



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА
«ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОДДЕРЖКА ИНТЕГРАЦИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ»

— СЕРИЯ —

МЕХАНИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

М.М. Ильин, К.С. Колесников,
Ю.С. Саратов

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Издательство МГТУ
имени Н.Э. Баумана

“Механика в техническом университете”

Серия основана в 1999 году

В восьми томах

Том 4

Ответственный редактор К.С. Колесников

Редакционный совет:

К.С. Колесников (председатель)

Н.А. Алфутов

О.С. Нарайкин

Д.Н. Попов

О.А. Ряховский

В.А. Светлицкий

В.И. Усюкин

К.В. Фролов

И.С. Шумилов

Москва

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

2003

Федеральная целевая программа
«Государственная поддержка интеграции
высшего образования и фундаментальной науки»

М.М. Ильин, К.С. Колесников,
Ю.С. Саратов

Теория колебаний

Под редакцией К.С. Колесникова

Издание второе, стереотипное

*Допущено Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по направлению подготовки дипломированных специалистов
в области машиностроения и приборостроения*

Москва
Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана
2003

УДК 534.1 (075.8)

ББК 22.213

И46

Рецензенты: академик РАН Р.Ф. Ганиев,
д-р техн. наук, проф. Н.Ф. Шклярчук

Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С.

И46 Теория колебаний: Учеб. для вузов / Под общ. ред. К.С. Колесникова. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 272 с., ил.: (Сер. Механика в техническом университете; Т. 4).

ISBN 5-7038–1903-2 (Т. 4)

ISBN 5-7038-1371-9

Изложены основные разделы курса «Теория колебаний». Наиболее полно представлены колебания линейных систем с одной и двумя степенями свободы, которые являются основой для понимания более сложных колебательных процессов. Рассмотрены нелинейные, параметрические колебания и автоколебания в системах с одной степенью свободы, колебания в системах с конечным числом степеней свободы (матричном виде), колебания в системах с распределенными параметрами. Кроме того, для систем с распределенными параметрами даны приближенные методы решения и рассмотрены вопросы распространения волн. Для лучшего усвоения теоретического материала приведены примеры с решениями.

Содержание учебника соответствует программе и курсу лекций, которые авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов вузов и технических университетов машиностроительного и приборостроительного профиля. Книга может быть полезна аспирантам и преподавателям.

УДК 534.1 (075.8)

ББК 22.213

*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Федеральной целевой программы «Государственная
поддержка интеграции высшего образования
и фундаментальной науки»*

ISBN 5-7038-1903-2 (Т. 4)

ISBN 5-7038-1371-9

© Центр «Интеграция», 2001

© М.М. Ильин, К.С. Колесников,

Ю.С. Саратов, 2001

Предисловие

Теория колебаний, к сожалению, еще не стала обязательным предметом при подготовке инженеров-машиностроителей. Однако в последние годы отдельные ее разделы все больше включают в профилирующие инженерные курсы, связанные с управлением машинами и динамическими расчетами. Особенно широко теорию колебаний изучают студенты авиационных и ракетных специальностей.

В первой части учебника на примере механической системы с одной степенью свободы рассмотрены основные процессы теории колебаний, которые изложены подробно и занимают значительную часть книги. Во второй и третьей – более сложные колебательные процессы в системах с конечным числом степеней свободы и распределенными параметрами, принципиально мало отличающиеся от процессов в системах с одной степенью свободы.

Материал в учебнике распределен между авторами следующим образом: введение и главы 4, 8, 9–11 написаны К.С. Колесниковым, им же проведено редактирование книги, главы 1, 2, 5, 6 написаны М.М. Ильиным, главы 3, 7 — Ю.С. Саратовым.

Авторы будут благодарны всем, кто пришлет свои замечания и пожелания по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская, 5, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Введение

Колебательным называется процесс, сопровождающийся многократным чередованием возрастания и убывания некоторых физических величин.

Почти невозможно назвать какие-либо отрасли науки и техники, в которых бы отсутствовали колебательные процессы. Радиотехника и электроника целиком основаны на использовании колебательных процессов. В оптике, акустике, механике, электротехнике — всюду мы встречаемся с колебательными процессами. От неуравновешенности вращающихся роторов возникают колебания строительных конструкций; целый ряд технологических машин, установок и инструментов основаны на использовании колебаний.

Физическая сущность процессов, в которых имеют место колебания, различна. Например, колебания железнодорожного моста и колебания тока в электрическом контуре — совершенно различные явления. Но даже беглое знакомство с законами этих колебаний показывает много общего между ними. Детальный анализ колебательных процессов, встречающихся в физических явлениях и технических устройствах, показывает, что основные законы колебаний во всех случаях одинаковы. Такая универсальность этих законов заставляет выделить изучение их в отдельную дисциплину, которая и носит название *теории колебаний*. Таким образом, задачей курса теории колебаний является изучение с единой точки зрения колебательных процессов, встречающихся в разнообразных физических явлениях и технических устройствах.

Все колебательные процессы можно классифицировать по *кинематическим* признакам, т. е. по характеру закона из-

менения во времени некоторой величины, участвующей в процессе.

Прежде всего все встречающиеся на практике колебательные процессы разделяют на *периодические* и *непериодические*. Кроме того, существенное значение имеют промежуточные почти периодические процессы.

Периодическим называется такой процесс, при котором колебательная величина, взятая в любой момент времени, через определенный отрезок времени T имеет то же самое значение. Математическое определение периодической функции таково: *функция $f(t)$ называется периодической с периодом T , если существует такая постоянная величина T , для которой*

$$f(t+T)=f(t)$$

при любом значении переменной t . Непериодическими называются все остальные функции, не удовлетворяющие сформулированному условию периодичности.

Почти периодическая функция обладает следующим свойством:

$$f(t + \tau) - f(t) \leq \varepsilon$$

при любом t , где τ и ε — постоянные величины. Величина τ , которая вообще есть функция ε , называется *почти периодом*. Если значение ε очень мало по сравнению со средним значением модуля функции $f(t)$ за время τ , то можно считать, что почти периодическая функция на некотором участке практически близка к периодической. Например, функция

$$f(t) = \cos t + \cos(\sqrt{2}t)$$

почти периодическая. Если приближенно полагать $\sqrt{2} = 1,41$, то на ограниченном участке времени t функцию $f(t)$ можно рассматривать как периодическую с периодом, равным 10π .

Среди периодических огромную роль играют *гармонические* колебания, при которых изменение физической величины со временем происходит по закону синуса или косинуса.

Непериодические колебания гораздо разнообразнее периодических. Из них отметим лишь *«затухающую (нарастающую) синусоиду»* и *лимитационные движения*.

Колебания по закону «затухающей синусоиды» или, как их иногда называют, *затухающие гармонические колебания* (рис. В1, а) математически описываются уравнением

$$y = Ae^{-\varepsilon t} \sin(\omega t + \alpha),$$

где $A, \alpha, \varepsilon, \omega$ — постоянные величины, t — время.

Нарастающие гармонические колебания показаны на рис. В1, б и математически уравнение этих колебаний отличается от затухающих гармонических колебаний только знаком величины ε .

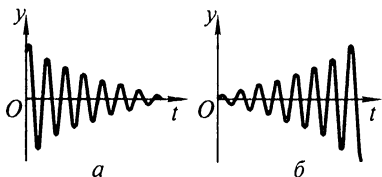


Рис. В1

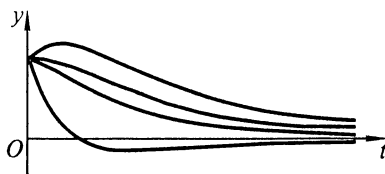


Рис. В2

Характерные примеры лимитационных движений показаны на рис. В2. Переменная величина здесь изменяет знак не более одного раза и с течением времени стремится к некоторому постоянному значению. Математически лимитационные движения могут быть описаны, например, уравнением вида

$$y = (Ae^{-\varepsilon t} + Be^{\varepsilon t})e^{-\lambda t},$$

где $A, B, \varepsilon, \lambda$ — действительные числа, причем $\lambda > \varepsilon$.

Перечисленные чисто внешние признаки колебательных процессов совершенно недостаточны для их изучения. Поэтому принято классифицировать колебательные процессы по ряду признаков.

1. По числу учитываемых в расчетной схеме степеней свободы различают:

- а) колебания в системах с одной степенью свободы;
- б) колебания в системах с конечным числом степеней свободы;
- в) колебания в системах с распределенными параметрами (с бесконечным числом степеней свободы).

2. По типу колебательного процесса выделяют:

- а) свободные колебания;
- б) вынужденные колебания;
- в) параметрические колебания;
- г) автоколебания.

Свободные колебания происходят в изолированной системе после внешнего возмущения. Характер колебательного процесса в основном определяется только внутренними силами системы, зависящими от физического строения системы. Необходимая энергия поступает извне в начальный момент возбуждения колебаний.

Вынужденные колебания происходят под действием заданных внешних переменных сил, которые действуют независимо от колебаний в системе. Характер колебаний определяется не только свойствами системы, но и существенно зависит от внешней силы. Необходимая для колебаний энергия обеспечивается источником внешних сил.

Параметрические колебания отличаются от вынужденных характером внешнего воздействия. При вынужденных колебаниях извне задана сила или какая-либо величина, совершающая колебания, а параметры самой системы остаются при этом постоянными. Параметрические колебания вызываются периодическим изменением извне какого-либо физического параметра системы (например, массы, жесткости).

Автоколебания возникают в системе в отсутствии внешнего периодического воздействия. Характер колебаний определяется исключительно устройством системы. Источник энергии, компенсирующий потери энергии вследствие выделения теплоты при колебаниях, обычно составляет неотъемлемую часть колебательной системы.

Все типы колебательных процессов исследованы для систем с одной степенью свободы; для систем с конечным числом степеней свободы и систем с распределенными параметрами рассмотрены только свободные и вынужденные колебания.

3. По типу дифференциальных уравнений, описывающих колебательный процесс различают:

а) линейные колебания, когда движение описывается линейными дифференциальными уравнениями,

б) нелинейные колебания, для описания движения в которых используются нелинейные дифференциальные уравнения.

Анализ последних усложняется отсутствием регулярных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений. Вместе с тем для технических задач в большинстве случаев достаточно изучения линейных колебаний. Поэтому почти вся книга посвящена рассмотрению линейных колебательных процессов, составляющих фундаментальную основу теории колебаний.

Часть I

СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Глава 1

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

1.1. Дифференциальные уравнения колебаний линейной системы с одной степенью свободы

1.1.1. Основные положения

Рассмотрим *малые колебания* относительно *устойчивого положения равновесия* в системах с одной степенью свободы, описываемых *линейными дифференциальными уравнениями*.

Понятие устойчивого положения равновесия определим для механической системы с n степенями свободы, подчиненной голономным стационарным неосвобождающим связям, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$. В соответствии с принципом возможных перемещений в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0.$$

Для консервативной системы эти условия принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ — потенциальная энергия системы.

Однако положение равновесия может быть *устойчивым*, *неустойчивым* и *безразличным*.



Рис. 1.1

На рис. 1.1 представлены устойчивое (а), неустойчивое (б) и безразличное (в) положения равновесия простейшей механической системы.

При *устойчивом* положении равновесия система после достаточно малого возмущения в виде начальных отклонения и скорости совершает колебания около положения равновесия или стремится к нему. При *неустойчивом* положении равновесия система после начального возмущения при дальнейшем движении все более удаляется от положения равновесия.

Строгое определение понятия устойчивости равновесия было дано в конце XIX века А.М. Ляпуновым. Условимся отсчитывать обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$ от положения равновесия, т. е. считать их в положении равновесия равными нулю. Выведем систему из положения равновесия, сообщив обобщенным координатам в начальный момент времени возмущения (отклонения $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ и скорости $\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \dots, \dot{q}_{n0}$). Обозначим значения обобщенных координат и их скоростей при дальнейшем движении через $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)$ соответственно.

По Ляпунову, *равновесие системы является устойчивым, если для любых сколь угодно малых положительных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n; \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ можно выбрать $2n$ других положительных чисел $\eta_1, \dots, \eta_n; \eta'_1, \dots, \eta'_n$ таких, что при начальных возмущениях системы, удовлетворяющих условиям*

$$|q_{10}| < \eta_1, \dots, |q_{n0}| < \eta_n; |\dot{q}_{10}| < \eta'_1, \dots, |\dot{q}_{n0}| < \eta'_n,$$

при дальнейшем движении системы будут выполняться неравенства

$$|q_1(t)| < \varepsilon_1, \dots, |q_n(t)| < \varepsilon_n; |\dot{q}_1(t)| < \varepsilon'_1, \dots, |\dot{q}_n(t)| < \varepsilon'_n.$$

В противном случае равновесие является *неустойчивым*.

В соответствии с данным определением *безразличное* положение равновесия является неустойчивым, поскольку при наличии начальной скорости система будет удаляться от начального положения.

Если при устойчивом положении равновесия все обобщенные координаты и их скорости с течением времени стремятся к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то рассматриваемое положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*.

Достаточное условие устойчивости положения равновесия консервативной системы определяется **теоремой Лагранжа**: *достаточным условием устойчивости положения равновесия консервативной системы является наличие в нем локального (изолированного) минимума потенциальной энергии*.

В реальной механической системе однако всегда существуют силы сопротивления движению, возникающие благодаря трению или вязкости среды. Такие силы названы Кельвином *диссипативными*.

При наличии в системе диссипативных сил для оценки устойчивости положения равновесия можно дополнительно воспользоваться тремя теоремами Кельвина.

Теорема 1. *Если положение равновесия консервативной системы устойчиво при одних только потенциальных силах, то оно будет оставаться устойчивым и при добавлении диссипативных сил.*

Теорема 2. *Устойчивое положение равновесия становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией*.*

Теорема 3. *Изолированное и неустойчивое при одних потенциальных силах положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами.*

Доказательства теоремы Лагранжа и теорем Кельвина могут быть получены как следствие теоремы Ляпунова об устойчивости движения.

Первые две теоремы Кельвина указывают на то, что диссипативные силы не могут нарушить устойчивость положения равновесия, а третья — что они не в состоянии трансформировать неустойчивое положение равновесия консервативной системы в устойчивое. Следовательно, для оценки устойчивости положения равновесия реальную колебательную систему с диссипативными силами можно заменить ее консервативной моделью.

* Понятие полной диссипации существенно для систем с числом степеней свободы $n > 1$ и будет определено далее.

Отметим, что наличие в механической системе хотя бы одного упругого (деформируемого) тела автоматически превращает ее в систему с бесконечным числом степеней свободы, поскольку у таких тел каждая материальная частица имеет возможность двигаться относительно других материальных частиц и, следовательно, ее движение должно описываться своими обобщенными координатами, а таких частиц бесконечное множество. Для того чтобы механическая система имела конечное число степеней свободы, в частности одну, необходимо, с одной стороны, все инерционные элементы системы считать абсолютно твердыми, а с другой — все упругие элементы (пружины) безынерционными, т. е. считать их массы пренебрежимо малыми по сравнению с массами твердых тел.

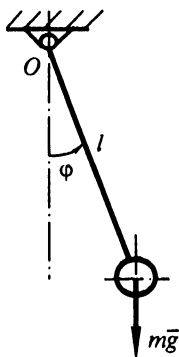


Рис. 1.2

Рассмотрим две простейшие колебательные системы: математический маятник (рис. 1.2) и тело, скрепленное с пружиной (рис. 1.3).

Дифференциальное уравнение движения маятника получим, используя уравнение вращательного движения относительно оси, проходящей через точку подвеса:

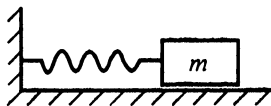


Рис. 1.3

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi ,$$

где $J = ml^2$ — момент инерции маятника относительно оси вращения; m — масса маятника; l — его длина; φ — угол отклонения маятника от вертикали.

Тогда

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 . \quad (1.2)$$

Уравнение движения тела, скрепленного с пружиной, будет иметь вид

$$m\ddot{x} + F'(x) = 0, \quad (1.3)$$

где m — масса тела; x — координата, отсчитываемая от положения, при котором пружина недеформирована; $F'(x)$ — реакция со стороны пружины.

Зависимость $F'(x)$ для цилиндрической пружины растяжения—сжатия представлена на рис. 1.4. При растяжении до больших значений пружина, распрямляясь, постепенно превращается в прут, из которого она была изготовлена, что приводит к увеличению крутизны характеристики $F'(x)$. При сжатии пружины неизбежно наступает момент, когда ее витки вплотную сближаются и пружина трансформируется в цилиндр, что приводит к крутому излому характеристики $F'(x)$.

Получается, что даже эти простейшие колебательные системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, если не сделать допущения о малости колебаний. В соответствии с этим допущением обобщенные координаты, их скорости и ускоре-

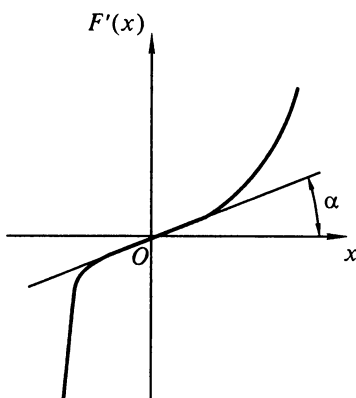


Рис. 1.4

рения предполагаются величинами *первого порядка малости*. При этом в дифференциальных уравнениях учитываются только величины *первого порядка малости*.

Вернемся к рассматриваемым колебательным системам. В уравнении (1.2), согласно сделанному допущению, заменим $\sin \varphi$ на φ . Тогда уравнение, описывающее колебания математического маятника, станет линейным:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Характеристику пружины $F'(x)$ при малых значениях x аппроксимируем наклонной прямой. Тангенс угла наклона α прямой назовем *жесткостью* пружины: $c = \operatorname{tg} \alpha$. Единица измерения жесткости в СИ — ньютон на метр (Н/м).

При сделанном допущении о малых деформациях пружины получаем *линейную восстанавливающую силу*, пропорциональную деформации пружины и направленную против нее, т. е. $F'(x) = cx$. Уравнение (1.3) также становится линейным:

$$m\ddot{x} + cx = 0.$$

Может показаться, что использование допущения о малости колебаний существенно ограничивает возможности решения задач. Однако в большинстве случаев это не так.

Рассмотрим математический маятник и оценим погрешность решения задачи, связанную с допущением о малости колебаний при достаточно больших отклонениях маятника. Пусть максимальный угол отклонения маятника $\varphi_{\max} = 1/2$ рад $\approx 30^\circ$. Поскольку $\sin \varphi = \varphi - (\varphi^3/3!) + \dots$, получаем

$$\sin \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{24} \right),$$

т. е. ошибка при максимальном отклонении маятника составляет около 4 %, а средняя ошибка на интервале отклонения маятника от 0 до $\varphi_{\max}$ равна 1,41 %, что вполне допустимо в инженерной практике.

В механических системах, имеющих пружины, можно всегда, увеличивая число витков, добиться линейной характеристики пружины в заданном диапазоне ее деформаций.

Отметим, что допущение о малости колебаний не гарантирует линейности дифференциального уравнения, описывающего движение колебательной системы. Имеются силы, которые остаются нелинейными при сделанном допущении, например сила сухого трения.

1.1.2. Примеры составления дифференциальных уравнений

Пример 1.1. Тело массой m , подвешенное к пружине AB (рис. 1.5), движется поступательно в вертикальном направлении под действием силы $\bar{F}(t)$, изменяющейся во времени по закону $F(t) = F_0 \sin(pt + \beta)$, преодолевая вязкое сопротивление среды. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний тела.

В соответствии с допущением о малости колебаний, представим зависимость упругой силы в пружине F' от ее деформации λ в виде

$$F'(\lambda) = c\lambda,$$

где c — жесткость пружины.

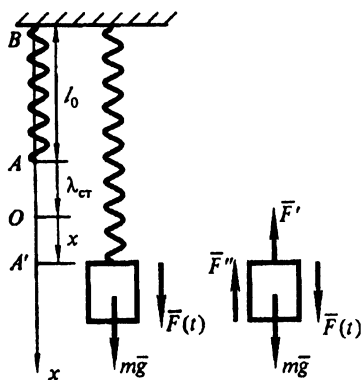


Рис. 1.5

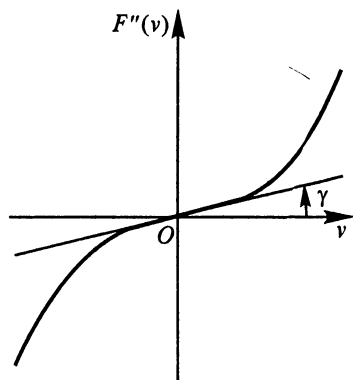


Рис. 1.6

На рис. 1.6 представлена зависимость силы вязкого сопротивления среды от скорости движения в ней тела $F''(v)$. С учетом допущения о малости колебаний аппроксимируем характеристику прямой, тангенс угла наклона γ которой называется **коэффициентом линейного вязкого сопротивления** h . Единица измерения h в системе СИ — ньютон-секунда на метр (Н·с/м). Получаем **линейную силу вязкого сопротивления**

$$F''(v) = hv,$$

всегда направленную против скорости движения тела.

Если $AB = l_0$ (см. рис. 1.5) длина нерастянутой пружины, то AO представляет собой статическое удлинение пружины $\lambda_{\text{ст}}$ под действием силы тяжести тела $m\vec{g}$, равное

$$\lambda_{\text{ст}} = mg/c. \quad (1.4)$$

Будем отсчитывать координату x от положения статического равновесия O . Тогда дифференциальное уравнение поступательного движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = F_0 \sin(pt + \beta) + mg - c(\lambda_{\text{ст}} + x) - h\dot{x}.$$

В силу (1.4) mg и $c\lambda_{\text{ст}}$ взаимно уничтожаются. Окончательно имеем

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + cx = F_0 \sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \sin(pt + \beta), \quad (1.5)$$

где $2\varepsilon = h/m$; $\omega^2 = c/m$; $f_0 = F_0/m$.

Пример 1.2. Математический маятник массой m и длиной l , скрепленный с пружиной жесткостью c , движется под действием горизонтальной силы $\bar{F}(t)$, изменяющейся во времени по закону $F(t) = F_0 \sin(pt + \beta)$ (рис. 1.7). В нижнем положении маятника пружина недеформирована. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний маятника.

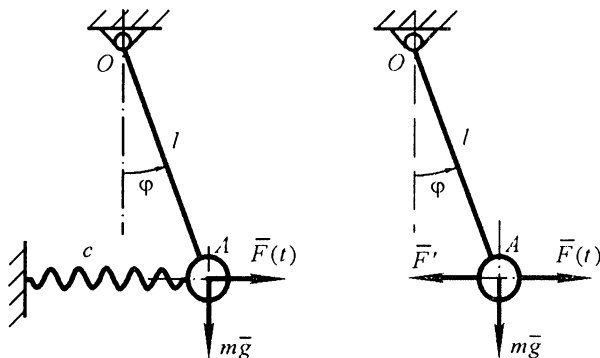


Рис. 1.7

Выберем в качестве координаты угол поворота маятника φ , отсчитываемый от положения равновесия, и составим дифференциальное уравнение вращательного движения маятника:

$$J\ddot{\varphi} = F_0 \sin(pt + \beta)l \cos \varphi - mgl \sin \varphi - F'l \cos \varphi,$$

где $J = ml^2$ — момент инерции маятника; $F' = c\lambda$ — упругая сила в пружине; λ — деформация пружины.

Исходя из допущения о малости колебаний, полагаем $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = \varphi$, а деформацию пружины считаем равной дуговому перемещению точки A , т. е. $\lambda = l\varphi$. Тогда

$$ml^2\ddot{\varphi} + (mgl + cl^2)\varphi = F_0l \sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = f_0 \sin(pt + \beta), \quad (1.6)$$

где $\omega^2 = g/l + c/m$; $f_0 = F_0/(ml)$.

Пример 1.3. Материальная точка (бусинка) массой m закреплена на струне, имеющей предварительное значительное натяжение T (рис. 1.8). Пренебрегая изменением натяжения струны при движении бусинки и массой струны, а также учитывая вязкое сопротивление

среды, составить дифференциальное уравнение колебаний.

Считая колебания малыми, т. е. $x \ll l$, заменим $\sin \alpha$ на x/l . Полагая вязкое сопротивление среды линейным: $F'' = h\dot{x}$, запишем дифференциальное уравнение движения точки в виде

$$m\ddot{x} = -2T \sin \alpha - F'' = -2T \frac{x}{l} - h\dot{x},$$

или

$$\ddot{x} + 2\varepsilon \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.7)$$

Здесь $2\varepsilon = h/m$, $\omega^2 = 2T/(ml)$.

Приведенные примеры показывают, что при сделанном допущении о малости колебаний колебательные системы описываются одинаковыми по структуре линейными дифференциальными уравнениями (1.5) – (1.7).

Эти уравнения могут быть полными как, например, (1.5), либо в них может отсутствовать обобщенная скорость в случае пренебрежения силами вязкого сопротивления (см. (1.6)) или правая часть при отсутствии возмущающей силы (см. (1.7)).

1.1.3. Дифференциальное уравнение малых колебаний в общем случае

В рассмотренных примерах 1.1 – 1.3 для простейших механических систем были использованы прямые способы составления дифференциальных уравнений малых колебаний (дифферен-

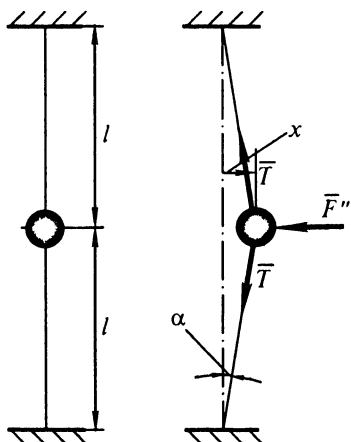


Рис. 1.8

циальные уравнения поступательного и вращательного движения твердого тела, дифференциальное уравнение движения материальной точки). Для более сложных механических систем, включающих в себя несколько связанных между собой тел, при составлении дифференциальных уравнений движения удобнее пользоваться уравнением Лагранжа II рода.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек и имеющую одну степень свободы, на которую наложены голономные стационарные неосвобождающие связи. Предположим, что система имеет устойчивое положение равновесия, от которого будем отсчитывать обобщенную координату q .

В соответствии с допущением о малости колебаний обобщенную координату, ее скорость и ускорение считаем величинами первого порядка малости. В дифференциальных уравнениях движения будем учитывать величины первого порядка малости, а в выражениях для кинетической энергии T , потенциальной энергии Π и вводимой ниже диссипативной функции Рэлея Φ — величины до второго порядка малости, поскольку использование уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \quad (1.8)$$

приводит вследствие дифференцирования к понижению порядка малости на единицу.

В общем случае сила, действующая на k -ю точку системы, может быть функцией положения точки $\bar{r}_k$, ее скорости $\bar{v}_k$ и времени t :

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k(\bar{r}_k, \bar{v}_k, t).$$

С учетом малости колебаний $\bar{F}_k$ можно представить в виде

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k'(\bar{r}_k) + \bar{F}_k''(\bar{v}_k) + \bar{P}_k(t), \quad (1.9)$$

где все позиционные силы $\bar{F}_k'(\bar{r}_k)$ — потенциальные.

Будем считать, что силы $\bar{F}_k''(\bar{v}_k)$ являются *диссипативными*, т. е. уменьшающими полную механическую энергию, и линейно зависящими от скорости:

$$\bar{F}_k''(\bar{v}_k) = -h_k \bar{v}_k. \quad (1.10)$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^2. \quad (1.11)$$

В силу стационарности наложенных на систему связей $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q)$, тогда

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \dot{q}, \quad (1.12)$$

и, следовательно, кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2, \quad (1.13)$$

где $A(q)$, также как и $\bar{r}_k$, в общем случае является функцией обобщенной координаты q .

Разложим $A(q)$ в степенной ряд в окрестности положения равновесия ($q = 0$):

$$A(q) = A(0) + \left(\frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots \quad (1.14)$$

Здесь и далее индексом «0» отмечены величины, вычисленные в положении равновесия.

В силу малости колебаний в выражении (1.13) нужно учитывать величины не выше второго порядка малости, а в (1.13) уже содержится квадрат обобщенной скорости $\dot{q}^2$ — величина второго порядка малости. Поэтому в разложении (1.14) удерживаем только первый член, который обозначаем

$$A(0) = a.$$

Коэффициент a называют **обобщенным инерционным коэффициентом**. Его единица измерения определяется единицей измерения обобщенной координаты: если q — в м, то a — в кг, если q — в рад, то a — в кг · м².

Окончательно имеем

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (1.15)$$

В силу допущения о малости колебаний кинетическая энергия системы является функцией только обобщенной скорости, а следовательно, в уравнении Лагранжа II рода составляющая $\frac{\partial T}{\partial q}$

тождественно равна нулю. Поскольку кинетическая энергия — величина существенно положительная, обобщенный инерционный коэффициент может быть только положительным ($a > 0$).

В силу (1.9) обобщенную силу Q представим в виде

$$Q = Q_{\Pi} + Q_{\mathcal{D}} + Q(t), \quad (1.16)$$

где Q_{Π} — составляющая обобщенной силы от потенциальных сил; $Q_{\mathcal{D}}$ — составляющая обобщенной силы от диссипативных сил; $Q(t)$ — составляющая обобщенной силы от сил, зависящих от времени и действующих извне.

Составляющая обобщенной силы от потенциальных сил

$$Q_{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad (1.17)$$

где $\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы относительно положения равновесия. Так как обобщенная координата также отсчитывается от положения равновесия, то

$$\Pi(0) = 0. \quad (1.18)$$

Разложим потенциальную энергию в степенной ряд в окрестности положения равновесия:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 q + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 q^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right)_0 q^3 + \dots$$

Первый член в разложении $\Pi(q)$ равен нулю в силу (1.18); второй также равен нулю, поскольку в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремум и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 = 0; \text{ четвертый и последующие члены в разложении от-}$$

брасываем, так как в силу предположения о малости колебаний выражение для потенциальной энергии должно содержать члены не выше второго порядка малости.

Обозначим множитель $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0$ через c и назовем его *квазиуп-*

ругим коэффициентом. Единица измерения c определяется единицей измерения обобщенной координаты: если q — в м, то c — в Н/м, если q — в рад, то c — в Н · м.

Окончательно получаем

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} c q^2. \quad (1.19)$$

Достаточным условием устойчивости положения равновесия в соответствии с изложенными выше теоремой Лагранжа и теоремами Кельвина, является локальный минимум потенциальной энергии в положении равновесия. Для этого необходимо равенство нулю первой производной и положительность второй. Тогда условие

$$c > 0 \quad (1.20)$$

является *достаточным* условием устойчивости положения равновесия консервативной колебательной системы с одной степенью свободы.

Составляющая обобщенных сил от диссипативных сил (1.10) равна

$$Q_D = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k'' \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = - \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}.$$

Учитывая вытекающее из (1.12) тождество Лагранжа

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}},$$

получаем

$$Q_D = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^N \frac{h_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^N \frac{h_k v_k^2}{2}.$$

Введем функцию, называемую *диссипативной функцией Рэлея*:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k v_k^2. \quad (1.21)$$

Тогда

$$Q_D = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}. \quad (1.22)$$

Подставим в диссипативную функцию Рэля (1.21) выражение для скорости (1.14):

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2.$$

Поступим с коэффициентом $B(q)$ так же, как с коэффициентом $A(q)$ в выражении для кинетической энергии, т. е. разложим его в степенной ряд в окрестности положения равновесия ($q = 0$), а затем учтем только первый член разложения, поскольку диссипативная функция Рэля, как и кинетическая энергия, уже содержит величину второго порядка малости $\dot{q}^2$.

Обозначим $B(0)$ через b и назовем его *обобщенным диссипативным коэффициентом*. Единица измерения b , также как и коэффициентов a и c , определяется единицей измерения обобщенной координаты: если q — в м, то b — в Н·с/м, если q — в рад, то b — в Н·с·м.

Окончательно имеем

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2. \quad (1.23)$$

Диссипативная функция Рэля по своему определению (см. (1.21)) не может быть отрицательной, однако в частном случае консервативной системы она может равняться нулю при ненулевой скорости обобщенной координаты. Поэтому обобщенный диссипативный коэффициент может быть больше или равен нулю ($b \geq 0$).

Для выяснения механического смысла диссипативной функции Рэля рассмотрим теорему об изменении кинетической энергии для колебательной системы, на которую действуют только потенциальные и диссипативные силы:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{dA_{\Pi k}}{dt} + \sum_{k=1}^N \frac{dA_{Д k}}{dt}, \quad (1.24)$$

где

$$\sum_{k=1}^N \frac{dA_{\Pi k}}{dt} = Q_{\Pi} \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \frac{dq}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt}; \quad (1.25)$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{dA_{Дk}}{dt} = Q_{Д} \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \dot{q} = -B(q) \dot{q} \dot{q} = -2\Phi. \quad (1.26)$$

Подставив (1.25) и (1.26) в (1.23), получим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt} - 2\Phi,$$

или

$$\frac{d(T + \Pi)}{dt} = \frac{dE}{dt} = -2\Phi,$$

где E — полная механическая энергия.

Таким образом, удвоенное значение диссипативной функции Рэлея есть скорость уменьшения полной механической энергии системы.

Составляющую обобщенной силы от сил $\bar{P}_k(t)$, зависящих от времени и действующих на систему извне, можно получить стандартным способом, вычисляя сумму элементарных работ от сил $\bar{P}_k(t)$ на перемещениях, определяемых вариацией обобщенной координаты δq , и относя полученное значение к δq :

$$Q(t) = \frac{\sum_{k=1}^N \delta A_k}{\delta q}. \quad (1.27)$$

С учетом (1.15), (1.16), (1.19), (1.22), (1.24), (1.27) уравнение Лагранжа II рода (1.08) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q(t),$$

откуда следует

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t), \quad (1.28)$$

где $a > 0$; $b \geq 0$; $c > 0$.

Выражение (1.28) представляет собой дифференциальное уравнение движения для любой линейной колебательной системы с одной степенью свободы. Разделив каждый член (1.28) на обобщенный инерционный коэффициент a , получим уравнение в каноническом виде:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a}Q(t), \quad (1.29)$$

где $2\varepsilon = b/a$; $\omega^2 = c/a$.

1.2. Свободные движения

Свободные движения колебательной системы возникают при отсутствии внешнего воздействия ($Q(t) = 0$) вследствие начального возмущения. Дифференциальное уравнение движения в этом случае в соответствии с (1.28) имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0.$$

1.2.1. Свободные колебания консервативной системы

В случае консервативной системы $b = 0$, поэтому дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (1.30)$$

Его решение можно записать в виде

$$q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (1.31)$$

или в другой форме

$$q = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.32)$$

где A и α выражаются через C_1 и C_2 .

Произвольные постоянные C_1 , C_2 или A , α определяют из начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \quad (1.33)$$

Отсюда

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega};$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{q_0 \omega}{\dot{q}_0}. \quad (1.34)$$

Заметим, что при определении α следует учитывать, что если $\dot{q}_0 > 0$, то α находится в I или IV квадранте, а если $\dot{q}_0 < 0$, то во II или III квадранте, и, следовательно, к вычисленному главному значению арктангенса необходимо добавить π . При $\dot{q}_0 = 0$ $\alpha = \pi/2$, если $q_0 > 0$, и $\alpha = -\pi/2$, если $q_0 < 0$.

Зависимость $q(t)$ вида (1.32) представлена на рис. 1.9.

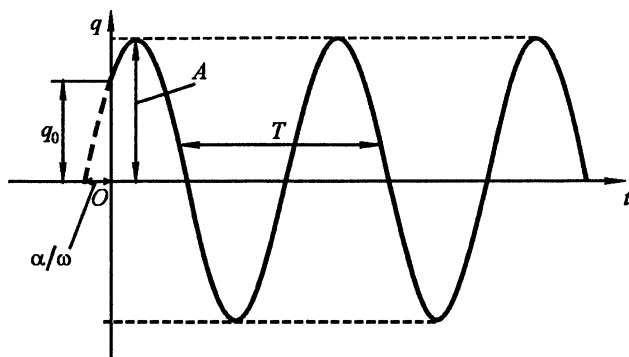


Рис. 1.9

Гармоническими называют такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется во времени по закону синуса или косинуса. Как видно из (1.31) и (1.32), свободные колебания в линейной консервативной системе с одной степенью свободы являются **гармоническими**. Их характеристиками являются:

ω — **круговая или циклическая частота**, измеряемая в радианах в секунду (рад/с);

$\omega t + \alpha$ — **фаза колебаний**;

α — **начальная фаза колебаний**;

A — **амплитуда колебаний**;

T — **период колебаний** — время в секундах, за которое фаза колебаний изменится на 2π (период синуса),

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{a/c}.$$

В инженерной практике используют величину, обратную периоду колебаний называемую частотой колебаний:

$$\nu = 1/T = \omega/2\pi.$$

Единица измерения частоты колебаний — 1 герц (Гц).

Отметим, что круговая частота ω , период T и частота ν колебаний не зависят от начальных условий. Эти характеристики иногда называют собственными (например, собственная частота колебаний). Свойство независимости частоты и периода колебаний от начальных условий (свойство *изохронности* колебаний)

связано с линейностью дифференциального уравнения и, следовательно, с допущением о малости колебаний.

Пример 1.4. В кривошипно-ползунном механизме, расположенном в вертикальной плоскости (рис. 1.10), кривошип OA , представляющий собой однородный стержень длиной $l = 0,49$ м и массой $m_1 = 1$ кг, через шатун AB — также однородный стержень массой $m_2 = 2$ кг — связан с ползуном B массой $m_3 = 1$ кг. С ползуном скреплена пружина, имеющая жесткость c_1 . При вертикальном положении кривошипа OA пружина не деформирована.

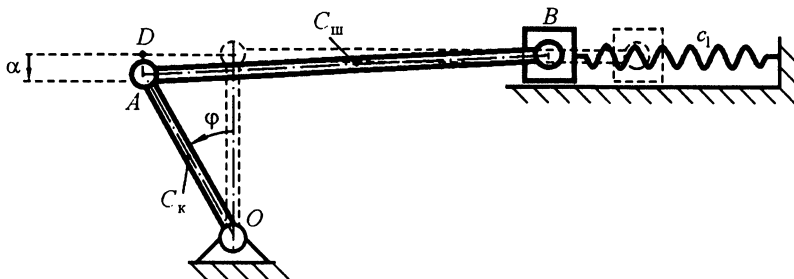


Рис. 1.10

Не учитывая трение в шарнирах и опорах ползуна, а также вязкое сопротивление среды, найти, при какой минимальной жесткости пружины $c_{1кр}$ вертикальное положение кривошипа будет положением устойчивого равновесия. Для значения $c_1 = 2c_{1кр}$ определить характер движения кривошипа, если в начальный момент времени его отклонили на угол, равный 5° , в направлении, противоположном направлению движения стрелки часов и отпустили без начальной скорости.

Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота φ кривошипа, отсчитывая его от вертикали и считая малым.

Кинетическая энергия кривошипа

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{OA} \omega_{OA}^2 = \frac{1}{6} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Шатун AB в положении, соответствующем $\varphi = 0$, совершает мгновенно-поступательное движение. При отклонении кривошипа от вертикали (см. рис. 1.10)

$$AD = OA(1 - \cos \varphi) = AB \sin \alpha.$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$OA \sin \varphi \dot{\varphi} = AB \cos \alpha \dot{\alpha},$$

откуда

$$\omega_{AB} = \dot{\alpha} = \frac{OA \sin \varphi \dot{\varphi}}{AB \cos \alpha}.$$

С учетом малости φ и $\dot{\varphi}$ угловая скорость ω_{AB} будет иметь второй порядок малости, и, следовательно, при вычислении кинетической энергии шатуна его движение можно считать поступательным, т. е. положить

$$v_B = v_C = v_A = l\omega_{OA} = l\dot{\varphi}.$$

Тогда суммарная кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3 \right) l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Отсюда в соответствии с (1.15) обобщенный инерционный коэффициент

$$a = [(m_1/3) + m_2 + m_3] l^2.$$

При вычислении потенциальной энергии (точнее ее изменения по сравнению со значением в положении равновесия) учтем деформацию пружины и опускание центров тяжести кривошипа и шатуна. Так как угол φ мал, деформация пружины $\lambda = l\varphi$. Центры тяжести кривошипа C_K и шатуна $C_{\text{ш}}$ при повороте кривошипа опускаются на высоту

$$h = \frac{1}{2} l (1 - \cos \varphi).$$

Тогда

$$П = \frac{1}{2} \left[c_1 l^2 \varphi^2 - (m_1 + m_2) g l (1 - \cos \varphi) \right].$$

Ограничивая разложение $\cos \varphi$ величинами второго порядка малости:

$$\cos \varphi = 1 - \varphi^2 / 2 ,$$

получаем

$$П = \frac{1}{2} \left[c_1 l^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l \right] \varphi^2 .$$

Отсюда квазиупругий коэффициент в соответствии с (1.19) равен

$$c = c_1 l^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l .$$

Видим, что если при определении кинетической энергии движение шатуна можно считать поступательным, то при вычислении потенциальной энергии необходимо учитывать его поворот.

Согласно (1.20), для устойчивости положения равновесия достаточно, чтобы квазиупругий коэффициент c был положительным. Приравняв c к нулю, находим критическое значение жесткости пружины

$$c_{1кр} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{g}{l}, \quad c_{1кр} = 30 \text{ Н/м} .$$

Следовательно, $c_1 = 2c_{1кр} = 60 \text{ Н/м}$.

Дифференциальное уравнение движения системы при $c > 0$ имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 ,$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{c_1 l^2 - (1/2)(m_1 + m_2) g l}{((1/3)m_1 + m_2 + m_3) l^2}}, \quad \omega = 3 \text{ рад/с} .$$

В соответствии с (1.31) запишем общее решение

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t .$$

Воспользовавшись начальными условиями

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi(0) = \varphi_0 = \frac{\pi}{180} \cdot 5 = 0,087 \text{ рад} ; \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 = 0 .$$

в соответствии с (1.36) находим $C_1 = 0,087 \text{ рад} ; C_2 = 0$ и, следовательно, $\varphi = 0,087 \cos 3t$.

1.2.2. Свободные движения неконсервативной системы

В самом общем случае дифференциальное уравнение свободного движения системы в соответствии с (1.29) имеет вид

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (1.35)$$

где $\varepsilon = b/2a$ — коэффициент затухания, единица измерения которого совпадает с единицей измерения ω .

Представив решение уравнения (1.35) в виде $q = e^{\lambda t}$, получим для определения параметра λ характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega^2 = 0,$$

корни которого имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}. \quad (1.36)$$

Характер движения системы будет существенно зависеть от соотношения между значениями ε и ω .

Возможны три случая:

1) *малое сопротивление* ($\varepsilon < \omega$) — корни уравнения (1.36) являются комплексно-сопряженными;

2) *критическое сопротивление* ($\varepsilon = \omega$) — корни уравнения (1.36) кратные;

3) *большое сопротивление* ($\varepsilon > \omega$) — уравнение (1.36) имеет два вещественных отрицательных корня.

1. Малое сопротивление. В этом случае

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega_1,$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$.

Общее решение дифференциального уравнения (1.35) имеет вид

$$q = e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t),$$

или в амплитудной форме

$$q = A e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t + \alpha). \quad (1.37)$$

При начальных условиях (1.33) получаем

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{\omega_1}; \quad A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{\omega_1} \right)^2}; \quad (1.38)$$

$$\alpha = \arctg \frac{q_0 \omega_1}{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}.$$

При определении α следует учитывать, что при $\dot{q}_0 + \varepsilon q_0 > 0$, α находится в I или IV квадранте, а при $\dot{q}_0 + \varepsilon q_0 < 0$ — во II или III квадранте и, следовательно, к вычисленному главному значению арктангенса необходимо добавить π . При $\dot{q}_0 + \varepsilon q_0 = 0$ $\alpha = \pi/2$, если $q_0 > 0$, и $\alpha = -\pi/2$, если $q_0 < 0$.

Графическое решение (1.37) приведено на рис. 1.11. Оно представляет собой синусоидальную кривую, расположенную между ограничивающими кривыми $Ae^{-\varepsilon t}$ и $-Ae^{-\varepsilon t}$. Колебания такого вида называются *затухающими*.

Не являясь периодическим движением затухающие колебания сохраняют некоторые свойства периодичности. Действительно, решение (1.37) представляет собой произведение двух функций — экспоненты и синусоиды с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Это обстоятельство приводит к чередованию через равный промежуток времени T_1 нулей и максимумов $q(t)$ (см. рис. 1.11.), что позволяет считать затухающие колебания *условно-периодическими*.

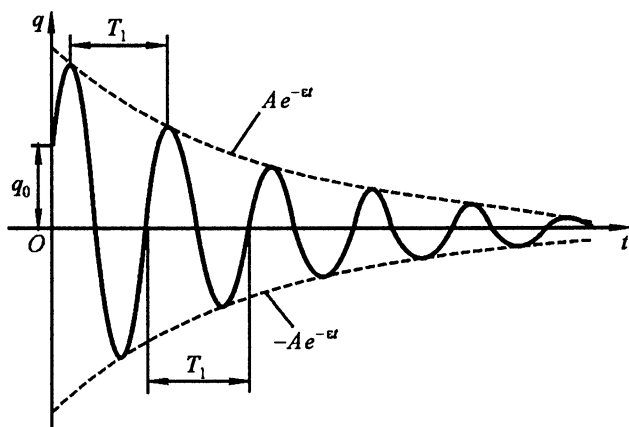


Рис. 1.11

Величину $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$ называют *условным периодом затухающих колебаний*, а ω_1 — *условной частотой затухающих колебаний*. Очевидно, что $T_1 > T$.

Функция $Ae^{-\varepsilon t}$ можно назвать *условной амплитудой* затухающих колебаний. Для любого момента времени она дает оценку сверху для $|q(t)|$.

При малых значениях коэффициента затухания ($\varepsilon \ll \omega$) условная частота затухающих колебаний $\omega_1 \approx \omega$ и аналогично $T_1 \approx T$.

Решение (1.37) показывает, что в системе с линейным вязким сопротивлением колебания затухают только при $t \rightarrow \infty$, что не соответствует опыту наблюдения колебаний в реальных системах, которые всегда заканчиваются за конечный промежуток времени. Это противоречие есть результат того, что в линейных уравнениях в расчетной схеме не учитываются другие виды сопротивлений, кроме линейного вязкого. В гл. 3 будет показано, что, например, учет сил сухого трения приводит к прекращению колебаний через конечный промежуток времени.

Для того чтобы преодолеть это противоречие, введем характеристику $\tau_0 = 1/\varepsilon$, называемую *постоянной времени затухающих колебаний* и измеряемую в секундах.

Рассмотрим последовательность условных амплитуд колебаний, взятых начиная с любого времени t_1 через интервалы времени, равные τ_0 :

$$A_1 = Ae^{-\varepsilon t_1}; \quad A_2 = Ae^{-\varepsilon(t_1 + \tau_0)} = A_1 e^{-1}; \quad A_3 = A_1 e^{-2} \dots$$

Видим, что за каждый промежуток времени, равный τ_0 , условная амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз. Через $3\tau_0$ условная амплитуда уменьшится в e^3 , т. е. примерно в 20 раз. Обычно полагают, что по истечении времени $3\tau_0$ затухающие колебания можно условно считать прекратившимися.

Декрементом колебаний Δ называют отношение двух последовательных, взятых через условный период T_1 амплитудных значений обобщенной координаты. Пусть

$$A_i = Ae^{-\varepsilon t_i} \sin(\omega_1 t_i + \alpha);$$

$$A_{i+1} = Ae^{-\varepsilon(t_i + T_1)} \sin[\omega_1(t_i + T_1) + \alpha] = Ae^{-\varepsilon(t_i + T_1)} \sin(\omega_1 t_i + \alpha),$$

где t_i — время, соответствующее i -му максимуму координаты.

Тогда

$$\Delta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\varepsilon T_1}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний δ называют натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\delta = \ln \Delta = \varepsilon T_1.$$

Логарифмический декремент колебаний удобен для характеристики медленно затухающих колебаний, когда $\varepsilon \ll \omega$. В этом случае изменение максимальных отклонений за условный период мало:

$$\Delta A_i = A_i - A_{i+1} \ll A_i, \quad (1.39)$$

и тогда

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \ln \frac{A_i}{A_i - \Delta A_i} = -\ln \left(1 - \frac{\Delta A_i}{A_i} \right) \approx \frac{\Delta A_i}{A_i}.$$

Как видно, логарифмический декремент колебаний здесь характеризует относительное изменение максимальных отклонений за условный период. Кроме того, он имеет определенный энергетический смысл.

Вычислим изменение полной механической энергии за условный период колебаний. В положениях максимальных отклонений ($\dot{q}(t_i) = 0$) полная механическая энергия определяется потенциальной энергией:

$$E_i = \Pi_i = \frac{c A_i^2}{2}; \quad E_{i+1} = \Pi_{i+1} = \frac{c (A_i - \Delta A_i)^2}{2}.$$

С учетом (1.39) для медленно затухающих колебаний имеем

$$E_{i+1} = \Pi_{i+1} = \frac{c (A_i^2 - 2 A_i \Delta A_i)}{2}.$$

Тогда относительное изменение полной механической энергии системы за условный период колебаний будет

$$\frac{E_i - E_{i+1}}{E_i} = \frac{2 \Delta A_i A_i}{A_i^2} = 2 \frac{\Delta A_i}{A_i} = 2\delta = \psi,$$

где ψ — **коэффициент поглощения энергии за один период (цикл) колебаний.**

2. Критическое сопротивление. В этом случае

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon.$$

При кратных корнях общее решение дифференциального уравнения (1.35) имеет вид

$$q = C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 t e^{-\varepsilon t} = e^{-\varepsilon t} (C_1 + C_2 t). \quad (1.40)$$

Произвольные постоянные определяются из начальных условий (1.33):

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \dot{q}_0 + \varepsilon q_0. \quad (1.41)$$

Решение (1.40) представляет собой произведение экспоненты в отрицательной степени и линейной функции времени. Из математики известно, что экспонента в отрицательной степени убывает быстрее, чем возрастает любая степенная функция. Поэтому решение (1.40) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Решение может обратиться в нуль только единожды, если константы C_1 и C_2 имеют разные знаки. Для этого, согласно (1.41), начальное отклонение и начальная скорость должны иметь разные знаки и при этом должно выполняться условие $|\dot{q}_0| > \varepsilon |q_0|$.

На рис. 1.12 представлено решение (1.40) при различных начальных условиях. Видно, что движение не имеет колебательного характера. Такое движение называют *апериодическим*, а при критическом сопротивлении — *предельно апериодическим*.

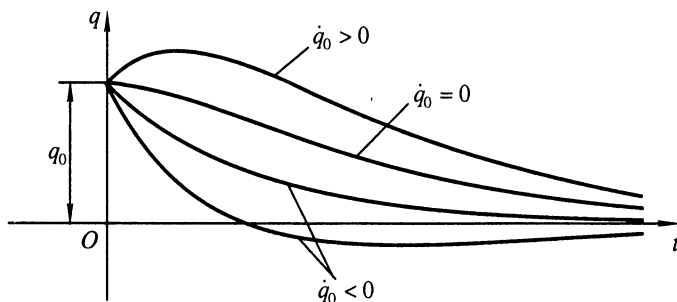


Рис. 1.12

3. Большое сопротивление. Тогда

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm k,$$

где $k = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$. Поскольку $k < \varepsilon$, оба корня характеристического уравнения будут отрицательными.

Общее решение дифференциального уравнения (1.35) в этом случае имеет вид

$$q = e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}).$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из начальных условий (1.33):

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(q_0 + \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{k} \right); \quad C_2 = \frac{1}{2} \left(q_0 - \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{k} \right).$$

Движение в случае большого сопротивления также имеет *апериодический* характер, аналогичный представленному на рис. 1.12, однако с увеличением ε графики растягиваются вдоль оси абсцисс, поскольку с повышением вязкого сопротивления при прочих равных условиях скорость движения убывает.

Пример 1.5. Однородный диск массой $m = 2$ кг (рис. 1.13) может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. С диском скреплены пружина, жесткость которой $c_1 = 435$ Н/м, и демпфер, создающий силу, пропорциональную скорости движения поршня: $\bar{F}''(\bar{v}) = -h\bar{v}$, где $h = 6$ Н·с/м. Центр диска сместили вправо от положения равновесия на 5 см и отпустили без начальной скорости. Определить закон движения центра диска.

Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение q центра диска от положения равновесия (см. рис. 1.13). Тогда кинетическая и потенциальная энергии и диссипативная функция Рэлея имеют вид

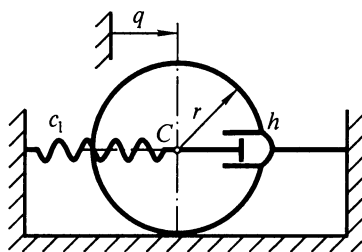


Рис. 1.13

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \frac{m r^2}{2} \left(\frac{\dot{q}}{r} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m \dot{q}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 q^2;$$

$$\Phi = \frac{1}{2} h v^2 = \frac{1}{2} h \dot{q}^2,$$

и, следовательно, в соответствии с (1.15), (1.19) и (1.23)

$$a = \frac{3}{2} m; \quad b = h; \quad c = c_1.$$

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + 2\varepsilon \dot{q} + \omega q = 0,$$

где $\varepsilon = b/2a = h/3m = 1$ рад/с; $\omega = \sqrt{c/a} = \sqrt{2c_1/3m} = 12,04$ рад/с.

Поскольку $\varepsilon < \omega$, имеем случай затухающих колебаний. Условная частота затухающих колебаний $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = 12$ рад/с.

В соответствии с (1.37)

$$q = A e^{-t} \sin(12t + \alpha).$$

Согласно формулам (1.38) определяем A и α из начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad q(0) = q_0 = 0,05 \text{ м;}$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0 = 0;$$

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\varepsilon q_0}{\omega_1} \right)^2} = 0,0501 \text{ м;}$$

$$\alpha = \arctg \frac{\omega_1}{\varepsilon} = 1,487 \text{ рад.}$$

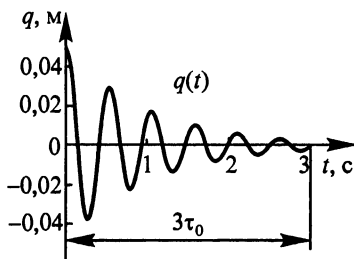


Рис. 1.14

Решение имеет вид

$$q = 0,0501 e^{-t} \sin(12t + 1,487) \text{ м.}$$

Зависимость $q(t)$ на промежутке времени $3\tau_0 = 3/\varepsilon = 3$ с представлена на рис. 1.14. За это время условная амплитуда колебаний уменьшится примерно в 20 раз.

1.3. Вынужденные колебания при гармоническом возбуждении

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы имеет вид (1.28).

В случае, когда обобщенную силу $Q(t)$, характеризующую внешнее воздействие на колебательную систему можно представить в виде

$$Q(t) = Q_0 \sin(pt + \beta), \quad (1.42)$$

где Q_0 — амплитуда обобщенной силы; p, β — ее частота и начальная фаза, т. е. $Q(t)$ изменяется во времени по закону синуса или косинуса, имеет место гармоническое возбуждение колебаний.

1.3.1. Способы возбуждения колебаний. Определение обобщенной силы $Q(t)$

На рис. 1.15 представлены наиболее характерные способы возбуждения вынужденных колебаний.

1. Силовое возбуждение (см. рис. 1.15, а). Математический маятник, связанный с пружиной, находится под воздействием силы $\bar{F}(t)$, где $F(t) = F_0 \sin(pt + \beta)$.

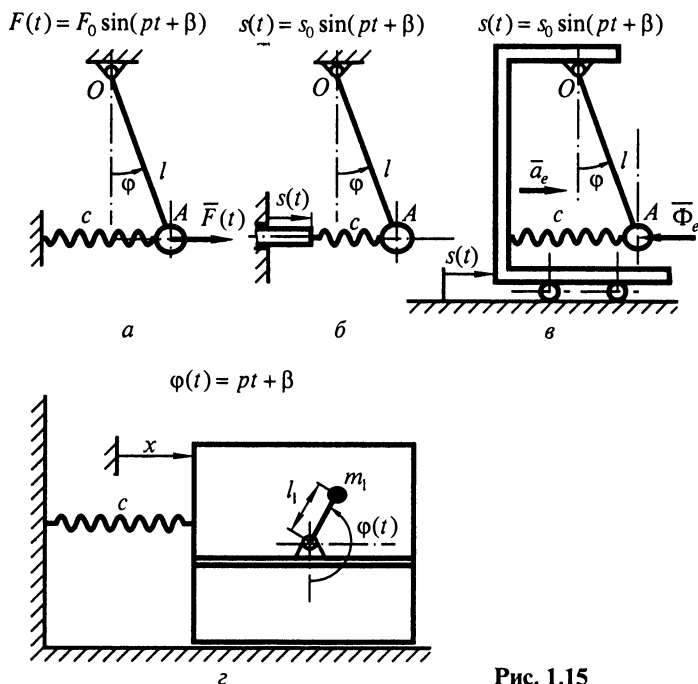


Рис. 1.15

В этом случае для получения $Q(t)$ необходимо задать вариацию обобщенной координаты $\delta\varphi$ и, вычислив возможную работу только от $\bar{F}(t)$, разделить ее на вариацию обобщенной координаты:

$$Q(t) = \frac{F(t)l \cos \varphi \delta\varphi}{\delta\varphi} = F_0 l \sin(pt + \beta) \cos \varphi.$$

С учетом малости угла φ полагаем $\cos \varphi = 1$. Тогда

$$Q(t) = F_0 l \sin(pt + \beta).$$

2. Кинематическое возбуждение (см. рис. 1.15, б). Вынужденные колебания возникают в результате задаваемого извне перемещения точки крепления пружины $s(t) = s_0 \sin(pt + \beta)$.

Изменение условной потенциальной энергии пружины при одновременном перемещении ее обоих концов с учетом малости угла поворота маятника равно

$$\Pi' = \frac{1}{2} c \lambda^2 = \frac{1}{2} c [l\varphi - s(t)]^2.$$

Тогда

$$-\frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi} = -[cl\varphi + cs(t)]l = -cl^2\varphi + cs_0 l \sin(pt + \beta) = Q_{\Pi} + Q(t).$$

Составляющую $-cl^2\varphi$ перенесем в левую часть дифференциального уравнения движения. Оставшаяся справа составляющая $cs_0 l \sin(pt + \beta)$ представляет собой $Q(t)$.

3. Инерционное возбуждение. Рассмотрим два возможных случая.

А. Вынужденные относительные колебания (см. рис. 1.15, в). Пусть маятник связан с подвижным основанием, перемещение которого задается извне. Рассмотрим задачу об исследовании относительных (по отношению к подвижному основанию) колебаний маятника.

Система координат, связанная с подвижным основанием, движется вместе с ним поступательно и прямолинейно, но неравномерно, поэтому при составлении дифференциального уравнения вынужденных относительных колебаний необходимо учитывать переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$, направленную против переносного ускорения. Переносное ускорение считаем сона-

правленным с $s(t)$. Обобщенная сила $Q(t)$ будет определяться переносной силой инерции Φ_e , т. е.

$$Q(t) = \frac{-m\ddot{s}(t)l \cos \varphi \delta \varphi}{\delta \varphi} = mp^2 s_0 l \sin(pt + \beta) \cos \varphi,$$

или с учетом малости угла φ

$$Q(t) = mp^2 s_0 l \sin(pt + \beta).$$

Б. Вынужденные колебания, вызываемые вращающимся эксцентриком (рис. 1.15, з). Пусть с телом массой m , имеющим возможность двигаться поступательно, скреплен эксцентрик, имеющий массу $m_1 \ll m$, эксцентриситет l_1 и вращающийся с постоянной угловой скоростью p . Обозначив через φ угол отклонения эксцентрика от вертикали, выразим $Q(t)$ через проекцию на горизонталь центробежной силы $m_1 p^2 l_1$:

$$Q(t) = \frac{m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta) \delta x}{\delta x} = m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta).$$

Отметим, что при инерционном возбуждении колебаний в отличие от силового и кинематического возбуждения амплитуда обобщенной силы Q_0 пропорциональна p^2 .

Приведенные примеры, естественно, не охватывают все возможные способы возбуждения вынужденных колебаний. Например, возможно возбуждение колебаний вследствие перемещения точки прикрепления демпфера или комбинированное возбуждение колебаний, объединяющее сразу несколько способов.

1.3.2. Вынужденные колебания при отсутствии вязкого сопротивления

Дифференциальное уравнение движения при гармоническом возбуждении в соответствии с (1.28) и (1.42) имеет вид

$$a\ddot{q} + cq = Q_0 \sin(pt + \beta),$$

или в каноническом виде

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(pt + \beta), \quad (1.43)$$

где $f_0 = Q_0/a$.

Представим решение линейного неоднородного уравнения (1.43) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$q = q_{o.o} + q_{ч.н}. \quad (1.44)$$

Общее решение однородного уравнения в соответствии с (1.31), (1.32) имеет вид

$$q_{o.o} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \text{ или } q_{o.o} = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (1.45)$$

Частное решение неоднородного уравнения зависит от соотношения частот собственных колебаний и возмущающей силы. Возможны два случая: отсутствие резонанса $p \neq \omega$ и резонанс $p = \omega$.

1. Отсутствие резонанса ($p \neq \omega$). Представим частное решение в виде

$$q_{ч.н} = G \sin(pt + \beta),$$

где G — искомая величина.

Подстановка $q_{ч.н}$ в (1.43) приводит к соотношению

$$G(\omega^2 - p^2) = f_0,$$

откуда следует

$$G = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2}.$$

В соответствии с (1.44) общее решение уравнения (1.43) будет иметь вид

$$q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta), \quad (1.46)$$

или

$$q = A \sin(\omega t + \alpha) + \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta). \quad (1.47)$$

Произвольные постоянные C_1 , C_2 получим из начальных условий (1.33), используя полное решение (1.46),

$$C_1 = q_0 - \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin \beta; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega} - \frac{f_0 p}{\omega(\omega^2 - p^2)} \cos \beta.$$

Произвольные постоянные A и α при необходимости определим через C_1 и C_2 по формулам

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}.$$

Как видно из (1.46) и (1.47), решение состоит из двух гармонических колебаний с частотами ω и p соответственно. Первое слагаемое с частотой ω можно по аналогии со случаем отсутствия возмущающей силы условно назвать *свободными колебаниями*, а второе, с частотой p , — *вынужденными колебаниями*.

Условность названия «свободные колебания» связана с тем, что определяющие их произвольные постоянные зависят не только от начальных условий $(q_0, \dot{q}_0)$, но и от параметров возмущающей силы (f_0, p, β) , а следовательно, первое слагаемое в решении фактически также определяет вынужденные колебания. Однако данное название все же получило широкое распространение, поскольку лишь второе слагаемое содержит частоту возмущающей силы p , в то время как первое — частоту свободных колебаний (собственную частоту) ω .

В реальных системах, где всегда присутствуют силы вязкого сопротивления, свободные колебания с частотой ω с течением времени затухают, и устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные вынужденные колебания с частотой p , уравнение которых имеет вид

$$q = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta).$$

Если $p < \omega$, то установившиеся вынужденные колебания будут *совпадать по фазе* с возмущающей силой, если же $p > \omega$, то вынужденные колебания будут находиться с ней в *противофазе* (сдвинуты по фазе на π по отношению к возмущающей силе).

Введем *амплитуду* вынужденных колебаний D :

$$D = |G| = \frac{f_0}{|\omega^2 - p^2|}. \quad (1.48)$$

Тогда уравнение установившихся вынужденных колебаний можно будет представить в виде

$$q = D \sin(pt + \beta - \gamma), \quad (1.49)$$

где γ — *сдвиг по фазе* вынужденных колебаний от колебаний возмущающей силы,

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{при } p < \omega; \\ \pi & \text{при } p > \omega. \end{cases}$$

Разделим числитель и знаменатель D на ω^2 . Учитывая, что $f_0/\omega^2 = Q_0/c = D_{\text{ст}}$ есть статическое смещение системы от положения равновесия под действием постоянной силы, совпадающей по величине с амплитудой $Q(t)$, получаем

$$D = D_{\text{ст}} \frac{1}{|1 - z^2|}.$$

Здесь $z = p/\omega$ — *коэффициент расстройки*, или относительная частота возмущающей силы. Величину

$$\lambda = \frac{1}{|1 - z^2|}$$

называют *коэффициентом динамичности*. Коэффициент динамичности показывает во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при гармоническом воздействии больше статического смещения системы от постоянной силы Q_0 .

2. Резонанс. В случае совпадения частоты возмущающей силы с частотой свободных колебаний (собственной частотой) возникает явление резонанса. При отсутствии сил вязкого сопротивления в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний, нарастая во времени, стремится к бесконечности.

Будем искать частное решение уравнения (1.45) при $p = \omega$ в виде

$$q_{\text{ч.н}} = Gt \cos(pt + \beta).$$

Определив $\ddot{q}_{\text{ч.н}} = -2Gp \sin(pt + \beta) - Gtp^2 \cos(pt + \beta)$ и подставив его вместе с $q_{\text{ч.н}}$ в (1.45), получим

$$-2Gp \sin(pt + \beta) = f_0 \sin(pt + \beta).$$

Отсюда $G = -f_0/2p$ и, следовательно,

$$q_{\text{ч.н}} = -\frac{f_0 t}{2p} \cos(pt + \beta) = \frac{f_0 t}{2p} \sin\left(pt + \beta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.50)$$

Видим, что, с одной стороны, вынужденные колебания при резонансе смещены по фазе (запаздывают по фазе) от вынуждающей силы на $\pi/2$. С другой стороны, можно заметить, что вынужденные колебания при резонансе происходят с нарастающей пропорционально времени амплитудой. Зависимость $q_{\text{ч.н}}$ от времени представлена на рис. 1.16.

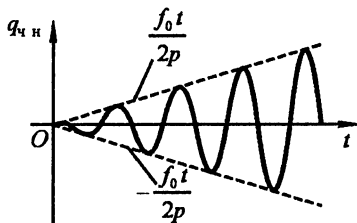


Рис. 1.16

Отметим, что в реальной колебательной системе, во-первых, всегда имеется сопротивление и, во-вторых, при достижении больших размахов колебаний нарушается допущение о малости колебаний и становятся существенными нелинейные восстанавливающие силы. Все это приводит к тому, что амплитуда колебаний при резонансе в реальной колебательной системе хотя и может достигать больших значений, но не является неограниченно возрастающей.

Резонанс, сопровождающийся нарастанием амплитуды колебаний пусть до конечных, но больших значений, может стать причиной разрушения конструкции или возникновения опасных напряжений, сокращающих срок ее службы. Поэтому при проектировании машиностроительных конструкций надо, по возможности, избегать резонанса.

Инерционное возбуждение

В случае инерционного возбуждения колебаний

$$f_0 = \tilde{f}_0 p^2,$$

где $\tilde{f}_0 = Q_0/ap^2$ и измеряется в тех же единицах, что и обобщенная координата.

Тогда, согласно (1.50), амплитуда вынужденных колебаний D имеет вид

$$D = \frac{\tilde{f}_0 p^2}{|\omega^2 - p^2|} = \tilde{f}_0 \frac{z^2}{|1 - z^2|} = \tilde{f}_0 \lambda_{\text{ин}},$$

где $\lambda_{\text{ин}}$ — коэффициент динамичности при инерционном возбуждении колебаний,

$$\lambda_{\text{ин}} = \frac{z^2}{|1 - z^2|}.$$

Коэффициент динамичности $\lambda_{\text{ин}}$ показывает во сколько раз амплитуда колебаний при инерционном возбуждении с конечной частотой p отличается от амплитуды вынужденных колебаний при бесконечно большой частоте $p \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$).

Зависимости коэффициентов динамичности λ и $\lambda_{\text{ин}}$, а также сдвига по фазе γ от коэффициента расстройки z представлены на рис. 1.17. Коэффициенты динамичности λ и $\lambda_{\text{ин}}$ имеют разрывы при $z=1$, что соответствует резонансу. При $z=0$ $\lambda=1$, что соответствует статическому воздействию на систему, а $\lambda_{\text{ин}}=0$, поскольку при нулевой частоте отсутствует инерционное возбуждение. При $z \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$, а $\lambda_{\text{ин}} \rightarrow 1$.

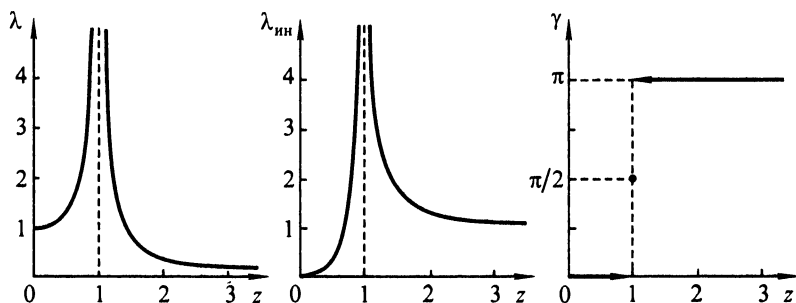


Рис. 1.17

Сдвиг по фазе γ не зависит от способа возбуждения колебаний.

1.3.3. Вынужденные колебания при наличии линейного вязкого сопротивления

Дифференциальное уравнение движения при гармоническом возбуждении имеет вид

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(pt + \beta). \quad (1.51)$$

Решение уравнения (1.51) будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Как было показано в 1.2.2, общее решение однородного уравнения в зависимости от соотношения между ε и ω может быть представлено в одной из трех форм:

$$\begin{aligned} q_{0.o} &= e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \text{ при } \varepsilon < \omega; \\ q_{0.o} &= e^{-\varepsilon t} (C_1 + C_2 t) \text{ при } \varepsilon = \omega; \\ q_{0.o} &= e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}) \text{ при } \varepsilon > \omega, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; ω_1, k определены в 1.2.2.

Частное решение (1.51) получим, воспользовавшись методом комплексных амплитуд.

Известно, что

$$f_0 e^{i(pt+\beta)} = f_0 \cos(pt + \beta) + i f_0 \sin(pt + \beta),$$

где i — мнимая единица, и, следовательно,

$$f_0 \sin(pt + \beta) = \text{Im } f_0 e^{i(pt+\beta)}.$$

Введем вспомогательное уравнение

$$\ddot{y} + 2\varepsilon \dot{y} + \omega^2 y = f_0 e^{i(pt+\beta)}$$

и найдем его частное решение $y_{ч.н.}$. Воспользовавшись линейностью введенного уравнения, для которого справедлив принцип суперпозиции, получим $q_{ч.н.}$ как $\text{Im } y_{ч.н.}$. Задав $y_{ч.н.}$ в виде $y_{ч.н.} = G e^{i(pt+\beta)}$, где G — комплексная амплитуда, получим

$$(\omega^2 - p^2 + 2\varepsilon ip)G = f_0.$$

Отсюда

$$G = \frac{f_0}{(\omega^2 - p^2 + 2\varepsilon ip)} = \frac{f_0}{D^* e^{i\gamma}}.$$

Здесь

$$D^* = \sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon p}{\omega^2 - p^2}. \quad (1.53)$$

Тогда

$$G = D e^{-i\gamma},$$

где

$$D = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}}, \quad (1.54)$$

и, следовательно,

$$y_{\text{ч. н}} = D e^{i(pt + \beta - \gamma)}.$$

Таким образом,

$$q_{\text{ч. н}} = \operatorname{Im} y_{\text{ч. н}} = D \sin(pt + \beta - \gamma), \quad (1.55)$$

причем γ есть фазовое запаздывание (сдвиг по фазе) вынужденных колебаний от колебаний возмущающей силы.

Общее решение (1.51) будет иметь вид

$$\begin{aligned} q &= e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + D \sin(pt + \beta - \gamma) \quad \text{при } \varepsilon < \omega; \\ q &= e^{-\varepsilon t} (C_1 + C_2 t) + D \sin(pt + \beta - \gamma) \quad \text{при } \varepsilon = \omega; \\ q &= e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}) + D \sin(pt + \beta - \gamma) \quad \text{при } \varepsilon > \omega, \end{aligned} \quad (1.56)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий (1.33), с учетом вида решения (1.56).

Структура общих решений (1.52) однородного уравнения такова, что при любых отличных от нуля значениях ε с течением времени из-за наличия множителя $e^{-\varepsilon t}$ они стремятся к нулю, и в решении (1.56) остается только $q_{\text{ч. н}}$. В этом случае говорят об **установившихся вынужденных колебаниях**.

На основании решения (1.55) можно сформулировать основные свойства установившихся вынужденных колебаний:

1) эти колебания являются незатухающими; они длятся так долго, как долго действует возмущающая сила;

2) эти колебания не зависят от начальных условий;

3) при гармоническом возбуждении они происходят с частотой возмущающей силы;

4) установившиеся вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину γ , изменяющуюся, как будет показано ниже, в пределах от 0 до π .

Амплитуда D и фазовое запаздывание γ установившихся вынужденных колебаний в силу (1.53) и (1.54) зависят от соотношения между частотами p и ω и коэффициента затухания ε . Проанализируем эти зависимости, называемые амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками.

Для большей общности результатов перейдем к безразмерным параметрам.

Безразмерным коэффициентом затухания d называют отношение

$$d = 2\varepsilon/\omega.$$

Если $\varepsilon \ll \omega$ и, следовательно, $T_1 \approx T$, то безразмерный коэффициент затухания можно связать с логарифмическим декрементом колебаний:

$$d = \frac{2\varepsilon T_1 T}{\omega T T_1} = \frac{2\varepsilon T_1 T}{2\pi T_1} = \frac{\delta T}{\pi T_1} \approx \frac{\delta}{\pi}.$$

Добротностью D называют величину, обратную к d :

$$D = 1/d = \omega/2\varepsilon.$$

Очевидно, что при малом затухании добротность так же, как и безразмерный коэффициент затухания, может быть выражена через логарифмический декремент колебаний: $D = \pi/\delta$.

Разделив числитель и знаменатель амплитуды (1.54) на ω^2 , получим

$$D = D_{\text{ст}}\lambda,$$

где $D_{\text{ст}} = Q_0/c$, — статическое смещение системы от положения равновесия; λ — коэффициент динамичности,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + d^2 z^2}}; \quad (1.57)$$

$z = p/\omega$ — коэффициент расстройки.

Исследуем зависимость коэффициента динамичности λ от z и d , представляющую собой амплитудно-частотную характеристику системы в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \text{ при } z = 0; \\ \lambda &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty; \\ \lambda &= 1/d = D \text{ при } z = 1. \end{aligned}$$

Видим, что *добротность* D представляет собой коэффициент динамичности при резонансе. Она показывает во сколько раз амплитуда колебаний при резонансе отличается от статического смещения. В отличие от случая, когда вязкое сопротивление отсутствует, амплитуда при резонансе имеет конечное значение. Если частота p изменения возмущающей силы мала по сравнению с частотой ω свободных колебаний, т. е. $p \ll \omega$, то амплитуда вынужденных колебаний близка

к статическому смещению, а коэффициент динамичности близок к единице. Если же частота изменения возмущающей силы значительно больше частоты свободных колебаний, т. е. $p \gg \omega$, то колебательная система ведет себя как фильтр, практически не воспринимая возмущения с частотами, существенно превышающими собственную частоту.

Выражение для коэффициента динамичности (1.57) показывает, что при малых значениях d вязкое сопротивление становится существенным лишь в достаточно узкой зоне в окрестности резонанса,

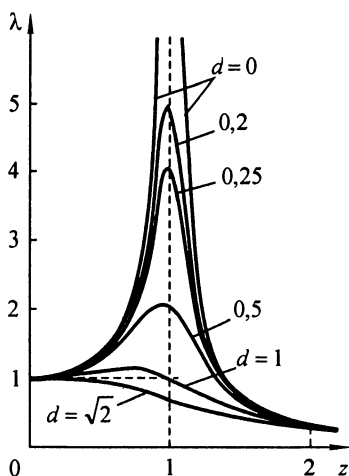


Рис. 1.18

когда $d^2 z^2$ соизмеримо с $(1-z^2)^2$. Это же демонстрирует график $\lambda(z)$ при $d = 0$, приведенный на рис. 1.18. Поэтому

при определении амплитуды вынужденных колебаний в реальных системах с малым вязким сопротивлением его можно не учитывать, если известно, что частота p возмущающей силы далека от собственной частоты ω .

Для определения экстремальных значений коэффициента динамичности достаточно исследовать подкоренное выражение в уравнении (1.57), поскольку его максимум в силу структуры этого уравнения будет соответствовать минимуму λ , и наоборот.

Вычислим производные по z от подкоренного выражения $y(z) = (1 - z^2)^2 + d^2 z^2$:

$$y'(z) = -4z(1 - z^2) + 2d^2 z = 2z(d^2 - 2 + 2z^2);$$

$$y''(z) = 2(d^2 - 2 + 2z^2) + 8z^2 = 12z^2 - 4(1 - d^2/2).$$

Приравняв к нулю $y'(z)$, получим два значения z , соответствующие экстремумам:

$$z_1 = 0; \quad z_2 = \sqrt{1 - d^2/2}.$$

Второе значение имеет место только при $d \leq \sqrt{2}$, а при $d = \sqrt{2}$ оно совпадает с первым.

Если $d < \sqrt{2}$, то вторая производная $y''(z)$ отрицательна при z_1 и положительна при z_2 . Следовательно, z_1 соответствует максимуму $y(z)$ и локальному минимуму $\lambda(z)$, а z_2 — минимуму $y(z)$ и максимуму $\lambda(z)$. Максимальное значение коэффициента динамичности при этом будет равно

$$\lambda(z_2) = \frac{1}{\sqrt{(d^2/2)^2 + d^2 - d^4/2}} = \frac{D}{\sqrt{1 - d^2/4}}.$$

Если $d \geq \sqrt{2}$ остается только одно экстремальное значение при $z_1 = 0$. В этом случае имеют место минимум $y(z)$ и максимум $\lambda(z)$.

На рис. 1.18 представлены кривые, определяющие зависимость $\lambda(z)$ от z при различных значениях коэффициента d . При $d \geq \sqrt{2}$ максимальное значение коэффициента динамичности, равное единице, имеет место при $z = 0$, т. е. амплитуда устано-

вившихся вынужденных колебаний оказывается равной или меньшей статического смещения. При значениях $d < \sqrt{2}$ максимум $\lambda(z)$ оказывается всегда сдвинутым влево от резонанса.

Для исследования фазочастотной характеристики в безразмерном виде разделим числитель и знаменатель аргумента арктангенса (1.53) на ω^2 :

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{(2\varepsilon/\omega)(p/\omega)}{1 - p^2/\omega^2} = \operatorname{arctg} \frac{d \cdot z}{1 - z^2}.$$

Так как производная γ по z независимо от значения d (кроме $d = 0$) положительна при всех значениях z , то $\gamma(z)$ представляет

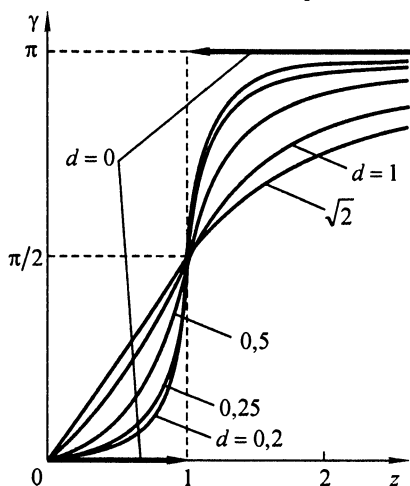


Рис. 1.19

собой монотонно возрастающую функцию, т. е.

$$\gamma = \operatorname{arctg}(0) = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$\gamma = \operatorname{arctg}(\infty) = \pi/2 \text{ при } z = 1;$$

$$\gamma = \operatorname{arctg}(-0) = \pi \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

Отметим, что при резонансе сдвиг по фазе равен $\pi/2$ вне зависимости от значения коэффициента d , характеризующего вязкое сопротивление.

На рис. 1.19 представлены кривые, характеризующие зависимость $\gamma(z)$ при различных значениях d . При $d = 0$ (отсутствие вязкого сопротивления) в

соответствии с полученными выше результатами (см. рис 1.17, в) функция $\gamma(z)$ имеет разрыв. Отметим, что с ростом d изменяется характер фазовой кривой — из кривой с двумя перегибами она трансформируется в кривую с одним перегибом.

В случае инерционного возбуждения колебаний

$$f_0 = \tilde{f}_0 p^2.$$

Тогда

$$D = \tilde{f}_0 \lambda_{\text{ин}},$$

и коэффициент динамичности при инерционном возбуждении

$$\lambda_{\text{ин}} = \frac{p^2}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}} = \frac{z^2}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}}.$$

Для исследования амплитудно-частотной характеристики заменим в этом выражении коэффициент расстройки z на обратную ему величину $\xi = \omega/p$:

$$\lambda_{\text{ин}} = \frac{1/\xi^2}{\sqrt{(1 - 1/\xi^2)^2 + d^2/\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + d^2 \xi^2}}.$$

Полученная зависимость $\lambda_{\text{ин}}(\xi)$ полностью совпадает по структуре с $\lambda(z)$ при силовом и кинематическом возбуждении. Следовательно,

$$\lambda_{\text{ин}} = 0 \text{ при } z = 0, \xi \rightarrow \infty;$$

$$\lambda_{\text{ин}} = 1 \text{ при } z \rightarrow \infty, \xi = 0;$$

$$\lambda_{\text{ин}} = 1/d = D \text{ при } z = 1, \xi = 1.$$

При $d < \sqrt{2}$ максимальное значение $\lambda_{\text{ин}} = D/\sqrt{1 - d^2/4}$ имеет место при $\xi = \sqrt{1 - d^2/2}$ или $z = 1/\sqrt{1 - d^2/2}$, т. е. в отличие от силового и кинематического возбуждения максимальное значение коэффициента динамичности смещено вправо от резонанса.

При $d > \sqrt{2}$ максимальное значение $\lambda_{\text{ин}} = 1$ при $z \rightarrow \infty$.

Зависимость $\lambda_{\text{ин}}(z)$ при различных значениях коэффициента d представлена на рис. 1.20. Как и в случае силового и кинематического возбуждения колебаний, при определении амплитуды вынужденных

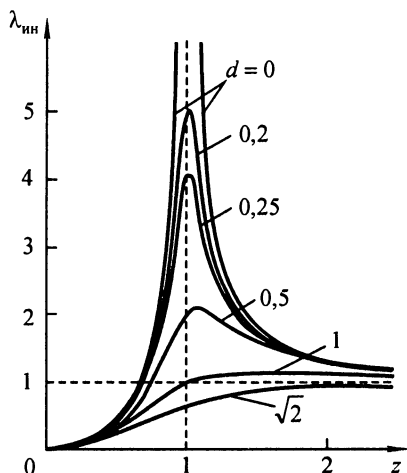


Рис. 1.20

колебаний в реальных системах с малым вязким сопротивлением его можно не учитывать, если известно, что частота p возмущающей силы далека от собственной частоты ω .

Фазочастотная характеристика не зависит от способа возбуждения колебаний (см. рис. 1.19).

1.3.4. Переходные процессы

Важной характеристикой колебательной системы является временная характеристика — изменение колебаний во времени.

Анализ решения (1.56) показывает, что по истечении определенного промежутка времени с начала колебаний свободное движение затухает. Однако оно возникает каждый раз, когда изменяется возмущающая сила. Возникнув, свободное движение осуществляет плавный *переходный процесс* от одного установившегося режима вынужденных колебаний к другому.

Чтобы получить переходный процесс, необходимо зафиксировать значения отклонения и скорости в момент изменения параметров возмущающей силы, а затем, считая эти значения начальными условиями, использовать полное решение (1.56), определив в нем произвольные постоянные:

1.4. Вынужденные колебания в случае периодической возмущающей силы

Часто в технических задачах возмущающая сила является периодической, но негармонической. Это, например, силы, приведенные на рис. 1.21.

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t), \quad (1.58)$$

где $Q(t) = Q(t + T_b)$; T_b — период возмущающей силы.

Ограничимся случаями силового и кинематического возбуждения. Пусть функция $Q(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. она ограничена, имеет разрывы первого рода и конечное число экстремумов на конечном интервале. Тогда $Q(t)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos npt + b_n \sin npt), \quad (1.59)$$

где

$$Q_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_B} \int_0^{T_B} Q(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T_B} \int_0^{T_B} Q(t) \cos npt dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T_B} \int_0^{T_B} Q(t) \sin npt dt; \quad p = 2\pi/T_B; \quad n = 1, 2, \dots,$$

или в амплитудной форме

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(p_n t + \beta_n), \quad (1.60)$$

где $Q_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $p_n = np$; $\beta_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$.

Отдельные члены этого ряда называют **гармониками**. Значениям $n = 1, 2, 3, \dots$ соответствуют гармоники первого, второго, третьего и т. д. порядков.

Подставив (1.60) в (1.58) и разделив почленно на a , получим дифференциальное уравнение в канонической форме:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q =$$

$$= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(p_n t + \beta_n).$$

Решение уравнения, как и в случае гармонической возмущающей силы, можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения, характеризующего свободное движение, и частного решения неоднородного уравнения, характеризующего установившиеся вынужденные колебания.

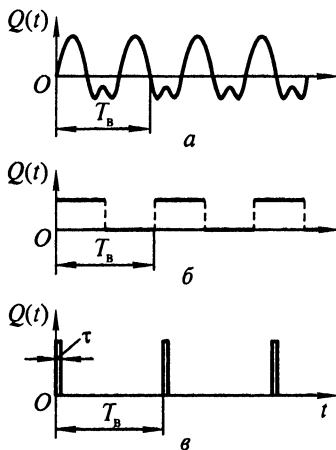


Рис. 1.21

Частное решение представляет собой сумму

$$q_{\text{ч.н}} = q_{\text{ч.н}}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{\text{ч.н}}^{(n)},$$

где $q_{\text{ч.н}}^{(0)} = Q_0/c$ — смещение центра установившихся колебаний от положения равновесия, имеющее место в случае наличия в ряде Фурье «постоянной» составляющей; $q_{\text{ч.н}}^{(n)} = D_n \sin(p_n t + \beta_n - \gamma_n)$; D_n , γ_n — амплитуда и сдвиг фазы n -й гармоники установившихся вынужденных колебаний, определяемые по формулам (1.53), (1.54) с заменой в них p на p_n .

В силу кратности частот установившиеся вынужденные колебания будут периодическими с периодом T_b , однако закон изменения во времени $q_{\text{ч.н}}$ не будет соответствовать закону изменения возмущающей силы. Здесь действуют следующие закономерности. С одной стороны, последовательность амплитуд Q_n представляет собой дискретный линейчатый спектр с тенденцией уменьшения Q_n с ростом n . В зависимости от закона изменения $Q(t)$ ряд Фурье может сходиться как достаточно быстро, например для силы, представленной на рис. 1.21, *а, б*, так и относительно медленно, например в случае импульсной нагрузки, изображенной на рис. 1.21, *в*. Механическая система при этом, как указывалось выше, ведет себя как фильтр. Она пропускает практически без искажения гармоники с частотами, много меньшими собственной частоты ω , усиливает гармоники с частотами, близкими к резонансной, и не пропускает гармоники с частотами, много большими ω . Из-за этого возникают амплитудные искажения. Последнее обстоятельство, кстати, всегда позволяет ограничиться конечным числом гармоник n_0 . С другой стороны, при наличии вязкого сопротивления, фазовые сдвиги у гармоник оказываются различными, что при суммировании также приводит к возникновению фазовых искажений.

При выборе n_0 возможны две ситуации:

1) $p = 2\pi/T_b < \omega$. В этом случае какое-либо значение p_n может оказаться близким к ω (резонансный режим) и вследствие

возрастания λ_n доля этой гармоники в частном решении будет значительно больше остальных, поэтому n_0 должно быть больше n , соответствующего резонансному режиму.

2) $p = 2\pi/T_B > \omega$. В этом случае резонанс невозможен, коэффициенты динамичности монотонно убывают с увеличением n и можно ограничиться достаточно малым n_0 .

Пример 1.6. На тело, скрепленное с пружиной, действует возмущающая сила, изменяющаяся во времени по закону, представленному на рис. 1.22, а, где B — амплитуда силы; T_B — ее период. Определить установившиеся вынужденные колебания для двух случаев: $2\pi/T_B = 0,25\omega$ ($z_1 = 0,25$) и $2\pi/T_B = 1,25\omega$ ($z_1 = 1,25$), если коэффициент, характеризующий вязкое сопротивление среды, равен $d = 0,2$.

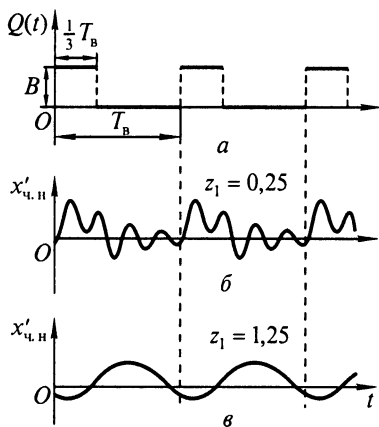


Рис. 1.22

Будем отсчитывать координату x тела от положения равновесия. Пусть $Q'(t) = Q(t)/B$ — безразмерная возмущающая сила. Представим $Q'(t)$, согласно (1.60), в виде ряда

$$Q'(t) = Q'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q'_n \sin(p_n t + \beta_n).$$

Здесь

$$Q'_0 = \frac{1}{T_B} \int_0^{T_B/3} dt = 1/3 = 0,333; \quad p_n = np; \quad p = \frac{2\pi}{T_B};$$

$$Q'_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2}{\pi n} \left| \sin \frac{\pi n}{3} \right|; \quad \beta_n = \arctg(\operatorname{ctg} \pi n/3);$$

$$a_n = \frac{2}{T_B} \int_0^{T_B/3} \cos \frac{2\pi}{T_B} n t dt = \frac{1}{\pi n} \sin \frac{2}{3} \pi n;$$

$$b_n = \frac{2}{T_B} \int_0^{T_B/3} \sin \frac{2\pi}{T_B} n t dt = \frac{1}{\pi n} (1 - \cos \frac{2}{3} \pi n).$$

Очевидно, что для всех гармоник с порядком n , кратным трем, $Q'_n = 0$, а β_n не имеет смысла.

Результаты расчета для первых десяти гармоник приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Значения характеристик установившихся вынужденных колебаний

n	Q'_n	β_n	$z_1 = 0,25$			$z_1 = 1,25$		
			λ_n	$\lambda_n Q'_n$	γ_n	λ_n	$\lambda_n Q'_n$	γ_n
1	0,551	0,524	1,065	0,587	0,053	1,625	0,896	2,723
2	0,276	-0,524	1,322	0,364	0,133	0,190	0,052	3,047
4	0,138	0,524	5,000	0,689	1,571	0,042	0,006	3,100
5	0,110	-0,524	1,625	0,179	2,723	0,026	0,003	3,109
7	0,079	0,524	0,478	0,038	2,973	0,013	0,001	3,118
8	0,069	-0,524	0,330	0,023	3,009	0,010	0,001	3,121
10	0,055	0,524	0,190	0,010	3,047	0,006	0,000	3,125

Частное решение, характеризующее установившиеся вынужденные колебания, представим в виде

$$x_{ч.н} = \frac{BQ'_0}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{BQ'_n}{c} \lambda_n \sin(p_n t + \beta_n - \gamma_n),$$

или, вводя безразмерное перемещение тела $x'_{ч.н} = x_{ч.н} c / B$,

$$x'_{ч.н} = Q'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n Q'_n \sin(p_n t + \beta_n - \gamma_n),$$

где c — жесткость пружины; λ_n — коэффициент динамичности для n -й гармоники.

Результаты расчета λ_n , $\lambda_n Q'_n$ и γ_n для заданных соотношений между периодом возмущающей силы и собственной частотой ω , соответствующим значениям коэффициентов расстройки для первой гармоники $z_1 = 0,25$ и $z_1 = 1,25$, также приведены в табл. 1.1.

При $z_1 = 0,25$ частота четвертой гармоники совпадает с собственной частотой, т. е. имеет место резонанс, что приводит к пре-

валированию $\lambda_4 Q'_4$ над остальными значениями $\lambda_n Q'_n$. Отметим медленное убывание $\lambda_n Q'_n$ с ростом n , даже для десятой гармоники значение $\lambda_{10} Q'_{10}$ составляет $\sim 1,5\%$ от максимального. В общем решении первые четыре гармоники примерно равноправны, что приводит к достаточно сложному процессу изменения $x'_{\text{ч.н}}$ в течение периода колебаний, представленному на рис. 1.22, б.

При $z_1 = 1,25$ резонанс невозможен. Значение $\lambda_1 Q'_1$ существенно больше значений $\lambda_n Q'_n$, что приводит к практически гармоническому изменению $x'_{\text{ч.н}}$ со смещением вверх относительно оси абсцисс, определяемому отклонением от постоянной составляющей силы Q'_0 (рис. 1.22, в).

1.5. Вынужденные колебания при произвольном возбуждении

При отсутствии вязкого сопротивления ($\varepsilon = 0$) дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a} Q(t). \quad (1.61)$$

Используя метод вариации произвольных постоянных представим решение (1.61) в виде

$$q = C_1(t) \cos \omega t + C_2(t) \sin \omega t, \quad (1.62)$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — искомые функции времени.

Дифференцируя по времени, получаем

$$\dot{q} = \dot{C}_1(t) \cos \omega t + \dot{C}_2(t) \sin \omega t - C_1(t) \omega \sin \omega t + C_2(t) \omega \cos \omega t.$$

В соответствии с методом варьирования произвольных постоянных полагаем

$$\dot{C}_1(t) \cos \omega t + \dot{C}_2(t) \sin \omega t = 0. \quad (1.63)$$

Тогда

$$\dot{q} = -C_1(t) \omega \sin \omega t + C_2(t) \omega \cos \omega t. \quad (1.64)$$

Продифференцируем $\dot{q}$ по времени:

$$\begin{aligned} \ddot{q} = & -\dot{C}_1(t) \omega \sin \omega t + \dot{C}_2(t) \omega \cos \omega t - \\ & - \omega^2 [C_1(t) \cos \omega t + C_2(t) \sin \omega t]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Подставив (1.62) и (1.65) в (1.61), имеем

$$-\dot{C}_1(t) \sin \omega t + \dot{C}_2(t) \cos \omega t = \frac{1}{a\omega} Q(t). \quad (1.66)$$

Уравнения (1.63) и (1.66) представляют собой неоднородную алгебраическую систему относительно $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$, невырожденную при любых значениях ω , поскольку определитель этой системы

$$\Delta = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1.$$

Решая систему по способу Крамера, получаем

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{1}{a\omega} Q(t) \sin \omega t; \quad \dot{C}_2(t) = \frac{1}{a\omega} Q(t) \cos \omega t,$$

откуда

$$\begin{aligned} C_1(t) &= H_1 - \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau) \sin \omega \tau d\tau; \\ C_2(t) &= H_2 + \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \end{aligned} \quad (1.67)$$

где τ — время, изменяющееся от 0 до t ; H_1 , H_2 — произвольные постоянные, равные соответственно C_1 и C_2 при $t=0$ и определяемые из начальных условий (1.33).

В соответствии с выражениями (1.62) и (1.64)

$$H_1 = q_0; \quad H_2 = \dot{q}_0 / \omega,$$

где q_0 и $\dot{q}_0$ — начальные отклонение и скорость.

Подставив (1.67) с учетом начальных условий в (1.62), получим

$$\begin{aligned} q &= q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t + \\ &+ \frac{1}{a\omega} \left[\sin \omega t \int_0^t Q(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t Q(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]. \end{aligned}$$

Множители $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, стоящие перед интегралами и независимые от переменной интегрирования τ , можно внести под знаки интегралов:

$$\begin{aligned}
q &= q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t + \\
&+ \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau)(\sin \omega t \cdot \cos \omega \tau - \cos \omega t \cdot \sin \omega \tau) d\tau = \\
&= q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Если сила $Q(t)$ действует на покоящуюся систему ($q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 0$), то решение имеет вид

$$q = \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Слагаемое

$$q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t$$

описывает свободные колебания, возникающие в результате начального отклонения и начальной скорости.

При наличии вязкого сопротивления дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + 2\varepsilon \dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a} Q(t). \tag{1.69}$$

Ограничимся важным для инженерной практики случаем малого вязкого сопротивления ($\varepsilon < \omega$). Сделаем замену переменных

$$q = e^{-\varepsilon t} y, \quad \dot{q} = (\dot{y} - \varepsilon y) e^{-\varepsilon t}; \quad \ddot{q} = (\ddot{y} - 2\varepsilon \dot{y} + \varepsilon^2 y) e^{-\varepsilon t}, \tag{1.70}$$

где y — новая переменная.

Подставив q , $\dot{q}$, $\ddot{q}$ в (1.69), получаем

$$e^{-\varepsilon t} \ddot{y} + (\omega^2 - \varepsilon^2) e^{-\varepsilon t} y = \frac{1}{a} Q(t).$$

Разделив на $e^{-\varepsilon t}$ и учитывая, что $\omega^2 - \varepsilon^2 = \omega_1^2$, находим

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y = \frac{1}{a} Q(t) e^{\varepsilon t}.$$

Решение этого уравнения аналогично решению уравнения (1.61) с заменой ω на ω_1 и $Q(t)$ на $Q(t) e^{\varepsilon t}$:

$$y = H_1 \cos \omega_1 t + H_2 \sin \omega_1 t + \frac{1}{a\omega_1} \int_0^t Q(\tau) e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_1 (t - \tau) d\tau.$$

Умножая полученное уравнение в соответствии с (1.70) на $e^{-\varepsilon t}$ и внося $e^{-\varepsilon t}$ под знак интеграла, имеем

$$q = e^{-\varepsilon t} (H_1 \cos \omega_1 t + H_2 \sin \omega_1 t) + \frac{1}{a\omega_1} \int_0^t Q(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_1 (t - \tau) d\tau, \quad (1.71)$$

где H_1, H_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий (1.33),

$$H_1 = q_0; \quad H_2 = (\dot{q}_0 + \varepsilon q_0) / \omega_1.$$

1.6. Основы теории регистрирующих приборов

Рассмотрим принципы работы некоторых приборов, предназначенных для регистрации переменных во времени физических величин. Ограничимся случаем, когда измеряемая величина является периодической (и, следовательно, может быть представлена в виде суммы гармоник) или, в частном случае, гармонической.

Практически все приборы в качестве одного из основных элементов имеют пружину того или иного типа, деформация которой, порождаемая воздействием измеряемой величины (непосредственно или через систему датчик—усилитель—преобразователь) и определяет показания прибора.

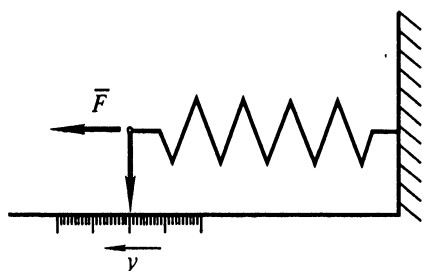


Рис. 1.23

Остановимся на двух типах приборов.

1. Приборы, предназначенные для непосредственного измерения некоторой физической величины. Простейшая схема такого прибора представлена на рис. 1.23, где $\bar{F}$ — сила, определяемая измеряемой величиной x , $y = f(x)$ — показания прибора,

пропорциональные деформации пружины под действием силы $\bar{F}$. В идеале должно выполняться условие $y(t) = Ax(t)$, где A — постоян-

ная величина, т. е. так, как это было бы, если воздействие на прибор было статическим. Поэтому иногда эти приборы называют *квазистатическими*.

Отметим, что получить такой результат очень трудно, практически невозможно, если не ввести ограничения на измеряемые процессы и не подобрать для них прибор. Идеальным прибором такого типа была бы пружина со стрелкой без массы, представленная на рис. 1.23. Однако в действительности и стрелка, и некоторые другие части прибора обладают массой и движутся при измерении физических величин. Поэтому нельзя пренебрегать как инерцией подвижных частей, так и возникающим при движении вязким сопротивлением, т. е. необходимо рассматривать прибор как некоторую колебательную систему с одной степенью свободы, подверженную силовому воздействию от измеряемой величины.

Если обратиться к графикам коэффициента динамичности при силовом возбуждении (см. рис. 1.18) и фазового сдвига (см. рис. 1.19), то окажется, что решение проблемы точности прибора очевидно.

Поскольку коэффициент динамичности при $z = 0$ имеет экстремум, и, следовательно, в некоторой окрестности $z = 0$ изменяется достаточно слабо, можно потребовать, чтобы, во-первых, частота собственных колебаний прибора значительно превышала максимальную частоту учитываемых гармоник в разложении в ряд периодической измеряемой величины. Тогда коэффициент динамичности по всем учитываемым гармоникам будет примерно равен единице, что исключит амплитудные искажения, на которые указывалось выше в § 1.4. Во-вторых, необходимо чтобы фазовые сдвиги по любой из учитываемых гармоник были близки к нулю (т. е. исключить фазовые искажения). Для этого прибор должен иметь как можно большую добротность D и, соответственно, как можно меньший безразмерный коэффициент затухания d .

Однако нельзя использовать приборы с большой добротностью, если реальные регистрируемые процессы не являются чисто периодическими, поскольку возникающие в этом случае свободные колебания (переходные процессы) будут затухать очень медленно и совершенно искажать показания прибора. Поэтому приходится выбирать достаточно малые близкие к единице значения добротности.

Что касается первого условия, то оно, в целом, выполнимо при регистрации относительно низкочастотных процессов. В случае высокочастотных процессов, в силу естественной ограниченности собственной частоты прибора, необходимо увеличивать зону в окрестности $z = 0$, в которой коэффициент динамичности незначительно отличается от единицы.

На графике, приведенном на рис. 1.18, видно, что при значениях добротности, близких к единице, зона малых амплитудных отклонений значительно расширяется. Наилучший результат получается при $D = 0,91$ (рис. 1.24), когда отклонение коэффициен-

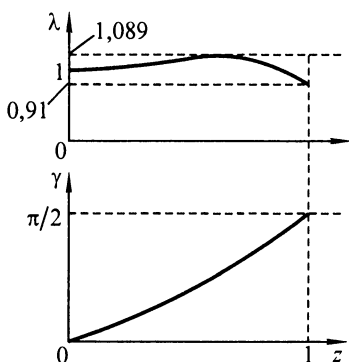


Рис. 1.24

та динамичности от единицы на всем диапазоне z от 0 до 1 не превышает 9 %. Но максимальное значение фазового сдвига на этом диапазоне будет достигать $\pi/2$, или 90° , а это недопустимо. Даже при использовании половины ширины области (до $z = 0,5$), максимальный сдвиг по фазе для высшей гармоники будет составлять $30-35^\circ$.

В некоторых случаях такие искажения можно допустить, но их надо иметь в виду. Например, при регистра-

ции гармонических колебаний записанные показания прибора будут сдвинуты по отношению к регистрируемому процессу по фазе (отставать от него) на величину, которую можно определить по паспорту прибора. При регистрации же периодических (полигармонических) процессов приходится идти на компромисс между искажениями по фазе и по амплитуде, несколько увеличивая добротность прибора. При этом, тем не менее, если есть такая возможность, надо всегда стремиться к уменьшению диапазона измеряемых частот по отношению к собственной частоте прибора, поскольку при $z_{n\max} = 0,1$ добротность прибора практически не влияет на амплитудные искажения и совсем мало влияет на фазовые.

2. Приборы, используемые для замера вибраций подвижных объектов (автомобилей, железнодорожных вагонов, самолетов и

т. д.). Иногда их называют *сейсмическими*, поскольку они построены по такому же принципу, что и *сейсмографы* — приборы для регистрации колебаний земной коры.

Проблема состоит в том, что необходимо измерить абсолютные колебания изучаемого объекта, т. е. его колебания относительно некоторой «неподвижной» системы отсчета, не имея возможности опереться на нее. Следовательно, в приборе должно быть тело, покоящееся относительно «неподвижной» системы отсчета, чтобы измерять колебания исследуемого объекта относительно этого тела.

Таким телом отсчета может служить тело A , упругоскрепленное с исследуемым объектом B (рис. 1.25). В соответствии с графиком коэффициента динамичности при кинематическом возбуждении (см. рис. 1.18), при $z \gg 1$ (т. е. когда собственная частота колебаний тела на пружине — собственная частота прибора — существенно меньше частоты низшей гармоники) коэффициент динамичности $\lambda \approx 0$, т. е. тело A остается практически неподвижным. В этом случае запись движения объекта относительно тела с точностью до знака будет соответствовать колебаниям объекта.

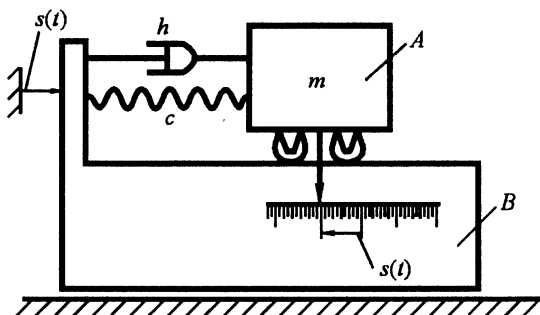


Рис. 1.25

Таким образом, в сейсмических приборах соотношение между собственной частотой и частотами регистрируемых гармоник обратно тому, которое имеет место в квазистатических приборах.

Вопрос о выборе добротности решают так же, как и для квазистатических приборов.

1.7. Основы виброзащиты

Проблемы, связанные с защитой от вредного воздействия вибраций (*виброзащитой*), рассмотрим на простейших примерах системы с одной степенью свободы, представляющей собой тело массой m , совершающее вынужденные прямолинейные колебания.

Необходимость виброзащиты возникает в двух случаях:

1) когда необходимо уменьшить воздействие вибраций, возникающих в процессе работы на фундамент какой-либо машины;

2) когда нужно защитить какое-либо устройство (экипаж, прибор и т. д.) от вредного воздействия вибраций, возникающих при транспортировке или являющихся результатом работы находящихся рядом машин.

В первом случае возмущающая сила приложена непосредственно к телу (рис. 1.26, *а*) — силовое возбуждение колебаний, во втором (рис. 1.26, *б*) имеет место кинематическое возбуждение колебаний из-за вибрации основания.

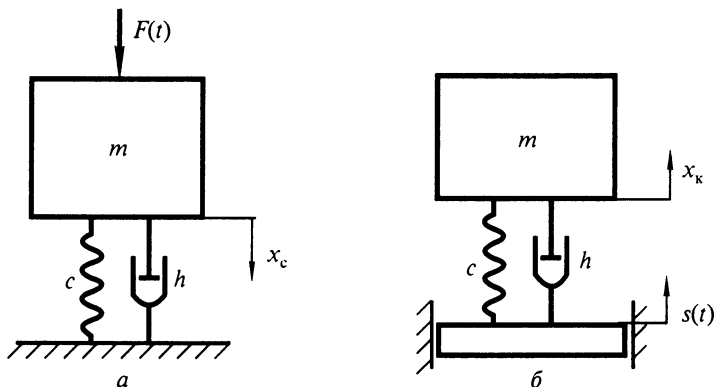


Рис. 1.26

При силовом возбуждении необходимо, чтобы воздействие на фундамент было по возможности малым. Поскольку станки, двигатели или другие аналогичные машины, создающие в процессе работы вибрации, устанавливают на фундамент, как правило, через амортизирующие подушки (прокладки), изготовленные из специальных сортов резины, обладающей помимо упругости

большим внутренним неупругим сопротивлением, эти подушки можно аппроксимировать пружиной жесткостью c и демпфером с коэффициентом вязкого сопротивления h (см.рис. 1.26, *а*). Тогда динамическое воздействие на фундамент будет равно

$$R(t) = cx_c + h\dot{x}_c, \quad (1.72)$$

где x_c — перемещение тела относительно положения статического равновесия.

При кинематическом возбуждении колебаний необходимо, чтобы как можно более малыми были абсолютные перемещения x_k тела (см. рис. 1.26, *б*).

При силовом возбуждении, так как сила тяжести компенсируется статической деформацией пружины, уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x}_c + h\dot{x}_c + cx_c = F(t), \quad (1.73)$$

а при кинематическом возбуждении

$$m\ddot{x}_k + h[\dot{x}_k - \dot{s}(t)] + c[x_k - s(t)] = 0,$$

или

$$m\ddot{x}_k + h\dot{x}_k + cx_k = cs(t) + h\dot{s}(t), \quad (1.74)$$

где h — коэффициент вязкого сопротивления в материале пружины или специально установленного демпфера (например, амортизатора автомобиля); c — жесткость пружины подвески.

Будем считать, что возмущающая сила и вибрация основания изменяются во времени по гармоническому закону. Согласно изложенному выше методу комплексных амплитуд, зададим частное решение уравнения (1.73) в виде $x_c = Ge^{ipt}$. Подставив x_c в (1.72) и (1.73), получим

$$R(t) = (c + hip)Ge^{ipt};$$

$$F(t) = (-mp^2 + hip + c)Ge^{ipt}.$$

Следовательно, отношение динамического воздействия на фундамент к действующей силе

$$\frac{R(t)}{F(t)} = \frac{(c + hip)}{(c - mp^2 + hip)} = \frac{\omega^2 + 2\epsilon ip}{(\omega^2 - p^2 + 2\epsilon ip)}.$$

В данной задаче важно только соотношение между амплитудами $R(t)$ и $F(t)$, а фазовый сдвиг между ними интереса не представляет. Обозначим отношение этих амплитуд через β_c :

$$\beta_c = \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\varepsilon^2 p^2}}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}}. \quad (1.75)$$

При кинематическом возбуждении, подставив $x_k = Ge^{ipt}$ и $s(t) = s_0 e^{ipt}$ в (1.74), получим

$$(c - mp^2 + hip)x_k(t) = (c + hip)s(t),$$

откуда

$$\frac{x(t)}{s(t)} = \frac{(c + hip)}{(c - mp^2 + hip)} = \frac{\omega^2 + 2\varepsilon ip}{(\omega^2 - p^2 + 2\varepsilon ip)}.$$

Как и в случае силового возбуждения, интерес представляет только отношение амплитуд $x_k(t)$ и $s(t)$. Обозначим это отношение через β_k :

$$\beta_k = \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\varepsilon^2 p^2}}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}}. \quad (1.76)$$

Сопоставляя (1.75) и (1.76), видим, что эти выражения совпадают. Таким образом, условие виброзащиты для случаев силового и кинематического возбуждения имеет вид

$$\beta = \beta_c = \beta_k = \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\varepsilon^2 p^2}}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}} < 1. \quad (1.77)$$

Введем, как и ранее, коэффициент расстройки $z = p/\omega$ и безразмерный коэффициент затухания $d = 2\varepsilon/\omega$. Тогда, разделив числитель и знаменатель (1.77) на ω^2 , получим условие виброзащиты в виде

$$\beta = \frac{\sqrt{1 + d^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}} < 1.$$

Отсюда

$$(1 - z^2)^2 + d^2 z^2 > 1 + d^2 z^2,$$

или

$$z^2(z^2 - 2) > 0.$$

Это неравенство имеет место при $z > \sqrt{2}$ или $p > \sqrt{2} \cdot \omega$.

Зависимость $\beta(z)$ представлена на рис. 1.27. Видим, что для виброзащиты независимо от способа возмущения и значения вязкого сопротивления необходимо, чтобы собственная частота колебаний системы была бы значительно ниже (по крайней мере в $\sqrt{2}$ раз) частоты возбуждения.

При $p > \sqrt{2}\omega$, т. е. в области виброзащиты, как видно на графике $\beta(z)$, демпфирование играет отрицательную роль, поскольку чем меньше демпфирование, тем больше эффект виброзащиты. Казалось бы, что необходимо уменьшать демпфирование, однако это не всегда так.

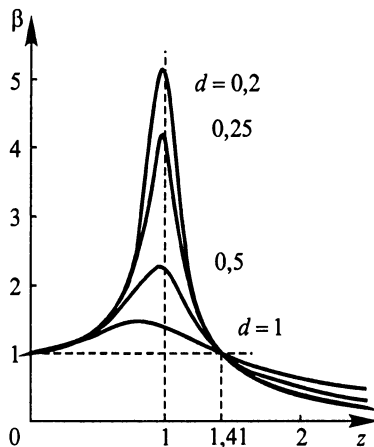


Рис. 1.27

Следует учитывать, что при силовом возбуждении любая машина при пуске проходит режим раскрутки, а при остановке — торможения. Частота возбуждения при этом изменяется от нуля до p и наоборот, т. е. система проходит через резонанс, что вынуждает конструктора в ущерб виброзащите повышать демпфирование, чтобы уменьшить амплитуду резонансных колебаний. При кинематическом возбуждении возможно скачкообразное перемещение основания (наезд на препятствие, попадание колеса в яму и т. д.), что при отсутствии демпферов (амортизаторов) может привести к недопустимым перемещениям и, следовательно, перегрузкам виброзащищаемого объекта, а также к длительному процессу затухания возникающих свободных колебаний.

Глава 2

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. Особенности параметрических колебаний.

Раскачивание качелей

В предыдущей главе были рассмотрены два типа колебаний механических систем: *свободные*, возникающие в изолированной от внешних воздействий системе в результате начального возмущения, и *вынужденные*, обусловленные воздействием на систему извне переменной внешней силы, действующей либо непосредственно (силовое возбуждение), либо опосредственно (кинематическое и инерционное возбуждение). Но возможно воздействие на систему извне другого вида, когда периодически изменяется один из параметров системы (длина маятника, жесткость пружины и т. д.).

Возникновение колебательного процесса из-за периодического изменения одного из параметров системы называют ***параметрическим возбуждением колебаний***, а сами колебания — ***параметрическими***.

Параметрические колебания в зависимости от свойств самой системы и характера изменения ее параметров могут быть ограниченными или возрастающими во времени. Последний, очевидно, опасный случай, представляющий особый интерес, называют ***параметрическим резонансом***.

Одним из самых наглядных примеров параметрического возбуждения колебаний является раскачивание качелей-лодочек. Известно, что если сообщить качелям начальное возмущение (например, оттолкнуться от земли), а затем в процессе движения приседать в крайних положениях и вставать в среднем, то можно довольно быстро, за несколько периодов колебаний, раскачать качели до очень больших амплитуд, а если конструкция качелей не предусматривает ограничений, то и совершить полный оборот вокруг оси подвеса.

Для простоты заменим качели математическим маятником (рис. 2.1), длина которого l_0 изменяется скачкообразно на величину $\pm 0,5a$. Будем считать, что $a/l_0 \ll 1$, а углы отклонения маятника малы.

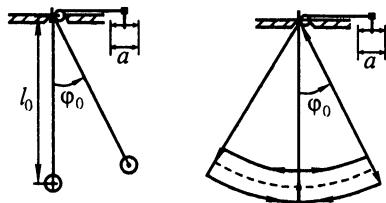


Рис. 2.1

В зависимости от длины маятника ($l_0 + 0,5a$ или $l_0 - 0,5a$) дифференциальные уравнения его движения имеют вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0 + 0,5a} \varphi = 0; \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0 - 0,5a} \varphi = 0, \quad (2.1)$$

или

$$\dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\frac{g}{l_0 + 0,5a} \varphi; \quad \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\frac{g}{l_0 - 0,5a} \varphi. \quad (2.2)$$

На первом этапе движения (маятник отклонен на угол φ_0 , длина нити равна $l_0 + 0,5a$), интегрируя первое из уравнений (2.2), получаем

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l_0 + 0,5a} (\varphi_0^2 - \varphi^2).$$

Следовательно, в положении равновесия ($\varphi = 0$) угловая скорость вращения маятника будет определяться соотношением

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l_0 + 0,5a} \varphi_0^2. \quad (2.3)$$

При подъеме маятника в положение равновесия в соответствии с законом сохранения момента количества движения его угловая скорость изменится и станет равной

$$\dot{\varphi}_1 = \left(\frac{l_0 + 0,5a}{l_0 - 0,5a} \right)^2 \dot{\varphi},$$

что приведет к увеличению его кинетической энергии.

На втором этапе (поднятый маятник движется от положения равновесия в крайнее положение), интегрируя второе уравнение (2.2), получаем

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_1^2 - \frac{g}{l_0 - 0,5a} \varphi^2 = \left(\frac{l_0 + 0,5a}{l_0 - 0,5a} \right)^4 \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l_0 - 0,5a} \varphi^2.$$

Тогда в крайнем положении ($\dot{\varphi} = 0$) угол отклонения маятника φ_1 будет определяться соотношением

$$\varphi_1^2 = \frac{l_0 - 0,5a}{g} \left(\frac{l_0 + 0,5a}{l_0 - 0,5a} \right)^4 \dot{\varphi}_1^2,$$

или с учетом (2.3)

$$\varphi_1^2 = \frac{l_0 - 0,5a}{l_0 + 0,5a} \left(\frac{l_0 + 0,5a}{l_0 - 0,5a} \right)^4 \varphi_0^2 = \left(\frac{l_0 + 0,5a}{l_0 - 0,5a} \right)^3 \varphi_0^2. \quad (2.4)$$

Рассматривая вторую половину периода колебания маятника (обратное движение), получаем по аналогии и с учетом (2.4)

$$\varphi_2^2 = \left(\frac{l_0 + 0,5a}{l_0 - 0,5a} \right)^3 \varphi_1^2 = \left(\frac{l_0 + 0,5a}{l_0 - 0,5a} \right)^6 \varphi_0^2,$$

или, исходя из сделанного допущения $a/l_0 \ll 1$,

$$\varphi_2^2 = \left(1 + 6 \frac{a}{l_0} \right) \varphi_0^2. \quad (2.5)$$

Учитывая, что в крайних положениях полная энергия маятника равна потенциальной, которую с учетом малости угла φ можно представить в виде

$$E = mg(l_0 + 0,5a)(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2} mg(l_0 + 0,5a)\varphi^2, \quad (2.6)$$

находим с учетом (2.5) соотношение между полными механическими энергиями через период колебаний:

$$E_1 = \left(1 + 6 \frac{a}{l_0} \right) E_0. \quad (2.7)$$

Видим, что за период энергия колебаний увеличивается на величину, пропорциональную имевшейся энергии, т. е. энергия колебаний изменяется по экспоненциальному закону и через n периодов будет равна

$$E_n = E_0 e^{n\beta T_0}, \quad (2.8)$$

где $\beta = (1/T_0) \ln(1 + 6(a/l_0))$; T_0 — период колебаний маятника (рис. 2.2).

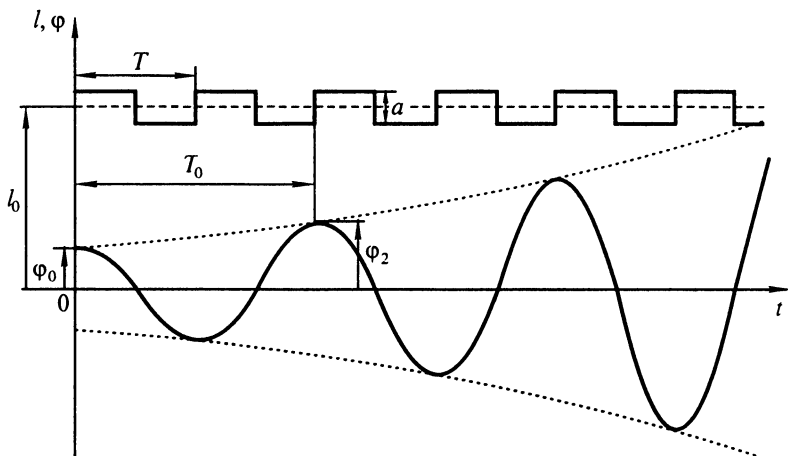


Рис. 2.2

За счет чего же происходит увеличение энергии? В нижнем положении ($\varphi = 0$) работа внешней силы при подъеме маятника на высоту a

$$A_+ \approx mga + \frac{mv^2}{l_0} a,$$

где mga — работа, затрачиваемая на преодоление силы тяжести; v — скорость маятника при его длине, равной l_0 ; mv^2/l_0 — среднее значение центробежной силы; $(mv^2/l_0)a$ — работа, затрачиваемая на преодоление центробежной силы. В крайних положениях ($v = 0$) центробежная сила равна нулю, и работа, отдаваемая маятником, будет равна

$$A_- = mga \cos \varphi_k,$$

где φ_k — угол отклонения маятника при $v = 0$.

Таким образом, за каждую половину периода колебаний маятник получает приращение энергии, равное

$$\frac{mv^2}{l_0} a + mga(1 - \cos \varphi_k) \approx \frac{mv^2}{l_0} a + mga \frac{\varphi_k^2}{2}.$$

Так как угол φ и отношение a/l_0 малы, то, согласно закону сохранения энергии, можно приближенно считать

$$E \approx \frac{mv^2}{2} \approx mgl_0 \frac{\varphi_k^2}{2}.$$

Тогда приращение энергии за половину периода колебаний составит примерно $3aE/l_0$, что согласуется с полученным выше результатом (2.7).

Согласно (2.6), амплитудные отклонения маятника будут также изменяться по экспоненциальному закону:

$$\varphi_n = \varphi_0 e^{0,5n\beta T_0}.$$

Процесс раскачивания маятника представлен на рис. 2.2.

При наличии в системе вязкого сопротивления потерю энергии за период при почти синусоидальных колебаниях можно оценить по полученной в § 1.2.2 формуле

$$\Delta E = 2\delta E,$$

где δ — логарифмический декремент колебаний.

Следовательно, при выполнении условия $3a/l_0 > \delta$ колебания маятника будут неограниченно возрастать.

Проведенный анализ раскачивания маятника позволил выявить существенные отличия параметрического резонанса от резонанса в консервативной системе, рассмотренного в § 1.3.2:

1) *при параметрическом резонансе амплитуда колебаний нарастает во времени по экспоненциальному, а не линейному закону;*

2) *наличие вязкого сопротивления накладывает определенные требования на амплитуду модуляции параметра, при выполнении которых амплитуда колебаний неограниченно возрастает.*

Отметим, что выводы о неограниченном нарастании амплитуды колебаний сделаны, как и при изучении обычного резонанса в консервативной системе в предположении о малости колебаний, т. е. без учета нелинейности дифференциального уравнения.

2.2. Области параметрического резонанса

В самом общем случае при наличии вязкого сопротивления дифференциальное уравнение движения линейной системы при параметрическом возбуждении имеет вид

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2[1 + 2\mu\Phi(t)]q = 0, \quad (2.9)$$

где μ — параметр модуляции; $\Phi(t)$ — некоторая периодическая функция.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (2.9) принимает вид *уравнения Маттье—Хилла*

$$\ddot{q} + \omega^2[1 + 2\mu\Phi(t)]q = 0. \quad (2.10)$$

При $\varepsilon \neq 0$, используя подстановку $q(t) = e^{-\varepsilon t}u(t)$, уравнение (2.9) может быть также приведено к виду (2.10):

$$\ddot{u} + \omega^2\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} + 2\mu\Phi(t)\right]u = 0.$$

Если функция $\Phi(t)$ — кусочно-постоянная с периодом T , то уравнение (2.9) называют *уравнением Мейснера*.

2.2.1. Параметрическое возбуждение колебаний по закону прямоугольного синуса

В этом случае области неустойчивости могут быть определены в замкнутой форме в элементарных функциях. Примером подобной механической системы является маятник, рассмотренный в § 2.1. Уравнения движения маятника при скачкообразном изменении длины нити имеют вид (2.1), причем первое из них соответствует интервалу времени $0 < t < 0,5T$, второе — $0,5T < t < T$.

Обозначив

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_0 + 0,5a}; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_0 - 0,5a}, \quad (2.11)$$

запишем решение на каждом интервале времени:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t \quad \text{при } 0 < t < 0,5T; \\ \varphi_2 &= C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \sin \omega_2 t \quad \text{при } 0,5T < t < T. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для определения произвольных постоянных необходимы четыре условия. Два из них — условия состыковки решений в момент времени $0,5T$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0,5T) &= \varphi_2(0,5T); \\ \dot{\varphi}_1(0,5T) &= \dot{\varphi}_2(0,5T). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Запишем еще два соотношения:

$$\begin{aligned}\lambda\varphi_1(0) &= \varphi_2(T); \\ \lambda\dot{\varphi}_1(0) &= \dot{\varphi}_2(T),\end{aligned}\tag{2.14}$$

в которых λ — некоторое, пока неизвестное число.

Из соотношений (2.14) следует, что за период T угол отклонения маятника и его скорость изменятся в λ раз, а значит, движение в следующем периоде начнется при начальных условиях, также изменившихся в λ раз. Если окажется, что $|\lambda| > 1$, то колебания в каждом последующем периоде будут возрастать, а если $|\lambda| < 1$ — постепенно убывать.

Подставив решения (2.12) в (2.13) и (2.14), получим однородную алгебраическую систему относительно произвольных постоянных. Условием нетривиальности решения этой системы будет равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} \cos \omega_1 \frac{T}{2} & \sin \omega_1 \frac{T}{2} & -\cos \omega_2 \frac{T}{2} & -\sin \omega_2 \frac{T}{2} \\ -\omega_1 \sin \omega_1 \frac{T}{2} & \omega_1 \cos \omega_1 \frac{T}{2} & \omega_2 \sin \omega_2 \frac{T}{2} & -\omega_2 \cos \omega_2 \frac{T}{2} \\ \lambda & 0 & -\cos \omega_2 T & -\sin \omega_2 T \\ 0 & \omega_1 \lambda & \omega_2 \sin \omega_2 T & -\omega_2 \cos \omega_2 T \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель представляет собой квадратное уравнение относительно λ :

$$\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0,\tag{2.15}$$

где

$$A = \cos \frac{\omega_1 T}{2} \cos \frac{\omega_2 T}{2} - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1^2 \omega_2^2} \sin \frac{\omega_1 T}{2} \sin \frac{\omega_2 T}{2}.\tag{2.16}$$

Решением (2.15) будут

$$\lambda_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}.$$

Для того чтобы корни λ_1 и λ_2 были действительными, необходимо выполнение условия

$$|A| > 1,\tag{2.17}$$

т. е. либо $A > 1$, либо $A < -1$. В обоих случаях модуль одного из корней будет больше единицы:

если $A > 1$, то $\lambda_1 > 1$;

если $A < -1$, то $|\lambda_2| > 1$.

Отсюда следует, что если неравенство (2.17) выполняется, то колебания с каждым периодом увеличиваются, т. е. неравенство (2.17) представляет собой не только условие действительности множителей λ , но и условие возникновения *параметрического резонанса*.

При $A = 1$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, при $A = -1$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, т. е. решения будут чисто периодическими, причем при $A = 1$ решение будет иметь период T , а при $A = -1$ — период $2T$.

Итак, условию $|A| = 1$ соответствует такое соотношение параметров, при котором маятник будет находиться на границе области параметрического резонанса.

Введем следующие обозначения:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_0}}; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \gamma = \frac{T}{T_0}; \quad \mu = \frac{a}{2l_0},$$

где ω , T_0 — собственные частота и период колебаний маятника при его постоянной длине l_0 ; γ — отношение периода изменения длины маятника к его собственному периоду колебаний; μ — глубина модуляции параметра.

С учетом (2.16) параметры γ и μ на границах областей параметрического резонанса связаны соотношением

$$\left| \cos \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1+\mu}} \cos \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\mu}} - \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \sin \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1+\mu}} \sin \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\mu}} \right| = 1. \quad (2.18)$$

Легко убедиться, что при $\mu \rightarrow 0$ условие (2.18) принимает вид $\cos 2\pi\gamma \rightarrow \pm 1$.

Это условие выполняется при $\gamma = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$. Поэтому очевидно, что кривые на плоскости (γ, μ) будут пересекать ось γ в точках $1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

Области неустойчивости представлены на рис. 2.3. Незаштрихованные зоны соответствуют значениям γ и μ , при которых $|A| > 1$ т. е. когда имеет место параметрический резонанс. Границы областей параметрического резонанса около точек $\gamma = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ соот-

ветствуют значению $A = -1$, а около точек $\gamma = 1, 2, 3, \dots$ — значению $A = 1$, а следовательно, как было отмечено выше, периодическим решениям с периодами $2T$ и T соответственно.

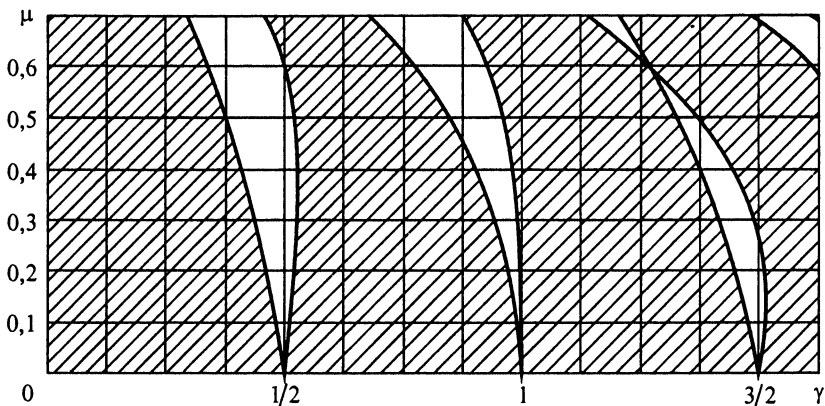


Рис. 2.3

Для задачи раскачивания маятника одним из допущений было условие малости глубины модуляции μ ($a/l_0 \ll 1$), поэтому в рассмотренном случае можно использовать лишь узкую полосу диаграммы, соответствующую малым значениям μ . Однако следует отметить, что все математические вычисления для получения областей неустойчивости были сделаны без каких-либо допущений о малости μ . Полученные для маятника результаты можно применять для любой аналогичной системы, и при этом допустимо рассматривать любые значения $\mu < 1$.

Областей параметрического резонанса оказалось бесконечно много. Более того, параметрический резонанс возможен не только при значениях $\gamma = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$, но и в целом диапазоне значений γ , близких к данным. Отсюда третье отличие параметрического резонанса от обычного резонанса в консервативной системе: *существует бесконечное множество областей параметрического резонанса, причем именно областей, а не точек с конкретным значением T .*

Если учесть, что в рассмотренной задаче о маятнике $a/l_0 \ll 1$, то можно, записав (2.11) в виде

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_0} \left(1 - 0,5 \frac{a}{l_0} \right), \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_0} \left(1 + 0,5 \frac{a}{l_0} \right),$$

перейти к уравнению Мейснера.

Параметры γ и μ на границах областей параметрического резонанса будут в соответствии с (2.18) связаны соотношением

$$|\cos(\pi\gamma\sqrt{1-\mu})\cos(\pi\gamma\sqrt{1+\mu}) - \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\sin(\pi\gamma\sqrt{1-\mu})\sin(\pi\gamma\sqrt{1+\mu})| = 1. \quad (2.19)$$

В этом случае, если условия задачи не накладывают ограничения на значение параметра модуляции μ , можно рассматривать любые значения μ и в том числе $\mu > 1$. При этом (2.19) трансформируется в

$$|\operatorname{ch}(\pi\gamma\sqrt{\mu-1})\cos(\pi\gamma\sqrt{1+\mu}) - \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}}\operatorname{sh}(\pi\gamma\sqrt{\mu-1})\sin(\pi\gamma\sqrt{1+\mu})| = 1. \quad (2.20)$$

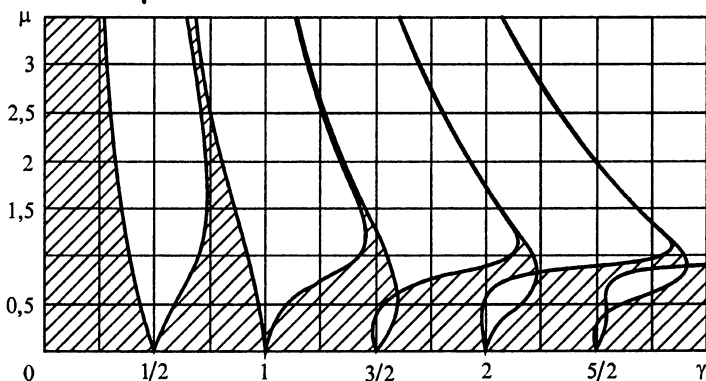


Рис. 2.4

Области неустойчивости, соответствующие (2.19), (2.20), представлены на рис. 2.4. Видно, что при больших значениях μ происходит сближение и даже слияние границ соседних областей неустойчивости, и система становится неустойчивой практически на всем диапазоне значений отношения периода пульсации к собственному периоду ее колебаний.

2.2.2. Гармоническое возбуждение параметрических колебаний

При гармоническом изменении параметра уравнение (2.9) называют *уравнением Матье*. Запишем его в виде

$$\ddot{q} + \omega^2(1 + 2\mu \cos pt)q = 0,$$

где μ — коэффициент возбуждения; p — частота изменения параметра, или в другой более употребительной форме

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + (a + 2h \cos 2\tau)q = 0, \quad (2.21)$$

где $a = (2\omega/p)^2$; $h = a\mu$; $2\tau = pt$.

Распределение областей неустойчивости на плоскости (h, a) показано на рис. 2.5. На границах областей уравнение (2.21) имеет периодические решения: $se_n(\tau)$ — правые границы и $se_n(\tau)$ — левые границы, представляющие собой *функции Матье целого порядка*. Диаграмму, приведенную на рис. 2.5, называют *диаграммой Айнса—Стретта*. Для построения диаграммы можно воспользоваться представлениями функций $se_n(\tau)$ и $se_n(\tau)$ в виде степенных рядов.

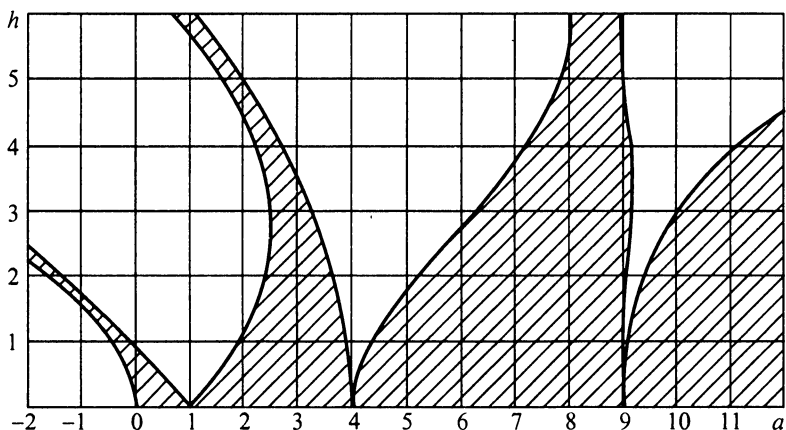


Рис. 2.5

Диаграмма Айнса—Стретта освобождает от выполнения операций, связанных с решением уравнения Матье. Составив

уравнение и получив конкретные значения параметров a и h , можно сразу найти ответ об устойчивости или неустойчивости рассматриваемой системы. Отметим, что диаграмма Айнса—Стретта симметрична относительно оси a , и поэтому знак h не играет никакой роли.

2.2.3. Приближенное определение границ областей неустойчивости

Рассмотрим случай, когда изменение параметра происходит по гармоническому закону и в системе имеется вязкое сопротивление, т. е. ее движение описывается уравнением

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2(1 + 2\mu \cos pt)q = 0. \quad (2.22)$$

Определим границы основной, наиболее важной области неустойчивости при $2\omega/p \approx 1$. Выше в § 2.2.1 было показано, что границе этой области соответствует решение с периодом $2T$. Поэтому зададим в первом приближении решение на границе области в виде

$$q = C \cos \frac{pt}{2} + D \sin \frac{pt}{2}, \quad (2.23)$$

где C, D — произвольные постоянные.

Подставив (2.23) в (2.22) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \cos pt \cdot \cos \frac{pt}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{pt}{2} + \cos \frac{3pt}{2} \right); \\ \cos pt \cdot \sin \frac{pt}{2} &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{pt}{2} + \sin \frac{3pt}{2} \right), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} F\left(\frac{pt}{2}\right) &= C \left[\left(\omega^2 - \frac{p^2}{4} \right) \cos \frac{pt}{2} - \varepsilon p \sin \frac{pt}{2} + \omega^2 \mu \left(\cos \frac{pt}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \frac{3pt}{2} \right) \right] + D \left[\left(\omega^2 - \frac{p^2}{4} \right) \sin \frac{pt}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon p \cos \frac{pt}{2} + \omega^2 \mu \left(-\sin \frac{pt}{2} + \sin \frac{3pt}{2} \right) \right] \neq 0. \end{aligned}$$

Решение (2.23) не удовлетворяет уравнению (2.22). Точное выполнение равенства $F(pt/2)=0$ потребовало бы представления решения (2.23) в виде ряда Фурье. Поэтому применим к $F(pt/2)$ метод гармонического баланса, в соответствии с которым приравняем к нулю коэффициенты при $\cos(pt/2)$ и $\sin(pt/2)$:

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \frac{p^2}{4} + \omega^2 \mu \right) C + \varepsilon p D &= 0; \\ -\varepsilon p C + \left(\omega^2 - \frac{p^2}{4} - \omega^2 \mu \right) D &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Приравнявая к нулю определитель системы (2.24), находим условие, при котором с точностью, определяемой методом гармонического баланса, можно представить решения (2.22) в виде (2.23):

$$\left(\omega^2 - \frac{p^2}{4} \right)^2 - \omega^4 \mu^2 + \varepsilon^2 p^2 = 0. \quad (2.25)$$

Отметим, что области неустойчивости соответствует неравенство

$$\left(\omega^2 - \frac{p^2}{4} \right)^2 - \omega^4 \mu^2 + \varepsilon^2 p^2 < 0.$$

Разделим каждый член уравнения (2.25) на ω^4 и учтем, что $2\varepsilon/\omega = d$, где d — введенный в первой главе безразмерный коэффициент затухания, который при малом вязком сопротивлении ($\varepsilon \ll \omega$) может быть выражен через логарифмический декремент колебаний δ :

$$d = \frac{2\varepsilon}{\omega} = \frac{\delta}{\pi}. \quad (2.26)$$

Тогда, согласно (2.26), имеем

$$\left(\frac{p}{2\omega} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\pi} \right)^2 \pm \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\delta}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{\pi} \right)^4},$$

или, пренебрегая малыми величинами более высокого порядка,

$$\frac{p}{2\omega} = \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2}}. \quad (2.27)$$

Для следующей области неустойчивости при $\omega/p \approx 1$, учитывая, что этой области соответствует решение с периодом T , можно, задав решение (2.22) в виде

$$q = C_0 + C_1 \cos pt + D_1 \sin pt,$$

после аналогичных преобразований получить

$$\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 = 1 - \mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}, \quad (2.28)$$

или, так как, согласно (2.28), $(p/\omega)^2 \approx 1 - \mu^2$,

$$\frac{p}{\omega} = \sqrt{1 - \mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 (1 - \mu^2)}}. \quad (2.29)$$

Наименьшее значение коэффициента возбуждения $\mu_{кр}$, при котором возможно возникновение неустойчивости, называют **критическим**.

Для основной области параметрического резонанса, согласно (2.27), $\mu_{кр} = \delta/\pi$, для следующей области, согласно (2.29),

$\mu_{кр} \approx (\delta/\pi)^{1/2}$. Можно показать, что для k -й области ($p = 2\omega/k$) критический коэффициент возбуждения равен $\mu_{кр} \approx (\delta/\pi)^{1/k}$. Это делает весьма проблематичным возбуждение параметрического резонанса на этих частотах в реальных системах. Основная и следующая за ней области неустойчивости при $\delta/\pi = 0,1$ и при отсутствии вязкого сопротивления представлены на рис. 2.6.

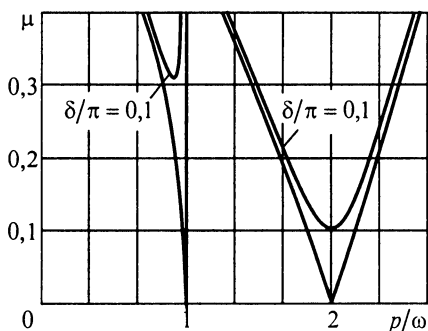


Рис. 2.6

2.3. Примеры параметрических колебаний

2.3.1. Маятник с колеблющейся точкой подвеса

Как показано выше, вертикальное нижнее положение равновесия маятника (обычно устойчивое) становится неустойчивым

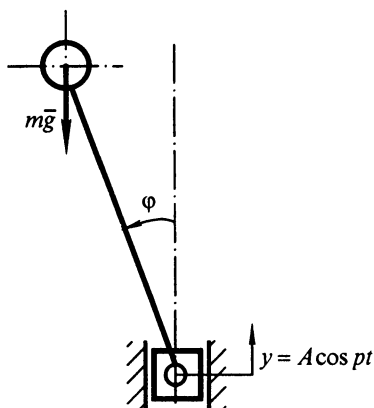


Рис. 2.7

при периодическом изменении его длины. Тот же эффект может быть получен и при вибрации точки подвеса маятника постоянной длины. Тогда возникает вопрос, не станет ли устойчивым при определенной вибрации точки подвеса верхнее (обычно неустойчивое) положение маятника? Такая возможность при определенной частоте вибрации доказана теоретически и экспериментально.

Рассмотрим перевернутый маятник, точка подвеса которого колеблется в вертикальной плоскости по закону $y = A \cos pt$ с частотой p и амплитудой A (рис. 2.7).

Составим дифференциальное уравнение относительного движения маятника с учетом переносной силы инерции:

$$ml^2\ddot{\varphi} = mgl\varphi - mA p^2 l \cos pt,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{Ap^2}{l} \cos pt \right) \varphi = 0. \quad (2.30)$$

Для приведения уравнения (2.30) к каноническому виду (2.21) положим

$$2\tau = pt, \quad a = -\frac{4g}{p^2 l}, \quad h = \frac{2A}{l}.$$

Главной особенностью рассматриваемого случая является отрицательное значение параметра a .

Как видно на диаграмме Айнса—Стретта (см. рис. 2.5), каждому значению параметра h соответствует некоторая, довольно

узкая область значений $a < 0$, в пределах которой состояние равновесия устойчивое.

При малых h значения a лежат в пределах (рис. 2.8)

$$-\frac{1}{2}h^2 < a < 1 - h - \frac{1}{8}h^2.$$

При малых значениях амплитуды колебаний A по сравнению с длиной маятника, т. е. при малых h , правое неравенство удовлетворяется автоматически. Следовательно, остается одно неравенство

$$|a| < \frac{1}{2}h^2,$$

подставляя в которое значения a и h , получаем условие устойчивости

$$Ap > \sqrt{2gl}.$$

Это неравенство определяет нижний уровень амплитуды Ap скорости движения точки подвеса, обеспечивающей устойчивость перевернутого маятника. Видно, что эта амплитуда равна скорости падения тела с высоты, равной длине маятника.

Практически эффект устойчивости перевернутого маятника продемонстрировал академик П.Л. Капица на установке, схематически представленной на рис. 2.9. На ось электромотора 1 (мотор от швейной машины) эксцентрично насажен шарикоподшипник 2, к обойме которого присоединена тяга 3, приводящая в колебание шарнирно опертый рычаг 4, к которому подвешен стержень ма-

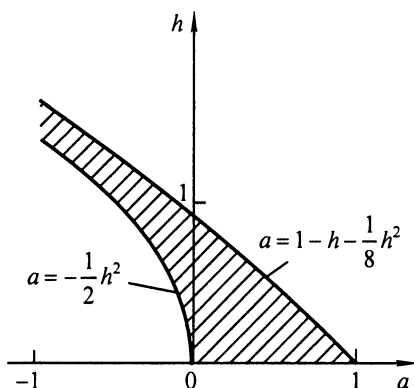


Рис. 2.8

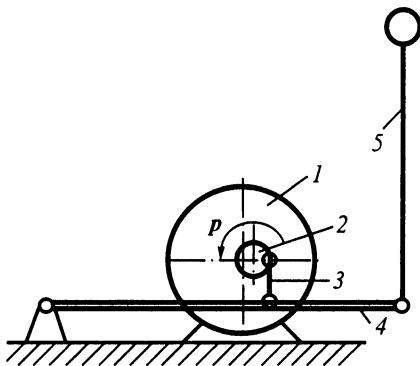


Рис. 2.9

маятника 5 так, чтобы он мог свободно качаться. При соответствующем подборе параметров маятника и частоты p (угловой скорости двигателя) маятник сохраняет перевернутое положение, что в общем производит неожиданное впечатление, поскольку угловая скорость двигателя достаточно велика и вертикальные перемещения маятника практически не воспринимаются глазами. Если сообщить маятнику толчок в сторону, то он совершает затухающие (в силу наличия вязкого сопротивления воздуха) колебания и снова останавливается в перевернутом состоянии.

2.3.2. Шарнирно опертый стержень, сжатый продольной силой, изменяющейся во времени по периодическому закону

Поскольку мы исследуем параметрические колебания в системах с одной степенью свободы, будем считать стержень безынерционным, несущим в среднем сечении точечный груз массой m (рис. 2.10).

Дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$m\ddot{x} + c(t)x = 0,$$

где жесткость $c(t)$ является функцией времени, зависящей от продольной силы $P(t)$.

В соответствии с приближенной формулой, используемой в сопротивлении материалов, $c(t)$ можно представить в виде

$$c(t) = c_0 [1 - P(t)/P_Э],$$

где c_0 — жесткость стержня при отсутствии продольной силы; $P_Э$ — эйлерова критическая сила.

Тогда уравнение движения груза, скрепленного со стержнем, принимает следующий вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 [1 - P(t)/P_Э] x = 0.$$

Если $P(t)$ изменяется во времени скачкообразно (рис. 2.11, а):

$$P(t) = \begin{cases} P_0 & \text{при } 0 < t < 0,5T; \\ -P_0 & \text{при } 0,5T < t < T, \end{cases}$$

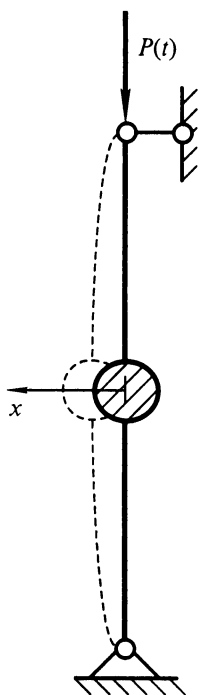


Рис. 2.10

то вопрос о возможности возбуждения параметрического резонанса может быть решен с помощью диаграммы Мейснера (см. рис. 2.4), приняв $\gamma = T/T_0$, $T_0 = 2\pi/\omega$, $\mu = P_0/P_{\Sigma}$.

При изменении $P(t)$ по гармоническому закону $P(t) = P_0 \cos pt$ (рис. 2.11, б), мы получаем уравнение Матье

$$\ddot{x} + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_{\Sigma}} \cos pt \right) x = 0.$$

Для исследования возможности возбуждения параметрического резонанса в данном случае можно воспользоваться диаграммой Айнса—

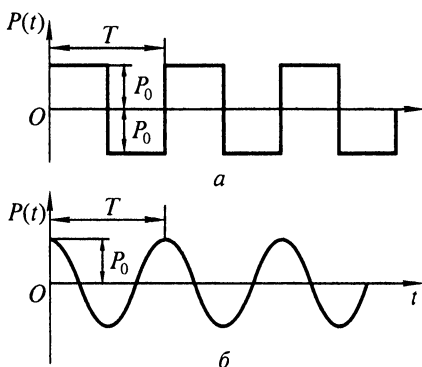


Рис. 2.11

Стретта (см. рис. 2.5), положив $a = (2\omega/p)^2$, $h = aP_0/2P_{\Sigma}$, или воспользоваться формулами (2.27), (2.29) для приближенного определения границ областей неустойчивости, причем в этом случае можно при желании учесть вязкое сопротивление.

Глава 3

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

3.1. Нелинейные системы с одной степенью свободы

3.1.1. Классификация нелинейных систем

Механическая система называется нелинейной, если нелинейны уравнения ее движения. Из уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где $T = (1/2)a(q)\dot{q}^2$; $a(q)$ — зависящий от q обобщенный инерционный коэффициент, следует уравнение движения системы с одной степенью свободы

$$a(q)\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t) - \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2.$$

Обычно это уравнение приводят к виду

$$a(q)\ddot{q} + R(q, \dot{q}) + F(q) = Q(t), \quad (3.1)$$

где $F(q) = -Q_{\Pi}(q) = d\Pi/dq$ — взятая со знаком минус обобщенная восстанавливающая сила, называемая *квазиупругой характеристикой*, или *характеристикой восстанавливающей силы*; $R(q, \dot{q}) = -Q_{\text{д}}(q, \dot{q}) + (1/2)a'(q)\dot{q}^2$ — *силовая характеристика неупругого сопротивления*; $Q(t)$ — составляющая обобщенной силы, явно зависящая от времени.

Уравнение (3.1) будет нелинейным, если инерционный коэффициент является функцией координаты или хотя бы одна из силовых характеристик R или F нелинейно зависит от обобщенной координаты или (и) ее производной. В большинстве случаев нелинейность системы обусловлена большими отклонениями ее от положения равновесия, однако возможны и такие ситуации, когда

система нелинейна при сколь угодно малых отклонениях. Последнее обычно связано с разрывным видом характеристик R и F .

По признаку отсутствия или наличия в уравнении (3.1) возмущающей силы $Q(t)$ системы подразделяют на *автономные* и *неавтономные*. В автономных системах действующие силы зависят только от обобщенной координаты и обобщенной скорости, а явная зависимость от времени отсутствует:

$$a(q)\ddot{q} + R(q, \dot{q}) + F(q) = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) является уравнением движения неавтономной системы и описывает ее вынужденные колебания. Часть обобщенной силы $Q(t)$, явно зависящая от времени, называется *возмущающей силой*. К неавтономным относятся также системы с параметрическим возбуждением, движение которых описывается однородным дифференциальным уравнением, в характеристики R и F которого время t входит явно.

Часто в уравнении (3.2) возможно выделить линейную часть позиционной характеристики $F(q)$ и представить его в виде

$$a\ddot{q} + cq = f(q, \dot{q}),$$

где $a = \text{const}$, $c = \text{const}$.

Если нелинейная часть $f(q, \dot{q})$ обобщенной силы достаточно мала по сравнению с линейной, колебания системы будут близки к гармоническим с частотой, мало отличающейся от частоты $\omega_0 = \sqrt{c/a}$ линейной системы. В таких случаях уравнение движения и систему называют квазилинейными.

Автономные системы могут быть *консервативными, диссипативными и автоколебательными*. Если при движении не происходит рассеяния или поступления энергии в систему, ее полная механическая энергия сохраняется, и систему называют *консервативной*. Движение такой системы описывается простейшим уравнением (в уравнении (3.2) $R \equiv 0$), и ее нелинейность определяется нелинейностью характеристики $F(q)$. Производная $c = dF/dq$ представляет собой жесткость квазиупругой характеристики. Если при изменении q жесткость изменяется плавно (без скачков), характеристика будет *гладкой*, в противном случае — *кусочно-гладкой*, в частном случае — *кусочно-*

линейной. При $F(-q) = -F(q)$ характеристика является *симметричной*. Если с ростом $|q|$ жесткость c увеличивается, характеристика называется *жесткой*, в противном случае — *мягкой*.

Диссипативными называют системы, движение которых сопровождается невозполнимым рассеянием механической энергии и как следствие затуханием колебаний. Отличительным признаком диссипативных систем по сравнению с другими неконсервативных системами является выполнение неравенства $R(q, \dot{q})\dot{q} > 0$. Источником нелинейности могут выступать как позиционные силы, так и (или) силы сопротивления, зависящие от скоростей точек и противоположно направленные к ним. Это силы трения в соединениях узлов системы, силы внутреннего трения в материале деформируемых элементов, силы сопротивления среды. В простейших случаях сила сопротивления может быть функцией только обобщенной скорости: $R = R(\dot{q})$, а в сложных моделях (например, с внутренним трением) — функцией обеих переменных.

Автоколебательные системы должны обязательно иметь источник энергии, причем поступление энергии от источника, не обладающего собственными колебательными свойствами, управляется движением самой системы. Если мощность $R(q, \dot{q})\dot{q}$ обобщенной силы сопротивления (термин «сопротивление» здесь является условным) на одном интервале движения системы отрицательна, а на другом — положительна, то система может обладать автоколебательными свойствами. Периодические режимы колебаний, в процессе которых поступление энергии от источника полностью компенсирует потери энергии вследствие диссипации, так что

$$\int_0^T R(q, \dot{q})\dot{q} dt = 0,$$

называют **автоколебаниями**.

Трудности аналитического исследования колебаний в нелинейных системах связаны с тем, что для них не выполняется принцип суперпозиции, т. е. результат двух одновременных воздействий на систему не равен сумме результатов каждого из них по

отдельности. Общее решение уравнения (3.1) найти не удастся, и задачу аналитического исследования решают в более узкой постановке, определяя периодические режимы движения. В этом состоит главное отличие нелинейной теории колебаний от линейной.

3.1.2. Отображение движения на фазовой плоскости

Обобщенную координату q и обобщенную скорость $\dot{q}$ называют **фазовыми переменными**. Динамическое состояние системы с одной степенью свободы может быть представлено в системе координат $(q, \dot{q})$, т. е. на *фазовой плоскости*, точкой, которую называют *изображающей*. При этом движение системы отображается на фазовой плоскости движением изображающей точки, траекторию которой называют *фазовой траекторией*. Совокупность фазовых траекторий для всевозможных начальных условий движения системы называют *фазовой диаграммой*.

Уравнение фазовых траекторий можно получить непосредственно из уравнения $q = q(t)$ движения системы. Дифференцируя функцию $q(t)$ по времени, получаем зависимость $\dot{q} = \dot{q}(t)$. Совокупность этих двух выражений будет определять фазовые траектории системы в параметрической форме. Исключив время t , получим уравнение фазовых траекторий в явном виде: $\dot{q} = f(q)$. Например, решение дифференциального уравнения движения линейной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{q} + 2\varepsilon \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

в случае малого сопротивления ($\varepsilon < \omega_0$) при начальных условиях $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = 0$ имеет следующий вид:

$$q = q_0 e^{-\varepsilon t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\varepsilon}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

Дифференцируя его по времени, находим закон изменения скорости

$$\dot{q} = \frac{\omega_0^2}{\omega_1} q_0 e^{-\varepsilon t} \sin \omega_1 t,$$

где $\omega_1^2 = \omega^2 - \varepsilon^2$.

Введем новую (нормированную) фазовую переменную $y = \dot{q}/\omega_1$. Принимая $\delta = \varepsilon/\omega_1$ и используя в качестве параметра безразмерное время $\theta = \omega_1 t$, получаем уравнения фазовой траектории в параметрической форме:

$$\begin{aligned} q &= q_0 e^{-\delta\theta} (\cos\theta + \delta \sin\theta); \\ y &= q_0 (1 + \delta^2) e^{-\delta\theta} \sin\theta. \end{aligned}$$

Фазовая траектория, отображающая затухающие колебания линейной системы при указанных выше начальных условиях, представляет собой скручивающуюся спираль (рис. 3.1, а).

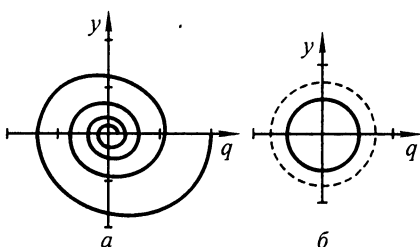


Рис. 3.1

Как видно, рассмотренный способ получения уравнения фазовой траектории требует двукратного интегрирования дифференциального уравнения движения. Однако с нелинейными дифференциальными уравнениями эта процедура в аналитической форме обычно просто

невыполнима. Поэтому в нелинейных системах уравнение фазовой траектории получают непосредственно из дифференциального уравнения движения. Выполнив замену независимой переменной t на переменную q :

$$\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dt} \frac{dq}{dq} = \dot{q} \frac{d\dot{q}}{dq},$$

дифференциальное уравнение движения системы второго порядка по отношению к переменной t приводят к дифференциальному уравнению первого порядка относительно переменной q , т. е. к дифференциальному уравнению фазовых траекторий. Таким образом, уравнение фазовых траекторий получают как первый интеграл дифференциального уравнения движения.

Так, например, уравнению движения

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

линейной консервативной автономной системы соответствует дифференциальное уравнение фазовой траектории

$$\dot{q} d\dot{q} + \omega_0^2 q dq = 0.$$

Нормируя скорость $y = \dot{q}/\omega_0$, получаем уравнение фазовых траекторий в виде

$$y^2 + q^2 = C,$$

где $C = y_0^2 + q_0^2$.

Следовательно, фазовая диаграмма представляет собой семейство окружностей, общий центр которых находится в начале координат (рис. 3.1, б).

Перечислим некоторые общие свойства фазовых траекторий:

- 1) изображающая точка движется по фазовой траектории по направлению движения часовой стрелки;
- 2) фазовые траектории пересекают ось q под прямым углом;
- 3) периодическим режимам движения соответствуют замкнутые фазовые траектории.

3.2. Автономные консервативные системы

3.2.1. Системы с гладкими квазиупругими характеристиками

В случае автономной консервативной системы может быть найдено точное решение дифференциального уравнения движения. Действительно, непосредственно из закона сохранения полной механической энергии системы

$$T + \Pi = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 + \Pi(q) = E_0 = \text{const},$$

где E_0 — постоянная энергии, определяемая начальными условиями, следует уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}(q) = \pm \sqrt{\frac{2[E_0 - \Pi(q)]}{a(q)}}.$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения приводит к уравнению движения в форме

$$t = C + \int dq / \dot{q}(q). \quad (3.3)$$

Одной из важнейших задач исследования свободных колебаний является определение зависимости частоты колебаний от их амплитуды. Эта зависимость вытекает из уравнения (3.3). В частности, в случае симметричной характеристики, интегрируя (3.3) с учетом выражения $\dot{q}(q)$ в пределах изменения координаты q от 0 до A , получаем время, соответствующее четверти периода колебаний, и тогда

$$\omega = \frac{\pi}{\int_0^A \sqrt{\frac{2a(q)}{E_0 - \Pi(q)}} dq}. \quad (3.4)$$

Аналитическое определение зависимости $\omega(A)$ по формуле (3.4) возможно лишь в случае простейшей нелинейной характеристики, когда входящий в (3.4) интеграл удастся выразить в табулированных функциях. В остальных же случаях вычисление интеграла выполняют численно. Поэтому основными методами исследования нелинейных систем являются приближенные методы.

Одним из широко применяемых методов нахождения периодических решений нелинейных уравнений является метод гармонической линеаризации. В его основе содержится допущение о том, что несмотря на наличие нелинейностей в силу фильтрующих свойств системы периодические режимы ее колебаний близки к гармоническим. Применим этот метод к исследованию уравнения Дуффинга, описывающего движение автономной консервативной системы с симметричной

характеристикой позиционной силы ($a = \text{const}$),

$$a \ddot{q} + c_1 q + c_2 q^3 = 0.$$

Примером может служить система, приведенная на рис. 3.2, где однородный диск массой m катится без проскальзывания по направляющей, взаимодействуя с пружиной, жесткость которой c , а длина в недеформированном состоянии l_0 ($l_0 < l$).

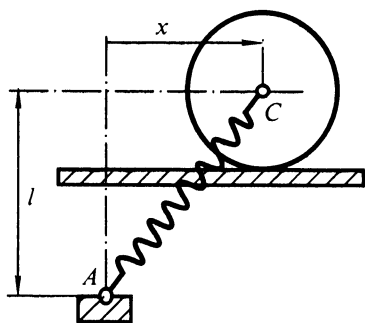


Рис. 3.2

Соответствующий обобщенной координате $q = x$ инерционный коэффициент $a = 3m/2$. Квазиупругую характеристику при отклонениях $x < l$ аппроксимируем полиномом третьей степени:

$$F(x) = cx(1 - l_0/\sqrt{l^2 + x^2}) = cx \left[1 - \frac{l_0}{l} \left(1 + \frac{x^2}{l^2} \right)^{-1/2} \right] \approx \\ \approx cx \left[1 - \frac{l_0}{l} \left(1 - \frac{x^2}{2l^2} \right) \right] = c_1 x + c_2 x^3,$$

где $c_1 = c(l - l_0)/l$; $c_2 = cl_0/(2l^3)$.

Обозначим $\omega_0^2 = c_1/a$, $e = c_2/c_1$ и приведем уравнение Дуффинга к каноническому виду

$$\ddot{q} + \omega_0^2(q + eq^3) = 0. \quad (3.5)$$

Выполнив подстановку $\ddot{q} = \dot{q} \frac{d\dot{q}}{dq}$, получим уравнение фазовых траекторий в виде

$$y^2 + q^2(1 + eq^2/2) = C,$$

где $y = \dot{q}/\omega_0$.

В момент наибольшего отклонения системы от положения равновесия, т. е. при $q = A$, где A — амплитуда координаты q , $y = 0$, и, следовательно, $C = A^2(1 + eA^2/2)$. Тогда уравнение фазовой траектории примет вид

$$y^2 = (A^2 - q^2)[1 + \mu(1 + q^2/A^2)],$$

где $\mu = eA^2/2$ — безразмерный параметр нелинейности.

Это уравнение четвертой степени описывает на фазовой плоскости овал (рис. 3.3), вытянутый вдоль оси ординат в случае нелинейной системы с жесткой характеристикой ($e > 0$) и сжатый — в случае мягкой характеристики ($e < 0$).

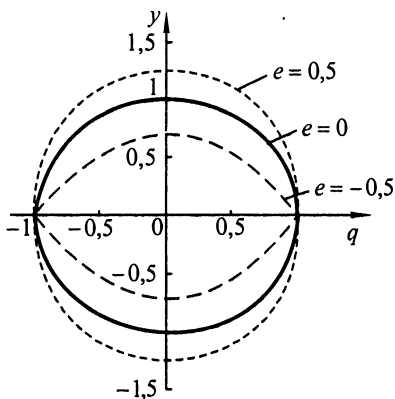


Рис. 3.3

Будем искать периодическое решение уравнения (3.5) в виде $q = A \sin \psi$, где $\psi = \omega t + \theta$. Разложим функцию $f(q) = \omega_0^2(q + eq^3)$ в ряд Фурье:

$$f(q) = f(A \sin \psi) = \alpha_0 + \sum_n [\alpha_n \cos n\psi + \beta_n \sin n\psi].$$

Так как функция $f(q)$ симметричная и нечетная, коэффициенты ряда

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) d\psi = 0, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \cos n\psi d\psi = 0,$$

и разложение будет содержать только гармоники $\sin n\psi$, т. е.

$$f(q) = \beta_1 \sin \psi + \beta_2 \sin 2\psi + \dots$$

Приближенность метода гармонической линеаризации состоит в том, что учитывают только первую гармонику, для которой коэффициент

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{\omega_0^2}{\pi} \int_0^{2\pi} (A \sin^2 \psi + eA^3 \sin^4 \psi) d\psi = \omega_0^2 A \left(1 + \frac{3}{4} eA^2 \right). \end{aligned}$$

Подставив решение и разложение $f(q)$ в уравнение (3.5), получим соотношение

$$-\omega^2 A \sin \psi + \beta_1 \sin \psi = 0,$$

откуда следует зависимость частоты свободных колебаний нелинейной системы от амплитуды:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} eA^2 \right). \quad (3.6)$$

Эта зависимость для нелинейной системы с жесткой квазиупругой характеристикой ($e > 0$) показана на рис. 3.4 сплошной линией. При малых амплитудах частота ω свободных колебаний нелинейной системы близка к собственной частоте ω_0 линейной системы. С ростом амплитуды частота колебаний возрастает, и чем больше параметр нелинейности, тем более резким является это возрастание. У системы с мягкой характеристикой

($e < 0$) частота колебаний с ростом амплитуды уменьшается (см. рис. 3.4, штриховая линия).

В линейных консервативных системах собственная частота определяется исключительно ее жесткостью и инерционностью системы. Свободные колебания такой системы имеют период, не зависящий от условий возбуждения, а следовательно, и от амплитуды колебаний. Такое свойство линейных систем называют *изохронностью*. Нелинейные системы в большинстве своем неизохронны.

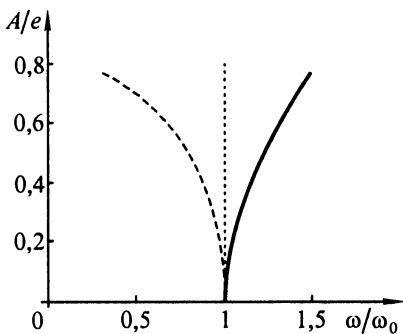


Рис. 3.4

3.2.2. Системы с кусочно-линейными характеристиками

Типичные квазиупругие характеристики и соответствующие им системы с зазором (*а*), с натягом (*б*) и с упругими ограничителями (*в*) показаны на рис. 3.5. Характеристики могут быть как симметричными, так и несимметричными.

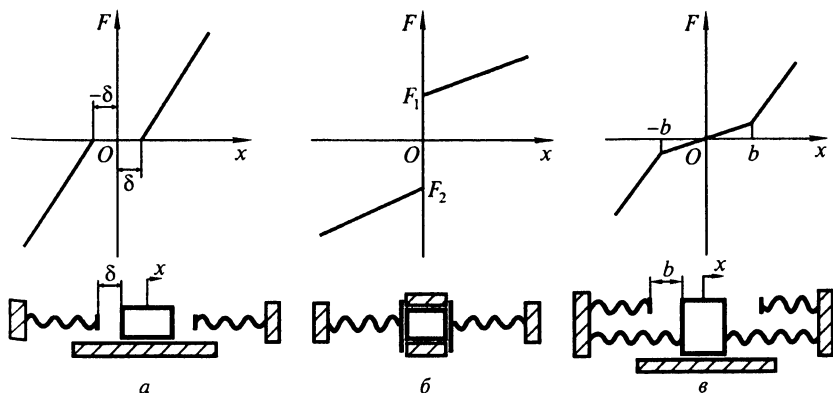


Рис. 3.5

Несмотря на существенную нелинейность данных систем, можно, используя метод припасовывания, получить точное решение для периодических режимов их движения. Согласно этому методу, поэтапно решают линейные задачи, при этом конечные условия движения на каком-либо этапе принимают в качестве начальных на следующих. Период колебаний системы вычисляют как сумму времен движения системы на всех этапах.

Рассмотрим, например, систему с зазором с симметричной характеристикой, уравнение которой

$$f(q) = \begin{cases} c(q - \delta), & \text{если } q > \delta; \\ 0, & \text{если } |q| < \delta; \\ -c(q + \delta), & \text{если } q < -\delta. \end{cases}$$

Пусть начальные условия имеют вид $q(0) = A > \delta$, $\dot{q}(0) = 0$. На первом этапе $\delta < q < A$ движение системы описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + \omega_0^2(q - \delta) = 0,$$

где $\omega_0^2 = c/a$.

Из уравнения фазовой траектории $y^2 + (q - \delta)^2 = (A - \delta)^2$ следует, что на этом этапе она представляет собой четверть окружности с центром в точке $(\delta, 0)$ и радиусом, равным $A - \delta$. Вычислим время движения системы на этом этапе:

$$t_1 = \int_A^\delta \frac{dq}{\dot{q}} = - \int_A^\delta \frac{dq}{\omega_0 \sqrt{(A - \delta)^2 - (q - \delta)^2}} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left(\frac{q - \delta}{A - \delta} \right) \Big|_\delta^A = \frac{\pi}{2\omega_0}.$$

В конце первого этапа $q_1 = \delta$, $y_1 = A - \delta$, $\dot{q}_1 = \omega_0(A - \delta)$.

На втором этапе $0 < q < \delta$ имеем $\ddot{q} = 0$, $\dot{q} = \dot{q}_1 = \text{const}$, и время движения составит $t_2 = \delta/\omega_0(A - \delta)$.

На последующих этапах фазовая траектория отображается симметрично и имеет вид, показанный на рис. 3.6, а. Период

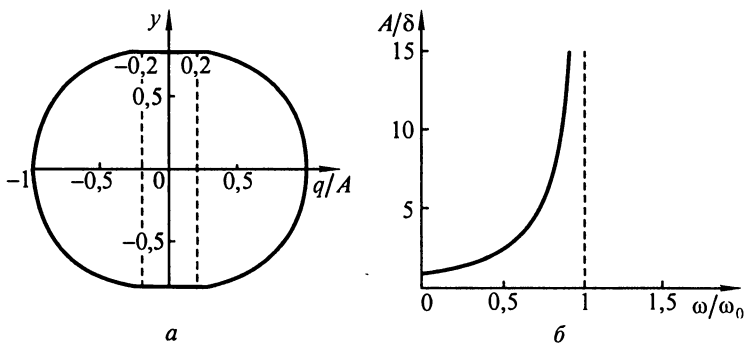


Рис. 3.6

колебаний системы $T = 4(t_1 + t_2)$, зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды будет определяться соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{2\delta}{\pi(A - \delta)}}$$

(рис. 3.6, б).

3.3. Автономные диссипативные системы

Периодические в строгом смысле ($q(t + T) = q(t)$) режимы колебаний в таких системах невозможны, и основной задачей исследования является определение закона затухания колебаний, т. е. закона убывания последовательных наибольших отклонений системы от положения равновесия (последовательных «амплитуд»). К простейшим нелинейным диссипативным системам относятся системы, нелинейность которых определяется только нелинейностью силы сопротивления. Уравнение движения таких систем приводится к виду

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = f(q, \dot{q}), \quad (3.7)$$

где $f(q, \dot{q}) = Q_d(q, \dot{q})/a$.

Если силы сопротивления малы по сравнению с потенциальными силами и силами инерции, движение диссипативной системы будет колебательным, а уравнение (3.7) — квазилинейным.

Эффективным методом исследования систем такого типа является метод осреднения. Полагают, что закон движения системы имеет вид $q = A \cos \psi$, где $A = A(t)$; $\psi = \omega_0 t + \theta$; $\theta = \theta(t)$. Все переменные процесса разбивают на две группы — быстро и медленно меняющиеся, и, наконец, темп изменения медленно меняющихся переменных (в данном случае A и θ) принимают постоянным, равным их среднему значению за период 2π быстро меняющейся переменной (фазы ψ).

Следуя методу вариации постоянных интегрирования, вычислим производную

$$\dot{q} = -\omega_0 A \sin \psi + \dot{A} \cos \psi - A \dot{\theta} \sin \psi$$

и примем

$$\dot{A} \cos \psi - A \dot{\theta} \sin \psi = 0.$$

Тогда

$$\dot{q} = -\omega_0 A \sin \psi, \quad \ddot{q} = -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - \omega_0 A (\omega_0 + \dot{\theta}) \cos \psi,$$

и из уравнения (3.7) получим еще одно соотношение для производных медленно меняющихся переменных:

$$\dot{A} \sin \psi + A \dot{\theta} \cos \psi = -f(q, \dot{q})/\omega_0.$$

Решая систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{1}{\omega_0} f(q, \dot{q}) \sin \psi = -\frac{1}{\omega_0} f(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \sin \psi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{\omega_0 A} f(q, \dot{q}) \cos \psi = -\frac{1}{\omega_0 A} f(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \cos \psi. \end{aligned}$$

Осредняя правые части, получаем так называемые укороченные уравнения, определяющие процесс изменения амплитуды

$$\frac{dA}{dt} = \Phi(A) = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(q, \dot{q}) \sin \psi d\psi$$

и поправку на частоту

$$\frac{d\theta}{dt} = \Psi(A) = -\frac{1}{2\pi\omega_0 A} \int_0^{2\pi} f(q, \dot{q}) \cos \psi d\psi, \quad (3.8)$$

где $\omega = d\psi/dt = \omega_0 + \dot{\theta}$.

Рассмотрим для примера влияние идеализированного ($F_0 = \text{const}$) сухого трения на линейную систему, совершающую движение в соответствии с уравнением

$$a\ddot{q} + cq = -F_0 \dot{q}/|\dot{q}|,$$

или

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = f(\dot{q}),$$

где $\dot{q}/|\dot{q}| = \begin{cases} -1, & \text{при } \dot{q} < 0; \\ 1, & \text{при } \dot{q} > 0, \end{cases}$ $f(\dot{q}) = -b\omega_0^2 \dot{q}/|\dot{q}|$, $b = F_0/a$ — ширина так называемой зоны застоя.

Вычисляя поправку на частоту

$$\dot{\theta} = \Psi(A) = \frac{b\omega_0}{2\pi A} \left(-\int_0^\pi \cos \psi d\psi + \int_\pi^{2\pi} \cos \psi d\psi \right) = 0,$$

обнаруживаем, что сухое трение не влияет на частоту, т. е. система изохронна.

Средняя скорость убывания амплитуды

$$\frac{dA}{dt} = \Phi(A) = \frac{b\omega_0}{2\pi} \left(-\int_0^\pi \sin \psi d\psi + \int_\pi^{2\pi} \sin \psi d\psi \right) = -2b\omega_0/\pi$$

постоянна, а следовательно, убывание происходит по закону арифметической прогрессии $A_{i+1} = A_i - \delta A$, где $\delta A = 2b\omega_0 T/\pi = 4b$ — разность прогрессии. Фазовые траектории системы на плоскости (y, q) описывают дифференциальным уравнением

$$y dy + \left(q + b \frac{y}{|y|} \right) dq = 0$$

и представляют собой спирали, состоящие из припасованных полуокружностей (рис. 3.7, а), уравнения которых имеют вид

$$y^2 + (q - b)^2 = (A_i - b)^2$$

— в нижней полуплоскости ($y < 0$) и

$$y^2 + (q + b)^2 = (A'_i + b)^2$$

— в верхней полуплоскости ($y > 0$), причем $A'_i = -(A_i - 2b)$, $A_{i+1} = (A'_i + 2b) = A_i - 4b$.

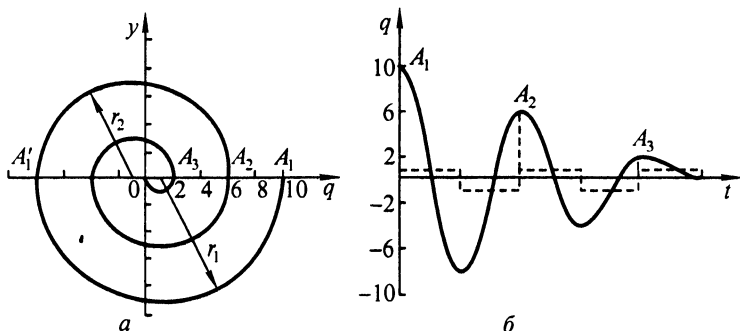


Рис. 3.7

Система не стремится асимптотически к положению равновесия; как только наибольшее отклонение оказывается меньше, чем ширина зоны застоя (изображающая точка попадает в полосу от $-b$ до b), движение прекращается.

В пределах каждой половины периода колебаний дифференциальное уравнение движения системы является линейным неоднородным уравнением с постоянной правой частью и может быть проинтегрировано. Закон изменения обобщенной координаты во времени определяют методом припасовывания решений, соответствующих этапам движения с $\dot{q} < 0$ и $\dot{q} > 0$, а его вид показан на рис. 3.7, б.

В системе с линейным сопротивлением $f(\dot{q}) = -2\varepsilon\dot{q}$ средняя скорость

$$\frac{dA}{dt} = \Phi(A) = -\frac{\varepsilon A}{\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = -\varepsilon A.$$

Тогда

$$A(t) = A_0 \exp(-\varepsilon t),$$

т. е. убывание амплитуды происходит по закону геометрической прогрессии $A_{i+1} = A_i \Delta'$, где $\Delta' = \exp(-\varepsilon T)$ — знаменатель прогрессии (величина, обратная декременту колебаний); $T = 2\pi/\omega_0$ — период колебаний. Данный результат вполне согласуется с результатами, полученными в рамках линейной теории колебаний.

В системе с квадратичным сопротивлением $f(\dot{q}) = -\varepsilon\dot{q}|\dot{q}|$ имеем

$$\frac{dA}{dt} = \Phi(A) = \frac{\varepsilon\omega_0 A^2}{2\pi} \left(-\int_0^{\pi} \sin^3 \psi d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^3 \psi d\psi \right) = -\frac{4\varepsilon\omega_0 A^2}{3\pi},$$

откуда

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + A_0 k t},$$

где $k = 4\epsilon\omega_0/3\pi$.

В этом случае убывание амплитуды происходит по закону геометрической прогрессии $A_{i+1} = A_i \Delta'_i$ с переменным знаменателем $\Delta'_i = 1/(1 + kA_i T)$.

3.4. Неавтономные системы. Вынужденные колебания

Вынужденными называются колебания, которые возбуждаются и поддерживаются действием на систему извне, если это действие проявляется в форме возмущающей силы — силы, не зависящей от характеристик движения системы и являющейся явной функцией времени. Другой формой проявления воздействия на систему является изменение во времени ее параметров; возбуждаемые при этом колебания называются *параметрическими*.

Исследование вынужденных колебаний даже простейших нелинейных систем обычно связано со значительными математическими трудностями. Поэтому, чтобы установить наиболее характерные особенности этих колебаний, ограничимся частным случаем — гармоническим возбуждением колебаний без учета трения в системе, описываемой уравнением Дуффинга

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q(1 + eq^2) = \frac{P_0}{a} \sin pt. \quad (3.9)$$

Полагая, что в первом приближении уравнение (3.9) имеет периодическое решение вида $q = A \sin pt$, преобразуем его к виду

$$\ddot{q} + p^2 q = (p^2 - \omega_0^2)q - e\omega_0^2 q^3 + \frac{P_0}{a} \sin pt.$$

Подставляя q и учитывая, что $\sin^3 \psi = \frac{3}{4} \sin \psi - \frac{1}{4} \sin 3\psi$, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{q} + p^2 q = & \left[(p^2 - \omega_0^2)A - \frac{3}{4}e\omega_0^2 A^3 + \frac{P_0}{a} \right] \sin pt - \\ & - \frac{1}{4}e\omega_0^2 A^3 \sin 3pt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение уравнения (3.10) не должно содержать неограниченно возрастающих во времени (так называемых секулярных) членов. Следовательно

$$\left[p^2 - \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} e A^2 \right) \right] A + \frac{P_0}{a} = 0,$$

откуда

$$A = \frac{P_0/a}{\omega^2 - p^2},$$

где $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} e A^2 \right)$.

Уравнение (3.9) принимает вид

$$\ddot{q} + p^2 q = \frac{1}{4} e \omega_0^2 A^3 \sin 3pt.$$

В его общем решении

$$q = A_1 \sin pt + A_2 \cos pt + A_3 \sin 3pt$$

A_3 определим методом неопределенных коэффициентов:

$$A_3 = \frac{1}{4} \frac{e \omega_0^2 A^3}{p^2 - (3p)^2} = -\frac{e \omega_0^2 A^3}{32 p^2},$$

а постоянные A_1 и A_2 — из условий периодичности (при $t = 0$ $q = 0$, при $t = \pi/4p$ $q = A$):

$$A_1 = A = A_3 \sin \frac{3\pi}{2} = A \left(1 - \frac{e \omega_0^2 A^2}{32 p^2} \right); \quad A_2 = 0.$$

Таким образом, уже второе приближение периодического решения уравнения (3.9)

$$q = A_1 \sin pt + A_3 \sin 3pt$$

показывает, что наряду с гармониками основной частоты появляются гармоники кратных частот (супергармоники), т. е. при гармоническом возбуждении установившиеся вынужденные колебания нелинейной системы не будут гармоническими, а будут периодическими.

Рассмотрим далее частотные характеристики нелинейной системы. Принимая демпфирование линейным:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega_0^2 q (1 + e q^2) = \frac{P_0}{a} \sin pt, \quad (3.11)$$

ограничимся исследованием периодического режима колебаний в первом приближении, т. е. будем искать решение уравнения (3.11) в виде $q = A \sin \psi$, где $\psi = pt - \gamma$. Следуя методу гармонической линеаризации и используя полученные выше результаты, разложим характеристику нелинейной позиционной силы в ряд Фурье, удерживая первый член ряда

$$f(q) = \omega_0^2 q (1 + e q^2) = \beta_1 \sin \psi,$$

где $\beta_1 = \omega_0^2 A = \omega_0^2 A \left(1 + \frac{3}{4} e A^2 \right)$.

Подставляя q и $f(q)$ в уравнение (3.11):

$$\begin{aligned} & -p^2 A \sin \psi + 2\varepsilon p A \cos \psi + \beta_1 \sin \psi = \\ & = \frac{P_0}{a} \sin(\psi + \gamma) = \frac{P_0}{a} (\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma) \end{aligned}$$

и приравнивая коэффициенты при $\sin \psi$ и $\cos \psi$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} [\omega^2(A) - p^2] A &= (P_0/a) \cos \gamma; \\ 2\varepsilon p A &= (P_0/a) \sin \gamma, \end{aligned}$$

из которой определяем амплитуду и сдвиг фаз установившихся вынужденных колебаний:

$$A = \frac{P_0/a}{\sqrt{[\omega^2(A) - p^2]^2 + 4\varepsilon^2 p^2}}; \quad (3.12)$$

$$\gamma = \arctg \frac{2\varepsilon p}{\omega^2(A) - p^2}. \quad (3.13)$$

Выясним, как изменяются эти параметры при изменении частоты p возбуждения. Разделив числитель и знаменатель в формуле (3.12) на ω_0^2 , введем безразмерные величины: коэффициент расстройки частот $z = p/\omega_0$, коэффициент затухания $d = 2\varepsilon/\omega_0$, параметр нелинейности $\mu = 3el^2/4$, параметр нагру-

жения $A_0 = P_0 / a\omega_0^2 l$, амплитуду $\bar{A} = A/l$, где l — характерный размер. Например, для системы, показанной на рис. 3.2, $\mu = 3l_0/8(l - l_0)$, а $A_0 = P_0/F_0$. Здесь $F_0 = c(l - l_0)$ — сила натяжения пружины в положении равновесия.

Зависимость безразмерной амплитуды от частоты колебаний в удобной для численного решения форме имеет следующий вид:

$$f(z, d, \mu, A_0, \bar{A}) = \bar{A}^2 [(1 - z^2 + \mu \bar{A}^2)^2 + d^2 z^2] - A_0^2 = 0.$$

Видно, что резонансные свойства нелинейной системы зависят, как и в линейных системах, от добротности $D = 1/d$ и расстройки частот z , а кроме того, от параметров нелинейности μ и нагружения P_0 .

Зависимость угла сдвига фаз от частоты возбуждения в безразмерном виде определяется соотношением

$$\gamma = \arctg \frac{dz}{1 - z^2 + \mu \bar{A}^2}.$$

Ее рассчитывают параллельно с амплитудой, так как в отличие от линейных систем сдвиг фазы в нелинейных системах зависит от амплитуды.

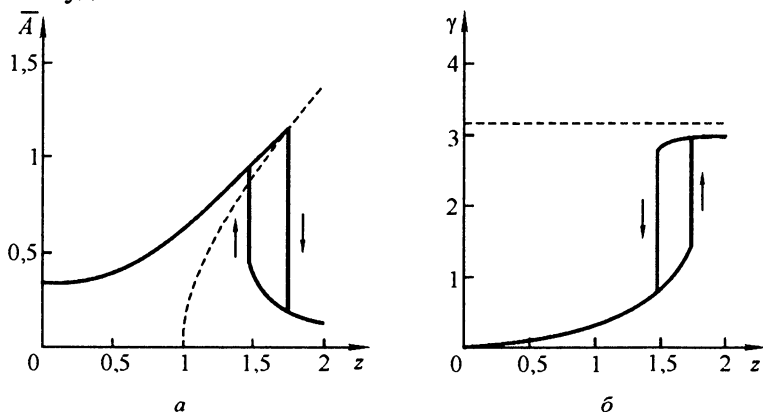


Рис. 3.8

Зависимость безразмерной амплитуды от частоты для системы, приведенной на рис. 3.2, с добротностью $D = 5$ ($d = 0,2$), параметрами нелинейности $\mu = 1,5$ ($l_0 = 0,8l$) и нагружения $A_0 = 0,4$ показана на рис. 3.8, а. Зависимость угла сдвига фаз той же системы от частоты изображена на рис. 3.8, б.

Анализ построенных зависимостей обнаруживает следующие особенности установившихся вынужденных колебаний в нелинейных системах.

1. Резонанс, т. е. колебания с наибольшими амплитудами, в нелинейной системе с жесткой характеристикой сдвинут в зону более высоких частот по сравнению с линейной системой в полном соответствии с ее амплитудной характеристикой (3.3) (штриховая линия на рис. 3.8, а). В системах с мягкой характеристикой резонанс смещен в зону более низких частот.

2. При достаточно высоких добротности системы и уровне возбуждения одной и той же частоте возбуждения могут отвечать периодические режимы колебаний системы с различными амплитудами. Так, для системы с уровнем возбуждения $A_0 = 0,4$ в зоне значений коэффициента расстройки частот $1,45-1,7$ возможны три режима, причем два из них с амплитудами, соответствующими верхней и нижней ветвям графика $\bar{A}(z)$, являются устойчивыми. Установление того или иного режима колебаний системы зависит от начальных условий.

3. Аналогичная неоднозначность наблюдается для сдвига фаз $\gamma(z)$ нелинейной системы.

Глава 4

АВТОКОЛЕБАНИЯ

4.1. Маятник с «отрицательным» трением

Пусть на негладкий вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω вал A с помощью муфты насажен маятник (рис. 4.1). Угловая скорость скольжения вала относительно маятника при этом равна

$$\omega_r = \Omega - \dot{\phi},$$

где $\dot{\phi}$ — угловая скорость маятника при колебаниях.

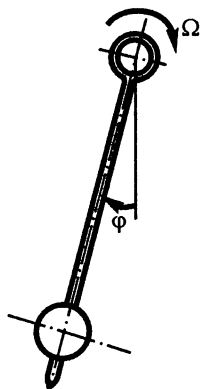


Рис. 4.1

При вращении вала между ним и муфтой возникают силы трения скольжения, зависящие от относительной скорости скольжения ω_r . Следовательно, и момент сил трения скольжения относительно оси вала будет зависеть от ω_r . Для большинства материалов, из которых могут быть изготовлены вал и муфта, момент сил трения будет изменяться как показано на рис. 4.2. При небольшой скорости скольжения момент

практически постоянен. Далее сначала при увеличении скорости его значение уменьшается а потом опять возрастает.

Уравнение малых угловых колебаний маятника можно записать так:

$$J\ddot{\phi} + h\dot{\phi} + mga\phi = M(\Omega - \dot{\phi}), \quad (4.1)$$

где J — момент инерции маят-

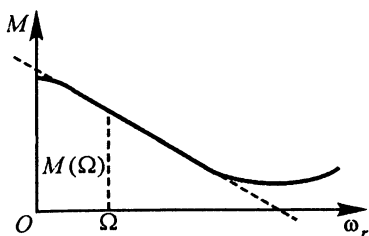


Рис. 4.2

ника от вертикали; $h\dot{\varphi}$ — момент сил вязкого сопротивления среды; m — масса маятника; g — ускорение свободного падения; a — расстояние от центра тяжести маятника до оси; $M = M(\Omega - \dot{\varphi})$ — момент сил трения о вал.

При малых колебаниях маятника ($|\dot{\varphi}| \leq \Omega$), разложив момент трения в ряд Тейлора и ограничившись только линейными членами разложения, представим уравнение колебаний маятника в виде

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + mga\varphi = M(\Omega) - b\dot{\varphi},$$

где $b = (\partial M / \partial \omega)_{\Omega}$.

Изменив начало отсчета угла отклонения φ или введя новую координату $\psi = \varphi - M(\Omega)/mga$, получаем уравнение колебаний маятника

$$J\ddot{\psi} + (h + b)\dot{\psi} + mga\psi = 0,$$

эквивалентное по структуре уравнению свободных колебаний. Коэффициент затухания в этом случае будет равен

$$\varepsilon = \frac{1}{2J}(h + b).$$

Если $b = 0$, то подвес маятника можно считать идеальным, поскольку момент трения не влияет на затухание колебаний маятника. Если скорость вращения вала Ω такова, что $b < 0$, как показано на рис. 4.2, то трение о вал будет как бы отрицательным и затухание колебаний уменьшится по сравнению с затуханием колебаний этого же маятника на идеальном подвесе.

При отрицательном значении b , большим по модулю значения h , система имеет отрицательное затухание, и от любого небольшого возмущения в ней начинаются *нарастающие* колебания. Действительно, при колебаниях маятника на вращающемся валу за полупериод, когда вал и маятник движутся в одну сторону, момент трения вала о муфту как бы «помогает» колебаниям маятника, и работа момента трения увеличивает

энергию колебаний. За следующий полупериод, когда вал и маятник движутся в разные стороны, скорость скольжения становится больше, а момент трения меньше, чем в предыдущем полупериоде, и работа момента трения будет меньше. Следовательно, за целый период вал передает энергию маятнику, и, если эта работа превышает энергию, теряемую вследствие вязкого сопротивления среды, амплитуда колебаний маятника возрастает. Но как только колебания достигнут таких значений, что момент трения будет выходить за пределы линейного участка характеристики (см. рис. 4.2), дальнейшее движение маятника будет определяться нелинейным уравнением. При некотором значении амплитуды колебаний возрастание прекратится, и в системе возникнут устойчивые периодические колебания (автоколебания).

Итак, рассматривая свободные колебания, мы имеем дело с колебаниями двух классов, различие которых заключается в знаке коэффициента затухания ε : затухающими и нарастающими. Существенно, что для первых линейная теория дает полное описание процесса и пренебрежение нелинейными членами во многих случаях не ведет к принципиальному расхождению теории с опытом, для вторых — линейная теория всегда приводит к противоречию с опытом, поскольку она в состоянии правильно описать только начальную стадию процесса. Однако линейная теория и в этом случае вполне надежно констатирует условие $\varepsilon < 0$, при котором в системе могут возникнуть нарастающие колебания. Это условие называют *условием самовозбуждения* системы.

На практике определение этого условия является очень существенным.

В заключение отметим следующее. Формально можно утверждать, что при $\varepsilon = 0$ рассмотренная система совершает в области линейности *незатухающие* колебания с любой амплитудой. В действительности в реальной системе точное равенство $\varepsilon = (h + b)/2J = 0$ невозможно. Физические параметры при изготовлении имеют поле допуска, а с течением времени, кроме того, немного изменяются, поэтому значение ε может незначительно

отклоняться от нуля в ту или другую сторону. Изменение же знака ϵ приводит к принципиальному изменению характера колебаний в системе.

4.2. Генератор электромагнитных колебаний

Схема генератора электромагнитных колебаний показана на рис. 4.3. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности L , сопротивления R и конденсатора C и находящийся в анодной цепи лампы, представляет собой основную колебательную систему. Катушка индуктивности L' и катодная лампа составляют цепь обратной связи.

Механизм возникновения колебаний можно представить так. От какого-либо небольшого случайного толчка в контуре L, R, C возникли свободные

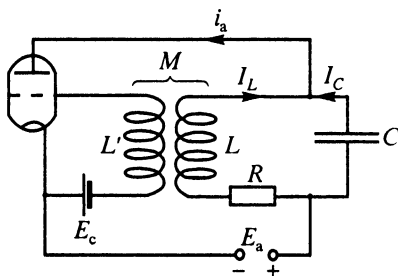


Рис. 4.3

колебания, которые через катушку L' воздействуют на сетку лампы и тем самым изменяют анодный ток i_a , идущий через лампу и контур L, R, C . Ток i_a , проходя через этот контур, усиливает в нем колебания. Амплитуда колебаний будет возрастать до тех пор, пока колебания анодного тока в контуре не достигнут наибольшей возможной величины. Процесс нарастания колебаний, как уже отмечалось, называется самовозбуждением.

Рассмотрим колебательный процесс в генераторе.

Пусть в контуре по какой-либо причине возникли колебания; тогда они будут проходить во всех цепях. Обозначим ток через конденсатор I_C , ток через катушку контура I_L (см. рис. 4.3). Запишем уравнение для напряжений в контуре

$$L \dot{I}_L + R I_L - \frac{1}{C} \int I_C dt = 0 \quad (4.2)$$

и условие равенства токов в разветвлении цепи

$$i_a = I_L + I_C. \quad (4.3)$$

Обозначив $\omega^2 = 1/LC$ и $2\varepsilon = R/L$ и исключив из (4.2) и (4.3) I_C , получим основное уравнение генератора электромагнитных колебаний

$$\ddot{I}_L + 2\varepsilon \dot{I}_L + \omega^2 I_L = \omega^2 i_a. \quad (4.4)$$

Анодный ток лампы i_a зависит от разности потенциалов между сеткой и катодом U_c и между анодом и катодом U_a и является функцией $U_c + DU_a$. Величину

$$U_y = U_c + DU_a \quad (4.5)$$

называют управляющим напряжением, а константу $D \ll 1$ *проницаемостью* лампы.

Зависимость $i_a(U_y)$ обычно нелинейная, примерный вид ее показан на рис. 4.4. Точка A на характеристике лампы, соответствующая режиму лампы в

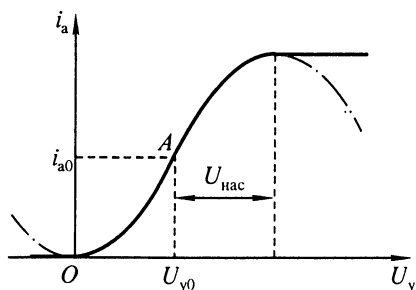


Рис. 4.4

отсутствии колебаний, называется *рабочей точкой*. Если омическим сопротивлением контура можно пренебречь, то управляющее напряжение в рабочей точке

$$U_{y0} = E_c + DE_a, \quad (4.6)$$

где E_c , E_a — постоянное напряжение сеточной и анодной батареи соответственно.

В том случае, когда рабочая точка выбрана на середине характеристики, последнюю можно приближенно представить полиномом третьей степени:

$$i_a = i_{a0} + S \left[\Delta U - \frac{(\Delta U)^3}{3U_{нас}^2} \right], \quad (4.7)$$

где $\Delta U = U_y - U_{y0}$ — отклонение действующего управляющего напряжения от равновесного. Теоретическая кривая (4.7) отмечена на рис. 4.4 пунктиром.

Крутизна характеристики S , представляющая собой производную от тока по напряжению в рабочей точке A , и напряжение насыщения $U_{\text{нас}}$, которое, как можно видеть из формулы (4.7), равно такому значению ΔU , при котором $di_a/d(\Delta U) = 0$, определяются свойствами лампы.

Заметим, что теоретическая кривая, описываемая уравнением (4.7), только на некотором участке вблизи точки A , шириной примерно $2U_{\text{нас}}$, будет близка к действительной зависимости. Однако такое приближение, учитывающее нелинейную зависимость анодного тока от управляющего напряжения, будет точнее отображать реальный процесс, чем предположение о линейной зависимости между i_a и U_y :

$$i_a = i_{a0} + S\Delta U.$$

Установим связь между управляющим напряжением и колебаниями в контуре. Согласно схеме, приведенной на рис. 4.3, напряжение на аноде лампы (разность потенциалов между анодом и катодом)

$$U_a = E_a - L \frac{dI_L}{dt} - RI_L. \quad (4.8)$$

Полагая, что во время процесса ток, текущий через сетку, равен нулю, запишем напряжение на сетке лампы

$$U_c = E_c + M \frac{dI_L}{dt}. \quad (4.9)$$

Знак коэффициента M индуктивной связи между катушками зависит от относительного направления витков в катушках. Перемена концов в любой из катушек (при неизменном их взаимном расположении) приводит к изменению знака коэффициента.

Подставляя уравнения (4.8) и (4.9) в формулу (4.2), получаем

$$U_y = U_c + DU_a = E_c + DE_a + (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L. \quad (4.10)$$

С учетом (4.6) изменение управляющего напряжения можно записать так:

$$\Delta U = (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L. \quad (4.11)$$

Предполагая, что в генераторе имеют место синусоидальные или близкие к ним процессы с частотой, близкой к собственной частоте ω , последним членом в уравнении (4.11) можно пренебречь. Действительно, член $DLdI_L/dt$ имеет амплитуду $DL\omega I_{L0}$, где I_{L0} — амплитуда тока, а DRI_L — амплитуду DRI_{L0} , которая в $\omega L/R$ раз меньше, чем $DL\omega I_{L0}$ ($\omega L/R \gg 1$).

Введем новую переменную $x = I_L - i_{a0}$. Тогда уравнение (4.4) с учетом характеристики лампы (4.7) и выражения (4.11) после преобразований принимает вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\alpha - \gamma \dot{x}^2) \dot{x}, \quad (4.12)$$

где $\alpha = \omega^2 (MS - LSD - RC)$; $\gamma = \omega^2 \frac{S(M - LD)^3}{3U_{\text{нас}}^2}$.

Таким образом, анализ процессов в генераторе сводится к решению и исследованию нелинейного дифференциального уравнения (4.12), содержащего $\dot{x}^3$. Прежде чем к этому перейти, отметим, что важный практический вопрос о возбуждении колебаний в генераторе или, как говорят, о *самовозбуждении колебаний* можно решать путем линейного приближения уравнения (4.12), полагая $\gamma = 0$. Фактически это означает, что здесь рассматриваются только малые колебания около состояния равновесия, при которых характеристику лампы (4.7) можно считать линейной (см. рис. 4.4). Тогда вместо (4.12) можно принять

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (4.13)$$

Из этого уравнения следует, что колебания будут нарастать, если $\alpha > 0$, т. е.

$$MS - LSD - RC > 0.$$

Так как слагаемое LSD обычно очень мало, то получаем условие *самовозбуждения* в виде

$$M > RC/S \text{ или } S > RC/M.$$

Рассмотрим теперь решение нелинейного уравнения генератора. Регулярных методов решения нелинейных уравнений не существует, имеются приближенные аналитические методы. Для решения уравнения (4.12) применим *метод переменной амплитуды*,

предложенный Ван дер Полем, точное математическое обоснование которого было дано Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси. Решение уравнения (4.12) будем искать в виде

$$x(t) = A(t) \cos \omega t, \quad (4.14)$$

где $A(t)$ — медленно меняющаяся функция времени t . Это означает, что при изменении t на несколько периодов $T = 2\pi/\omega$ значение $A(t)$ можно считать практически неизменным. Условно $A(t)$ можно назвать амплитудой.

Справедливость решения (4.12) в виде (4.14) можно легко представить себе, если величины α и γ достаточно малы. Действительно, при $\alpha \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$ решение (4.12) будет чисто гармоническим; если α и γ немного больше нуля, решение *должно быть близко* к гармоническому; при больших α и γ предположение (4.14) будет несправедливым. Но в случае генератора почти гармонических колебаний значения α и γ действительно малы, и предположение (4.14) имеет все основания.

Условия медленного изменения $A(t)$ математически можно записать так:

$$\begin{aligned} T \frac{dA}{dt} \ll A \quad \text{или} \quad \frac{dA}{dt} \ll \omega A, \\ T \frac{d^2 A}{dt^2} \ll \frac{dA}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 A}{dt^2} \ll \omega^2 A. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Подставив (4.14) в уравнение генератора (4.12), находим

$$\begin{aligned} -2 \frac{dA}{dt} \omega \sin \omega t + \frac{d^2 A}{dt^2} \cos \omega t = [\alpha - \gamma(-\omega A \sin \omega t + \\ + \frac{dA}{dt} \cos \omega t)^2](-\omega A \sin \omega t + \frac{dA}{dt} \cos \omega t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Принимая во внимание условия (4.15), после некоторых тригонометрических преобразований получаем следующее выражение для уравнения (4.16):

$$\left(2 \frac{dA}{dt} - \alpha A + \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^3 \right) \sin \omega t = \frac{1}{4} \gamma \omega^2 A^3 \sin 3\omega t + \text{малые члены.}$$

Далее предполагаем, что функция $A(t)$ представляет собой решение уравнения генератора. Тогда, пренебрегая членом с утроенной частотой 3ω , уравнение принимает более простой вид:

$$2 \frac{dA}{dt} - \alpha A + \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^3 = 0. \quad (4.17)$$

Теперь задача сводится к интегрированию уравнения (4.17) для амплитуды $A(t)$, которое можно представить так:

$$2 \int_{A_0}^A \frac{dA}{\left(\alpha - \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^2 \right) A} = t.$$

Выполняя интегрирование и некоторые преобразования, получаем зависимость

$$A(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4} \gamma \omega^2 - \left(\frac{3}{4} \gamma \omega^2 - \frac{\alpha}{A_0^2} \right) e^{-\alpha t}}}, \quad (4.18)$$

где A_0 — начальная амплитуда. При $t \rightarrow \infty$ имеем

$$A_\infty = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}}, \quad (4.19)$$

где A_∞ — амплитуда стационарного автоколебательного процесса.

График $A(t)$ показан на рис. 4.5. Амплитуда колебаний от некоторого начального значения A_0 возрастает почти по экспоненциальному закону, затем возрастание постепенно прекращается, и амплитуда становится постоянной.

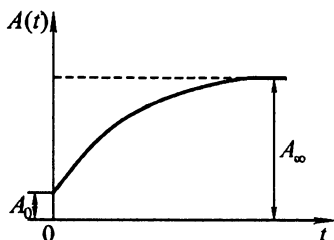


Рис. 4.5

Колебания принимают стационарный характер, т. е. в генераторе имеет место *стационарный автоколебательный процесс*.

Отметим, что только приближенно стационарный процесс можно представить как гармонические колебания с частотой ω и амплитудой A_∞ . В действительности стационарный автоколеба-

тельный процесс всегда *негармонический*, но по виду он достаточно близок к гармоническому, полученному приближенно теоретическим путем.

Чтобы убедиться, что найденное решение является стационарным периодическим процессом, необходимо исследовать его устойчивость. Это можно сделать, анализируя решение (4.18), или прямо по уравнению (4.17).

Действительно, пусть $A(t) > A_\infty$, т. е. амплитуда больше стационарной, тогда $dA/dt < 0$. Следовательно, амплитуда убывает с течением времени и режим колебаний стремится к стационарному. При $A(t) < A_\infty$ всегда $dA/dt > 0$.

Таким образом, амплитуда колебаний $A(t)$ при любых начальных условиях всегда стремится к стационарному значению A_∞ . Следовательно, после переходного режима, обусловленного возмущениями, в генераторе возникнет устойчивый стационарный периодический процесс *автоколебаний*.

Автоколебания на *фазовой плоскости* изображаются так называемым *предельным циклом* (рис. 4.6). Предельный цикл есть замкнутая кривая на фазовой плоскости, к которой в пределе при $t \rightarrow \infty$ стремятся все интегральные кривые. Изображающая точка внутри цикла движется по раскручивающейся спирали и приближается к предельному циклу; вне цикла точка движется по скручивающейся спирали и также приближается к предельному циклу.

Предельный цикл — это *стационарный режим* с определенной амплитудой, не зависящей от начальных условий и определяющейся только устройством системы. Существование предельного цикла на фазовой плоскости есть основной признак автоколебательной системы вообще. В авто-

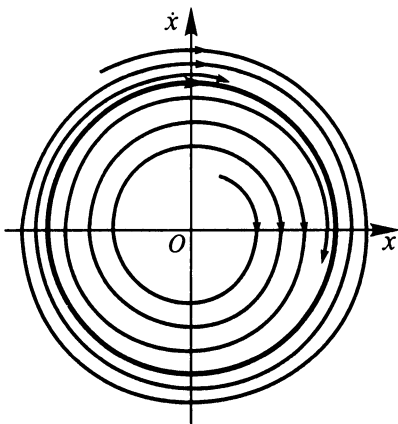


Рис. 4.6

колебательном процессе начальная фаза колебаний может быть любой, и поэтому никакой роли в самом процессе она не играет.

Таким образом, сравнительно простой приближенный метод переменной амплитуды позволяет достаточно точно описать физическую картину процессов, возникающих в генераторе, и достаточно точно определить параметры колебаний.

4.3. Общие сведения об автоколебаниях

На рассмотренных простейших примерах выявлены некоторые характерные особенности автоколебаний.

Автоколебания принципиально отличаются от остальных колебательных процессов тем, что для поддержания стационарного режима в таких системах *не нужно периодического воздействия извне*. Колебания скрипичной струны при равномерном движении смычка, колебания в электромагнитном генераторе радиоволн, колебания маятника на равномерно вращающемся валу, колебания маятника часов — типичные примеры автоколебательных процессов.

Во всякой реальной системе при стационарном колебательном процессе энергия переходит в тепло или передается другим окружающим телам. Поэтому каждая автоколебательная система должна иметь источник энергии, который восполнял бы ее расход. Обычно источник энергии осуществляет постоянное во времени воздействие. Устройство автоколебательной системы таково, что она имеет обратную связь между основной колебательной системой и источником энергии. С помощью обратной связи от источ-

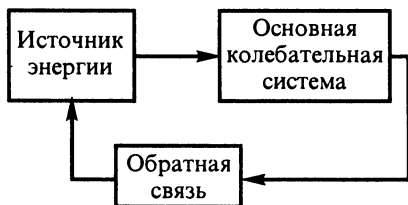


Рис. 4.7

ника энергия отдельными порциями отбирается и таким образом на основную колебательную систему осуществляется переменное воздействие, которое и поддерживает стационарный колебательный процесс.

При анализе автоколебательных систем полезно различать следующие ее основные элементы: 1) основную колебательную систему, 2) источник энергии, 3) обратную связь, управляющую

отбором энергии от источника (рис. 4.7). Основная колебательная система — это звено, задающее частоту автоколебаний. Такая система в изолированном виде способна совершать затухающие колебания. Обратная связь связывает основную колебательную систему с источником энергии. Колебания в основной системе влияют через обратную связь на источник энергии, который дает переменную силу, действующую на колебания в основной системе.

В маятнике, насаженном на вращающийся вал, основной колебательной системой является маятник, а обратной связью — зависимость момента трения от скорости скольжения, имеющая падающую характеристику (см. рис. 4.2). В ламповом генераторе основной колебательной системой является контур L, R, C , а обратной связью — сетка с катушкой индуктивности L' . В обоих примерах источники энергии — вращающийся с постоянной скоростью вал и электрические батареи в ламповом генераторе — колебательными свойствами не обладают.

Основные характерные особенности автоколебательного процесса:

- 1) самовозбуждение колебаний,
- 2) зависимость частоты и амплитуды установившихся автоколебаний только от параметров системы;
- 3) произвольность фазы автоколебаний.

Здесь уместно вспомнить, что при свободных колебаниях частота определяется параметрами системы, а амплитуда и фаза — начальными условиями; при вынужденных колебаниях частота определяется внешней силой, а амплитуда и фаза — параметрами системы и внешней силой.

4.4. Энергетические соотношения

Как уже отмечалось, автоколебания — это стационарные нелинейные колебания, в которых приток энергии в систему от источника равен расходу энергии, например, на преодоление неупругих сопротивлений. Качественную картину развития автоколебаний удобно наблюдать, рассматривая энергетические соотношения. Обозначим $E_{(+)}$ — приток энергии в систему от источника, $E_{(-)}$ — расход энергии системой. В нелинейной

системе энергия колебаний зависит от амплитуды нелинейным образом. На рис. 4.8 для примера показаны графики энергий автоколебательной системы в зависимости от амплитуды колебаний A .

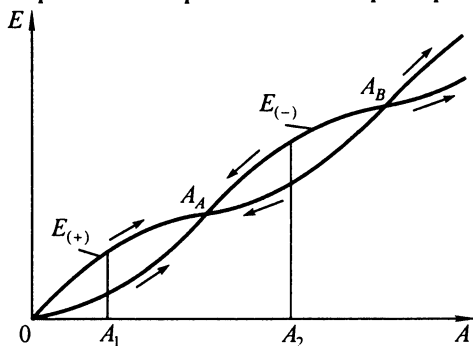


Рис. 4.8

В положении $A = 0$ автоколебательная система может находиться в покое или совершать равномерное движение. Такое положение или движение системы будем считать установившимся или невозмущенным. В

обоих случаях приток и расход энергии в систему, обусловленный колебаниями, равны нулю; система находится в равновесном состоянии, ее движение не возмущено.

Если системе сообщить малые возмущения, так что относительно невозмущенного движения возникнут малые колебания с начальной амплитудой A_1 , то приток энергии в систему будет больше ее расхода $E_{(+)} > E_{(-)}$ и колебания системы будут нарастать до того момента, когда их амплитуда станет равной A_A , т. е. $E_{(+)} = E_{(-)}$.

Из соотношения между $E_{(+)}$ и $E_{(-)}$ следует, что небольшие отклонения амплитуды колебаний от A_A в сторону ее уменьшения или увеличения приведут к тому, что колебания системы будут или возрастать, или убывать до амплитуды A_A . Режим колебаний с амплитудой A_A является устойчивым автоколебательным режимом.

При колебаниях с амплитудой A_B приток и расход энергии также равны между собой ($E_{(+)} = E_{(-)}$), однако эти колебания неустойчивые. В зависимости от возмущения они будут убывать до амплитуды A_A или, наоборот, возрастать.

На рис. 4.9 графики притока и расхода энергии показаны для автоколебательной системы, обладающей иными свойствами.

Малые возмущения с амплитудой A_1 приводят к тому, что колебания системы будут затухать и стремиться к установившемуся (невозмущенному) режиму, характеризуемому точкой $A = 0$. При малых возмущениях, таких, что $A_1 < A_A$, система устойчива. Однако при конечных возмущениях, когда $A_2 > A_A$, амплитуда колебаний начнет возрастать до A_B . Режим колебаний с амплитудой A_B является устойчивым автоколебательным режимом.

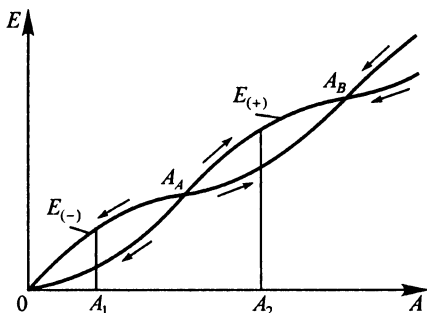


Рис. 4.9

Подобный анализ не только указывает на физические основы устойчивых или неустойчивых режимов движения, но, если удастся построить графики притока $E_{(+)}$ и расхода $E_{(-)}$ энергии колебаний, то и предугадать их.

4.5. Классический флаттер

Рассмотрим механизм возникновения опасных колебаний крыльев самолета, возникающих при определенных скоростях полета и приводящих чрезвычайно быстро (всего за несколько секунд после возникновения) к разрушению самолета. Это явление носит профессиональное название **флаттер** (англ. *flutter* — трепетание). В настоящее время его механизм достаточно изучен, и всякую новую конструкцию самолета рассчитывают так, чтобы полет был устойчивым и флаттер не мог возникнуть.

Механизм флаттера имеет чисто аэродинамическую природу. Энергия, необходимая для возбуждения колебаний, доставляется встречным потоком воздуха. При флаттере крыло совершает сложные колебания, но чтобы представить себе физическую сущность этого явления, достаточно рассмотреть плоские колебания в потоке воздуха жесткой модели крыла с упругими связями.

Для объяснения явления флаттера рассмотрим изгибно-крутильные колебания крыла. В модельной задаче им соответствуют поперечно-поворотные колебания. Чисто изгибные и чисто крутильные колебания невозможны: один вид колебаний порождает другой, так что они существуют совместно.

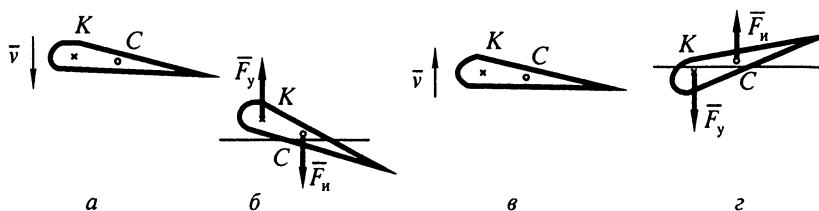


Рис. 4.10

Разберем механизм связи колебаний обоих видов. Возьмем сперва колебания крыла в отсутствии аэродинамического потока. В поперечном сечении крыла отметим две точки, определяющие механические свойства конструкции: центр тяжести — точка C , и центр жесткости сечения — точка K . Центром жесткости называется точка приложения равнодействующей $\bar{F}_y$ упругих сил, возникающих при деформации крыла. На рис. 4.10 показаны четыре последовательных положения крыла:

a — крыло движется вниз. Это среднее положение крыла, в котором отклонение и ускорение равны нулю, а скорость имеет наибольшее значение;

$б$ — крайнее нижнее положение. В этом положении скорость равна нулю, а отклонение и ускорение максимальны. На крыло действует сила упругости $\bar{F}_y$, направленная вверх и приложенная в центре жесткости K , а также сила инерции $\bar{F}_и$, направленная вниз и приложенная в центре масс C . Сила $\bar{F}_и$ создает инерционный момент относительно центра жесткости, закручивающий крыло по направлению движения часовой стрелки;

$в$ — крыло движется вверх. Это среднее положение, аналогичное a ;

$г$ — крайнее верхнее положение. Направления сил $\bar{F}_y$, $\bar{F}_и$ и инерционного момента относительно точки K изменились на противоположные по сравнению с положением $б$.

Таким образом, изгибные колебания порождают крутильные. Аналогичным образом можно показать, что крутильные колебания также через инерционную связь порождают изгибные. Но инерционная связь не приводит к поступлению энергии в колебательную систему, и нарастание колебаний в ней невозможно.

Посмотрим теперь, что получится, если крыло находится во встречном потоке воздуха. Этот поток создает распределенные по площади крыла аэродинамические силы, пропорциональные углу атаки α . Однако нас интересуют не эти постоянные силы, а те переменные, которые возникают дополнительно при колебаниях крыла. Будем считать их в первом приближении пропорциональными приращению угла атаки $\Delta\alpha$, обусловленному колебаниями крыла. Относительно точки, соответствующей центру жесткости, распределенные аэродинамические силы приводятся к главному вектору и главному моменту, которые называются аэродинамической подъемной силой Y_a и аэродинамическим моментом M_a , стремящимся закрутить крыло. *Углом атаки* называют угол между вектором скорости v набегающего потока и касательной плоскостью к обтекаемой поверхности. При колебаниях крыла приращение угла атаки определяется не только углом φ поворота крыла. Оно зависит также от скорости $\dot{y}$ изгибных колебаний крыла, в чем нетрудно убедиться, рассмотрев схему, приведенную на рис. 4.11.

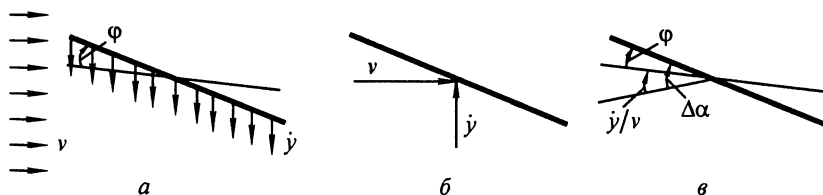


Рис. 4.11

Предположим, что крыло поворачивается на угол φ и совершает поступательное движение со скоростью $\dot{y}$ перпендикулярно горизонтальной скорости потока $v_x = v$ (см. рис. 4.11, а). Если обратить движение, т. е. крыло считать неподвижным, то частицы воздуха, кроме горизонтальной составляющей скоро-

сти v , будут иметь вертикальную составляющую $\dot{y}$, направленную вверх (см. рис. 4.11, б). Поскольку $\dot{y}$ несоизмеримо меньше v , то можно принять, что набегающий поток по отношению к крылу будет иметь приращение угла атаки (см. рис. 4.11, в)

$$\Delta\alpha = \varphi + \dot{y}/v. \quad (4.20)$$

Рассмотрим отдельно зависимость силы Y_a и момента M_a от угла φ и угла $\dot{y}/v$. Так как сила Y_a и момент M_a пропорциональны приращению угла атаки $\Delta\alpha$, то $Y_a(\varphi)$ и $M_a(\varphi)$ находятся в фазе с углом φ , и поэтому они оказывают влияние только на частоты собственных колебаний системы. Другое дело, сила Y_a и момент M_a , пропорциональные скорости $\dot{y}$ изгибных колебаний. При выбранных направлениях отсчета отклонений y и φ сила $Y_a(\dot{y}/v)$ направлена против скорости $\dot{y}$ и будет вызывать гашение изгибных колебаний.

Итак, приращение подъемной силы направлено всегда против скорости. Следовательно, мы имеем положительное сопротивление колебательному движению и чисто изгибные автоколебания крыла в полете возникнуть не могут.

Аналогичным образом можно убедиться в том, что невозможны и чисто крутильные автоколебания крыла. Это следует из того, что развивающиеся при крутильных колебаниях дополнительные аэродинамические моменты направлены против угловых скоростей поперечного сечения крыла.

Направление аэродинамического момента $M_a(\dot{y}/v)$, пропорционального скорости изгибных колебаний, совпадает с направлением угла φ , поэтому этот момент будет вызывать нарастание крутильных колебаний крыла, а через инерционную связь последние будут усиливать его изгибные колебания. При определенных соотношениях между параметрами крыла и потока, как будет показано далее, возникает флаттер. Отметим, что приведенные качественные рассуждения справедливы при условии, когда центр жесткости находится впереди центра масс (см. рис. 4.10).

Проведем теперь в первом приближении количественный анализ флаттера. За расчетную модель примем жесткое крыло, закрепленное

на пружинах как показано схематично на рис. 4.12. Предположим, что система имеет две степени свободы, а пружины моделируют жесткости изгиба и кручения крыла.

Для удобства анализа в качестве обобщенных координат примем линейную координату y отклонения центра жесткости крыла при изгибе и угол поворота φ при

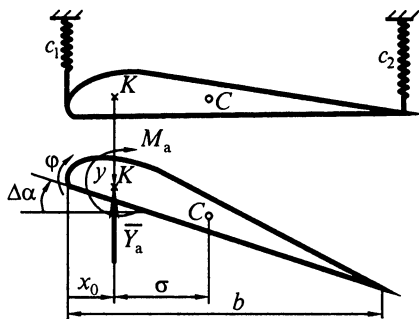


Рис. 4.12

закручивании. Центр жесткости обладает тем свойством, что сила, приложенная к нему в направлении возможного движения, будет только изгибать крыло, не вызывая его закручивания. Положение центра жесткости можно определить из уравнения

$$c_1 x_0 = c_2 (b - x_0), \quad (4.21)$$

где x_0 — расстояние от передней кромки крыла до центра жесткости; b — длина хорды крыла; c_1, c_2 — жесткости пружин.

Отсчет координат y и φ будем вести от положения крыла, при установившемся движении, когда $y \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$. Через жесткости c_1 и c_2 будем выражать реакции — поперечную силу при изгибе и момент при закручивании крыла, возникающие при отклонениях y и φ .

Составим дифференциальные уравнения малых колебаний крыла, применив для этого уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2),$$

где $q_1 = y$; $q_2 = \varphi$.

Воспользовавшись теоремой Кенига, представим выражение для кинетической энергии крыла в виде

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{y} + \sigma \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2,$$

где m, J_C — масса и момент инерции крыла относительно центра масс соответственно; σ — расстояние между центром жест-

кости и центром масс крыла (здесь за положительное принято расположение центра жесткости впереди центра масс).

Потенциальная энергия пружин будет равна

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (y - x_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_2 [y + (b - x_0) \varphi]^2,$$

или с учетом равенства (4.21)

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) y^2 + \frac{1}{2} [c_1 x_0 + c_2 (b - x_0) \varphi]^2.$$

Обобщенными здесь будут аэродинамические силы, причем сила Y_a направлена против направления отсчета координаты y , а момент M_a — по направлению отсчета угла φ :

$$Q_y = -Y_a, \quad Q_\varphi = M_a.$$

Аэродинамические силы пропорциональны скоростному напору $\rho v^2/2$, где ρ — плотность набегающего потока; v — его скорость. В первом приближении они пропорциональны приращению угла атаки, так что с учетом (4.20) имеем

$$Y_a = \frac{\rho v^2}{2} S C_Y^\alpha \left(\varphi + \frac{\dot{y}}{v} \right), \quad M_a = \frac{\rho v^2}{2} S C_M^\alpha \left(\varphi + \frac{\dot{y}}{v} \right). \quad (4.22)$$

Здесь S — площадь крыла; C_Y^α , C_M^α — коэффициенты подъемной силы и аэродинамического момента, отнесенные к единице площади крыла и углу атаки. Для краткости записи обозначим

$$\begin{aligned} \frac{\rho v^2}{2} S C_Y^\alpha &= D_Y; \quad D_M = \frac{\rho v^2}{2} S C_M^\alpha; \\ \frac{\rho v^2}{2} S C_Y^\alpha \frac{1}{v} &= D_{Yv}; \quad D_{Mv} = \frac{\rho v^2}{2} S C_M^\alpha \frac{1}{v}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Подставив выражения для Y_a и M_a в уравнения Лагранжа II рода, получим дифференциальные уравнения возмущенного движения крыла в следующем виде:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + m\sigma\ddot{\varphi} + (c_1 + c_2)y &= -Y_a; \\ m\sigma\ddot{y} + J\ddot{\varphi} + c\varphi &= M_a, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $J = J_C + m\sigma^2$ — момент инерции крыла относительно оси жесткости; $c = c_1 x_0^2 + c_2 (b - x_0)^2$ — жесткость крыла на кручение.

Первое выражение (4.24) — уравнение поступательных движений крыла, второе — вращательных вокруг оси, проходящей через центр жесткости. Эти движения взаимосвязаны. Парциальные частоты ω_n и ω_k консервативной системы в пустоте, когда $Y_a = 0$ и $M_a = 0$, равны

$$\omega_n^2 = \frac{1}{m}(c_1 + c_2); \quad \omega_k^2 = \frac{c}{J} \quad (4.25)$$

и соответствуют частоте изгибных колебаний крыла (ω_n) и частоте крутильных колебаний (ω_k). Связь между изгибными и крутильными колебаниями инерционная. Члены инерционной связи в первом ($m\sigma\ddot{\phi}$) и во втором ($m\sigma\ddot{y}$) уравнениях (4.24) имеют одинаковые коэффициенты (взаимны); если центр тяжести и центр жесткости совпадают ($\sigma = 0$), то связи нет.

Подставив Y_a и M_a из (4.22), (4.23) в уравнения (4.24), получим

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + m\sigma\ddot{\phi} + (c_1 + c_2)y + D_{Yv}\dot{y} + D_Y\phi &= 0; \\ m\sigma\ddot{y} + J\ddot{\phi} + c\phi - D_M\phi - D_{Mv}\dot{y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Члены связей, обусловленные аэродинамическими силами, не взаимны: если сила $D_{Yv}\dot{y}$ будет вызывать затухание изгибных колебаний, то момент $D_{Mv}\dot{y}$ — нарастание крутильных колебаний, а коэффициент D_M — уменьшать жесткость крыла на закручивание. Это существенное обстоятельство объясняется тем, что аэродинамические силы, являясь внешними по отношению к механической системе, сами зависят от ее движений. С учетом аэродинамических сил консервативная механическая система становится неконсервативной.

Запишем уравнения (4.26) с учетом (4.23) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{y} + b_{11}\dot{y} + c_{11}y + a_{12}\ddot{\phi} + c_{12}\phi &= 0; \\ \ddot{y} + b_{21}\dot{y} + a_{22}\ddot{\phi} + c_{22}\phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \frac{1}{m} \frac{\rho v^2}{2} SC_Y^\alpha \frac{1}{v}; \quad c_{11} = \frac{1}{m} (c_1 + c_2); \\
 a_{12} &= \sigma; \quad c_{12} = \frac{1}{m} \frac{\rho v^2}{2} SC_Y^\alpha; \\
 b_{21} &= -\frac{1}{m\sigma} \frac{\rho v^2}{2} SC_M^\alpha \frac{1}{v}; \quad a_{22} = \frac{J}{m\sigma}; \\
 c_{22} &= \frac{1}{m\sigma} \left(c - \frac{\rho v^2}{2} SC_M^\alpha \right).
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Исследуем решения уравнений (4.27). Решение однородной системы уравнений (4.27) будем искать в виде

$$y = Ae^{\lambda t}, \quad \varphi = Be^{\lambda t}. \tag{4.29}$$

После подстановки (4.29) в (4.27) имеем

$$\begin{aligned}
 A(\lambda^2 + \lambda b_{11} + c_{11}) + B(\lambda^2 a_{12} + c_{12}) &= 0; \\
 A(\lambda^2 + \lambda b_{21}) + B(\lambda^2 a_{22} + c_{22}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Для ненулевого решения (4.29) определитель системы (4.30) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda b_{11} + c_{11} & \lambda^2 a_{12} + c_{12} \\ \lambda^2 + \lambda b_{21} & \lambda^2 a_{22} + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем характеристическое уравнение для неизвестного показателя λ :

$$\begin{aligned}
 (a_{22} - a_{12})\lambda^4 + \lambda^3 (b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12}) + \lambda^2 (c_{22} + c_{11}a_{22} - c_{12}) + \\
 + \lambda (b_{11}c_{22} - b_{21}c_{12}) + c_{11}c_{22} = 0,
 \end{aligned}$$

или

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, \tag{4.31}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a_{22} - a_{12}; \\
 a_1 &= b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12}; \\
 a_2 &= c_{22} + c_{11}a_{22} - c_{12}; \\
 a_3 &= b_{11}c_{22} - b_{21}c_{12}; \\
 a_4 &= c_{11}c_{22}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Заключение об устойчивости или неустойчивости системы можно сделать, применив критерий Гурвица, согласно которому движение будет устойчиво, если все коэффициенты характеристического уравнения (4.31) и предпоследний минор определителя Гурвица будут положительными, т. е.

$$\begin{aligned} a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0; \\ \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Преобразуем коэффициенты (4.32) с учетом обозначений (4.28):

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{22} - a_{12} = \frac{J - \sigma^2 m}{m\sigma} = \frac{J_C}{m\sigma}; \\ a_1 &= b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12} = \frac{1}{mv} \frac{\rho v^2}{2} S \left(C_Y^\alpha \frac{J}{m\sigma} + C_M^\alpha \right); \\ a_2 &= c_{22} + c_{11}a_{22} - c_{12} = \\ &= \frac{1}{mv} \left[c + \frac{c_1 + c_2}{m} J - \frac{\rho v^2}{2} S (C_M^\alpha + \sigma C_Y^\alpha) \right]; \\ a_3 &= b_{11}c_{22} - b_{21}c_{12} = \frac{c}{m^2 \sigma v} \frac{\rho v^2}{2} S C_Y^\alpha; \\ a_4 &= c_{11}c_{22} = \frac{c}{m^2 \sigma} \left[(c_1 + c_2) \left(c - \frac{\rho v^2}{2} S C_M^\alpha \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Из полученных выражений следует, что при неизменном расстоянии между центром жесткости и центром масс ($\sigma = \text{const}$) знаки коэффициентов a_0 , a_1 , a_3 не зависят, а знаки коэффициентов a_2 и a_4 , наоборот, зависят от скорости v полета.

Знак минора Δ_3 также зависит от скорости полета. Однако при $\sigma > 0$ знак коэффициента a_4 всегда положительный, поскольку выражение $(c - \frac{\rho v^2}{2} S C_M^\alpha)$ для жесткости крыла на течение в набегающем потоке воздуха на практике всегда больше нуля. Знак коэффициента a_2 также положительный, так как в выражение для его определения со знаком минус входит величина

на $(C_M^\alpha + \sigma C_Y^\alpha) S \rho v^2 / 2$, представляющая собой жесткость аэродинамического момента относительно центра масс, которая для крыла всегда меньше жесткости конструкции $(c + (c_1 + c_2) J / m)$.

Определяющим для оценки устойчивости является третий минор Гурвица Δ_3 (4.33), который в развернутом виде здесь не приводится. Вычисляют его на ЭВМ, последовательно задавая значения скорости и определяя ту, при которой минор меняет знак и становится отрицательным. Эту скорость $v_{кр}$ называют *критической скоростью флаттера*. При $v > v_{кр}$ произойдет самовозбуждение и возникнут нарастающие колебания.

Таким образом, кроме инерционной связи между изгибными и крутильными колебаниями существует аэродинамическая связь, пропорциональная скорости полета. Эта связь позволяет отбирать энергию от потока воздуха и направлять ее в колебательную систему. Если за период колебаний работа аэродинамических сил при закручивании крыла будет больше, чем при его изгибе, то колебательная система будет неустойчивой и в ней возникнут нарастающие колебания, переходящие в автоколебания. Полет при наличии автоколебаний недопустим, так как это приводит к катастрофе.

Наряду с флаттером крыльев наблюдаются еще флаттер, связанный с наличием элеронов и хвостового оперения, а также флаттер винтов. Все они сходны по физической природе с рассмотренным выше, вредны, опасны и подлежат безусловному устранению.

4.6. Срывной флаттер

Если в потоке воздуха (жидкости) находится плохо обтекаемое препятствие, то за ним образуется вихревой след, причем вихри сбегают с определенной периодичностью, зависящей от формы и размеров конструкции, а также от скорости потока. Например, при обтекании цилиндра возникает вихревая дорожка, изображенная на рис. 4.13. Направление сбегających с цилиндра вихрей попеременно меняется, а частота их отделения определяется выражением

$$\omega = \frac{0,22v}{2\pi D},$$

где v — скорость потока, м/с;
 D — диаметр цилиндра, м; коэффициент 0,22 представляет собой число *Струхала* для случая обтекания цилиндра.

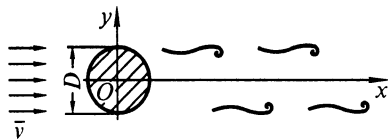


Рис. 4.13

В процессе отделения вихрей на цилиндр действует периодическая сила, перпендикулярная направлению потока. Закон изменения этой силы во времени можно принять в виде

$$F = c_k \frac{\rho v^2}{2} S \sin \omega t,$$

где c_k — коэффициент, зависящий от формы препятствия (для кругового цилиндра $c_k = 1$); S — площадь проекции препятствия на плоскость, перпендикулярную направлению потока. Чем хуже обтекаемость конструкции, тем больше коэффициент c_k и, соответственно, больше амплитуда силы F .

Значительные колебания упругих конструкций, связанные со срывом вихрей, называются **срывным флаттером**.

Срывному флаттеру подвержены лопасти воздушных винтов и лопатки турбомашин при достаточно больших углах атаки, а также некоторые инженерные сооружения, находящиеся в ветровом потоке, — висячие мосты, надземные трубопроводы, конструкции башенного типа, дымовые трубы и т. п.

Еще большие периодические силы развиваются в случаях, когда конструкция обтекается не воздухом, а потоком большой плотности, например потоком воды. Неоднократно наблюдались колебания перископов подводных лодок, поскольку перископ представляет собой весьма гибкую конструкцию, длина которой может в 20–30 раз превышать ее диаметр.

Срывной флаттер представляет собой сложное явление. В нем можно усмотреть вынужденные колебания, вызванные силой $F = c_k (\rho v^2 / 2) S \sin \omega t$, аэроупругую неустойчивость, параметрический резонанс и, наконец, автоколебания, при которых процесс отделения вихрей надо считать зависящим от движения самой конструкции.

4.7. Примеры потенциально возможных автоколебательных систем

Часы, звуковые генераторы, радиотехнические устройства, двигатели внутреннего сгорания и многие другие устройства имеют колебательные режимы работы, и задача состоит в том, чтобы эти режимы были наиболее совершенными. В этих случаях приходится иметь дело с нелинейными колебаниями, находить и исследовать периодические стационарные режимы, как это было показано на примере лампового генератора.

Однако среди машин и приборов много таких, у которых невозмущенный режим их работы является неколебательным, но при наличии источников энергии, не обладающих колебательными свойствами, колебания в них могут возникать. Такие колебательные системы называют *потенциальными автоколебательными системами*, т. е. такими, в которых при некоторых соотношениях параметров могут возникнуть неустойчивость невозмущенного движения и нарастающий переходный процесс, переходящий затем в автоколебания. Автоколебания нарушают комфорт для окружающих и показания систем измерения, вызывают динамические нагрузки и даже разрушение машин или приборов. Следовательно, они вредны и нельзя допускать их возникновения.

Задача здесь заключается не в определении автоколебательных режимов и их совершенствовании, а в том, чтобы обеспечить такие параметры и режимы работы системы, при которых невозмущенное движение было бы всегда устойчивым. Математически эту задачу решить достаточно просто, поскольку вопрос об устойчивости невозмущенного движения решается на основании анализа линеаризованных уравнений возмущенного движения. Примером такого решения является задача о флаттере крыла самолета. Приведем еще ряд машиностроительных конструкций, которые являются потенциальными автоколебательными системами.

Баллистическая ракета (или ракета-носитель) с упругим корпусом. Рассмотрим две возможные задачи.

1. *Устойчивость ракеты с автоматической системой стабилизации в отношении изгибных колебаний корпуса.* Чувствительный элемент системы — обычно гироскопический прибор (ГП),

установленный на борту, замеряет угол наклона ϑ продольной оси корпуса в месте его установки к горизонту (угол тангажа) и в случае его отклонения от программного угла $\vartheta_{пр}$ вырабатывает команду, которая через счетно-решающее устройство, усилитель и рулевой привод создает поперечную силу Y_p , призванную устранить отклонение угла тангажа. На рис. 4.14

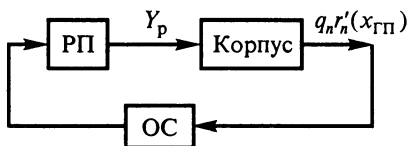


Рис. 4.14

показана схема замкнутой системы стабилизации угла тангажа ϑ , возмущения которого обусловлены изгибными колебаниями корпуса: $v_n(x, t) = q_n(t)r_n(x)$, где n — номер тона колебаний. Здесь ОС — звено обратной связи, включающее счетно-решающее устройство и усилитель; РП — рулевой привод, или источник энергии, вырабатывающий в плоскости тангажа поперечную силу Y_p .

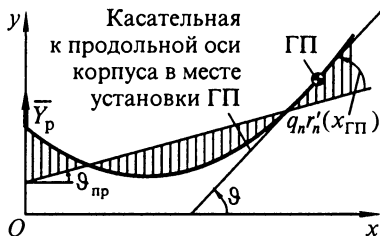


Рис. 4.15

На рис. 4.15 показана изогнутая ось корпуса и рассматриваемые углы в плоскости тангажа.

Для гашения поперечных колебаний сила Y_p должна быть пропорциональна скорости поперечного движения, т. е. $Y_p = Y_{p0} \dot{q}_n$. Дифференциальное уравнение для обобщенной координаты замкнутой системы можно представить в виде

$$\ddot{q}_n + 2\varepsilon \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -b_n \dot{q}_n,$$

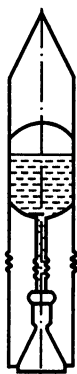
где ε — коэффициент затухания колебаний корпуса; $b_n = Y_{p0} / m_n$, m_n — приведенная масса ракеты при колебаниях по n -му тону.

Замкнутая система будет устойчива к изгибным колебаниям, если $(2\varepsilon + b_n) > 0$. Знак коэффициента b_n зависит от динамических свойств звена обратной связи, рулевого привода и знака $r'_n(x_{ГП})$ — угла наклона касательной к изогнутой оси корпуса в месте установки

ГП. Поэтому в зависимости от знака $r'_n(x_{ГП})$ нужно подбирать динамические характеристики звена обратной связи и рулевого привода. На рис. 4.15 видно, что если ГП будет установлен в кормовой части корпуса, то знак $r'_n(x_{ГП})$ изменится на обратный, и для обеспечения устойчивости ракеты характеристики звена обратной связи и рулевого привода должны быть другими.

Аналогичными системами стабилизации упругих колебаний ракету снабжают и в плоскости рысканья Oxz , и в плоскости крена Oyz .

Если ракета с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД) имеет небольшое относительное удлинение (L/D) , так что ее корпус



в отношении изгибов можно считать жестким, то основной колебательной системой может быть жидкое топливо в баках. В отличие от изгибных колебаний корпуса в этом случае знак угла наклона $r'(x)$ оси корпуса не зависит ни от номера тона колебаний, ни от места установки ГП по длине корпуса.

2. Устойчивость ракеты с ЖРД относительно продольных колебаний корпуса.

На рис. 4.16 изображена принципиальная схема ракеты с однокомпонентным жидкостным ракетным двигателем, где упругость корпуса на растяжение—

Рис. 4.16

сжатие показана гофрами; а на рис. 4.17 — схема замкнутой системы, соответствующая возникновению продольных колебаний корпуса.

Невозмущенным будем считать полет ракеты под действием тяги двигателя P с ускорением P/m , где m — масса ракеты в рассматриваемый момент времени; при этом все части ракеты напря-

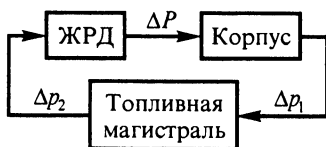


Рис. 4.17

жены. Предположим, что возникло возмущение давления жидкого топлива Δp_2 перед входом в ЖРД, вызвавшее возмущение подачи топлива в камеру сгорания. В результате возмущение ΔP тяги двигателя передалось корпусу ракеты и вызвало его про-

дольные колебания. На днище бака при этом возникает возмущение давления топлива Δp_1 , которое передается на вход в топливную магистраль, вызывая в ней продольные колебания топлива. Продольные колебания топлива в магистрали приведут к колебаниям подачи топлива в камеру сгорания и, как следствие, к колебаниям тяги двигателя. Если невозмущенный режим полета устойчив или, другими словами, устойчив невозмущенный режим работы замкнутой системы (см. рис. 4.17), состоящей из упругого корпуса, топливной магистрали и ЖРД, то возникшие колебания будут затухать. Только так и должно быть в правильно спроектированной и рассчитанной в этом отношении ракете. Если невозмущенный режим работы будет неустойчив, то возникнут нарастающие колебания. Но так как источник энергии (ЖРД) имеет большую мощность, то нарастающие колебания заканчиваются взрывом ракеты, который происходит во времени менее чем через 1 с после начала колебаний.

Возникновение и развитие продольных колебаний можно назвать жестким режимом по сравнению с развитием поперечных (изгибных) колебаний, поскольку рулевой привод имеет ничтожно малую мощность по сравнению с жидкостным ракетным двигателем. От поперечных автоколебаний в случае их возникновения корпус ракеты, как правило, не разрушается.

Управляемые колеса автомобиля. Управляемые колеса автомобиля относительно корпуса имеют упругую подвеску в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Во взаимодействии с ровным горизонтальным шероховатым полотном дороги при достижении некоторой скорости прямолинейного движения автомобиля может возникнуть неустойчивость плоского движения управляемых колес и, поскольку существует гироскопическая связь, возможны согласованные нарастающие колебания в горизонтальной и вертикальной плоскостях, переходящие в стационарный автоколебательный режим (так называемое явление «шимми»).

Металлорежущие станки. При некоторых режимах резания металлов лезвийным инструментом может возникнуть

неустойчивость режима резания, переходящая довольно быстро в стационарные вибрации. Явление это довольно сложное, поскольку возникновение неустойчивости зависит от упруго-пластических свойств обрабатываемого металла; геометрии режущего инструмента и сил трения стружки об его грани; подачи, глубины и скорости резания; свойств охлаждающей жидкости.

Аналогичные задачи возникают в системах автоматического управления. Там, как правило, автоколебания крайне нежелательны, и поэтому первостепенными являются исследования устойчивости движения с целью не допустить самовозбуждения автоколебаний.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

5.1. Вывод уравнений малых колебаний системы с конечным числом степеней свободы

5.1.1. Квадратичные формы кинетической и потенциальной энергии и диссипативной функции Рэлея

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек и имеющую n степеней свободы, на которую наложены голономные стационарные неосвобождающие связи. Предположив, что система имеет устойчивое положение равновесия, будем отсчитывать от этого положения обобщенные координаты q_i ($i = 1, 2, \dots, n$). В соответствии с предположением о малости колебаний будем считать обобщенные координаты, их скорости и ускорения величинами первого порядка малости.

Сохраним допущения относительно сил, действующих на систему, сделанные выше при выводе дифференциальных уравнений малых колебаний в системе с одной степенью свободы, т. е. с учетом малости колебаний представим силу $\bar{F}_k$, действующую на k -ю точку, в виде

$$\bar{F}_k = \bar{F}'_k(\bar{r}_k) + \bar{F}''_k(\bar{v}_k) + \bar{P}_k(t).$$

Здесь все позиционные силы $\bar{F}'_k(\bar{r}_k)$ — потенциальные; все силы, зависящие от скоростей точек $\bar{F}''_k(\bar{v}_k)$, — диссипативные, линейно зависящие от скорости (см. (1.10)); а силы $\bar{P}_k(t)$ характеризуют внешнее воздействие на систему.

Воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = Q_{i\Pi} + Q_{iД} + Q_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5.1)$$

В силу стационарности связей

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (5.2)$$

Тогда кинетическая энергия системы будет равна

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где m_k — масса k -й материальной точки; $\bar{v}_k$ — ее скорость;

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}. \quad (5.4)$$

Как и $\bar{r}_k$, $A_{ij} = A_{ij}(q_1, \dots, q_n)$, т. е. являются в общем случае функциями обобщенных координат.

Разлагая A_{ij} в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия

$$A_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n) = (A_{ij})_0 + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_r} \right)_0 q_r + \dots,$$

будем, как и в системах с одной степенью свободы (см. (1.14)), в силу малости колебаний учитывать только первый член разложения. Обозначим $(A_{ij})_0$ через a_{ij} и назовем **обобщенным инерционным коэффициентом**, причем в соответствии с (5.4) $a_{ij} = a_{ji}$.

Окончательно имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (5.5)$$

Видно, что при сделанных допущениях кинетическая энергия является квадратичной формой скоростей обобщенных координат. Из-

вестно, что кинетическая энергия механической системы может быть либо положительной, если отлична от нуля хотя бы одна обобщенная скорость, либо равной нулю, если равны нулю все обобщенные скорости. Следовательно, квадратичная форма кинетической энергии (5.5) является *положительно-определенной* квадратичной формой.

Составляющая обобщенной силы Q от потенциальных сил

$$Q_{i\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (5.6)$$

Потенциальную энергию системы $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ разложим в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия:

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) = \\ = (\Pi)_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \\ + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_i \partial q_j \partial q_r} \right)_0 q_i q_j q_r + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Первый член в разложении (5.7) равен нулю, поскольку потенциальную энергию и обобщенные координаты отсчитывают от положения равновесия; вторые члены в разложении также равны нулю, так как в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремум и, следовательно, $(\partial \Pi / \partial q_i)_0 = 0$; четвертые и последующие члены отбрасываем в силу предположения о малости колебаний.

Обозначим $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$ через c_{ij} и назовем *квазиупругим*

коэффициентом, причем $c_{ij} = c_{ji}$. Окончательно имеем

$$\Pi(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j, \quad (5.8)$$

т. е. представляет собой квадратичную форму относительно обобщенных координат. Подставив выражение для потенциальной энергии (5.8) в (5.6), получим составляющую обобщенной силы от потенциальных сил

$$Q_{i\Pi} = -\sum_{j=1}^n c_{ij} q_j. \quad (5.9)$$

Составляющая обобщенной силы от диссипативных сил

$$Q_{iД} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (5.10)$$

где Φ — диссипативная функция Рэлея, введенная при выводе дифференциального уравнения малых колебаний в системе с одной степенью свободы (см. (1.21)).

Учитывая выражение для скорости (5.2), запишем диссипативную функцию Рэлея Φ для системы с n степенями свободы:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N h_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь коэффициенты

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N h_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j},$$

в общем случае являются функциями обобщенных координат

$$B_{ij} = B_{ij}(q_1, \dots, q_n).$$

Так как диссипативная функция Рэлея уже содержит величины второго порядка малости (произведения скоростей обобщенных координат) в разложении B_{ij} в ряд Маклорена, как и в разложении коэффициентов A_{ij} , удержим только первые члены разложения — значения коэффициентов B_{ij} в положении равновесия.

Обозначим $(B_{ij})_0$ через b_{ij} и назовем его *обобщенным диссипативным коэффициентом*, причем $b_{ij} = b_{ji}$. Тогда

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (5.12)$$

Функция Φ представляет собой в общем случае, в силу (5.11), неотрицательную квадратичную форму. Если же Φ явля-

ется *положительно-определенной* квадратичной формой, диссипация называется *полной*.

Подставив выражение для диссипативной функции (5.12) в (5.10), получим составляющую обобщенной силы от диссипативных сил

$$Q_{iД} = - \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_j. \quad (5.13)$$

Составляющую обобщенной силы $Q_i(t)$ от сил $\bar{P}_k(t)$, зависящих от времени и действующих на систему извне,

$$Q_i(t) = \sum_{k=1}^N \bar{P}_k(t) \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i},$$

можно получить стандартным способом, полагая, что вариация только i -й обобщенной координаты δq_i не равна нулю, вычисляя сумму элементарных работ от сил $\bar{P}_k(t)$ на перемещениях, определяемых δq_i , и относя полученное значение работы к вариации обобщенной координаты, т. е.

$$Q_i(t) = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \delta A_k \right)_i}{\delta q_i}. \quad (5.14)$$

Подставив выражения (5.5), (5.9), (5.13), (5.14) для $T, Q_{iП}, Q_{iД}, Q_i(t)$ в уравнения Лагранжа II рода (5.1), получим в самом общем случае уравнения малых колебаний в линейной системе с n степенями свободы

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} q_j) = Q_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5.15)$$

В частном случае системы с двумя степенями свободы квадратичные формы $T, П$ и Φ будут соответственно равны

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2); \\ П &= \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2); \\ \Phi &= \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{22} \dot{q}_2^2), \end{aligned} \quad (5.16)$$

а дифференциальные уравнения малых колебаний примут вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1(t); \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + b_{12}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2(t). \end{aligned} \quad (5.17)$$

При выводе дифференциальных уравнений малых колебаний в линейной системе с n степенями свободы мы воспользовались уравнениями Лагранжа II рода. Иногда этот способ называют *основным* способом составления уравнений движения. Аналогичные по структуре (5.15) уравнения можно получить прямым способом, описывая движения входящих в систему инерционных объектов, используя дифференциальные уравнения поступательного, вращательного, плоского движений.

5.1.2. Устойчивость положения равновесия. Критерий Сильвестра

В § 5.1.1 показано, что с учетом малости колебаний потенциальная энергия представляет собой квадратичную форму обобщенных координат (см. (5.8)). Согласно теореме Лагранжа, достаточным условием устойчивости положения равновесия консервативной системы является локальный минимум потенциальной энергии в нем. Поскольку потенциальная энергия в положении равновесия принята равной нулю, следовательно, для его устойчивости достаточно, чтобы в некоторой окрестности положения равновесия потенциальная энергия была строго больше нуля и обращалась в нуль только при всех нулевых значениях обобщенных координат. Другими словами, достаточно, чтобы квадратичная форма (5.8) была *положительно-определенной*. Напомним, что, согласно теоремам Кельвина, это условие сохраняется и при наличии диссипативных сил. В соответствии с *критерием Сильвестра*, для того чтобы квадратичная форма была положительно-определенной *необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы коэффициентов квадратичной формы были строго больше нуля*.

Запишем, согласно (5.8), матрицу коэффициентов квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

В соответствии с теоремой Лагранжа и критерием Сильвестра, достаточное условие устойчивости положения равновесия консервативной колебательной системы имеет вид

$$c_{11} > 0; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (5.19)$$

Поскольку всегда можно изменить нумерацию обобщенных координат и *любую* из них сделать *первой*, то все элементы матрицы (5.18), стоящие на главной диагонали, должны быть строго больше нуля:

$$c_{ii} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.20)$$

Пример 5.1. Три математических маятника длиной $2l$ и массой m каждый, средний из которых перевернут, связаны между собой одинаковыми пружинами жесткостью c (рис. 5.1). Определить, при каких значениях жесткости c пружин положение равновесия системы будет устойчивым.

Введем обобщенные координаты q_1, q_2, q_3 (см. рис. 5.1). С учетом малости колебаний потенциальная энергия системы

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} [& (cl^2 + 2mgl)q_1^2 + (2cl^2 - \\ & - 2mgl)q_2^2 + (cl^2 + 2mgl)q_3^2 - \\ & - 2cl^2q_1q_2 - 2cl^2q_2q_3]. \end{aligned}$$

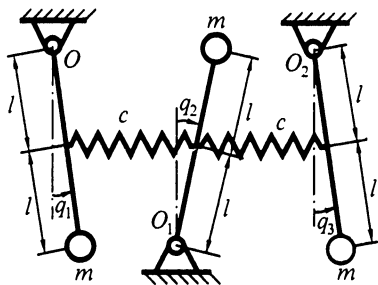


Рис. 5.1

Следовательно, матрица коэффициентов квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} cl^2 + 2mgl & -cl^2 & 0 \\ -cl^2 & 2cl^2 - 2mgl & -cl^2 \\ 0 & -cl^2 & cl^2 + 2mgl \end{pmatrix}.$$

Согласно (5.20), должно выполняться условие $c_{22} > 0$, а значит,

$$c > mg/l. \quad (5.21)$$

Из условия $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$

имеем

$$c > (\sqrt{5} - 1) \frac{mg}{l} = 1,236 \frac{mg}{l}. \quad (5.22)$$

Наконец, из условия $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0$

получаем

$$c > 2 \frac{mg}{l}. \quad (5.23)$$

Очевидно, что для устойчивости положения равновесия должно выполняться самое строгое условие (5.23).

Отметим, что условие (5.21) соответствует перевернутому маятнику, как бы связанному двумя пружинами с неподвижными стенками, а (5.22) — перевернутому маятнику, скрепленному одной пружиной с маятником, а другой — с неподвижной стенкой.

5.2. Примеры составления дифференциальных уравнений

Пример 5.2. Два одинаковых математических маятника, длиной l и массой m каждый, соединены между собой пружиной жесткостью c (рис. 5.2). При вертикальном положении маятников пружина не деформирована. Составить дифференциальные уравнения малых колебаний.

Воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода. В качестве обобщенных координат выберем углы φ и ψ отклонения маятников от вертикали.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = \\ = \frac{1}{2}(ml^2\dot{\varphi}^2 + ml^2\dot{\psi}^2).$$

Следовательно, в соответствии с (5.16)

$$a_{11} = a_{22} = ml^2; \quad a_{12} = 0.$$

Потенциальная энергия системы складывается из энергии подъема грузов маятников и энергии деформации пружины

$$\Pi = mgl(1 - \cos\varphi) + mgl(1 - \cos\psi) + \frac{1}{2}c\lambda^2,$$

где λ — деформация пружины.

С учетом малости колебаний

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\varphi^2 + \frac{1}{2}mgl\psi^2 + \frac{1}{2}c(l\psi - l\varphi)^2 = \\ = \frac{1}{2}[(mgl + cl^2)\varphi^2 - 2cl^2\varphi\psi + (mgl + cl^2)\psi^2].$$

Следовательно, в соответствии с (5.16)

$$c_{11} = c_{22} = mgl + cl^2; \quad c_{12} = -cl^2,$$

и дифференциальные уравнения имеют вид

$$ml^2\ddot{\varphi} + (mgl + cl^2)\varphi - cl^2\psi = 0; \\ ml^2\ddot{\psi} - cl^2\varphi + (mgl + cl^2)\psi = 0. \quad (5.24)$$

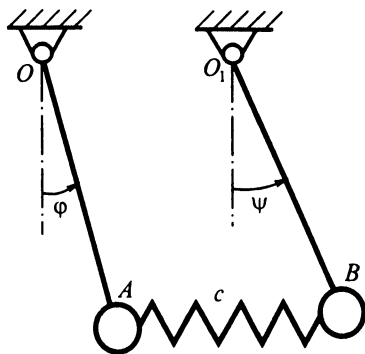


Рис. 5.2

Пример 5.3. Двойной математический маятник OAB (рис. 5.3), состоящий из двух связанных шарнирно одинаковых математических маятников массой m и длиной l каждый, шарнирно скреплен с однородным диском массой M , имеющим возможность катиться по

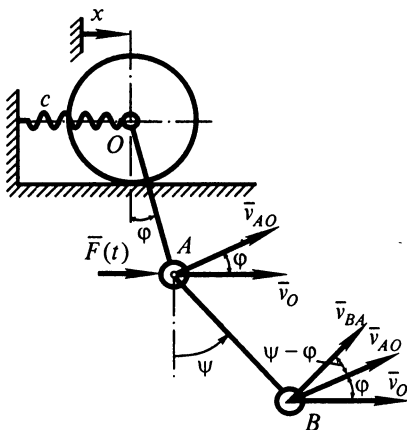


Рис. 5.3

горизонтальной поверхности без скольжения. С диском скреплена пружина жесткостью c . К верхнему маятнику приложена горизонтальная сила $\bar{F}(t)$. При движении на грузы маятников действуют силы линейного вязкого сопротивления $\bar{F}'' = -h\bar{v}$. Составить дифференциальные уравнения малых колебаний.

Воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода. Система имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат

выберем перемещение x центра диска и углы φ и ψ отклонения маятников, отсчитывая их от положения равновесия. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \frac{3}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \bar{v}_A^2 + \frac{1}{2} m \bar{v}_B^2,$$

где $\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO}$; $v_O = \dot{x}$; $v_{AO} = l\dot{\varphi}$; $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$; $v_{BA} = l\dot{\psi}$.

Согласно теореме косинусов,

$$v_A^2 = \dot{x}^2 + (l\dot{\varphi})^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Поскольку в выражении для кинетической энергии при малых колебаниях нужно учитывать члены до второго порядка малости, $\cos \varphi$ заменяем единицей. Тогда

$$v_A^2 = \dot{x}^2 + (l\dot{\varphi})^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}.$$

Рассуждая аналогично, находим

$$v_B^2 = \dot{x}^2 + (l\dot{\varphi})^2 + (l\dot{\psi})^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi} + 2\dot{x}l\dot{\psi} + 2l^2\dot{\varphi}\dot{\psi}.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2} M + 2m \right) \dot{x}^2 + 2ml^2\dot{\varphi}^2 + ml^2\dot{\psi}^2 + 4ml\dot{x}\dot{\varphi} + 2ml\dot{x}\dot{\psi} + 2ml^2\dot{\varphi}\dot{\psi} \right],$$

и в соответствии с (5.5), считая x , φ и ψ соответственно первой, второй и третьей обобщенными координатами, имеем

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3}{2}M + 2m; & a_{12} &= 2ml; & a_{13} &= ml; \\ a_{21} &= 2ml; & a_{22} &= 2ml^2; & a_{23} &= ml^2; \\ a_{31} &= ml; & a_{32} &= ml^2; & a_{33} &= ml^2. \end{aligned}$$

Диссипативная функция Рэлея

$$\Phi = \frac{1}{2}hv_A^2 + \frac{1}{2}hv_B^2.$$

Следовательно, по аналогии с кинетической энергией

$$\begin{aligned} b_{11} &= 2h; & b_{12} &= 2hl; & b_{13} &= hl; \\ b_{21} &= 2hl; & b_{22} &= 2hl^2; & b_{23} &= hl^2; \\ b_{31} &= hl; & b_{32} &= hl^2; & b_{33} &= hl^2. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия складывается из энергии деформации пружины, энергии подъема груза верхнего маятника на высоту $h_1 = l(1 - \cos \varphi)$ и энергии подъема груза нижнего маятника на высоту $h_2 = l(1 - \cos \varphi) + l(1 - \cos \psi)$. Заменяя с учетом малости колебаний $\cos \varphi$ на $1 - \varphi^2/2$ и $\cos \psi$ на $1 - \psi^2/2$, получаем

$$П = \frac{1}{2}(cx^2 + 2mgl\varphi^2 + mgl\psi^2),$$

откуда

$$\begin{aligned} c_{11} &= c; & c_{12} &= 0; & c_{13} &= 0; \\ c_{21} &= 0; & c_{22} &= 2mgl; & c_{23} &= 0; \\ c_{31} &= 0; & c_{32} &= 0; & c_{33} &= mgl. \end{aligned}$$

При $\delta x \neq 0$, $\delta \varphi = 0$ и $\delta \psi = 0$ элементарная работа силы $\bar{F}(t)$ равна $F(t)\delta x$ и, следовательно, $Q_1(t) = F(t)$. При $\delta x = 0$, $\delta \varphi \neq 0$ и $\delta \psi = 0$ элементарная работа силы $\bar{F}(t)$ равна $F(t)l \cos \varphi \delta \varphi$, а значит, $Q_2(t) = F(t)l \cos \varphi$. Наконец, при $\delta x = 0$, $\delta \varphi = 0$ и $\delta \psi \neq 0$ элементарная работа силы $\bar{F}(t)$ равна 0 и $Q_3(t) = 0$. Поскольку в дифференциальных уравнениях малых колебаний мы учитываем только члены первого порядка малости, заменим в $Q_2(t)$ $\cos \varphi$ на

единицу. Тогда дифференциальные уравнения малых колебаний будут иметь вид

$$\left(\frac{3}{2}M + 2m\right)\ddot{x} + 2m\ddot{\phi} + m\ddot{\psi} + 2h\dot{x} + 2hl\dot{\phi} + hl\dot{\psi} + cx = F(t);$$

$$2m\ddot{x} + 2ml^2\ddot{\phi} + ml^2\ddot{\psi} + 2hl\dot{x} + 2hl^2\dot{\phi} + hl^2\dot{\psi} + 2mgl\phi = F(t)l;$$

$$m\ddot{x} + ml^2\ddot{\phi} + ml^2\ddot{\psi} + hl\dot{x} + hl^2\dot{\phi} + hl^2\dot{\psi} + mgl\psi = 0.$$

Пример 5.4. Два тела массами m_1 и m_2 , связанные между собой пружиной жесткостью c_2 и закрепленные с основанием пружиной жесткостью c_1 , могут двигаться в вертикальном направлении (рис. 5.4). На тело массой m_1 действует сила, изменяющаяся во времени по гармоническому закону $F(t) = F_0 \sin pt$.

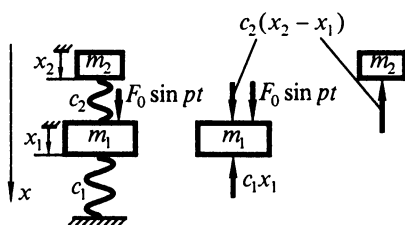


Рис. 5.4

Составить дифференциальные уравнения малых колебаний.

Воспользуемся дифференциальными уравнениями поступательного движения. Будем отсчитывать координаты тел x_1 и x_2 от положения статического равновесия каждого тела. В этом случае, как было показано

при анализе колебательных систем с одной степенью свободы, силы тяжести и упругие силы, возникающие в пружинах в результате статической деформации, взаимно компенсируются, и поэтому их можно не учитывать при составлении дифференциальных уравнений. В проекции на ось x дифференциальные уравнения поступательного движения имеют вид

$$m_1\ddot{x}_1 = -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) + F_0 \sin pt;$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1),$$

или

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 &= F_0 \sin pt; \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Глава 6

СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

6.1. Свободные колебания консервативной системы с двумя степенями свободы

6.1.1. Системы с инерционной и упругой связью

Учитывая, что при свободных колебаниях консервативной системы $Q_1(t) = Q_2(t) = 0$; $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$, запишем в соответствии с (5.17) дифференциальные уравнения в виде

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0; \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Начальные условия для q_1 и q_2 имеют вид

$$t = 0; \quad q_1(0) = q_{10}; \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_{10}; \quad q_2(0) = q_{20}; \quad \dot{q}_2(0) = \dot{q}_{20}. \quad (6.2)$$

В силу положительной определенности квадратичной формы кинетической энергии обобщенные инерционные коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$a_{11} > 0; \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0; \quad a_{22} > 0,$$

а аналогичные соотношения для квазиупругих коэффициентов

$$c_{11} > 0; \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0; \quad c_{22} > 0 \quad (6.3)$$

являются достаточными условиями устойчивости положения равновесия системы.

Коэффициенты a_{12} и c_{12} , связывающие в уравнениях (6.1) обобщенные координаты q_1 и q_2 , называют соответственно *коэффициентом инерционной* и *упругой связи*. Если в колебательной системе коэффициент $a_{12} = 0$, ее называют *системой с упругой связью*, а если $c_{12} = 0$ — *системой с инерционной связью*.

Так, упругую связь имеют системы, рассмотренные в примерах 5.2 и 5.4, инерционную — система, представленная в примере 5.3.

6.1.2. Парциальные системы и парциальные частоты

Парциальной системой, соответствующей обобщенной координате q_i , называют условную колебательную систему с одной степенью свободы, получаемую из исходной системы, если наложить запрет на изменение всех обобщенных координат, кроме q_i . Число парциальных систем равно числу степеней свободы. Дифференциальные уравнения движения парциальных систем можно найти непосредственно из дифференциальных уравнений исходной системы, положив все коэффициенты связи равными нулю. Для системы с двумя степенями свободы, согласно (6.1), имеем

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 &= 0; \\ a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Парциальными частотами называют собственные частоты n_1, n_2 парциальных систем:

$$n_1^2 = c_{11}/a_{11}; \quad n_2^2 = c_{22}/a_{22}. \quad (6.5)$$

Парциальные системы, соответствующие рассмотренным в гл. 5 колебательным системам с двумя степенями свободы (см. примеры 5.2 и 5.4), представлены на рис. 6.1, а и б соответственно.

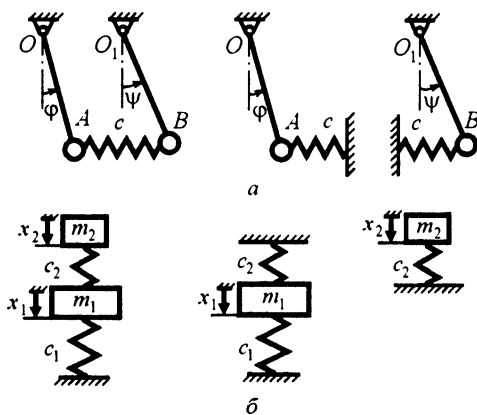


Рис. 6.1

6.1.3. Частотное уравнение

Поскольку уравнения (6.1) содержат только обобщенные координаты и их вторые производные по времени, ищем их решения в виде

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha); \quad q_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha), \quad (6.6)$$

где A_1 , A_2 , ω и α — пока неопределенные величины.

Подставив (6.6) в (6.1) и сократив на $\sin(\omega t + \alpha)$, получим однородную алгебраическую систему относительно A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} (c_{11} - \omega^2 a_{11})A_1 + (c_{12} - \omega^2 a_{12})A_2 &= 0; \\ (c_{12} - \omega^2 a_{12})A_1 + (c_{22} - \omega^2 a_{22})A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Для того чтобы однородная алгебраическая система (6.7) имела ненулевое решение, она должна быть вырожденной, т. е. ее определитель должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} (c_{11} - \omega^2 a_{11}) & (c_{12} - \omega^2 a_{12}) \\ (c_{12} - \omega^2 a_{12}) & (c_{22} - \omega^2 a_{22}) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.8)$$

Следовательно, решение (6.6) будет иметь смысл только при тех значениях ω , которые удовлетворяют условию (6.8). Раскрывая (6.8), получаем

$$(c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2 = 0, \quad (6.9)$$

или

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^4 - (c_{11}a_{22} + c_{22}a_{11} - \\ - 2c_{12}a_{12})\omega^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Уравнение, представленное в форме (6.8), (6.9) или (6.10), называют **частотным**. Как видно из (6.10), частотное уравнение биквадратное. Обозначим его корни в порядке возрастания через ω_1^2 и ω_2^2 . Важно убедиться, что оба корня положительны, ибо в противном случае (если один или оба корня окажутся отрицательными) частоты ω_1 и ω_2 (или одна из них) будут мнимыми. Такой аргумент в решении (6.6) приводит к неограниченному возрастанию во времени q_1 и q_2 , что противоречит предположению об устойчивости положения равновесия.

6.1.4. Исследование корней частотного уравнения

Введем функцию $\Delta(\omega^2)$, равную левой части частотного уравнения (6.9) или (6.10):

$$\Delta(\omega^2) = (c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2;$$

$$\Delta(\omega^2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^4 - (c_{11}a_{22} + c_{22}a_{11} - 2c_{12}a_{12})\omega^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2,$$

и построим ее график.

Если положение равновесия устойчивое, то в силу (6.3)

$$\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

При $\omega^2 = n_1^2 = c_{11}/a_{11}$

$$\Delta(n_1^2) = -\left(c_{12} - \frac{c_{11}}{a_{11}}a_{12}\right)^2 < 0,$$

при $\omega^2 = n_2^2 = c_{22}/a_{22}$

$$\Delta(n_2^2) = -\left(c_{12} - \frac{c_{22}}{a_{22}}a_{12}\right)^2 < 0.$$

Наконец, в силу того, что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, при $\omega^2 \rightarrow \infty$

$$\Delta(\omega^2) \rightarrow \infty.$$

График функции $\Delta(\omega^2)$, представляющий собой параболу, приведен на рис. 6.2 в предположении, что $n_1 < n_2$.

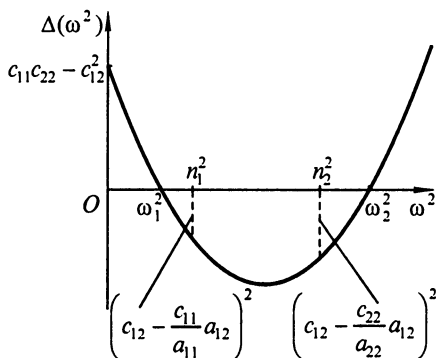


Рис. 6.2

Найденные из (6.8) – (6.10) значения ω называют *собственными частотами колебаний системы*.

Из рассмотренного можно сделать следующие выводы:

1) если положение равновесия устойчивое, то оба корня частотного уравнения положительны;

2) первая собственная частота системы ω_1 всегда меньше меньшей парциальной частоты, а вторая ω_2 — больше большей.

Отметим, что для колебательных систем с упругой связью ($a_{12} = 0$) $\Delta(n_1^2) = \Delta(n_2^2)$. В этом случае парабола оказывается симметричной относительно вертикали, проходящей через точку $\omega^2 = 0,5(n_1^2 + n_2^2)$, и справедливо равенство

$$n_1^2 - \omega_1^2 = \omega_2^2 - n_2^2. \quad (6.11)$$

6.1.5. Коэффициенты распределения амплитуд.

Главные колебания

Запишем два частных независимых решения, соответствующих частотам ω_1 и ω_2 , в виде

$$\begin{aligned} q_{11} &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad q_{21} = A_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad \text{при } \omega = \omega_1, \\ q_{12} &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad q_{22} = A_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad \text{при } \omega = \omega_2, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где вторая цифра в индексе соответствует номеру частоты, или номеру *тона колебаний*.

Отметим, что константы A_{11} , A_{21} и A_{12} , A_{22} не являются независимыми. Действительно, подставляя решения в уравнения движения, получаем вырожденную систему (6.7), у которой одно уравнение будет иметь коэффициенты, пропорциональные коэффициентам другого.

Для частоты ω_1 имеем

$$\begin{aligned} (c_{11} - \omega_1^2 a_{11}) A_{11} + (c_{12} - \omega_1^2 a_{12}) A_{21} &= 0; \\ (c_{12} - \omega_1^2 a_{12}) A_{11} + (c_{22} - \omega_1^2 a_{22}) A_{21} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$A_{21} = \eta_{21} A_{11}, \quad (6.13)$$

$$\text{где } \eta_{21} = -\frac{c_{11} - \omega_1^2 a_{11}}{c_{12} - \omega_1^2 a_{12}} = -\frac{c_{12} - \omega_1^2 a_{12}}{c_{22} - \omega_1^2 a_{22}}.$$

Аналогично для ω_2 находим

$$A_{22} = \eta_{22} A_{12}, \quad (6.14)$$

$$\text{где } \eta_{22} = -\frac{c_{11} - \omega_2^2 a_{11}}{c_{12} - \omega_2^2 a_{12}} = -\frac{c_{12} - \omega_2^2 a_{12}}{c_{22} - \omega_2^2 a_{22}}.$$

С учетом (6.13) и (6.14) частные решения (6.12) будут иметь вид
 $q_{11} = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad q_{21} = \eta_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$ при $\omega = \omega_1$,
 $q_{12} = A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad q_{22} = \eta_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$ при $\omega = \omega_2$. (6.15)

Колебания, уравнения которых имеют вид (6.15), называют *главными колебаниями*. Они представляют собой гармонические колебания с частотами ω_1 и ω_2 соответственно. Коэффициенты η_{21}, η_{22} называют *коэффициентами распределения амплитуд*. Они характеризуют отношение амплитуд в главных колебаниях или *форму* главных колебаний. Отметим, что коэффициенты распределения амплитуд и, следовательно, формы главных колебаний, как и собственные частоты, определяются параметрами самой колебательной системы, т. е. обобщенными инерционными и квазиупругими коэффициентами, и не зависят от начальных условий. Поэтому формы колебаний называют, также как и частоты, *собственными формами колебаний* при колебаниях по соответствующему тону.

В выбранной структуре частных решений содержатся пока не определенные произвольные постоянные A_{11} и A_{12} , поэтому для получения общего решения достаточно частные решения сложить:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{11} + q_{12} = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ q_2 &= q_{21} + q_{22} = \eta_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \eta_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Общее решение содержит четыре неопределенные константы A_{11}, A_{12}, α_1 и α_2 . Воспользуемся начальными условиями (6.2). Подставив (6.16) в (6.2) получим систему

$$\begin{aligned} q_{10} &= A_{11} \sin \alpha_1 + A_{12} \sin \alpha_2; \\ q_{20} &= \eta_{21} A_{11} \sin \alpha_1 + \eta_{22} A_{12} \sin \alpha_2; \\ \dot{q}_{10} &= \omega_1 A_{11} \cos \alpha_1 + \omega_2 A_{12} \cos \alpha_2; \\ \dot{q}_{20} &= \eta_{21} \omega_1 A_{11} \cos \alpha_1 + \eta_{22} \omega_2 A_{12} \cos \alpha_2, \end{aligned} \quad (6.17)$$

из которой можно определить A_{11}, A_{12}, α_1 и α_2 .

При произвольных начальных условиях обе константы A_{11} и A_{12} отличны от нуля. Это означает, что изменение во времени каждой обобщенной координаты будет представлять собой сумму гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 . А такие колебания являются не только не гармоническими, но в общем случае и не периодическими.

Для того чтобы процесс был одночастотным и гармоническим, необходимо специальным образом подобрать начальные условия. Начальные отклонения и начальные скорости должны быть связаны между собой через один из коэффициентов распределения амплитуд. Например, если выполнить условия $q_{20} = \eta_{21}q_{10}$, $\dot{q}_{20} = \eta_{21}\dot{q}_{10}$, то в соответствии с (6.17) константа $A_{12} = 0$, а значит, в системе возникнут одночастотные гармонические колебания с частотой ω_1 , соответствующие первому главному колебанию. Отметим, что для достижения подобного движения достаточно, чтобы только начальные отклонения были связаны через один из коэффициентов распределения амплитуд, а начальные скорости равнялись нулю, или наоборот.

Пример 6.1. Два одинаковых математических маятника длиной l и массой m соединены между собой пружиной жесткостью c (см. рис. 5.2). При вертикальном положении маятников пружина не деформирована. В начальный момент времени левый маятник отклонен на угол β и маятники отпущены без начальной скорости. Определить последующее движение системы.

Дифференциальные уравнения малых колебаний системы были получены в предыдущей главе и имеют вид

$$ml^2\ddot{\varphi} + (mgl + cl^2)\varphi - cl^2\psi = 0;$$

$$ml^2\ddot{\psi} - cl^2\varphi + (mgl + cl^2)\psi = 0.$$

Это система с упругой связью ($a_{12} = 0$). Запишем уравнения парциальных систем:

$$ml^2\ddot{\varphi} + (mgl + cl^2)\varphi = 0;$$

$$ml^2\ddot{\psi} + (mgl + cl^2)\psi = 0.$$

В силу симметрии задачи (одинаковые маятники) парциальные частоты совпадают:

$$n_1^2 = n_2^2 = \frac{mgl + cl^2}{ml^2} = \frac{g}{l} + \frac{c}{m}.$$

Задавшись решением в виде (6.6):

$$\varphi = A_1 \sin(\omega t + \alpha); \quad \psi = A_2 \sin(\omega t + \alpha),$$

и подставив его в уравнения движения, получим алгебраическую систему относительно A_1 и A_2

$$(mgl + cl^2 - ml^2\omega^2)A_1 - cl^2A_2 = 0;$$

$$-cl^2A_1 + (mgl + cl^2 - ml^2\omega^2)A_2 = 0.$$

Из условия вырожденности системы находим частотное уравнение

$$(mgl + cl^2 - ml^2\omega^2)^2 - (cl^2)^2 = 0$$

или, учитывая, что получилась разность квадратов,

$$(mgl - ml^2\omega^2)(mgl + 2cl^2 - ml^2\omega^2) = 0.$$

Отсюда

$$\omega_1^2 = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l}; \quad \omega_2^2 = \frac{mgl + 2cl^2}{ml^2} = \frac{g}{l} + 2\frac{c}{m}.$$

Таким образом, показана справедливость утверждения (6.11):

$$n_1^2 - \omega_1^2 = \omega_2^2 - n_2^2 = c/m.$$

Учитывая теперь, что

$$\eta_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{mgl + cl^2 - ml^2\omega_1^2}{cl^2} = \frac{mgl + cl^2 - mgl}{cl^2} = 1;$$

$$\eta_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{mgl + cl^2 - ml^2\omega_2^2}{cl^2} = \frac{mgl + cl^2 - mgl - 2cl^2}{cl^2} = -1,$$

получим уравнения главных колебаний

$$\varphi_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \psi_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1);$$

$$\varphi_2 = A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \psi_2 = -A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

В первом главном колебании маятники движутся в фазе (рис. 6.3, *а*) и пружина остается недеформированной, поэтому первая собственная частота ω_1 совпадает с частотой математического маятника.

Во втором главном колебании маятники движутся в противофазе (рис. 6.3, *б*), при этом на пружине имеется неподвижная точка, называемая **узлом формы колебаний**.

Подставив общее решение

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

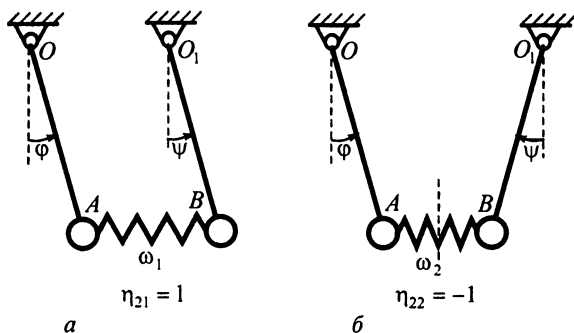


Рис. 6.3

в начальные условия

$$t = 0; \varphi(0) = \beta; \dot{\varphi}(0) = 0; \psi(0) = 0; \dot{\psi}(0) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} A_{11} \sin \alpha_1 + A_{12} \sin \alpha_2 &= \beta; \\ A_{11} \sin \alpha_1 - A_{12} \sin \alpha_2 &= 0; \\ A_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + A_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 &= 0; \\ A_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 - A_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Из третьего и четвертого уравнений следует

$$A_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 = 0; \quad A_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

Так как A_{11} и A_{12} не могут равняться нулю, то $\cos \alpha_1 = 0$ и $\cos \alpha_2 = 0$, откуда

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \dots; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \dots$$

Поскольку A_{11} и A_{12} пока не определены, можно выбрать любые из значений α_1 и α_2 . Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$. Тогда первые два уравнения из начальных условий будут иметь вид

$$A_{11} + A_{12} = \beta; \quad A_{11} - A_{12} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{12} = \beta/2; \\ \varphi &= \frac{\beta}{2} \left[\sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}) \right] = \frac{\beta}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t); \\ \psi &= \frac{\beta}{2} \left[\sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) - \sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}) \right] = \frac{\beta}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t), \end{aligned}$$

или с учетом известных тригонометрических соотношений для суммы и разности косинусов

$$\varphi = \beta \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t;$$

$$\psi = \beta \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t.$$

Наибольший интерес при анализе полученного результата представляет случай достаточно слабой пружины $c/m \ll g/l$,

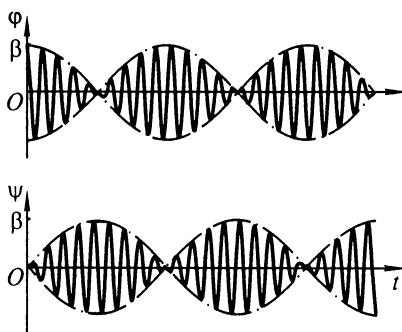


Рис. 6.4

когда $\omega_2 \approx \omega_1$. Решение для φ и ψ в этом случае представляет собой произведение двух косинусоид (синусоид), период одной из которых значительно больше периода другой:

$$\frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1} \gg \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Графически решение в этом случае можно получить тем же способом, который был использо-

ван при анализе затухающих колебаний. Видим (рис. 6.4), что решение в данном случае представляет собой биения. Максимальное отклонение одного маятника соответствует остановке другого и наоборот. Поскольку система консервативна, то начальный запас полной механической энергии, возникший при отклонении левого маятника, сохраняется при дальнейшем движении системы, а маятники в процессе движения как бы передают ее один другому.

6.1.6. Нормальные (главные) координаты

Возможен и другой подход к решению задачи о свободных колебаниях — найти какие-то новые обобщенные координаты θ_1 и θ_2 , называемые *нормальными* или *главными*, для которых при любых начальных условиях движение будет одночастотным и гармоническим.

Анализируя решение (6.16), убеждаемся, что исходные и нормальные координаты должны быть связаны соотношениями

$$q_1 = \theta_1 + \theta_2; \quad q_2 = \eta_{21}\theta_1 + \eta_{22}\theta_2. \quad (6.18)$$

Можно показать, что переход от исходных координат к нормальным приводит квадратичные формы кинетической и потенциальной энергий к канонической форме:

$$T = \frac{1}{2}(a_1\dot{\theta}_1^2 + a_2\dot{\theta}_2^2); \quad \Pi = \frac{1}{2}(c_1\theta_1^2 + c_2\theta_2^2). \quad (6.19)$$

Здесь

$$a_1 = a_{11} + 2a_{12}\eta_{21} + a_{22}\eta_{21}^2; \quad a_2 = a_{11} + 2a_{12}\eta_{22} + a_{22}\eta_{22}^2;$$

$$c_1 = c_{11} + 2c_{12}\eta_{21} + c_{22}\eta_{21}^2; \quad c_2 = c_{11} + 2c_{12}\eta_{22} + c_{22}\eta_{22}^2.$$

Подставив полученные для T и Π выражения (6.19) в уравнения Лагранжа II рода, получим уравнения малых колебаний системы в нормальных координатах:

$$a_1\ddot{\theta}_1 + c_1\theta_1 = 0; \quad a_2\ddot{\theta}_2 + c_2\theta_2 = 0,$$

причем $c_1/a_1 = \omega_1^2$; $c_2/a_2 = \omega_2^2$.

Выразив из системы (6.18) θ_1 и θ_2 через q_1 и q_2 :

$$\theta_1 = \frac{q_2 - \eta_{22}q_1}{\eta_{21} - \eta_{22}}; \quad \theta_2 = \frac{\eta_{21}q_1 - q_2}{\eta_{21} - \eta_{22}},$$

можно из начальных условий для q_1 и q_2 получить начальные условия для нормальных координат.

Нормальные координаты находят широкое применение при решении задач о вынужденных колебаниях в случае произвольного возмущения, при наличии или отсутствии вязкого сопротивления, а также при решении задач о свободном движении в неконсервативных системах.

6.2. Вынужденные колебания линейной системы с двумя степенями свободы при гармоническом возбуждении

6.2.1. Вынужденные колебания системы при отсутствии сил вязкого сопротивления

Ограничимся случаем, когда силы вязкого сопротивления отсутствуют или пренебрежимо малы, а обобщенные силы изменяются во времени по гармоническому закону. Тогда в соответствии с (5.17) дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1 \sin(pt + \beta); \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2 \sin(pt + \beta), \end{aligned} \quad (6.20)$$

где Q_1, Q_2, p и β — соответственно амплитуды обобщенных сил, частота и начальная фаза возмущающей силы.

Ограничимся исследованием частного решения системы (6.20), характеризующего вынужденные колебания. Зададим решение в виде

$$q_1 = G_1 \sin(pt + \beta); \quad q_2 = G_2 \sin(pt + \beta). \quad (6.21)$$

Подставив (6.21) в (6.20), получим неоднородную алгебраическую систему относительно G_1 и G_2 .

Воспользуемся правилом Крамера, согласно которому

$$G_1 = \Delta_1 / \Delta; \quad G_2 = \Delta_2 / \Delta.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} Q_1 & (c_{12} - p^2 a_{12}) \\ Q_2 & (c_{22} - p^2 a_{22}) \end{vmatrix} = (c_{22} - p^2 a_{22})Q_1 - (c_{12} - p^2 a_{12})Q_2; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} (c_{11} - p^2 a_{11}) & Q_1 \\ (c_{12} - p^2 a_{12}) & Q_2 \end{vmatrix} = (c_{11} - p^2 a_{11})Q_2 - (c_{12} - p^2 a_{12})Q_1; \\ \Delta &= \begin{vmatrix} (c_{11} - p^2 a_{11}) & (c_{12} - p^2 a_{12}) \\ (c_{12} - p^2 a_{12}) & (c_{22} - p^2 a_{22}) \end{vmatrix} = \\ &= (c_{11} - p^2 a_{11})(c_{22} - p^2 a_{22}) - (c_{12} - p^2 a_{12})^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Отметим, что структура определителя Δ полностью совпадает со структурой функции $\Delta(\omega^2)$, рассмотренной в предыдущем параграфе и равной нулю при ω_1^2 и ω_2^2 . Поэтому Δ можно представить так:

$$\Delta = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{(c_{22} - p^2 a_{22})Q_1 - (c_{12} - p^2 a_{12})Q_2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}; \\ G_2 &= \frac{(c_{11} - p^2 a_{11})Q_2 - (c_{12} - p^2 a_{12})Q_1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Полученные решения для G_1 и G_2 имеют смысл для всех значений частоты p за исключением p , равных ω_1 и ω_2 . При совпадении частот имеют место резонансы в системе при отсутствии сил вязкого сопротивления. Как было показано выше (см § 1.3.2), для системы с одной степенью свободы в этом случае надо искать решение в особой форме. Отметим тем не менее, что отношение G_2/G_1 при резонансах имеет конечную величину:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{(c_{11} - p^2 a_{11})Q_2 - (c_{12} - p^2 a_{12})Q_1}{(c_{22} - p^2 a_{22})Q_1 - (c_{12} - p^2 a_{12})Q_2} = \frac{\frac{(c_{11} - p^2 a_{11})}{(c_{12} - p^2 a_{12})} Q_2 - Q_1}{\frac{(c_{22} - p^2 a_{22})}{(c_{12} - p^2 a_{12})} Q_1 - Q_2}.$$

Учитывая (6.13), получаем, что при $p = \omega_1$

$$\frac{(c_{11} - p^2 a_{11})}{(c_{12} - p^2 a_{12})} = -\eta_{21}; \quad \frac{(c_{22} - p^2 a_{22})}{(c_{12} - p^2 a_{12})} = -\frac{1}{\eta_{21}},$$

откуда

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{-\eta_{21}Q_2 - Q_1}{-(1/\eta_{21})Q_1 - Q_2} = \eta_{21},$$

и, следовательно, при резонансе на частоте ω_1 **форма вынужденных колебаний** (отношение G_2/G_1) совпадает с собственной формой колебаний по первому тону. Аналогичный результат получается и при резонансе на частоте ω_2 .

Выражения для G_1 и G_2 содержат большое число входящих в них параметров, что затрудняет анализ полученных результатов — исследование зависимостей G_1 и G_2 от частоты p . Поэтому ограничимся рассмотрением частного случая, имеющего большое значение для инженерной практики.

Пусть $a_{12} = 0$ (система с упругой связью), $Q_2 = 0$ и $c_{12} < 0$. Отметим, что знак коэффициента c_{12} определяется субъективным фактором — выбором положительных направлений отсчета обобщенных координат. Так, в рассмотренном в предыдущем параграфе примере свободных колебаний связанных пружиной

маятников положительные направления обобщенных координат совпадают и коэффициент $c_{12} = -cl^2$ меньше нуля. При противоположных положительных направлениях обобщенных координат φ и ψ деформация пружины $\lambda = l\varphi + l\psi$, поэтому коэффициент c_{12} станет положительным и равным cl^2 .

Таким образом, при сделанных допущениях выражения для G_1 и G_2 (6.23) имеют вид

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{(n_2^2 - p^2)Q_1}{a_{11}(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}; \\ G_2 &= \frac{-c_{12}Q_1}{a_{11}a_{22}(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

6.2.2. Динамический гаситель колебаний

Зависимости G_1 и G_2 от p^2 приведены на рис. 6.5. Интерес представляет случай $p^2 = n_2^2$, когда $G_1 = 0$. При $p^2 = n_2^2 = c_{22}/a_{22}$ и $a_{12} = 0$, используя выражение (6.22), находим

$$\Delta = -c_{12}^2.$$

Тогда

$$G_2 = Q_1/c_{12}.$$

Этот эффект — нулевое значение G_1 при конечном G_2 — носит название *антирезонанса*, или эффекта *динамического гашения колебаний*, и широко используется в технике.

Обратимся к рассмотренному выше примеру 5.4. Тело массой m_1 , на которое непосредственно действует возмущающая сила $F_0 \sin pt$, является объектом, колебания которого необходимо погасить, а упруго скрепленное с ним тело массой m_2 — ди-

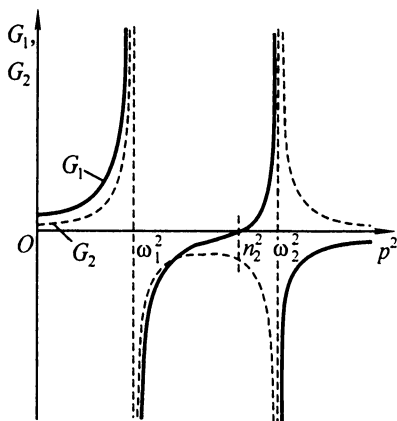


Рис. 6.5

наимическим гасителем колебаний. Дифференциальные уравнения движения системы получены выше и имеют вид (5.22).

Если подобрать параметры гасителя таким образом, чтобы $n_2^2 = c_2/m_2 = p^2$, то перемещение объекта будет равно нулю, а перемещение гасителя $x_2 = G_2 \sin pt = -(F_0/c_2) \sin pt$.

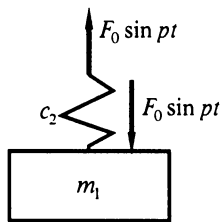


Рис. 6.6

Тогда в любой момент времени упругая сила в пружине гасителя (рис. 6.6) будет компенсировать возмущающую силу, действующую на объект.

Отметим следующее.

1. Настройка гасителя только по частоте недостаточна. Действительно, нельзя телом малой массы m_2 погасить колебания тела большой массы m_1 , поскольку малая масса m_2 означает малую жесткость $c_2 = m_2 p^2$, а следовательно, необходимая для гашения амплитуда колебаний гасителя F_0/c_2 может оказаться очень большой и технически нереализуемой.

2. Полное гашение в реальной системе, где всегда имеются диссипативные силы, невозможно.

6.2.3. Влияние сил вязкого сопротивления на настройку динамического гасителя колебаний

Рассмотрим возможность использования динамического гасителя для подавления колебаний объекта при резонансе.

Введем следующие обозначения: $\omega = \sqrt{c_1/m_1}$ — собственная частота объекта; $n_2 = \sqrt{c_2/m_2}$ — парциальная частота гасителя; $\beta = m_2/m_1$ — отношение масс гасителя и объекта; $G_{ст} = F_0/c_1$ — статическое смещение объекта под действием постоянной силы F_0 ; $\delta = n_2/\omega$, $\gamma = p/\omega$ — безразмерные частоты гасителя и возмущающей силы; $u_1 = |G_1/G_{ст}|$, $u_2 = |G_2/G_{ст}|$ — безразмерные амплитуды колебаний объекта и гасителя.

Тогда из (6.24) с учетом выражения для Δ (6.22) получаем

$$u_1 = \left| \frac{\delta^2 - \gamma^2}{(1 + \beta\delta^2 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^4} \right|;$$

$$u_2 = \left| \frac{\delta^2}{(1 + \beta\delta^2 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^4} \right|.$$

Амплитудно-частотная характеристика u_1 при $\beta=0,1$; $\delta=1$ приведена на рис. 6.7. Поскольку объект с добавленным гасителем представляет собой систему с двумя степенями свободы, наряду с гашением колебаний на частоте ω появляются два новых резонанса на частотах $\omega_1 = 0,854\omega$ и $\omega_2 = 1,17\omega$; соответствующих собственным частотам двухстепенной системы объект—гаситель. Это ограничивает использование подобных гасителей только случаями, когда частота возмущения жестко фиксирована.

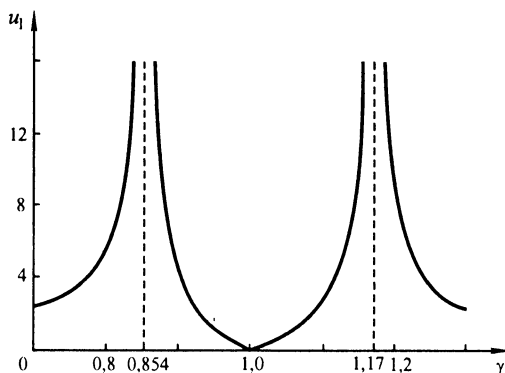


Рис. 6.7

Устранить резонансные колебания с большими амплитудами на частотах ω_1 и ω_2 оказывается возможным, если ввести в конструкцию гасителя демпфирование. Динамический гаситель в этом случае представляет собой дополнительное тело массой m_2 , соединенное с объектом пружиной жесткостью c_2 и демпфером с коэффициентом вязкого сопротивления h (рис. 6.8).

При наличии демпфера полное гашение колебаний становится невозможным, поскольку гаситель оказывает через него дополнительное воздействие на объект. Однако наличие демпфера позволяет при рациональном подборе параметров гасителя получить ограниченную амплитуду колебаний на всем диапазоне частот.

Дифференциальные уравнения системы, содержащей демпфер, имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + h \dot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - \\ - h \dot{x}_2 - c_2 x_2 = F_0 \sin pt; \\ m_2 \ddot{x}_2 - h \dot{x}_1 - c_2 x_1 + h \dot{x}_2 + c_2 x_2 = 0. \end{aligned}$$

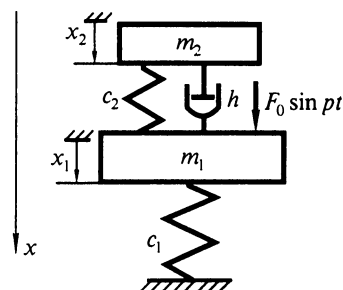


Рис. 6.8

Добавим к введенным ранее безразмерным параметрам β , δ , γ безразмерный коэффициент вязкого сопротивления $\eta = h/(2m_2\omega)$. Тогда после достаточно громоздких преобразований получаем выражение для интересующей нас безразмерной амплитуды колебаний объекта

$$u_1 = \sqrt{\frac{(\delta^2 - \gamma^2)^2 + 4\eta^2 \gamma^2}{[(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^2 \gamma^2]^2 + 4\eta^2 \gamma^2 (1 - \gamma^2 - \beta\gamma^2)^2}}.$$

На рис. 6.9 представлены амплитудно-частотные характеристики $u_1(\gamma)$ при $\beta=0,1$, $\delta=1$ и различных значениях η .

При $\eta=0$ $u_1(\gamma)$ имеет два резонанса и тождественна характеристике, представленной на рис. 6.7.

При $\eta \rightarrow \infty$ относительное движение гасителя становится невозможным и система как бы трансформируется в одноступенную с резонансом на частоте

$$\omega^* = \sqrt{\frac{c_1}{m_1 + m_2}} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \beta}} = 0,953\omega.$$

Как видно на рис. 6.9, при этих и любых других значениях η амплитудно-частотные характеристики проходят через точки S и T . Поскольку избавиться от этих точек нельзя, а снижение одной

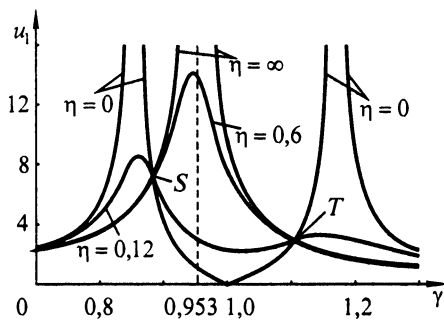


Рис. 6.9

вызывает подъем другой, то очевидно, что параметры гасителя станут оптимальными, если точки S и T будут находиться на одной высоте, а коэффициент демпфирования будет выбран таким образом, чтобы в одной из точек амплитудно-частотная характеристика имела максимум (при этом, как показывают расчеты, и второй максимум будет незначительно превышать ординаты точек S и T). Для выполнения первого условия необходимо подобрать параметры m_2 и c_2 гасителя так, чтобы соблюдалось условие $\delta = 1/1 + \beta$. При этом ординаты точек S и T будут равны $u_1 = \sqrt{1 + 2/\beta}$.

Определение оптимального значения η сложнее и требует использования ЭВМ или специальных номограмм. Для нашего

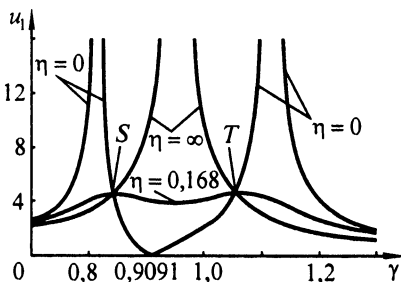


Рис. 6.10

примера оптимальное значение $\eta = 0,168$. На рис. 6.10 представлена амплитудно-частотная характеристика объекта при оптимально подобранном гасителе для случая $\beta = 0,1$. Значения параметров при этом следующие: $\delta = 0,9091$, максимальная амплитуда $u_1 = 4,59$.

Для расширения зоны гашения и уменьшения амплитудных значений u_1 необходимо в разумных пределах увеличивать массу гасителя по отношению к массе объекта.

Глава 7

СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

7.1. Матричная форма дифференциальных уравнений движения

Дифференциальные уравнения движения линейной системы с конечным числом степеней свободы были выведены в гл. 5 и имеют вид (5.15).

Обозначим вещественные симметрические квадратные $n \times n$ матрицы инерционных, диссипативных и квазиупругих (потенциальных) коэффициентов соответственно

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = [b_{ij}]; \quad \mathbf{C} = [c_{ij}],$$

а столбцовые матрицы (векторы) обобщенных координат системы и соответствующих им обобщенных возмущающих сил соответственно

$$\mathbf{q} = [q_i] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}(t) = [Q_i(t)] = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения движения можно представить в следующей матричной форме:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t). \quad (7.1)$$

В силу положительной определенности кинетической энергии T системы матрица $\mathbf{A}$ инерционных коэффициентов как матрица квадратичной формы от обобщенных скоростей является

положительно-определенной во всех случаях. Матрица $\mathbf{C}$ квазиупругих коэффициентов является положительно-определенной только при движении около положения устойчивого равновесия, где в силу теоремы Лагранжа потенциальная энергия имеет минимум. В этом случае выполняется условие критерия Сильвестра (см. § 5.1.2).

Если матрица $\mathbf{B}$ диссипативных коэффициентов является положительно-определенной, диссипация называется *полной* (т. е. проявляется во всех главных движениях).

7.2. Определение собственных характеристик системы

Собственные характеристики (частоты и формы колебаний) получают из матричного уравнения, описывающего свободное движение консервативной системы,

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0, \quad (7.2)$$

решение которого ищут в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \sin(\omega t + \alpha), \quad (7.3)$$

где $\mathbf{V} = [V_i]$ — матрица-столбец (вектор) амплитуд обобщенных координат.

Подстановка (7.3) в уравнение (7.2) дает алгебраическое матричное однородное уравнение

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A})\mathbf{V} = 0. \quad (7.4)$$

Условие существования нетривиального решения уравнения (7.4) приводит к характеристическому уравнению задачи

$$\det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A}) = |c_{ij} - \omega^2 a_{ij}| = 0. \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) является уравнением n -й степени относительно ω^2 . При $n < 3$ корни этого уравнения определяют аналитически, при $n > 2$ применяют специальные численные методы линейной алгебры. Уравнение частот (7.5) представляют в виде

$$\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{E}\omega^2) = 0,$$

где $\mathbf{E} = \text{diag}[1]$ — единичная матрица, и находят частоты как собственные значения несимметричной (в общем случае) матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$.

Упорядоченная в порядке возрастания и пронумерованная совокупность положительных корней уравнения (7.5) $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \omega_3^2 < \dots < \omega_n^e$ образует так называемый *спектр собственных значений системы*, а соответствующая ему совокупность $\omega_1 < \omega_2 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ — *спектр собственных частот*. Если в спектре собственных значений существует нулевой корень, то такой случай рассматривают как особый; он имеет место, когда матрица C не является положительно-определенной.

Каждой собственной частоте ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$, соответствует свой вектор V_k амплитуд обобщенных координат, удовлетворяющий уравнению (7.4), т. е.

$$(C - \omega_k^2 A)V_k = 0, \quad (7.6)$$

или в развернутой форме

$$\sum_{j=1}^n (c_{ij} - \omega_k^2 a_{ij})V_{jk} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Уравнение (7.6) содержит n неизвестных координат вектора V_k , однако, так как, согласно (7.5), матрица коэффициентов однородной системы алгебраических уравнений является вырожденной, число независимых уравнений в системе меньше n . Если характеристическое уравнение (7.4) имеет «простые» корни (т. е. в спектре нет одинаковых корней), то число независимых уравнений будет равно $n - 1$, и компоненты вектора амплитуд определяются с точностью до множителя. Найденное таким образом — с точностью до множителя — распределение амплитуд при собственном колебании с частотой ω_k называется *собственной формой колебаний*. Задание множителя определяет процедуру нормирования, которая может быть выполнена различными способами. В качестве нормирующего может выступать какой-либо из компонентов вектора амплитуд V_k , например V_{1k} или V_{kk} , либо модуль вектора (евклидова норма) $V_k = \sqrt{\sum_j v_{jk}^2}$.

Примем в качестве нормирующего множителя вектора V_k его компонент V_{kk} и введем *векторы формы* $\eta_k = V_k / V_{kk}$. Число

неизвестных компонентов вектора η_k равно $n - 1$ ($\eta_{kk} = 1$). Отбрасывая одно из уравнений в (7.6), получаем невырожденную систему алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n-1} (c_{ij} - \omega_k^2 a_{ij}) \eta_{jk} = \omega_k^2 a_{kk} - c_{kk} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (7.7)$$

из которой последовательно определяем все векторы η_k . Пронумерованная совокупность векторов $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ образует *спектр собственных форм колебаний* системы.

7.3. Свойства собственных частот и форм колебаний

В силу симметричности и положительной определенности матриц A и C из теорем линейной алгебры следует, что:

1) все корни характеристического уравнения (7.5) положительные (в особых случаях, когда возможны и нулевые значения, неотрицательные) и, таким образом, собственные частоты вещественные;

2) собственные формы попарно ортогональны с матрицами A и C , т. е.

$$\eta_r^T A \eta_k = \eta_r^T C \eta_k = 0 \quad \text{при } k \neq r. \quad (7.8)$$

Для доказательства последнего запишем уравнение (7.6) для собственных форм, соответствующих двум разным частотам,

$$\omega_k^2 A \eta_k = C \eta_k;$$

$$\omega_r^2 A \eta_r = C \eta_r.$$

Умножим первое уравнение слева на η_r^T . Второе уравнение умножим на η_k^T , транспонируем и вычтем из первого. Так как в силу симметричности $A^T = A$, $C^T = C$, то

$$(\omega_r^2 \eta_k^T A \eta_r)^T = \omega_r^2 \eta_r^T A \eta_k = (\eta_k^T C \eta_r)^T = \eta_r^T C \eta_k,$$

откуда

$$(\omega_k^2 - \omega_r^2) \eta_r^T A \eta_k = 0$$

и, следовательно,

$$\eta_r^T A \eta_k = \eta_r^T C \eta_k = 0.$$

7.4. Свободные колебания консервативных систем

Собственным частотам ω_k , $k=1, 2, \dots, n$, отвечают частные решения

$$\mathbf{q}^{(k)} = \boldsymbol{\eta}_k V_{kk} \sin(\omega_k t + \alpha_k) = \boldsymbol{\eta}_k (P_k \cos \omega_k t + R_k \sin \omega_k t) \quad (7.9)$$

(где P_k , R_k — произвольные постоянные), описывающие главные колебания.

Свободные колебания системы представляют собой суперпозицию главных колебаний, т. е.

$$\begin{aligned} q_j &= \sum_k q_j^{(k)} = \sum_k \eta_{jk} v_{kk} \sin(\omega_k t + \alpha_k) = \\ &= \sum_k \eta_{jk} (P_k \cos \omega_k t + R_k \sin \omega_k t), \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{q} = \sum_k \boldsymbol{\eta}_k (P_k \cos \omega_k t + R_k \sin \omega_k t). \quad (7.10)$$

Произвольные постоянные интегрирования определяют по начальным условиям $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$ с учетом ортогональности собственных форм (7.8). Подстановка в (7.10) $t=0$ и умножение обеих частей полученного равенства слева на $\boldsymbol{\eta}_r^T \mathbf{A}$ дает

$$\boldsymbol{\eta}_r^T \mathbf{A} \mathbf{q}_0 = \sum_r (\boldsymbol{\eta}_r^T \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_k) P_k = \boldsymbol{\eta}_r^T \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_k P_k \quad (r=k),$$

откуда следует

$$P_k = (\boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{A} \mathbf{q}_0) / (\boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_k).$$

Аналогично находят

$$R_k = (\boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_0) / \omega_k (\boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_k). \quad (7.11)$$

Если распределение начальных отклонений и скоростей с точностью до множителя совпадает с какой-либо собственной формой колебаний, т. е. $\mathbf{q}_0 = a \boldsymbol{\eta}_i$, $\dot{\mathbf{q}}_0 = b \boldsymbol{\eta}_i$, то отличными от нуля, согласно формулам (7.11), будут только две константы: $P_i = a$ и $R_i = b$. Это означает, что при таком специальном задании начальных условий возбуждаются главные колебания системы,

причем, если $b = 0$, реализуются так называемые переходные, а при $a = 0$ — импульсные характеристики.

7.5. Нормальные (главные) колебания

Выражения (7.10) показывают, что свободные колебания системы представляют собой суперпозицию гармонических колебаний. Так как частоты гармоник обычно несоизмеримы, колебательное движение системы является довольно хаотическим. Как было показано выше, специальным подбором начальных условий движения можно создать условия, когда все обобщенные координаты системы будут совершать гармонические колебания с какой-то одной из возможных собственных частот, т. е. будут возбуждаться главные колебания системы.

Возможен и другой способ — найти такие новые координаты, каждая из которых будет изменяться по гармоническому закону с какой-либо собственной частотой системы при любых начальных условиях. Путь решения этой задачи подсказывает сама структура общего решения (7.10).

Введем новые переменные

$$\theta_k = V_{kk} \sin(\omega_k t + \alpha_k).$$

Тогда, согласно (7.10), имеем

$$q_j = \sum_k \eta_{jk} \theta_k \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

или в векторной форме

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}, \quad (7.12)$$

где $\mathbf{H} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_n]$ — матрица, столбцами которой являются нормированные собственные векторы; $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T$ — вектор новых координат. Линейное преобразование координат (7.12) приводит квадратичную форму потенциальной энергии к каноническому виду:

$$П = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{C}^* \boldsymbol{\theta},$$

где $\mathbf{C}^* = \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} = (\boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}_k) = \text{diag}(c_k)$; $c_k = \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}_k = \sum_i \sum_j \eta_{ki} c_{ij} \eta_{jk}$.

Аналогично для кинетической энергии получаем

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H} = \text{diag}(a_k); \quad a_k = \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_k.$$

В новых координатах, называемых *нормальными* (в смысле ортогональности), или *главными*, дифференциальные уравнения свободного движения консервативной системы становятся несвязанными относительно координат, т. е. принимают вид

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (7.13)$$

где $\omega_k^2 = c_k/a_k$ — квадраты собственных частот, определенные теперь по элементам диагональных матриц коэффициентов, соответствующих новым координатам.

Формула (7.12) определяет *прямое* преобразование координат, при котором обобщенные координаты выражаются через нормальные. Обратное преобразование имеет вид

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G} \mathbf{q},$$

где $\mathbf{G}$ — обратная к $\mathbf{H}$ матрица, которая показывает, что каждой нормальной координате соответствует линейная комбинация обобщенных координат $\theta_k = \mathbf{g}_k^T \mathbf{q}$ (где $\mathbf{g}_k^T$ — вектор-строка матрицы $\mathbf{G}$). Эта линейная комбинация сводится к одному числу только в случае, когда распределение координат в векторе $\mathbf{q}$ соответствует k -й собственной форме, т. е. $\mathbf{q} = \mathbf{q}_k = \boldsymbol{\eta}_k \theta$, так как $\mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\eta}_k = 1$. Таким образом, каждая нормальная координата представляет собой совокупность обобщенных координат, распределенных в ней в соответствии с собственной формой.

7.6. Решение общей задачи

Применим линейное преобразование координат (7.12) к уравнению (7.1) и умножим его слева на $\mathbf{H}^T$. Получим уравнение

$$\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}^T \mathbf{B} \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}^T \mathbf{Q}. \quad (7.14)$$

В силу невозможности одновременного приведения к каноническому виду трех квадратичных форм (кинетической T , потенциальной Π энергий и диссипативной функции Φ) действительные нормальные координаты для уравнения (7.1) существуют только

при определенных ограничениях, налагаемых на матрицу диссипативных коэффициентов $\mathbf{B}$. В двух простейших частных случаях, когда такое приведение возможно, нормальные координаты диссипативной системы совпадают с нормальными координатами консервативной системы. В первом случае, матрица диссипативных коэффициентов пропорциональна матрице инерционных коэффициентов, т. е. $\mathbf{B} = 2\varepsilon\mathbf{A}$, где $\varepsilon = \text{const}$, и демпфирование называют *внешним*. Во втором случае матрица $\mathbf{B}$ пропорциональна матрице $\mathbf{C}$ квазиупругих коэффициентов, т. е. $\mathbf{B} = \tau\mathbf{C}$, где $\tau = \text{const}$, и демпфирование называют *внутренним*.

Если диссипативные силы появляются в системе в силу естественных причин, их трудно определить путем прямых измерений. Поэтому часто в практических расчетах, если характеристики и распределение по системе диссипативных сил неизвестны, исследователь вправе принимать любой вид демпфирования, добиваясь лишь удовлетворительного согласия с опытом.

Обозначив вектор обобщенных возмущающих сил, соответствующих нормальным координатам, через $\mathbf{F} = \mathbf{H}^T \mathbf{Q}$, получим матричное уравнение движения системы в виде

$$\mathbf{A}^* \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}^* \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}^* \boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}, \quad (7.15)$$

или в развернутой форме

$$\ddot{\theta}_k + 2\varepsilon_k \dot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = F_k / a_k \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где $\varepsilon_k = \varepsilon$ в случае внешнего и $\varepsilon_k = \tau \omega_k^2 / 2$ в случае внутреннего демпфирования; $F_k = \sum_j \eta_{kj} Q_j$.

Пример 7.1. Получить уравнения колебаний в грузоподъемной системе, показанной на рис. 7.1, при условии, что движение началось из состояния покоя под действием постоянного момента M на шкиве 2, если $m_1 = m$, $m_3 = 2m$, $J_O = m_2 \rho^2$, $m_2 = 2m$, $\rho^2 = Rr$, $c_{п3}/c_{п1} = m_3/m_1 = R/r = 2$, $h_1/c_{п1} = h_3/c_{п3}$.

Полагая, что движение грузов 1 и 3 будет поступательным, введем обобщенные координаты $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2 = r\varphi$, $q_3 = x_3$, отсчитывая их как показано на рис. 7.1 от положений статического равновесия тел системы при $t = 0$.

Тогда кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + J_O \dot{\phi}^2 + m_3 \dot{x}_3^2) = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + 4\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_3^2)m, \end{aligned}$$

а инерционные коэффициенты $a_{11} = m$, $a_{22} = 4m$, $a_{33} = 2m$, $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии деформации упругих элементов и энергии грузов в поле силы тяжести. Определив статические деформации упругих элементов $\lambda_1 = m_1 g / c_{п1}$, $\lambda_3 = m_3 g / c_{п3}$, запишем

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}c_{п1}(\lambda_1 + x_1 - R\phi)^2 - \frac{1}{2}c_{п1}\lambda_1^2 + \frac{1}{2}c_{п3}(\lambda_3 - x_3 + r\phi)^2 - \\ &- \frac{1}{2}c_{п3}\lambda_3^2 - m_1 g x_1 + m_3 g x_3 = \frac{1}{2}c_{п1}(x_1 - 2x_2)^2 + \frac{1}{2}c_{п3}(x_3 - x_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2}[c_{п1}x_1^2 + (4c_{п1} + c_{п3})x_2^2 + c_{п3}x_3^2 - 4c_{п1}x_1x_2 - 2c_{п3}x_2x_3]. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{п1} = c; \quad c_{22} = 4c_{п1} + c_{п3} = 6c; \quad c_{33} = c_{п3} = 2c; \\ c_{12} &= c_{21} = -2c; \quad c_{23} = c_{32} = -2c; \quad c_{13} = c_{31} = 0. \end{aligned}$$

Диссипативная функция

$$\Phi = 1/2 h_1 (\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2)^2 + 1/2 h_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2,$$

как видно из сравнения с потенциальной энергией, соответствует условиям пропорциональности в рамках гипотезы внутреннего трения.

Таким образом, матрицы коэффициентов и вектор обобщенных возмущающих сил имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} m; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} c; \quad \mathbf{B} = h \frac{\mathbf{C}}{c}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ M/r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

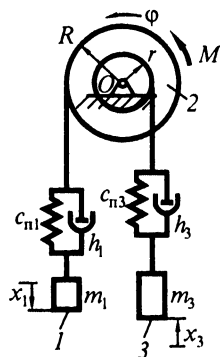


Рис. 7.1

Запишем дифференциальное уравнение движения системы

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{Q},$$

где $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$.

Собственные частоты и формы колебаний системы определим из матричного алгебраического уравнения

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A})\mathbf{V} = 0.$$

Разделим все члены этого уравнения на c . Обозначив $c/m = k^2$, $\omega/k = z$, приведем полученное характеристическое уравнение к безразмерному виду:

$$\det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A}) = \det(\hat{\mathbf{C}} - m\omega^2 \hat{\mathbf{A}}/c) = c \det(\hat{\mathbf{C}} - z^2 \hat{\mathbf{A}}) = 0,$$

где $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/m$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}/m$.

В условиях данного примера задача о собственных значениях может быть решена аналитически. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - z^2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 - 4z^2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 - 2z^2 \end{vmatrix} = 4z^2(1 - z^2)(5 - 2z^2) = 0$$

имеет корни $z_1^2 = 0$, $z_2^2 = 1$, $z_3^2 = 2,5$. Как видно из решения, имеет место особый случай — один из корней характеристического уравнения равен 0.

Компоненты собственных векторов определим из системы уравнений

$$(1 - z^2)V_1 - 2V_2 = 0;$$

$$-2V_1 + (6 - 4z^2)V_2 - 2V_3 = 0;$$

$$-2V_2 + (2 - 2z^2)V_3 = 0.$$

Нормирование собственных векторов выполним так, чтобы их компоненты выражались целыми числами. Для нулевого корня z_1 примем в качестве нормирующего $V_{11} = 2$, и из первого и третьего уравнений найдем $V_{31} = V_{21} = V_{11}/2 = 1$. Таким образом, выясняется, что соответствующий нулевой частоте собственный вектор $\mathbf{V}_1 = [2 \ 1 \ 1]^T$ характеризует движение системы как сис-

темы твердых тел. Ненулевым корням z_2 и z_3 отвечают формы, определяемые собственными векторами

$$\mathbf{V}_2 = [1 \ 0 \ -1]^T, \quad \mathbf{V}_3 = [4 \ -3 \ 2]^T.$$

Переходя к нормальным координатам $\mathbf{x} = \mathbf{V}\boldsymbol{\theta}$, вычислим коэффициенты диагональных матриц:

$$a_1 = \mathbf{V}_1^T \mathbf{A} \mathbf{V}_1 = [2 \ 1 \ 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} m \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10m; ,$$

$$a_2 = \mathbf{V}_2^T \mathbf{A} \mathbf{V}_2 = 3m; \quad a_3 = \mathbf{V}_3^T \mathbf{A} \mathbf{V}_3 = 60m;$$

$$c_1 = \mathbf{V}_1^T \mathbf{C} \mathbf{V}_1 = 0; \quad c_2 = \mathbf{V}_2^T \mathbf{C} \mathbf{V}_2 = 3c; \quad c_3 = \mathbf{V}_3^T \mathbf{C} \mathbf{V}_3 = 150c.$$

Вычислив собственные частоты по значениям коэффициентов диагонализированных матриц, убеждаемся в совпадении их значений с ранее найденными, что свидетельствует о правильности выполнения процедуры диагонализации.

Вектор обобщенных возмущающих сил для нормальных координат имеет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}^T \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M/r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} M/r.$$

Главные движения определим как решения дифференциальных уравнений в нормальных координатах.

1. Уравнение

$$a_1 \ddot{\theta}_1 = M/r$$

имеет решение

$$\theta_1 = P_1 + R_1 + at^2/2,$$

где $a = M/(a_1 r) = M/(10mr)$. Следовательно, главное движение, соответствующее нулевому корню, имеет неколебательный характер.

2. Уравнение

$$a_2 \ddot{\theta}_2 + b_2 \dot{\theta}_2 + c_2 \theta_2 = 0,$$

или

$$\ddot{\theta}_2 + \tau \omega_2^2 \dot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0$$

(где $\tau = b_2/a_2 = h/c$), при демпфировании, меньшем критического, т. е. при $\tau\omega_2 < 2$, имеет решение

$$\theta_2 = \exp(-\varepsilon_2 t)(P_2 \cos \Omega_2 t + R_2 \sin \Omega_2 t).$$

Здесь $\varepsilon_2 = \tau\omega_2^2/2 = h/2m$; $\Omega_2 = \sqrt{\omega_2^2 - \varepsilon_2^2} = \omega_2 \sqrt{1 - (\tau\omega_2/2)^2}$.

3. Уравнение

$$a_3\ddot{\theta}_3 + b_3\dot{\theta}_3 + c_3\theta_3 = -3M/r,$$

или

$$\ddot{\theta}_3 + \tau\omega_3^2\dot{\theta}_3 + \omega_3^2\theta_3 = -M/20mr = -a/2,$$

при $\tau\omega_3 < 2$ имеет решение

$$\theta_3 = \exp(-\varepsilon_3 t)(P_3 \cos \Omega_3 t + R_3 \sin \Omega_3 t) - a/(2\omega_3^2).$$

Здесь

$$\varepsilon_3 = \tau\omega_3^2/2 = 5h/(4m); \quad \Omega_3 = \sqrt{\omega_3^2 - \varepsilon_3^2} = \omega_3 \sqrt{1 - (\tau\omega_3/2)^2}.$$

Так как матрица V является невырожденной ($\det V = -15$), существует обратное преобразование координат $\theta = V^T x$, из которого следует, что нулевым начальным условиям для обобщенных координат соответствуют нулевые условия для нормальных координат, т. е. $\theta_k(0) = 0$, $\dot{\theta}_k(0) = 0$, $k = 1, 2, 3$. При этом постоянные интегрирования $P_1 = R_1 = P_2 = R_2 = 0$, $P_3 = a/2\omega_3^2 = a/5k^2$, $R_3 = \varepsilon_3 P_3/\Omega_3$ и частные решения для нормальных координат имеют вид

$$\theta_1 = at^2/2; \quad \theta_2 = 0;$$

$$\theta_3 = (a/5k^2)[\exp(-\varepsilon_3 t)(\cos \Omega_3 t + (\varepsilon_3/\Omega_3) \sin \Omega_3 t) - 1].$$

Уравнения движения системы в обобщенных координатах будут такими:

$$x_1 = V_{11}\theta_1 + V_{12}\theta_2 + V_{13}\theta_3 = 2\theta_1 + 4\theta_3;$$

$$x_2 = V_{21}\theta_1 + V_{22}\theta_2 + V_{23}\theta_3 = \theta_1 - 3\theta_3;$$

$$x_3 = V_{31}\theta_1 + V_{32}\theta_2 + V_{33}\theta_3 = \theta_1 + 2\theta_3.$$

Решение показывает, что при данных начальных условиях второе главное колебание не возбуждается, и движение системы представляет собой равноускоренное движение ее как твердого тела, на которое налагается затухающее колебание третьего тона.

СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Глава 8

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

8.1. Предварительные замечания

Колебательная система с конечным числом степеней свободы является лишь идеализированной моделью некоторых реальных систем.

В такой системе, как было отмечено в § 1.1.1, необходимо *все инерционные элементы системы считать абсолютно твердыми, а все упругие элементы (пружины) — безынерционными*, т. е. полагать их массы пренебрежимо малыми по сравнению с массами твердых тел. Реальные системы состоят из тел, которые не обладают абсолютной жесткостью и полной безынерционностью, но их можно рассматривать таковыми при некоторых допущениях.

Справедливость подобных допущений зависит не только от возможности выделить в рассматриваемой системе инерционные и упругие элементы, но и от характера колебательного процесса. Например, простую систему, состоящую из тела, скрепленного с пружиной, можно рассматривать как систему с одной степенью свободы, только если, во-первых, масса тела значительно превышает массу пружины и, во-вторых, амплитуда его колебаний имеет тот же порядок, что и амплитуда колебаний точек пружины. Последнее условие обязательно, так как при высоких частотах тело остается почти неподвижным, тогда как различные части пружины могут иметь сравнительно большие амплитуды колебаний. В подобных случаях систему уже нельзя рассматривать как систему с одной степенью свободы.

В этой главе рассмотрены колебания упругих тел, которые нельзя принимать жесткими или безынерционными. Естественно, что колебания в системах, содержащих такие тела, исследовать сложнее. Трудности связаны с необходимостью учета упругих

деформаций и математическим решением краевой задачи. Так как общих методов исследования для различных систем не существует, то задачи теории колебаний рассмотрены с общих позиций на примере типичных упругих систем.

Чтобы определить положение упругого тела, надо знать в пространстве положение каждой его частицы. Наиболее распространен прямой метод, заключающийся в использовании координат перемещения частиц. Однако в упругом теле частицы не сосредоточены, а имеют непрерывное распределение в некотором пространстве. Поэтому обозначить их конечным числом индексов не представляется возможным.

Пусть x, y, z — прямоугольные координаты некоторой точки P упругого тела, находящейся в статическом равновесии, в неподвижной системе отсчета, а $\rho(x, y, z)$ — плотность массы тела в точке P . Некоторый элемент массы $dm = \rho(x, y, z)dV$ будет играть роль частицы, где dV — элементарный объем тела в точке P . Пусть u, v, w являются тремя компонентами перемещений элемента массы относительно равновесного состояния. Эти компоненты зависят от положения точки в пространстве и от времени:

$$u = u(x, y, z, t);$$

$$v = v(x, y, z, t);$$

$$w = w(x, y, z, t).$$

Переменные x, y, z определяют равновесное статическое положение элементарных частиц в неподвижной системе отсчета, а функции u, v, w можно рассматривать как перемещения этих частиц в той же системе отсчета.

Так как в упругом теле имеется неограниченное число точек P , то при его колебаниях система обладает бесконечно большим числом степеней свободы.

Координаты u, v, w , однако, не являются полностью независимыми, они обладают некоторыми связями. На границах, где тело находится в соприкосновении с основанием или иной средой, функции перемещений подчинены некоторым зависимостям, которые называются *граничными* или *краевыми условиями*. На перемещения точек внутри тела можно наложить дополнительные условия, например считать, что u, v, w непрерывны и дифференцируемы несколько раз

относительно неподвижных пространственных координат. Можно ввести также некоторые допущения, например при изгибах длинного стержня считать, что его поперечные сечения, плоские до изгиба, остаются плоскими и во время изгиба, а все точки данного поперечного сечения перемещаются совместно, находясь в одной плоскости.

В связи с тем, что приходится рассматривать возмущения различных типов, часто функцию перемещений представляют как сумму бесконечного ряда некоторых известных функций. Например, для выражения формы упругой линии деформированного стержня, шарнирно опертого на концах, можно использовать тригонометрический ряд:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Определяя значения коэффициентов $q_1, q_2, \dots, q_n$, число которых бесконечно ($n = 1, 2, \dots, \infty$), можно единственным образом определить изогнутую ось стержня. Следовательно, $q_1, q_2, \dots, q_n$ можно рассматривать как обобщенные координаты системы. Этот прием разделения переменных x и t и использования известных функций координат точек для определения изгиба упругой линии стержня весьма важен, так как позволяет применять методы теории колебаний систем с конечным числом степеней свободы.

8.2. Дифференциальные уравнения свободных колебаний

8.2.1. Общие положения

Выделив из упругого тела элементарную массу ρdV и применив второй закон Ньютона, запишем дифференциальные уравнения движения в проекциях на неподвижные оси координат:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dV &= df_x; \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dV &= df_y; \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dV &= df_z, \end{aligned} \tag{8.1}$$

где df_x, df_y, df_z — силы, действующие на элементарную массу ρdV . При свободных колебаниях ими являются упругие силы, обусловленные местной деформацией тела. Они выражаются через перемещения u, v, w согласно законам упругих деформаций, которые связывают силы с напряжениями, напряжения с деформациями, деформации с перемещениями. Основные уравнения теории упругости должны определять эти силы в зависимости от перемещений.

В общем виде уравнения (8.1) можно представить так:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= L_x(u, v, w); \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= L_y(u, v, w); \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= L_z(u, v, w),\end{aligned}\tag{8.2}$$

где L_x, L_y, L_z — линейные дифференциальные операторы, включающие частные производные различных порядков относительно переменных u, v, w , а также упругие постоянные. Отметим, что время t не входит в явном виде в правые части уравнений (8.2).

Полученные дифференциальные уравнения в частных производных объединяют закон движения Ньютона и закон упругих деформаций Гука с учетом распределения масс и упругих свойств материала, составляющего упругое тело. Однако этих уравнений недостаточно для решения задач о колебаниях. Упругое тело имеет форму и границы. Уравнения (8.2) должны быть объединены с граничными условиями, определяющими характер его связи с другими телами или средами. Дифференциальные уравнения движения вместе с граничными условиями образуют *краевую задачу*. Такая задача определяет характер колебательно-го движения, которое может иметь упругая система. Часто эта задача имеет практический интерес. Если, однако, она заключается в отыскании действительных колебаний тела, то мы должны знать так называемые *начальные условия*, которые характеризуют

перемещения и скорости точек тела в некоторый момент времени $t = t_0$.

Рассмотрим теперь собственные колебания некоторых упругих тел.

8.2.2. Продольные колебания тонкого прямого стержня, крутильные колебания прямого вала с круговым поперечным сечением, поперечные колебания растянутой нити

При продольных колебаниях каждый элементарный участок стержня длиной dx попеременно испытывает растяжение и сжатие, оставаясь плоским. Если стержень относительно тонок, то инерционные силы в поперечном направлении, вызванные попеременным увеличением и уменьшением высоты сечения, пренебрежимо малы и можно считать, что инерционные силы в стержне направлены исключительно вдоль его продольной оси. Связь напряжений и перемещений, обусловленных только осевыми силами при малых колебаниях, определяется законом Гука.

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (8.3)$$

где σ_x , ε_x , E — напряжение, деформация и модуль упругости первого рода соответственно, причем координатная ось Ox направлена вдоль оси стержня.

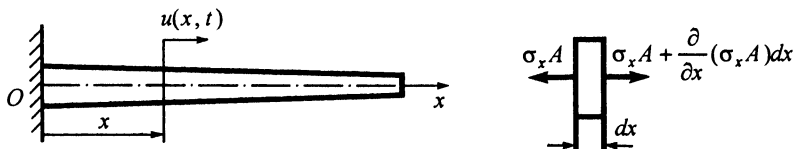


Рис. 8.1

Составим дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня. Рассмотрим для этого элементарный участок стержня между поперечными сечениями, расположенными на расстоянии dx (рис. 8.1). На левой грани участка действует растягивающая сила $\sigma_x A$, где A — площадь поперечного сечения стержня, на

правой грани кроме силы $\sigma_x A$ имеется ее приращение, равное $\frac{\partial(\sigma_x A)}{\partial x} dx$. Применяя второй закон Ньютона, получаем

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (8.4)$$

Для стержней с постоянным поперечным сечением уравнение (8.4) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (8.5)$$

Возможны различные граничные условия. Так, в случае зашпеленного конца равны нулю перемещения:

$$u = 0,$$

в случае свободного конца равны нулю напряжения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Если на конце стержня ($x = l$) имеется сосредоточенная масса m_0 , то возникающая инерционная сила этой массы и упругая сила на конце стержня должны находиться в равновесии, т. е.

$$m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + AE \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

если конец стержня ($x = l$) соединен с пружиной, имеющей жесткость c , то в равновесии должны находиться две упругие силы, т. е.

$$cu + AE \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Каждое из этих граничных условий относится только к одному значению x , но при любом значении t .

Все эти граничные условия *линейно однородны*, так как они содержат переменные и их производные только в первой степени. Линейное дифференциальное уравнение (8.4) и система граничных условий совместно образуют линейную задачу, следовательно, в данном случае справедлив принцип суперпозиции. Легко увидеть, что если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два решения граничной задачи, то их комбинация $A_1 u_1 + A_2 u_2$ также является решением.

Граничные условия первого типа $u = 0$ называют *геометрическими*. Другие типы граничных условий носят название *динамических*.

Начальные условия, необходимые для получения частного решения задачи о колебаниях, представим в виде

$$u(x, 0) = f(x);$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = g(x).$$

Эти условия линейны, но неоднородны, так как правые части их не равны нулю.

Дифференциальное уравнение крутильных колебаний прямого вала с круговым сечением подобны уравнениям (8.4) и (8.5). Пусть ось вала совпадает с направлением координатной оси Ox (рис. 8.2). Обозначим поворот некоторого поперечного сечения вала, которое предполагаем всегда плоским, через $\theta = \theta(x, t)$. На элементарный диск вала длиной dx справа и слева действуют крутящие моменты, причем в правом сечении имеется приращение момента по сравнению с левым сечением на $\frac{\partial M}{\partial x} dx$, где M — крутящий момент. Запишем дифференциальное уравнение вращения элементарного диска в виде

$$\rho J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x},$$

где J_p — полярный момент инерции поперечного сечения вала.

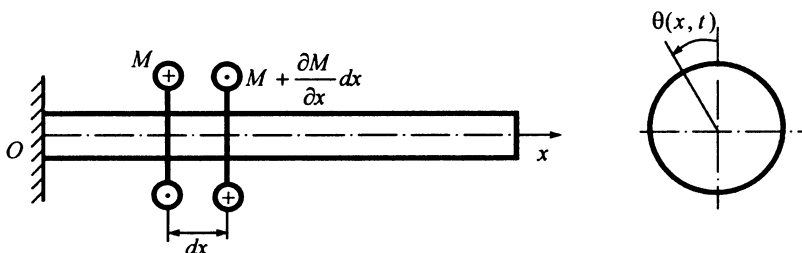


Рис. 8.2

Связь между интенсивностью угла закручивания и крутящим моментом определяется уравнением

$$G J_p \frac{\partial \theta}{\partial x} = M,$$

где G — модуль упругости второго рода.

После подстановки выражения для момента M в уравнение вращения получаем результирующее дифференциальное уравнение крутильных колебаний вала

$$\rho J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(G J_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \right).$$

Для вала с постоянным поперечным сечением имеем

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (8.6)$$

Получим теперь дифференциальное уравнение поперечных колебаний растянутой нити. Нить не имеет изгибной жесткости и

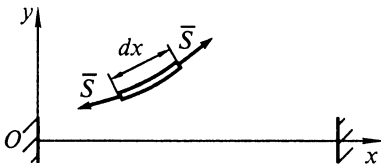


Рис. 8.3

может работать только на растяжение. Ограничимся рассмотрением только плоских колебаний.

Пусть колебания происходят в плоскости xOy . Положение нити при колебаниях характеризуется функцией

$$v = v(x, t),$$

причем $v = 0$ соответствует положению равновесия.

Дифференциальное уравнение движения элемента нити длиной dx в направлении координатной оси Oy будет следующим (рис. 8.3):

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = dS_y,$$

где dS_y — элементарная сила растяжения нити в проекции на ось Oy .

Так как $S_y = S \frac{\partial v}{\partial x}$, то

$$dS_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx,$$

где S — сила растяжения нити.

Отсюда получаем

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Это уравнение нелинейно, так как S зависит от v . Однако если начальное натяжение велико, а отклонение v мало, то S может быть принято постоянным. Тогда дифференциальное уравнение поперечных колебаний растянутой нити (струны) будет подобно уравнению (8.5) или (8.6):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (8.7)$$

где $\sigma = S/A$ — напряжение растяжения.

8.2.3. Колебания сжимаемой жидкости в длинной прямой трубе

В случае длинной трубы (с малым диаметром по сравнению с длиной) детальный анализ сложных явлений, происходящих на концах трубы, можно опустить и считать, что динамические процессы на этих участках описываются теми же уравнениями, что и процессы в самой трубе. Трение в жидкости и жидкости о стенки трубы учитывать не будем. Если, кроме того, условиться рассматривать лишь низкие частоты колебаний (такие, длина волны которых велика по сравнению с диаметром трубы), то можно считать, что в каждом поперечном сечении потока жидкости в трубе все величины (скорость, давление и т. п.) постоянны, а поток жидкости одномерный.

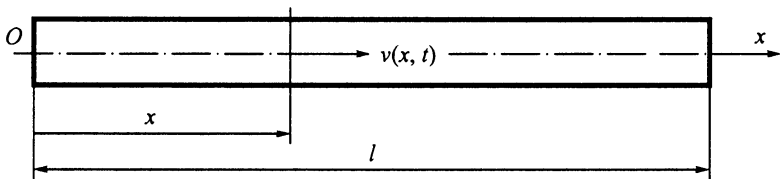


Рис. 8.4

Направим ось Ox вдоль оси трубы (рис. 8.4). Линеаризованное уравнение возмущенного движения жидкости в трубе представим в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (8.8)$$

где v_0 , ρ_0 — скорость и плотность жидкости в невозмущенном потоке соответственно; $v = v(x, t)$, $p = p(x, t)$ — малые возмущения скорости и давления жидкости.

Будем считать жидкость сжимаемой однородной и однофазной, т. е. не имеющей пузырьков пара или газа. Динамическое уравнение движения жидкости необходимо рассматривать совместно с уравнением неразрывности жидкости. Линеаризованное уравнение неразрывности сжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (8.9)$$

где ρ — возмущение плотности жидкости.

Поскольку воздействия на поток жидкости могут происходить только на его концах, то удобно ввести безразмерные величины:

$$M = v_0/a_0; \quad \tau = a_0 t/l; \quad \xi = x/l; \quad (8.10)$$

$$\tilde{v}(\xi, \tau) = v/a_0; \quad \tilde{p}(\xi, \tau) = p/(a_0^2 \rho_0),$$

где M — число Маха; a_0 — скорость звука в невозмущенном потоке; l — длина трубы.

Уравнения (8.8) и (8.9) в безразмерном виде будут такими:

$$\frac{\partial \tilde{v}(\xi, \tau)}{\partial \tau} + M \frac{\partial \tilde{v}(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{p}(\xi, \tau)}{\partial \xi} = 0; \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}(\xi, \tau)}{\partial \tau} + M \frac{\partial \tilde{p}(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}(\xi, \tau)}{\partial \xi} = 0.$$

Приведем их к одному уравнению второго порядка относительно переменной $\tilde{v}(\xi, \tau)$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tau^2} + 2M \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi \partial \tau} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (8.12)$$

Зная возмущение скорости $v(\xi, \tau)$, из первого уравнения (8.11) найдем возмущение давления

$$\tilde{p}(\xi, \tau) = -M \tilde{v}(\xi, \tau) - \int \frac{\partial \tilde{v}(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi. \quad (8.13)$$

Решения уравнений (8.8) и (8.9) или (8.12) должны удовлетворять граничным и начальным условиям. В общем случае граничные условия сводятся к линейным однородным соотношениям между переменными $p(x, t)$ и $v(x, t)$, которые должны выполняться на концах трубы. В простейших случаях они будут такими:

$$p(x, t) = 0$$

— для открытого конца трубы и

$$v(x, t) = 0$$

— для закрытого конца трубы.

Открытый и закрытый концы трубы следует понимать в акустическом смысле. Давление на открытом конце трубы сохраняется постоянным и равным p_0 , тогда возмущение давления $p(x, t) = 0$. На закрытом (в акустическом смысле) конце трубы постоянна скорость жидкости, т. е. возмущение скорости $v(x, t) = 0$. В частном случае конец трубы может быть физически закрыт, т. е. $v_0 = 0$; тогда, естественно, $v(x, t) = 0$.

Отметим две особенности, вытекающие из структуры уравнения (8.12):

1) поток жидкости, движущийся со скоростью v_0 имеет более низкие частоты свободных колебаний $(1 - M^2)$ по сравнению с неподвижным столбом жидкости такой же длины;

2) даже при отсутствии внутреннего и внешнего трения свободные колебания потока жидкости являются затухающими в связи с тем, что часть энергии колебаний выносится потоком за пределы трубы. Если столб жидкости неподвижен, то его свойства одинаковы со свойствами однородного упругого стержня.

8.2.4. Поперечные колебания тонкого прямого стержня

При исследовании поперечных колебаний стержня, как и в случае его продольных колебаний, воспользуемся гипотезой плоских сечений. Распределение напряжений и деформаций, создаваемых в стержне, примем таким же, как это предписывается элементарной теорией изгиба.

Возьмем правую систему координат, ось Ox направим по центральной оси стержня, а плоскость xOy будет нейтральной плоскостью стержня при симметричном изгибе. Деформированная форма стержня определяется его изогнутой осью, которая расположена в плоскости xOy (рис. 8.5), причем перемещение точек центральной оси относительно недеформированного состояния $v = v(x, t)$. При малых перемещениях, когда прогиб мал по сравнению с длиной стержня, имеем следующее уравнение изогнутой оси:

$$EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M_z(x), \quad (8.14)$$

где E — модуль упругости первого рода; $J = J_z(x)$ — главный центральный момент инерции поперечного сечения стержня; M_z — изгибающий момент в поперечном сечении стержня.

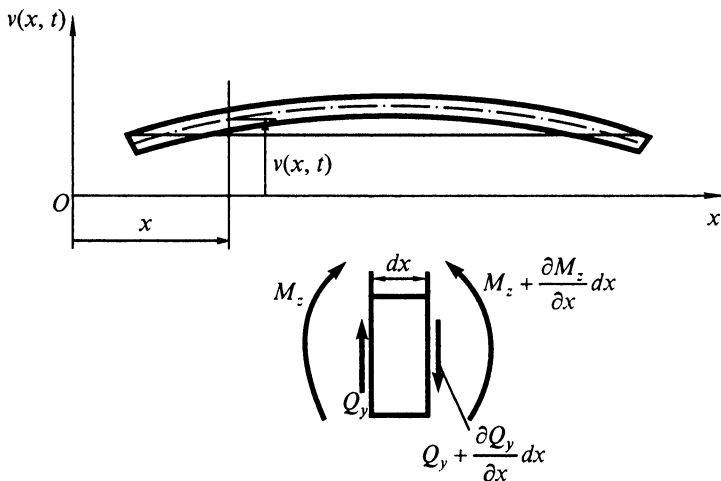


Рис. 8.5

В теории изгиба установлены следующие соотношения между изгибающим моментом, поперечной силой $Q_y(x)$ и распределенной силой $q_x(x)$, действующей в плоскости изгиба xOy :

$$\frac{\partial M_z(x)}{\partial x} = Q_y(x); \quad \frac{\partial Q_y(x)}{\partial x} = q_y(x),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 M_z(x)}{\partial x^2} = q_y(x).$$

Продифференцировав уравнение (8.14) дважды по x , находим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = q_y(x). \quad (8.15)$$

Полученное для случая равновесия стержня уравнение (8.15) можно применить к случаю движения, воспользовавшись принципом Даламбера. Распределенные силы $q_x(x)$ должны быть представлены силами инерции $q_x(x, t)$, которые на единице длины стержня равны

$$q_y(x, t) = -\rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2},$$

где ρ — плотность материала; A — площадь поперечного сечения стержня.

Внесем выражение для $q_x(x, t)$ в уравнение (8.15) и получим следующее дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Для стержня с постоянным поперечным сечением ($A = A(x) = \text{const}$, $J = J_z(x) = \text{const}$) имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{EJ}{\rho A} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0. \quad (8.16)$$

Сделаем несколько замечаний относительно предположений о малой толщине стержня. В первом приближении можно сказать, что результаты элементарной теории изгиба справедливы, когда квадрат отношения высоты стержня к его пролету существенно меньше единицы: $(h/l)^2 \ll 1$. При колебательном движении стержень имеет кривую прогибов в форме одной или нескольких полу-волн. В связи с этим за длину стержня приближенно надо рассматривать длину полуволны кривой прогибов при колебании.

Если отношение h/l мало, но не настолько, чтобы им можно было пренебречь, тогда как $(h/l)^2$ пренебрежимо мало, то уравнение колебаний может быть уточнено в результате учета сил инерции поворота поперечных сечений. Уточнение следует ввести в уравнение

$$\frac{\partial M_z(x)}{\partial x} dx = Q_y(x) dx,$$

вычтя из его правой части силы инерции поворота сечений на участке dx . Тогда имеем

$$\frac{\partial M_z}{\partial x} = Q_y + \rho J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

В результате получаем дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня с учетом инерции поперечных сечений:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho J \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2}. \quad (8.17)$$

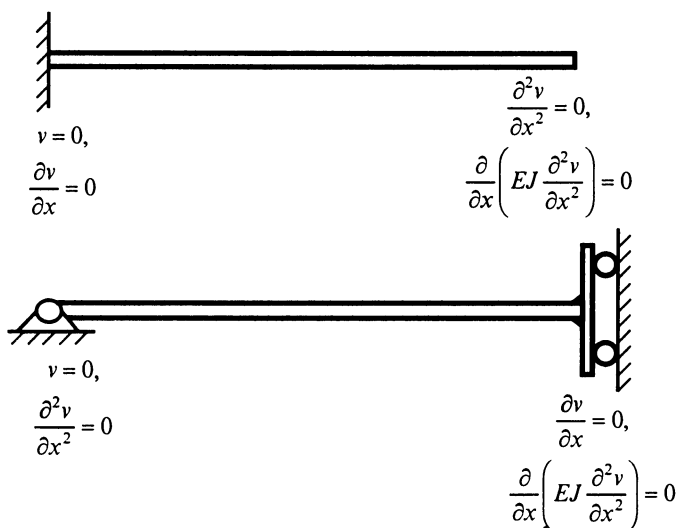


Рис. 8.6

В зависимости от условий закрепления на концах стержня можно сформулировать соответствующие граничные условия. Наиболее часто встречающиеся граничные условия представлены на рис. 8.6. Так, на защемленном крае стержня имеем

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

на шарнирно опертом

$$v = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0;$$

на свободном конце, когда $M = 0$, $Q = 0$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Граничные условия, которые включают в себя только v и $\frac{\partial v}{\partial x}$ (прогибы и углы поворота) называются **геометрическими**, а те, которые содержат $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$, т. е. моменты и поперечные силы на опорах, — **динамическими**.

Начальные условия, необходимые для нахождения частного решения динамической задачи, определяются выражениями

$$v(x, t_0) = f(x), \quad \frac{\partial v(x, t_0)}{\partial t} = g(x).$$

8.2.5. Колебания растянутых упругих мембран и тонких пластин

Эти задачи являются двумерными аналогами задач о колебаниях нитей и стержней. Вывод дифференциальных уравнений движения приводить не будем, поскольку его громоздкость целиком связана с теорией упругости.

При поперечных колебаниях мембраны, лежащей в покое в плоскости xOy , дифференциальное уравнение имеет вид

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w, \quad (8.18)$$

где h — толщина мембраны; $w = w(x, y, t)$ — ее прогиб; S — поверхностное натяжение мембраны, которое предполагается постоянным.

Для мембраны, первоначально растянутой постоянными поверхностными силами, физически реализуется только одно граничное условие: $w = 0$ во всех точках границы. Уравнение (8.18), как и его одномерный аналог (8.5), называется волновым уравнением. В некоторых задачах граничные условия могут также содержать нормальную производную $\frac{\partial w}{\partial n}$, которая является скоростью изменения w вдоль направления, перпендикулярного к границе системы.

Дифференциальное уравнение колебаний тонкой пластины является двумерным аналогом соответствующего уравнения для стержней. Записывается оно так:

$$-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[E' J' \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = \nabla^2 (E' J' \nabla^2 w), \quad (8.19)$$

где h — толщина пластины; $E' = E/(1 - \nu^2)$; ν — коэффициент

Пуассона; $J' = h^3/12$; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

8.3. Разделение переменных.

Приведение к задаче о собственных значениях

Не теряя общности и желая сократить рассуждения, рассмотрим уравнение, имеющее только одну зависимую переменную, которую во всех случаях будем обозначать p . Все уравнения, полученные в § 8.2, могут быть представлены в общем виде:

$$M\ddot{p} + Lp = 0, \quad (8.20)$$

где M, L — линейные дифференциальные операторы, включающие только пространственные переменные, а точки над p обозначают частное дифференцирование по времени. Например, в уравнении (8.17)

$$M = -\rho A + \rho J \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right),$$

в уравнении (8.19)

$$M = \rho h; \quad L = \nabla^2 (E' J' \nabla^2).$$

По форме уравнение (8.20) повторяет (7.2). Это совпадение наталкивает нас на идею о возможности последующих обобщений. Как мы уже отмечали, первое, что необходимо сделать при изучении свободных колебаний, — это предположить, что все координаты изменяются как гармонические функции времени, если система колеблется соответствующим образом, и применить метод разделения переменных. В результате получаем

$$p(t, x, y, z) = q(t)r(x, y, z). \quad (8.21)$$

Уравнение (8.20) теперь примет вид

$$M(r)\ddot{q} = -L(r)q, \quad (8.22)$$

или

$$\frac{L(r)}{M(r)} = -\frac{\ddot{q}}{q} = \lambda.$$

Так как первое отношение не содержит t , а второе — x, y, z , то ни одно отношение не имеет переменных, а следовательно, λ должна быть константой. Более того, она должна быть положительной, так как q не может быть экспоненциальной функцией, которая растет во времени. Отсюда, обозначая $\lambda = \omega^2$, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \omega^2 q &= 0; \\ L(r) &= \omega^2 M(r). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Эти два уравнения содержат один общий параметр ω^2 , тогда как зависимые и независимые переменные в них различны. Любое решение, удовлетворяющее этим двум уравнениям, является решением исходного уравнения (8.20). Но обратное несправедливо, так как решение уравнения (8.20) не всегда может быть представлено в виде (8.21). Можно, однако, надеяться, что так как ω^2 пока еще не определено, то имеется более чем одно решение уравнения (8.21), и совокупность линейных комбинаций этих решений может включать все решения уравнения (8.20).

Пока что рассуждения были сосредоточены вокруг дифференциального уравнения движения, которое само по себе не определяет физическую задачу. В связи с этим должны быть рассмотрены соответствующие начальные и граничные условия.

Сначала рассмотрим граничные условия, так как они являются неотъемлемой частью задачи, определяющей те возможные формы, в соответствии с которыми может колебаться система. Граничные условия могут быть представлены в общем виде:

$$N(p) = 0,$$

где N — линейный дифференциальный оператор пространственных переменных, а иногда даже и времени t . Если N не содержит t , то подстановка rq вместо p дает $N(r) = 0$, поскольку $N(p)$ линейно и однородно относительно p .

Если $N(p)$ содержит t , то это означает, что граничные условия зависят от инерционных сил. В этом случае t входит только в форме $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Когда $p = rq$, то

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \ddot{q}r = -\omega^2 qr$$

и граничное условие $N(r) = 0$ принимает вид $N'(r) = 0$, где $N'(r)$ — результат замены $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ в $N(r)$ на $-\omega^2$.

Резюмируя, можно отметить, что мы имеем задачу о нахождении функции $r(x, y, z)$, которая удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению

$$L(r) = \omega^2 M(r) \quad (8.24)$$

и системе линейных однородных граничных условий в форме

$$N(r) = 0,$$

где ω^2 — еще не определенный параметр, а N может включать, а может и не включать ω^2 .

Во многих задачах колебаний, в которых M является просто постоянным коэффициентом, входящим в L , дифференциальное уравнение получает более простой вид:

$$L(r) = \omega^2 r.$$

Решение задачи о собственных значениях изложим в матричной форме. Полагая $\mathbf{q} = \mathbf{l}e^{i\omega t}$, где $\mathbf{l}$ — вектор-столбец ампли-

туд колебаний, уравнение, тождественное (8.24), в матричной форме примет вид

$$(C - \omega^2 A)I = 0, \quad (8.25)$$

где C , A — матрицы, характеризующие упругие и инерционные свойства системы.

Случай $I = 0$ приводит к тривиальному решению, при котором отсутствует движение. Уравнение (8.25) будет иметь нетривиальное решение, когда определитель, составленный из коэффициентов уравнения, равен нулю, т. е.

$$|C - \omega^2 A| = 0.$$

Раскрыв определитель, получим алгебраическое уравнение степени n относительно ω^2 , которое называется *частотным уравнением* системы.

В гл. 7 показано, что если кинетическая и потенциальная энергии системы — положительно-определенные квадратные формы, то частотное уравнение имеет n положительных корней $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$, которые являются соответствующими квадратами частот системы.

При каждом значении корня ω^2 можно решить уравнение (8.25) и определить соотношения $l_i = \mu r_i$ или $I = \mu r$, где μ — произвольное комплексное число, а величины r_i образуют матрицу-столбец, элементами которой являются действительные числа, определяемые с точностью до постоянного коэффициента.

Таким образом, можно отметить следующее.

1. Задача имеет нетривиальное решение только тогда, когда ω^2 принимает одно значение из системы величин, называемых *собственными числами*: $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots$. Каждому собственному числу соответствует решение $r_i(x, y, z)$, называемое *собственным вектором* относительно ω_i^2 . Совместно обе величины ω_i^2 и $r_i(x, y, z)$ определяют частоту и характер главной формы колебаний упругого тела.

2. Так как упругое тело имеет бесконечное число степеней свободы, то имеется и бесконечное число главных форм колебаний. Любое движение данного упругого тела при свободных колебаниях может быть представлено линейной комбинацией главных форм.

8.4. Собственные частоты и формы колебаний

8.4.1. Продольные колебания тонкого прямого стержня

Для стержня постоянного поперечного сечения дифференциальное уравнение и граничные условия в случае продольных колебаний можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ x=0, \quad u &= 0; \\ x=l, \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (8.26)$$

для стержня с сосредоточенной массой m_0 на конце (рис. 8.7) граничное условие будет иметь вид

$$m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EA \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (8.27)$$

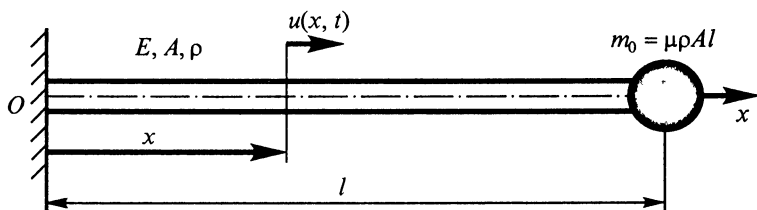


Рис. 8.7

Разделяя переменные $u(x, t) = q(t)r(x)$, получаем дифференциальные уравнения с обычными производными:

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho} \frac{d^2 r}{dx^2} q - \ddot{q} r &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{E}{\rho} \frac{d^2 r}{dx^2} = \frac{\ddot{q}}{q} &= -\omega^2, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + k^2 r = 0;$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

где $k^2 = \omega^2 \rho / E$.

Частное решение для функции $r(x)$ с учетом граничных условий (8.26) будет

$$r_n = \sin k_n x, \quad (8.28)$$

где $k_n = [(2n-1)/2](\pi/l)$, $n=1, 2, \dots$

Частота свободных колебаний, соответствующая n -й главной форме, которая представляется функцией $r_n = \sin k_n x$ (рис. 8.8), равна

$$\omega_n = k_n \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{(2n-1)}{2} \frac{a\pi}{l},$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в материале стержня.

Возвращаясь к функции $q(t)$, видим, что

$$q = C \cos(\omega t - \alpha).$$

Общее решение краевой задачи (8.26)

$$u(x, t) = r q = C \sin kx \cos(\omega t - \alpha),$$

где k — одно из значений решения (8.28).

Так как задача линейна и однородна, то, воспользовавшись принципом суперпозиции, получим следующее решение краевой задачи в рядах:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \alpha_n). \quad (8.29)$$

Постоянные C_n и α_n произвольны и определяются из начальных условий. Ряд (8.29) является сходящимся, а функция $u(x, t)$ — по меньшей мере дважды дифференцируемой относительно x и t в области $0 < x < l$ и $t > 0$.

Пусть начальные условия имеют вид

$$u(x, 0) = f(x); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=0} = g(x).$$

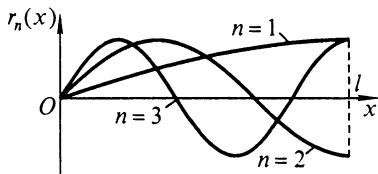


Рис. 8.8

Представим эти две функции в виде двух бесконечных рядов путем разложения по собственным функциям $r_n = \sin k_n x$:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin k_n x; \quad (8.30)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin k_n x.$$

Постоянные в (8.29) можно определить через коэффициенты f_n и g_n . Полагая $t = 0$ в выражении (8.29) и в его производной по времени и сопоставляя полученные результаты с (8.30), получаем два уравнения для нахождения постоянных C_n и α_n :

$$C_n \cos \alpha_n = f_n; \quad \omega_n C_n \sin \alpha_n = g_n. \quad (8.31)$$

Для стержня с сосредоточенной массой на конце (см. рис. 8.7) обозначим через μ отношение сосредоточенной массы m_0 к массе всего стержня. Тогда

$$m_0 = \mu \rho A l, \quad \text{или} \quad \frac{m_0}{EA} = \frac{\mu \rho l}{E}.$$

Задача о собственных значениях приводится к следующим уравнению и граничным условиям с учетом (8.27):

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + k^2 r = 0;$$

$$x = 0, \quad r = 0;$$

$$x = l, \quad \left. \frac{dr}{dx} \right|_l - \frac{\mu \rho l \omega^2}{E} \Big|_l r = 0.$$

Решение уравнения имеет вид

$$r = D \cos kx + B \sin kx.$$

Чтобы удовлетворялось условие $r(0) = 0$, произвольная интегрирования D должна быть равна нулю, а k или ω должны быть действительными. Для выполнения второго граничного условия нужно иметь

$$B(k \cos kx - \mu k^2 \sin kx)_l = 0, \quad (8.32)$$

или

$$\mu k l = \operatorname{ctg} kl. \quad (8.33)$$

Уравнение (8.33) относительно k или ω является *характеристическим* или *частотным уравнением* системы. Коэффициент B в (8.32), не теряя общности решения, можно положить равным единице.

Уравнение (8.33), являющееся трансцендентным, имеет неограниченное число корней. Несколько первых положительных значений корней для четырех значений μ приведены ниже:

μ	$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$
0	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$	$9\pi/2$
1/2	1,0769	3,6435	6,5789	9,6295	12,7223
1	0,8604	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453
∞	0	π	2π	3π	4π

8.4.2. Крутильные колебания прямого вала с круговым поперечным сечением

Сравнивая дифференциальное уравнение и граничные условия краевой задачи о крутильных колебаниях вала (см. рис. 8.2).

$$\begin{aligned} \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0; \\ x = 0, \theta &= 0; \\ x = l, \partial \theta / \partial x &= 0 \end{aligned} \quad (8.34)$$

с уравнением и граничными условиями (8.26) при продольных колебаниях стержня, приходим к заключению, что для системы (8.34) надо взять решение системы (8.26), заменив в нем модуль упругости первого рода E на модуль упругости второго рода G и продольное перемещение $u(x, t)$ на угол поворота $\theta(x, t)$.

Аналогично можно получить решение краевой задачи для вала, на конце которого имеется диск с моментом инерции I_x . Обозначив отношение момента инерции I_x к полярному моменту инерции массы всего вала $\rho l J_p$ через μ :

$$\mu = \frac{I_x}{\rho l J_p},$$

получим характеристическое уравнение, совпадающее с (8.33). Замена E на G нужна при переходе от k к ω .

8.4.3. Поперечные колебания растянутой нити

Так как перемещения на концах нити равны нулю, то краевая задача выражается следующим уравнением и граничными условиями:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0; \\ x &= 0, \quad v = 0; \\ x &= l, \quad v = 0.\end{aligned}$$

После разделения переменных $v(x, t) = q(t)r(x)$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{dx^2} + k^2 r &= 0; \\ \ddot{q} + \omega^2 q &= 0,\end{aligned}$$

где $\omega^2 = k^2 \sigma / \rho$.

Частное решение дифференциального уравнения для функции $r(x)$ с учетом граничных условий имеет вид

$$r_n = \sin k_n x,$$

где $k_n = n\pi/l$ ($n = 1, 2, \dots$).

При этом главной форме колебаний n -го тона $r_n = \sin(n\pi/l)x$ соответствует частота свободных колебаний

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

8.4.4. Поперечные колебания тонкого прямого стержня

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид (8.16).

Разделяя переменные $v(x, t) = q(t)r(x)$, получаем

$$r\ddot{q} + \frac{EJ}{\rho A} \frac{d^4 r}{dx^4} q = 0,$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{EJ}{\rho A} \frac{d^4 r}{dx^4} = -\frac{\ddot{q}}{q} = \omega^2,$$

где ω — пока неизвестный параметр.

Отсюда получаем два дифференциальных уравнения

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0; \quad (8.35)$$

$$\frac{d^4 r}{dx^4} - k^4 r = 0, \quad (8.36)$$

где

$$k^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EJ}. \quad (8.37)$$

Решение уравнения (8.36) представим в виде

$$r(x) = A \sin kx + B \cos kx + C \operatorname{sh} kx + D \operatorname{ch} kx. \quad (8.38)$$

Задача о собственных значениях теперь заключается в следующем: из граничных условий определяем систему собственных значений k из условия, чтобы произвольные постоянные A, B, C, D не обращались в ноль одновременно, и находим соотношения $A : B : C : D$, соответствующие этим собственным значениям.

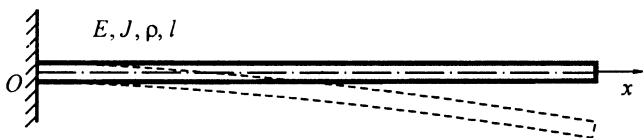


Рис. 8.9

Для консольного стержня (рис. 8.9) граничные условия имеют вид

$$x=0, \quad r=0, \quad dr/dx=0;$$

$$x=l, \quad d^2 r/dx^2=0, \quad d^3 r/dx^3=0.$$

Из первых двух граничных условий следует

$$B + D = 0; \quad A + C = 0, \quad (8.39)$$

из двух последних получаем

$$-A \sin kl - B \cos kl + C \operatorname{sh} kl + D \operatorname{ch} kl = 0;$$

$$-A \cos kl + B \sin kl + C \operatorname{ch} kl + D \operatorname{sh} kl = 0$$

или с учетом (8.39)

$$\begin{aligned} C(\sin kl + \operatorname{sh} kl) + D(\cos kl + \operatorname{ch} kl) &= 0; \\ C(\cos kl + \operatorname{ch} kl) + D(\operatorname{sh} kl - \sin kl) &= 0. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Для нетривиального решения определитель, образованный коэффициентами при C и D , должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sin kl + \operatorname{sh} kl & \cos kl + \operatorname{ch} kl \\ \cos kl + \operatorname{ch} kl & \operatorname{sh} kl - \sin kl \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем характеристическое или частотное уравнение

$$\cos kl \cdot \operatorname{ch} kl = -1 \quad (8.41)$$

с неограниченным числом корней. Первые шесть из них имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} k_1 l &= 1,875; & k_2 l &= 4,694; & k_3 l &= 7,855; \\ k_4 l &= 10,996; & k_5 l &= 14,137; & k_6 l &= 17,279, \end{aligned}$$

последующие можно определить по формуле

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

Каждому k в соответствии с выражением (8.37) отвечает определенное значение частоты свободных колебаний

$$\omega_n^2 = k_n^4 \frac{EJ}{\rho A}. \quad (8.42)$$

Собственную функцию получаем подстановкой соотношений (8.39) и (8.40) в решение (8.38):

$$r(x) = \operatorname{sh} kx - \sin kx + \gamma(\operatorname{ch} kx - \cos kx), \quad (8.43)$$

где $\gamma = D/C = -(\operatorname{sh} kl + \sin kl)/(\operatorname{ch} kl + \cos kl)$.

Таким образом, мы имеем систему собственных значений и собственных функций, представляющих собой частоты и главные формы свободных колебаний стержня.

Так как краевая задача линейна и однородна, ее общее решение может быть представлено бесконечным рядом собственных функций, которые сходятся в интервале $0 < x < l$:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r_n(x) \cos(\omega_n t - \alpha_n), \quad (8.44)$$

причем собственная функция $r_n(x)$ определяется выражением (8.43), в котором значение k соответствует номеру n .

Для того чтобы найти частное решение при заданных начальных условиях

$$v(x, 0) = f(x), \quad \dot{v}(x, 0) = g(x),$$

представим $f(x)$ и $g(x)$ в виде бесконечных рядов собственных функций:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n r_n(x); \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n r_n(x). \end{aligned} \quad (8.45)$$

После подстановки $t = 0$ в выражение (8.44) и в вычисленную относительно t производную получаем уравнения для определения произвольных постоянных C_n и α_n

$$\begin{aligned} f_n &= C_n \cos \alpha_n; \\ g_n &= \omega_n C_n \sin \alpha_n. \end{aligned}$$

Для шарнирно опертого стержня граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x = 0, \quad r = 0, \quad \frac{d^2 r}{dx^2} &= 0; \\ x = l, \quad r = 0, \quad \frac{d^2 r}{dx^2} &= 0. \end{aligned}$$

Для решения (8.38) из первых двух условий находим $B = D = 0$, из вторых получаем $C = 0$ и $\sin kl = 0$. Последнее уравнение является характеристическим уравнением, собственными значениями которого будут

$$k_n = n\pi/l \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, для шарнирно опертого однородного стержня имеем систему собственных функций и собственных значений (рис. 8.10):

$$r_n(x) = \sin k_n x, \quad k_n = n\pi/l. \quad (8.46)$$

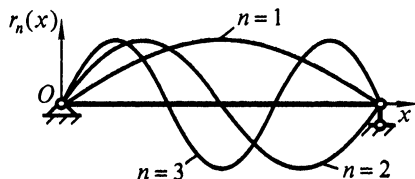


Рис. 8.10

Согласно (8.37), частота свободных колебаний n -го тона

$$\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}. \quad (8.47)$$

Для стержня с зашечленным и шарнирно опертым концами граничные условия имеют вид

$$x=0, \quad r=0, \quad dr/dx=0;$$

$$x=l, \quad r=0, \quad d^2r/dx^2=0.$$

Применяя первые два граничных условия к уравнению (8.38) находим

$$B + D = 0; \quad A + C = 0. \quad (8.48)$$

С учетом двух вторых граничных условий получаем

$$A \sin kl + B \cos kl + C \operatorname{sh} kl + D \operatorname{ch} kl = 0; \quad (8.49)$$

$$-A \sin kl - B \cos kl + C \operatorname{sh} kl + D \operatorname{ch} kl = 0.$$

Анализируя уравнения (8.48), (8.49) совместно, получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений

$$\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl, \quad (8.50)$$

которое является трансцендентным и имеет бесконечное число корней k_n . Первые пять из них имеют следующие значения:

$$k_1 l = 3,927; \quad k_2 l = 7,069; \quad k_3 l = 10,210; \quad k_4 l = 13,352; \quad k_5 l = 16,493.$$

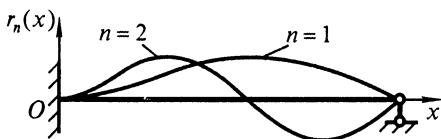


Рис. 8.11

Каждому собственному значению соответствует частота свободных колебаний, определяемая из соотношения (8.37):

$$\omega_n^2 = k_n^4 \frac{EJ}{\rho A}.$$

Собственную функцию $r(x)$ находим из уравнения (8.38) путем подстановки в него соотношений коэффициентов из (8.48) и (8.49). В результате получаем

$$r_n(x) = \sin k_n x - \operatorname{sh} k_n x - \frac{\sin k_n l - \operatorname{sh} k_n l}{\cos k_n l - \operatorname{ch} k_n l} (\cos k_n x - \operatorname{ch} k_n x).$$

Графики функций показаны на рис. 8.11.

Для стержня со свободными концами граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x=0, \quad d^2 r/dx^2 = 0, \quad d^3 r/dx^3 = 0; \\ x=l, \quad d^2 r/dx^2 = 0, \quad d^3 r/dx^3 = 0, \end{aligned} \quad (8.51)$$

так как на свободных концах стержня нет напряжений, поэтому изгибающие моменты и поперечные силы равны нулю. Применив граничные условия к уравнению (8.38), имеем

$$\begin{aligned} -B + D &= 0; \\ -A + C &= 0; \\ -A \sin kl - B \cos kl + C \operatorname{sh} kl + D \operatorname{ch} kl &= 0; \\ -A \cos kl + B \sin kl + C \operatorname{ch} kl + D \operatorname{sh} kl &= 0. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Из определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных, получим характеристическое уравнение

$$\cos kl \cdot \operatorname{ch} kl = 1. \quad (8.53)$$

Первые семь корней этого уравнения имеют следующие значения: 0; 0; 4,73; 7,853; 10,996; 14,137; 17,279.

Частоты свободных колебаний, согласно (8.37), определяем по формуле

$$\omega_n^2 = k_n^4 \frac{EJ}{\rho A}.$$

Установив из (8.52) соотношения между коэффициентами, из (8.38) находим выражения для собственных функций, соответствующих ненулевым значениям k_n . Введя нормировку $r(0)=1$, представим его в виде

$$r_n(x) = 0,5[\cos k_n x + \operatorname{ch} k_n x + \gamma_n(\sin k_n x + \operatorname{sh} k_n x)], \quad (8.54)$$

где $\gamma_n = (\operatorname{ch} k_n l - \cos k_n l)/(\sin k_n l - \operatorname{sh} k_n l)$.

Нулевым собственным значениям ($k=0$), согласно (8.36), соответствует дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 r}{dx^4} = 0. \quad (8.55)$$

Непосредственной проверкой можно установить, что линейно независимые функции $r_{-1}=1$ и $r_0=(x-0,5l)/(0,5l)=(x-x_{ц.т.})/(0,5l)$,

где $x_{ц.т}$ — координата центра тяжести стержня, удовлетворяют уравнению (8.55) и граничным условиям (8.51). В дальнейшем будем считать, что функциям r_{-1} и r_0 соответствуют нулевые частоты свободных колебаний $\omega_{-1} = 0$ и $\omega_0 = 0$.

Функции r_{-1} и r_0 характеризуют параллельный перенос стержня и его поворот вокруг центра тяжести как жесткого тела. Частота свободных колебаний ω_n ($n=1, 2, \dots$) соответствует поперечным упругим колебаниям стержня по собственным функциям $r_n(x)$.

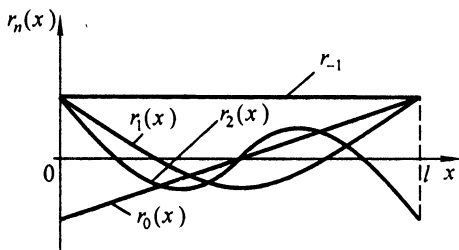


Рис. 8.12

С учетом нулевых собственных значений для свободного стержня собственные функции представлены на рис. 8.12.

8.4.5. Колебания растянутой мембраны

Дифференциальное уравнение движения, определяемое выражением (8.18), представим в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho h} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w.$$

Чтобы отделить переменные, зависящие от времени, примем

$$w(x, y) = q(t)r(x, y) = C \cos(\omega t - \alpha)r(x, y)$$

и получим для собственных функций дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 r(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r(x, y)}{\partial y^2} + k^2 r(x, y) = 0, \quad (8.56)$$

где

$$k^2 = \frac{\rho h \omega^2}{S}. \quad (8.57)$$

В общем случае уравнение (8.56) не имеет аналитических решений. И только когда граничные условия простые, решение можно представить

в хорошо известных функциях — тригонометрических, экспоненциальных, функциях Бесселя. Но вне зависимости от того, можно или нельзя получить аналитическое решение, оно обладает опре-

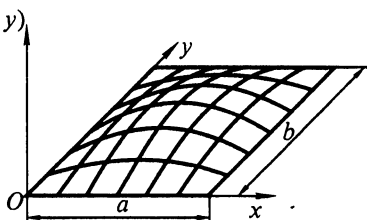


Рис. 8.13

деленными аналитическими свойствами. Это мы подчеркнем на примере решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + k^2 r = 0$$

при $r = 0$ на границе.

Рассмотрим для этого случай прямоугольной мембраны, закрепленной по краям (рис 8.13):

$$x = 0, \quad y = 0, \quad r = 0;$$

$$x = a, \quad y = b, \quad r = 0.$$

Используя метод разделения переменных, представим решение в виде

$$r(x, y) = X(x)Y(y).$$

Опуская выкладки, подобные проделанным в одномерных задачах, получаем собственные функции в виде

$$r(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}; \quad (8.58)$$

$$\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 = \frac{k^2}{\pi^2}, \quad (8.59)$$

где n, m — положительные числа.

Собственные числа в связи с этим представляют все k , которые могут быть получены из выражения (8.59) при различных значениях n и m .

Полное решение представляет собой двойной ряд

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \cos(\omega_{n,m}t - \alpha_{n,m}),$$

где в соответствии с выражениями (8.57) и (8.59) частота свободных колебаний

$$\omega_{n,m} = \pi \sqrt{\frac{S}{\rho h} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)}.$$

8.4.6. Колебания потока сжимаемой жидкости в прямой трубе

Рассмотрим уравнения (8.12) и (8.13), поскольку в потоке жидкости скорость и давление взаимосвязаны.

Принципиальное отличие уравнения (8.12) от (8.5) заключается в том, что в нем имеются смешанные производные и поэтому разделение переменных здесь обладает особенностями. Физически наличие смешанных производных означает, что при возникновении колебаний в потоке жидкости часть энергии уносится из трубы с потоком, имеющим скорость v_0 ($M = v_0/a$), поэтому колебания будут затухающими, несмотря на то, что трение в объеме жидкости и о стенки трубы отсутствует. Механическая энергия не остается постоянной, закон сохранения полной механической энергии здесь не применим.

Задачу о взаимодействии давления и скорости на концах трубы будем решать по аналогии с *четырёхполюсником* в электротехнике, где рассматривается взаимосвязь тока и напряжения на концах проводника. Поскольку возмущения потока жидкости могут происходить только на его концах, то решение задачи о его колебаниях проведем без разложения в ряд по собственным функциям. Представим функции $\tilde{v}(\xi, \tau)$ и $\tilde{p}(\xi, \tau)$ в виде

$$\tilde{v}(\xi, \tau) = \tilde{v}(\xi)e^{is\tau}, \quad \tilde{p}(\xi, \tau) = \tilde{p}(\xi)e^{is\tau}, \quad (8.60)$$

где s — безразмерная частота колебаний.

Подставив (8.60) в уравнения (8.12) и (8.13) и выделив множитель $e^{is\tau}$, получим следующие уравнения для определения функций $\tilde{v}(\xi)$ и $\tilde{p}(\xi)$:

$$(1 - M^2) \frac{d^2 \tilde{v}(\xi)}{d\xi^2} - is2M \frac{d\tilde{v}(\xi)}{d\xi} + s^2 \tilde{v}(\xi) = 0; \quad (8.61)$$

$$\tilde{p}(\xi) = -M\tilde{v}(\xi) - is \int \tilde{v}(\xi) d\xi. \quad (8.62)$$

Полагая $\tilde{v}(\xi) = Ce^{k\xi}$, из (8.61) находим

$$(1 - M^2)k^2 - is2Mk + s^2 = 0. \quad (8.63)$$

Решая это уравнение относительно k и учитывая соотношение (8.62), получаем уравнения собственных функций для скорости $\tilde{v}(\xi)$ и давления $\tilde{p}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\xi) &= C_1 e^{k_1 \xi} + C_2 e^{k_2 \xi}; \\ \tilde{p}(\xi) &= C_2 e^{k_2 \xi} - C_1 e^{k_1 \xi}, \end{aligned} \quad (8.64)$$

где $k_1 = is/(1 - M)$, $k_2 = -is/(1 + M)$.

Произвольные постоянные определяем из граничных условий. На основании (8.64) скорость и давление на концах трубы можно определить по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{v}(0) &= C_1 + C_2, \quad \tilde{v}(1) = C_1 e^{k_1} + C_2 e^{k_2}, \\ \tilde{p}(0) &= C_2 - C_1, \quad \tilde{p}(1) = C_2 e^{k_2} - C_1 e^{k_1}. \end{aligned}$$

Тогда соотношения между параметрами потока в конце $\tilde{v}(1)$, $\tilde{p}(1)$ и в начале $\tilde{v}(0)$, $\tilde{p}(0)$ трубы будут следующими:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(1) &= \tilde{v}(0) \frac{1}{2} (e^{k_2} + e^{k_1}) + \tilde{p}(0) \frac{1}{2} (e^{k_2} - e^{k_1}); \\ \tilde{p}(1) &= \tilde{v}(0) \frac{1}{2} (e^{k_2} - e^{k_1}) + \tilde{p}(0) \frac{1}{2} (e^{k_2} + e^{k_1}). \end{aligned} \quad (8.65)$$

Соотношения типа (8.65) по аналогии с электросхемами обычно называют уравнениями четырехполюсника. Если известны любые два граничных условия, то с помощью уравнений (8.65) можно определить искомые параметры потока на концах трубы. Например, задавшись гармоническим воздействием на поток на одном из концов трубы, можно определить гармонические колебания на другом ее конце и получить выражение амплитудно-фазовой частотной характеристики потока.

Применим уравнения (8.65) для нахождения частот свободных колебаний потока жидкости. Рассмотрим несколько вариантов граничных условий.

1. Труба «закрыта» с одного конца, т. е. $\tilde{p}(0) = 0$, $\tilde{v}(l) = 0$. Подставляя эти условия в уравнения (8.65) и учитывая, что $e^{k_2} \neq 0$, получаем характеристическое уравнение

$$e^{k_1 - k_2} = 1. \quad (8.66)$$

Частота колебаний, вообще говоря, является комплексным числом, поэтому положим

$$s = i\nu + \Omega, \quad (8.67)$$

где ν , Ω — вещественные числа. С учетом выражений (8.64) и (8.67) находим

$$k_1 - k_2 = -\frac{2\nu}{1 - M^2} + i\frac{2\Omega}{1 - M^2}.$$

Запишем уравнение (8.66) в тригонометрической форме, приравняв нулю отдельно вещественную и мнимую его части:

$$\exp\left(\frac{-2\nu}{1 - M^2}\right) \cos\left(\frac{2\Omega}{1 - M^2}\right) = -1;$$

$$\exp\left(\frac{-2\nu}{1 - M^2}\right) \sin\left(\frac{2\Omega}{1 - M^2}\right) = 0.$$

Поскольку $\exp\left(\frac{-2\nu}{1 - M^2}\right) > 0$, оба равенства будут выполняться одновременно, если

$$\nu = 0, \quad \frac{2\Omega_n}{1 - M^2} = (2n - 1)\pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, свободные колебания потока идеальной жидкости в трубе являются гармоническими. Безразмерные частоты этих колебаний

$$s_n = \Omega_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2}(1 - M^2) \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (8.68)$$

размерная частота

$$\omega_n = s_n \frac{a_0}{l} = \frac{(2n - 1)\pi(1 - M^2)a_0}{2l}. \quad (8.69)$$

При $M = 0$ ω_n выражается такой же формулой, как и частота свободных колебаний прямого однородного стержня.

Когда колебания возникают в потоке жидкости ($M \neq 0$), частота свободных колебаний потока меньше, чем неподвижного столба жидкости. Отличие будет тем больше, чем больше число M . Как известно, в сверхзвуковом потоке ($M > 1$) скорость движения частиц больше, чем скорость распространения упругой волны, поэтому при $M \geq 1$ свободные колебания существовать не могут.

2. Труба открыта с обоих концов, т. е. $\tilde{p}(0) = 0$, $\tilde{p}(l) = 0$. Прделаав аналогичные выкладки, получаем

$$v = 0, \quad \frac{2\Omega}{1 - M^2} = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

или, принимая во внимание только нетривиальные значения частот свободных колебаний, находим

$$\begin{aligned} s_n &= n(1 - M^2)\pi, \\ \omega_n &= s_n \frac{a_0}{l} = n(1 - M^2) \frac{\pi a_0}{l}. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Свободные колебания потока жидкости в трубе с открытыми концами можно сравнить со свободными колебаниями прямого упругого незакрепленного стержня. Нулевой частоте соответствует движение потока без колебаний.

3. Труба имеет на концах решетки гидравлические сопротивления, т. е. $\tilde{p}(0) = -M\tilde{\psi}_1\tilde{v}(0)$, $\tilde{p}(l) = M\tilde{\psi}_2\tilde{v}(l)$, где $\tilde{\psi}_1$ — коэффициент сопротивления, отнесенный к скорости потока при входе в трубу; $\tilde{\psi}_2$ — то же при выходе из трубы (рис. 8.14). Подставляя эти условия в уравнения (8.65), получаем характеристическое уравнение

$$(1 + \tilde{\psi}_1 M)(1 + \tilde{\psi}_2 M) \exp(k_1 - k_2) = (1 - \tilde{\psi}_1 M)(1 - \tilde{\psi}_2 M),$$

решив которое, находим нетривиальные значения частот свободных колебаний

$$s_n = (1 - M^2)n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8.71)$$

и безразмерный коэффициент затухания колебаний

$$v = \frac{1 - M^2}{2} \ln \frac{(1 + \tilde{\psi}_1 M)(1 + \tilde{\psi}_2 M)}{(1 - \tilde{\psi}_1 M)(1 - \tilde{\psi}_2 M)}. \quad (8.72)$$

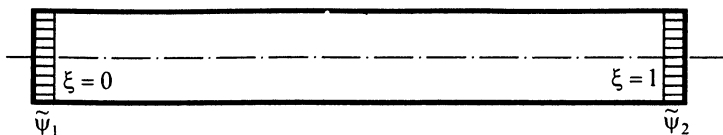


Рис. 8.14

Частота свободных колебаний потока жидкости в трубе с сосредоточенными сопротивлениями на концах оказывается такой же, как и в трубе с обоими открытыми концами без сопротивлений (8.70). Так как $is = -v \pm i\Omega$, то свободные колебания потока жидкости в трубе с сопротивлениями на концах являются затухающими.

4. Один конец трубы открыт, на другом конце имеется комплексная проводимость, т. е. $\tilde{p}(0) = 0$, $\tilde{v}(1) = z_2^* \tilde{p}(1)$, где $z_2^* = 1/(\tilde{\psi}_2 M) + i\alpha_2^*$. Такое граничное условие, например, будет иметь место, если гидравлическая решетка упруго закреплена по отношению к потоку жидкости (рис. 8.15).

Так как

$$\tilde{v}(1) = \left(\frac{1}{\tilde{\psi}_2 M} + is \frac{F_T a_0^2 \rho_0}{cl} \right) \tilde{p}(1),$$

где F_T , l — соответственно площадь проходного сечения и длина трубы; c — жесткость пружины, то для схемы, показанной на рис. 8.15, коэффициент $\alpha_2^* = sF_T a_0^2 \rho_0 / cl$. Если вместо гидравлической решетки будет невесомый поршень, то $\tilde{\psi}_2 = \infty$, $z_2^* = isF_T a_0^2 \rho_0 / cl$; если $c = \infty$, то $z_2^* = 1/\tilde{\psi}_2 M$.

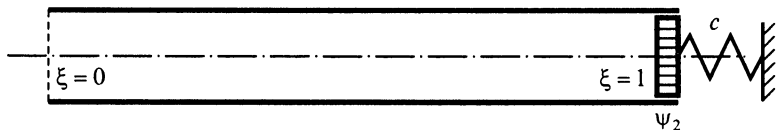


Рис. 8.15

Подставив граничные условия в (8.72), получим следующее характеристическое уравнение:

$$\frac{1 + e^{k_1 - k_2}}{1 - e^{k_1 - k_2}} = z_2^*.$$

Приняв s в виде (8.67) и положив $M^2 = 0$, преобразуем характеристическое уравнение к виду

$$\text{cth}(\nu - i\Omega) = z_2^*.$$

Приравняв действительные и мнимые части этого уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}\nu \text{ch}\nu}{\text{sh}^2\nu + \sin^2\Omega} &= \frac{1}{\tilde{\psi}_2 M^*}; \\ \frac{\cos\Omega \sin\Omega}{\text{sh}^2\nu + \sin^2\Omega} &= \Omega \alpha_2^*. \end{aligned} \quad (8.73)$$

Численным решением трансцендентных уравнений (8.73) можно определить безразмерные коэффициенты затухания ν_n и частоты свободных колебаний Ω_n .

Рассмотрим частный случай, когда $\tilde{\psi}_2 = \infty$. Тогда из первого уравнения (8.73) следует, что $\nu = 0$ (затухание отсутствует). Из второго уравнения (8.73) получаем

$$\text{tg}\Omega = \frac{1}{\Omega \alpha_2^*}.$$

Решение этого уравнения графическим способом схематично показано на рис. 8.16. Точки пересечения тангенсоид $\text{tg}\Omega$ с гиперболой $1/\Omega \alpha_2^*$ дают значения корней этого уравнения. Чем больше α_2^* (т. е. меньше жесткость пружины c), тем ниже частоты свободных колебаний столба жидкости. Это имеет важное значение для практики, когда у «закрытого» конца трубы скапливаются воздушные или паровые пузыри.

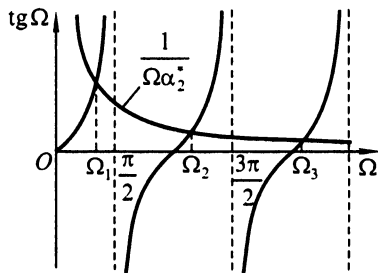


Рис. 8.16

Если $\alpha_2^* = 0$, т. е. $c = \infty$, то

$$\Omega_n = s_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

Этот результат уже был получен в (8.68) для столба жидкости в трубе с одним закрытым концом.

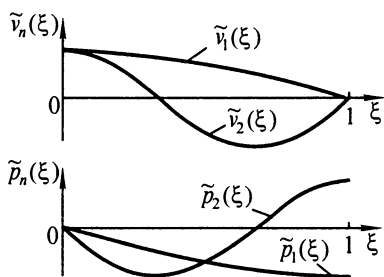


Рис. 8.17

Собственные функции для скорости $\tilde{v}(\xi)$ и давления $\tilde{p}(\xi)$ определяем из уравнений (8.64). Так как для трубы, закрытой с одного конца, $C_1 = C_2 = C_n$, то на основании (8.64) получаем

$$\tilde{v}_n(\xi) = C_n(e^{k_{1n}\xi} + e^{k_{2n}\xi});$$

$$\tilde{p}_n(\xi) = C_n(e^{k_{2n}\xi} - e^{k_{1n}\xi}).$$

Графики функций $\tilde{v}(\xi)$, $\tilde{p}(\xi)$ для первых двух тонов колебаний приведены на рис. 8.17. Собственная функция $\tilde{v}(\xi)$ имеет такой же вид, как и для упругого стержня, у которого правый конец закреплен.

С учетом (8.64) собственные колебания потока жидкости в трубе могут быть представлены в виде суммы ряда:

$$\tilde{v}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(e^{k_{1n}\xi} + e^{k_{2n}\xi})e^{i\Omega_n\tau};$$

$$\tilde{p}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(e^{k_{2n}\xi} - e^{k_{1n}\xi})e^{i\Omega_n\tau},$$

где, например, для трубы, «закрытой» с одного конца, согласно (8.67) и (8.68), безразмерную частоту s_n надо заменить на Ω_n .

8.5. Ортогональные свойства главных форм колебаний

При отыскании частного решения задачи о свободных и вынужденных колебаниях необходимо разлагать заданные функции, определяющие начальные условия, и внешние силы в беско-

нечный ряд по собственным функциям. Это разложение дает простейшие результаты, если собственные функции образуют ортогональную систему. Можно убедиться в том, что найденные собственные функции в рассмотренных примерах являются ортогональными.

Например, собственные функции $r_n(x) = \sin k_n x$ продольных колебаний стержня, один конец которого закреплён, а другой свободен, удовлетворяют условию

$$\int_0^l r_n r_m dx = 0, \quad n \neq m. \quad (8.74)$$

Коэффициенты разложения f_n и g_n в выражении (8.30) могут быть получены с помощью известной процедуры определения коэффициентов рядов Фурье. Идея заключается в следующем: если $f(x)$ можно разложить в ряд:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m r_m(x),$$

то, умножая обе части равенства на $r_n(x)$ и интегрируя в пределах от 0 до l с учетом (8.74), находим

$$r_n(x) f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m r_m(x) r_n;$$

$$\int_0^l f(x) r_n(x) dx = f_n \int_0^l [r_n(x)]^2 dx.$$

Отсюда

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x) r_n(x) dx}{\int_0^l [r_n(x)]^2 dx}.$$

Аналогично можно определить коэффициенты g_n . Произвольные постоянные C_n и α_n , входящие в выражение (8.29), можно найти из уравнений (8.31).

Исследование ортогональности собственных функций начнем с общего случая. Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$L(r) = \lambda M(r). \quad (8.75)$$

Соответствующие им ортогональные зависимости определяются выражениями

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} r_n L(r_m) d\sigma &= 0; \\ \int_{\Sigma} r_n M(r_m) d\sigma &= 0, \end{aligned} \quad (8.76)$$

где $n \neq m$, причем знак Σ при интеграле указывает на распространение интегрирования по всему упругому телу.

Условия ортогональности для собственных векторов в алгебре устанавливают в предположении, что эти векторы различны и для любых двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ симметрия матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \mathbf{v}) &= \mathbf{v}^T (\mathbf{A} \mathbf{u}), \\ \mathbf{u}^T (\mathbf{C} \mathbf{v}) &= \mathbf{v}^T (\mathbf{C} \mathbf{u}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{u}^T$, $\mathbf{v}^T$ — матрицы-строки, полученные транспонированием соответствующих матриц-столбцов.

В рассматриваемом случае две собственные функции, имеющие различные собственные значения, будут удовлетворять условию (8.76), если дифференциальные операторы L и M совместно с граничными условиями таковы, что для любых двух функций u и v , удовлетворяющих граничным условиям, обладающих соответствующей неразрывностью и дифференцируемостью, справедливы следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} u L(v) d\sigma &= \int_{\Sigma} v L(u) d\sigma; \\ \int_{\Sigma} u M(v) d\sigma &= \int_{\Sigma} v M(u) d\sigma. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Если выполняются зависимости (8.77), то краевая задача называется *самосопряженной*. Покажем, что собственные функции самосопряженной краевой задачи удовлетворяют условиям ортогональности (8.76).

Так как собственные функции удовлетворяют дифференциальному уравнению (8.75), то

$$L(r_n) = \lambda_n M(r_n).$$

Умножив обе части равенства на r_m , получим

$$r_m L(r_n) = \lambda_n r_m M(r_n).$$

Аналогично

$$L(r_m) = \lambda_m M(r_m), \quad r_n L(r_m) = \lambda_m r_n M(r_m).$$

Отсюда имеем

$$\int_{\Sigma} [r_m L(r_n) - r_n L(r_m)] d\sigma = \int_{\Sigma} [\lambda_n r_m M(r_n) - \lambda_m r_n M(r_m)] d\sigma.$$

В соответствии с выражением (8.77) левая часть этого уравнения равна нулю. Тогда

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_{\Sigma} r_n M(r_m) d\sigma = 0.$$

Если $\lambda_n \neq \lambda_m$ и $n \neq m$, то условия ортогональности примут вид

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} r_n M(r_m) d\sigma &= \int_{\Sigma} r_m M(r_n) d\sigma = 0; \\ \int_{\Sigma} r_n L(r_m) d\sigma &= \int_{\Sigma} r_m L(r_n) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Справедливость соотношений (8.77), на которых были основаны выполненные преобразования, зависит от структуры операторов L и M , а также от граничных условий задачи.

Рассмотрим теперь свойства ортогональности собственных функций рассмотренных выше примеров путем проверки справедливости выражения (8.77) относительно их дифференциальных операторов. Дифференциальные уравнения рассмотренных задач можно представить в общем виде:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(K \frac{d^n}{dx^n} r \right) = (-1)^n m \omega^2 r, \quad (8.78)$$

где K и m — параметры, характеризующие распределение жесткости и массы вдоль стержня или вала; $m = \rho(x)A(x)$.

Когда $n=1$, это уравнение выражает продольные колебания стержня, крутильные колебания вала, поперечные колебания рас-

тянутой нити. При $n = 2$ оно определяет поперечные колебания тонких стержней. В общем случае параметры K и m являются функциями x , но очень часто они постоянны. Тогда уравнение (8.78) упрощается и принимает вид

$$\frac{d^{2n}r}{dx^{2n}} = (-1)^n k^{2n} r,$$

где $k^{2n} = m\omega^2/K$.

Так как оператор M в (8.77) трансформируется в простое умножение на функцию $m(x)$, то второе уравнение системы (8.77) удовлетворяется автоматически. Рассмотрим поэтому только первое уравнение (8.77). Предположим, что границы системы имеют место при $x = 0$ и $x = l$. Возможны два случая.

1. При $n = 1$ задача о собственных значениях представлена дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dx} \left(K \frac{dr}{dx} \right) = -m\omega^2 r,$$

или

$$(Kr')' = -m\omega^2 r,$$

где штрихом обозначена производная по координате x . Подобные дифференциальные уравнения рассмотрены в § 8.2.1. Вычитая из левой части первого уравнения (8.77) его правую часть, получаем

$$\int_0^l [uL(v) - vL(u)] dx = \int_0^l [u(Kv')' - v(Ku')'] dx.$$

После интегрирования по частям имеем

$$\int_0^l [uL(v) - vL(u)] dx = [uKv' - vKu']_0^l. \quad (8.79)$$

Если две непрерывные и дифференцируемые функции u и v удовлетворяют граничным условиям, то правая часть выражения (8.79) обращается в нуль, так как задача самосопряженная, и ее собственные функции ортогональны в смысле выражения (8.76) при условии, что собственные значения различны. Иными словами, если

$$[r_n(Kr'_m) - r_m(Kr'_n)]_0^l = 0, \quad (8.80)$$

то отсюда следует, что при $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_0^l r_n L(r_m) dx &= \int_0^l r_n (K r_m')' dx = 0; \\ \int_0^l r_n M(r_m) dx &= \int_0^l (-m r_n r_m) dx = 0. \end{aligned} \quad (8.81)$$

Исследуем теперь граничные условия, при которых выражение (8.80) обращается в нуль. Можно показать путем простых преобразований, что если два граничных условия одновременно имеют линейную однородную форму

$$ar + br' = 0, \quad (8.82)$$

то условие (8.80) удовлетворяется всегда. В выражении (8.82) коэффициенты a и b могут иметь различные значения для разных граничных точек, но они не должны зависеть от собственных значений задачи. В качестве иллюстрации рассмотрим продольные колебания стержня. Общее выражение (8.82) включает также следующие граничные условия:

$$r = 0$$

— на закреплённом конце,

$$r' = 0$$

— на свободном конце,

$$r' - \frac{c}{EA} r = 0$$

— на краю, ограниченном упругой пружиной с жесткостью c .

Если условия на каждом конце стержня соответствуют одному из трех перечисленных случаев, то собственные функции ортогональны между собой относительно функции плотности $m(x)$, т. е. при $n \neq m$

$$\int_0^l m(x) r_n(x) r_m(x) dx = 0. \quad (8.83)$$

Для однородных стержней с постоянным поперечным сечением $m(x) = \text{const}$, и, следовательно, имеет место обычное условие ортогональности, т. е. при $n \neq m$

$$\int_0^l r_n(x) r_m(x) dx = 0. \quad (8.84)$$

Разложим $f(x)$ в ряд по собственным функциям $r_n(x)$, удовлетворяющим условию (8.83):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n r_n(x).$$

Коэффициенты f_n могут быть найдены из выражения

$$\int_0^l m(x) r_n(x) f(x) dx = f_n \int_0^l m(x) [r_n(x)]^2 dx,$$

или

$$f_n = \frac{\int_0^l m(x) r_n(x) f(x) dx}{\int_0^l m(x) [r_n(x)]^2 dx}. \quad (8.85)$$

Теперь вернемся к задаче, в которой один конец стержня несет сосредоточенную массу m_0 . Граничное условие на этом конце определяется выражением

$$r' - \frac{m_0}{AE} \omega^2 r = 0.$$

Хотя это граничное условие линейно и однородно, оно не относится к типу, определенному выражением (8.82), так как второй постоянный коэффициент содержит ω , которое не одно и то же для всех собственных функций. Следовательно, собственные функции $r(x) = \sin kx$, где k — корень уравнения (8.33), не удовлетворяют условию (8.84).

Это отсутствие ортогональности не только вызывает трудности нахождения коэффициентов f_n и g_n в выражениях (8.30), но и делает недействительным большинство важных аналитических результатов, основанных на ортогональности собственных функций. Обратим внимание на то, что при первоначальной формулировке задачи стержень с равномерно распределенной массой яв-

лялся колеблющимся упругим телом, тогда как сосредоточенная масса M входила лишь в граничное условие.

Можно, однако, по-иному сформулировать задачу, рассмотрев сосредоточенную массу как часть колеблющегося стержня, который имеет свободный конец. В первую очередь, предположим, что сосредоточенная масса равномерно распределена вдоль малого участка стержня длиной ϵ около его правого конца. В связи с этим правый конец стержня свободен (рис. 8.18). Собственная функция при таком распределении масс имеет вид

$$\varphi_n(\epsilon, x) \quad (n=1, 2, \dots),$$

где ϵ — параметр.

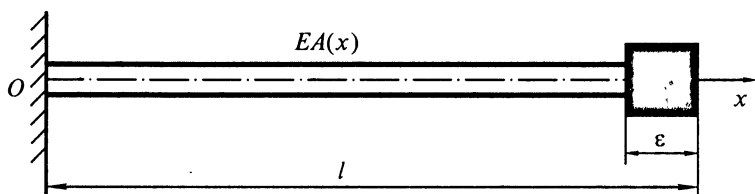


Рис. 8.18

В соответствии с физическим смыслом

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi_n(\epsilon, x) = \sin k_n x,$$

так как сосредоточенная масса является предельным случаем конечной массы, распределенной на бесконечно малом участке. Теперь собственные функции ортогональны относительно видоизмененной функции $m(\epsilon, x)$ распределенной массы: т. е. при $n \neq m$

$$\int_0^l m(\epsilon, x) f_n(\epsilon, x) f_m(\epsilon, x) dx = 0, \quad (8.86)$$

где $m(\epsilon, x) = \rho A$ при $0 < x < l - \epsilon$; $m(\epsilon, x) = \rho A + \frac{\mu \rho A l}{\epsilon}$ при $(l - \epsilon) < x < l$.

В соответствии с выражением (8.86) для разложения функции $f(x)$ необходимо воспользоваться формулой (8.85) и в пределе принять $\epsilon \rightarrow 0$. Сначала рассмотрим числитель формулы (8.85):

$$\int_0^l m(\varepsilon, x) f_n(\varepsilon, x) f(x) dx =$$

$$= \rho A \left[\int_0^{l-\varepsilon} f_n(\varepsilon, x) f(x) dx + \left(1 + \frac{\mu l}{\varepsilon} \right) \int_{l-\varepsilon}^l f_n(\varepsilon, x) f(x) dx \right].$$

При достаточно малом ε подынтегральное выражение второго интеграла должно быть непрерывным. Тогда, согласно теореме о среднем, получаем

$$\int_0^l m(\varepsilon, x) f_n(\varepsilon, x) f(x) dx =$$

$$= \rho A \left[\int_0^{l-\varepsilon} f_n(\varepsilon, x) f(x) dx + (\varepsilon + \mu l) f_n(\varepsilon, \xi) f(\xi) \right],$$

причем $l - \varepsilon \leq \xi \leq l$. Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^l m(x) f_n(\varepsilon, x) f(x) dx = \rho A \left[\int_0^l \sin k_n x f(x) dx + \mu l \sin k_n l f(l) \right].$$

Аналогично находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^l m(\varepsilon, x) [f_n(\varepsilon, x)]^2 dx = \rho A \left(\int_0^l \sin^2 k_n x dx + \mu l \sin^2 k_n l \right).$$

В результате имеем

$$f_n = \frac{\int_0^l \sin k_n x f(x) dx + \mu l \sin k_n l f(l)}{\int_0^l \sin^2 k_n x dx + \mu l \sin^2 k_n l}.$$

Полученная формула выведена для стержня постоянного сечения с сосредоточенной массой на одном конце. Сформулированный выше принцип применим всегда, когда сосредоточенные массы нарушают ортогональность собственных функций в обычном смысле. С математической точки зрения функцию распределения масс $m(x)$ при обычной формулировке задачи, представляемой уравнениями (8.2), можно рассматривать аналогично δ -функции

Дирака. Когда существование сосредоточенных масс трактуется подобным образом, собственные векторы опять становятся взаимно ортогональными относительно видоизмененной функции плотности. Еще одно важное значение разобранного примера заключается в том, что при решении динамических задач с помощью дифференциальных уравнений можно определить граничные условия механической системы таким образом, чтобы никакие сосредоточенные силы не появлялись во внутренних точках.

2. При $n = 2$ задача о собственных значениях представляется дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(K \frac{d^2}{dx^2} r \right) = m\omega^2 r,$$

или

$$(Kr'')'' = m\omega^2 r,$$

где $K = K(x) = EJ$ — изгибная жесткость стержня; $m = m(x) = \rho A$ — распределение масс вдоль стержня.

Величины E, J, ρ, A могут быть как постоянными, так и переменными. Сначала исследуем условия, при которых справедливо первое условие (8.77). Второе уравнение при $m = \rho A$ доказательств не требует.

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_0^l uL(v)dx &= \int_0^l u(Kv'')''dx = [u(Kv'')']_0^l - \int_0^l u'(Kv'')'dx = \\ &= [u(Kv'')' - u'(Kv'')]_0^l + \int_0^l u''Kv''dx. \end{aligned} \quad (8.87)$$

Аналогично

$$\int_0^l vL(u)dx = [v(Ku'')' - v'(Ku'')]_0^l + \int_0^l v''Ku''dx.$$

Так как интегралы в правых частях равенств одинаковы, то разность левых частей равна

$$\int_0^l [uL(v) - vL(u)]dx = [u(Kv'')' - u'(Kv'') - v(Ku'')' + v'(Ku'')]_0^l. \quad (8.88)$$

Граничные условия определены так, что задача самосопряжена, а ее собственные функции взаимно ортогональны. В связи с этим для любых из следующих граничных условий каждый из четырех членов в правой части выражения (8.88) обращается в нуль независимо (см. рис. 8.6):

$$r = 0, \quad r' = 0$$

— на защемленном конце,

$$r = 0, \quad Kr'' = 0$$

— на шарнирно-опертом конце,

$$Kr'' = 0, \quad (Kr'')' = 0$$

— на свободном конце.

Когда выражение (8.71) равно нулю, граничные условия являются линейными однородными зависимостями между перемещением и поперечной силой или между углом поворота и моментом. Аналитически это означает, что для каждого конца стержня имеются постоянные a , b , c и d , при помощи которых граничные условия могут быть выражены в виде

$$\begin{aligned} ar + b(Kr'')' &= 0; \\ cr' + d(Kr'') &= 0. \end{aligned} \tag{8.89}$$

Иногда стержень имеет сосредоточенные массы. Если масса расположена на конце, то линейная связь между прогибом и поперечной силой зависит от частоты. Условие ортогональности собственных функций может быть несколько видоизменено, подобно тому, как это было сделано ранее. В результате для $n \neq m$ имеем

$$\int_0^l m(x)r_n(x)r_m(x)dx + Mr_n(l)r_m(l) = 0, \tag{8.90}$$

где M — сосредоточенная масса, приложенная в точке $x = l$.

Глава 9

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

9.1. Метод Рэлея

В расчетной практике часто встречаются механические системы, аналитическое решение задачи о колебаниях в которых затруднительно или даже невозможно из-за геометрических или физических неоднородностей и нелинейности самой системы. В связи с этим разработан ряд методов приближенного аналитического решения, среди которых метод Рэлея относится к числу наиболее популярных в теории колебаний.

Современное состояние компьютерной техники таково, что, казалось бы, нет необходимости ставить вопрос о применении аналитических методов расчета, тем более для сложных систем. Компьютерная техника решает все. Против этого, на первый взгляд, даже трудно возразить. Однако возражения есть, и они имеют основание. Разработчики и исследователи машин должны, прежде всего, понимать физическую сущность совершающихся в машинах процессов и на качественном уровне уметь оценивать их. Аналитические и приближенные методы развивают способность такого понимания, вырабатывают уверенность в оценке компьютерных решений. Поэтому применение компьютерной техники не исключает аналитические методы, а существенно их дополняет и развивает.

Распределение упругих и инерционных сил в колеблющейся системе может быть охарактеризовано или двумя дифференциальными операторами L и M совместно с граничными условиями, или двумя выражениями для потенциальной Π и кинетической T энергий. Для любой функции перемещений, удовлетворяющей граничным условиям, кинетическая и потенциальная энергии системы могут быть выражены через дифференциальные операторы следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \dot{v} M(dv) d\sigma; \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} v L(v) d\sigma.$$

Для свободных колебаний консервативной механической системы справедлив закон сохранения полной механической энергии

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0. \quad (9.1)$$

Если функция v известна, то частоту свободных колебаний можно найти из условия (9.1). Это условие приводит к уравнению, содержащему лишь одну неизвестную величину. Однако для сложных систем функция v заранее неизвестна. Идея метода Рэлея состоит в том, чтобы задаться этой функцией, сообразуя ее выбор с граничными условиями и ожидаемой формой колебаний. Например, для стержня с шарнирно опертыми концами и произвольным распределением погонной массы (массы, приходящейся на единицу длины) $m(x)$ и изгибной жесткости $EJ(x)$ для первого (основного) тона изгибных колебаний можно принять функцию $f(x) = \sin \pi x/l$.

Рассмотрим реализацию этой идеи на примере поперечных колебаний стержня. Представим его свободные колебания в виде

$$v(x, t) = f(x) \cos \omega t, \quad (9.2)$$

где $f(x)$, ω — форма и частота свободных колебаний соответственно.

Потенциальная и кинетическая энергии изогнутого стержня определяются выражениями

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx; \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx,$$

где l — длина стержня; $EJ(x)$, $m(x)$ — его изгибная жесткость и погонная масса соответственно.

С учетом (9.2) находим

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \int_0^l EJ(x) (f''(x))^2 dx; \\ T &= \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^l m(x) f^2(x) dx. \end{aligned} \quad (9.3)$$

На основании закона сохранения полной механической энергии (9.1) и выражений (9.3) заключаем, что Π и T во времени изменяются следующим образом: при $\Pi = 0$ $T = T_{\max}$, при $T = 0$ $\Pi = \Pi_{\max}$ и $\Pi_{\max} = T_{\max}$. Принимая это во внимание, из выражений (9.3) получаем равенство

$$\int_0^l EJ(x)(f''(x))^2 dx = \omega^2 \int_0^l m(x)f^2(x) dx, \quad (9.4)$$

левая часть которого представляет собой максимальное удвоенное значение потенциальной энергии, а правая — удвоенную максимальную кинетическую энергию. Отсюда следует формула Рэлея для определения частоты изгибных колебаний стержня

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ(x)(f''(x))^2 dx}{\int_0^l m(x)f^2(x) dx}. \quad (9.5)$$

Если на стержне в сечениях имеются сосредоточенные грузы с массами m_{0j} , то удвоенная максимальная кинетическая энергия системы будет равна

$$2T = \omega^2 \left[\int_0^l m(x)f^2(x) dx + \sum_{(j)} m_{0j}f^2(x_j) \right],$$

а формула Рэлея примет вид

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ(x)(f''(x))^2 dx}{\int_0^l m(x)f^2(x) dx + \sum_{(j)} m_{0j}f^2(x_j)}. \quad (9.6)$$

Отметим, что, как следует из этого вывода, формула Рэлея дает точное значение частоты свободных колебаний, если в рамках принятых допущений теории изгиба функция $f(x)$ является истинной формой свободных колебаний.

Практическое значение формулы Рэлея состоит в том, что с ее помощью можно найти собственную частоту ω , задаваясь ожи-

даемой формой колебаний $f(x)$, отвечающей кинематическим граничным условиям. Чем больше выбранная функция $f(x)$ соответствует истинной форме колебаний, тем найденная по формуле (9.5) частота ближе к истинной собственной частоте ω . Чем грубее выбранная функция $f(x)$, тем больше будет ошибка в определении ω .

Рэлею принадлежит не только вывод формулы для определения частоты, но и доказательство важной теоремы: *при выборе любой формы колебаний $f(x)$, удовлетворяющей кинематическим граничным условиям задачи, значение основной частоты, вычисленное по формуле (9.5) или (9.6), всегда больше ее истинного значения.* Физически этот вывод означает, что для изгиба стержня по форме, отличающейся от истинной, требуется большая потенциальная энергия.

Весьма распространен способ определения потенциальной энергии изгиба стержня, когда в качестве нагрузки принимают вес стержня и имеющихся на нем сосредоточенных грузов. Так как потенциальная энергия, запасенная упругой системой, равна работе внешних сил

$$\Pi = A = \frac{1}{2} \int_0^l p(x) f(x) dx + \sum_{(j)} P_j f(x_j),$$

где $p(x) = m(x)g$ — внешняя распределенная нагрузка; $P_j = m_{0j}g$ — вес j -го сосредоточенного груза, то формула (9.6) может быть записана так:

$$\omega^2 = \frac{g \left[\int_0^l m(x) f(x) dx + \sum_{(j)} m_{0j} f(x_j) \right]}{\int_0^l m(x) f^2(x) dx + \sum_{(j)} m_{0j} f^2(x_j)}. \quad (9.7)$$

В этом случае функцию $f(x)$ уже не выбирают, она представляет собой вполне определенную кривую статического прогиба. Формула Рэлея вида (9.7) наиболее проста и обладает полной определенностью.

9.2. Метод Рэлея—Ритца

Дальнейшим развитием метода Рэлея является метод Ритца. Если по методу Рэлея для определения частоты свободных колебаний основного тона используют одну функцию $f(x)$, удовлетворяющую всем кинематическим граничным условиям, то по методу Ритца для отыскания решения дифференциальных уравнений применяют конечный ряд функций, после минимизации которого получают приближенное решение задачи.

Выбор функций может быть довольно произвольным, однако все они должны быть линейно независимыми, удовлетворять кинематическим граничным условиям и быть необходимое число раз дифференцируемыми. Из выбранной системы функций путем линейной комбинации можно получить конечный ряд функций следующего вида:

$$v = q_1 \varphi_1(x) + q_2 \varphi_2(x) + \dots + q_{n_0} \varphi_{n_0}(x), \quad (9.8)$$

где $q_1, \dots, q_{n_0}$ — система неопределенных коэффициентов.

Система функций $\varphi = \varphi(x)$, входящая в этот ряд, называется *базисной* или *координатной системой*.

Определим инерционные коэффициенты и коэффициенты жесткости:

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \int_{\Sigma} \varphi_n M(\varphi_m) d\sigma; \\ c_{nm} &= \int_{\Sigma} \varphi_n L(\varphi_m) d\sigma. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Для самосопряженной задачи

$$a_{nm} = a_{mn}; \quad c_{nm} = c_{mn}.$$

Функция Рэлея для любой функции v , представляемой выражением (9.8), может быть получена подстановкой выражения (9.8) в интегралы (9.9) и формулу (9.5). В результате имеем

$$Q = \frac{\int_{\Sigma} v L(v) d\sigma}{\int_{\Sigma} v M(v) d\sigma}.$$

После интегрирования получаем

$$Q = \frac{\sum_{m=1}^{n_0} \sum_{n=1}^{n_0} c_{nm} q_n q_m}{\sum_{m=1}^{n_0} \sum_{n=1}^{n_0} a_{nm} q_n q_m},$$

или, используя принятые ранее обозначения,

$$Q = \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q}}.$$

Здесь a_{nm} и c_{nm} предопределяются первоначальным выбором базисной системы функций φ , однако q могут быть выбраны свободно, причем степень свободы выбора эквивалентна случаю системы с n_0 степенями свободы. Чтобы получить минимум $\tilde{\omega}$ относительно всех возможных комбинаций q , полагаем

$$\frac{\partial Q}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial Q}{\partial q_{n_0}} = 0,$$

где

$$Q = \tilde{\omega}^2.$$

В результате приходим к известному частотному уравнению

$$\left| a_{nm} \tilde{\omega}^2 - c_{nm} \right| = 0.$$

В общем случае это уравнение будет иметь n_0 корней $\tilde{\omega}_1^2, \tilde{\omega}_2^2, \dots, \tilde{\omega}_{n_0}^2$ в порядке возрастания их значений. Каждому из этих корней соответствует модальный вектор $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{n_0})$, определяющий в соответствии с выражением (9.8) функцию

$$\tilde{r} = \tilde{q}_1 \varphi_1 + \tilde{q}_2 \varphi_2 + \dots + \tilde{q}_{n_0} \varphi_{n_0}.$$

Всего имеем n_0 подобных функций $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{n_0}$.

Таким образом, сущность метода Рэлея—Ритца заключается в том, что с помощью ограничения допускаемых функций рядом, представляемым выражением (9.8), заменяем систему, имеющую

бесконечное число степеней свободы, системой с n_0 степенями свободы; n_0 частот и модальных векторов последней рассматриваем далее как приближенные значения первых частот и форм свободных колебаний исходной системы.

Чтобы пояснить это, предположим, что $\tilde{r}_1$ является функцией из ряда (9.8), приводящей к наименьшему значению Q . В этом случае $\tilde{r}_1$ является приближением к r_1 , которое характеризует наличие наименьшего значения Q из всех допустимых; при этом $\tilde{\omega}_1^2$ является лучшим приближением к ω_1^2 , чем $\tilde{r}_1$ к r_1 , что следует из стационарных свойств функции Q .

Теперь в аппроксимирующей системе можно положить, что функции $\tilde{r}_2$ и $\tilde{r}_1$ ортогональны относительно M , т. е.

$$\int_{\Sigma} \tilde{r}_1 M(\tilde{r}_2) d\sigma = 0.$$

Тогда $\tilde{r}_2$ будет функцией с наименьшим значением Q .

Так как $\tilde{r}_1$ является лишь приближением к r_1 , то, как правило, $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{r}_2$ — более грубые приближения к ω_2 и r_2 . Чем больше номер n , тем более грубые приближения будут для ω и r . Если координатная система выбрана удачно, то для первого тона колебаний получаем наилучшие приближения решений для собственной частоты и формы колебаний. Последующие тона имеют более грубые приближения.

Сделаем дополнительные замечания к методу Рэлея—Ритца.

1. Если необходимо найти n_0 низших собственных частот, то базисная система должна содержать более чем n_0 функций. Насколько велика будет базисная система, определяется природой выбранных функций. Если они аналитически весьма точно представляют собственные функции задачи, то требуется немного больше, чем n_0 функций. Существование такой близости может быть гарантировано, если диагональные элементы матриц A и C приближенной системы существенно больше их недиагональных элементов.

2. При решении практических задач часто нужно знать лишь несколько первых собственных частот системы. Более того, хотя расчет по методу Рэлея—Ритца с использованием компьютерной техники позволяет достаточно точно определить высшие собственные значения, они полностью не соответствуют действительным формам колебаний. Происходит это потому, что для таких форм колебаний элементарная теория изгиба стержней не дает правильного результата. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить между собой дифференциальные уравнения (8.16) и (8.17).

3. Объем вычислений, как и точность приближенного решения задачи с помощью метода Рэлея—Ритца, зависит от выбора базисных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_0}$. Удачным выбором является такой, при котором облегчается вычисление интегралов (9.9), а в матрицах A и C диагональные члены являются доминирующими по сравнению с остальными членами. Иначе говоря, необходимо добиться максимального соответствия функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_0}$ действительным собственным функциям, особенно не увеличивая при этом объем вычислений.

4. При выборе базисных функций всегда целесообразно отдавать предпочтение тем из них, которые заведомо ортогональны к дифференциальным операторам M и L . Например, если M — постоянный множитель, то базисная система может состоять из функций синуса и косинуса, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. В этом случае $a_{nm} = 0$, когда $n \neq m$, или, если $M = x$, можно выбрать функции Бесселя соответствующего порядка, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям.

Если известны собственные функции задачи с другими граничными условиями или с несколько отличным дифференциальным уравнением, то их можно использовать для образования базисной системы для исходной задачи. Число базисных функций в таком случае должно быть значительно больше числа низших собственных частот, подлежащих определению. Объем вычислений при этом также будет значительно больше, чем при использовании функций, предлагаемых в третьем замечании.

9.3. Метод Бубнова—Галеркина

В отличие от метода Рэлея—Ритца метод Бубнова—Галеркина по своей сути является методом ортогонализации. Смысл его заключается в следующем.

Пусть для простоты рассуждений мы имеем одномерное дифференциальное уравнение движения

$$p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = L(v),$$

которое, например, для поперечных колебаний стержня имеет вид

$$-\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - p(x, t), \quad (9.10)$$

где $p(x, t)$ — внешняя распределенная сила.

Предположим, что все или часть величин ρ, A, EJ являются функциями линейной координаты x , а функция прогиба зависит от координаты x и времени t ; т. е. $v = v(x, t)$. Аналитическое решение в общем случае получить невозможно. Метод Бубнова—Галеркина позволяет найти приближенное решение дифференциального уравнения в виде сходящегося ряда ортогональных функций, удовлетворяющих всем кинематическим и силовым граничным условиям:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \varphi_n(x). \quad (9.11)$$

После подстановки (9.11) в уравнение (9.10) в нем будет нарушено равенство, поскольку выражение (9.11) не является решением (9.10), т. е.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \varphi_n(x) \right) + \\ & + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \varphi_n(x) - p(x, t) \neq 0. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Умножим теперь полученное выражение поочередно на координатные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ из ряда (9.11), проинтегрируем по длине стержня с учетом граничных условий и результат приравняем нулю:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \varphi_n(x) \right) \varphi_m(x) dx + \\ & + \int_0^l \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx - \\ & - \int_0^l p(x, t) \varphi_m(x) dx = 0 \quad (1 \leq m \leq n_0). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Последнее действие означает осреднение ошибки, внесенной выражением (9.11), по всей длине стержня. Если в качестве координатных функций $\varphi_m(x)$ использовать собственные формы колебаний, то с учетом свойств ортогональности

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right) \varphi_m dx = 0; \\ & \int_0^l \rho A \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m) \end{aligned}$$

уравнения (9.13) сведутся к n_0 несвязным обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций времени $q_n(t)$, которые в данном случае будут нормальными координатами:

$$(c_{nn} - \omega_n^2 a_{nn}) q_n(t) = p(t) \int_0^l F(x) \varphi_n(x) dx.$$

Здесь выражение в правой части уравнения представляет собой обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате $q_n(t)$, $p(x, t) = p(t)F(x)$.

Непосредственное решение дифференциального уравнения методом Бубнова—Галеркина открыло возможность решения несамосопряженных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений колебаний неконсервативных систем.

Проиллюстрируем применение метода Бубнова—Галеркина на примере поперечных колебаний однородного шарнирно опертого стержня, лежащего на двух опорах. Дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид (9.10). Решение его ищем в виде сходящегося ряда ортогональных функций

$$v = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n=1, 2, \dots, n_0), \quad (9.14)$$

удовлетворяющих всем граничным условиям.

После подстановки выражения (9.14) в уравнение (9.10) имеем

$$EJ \sum_{n=1}^{n_0} q_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{n\pi x}{l} + \rho A \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{q}_n \sin \frac{n\pi x}{l} = p(t) F(x).$$

Умножим полученное выражение на каждую из функций $\sin n\pi x/l$, затем проинтегрируем по длине стержня и приравняем нулю. С учетом ортогональности функций $\sin n\pi x/l$ получим

$$\begin{aligned} EJ \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 q_n \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx + \rho A \ddot{q}_n \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \\ = p(t) \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование, имеем

$$\begin{aligned} EJ \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} q_n + \frac{l}{2} \rho A \ddot{q}_n = \\ = p(t) \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots, n_0). \end{aligned} \quad (9.15)$$

При $F(x) = F_0 = \text{const}$ обобщенная сила, стоящая в правой части уравнения (9.15), равна

$$Q_n = \frac{2lF_0}{n\pi} p(t) \quad (n=1, 3, 5, \dots, n_0).$$

Для коэффициентов жесткости c_{nn} и массы a_{nn} , а также квадрата частоты собственных колебаний ω_n^2 получаем следующие выражения:

$$c_{nn} = EJ \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2}; \quad a_{nn} = \rho A \frac{l}{2}; \quad \omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{EJ}{\rho A}. \quad (9.16)$$

Уравнения (9.15) принимают вид

$$a_{nn}(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = Q_n \quad (n=1, 3, 5, \dots, n_0). \quad (9.17)$$

Приняв закон изменения внешней силы гармоническим с частотой p , найдем из уравнения (9.17) частное решение. С учетом (9.14) функция вынужденных колебаний стержня имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{4F_0}{n\pi\rho A(\omega_n^2 - p^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos pt \quad (\omega_n \neq p).$$

Таким образом, методом Бубнова—Галеркина получены дифференциальные уравнения (9.17) с коэффициентами в левой части, одинаковые с уравнениями, которые были найдены методом интегрирования в гл. 8. Такое совпадение является следствием того, что функции $\sin n\pi x/l$, принятые в выражении (9.14), отвечают точным решениям исходного уравнения (9.10). Если коэффициенты EJ , ρ , A зависят от координаты x , то такого совпадения не будет. Более того, координатные функции по отношению к переменным величинам EJ и ρA могут быть неортогональны и уравнения (9.17) — взаимосвязаны. В таком случае будем иметь приближенные дифференциальные уравнения для функций времени $q(t)$ — эффективность метода при этом снижается.

Применительно к теории колебаний метод Бубнова—Галеркина позволяет из уравнений в частных производных получить приближенные уравнения в обычных производных для координат времени. Решения будут тем точнее, чем выбранная система координатных функций (9.14) будет лучше соответствовать истинному решению.

Изложение метода Бубнова—Галеркина проведено на примере одномерного дифференциального уравнения. Если дифференциальные операторы будут двумерными или трехмерными, например $L(u, v)$ или $L(u, v, w)$, то система координатных функций должна соответственно зависеть от двух $\varphi(x, y)$ или трех $\varphi(x, y, z)$ координат. Интегрирование дифференциального уравнения при этом нужно проводить по поверхности или объему тела.

9.4. Метод начальных параметров

Рассмотренные выше методы позволяют с разной степенью точности вычислять собственные частоты и формы колебаний при произвольном распределении по длине стержня погонной

массы и жесткости. В отличие от них методом начальных параметров определяют собственные частоты и формы колебаний одномерных объектов с любой заданной точностью, но при ступенчатой аппроксимации по длине функций распределения (эпюр) погонной массы и жесткости. Отметим, что в случае, когда рассматриваемый стержень фактически состоит из совокупности однородных участков, метод начальных параметров становится точным. Последнее обстоятельство является особенно важным, поскольку большинство протяженных машиностроительных конструкций, например валов, являются ступенчатыми, а в ракетной технике и динамике кораблей исходные эпюры погонных масс и жесткостей задаются ступенчатыми. Все это совместно с компьютеризацией определяет широкое применение метода начальных параметров на практике.

Идея метода заключается в следующем. Задают начальные параметры: собственную частоту и в зависимости от граничных условий форму и необходимое количество ее производных на одном из концов стержня. Начальные параметры совместно с дифференциальным уравнением полностью определяют поведение механической системы, однако произвольный выбор частоты приводит к тому, что полученное решение не удовлетворяет граничным условиям на другом конце стержня. Поэтому приходится делать несколько приближений, чтобы добиться удовлетворения условий на другом конце.

Изложение метода проведем на примере определения формы и частоты свободных продольных колебаний прямого стержня, который имеет ступенчатое изменение массы $m(x)$ и жесткости $EA(x)$ на растяжение—сжатие по своей длине (рис. 9.1).

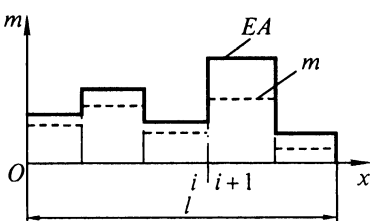


Рис. 9.1

Разделим мысленно стержень на j участков, в пределах каждого из которых интенсивность массы m и жесткости EA будем считать постоянными. С учетом разделения переменных

дифференциальное уравнение для определения формы свободных колебаний любого i -го участка стержня $r_i(x)$ будет иметь постоянные коэффициенты, т. е.

$$r_i''(x) + k_i^2 r_i(x) = 0, \quad (9.18)$$

где

$$k_i^2 = \frac{m_i}{EA_i} \omega^2; \quad (9.19)$$

ω — принятая произвольно в начале расчета частота свободных колебаний стержня.

Как известно, уравнение (9.18) имеет точное решение

$$r_i(x) = C_i \sin k_i x + D_i \cos k_i x, \quad (9.20)$$

а его произвольные постоянные C_i, D_i можно выразить через произвольные постоянные предыдущего участка из условия сопряжения при $x_{i-1} = l_{i-1}$ и $x_i = 0$ (где l_{i-1} — длина $i-1$ -го участка стержня).

На границе i -го и $i+1$ -го участков имеем кинематическое и силовое условия сопряжения

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i+1}; \\ EA_i r_i' &= (EA r')_{i+1}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Подставив в (9.21) выражения (9.20) для i -го и $i+1$ -го участков, получим два уравнения, из которых найдем зависимость произвольных постоянных $i+1$ -го участка от постоянных i -го участка:

$$\begin{aligned} C_{i+1} &= \beta_i (C_i \cos k_i l_i - D_i \sin k_i l_i); \\ D_{i+1} &= C_i \sin k_i l_i + D_i \cos k_i l_i, \end{aligned} \quad (9.22)$$

где $\beta_i = (kEA)_i / (kEA)_{i+1} = \sqrt{(mEA)_i / (mEA)_{i+1}}$.

Для определения констант C и D первого участка воспользуемся граничным условием на его левом конце. Пусть стержень является свободным, т. е. на его левом и правом концах нет напряжений:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \quad (r)'_{x_1=0} = 0; \\ x_j &= l_j, \quad (r)'_{x_j=l_j} = 0. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Положим, кроме того, на левом конце

$$x_1 = 0, \quad (r)_{x_1=0} = 1. \quad (9.24)$$

Тогда из первого условия (9.23) и условия (9.24) находим $C_1 = 0$, $D_1 = 1$.

По формулам (9.22) можно определить коэффициенты C_i и D_i для всех участков стержня.

Имеющееся на правом конце последнего участка граничное условие (9.23) используют для контроля частоты ω . Если принятая в расчете ω является частотой собственных колебаний стержня, то второе условие (9.23) будет выполнено и расчет формы упругих колебаний можно считать законченным.

В практических расчетах на компьютере заданную частоту ω изменяют от нуля с постоянным шагом и вычисляют функцию ошибки выполнения граничного условия (9.23) на правом конце стержня

$$r_j^*(l_j) = C_j \cos k_j l_j - D_j \sin k_j l_j. \quad (9.25)$$

При изменении знака функции ошибки (9.25), что соответствует переходу частоты через истинное значение, для ее определения используют метод половинного деления шага.

После того, как найдена частота свободных колебаний, строго говоря, еще нельзя определить, какому тону она соответствует. Чтобы установить номер тона колебаний, необходимо по уравнению (9.20) построить функцию $r(x)$, проходя последовательно все участки, и определить число ее узлов, т. е. число сечений, в которых $r(x) = 0$. Для продольных колебаний свободного на концах стержня номер тона соответствует числу узлов.

9.5. Влияние связей на собственные частоты

Очень важным при исследовании колебаний является то, что наложение на систему дополнительных связей повышает все собственные частоты системы (или по крайней мере не понижает их). Повышение собственных частот является следствием того, что при наложении дополнительных связей упругая система становится более жесткой. Не доказывая это утверждение в общем виде, проиллюстрируем его на частном примере продольных колебаний однородного стержня, закрепленного на левом конце и связанного с пружиной жесткостью s на правом.

Дифференциальное уравнение продольных колебаний однородного стержня и его граничные условия на левом и правом концах имеют соответственно следующий вид (см. § 8.2.1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$u(0, t) = 0;$$

$$cu(l, t) + AE \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0.$$

Собственные значения для стержня со свободным правым концом ($\partial u(l, t)/\partial x = 0$) равны (см. § 8.5)

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Характеристическое уравнение для стержня, связанного с пружиной, имеет вид

$$\operatorname{ctg} kl = -\alpha/(kl).$$

где $\alpha = cl/(AE)$ — безразмерная жесткость пружины.

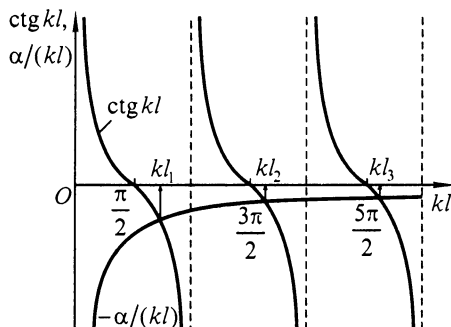


Рис. 9.2

Решение этого уравнения представлено на рис. 9.2. Видно, что при любых значениях жесткости пружины α собственные значения оказываются выше, чем в случае стержня, свободного на правом конце.

Глава 10

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

10.1. Постановка задачи

В гл. 8 показано, что распределение упругих и инерционных сил в колеблющемся упругом теле может быть охарактеризовано двумя дифференциальными операторами L и M совместно с граничными условиями. Свободные продольные $u(x, t)$ и поперечные $v(x, t)$ колебания такого тела представлены в виде бесконечного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) r_n(x),$$

в котором $r_n(x)$ — собственные функции, или формы главных колебаний; $q_n(t)$ — обобщенные координаты, определяемые из начальных условий.

Собственные функции $r_n(x)$ при свободных колебаниях обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} r_n M(r_m) d\sigma &= 0 \quad (n \neq m); \\ \int_{\Sigma} r_n L(r_m) d\sigma &= 0 \quad (n \neq m); \end{aligned} \tag{10.1}$$

$$L(r_n) = \omega_n^2 M(r_n).$$

Вынужденные колебания упругого тела также представим в виде разложений в бесконечный ряд по собственным функциям

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) r_n(x), \tag{10.2}$$

причем здесь обобщенная координата $q_n(t)$ зависит не только от начальных условий, но и в значительной мере от внешних сил, вызывающих вынужденные колебания.

Предположим для простоты, что имеется лишь одна пространственная координата x (обобщение в случае более чем одной пространственной переменной можно получить по аналогии).

Пренебрегая диссипативными силами, составим дифференциальные уравнения для обобщенной координаты $q_n(t)$, используя уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_n} = Q_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

где $L^* = T - \Pi$ — функция Лагранжа; T , Π — кинетическая и потенциальная энергии системы; Q_n — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_n .

Кинетическая и потенциальная энергии с учетом, что $u(x, t)$ и $v(x, t)$ удовлетворяют всем граничным условиям, могут быть определены из выражений

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \dot{u} M(\dot{u}) d\sigma; \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} u L(u) d\sigma$$

(10.3)

и

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \dot{v} M(\dot{v}) d\sigma; \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} v L(v) d\sigma$$

для продольных и поперечных колебаний соответственно.

Введем величину

$$m_{nn} = \int_{\Sigma} r_n M(r_n) d\sigma, \quad (10.4)$$

называемую в теории колебаний **приведенной массой** при колебаниях системы по n -му тону. Заметим, что приведенная масса совпадает с введенным при изложении метода Рэлея—Ритца инерционным коэффициентом a_{nn} (см. (9.9)). После подстановки ряда (10.2) в выражения (10.3) имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_{nn} \dot{q}_n^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_{nn} \omega_n^2 q_n^2. \quad (10.5)$$

Обобщенная сила Q_n , соответствующая обобщенной координате q_n , равна работе всех внешних сил $\bar{F}_k$, приложенных к

системе, на возможных перемещениях, обусловленных вариацией только одной обобщенной координаты q_n .

С учетом выражений (10.5) из уравнений Лагранжа II рода получаем бесконечную систему уравнений

$$m_{nn}(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = Q_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (10.6)$$

в каждом из которых содержится лишь одна неизвестная координата — обобщенная координата q_n .

Решение уравнения (10.6) состоит из суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Для нахождения констант интегрирования должны быть заданы начальные условия, которые для q_n определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) r_n(x) &= f(x); \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0) r_n(x) &= g(x). \end{aligned}$$

После отыскания всех q_n их следует подставить в выражение (10.2). Решение получается в форме бесконечного ряда. Этот ряд должен быть непрерывным и соответствующее число раз дифференцируемым, с тем чтобы преобразования, приводящие к уравнениям (10.6), были справедливы. В практических расчетах проводят оценку значимости членов ряда и отбрасывают те из них, которые не имеют заметного влияния.

10.2. Обобщенные силы

Если обобщенные силы Q_n найдены, собственные функции и собственные частоты известны, задача исследования вынужденных колебаний сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Определим обобщенные силы в различных случаях действия внешних сил на шарнирно опертый стержень, для которого

$$r_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.7)$$

Напомним, что обобщенная сила Q_n равна работе всех приложенных к механической системе внешних сил на возможных перемещениях системы, вызванных изменением (вариацией) только одной обобщенной координаты q_n , отнесенной к вариации обобщенной координаты q_n :

$$Q_n = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \delta A_k \right)_{q_n}}{\delta q_n},$$

где $\left(\sum_{k=1}^N \delta A_k \right)_{q_n}$ — сумма элементарных работ при вариации n -й обобщенной координаты; N — число внешних сил; δq_n — вариация обобщенной координаты.

Рассмотрим несколько вариантов приложения внешних сил.

1. Внешняя сила $F(t)$ приложена в плоскости изгиба в поперечном сечении $x = \xi$ (рис. 10.1). Обобщенная сила

$$Q_n = F(t)r_n(\xi) = F(t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}. \quad (10.8)$$

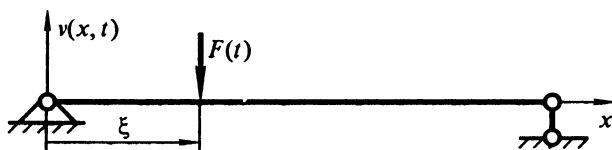


Рис. 10.1

Если силы приложены в двух сечениях, то

$$Q_n = F_1(t)r_n(\xi_1) + F_2(t)r_n(\xi_2).$$

2. В сечении $x = \xi$ в плоскости изгиба действует изгибающий момент внешних сил $M(t)$. Тогда

$$Q_n = M(t) \frac{dr_n(x)}{dx} \Big|_{x=\xi}.$$

Например, при $\xi = l$

$$Q_n = M(t) \frac{n\pi}{l} (-1)^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

3. На стержень, совершающий поперечные колебания, действует осевая сила $F(t)$ (рис. 10.2). В этом случае работа силы $F(t)$ совершается на перемещениях вдоль оси стержня, а колебания происходят в поперечном направлении. Выразим перемещения точки приложения силы в зависимости от поперечных движений стержня. Возьмем две точки, расположенные на нейтральной линии стержня на расстоянии dx одна от другой. При колебаниях они перемещаются в осевом направлении так, что это расстояние уменьшается до $dx \cos \theta$, где θ — угол наклона деформированной оси стержня. Сокращением расстояния от сжатия силой $F(t)$ здесь будем пренебрегать. Принимая $\theta = \partial v / \partial x$, найдем осевое перемещение точки приложения силы вследствие изгиба стержня:



Рис. 10.2

$$\chi = \int_0^l dx (1 - \cos \theta) = \int_0^l \frac{\theta^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Поскольку

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) r_n(x), \quad r_n(x) = \sin(n\pi x/l),$$

то с учетом ортогональности

$$\chi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \int_0^l \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \frac{(n\pi)^2}{4l};$$

$$\delta \chi_n = q_n \frac{(n\pi)^2}{2l} \delta q_n.$$

Таким образом, обобщенная сила Q_n пропорциональна обобщенной координате:

$$Q_n = F(t) q_n \frac{(n\pi)^2}{2l}.$$

Дифференциальное уравнение (10.6) в этом случае будет иметь вид

$$m_{nn}(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = q_n F(t) \frac{(n\pi)^2}{2l},$$

или

$$m_{nn} \left\{ \ddot{q}_n + \left[\omega_n^2 - \frac{F(t)}{m_{nn}} \frac{(n\pi)^2}{2l} \right] q_n \right\} = 0. \quad (10.9)$$

Получили уравнение параметрических колебаний, в котором один из параметров, в данном случае собственная частота колебаний, зависит от времени. Если сила $F(t)$ постоянна и равна F_0 , то последнее уравнение может быть записано как обычное уравнение свободных колебаний:

$$\ddot{q}_n + \tilde{\omega}_n^2 q_n = 0,$$

где $\tilde{\omega}_n^2 = \omega_n^2 - F_0 \frac{(n\pi)^2}{2lm_{nn}}$.

Таким образом, осевая сжимающая сила снижает частоту свободных колебаний.

Принимая во внимание, что

$$m_{nn} = \int_0^l m(x) r_n^2(x) dx = \rho A \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{\rho A l}{2}; \quad (10.10)$$

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}},$$

где $m(x) = \rho A$ — погонная масса стержня; ρ, A, l — плотность материала, площадь поперечного сечения и длина стержня соответственно, уравнение (10.9) можно представить в виде

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 \left[1 - \frac{F_0 l^2}{EJ(n\pi)^2} \right] q_n = 0.$$

Интересно отметить, что если F_0 равна эйлеровой критической силе при потере устойчивости:

$$F_0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

то $\tilde{\omega}_1 = 0$.

10.3. Вынужденные поперечные колебания шарнирно опертого стержня при различных способах возбуждения

10.3.1. Сосредоточенная сила, приложенная в заданной точке

Для сосредоточенной силы $F(t)$, приложенной в сечении $x = \xi$ (см. рис. 10.1), выражение для обобщенной силы имеет вид (10.8). Подставив (10.8) в уравнение (10.6), получим

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{1}{m_{nn}} \sin \frac{n\pi\xi}{l} F(t) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (10.11)$$

Общее решение уравнения (10.11) при произвольной $F(t)$ имеет вид

$$q_n = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{m_{nn} \omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau,$$

где m_{nn} и ω_n определяются выражениями (10.10), а время τ изменяется в пределах $0 \leq \tau \leq t$.

Первые два члена этого решения характеризуют свободные колебания, определяемые начальными условиями, а третий — вынужденные колебания, вызванные возмущающей силой.

В случае изменения $F(t)$ по гармоническому закону: $F(t) = F_0 \sin pt$, из уравнения (10.11) при $p \neq \omega_n$ получаем

$$q_n = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{F_0}{m_{nn}} \sin \frac{n\pi\xi}{l} \frac{\sin pt}{\omega_n^2 - p^2}. \quad (10.12)$$

Произвольные постоянные A_n и B_n определяются из начальных условий, которые задают функцию прогиба и функцию скорости оси стержня при $t = 0$.

Вследствие различных неупругих сопротивлений свободные колебания постепенно затухают; практическое значение имеют только установившиеся вынужденные колебания с частотой действия внешней силы, определяемые выражением

$$v(x, t) = v(x) \sin pt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0}{m_{nn}} \sin \frac{n\pi\xi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \frac{\sin pt}{\omega_n^2 - p^2}, \quad (10.13)$$

где $v(x)$ — амплитуда установившихся вынужденных колебаний.

Вынужденные колебания имеют большую амплитуду, когда частота p изменения внешней силы близка к частоте n -го тона свободных колебаний. Амплитуда колебаний в таком случае становится опасной для прочности стержня.

Если гармоническая сила $F(t)$ изменяется очень медленно $p \ll \omega_1$, то в знаменателе выражения (10.11) можно пренебречь величиной p^2 по сравнению с ω_n^2 . Тогда

$$v(x) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi\xi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Это выражение представляет собой уравнение кривой статического прогиба, вызванного силой F_0 . В частном случае, когда сила F_0 приложена посередине стержня ($\xi = l/2$), имеем

$$v(x) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EJ} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^4} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^4} \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots \right).$$

Полученный ряд быстро сходится, и удовлетворительное приближение для прогиба будет иметь место при сохранении только первого члена. Таким образом, прогиб середины стержня

$$v|_{x=l/2} = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EJ} = \frac{F_0 l^3}{48,7 EJ}.$$

Ошибка такого приближения составляет около 1,5 %.

Обозначим отношение частот вынужденных и свободных колебаний как $p/\omega_n = z_n$. Тогда, согласно выражению (10.13), амплитуда колебаний

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0 \omega_n^2}{m_{nn}(1 - z_n^2)} \sin \frac{n\pi\xi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

При малых p прогиб с хорошей точностью описывает первый член ряда, поэтому можно заключить, что отношение динамического прогиба к статическому, называемое коэффициентом динамичности, приближенно равно

$$v_d/v_{ст} = 1/(1 - z_1^2).$$

Например, при $z_1 = 1/4$ динамический прогиб больше статического примерно на 6 %, при $z_1 = 1/2$ — на 33 %, а при $z_1 = 5/6$ — на 300 %.

10.3.2. Распределенная внешняя сила

Если распределенная внешняя сила будет *переменной вдоль стержня*, а также изменяющейся во времени, то, принимая

$$F(x, t) = f(x)F(t)$$

и разлагая $f(x)$ по собственным функциям $r_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n r_n(x),$$

на основании формулы (8.85) для коэффициентов разложения получаем следующее выражение:

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x) r_n(x) dx}{\int_0^l [r_n(x)]^2 dx}.$$

Для определения обобщенной силы вычислим работу внешней силы на всей длине стержня:

$$Q_n = \int_0^l F(x, t) r_n(x) dx = F(t) \int_0^l \left[\sum_{m=1}^{\infty} f_m r_m(x) \right] r_n(x) dx.$$

С учетом ортогональности функций $r_n(x)$ получаем

$$Q_n = F(t) f_n l / 2.$$

После подстановки Q_n в уравнение (10.7) с учетом (10.10) имеем

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = F(t) f_n / (\rho A). \quad (10.14)$$

Дальнейшее решение аналогично решению, рассмотренному в § 10.3.1.

10.3.3. Подвижная нагрузка

В случае *подвижной нагрузки* сосредоточенная внешняя сила изменяет точку своего приложения во времени, т. е. $\xi = \xi(t)$. Если масса источника силы существенно меньше массы стержня,

то собственные функции (10.7), сохраняют свое значение и для рассматриваемой задачи. Тогда, принимая во внимание выражение (10.8), получаем

$$Q_n = \begin{cases} F(t) \sin \frac{n\pi \xi(t)}{l} = F(t) \sin \frac{n\pi Vt}{l} & \text{при } 0 \leq t \leq l/V; \\ 0 & \text{при } t > l/V, \end{cases} \quad (10.15)$$

где V — скорость перемещения точки приложения силы $F(t)$ вдоль стержня, $V = \text{const}$.

Для случая подвижной нагрузки (10.6) будет иметь вид

$$m_{nn}(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = \begin{cases} F(t) \sin \frac{n\pi Vt}{l} & \text{при } 0 \leq t \leq l/V; \\ 0 & \text{при } t > l/V. \end{cases} \quad (10.16)$$

Это уравнение справедливо, так как при выводе уравнений Лагранжа II рода не оговорено, что координаты точек приложения внешних сил не зависят от времени.

Если движущая сила постоянна, т. е. $F(t) = F_0$, то уравнение (10.15) упрощается:

$$m_{nn}(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = \begin{cases} F_0 \sin \frac{n\pi Vt}{l} & \text{при } 0 \leq t \leq l/V; \\ 0 & \text{при } t > l/V, \end{cases}$$

и его частное решение, характеризующее вынужденные колебания, будет таким:

$$q_n = \frac{F_0}{m_{nn}} \frac{1}{\omega_n^2 - (n\pi V/l)^2} \sin \frac{n\pi Vt}{l}.$$

Величина $n\pi V/l$ здесь играет роль частоты вынужденных колебаний. Если внешняя сила движется по стержню только в одном направлении, то при $\pi V/l$, близком к ω_1 , динамический прогиб нужно определять с учетом начальных условий.

Рассмотрим теперь случай, когда вдоль стержня с постоянной скоростью V движется гармоническая сила $F_0 \sin pt$ (рис. 10.3). Подобные условия могут быть, например, когда через мост катится без скольжения с постоянной скоростью неуравновешенный каток.

В этом случае $p = V/R$, где R — радиус катка. С учетом (10.15) обобщенная сила

$$Q_n = \begin{cases} F_0 \sin \frac{Vt}{R} \sin \frac{n\pi Vt}{l} & \text{при } 0 \leq t \leq l/V; \\ 0 & \text{при } t > l/V, \end{cases}$$

и дифференциальное уравнение для обобщенной координаты примет вид

$$m_{nn}(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = \begin{cases} F_0 \sin \frac{Vt}{R} \sin \frac{n\pi Vt}{l} & \text{при } 0 \leq t \leq l/V; \\ 0 & \text{при } t > l/V. \end{cases}$$

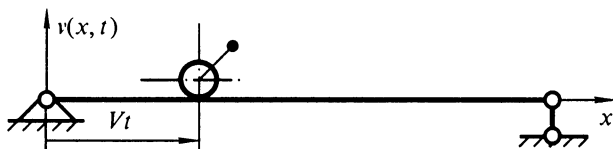


Рис. 10.3

Если по стержню движется груз, масса которого m_0 достаточно велика, то необходимо дополнительно учитывать ее силу инерции $m_0 \frac{d^2 v(x, t)}{dt^2}$. Полагая, что груз движется вдоль стержня

с постоянной скоростью V , получаем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

и действующая на стержень сила

$$F(t) = m_0 g \left(1 - \frac{1}{g} \frac{d^2 v(x, t)}{dt^2} \right).$$

Наличие дополнительных инерционных сил приводит к тому, что найденные ранее собственные функции для стержня не будут ортогональными, так как механическая система не остается инвариантной относительно времени. Коэффициенты дифферен-

циальных уравнений для q_n в этом случае зависят от времени, а все уравнения взаимосвязаны. В данном учебнике такая задача не рассматривается.

10.4. Вынужденные колебания потока жидкости в трубе

Для исследования вынужденных колебаний потока жидкости в трубе применим полученные в гл. 8 уравнения четырехполюсника (8.66). Влиянием числа M на распределение скорости и давления по длине трубы при гармоническом возмущении будем пренебрегать, однако на границах трубы, где имеются гидравлические сопротивления, значение M будем учитывать. Полагая в (8.66) $M = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{v}(1) &= \tilde{v}(0)\operatorname{ch}k + \tilde{p}(0)\operatorname{sh}k; \\ \tilde{p}(1) &= \tilde{v}(0)\operatorname{sh}k + \tilde{p}(0)\operatorname{ch}k,\end{aligned}\tag{10.17}$$

где $k = k_2 = -k_1 = -is$.

Рассмотрим некоторые варианты граничных условий и воздействий на трубу внешнего давления и изменения скорости потока.

Определим вынужденные колебания давления и скорости на выходе из трубы, вызванные возмущением давления $\tilde{p}^*$ перед входом в трубу. Примем, что на входе в трубу и на выходе из нее имеются комплексные сопротивления z_1 и z_2 соответственно. Тогда

$$\tilde{p}(0) = \tilde{p}^* - z_1 \tilde{v}(0); \tag{10.18}$$

$$\tilde{v}(1) = z_2^* \tilde{p}(1), \tag{10.19}$$

где $\tilde{p}(0)$, $\tilde{v}(0)$, $\tilde{p}(1)$, $\tilde{v}(1)$ — возмущения давления и скорости потока в начале (после сопротивления z_1) и в конце трубы; $z_2^* = 1/z_2$ — комплексная проводимость на выходе из трубы.

Для анализа воспользуемся комплексными передаточными числами, представляющими зависящее от частоты вынужденных колебаний отношение амплитуды колебаний на выходе из трубы к амплитуде на ее входе.

Подставляя $\tilde{v}(1)$ из (10.19) и $\tilde{v}(0)$ из (10.18) в уравнения (10.17) и исключая $\tilde{v}(0)$, после несложных преобразований получаем следующее выражение для комплексного передаточного числа:

$$K[\tilde{p}_2, \tilde{p}^*] = \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}^*} = \frac{1}{(1 + z_1 z_2^*) \cos s + i(z_1 + z_2^*) \sin s},$$

где $\tilde{p}_2 = \tilde{p}(1)$; s — частота вынужденных колебаний (при вынужденных колебаниях s имеет вещественное значение).

Каждому значению s соответствует комплексное передаточное число. Совокупность комплексных чисел K при изменении частоты s от 0 до ∞ на комплексной плоскости Z образует годограф вектора K — амплитудно-фазовую частотную характеристику, которая дает полное представление о вынужденных гармонических колебаниях давления на выходе из трубы.

Рассмотрим некоторые свойства амплитудно-фазовых характеристик.

Пусть $z_2^* = 0$, $z_1 = \tilde{\psi}_1 M$. Амплитудно-фазовая характеристика показана на рис. 10.4. С возрастанием частоты s вектор K вращается в направлении движения часовой стрелки. Максимальные значения его модуля (резонанс), равные $1/(\tilde{\psi}_1 M)$, соответствуют частотам $s = (2n - 1)\pi/2$, равным частотам собственных колебаний потока

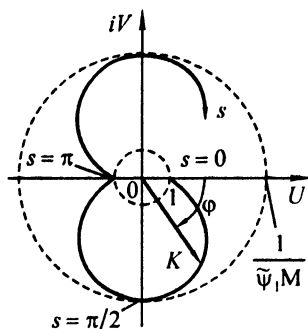


Рис. 10.4

жидкости в трубе с одним «закрытым» концом. Фазовое запаздывание здесь $\phi = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ С увеличением коэффициента $\tilde{\psi}_1 M$ максимальные значения K уменьшаются. Минимальные значения K равны единице (как бы статическая передача сигнала) и соответствуют частотам $s = 0, \pi, 2\pi, \dots$

Получим теперь выражение для

$$K[\tilde{v}_2, \tilde{p}^*] = \tilde{v}_2 / \tilde{p}^*,$$

характеризующее отношение скорости потока на выходе из трубы $\tilde{v}_2 = \tilde{v}(1)$ к возмущению давления $\tilde{p}^*$ перед входом в трубу. При этом, как и в предыдущем случае, будем считать, что на концах трубы имеются сопротивление и проводимость, равные $z_1 = \tilde{\psi}_1 M$, $z_2^* = 1/(\tilde{\psi}_2 M)$. Воспользуемся уравнением (10.19). После преобразований получаем

$$K[\tilde{v}_2, \tilde{p}^*] = \frac{z_2^*}{(1 + z_1 z_2^*) \cos s + i(z_1 + z_2^*) \sin s}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика для этого случая приведена на рис. 10.5. Максимальные значения $K = 1/M(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)$ соответствуют частотам $s = 0, \pi, 2\pi, \dots$, т. е. частотам собственных колебаний столба жидкости в трубе, оба конца которой открыты.

Рассмотрим теперь, как будет изменяться давление на выходе из трубы $\tilde{p}_2 = \tilde{p}(1)$ в зависимости от возмущения скорости

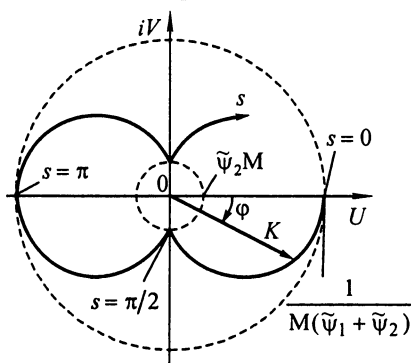


Рис. 10.5

потока на этом же ее конце, вызванного перемещением перфорированного поршня (см. рис. 8.15). В этом случае

$$\tilde{v}(1) = \tilde{v}_n + z_2^* \tilde{p}(1), \quad (10.20)$$

где $\tilde{v}_n$ — безразмерная скорость движения поршня.

Подставляя $\tilde{v}(1)$ из (10.20) в уравнения (10.17) и принимая на левом конце трубы $\tilde{p}(0) = z_1 \tilde{v}(0)$, получаем

комплексное передаточное число, выражающее зависимость давления на выходе из трубы от скорости движения поршня:

$$K[\tilde{p}_2, \tilde{v}_n] = \frac{z_1 \cos s - i \sin s}{(1 - z_1 z_2^*) \cos s + i(z_2^* - z_1) \sin s}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика $K[\tilde{p}_2, \tilde{v}_n]$ при $z_2^* = 0$ (закрытый конец) $z_1 = \tilde{\psi}_1 M$ представляет собой накладываю-

щиеся одна на другую кривые (рис. 10.6). Координаты характерных точек A_1 и A_2 и частоты, соответствующие этим точкам, имеют следующие значения:

$$A_1(-\tilde{\psi}_1 M, i0), \quad s_1 = \frac{n_1 \pi}{2} \quad (n_1 = 0, 2, 4, \dots);$$

$$A_2(-\frac{1}{\tilde{\psi}_1 M}, i0), \quad s_2 = \frac{n_2 \pi}{2} \quad (n_2 = 1, 3, 5, \dots).$$

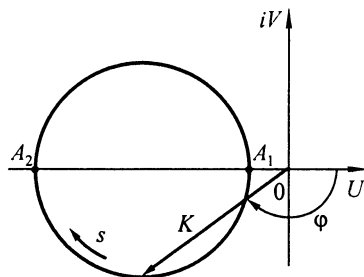


Рис. 10.6

Резонансные колебания возникают на частотах s_2 , равных частотам собственных колебаний столба жидкости в трубопроводе с одним «закрытым» концом. Максимальная амплитуда вынужденных колебаний, отнесенная к амплитуде скорости механических колебаний поршня v_n ,

$$A(\tilde{p}_2, \tilde{v}_n) = \frac{1}{\tilde{\psi}_1 M};$$

при этом опережение по фазе $\varphi = -\pi$.

10.5. Вынужденные колебания, вызванные заданным движением некоторых поперечных сечений

Выше предполагалось, что вынужденные колебания вызываются заданными силами, изменяющимися со временем. На практике встречаются также случаи, когда колебания вызываются заданным движением определенных точек оси стержня или заданным вращением поперечных сечений вала. Таким воздействиям подвергаются упругие тела, транспортируемые по железным дорогам, на кораблях или автомобилях, а также закрепленные на корпусе, движение которого известно.

Представим движение упругого тела состоящим из переносного движения опор $v_e(t)$ вместе с корпусом или экипажем, которое для простоты будем считать поступательным, и относительного движения на опорах, заданного в виде ряда по собственным функциям $r_n(x)$:

$$v(x, t) = v_e(t) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(x) q_n(t). \quad (10.21)$$

Для составления уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода. Рассмотрим одномерную задачу о поперечных колебаниях стержня. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [\dot{v}(x, t)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [\dot{v}_e(t) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(x) \dot{q}_n(t)]^2 dx.$$

С учетом свойств ортогональности функций $r_n(x)$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [\dot{v}_e^2(t) + 2\dot{v}_e(t) \sum_{n=1}^{\infty} r_n(x) \dot{q}_n(t)] dx + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_{nn} \dot{q}_n^2.$$

Потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_{nn} \omega_n^2 q_n^2.$$

Внешних сил здесь нет, поэтому обобщенные силы $Q_n = 0$.

Дифференциальное уравнение относительного движения имеет вид

$$m_{nn} (\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = -\ddot{v}_e \int_0^l \rho A r_n(x) dx. \quad (10.22)$$

Роль возбудителя колебаний здесь выполняет ускорение $\ddot{v}_e$ переносного движения. Для однородного шарнирно опертого стержня

$$r_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l},$$

и правая часть дифференциального уравнения (10.22) равна $-\ddot{v}_e \rho A (2l/n\pi)$ ($n=1, 3, 5, \dots$).

Если опоры совершают колебания с разными амплитудами, но с одной частотой, так что выражение (10.21) можно представить в виде

$$v(x, t) = v_A(t)(1 + \psi x) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(x) q_n(t), \quad (10.23)$$

где $\psi = \text{const}$, то кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (1 + \psi x)^2 dx \dot{v}_A^2(t) + \dot{v}_A(t) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \rho A r_n(x) (1 + \psi x) dx \dot{q}_n(t) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_{nn} \dot{q}_n^2(t).$$

Правая часть дифференциального уравнения (10.22) в этом случае равна

$$- \ddot{v}_A(t) \int_0^l \rho A r_n(x) (1 + \psi x) dx.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l^2}{n\pi} (-1)^n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

для однородного шарнирно опертого стержня имеем

$$\int_0^l r_n(x) (1 + \psi x) dx = \frac{l}{n\pi} [1 + (1 + \psi l)(-1)^{n-1}].$$

В окончательном виде правая часть дифференциального уравнения (10.22) будет такой:

$$- \ddot{v}_A(t) \rho A \frac{l}{n\pi} [1 + (1 + \psi l)(-1)^{n-1}] \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Приняв $v_e(t) = v_0 \cos pt$ и $v_A(t) = v_0 \cos pt$, представим уравнение (10.22) в виде

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = v_0 p^2 a_n \cos pt,$$

где в случае (10.21)

$$a_n = \frac{1}{m_{nn}} \rho A \frac{2l}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

а в случае (10.23)

$$a_n = \frac{1}{m_{nn}} \rho A \frac{l}{n\pi} [1 + (1 + \psi l)(-1)^{n-1}] \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Обозначив $z_n = p/\omega_n$, получим

$$q_n = \frac{z_n^2}{1 - z_n^2} v_0 a_n \cos pt.$$

Таким образом, установившиеся вынужденные колебания упругого стержня, когда его опоры совершают одинаковые по частоте колебания, описываются уравнением

$$v(x, t) = v_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z_n^2}{1 - z_n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \cos pt.$$

При транспортировке упругого тела возникает необходимость рассчитать его на прочность. Для этого, прежде всего, нужно определить реакции опор. Поперечную нагрузку, кроме веса, составляют силы инерции, вызванные колебаниями. Для стержня в произвольном поперечном сечении, расположенном на расстоянии x от начала координат (рис. 10.7), динамическая нагрузка на единицу длины при $v_e(t) = v_0 \cos pt$ и $v(x, t)$ вида (10.21) равна

$$F(x, t) = -\rho A \ddot{v}(x, t) = \rho A_0 v_0 p^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z_n^2}{1 - z_n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \cos pt.$$

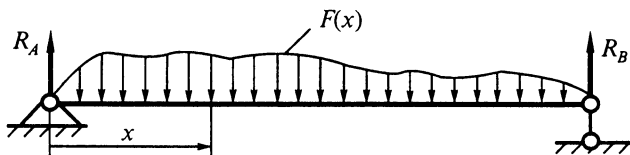


Рис. 10.7

Из условий равновесия стержня находим

$$R_B(t) = \frac{1}{l} \int_0^l F(x, t) x dx, \quad R_A(t) = \int_0^l F(x, t) dx - R_B(t).$$

10.6. Вынужденные колебания стержня на упругом основании

Допустим, что стержень с шарнирно опертыми концами лежит на сплошном упругом основании, жесткость которого определяется *коэффициентом постели* c (рис. 10.8). Если массой

основания можно пренебречь, то колебания такого стержня легко исследовать, применив рассмотренный выше метод.

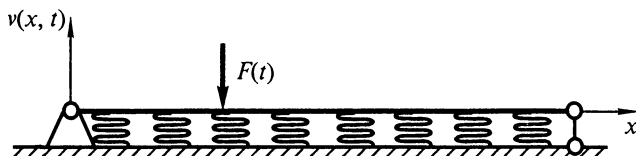


Рис. 10.8

В данном случае дифференциальное уравнение свободных колебаний будет иметь вид

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + cv = 0.$$

От уравнения (8.16) оно отличается дополнительным слагаемым cv , обусловленным наличием упругой постели.

Разделение переменных приводит к уравнениям, аналогичным (8.35) и (8.36):

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0; \quad \frac{d^4 r}{dx^4} - k^4 r = 0,$$

где $k^4 = \omega^2 \rho A / (EJ) - c / (EJ)$.

Тогда

$$\omega^2 = k^4 \frac{EJ}{\rho A} + \frac{c}{\rho A}.$$

Для стержня с шарнирно опертыми концами получаем

$$\omega_n^2 = \frac{EJ}{\rho A} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \left[n^4 + \frac{c}{EJ} \left(\frac{l}{\pi} \right)^4 \right].$$

Как и следовало ожидать, упругая постель дает дополнительную жесткость и поэтому повышает частоту свободных колебаний стержня.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид

$$m_{nn}(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = Q_n.$$

Дальнейшее решение задачи о вынужденных колебаниях аналогично рассмотренному в § 10.3.

10.7. Переходная функция.

Общее решение задачи о вынужденных колебаниях

Переходная функция упругой системы характеризует колебания, вызванные сосредоточенной единичной ступенчатой силой, приложенной в заданной точке системы в тот момент, когда последняя находилась в покое.

Пусть эта переходная функция для одномерной упругой системы будет определена как $U(\xi, x, t)$, где ξ — координата приложения единичной ступенчатой силы $\Gamma(t) = 1(t)$. Если ее разложение в ряд по собственным функциям $r_n(x)$ имеет вид

$$U(\xi, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) r_n(x),$$

то q_n есть решение уравнения

$$m_{nn}(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = 1(t) r_n(\xi)$$

при следующих начальных условиях:

$$q_n(0) = 0; \quad \dot{q}_n(0) = 0.$$

Этим решением будет

$$q_n(t) = \frac{k(\xi)}{m_{nn} \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t).$$

Отсюда передаточная функция

$$U(\xi, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(\xi) r_n(x)}{m_{nn} \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t).$$

Рассмотрим линейную систему, которая находится в состоянии равновесия при $t = 0$. Пусть в этот момент система получает от силы единичный импульс. Согласно теореме об изменении количества движения, влияние этого единичного импульса сказывается в придании системе единичной начальной скорости

$$\dot{U}(\xi, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(\xi) r_n(x)}{m_{nn} \omega_n} \sin \omega_n t.$$

Представляя единичную ступенчатую силу в виде непрерывной серии единичных импульсов $1 \cdot d\tau$, приложенных к системе последовательно в интервале $0 \leq \tau \leq t$, в соответствии с принци-

пом суперпозиции состояние системы в момент времени t можно определить суммой перемещений, создаваемых каждым импульсом отдельно. Отсюда, если первоначально система находится в покое, а затем приводится в движение единичной ступенчатой силой $1(t) = \text{const}$, приложенной в точке с координатой $x = \xi$, ее движение определяется выражением

$$v(\xi, x, t) = \int_0^t \dot{U}(\xi, x, \tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(\xi)r_n(x)}{m_{nn}\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t - \tau) d\tau.$$

Уравнение действительных колебаний системы, находящейся в покое, от внезапно приложенной силы $F(t)$ в точке с координатой $x = \xi$ в силу линейности системы будет иметь вид

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(\xi)r_n(x)}{m_{nn}\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau.$$

Если мы имеем дело с распределенной нагрузкой, действующей по закону $p(\xi, t)$, то движение системы выражается следующим уравнением:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{m_{nn}\omega_n} \int_0^t \int_0^l p(\xi, \tau) r_n(\xi) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau d\xi,$$

которое является общим решением задачи о вынужденных колебаниях упругих одномерных тел, первоначально находящихся в покое.

Глава 11

КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

11.1. Распространение волн

Понятие о собственных формах колебаний теряет свой физический смысл, когда мы имеем дело с упругим телом бесконечных или полубесконечных размеров не только потому, что собственные частоты уже более неопределимы, но и в связи с тем, что колебания, представляемые собственными функциями, не могут существовать без ввода неограниченного количества энергии. Например, продольные колебания, определяемые выражением

$$u(x, t) = C \sin kx \cos(\omega t - \alpha),$$

где $C > 0$; $k = \omega \sqrt{\rho/E}$, математически возможны для стержня неограниченной длины с постоянным поперечным сечением. Но такие колебания не имеют физического смысла, так как полная энергия при этом должна быть равна

$$T + \Pi = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{\infty} C^2 \omega^2 \sin^2 kx dx = \infty.$$

Здесь более реальна следующая физическая задача. Неограниченная упругая среда первоначально находится в покое. Конечное возмущение создается в некоторой части среды. Требуется определить, каково будет движение среды без разложения его уравнения в бесконечный ряд.

Рассмотрим для примера продольные колебания стержня с постоянным поперечным сечением, поведение которого определяется одномерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (11.1)$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в материале стержня.

Общее решение уравнения (11.1) будем искать в форме Даламбера:

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \quad (11.2)$$

где φ , ψ — две произвольные дважды дифференцируемые функции.

Так как x и t входят в аргумент функций φ и ψ , это показывает, что здесь имеет место распространение волн. Поясним это.

Предположим, что наблюдатель, выйдя в начальный момент времени t_0 из точки $x = A$ стержня, передвигается в положительном направлении оси Ox со скоростью a , т. е. его абсцисса изменяется согласно формуле $x = A + at$, или $x - at = A$. Явление, определяемое функцией $u = \varphi(x - at)$, называется *распространением прямой волны* со скоростью a (в данном случае со скоростью распространения упругой волны, т. е. скоростью звука a). Точно также слагаемое $\psi(x + at)$ определяет *распространение обратной волны*, поскольку абсцисса наблюдателя $x = A - at$ соответствует равенству $x + at = A$.

Скорости распространения волн в прямом и обратном направлениях одинаковы, в одинаковые промежутки времени волны проходят равные расстояния в противоположных направлениях.

Для определения произвольных функций φ и ψ воспользуемся начальными условиями, которыми должно быть задано состояние стержня в начальный момент времени $t = 0$, т. е. положение точек стержня и их скорость при $t = 0$ как функции от x .

Предположим, что имеется очень длинный стержень протяженностью от $x = A < 0$ до $x = B > 0$. Малое внешнее возбуждение прикладывается к стержню в точке $x = 0$ при $t = 0$. Пусть это возмущение U имеет форму начального перемещения, которое задано на малом интервале, содержащем точку $x = 0$. В связи с этим начальные условия будут иметь вид

$$u(x, 0) = U; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} \equiv 0, \quad (11.3)$$

где U — начальное возмущение.

Применив эти условия к решению (11.2), получим

$$\varphi(x) + \psi(x) = U;$$

$$-\dot{\varphi}(x) + \dot{\psi}(x) = 0.$$

Интегрируя последнее равенство, находим

$$-\varphi(x) + \psi(x) = C.$$

Не ограничивая общности, можно считать $C = 0$. Тогда

$$\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{2}U.$$

Окончательно решение (11.2) представим в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2}U(x - at) + \frac{1}{2}U(x + at). \quad (11.4)$$

Следовательно, внесенное возмущение разобьется на две одинаковые волны и будет распространяться в противоположные стороны с постоянной скоростью a . Если стержень простирается неограниченно в обе стороны, то решение (11.4) справедливо для всех значений t . Если же стержень ограничен в конечной точке или точках, то решение (11.4) будет справедливым в интервале времени $0 \leq t \leq t_1$, где t_1 — время, необходимое для достижения возмущением одного или обоих концов стержня. В соответствии с решением (11.4), пока возмущение не достигнет конца, элемент массы на этом конце имеет нулевое перемещение и нулевую скорость, что в совокупности удовлетворяет любому однородному граничному условию.

Пусть теперь возмущением будет не перемещение, а скорость. Тогда вместо (11.3) имеем

$$u(x, 0) = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = V.$$

Решение будет по-прежнему иметь вид (11.4), но по стержню со скоростью звука будет перемещаться в обоих направлениях амплитуда скорости $(1/2)V$.

Если стержень имеет ограниченную длину, то возмущенная волна будет отражаться после достижения его конца. Спустя со-

ответствующий промежуток времени отраженная и падающая волны будут существовать в стержне одновременно, поскольку волна имеет некоторую протяженность. Несколько позже, как только произойдет отражение всей падающей волны, останется только отраженная волна. Характер процесса отражения зависит от граничных условий. Так, на закрепленном конце стержня

$$u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = 0,$$

на свободном конце

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\text{пад}} = 0.$$

Если в реальной системе на конце стержня имеется рассеяние энергии, то отраженная волна будет иметь меньшую амплитуду. В случае, когда рассеяние энергии происходит в материале стержня, уменьшение энергии волны будет и при движении по стержню.

11.2. Распространение волн в потоке жидкости

Формы собственных колебаний потока жидкости в трубе $\tilde{v}_n(\xi)$ и $\tilde{p}_n(\xi)$ (см. рис. 8.17) являются стоячими волнами, поскольку они характеризуют распределение амплитуд колебаний скорости и давления по длине трубы, и независимо от времени это распределение остается постоянным.

Можно искать решение в форме Даламбера (11.2), и тогда движение представляет собой бегущие волны, функции которых зависят и от координаты x и времени t . В задаче о распространении волн в потоке жидкости рассматривают движение по трубе акустических импульсов $\tilde{u}_1(\xi, \tau)$ и $\tilde{u}_2(\xi, \tau)$, представляемых полусуммой и полуразностью скорости $\tilde{v}(\xi, \tau)$ и давления $\tilde{p}(\xi, \tau)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\xi, \tau) &= \frac{1}{2}[\tilde{v}(\xi, \tau) + \tilde{p}(\xi, \tau)]; \\ \tilde{u}_2(\xi, \tau) &= \frac{1}{2}[\tilde{v}(\xi, \tau) - \tilde{p}(\xi, \tau)]. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Выразим из этих равенств $\tilde{v} = \tilde{v}(\xi, \tau)$ и $\tilde{p} = \tilde{p}(\xi, \tau)$ через акустические импульсы:

$$\tilde{v} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2, \quad \tilde{p} = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \quad (11.6)$$

(для компактности записи аргументы у функций опущены) и подставим их в уравнения (8.11):

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)}{\partial\tau} + M \frac{\partial(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)}{\partial\xi} + \frac{\partial(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{\partial\xi} &= 0; \\ \frac{\partial(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{\partial\tau} + M \frac{\partial(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{\partial\xi} + \frac{\partial(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)}{\partial\xi} &= 0.\end{aligned}\tag{11.7}$$

Взяв сумму и разность этих уравнений, вместо (11.7) имеем следующие два уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tau} + (1 + M) \frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\xi} &= 0; \\ \frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tau} - (1 - M) \frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\xi} &= 0.\end{aligned}\tag{11.8}$$

Каждое уравнение (11.8) интегрируем отдельно. Применяя метод Даламбера, представим решение первого уравнения в виде

$$\tilde{u}_1 = F_1[\xi - (1 + M)\tau],$$

где F_1 — произвольная дифференцируемая функция.

При выполнении условия для моментов времени τ и координаты ξ

$$\xi - (1 + M)\tau = \xi_1 = \text{const}$$

функция $\tilde{u}_1$ будет равна $F_1(\xi_1)$ и ее можно представить как мгновенную фотографию волны. Рассмотрим движение «гребня» этой волны.

Если в момент $\tau = 0$ «гребень» имел координату ξ_1 , то соответствующее ему сечение (в котором F_1 достигает максимума) будет перемещаться по закону

$$\tilde{u}_1 = F_1[\xi_1 + (1 + M)\tau].$$

Следовательно, найденное решение для $\tilde{u}_1$ описывает движение волны в положительном направлении оси ξ со скоростью $(1 + M)$, равной сумме скоростей звука и потока.

Рассуждая аналогично, для функции $\tilde{u}_2$ находим

$$\tilde{u}_2 = F_2[\xi_2 + (1 - M)\tau].$$

Решение для $\tilde{u}_2$ характеризует движение волны в отрицательном направлении оси ξ со скоростью $(1-M)$, равной скорости звука минус скорость потока.

Таким образом, акустические импульсы движутся в направлении движения потока со скоростью звука плюс скорость потока, а в противоположном направлении со скоростью звука

минус скорость потока. При движении вдоль оси ξ амплитуда (высота гребня) бегущих волн остается постоянной. Для иллюстрации сказанного на рис. 11.1 и 11.2 показаны стоячие $(\tilde{v}, \tilde{p})$ и бегущие $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ волны в разные моменты времени τ .

Определим граничные условия для функций $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$. На открытом конце трубы $\tilde{p}=0$, следовательно, на основании (11.6) имеем

$$\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 = 0, \text{ или } \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2.$$

На закрытом конце трубы $\tilde{v}=0$, и, согласно (11.6), получаем

$$\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = 0 \text{ или } \tilde{u}_1 = -\tilde{u}_2.$$

Бегущая волна от открытого конца трубы «отражается» для движения в обратном направлении с тем же знаком, т. е. $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$, а от закрытого — с обратным знаком, т. е. $\tilde{u}_1 = -\tilde{u}_2$. Если на конце трубы имеется «активное» сопротивление с коэффициентом $M\tilde{\psi}_2$, то на этом конце $\tilde{p}_2 = \tilde{\psi}_2 M\tilde{v}_2$. Из равенства (11.5) находим

$$\tilde{u}_2 = \frac{1 - \tilde{\psi}_2 M}{1 + \tilde{\psi}_2 M} \tilde{u}_1. \quad (11.9)$$

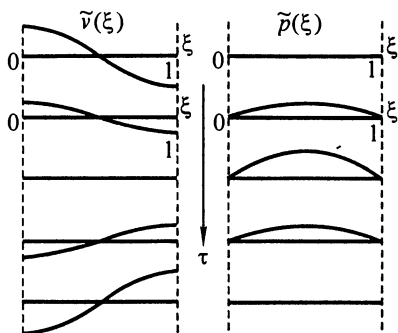


Рис. 11.1

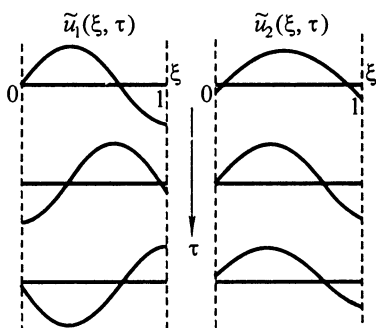


Рис. 11.2

При наличии сопротивления закон отражения волн характеризуется формулой (11.9). Из формулы следует, что при $\tilde{\psi}_2 M < 1$ волна отражается от открытого конца, а при $\tilde{\psi}_2 M > 1$ — от закрытого конца трубы. Большое сопротивление как бы закрывает трубу.

Интенсивность отраженной волны при наличии сопротивления $\tilde{\psi}_2 M < 1$ уменьшается, затухание колебаний увеличивается с возрастанием $\tilde{\psi}_2 M$. Когда $\tilde{\psi}_2 M = 1$, акустическая волна не отражается и система не имеет собственной частоты.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	6
 Часть I. СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	
Глава 1. Линейные системы	10
1.1. Дифференциальные уравнения колебаний линейной системы с одной степенью свободы	10
1.1.1. Основные положения	10
1.1.2. Примеры составления дифференциальных уравнений	15
1.1.3. Дифференциальное уравнение малых колебаний в общем случае	18
1.2. Свободные движения	25
1.2.1. Свободные колебания консервативной системы	25
1.2.2. Свободные движения неконсервативной системы	29
1.3. Вынужденные колебания при гармоническом возбуждении	36
1.3.1. Способы возбуждения колебаний. Определение обобщенной силы $Q(t)$	37
1.3.2. Вынужденные колебания при отсутствии вязкого сопротивления	39
1.3.3. Вынужденные колебания при наличии линейного вязкого сопротивления	45
1.3.4. Переходные процессы	52
1.4. Вынужденные колебания в случае периодической возмущающей силы	52
1.5. Вынужденные колебания при произвольном возбуждении	57
1.6. Основы теории регистрирующих приборов	60
1.7. Основы виброзащиты	64
Глава 2. Параметрические колебания	68
2.1. Особенности параметрических колебаний. Раскачивание качелей	68
2.2. Области параметрического резонанса	72
2.2.1. Параметрическое возбуждение колебаний по закону прямоугольного синуса	73
2.2.2. Гармоническое возбуждение параметрических колебаний	78
2.2.3. Приближенное определение границ областей неустойчивости	79
2.3. Примеры параметрических колебаний	82
2.3.1. Маятник с колеблющейся точкой подвеса	82
2.3.2. Шарнирно опертый стержень, сжатый продольной силой, изменяющейся во времени по периодическому закону	84
Глава 3. Нелинейные системы	86
3.1. Нелинейные системы с одной степенью свободы	86
3.1.1. Классификация нелинейных систем	86
3.1.2. Отображение движения на фазовой плоскости	89
3.2. Автономные консервативные системы	91
3.2.1. Системы с гладкими квазиупругими характеристиками	91
3.2.2. Системы с кусочно-линейными характеристиками	95

3.3. Автономные диссипативные системы.....	97
3.4. Неавтономные системы. Вынужденные колебания.....	101
Глава 4. Автоколебания.....	106
4.1. Маятник с «отрицательным» трением.....	106
4.2. Генератор электромагнитных колебаний.....	109
4.3. Общие сведения об автоколебаниях.....	116
4.4. Энергетические соотношения.....	117
4.5. Классический флаттер.....	119
4.6. Срывной флаттер.....	128
4.7. Примеры потенциально возможных автоколебательных систем.....	130
 Часть II. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ	
Глава 5. Дифференциальные уравнения колебаний линейной системы с конечным числом степеней свободы.....	135
5.1. Вывод уравнений малых колебаний системы с конечным числом степеней свободы.....	135
5.1.1. Квадратичные формы кинетической и потенциальной энергии и диссипативной функции Рэля.....	135
5.1.2. Устойчивость положения равновесия. Критерий Сильвестра.....	140
5.2. Примеры составления дифференциальных уравнений.....	142
Глава 6. Системы с двумя степенями свободы.....	147
6.1. Свободные колебания консервативной системы с двумя степенями свободы.....	147
6.1.1. Системы с инерционной и упругой связью.....	147
6.1.2. Парциальные системы и парциальные частоты.....	148
6.1.3. Частотное уравнение.....	149
6.1.4. Исследование корней частотного уравнения.....	150
6.1.5. Коэффициенты распределения амплитуд. Главные колебания.....	151
6.1.6. Нормальные (главные) координаты.....	156
6.2. Вынужденные колебания линейной системы с двумя степенями свободы при гармоническом возбуждении.....	157
6.2.1. Вынужденные колебания системы при отсутствии сил вязкого сопротивления.....	157
6.2.2. Динамический гаситель колебаний.....	160
6.2.3. Влияние сил вязкого сопротивления на настройку динамического гасителя колебаний.....	161
Глава 7. Системы с конечным числом степеней свободы.....	165
7.1. Матричная форма дифференциальных уравнений движения.....	165
7.2. Определение собственных характеристик системы.....	166
7.3. Свойства собственных частот и форм колебаний.....	168
7.4. Свободные колебания консервативных систем.....	169
7.5. Нормальные (главные) колебания.....	170
7.6. Решение общей задачи.....	171
 Часть III. СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	
Глава 8. Свободные колебания.....	177
8.1. Предварительные замечания.....	177
8.2. Дифференциальные уравнения свободных колебаний.....	179
8.2.1. Общие положения.....	179

8.2.2. Продольные колебания тонкого прямого стержня, крутильные колебания прямого вала с круговым поперечным сечением, поперечные колебания растянутой нити	181
8.2.3. Колебания сжимаемой жидкости в длинной прямой трубе	185
8.2.4. Поперечные колебания тонкого прямого стержня	187
8.2.5. Колебания растянутых упругих мембран и тонких пластин	191
8.3. Разделение переменных. Приведение к задаче о собственных значениях	192
8.4. Собственные частоты и формы колебаний	196
8.4.1. Продольные колебания тонкого прямого стержня	196
8.4.2. Крутильные колебания прямого вала с круговым поперечным сечением	199
8.4.3. Поперечные колебания растянутой нити	200
8.4.4. Поперечные колебания тонкого прямого стержня	200
8.4.5. Колебания растянутой мембраны	206
8.4.6. Колебания потока сжимаемой жидкости в прямой трубе	208
8.5. Ортогональные свойства главных форм колебаний	214
Глава 9. Приближенные методы	225
9.1. Метод Рэлея	225
9.2. Метод Рэлея—Ритца	229
9.3. Метод Бубнова—Галеркина	233
9.4. Метод начальных параметров	236
9.5. Влияние связей на собственные частоты	239
Глава 10. Вынужденные колебания	241
10.1. Постановка задачи	241
10.2. Обобщенные силы	243
10.3. Вынужденные поперечные колебания шарнирно опертого стержня при различных способах возбуждения	247
10.3.1. Сосредоточенная сила, приложенная к заданной точке	247
10.3.2. Распределенная внешняя сила	249
10.3.3. Подвижная нагрузка	249
10.4. Вынужденные колебания потока жидкости в трубе	252
10.5. Вынужденные колебания, вызванные заданным движением некоторых поперечных сечений	255
10.6. Вынужденные колебания стержня на упругом основании	258
10.7. Переходная функция. Общее решение задачи о вынужденных колебаниях	260
Глава 11. Колебания бесконечных и полубесконечных упругих систем. Распространение волн	262
11.1. Распространение волн	262
11.2. Распространение волн в потоке жидкости	265

Учебное издание

**Ильин Михаил Михайлович
Колесников Константин Сергеевич
Саратов Юрий Сергеевич**

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Редактор *Е.Н. Ставицкая*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *О.В. Калашникова*
Компьютерная верстка *Д.Е. Холодовой*

Подписано к печати 29.11.2002. Формат 60х90/16. Печать офсетная
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 17,25
Тираж 3000 экз. Заказ № 181

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5

Отпечатано с оригинал-макета во ФГУП ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ISBN 5 - 7038 - 1371 - 9



9 785703 813713