0$. В рассматриваемой задаче начальная осевая сила $N_0 = -P - q(l - x)$ и граничное условие (6.8) принимает вид

$$(EJv'')' + Pv' = 0. \quad (6.8')$$

Особого внимания при формулировке граничных условий заслуживают те случаи, когда внешние силы передаются на стержень с помощью промежуточных деталей, изменяющих при изгибе стержня воспринимаемое им силовое воздействие. Составим, например, полную систему граничных условий для изображенного на рис. 6.3, а стержня; осевая сила передается на правый торец с помощью жесткого рычага, создающего над правой опорой изгибающий момент, пропорциональный длине рычага a и углу поворота касательной к оси стержня над этой опорой $v'(l)$. Отсюда при $x = l$ следует силовое граничное условие $EJv'' -$

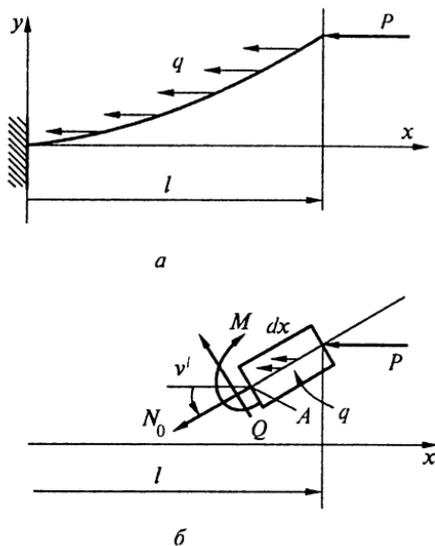


Рис. 6.2

$-Pav' = 0$. Второе силовое граничное условие — равенство нулю изгибающего момента над левой шарнирной опорой, т.е. $v'' = 0$. Два геометрических граничных условия — запрещение поперечных перемещений в шарнирных опорах, т.е. $v(0) = 0$ и $v(l) = 0$.

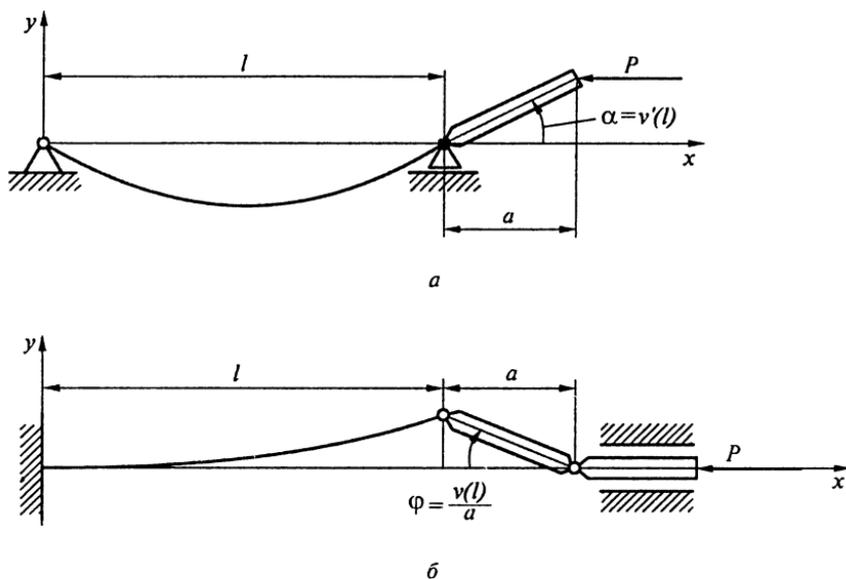


Рис. 6.3

При изгибе консольного стержня, нагружаемого через жесткий шатун (рис. 6.3, б), на правый торец кроме продольной силы P передается вертикальная сила, пропорциональная углу наклона жесткого рычага $v(l)/a$. Поэтому вместо граничного условия (6.8') при $x = l$ получим силовое граничное условие $(EJv'')' + Pv' + Pv/a = 0$. Второе силовое граничное условие на этом торце $v'' = 0$. На левом торце имеем два очевидных геометрических граничных условия: $v(0) = 0$ и $v'(0) = 0$.

Понижение порядка основного уравнения. В ряде случаев удастся понизить порядок основного уравнения (6.7) и тем самым упростить решение задач устойчивости. Так, для шарнирно опертого стержня, нагруженного силой P (рис. 6.4, а), начальная сила $N_0 = -P$ и уравнение (6.7) принимает вид

$$(EJv'')'' + Pv'' = 0$$

при граничных условиях $v(0) = 0$, $v''(0) = 0$, $v(l) = 0$, $v''(l) = 0$.

Интегрируя два раза это уравнение, получим

$$EJv'' + Pv = C_1x + C_2.$$

Из граничных условий при $x = 0$ следует, что $C_2 = 0$; тогда из граничных условий при $x = l$ находим $C_1 = 0$. В результате приходим к однородному линейаризованному уравнению второго порядка

$$EJv'' + Pv = 0 \quad (6.9)$$

с граничными условиями $v(0) = 0$, $v(l) = 0$.

Нетрудно убедиться, что уравнение (6.9) можно использовать для решения задач устойчивости стержней, изображенных на рис. 6.4, б и в: эти задачи эквивалентны задаче устойчивости шарнирно опертого стержня с изгибной жесткостью $EJ(x)$, изменяющейся симметрично относительно среднего сечения.

Второй важный случай понижения порядка основного уравнения относится к изображенному на рис. 6.2 стержню, на свободном торце которого выполняется граничное условие (6.8). Интегрируя один раз уравнение (6.7), получим

$$(EJv'')' - N_0v' = C,$$

причем из граничного условия (6.8') следует $C = 0$. Рассматривая в качестве искомой неизвестной не поперечное перемещение v , а угол поворота поперечного сечения $\vartheta = v'$, приходим к уравнению второго порядка

$$(EJ\vartheta')' - N_0\vartheta = 0. \quad (6.10)$$

Решение этого уравнения должно быть подчинено двум однородным граничным условиям; например, для изображенного на рис. 6.2 стержня имеем $\vartheta(0) = 0$ и $\vartheta'(l) = 0$.

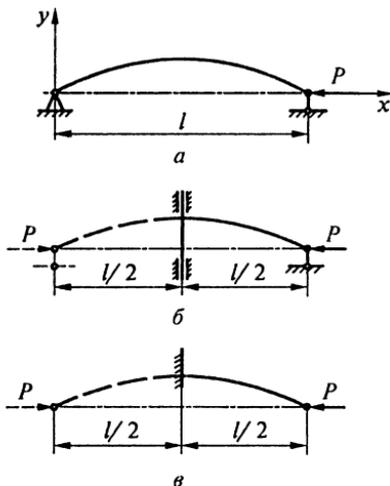


Рис. 6.4

Для сравнения получим основное линейризованное уравнение с помощью вариационного критерия, т.е. из условия $\delta(\Delta W) = 0$, где изменение полной потенциальной энергии ΔW подсчитывают с точностью до квадратов поперечных перемещений (см. разд. 5.2). Для большей общности рассмотрим стержень, связанный с упругим основанием и закрепленный с помощью упругих опор (рис. 6.5). При деформациях стержня реакция упругого основания равна αv , момент в упругом шарнире на левом торце равен $c_g v'(0)$, а на правом торце вертикальная реакция упругой опоры равна $c_v v(l)$ и горизонтальная реакция равна $c_u u(l)$; здесь α — коэффициент жесткости упругого основания, c_g , c_v и c_u — соответствующие коэффициенты жесткости упругих опор. (Заметим, что упругие связи препятствуют деформированию стержня, и поэтому все реакции их направлены навстречу соответствующим перемещениям и углу поворота.)

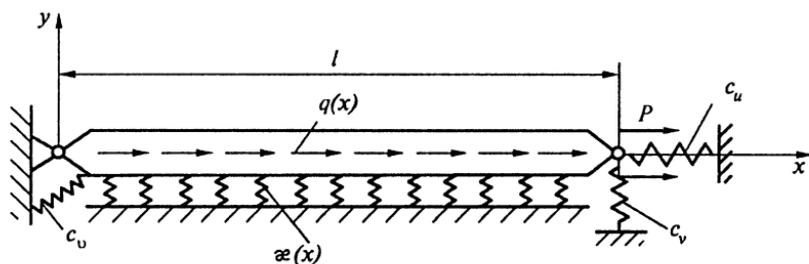


Рис. 6.5

Воспользуемся вариационным критерием в форме Брайана и подсчитаем ΔW с помощью общего выражения (5.21):

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJ v''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \alpha v^2 dx + \frac{1}{2} c_g v'^2(0) + \frac{1}{2} c_v v^2(l) + \frac{1}{2} \int_0^l N_0 v'^2 dx. \quad (6.11)$$

По сравнению с выражением (5.22'') здесь добавлены три слагаемых, учитывающих потенциальную энергию дополнительных упругих связей. Жесткость продольной упругой связи c_u не-

посредственно в ΔW не входит, но она должна быть учтена при определении начальной осевой силы N_0 .

Условие $\delta(\Delta W) = 0$ приводит к уравнению

$$\int_0^l (EJv''\delta v'' + \alpha v \delta v + N_0 v' \delta v') dx + c_9 v'(0) \delta v'(0) + c_v v(l) \delta v(l) = 0.$$

После интегрирования по частям (с тем, чтобы избавиться от производных под знаком вариации в определенном интеграле) получим

$$\int_0^l [(EJv'')' + \alpha v - (N_0 v)'] \delta v dx + EJv'' \delta v|_0^l - (EJv'')' \delta v|_0^l + N_0 v' \delta v|_0^l + c_9 v'(0) \delta v'(0) + c_v v(l) \delta v(l) = 0.$$

По длине стержня вариация δv произвольна, и поэтому в нуль должно обращаться выражение в квадратных скобках; отсюда следует линеаризованное однородное уравнение

$$(EJv'')' - (N_0 v)' + \alpha v = 0. \quad (6.12)$$

Обращение в нуль внеинтегральных слагаемых в общем случае дает тот набор граничных условий, какие могут быть заданы на торцах стержня. В частности, у изображенного на рис. 6.5 стержня вариации $\delta v'(0)$, $\delta v(l)$, $\delta v'(l)$ произвольны, а $\delta v(0) = 0$; поэтому для этой задачи имеем такие граничные условия:

$$\begin{aligned} 1) v(0) = 0; \quad 2) -EJv''(0) + c_9 v'(0) = 0; \\ 3) v''(l) = 0; \quad 4) -(EJv''(l))' + N_0 v'(l) + c_v v(l) = 0. \end{aligned} \quad (6.12')$$

Заметим, что уравнение (6.12) можно, конечно, получить и из условий равновесия элемента деформированного стержня; для этого достаточно к сумме проекций на ось u добавить реакцию упругого основания $-\alpha v$. Тогда вместо уравнения (6.4) будем иметь

$$-Q' - \alpha v + (N\vartheta)' = 0$$

и окончательно вместо уравнения (6.7) получим (6.12).

Силловые граничные условия в (6.12') тоже можно получить из условий равновесия примыкающих к торцам элементов стержня. Однако при этом необходимо тщательно следить за знаками входящих в эти условия силовых факторов (ошибки в знаках встречаются довольно часто). При вариационном выводе силовых граничных условий над выбором знака думать не надо: все знаки всех силовых факторов получаются автоматически!

Матричная форма записи основного уравнения. Сведение задачи к одному уравнению высокого порядка целесообразно в тех случаях, когда строится аналитическое решение (точное или приближенное). Для построения численного решения обычно удобнее свести задачу к эквивалентной системе уравнений первого порядка.

Основное линейризованное уравнение четвертого порядка (6.12) можно свести к системе четырех уравнений первого порядка, если напряженно-деформированное состояние в сечениях стержня характеризовать следующими величинами: поперечное перемещение $v = v(x)$, угол поворота поперечного сечения $\vartheta = \vartheta(x)$, перерезывающая сила $Q = Q(x)$ — изгибающий момент $M = M(x)$. Используя уравнения (6.5) — (6.7), геометрическое соотношение $\vartheta = v'$ и преобразуя второе слагаемое в уравнении (6.12) с помощью уравнения равновесия (6.1), получим

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{EJ},$$

$$\frac{dv}{dx} = \vartheta,$$

$$\frac{dM}{dx} = Q,$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q\vartheta - \alpha v + \frac{N_0}{EJ} M.$$

Введем вектор состояния $\{z\} = \{\vartheta, v, M, Q\}^T$ и запишем полученную систему уравнений в виде одного матричного уравнения

$$\frac{d}{dx}\{Z\} = [A]\{Z\},$$

где матрица

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/EJ & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -q & -\alpha & N_0/EJ & 0 \end{bmatrix}.$$

Граничные условия запишем тоже в матричном виде:

$$\text{при } x = 0 \quad [B]_0 \{Z\} = 0, \quad \text{при } x = l \quad [B]_l \{Z\} = 0.$$

Например, для изображенного на рис. 6.2 стержня матрицы

$$[B]_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B]_l = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Относительно основного линеаризованного уравнения сделаем два замечания. Во-первых, необходимо подчеркнуть, что нетривиальные решения этого однородного уравнения определяют все точки бифуркации начального состояния стержня и описывают бифуркационные изгибные формы равновесия при известных начальных осевых силах независимо от того, какими причинами вызваны эти начальные силы. Поэтому и критические значения начальных осевых сил тоже не зависят от причин, вызвавших эти силы: внешние нагрузки, нагрев, заданное сближение торцев и т.д.

Во-вторых, следует всегда помнить, что однородные линеаризованные уравнения теории упругой устойчивости дают возможность найти бифуркационные перемещения только с точностью до масштаба. Для определения конечных прогибов стержня после потери устойчивости необходимо решать нелинейные уравнения, учитывающие характер нагружения стержня. Закритическое деформирование самым существенным образом зависит от того, чем были вызваны начальные осевые силы в стержне. Так, закритическое поведение стержня, потерявшего устойчивость под действием нагрева, будет качественно иным, нежели закритическое поведение стержня, потерявшего устойчивость под действием «мертвой» сжимающей силы.

6.2. Примеры аналитического решения основного линейризованного уравнения

Полученное в предыдущем разделе линейризованное однородное уравнение в общем виде не интегрируется и точное аналитическое решение допускает только в ряде частных случаев.

Рассмотрим сначала примеры решения упрощенных уравнений пониженного порядка. Уравнение (6.9) при постоянной изгибной жесткости EJ можно записать так:

$$v'' + k^2 v = 0, \quad k^2 = P/EJ \quad (6.13)$$

при граничных условиях $v(0) = 0, \quad v(l) = 0$.

Линейное однородное уравнение (6.13) имеет решение

$$v = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx. \quad (6.13')$$

Подчиняя это решение граничным условиям, получаем систему двух линейных однородных уравнений относительно двух постоянных A_1 и A_2 :

$$A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1 = 0,$$

$$A_1 \sin kl + A_2 \cos kl = 0.$$

При любых значениях силы P полученная система имеет тривиальное решение $A_1 = A_2 = 0$, соответствующее начальной прямолинейной форме равновесия стержня. Для того чтобы однородная система имела отличные от тождественного нуля решения, ее определитель должен быть равен нулю. Приравняв нулю определитель второго порядка, получаем характеристическое уравнение $\sin kl = 0$, и его корни дают набор собственных значений $(kl)_n$, т.е. тех значений сжимающей силы, при которых существуют состояния равновесия стержня с изогнутой осью, смежные с начальным прямолинейным состоянием:

$$(kl)_n = n\pi \quad \text{и} \quad P_n = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Наименьшее из найденных собственных значений, как доказано в разд. 5.2, будет критическим:

$$P_{кр} = P_1 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Для определения собственных функций $v_n(x)$, описывающих равновесные формы изогнутой оси стержня в окрестностях соответствующих точек бифуркации, из первого однородного уравнения находим $A_2 = 0$; следовательно, с точностью до масштаба $v_n = \sin(n\pi x/l)$. Первая из этих функций соответствует критической точке бифуркации и дает форму изогнутой оси стержня в момент потери устойчивости $v_{кр} = v_1 = \sin(\pi x/l)$.

В качестве второго примера возьмем стержень, один торец которого закреплен упруго относительно угла поворота сечения (рис. 6.6).

При постоянной изгибной жесткости EJ уравнение (6.10) запишем так:

$$\vartheta'' + k^2 \vartheta = 0, \quad k^2 = P/EJ. \quad (6.14)$$

Граничные условия таковы: 1) $M(0) = 0$, т. е. $\vartheta'(0) = 0$; 2) $M(l) + c_M \vartheta(l) = 0$, т. е. $EJ \vartheta'(l) + c_M \vartheta(l) = 0$.

Решение уравнения (6.14) полностью повторяет решение в предыдущем примере:

$$\vartheta = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx. \quad (6.14')$$

Подчинение этого решения граничным условиям приводит к системе двух линейных однородных уравнений

$$kA_1 - kA_2 \cdot 0 = 0,$$

$$(kJ \cos kl + c_M \sin kl)A_1 - (kJ \sin kl - c_M \cos kl)A_2 = 0.$$

Как и в предыдущем примере, приравняв нулю определитель этой системы, получим характеристическое уравнение

$$kl \operatorname{tg}(kl) = c_M; \quad c_M = \frac{c_M l}{EJ},$$

наименьший корень которого $(kl)_1$ дает критическое значение силы

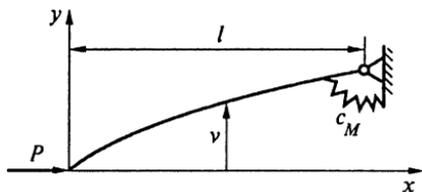


Рис. 6.6

$$P_{кр} = \frac{(kl)_1^2 EJ}{l^2} \quad \text{или} \quad P_{кр} = C \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad \text{где} \quad C = \frac{(kl)_1^2}{\pi^2}.$$

Заметим, что при малых значениях безразмерной жесткости упругого шарнира \bar{c}_M малым будет и значение первого корня характеристического уравнения. Тогда, разложив $\text{tg}(kl)_1$ в ряд по степеням $(kl)_1$, можно характеристическому уравнению придать вид

$$(kl)_1 \left[(kl)_1 + \frac{1}{3} (kl)_1^3 + \dots \right] = \bar{c}_M,$$

или

$$\frac{P_{кр} l^2}{EJ} \left(1 + \frac{1}{3} \bar{c}_M + \dots \right) \approx \frac{l c_M}{EJ},$$

поскольку при $\bar{c}_M \ll 1$ имеем $P_{кр} \approx c_M / l$. Из последнего равенства видно, что с точностью порядка 3 % изгибная жесткость стержня перестает влиять на значение $P_{кр}$ примерно при $\bar{c}_M < 0,1$; другими словами, при $\bar{c}_M < 0,1$ стержень можно считать абсолютно жестким и тогда $P_{кр} = c_M / l$, как было получено в разд. 6.1. Наоборот, с той же точностью порядка 3 % закрепление стержня можно считать абсолютно жесткой заделкой примерно при $c_M > 70$; в этом случае характеристическое уравнение дает $\text{tg} kl = \infty$ и $(kl)_1 = \pi/2$, т.е. в формуле для критической силы $C = 1/4$.

Поскольку из первого уравнения однородной системы уравнений следует $A_1 = 0$, а $v' = 9$, форма изогнутой оси стержня при потере устойчивости (с точностью до масштаба!) будет

$$v_{кр}(x) = \sin \frac{(kl)_1 x}{l},$$

причем при $c_M < 0,1$ и $c_M > 70$ можно, соответственно, считать $v_{кр}(x) = x/l$ и $v_{кр}(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$.

В связи с последней задачей нужно сказать, что всякая реальная опора обладает той или иной степенью податливости: абсолютно жестких связей не существует. В задачах устойчивости степень влияния податливости опор определяется относительной жесткостью самой опоры по сравнению с изгибной

жесткостью стержня. Безразмерная жесткость упругого шарнира c_M была введена именно для оценки степени такого влияния.

В общем случае закрепления обоих торцов стержня уравнения второго порядка неприменимы и для решения задач устойчивости следует использовать полное линейаризованное уравнение четвертого порядка. Наиболее простым и в то же время наиболее важным в практическом отношении является случай однопролетного стержня постоянной изгибной жесткости, сжатого одной силой P (тогда $N_0 = -P$). В этом случае уравнение (6.7) можно представить в следующем виде:

$$v'''' + k^2 v'' = 0, \quad k^2 = P/EJ. \quad (6.15)$$

Это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет общее решение

$$v = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + A_3 x + A_4. \quad (6.15')$$

Процедура определения $P_{кр}$ дальше идет по схеме, изложенной при решении первого примера, только вместо системы двух однородных уравнений, получаемой из двух граничных условий, в общем случае получим систему четырех однородных уравнений (по числу граничных условий).

Например, для изображенного на рис. 6.7 стержня имеем такие граничные условия:

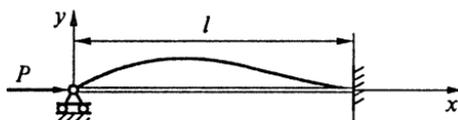


Рис. 6.7

$$1) v''(0) = 0; \quad 2) v(0) = 0; \quad 3) v'(l) = 0; \quad 4) v(l) = 0.$$

Подставив в эти граничные условия решение (6,15'), получим систему четырех однородных уравнений:

$$-A_1 k^2 \cdot 0 - A_2 k^2 + A_3 \cdot 0 + A_4 \cdot 0 = 0,$$

$$A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1 + A_3 \cdot 0 + A_4 = 0,$$

$$A_1 k \cos kl - A_2 k \sin kl + A_3 + A_4 \cdot 0 = 0,$$

$$A_1 \sin kl - A_2 \cos kl + A_3 l + A_4 = 0.$$

Характеристическое уравнение, доставляющее собственные значения задачи, можно получить, непосредственно приравняв нулю определитель четвертого порядка полученной системы уравнений. Однако обычно значительно удобнее предварительно уменьшить число неизвестных и уравнений последовательным исключением констант. Так, в рассматриваемом примере из двух первых уравнений следует $A_2 = 0$ и $A_4 = 0$. Тогда равенство нулю определителя второго порядка системы из двух оставшихся уравнений приводит к характеристическому уравнению $\text{tg}kl = kl$, наименьший корень которого $(kl)_1 = 4,49$. Критическая сила

$$P_{\text{кр}} = C \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad C = \frac{(kl)_1^2}{\pi^2} \approx 2.$$

Для определения собственных функций задачи $v_n(x)$ из четвертого уравнения (при $A_2 = A_4 = 0$) находим $A_3 = -A_1 \sin(kl)_n / l$, где $(kl)_n$ — соответствующее собственное значение задачи. При $(kl)_1 = (kl)_{\text{кр}} = 4,49$ получаем форму изогнутой оси стержня при потере устойчивости

$$v_{\text{кр}}(x) = \sin \frac{4,49x}{l} - \frac{x}{l} \sin 4,49.$$

Аналогично может быть решена и любая другая задача устойчивости однопролетного стержня постоянной изгибной жесткости. Окончательное выражение для критической силы обычно записывают в одном из двух вариантов:

$$P_{\text{кр}} = C \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{или} \quad P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}; \quad (6.16)$$

здесь коэффициент C показывает, во сколько раз критическая сила при рассматриваемых граничных условиях отличается от критической силы для шарнирно опертого стержня той же длины l ; а коэффициент приведенной длины μ показывает, во сколько раз нужно изменить длину шарнирно опертого стержня, чтобы его критическая сила равнялась критической силе стержня длиной l при рассматриваемых граничных условиях. Значения этих коэффициентов для нескольких случаев закрепления торцов стержня приведены на рис. 6.8.

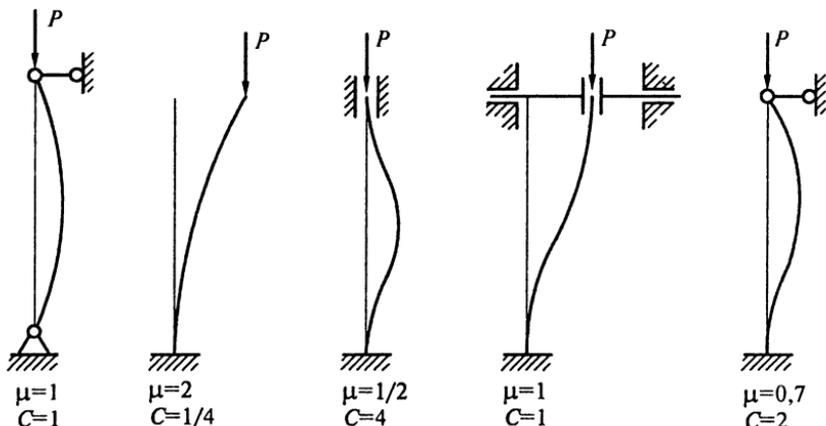


Рис. 6.8

Стержни на упругом основании. Задачи устойчивости стержней, связанных с упругим основанием, представляют интерес, поскольку расчетные схемы такого рода широко используются на практике. Кроме того, решение этих задач имеет важное методическое значение: сравнительно простая задача устойчивости стержня на упругом основании обладает некоторыми особенностями, характерными для многих значительно более сложных задач устойчивости пластин и оболочек.

Полученное в разд. 6.1 уравнение (6.12) справедливо для произвольно нагруженного стержня переменной изгибной жесткости и переменной жесткости упругого основания. Граничные условия не зависят от того, связан стержень с упругим основанием или нет: они определяются условиями закрепления и нагружения торцов стержня. Поэтому все соображения, высказанные относительно граничных условий в разд. 6.1, остаются полностью справедливыми и для стержней, связанных с упругим основанием.

Аналитическое решение задачи устойчивости стержня на упругом основании удастся получить только для некоторых частных случаев. Рассмотрим, например, стержень постоянной изгибной жесткости EJ с постоянной по его длине жесткостью упругого основания α , сжатый силой P . В этом случае $N_0 = -P$ и уравнение (6.12) принимает вид

$$EJv'''' + Pv'' + \alpha v = 0. \quad (6.17)$$

Решение этого уравнения с постоянными коэффициентами принципиальных трудностей не составляет. Особенно просто решение может быть найдено для шарнирно опертого стержня со следующими граничными условиями (рис. 6.9):

$$1) v(0) = 0, \quad 2) v''(0) = 0, \quad 3) v(l) = 0; \quad 4) v''(l) = 0.$$

Задача устойчивости такого стержня без упругого основания была решена в начале раздела, и для нее найдена система собственных функций

$$v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.18)$$

Прямой подстановкой легко убедиться в том, что каждая из этих синусоид будет решением уравнения (6.17), удовлетворяющим

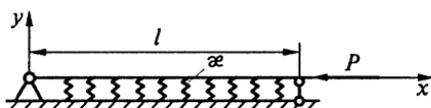


Рис. 6.9

всем граничным условиям шарнирного опирания; другими словами, набор синусоид (6.18) является набором собственных функций рассматриваемой задачи. Подставив n -ю синусоиду в уравнение (6.17) и

сократив общий для всех слагаемых множитель $\sin(n\pi x/l)$, найдем соответствующее собственное значение

$$P_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 EJ + \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \alpha. \quad (6.19)$$

Заметим, что такой способ «угадывания» решений уравнений в задачах устойчивости следует применять с осторожностью. Для получения гарантированного правильного решения необходимо использовать полную систему функций (как это и сделано в приведенном примере), иначе можно получить ошибочный результат. Например, если в рассматриваемой задаче взять решение просто в виде $v(x) = \sin(\pi x/l)$, то ошибка в значении критической силы может оказаться сколь угодно большой, поскольку в отличие от решенных ранее задач в данной задаче первое собственное значение, соответствующее прогибу стержня по одной половине синусоиды, совсем не обязательно будет минимальным.

Для дальнейшего анализа выражение (6.19) перепишем в безразмерном виде:

$$\bar{P}_n = \frac{n^2}{\bar{l}^2} + \frac{\bar{l}^2}{n^2}, \quad \bar{P}_n = \frac{P_n}{\sqrt{\alpha EJ}}, \quad \bar{l} = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\alpha}{EJ}}.$$

Принимая последовательно $n = 1, n = 2$ и т.д., получаем зависимости

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{\bar{l}^2} + \frac{\bar{l}^2}{1}, \quad \bar{P}_2 = \frac{2^2}{\bar{l}^2} + \frac{\bar{l}^2}{2^2}, \dots \text{ и т.д.}$$

В координатах \bar{l}, \bar{P} при различных n эти зависимости дают набор кривых (рис. 6.10). Участки кривых, лежащие ниже точек пересечения, дают наименьшие и, следовательно, критические значения безразмерной силы.

Как видим, различным значениям безразмерной длины соответствуют различные значения критического числа полуволн: в зависимости от значения \bar{l} меняется форма потери устойчивости стержня. Так, при $\bar{l} < \sqrt{2}$ наименьшему собственному значению соответствует $n_{\text{кр}} = 1$ и форма изогнутой оси стержня при потере

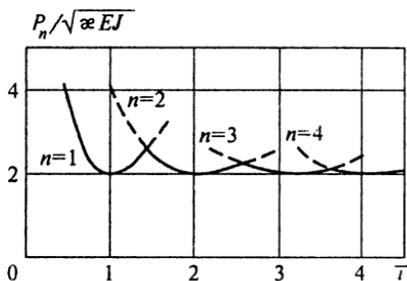


Рис. 6.10

устойчивости описывается одной полуволной синусоиды; при $\sqrt{2} < \bar{l} < \sqrt{6}$ получаем $n_{\text{кр}} = 2$ и т.д. Причем непрерывное изменение параметра \bar{l} сопровождается скачкообразным качественным изменением формы потери устойчивости стержня. Отметим еще, что в отличие от случая стержня без упругого основания в рассматриваемой задаче не наблюдается монотонного уменьшения критической силы с увеличением длины стержня. Как ясно из рисунка, при фиксированных значениях EJ и α на некоторых участках с увеличением длины l значение $P_{\text{кр}}$ возрастает, а при $\bar{l} \geq (3..4)$ критическая сила вообще практически перестает изменяться с увеличением длины стержня и $P_{\text{кр}} = 2\sqrt{\alpha EJ}$. При этом потеря устойчивости стержня происходит по такому числу полуволн, при котором длина одной полуволны примерно равна $\pi \sqrt[4]{EJ/\alpha}$.

Заметим еще, что при $\bar{l} \leq 2$, т.е. когда $n_{\text{кр}} = 1$, значение $P_{\text{кр}}$ следует определять не из графика рис. 6.10, а по формуле (6.19):

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} + \frac{\alpha}{(\pi l)^2}.$$

Решение уравнения (6.17) при других граничных условиях приводит к аналогичным результатам, но технически более громоздко.

6.3. Приближенные решения задач устойчивости стержней; влияние деформаций поперечного сдвига

В качестве первого примера рассмотрим нагруженный распределенной силой $q(x)$ стержень при двух вариантах закрепления его торцов относительно осевых перемещений (рис. 6.11). В первом случае верхний торец стержня свободно смещается в осевом направлении, а во втором случае этот торец закреплен неподвижно. Для построения приближенного решения в обоих случаях воспользуемся методом Рэля — Ритца.

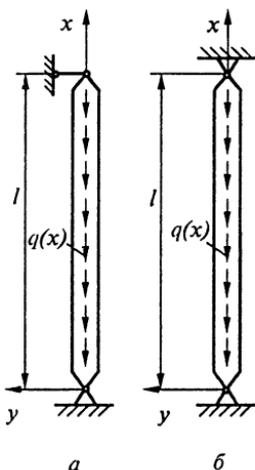


Рис. 6.11

В разд. 5.3 были продемонстрированы два варианта записи вариационного критерия устойчивости для стержня: в форме Брайана и в форме С.П. Тимошенко. Подчеркнем, что критерий в форме С.П. Тимошенко целесообразно использовать в тех случаях, когда изгибные деформации стержня возможны без растяжения его оси. В противном случае значительно удобнее использовать критерий в форме Брайана.

Очевидно, что изображенный на рис. 6.11, а стержень может изгибаться без растяжения оси, и поэтому изменение полной потенциальной энергии запишем в форме С.П. Тимошенко, не определяя начальных сил в стержне:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJv''^2 dx + \int_0^l qu dx; \quad (6.20)$$

здесь продольное перемещение второго порядка малости u определим из условия нерастяжимости оси стержня*:

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^x v'^2 dx.$$

* Использованные ранее нижние индексы здесь и далее опущены.

А для изображенного на рис. 6.11, б стержня удобнее ΔW подсчитывать в форме Брайана, определив предварительно начальную осевую силу $N_0(x)$:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJv''^2 dx + \int_0^l N_0 \varepsilon dx, \quad (6.21)$$

где дополнительное квадратичное удлинение

$$\varepsilon = \frac{1}{2} v'^2. \quad (6.21')$$

В конкретных решениях вместо записи вариационного критерия устойчивости (5.13) можно использовать эквивалентную формулировку, вытекающую из приведенного в разд. 5.2 определения критического значения параметра нагрузки $P_{кр}$:

$$\Delta W = 0, \quad P \rightarrow \min. \quad (6.22)$$

Тогда, обозначив $q(x) = P\bar{q}(x)$, из (6.20) получим

$$P = \frac{\int_0^l EJv''^2 dx}{\int_0^l q(x) \int_0^x v'^2 dx dx}, \quad (6.23)$$

где $v(x)$ — функция, удовлетворяющая геометрическим граничным условиям (в рассматриваемом примере это $v(0) = 0$ и $v(l) = 0$) и доставляющая минимум значению P . Взяв заведомо грубое приближение

$$v(x) = Ax(x - l), \quad (6.24)$$

при постоянных q и EJ из выражения (6.23) сразу находим $(ql)_{кр} = 24EJ/l^2$. В уточненном решении функцию $v(x)$ можно задать в виде ряда

$$v(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (6.25)$$

каждый член которого удовлетворяет всем граничным условиям задачи. Ограничившись одним первым членом этого ряда, полу-

чим $(ql)_{кр} = 2\pi^2 EJ/l^2$. Взяв три первых члена ряда, приходим практически к точному значению

$$(ql)_{кр} = 18,5 EJ/l^2.$$

Для решения второй задачи с помощью выражения (6.21) необходимо найти начальную силу $N_0(x)$, зависящую от распределенной силы $q(x)$ и жесткости стержня на растяжение—сжатие $EF(x)$ (во всех ранее решенных задачах критические нагрузки никак от EF не зависели). В частности, при постоянных q и EF получим

$$N_0 = -ql(1/2 - x/l).$$

Подчеркнем, что и при других законах изменения q и EF часть стержня будет растянута, а часть — сжата.

Действуя как и при решении предыдущей задачи, при постоянной распределенной силе q из выражения (6.21) вместо (6.23) получим

$$ql = \frac{\int_0^l EJv''^2 dx}{\int_0^l (1/2 - x/l)v'^2 dx}. \quad (6.26)$$

Поскольку по длине стержня начальная осевая сила N_0 меняет знак, рассматриваемая задача не является положительно-определенной (см. приложение). При решении подобных задач приближенными методами следует действовать с особой осторожностью: неудачный выбор аппроксимирующих функций может привести к сколь угодно большой ошибке. Например, возьмем функцию (6.24.), использованную в предыдущей задаче. Тогда выражение (6.26) дает просто абсурдный результат $(ql)_{кр} = \infty$, ибо знаменатель в этом выражении обращается в нуль (для предыдущей положительно-определенной задачи эта функция дала результат грубый, но правильно отражающий порядок величины критической нагрузки).

В рассматриваемой сейчас задаче в аппроксимирующую функцию необходимо ввести как минимум два свободных параметра. Например, возьмем

$$v(x) = A_1 x(x-l) + A_2 x(x-l)(2x-l).$$

Тогда выражение (6.26) дает

$$ql = \frac{30EJ}{l^2} \frac{1 + 3\bar{A}_2^2}{\bar{A}_2}, \quad \bar{A}_2 = \frac{A_2 l}{A_1}.$$

Из условия экстремума ql , т.е. из условия $d(ql)d\bar{A}_2 = 0$, находим $\bar{A}_2 = \pm 1/\sqrt{3}$ и $(ql)_{\text{кр}} = \pm 60\sqrt{3} EJ/l^2 = 102 EJ/l^2$. Форма изогнутой оси стержня при потере устойчивости (с точностью до масштаба!) приближенно описывается функцией

$$v_{\text{кр}}(x) = x(x-l)/l^2 \pm \frac{1}{3} x(x-l)(2x-l)/l^3.$$

Знаки плюс—минус в полученных формулах означают, что к потере устойчивости приводят силы q , направленные как вниз, так и вверх. В силу симметрии решенной конкретной задачи абсолютные величины этих сил совпадают. В общем случае при отсутствии симметрии тоже получим два критических значения нагрузок, различных по абсолютной величине.

Для сравнения получим уточненное решение с помощью (6.25). Ограничившись одним членом ряда, опять придем к абсурдному результату. Взяв два первых члена ряда и минимизируя найденное из выражения (6.26) значение ql , получим

$$(ql)_{\text{кр}} = \pm 87,5 EJ/l^2.$$

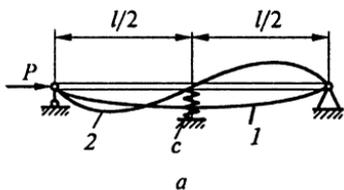
Взяв пять первых членов ряда, приходим к значению критической нагрузки

$$(ql)_{\text{кр}} = \pm 83,2 EJ/l^2,$$

которое можно считать точным, поскольку при дальнейшем увеличении числа членов ряда оно не изменяется.

В качестве следующего примера использования метода Рэля — Ритца рассмотрим задачу устойчивости стержня с промежуточной упругой опорой жесткости c (рис. 6.12). Поскольку в этой задаче $N_0 = -P$, то приращение полной потенциальной энергии как в форме Брайана, так и в форме С.П. Тимошенко

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJv''^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l v'^2 dx + \frac{1}{2} cv^2(l/2).$$

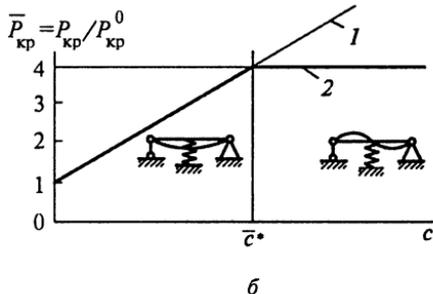


Для рассматриваемого стержня решение опять можно строить с помощью ряда (6.25). Для стержня постоянной изгибной жесткости EJ , ограничившись первым членом ряда, находим

$$P_{кр}^{(1)} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} + \frac{2cl}{\pi^2} = P_{кр}^0 (1 + \bar{c}),$$

где

$$P_{кр}^0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad \bar{c} = \frac{2cl}{\pi^4 EJ}.$$



Второй член ряда дает

$$P_{кр}^{(2)} = 4P_{кр}^0.$$

Рис. 6.12

Значение $P_{кр}^{(1)}$ соответствует потере устойчивости стержня по симметричной форме 1, а значение $P_{кр}^{(2)}$ — по кососимметричной форме 2 (рис. 6.12, а). Полученные результаты иллюстрируются графиком на рис. 6.12, б. При $\bar{c} < \bar{c}^*$ реализуется форма 1, причем рост c приводит к росту критической силы. При $\bar{c} > \bar{c}^*$ реализуется форма 2; соответствующее этой форме значение $P_{кр}^{(2)}$ от жесткости упругой опоры не зависит. Значение безразмерной жесткости упругой опоры \bar{c}^* , при котором происходит смена форм потери устойчивости, находим из условия $P_{кр}^{(1)} = P_{кр}^{(2)}$. Приведенное упрощенное приближенное решение дает $\bar{c}^* = 3$. Точное значение $\bar{c}^* = 32/\pi^2$; этот результат можно получить, неограниченно увеличивая число членов ряда (6.25) с нечетными n либо точно интегрируя основное уравнение (6.7) на двух участках стержня и стыкуя решения с учетом жесткости упругой опоры.

Использование метода Галеркина продемонстрируем на примере решения задачи устойчивости стержня, изображенного на рис. 6.13. Как было показано в разд. 6.1, основное линейризованное уравнение (6.7) в этом случае сводится к уравнению второго порядка (6.10). При $q = \text{const}$ начальная осевая сила в стержне $N_0 = -ql(1 - x/l)$ и уравнение (6.10) принимает вид

$$(EJ\vartheta')' + ql(1 - x/l)\vartheta = 0$$

с граничными условиями $\vartheta(0) = 0$ и $\vartheta(l) = 0$. Искомую функцию $\vartheta(x)$ аппроксимируем одной функцией, удовлетворяющей этим граничным условиям:

$$\vartheta = A \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l}\right),$$

где A — свободный параметр. Подставив эту функцию в дифференциальное уравнение, найдем (при постоянной изгибной жесткости EJ) функцию-ошибку

$$L = A \left[-\frac{EJ}{l^2} + ql \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l}\right) \right].$$

Согласно процедуре метода Галеркина, приравняем нулю интеграл от произведения этой функции-ошибки на задаваемую функцию $\vartheta(x)$:

$$\int_0^l L \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l}\right) dx = 0.$$

Отсюда следует

$$(ql)_{\text{кр}} = 8 EJ/l^2.$$

Рассмотренная задача, имеющая большое практическое значение, допускает точное решение в функциях Бесселя, дающее $(ql)_{\text{кр}} = 7,83 EJ/l^2$.

Влияние деформаций поперечного сдвига на величину критической нагрузки стержня исследуем с помощью теории изгиба

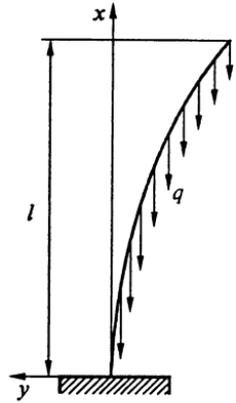


Рис. 6.13

балки С.П. Тимошенко. Основное упрощающее допущение этой теории таково: плоские поперечные сечения балки, до деформации балки нормальные к ее оси, при изгибе балки остаются плоскими, поворачиваясь как жесткое целое на угол $\vartheta(x)$ (см. рис. 5.2, б), причем в отличие от классической теории изгиба балок величина этого угла непосредственно не связана с углом наклона касательной к оси балки $v'(x)$. Деформированное состояние в балке, по С.П. Тимошенко, определяется двумя независимыми функциями $v(x)$ и $\vartheta(x)$:

$$u = -y\vartheta, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y\vartheta', \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\vartheta + v'.$$

Изгибающий момент и перерезывающая сила выражаются формулами

$$M = EJ\vartheta', \quad Q = B(v' - \vartheta),$$

где EJ — обычная изгибная жесткость балки; $B = G_{xy}F$ — жесткость балки на поперечный сдвиг, определяемая модулем сдвига G_{xy} в плоскости xy и площадью поперечного сечения F .

Рассмотрим прямой стержень, сжатый силой P . Критическую силу стержня без учета влияния поперечного сдвига считаем известной:

$$P_{\text{кр}}^0 = \frac{\int_0^l EJv_1'^2 dx}{\int_0^l v_1'^2 dx},$$

где $v_1(x)$ — первая собственная функция задачи устойчивости без учета сдвига.

Подсчитаем изменение полной потенциальной энергии при отклонениях стержня от прямолинейной формы с учетом деформации сдвига:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJ\vartheta'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l B(v' - \vartheta)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l Pv'^2 dx. \quad (6.27)$$

Здесь первое слагаемое — энергия изгиба стержня, выраженная через угол $\vartheta(x)$; второе слагаемое — энергия деформаций поперечного сдвига; третье слагаемое — работа начальных осевых сил

на дополнительных квадратичных удлинениях, подсчитываемая точно так же, как и для стержня без учета сдвига при $N_0 = -P$.

Если воспользоваться вариационным критерием $\delta(\Delta W) = 0$, то с помощью выражения (6.27) можно получить систему двух линейризованных уравнений и соответствующий набор граничных условий для двух независимых функций $v(x)$ и $\vartheta(x)$ (подробнее аналогичная процедура будет рассмотрена в следующем разделе).

В упрощенном приближенном решении примем $\vartheta(x) = Av_1(x)$, где $v_1(x)$ — функция, найденная из решения задачи без учета сдвиговых деформаций; A — свободный параметр. Тогда выражение (6.27) принимает вид

$$\Delta W = \frac{1}{2} A_0^2 \int_0^l EJv''^2 dx + \frac{1}{2} (A-1)^2 \int_0^l Bv_1'^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l v'^2 dx.$$

Из условия $\Delta(W) = 0$ при постоянной сдвиговой жесткости B имеем

$$P = A^2 P_{\text{кр}}^0 + (A-1)^2 B;$$

минимизируя последнее выражение по A , получаем

$$A = P_{\text{кр}}^0 / (1 + P_{\text{кр}}^0 / B).$$

Отсюда следует окончательный результат

$$P_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}^0}{1 + P_{\text{кр}}^0 / B}. \quad (6.28)$$

Сразу отметим, что для изотропного стержня поправка к классическому решению, вносимая формулой (6.28), вообще не имеет смысла, поскольку эта поправка не выходит за пределы точности, обеспечиваемые основными допущениями. Формула (6.28) используется при расчете на устойчивость стержней из резко анизотропных материалов, трехслойных и решетчатых стержней.

6.4. Устойчивость плоской формы изгиба стержней

Продольное сжатие — не единственный случай нагружения стержней, при котором начальная форма равновесия перестает

быть устойчивой после превышения нагрузкой некоторого критического значения. Потеря устойчивости начальной формы равновесия возможна и при изгибе стержня в плоскости наибольшей жесткости (рис. 6.14, а). Эту задачу рассмотрим в той же постановке, в какой была рассмотрена задача устойчивости продольно нагруженного стержня, используя следующие допущения:

1) ось ненагруженного стержня идеально прямая, и равнодействующие всех внешних сил и реакций опор до потери устойчивости действуют строго в плоскости максимальной изгибной жесткости, причем поперечная нагрузка приложена к оси стержня;

2) изменением геометрии стержня до потери устойчивости полностью пренебрегаем, т.е. считаем, что ось стержня остается прямой, а его геометрические характеристики не изменяются;

3) изгиб и закручивание стержня при потере устойчивости будем описывать с помощью гипотезы плоских сечений, считая, что поперечные сечения, нормальные к недеформированной оси стержня, остаются плоскими и нормальными к деформированной оси, перемещаясь в пространстве как жесткое целое.

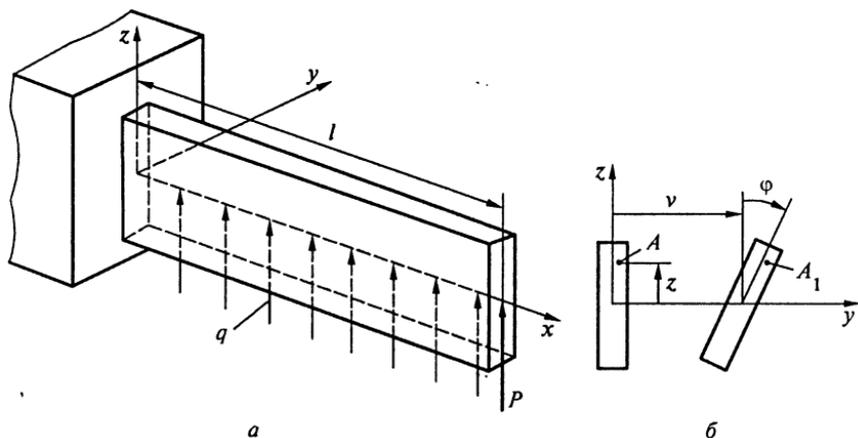


Рис. 6.14

Задачу изгиба стержня в плоскости максимальной жесткости xz будем считать решенной и величину изгибающего момента $M_0(x)$ известной. Начальные нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня, согласно обычной теории изгиба тонких упругих стержней, составляют

$$\sigma_x^0 = -z \frac{M_0}{J_y},$$

где J_y — момент инерции поперечного сечения относительно оси y .

Деформирование стержня при потере устойчивости будем описывать с помощью перемещения v точек оси стержня и угла φ поворота сечения в плоскости yz (рис. 6.14, б). Линеаризованные уравнения устойчивости получим из вариационного критерия в форме Брайана. Из общего выражения (5.21) в рассматриваемой задаче получим*

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l EJv''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l GJ_k \varphi'^2 dx + \int_0^l \left(\int_F \sigma_x \varepsilon_x dF \right) dx, \quad (6.29)$$

где EJ — изгибная жесткость стержня в плоскости xu , а GJ_k — жесткость стержня на кручение; ε_x — дополнительные квадратичные удлинения.

В выражении (6.29) два первых слагаемых соответственно равны потенциальной энергии изгиба стержня в плоскости xu и энергии закручивания стержня относительно его оси; последнее слагаемое — работа начальных напряжений на дополнительных квадратичных удлинениях. Поскольку поперечные силы мы считаем «мертвыми» и приложенными к оси стержня, то на рассматриваемых перемещениях они работу не совершают, а касательные напряжения τ_{xz}^0 в выражение (6.29) не входят, поскольку, в силу гипотезы плоских сечений, $\gamma_{xz} = 0$.

При подсчете квадратичного удлинения ε_x учтем, что перемещение v_A точки A в направлении оси y (см. 6.14, б)

$$v_A = v + z\varphi.$$

Поэтому из общих формул (5.18) получим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} v'^2 + z v' \varphi' + \frac{1}{2} z^2 \varphi'^2.$$

Подставив полученное значение ε_x в выражение (6.29) и проинтегрировав последнее слагаемое по площади поперечного сече-

* Нижние индексы 1 и 2 при перемещениях и удлинениях здесь опущены.

ния, придем (учитывая, что $\int_F z^2 dF = J_y$, $\int_F z dF = 0$, $\int_F z^3 dF = 0$)

окончательно к такому выражению:

$$\Delta W = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EJv''^2 + \frac{1}{2} GJ_{\kappa} \varphi'^2 - M_0 v' \varphi' \right) dx. \quad (6.29')$$

Как видим, изменение полной потенциальной энергии ΔW определяется двумя независимыми функциями v и φ . Систему линеаризованных уравнений для этих функций получим из условия $\delta(\Delta W) = 0$; все дальнейшие этапы решения носят чисто формальный характер. Находим вариацию

$$\delta(\Delta W) = \int_0^l (EJv'' \delta v'' + GJ_{\kappa} \varphi' \delta \varphi' - M_0 v' \delta \varphi' - M_0 \varphi' \delta v') dx;$$

интегрированием по частям избавляемся от производных под знаком вариации и, приравнявая $\delta(\Delta W)$ нулю, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left\{ \left[(EJv'')'' + (M_0 \varphi')' \right] \delta v + \left[(GJ_{\kappa} \varphi')' - (M_0 v')' \right] \delta \varphi \right\} dx + \\ & + EJv'' \delta v \Big|_0^l - \left[(EJv'')' + M_0 \varphi' \right] \delta v \Big|_0^l + (GJ_{\kappa} \varphi' - M_0 v') \delta \varphi = 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности по длине стержня вариаций δv и $\delta \varphi$ приходим к двум однородным линеаризованным уравнениям

$$\begin{aligned} (EJv'')'' + (M_0 \varphi')' &= 0, \\ (GJ_{\kappa} \varphi')' - (M_0 v')' &= 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

А внеинтегральные слагаемые дают тот набор геометрических и силовых граничных условий, какие могут быть заданы на торцах стержня при $x = 0$ и $x = l$:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & v' = 0 \quad \text{либо} \quad EJv'' = 0; \\
 2) \quad & v = 0 \quad \text{либо} \quad (EJv'')' + M_0\varphi' = 0; \\
 3) \quad & \varphi = 0 \quad \text{либо} \quad GJ_{\kappa}\varphi' - M_0v' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{6.31}$$

Система уравнений (6.30) допускает простое аналитическое решение только при постоянных коэффициентах, т.е. в тех случаях, когда стержень постоянного поперечного сечения подвергается чистому изгибу $M_0 = M$. Тогда систему уравнений (6.30) можно преобразовать к такому виду:

$$\begin{aligned}
 v'' + k_1^2 v'' = 0, \quad k_1^2 = M^2/EJGJ_{\kappa}; \\
 \varphi'' = \frac{M}{GJ_{\kappa}} v''.
 \end{aligned}
 \tag{6.32}$$

Если на обоих торцах стержня запрещены поперечные перемещения, т.е. задано $v(0) = 0$ и $v(l) = 0$, то первое уравнение системы (6.32) интегрируется независимо от второго. Рассмотрим, например, стержень, нагруженный по торцам изгибающими моментами M в плоскости его максимальной изгибной жесткости (рис. 6.15, а); торцы стержня закреплены шарнирно относительно перемещений v в плоскости xu , т.е. заданы граничные условия:

$$1) \quad v(0) = 0; \quad 2) \quad v''(0) = 0; \quad 3) \quad v(l) = 0; \quad 4) \quad v''(l) = 0.$$

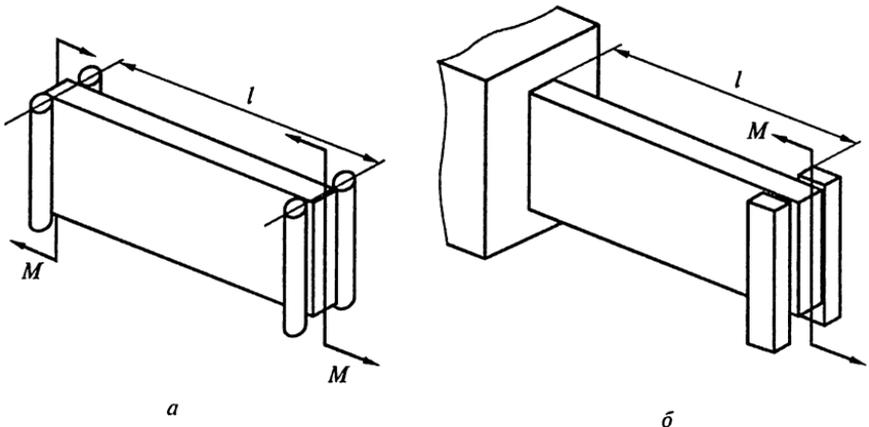


Рис. 6.15

С точностью до обозначений рассматриваемая задача совпадает с задачей устойчивости равномерно сжатого шарнирно опертого стержня, решение которой нам известно (см. разд. 6.2). Поэтому сразу можно выписать собственные функции и собственные значения задачи:

$$v_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad M_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 EJGJ_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

наименьшее из которых при $n = 1$ дает критическое значение приложенного момента

$$M_{кр} = \pm \frac{\pi}{l} \sqrt{EJGJ_k}. \quad (6.33)$$

Знаки плюс—минус означают, что абсолютное значение критического момента не зависит от направления его действия.

Для изображенного на рис. 6.15, а стержня граничные условия относительно угла закручивания стержня таковы: 5) $\varphi(0) = 0$, 6) $\varphi(l) = 0$. Подставив во второе уравнение системы (6.32) найденные собственные функции v_n и интегрируя это уравнение с учетом граничных условий для угла φ , находим остальные собственные функции задачи

$$\varphi_k = \frac{M_n}{GJ_k} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В частности, первые собственные функции v_1 и φ_1 с точностью до масштаба дают форму, по которой происходит потеря устойчивости.

Совершенно аналогично для задачи, представленной на рис. 6.15, б, при граничных условиях

$$1) v(0) = 0, \quad 2) v'(0) = 0, \quad 3) v(l) = 0, \quad 4) v'(l) = 0$$

можно воспользоваться решением задачи сжатого стержня с теми же граничными условиями (см. рис. 6.8 при $C = 4$) и сразу записать

$$M_{кр} = \pm \frac{2\pi}{l} \sqrt{EJGJ_k}. \quad (6.34)$$

Если один торец балки закреплен, как показано на рис. 6.15, а, а другой торец — как на рис. 6.15, б, т.е.

$$1) v(0) = 0; \quad 2) v''(0) = 0; \quad 3) v(l) = 0; \quad 4) v'(l) = 0,$$

то, опять воспользовавшись решением задачи устойчивости сжатого стержня с такими же граничными условиями (см. рис. 6.7), получим

$$M_{\text{кр}} = \pm 1,41 \frac{\pi}{l} \sqrt{EJGJ_{\text{к}}}. \quad (6.34')$$

В большинстве частных случаев не обязательно решать полную систему уравнений (6.30), поскольку чаще всего она допускает те или иные упрощения. Причем соответствующие упрощенные уравнения обычно удобнее получать непосредственно, рассматривая конкретную задачу.

При выводе выражения для изменения полной потенциальной энергии и получении системы уравнений (6.30) предполагалось, что внешние нагрузки приложены к оси стержня. Задачу нетрудно обобщить на тот случай, когда точки приложения внешней поперечной нагрузки смещены в плоскости xz относительно оси стержня. Тогда в выражение (6.29) следует добавить слагаемые, учитывающие работу, совершаемую внешними силами при повороте поперечного сечения стержня. Так, если точка приложения силы P находится на расстоянии a от его оси (рис. 6.16), то при повороте торцевого сечения стержня на угол $\varphi(l)$ точка приложения силы опустится на величину $a\varphi^2(l)/2$. Добавив к выражению (6.29) работу, совершаемую при этом силой P , получим

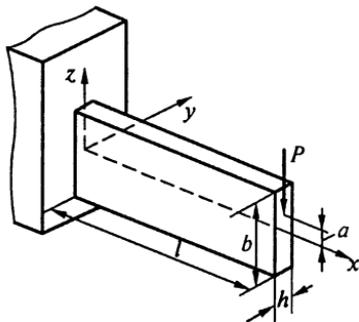


Рис. 6.16

$$\Delta \dot{W} = \frac{1}{2} \int_0^l EJv''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l GJ_{\text{к}} \varphi'^2 dx - \int_0^l M_0 \varphi' v' dx - \frac{1}{2} Pa\varphi^2(l), \quad (6.35)$$

где $M_0 = P(x - l)$.

Для оценки влияния величины смещения точки приложения силы P воспользуемся методом Рэлея — Ритца, взяв простейшие аппроксимирующие функции, удовлетворяющие геометриче-

ским граничным условиям $v'(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $v(0) = 0$ и одному силовому $v''(l) = 0$:

$$v = A \left(\frac{x^2 l}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad \varphi = Bx;$$

здесь A и B — независимые варьируемые параметры.

Из выражения (6.35) при постоянных EJ и GJ_{κ} находим

$$\Delta W = \frac{A^2}{2} \frac{EJ l^3}{3} + \frac{B^2}{2} GJ_{\kappa} l + \frac{AB}{8} Pl^4 - \frac{B^2}{2} Pal^2.$$

Условие стационарности ΔW дает систему двух однородных уравнений

$$\frac{\partial(\Delta W)}{\partial A} = \frac{A}{3} EJ l^3 + \frac{B}{8} Pl^4 = 0,$$

$$\frac{\partial(\Delta W)}{\partial B} = \frac{A}{8} Pl^4 + B(GJ_{\kappa} l - Pal^2) = 0,$$

равенство нулю определителя которой приводит к квадратному уравнению

$$P^2 + \frac{64}{3} \frac{a}{l} \frac{EJ}{l^2} - \frac{64}{3} \frac{EJGJ_{\kappa}}{l^4} = 0.$$

Отсюда

$$P_{\text{кр}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{EJGJ_{\kappa}}}{l^2} \left(\pm \sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha \right), \quad \alpha = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{a}{l} \sqrt{\frac{EJ}{GJ_{\kappa}}}. \quad (6.36)$$

Полученная сравнительно простая формула полностью отражает физику задачи: при $\alpha \neq 0$ критическая сила имеет два различных по абсолютной величине значения, причем с увеличением расстояния a одно из них (для силы, направленной на рис. 6.16 вниз) уменьшается, а другое — возрастает (для силы, приложенной в той же точке и направленной вверх). В предельном случае при $a/l \rightarrow \infty$ (точнее, при $1/\alpha \rightarrow 0$) для положительного значения $P_{\text{кр}}$ будем иметь

$$P_{кр} = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{EJGJ_k}}{l^2} \alpha (\pm \sqrt{1 + 1/\alpha} - 1) =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{EJGJ_k}}{l^2} \alpha \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} + \dots \right) - 1 \right] = \frac{GJ_k}{l} \frac{1}{a}.$$

В последней формуле нетрудно узнать результат, полученный в разд. 4.1 для жесткого стержня, закрепленного в упругом шарнире (см. рис. 4.1). Роль жесткости упругого шарнира играет крутильная жесткость стержня $GJ_{д}/l$, а роль длины жесткого стержня — величина a .

При малых значениях отношения a/l формула (6.36) дает довольно грубую оценку величины $P_{кр}$. Так, при $a = 0$ из формулы (6.36) получаем $P_{кр} = \pm (8/\sqrt{3}) \sqrt{EJGJ_k}/l^2$ вместо точного решения $P_{кр} = \pm 4,01 \sqrt{EJGJ_k}/l^2$. Конечно, принципиально нетрудно построить приближенное решение, дающее значительно более точный результат. Но основная цель приведенного решения — достаточно простым способом показать влияние смещения поперечных сил в плоскости xz на их критические значения.

Интересно еще сравнить величину критической силы, изгибающей стержень в плоскости его максимальной жесткости, с величиной критической силы, сжимающей тот же стержень в осевом направлении. Например, для изображенного на рис. 6.16 стержня прямоугольного поперечного сечения с высотой b и шириной h жесткость на кручение $GJ_k = G\beta bh^3$, где G — модуль сдвига, β — коэффициент, зависящий от отношения b/h ; при $b/h \gg 1$ можно принять $\beta = 1/3$. Для того же стержня минимальная изгибная жесткость EJ равна $Ebh^3/12$, где E — модуль упругости. Критическая сила сжатого консольного стержня (см. рис. 6.8) равна $\pi^2 EJ/4l^2 = P_{кр}^c$. Подсчитаем отношение $P_{кр}$ при поперечном изгибе стержня к $P_{кр}^c$ при его осевом сжатии. Поскольку $E = 2(1 + \mu)G$, то при $a = 0$ получим

$$P_{кр}/P_{кр}^c \approx 2.$$

С ростом величины a это отношение, естественно, увеличивается.

В заключение подчеркнем, что все полученные в этом разделе общие зависимости справедливы для стержней со сплошным поперечным сечением произвольной формы, если $EJ/EJ_y \ll 1$. Для поперечных сечений типа двутавра задача требует специального исследования.

6.5. Поведение стержней после потери устойчивости

Вариационный критерий устойчивости и линеаризованные уравнения, как уже неоднократно подчеркивалось, позволяют определить критические значения нагрузок и те формы, по которым происходит потеря устойчивости, но они не несут никакой информации о том, как система будет себя вести при конечных перемещениях после потери устойчивости. Для описания закритического поведения системы задачу необходимо рассматривать в нелинейной постановке.

Для нагруженного в продольном направлении стержня возможны два качественно различных случая поведения после потери устойчивости. В первом случае, когда после потери устойчивости один из торцов свободно перемещается в продольном направлении, закритическое деформирование сводится к изгибу и жесткость на растяжение—сжатие практически не влияет на поведение стержня (рис. 6.17, а). Во втором случае, когда оба торца стержня закреплены относительно продольных смещений, закритическое деформирование связано не только с изгибом, но и с растяжением его оси (рис. 6.17, б).

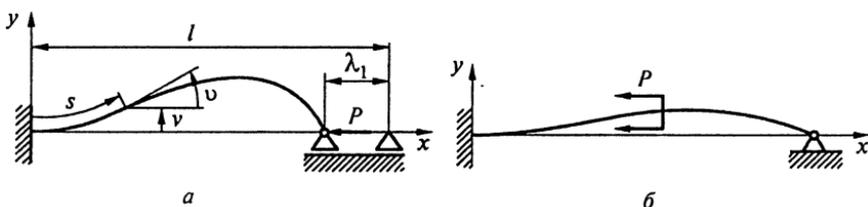


Рис. 6.17

Основное практическое значение имеет первый случай, и на нем мы остановимся подробнее. После потери устойчивости ось стержня можно считать нерастяжимой; тогда связанные с изгибом продольные и поперечные перемещения $u = u(s)$ и $v = v(s)$ точек оси стержня легко выразить через угол наклона касательной к изогнутой оси стержня $\vartheta = \vartheta(s)$. При неподвижном левом торце

$$u = -\int_0^s (1 - \cos \vartheta) ds, \quad v = \int_0^s \sin \vartheta ds, \quad (6.37)$$

где s — координата, отсчитываемая вдоль изогнутой оси стержня.

Изгибающий момент в тонком упругом стержне определяется зависимостью

$$M = \frac{EJ}{\rho} = EJ \frac{d\vartheta}{ds}, \quad (6.37')$$

где ρ — радиус кривизны изогнутой оси стержня.

В изогнутом состоянии полная потенциальная энергия стержня

$$W = W_0 + \Delta W,$$

где W_0 — полная потенциальная энергия начального прямолинейного состояния равновесия; ΔW — изменение полной потенциальной энергии, вызванное изгибом стержня. В результате изгиба стержня (см. рис. 6.17, *a*) потенциал внешних сил уменьшится на величину $P(\lambda_1)$, где $\lambda_1 = -u(l)$. Учитывая зависимость (6.37), получаем

$$W = W_0 + \int_0^l \left[\frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial \vartheta}{ds} \right)^2 - P(1 - \cos \vartheta) \right] ds; \quad (6.38)$$

здесь первое слагаемое в квадратных скобках — потенциальная энергия изгиба стержня.

Аналогично можно подсчитать значение W и для любого другого случая продольного нагружения стержня; например, для стержня, нагруженного «мертвой» распределенной нагрузкой $q = q(s)$,

$$W = W_0 + \int_0^l \left[\frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial \vartheta}{ds} \right)^2 - q \int_0^s (1 - \cos \vartheta) ds \right] ds; \quad (6.39)$$

здесь нагрузка считается направленной так же, как и сила P на рис. 6.17.

Из условия стационарности полной потенциальной энергии $\delta W = 0$ можно найти равновесные состояния изогнутого стержня и, исследуя знак второй вариации $\delta^2 W = 0$, установить, какие из этих состояний устойчивы. Пока на величины перемещений v , u и углов ϑ не наложено никаких ограничений, приведенные зависимости, описывающие изгиб стержня с нерастяжимой осью, являются точными (в рамках теории гибких упругих стержней).

Для получения приближенного решения, наглядно описывающего поведение любого произвольно нагруженного стержня при конечных, но не слишком больших прогибах после потери устойчивости, воспользуемся приемом, намеченным в разд. 4.4.

Предположим, что задача устойчивости решена (точно или приближенно) и критическое значение нагрузки и форма, по которой происходит потеря устойчивости стержня, известны. С ростом прогибов форма изогнутой оси стержня, естественно, изменяется, но, строя приближенное решение, можно принять, что при не очень больших конечных прогибах это изменение невелико, и тогда решение нелинейной задачи в первом приближении искать в виде

$$\vartheta(s) = A\vartheta_1(s), \quad (6.40)$$

где A — коэффициент, зависящий от внешней нагрузки; $\vartheta_1(s)$ — функция, найденная из решения задачи устойчивости стержня.

При небольших прогибах, когда углы ϑ малы, в выражении для W целесообразно $\cos \vartheta$ разложить в ряд. Тогда, ограничиваясь в разложении четвертой степенью ϑ , из выражения (6.58) получим

$$W = W_0 + \int_0^l \left[\frac{1}{2} EJA^2 \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s} \right)^2 - P \left(A^2 \frac{\vartheta_1^2}{2!} - A^4 \frac{\vartheta_1^4}{4!} \right) \right] ds$$

Величина W_0 не зависит от параметра A и условие стационарности $\delta W = 0$ сводится к условию

$$\frac{dW}{dA} = A \int_0^l EJ \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s} \right)^2 - PA \left(\int_0^l \vartheta_1^2 ds - \frac{1}{6} A^2 \int_0^l \vartheta_1^4 ds \right) = 0.$$

Поделив все слагаемые на интеграл $\int_0^l \vartheta_1^2 ds$, придем к уравнению

$$A[P_{кр} - P(1 - A^2 B)] = 0, \quad (6.41)$$

где

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s} \right)^2 ds}{\int_0^l \vartheta_1^2 ds}, \quad B = \frac{1}{6} \frac{\int_0^l \vartheta_1^4 ds}{\int_0^l \vartheta_1^2 ds}. \quad (6.41')$$

Заметим, что $P_{кр}$ равно критическому значению силы, найденному из решения задачи устойчивости стержня.

Из уравнения (6.41) следует, что при любых значениях нагрузки возможно решение $A = 0$, т.е. возможно состояние равновесия стержня с неискривленной осью. Решения, отличные от $A = 0$, найдем, приравняв нулю выражение в квадратных скобках:

$$A = \pm \sqrt{(P - P_{кр}) / BP}.$$

Действительные значения A существуют только при $P > P_{кр}$, поскольку $B > 0$. Таким образом, пока $P < P_{кр}$, возможно только состояние равновесия стержня с неискривленной осью.

Обозначив $P - P_{кр} = \Delta P$ и считая $\Delta P \ll P_{кр}$, окончательно получим

$$A = \pm \sqrt{\overline{\Delta P} / B}, \quad \overline{\Delta P} = \Delta P / P_{кр}. \quad (6.42)$$

Исследуя знак второй производной d^2W/dA^2 , нетрудно установить, что изгибная форма равновесия стержня устойчива, а точка бифуркации является критической точкой бифуркации первого типа (см. разд. 4.2).

Зная угол $\vartheta(s) = A\vartheta_1$ наклона касательной к изогнутой оси стержня, нетрудно с помощью зависимостей (6.37) найти перемещения точек оси стержня. При неподвижной левой опоре (см. рис. 6.17, а), ограничившись первым членом разложения $\sin \vartheta_1$, найдем

$$v = A \int_0^s \vartheta_1 ds. \quad (6.43)$$

Другими словами, в полученном приближенном решении при конечных, но небольших прогибах амплитуда поперечных перемещений растет, пропорционально параметру A , определяемому формулой (6.42). На рис. 6.18, *a* схематично показано, как с ростом нагрузки изменяются поперечные прогибы стержня.

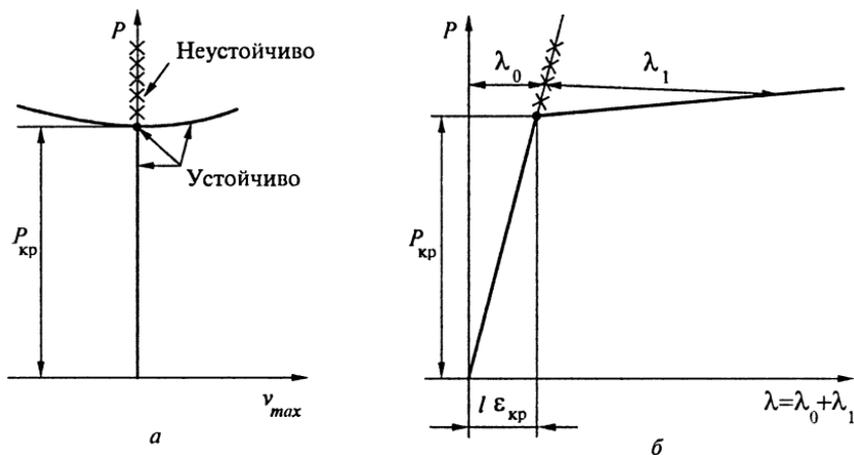


Рис. 6.18

Аналогично можно подсчитать и продольные перемещения стержня. Определим, например, продольное перемещение правого торца (см. рис. 6.17, *a*). При неподвижном левом торце это перемещение складывается из укорочения стержня под действием сжимающей силы λ_0 и дополнительного перемещения λ_1 , вызванного изгибом стержня: $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$. Первое из этих слагаемых определяется элементарно при известном распределении начальных сил в стержне. Так для стержня, сжатого силой P при постоянной продольной жесткости EF , получим $\lambda_0 = Pl/EF$. Для подсчета второго слагаемого, раскладывая в ряд $\cos \vartheta$ в первой из формул (6.37) и используя формулу (6.42), находим

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta P}}{B} \int_0^l \vartheta_1^2 ds - \frac{1}{24} \left(\frac{\overline{\Delta P}}{B} \right)^2 \int_0^l \vartheta_1^4 ds. \quad (6.44)$$

Этот результат схематично изображен на рис. 6.18, б, где по оси абсцисс отложено суммарное перемещение правого торца λ . Заметим, что при $\Delta P \ll 1$ второе слагаемое в выражении (6.44) оказывается пренебрежимо малым. Другими словами, на ранней критической стадии деформирования величина λ_1 линейно зависит от ΔP .

Описанный приближенный прием решения можно использовать и в том случае, когда заданными являются не нагрузки, а сближение торцев стержня (например, при нагружении стержня в жесткой испытательной машине). Тогда расчет следует вести в обратном порядке: по λ определять ΔP , а затем подсчитывать амплитуду поперечного перемещения; при этом остаются справедливыми все полученные выше зависимости. Отметим, что в той же последовательности эти зависимости можно использовать и для описания критического поведения упругих стержней в температурных задачах устойчивости.

Напряжения в стержне после потери устойчивости складываются из напряжений продольного сжатия и напряжении изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_0}{F} \pm \frac{M}{W_x},$$

где F и W_x — площадь и момент сопротивления сечения стержня. Максимальные значения изгибающего момента, входящего в эту формулу, можно подсчитать по зависимости (6.37') или непосредственно из условия равновесия искривленного стержня.

Общую схему расчета проиллюстрируем двумя примерами. Рассмотрим сначала критическое деформирование шарнирно опертого стержня постоянного сечения, сжатого силой P . Решение задачи устойчивости такого стержня получено в разд. 6.2: найдены $P_{\text{кр}}$ и с точностью до масштаба форма изогнутой оси $v_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$. Поскольку $\vartheta_1 = dv_1/dx$, то тоже с точностью до масштаба $\vartheta_1 = \cos \frac{\pi x}{l} \approx \cos \frac{\pi s}{l}$.

В соответствии с формулой (6.40) принимаем

$$\vartheta(s) = A \cos \frac{\pi s}{l}.$$

Тогда зависимости (6.41') и (6.42) дают

$$B = \frac{1}{8}, \quad A = \pm\sqrt{8\Delta P},$$

и окончательно из зависимостей (6.43) и (6.44) получаем

$$v(s) = \frac{l}{\pi} \sqrt{8\Delta P} \sin \frac{\pi s}{l}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 = \frac{P_{\text{кр}} l}{EF} + 2l\Delta P.$$

Максимальные напряжения в стержне при $s = l/2$ определяем по формуле (6.45), где значение M подсчитываем по формуле (6.37') для $\vartheta = A\vartheta_1$:

$$\sigma_{\text{max}} = -\frac{P_{\text{кр}}}{F} \pm \frac{EJ}{W_x} \frac{d\vartheta}{ds} \Big|_{s=l/2} = \sigma_{\text{кр}} \left(1 \pm \frac{\sqrt{8}}{\pi} \frac{lF}{W_x} \sqrt{\Delta P} \right),$$

где $\sigma_{\text{кр}} = -P_{\text{кр}}/F$.

В частности, для тонкостенного трубчатого стержня площадь и момент сопротивления поперечного сечения равны $F = 2\pi R h$ и $W_x = \pi R^2 h$, где R и h — радиус трубы и толщина стенки. Тогда

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{R}{l} \right)^2 + 2\Delta P, \quad \sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{кр}} \left(1 \pm \frac{2\sqrt{8}}{\pi} \frac{l}{R} \sqrt{\Delta P} \right).$$

Как видно из полученных результатов, малейшее превышение нагрузкой критического значения приводит к чрезвычайно быстрому росту перемещений и напряжений. Так, при $l/R = 100$ превышение критической силы всего на 1 % вызывает изгибные напряжения, примерно в 20 раз превосходящие критические напряжения равномерно сжатого стержня. При этом продольное смещение торца оказывается примерно в 40 раз больше критического, а максимальное поперечное перемещение достигает почти $10R$.

В качестве второго примера рассмотрим закритическое поведение стержня, теряющего устойчивость под действием собственного веса (см. рис. 6.13). Приближенное решение этой задачи получено в разд. 6.3, где в качестве аппроксимирующей была взята функция

$$\vartheta_1 = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{l} \right) \approx \frac{s}{l} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{s}{l} \right).$$

Учитывая приближенный характер оценки закритического поведения стержня, аппроксимирующую функцию можно взять в более простом виде, удовлетворив только геометрическое граничное условие $\vartheta(0) = 0$:

$$\vartheta_1 = \frac{s}{l}.$$

Воспользуемся этой функцией для оценки закритического деформирования стержня, т.е. примем

$$\vartheta(s) = A(s/l), \quad v(s) = \int_0^s \vartheta ds = \frac{1}{2} A l (s/l)^2.$$

Для подсчета W вместо выражения (6.38) используем выражение (6.39) и, повторив рассуждения и выкладки, вместо формул (6.41) получим

$$B = 1/15, \quad A \left[(ql)_{\text{кр}} - ql(1 - A^2 B) \right] = 0,$$

а вместо (4.42) —

$$A = \pm \sqrt{\frac{\Delta(\bar{q}l)}{B}}, \quad \Delta(\bar{q}l) = \frac{ql - (ql)_{\text{кр}}}{(ql)_{\text{кр}}}.$$

Как и для стержня, сжатого силой P , изгибная форма равновесия будет устойчивой. Функция поперечного прогиба определяется выражением (4.43). Продольные перемещения точек оси стержня тоже можно найти совершенно аналогично тому, как это делалось для равномерно сжатого стержня.

Для подсчета напряжений в стержне после потери устойчивости остается справедливой формула (4.45), но максимальное значение изгибающего момента в рассматриваемой задаче целесообразно определять непосредственно из условий равновесия:

$$M(0) = \int_0^l qv dx = \pm \frac{\sqrt{15}}{6} ql^2 \sqrt{\Delta(\bar{q}l)} = \pm \frac{\sqrt{15}}{6} (ql)_{\text{кр}} l \sqrt{\Delta(\bar{q}l)}.$$

Заметим, что в последних зависимостях для $(ql)_{кр}$ можно принять его точное значение, т.е. считать $(ql)_{кр} = 7,83 EJ/l^2$.

Изложенный приближенный прием исследования заkritического деформирования стержня применим для произвольно нагруженных стержней переменной изгибной жесткости, если один из его торцов может свободно смещаться в продольном направлении. Если же закрепление торцов стержня в продольном направлении исключает возможность заkritического деформирования без растяжения его оси, то приведенная схема решения неприменима, поскольку она основана на предположении о нерастяжимости оси стержня. В этом случае при подсчете полной потенциальной энергии необходимо учитывать и энергию растяжения.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

В этой главе дана постановка задачи устойчивости тонкой упругой пластины, приведен вывод геометрически нелинейных формул для удлинений и углов сдвига срединной плоскости и с помощью вариационного критерия устойчивости получено основное линеаризованное уравнение. Рассмотрено несколько примеров точного решения основного уравнения; продемонстрировано использования методов Рэлея — Ритца и Галеркина для получения приближенных решений задач устойчивости пластин. Кратко описано поведение пластин после потери устойчивости.

7.1. Постановка задачи; основное линеаризованное уравнение

Рассмотрим пластину, нагруженную в своей плоскости распределенными по длине дуги контура силами q и распределенными по площади срединной плоскости силами p_x, p_y ; поперечные нагрузки отсутствуют. На рис. 7.1, *a* пластина отнесена к прямоугольной системе координат, причем срединная плоскость пластины совмещена с координатной плоскостью $xу$. Поперечные перемещения точек срединной плоскости пластины по направлению оси z обозначим w , перемещения по направлению осей x, y — соответственно u, v .

Задачу устойчивости такой пластины рассмотрим при следующих допущениях:

1) пластина идеально плоская и до потери устойчивости равнодействующие всех внешних сил и реакций опор действуют строго в срединной плоскости пластины;

2) до потери устойчивости напряженное состояние пластины описываем соотношениями линейной теории упругости и изменением геометрии пластины полностью пренебрегаем;

3) все действующие на пластину внешние нагрузки «мертвые», т.е. они не изменяются ни по величине, ни по направлению при деформациях пластины;

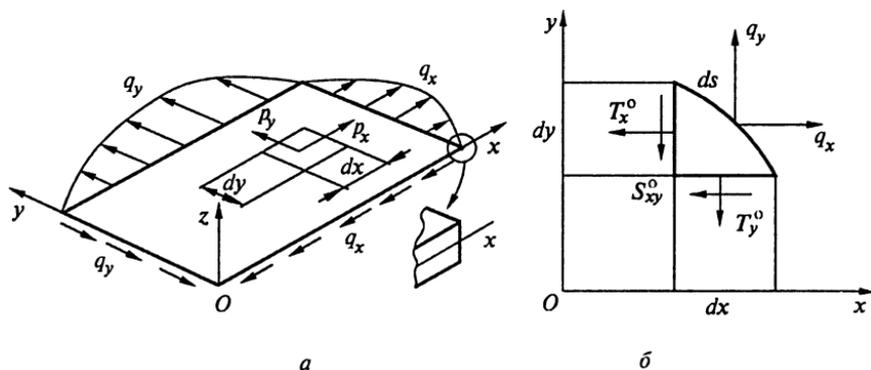


Рис. 7.1

4) изгиб пластины при потере устойчивости описываем с помощью обычных классических допущений теории изгиба тонких пластин: нормаль к недеформированной срединной плоскости при изгибе пластины не искривляется и остается нормалью к деформированной срединной плоскости; нормальные напряжения в плоскостях, параллельных срединной плоскости, пренебрежимо малы.

В силу первого допущения, всегда возможно плоское состояние равновесия пластины, которое будем называть начальным и все относящиеся к нему величины обозначать индексом «нуль»: например, u_0 , v_0 и т.д. В начальном состоянии, очевидно, $w_0 \equiv 0$.

В начальном состоянии в пластине реализуется плоское напряженное состояние, при котором напряжения σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 постоянны по толщине пластины, а остальные напряжения равны нулю. В теории изгиба пластин обычно используют понятие погонных внутренних сил в срединной плоскости пластины: $T_x(x, y) = h\sigma_x$, $T_y(x, y) = h\sigma_y$, $S_{xy}(x, y) = h\tau_{xy}$, где h — толщина пластины. В частности, $T_x^0(x, y) = h\sigma_x^0$, $T_y^0(x, y) = h\sigma_y^0$, $S_{xy}^0(x, y) = h\tau_{xy}^0$.

Согласно второму допущению, в начальном состоянии удлинения и углы сдвига связаны с u_0 и v_0 линейными зависимостями, аналогичными (5.2):

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}. \quad (7.1)$$

Уравнения равновесия элемента пластины в начальном состоянии вытекают из общих уравнений (5.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}^0}{\partial y} + p_x &= 0, \\ \frac{\partial S_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial T_y^0}{\partial y} + p_y &= 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

На нагруженной части контура пластины силовые граничные условия, следующие из общих соотношений (5.4), будут (рис. 7.1, б)

$$\begin{aligned} T_x^0 \cos \beta + S_{xy}^0 \sin \beta &= q_x, \\ S_{xy}^0 \cos \beta + T_y^0 \sin \beta &= q_y, \end{aligned} \tag{7.3}$$

где β — угол между внешней нормалью к контуру пластины и осью x .

На закрепленной части контура пластины могут быть заданы геометрические граничные условия типа (5.4'):

$$u_0 = \bar{u}_0, \quad v_0 = \bar{v}_0.$$

Начальные силы связаны с удлинениями и углами сдвига законом Гука

$$\begin{aligned} T_x^0 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^0 + \mu\varepsilon_y^0), & T_y^0 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^0 + \mu\varepsilon_x^0), \\ S_{xy}^0 &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

где E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала пластины.

Приведенные зависимости полностью описывают задачу теории упругости о плоском напряженном состоянии. В простейших случаях эта задача допускает аналитическое решение, но при сложных очертаниях контура пластины и при сложных нагрузках и граничных условиях решение плоской задачи теории упругости требует применения мощных современных вычислительных методов. В дальнейшем будем считать эту задачу решенной (точно или приближенно) и начальные силы T_x^0 , T_y^0 , S_{xy}^0 известными.

Для решения задачи устойчивости пластины подсчитаем изменение полной потенциальной энергии в форме Брайана (см. разд. 5.2). Первое слагаемое в правой части выражения (5.21) обозначим \mathcal{U}_z ; это потенциальная энергия изгиба пластины, вызванного перемещениями $w(x, y)$. Для определения деформаций первого порядка малости $\{\epsilon_1\}$ рассмотрим элемент AB — нормальный к срединной плоскости пластины (рис. 7.2, а). Согласно допущению 4, этот элемент при изгибе пластины отклоняется как жесткое целое от оси z на углы ϑ_x и ϑ_y в плоскостях xz и yz , оставаясь нормальным к деформированной срединной плоскости (на рис. 7.2, б дана проекция перемещения элемента AB на плоскость yz). Следовательно, $\vartheta_x = \partial w / \partial x$ и $\vartheta_y = \partial w / \partial y$. Как ясно из рис. 7.2, б, находящаяся на расстоянии z от срединной плоскости точка B получит перемещения $u = -z\vartheta_x$ и $v = -z\vartheta_y$ (напомним, что при подсчете ΔW все перемещения полагаются величинами первого порядка малости!). Из общих формул (5.2) с учетом равенств $\vartheta_x = \partial w / \partial x$ и $\vartheta_y = \partial w / \partial y$ получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \epsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= -z 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \gamma_{xz} &= 0, & \gamma_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

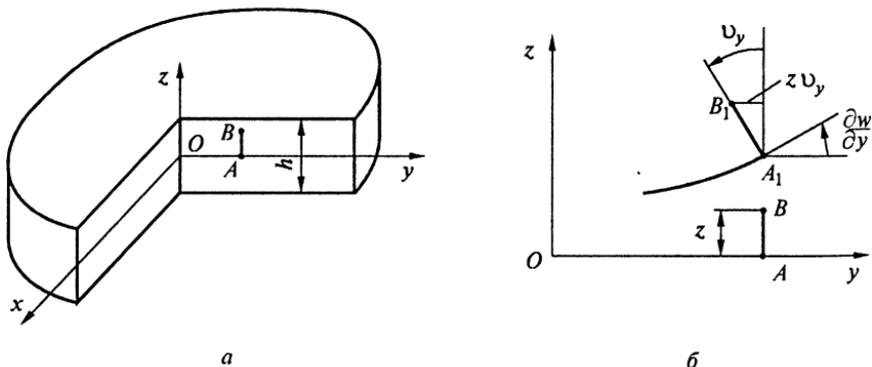


Рис. 7.2

После несложных преобразований, с учетом выражения (5.11), для потенциальной энергии изгиба пластины запишем окончательное выражение

$$u_{\alpha} = \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy, \quad (7.6)$$

где D — изгибная жесткость пластины,

$$D = \int_{-h/2}^{+h/2} E \frac{z^2}{1-\mu^2} dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (7.6')$$

Второе слагаемое в правой части выражения (5.21) — это работа начальных напряжений $\{\sigma_0\}$ на дополнительных квадратичных деформациях $\{\epsilon_2\}$. Для определения квадратичных деформаций рассмотрим изображенный на рис. 7.3 элемент срединной плоскости пластины; при изгибе пластины точки A, B, C, D смещаются в положение A_1, B_1, C_1, D_1 . Проекции векторов $\vec{A_1 B_1}$ и $\vec{A_1 C_1}$ на оси координат:

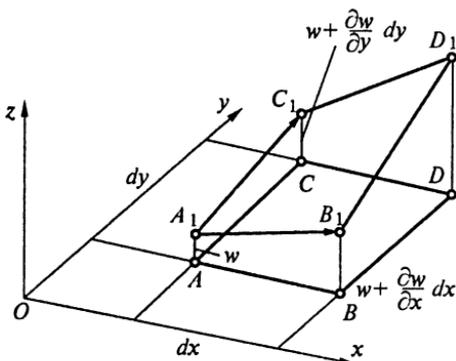


Рис. 7.3

	x	y	z
$\vec{A_1 B_1}$	dx	0	$(\partial w / \partial x) dx$
$\vec{A_1 C_1}$	0	dy	$(\partial w / \partial y) dy$

Подсчитаем с точностью до квадратичных членов модуль вектора $\vec{A_1 B_1}$:

$$A_1 B_1 = dx \sqrt{1 + (\partial w / \partial x)^2} = dx \left[1 + \frac{1}{2} (\partial w / \partial x)^2 \right].$$

По определению, относительное удлинение в направлении оси x

$$\varepsilon_x = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{dx \left[1 + \frac{1}{2} (\partial w / \partial x)^2 \right] - dx}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Совершенно аналогично находим $\varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$.

Для определения квадратичного угла сдвига в срединной плоскости рассмотрим искажение прямого угла между отрезками AB и AC , вызванное изгибом пластины; новый угол между отрезками $A_1 B_1$ и $A_1 C_1$ равен $\pi/2 - \gamma_{xy}$, где γ_{xy} — угол сдвига в срединной плоскости, вызванный поперечными перемещениями $w(x, y)$. Скалярное произведение векторов $\vec{A_1 B_1}$ и $\vec{A_1 C_1}$ можно подсчитать двумя способами. С одной стороны,

$$\vec{A_1 B_1} \cdot \vec{A_1 C_1} = dx \cdot 0 + 0 \cdot dy + \frac{\partial w}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial w}{\partial y} dy = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy.$$

А с другой стороны, с точностью квадратичных относительно w членов

$$\begin{aligned} \vec{A_1 B_1} \cdot \vec{A_1 C_1} &= A_1 B_1 \cdot A_1 C_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \right) = \\ &= (1 + \varepsilon_x) dx (1 + \varepsilon_y) dy \sin \gamma_{xy} = \gamma_{xy} dx dy. \end{aligned}$$

Приравнявая два последних выражения, находим $\gamma_{xy} = \partial w / \partial x \cdot \partial w / \partial y$. Итак, дополнительные квадратичные деформации в срединной плоскости пластины

$$\{\varepsilon_i\} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T. \quad (7.7)$$

Поскольку $\sigma_x^0 = T_x^0 / h$, $\sigma_y^0 = T_y^0 / h$, $\tau_{xy}^0 = S_{xy}^0 / h$, в задаче устойчивости пластин выражение (5.21) принимает такой вид:

$$\Delta W = \vartheta_{\alpha} + \frac{1}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 T_x^0 + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} S_{xy}^0 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 T_y^0 \right] dx dy. \quad (7.8)$$

Здесь \mathcal{U}_ε — потенциальная энергия изгиба пластины, определяемая выражением (7.6), а второе слагаемое — работа начальных сил на квадратичных деформациях $\{\varepsilon_2\}$.

Точки бифуркации начального состояния равновесия пластины определяют из условия стационарности ΔW , т.е. из условия

$$\delta(\Delta W) = 0. \quad (7.9)$$

Это условие, в котором ΔW подсчитывают с помощью выражения (7.8), где фигурируют начальные силы T_x^0 , T_y^0 , S_{xy}^0 , является энергетическим критерием устойчивости пластин в форме Брайана. Из условия (7.9), действуя аналогично тому, как это описывалось в гл. 6 для стержня, можно получить основное линейризованное уравнение теории устойчивости пластин и соответствующий набор граничных условий на контуре пластины. В частности, для пластины постоянной изгибной жесткости D это линейризованное уравнение имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w - p_z^\Phi = 0, \quad (7.10)$$

где использован дифференциальный оператор Лапласа

$$\nabla^2(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (7.10')$$

а p_z^Φ — фиктивная поперечная нагрузка, в общем случае определяемая выражением

$$p_z^\Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(S_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (7.11)$$

Заметим, что p_z^Φ имеет конкретный физический смысл: это результат проекции на ось z начальных сил T_x^0 , T_y^0 , S_{xy}^0 , действующих на гранях деформированного элемента пластины (в рассматриваемой задаче устойчивости, как отмечалось ранее, реальные поперечные нагрузки отсутствуют).

Выполнив дифференцирование, получим

$$p_z^\Phi = T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}^0}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial S_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial T_y^0}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Если пластина нагружена только внешними контурными силами q , а $p_x = 0$ и $p_y = 0$, то выражения в скобках, в соответствии с уравнениями равновесия (7.2), обращаются в нуль, и тогда

$$p_z^\Phi = T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (7.11')$$

Для этого частного, но наиболее важного практически случая основное линеаризованное уравнение запишем в развернутом виде:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \left(T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (7.12)$$

Основное линеаризованное уравнение имеет четвертый порядок, и для его решения в каждой точке контура пластины должны быть заданы два граничных условия. Из условия (7.9) чисто формальным путем, действуя аналогично тому, как это было выполнено в разд. 6.1 в задаче устойчивости стержня, можно получить набор граничных условий, какие могут быть заданы на контуре пластины произвольной формы. В частности, если свободно опертый участок контура пластины совпадает с осью y , то граничные условия на этом участке при $x = 0$ такие:

$$1) w = 0, \quad 2) M_x = 0,$$

где M_x — изгибающий момент (отнесенный к единице длины контура).

Изгибающие и скручивающие моменты в пластине определяются формулами, аналогичными (7.4):

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (7.13)$$

$$M_{xy} = D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

При $x = 0$ на свободном опертом контуре $w = 0$ и, следовательно, $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$. Поэтому окончательно для свободно опертого участка контура при $x = 0$ имеем такие граничные условия:

$$1) w = 0, \quad 2) \partial^2 w / \partial x^2 = 0. \quad (7.14)$$

Совершенно аналогично на участке свободно опертого контура, совпадающем с осью x , граничные условия* при $y = 0$ будут

$$1) w = 0, \quad 2) \partial^2 w / \partial y^2 = 0. \quad (7.14')$$

Как отмечалось в разд. 5.4, вариационный критерий $\delta(\Delta W) = 0$ не только дает возможность получить линеаризованные уравнения, но с его помощью можно приближенно решать задачи устойчивости, используя методы типа метода Рэлея — Ритца. Примеры таких приближенных решений будут приведены в разд. 7.3.

7.2. Аналитическое решение основного линеаризованного уравнения

Уравнение (7.12) в общем виде проинтегрировать не удастся, но для некоторых практически важных случаев оно допускает точное решение.

Сначала рассмотрим простейший из таких случаев — удлиненная пластина, равномерно сжатая в поперечном направлении (рис. 7.4, а). Граничные условия вдоль удлиненных сторон произвольны, но неизменны вдоль всей пластины. Размеры пластины в продольном направлении достаточно велики, и условия закрепления коротких сторон практически не играют никакой роли (позже будет дана оценка той величины отношения сторон, начиная с которой можно пренебречь влиянием закрепления коротких сторон пластины).

* Подробнее о граничных условиях в задачах устойчивости пластин см.: *Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.*

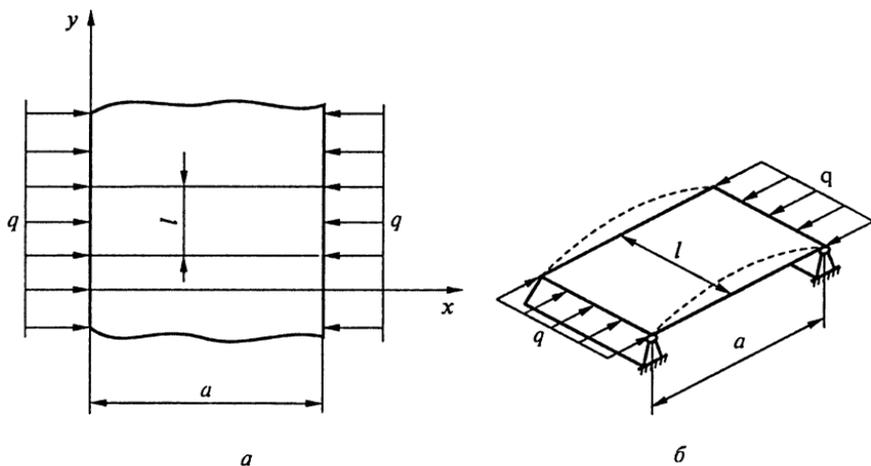


Рис. 7.4

Для решения задачи устойчивости, конечно, необходимо решить плоскую задачу теории упругости по определению начальных сил в пластине. Если на перемещения u_0, v_0 не накладывается никаких дополнительных ограничений, то очевидно, что в рассматриваемом случае

$$T_x^0 = -q, \quad T_y^0 = 0, \quad S_{xy}^0 = 0,$$

и уравнение (7.12) принимает вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (7.15)$$

Для рассматриваемой удлиненной пластины можно предположить, что при потере устойчивости изгиб будет происходить по цилиндрической поверхности $w = w(x)$. Тогда уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (7.16)$$

С точностью до обозначений последнее уравнение тождественно линеаризованному уравнению прямого стержня постоянной изгибной жесткости EJ , сжатого силой P (см. разд. 6.1):

$$EJv'' + Pv'' = 0, \quad (7.16')$$

Такое совпадение достаточно очевидно: задача устойчивости пластины в рассматриваемом случае эквивалентна задаче устойчивости полоски единичной ширины (рис. 7.4, б) с изгибной жесткостью $EJ = D \cdot 1$, сжатой продольной силой $P = q \cdot 1$.

Поэтому для определения $q_{кр}$ можно воспользоваться формулой (6.16) и, заменив l на a , сразу записать

$$q_{кр} = C \frac{\pi^2 D}{a^2}, \quad (7.17)$$

где C — коэффициент, зависящий от граничных условий (см. рис. 6.8).

В задачах устойчивости пластин окончательный результат обычно записывают через величины критических напряжений. Так, в рассматриваемой задаче результат можно выразить через критические сжимающие напряжения

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = C \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2. \quad (7.17')$$

Решение, полученное для удлиненной пластины, можно использовать и для пластины с двумя свободными краями (рис. 7.5). Граничные условия на свободных краях пластины, конечно, удовлетворены не будут, но при $h \ll b$ существенно на величину $q_{кр}$ это не повлияет.

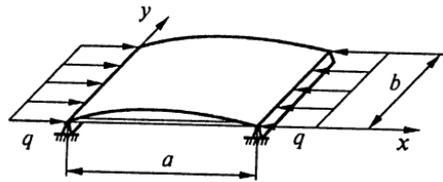


Рис. 7.5

В качестве второго примера возьмем прямоугольную пластину, свободно опертую по всему контуру (рис. 7.6, а) и равномерно сжатую в одном направлении (рис. 7.6, б). Начальные силы и уравнение (7.15) остаются теми же, что и в предыдущем примере, но решение несколько усложняется.

Выпишем граничные условия задачи:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \text{ и } x=a: & \quad 1) w=0, \quad 2) \partial^2 w / \partial x^2 = 0; \\ \text{при } y=0 \text{ и } y=b: & \quad 1) w=0, \quad 2) \partial^2 w / \partial y^2 = 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

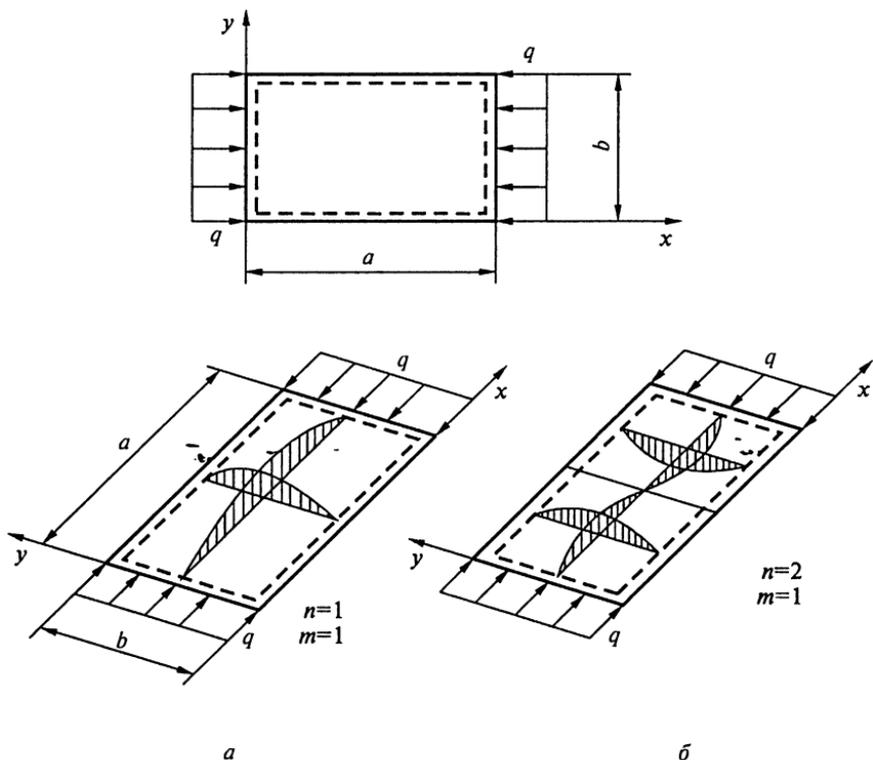


Рис. 7.6

Как мы уже знаем из гл. 6, собственные функции свободно опертых равномерно сжатых стержней постоянной изгибной жесткости — это набор синусоид (6.18). Поэтому в рассматриваемой задаче решение уравнения (7.15) можно искать в таком виде:

$$w_{nm} = A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (7.19)$$

Поскольку системы собственных функций обладают свойством полноты, то конструируя решение в виде (7.19), мы можем быть уверены, что и для решаемой двумерной задачи будут найдены все собственные функции. Каждое из произведений синусоид (7.19) удовлетворяет всем граничным условиям задачи и является решением уравнения (7.15). Подставив w_{nm} в решаемое уравнение и сократив произведение синусов, входящее во все слагаемые, приходим к уравнению

$$A_{nm} \left\{ D \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right\} = 0.$$

Для возможности существования A_{nm} , не равного нулю, должно быть равно нулю выражение в фигурных скобках; из этого условия получаем собственные значения задачи:

$$q_{nm} = \frac{\pi^2 D}{(n/a)^2} \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2. \quad (7.20)$$

Далее нужно выяснить, при каких n и m собственное значение будет наименьшим. Поскольку число полуволн m входит только в числитель, то, очевидно, наименьшее значение q_{nm} может быть только при $m_{кр} = 1$. Учитывая это, запишем

$$\bar{q}_n = \frac{q_{n1}}{\pi^2 D/b^2} = \left(\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb} \right)^2.$$

Дальнейший анализ удобно проводить с помощью графиков, аналогичных тем, какие использовались при решении задачи устойчивости стержня, связанного с упругим основанием (см. рис. 6.5). Последовательно принимая $n = 1$, $n = 2$ и т.д., получаем

$$\bar{q}_1 = \left(\frac{1 \cdot b}{a} + \frac{a}{1 \cdot b} \right)^2, \quad \bar{q}_2 = \left(\frac{2 \cdot b}{a} + \frac{a}{2 \cdot b} \right)^2, \dots$$

На рис. 7.7, а приведены соответствующие графики. Участки кривых, лежащие ниже точек пересечения, будут давать наименьшие и, следовательно, критические значения $q_{кр}$. Окончательный результат обычно представляют через критические сжимающие напряжения

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad (7.21)$$

где K_{σ} — коэффициент, зависящий от отношения сторон пластины (на рис. 7.7, а — сплошная линия).

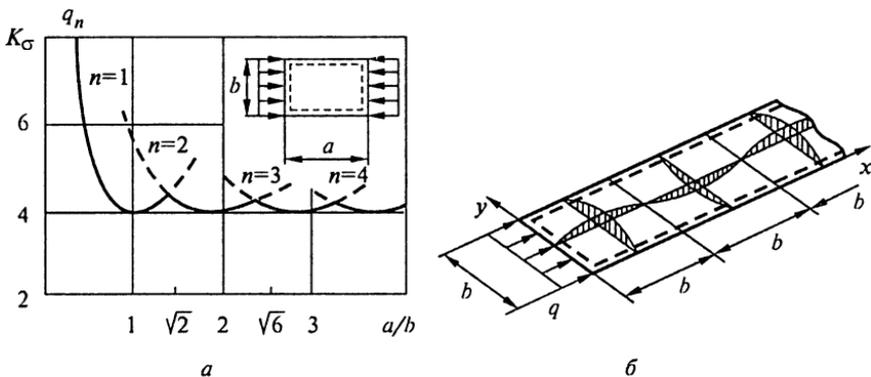


Рис. 7.7

Подчеркнем, что в последней формуле в качестве характерного размера пластины принята ее ширина b , а не длина a , как в формуле (7.17); это удобно при $a > b$, когда именно размер b существенно влияет на $q_{кр}$. Если $a < b$, то удобнее другая запись (при $n_{кр} = 1$):

$$q_{кр} = \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \frac{\pi^2 D}{a^2}. \quad (7.21')$$

Как видно из последней формулы, с точностью порядка 5 % при $a/b < 0,15$ влиянием закрепления коротких сторон пластины можно пренебречь и расчет вести по формуле (7.17).

При $a/b > 3 \dots 4$ коэффициент K_σ практически перестает изменяться с ростом отношения a/b , и тогда можно принять $K_\sigma = 4$. В этом случае число полуволн $n_{кр}$ примерно равно отношению a/b . Другими словами, удлиненная пластина при потере устойчивости как бы делится на ряд квадратных свободно опертых пластин (рис. 7.7, б), для каждой из которых $K_\sigma = 4$.

Собственные функции задачи определяются формулой (7.19), а потеря устойчивости происходит по форме (см. рис. 7.6)

$$w_{кр} = \sin \frac{n_{кр} \pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Для прямоугольных пластин с конечным отношением сторон уравнение (7.12) допускает точное аналитическое решение при следующих условиях:

1) начальное напряженное состояние однородно:

$$T_x^0 = \text{const}, \quad T_y^0 = \text{const}, \quad S_{xy}^0 = 0;$$

2) две противоположные стороны пластины свободно оперты, а граничные условия на двух других сторонах произвольны, но неизменны вдоль каждой из сторон.

Так, если граничные условия свободного опирания $w = 0$, $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ заданы при $x = 0$ и $x = a$, то решение уравнения (7.12) можно сконструировать в виде ряда, каждый член которого удовлетворяет граничным условиям при $x = 0$ и $x = a$:

$$w(x, y) = \sum Y_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь $Y_n = Y_n(y)$ — функции одной независимой переменной y . Подстановка этого ряда в основное уравнение (при $S_{xy}^0 = 0$) приводит к системе независимых обыкновенных дифференциальных уравнений для функций Y_n . Решение полученных однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами принципиальной трудности не представляет. Общая схема такого решения аналогична описанному в разд. 6.2 решению уравнения четвертого порядка для стержня.

В частности, когда $T_x^0 = -q$, $T_y^0 = 0$, $S_{xy}^0 = 0$, окончательный результат можно представить в виде (7.21), но коэффициенты K_{σ} будут иные; на рис. 7.8 приведены примеры зависимости этих коэффициентов от отношения сторон пластины при различных граничных условиях. Отметим, что при $a < b$ в формуле (7.21) следует b заменить на a (верхняя кривая для пластины с защелненным контуром получена иным приближенным способом*).

На рис. 7.9, a изображена свободно опертая по всему контуру прямоугольная пластина, равномерно нагруженная в двух направлениях. В этом случае собственные функции задачи — произведения синусоид (7.19), так как эти произведения синусоид удовлетворяют всем граничным условиям (7.18) и являются решениями основного уравнения (7.12) при $T_x^0 = -q_x$, $T_y^0 = -q_y$, $S_{xy}^0 = 0$. Действуя как и в предыдущем примере, вместо выражения (7.20) получим

* См.: Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.

$$\left(\frac{n}{a}\right)^2 q_x + \left(\frac{m}{b}\right)^2 q_y = \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right]^2 D. \quad (7.22)$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Так, при $q_x = q_y = q$, последнее выражение дает такой набор собственных значений задачи:

$$q_{nm} = \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right]^2 \pi^2 D.$$

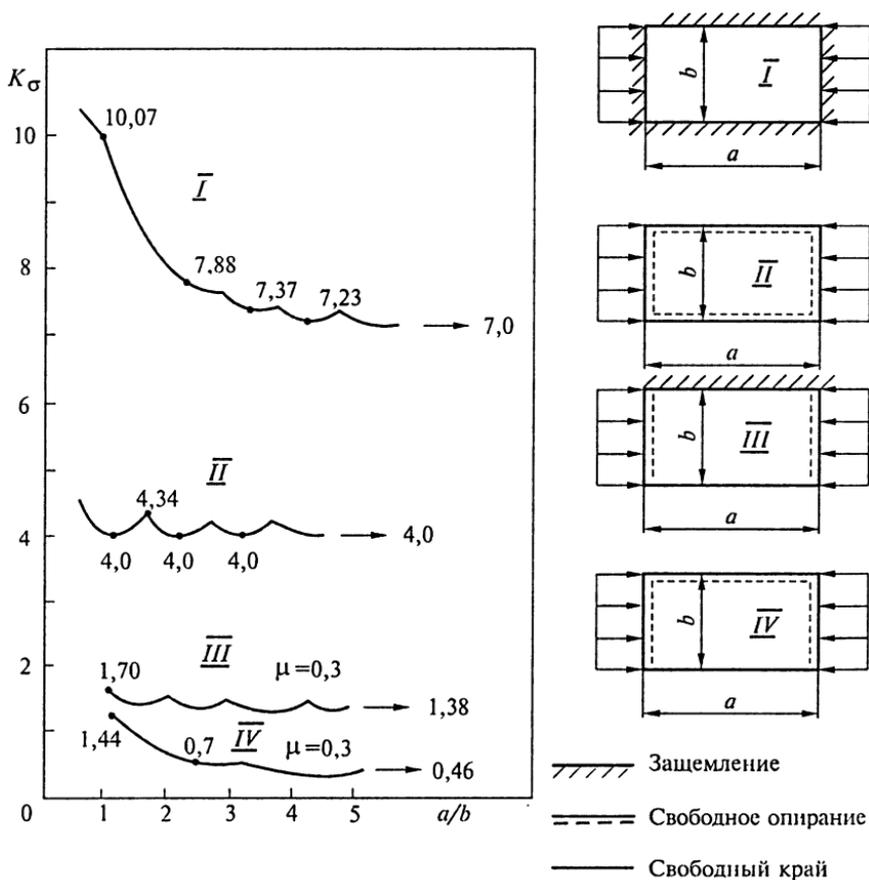


Рис. 7.8

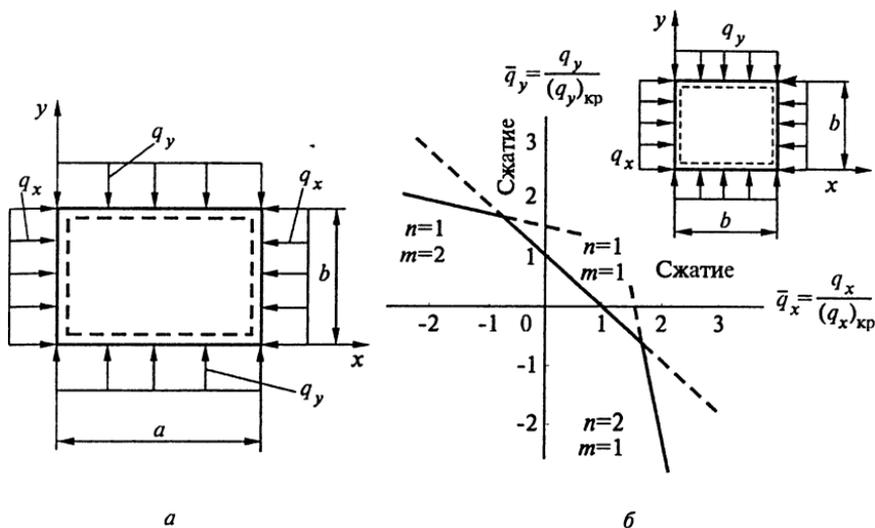


Рис. 7.9

Наименьшее собственное значение, равное $q_{кр}$, будет при $n_{кр} = m_{кр} = 1$:

$$q_{кр} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad K_{\sigma} = \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right].$$

В частности, для квадратной пластины при $a = b$ получим $K_{\sigma} = 2$. Независимо от отношения сторон пластина теряет устойчивость по форме

$$w_{кр}(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Если $q_x = q$, $q_y = \nu q$, где ν — фиксированная положительная величина, то при $a > b$, очевидно, $m_{кр} = 1$ и

$$q_{кр} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad K_{\sigma} = \left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + 1 \right]^2 / \left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + \nu \right]. \quad (7.23)$$

Для каждого отношения сторон и каждого значения ν число половин n следует подбирать из условия минимума K_{σ} .

Полученное решение (7.22) легко распространить и на тот случай, когда пластина равномерно сжата в одном направлении и равномерно растягнута в другом. Например, если пластина растягнута в направлении оси y , то в выражении (7.22) знак перед q_y следует изменить на обратный:

$$\left(\frac{n}{a}\right)^2 q_x - \left(\frac{m}{b}\right)^2 q_y = \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right]^2 D. \quad (7.24)$$

В частности, тогда для квадратной пластины при $q_x = |q_y|$ получим

$$q_{nm} = \frac{(n^2 + m^2)^2 \pi^2 D}{n^2 - m^2 b^2}. \quad (7.24')$$

Наименьшим значение q_{nm} может быть только при $m_{кр} = 1$. Значение $n_{кр}$ находим подбором. Последовательно принимая $n = 1, n = 2, n = 3$, получаем $q_{11} = \infty, q_{21} = (25/3)\pi^2 D/b^2, q_{31} = (25/2)\pi^2 D$. Следовательно, $q_{кр} = q_{21}$, а потеря устойчивости происходит по форме

$$w_{кр}(x, y) = \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Подобный анализ нетрудно провести и для любого другого отношения сторон пластины и при любых соотношениях между сжимающей и растягивающей нагрузками свободно опертой по всему контуру пластины. Для каждой пластины результаты такого анализа можно объединить одним графиком, дающим критические сочетания как снимающих, так и растягивающих сил q_x и q_y . На рис. 7.9, б такой график приведен для квадратной пластины. Участки прямых, показанные сплошной линией, характеризуют критическое сочетание безразмерных сил \bar{q}_x и \bar{q}_y ; ломаная линия, состоящая из этих участков, ограничивает область устойчивости рассматриваемой пластины при комбинированном нагружении силами q_x и q_y . Величины $(q_x)_{кр}$ и $(q_y)_{кр}$ равны критическим силам при сжатии пластины только в одном направлении и определяются формулой (7.21) при $K_\sigma = 4$.

Аналогичные границы области устойчивости можно построить и при других отношениях сторон пластины. Правда, для пластин с граничными условиями, отличными от только что рассмотренных, решение существенно усложняется, но окончательный результат качественно полностью повторяет результат, полученный для пластины со свободно опертым контуром. Это относится и к тем задачам, в которых основное уравнение аналитически не интегрируется и решение строится приближенными методами.

7.3. Приближенные решения задач устойчивости пластин

Рассмотрим задачи, в которых не удастся точно проинтегрировать основное уравнение. Вначале с помощью метода Рэлея — Ритца решим задачу устойчивости прямоугольной пластины с одним свободным краем при $y = b$, нагруженную распределенными контурными силами, изменяющимися по закону $q_x = q(1 + \eta y/b)$, где η — фиксированный параметр (рис. 7.10, а).

Решение плоской задачи в данном случае элементарно: контурная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону, передается без искажения по всей длине пластины и не вызывает, кроме T_x^0 , никаких других внутренних сил:

$$T_x^0 = -q(1 + \eta y/b), \quad T_y^0 = 0,$$

$$S_{xy}^0 = 0.$$

Заметим, что в общем случае контурная нагрузка $q_x = q_x(y)$ вызывает в пластине сложное двухосное напряженное состояние, определить которое далеко не просто.

В соответствии с выражением (7.8.) запишем

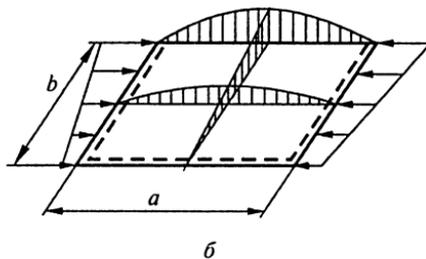
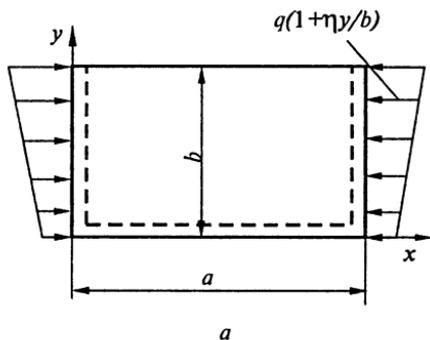


Рис. 7.10

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{U}_{\text{э}} - \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b q \left(1 + \eta \frac{y}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy.$$

На свободном крае граничные условия силовые и при решении задачи методом Рэлея — Ритца их можно игнорировать (см. разд. 5.4). Если по трем остальным сторонам пластина свободно оперта, то геометрические граничные условия, которые необходимо удовлетворить, таковы:

$$\text{при } \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array} \right\} w=0; \quad \text{при } y=0 \quad w=0.$$

В этом случае функцию $w(x, y)$ удобно задать в виде ряда

$$w(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sum_{i=1}^N C_i y^i. \quad (7.25)$$

Если край пластины при $y=0$ заземлен, а два края ($x=0, a$) свободно оперты, то геометрические граничные условия будут такими:

$$\text{при } \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array} \right\} w=0; \quad \text{при } y=0 \quad w=0, \quad \partial w / \partial x = 0.$$

В этом случае функцию $w(x, y)$ можно взять в виде такого ряда:

$$w(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sum_{i=2}^N C_i y^i. \quad (7.25')$$

Остановимся на решении задачи для пластины с тремя свободно опертыми краями, ограничившись условием $\eta > -1$. В этом случае задача будет полностью определенной и в приближенном решении можно ограничиться одним членом ряда (7.25), т.е. взять

$$w(x, y) = C_1 y \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Тогда, выполнив несложные операции дифференцирования и интегрирования, получим

$$\Delta W = C_1^2 \left\{ D \left[\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 + 2(1-\mu) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] - q \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\eta}{4} \right) b^2 \right\} \frac{ab}{4}.$$

Из условия $\Delta W = 0$ можно сразу найти собственные значения задачи (приближенно!)

$$q_n = \frac{n^2 b^2 / a^2 + 6(1-\mu) / \pi^2}{1 + 3\eta/4} \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

Поскольку число полуволн n входит только в числитель, наименьшее значение q_n получим при $n_{кр} = 1$. Следовательно, приближенное критическое значение нагрузки

$$q_{кр} = K_\sigma \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad K_\sigma = \frac{(b/a)^2 + 6(1-\mu)/\pi^2}{1 + 3\eta/4}, \quad (7.26)$$

и изгиб пластины при потере устойчивости приближенно описывается функцией (рис. 7.10, б)

$$w_{кр}(x, y) = y \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Взяв большее число членов ряда, можно уточнить полученный результат, но в рассмотренном примере даже первое приближение дает вполне приемлемую для практических целей точность. Дело в том, что использованный в решении первый член ряда (7.25) близок к точному решению: изменению по координате x соответствует точному решению, при $y = 0$ выполняется не только геометрическое, но и силовое граничное условие $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$.

В приведенной задаче точное аналитическое решение удается получить только при $\eta = 0$; когда $\mu = 0,3$ и отношение $(b/a)^2$ пренебрежимо мало, точное решение дает $K_\sigma = 0,4255$. Полученное приближенное решение при тех же условиях дает тот же самый результат. Поэтому можно ожидать, что и при $\eta \neq 0$ точность приближенного решения будет удовлетворительной.

Следующую задачу, когда свободно опертая по всему контуру прямоугольная пластина (рис. 7.11, а), как и в предыдущем примере, нагружена распределенными контурными силами $q_x = q(1 - \eta y/b)$, где η — фиксированный параметр, на величину которого не накладывається никаких ограничений, решим методом

Галеркина. Поскольку, как и в предыдущей задаче, $T_x^0 = -q_x$, $T_y^0 = 0$, $S_{xy}^0 = 0$, основное уравнение принимает вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 + q \left(1 - \eta \frac{y}{b} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (7.27)$$

Граничные условия задачи:

при $x=0$ и $x=a$: 1) $w=0$, 2) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$;

при $y=0$ и $y=b$: 1) $w=0$, 2) $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

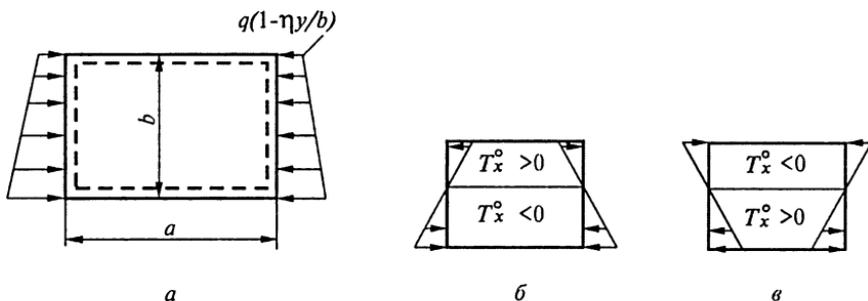


Рис. 7.11

В уравнении (7.27) коэффициенты не зависят от x , поэтому решение, удовлетворяющее граничным условиям при $x=0$ и $x=b$, можно взять в виде

$$w_n(x, y) = Y_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.28)$$

где $Y_n = Y_n(y)$ — функция координаты y . Подставив это выражение в уравнение (7.27) и сократив на $\sin \frac{n\pi x}{a}$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$D \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 Y_n - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 Y_n'' + Y_n'''' \right] - q \left(1 - \eta \frac{y}{b} \right) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 Y_n = 0, \quad (7.29)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по y .

Учитывая граничные условия при $y = 0$ и $y = b$, можно задать

$$Y_n = \sum_{m=1}^N C_m \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (7.30)$$

где каждый член ряда удовлетворяет этим граничным условиям. Подставив ряд (7.30) в уравнение (7.27), получим функцию-ошибку

$$L = \sum_{m=1}^N C_m \pi^2 \left\{ \pi^2 D \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2 - q \left(1 - \eta \frac{y}{b} \right) \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right\} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Согласно методу Галеркина, умножаем функцию-ошибку L поочередно на все базисные функции и, проинтегрировав от 0 до b , получаем систему однородных уравнений

$$\int_0^b L \sin \frac{m\pi y}{b} dy = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (7.31)$$

Ограничившись одним членом ряда (7.30), получим одно уравнение, из которого находим

$$q_n = \left(\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb} \right)^2 \frac{\pi^2 D}{(1 - \eta/2)b^2}. \quad (7.32)$$

Входящее в эту формулу число полуволн в продольном направлении n следует подбирать из условия минимума q_n , как это делалось в разд. 7.2 для прямоугольной пластины, равномерно сжатой в одном направлении. При $\eta = 0$ формула (7.32) приводит к точному значению $q_{кр}$. При значениях $\eta < 1$ эта формула дает приближенные, но достаточно удовлетворительные результаты. Однако с дальнейшим увеличением η точность формулы (7.32) резко уменьшается. А при $\eta = 2$ эта формула вообще приводит к абсурдному результату.

Дело в том, что при $\eta > 1$ часть пластины остается сжатой, а другая часть оказывается растянутой (рис. 7.11, б) и задача устойчивости перестает быть полностью определенной (см. приложение). Как уже отмечалось в разд. 6.3, в таких случаях для получения надежного результата необходимо взять в решении как

минимум два члена ряда. При двух членах ряда (7.30) система (7.31) состоит из двух уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 A_{11} - C_2 \frac{16}{9} \eta q &= 0, \\ C_1 \frac{16}{9} \eta q - C_2 A_{22} &= 0, \end{aligned} \tag{7.33}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \pi^2 \left\{ D\pi^2 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{n}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \right\}, \\ A_{22} &= \pi^2 \left\{ D\pi^2 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{2}{b} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{n}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель этой системы уравнений, приходим к квадратному уравнению относительно q_n ; при $n > 1$ два корня этого уравнения имеют разные знаки, т.е. получим $q_n^+ > 0$ и $q_n^- < 0$. Минимизируя по числу полуволн n абсолютные величины q_n^+ и q_n^- , находим множители $q_{кр}^+$ и $q_{кр}^-$; первый из них соответствует нагрузке, изображенной на рис. 7.11, б, а второй — нагрузке, изображенной на рис. 7.11, в. Заметим, что в общем случае $n_{кр}^+$ для $q_{кр}^+$ не равно $n_{кр}^-$ для $q_{кр}^-$.

На рис. 7.12, а изображена прямоугольная пластина, нагруженная по контуру распределенными касательными силами q_τ . В этом случае $T_x^0 = 0$, $T_y^0 = 0$, $S_{xy}^0 = q_\tau$ и общее уравнение (7.12) принимает вид

$$D\nabla^2 \nabla^2 w - 2q_\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \tag{7.34}$$

Смешанная производная $\partial^2 w / \partial x \partial y$, входящая в это уравнение, резко усложняет аналитическое решение даже для пластины со свободно опертым контуром; функции (7.19), позволявшие получить простые аналитические решения, не удовлетворяют

уравнению (7.34). В решении уравнения (7.34) для свободно опертой пластины методом Галеркина можно использовать ряд

$$w(x, y) = \sum_n \sum_m C_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (7.35)$$

каждый член которого удовлетворяет всем граничным условиям.

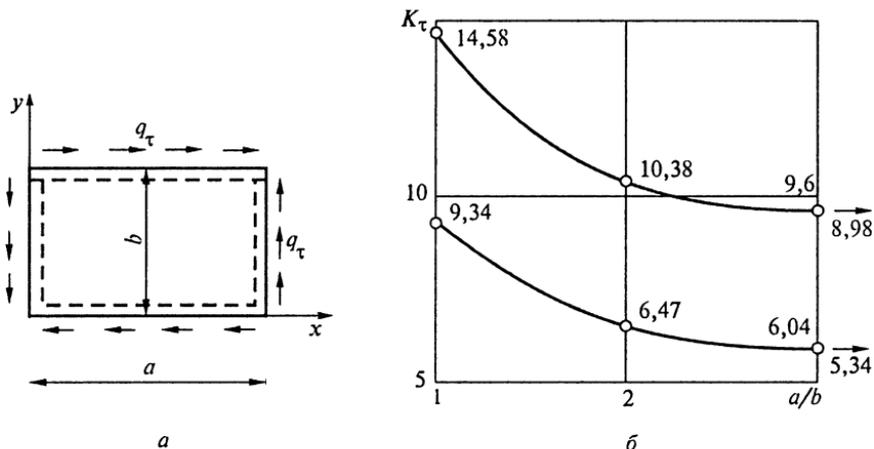


Рис. 7.12

Как и в предыдущем примере, эта задача не является полностью определенной, и поэтому в приближенном решении необходимо удерживать несколько членов ряда. Для пластины, близкой к квадратной, можно ограничиться двумя членами ряда и принять

$$w(x, y) = C_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + C_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}. \quad (7.36)$$

Подставив $w(x, y)$ в уравнение (7.34), найдем функцию-ошибку $L(x, y, q_\tau)$, условия ортогональности которой координатным функциям, т.е. условия

$$\int_0^a \int_0^b L \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0, \quad \int_0^a \int_0^b L \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy = 0,$$

приводят к двум однородным уравнениям:

$$C_{11} \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2 D \frac{ab}{4} - C_{22} \frac{32}{9} q_\tau = 0,$$

$$-C_{11} \frac{32}{9} q_\tau + C_{22} \left[\left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \right]^2 D \frac{ab}{4} = 0.$$

Заметим, что если бы в приближенном решении мы ограничились одним членом ряда, то получили бы бессмысленный результат: в условие ортогональности внешняя нагрузка q_τ не входит.

Приравняв нулю определитель полученной системы однородных уравнений, найдем

$$(q_\tau)_{кр} = \pm K_\tau \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (7.37)$$

где

$$K_\tau = \frac{9\pi^2}{32} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^2 \frac{a}{b}.$$

В частности, для квадратной пластины $K_\tau = 9\pi^2/8 = 11,1$. Уточненное решение для квадратной пластины дает $K_\tau = 9,34$. Знаки плюс–минус, фигурирующие в формуле (7.37), отражают тот очевидный факт, что изменение направления контурной нагрузки не влияет на ее критическое значение.

Точное аналитическое решение уравнения (7.34) удается получить только для удлиненной пластины при $b/a \rightarrow 0$; в этом случае для свободно опертой пластины в формуле (7.37) коэффициент $K_\tau = 5,34$, а для пластины с защемленными длинными сторонами $K_\tau = 8,98$.

Увеличивая число членов ряда (7.35), используемых в решении, можно уточнить значение коэффициента K_τ для прямоугольных пластин с произвольным отношением сторон. Аналогичные решения можно построить и при других граничных условиях на контуре пластины. На рис. 7.12, б представлены две типичные зависимости K_τ от отношения сторон пластины; нижняя кривая относится к пластине со свободно опертым контуром, а верхняя — с защемленным.

При комбинированном нагружении пластины (рис. 7.13, а) касательными контурными силами q_τ и растягивающими или сжимающим силами q решение удается получить только приближенными методами. Но критическое сочетание сил q_τ и q в этой задаче при различных отношениях сторон и различных граничных условиях, т.е. границу области устойчивости, можно с достаточной точностью аппроксимировать одной зависимостью

$$\bar{q}_\tau^2 + \bar{q} = 1, \quad (7.38)$$

где $\bar{q}_\tau = q_\tau / (q_\tau)_{кр}$, $\bar{q} = q / q_{кр}$, причем $(q_\tau)_{кр}$ и $q_{кр}$ — критические значения касательных и сжимающих сил, действующих порознь; в случае растягивающей нормальной нагрузки знак перед \bar{q} меняется на противоположный. На рис. 7.13, б изображена эта граница области устойчивости. Как видим, растяжение пластины приводит к увеличению критических значений q_τ , а сжатие — к уменьшению*.

В заключение отметим, что методами Рэлея — Ритца и Галеркина решены и табулированы многие задачи устойчивости пластин различной формы. Но при всех достоинствах эти методы нельзя признать универсальными: удобные для математической обработки системы базисных функций удается построить только для пластин правильной формы при сравнительно простых граничных условиях. Однако в настоящее время основные идеи этих методов с успехом использованы для создания и обоснования универсального метода конечных элементов.

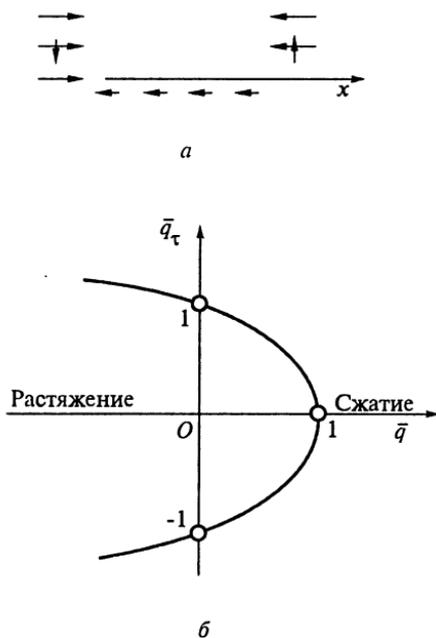


Рис. 7.13

* Такое увеличение критических касательных сил происходит только до тех пор, пока материал пластины работает упруго; значительные величины q и q_τ могут вызвать пластические деформации и привести к снижению критических нагрузок, но мы не рассматриваем неупругое поведение материала.

7.4. Поведение пластин после потери устойчивости

Для пластины, как и для стержня, возможны два качественно различных случая поведения в закритическом состоянии. Если закрепление ее контура не препятствует чисто изгибной деформации, т.е. деформации без удлинений и сдвигов срединной плоскости (рис. 7.14, а), то после потери устойчивости поведение пластины будет таким же, как и у стержня с незакрепленным относительно продольного смещения торцом: малейшее

превышение критической нагрузки приведет к большим поперечным прогибам, вызывающим большие изгибные напряжения (см. разд. 6.5). И в этом случае потеря устойчивости пластины практически означает потерю ее несущей способности. Но если для стержней такой случай закритического поведения основной, то для тонкой пластины, являющейся элементом силовой конструкции, этот случай, скорее, исключительный.

Когда контур пластины закреплен, после потери устойчивости ее срединная плоскость неизбежно превращается в поверхность двоякой кривизны, что приводит к качественно иному закритическому поведению; дополнительные удлинения и углы сдвига в срединной плоскости дают возможность пластине продолжать воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку.

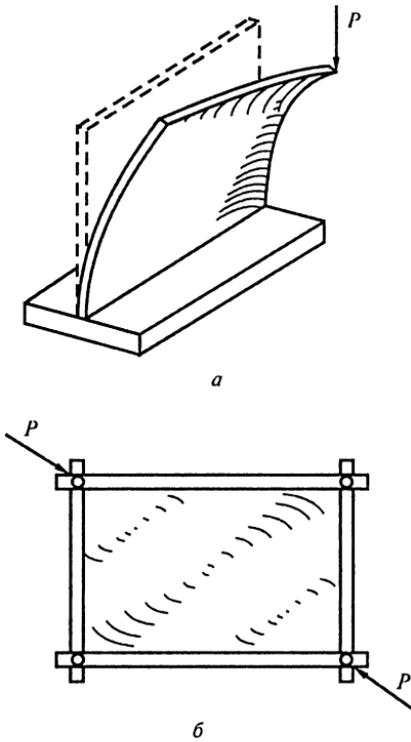


Рис. 7.14

На рис. 7.14, б изображена тонкая пластина, прикрепленная по контуру к жесткой шарнирной рамке и нагруженная силой P . До потери устойчивости пластина находится в состоянии чистого сдвига. Когда внешняя нагрузка превысит критическое значение (см. разд. 7.3), пластина теряет устойчивость и ее поверхность станет волнистой, однако при этом несущая способность

пластины не исчерпывается. После потери устойчивости возрастающая внешняя нагрузка будет восприниматься, главным образом, за счет дополнительных растягивающих сил, направленных вдоль наклонных волн. Аналогично ведет себя после потери устойчивости закрепленная по контуру пластина и при сжатии: дополнительные силы, возникающие в деформированной срединной плоскости, помогают пластине продолжать воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку.

Теоретическое описание поведения пластины с закрепленным контуром после потери устойчивости — весьма и весьма сложная задача, решение которой удастся получить только с помощью того или иного приближенного метода. Дополнительная сложность связана с тем, что после потери устойчивости по мере роста внешней нагрузки обычно происходит скачкообразная перестройка формы изогнутой поверхности пластины.

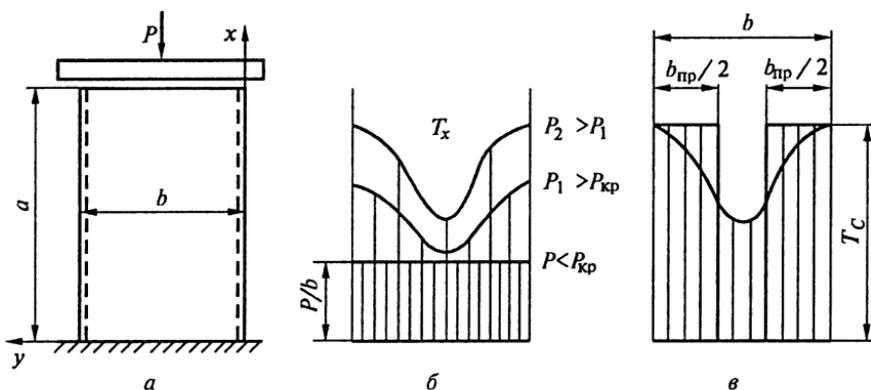


Рис. 7.15

Для сжатой в одном направлении прямоугольной пластины Г. Карманом был предложен полуэмпирический прием, позволяющий крайне просто и, главное, достаточно точно оценить работу пластины после потери устойчивости. На рис. 7.15, а показана закрепленная по всему контуру прямоугольная пластина толщиной h , нагруженная в направлении x . Будем считать, что после потери устойчивости края пластины остаются прямыми (примерно так ведет себя клетка тонкой обшивки между продольным и поперечным набором в реальной конструкции). До потери устойчивости начальные силы в срединной плоскости пластины

$$T_x^0 = -P/b, \quad T_y^0 = 0, \quad S_{xy}^0 = 0.$$

После потери устойчивости в пластине вместе с изгибом возникает сложное напряженное состояние в деформированной срединной плоскости: $T_x = T_x(x, y)$, $T_y = T_y(x, y)$, $S_{xy} = S_{xy}(x, y)$, причем характер этого напряженного состояния изменяется по мере роста внешней нагрузки. На рис. 7.15, б схематично показано распределение сил T_x по ширине пластины до и после потери устойчивости (заметим, что после потери устойчивости величина T_x изменяется и по оси x). Прием Т. Кармана основывается на двух упрощающих допущениях:

1. Неизвестный закон распределения $T_x = T_x(x, y)$ заменяется ступенчатым на всей длине пластины (рис. 7.15, в). Такая схематизация напряженного состояния отражает тот факт, что после потери устойчивости искривляющаяся средняя часть пластины как бы «уходит» из-под нагрузки и продольные сжимающие силы воспринимаются в основном участками пластины, прилегающими к кромкам.

2. Считается, что силы T_C равны критическому значению T_x для равномерно сжатой пластины шириной $b_{пр}$, т.е.

$$T_C = K_\sigma \frac{\pi^2 D}{b_{пр}^2}, \quad (7.39)$$

где коэффициент K_σ такой же, как и у исходной пластины.

Учитывая, что для исходной пластины шириной b

$$T_{кр}^0 = K_\sigma \frac{\pi^2 D}{b^2},$$

можно записать $b_{пр} = \varphi b$, где

$$\varphi = \sqrt{T_{кр}^0 / T_C}. \quad (7.40)$$

Величину $b_{пр}$ называют приведенной шириной пластины, а коэффициент φ — редуцированным коэффициентом.

Если ввести среднее по ширине пластины сжимающее напряжение $\bar{\sigma}_x = P/(bh)$, то полученный результат можно представить в таком виде:

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\sigma_C \sigma_{кр}^0}, \quad (7.41)$$

где $\sigma_C = T_C/h$; $\sigma_{кр}^0 = T_{кр}^0/h$. Сжимающие напряжения σ_C на кромках пластины следует определять из некоторых дополнительных условий*.

Суммарная продольная сила, воспринимаемая пластиной после потери устойчивости, может быть приближенно подсчитана по формуле

$$P = \bar{\sigma}_x bh = bh\sqrt{\sigma_C \sigma_{кр}^0}. \quad (7.42)$$

Прием Т. Кармана позволяет приближенно построить зависимость сближения торцев λ от силы P после потери устойчивости пластины, аналогичную той, какая была построена для сжатого стержня в разд. 6.5. До потери устойчивости, очевидно, $P = \lambda Ebh/a$. После потери устойчивости, учитывая приведенные выше формулы, можно записать

$$\sigma_C = E \frac{\lambda}{a} \text{ и } P = bh\sqrt{\sigma_C \sigma_{кр}^0} = Eh^2 \sqrt{\frac{K_\sigma \pi^2}{12(1-\mu^2)}} \sqrt{\frac{\lambda}{a}}. \quad (7.43)$$

Полученный результат схематично изображен на рис. 7.16.



Рис. 7.16

* См. об этом: *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В рассмотренных ранее задачах устойчивости стержней и пластин критические нагрузки были пропорциональны изгибным жесткостям; в окончательные формулы жесткости стержней и пластин на растяжение—сжатие не входили. Дело в том, что при бифуркационных изгибах стержней и пластин деформации оси стержня и срединной плоскости пластины имеют второй порядок малости. В задачах устойчивости оболочек в общем случае картина иная: на величины критических нагрузок влияют как изгибные жесткости стенок оболочек, так и их жесткости на растяжение—сжатие.

Основная геометрическая особенность оболочки состоит в том, что при надлежащем закреплении ее краев она не допускает даже бесконечно малых чисто изгибных деформаций без растяжения—сжатия ее срединной поверхности. Например, замкнутую выпуклую оболочку или закрепленную по торцам цилиндрическую оболочку нельзя деформировать, не вызывая удлинений и сдвигов в срединной поверхности, причем эти удлинения и сдвиги будут иметь тот же порядок малости, что и поперечные прогибы.

Эта геометрическая особенность оболочек, во-первых, приводит к тому, что формулы для критических нагрузок оболочек имеют более сложную структуру по сравнению с формулами для критических нагрузок стержней и пластин: в них кроме изгибной жесткости стенки оболочки входит и жесткость на растяжение—сжатие. Во-вторых, в результате этой особенности закритическое поведение оболочек качественно отличается от закритического поведения стержней и пластин.

8.1. Постановка задачи; основные исходные зависимости

Приведем основные зависимости, описывающие деформацию тонкостенной цилиндрической оболочки. Начало подвижной системы координат поместим на срединной поверхности оболочки, направив ось x вдоль образующей, ось y — по кас-

тельной, а ось z — по нормали к срединной поверхности (рис. 8.1, *a*). Так же как и при расчете пластин, воспользуемся классическими допущениями: нормаль к недеформированной срединной поверхности остается нормалью к деформированной срединной поверхности, поворачиваясь как жесткое целое в плоскостях xz и yz на углы ϑ_x и ϑ_y ; нормальные напряжения σ_z пренебрежимо малы. Перемещения точек срединной поверхности по направлениям осей x, y, z обозначим соответственно u, v, w .

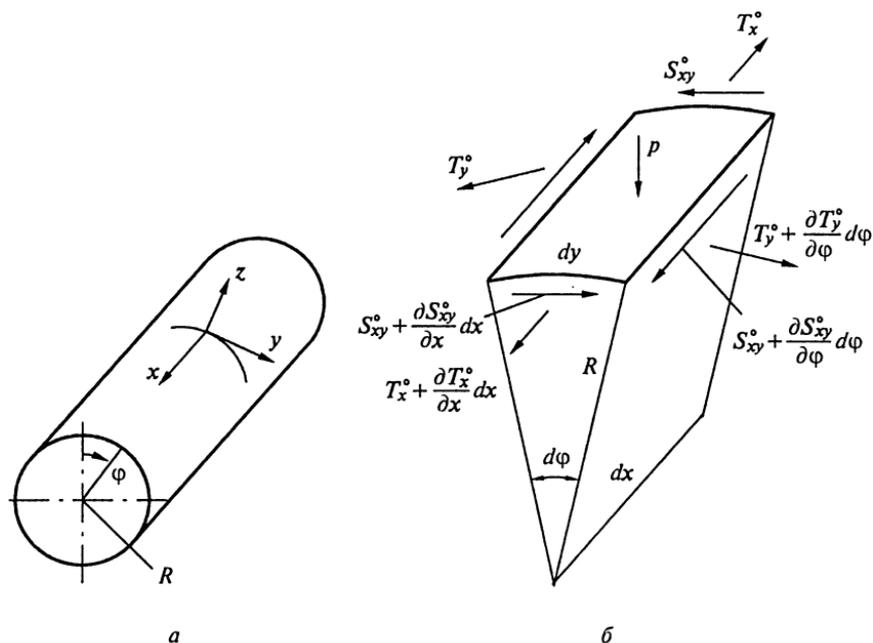


Рис. 8.1

Ограничиваясь линейными слагаемыми относительно перемещений u, v, w и их производных, можно найти компоненты деформаций срединной поверхности

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (8.1)$$

где $dy = R d\varphi$. Очевидно, при $1/R \rightarrow 0$ эти зависимости совпадают с общими формулами (5.2).

Углы поворота нормали определяются зависимостями

$$\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R}, \quad (8.2)$$

которые при $1/R \rightarrow 0$ совпадают с аналогичными зависимостями для пластин (см. разд. 7.1).

Дополнительные квадратичные деформации в срединной поверхности

$$\{\varepsilon_x\} = \left\{ \frac{1}{2} \vartheta_x^2, \frac{1}{2} \vartheta_y^2, \vartheta_x \vartheta_y \right\}^T, \quad (8.3)$$

что полностью повторяет выражение (7.7) для пластин.

Задачу устойчивости цилиндрической оболочки рассмотрим при следующих допущениях:

- 1) оболочка имеет идеально правильную цилиндрическую форму, и ее начальное напряженное состояние безмоментное;
- 2) изменением всех геометрических размеров оболочки в докритическом состоянии полностью пренебрегаем;
- 3) оболочка нагружена только приложенными к торцам «мертвыми» контурными силами и внешним гидростатическим давлением.

В соответствии с первым допущением в начальном докритическом состоянии в оболочке существуют только внутренние силы T_x^0 , T_y^0 , S_{xy}^0 , удовлетворяющие уравнениям равновесия безмоментной теории оболочек

$$\frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}^0}{R \partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial S_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial T_y^0}{R \partial \varphi} = 0, \quad \frac{T_y^0}{R} = -p, \quad (8.4)$$

где p — гидростатическое давление (рис. 8.1, б).

При деформациях в оболочке возникают нормальные T_x , T_y и сдвигающие S_{xy} силы, изгибающие M_x , M_y и скручивающий M_{xy} моменты. Эти внутренние погонные силовые факторы связаны с компонентами деформаций и изменениями кривизн срединной поверхности оболочки соотношениями упругости, совершенно аналогичными формулам (7.4) и (7.13) для пластин:

$$T_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad T_y = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x),$$

$$S_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}$$
(8.5)

и

$$M_x = D(\alpha_x + \mu\alpha_y), \quad M_y = D(\alpha_y + \mu\alpha_x),$$

$$M_{xy} = D\frac{1-\mu}{2}\alpha_{xy},$$
(8.6)

где h — толщина стенки оболочки; D — изгибная жесткость стенки оболочки, определяемая, как и для пластины, формулой (7.6'); α_x , α_y , α_{xy} — изменения кривизн и крутка срединной поверхности, подсчитываемые по формулам

$$\alpha_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, \quad \alpha_y = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}, \quad \alpha_{xy} = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y}.$$
(8.7)

Приведенных зависимостей достаточно для того, чтобы перейти к решению конкретных задач устойчивости оболочек.

8.2. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Рассмотрим цилиндрическую оболочку длиной l и радиусом R с толщиной стенки h , сжатую в осевом направлении равномерно распределенными силами интенсивностью q . Начальное безмоментное напряженное состояние такой оболочки

$$T_x^0 = -q, \quad T_y^0 = 0, \quad S_{xy}^0 = 0.$$

Найдем критическое значение $q_{кр}$, при превышении которого начальное безмоментное состояние перестанет быть устойчивым.

В этой задаче в зависимости от геометрических параметров оболочки и условий закрепления ее торцов потеря устойчивости может происходить в соответствии с одной из нескольких качественно различных форм (рис. 8.2).

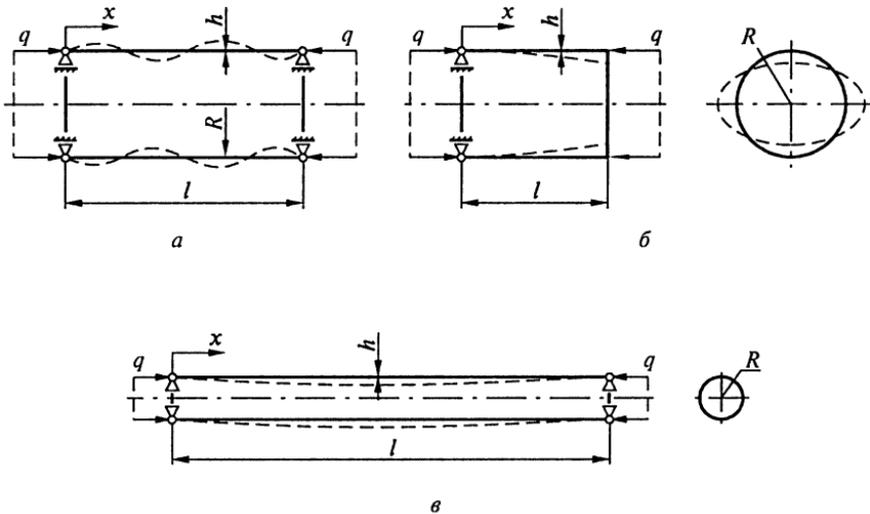


Рис. 8.2

Сначала рассмотрим осесимметричную форму потери устойчивости, при которой $w = w(x)$, а перемещения v тождественно равны нулю (рис. 8.2, а). Линеаризованное уравнение, описывающее такую форму потери устойчивости, получим с помощью вариационного критерия в форме Брайана (см. разд. 5.2). Первое слагаемое в правой части выражения (5.21) представим в виде суммы потенциальной энергии изгиба стенки оболочки \mathcal{U}_∞ и потенциальной энергии деформации срединной поверхности \mathcal{U}_ϵ .

Поскольку при осесимметричной деформации изгиб стенки оболочки происходит только в продольном направлении, то

$$\mathcal{U}_\infty = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} D \alpha_x^2 R d\varphi dx = \pi R \int_0^l D (w'')^2 dx, \quad (8.8)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по x .

При рассматриваемой осесимметричной деформации, когда $v = 0$, в срединной поверхности оболочки возникает дополнительное одноосное напряженное состояние $T_y = Eh\epsilon_y$; поэтому

$$\mathcal{U}_\epsilon = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} Eh\epsilon_y^2 R d\varphi dx = \pi R \int_0^l Eh \left(\frac{w}{R} \right)^2 dx. \quad (8.8')$$

Начальные силы $T_x^0 = -q$ совершат работу на дополнительных квадратичных деформациях, определяемых формулой (8.3) при $\vartheta_y = 0$. Окончательно получим

$$\Delta W = \pi R \int_0^l \left[D(w'')^2 + Eh \left(\frac{w}{R} \right)^2 - q \vartheta_x^2 \right] dx. \quad (8.9)$$

Далее, действуя точно так же, как в разд. 6.1, из условия $\delta(\Delta W) = 0$ получаем линеаризованное уравнение

$$Dw'''' + \frac{Eh}{R^2} w + qw'' = 0 \quad (8.10)$$

и тот набор граничных условий, которые могут быть заданы на торцах замкнутой в окружном направлении оболочки:

$$\begin{aligned} 1) w' &= 0 \text{ либо } M_x = 0, \\ 2) w &= 0 \text{ либо } Q_x = M'_x = 0. \end{aligned} \quad (8.10')$$

Заметим, что уравнение (8.10) с точностью до обозначений тождественно уравнению (6.17) для стержня на упругом основании. Поэтому, используя решение уравнения (6.17), для свободно опертой по торцам оболочки можно сразу выписать собственные функции задачи

$$w_m = \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.11)$$

и собственные значения

$$q_m = D \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2. \quad (8.11')$$

Наименьшее из этих собственных значений, зависящих от числа полуволн m , равно критическому значению нагрузки $q_{кр}$.

Структура формулы (8.11') характерна для задач устойчивости оболочек: величина q_m определяется двумя слагаемыми, первое из которых пропорционально изгибной жесткости стенки оболочки D , а второе — жесткости стенки оболочки на растяжение—сжатие Eh , причем первое слагаемое растет с увеличением числа полуволн m , второе — уменьшается.

Тонкие и не слишком короткие оболочки обычно теряют устойчивость с образованием большого числа полуволн m . Обозначив $(m\pi/l)^2 = \eta$, можно записать

$$q_m = D\eta + \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\eta}$$

и, условно считая параметр η изменяющимся непрерывно, искать минимум q_m из условия $dq_m/d\eta = 0$. Откуда следует

$$m_{\text{кр}} = \frac{l}{\pi} \sqrt{\eta_{\text{кр}}} = \frac{l}{\pi R} \sqrt[4]{\frac{EhR^2}{D}} \quad (8.12)$$

и

$$q_{\text{кр}} = \frac{2\sqrt{DEh}}{R}. \quad (8.13)$$

Заметим, что такой прием определения $q_{\text{кр}}$ оправдан при $m^2 \gg 1$. Для изотропной оболочки из формулы (8.13) следует величина сжимающего критического напряжения

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{q_{\text{кр}}}{h} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{h}{R} \quad (8.13')$$

и суммарной сжимающей критической силы

$$P_{\text{кр}} = 2\pi R \cdot q_{\text{кр}} = 4\pi\sqrt{DEh}. \quad (8.13'')$$

Любопытно отметить, что значение $P_{\text{кр}}$ не зависит от R и l оболочки.

Уравнение (8.10) можно решить и при других граничных условиях, причем если на обоих торцах задано условие $w = 0$, то независимо от двух других граничных условий $q_{\text{кр}}$ для достаточно длинных и тонких оболочек практически совпадает со значением $q_{\text{кр}}$, определяемым формулой (8.13).

В общем случае оболочка, конечно, может терять устойчивость и не по осесимметричным формам. Например, если на обоих торцах оболочки заданы граничные условия

$$w = 0, \quad M_x = 0, \quad v = 0, \quad T_x = 0, \quad (8.14)$$

то для поперечного прогиба собственные функции будут такие:

$$w_{nm} = \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad n = 2, 3, 4, \dots; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8.14')$$

Но для достаточно тонких и длинных оболочек окончательный результат опять сведется к формуле (8.13). Следует отметить, что решение при неосесимметричном деформировании оболочки и произвольных граничных условиях на ее торцах резко усложняется. Однако если на обоих торцах оболочки заданы условия $w = 0$ и $v = 0$, то независимо от остальных граничных условий окончательные результаты для $q_{кр}$ оказываются близки к $q_{кр}$, определяемому формулой (8.13).

Рассмотрим задачу устойчивости оболочки со свободным краем (рис. 8.2, б). Будем считать, что при $x = 0$ заданы граничные условия (8.14), а второй край оболочки полностью свободен. Качественное отличие этой задачи от только что рассмотренной заключается в том, что при заданных граничных условиях оболочка допускает чисто изгибные деформации без растяжений и сдвигов срединной поверхности.

Для решения этой задачи воспользуемся методом Рэлея — Ритца, взяв бифуркационные перемещения

$$u_n = \frac{A_n}{n^2} \cos n\varphi, \quad v_n = \frac{A_n}{n} \frac{x}{R} \sin n\varphi, \quad w_n = -A_n \frac{x}{R} \cos n\varphi, \quad (8.15)$$

где A_n — свободный параметр. Как легко проверить, эти перемещения удовлетворяют всем граничным условиям при $x = 0$ и двум силовым граничным условиям при $x = l$ на свободном краю оболочки ($T_x = 0$, $S_{xy} = 0$).

При выбранных функциях, используя зависимости, приведенные в разд. 8.1, находим

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = 0,$$

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_y = A_n \frac{x(n^2 - 1)}{R^2} \cos n\varphi, \quad \alpha_{xy} = A_n \frac{(n^2 - 1)}{R^2 n} \sin n\varphi.$$

Действуя, как и в предыдущем случае, и учитывая, что $\mathcal{U}_\varepsilon = 0$, находим

$$\Delta W = \pi R l \left\{ \frac{D}{2R^4} \left[\frac{(n^2 - 1)^2}{3} \left(\frac{l}{R} \right)^2 + 2(1 - \mu) \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2} \right] - \frac{q}{2R^2} \right\}.$$

Из условия $\Delta W = 0$ при дополнительном требовании минимума q приходим к окончательной формуле

$$q_{кр} = \frac{3D}{R^2} \left[\left(\frac{l}{R} \right)^2 + \frac{3(1 - \mu)}{2} \right] \quad (8.16)$$

при $n_{кр} = 2$.

В рассмотренном случае оболочка теряет устойчивость без растяжений и сдвигов срединной поверхности, и структура формулы (8.16) качественно отличается от структуры формулы (8.11'): в формуле (8.16) нет жесткости стенки оболочки на растяжение—сжатие Eh .

Длинная цилиндрическая оболочка (труба) при осевом сжатии может потерять устойчивость как стержень (рис. 8.2, в). В этом случае, поскольку сжимающая сила $P = 2\pi Rq$, получим

$$q_{кр} = \frac{C}{2\pi R} \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = C \frac{\pi^2 Eh}{2} \left(\frac{R}{l} \right)^2, \quad (8.17)$$

где коэффициент C зависит от условий закрепления торцов оболочки.

Итак, сжатая в осевом направлении цилиндрическая оболочка может терять устойчивость по трем качественно различным формам: с искривлениями образующих (см. рис. 8.2, а), без растяжений срединной поверхности (см. рис. 8.2, б) и как стержень (см. рис. 8.2, в). Сравним критические сжимающие напряжения, соответствующие этим трем случаям потери устойчивости. В первом случае при $\mu = 0,3$ получим

$$\sigma_{кр} = 0,6 Eh/R. \quad (8.18)$$

Во втором случае из формулы (8.16) находим

$$\sigma_{кр} = \frac{E}{4(1 - \mu^2)} \left[\left(\frac{l}{R} \right)^2 + \frac{3}{2}(1 - \mu) \right] \left(\frac{h}{R} \right)^2. \quad (8.16')$$

В третьем случае формула (8.17) дает (при $C = 1$)

$$\sigma_{кр} = E \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{R}{l} \right)^2.$$

Для тонких оболочек средней длины формула (8.16'), содержащая малый множитель $(h/R)^2$, приводит к значениям критических напряжений, существенно меньшим, чем две другие формулы. Но этот случай почти не встречается в практике: обычно сжатая в осевом направлении оболочка закрепляется по обоим торцам. Кроме того, следует отметить, что если у оболочки со свободным торцом на другом торце вместо граничных условий (8.14) задано, например,

$$w' = 0, \quad w = 0, \quad v = 0, \quad u = 0$$

или

$$w' = 0, \quad w = 0, \quad S_{xy} = 0, \quad u = 0,$$

то чистый изгиб оболочки с $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = 0$, $\gamma_{xy} = 0$ оказывается невозможным. В этом случае структура формулы для $q_{кр}$ будет аналогична формуле (8.11'), но решение задачи устойчивости существенно усложняется.

8.3. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при внешнем давлении

Рассмотрим задачу устойчивости тонкой цилиндрической свободно опертой оболочки, нагруженной внешним гидростатическим давлением (рис. 8.3.). Для получения решения воспользуемся полубезмоментной теорией цилиндрических оболочек.

Согласно кинематическим допущениям этой теории, окружные деформации ε_y и деформации сдвига γ_{xy} срединной поверхности (см. (8.1)) равны нулю:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (8.19)$$

Два уравнения (8.19), связывающие три перемещения (u , v , w), позволяют сократить число неизвестных и ввести функцию Φ (функцию перемещений), такую, что

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \quad (8.20)$$

В этом случае уравнения (8.19) удовлетворяются тождественно.

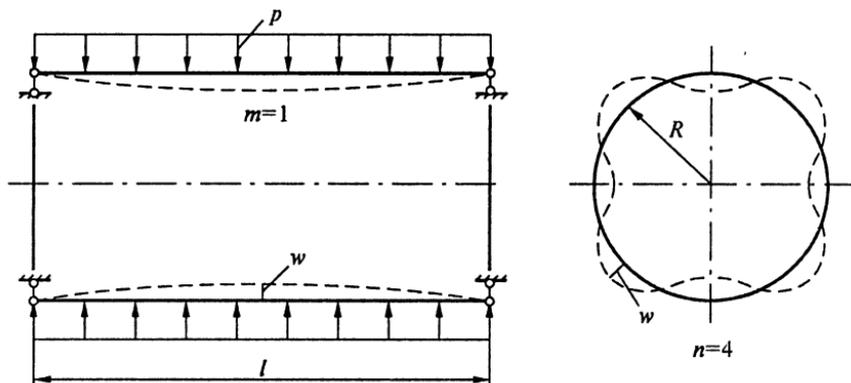


Рис. 8.3

Для свободно опертой цилиндрической оболочки зададим аппроксимацию функции Φ в следующем виде:

$$\Phi = \Phi_{mn} \sin \bar{m}x \sin \bar{n}y, \quad (8.21)$$

где $\bar{m} = m\pi/l$; $\bar{n} = n/R$; $m = 1, 2, \dots$ — число полуволн вдоль образующей; $n = 2, 3, \dots$ — число волн в окружном направлении.

Перемещения u, v, w (8.20) при Φ (8.21) будут выглядеть так:

$$u = \Phi_{mn} \bar{m} \cos \bar{m}x \sin \bar{n}y, \quad v = -\Phi_{mn} \bar{n} \sin \bar{m}x \cos \bar{n}y, \quad (8.22)$$

$$w = -R\bar{n}^2 \sin \bar{m}x \cos \bar{n}y.$$

Получим выражения для деформаций и изменений кривизн. Согласно полубезмоментной теории, кроме допущений (8.19) принимается, что $\alpha_x \ll \alpha_y$, $\alpha_{xy} \ll \alpha_y$, поэтому необходимо определить только ϵ_x и α_y . Воспользовавшись соотношениями (8.1), (8.2), (8.7) и (8.20), (8.21), получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\Phi_{mn} \bar{m}^2 \sin \bar{m}x \sin \bar{n}y, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} = R \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \\ &= \Phi_{mn} \frac{1}{R^3} n^2 (n^2 - 1) \sin \bar{m}x \sin \bar{n}y.\end{aligned}\quad (8.23)$$

Угол поворота нормали в плоскости кольцевого сечения ϑ_y (см. (8.2)) представим в виде

$$\begin{aligned}\vartheta_y &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} = R \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \\ &= -\Phi_{mn} \frac{1}{R^2} n^2 (n^2 - 1) \sin \bar{m}x \cos \bar{n}y.\end{aligned}\quad (8.24)$$

Рассмотрим соотношения упругости (8.5) и (8.6). Поскольку ранее было принято допущение о нерастяжимости оболочки в окружном направлении, погонное окружное усилие T_y автоматически переводится в статический фактор и определяется из уравнений равновесия. Поэтому в соотношениях (8.5) при подсчете T_x следует положить $\mu = 0$. В окончательном виде соотношения упругости, используемые в полубезмоментной теории, выглядят так:

$$T_x = Eh\varepsilon_x, \quad M_y = D\varepsilon_y. \quad (8.25)$$

Прежде чем приступить к вариационной формулировке задачи, отметим, что мы имеем дело не с «мертвой» нагрузкой, а с гидростатическим давлением. Распределенные поверхностные силы остаются всегда нормальными к деформированной поверхности и при переходе к смежному равновесному состоянию дополнительно совершают работу второго порядка малости на изменении объема. Для случая внешнего давления эту работу с учетом допущений полубезмоментной теории можно представить в виде

$$\Delta A_p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^l p v \vartheta_y dx dy. \quad (8.26)$$

Этот результат можно просто получить, если сравнить положительную и отрицательную площади, которые образует элемент MN (длиной dy), если его как жесткое целое переместить на v и повернуть на угол ϑ_y (рис. 8.4). Действительно, при $a_{1,2} = \frac{1}{2} dy \pm v$,

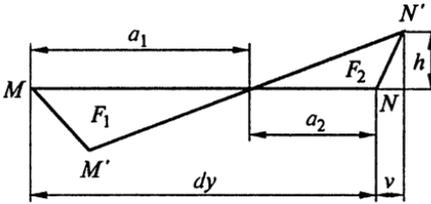


Рис. 8.4

$$h = \frac{1}{2} dy \vartheta_y \text{ получим } \Delta F = F_2 - F_1 = -\frac{1}{2} v \vartheta_y dy.$$

В вариационной формулировке устойчивости следует учесть работу ΔA_p (8.26) и вместо (5.13), (5.21) записать

$$\delta(\Delta W) - \delta(\Delta A_p) = 0. \quad (8.27)$$

В развернутом виде вариационный критерий устойчивости Брайана, соответствующий (8.27), будет выглядеть следующим образом:

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^l \left(T_x \delta \varepsilon_x + M_y \delta \alpha_y + T_y^0 \vartheta_y \delta \vartheta_y - \frac{p}{2} (v \delta \vartheta_y + \vartheta_y \delta v) \right) dx dy = 0, \quad (8.28)$$

где $T_y^0 = -pR$ — начальное окружное погонное усилие от внешнего давления; произведение $\vartheta_y \delta \vartheta_y$ представляет вариацию $\frac{1}{2} \vartheta_y^2$ (см. (8.3)). Возможные дополнительные деформации $\delta \varepsilon_x$, изменение кривизны $\delta \alpha_y$, угол поворота нормали $\delta \vartheta_y$ определяются такими же соотношениями (8.23), (8.24) с заменой амплитудного значения Φ_{mn} на произвольный коэффициент $\delta \Phi_{mn}$, т.е.

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_x &= -\delta\Phi_{mn} \bar{m}^2 \sin \bar{m}x \sin \bar{n}y, \\ \delta\alpha_y &= \delta\Phi_{mn} \frac{1}{R^3} n^2 (n^2 - 1) \sin \bar{m}x \sin \bar{n}y, \\ \delta\vartheta_y &= -\delta\Phi_{mn} \frac{1}{R^2} n (n^2 - 1) \sin \bar{m}x \cos \bar{n}y.\end{aligned}\quad (8.29)$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi R/l} \int_0^l \sin^2 \bar{m}x \sin^2 \bar{n}y \, dx \, dy = \int_0^{2\pi R/l} \int_0^l \sin^2 \bar{m}x \cos^2 \bar{n}y \, dx \, dy = \pi Rl/2,$$

после подстановки (8.23) — (8.25), (8.29) в уравнение (8.28) и интегрирования получим

$$\begin{aligned}\frac{\pi Rl}{2} \Phi_{mn} \delta\Phi_{mn} \left[Eh\bar{m}^4 + \frac{D}{R^6} n^4 (n^2 - 1) - \frac{p}{R^3} n^2 (n^2 - 1)^2 - \right. \\ \left. - \frac{p}{R^3} n^2 (n^2 - 1) \right] = 0.\end{aligned}$$

Отсюда находим выражение для p :

$$p = \frac{EhR^3 \bar{m}^4}{n^4 (n^2 - 1)} + \frac{D(n^2 - 1)}{R^3}. \quad (8.30)$$

Из (8.30) видно, что наименьшее давление (по числу полу-волн в осевом направлении) соответствует случаю, когда $m = 1$. Тогда вместо (8.30) запишем

$$p = \left(\frac{\pi R}{l} \right)^4 \frac{Eh}{R} \frac{1}{n^4 (n^2 - 1)} + \frac{D(n^2 - 1)}{R^3}. \quad (8.31)$$

Критическое давление, при котором происходит потеря устойчивости, определяют из (8.31) минимизацией значения p по числу волн n :

$$p_{кр} = \min(p), \quad (n \geq 2) \quad (8.32)$$

как это показано на рис. 8.5 ($E = 70$ ГПа; $\mu = 0,3$; $h = 1$ мм).

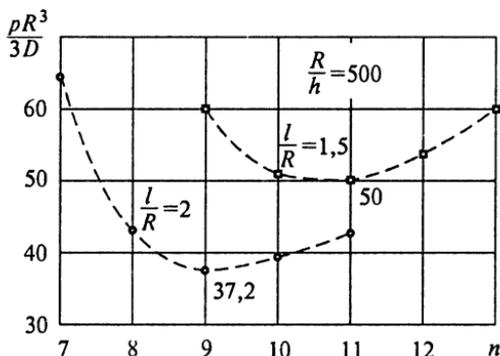


Рис. 8.5

Для длинных оболочек $l/R \gg 1$ и в формуле (8.31) первым слагаемым можно пренебречь. Тогда при $n=2$ получим

$$p_{кр} = \frac{3D}{R^3} \quad (l/R \gg 1). \quad (8.33)$$

Зависимость $p_{кр}$, подсчитанного по (8.31), от различных удлинений оболочки l/R (см. предыдущий пример) представлена на рис. 8.6.

При достаточно большом числе волн $n \gg 2$ можно считать, что $n^2 \approx n^2 - 1 = \eta \gg 1$. Параметр η можно рассматривать как непрерывный и выполнить минимизацию (8.32) аналитически.

Для этого представим структуру зависимости $p(\eta)$ (см. (8.31)) в виде

$$p = \frac{a}{\eta^3} + b\eta, \quad (8.34)$$

где $a = \left(\frac{\pi R}{l}\right)^4 \frac{Eh}{R}$, $b = \frac{D}{R^3}$. Тогда из условия минимума $p(\eta)$ получим

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{3a}{\eta^4} + b = 0, \quad \eta = \left(\frac{3a}{b}\right)^{1/4}.$$

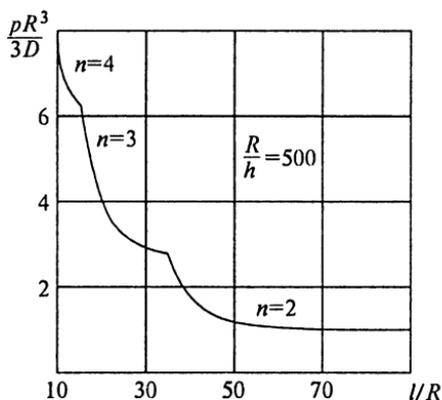


Рис. 8.6

Подстановка найденного значения η в (8.34) будет приближенно определять значение критического давления:

$$p_{кр} = \frac{4}{3}(3a)^{1/4} b^{3/4},$$

или в окончательном виде

$$p_{кр} \approx 5,5 \frac{(Eh)^{1/4} D^{3/4}}{lR\sqrt{R}}, \quad (8.35)$$

при этом число волн в окружном направлении можно оценить так:

$$n_{кр}^2 \approx \eta = \left(\frac{3a}{b}\right)^{1/4} = \pi \frac{R}{l} \left(\frac{Eh}{R}\right)^{1/4} \left(\frac{D}{3R^3}\right)^{-1/4}. \quad (8.36)$$

Полученные формулы (8.35), (8.36) можно применять также к расчету ортотропных оболочек. При этом под Eh следует понимать погонную жесткость стенки оболочки на осевое растяжение, а под коэффициентом D — минимальную погонную жесткость на изгиб в окружном направлении (для ортотропных многослойных материалов D зависит от выбора положения координатной поверхности $z = 0$).

Для изотропного материала при $\mu = 0,3$ получим:
для длинной оболочки (см. (8.33))

$$p_{кр} \approx 0,27 E \left(\frac{h}{R}\right)^3, \quad l \gg R;$$

для оболочек средней длины (8.35) соответствует формуле П.Ф. Панковича:

$$p_{кр} \approx 0,92 E \frac{R}{l} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}.$$

С погрешностью, не превышающей 5 %, свободно опертую по обоим торцам оболочку можно рассчитывать по формуле (8.33) при $l/R > (EhR^2/D)^{1/4}$, в частности, изотропную оболочку — при $l/R > 1,8\sqrt{R/h}$. Если эти неравенства не выполняются, то значения $p_{кр}$ следует находить подбором, используя (8.31),

(8.32), или по формуле (8.35). Различие результатов расчета по (8.32) и (8.35) становится несущественным при $n_{кр} \geq 4$. Нижняя граница удлинения l/R , для которого справедливы полученные выше результаты, определяется допущением о том, что основная часть оболочки находится в безмоментном состоянии. Поэтому для зависимости (8.35) указывают, что она справедлива для оболочек «средней длины».

8.4. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении

Рассмотрим задачу устойчивости цилиндрической оболочки, находящейся в безмоментном, однородном напряженном состоянии:

$$T_x^0 = T_y^0 = 0, \quad S_{xy}^0 = \pm q,$$

где q — равномерно распределенные касательные силы, приложенные к торцам оболочки и создающие в ней крутящий момент $M = \pm 2\pi R^2 q$. Знак начальных погонных касательных сил S_{xy}^0 значения не имеет, поскольку в силу симметрии изменение направления кручения оболочки не может отразиться на абсолютном значении критической нагрузки.

Для решения этой задачи воспользуемся основными соотношениями полубезмоментной теории цилиндрических оболочек. Нормальное и касательные перемещения будут выражаться через функцию перемещений Φ зависимостями (8.20). Для получения приближенного решения задачи нужно задать аппроксимацию функции Φ , которая могла бы качественно отобразить возможную форму потери устойчивости. Простое аналитическое решение удастся получить лишь для длинных оболочек, игнорируя граничные условия на ее торцах. Для описания возможной спиралевидной формы примем Φ в виде

$$\Phi = \Phi_{mn} \sin(\bar{m}x + \bar{n}y), \quad (8.37)$$

где $n = \bar{n}/R$; n — число волн, образующихся в окружном направлении; $\bar{m} = m\pi/l$ можно считать параметром, определяющим шаг спирали, по которой смещаются гребни этих волн вдоль оболочки (рис. 8.7).

Для выбранной функции Φ деформационные соотношения приведут к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\Phi_{mn} \bar{m}^2 \sin(\bar{m}x + \bar{n}y), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} = R \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \\ &= \Phi_{mn} \frac{1}{R^3} n^2 (n^2 - 1) \sin(\bar{m}x + \bar{n}y).\end{aligned}\quad (8.38)$$

Углы поворота нормали ϑ_x , ϑ_y будут представлены в виде

$$\begin{aligned}\vartheta_x &= \frac{\partial w}{\partial x} = R \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} = \Phi_{mn} \frac{1}{R} n^2 \bar{m} \cos(\bar{m}x + \bar{n}y), \\ \vartheta_y &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} = R \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \\ &= -\Phi_{mn} \frac{1}{R^2} n (n^2 - 1) \cos(\bar{m}x + \bar{n}y).\end{aligned}\quad (8.39)$$

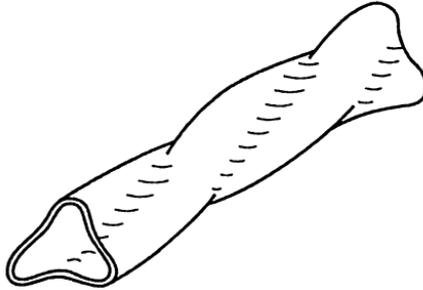


Рис. 8.7

Соотношения упругости определяются выражениями (8.25). Воспользовавшись вариационной формулировкой задачи устойчивости в форме Брайана (5.13), (5.21), для рассматриваемого случая запишем

$$\begin{aligned}\delta(\Delta W) &= \int_0^{2\pi R} \int_0^l (T_x \delta\varepsilon_x + M_y \delta\varepsilon_y + \\ &+ S_{xy}^0 (\delta\vartheta_x \vartheta_y + \delta\vartheta_y \vartheta_x)) dx dy = 0,\end{aligned}\quad (8.40)$$

где $(\delta\vartheta_x \vartheta_y + \delta\vartheta_y \vartheta_x)$ представляет вариацию $\vartheta_x \vartheta_y$ (см. (8.3)).

После подстановки в (8.40) деформационных соотношений (8.38), (8.39), соотношений упругости (8.25) и интегрирования получим

$$\frac{\pi R l}{2} \delta \Phi_{mn} \Phi_{mn} \left[Eh \bar{m}^4 + \frac{D}{R^6} n^4 (n^2 - 1)^2 \pm \frac{2q}{R^3} n^3 (n^2 - 1) \bar{m} \right] = 0.$$

Отсюда

$$\pm q = \frac{EhR^3 \bar{m}^3}{2n^3 (n^2 - 1)} + \frac{Dn(n^2 - 1)}{2R^3 \bar{m}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Поскольку для длинных оболочек параметр \bar{m} естественно считать непрерывно изменяющейся величиной, из условия минимума нагрузки по \bar{m} находим

$$\pm q = \frac{2}{3^{3/4}} (n^2 - 1)^{1/2} \frac{(Eh)^{1/4} D^{3/4}}{R\sqrt{R}}.$$

Наименьшее (по модулю) и, следовательно, критическое значение, определяемое этой формулой, соответствует $n = 2$:

$$q_{кр} \approx 1,5 \frac{(Eh)^{1/4} D^{3/4}}{R\sqrt{R}}. \quad (8.41)$$

Для изотропной оболочки при $\mu = 0,3$ получим

$$q_{кр} \approx 0,25 Eh \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2},$$

что соответствует известной формуле Шверина. Формулой (8.41) можно пользоваться и в случае расчета ортотропных оболочек, если Eh считать погонной жесткостью на осевое растяжение, а D — погонной изгибной жесткостью в окружном направлении.

Из анализа результата, полученного по (8.41), можно сделать вывод о том, что потеря устойчивости длинной цилиндрической оболочки при кручении сопровождается как изгибом в окружном направлении, так и растяжением—сжатием в осевом направлении (напомним, что потеря устойчивости длинной цилиндрической оболочки при внешнем давлении сопровождается только изгибом в окружном направлении).

8.5. Совместное действие осевого сжатия и внешнего давления

Рассмотрим общий подход к решению задачи устойчивости шарнирно опертой цилиндрической оболочки при совместном действии равномерного осевого сжатия и гидростатического внешнего давления.

В качестве основных деформационных соотношений примем следующие выражения:

для мембранных деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\end{aligned}\tag{8.42}$$

для изменений кривизн

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \alpha_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \alpha_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x};\end{aligned}\tag{8.43}$$

для углов поворота нормали

$$\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R}.\tag{8.44}$$

Для решения задачи выберем аппроксимирующие функции, удовлетворяющие граничным условиям шарнирного опирания:

$$\begin{aligned}w &= w_{mn} \sin \bar{m}x \cos \bar{n}y, \\ u &= u_{mn} \cos \bar{m}x \cos \bar{n}y, \\ v &= v_{mn} \sin \bar{m}x \sin \bar{n}y,\end{aligned}\tag{8.45}$$

где $\bar{m} = m\pi/l$; $\bar{n} = n/R$; m — число полуволн в осевом направлении; n — число волн в окружном направлении.

При аппроксимациях (8.45) деформационные соотношения (8.42) — (8.44) дадут следующую связь амплитудных значений

обобщенных деформаций с амплитудными значениями перемещений:

$$\{\mathcal{E}_{mn}\} = [L_{mn}]\{U_{mn}\}, \quad (8.46)$$

или в развернутом виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x mn} \\ \varepsilon_{y mn} \\ \gamma_{xy mn} \\ \varepsilon_{x mn} \\ \varepsilon_{y mn} \\ \varepsilon_{xy mn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{m} & 0 \\ 1/R & 0 & \bar{n} \\ 0 & -\bar{n} & \bar{m} \\ -\bar{m}^2 & 0 & 0 \\ -\bar{n}^2 & 0 & -\bar{n}/R \\ -2\bar{m}\bar{n} & 0 & -\bar{m}/R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{mn} \\ u_{mn} \\ v_{mn} \end{Bmatrix}.$$

Для углов поворота нормали

$$\{\mathcal{S}_{mn}\} = [J_{mn}]\{U_{mn}\}, \quad (8.47)$$

или

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{S}_{x mn} \\ \mathcal{S}_{y mn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m} & 0 & 0 \\ -\bar{n} & 0 & -1/R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{mn} \\ u_{mn} \\ v_{mn} \end{Bmatrix}.$$

Соотношения упругости для ортотропной оболочки запишем в следующей форме:

$$\{\mathcal{N}\} = [\mathcal{D}]\{\mathcal{E}\}, \quad (8.48)$$

или

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ S_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} \\ C_{11} & C_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix},$$

где $(B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} E_{ij}(1, z, z^2) dz$; E_{ij} — коэффициенты упругости.

Для изотропного материала

$$E_{11} = E_{22} = E/(1 - \mu^2), \quad E_{12} = \mu E_{11}, \quad E_{33} = G = E/(2(1 + \mu)),$$

$$B_{11} = B_{22} = \frac{Eh}{1 - \mu^2}, \quad B_{12} = \mu B_{11}, \quad B_{33} = Gh,$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad D_{12} = \mu D_{11}, \quad D_{33} = \frac{Gh^3}{12}; \quad C_{ij} = 0.$$

Для ортотропного материала

$$E_{11} = E_x/(1 - \mu_{xy}\mu_{yx}),$$

$$E_{22} = E_y/(1 - \mu_{xy}\mu_{yx}), \quad E_{12} = \mu_{yx} E_{11}, \quad E_{33} = G_{xy}.$$

Для однослойной ортотропной оболочки

$$B_{11} = \frac{E_x h}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}, \quad B_{22} = \frac{E_y h}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}},$$

$$B_{12} = B_{11}\mu_{yx} = B_{22}\mu_{xy}, \quad B_{33} = G_{xy}h,$$

$$D_{11} = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})}, \quad D_{22} = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})},$$

$$D_{12} = D_{11}\mu_{yx}, \quad D_{33} = G_{xy}h^3/12, \quad C_{ij} = 0.$$

Для многослойной ортотропной оболочки

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N E_{ij}^{[k]}(z_{k+1} - z_k),$$

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N E_{ij}^{[k]} (z_{k+1}^2 - z_k^2),$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N E_{ij}^{[k]} (z_{k+1}^3 - z_k^3),$$

где k — номер слоя; N — число слоев; z_{k+1} , z_k — верхняя и нижняя координаты z k -го слоя.

Работу гидростатического внешнего давления на изменение объема (второго порядка малости) можно представить следующим образом:

$$\Delta A_p = -\frac{p}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi R} (w(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - u\vartheta_x - v\vartheta_y) dx dy, \quad (8.49)$$

где первое слагаемое отражает увеличение объема за счет мембранных деформаций ε_x , ε_y , остальные два связаны с касательными перемещениями и углами поворота и пояснялись ранее (см. рис. 8.4).

С учетом (8.49) вариационную формулировку задачи устойчивости запишем в виде

$$\delta(\Delta W) + \delta(\Delta A_p) = 0,$$

или

$$\int_0^l \int_0^{2\pi R} \left(\{\delta \mathcal{E}\}^T [D] \{\mathcal{E}\} - \{\delta \vartheta\}^T [N_0] \{\vartheta\} + \frac{p}{2} (\{\delta U\}^T \{\Omega\} + \{\delta \Omega\}^T \{U\}) \right) dx dy = 0, \quad (8.50)$$

где

$$\{\mathcal{E}\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_x, \gamma_{xy}, \varkappa_x, \varkappa_y, \varkappa_{xy}]^T;$$

$$\{\vartheta\} = [\vartheta_x, \vartheta_y]^T; \quad \{\Omega\} = [\varepsilon_x + \varepsilon_y, -\vartheta_x, -\vartheta_y]^T;$$

$$[N_0] = \begin{bmatrix} T_x^0 & 0 \\ 0 & pR \end{bmatrix}.$$

Здесь T_x^0 — погонная осевая сжимающая сила. Уравнение (8.50) можно записать через перемещения, для этого нужно воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \{\mathcal{E}\} &= [L]\{U\}, & \{\mathcal{D}\} &= [J]\{U\}, & \{\mathcal{Q}\} &= [T]\{U\}, \\ \{\delta\mathcal{E}\} &= [L]\{\delta U\}, & \{\delta\mathcal{D}\} &= [J]\{\delta U\}, & \{\delta\mathcal{Q}\} &= [T]\{\delta U\}, \end{aligned} \quad (8.51)$$

где матрица $[L]$ определяется соотношениями (8.42), (8.43), а матрица $[J]$ — (8.44);

$$[T] = \begin{bmatrix} 1/R & \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ -\partial/\partial x & 0 & 0 \\ -\partial/\partial y & 0 & 1/R \end{bmatrix}.$$

Если выбрать δu , δv , δw в виде, аналогичном (8.45), то после интегрирования (8.50) получим следующую обобщенную задачу на собственные значения:

$$([K_{mn}] - [S_{mn}])\{U_{mn}\} = 0, \quad (8.52)$$

где

$$[K_{mn}] = [L_{mn}]^T [\mathcal{D}] [L_{mn}];$$

$$[S_{mn}] = [J_{mn}]^T [N_0] [J_{mn}] - p[T_{mn}];$$

$$[T_{mn}] = \begin{bmatrix} 1/R & -\bar{m} & \bar{n} \\ -\bar{m} & 0 & 0 \\ \bar{n} & 0 & 1/R \end{bmatrix}.$$

На рис. 8.8 показана область устойчивости для изотропной оболочки с параметрами $R/h = 500$, $l/R = 2$; $p_{кр}$ и $T_{кр}$ — соответственно критические значения внешнего давления и осевой сжи-

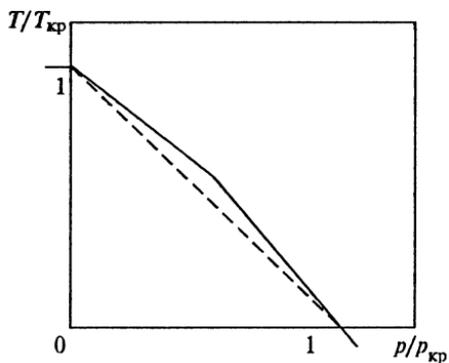


Рис. 8.8

мающей погонной нагрузки, действующих порознь. Отметим, что границу области устойчивости в первом квадранте можно аппроксимировать прямой.

Задачи на собственные значения

Задача на собственные значения для дифференциального уравнения формулируется следующим образом: задано однородное уравнение

$$M[y] - PL[y] = 0, \quad (П.1)$$

где $M[y]$, $L[y]$ — однородные линейные дифференциальные выражения; P — некоторый параметр; граничные условия, заданные при $x = a$ и $x = b$, однородны. Требуется найти собственные значения и собственные функции задачи, т.е. такие значения параметра P_n , при которых данная задача имеет отличные от тождественного нуля решения, и с точностью до масштаба определить функции $y_n(x)$, соответствующие этим значениям P_n .

Порядок дифференциального выражения $M[y]$ обозначим через $2m$ и будем считать, что он выше порядка выражения $L[y]$. Тогда корректно сформулированная задача должна иметь $2m$ линейно-независимых граничных условий. Граничные условия, содержащие производные порядка не выше $(m - 1)$, называют главными граничными (или геометрическими) условиями.

Допустимыми функциями задачи называют m -кратно непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие главным граничным условиям.

Функциями сравнения задачи называют $2m$ -кратно непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие всем заданным граничным условиям (функция сравнения, удовлетворяющая и дифференциальному уравнению, является собственной функцией задачи).

Основные результаты в теории задач на собственные значения получены для самосопряженных и полностью определенных задач. Задачу на собственные значения называют самосопряженной, если для любых двух функций сравнения u и v выполняются условия

$$\int_a^b uM[v]dx = \int_a^b vM[u]dx, \quad \int_a^b uL[v]dx = \int_a^b vL[u]dx. \quad (П.2)$$

Задачу на собственные значения называют полностью определенной, если для любой функции сравнения выполняются неравенства

$$\int_a^b uM[u] dx > 0, \quad \int_a^b uL[u] dx > 0. \quad (\text{П.3})$$

Самосопряженность и полная определенность задачи на собственные значения в каждом конкретном случае могут быть установлены интегрированием по частям.

Сопряженная и полностью определенная задача на собственные значения, не содержащая параметра P в граничных условиях, всегда имеет бесконечный спектр положительных собственных значений, из которых в задачах устойчивости обычно достаточно найти только наименьшее собственное значение, определяющее критическую нагрузку. Бесконечному спектру собственных значений соответствует бесконечная система собственных функций задачи, обладающих следующими важными свойствами.

Свойство обобщенной ортогональности собственных функций состоит в том, что для любых двух собственных функций $y_i(x)$ и $y_k(x)$, соответствующих двум различным собственным значениям P_i и P_k , выполняются условия

$$\int_a^b y_i M[y_k] dx = 0, \quad \int_a^b y_i L[y_k] dx = 0. \quad (\text{П.4})$$

В частности, если $L[y] = y$, то система собственных функций ортогональна в обычном смысле, т.е.

$$\int_a^b y_i y_k dx = 0. \quad (\text{П.5})$$

Система собственных функций обладает свойствами полноты: любую функцию сравнения можно разложить в ряд по собственным функциям, и этот ряд будет равномерно и абсолютно сходиться в интервале (a, b) , для которого сформулирована данная задача.

Для самосопряженной и полностью определенной задачи на собственные значения справедлива теорема о минимуме отношения Рэлея. Согласно этой теореме, минимум отношения Рэлея, определяемого выражением

В матричной форме записи эта система имеет вид

$$[A]\{x\} - P\{x\} = 0, \quad (\text{П.8})$$

где $[A]$ — квадратная матрица коэффициентов заданной системы; $\{x\}$ — вектор-столбец неизвестных x_i .

Условием существования отличных от нуля решений системы однородных линейных уравнений является равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - P & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} - P & \dots & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} - P \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{П.9})$$

В матричной форме записи

$$\det([A] - P[E]) = \det[a_{ij} - P\delta_{ij}] = 0, \quad (\text{П.10})$$

где $[E]$ — единичная матрица; $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Уравнение (П.10) степени N называют характеристическим уравнением; его N корней дадут те значения P_n , при которых возможны отличные от нуля решения исходной системы.

Такого типа задачу называют частной задачей на собственные значения для матрицы, найденные N значений P_n — собственными значениями, а соответствующие им векторы $\{x\}_n$ — собственными векторами матрицы $[A]$.

Кроме частных задач на собственные значения для матриц встречаются общие задачи на собственные значения. В этом случае задают матричное однородное уравнение

$$[A]\{x\} - P[B]\{x\} = 0, \quad (\text{П.11})$$

где $[A]$ и $[B]$ — квадратные матрицы; P — некоторый параметр; $\{x\}$ — вектор-столбец неизвестных.

Тогда условие существования отличных от нуля решений запишется так:

$$\det[a_{ij} - Pb_{ij}] = 0, \quad (\text{П.12})$$

или в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - Pb_{11}) & (a_{12} - Pb_{12}) & \dots & (a_{1N} - Pb_{1N}) \\ (a_{21} - Pb_{21}) & (a_{22} - Pb_{22}) & \dots & (a_{2N} - Pb_{2N}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{N1} - Pb_{N1}) & (a_{N2} - Pb_{N2}) & \dots & (a_{NN} - Pb_{NN}) \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{П.12}')$$

При решении общей задачи на собственные значения из характеристического уравнения (П.12) находят N собственных значений P_n и N соответствующих им собственных векторов $\{x\}_n$. В частной и общей задачах собственные векторы $\{x\}_n$ можно найти только с точностью до постоянного множителя.

Стационарные значения и экстремумы функций и функционалов

Приращение функции нескольких переменных $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть подсчитано с помощью ряда Тейлора:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \dots, \quad (\text{П.13})$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ — приращения независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n ; частные производные берутся в рассматриваемой точке.

Функция имеет минимум, если ее значение в рассматриваемой точке меньше значений во всех достаточно близких точках, т.е. если $\Delta f > 0$ при любых достаточно малых приращениях независимых переменных. Необходимым условием минимума функции является равенство нулю ее первого дифференциала, что эквивалентно равенству нулю всех ее первых частных производных в рассматриваемой точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (\text{П.14})$$

Это условие не является достаточным условием минимума. Для того чтобы функция имела минимум, кроме условия (П.14) в рассматриваемой точке должно еще выполняться условие

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j > 0 \quad (\text{П.15})$$

при любых комбинациях приращений независимых переменных, т.е. условие положительной определенности второго дифференциала. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

$$\dots \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} > 0. \quad (\text{П.16})$$

Если хотя бы одно из последних неравенств обращается в равенство, то для выяснения характера поведения функции в рассматриваемой точке в разложении (П.13) необходимо учесть и исследовать слагаемые, содержащие производные более высокого порядка.

Аналогично формулируются условия максимума функции в точке.

Независимо от знаков второго и высших дифференциалов все точки, в которых выполняется условие (П.14), называют стационарными точками, а значения функции в них — стационарными значениями. В стационарной точке второй дифференциал может оказаться ни положительно, ни отрицательно определенным; в такой стационарной точке функция не имеет

ни минимума, ни максимума. Это так называемая точка минимакса.

Обобщение задачи нахождения стационарных значений и экстремумов функции при нахождении стационарных значений и экстремумов определенных интегралов рассматривается в курсе вариационного исчисления. Возьмем, например, определенный интеграл

$$\Phi = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx, \quad (\text{П.17})$$

где $y = y(x)$. При фиксированных пределах интегрирования и заданном подынтегральном выражении $F(x, y, y', y'')$ значение определенного интеграла зависит от конкретного выбора функции $y = y(x)$. Переменные величины такого типа, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций, называются функционалами.

Понятие вариации имеет в вариационном исчислении такое же фундаментальное значение, как и понятие дифференциала в дифференциальном исчислении. Вариацией функции $y = y(x)$ называют допустимое по условиям данной задачи малое изменение этой функции. Вариацию функции y обозначают δy . Аналогично вводят понятия вариаций первой и высших производных функций; обозначают их соответственно $\delta y'$, $\delta y''$ и т.д. Заметим, что $(\delta y)' = \delta y'$, т.е. символ вариации δ можно выносить за знак дифференцирования.

При варьировании функции $y = y(x)$ и ее производных изменяется значение функционала Φ . Приращение функционала можно представить в виде, аналогичном выражению (П.13):

$$\Delta \Phi = \delta \Phi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Phi + \dots, \quad (\text{П.18})$$

где

$$\delta \Phi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right) dx; \quad (\text{П.19})$$

$$\delta^2 \Phi = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (\delta y')^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} (\delta y'')^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y''} \delta y \delta y'' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y''} \delta y' \delta y'' \right] dx. \quad (\text{П.20})$$

Величина $\delta \Phi$, аналогичная первому дифференциалу функции нескольких переменных, является главной линейной относительно вариаций функции и ее производных составляющей приращения $\Delta \Phi$ и называется первой вариацией функционала Φ . Величина $\delta^2 \Phi$ аналогична второму дифференциалу функции нескольких переменных; эта величина носит название второй вариации функционала Φ .

Основная задача вариационного исчисления формулируется так: среди всех допустимых по условиям данной задачи функций найти такую функцию $y = y(x)$, которая доставляет заданному функционалу экстремальное значение.

Необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его первой вариации:

$$\delta \Phi = 0. \quad (\text{П.21})$$

Условие $\delta \Phi = 0$ называют условием стационарности функционала. Это условие, как и равенство (П.14) для функции нескольких переменных, является необходимым условием максимума или минимума функционала. Как видно из выражения (П.18), стационарное значение функционала будет минимумом, если вторая вариация функционала является положительно-определенной, т.е. если при любых допустимых по условиям задачи вариациях выполняется условие

$$\delta^2 \Phi > 0. \quad (\text{П.22})$$

Аналогично формулируется условие максимума функционала. Из условия стационарности (П.21) может быть получено дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция, доставляющая стационарное значение функционалу, а также те граничные условия, которым она может быть подчинена. Для этого, последовательно интегрируя выра-

жение для первой вариации функционала (П.19) по частям, избавимся от вариаций производных искомой функции под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right) dx = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y \Big|_a^b + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что условие стационарности $\delta\Phi = 0$ выполняется при всех допустимых вариациях искомой функции, если, во-первых,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0, \quad (\text{П.23})$$

во-вторых, если при $x = a$ и $x = b$ выполняются условия

$$\begin{aligned} \delta y = 0, \text{ т. е. } y \text{ задано, либо } \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0, \\ \delta y' = 0, \text{ т. е. } y' \text{ задано, либо } \frac{\partial F}{\partial y''} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

Уравнение (П.23) называют уравнением Эйлера. В данном примере, когда функционал зависит от второй производной искомой функции, это уравнение имеет четвертый порядок и выражения (П.24) дают те четыре граничных условия, какие могут быть заданы при $x = a$ и $x = b$. В общем случае, когда функционал зависит от производных искомой функций до m -го порядка

включительно, уравнение Эйлера имеет порядок $2m$ и соответствующее число граничных условий.

Все сказанное может быть обобщено на функционалы, зависящие от нескольких функций одной или нескольких независимых переменных. Так, если задан функционал

$$\Phi = \int_a^b F(x, u, v, u', v', u'', v'') dx, \quad (\text{П.25})$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$, то его первая вариация определяется выражением, аналогичным выражению (П.19):

$$\begin{aligned} \delta\Phi = \int_a^b & \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' + \right. \\ & \left. + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial F}{\partial v''} \delta v'' \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

Действуя так же, как и в предыдущем примере, можно показать, что функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, доставляющие стационарное значение функционалу, т.е. обеспечивающие выполнение условия $\delta\Phi = 0$, должны удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial u''} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial v''} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{П.27})$$

и соответствующим граничным условиям.

Если функционал зависит от функции нескольких независимых переменных, то условие стационарности приводит к уравнениям в частных производных. Так, если задан функционал

$$\Phi = \iint F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx dy, \quad (\text{П.28})$$

то уравнение Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial (\partial u / \partial x)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial (\partial u / \partial y)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial (\partial^2 u / \partial x^2)} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial (\partial^2 u / \partial y^2)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial (\partial^2 u / \partial x \partial y)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

Если на функции, от которых зависят исследуемые функционалы, наложены некоторые дополнительные условия, то задачу поиска экстремума называют задачей на условный экстремум. Например, можно сформулировать задачу так: найти функцию $y = y(x)$, доставляющую стационарное значение функционалу (П.17) и удовлетворяющую дополнительным интегральным условиям

$$\int_a^b G_i(x, y, y', y'') dx = g_i, \quad (\text{П.30})$$

где g_i — заданные константы, $i = 1, 2, \dots, k$. Решение этой задачи можно получить с помощью метода множителей Лагранжа, отыскивая условия стационарности вспомогательного функционала

$$F^* = \int_a^b F^*(x, y, y', y'') dx. \quad (\text{П.31})$$

Здесь

$$F^* = F(x, y, y', y'') + \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i(x, y, y', y''), \quad (\text{П.32})$$

где λ_i — неизвестные постоянные (множители Лагранжа).

При заданных граничных условиях для определения k множителей Лагранжа λ_j и искомой функции $y = y(x)$ используют k условий связи (П.30) и уравнение Эйлера вспомогательного функционала

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F^*}{\partial y''} = 0. \quad (\text{П.33})$$

Для функционалов, зависящих от нескольких функций, возможны задачи на условный экстремум при дополнительных конечных или дифференциальных связях, накладываемых на искомые функции. Пусть, например, задача сформулирована так: найти условие стационарности функционала

$$\Phi = \int_a^b F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \dots) dx, \quad (\text{П.34})$$

если n искомым функций подчинены дополнительным уравнениям

$$G_j(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \dots) = 0, \quad (\text{П.35})$$

где $j = 1, 2, \dots, k$. Число этих дополнительных уравнений, конечно, должно быть меньше числа искомым функций, т.е. $k < n$. Такую задачу тоже можно решить с помощью метода множителей Лагранжа, отыскивая условия стационарности вспомогательного функционала (П.31), где теперь

$$F^* = F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \dots) + \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j. \quad (\text{П.36})$$

При заданных граничных условиях n искомым функций $y_i = y_i(x)$ и k функций $\lambda_j = \lambda_j(x)$ определяют из системы уравнений Эйлера и k дополнительных уравнений связи (П.35).

Аналогично выглядит метод множителей Лагранжа и в тех задачах на условный экстремум, где искомые функции зависят от нескольких переменных.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Теоремы и критерии устойчивости	6
1.1. Основные понятия и определения	6
1.2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения.	10
1.3. Линеаризация дифференциальных уравнений.	14
1.4. Устойчивость линейных систем.	17
1.5. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению	20
1.6. Теоремы второго метода Ляпунова	22
1.7. Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативных систем.	29
1.8. Критерии устойчивости линейных систем	31
Глава 2. Влияние на устойчивость движения консервативной системы диссипативных и гироскопических сил.	45
2.1. Теоремы Кельвина о влиянии диссипативных сил.	45
2.2. Влияние на устойчивость движения консервативной системы гироскопических сил	49
2.3. Влияние на неустойчивую консервативную систему гироскопических и диссипативных сил.	53
Глава 3. Автоколебательные системы	60
3.1. Предварительные замечания	60
3.2. Флаттер	63
3.3. Шимми	73
Глава 4. Основные понятия теории упругой устойчивости	83
4.1. Диаграммы равновесных состояний деформируемых систем.	83

4.2. Устойчивое и неустойчивое равновесие; критические нагрузки	87
4.3. Способы получения линейаризованных уравнений	93
4.4. Поведение упругих систем после потери устойчивости	99
4.5. О постановке задач устойчивости тонкостенных систем	102
Глава 5. Энергетический метод решения задач устойчивости равновесия	107
5.1. Вариационные подходы в теории упругости . . .	107
5.2. Вариационный критерий потери устойчивости; запись критерия в форме Брайана	117
5.3. Вариационный критерий потери устойчивости в форме Тимошенко	124
5.4. Метод Рэлея — Ритца в задачах устойчивости . .	130
5.5. Метод Галеркина и его связь с методом Рэлея — Ритца	134
Глава 6. Устойчивость прямых стержней.	139
6.1. Постановка задачи; основное линейаризованное уравнение	139
6.2. Примеры аналитического решения основного линейаризованного уравнения	150
6.3. Приближенные решения задач устойчивости стержней; влияние деформаций поперечного сдвига	158
6.4. Устойчивость плоской формы изгиба стержней . .	165
6.5. Поведение стержней после потери устойчивости . .	174
Глава 7. Устойчивость прямоугольных пластин.	183
7.1. Постановка задачи; основное линейаризованное уравнение	183
7.2. Аналитическое решение основного линейаризованного уравнения	191
7.3. Приближенные решения задач устойчивости пластин	201
7.4. Поведение пластин после потери устойчивости . .	210
Глава 8. Устойчивость цилиндрической оболочки.	214
8.1. Постановка задачи; основные исходные зависимости.	214

8.2. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии	217
8.3. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при внешнем давлении	223
8.4. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении	230
8.5. Совместное действие осевого сжатия и внешнего давления	233
Приложение	239
Задачи на собственные значения	239
Стационарные значения и экстремумы функций и функционалов	243

Учебное издание

**Николай Анатольевич Алфутов
Константин Сергеевич Колесников**

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ

Редактор *Е.К. Кошелева*
Корректор *О.В. Калашикова*
Художник *С.С. Водчиц*
Компьютерная верстка *М.В. Самохиной*

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана

Подписано в печать 02.12.2002. Формат 60х90/16. Печать офсетная
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 15,5. Тираж 2000 экз.
Заказ 3751

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 5
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5

Отпечатано с оригинал-макета во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ISBN 5-7038-1472-3



9 785703 814727

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

Адрес: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5

Internet-адрес: <http://www.press.bmstu.ru>

E-mail: press@bmstu.ru

Телефоны: (095) 263-60-45

Факс: (095) 263-60-45, (095) 265-42-98

Проезд: м. «Бауманская», 10 мин. пешком

м. «Авиамоторная», м. «Красные ворота»,
трол. №24 до ост. «Улица радио»

м. «Курская», трамвай №24 до ост.
«Улица Радио»

