СЕРИЯ

МЕХАНИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МЕХАНИКА МАШИН

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МЕХАНИКА МАШИН

Под редакцией
академика К. В. Фролова

Издание второе, переработанное и дополненное

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших технических учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

УДК 621.01
ББК 34.41
Т33

К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов, Д. М. Лукичев, В. А. Никоноров, Г. А. Тимофеев, А. В. Пуш

Рецензент — д-р техн. наук, проф. С. А. Мачихин (Московский государственный университет пищевых производств)

Т33 **Теория** механизмов и механика машин: Учеб. для втузов/ К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.; Под ред. К. В. Фролова.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Высш. шк., 1998.— 496 с.: ил.

ISBN 5-06-003118-7

Учебник состоит из двух разделов, которым предшествует гл. 1, посвященная проблемам, стоящим перед данной наукой; в первом разделе изложены общие методы определения кинематических и динамических характеристик механизмов, машин и систем машин, расчет механизмов с учетом упругости звеньев, трения и изнашивания кинематических пар, виброактивность и виброзащита; во втором разделе — методы проектирования схем основных видов механизмов, управление движением системы механизмов. Изложение дано на основе аналитических, с использованием ЭВМ, графических и графоаналитических методов определения параметров механизмов.

Второе издание (1-е — 1987 г.) переработано и дополнено с учетом новых программ для подготовки бакалавров, специалистов и магистров.

Учебное издание

Константин Васильевич Фролов,
Сергей Александрович Попов,
Александр Константинович Мусатов,
Василий Александрович Никоноров,
Геннадий Алексеевич Тимофеев,
Александр Валентинович Пуш

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МЕХАНИКА МАШИН

Редактор *И. Г. Волкова.* Художественный редактор *Ю. Э. Иванова.* Технический редактор *В. М. Романова.* Корректоры *В. А. Жилкина, Г. Н. Петрова.* Компьютерная верстка *В. М. Романова*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ОТМ-816. Сдано в набор 17.01.97. Подп. в печать. 28.11.97. Формат $60 \times 88^1/_{16}$. Бум. газетн. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Объем 30,38 усл. печ. л. 30,38 усл. кр.-отт. 29,59 уч.-изд. л.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 462

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.
Набрано на персональных компьютерах [redacted]

Отпечатано [redacted] 101[redacted]охлёжский пер., 7.

ISBN 5-06-003118-7

К[redacted]в авторов, 1998

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изложенный в учебнике курс теории механизмов и машин сформировался на основе опыта преподавания дисциплины в МГТУ им. Н. Э. Баумана в течение многих десятилетий; в нем учтены качественные изменения в инженерном образовании в период научно-технической революции, потребовавшие серьезной переработки традиционного курса как по содержанию, так и по методике преподавания.

Учебная дисциплина «Теория механизмов и машин» базируется на механико-математической подготовке студентов, обеспечиваемой предшествующими курсами: «Высшая математика», «Физика», «Теоретическая механика», «Алгоритмические языки и программирование».

Являясь научной основой специальных курсов по проектированию машин отраслевого назначения, она решает следующие задачи:

учит студентов общим методам исследования и проектирования механизмов машин и приборов;

учит студентов понимать общие принципы реализации движения с помощью механизмов, взаимодействие механизмов и машин, обусловливающее кинематические и динамические свойства механической системы;

учит студентов системному подходу к проектированию машин и механизмов, нахождению оптимальных параметров механизмов по заданным условиям работы;

прививает навыки разработки алгоритмов и программ расчета параметров на ЭВМ, выполнения конкретных расчетов;

прививает навыки использования измерительной аппаратуры для определения кинематических и динамических параметров и механизмов.

Учебник написан сотрудниками кафедры «Теория механизмов и машин» МГТУ им. Н. Э. Баумана под руководством и общей редакцией академика К. В. Фролова.

Авторы выражают благодарность всему коллективу кафедры «Теория механизмов и машин» МГТУ им. Н. Э. Баумана за помощь и полезные советы, а также рецензенту — д-ру техн. наук, проф. С. А. Мачихину — за критические замечания, сделанные при просмотре рукописи и позволившие улучшить содержание книги.

Гл. 1, 11 и введение написаны К. В. Фроловым, гл. 2 — К. В.

Фроловым, А. В. Пущем и Г. А. Тимофеевым совместно; гл. 3, 4, 9, 13, 17, 18, 20, § 8.1 и 15.1 — С. А. Поповым; гл. 5, 6, 7, 10, 14, § 8.2 — 8.4 — А. К. Мусатовым; гл. 12 — Г. А. Тимофеевым и Д. М. Лукичевым совместно, § 16.1 — 16.4 — В. А. Никоноровым; гл. 19, § 15.2 и 16.5 — Г. А. Тимофеевым.

Отзывы и замечания просим направлять по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Создание новых машин, приборов, установок, автоматических устройств и комплексов, отвечающих современным требованиям эффективности, точности, надежности и экономичности, основано на достижениях фундаментальных и прикладных наук.

Теория механизмов и машин — наука, изучающая общие методы структурного и динамического анализа и синтеза различных механизмов, механику машин. Важно подчеркнуть, что излагаемые в теории механизмов и машин методы пригодны для проектирования любого механизма и не зависят от его технического назначения, а также физической природы рабочего процесса машины.

Курс теории механизмов и машин по существу является вводным в специальность будущего инженера и поэтому имеет инженерную направленность, в нем широко используется современный математический аппарат и изучаются практические приемы решения задач анализа и синтеза механизмов — аналитические с применением ЭВМ, графические и графоаналитические.

М а ш и н а — устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека. В процессе обработки в технологических машинах (металлообрабатывающие станки и комплексы, кузнечно-прессовое оборудование, прокатные станы, литейное оборудование и т. п.) изменяются форма, размеры, свойства, состояние исходных материалов и заготовок. С помощью транспортных машин и устройств происходит перемещение грузов, инструментов, людей и других объектов в пространстве с требуемой скоростью. С помощью энергетических машин преобразуется энергия. В информационных машинах происходит преобразование вводимой информации для контроля, регулирования и управления движением.

Машина осуществляет свой рабочий процесс посредством выполнения закономерных механических движений. Носителем этих движений является механизм. Следовательно, м е х а н и з м — система твердых тел, подвижно связанных путем соприкосновения и движущихся определенным, требуемым образом относительно одного из них, принятого за неподвижное. Очень многие механизмы выполняют функцию преобразования механического движения твердых тел.

Краткий исторический очерк. Простейшие механизмы (рычажные, зубчатые и др.) были известны с давних времен; постепенно шел процесс их исследования, совершенствования и внедрения

в практику с целью облегчения труда человека, повышения производительности труда.

Так, известно, что выдающийся деятель культуры эпохи Возрождения и ученый Леонардо да Винчи (1452—1519) разработал проекты конструкций механизмов ткацких станков, печатных и деревообрабатывающих машин, им сделана попытка экспериментальным путем определить коэффициент трения. Итальянский врач и математик Д. Кардан (1501—1576) изучал движение механизмов часов и мельниц. Французские ученые Г. Амонтон (1663—1705) и Ш. Кулон (1736—1806) первыми предложили формулы для определения силы трения покоя и скольжения.

Выдающийся математик и механик Л. Эйлер (1707—1783), швейцарец по происхождению, тридцать лет жил и работал в России, профессор, а затем действительный член Петербургской Академии наук, автор 850 научных трудов, решил ряд задач по кинематике и динамике твердого тела, исследовал колебания и устойчивость упругих тел, занимался вопросами практической механики, исследовал, в частности, различные профили зубьев зубчатых колес и пришел к выводу о том, что наиболее перспективный профиль — эвольвентный.

Знаменитый русский механик и изобретатель И. И. Ползунов (1728—1766) впервые разработал проект механизма двухцилиндрового парового двигателя (осуществить который ему, к сожалению, не удалось), сконструировал автоматический регулятор питания котла водой, устройство для подачи воды и пара и другие механизмы. Выдающийся механик И. И. Кулибин (1735—1818) создал знаменитые часы в форме яйца, представляющие собой сложнейший по тем временам механизм автоматического действия.

В связи с развитием машиностроения как отрасли промышленности появилась потребность в разработке общих научных методов исследования и проектирования механизмов, входящих в состав машин. Эти методы способствовали созданию наиболее совершенных для своего времени машин, выполняющих наилучшим образом определенные требуемые функции. Известно, что машиностроение как отрасль промышленности начала складываться еще в XVIII в., а в XIX в. она стала быстро развиваться, особенно в Англии и США.

В России первые машиностроительные заводы появились в XVIII в.; в 1861 г. их было уже свыше 100, а в 1900 г.— примерно 1417. Однако в начале XX в. наше машиностроение отставало и по уровню развития и по масштабам производства, половину машин ввозили из-за границы. Лишь в 30 — 50-е годы в нашей стране было развито мощное машиностроение, успешно создающее различные машины и механизмы, не уступающие лучшим мировым образцам, а в ряде случаев превосходящие их.

Высокоразвитое отечественное машиностроение было одним из факторов, обеспечивших победу в Великой Отечественной войне.

Как наука теория механизмов и машин под названием «Прикладная механика» начала формироваться в начале XIX в., причем тогда разрабатывались в основном методы структурного, кинематического и динамического анализа механизмов. И лишь с середины XIX в. в теории механизмов и машин получают развитие общие методы синтеза механизмов. Так, знаменитый русский ученый, математик и механик, академик П. Л. Чебышев (1821 — 1894) опубликовал 15 работ по структуре и синтезу рычажных механизмов, при этом на основе разработанных методов он изобрел и построил свыше 40 различных новых механизмов, осуществляющих заданную траекторию, останов некоторых звеньев при движении других и т. д.; структурная формула плоских механизмов называется сейчас формулой Чебышева.

Немецкий ученый Ф. Грасгоф (1826 — 1893) дал математическую формулировку условия проворачиваемости звена плоского рычажного механизма, которое необходимо при его синтезе. Английские математики Д. Сильвестр (1814 — 1897) и С. Робертс (1827 — 1913) разработали теорию рычажных механизмов для преобразования кривых (пантографов).

И. А. Вышнеградский (1831—1895), известный как один из основоположников теории автоматического регулирования, сконструировал ряд машин и механизмов (автоматический пресс, подъемные машины, регулятор насоса) и, будучи профессором Петербургского технологического института, создал научную школу конструирования машин.

Методы синтеза зубчатых механизмов, широко применяемых в различных машинах, отличаются определенной сложностью. Многие ученые работали в этой области. Французский геометр Т. Оливье (1793 — 1858) обосновал метод синтеза сопряженных поверхностей в плоских и пространственных зацеплениях с помощью производящей поверхности. Английский ученый Р. Виллис (1800 — 1875) доказал основную теорему плоского зацепления и предложил аналитический метод исследования планетарных зубчатых механизмов. Немецкий машиновед Ф. Рело (1829 — 1905) разработал графический метод синтеза сопряженных профилей, известный в настоящее время как «метод нормалей». Рело также является автором работ по структуре (строению) и кинематике механизмов. Российский ученый Х. И. Гохман (1851 — 1916) одним из первых опубликовал работу по аналитической теории зацепления.

Значительный вклад в динамику машин внес своими трудами «отец русской авиации» Н. Е. Жуковский (1847 — 1921). Он был не только основоположником современной аэродинамики, но и автором ряда работ по прикладной механике и теории регулирования хода машин.

Развитию механики машин способствовали работы Н. П. Петрова (1836 — 1920), заложившего основы гидродинамической теории

смазки, В. П. Горячкина (1868 — 1935), разработавшего теоретические основы расчета и построения сельскохозяйственных машин, вся сложность расчета которых заключается в том, что их исполнительные механизмы должны воспроизводить движения руки человека.

Российский ученый Л. В. Ассур (1878 — 1920) открыл общую закономерность в структуре многозвенных плоских механизмов, применяемую и сейчас при их анализе и синтезе. Он же разработал метод «особых точек» для кинематического анализа сложных рычажных механизмов. А. П. Малышев (1879 — 1962) предложил теорию структурного анализа и синтеза применительно к сложным плоским и пространственным механизмам.

Существенный вклад в становление механики машин как цельной теории машиностроения внес И. И. Артоболевский (1905 — 1977). Он является организатором отечественной школы теории механизмов и машин; им написаны многочисленные труды по структуре, кинематике и синтезу механизмов, динамике машин и теории машин-автоматов, а также учебники, получившие всеобщее признание.

Ученики и последователи И. И. Артоболевского — А. П. Бессонов, Вяч. А. Зиновьев (1899 — 1975), Н. И. Левитский, Н. В. Умнов, С. А. Черкудинов и др.— своими работами в области динамики машин (в том числе акустической и неголономной), оптимизационного синтеза механизмов, теории машин-автоматов и в других областях теории механизмов и машин содействовали дальнейшему ее развитию.

В 30-е и последующие годы большой вклад в теорию механизмов и машин внесли своими исследованиями Н. Г. Бруевич (1896 — 1987), один из создателей теории точности механизмов, Г. Г. Баранов (1899 — 1968) автор трудов по кинематике пространственных механизмов, С. Н. Кожевников (1906—1988), разработавший общие методы динамического анализа механизмов с упругими звеньями и механизмов тяжелонагруженных машин.

Следует отметить труды ученых одной из старейших кафедр нашей страны — кафедры теории механизмов и машин МВТУ им. Н. Э. Баумана (с 1989 г.— Московский Государственный технический университет — МГТУ), где курс прикладной механики создал и начал впервые в 1872 г. читать Ф. Е. Орлов (1843 — 1892). В дальнейшем курс отрабатывался и углублялся как в методическом, так и теоретическом направлении: Д. С. Зернов (1860 — 1922) расширил теорию передач; Н. И. Мерцалов (1866 — 1948) дополнил кинематическое исследование плоских механизмов теорией пространственных механизмов и разработал простой и надежный метод расчета маховика; Л. П. Смирнов (1877 — 1954) привел в строгую единую систему графические методы исследования кинематики механизмов и динамики машин; В. А. Гавриленко (1899 — 1977) разработал геометрическую теорию зубчатых передач; Л. Н. Решетов развил теорию корригирования зубчатых передач, а также плане-

тарных и кулачковых механизмов и положил начало теории самоустанавливающихся механизмов.

В настоящее время коллектив кафедры работает над совершенствованием учебного курса теории механизмов и машин. Стремительное развитие новой техники поставило новые проблемы и перед высшим образованием. Поэтому в курс теории механизмов и машин введены разделы, посвященные изнашиванию, влиянию упругости звеньев на движение механизма, виброактивности и виброзащите, проектированию манипуляторов, управлению системой механизмов.

ГЛАВА 1
ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Как бы ни называли наш технический век — веком космоса или автоматики, атомным веком или веком электроники — *основой технического прогресса была и остается машина. Машиностроение — ведущая отрасль народного хозяйства*, производящая машины, механизмы и оборудование для ряда других отраслей, это их материально-техническая база. От уровня развития машиностроения, от степени совершенства машин в значительной степени зависят производительность общественного труда и благосостояние народа. Перед машиностроением стоят такие задачи, как освоение новых конструкций машин и механизмов, средств автоматизации, позволяющих использовать высокопроизводительные энерго- и материалосберегающие технологии, обеспечение необходимой надежности и долговечности машин и механизмов для различных отраслей народного хозяйства, повышение их экономичности и производительности.

Машина должна быть прочной, надежной в работе, высокопроизводительной, но вместе с тем и легкой, с минимальными материалоемкостью и энергозатратами, не должна загрязнять окружающую среду, должна соответствовать требованиям технической эстетики и эргономики. Чтобы успешно решать эти задачи, чтобы создавать машины, отвечающие современным требованиям, специалистам в области машиностроения *нужны знания основ ряда наук, в том числе теории механизмов и машин*.

Кинематическая схема механизма является «скелетом» реальной конструкции машины. Выбор и проектирование схемы механизма определяет первый и основной этап проектирования машины. Выбор размеров и материала деталей будущей машины определяет следующий этап проектирования конструкций. Проектирование завершается выбором методов и средств изготовления той или иной конструкции. Даже из этих простых рассуждений ясно, что два последних этапа проектирования базируются на первом, определяющем этапе. Поэтому трудно переоценить роль теорин механизмов и машин как теоретической основы проектирования машин.

Теория машин и механизмов в настоящем ее виде является комплексной наукой, в которой проблемы структуры, кинематики и динамики машин, их анализа и синтеза тесно переплетаются с проблемами оптимального проектирования и управления.

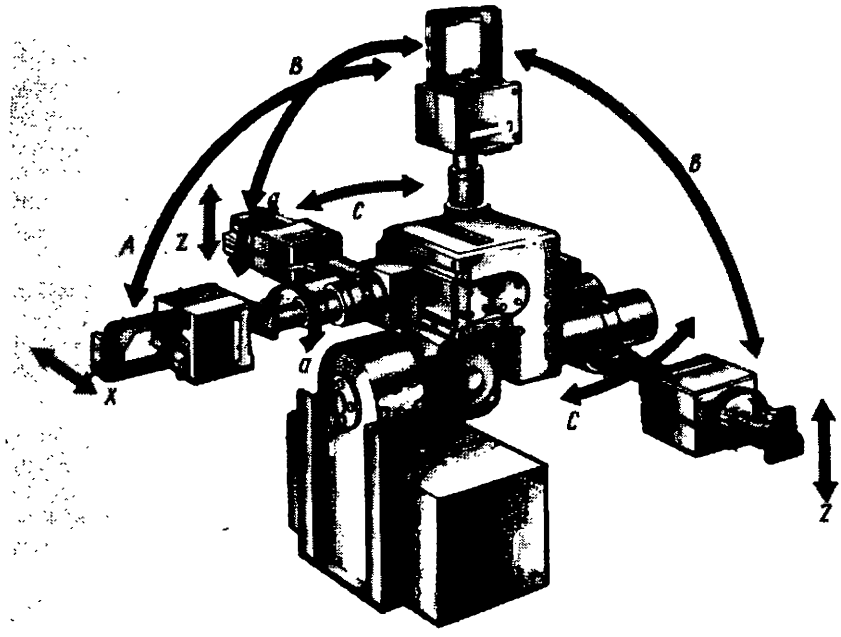


Рис. 1.1

Одним из основных направлений развития современной техники является *автоматизация всех видов производства.* Большой вклад в решение этой задачи внесут робототехнические системы. Родившееся на страницах научно-фантастических произведений слово «робот» стало общепринятым научным термином, означающим высокоорганизованную техническую систему, способную не только выполнять разнообразные механические операции, но и самостоятельно решать возникающие при этом определенные комплексы логических задач.

Уже сейчас в промышленности многие виды робототехнических систем выполняют операции загрузки, складирования, сборки, сварки кузовов автомобиля и простейших узлов (рис. 1.1). Если робот оснащен манипуляторами *1* и *2*, системой восприятия и обработки информации о состоянии внешней среды и свойствах объектов, с которыми он оперирует (рис. 1.2), то собранная информация используется затем в процессе реализации заданной программы.

Наличие большого объема информации о технологическом процессе, о состоянии среды, об относительном расположении в пространстве объектов манипулирования открывает широкие возможности автоматизации разнообразных операций, включая такие тонкие, как сварка элементов сложной формы, сборка узлов с компактным расположением деталей. При этом робототехническая система выбирает нужные детали из полного комплекта, поступающего на

рабочую позицию, регулирует транспортные потоки. В конечном счете именно такие *робототехнические системы окажутся элементами, связывающими отдельные технологические операции в единую цепь полностью автоматизированного производства.* Здесь, говоря об автоматизации производства, мы имеем в виду не те узкоспециализированные машины-автоматы, которые создаются для выпуска определенного вида продукции. Речь идет о широком использовании универсального оборудования с числовым программным управлением, переналадка которого сводится, по сути дела, к смене программы работы.

Нормальное безотказное функционирование такого производства возможно лишь при условии организации многоуровневой системы управления, построенной на базе электронно-вычислительной техники. *Изучение совместной работы машин и управляющих ЭВМ, разработка необходимых алгоритмов и программ* тоже одна из задач теории механизмов и машин.

С помощью автоматических манипуляторов с программным управлением можно выполнять большое число операций по транспортировке обрабатываемых объектов, закреплению и раскреплению их в обрабатывающих машинах, упаковке, расфасовке, контрольно-измерительные операции и пр. Подобные автоматические машины и системы уже нашли и будут далее находить применение не только при проведении научных исследований и работ в космосе, морских глубинах океанов, под землей, но и для освобождения человека от тяжелого физического труда. Замена человека роботом

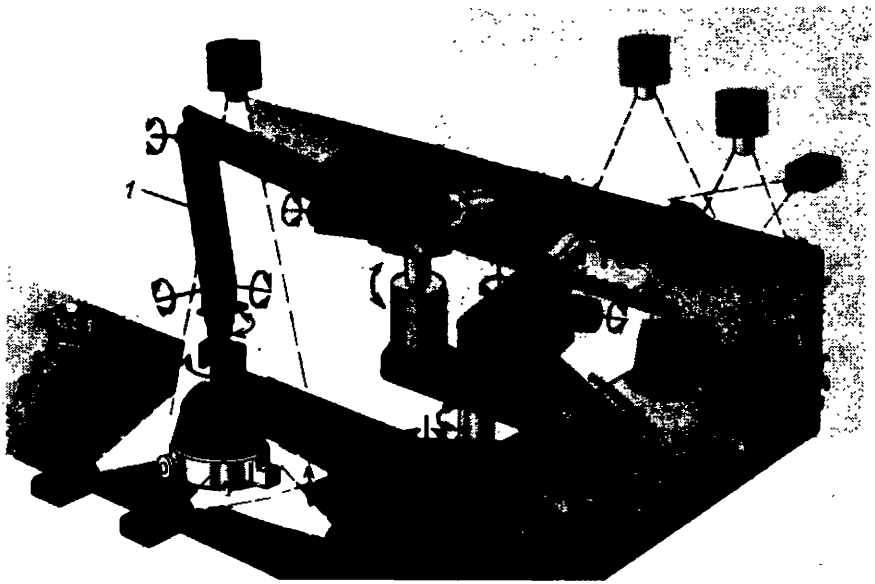


Рис. 1.2

на тяжелых и утомительных операциях имеет огромное социальное значение, оставляя человеку выполнение творческих и интеллектуальных функций управления и введения в систему необходимой информации.

Рабочие органы автоматических машин и систем, как правило, представляют собой по структуре пространственные кинематические цепи со многими степенями свободы (рис. 1.2). В этой связи перед современной теорией машин и механизмов возникают новые задачи по структурному, кинематическому и динамическому анализу и синтезу различных схем механизмов роботов, манипуляторов, шагающих и других машин и систем. Должны быть решены *задачи устойчивости движения рабочих органов*, изучены колебательные процессы, возникающие в период их движения, рассмотрены *задачи, связанные с оптимальными законами движения рабочих органов, разработаны алгоритмы движения этих органов.*

При решении задач механики требуется учитывать основные параметры приводов, их влияние на динамику управляемых ими механизмов. *Проблема разработки приводов* и систем управления роботами, манипуляторами, шагающими и другими машинами является одной из важнейших в создании машин подобного типа. При решении этих проблем возникают вопросы создания систем с большой надежностью, оптимальными габаритами, малой инерционностью, обладающих широкими диапазонами скоростей.

Промышленные роботы и манипуляторы, управляемые человеком-оператором или программным устройством, могут быть отнесены к роботам первого поколения. В настоящее время должны получить быстрое развитие работы по созданию роботов следующего поколения, обладающих некоторыми органами чувств человека, например осязанием, слухом, зрением, обонянием, реагирующих и на неощутимую человеком информацию, например на ультразвук, вибрации, электромагнитные и тепловые поля и т. п. К роботам еще более высокого поколения будут относиться устройства, обладающие искусственным интеллектом. Сложные задачи предстоит решить по разработке способа общения человека с роботом, по изучению характеристик человека-оператора в системе «человек — робот», а также по исследованию распределения функций между человеком и роботами, обладающими разной степенью автономности. Здесь открываются перспективы по созданию роботов-санитаров, роботов-хирургов и др.

Воистину *революционную роль в системах управления автоматизацией производства сыграло появление ЭВМ.* С помощью ЭВМ стал возможен анализ многозвенных, с большим числом степеней свободы механизмов, решение задач оптимального синтеза как отдельных механизмов, так и сложных машин автоматического действия, решение задач проектирования многокритериальных и многопараметрических машинных устройств, программное управление большинством современных машин, управление новыми машинами

с устройствами биомеханического вида типа манипуляторов, роботов, шагающих машин и др.

Вновь создаваемые машины-автоматы должны отвечать требованиям высокой эффективности выполнения заданного технологического процесса и иметь автоматическое управление, максимально освобождающее человека от контроля за работой машины.

В целях повышения производительности труда, увеличения количества выпускаемой продукции, улучшения экономических показателей производства будут создаваться не только машины-автоматы, но и *системы машин автоматического действия* в форме различных поточных автоматических линий, переходящих в безлюдные заводы-автоматы. В этих линиях в одну общую систему будут увязаны основные технологические процессы с такими процессами, как транспортировка, контроль продукции, упаковка, счет выпускаемых изделий и др. Это могут быть поточные линии обычного линейного типа, роторные линии, кольцевые линии с использованием промышленных роботов.

Отличительной чертой машин-автоматов и систем автоматического действия ближайшего будущего будет высокий уровень управления ими по самым различным параметрам, критериям и показателям. Системы управления в зависимости от того, какие требования предъявляются к управляемому объекту, и от условий, в которых он работает, могут иметь логические элементы электронного, пневматического, гидравлического и механического типов. Системы управления могут содержать блок памяти и блоки, обеспечивающие *автоматическую поднастройку и адаптацию управляемых объектов*, позволяющие качественно выполнять требуемый технологический процесс при изменившихся внешних условиях.

Так как при решении задач синтеза механизмов мы имеем дело чаще всего с многокритериальными системами, то задачи синтеза связаны обычно с поиском оптимальных вариантов. Нахождение оптимальных вариантов или областей, в которых существуют эти варианты, требует *развития теории оптимального синтеза механизмов*. Решение подобных задач, как правило, возможно только с помощью ЭВМ, а это требует разработки соответствующих алгоритмов и программ, особенно при анализе и синтезе *механизмов передач*. Здесь в первую очередь надо отметить необходимость дальнейшего развития синтеза зубчатых зацеплений, особенно пространственных. Необходимо также дальнейшее развитие теории и методов проектирования сложных зубчатых редукторов с планетарными и дифференциальными схемами. Быстро развиваются теория и методы синтеза волновых передач. Почти все отрасли промышленности нуждаются в надежных механизмах с бесступенчатым изменением передаточных функций. Должна получить развитие теория механизмов, осуществляющих движение с остановками, типа мальтийских, храповых, рычажных и пр.

Задача синтеза системы привод — ведомый механизм, одна из

основных задач теории механизмов и машин, должна ставиться и решаться по-новому на основе использования современных вычислительных алгоритмов и вычислительной техники. Это относится в первую очередь к весьма распространенным системам, в которых применяется гидравлический или пневматический привод линейного или вращательного движения. Что касается выбора оптимальной структуры системы, то на первых стадиях следует опираться на знания и опыт проектировщика, быстро возрастающие в условиях широкого использования диалога человек — ЭВМ, сопоставления различных структур с оптимизированными (а не произвольно выбранными) параметрами, накопления информации о предельных возможностях того или иного варианта.

В последние десятилетия существенно повысились рабочие скорости машин, что привело не только к увеличению динамических нагрузок на звенья механизмов и рабочие органы машины, но и к существенному увеличению уровня вибраций и порождаемого вибрациями шума. Вибрации сопутствуют работе любой машины, поэтому в последние годы *проблема виброзащиты машин и снижения уровня шума* машин также изучается в курсе теории машин и механизмов. При этом следует отметить, что *изучение динамики систем «человек — машина — среда»* также становится предметом теории машин и механизмов. Эта задача особенно актуальна для разработки эффективных средств *виброзащиты человека-оператора*, управляющего высокоскоростными современными транспортными средствами и летательными аппаратами, а также машинами вибрационного принципа действия. В этих машинах резонансные и вибрационные эффекты дают возможность построить высокоэкономичные и высокопроизводительные машины для разработки твердых горных пород, виброизмельчения, виброперемешивания, вибросепарирования, вибротранспортировки сыпучих сред, виброформовки, вибропроката железобетонных изделий и др.

Повышение энергетических, силовых и скоростных характеристик машин автоматического действия, высокие требования к их точности и надежности обусловливают развитие в ближайшие годы методов динамического исследования и расчета машин как в стационарных (установившихся), так и в переходных режимах. Особое значение изучение неустановившихся режимов имеет для транспортных машин, грузоподъемных машин, вибромашин и др.

Большое значение для техники имеет *развитие динамики машин с переменной массой звеньев*, например при исследовании технологических машин с изменяемой массой обрабатываемого объекта: конвейеров, погрузочно-разгрузочных, печатных, намоточных машин. Не только массы могут быть переменными, но и сама структура механизмов в отдельных случаях может изменяться.

Особую роль в развитии динамики машин играют вопросы колебаний. С одной стороны, это вопросы *борьбы с вибрациями* путем создания виброустойчивых конструкций машин и механизмов,

с другой — это использование резонансного эффекта вибраций для выполнения различных технологических процессов и *создание новых вибрационных механизмов*, обладающих требуемыми кинематическими характеристиками.

Как отмечалось, вибрации сопутствуют работе всех машин и часто оказываются причиной, сдерживающей дальнейший прогресс в той или иной области техники. Так, дальнейшее увеличение быстроходности высокоскоростных роторных машин ограничено, в частности, вибростойкостью ротора и подшипниковых опор, повышение мощности паровых и газовых турбин — вибрациями лопаток последних ступеней, создание мощных вертолетов — колебаниями рабочих лопастей, повышение точности металлорежущих станков — вибрациями режущего инструмента и станины, создание высокоточных и надежных систем автоматического управления — вибрациями ее отдельных элементов.

Вибрации вызывают большие напряжения в конструкциях, что приводит к их поломкам и разрушениям главным образом усталостного характера и, как следствие, к серьезным авариям.

Вибрации являются источником вредного шума: шум не только вредно влияет на физиологию человека, но и приводит к так называемой акустической усталости материала. Вибрации искажают основное движение элементов машин, механизмов и систем управления по предписанным кинематическим законам, порождают неустойчивость заданного закона движения и часто приводят к отказу всей системы управления машиной.

Вибрации машин оказывают непосредственное физиологическое влияние на человека, снижают его функциональную деятельность и работоспособность, поражают отдельные системы живого организма.

Вместе с тем вибрации ограниченной интенсивности и нормированного времени действия могут оказывать положительное влияние на живой организм. Известны методы вибростимуляции, вибромассажа, эффективного физиологического действия вибраций в лечебных целях с использованием специальных вибрационных механизмов и установок. В этом направлении открываются широкие перспективы для новых исследований.

Новый тип машин, где вибрации играют полезную роль, носит название машин вибрационного принципа действия. Они широко применяются в последние годы в самых различных отраслях техники благодаря экономичности, обусловленной использованием эффекта резонанса. Машины, приборы, оборудование и стенды вибрационного принципа действия используются в разнообразных технологических процессах.

Наука о вибрациях изучает методы обнаружения, измерения и возможного уменьшения их интенсивности. Наряду с этим она предлагает методы определения последствий вибраций, когда их полностью нельзя устранить, например расчет амплитуд вибраций

для выяснения долговечности машин из условий накопления подтверждаемости сведений об усталости материала, способы изоляции шума, а также методы определения допустимых доз воздействия динамических нагрузок. Для получения информации о состоянии машин того или иного агрегата вибрации играют роль наиболее достоверного средства диагностики, позволяют избежать аварийных ситуаций.

Важное значение приобретает *изучение и прогноз ресурса машин*, т. е. срока их службы до прихода их в состояние, когда по тем или иным признакам дальнейшая их эксплуатация недопустима. По признаку прочности ресурс определяется просто разрушением (в машиностроении — преимущественно усталостным), по признаку шума или повышения вибраций — нормой допустимых амплитуд и т. д. Вибрация является едва ли не единственным средством, которое позволяет сделать какую-либо предварительную и достоверную оценку ресурса работы машин путем наблюдения за ее изменением во времени, не допуская аварийных ситуаций.

Другой проблемой динамики машин, решающей важную социальную задачу, является *акустическая динамика машин*, т. е. проблема изучения причин и источников шумовых эффектов в машинах и разработка задач динамики машин, связанных с полной или частичной локализацией шумов определенных уровней.

Развитие современных математических методов и электронно-вычислительной техники позволили решить ряд указанных выше проблем, однако необходимо еще очень много сделать в направлении дальнейшего совершенствования методов, дальнейшего сближения современной математики с теорией механизмов и машин.

Учет упругости звеньев в машинах позволил выявить колебательные явления в сложных кинематических цепях и определить реальные нагрузки на звенья и кинематические пары, давать рекомендации по отстройке от резонансов и демпфировать возникающие колебания, решать задачи точности заданного закона движения механизма. В связи с созданием быстроходных машин дальнейшее развитие получат методы автоматической балансировки.

Возрос интерес к *теории пространственных механизмов* и в том числе к их динамике, так как эти механизмы находят все более широкое применение, в частности, в задачах, связанных с внедрением роботов и манипуляторов, в задачах стыковки космических объектов. В этой области разработаны методы описания движения пространственных механизмов с несколькими степенями свободы, их силовой анализ, решены некоторые задачи уравновешивания и колебаний этих систем.

Как всегда, *важнейшей задачей теории машин и механизмов будет развитие экспериментальных методов изучения характеристик различных машин и механизмов.* При этом особое значение приобретут экспериментальные исследования систем машин автоматического действия в условиях их производственной работы с ав-

томатической регистрацией и обработкой полученной экспериментальной информации на ЭВМ. Следует ожидать дальнейшего прогресса в развитии аппаратуры для динамических исследований, определяемого задачами автоматизации и диктуемого спецификой быстро протекающих во времени динамических процессов современных машин как объектов исследования. Отличительной особенностью современных динамических исследований является их комплексный характер. Они широко проводятся как на натурных объектах (в лабораторных, производственных и эксплуатационных условиях), так и методами математического моделирования с использованием ЭВМ. Получили развитие методы планирования эксперимента, обеспечивающие необходимую точность получаемой информации.

Развитие экспериментальной динамики подготовило условия для разработки и совершенствования методов контроля и диагностики автоматического оборудования, работающего в промышленности. Разработка методов технической диагностики применительно к машинам-автоматам, промышленным роботам и манипуляторам, двигателям, летательным аппаратам основана на выделении объективных критериев качества, определяющих работоспособность и одновременно признаки дефектных состояний механизмов.

РАЗДЕЛ I
ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЗМОВ, МАШИН И СИСТЕМ МАШИН

ГЛАВА 2
ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Процесс проектирования самых разных механизмов и машин имеет две основные особенности. Во-первых, состав и последовательность этапов проектирования не зависят от целевого назначения проектируемого механизма или машины в целом, будь то станок, автомобиль, самолет или прокатный стан. При этом, естественно, чем проще механизм или машина, тем меньше время проектирования. Во-вторых, логика процесса проектирования инвариантна к способу проектирования — традиционному (с помощью карандаша и ластика) или автоматизированному (осуществляемому с помощью САПР — систем автоматизированного проектирования). Автоматизированное проектирование существенно формализовано по сравнению с традиционным способом, что требует выполнения некоторых дополнительных процедур. Ниже кратко изложены основные этапы, логика и основополагающие принципы проектирования механизмов и машин, некоторые особенности автоматизированного проектирования.

§ 2.1. ЛОГИКА ПРОЦЕССА ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Создание всякого нового механизма, машины или системы машин является чрезвычайно сложным процессом и включает в себя многие мероприятия от составления технического задания до запуска в серию (рис. 2.1). Основные этапы (стадии) проектирования и изготовления механизмов и машин регламентированы ЕСКД. Разделение процесса проектирования на последовательные этапы является в известной мере условным, поскольку в процессе проектирования пересматривают и уточняют ранее принятые решения.

Процесс проектирования механизма, тем более новой машины, всегда является результатом творческого труда большого числа высококвалифицированных специалистов.

Далее прокомментированы основные этапы (рис. 2.1) проектирования новых механизмов и машин.

Техническое задание обосновывает те новые качества, которыми должны обладать проектируемые механизмы и машины, и является итогом предпроектной подготовки. Устанавливает основное назначение проектируемых механизма и машины, обосновывает целесообразность их создания и регламентирует все основные технические характеристики.

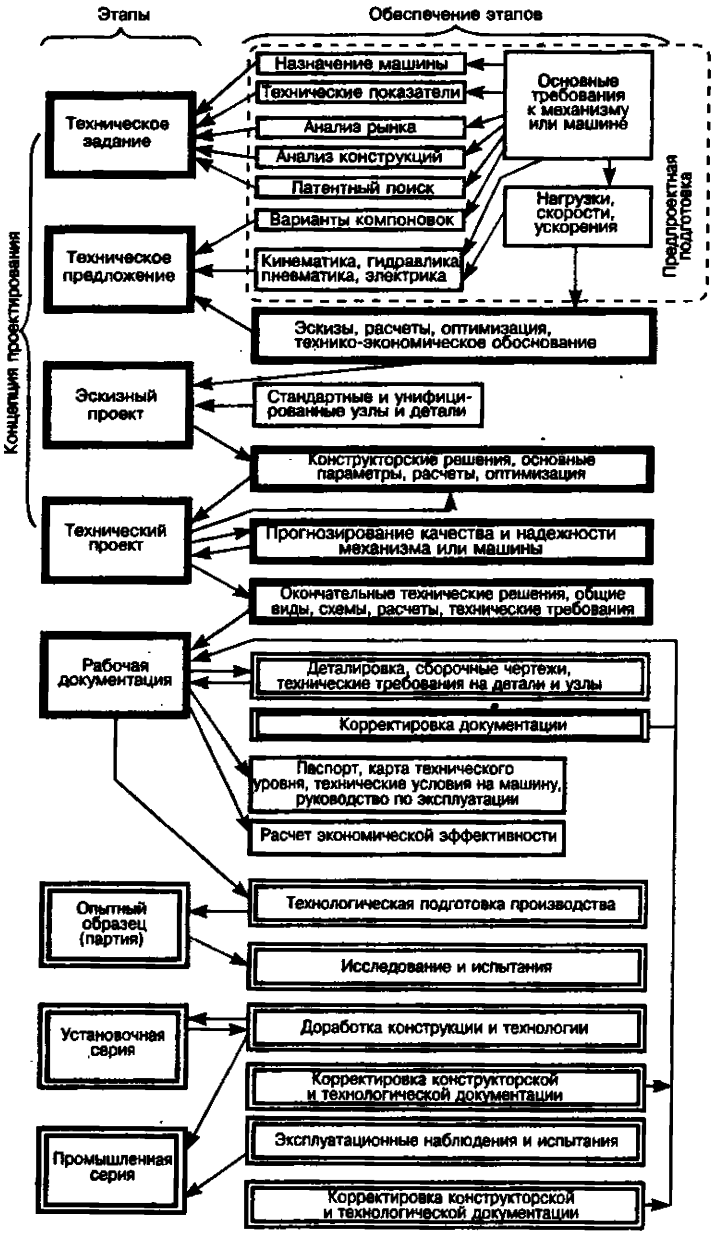

Этапы
Обеспечение этапов
Техническое задание
Назначение машины
Технические показатели
Анализ рынка
Анализ конструкций
Патентный поиск
Основные требования к механизму или машине
Нагрузки, скорости, ускорения
Предпроектная подготовка
Техническое предложение
Варианты компоновок
Кинематика, гидравлика, пневматика, электрика
Эскизы, расчеты, оптимизация, технико-экономическое обоснование
Концепция проектирования
Эскизный проект
Стандартные и унифицированные узлы и детали
Конструкторские решения, основные параметры, расчеты, оптимизация
Технический проект
Прогнозирование качества и надежности механизма или машины
Окончательные технические решения, общие виды, схемы, расчеты, технические требования
Рабочая документация
Деталировка, сборочные чертежи, технические требования на детали и узлы
Корректировка документации
Паспорт, карта технического уровня, технические условия на машину, руководство по эксплуатации
Расчет экономической эффективности
Опытный образец (партия)
Технологическая подготовка производства
Исследование и испытания
Установочная серия
Доработка конструкции и технологии
Корректировка конструкторской и технологической документации
Промышленная серия
Эксплуатационные наблюдения и испытания
Корректировка конструкторской и технологической документации

Рис 2.1

Исходные данные для проектирования практически невозможно собрать и обработать без применения компьютерной техники. Основой для исходных данных служат, во-первых, сравнительный анализ характеристик и параметров большого числа механизмов и машин, подобных проектируемым; во-вторых, данные конъюнктуры рынка; в-третьих, оценка реальных возможностей предприятия-изготовителя. Для всего этого необходимо иметь специальные и постоянно расширяющиеся базы данных, а также систему микрофишей, на которых приведены общие виды схожих механизмов и машин, выпускаемых различными фирмами.

Основными показателями, которые в определенном отношении гарантируют сбыт, являются *цена* и *характеристики работоспособности*. В немецком языке для этого существует весьма емкий и удобный термин Preisleistung (Preis — цена; Leistung имеет три значения: работоспособность, мощность, производительность). Работа по определению Preisleistung ведется всеми ведущими фирмами непрерывно как в отношении имеющейся на рынке продукции, так и продукции, которая должна выпускаться. Фирма показывает только конечный результат этой работы обычно в виде ежемесячного бюллетеня, в котором определены перспективные для сбыта направления в разработке новых конструкций. Расставлены приоритеты проектирования путем простановки соответствующих коэффициентов (обычно весовых) на параметры и характеристики машин. Учитывается, сколько машин какой конструкции продано, каков резерв по рынку, оценены потенциальные возможности на будущее и т. д. Эта работа чрезвычайно трудоемкая, выполняется большим штатом сотрудников и совершенно невозможна, даже просто неосуществима, без активного использования компьютерной техники.

Техническое задание обосновывает техническую и экономическую целесообразность проектирования новых механизмов и машин. *Техническая целесообразность*, как правило, обусловлена появлением новых материалов, или новых технологических процессов, или принципиально новых технических решений. *Экономическая целесообразность* обычно определяется существенным повышением производительности, либо экономией энергоресурсов, либо увеличением универсальности, т. е. возможностью использования проектируемого механизма в машинах нового поколения, а машин — в сложных системах. Во всех случаях техническое задание должно содержать тщательное экономическое обоснование предполагаемой эффективности проектируемого оборудования. Проектируемый механизм или машина должны иметь более высокие технико-экономические показатели по сравнению с существующими.

Концепция проектирования разрабатывается после того, как сформулированы исходные данные и определены основные приоритеты проектирования (рис. 2.1). Разработкой концепции занимается небольшая по численности группа конструкторов высшей квалифика-

ции. Работа группы базируется на активнейшем использовании вычислительной техники, владении всеми необходимыми методами расчетов, на накопленных банках данных с конструкциями машин, их узлов, агрегатов и систем. Это позволяет в результате принятия концепции иметь если не конструкцию машины, то по крайней мере определить ее компоновку и габариты.

При разработке концепции необходимо учитывать все возможные налагаемые на конструкцию ограничения (функциональные, технологические, эксплуатационные, эргономические и др.).

На уровне принятия концепции осуществляется выбор схем, конструкций элементов и основных параметров проектируемого механизма или машины, наилучшим образом обеспечивающих требуемые выходные характеристики, отвечающие целевому назначению. На рис. 2.2 приведены варианты выбора концепции на уровне кинематических схем при проектировании различных механизмов и узлов.

При выборе схемы дифференциала (рис. 2.2, *а*) каждый из вариантов имеет свои преимущества: на работу дифференциала с цилиндрическими колесами (схема *I*) погрешности изготовления и мон-

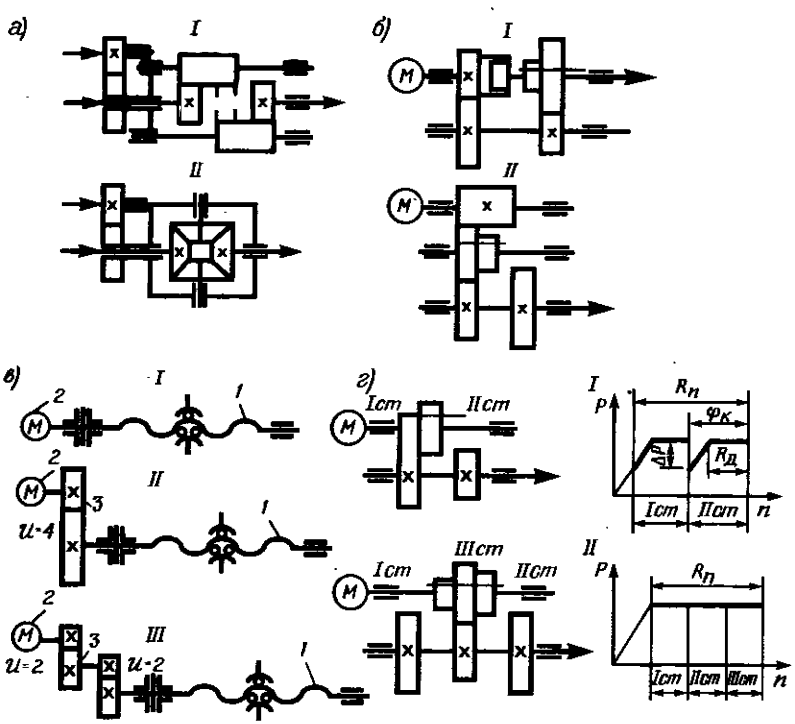


Рис. 2.2

тажа влияют в меньшей степени; дифференциал с коническими колесами (схема *II*) дает возможность применять ведущие колеса больших диаметров при тех же габаритах.

На рис. 2.2, *б* приведены варианты кинематических схем двухступенчатых коробок скоростей, применяемых для расширения регулируемого диапазона частот вращения двигателя *M*, что позволяет в итоге получать достаточно большое передаточное отношение.

В коробке со схемой *I* входной и выходной валы выполнены соосно (коробка со ступенью возврата), что повышает компактность, но при этом одно из передаточных отношений (в зубчатой муфте *I*) равно единице, в то время как в схеме *II* оно может изменяться по желанию конструктора.

Существуют принципиально различные варианты кинематических схем приводов станков с ЧПУ (рис. 2.2, *в*). В схеме *I* весь диапазон частот вращения шарикового винта *1* может быть обеспечен двигателем *2*. Редуктор между двигателем и винтом отсутствует, что обеспечивает большую компактность и простоту привода в целом. Применение редуктора *3* в схемах *II* и *III* уменьшает мощность и габариты двигателя. При одинаковом передаточном числе от двигателя к винту (в примере $u=4$) схема *II* конструктивно более проста, чем схема *III*. Однако приведенный к двигателю момент инерции колес редуктора с равномерно распределенным передаточным отношением между двумя парами колес (схема *III*) примерно в 2,5 раза меньше, чем в схеме *II* (момент инерции изменяется пропорционально четвертой степени диаметров колес), что благоприятно сказывается на динамических характеристиках привода. То же самое можно сказать о выборе диаметра винта: увеличение диаметра повышает нагрузочную способность, долговечность, но одновременно возрастает момент инерции привода.

На рис. 2.2, *г* приведены варианты кинематических схем привода главного движения станка и соответствующие им графики мощности, развиваемой на выходном валу. Двухступенчатая коробка (схема *I*) конструктивно проще, но для обеспечения требуемого диапазона R_n частот вращения приходится выбирать большое передаточное отношение $\varphi_к$ коробки. При этом если оно больше, чем диапазон $R^д$ регулирования двигателя при постоянной мощности $R=\text{const}$, то возникает падение мощности ΔP на некоторых частотах вращения и приходится снижать режимы нагружения на этих частотах. Трехступенчатая коробка (схема *II*) не имеет этого недостатка, и на всех трех ступенях (*I*, *II*, *III*) мощность используется полностью. Однако конструкция коробки сложнее и габариты больше.

Наконец, последний пример: выбор типа и конструкции опор шпинделя. Пример наглядно показывает, что именно на концептуальном уровне должны быть выбраны характеристики опор (табл.

2.1), обеспечивающие требуемые выходные характеристики узла в соответствии с его целевым назначением. Каждый тип опор имеет свои достоинства и недостатки.

Опоры качения по совокупности своих свойств применяют существенно чаще других, хотя имеют ограниченные точность и быстроходность (за исключением высокоскоростных малонагруженных прецизионных подшипников), а также низкое демпфирование. Однако они просты в эксплуатации и высоконадежны. В зависимости от сочетания требований скорости, точности и нагрузки в шпиндельных узлах применяют различные конструкции опор качения.

Гидростатические опоры обеспечивают исключительно высокую точность вращения шпинделя и могут использоваться неограниченно долго вследствие отсутствия изнашивания. Они обладают весьма высокой нагрузочной способностью во всем диапазоне частот вращения. Высокая демпфирующая способность обеспечивает хорошую виброустойчивость узла.

Гидродинамические опоры применяют в тех случаях, когда требуются высокие и постоянные скорости скольжения. Эти опоры обеспечивают достаточно высокую точность вращения. Однако тепловые потери их весьма велики.

Газостатические (аэростатические) опоры наиболее целесообразно применять в сверхвысокоскоростных малонагруженных шпиндельных узлах вследствие весьма малых тепловых потерь, низких жесткости и демпфирования. Шпиндель имеет высокую точность вращения в опорах и может сохранять ее неограниченно долго вследствие отсутствия износа.

Таблица 2.1.

Основные характеристики шпиндельных опор

Тип опор шпинделя	Характеристики				
	нагрузочная способность N/D, кВт/мм	точность (биение), мкм	быстроходность D/n, мм · об/мин	жесткость j_{max}, Н/мм	демпфирование ζ_{max}, Н · ч/мм
Качения	$\leqslant 0{,}25$ $\leqslant 0{,}75$	$\geqslant 0{,}5$ $\geqslant 2{,}0$	$\leqslant 2{,}5 \cdot 10^6$ $\leqslant 4 \cdot 10^5$	$\leqslant 12 \cdot 10^4$ $\leqslant 250 \cdot 10^4$	$\leqslant 5{,}0$
Гидростатические	$\leqslant 0{,}8$	$\geqslant 0{,}1$	$\leqslant 2{,}0 \cdot 10^6$	$\leqslant 50 \cdot 10^4$	$\leqslant 10^6$
Гидродинамические	$\leqslant 0{,}5$	$\geqslant 0{,}5$	От $2 \cdot 10^4$ до $1 \cdot 10^6$	$\leqslant 40 \cdot 10^4$	$\leqslant 10^4$
Газостатические	$\leqslant 0{,}4$	$\geqslant 0{,}05$	$\leqslant 5 \cdot 10^6$	$\leqslant 20 \cdot 10^4$	$\leqslant 10^2$
Магнитные	$\leqslant 0{,}5$	$\geqslant 0{,}05$	$\leqslant 5 \cdot 10^6$	$100 \cdot 10^4$*	10^2*

Примечание. Для опор качения: верхняя строка — прецизионные высокоскоростные шпиндельные шарикоподшипники, нижняя — остальные; * — характеристики могут быть увеличены путем управления параметрами системы управления магнитными опорами.

Обозначения: N — мощность привода; D — диаметр передней шейки шпинделя; n — частота вращения.

Магнитные опоры, в которых вал удерживается электромагнитным полем, по своим свойствам близки к газостатическим, но имеют существенно бо́льшую жесткость (см. табл. 2.1). В то же время они весьма дороги и сложны в эксплуатации.

Таким образом, после принятия технических решений по схемам, узлам, агрегатам и системам проектируемых машин (техника CAD/CAM* позволяет рассмотреть все эти вопросы очень глубоко, вплоть до мелких деталей) конструкторские разработки на уровне концепций поступают в группы, занимающиеся проектированием машин различных модификаций и их конкретными узлами и системами. Группы работают в единой концепции, пользуясь общими для всех файлами и базами данных.

Техническое предложение формулирует принятую концепцию, уточняя и развивая техническое задание. Оно состоит из совокупности конструкторских документов, необходимых для дальнейшего проектирования. Техническое предложение обеспечивает и уточняет технические характеристики проектируемой машины и диапазоны эксплуатационных нагрузок и скоростей. На этом этапе выбирают окончательный вариант компоновки машины, ее узлов и агрегатов, пользуясь результатами анализа, синтеза и оптимизации вариантов компоновок, и разрабатывают принципиальные схемы машины: кинематическую, гидравлическую, пневматическую, электрическую и др., а также принимают тип и характеристики системы управления, определяют общие габаритные размеры.

Техническое предложение дает полное представление о компоновке и возможностях проектируемых механизмов или машин.

Эскизный проект содержит предварительную конструкторскую проработку всех основных узлов и является развитием технического предложения. Он базируется на анализе различных конструкторских решений, результатах расчетов, оптимизации важнейших параметров и характеристик машины.

При конструировании машины, ее узлов и систем следует максимально использовать стандартные и унифицированные детали, механизмы и элементы, что удешевляет проектируемую машину.

Каждое конструкторское решение должно быть обосновано результатами расчетов, рассмотрено с точки зрения обеспечения качества и надежности функционирования проектируемой машины, технологичности изготовления и сборки, удобства эксплуатации, ремонтопригодности и т. д.

Технический проект включает окончательную конструкторскую проработку всех узловых чертежей, схем машины и ее общих видов. На этом этапе производят все виды уточненных и поверочных расчетов, оптимизируют необходимые параметры узлов и систем

---

*CAD/CAM: CAD — Computer Aided Design — проектирование с помощью компьютера; CAM — Computer Aided Manufacturing — изготовление с помощью компьютера.

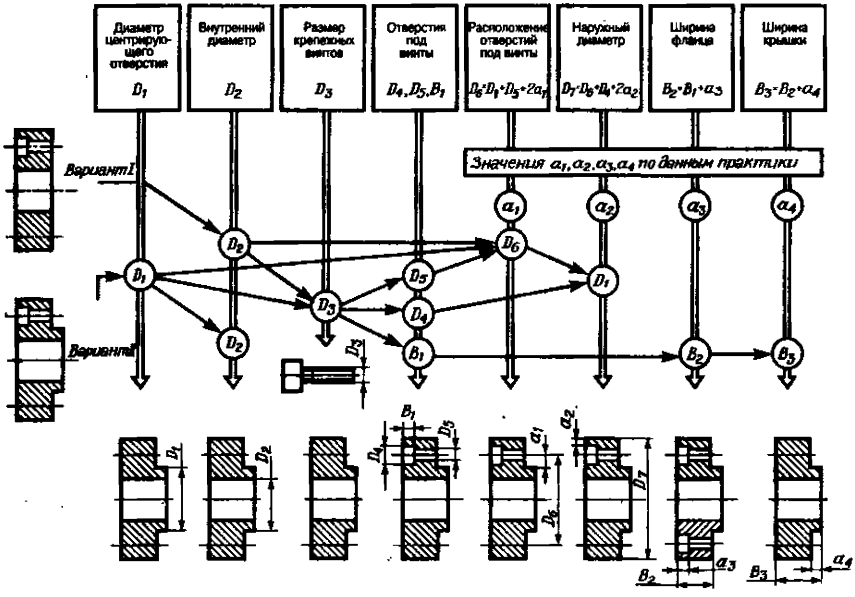


Рис. 2.3

машины, окончательно определяют ее эффективность. Прогнозируют выходные характеристики и оценивают надежность машины с учетом вероятностной природы режимов ее эксплуатации. Проект должен содержать все исходные данные, необходимые для разработки комплекта технической документации на проектируемый механизм или машину, его согласовывают и утверждают в установленном порядке.

Рабочая документация — завершающий этап проектирования. Он включает в себя разработку рабочих чертежей всех оригинальных деталей и простановку технических требований на их изготовление, составление технологической документации, корректировки (в случае необходимости) технического проекта, составление спецификаций оригинальных и покупных комплектующих деталей, формирование паспорта машины, карты технического уровня, инструкции по эксплуатации и ряда других документов. Рабочая документация должна содержать все данные, необходимые для изготовления проектируемого механизма или машины. Выпуск рабочей документации существенно упрощается при применении САПР.

После завершения разработки комплекта рабочей документации осуществляются **технологическая подготовка производства** (см. рис. 2.1) и последующие этапы изготовления и отладки спроектированной машины. В ряде случаев для сокращения сроков выпуска новой техники технологическую подготовку производства начинают заранее, до завершения выпуска комплекта рабочей документации. При-

менение техники CAD/CAM значительно сокращает сроки подготовки производства.

Логика проектирования заключается в определенной последовательности операций при проектировании и во взаимосвязи между этими операциями. Эта логика имеет место не только при проектировании маханизмов и машин, но и при разработке отдельных деталей, когда реализуются все основные принципы проектирования, изложенные в § 2.2. Примером может служить представленная на рис. 2.3 логика процесса конструирования фланца подшипника.

§ 2.2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

При решении задач проектирования руководствуются рядом основных принципов.

Последовательность и итерационность. Последовательность заключается в строгой очередности выполнения этапов проектирования механизма или машины, а итерационность — в корректировках проектных решений, полученных на предыдущих этапах проектирования.

Модульный принцип проектирования состоит в максимально возможном использовании однотипных узлов (или элементов узлов) при проектировании семейства машин различного целевого назначения. Этот принцип базируется на активном использовании компьютерной техники и применяется тогда, когда уже имеется достаточно четкое представление о семействе проектируемых машин. Применение модульного принципа при проектировании одного механизма или одной машины бессмысленно и невозможно. Только в случае разработки семейства машин и использовании при этом ограниченного числа готовых узлов последние становятся модулями. Модули являются следствием принятого технического решения, ибо в принципе проектировать можно так, что узлы одного назначения не будут даже отдаленно похожи друг на друга.

Различают *производственные* модули (применяемые без каких-либо изменений в машинах различного целевого назначения), *технологические* (отличающиеся в основном технологией изготовления и незначительными конструкторскими изменениями, относящимися, как правило, к местам крепления узлов, например: правый-левый, верхний-нижний, передний-задний и т. п.) и *конструкционные* (имеющие конструкционное подобие, но различные размеры).

Современное техническое обеспечение САПР позволяет легко получать зеркальные изображения узлов (технологические модули) с минимальными затратами труда и времени. Несколько сложнее получить конструкционные модули, так как при их проектировании необходимо одновременно выполнять требования соблюдения размерных рядов и максимально возможной унификации.

При использовании модульного принципа проектирования на уровне принятия концепции должен быть решен вопрос о критерии

целесообразности окончания модульного принципа для проектируемого семейства машин. Модули, используемые в последующих разработках, переходят в категорию унифицированных узлов.

Принцип унификации связан с применением в семействе проектируемых механизмов или машин унифицированных сборочных единиц (узлов, подузлов, агрегатов), деталей (оригинальных и стандартных), комплектующих.

Как показывает опыт автоматизированного проектирования, применение типовых унифицированных деталей нецелесообразно. Значительно выгоднее иметь большое количество макрусов и большие заделы в банках данных по модификациям и унифицированным узлам, что позволяет избегать излишней детализации конструкторских разработок. Информацию об унифицированных деталях, узлах и системах целесообразно хранить на микрофишах систематизированно по группам.

Принцип соответствия выбора номенклатуры и значений выходных характеристик целевому назначению проектируемой машины или механизма. Чем ответственнее проектируемый объект, тем большее число выходных характеристик и параметров объекта регламентируется и тем более жесткие требования к ним предъявляются. Например, вероятность безотказной работы станков принимается в пределах 0,95 — 0,99, а самолетов — 0,99999 [10].

Другой пример: число установленных и проверяемых выходных параметров точности станка при высоких требованиях к точности обрабатываемых деталей может достигать 20 — 30, в то время как для станков нормальной точности достаточно регламентировать 8 — 10 показателей. Основная цель регламентации выходных параметров станка — обеспечить погрешность обработки, которая находилась бы в установленных пределах в течение всего периода его эксплуатации.

Во всех случаях проектировщику необходимо помнить, что соответствие выходных характеристик механизма или машины их целевому назначению в первую очередь определяет общая компоновка, принимаемая на концептуальном уровне.

Принцип компромиссов. Проектирование — это непрерывная цепь компромиссов, которые приходится принимать на всех стадиях создания механизма или машины. Например, стремление к увеличению частоты вращения шпиндельных узлов всегда приводит к увеличению тепловыделения в опорах, которое не может превышать определенного уровня, и принятие окончательного решения всегда требует компромисса.

Улучшение любой технической характеристики машин (скорости, грузоподъемности, точности, надежности, производительности и др.) неизбежно вызывает увеличение ее стоимости, трудоемкости изготовления, часто требует другого уровня обслуживания и повышения культуры эксплуатации, что всегда приводит к компромиссным решениям.

Тенденция современных машиностроительных производств к концентрации операций постоянно требует от проектировщика решения задачи рационального сочетания технологических возможностей и усложнения конструкций оборудования. Избыточность технологических возможностей может быть не оправдана экономически.

Увеличение надежности машины почти всегда сопровождается ее усложнением и удорожанием. Выбор опор и направляющих, обеспечивающих незначительный износ, применение новых материалов, специальных покрытий, смазок, термообработки повышают трудоемкость и стоимость. Далеко не всегда ясно, что экономически целесообразнее: удорожать механизм или машину изначально либо совершенствовать систему обслуживания и ремонта в период эксплуатации. Компромисс заключается в обеспечении надежности в первую очередь наиболее ответственных деталей и узлов машины [10].

Принцип преемственности. Практически любые механизмы и машины являются продуктом эволюции и в них всегда имеются элементы, детали и узлы, разработанные ранее. Соблюдение преемственности является одним из эффективных путей снижения затрат и сокращения сроков создания машины.

Хорошо отработанные элементы и узлы нет нужды заменять, и в одной машине прекрасно могут сосуществовать «новое» и «старое». Изыскание новых принципов построения механизмов и машин не является, как правило, задачей конструирования.

Суть проектирования — обеспечение требуемых характеристик машины, а не погоня за оригинальностью. Преемственность определяется самой логикой последовательного развития машин. Модернизация, систематическое совершенствование позволяют поддерживать показатели выпускаемых машин на уровне постоянно возрастающих требований в течение определенного времени без коренной переработки конструкции. Например, ведущие автомобильные фирмы выпускают принципиально новую модель только раз в 8 — 10 лет.

Вопрос заключается в том, как *наиболее рационально сочетать новое со старым*. Это зависит как от качества отработки отдельных проектных решений (стоит ли заменить), так и от уровня технологической подготовки производства (можем ли заменить). На этом пути существуют две основные опасности: *консерватизм*, влекущий за собой добровольный отказ от творческого поиска и приводящий к необъективной критике новых решений и отказу от них, и *психологическая инерция*, ослабляющая самоконтроль, в результате чего конструктору очень трудно отрешиться от своего решения, так как он находится в плену идеи.

Преемственность при проектировании имеет несколько аспектов:

— приверженность фирм к определенным, отработанным годами решениям (компоновки, конструкции узлов, дизайн и т. п.). Это

то, что определяет «почерк» фирм, и они весьма неохотно расстаются со своими, ставшими традиционными решениями, часто связанными с «ноу-хау» и даже иногда носящими названия фирм;

— индивидуализация конструкций механизмов и машин не должна распространяться на все элементы и узлы. Модули могут и должны использоваться для различных моделей;

— конструктивная преемственность дает возможность увеличить эффективность разработки за счет использования модулей и унифицированных элементов и узлов;

— степень заимствования определяется на концептуальном уровне и зависит от возможности принятия своих и чужих технических решений в неизменном или модифицированном виде; реальных возможностей проектировщика, определяемых квалификацией, сроками и другими обстоятельствами.

Математическое моделирование является основой основ проектирования механизмов и машин. Моделирование в процессе проектирования с внедрением САПР получило принципиально новые возможности: за существенно меньшее время стало возможным сравнить значительно большее число вариантов конструкции.

Полнота и адекватность математических моделей определяют достоверность оценки выходных характеристик и параметров проектируемых механизмов и машин, а также возможность их оптимизации и прогнозирования с учетом вероятностной природы эксплуатационных нагрузок и происходящих в машинах процессов.

Модель объекта проектирования в общем виде представляет уравнение функционирования механизма или машины:

$$\bar{y} = \bar{Y}(\bar{P}, \bar{X}),$$

где $\bar{Y}$ — вектор выходных параметров объекта; $\bar{P}$ — вектор внешних и внутренних воздействий; $\bar{X} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ — вектор структурных и параметрических переменных объекта проектирования.

По выходным параметрам объекта проектирования вычисляют вектор качества объекта проектирования $\bar{y}$, который сравнивают с регламентированным значением $[\bar{y}]$: $\Delta\bar{y} = [\bar{y}] - \bar{y}$. Знак и величина составляющих вектора определяют качество и надежность объекта проектирования.

В любом случае подробность и точность выбираемой или составляемой математической модели должны находиться в соответствии с заданным качеством объекта. Излишняя подробность модели приводит к неоправданному увеличению машинного времени, недостаточная — к неправильному результату. Весьма желательна проверка адекватности принятой модели.

Вероятностный подход к моделированию определяется тем, что на любой механизм и машину в процессе эксплуатации действует большее число внешних и внутренних факторов. Не всегда факторы

действуют одновременно и не все следует или можно учитывать при проектировании. Но каждый из них является случайной величиной или случайной функцией. Поэтому наиболее полным и достоверным подходом к оценке качества и надежности механизмов и машин является вероятностный подход. Общий подход к оценке надежности машин разработан в трудах проф. А. С. Проникова [10].

Реализовать вероятностный подход при проектировании можно двумя основными путями: созданием вероятностных моделей механизмов и машин или использованием их детерминированных моделей в сочетании со статистическим моделированием. Первый путь сложен, и, кроме того, далеко не всегда удается получить вероятностную модель объекта достаточно достовериой или получить ее вообще.

Второй путь проще и, как правило, дает весьма достоверные результаты. Статистические испытания механизмов и машин проводятся по методу Моите-Карло. Применение этого метода заключается в многократном расчете выходных параметров объекта по его детерминированной модели. При этом для случайных параметров, входящих в нее, перебирают наиболее вероятные значения в соответствии с их законами распределения. Исходные данные делят на две группы: конструкционные (которыми варьирует проектировщик и влияние которых на выходные характеристики объекта он исследует) и эксплуатационные (варьируемые в процессе эксплуатации: силовые, тепловые, химические, биологические и др.). Выбор конкретного для данного испытания сочетания значений варьируемых параметров производства из базы данных по стандартной подпрограмме.

Прогнозирование выходных характеристик механизмов и машин на стадии проектирования вызвано необходимостью обеспечения их качества и надежности в процессе эксплуатации. Прогнозирование дает возможность, во-первых, оценить сопротивляемость механизма и машины эксплуатационным нагрузкам, во-вторых, целенаправленно выбрать оптимальные параметры механизма и машины

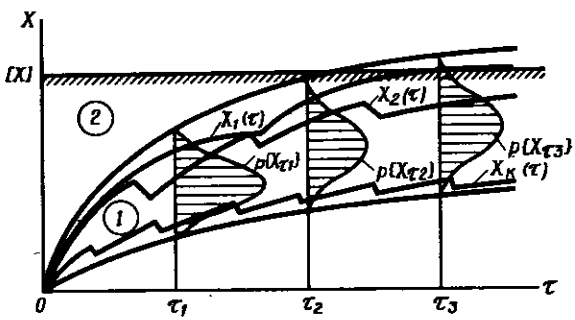


Рис. 2.4

и ограничить эксплуатационные нагрузки, что в целом обеспечивает регламентированные показатели качества и надежности.

При прогнозировании (рис. 2.4) расчетным путем выявляют *область состояний 1*, в которой находится выходной параметр узла и которая зависит от всего комплекса учитываемых в модели внешних и внутренних факторов, и сравнивают ее с нормированной *областью работоспособности 2*, определяющей границы допустимых значений этого параметра.

Качество и надежность проектируемого механизма или машины определяются размерами области состояний их выходных параметров, ее изменением во времени и положением относительно области работоспособности. Чем меньше область состояний выходных параметров механизма и машины, тем выше их качество, и чем медленнее она изменяется во времени, тем выше их надежность [10].

Оптимизация. Проектируемые механизмы и машины должны иметь заданные выходные характеристики. В самых простых случаях оптимальное значение нужной характеристики механизма удается вычислить с помощью формул, содержащихся в справочной литературе. Однако такой метод определения оптимальных характеристик далеко не всегда обеспечивает получение оптимальных решений при проектировании машин. Поэтому применяют различные методы оптимального проектирования, позволяющие найти наилучшее решение с точки зрения обеспечения совокупности требуемых характеристик машины. При этом процедура поиска оптимальных параметров механизмов и машин, соответствующих оптимуму выходных характеристик, становится неотъемлемой частью процесса проектирования.

Проектирование механизмов и машин с заданными или наилучшими выходными характеристиками требует математической формулировки задачи оптимального проектирования, для решения которой необходимо выполнить определенную последовательность действий:

— определить основную систему переменных и выделить *решающие расчетные параметры*;

— сформулировать в виде неравенств все *ограничения*, налагаемые на расчет;

— сформулировать *математическую модель* механизма или машины в виде системы необходимых и достаточных выражений, связывающих различные переменные и описывающих поведение объекта проектирования;

— выработать *критерий качества*, выражающий цель конструктора при проектировании и позволяющий определить область допустимых решений;

— выбрать *метод оптимизации*, наиболее пригодный для решаемой задачи и дающий возможность систематически и эффективно исследовать области допустимых решений для отыскания наилучших из них.

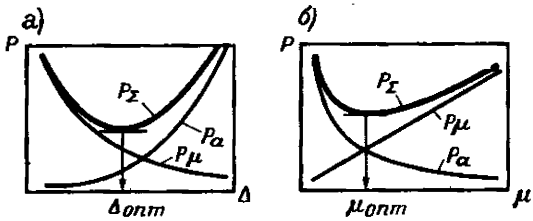


Рис. 2.5

Задачи оптимизации реальных механизмов и машин, как правило, не только многопараметрические, но и многокритериальные. Даже если описание конструкции и область изменения варьируемых параметров $x_1 ... x_k$ известны, формирование *целевой функции* (обобщенного критерия качества) $\Phi(x_1 ... x_k)$ — серьезная проблема.

Оптимизация может быть *однокритериальной* или *многокритериальной*. Пример однокритериальной оптимизации: функция суммарных потерь энергии $P_\Sigma = P_\mu + P_Q$ (P_μ — потери на вязкое трение в рабочем зазоре, P_Q — мощность, затрачиваемая на прокачивание жидкости через опору) для всех типов гидростатических опор и направляющих имеет экстремальный характер в зависимости от рабочего зазора Δ (рис. 2.5, *а*) и от вязкости μ смазочной жидкости (рис. 2.5, *б*) [1]. Следовательно, по условию минимизации энерготехнических потерь можно выбрать оптимальный рабочий зазор $\Delta_{опт}$, приравняв $dP_\Sigma/d\Delta = 0$, и оптимальную вязкость $\mu_{опт}$, приравняв $dP_\Sigma/d\mu = 0$.

§ 2.3. АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Уровень автоматизации конструкторских работ существенно отстает от уровня автоматизации машиностроительного производства. По усредненным данным, производительность труда при обработке деталей за последние 50 лет возросла примерно в 10 раз, а производительность конструкторского труда за тот же период увеличилась всего на 20%. Между тем многие виды конструкторской деятельности поддаются частичной или даже полной автоматизации: сбор и обработка исходной информации (что составляет 10 — 15% проектных работ), все виды расчетных работ (предварительные расчеты на стадии эскизного проекта и поверочные — на стадии технического проекта), все чертежные работы и оформление всех видов технической документации (что составляет до 60% времени проектирования) и др.

Анализ времени, затрачиваемого конструктором на эти и другие виды работ, свидетельствует о том, что возможно автоматизировать до $\frac{3}{4}$ всего объема проектных работ.

На творческую деятельность у конструктора остается существенно больше времени, если активно применяется компьютерная техника. Внедрение систем автоматизированного проектирования (САПР) [18] позволяет с минимальными затратами машинного времени и людских ресурсов проектировать механизмы и машины с требуемыми характеристиками работоспособности.

Основные особенности прикладных САПР механизмов и машин состоят в следующем:

— наличии достоверных математических моделей и машинных методов расчета механизмов и машин, основанных на оптимизации основных эксплуатационных характеристик и параметров конструкции;

— наличии полной информации о возможных вариантах компоновки механизмов и машин для обеспечения их регламентированных выходных характеристик, а также возможности корректировки и доработки конструкции с учетом специфичности технологических процессов изготовления и сборки;

— возможности прогнозирования на этапах проектирования выходных характеристик механизмов и машин и получении их оптимальных значений;

— возможности выпуска полного комплекса конструкторской документации автоматизированным способом.

Принципы автоматизированного проектирования машин дополняют основные принципы проектирования, сформулированные в пре-

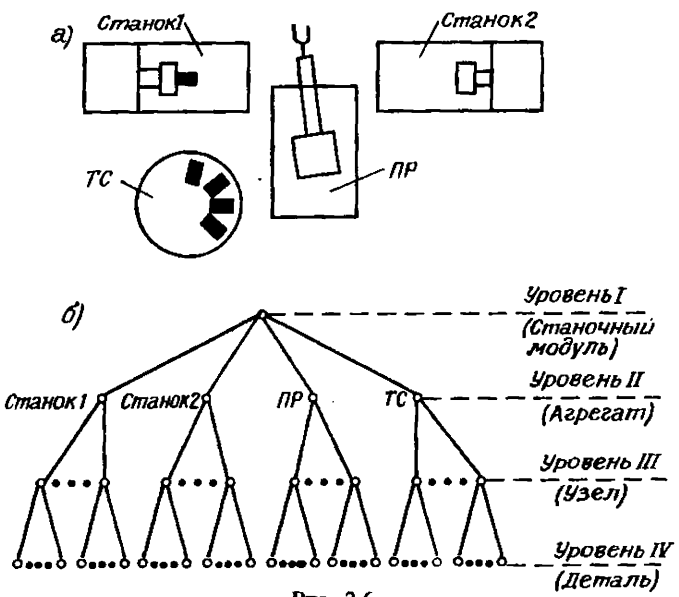


Рис. 2.6

дыдущем параграфе. Для функционирования САПР дополнительно должны быть обеспечены: декомпозиция и иерархичность описания объекта проектирования; итерационность по этапам, уровням проектирования и уровням иерархии объекта проектирования; типизации и унификации проектных решений и средств проектирования.

Принцип декомпозиции (блочности) означает разбиение каждого уровня на ряд составных частей (блоков) с реализацией их раздельного (поблочного) проектирования.

Принцип иерархичности—объект проектирования разбивают на иерархические уровни. Механизмы и машины целесообразно представлять в виде четырехуровневых иерархических систем. Для машин: машина — агрегат — узел — деталь. Для механизмов: механизм — подузел — деталь — элементы детали.

В качестве примера иерархической системы на рис. 2.6, *а* приведен роботизированный технологический комплекс, состоящий из двух токарных станков с ЧПУ, промышленного робота и тактового стола. Иерархическая структура комплекса предоставлена на рис. 2.6, *б* в виде дерева системы. Комплекс является старшей системой (уровень *I*) по отношению к элементам уровня *II* (станки, робот, стол и вспомогательные устройства); элементы уровня *II* — старшие по отношению к элементам уровня *III* (узлам) и т. д.

Принципы построения САПР. САПР механизмов и машин представляет собой *организационно-техническую систему*, включающую в себя *комплекс средств автоматизированного проектирования*, связанный с *подразделениями проектной организации* и выполняющий автоматизированное проектирование. САПР строится по следующим принципам.

Принцип системного единства заключается в том, что при разработке и функционировании САПР связи между ее составляющими должны обеспечивать целостность системы.

Принцип развития состоит в том, что САПР должна функционировать с учетом возможности совершенствования и обновления подсистем и составляющих. С этой целью программы автоматизированного проектирования строят по модульному принципу.

Принцип совместимости означает, что коды, языки, программы, информационные и технические характеристики связей между составными частями САПР должны обеспечивать совместное функционирование подсистем.

Принцип стандартизации предполагает проведение мероприятий по типизации и унификации подсистем и составляющих САПР, универсальных по отношению к проектируемым объектам.

Структура прикладных САПР механизмов и машин. Составными структурными частями САПР являются самостоятельные *подсистемы*, обладающие всеми свойствами систем, а структурными частями подсистем — *компоненты* по видам обеспечения. Под структурой здесь понимают состав частей САПР и связи между ними. От того, насколько рационально выбрана структура, зависят качество

функционирования и возможность получения объектов проектирования с требуемыми характеристиками.

По назначению *подсистемы* САПР подразделяют на *проектирующие* и *обслуживающие*. К проектирующим относятся подсистемы, выполняющие проектные процедуры и операции по проектированию деталей, узлов, агрегатов и машин. К обслуживающим относят подсистемы, обеспечивающие работоспособность проектирующих подсистем, например подсистемы ввода и вывода графической информации, подсистему документирования, подсистему информационного поиска.

В зависимости от отношения к объекту проектирования различают *объектные* (объектно-ориентированные) и *инвариантные* (объектно-независимые) *проектирующие подсистемы*. В объектных подсистемах выполняются процедуры и операции, непосредственно связанные с конкретным объектом (механизмом или машиной); в инвариантных подсистемах — унифицированные процедуры и операции, применяемые ко многим объектам проектирования.

Виды обеспечения САПР. Подсистемы состоят из компонентов САПР, которые выполняют *функции обеспечения подсистем*:

— *методическое обеспечение* — документы, в которых отражены состав, правила отбора и эксплуатации средств автоматизированного проектирования;

— *математическое обеспечение* — совокупность математических методов, алгоритмов и моделей;

— *программное обеспечение* — совокупность программ, представленных в требуемой форме, вместе с необходимой документацией;

— *техническое обеспечение* — совокупность взаимодействующих технических средств для ввода, вывода, хранения, переработки, передачи данных, организации диалога человека с ЭВМ, изготовления проектной документации;

— *информационное обеспечение* — совокупность сведений и документов, содержащих описания стандартных проектных процедур, типовых проектных решений, типовых элементов конструкции, комплектующих изделий, материалов и другие данные;

— *лингвистическое обеспечение* — совокупность языков, терминов, понятий;

— *организационное обеспечение* — совокупность документов, регламентирующих организационную структуру подразделений и их взаимодействие с комплексом средств автоматизированного проектирования.

Основная проектная процедура. На каждом этапе проектирования конструктор многократно выполняет последовательность действий *синтез — анализ — принятие решения*, которую называют *основной проектной процедурой*.

Синтез — это процесс генерирования вариантов конструкции

и выбор одного или нескольких наиболее предпочтительных вариантов.

Анализ выполняют для окончательной оценки конкурирующих вариантов.

Принятие решения — процесс окончательного выбора проектного варианта по результатам анализа. Принятие решения выполняет проектировщик, тогда как процедуры синтеза и анализа могут быть автоматизированы с помощью ЭВМ.

Проектирование включает *эвристические* (творческие) и *алгоритмические* (рутинные) операции. Алгоритмические операции реализуют на ЭВМ. Это деление достаточно условно, так как изучение механизма творческой деятельности конструктора уже сейчас позволяет алгоритмизировать операции, ранее относившиеся к эвристическим.

Основным признаком, определяющим долю творческой деятельности в процессе проектирования, является неопределенность проекта. На начальных стадиях проектирования, когда неопределенность проектных параметров наибольшая, объем эвристических операций максимален. По мере уточнения проектных решений увеличивается доля алгоритмических операций.

Различают *структурный* и *параметрический анализ* и *синтез*. Сначала производится выбор структуры варианта конструкции, а затем выбор параметров варианта. Процедуры структурного анализа и синтеза формализуются наиболее трудно.

Пример автоматизированного проектирования кулачков. На рис.

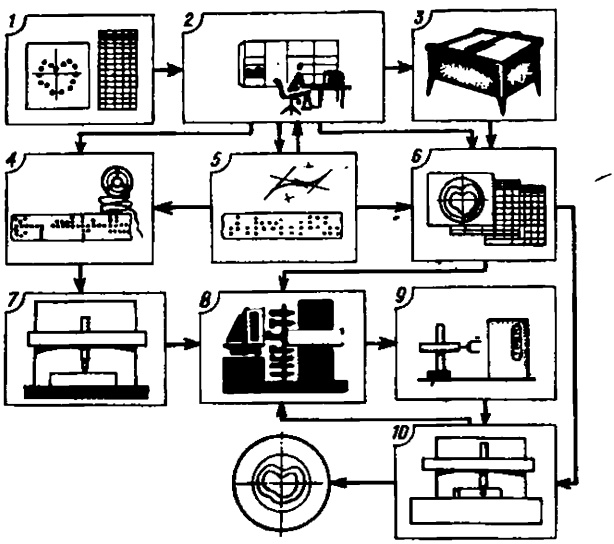


Рис. 2.7

2.7 показана система автоматизированного проектирования и изготовления (система CAD/CAM) кулачков.

Исходные данные для проектирования *1* вводят в оперативную память компьютера. В режиме диалога с помощью графического дисплея *2* производят проектирование кулачка. В блоке *5* реализуется программа параболической интерполяции профилей цилиндрических кулачков. При неавтоматизированном проектировании профили кулачков преимущественно составляют из отрезков и дуг окружностей, что приводит к возникновению ускорений бо́льших, чем при использовании параболической интерполяции. Опорные точки профиля кулачка задает конструктор, а интерполяция по этим точкам производится автоматизированно. Результаты интерполяции передаются на плоттер *3*, производящий всю конструкторскую документацию *6*, необходимую для дальнейшего производства и контроля кулачка, а также в процессор *4*, подготавливающий управляющие программы для оборудования с ЧПУ.

Кулачок изготовляют на газорезальной машине с ЧПУ *7*, фрезерном станке с ЧПУ *8* и закалочной машине с ЧПУ *9*. Контрольный автомат с ЧПУ *10* проверяет правильность изготовления кулачков. Информация о браке анализируется и передается конструктору.

Таким образом, в данной главе описана логика и изложены основные принципы процесса проектирования механических систем. Одним из основных направлений теории механизмов и машин является создание достоверных математических моделей механизмов и машин, без которых невозможен процесс проектирования и которые базируются на основных принципах механики и опыте проектирования и эксплуатации механизмов и машин различного назначения.

ГЛАВА 3

СТРОЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ

Выполнение функций машины по преобразованию энергии, материалов и информации связано с передачей и преобразованием механического движения. Изменение взаимного положения в пространстве материальных тел или положения частей данного тела определяется строением механизма. Звенья в механизме соединяются с помощью кинематических пар разного вида в зависимости от числа связей, накладываемых на относительное движение звеньев. Сочетание различных звеньев и пар возможно во многих вариантах. Эти варианты анализируются на основе структурной схемы механизма, которая может быть представлена графическим изображением и аналитической записью при использовании ЭВМ для анализа и синтеза механизмов различного назначения.

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Движение твердых тел в механизмах рассматривают относительно звена, принимаемого условно за неподвижное и называемого *стойкой* (станина станка, корпуса двигателя, шасси). Все остальные

твердые тела, совершающие движение относительно стойки, называют *подвижными звеньями*. Каждое звено может состоять из одной или нескольких деталей, но в составе звена они не могут иметь относительного движения, т. е. образуют неразъемные или разъемные *соединения* отдельных деталей.

По своим функциям звенья могут быть входными и выходными, ведущими и ведомыми, начальными и промежуточными. Входному звену сообщается движение, преобразуемое механизмом в движение других звеньев. Если звену приписываются одна или несколько обобщенных координат, определяющих положение всех механизмов относительно стойки, то звено называют *начальным*.

Если мощность приложенных к звену внешних сил положительна, то звено называют *ведущим*, если она отрицательна или равна нулю — *ведомым*.

В зависимости от назначения механизма звенья могут иметь функциональные названия: *кривошип, шатун, коромысло, поршень, шток, ползун, кулиса, кулачок, толкатель, зубчатое колесо, водило, сателлит, рычаг, траверса, коленчатый вал, распределительный вал* и др. (см. рис. 3.13, 3.16, 3.18, 3.19 и др.).

В конкретных механизмах входное звено может быть ведущим и ведомым на отдельных этапах движения в зависимости от приложенных сил и моментов сил, например вал двигателя в режимах разгона и торможения, вал электродвигателя при двигательном и генераторном режимах.

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называют *кинематической парой* или кратко *парой*. Пара при взаимодействии своих элементов допускает относительное движение звеньев. Число степеней свободы в относительном движении звеньев определяет *вид пары по подвижности*. Различают пары одноподвижные, двухподвижные, трехподвижные, четырехподвижные и пятиподвижные. Вид пары зависит от геометрических связей между элементами пары, т. е. от условий, ограничивающих перемещения звеньев. Число уравнений связей в паре принимают за *номер класса* пары.

Каждый элемент пары является совокупностью поверхностей, линий и отдельных точек звена. *Элемент* — обобщенный термин, относящийся к *номинальной поверхности*, форма которой задается в чертеже или в другой технической документации. Реальные поверхности и реальные профили элементов пар могут иметь *отклонения формы* и *отклонения расположения*. Числовое значение предельных отклонений нормируется допусками цилиндричности, круглости, плоскостности, прямолинейности, параллельности в зависимости от степени точности и интервала размеров. Поверхность — это общая часть двух смежных областей пространства. В теории механизмов рассматривают поверхности с идеальной формой и идеальным расположением (см. рис. 3.3). При несоблюдении этого условия в парах появляются *избыточные локальные связи*, так как уравнения связей не являются тождественными и пара становится статически неоп-

ределимой (см. рис. 3.5, 3.6, 3.7). Если элементы в кинематической паре конгруэнтны, т. е. поверхности совпадают во всех своих точках, то пару называют *низшей*. Пары с линейным и точечным соприкосновением элементов называют *высшими*. Линия — это общая часть смежных областей поверхности.

Систему звеньев, соединенных между собой парами, называют *кинематической цепью*. Различают *плоские* и *пространственные*, *замкнутые* и *незамкнутые*, *простые* и *сложные* кинематические цепи.

В *замкнутой цепи* звенья образуют один или несколько *контуров*. Контур может быть жестким или иметь степени свободы (см. рис. 3.9). Количество степеней свободы определяет *класс контура*. В *плоской цепи* все подвижные звенья совершают плоское движение, параллельное одной и той же неподвижной плоскости. В *простой цепи* звено входит в одну или две кинематические пары. В *сложной цепи* имеется хотя бы одно звено, образующее больше двух кинематических пар.

Аналогами кинематических пар являются *кинематические соединения*, выполненные из нескольких подвижных деталей с поверхностным, линейным или точечным контактом элементов в форме компактной конструкции, обеспечивающие возможность разложения относительного движения на составляющие, эквивалентные парам соответствующего вида (см. рис. 3.2).

Схему механизма, содержащую стойку, подвижные звенья, кинематические пары с обозначением их вида и указывающую взаимное расположение элементов механизма, называют *структурной схемой механизма*.

§ 3.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ И СОЕДИНЕНИЯ

Наиболее широкое применение в механизмах машин, приборов и других устройств получили *вращательные пары* (*В*), которые допускают только одно вращательное движение одного звена относительно другого. На структурных и кинематических схемах они имеют условные обозначения по рекомендациям международных стандартов (рис. 3.1, *а*). Номинальные поверхности элементов вращательной пары обычно цилиндрические (рис. 3.1, *б*), но могут иметь и другие формы (например, конические, сферические). На рис. 3.1, *в* приведена структурная схема манипулятора промышленного робота, на которой указаны шесть вращательных пар: *О* (*О* — *1*), *А* (*1*—*2*), *В* (*2*—*3*), *С* (*3*—*4*), *D* (*4*—*5*), *Е* (*5*—*6*),— связывающих звенья с соответствующими номерами. Схват *б'* имеет шесть степеней свободы, что равно числу одноподвижных пар такой незамкнутой кинематической цепи. В реальных конструкциях часто используют кинематические соединения, которые содержат несколько подвижных звеньев и несколько кинематических пар, но в таком аналоге вращательной пары только два звена должны соединяться с другими звеньями механизма. На рис. 3.2, *а* приведена конструкция

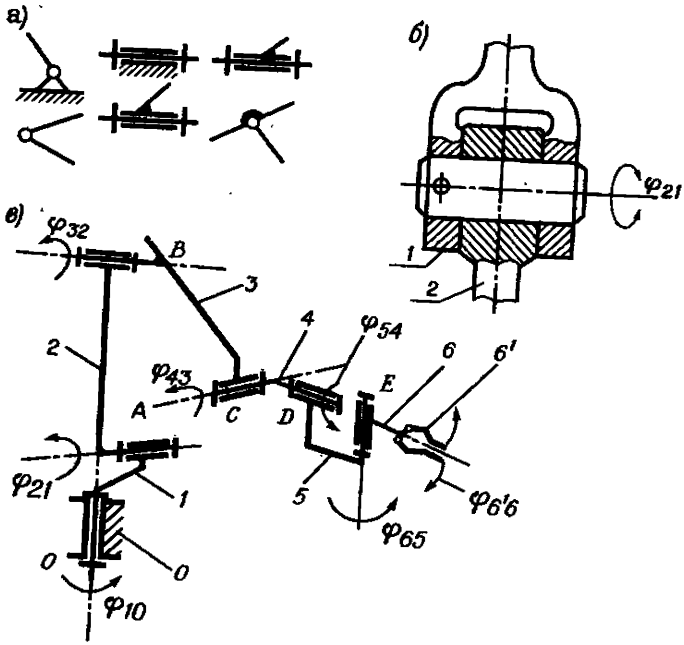


Рис. 3.1

подшипника качения, имеющего наружное *1* и внутреннее *2* кольца, между которыми расположены шарики *3*, удерживаемые на определенном расстоянии друг относительно друга с помощью сепаратора *4*. В зависимости от направления воспринимаемой радиальной F_r или осевой F_a силы различают подшипники радиальные (рис. 3.2, *б*), упорные (рис. 3.2, *в*) и радиально-упорные (рис. 3.2, *г*). На схемах

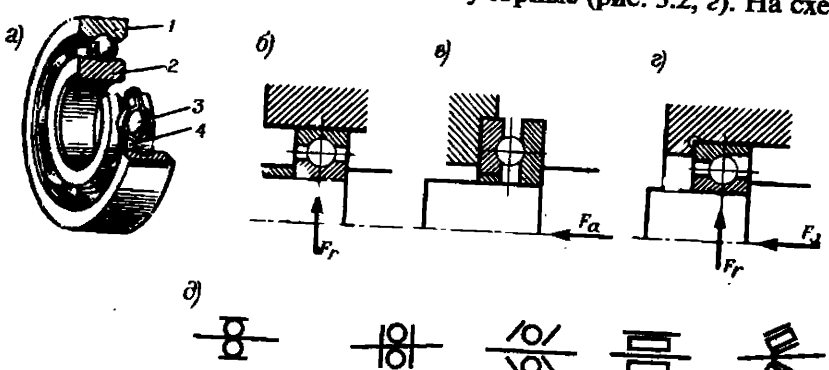


Рис. 3.2

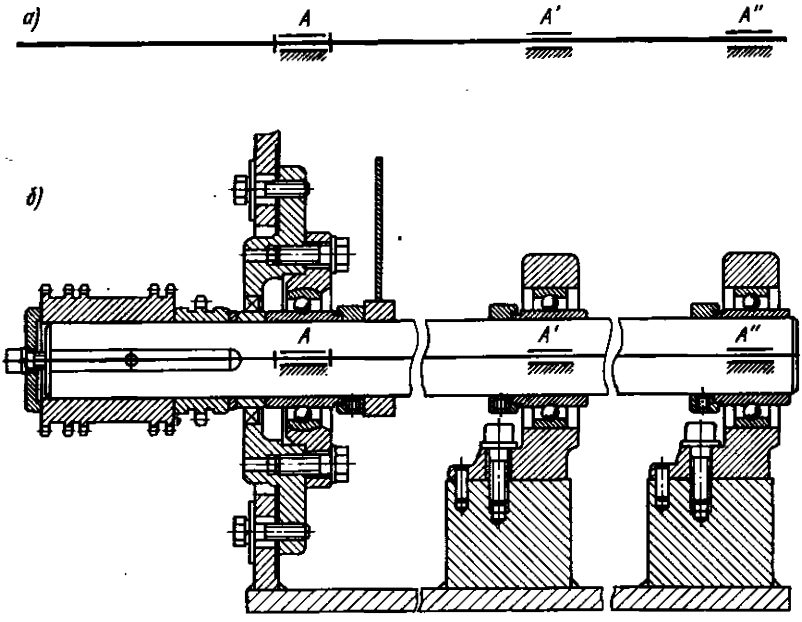


Рис. 3.3

используют соответствующие условные обозначения (рис. 3.2, *д*).

Рабочие поверхности в подшипниках скольжения могут иметь непосредственный контакт (сухое трение), быть разделены жидкостью (жидкостные, гидростатические, гидродинамические подшипники), газом (аэродинамические, аэростатические газовые) или разделены магнитными силами (магнитные опоры).

Применение кинематических соединений вместо вращательной пары позволяет уменьшить потери на трение, упростить технологию изготовления узлов за счет применения стандартных подшип-

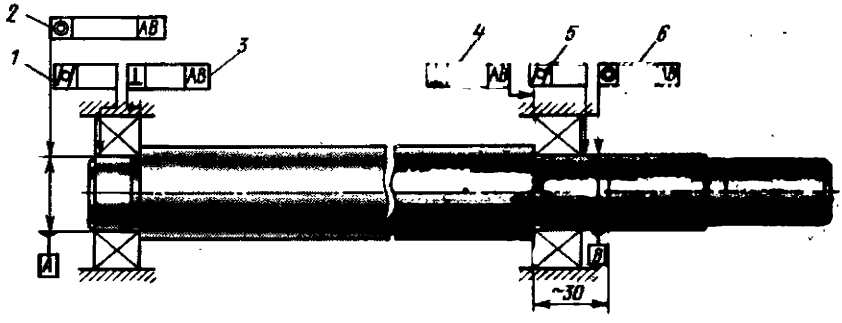


Рис. 3.4

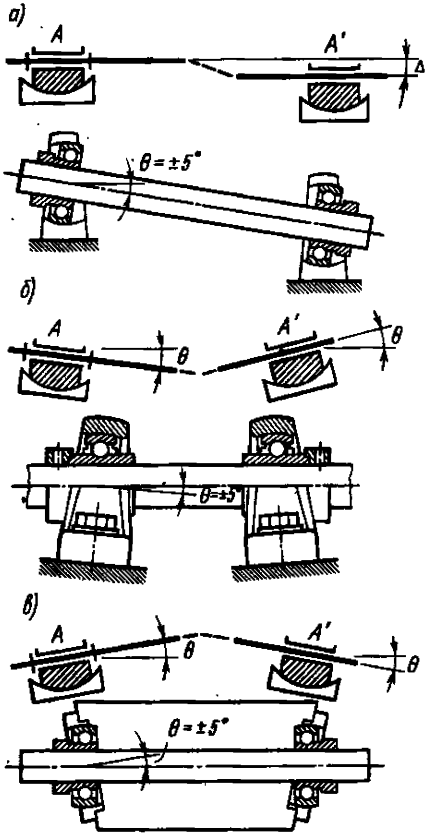


Рис. 3.5

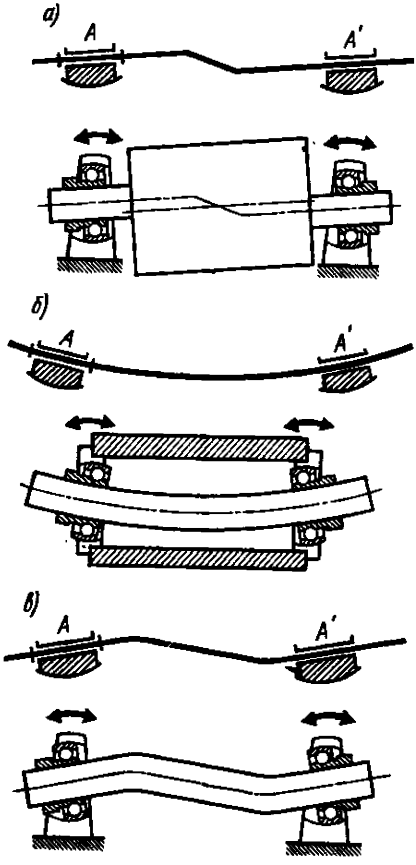


Рис. 3.6

ников, увеличить несущую способность узлов машин. Схему кинематической пары, отражающей только необходимое число геометрических связей, называют *основной*. Основная схема пары не содержит избыточных связей. *Действительная* схема пары может содержать дополнительные связи, но они должны быть *тождественными* (совпадающими). Устранение избыточных локальных связей в кинематическом соединении при установке валов и осей на нескольких подшипниках обеспечивается надлежащей точностью изготовления деталей и монтажа сборочных единиц. На рис. 3.3 длинный вал установлен на трех шариковых подшипниках: A, A', A''. Соосность базовых поверхностей (рис. 3.3, *а*) подшипников зависит от точности расточки отверстий в корпусных деталях и может регулироваться при установке корпусов подшипников на станине (рис. 3.3, *б*) в случае отклонений от прямолинейности общей оси $AA'A''$ за счет

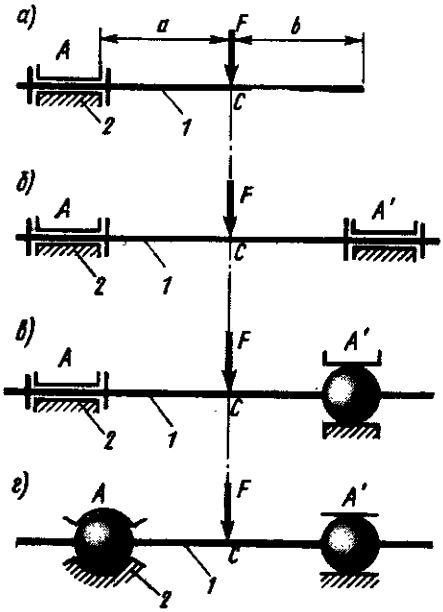


Рис. 3.7

смещения или наклона осей отдельных подшипников. При разработке технической документации на кинематические соединения обычно указывают предельные отклонения от параллельности поверхностей вращения, отклонения от соосности (радиальное биение), отклонения от концентричности, отклонения от перпендикулярности согласно ГОСТ 24642—81 и 24643—81.

Для примера на рис. 3.4 приведено схематическое изображение двухопорного вала с указанием для шеек *A* и *B* допусков цилиндричности (поз. *1* и *5*), соосности (поз. *2* и *6*) и перпендикулярности торцов (поз. *3* и *4*), которые должны быть выдержаны при шлифовании вала. Аналогичные требования предъявляются и при изготовлении отверстий в базовой детали (корпусе). В некоторых конструкциях (рис. 3.5) отклонения от прямолинейности из-за несоосности корпусных отверстий (рис. 3.5, *а*) или наклона осей (рис. 3.5, *б*, *в*) компенсируются с помощью сферической внешней поверхности наружного кольца шарикоподшипника и сферической поверхности в корпусе подшипникового узла. При надлежащей сборке узлов обеспечиваются прямолинейность оси кинематического соединения и тождественность геометрических связей за счет исключения избыточных связей.

При значительных отклонениях оси вала от прямолинейности (рис. 3.6) вал устанавливают на специальных подшипниках, имеющих сферическую внешнюю поверхность наружного кольца. Такое кинематическое соединение обеспечивает вращение вала при наличии отклонения шеек *A* и *A'* вала от соосности (рис. 3.6, *а*) и прямолинейности (рис. 3.6, *б*, *в*).

Число дополнительных связей в реальной конструкции пары или кинематического соединения называют *степенью статической неопределимости* пары.

На рис. 3.7, *а* показан консольный вал *1* с цилиндрической опорой *2*, нагруженной в точке *C* силой *F*. В опоре *A* можно методами статики найти реактивный момент и реакцию, а также прогибы в любой точке вала. Прогиб в точке *C* при условии $a=b$ можно уменьшить в 8 раз, если ввести в конструкцию тождествен-

ные элементы A' с пятью дополнительными связями (рис. 3.7, *б*). Число тождественных локальных связей можно уменьшить, если на правом конце вала установить плавающий сферический подшипник (рис. 3.7, *в*), дающий только две дополнительные связи в опоре A'. Если вал установить в виде кинематического соединения с двумя сферическими подшипниками, из которых один плавающий, а второй неподвижен в осевом направлении (рис. 3.7, *г*), то вал становится статически определимым, а в опорах реактивные моменты равны нулю. Однако прогиб такого вала в точке C (при $a=b$) меньше прогиба для консольного вала только в два раза. Отсутствие избыточных локальных связей делает конструкцию пары нечувствительной к температурным и силовым деформациям вала и корпуса, а также к отклонениям в расположении осей элементов соединения.

Из приведенных примеров видно, что применение тождественных элементов приводит к уменьшению допусков на форму и расположение сопрягаемых поверхностей, что обеспечивает сборку без деформации звеньев в кинематической цепи и устранение дополнительных сил в кинематических парах. Повышение точности сопряжений повышает затраты на изготовление, зато повышаются жесткость и несущая способность валов и осей, надежность и долговечность машины. Поэтому вопрос о допустимости тождественных связей, которые при деформации стойки или других звеньев могут быть избыточными, решается с учетом условий работы кинематической пары, затрат на изготовление, ремонт и эксплуатацию машины.

Оптимальная конструкция пары или соединения — понятие относительное: конструкция, оптимальная для одних условий, может быть неприемлемой для других. Оптимизация часто связана с технологичностью, под которой понимают совокупность свойств конструкции, проявляемых в оптимальных затратах труда, материалов, средств и времени при заданных показателях качества, объема выпуска, условиях изготовления, эксплуатации и ремонта машины. Конструкция, вполне технологичная в единичном производстве, зачастую оказывается мало технологичной в массовом производстве и совершенно нетехнологичной в поточно-автоматизированном производстве (и наоборот).

В табл. 3.1 приведены схемы и условные обозначения основных видов кинематических пар. Каждой паре в реальных конструкциях могут соответствовать конструктивные варианты кинематических соединений в виде нескольких деталей, имеющих различное сочетание местных подвижностей, не влияющих, однако, на основную подвижность пары. Например, роликовый подшипник эквивалентен двухподвижной цилиндрической паре; шарикоподшипник сферический, допускающий перекосы осей в определенных пределах, эквивалентен сферической трехподвижной паре; упорный шарикоподшипник со сферической наружной поверхностью, установленный на конусной поверхности, эквивалентен пятиподвижной точечной паре.

Кинематические соединения обычно имеют большое число избыточных локальных связей. Они могут быть устранены по принципу многопоточности. В таких конструкциях за счет высокой точности изготовления (например, шариков и колец в шарикоподшипниках) избыточные локальные связи переводят в тождественные. При этом статическая неопределимость соединения не оказывает вредного влияния на функционирование вращательной пары.

Таблица 3.1

Вид пары и ее код	Схема пары и ее подвижности	Подвижность пары	Условные обозначения пары на структурных и кинематических схемах
Вращательная [1 В]; [100]		1	
Поступательная [1 П]; [010]		1	
Винтовая [1 ВИ]; [001]		1	
Цилиндрическая [2 Ц]; [110]		2	

Вид пары и ее код	Схема пары и ее подвижности	Подвижность пары	Условные обозначения пары на структурных и кинематических схемах
Сферическая [3 С]; [300]		3	
Плоскостная [3 Пл]; [120]		3	
Линейная [3 Л]; [120] / [4 Л]; [220]		3 / (4)	W-3 W=4
Точечная [5 Т]; [320]	n t t n	5	

§ 3.3. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

При анализе структурной схемы механизма определяют число подвижных звеньев, вид кинематических пар, число степеней свободы механизма, число замкнутых контуров и их класс, число избыточных контурных связей.

Положение твердого тела в пространстве определяется шестью независимыми координатами. Так как основная система отсчета обычно связана со стойкой, то общее число координат, определяющее положение n подвижных звеньев, равно $6n$ для пространственного механизма и $3n$ для плоского механизма. Число накладываемых связей, а следовательно, и число уравнений связи зависят от подвижности пары i и числа пар каждого вида (p_1 — одноподвижных, p_2 — двухподвижных, p_3 — трехподвижных, p_4 — четырехподвижных, p_5 — пятиподвижных). Следовательно, общее число уравнений связи составит $\sum_{i=1}^{5} (6-i)p_i$.

Тогда число W степеней свободы пространственного механизма равно разности между общим числом координат подвижных звеньев и числом уравнений, связывающих эти координаты:

$$W=6n-\sum_{i=1}^{5}(6-i)p_i=6n-(5p_1+4p_2+3p_3+2p_4+p_5). \qquad (3.1)$$

Эта формула с несколько иными обозначениями была обоснована П. О. Сомовым (1887), Х. И. Гохманом (1890), А. П. Малышевым (1923). В литературе ее называют структурной формулой Сомова — Малышева.

Для плоских механизмов пары могут быть *одноподвижными* (низшие) и *двухподвижными* (высшие), и они не связаны с видами пар, различаемых по подвижности, так как звенья совершают только плоское движение. Тогда число $W_п$ степеией свободы плоского механизма определяется выражением

$$W_п=3n-2p_1-p_2=3n-2p_н-p_в. \qquad (3.2)$$

Это соотношение опубликовано П. Л. Чебышевым в 1869 г. в несколько иной форме. Однако выражение (3.2) в литературе называют формулой Чебышева.

В механизмах могут встретиться тождественные (дублирующие, пассивные) связи, число которых обозначают через q и определяют по соотношению

$$q=W-6n+(5p_1+4p_2+3p_3+2p_4+p_5). \qquad (3.3)$$

Избыточные контурные связи могут возникнуть только в замкнутой кинематической цепи, причем нельзя указать, какая связь является избыточной, а можно только подсчитать число этих связей в контуре.

Число k замкнутых контуров кинематической цепи определяют по формуле

$$k=\sum_{i=1}^{5}p_i-n=p_\Sigma-n. \qquad (3.4)$$

Эта формула была предложена Х. И. Гохманом в 1890 г. и известна в литературе под его именем.

Применение этих формул можно показать на примере анализа механизма, изображенного на рис. 3.8, *а*.

В механизм входят пять подвижных звеньев $n=5$, семь одноподвижных вращательных пар $p_1=7$, стойка (звено *6*).

Число степеней свободы плоского механизма находят по формуле (3.2):

$$W_п=3n-2p_1-p_2=3\cdot5-2\cdot7=1;$$

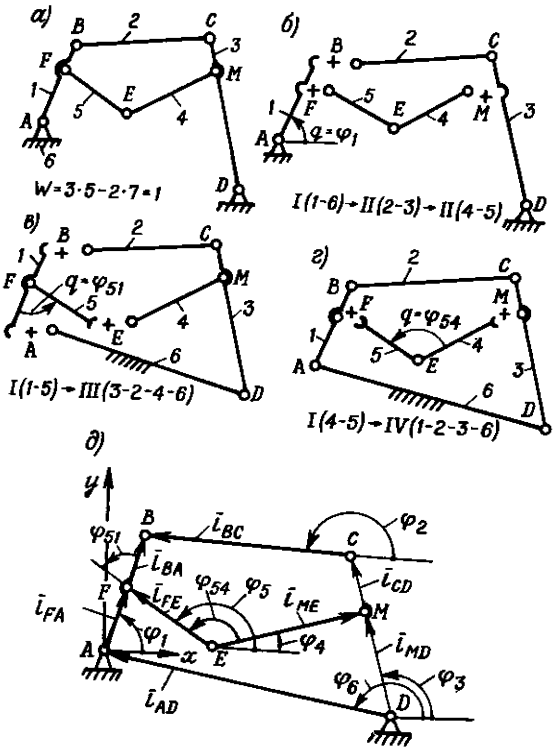


Рис. 3.8

число степеней свободы пространственного механизма — по формуле (3.1):

$$W=6n-(5p_1+4p_2+3p_3+2p_4+p_5)=6\cdot 5-5\cdot 7=-5,$$

т. е. кинематическая цепь статически неопределима и содержит несколько избыточных контурных связей;

число замкнутых контуров механизма — по формуле (3.4):

$$k=p_\Sigma-n=7-5=2.$$

Принимая подвижность основной схемы механизма $W_0=1$, подсчитывают число избыточных связей по формуле (3.3):

$$q=W_0-6n+5p_1=1-6\cdot 5+5\cdot 7=6.$$

Исключить эти избыточные контурные связи можно заменяя одноподвижные пары парами с большей подвижностью. В данном случае в каждом контуре необходимо ввести по три дополнительные подвижности. Это, например, можно сделать, если в контуре ис-

пользовать взамен двух одноподвижных пар одну сферическую и одну цилиндрическую пару. Тогда для механизма $p_\Sigma = 7$, но $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$;

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 = 6 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 1 = W_0;\ q = 0.$$

Число степеней свободы механизма равно числу независимых вариаций обобщенных координат. При $W_0 = 1$ обобщенная координата приписывается начальной кинематической паре (начальному двухзвеннику). Если одно из звеньев начальной пары является стойкой, то второе звено называют *начальным звеном*.

Так как обобщенные координаты приписываются начальному двухзвеннику или начальному звену, то совокупность остальных звеньев механизма должна обладать *нулевой подвижностью*.

Кинематическая цепь, число степеней свободы которой относительно элементов ее внешних кинематических пар равно нулю, называют *структурной группой*, если из нее нельзя выделить более простые кинематические цепи, удовлетворяющие этому условию.

Для плоского механизма условию $3n - 2p_1 = 0$ удовлетворяют следующие варианты структурных групп:

n	2	4	6	8
p_1	3	6	9	12

т. е. группы двухзвенные, четырехзвенные, шестизвенные и т. д.

Основой структурной группы является замкнутый контур. *Класс контура* определяется числом пар, в которые входят образующие его звенья.

Начальному двухзвеннику присваивают I класс (контур вырождается в точку), звену с двумя парами — II класс (контур вырождается в прямую), жесткому звену с тремя парами — III класс (треугольник), контуру с четырьмя парами — IV класс, контуру с пятью парами — V класс (рис. 3.9).

Класс структурной группы определяется классом наивысшего номера контура, входящего в состав группы.

Порядок группы определяется количеством элементов кинематических пар (поводков), которыми группа присоединяется к начальным звеньям и стойке или к звеньям предшествующих структурных групп (рис. 3.9).

Для примера на рис. 3.10 изображены схемы структурных групп II класса 2-го порядка (двухзвенные, обычно называемые двухповодковыми группами Ассура) *разных видов*, различающиеся сочетанием вращательных (*В*) и поступательных (*П*) пар по отношению к внутренней паре: *ВВВ*, *ВВП*, *ВПВ*, *ПВП*, *ВПП*.

На рис. 3.9 показаны также структурные группы III и IV классов.

Схема					
Класс контура	I	II	III	IV	V
Порядок	1	2	3	2	3

Рис. 3.9

Если внешние элементы поводков присоединить к основанию (показано штрихпунктирными линиями), то получится статически определимая ферма (с нулевой подвижностью).

Выделение в составе механизма структурных групп обычно обусловлено построением алгоритмов расчета кинематических и силовых характеристик механизма. Это особенно важно при графических методах исследования и разработке программ расчета параметров механизма на ЭВМ (модульный принцип разработки алгоритмов). Однако при современном уровне развития ЭВМ трудоемкость вычислений иногда не играет существенной роли. Поэтому можно использовать уравнения связей в неявной форме и решать систему нелинейных уравнений методами, разработанными в вычислительной математике.

Однако если структурный анализ имеет целью облегчить составление алгоритмов расчета кинематических передаточных функций, то необходимо обратить внимание на то, что при одной и той же структурной схеме механизма его строение зависит от выбора входной кинематической пары. На рис. 3.8, *а* приведена схема шести-

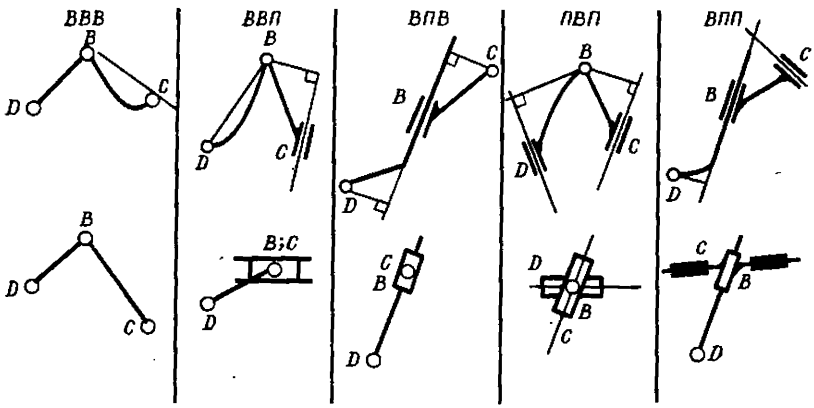


Рис. 3.10

звенного шарнирного механизма, звенья которого образуют два замкнутых контура ($k=\sum p_1-n=7-5=2$).

Если за начальную пару принять пару *A* между звеном *1* и стойкой *6* и приписать ей обобщенную координату φ_1, то в механизме можно выделить две последовательно присоединяемые двухповодковые группы: *BCD* (звенья *2* и *3*) и *MEF* (звенья *4* и *5*) (см. рис. 3.8, *б*). По структуре это будет механизм II класса.

Если за начальную принять пару *F* между подвижными звеньями *1* и *5* (см. рис. 3.8, *в*) и приписать ей обобщенную координату φ_{51}, то структурная группа будет состоять из базисного звена *3* с тремя шарнирами (контур III класса), к которым присоединены три поводка: звенья *2*, *4* и стойка *6* с внешними парами *B*, *E*, *A*. По структуре это механизм III класса 3-го порядка. Графическое исследование кинематики такого механизма обычно основано на применении *особых точек Ассура* (см. гл. 4). Если за начальную пару принять пару *E* между подвижными звеньями *4* и *5* (см. рис. 3.8, *г*) и приписать ей обобщенную координату φ_{54}, то структурная группа представляет контур *ABCD* с четырьмя парами (контур IV класса). Эта группа присоединяется к звеньям *4* и *5* начальной пары шарнирами *F* и *M*, т. е. по структуре это механизм IV класса 2-го порядка. Графическое исследование кинематики такого механизма обычно основано *на методе ложных положений*.

На примере этого механизма можно показать, что система неявных уравнений связи не зависит от структурного анализа механизма. Угловые координаты звеньев относительно основной системы отсчета φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 или относительные угловые координаты между двумя звеньями φ_{51}, φ_{54} можно определить из векторных уравнений контуров *ABCD* и *AFEMD* или системы тригонометрических уравнений, если эти уравнения спроецировать на координатные оси (см. рис. 3.8, *д*):

$$\bar{l}_{BA}-\bar{l}_{BC}-\bar{l}_{CD}+\bar{l}_{AD}=0 \qquad \text{(контур } ABCD\text{)};$$

$$\bar{l}_{FA}-\bar{l}_{FE}+\bar{l}_{ME}-\bar{l}_{MD}+\bar{l}_{AD}=0 \qquad \text{(контур } AFEMD\text{)}.$$

В качестве независимой переменной надо назначать одну из координат φ_1; $\varphi_{54}=\varphi_5-\varphi_4$; $\varphi_{51}=\varphi_5-\varphi_1$, считая ее обобщенной координатой механизма. В форме проекций эти векторные уравнения записывают в виде системы тригонометрических уравнений:

$$l_{BA}\cos\varphi_1-l_{BC}\cos\varphi_2-l_{CD}\cos\varphi_3+l_{AD}\cos\varphi_6=0;$$

$$l_{BA}\sin\varphi_1-l_{BC}\sin\varphi_2-l_{CD}\sin\varphi_3+l_{AD}\sin\varphi_6=0;$$

$$l_{FA}\cos\varphi_1-l_{FE}\cos\varphi_5+l_{ME}\cos\varphi_4-l_{MD}\cos\varphi_3+l_{AD}\cos\varphi_6=0;$$

$$l_{FA}\sin\varphi_1-l_{FE}\sin\varphi_5+l_{ME}\sin\varphi_4-l_{MD}\sin\varphi_3+l_{AD}\sin\varphi_6=0;$$

$$\varphi_5=\varphi_4+\varphi_{54};$$

$$\varphi_5=\varphi_1+\varphi_{51}.$$

Если в качестве обобщенной координаты назначить φ_1, то из первых двух уравнений находят φ_2 и φ_3 при остальных заданных параметрах, а из следующей пары уравнений находят φ_4 и φ_5, т. е. для механизма II класса система уравнений разделяется на две подсистемы, в каждой из которых содержатся две неизвестные угловые координаты в качестве аргументов тригонометрических функций.

Для структурной группы III класса 3-го порядка по заданным размерам звеньев и массиву $\{\varphi_{51}, \dot{\varphi}_{51}, \ddot{\varphi}_{51}\}$ кинематических элементов начальной пары F необходимо найти значения элементов массивов D для трех пар: B, E и C, т. е. DB, DC и DE:

$$DB=\{x_B,\ y_B,\ \dot{x}_B,\ \dot{y}_B,\ \ddot{x}_B,\ \ddot{y}_B\};\quad DE=\{x_E,\ y_E,\ \dot{x}_E,\ \dot{y}_E,\ \ddot{x}_E,\ \ddot{y}_E\};$$

$$DC=\{x_C,\ y_C,\ \dot{x}_C,\ \dot{y}_C,\ \ddot{x}_C,\ \ddot{y}_C\}.$$

Здесь в скобках обозначены элементы массивов.

Для структурной группы IV класса 2-го порядка по заданным размерам звеньев и массиву $\{\varphi_{54}, \dot{\varphi}_{54}, \ddot{\varphi}_{54}\}$ кинематических элементов начальной пары E необходимо найти значения элементов массивов для трех пар: E, F, M или E, B и C. При таком формировании искомых параметров при составлении функций положения используют условие совпадения положений пары в двух смежных разомкнутых цепях, т. е. выражают точки пересечения двух окружностей с заданными радиусами и центрами в двух внешних парах по отношению к внутренней паре.

§ 3.4. КОНТУРНЫЕ ИЗБЫТОЧНЫЕ СВЯЗИ В КВАЗИПЛОСКИХ МЕХАНИЗМАХ И ИХ ИСКЛЮЧЕНИЕ

Схему механизма, отражающую только заданное число степеней свободы механизма W_0 при отсутствии избыточных контурных связей ($q=0$), называют *основной структурной схемой* или схемой с самоустанавливающимися звеньями. Основная структурная схема механизма имеет определенные свойства:

— расположение элементов кинематических пар обеспечивает беспрепятственную сборку (образование соединений) замкнутых кинематических контуров без дополнительных деформаций звеньев;

— возможные деформации стойки или других звеньев под действием активных нагрузок не влияют на силы в кинематических парах, значения которых определяются из условий кинетостатического равновесия статически определимой системы;

— изменение расположения элементов кинематических пар при деформации стойки не оказывает существенного влияния на положение звеньев механизма.

Плоские механизмы могут иметь пространственную основную структурную схему. Такие механизмы называют *квазиплоскими* (от лат. квази — почти, близко), так как при их кинематическом и сило-

вом исследовании можно использовать методики и способы, справедливые строго только для плоских механизмов.

Число избыточных контурных связей в механизме определяется соотношением (3.3):

$$q = W_0 - 6n + 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5.$$

При анализе структуры конкретных механизмов полезно использовать метод непринужденной сборки контура механизма при наличии отклонений от номинала в размерах и расположении элементов кинематических пар. На рис. 3.11, *а* приведена схема шарнирного четырехзвенника *ABCD* со звеньями *1*, *2*, *3*, *4*. Оси $z_A^{(1)}$, $z_A^{(4)}$, $z_B^{(1)}$, $z_B^{(2)}$, $z_C^{(2)}$, $z_C^{(3)}$, $z_D^{(3)}$ и $z_D^{(4)}$ имеют отклонения от перпендикулярности плоскости, параллельно которой должны двигаться звенья плоского механизма. Если эти отклонения незначительны, то механизм является квазиплоским; если они влияют на движение звеньев, то механизм является пространственным.

Если при сборке кинематических пар последней собирать, например, вращательную пару *C*, то необходимо совместить соответствующие элементы этой пары, т. е. совместить оси $z_C^{(2)}$ и $z_C^{(3)}$, связан-

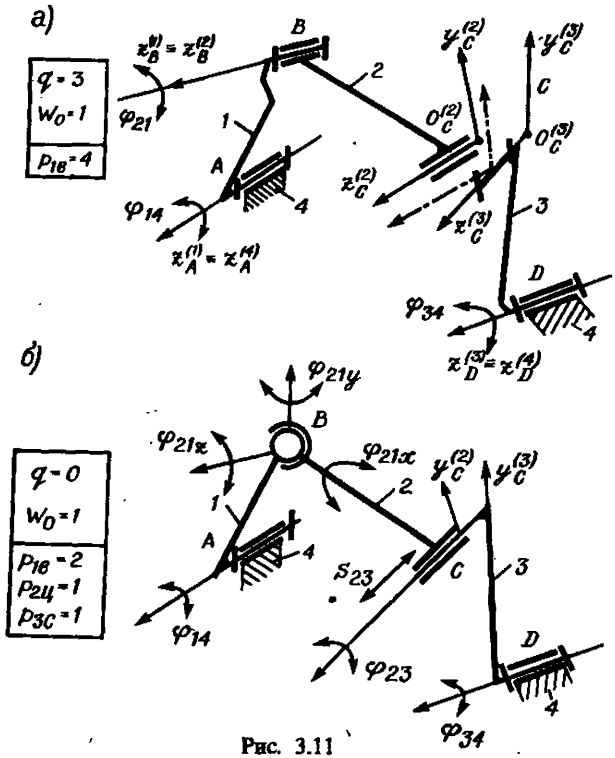


Рис. 3.11

ные соответственно с звеньями *2* и *3* в паре *C*. Но при наличии в контуре только вращательных пар это становится невозможным, так как оси $z_C^{(2)}$ и $z_C^{(3)}$ перекрещиваются. Их совмещению препятствуют три избыточные связи (отсутствие двух угловых подвижностей для совпадения направления осей и одной линейной подвижности вдоль этой оси до совпадения опорных торцевых элементов во вращательной паре).

Две дополнительные угловые подвижности φ_{21x} и φ_{21y} в паре *B* можно обеспечить заменой вращательной пары на сферическую (рис. 3.11, *б*). Линейная подвижность S_{23} в паре *C* появится, если вращательную пару *C* заменить на двухподвижную цилиндрическую пару.

Повышение подвижностей в парах *B* и *C* обеспечивает сборку контура без натягов и деформации звеньев и непринужденную работу механизма во время его движения. Такие механизмы Л. Н. Решетов назвал *самоустанавливающими* [7].

Число избыточных связей при $p_{1в}=2$; $p_{2ц}=1$; $p_{3с}=1$ равно нулю:

$$q=W_0-6n+5p_1+4p_2+3p_3=1-6\cdot 3+5\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot 1=0.$$

Если механизм выполнить по плоской схеме (рис. 3.12, *а*), то он имеет основную подвижность $W_0=1$, определяемую по формуле Чебышева (3.2), так как механизм содержит три подвижных звена, три вращательные одноподвижные пары $p_{2в}=3$ и одну поступательную пару $p_{1п}=1$:

$$W_п=3n-2p_1-p_2=6\cdot 3-2\cdot 4=1.$$

Если в силу отклонений в расположении элементов кинематических пар за счет погрешностей при изготовлении или деформаций стойки механизм считать пространственным, то следует определить число избыточных связей по формуле (3.3):

$$q=W_0-6n+5p_1=1-6\cdot 3+5\cdot 4=3.$$

Для исключения этих трех избыточных связей следует увеличить подвижность кинематических пар, т. е. применить двухподвижные цилиндрические и трехподвижные сферические пары (рис. 3.12, *д*): $p_{1в}=1$; $p_{1п}=1$; $p_{2ц}=1$; $p_{3с}=1$:

$$q=W_0-6n+5p_1+4p_2+3p_3=1-6\cdot 3+5\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot 1=0.$$

Если шатун соединить сферическими парами *B* и *C* с ползуном и кривошипом, то появится одна местная $W_м$ подвижность — вращение шатуна относительно своей продольной оси (рис. 3.12, *в*):

$$p_{1в}=1;\ p_{1п}=1;\ p_{3с}=2;\ W_0=1;\ W_м=1.$$

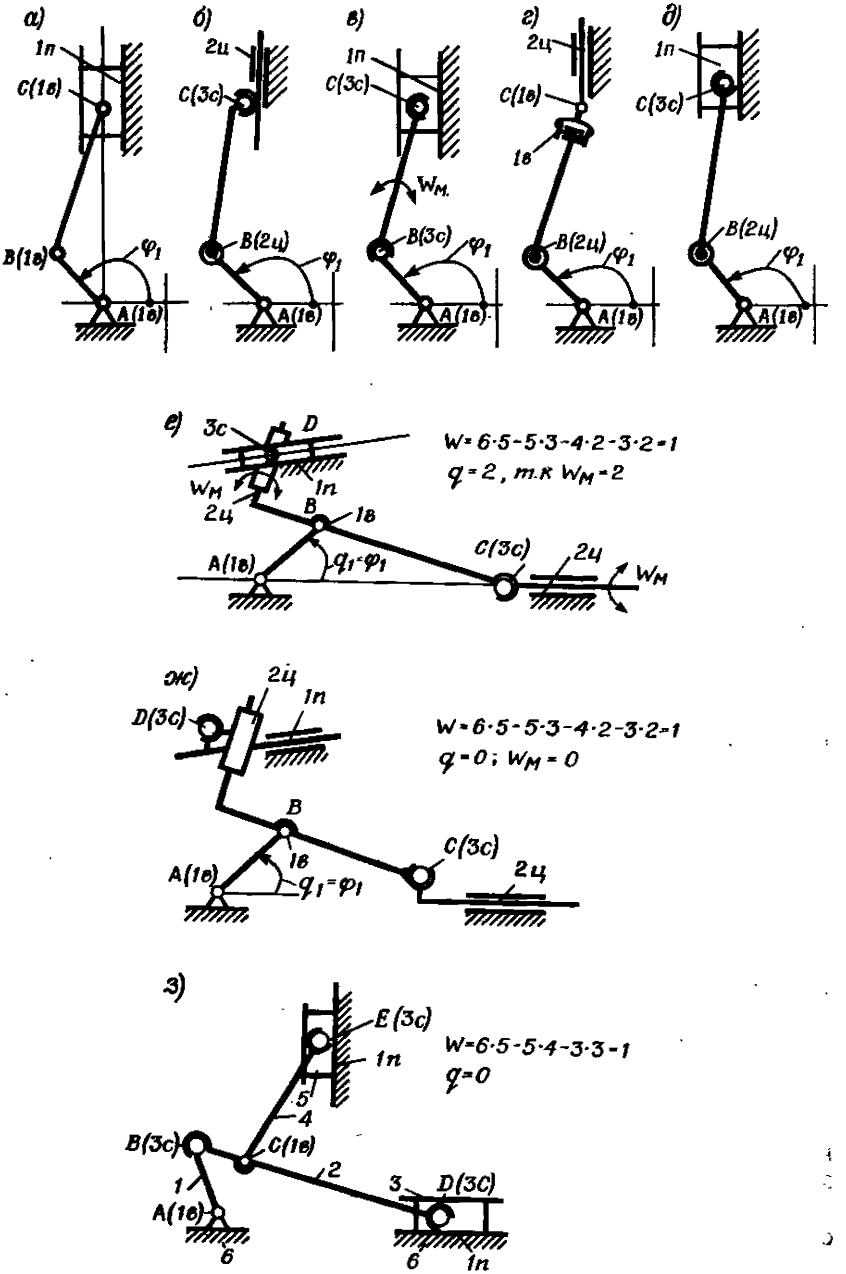

а)
1п
С(1в)
В(1в)
φ1
А(1в)
б)
2ц
С(3с)
В(2ц)
φ1
А(1в)
в)
1п
С(3с)
Wм
В(3с)
φ1
А(1в)
г)
2ц
С(1в)
1в
В(2ц)
φ1
А(1в)
д)
1п
С(3с)
В(2ц)
φ1
А(1в)
е)
3с
D
Wм
2ц
1п
В
1в
А(1в)
q1-φ1
С(3с)
2ц
Wм
W=6·5-5·3-4·2-3·2=1
q=2, т.к Wм=2
ж)
2ц
1п
D(3с)
В
1в
А(1в)
q1=φ1
С(3с)
2ц
W=6·5-5·3-4·2-3·2=1
q=0; Wм=0
з)
E(3с)
1п
5
4
В(3с)
С(1в)
2
1
А(1в)
6
3
D(3С)
6
1п
W=6·5-5·4-3·3-1
q=0

Рис 3.12

Тогда

$$q = W_0 + W_м - 6n + 5p_1 + 3p_3 = 1 + 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 0.$$

Если выбрать пары так, как это показано на рис. 3.12, *б*, то появляется одна групповая $W_г$ подвижность звеньев шатун — ползун при неподвижном кривошипе: $p_{1в} = 1$; $p_{2ц} = 2$; $p_{3с} = 1$; $W_0 = 1$; $W_г = 1$.

Тогда

$$q = W_0 + W_г - 6n + 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 = 1 + 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0.$$

Проф. Л. Н. Решетов рекомендует в кривошипно-ползунном механизме взамен сферических пар в необходимых случаях использовать кинематическое соединение с одним дополнительным звеном и двумя вращательными парами (рис. 3.12, *г*): $n = 4$; $p_1 = 3$; $p_2 = 2$; $W_0 = 1$. При этом

$$q = W_0 - 6n + 5p_1 + 4p_2 = 1 - 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 0.$$

Таким образом, исключение избыточных связей является многовариантным процессом.

При рассмотрении примеров двухконтурного механизма (рис. 3.12, *е*, *ж*, *з*) следует обратить внимание на возможность появления местных подвижностей, которые должны быть выявлены до подсчета избыточных связей.

В механизме, изображенном на рис. 3.12, *в*, имеются две местные подвижности, так как центры сферических пар расположены на осях цилиндрических пар: $n = 5$; $p_{1в} = 2$; $p_{1ц} = 1$; $p_2 = 2$; $p_3 = 2$; $W_0 = 1$; $W_м = 2$.

Тогда

$$q = W_0 + W_м - 6n + 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 = 1 + 2 - 6 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2.$$

При двух избыточных связях условие беспрепятственной сборки контуров не выполняется. В данном случае можно устранить местные подвижности, сместив центры сферических пар с осей цилиндрических пар (рис. 3.12, *ж*): $n = 5$; $p_{1в} = 2$; $p_{1ц} = 1$; $p_2 = 2$; $p_3 = 2$; $W_0 = 1$.

Тогда

$$q = W_0 - 6n + 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 = 1 - 6 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 0,$$

т. е. при тех же кинематических парах механизм уже не содержит избыточных связей и его схема допускает непринужденную сборку замкнутых контуров.

Л. Н. Решетов на примере кривошипно-ползунного механизма с прицепным шатуном показал, что излишнюю подвижность в одном контуре можно передавать в последующий контур, применяя самоустанавливающуюся плоскую группу звеньев с тремя внеш-

ними сферическими парами (рис. 3.12, *з*): $n=5$; $p_{1в}=2$; $p_{1п}=2$; $p_3=3$; $W_0=1$.

Тогда

$$q=W_0-6n+5p_1+3p_3=1-6\cdot5+5\cdot4+3\cdot3=0.$$

Для примера на рис. 3.12 приведены структурные схемы кривошипно-ползунного механизма, используемого во многих машинах и устройствах.

§ 3.5. СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

При анализе структурной схемы механизма было выявлено, что механизм можно разделить на начальные пары (начальные звенья) и структурные группы с нулевой подвижностью:

$$W=W_0+\varnothing+\varnothing+...+\varnothing.$$

В соответствии с этим при синтезе используют принцип наслоения структурных групп (групп Ассура) к начальным звеньям и стойке или к ранее присоединенным структурным группам. При этом предполагается, что кинематические функции положения, скорости и ускорения внешних пар поводков структурной группы являются заданными или уже вычисленными на предшествующем этапе синтеза или анализа.

Для контура II класса (одно звено с двумя парами) должны выполняться следующие уравнения:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=2;$$

$$W_г=6n_г-(5p_1+4p_2+3p_3+2p_4+p_5)=0;\ n_г=1.$$

Возможны варанты: а) одно звено с одноподвижной и точечной парами: $p_1=1$; $p_5=1$.

Этому условию отвечают зубчатые передачи с бочкообразной поверхностью зубьев, кулачковые механизмы с заостренным или сферическим башмаком на толкателе, механизмы плунжерных насосов и др. (рис. 3.13, *б*, *в*, *г*, *д*);

б) одно звено с двухподвижной и четырехподвижной парами: $p_2=1$; $p_4=1$.

Этому условию отвечает, например, кулачковый механизм газораспределения, толкатель которого имеет одну сферическую пару с пальцем и линейную высшую пару между башмаком и кулачком (автомобиль «Жигули») (рис. 3.13, *е*);

в) одно звено с двумя сферическими парами ($p_3=2$) имеет одну местную подвижность ($W_м=1$), и при присоединении его с начальным звеном образуется ферма (рис. 3.13, *а*).

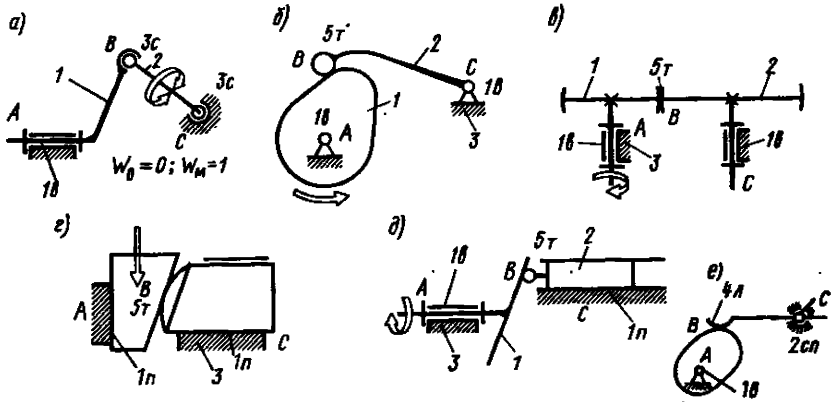


Рис. 3.13

В двухзвенной структурной группе с тремя парами должны выполняться следующие соотношения:

$$n_г=2;$$

$$\sum_{i=1}^{5} p_i=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=3;$$

$$W_г=12-5p_1-4p_2-3p_3-2p_4-p_5=0.$$

Эти условия выполняются для следующих вариантов:

а) $p_1=2$; $p_4=1$ (например, группа *ВАВ* с двумя вращательными и одной линейной парой в зубчатой передаче);

б) $p_1=1$, $p_2=1$, $p_3=1$, т. е. группа с одноподвижной (*В* или *П*), двухподвижной (*Ц* или *СП*) и трехподвижной (*С* или *Пл*) парами. Такие группы были выявлены, например, при исследовании механизмов, изображенных на рис. 3.12.

В трехзвенной группе с четырьмя парами должны выполняться такие условия:

$$n_г=3;$$

$$\sum_{i=1}^{5} p_i=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=4;$$

$$W_г=18-5p_1-4p_2-3p_3-2p_4-p_5=0.$$

Варианты групп *ВВВС* ($p_1=3$, $p_3=1$) и *ВВЦЦ* ($p_1=2$ и $p_4=2$) удовлетворяют этим условиям.

Аналогично можно проанализировать возможность синтеза механизма с четырьмя звеньями и с пятью или шестью кинематическими парами.

Для четырехзвенной группы с пятью парами есть один вариант: $p_1=4$; $p_2=1$.

Для четырехзвенной группы с шестью парами — четыре варианта:

$$1)\ p_1=3,\ p_3=3;\ 2)\ p_1=3,\ p_2=1,\ p_3=1,\ p_4=1;$$
$$3)\ p_2=3;\ p_2=2;\ p_5=1;\ 4)\ p_1=2,\ p_3=3,\ p_4=1.$$

Для пятизвенной группы с шестью парами возможен один вариант — с шестью одноподвижными парами. Этот вариант реализуется в виде рычажного механизма, называемого шарнирным семизвенником, так как группа присоединяется внешними парами к начальному звену и стойке.

На рис. 3.14, *а — в* приведены структурные схемы некоторых механизмов, у которых присоединяемая группа содержит четыре звена и шесть (три вращательные и три сферические) кинематических пар. Механизмы не содержат избыточных контурных связей ($n=5$; $p_1=4$; $p_3=3$; $W=1$).

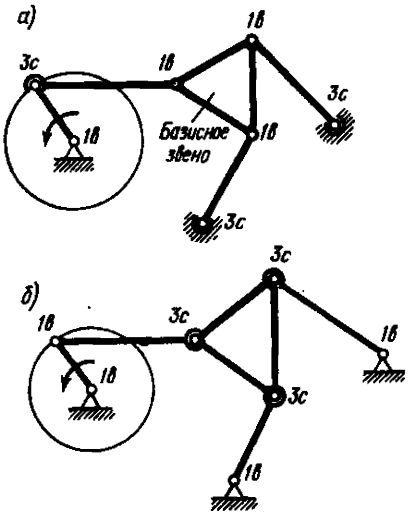
Тогда $q=6n+W-\sum_{i=1}^{n}(6-i)p_i=6\cdot5+1-(5\cdot4+3\cdot3)=0.$

Условие (2.14) синтеза основной структурной схемы механизма является необходимым условием, но оно может оказаться недостаточным для осуществления сборки контура звеньев без натягов.

Сочетание кинематических пар в структурной схеме может оказаться таким, что появляются местные или групповые подвижности, наряду с которыми схема механизма содержит одну или несколько избыточных связей, которые не позволяют выполнить сборку замыкающей кинематической пары, например, из-за отсутствия перемещения в направлении оси, перпендикулярной плоскости вращения начального звена.

Наличие избыточных связей и их характер целесообразно выявлять по методике, суть которой заключается в анализе подвижностей в каждой кинематической паре замкнутого контура и оценке возможностей сборки замыкающей пары контура звеньев за счет необходимого числа линейных и угловых перемещений. При этом следует иметь в виду, что линейное сближение элементов пары иногда может быть достигнуто за счет угловых поворотов звеньев.

В механизмах различают помимо относительных перемещений звеньев, допускаемых геометрическими связями, также и перемещения, допускаемые податливостью (упругостью) звеньев. В первом случае говорят о *структурных степенях свободы*, характеризующих основное движение звеньев. Во втором случае говорят о *параметрических степенях свободы*, зависящих от конструктивных (масса, жесткость) параметров механизма и режима движения (в частности, частоты возбуждения). Относительное движение звена, обусловленное параметрическими степенями свободы, суммируется с основным движением звена иногда в виде фона, характеризуемого ма-



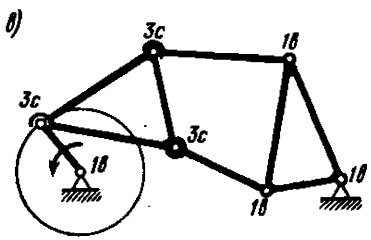


Рис. 3.14

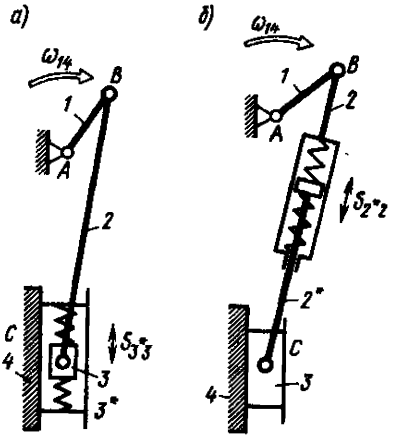


Рис. 3.15

лыми перемещениями по сравнению с абсолютными перемещениями и значительными скоростями и ускорениями. Введение параметрических степеней свободы необходимо при анализе и проектировании механизмов и машин вибрационного и ударного действия, при проектировании виброзащитных устройств в случае возможности возникновения опасных колебаний, при проектировании оборудования для интенсификации и повышения эффективности технологических и транспортных операций.

На рис. 3.15, *а*, *б* приведены две схемы кривошипно-ползунного механизма, используемые в машинах виброударного действия (вибромолот, вибропресс и т. п.) и позволяющие регулировать (накапливать и отдавать) энергию на определенных этапах движения за счет энергии пружины.

На рис. 3.15, *а* упругим звеном является звено *3*, состоящее из бойка *3** и ползуна *3* и имеющее параметрическую степень свободы S_{3^*3}.

На рис. 3.15, *б* упругим звеном является шатун *2*, имеющий параметрическую степень свободы в виде возможного перемещения S_{2^*2} деталей *2** и *2* шатуна. Число структурных степеней свободы в обоих механизмах равно единице и реализуется в виде вращения входного звена *1* с угловой скоростью ω_{14}.

§ 3.6. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

В основе классификации механизмов лежат качественные и количественные характеристики строения механизма и его движения. Наиболее распространены следующие классификации.

По геометрическим и конструктивным признакам:

1) рычажные (рис. 3.16, 3.17), звенья *1*, *2*, *3*, *4*, ... образуют только вращательные, поступательные, цилиндрические или сферические пары *A*, *B*, *C*, ..., *E*;

2) зубчатые (рис. 3.18), в которых зубчатые колеса *1*, *2*, образу-

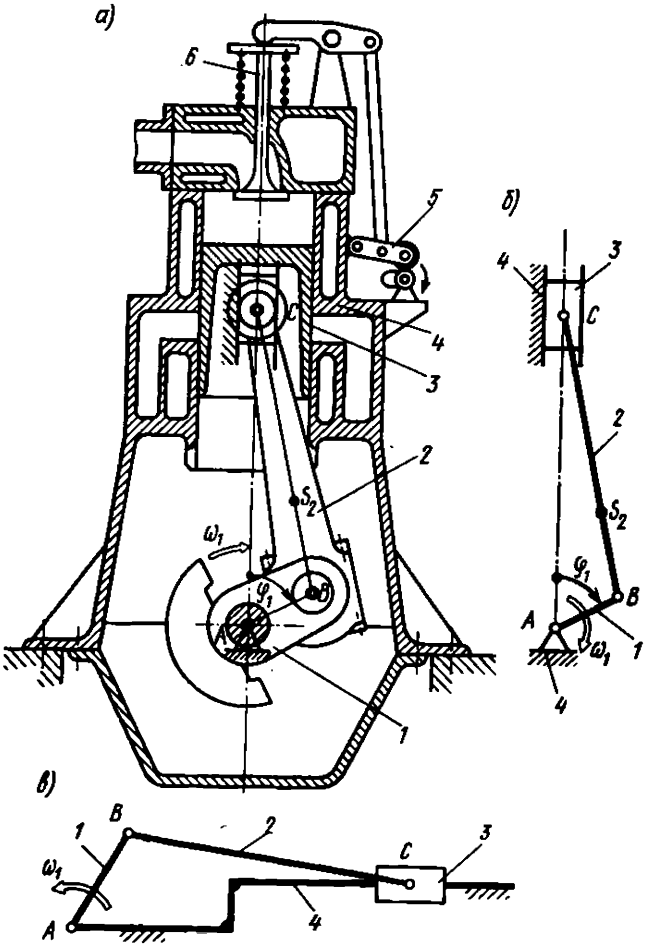


Рис. 3.16

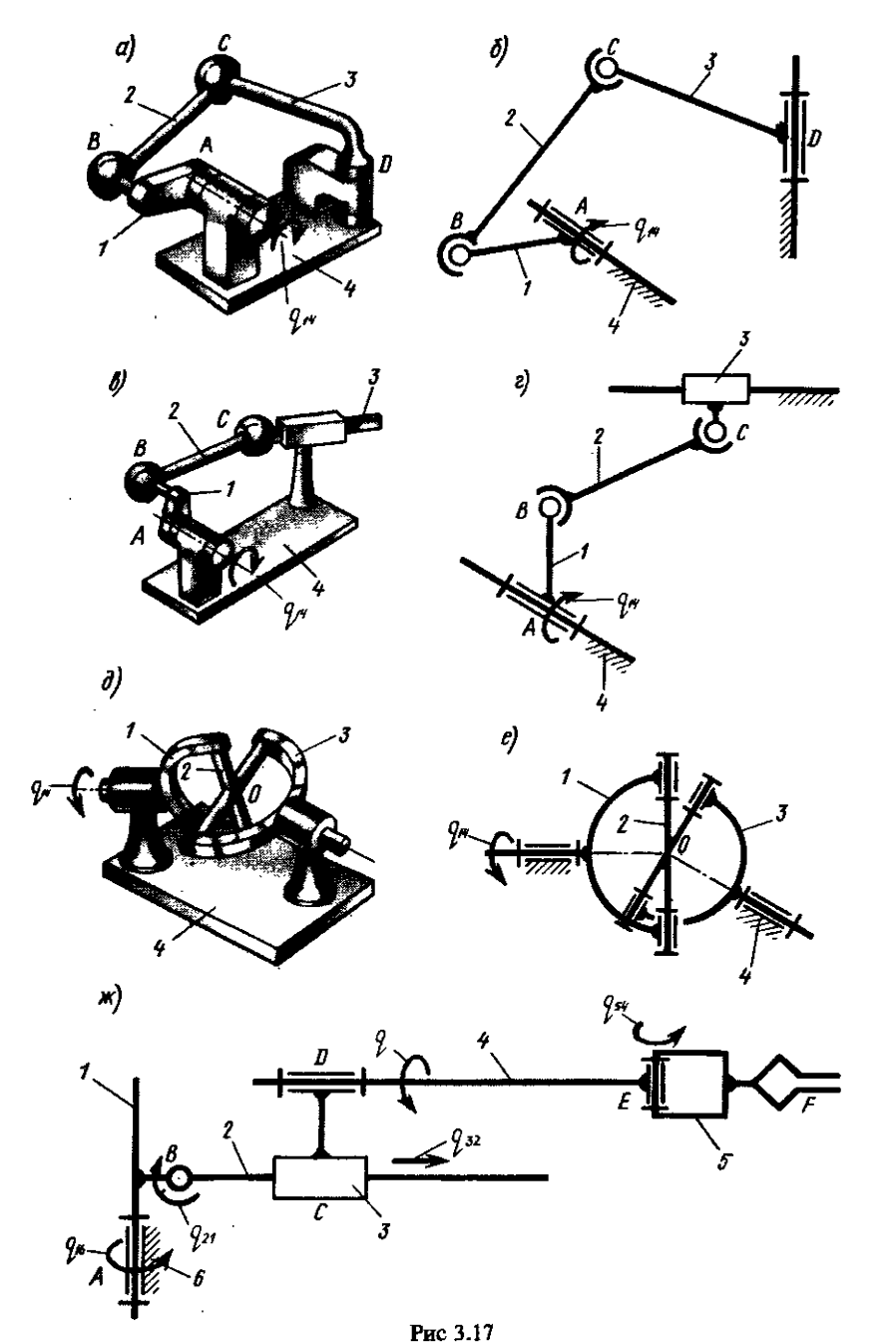


Рис 3.17

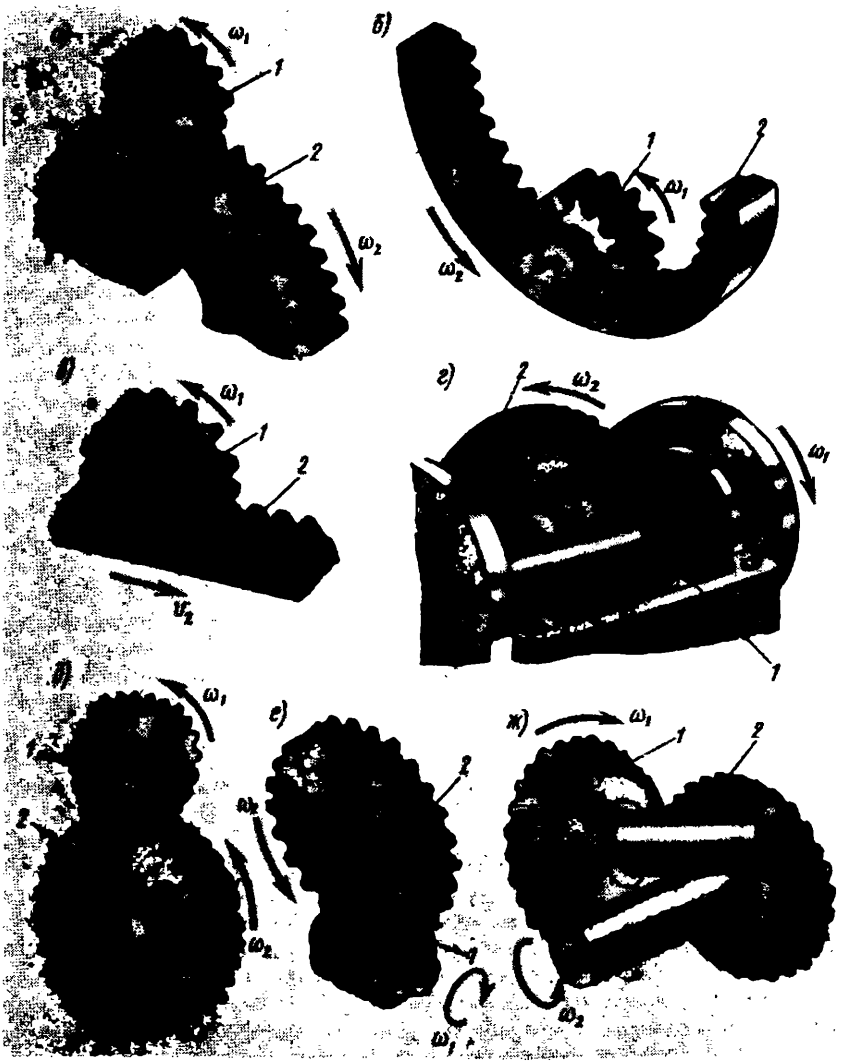


Рис. 3.18

ют со стойкой или водилом вращательные или поступательные пары;

3) кулачковые (рис. 3.19), в состав которых входит кулачок *1*, имеющий рабочую поверхность переменной кривизны, выходное звено (толкатель) *2* с роликом *3*, образующий высшую пару;

4) винтовые, содержащие винтовую пару (гайку и винт);

5) фрикционные, в которых передача движения осуществляется благодаря силам трения между элементами пары;

6) механизмы с гибкими звеньями (типа гибкой нерастяжимой нити);

7) механизмы с упругими звеньями, деформация которых влияет на движение механизма;

8) механизмы с переменной структурой;

9) механизмы с остановками выходного звена (рис. 3.20), например мальтийский (рис. 3.20, *а*), храповой (рис. 3.20, *б*);

10) комбинированные механизмы;

11) гидравлические механизмы;

12) пневматические механизмы;

13) механизмы с электромагнитными элементами;

14) механизмы с электронными элементами.

По функциональному назначению и кинематической передаточной функции скорости исполнительного звена:

1) механизмы с постоянным передаточным отношением (зубчатые, ременные, цепные, канатные, червячные, фрикционные передачи и др.);

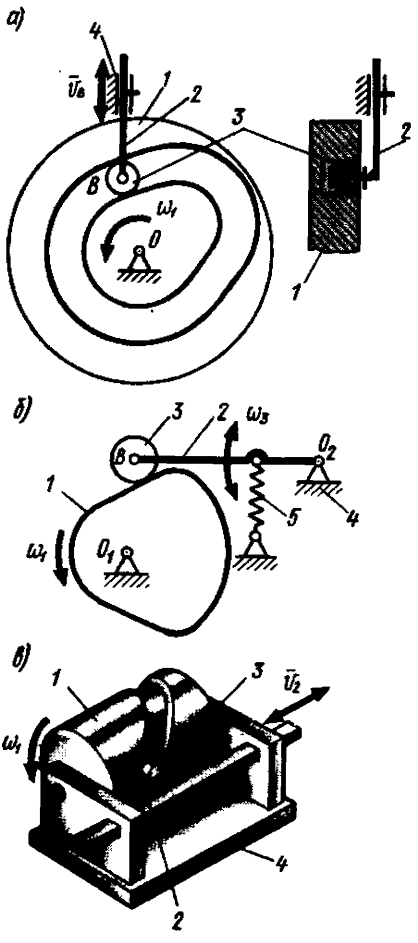


Рис. 3.19

2) механизмы со ступенчато изменяющимся передаточным отношением (коробки перемены скоростей, ступенчатая ременная передача, ступенчатая цепная передача и др.);

3) механизмы для сообщения исполнительному органу возвратно-поступательного движения с постоянной скоростью;

4) механизмы для сообщения исполнительному органу движения с увеличенной средней скоростью вспомогательного хода по отношению к рабочему ходу;

5) механизмы с регулируемым ходом исполнительного органа;

6) механизмы для движения с остановками исполнительного органа (кулачковые, мальтийские, анкерные, рычажные и др.);

3-462

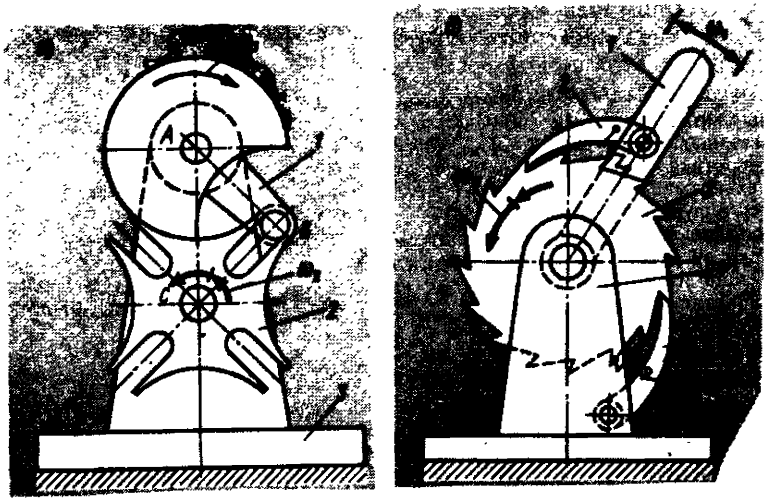


Рис. 3.20

7) реверсивные механизмы для перемены направления вращательного и поступательного движения выходного звена;

8) механизмы с переменной передаточной функцией скорости (передачи с некруглыми зубчатыми колесами, кулачковые, рычажные, рычажно-зубчатые, кулачково-рычажные и др.);

9) суммирующие механизмы и дифференциалы;

10) точные и приближенные направляющие механизмы для движения точки по заданной траектории;

11) механизмы для воспроизведения заданных функциональных зависимостей;

12) механизмы систем управления и регулирования;

13) предохранительные, компенсирующие и уравнительные механизмы;

14) механизмы сцепления: зубчатые, фрикционные, кулачковые муфты;

15) механизмы захватов, схватов;

16) тормозные механизмы.

По структуре кинематической цепи:

1) замкнутые и незамкнутые;

2) по степени подвижности звеньев в замкнутом контуре;

3) по степени подвижности незамкнутой открытой и разветвленной цепи;

4) по числу начальных кинематических пар и последовательности присоединения структурных статически определимых групп с нулевой подвижностью относительно основания группы (базы);

5) по числу контурных избыточных и тождественных связей в механизме.

ГЛАВА 4
КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЗМОВ

Движение звеньев механизма происходит в пространстве и во времени. Это движение можно исследовать с разных позиций. В кинематике изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил. Важнейшими характеристиками движений являются траектории, скорости и ускорения точек и звеньев механизма, которые связаны с изменением времени. Если движение рассматривается в функции движения начальных звеньев, которым приписывают обобщенные координаты, то вводят кинематические передаточные функции, которые не зависят от времени, а являются важнейшей геометрической характеристикой механизма. В данной главе рассматриваются методы расчета параметров кинематических характеристик механизма, которые играют важную роль при расчетах на стадии проектирования машин разного назначения.

§ 4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение движения звеньев механизма по заданному движению начальных звеньев или начальных пар называют *кинематическим анализом механизма*. Он выполняется на основе *кинематической схемы*, которая является структурной схемой механизма, дополненной размерами звеньев (длинами звеньев, координатами пар, числами зубьев колес, координатами точек на профиле кулачков и т. п.), необходимых для кинематического анализа механизма. При расчете скоростей и ускорений задаются значения *обобщенных скоростей* и *ускорений механизма*, являющихся соответственно первой и второй производными от обобщенной координаты механизма по времени. Если производные функций положения берут по обобщенной координате механизма, то их называют соответственно кинематической передаточной функцией скорости точки (аналог скорости), угловой скоростью звена (аналог угловой скорости или передаточное отношение), передаточной функцией ускорения точки или углового ускорения звена (аналог ускорения точки, аналог углового ускорения звена). Связь между скоростью $\tilde{v}_B$ (или ускорением $\tilde{a}_B$) точки на каком-либо звене механизма и передаточной функцией скорости $\tilde{v}_{qB}$ (или ускорения $\tilde{a}_{qB}$) той же точки определяется следующими соотношениями:

$$\tilde{v}_B = \mathrm{d}S_B/\mathrm{d}t;\ \tilde{v}_{qB} = \mathrm{d}S_B/\mathrm{d}\varphi_1;\ \tilde{v}_B = \frac{\mathrm{d}S_B}{\mathrm{d}\varphi_1}\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = \tilde{v}_{qB}\,\omega_1,$$

или

$$\tilde{v}_{qB} = \frac{\tilde{v}_B}{\omega_1}; \tag{4.1}$$

$$\tilde{a}_B = \mathrm{d}^2S_B/\mathrm{d}t^2;\ \tilde{a}_{qB} = \mathrm{d}^2S_B/\mathrm{d}\varphi^2;\ \tilde{a}_B = \frac{\mathrm{d}^2S_B}{\mathrm{d}\varphi_1^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}S_B}{\mathrm{d}\varphi_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varphi_1}{\mathrm{d}t^2},$$

или

$$\tilde{a}_B = \tilde{a}_{qB}\omega_1^2 + \tilde{v}_{qB}\tilde{\varepsilon}_1.^* \qquad (4.2)$$

В этих соотношениях $[v_B]$=м/с; $[v_{qB}]$=м/рад; $[a_B]$=м/с^2; $[a_{qB}]$=м/рад^2.

Размерность передаточных функций скорости и ускорения — метр, поэтому геометрической интерпретацией их может служить значение радиуса точки B^* на вращающемся звене *1*, которая имеет скорость, равную скорости точки *B* на другом звене.

Связь между угловой скоростью ω_i (или угловым ускорением ε_i) какого-либо звена *i* и передаточной функцией ω_{qi} угловой скорости (или углового ускорения ε_{qi}) того же звена определяется следующими соотношениями:

$$\omega_i = \mathrm{d}\varphi_i/\mathrm{d}t;\ \omega_{qi} = \mathrm{d}\varphi_i/\mathrm{d}\varphi_1;\ \omega_i = \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}\varphi_1}\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = \omega_{qi}\omega_1, \qquad (4.3)$$

или

$$\omega_{qi} = \omega_i/\omega_1 = u_{i1},$$

где u_{i1} — передаточное отношение;

$$\varepsilon_i = \mathrm{d}\omega_i/\mathrm{d}t;\ \varepsilon_{qi} = \mathrm{d}\omega_i/\mathrm{d}\varphi_1 = \mathrm{d}^2\varphi_i/\mathrm{d}\varphi_1^2;\ \varepsilon_i = \frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}\varphi_1^2}\omega_1^2 + \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}\varphi_1}\varepsilon_1. \qquad (4.4)$$

Следовательно, $\varepsilon_i = \varepsilon_{qi}\omega_1^2 + u_{i1}\varepsilon_1$.

В этих соотношениях $[\omega_1]$=рад/с; $[\omega_i]$=рад/с; $[\omega_{qi}]=[u_{i1}]=1$; $[\varepsilon_1]=[\varepsilon_i]$=рад/с^2; $[\varepsilon_{qi}]=1$. Если $\varepsilon_1=0$, то $\varepsilon_{qi}=\varepsilon_1/\omega_1^2$.

§ 4.2. ГРАФИКИ ДВИЖЕНИЯ (ДУГОВОЙ КООРДИНАТЫ), СКОРОСТИ, УСКОРЕНИЯ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Если одна из кинематических функций может быть определена или задана таблицей значений или графиком (рис. 4.1), то для определения других функций используют численные и графические методы вычислений. Графиками часто пользуются для наглядности и выявления возможных ошибок при вычислениях. Численное дифференцирование чувствительно к ошибкам, вызванным неточностью исходных данных, и должно проводиться с особой осторож-

*Тильда над обозначениями величин подчеркивает, что они являются скалярными.

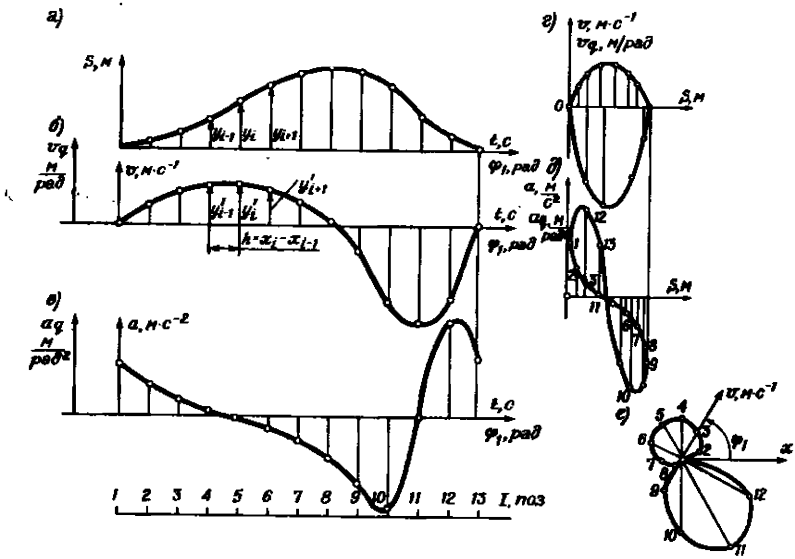


Рис. 4.1

ностью. Приведем для примера формулы дифференцирования функции $f(x)$ заданной конечной последовательностью пар значений (x_i, $f(x_i)$). Если $f(x)$ задана множеством y_1, y_2, ..., y_n ее значений y_i в n равноотстоящих точках x_i с шагом изменения аргумента $h=x_i-x_{i-1}$ ($i=2, ..., n$) (рис. 4.1, *а*, *б*), то искомые значения производной вычисляют по следующим формулам:

$$y'_i=\frac{dy}{dx}=\begin{cases}\frac{1}{2h}(-y_3+4y_2-3y_1) & (\text{при } i=1);\\ \frac{1}{2h}(y_{i+1}-y_{i-1}) & (i=2,\ 3,\ ...,\ n-1);\\ \frac{1}{2h}(3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}) & (\text{при } i=n).\end{cases} \quad (4.5)$$

Интегрирование функции $y(x)$, заданной множествами x_1, x_2, ..., x_n упорядоченных по возрастанию или убыванию значений аргумента и y_1, y_2, ..., y_n соответствующих значений функции, проводят по формуле трапеций, или формуле Симпсона.

При равноотстоящих значениях аргумента x значения интег-

ралов $I=\int_{x_1}^{x_i} y(x)\,dx$ вычисляют по одной из следующих формул: формула трапеций

$$I_i=I_{i-1}+\frac{h}{2}(y_i+y_{i-1})\ (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n); \tag{4.6}$$

формула Симпсона

$$I_i=I_{i-2}+\frac{h}{3}(y_{i-2}+4y_{i-1}+y_i), \tag{4.7}$$

или

$$I_i=I_{i+2}-\frac{h}{3}(y_i+4y_{i+1}+y_{i+2}).$$

Результаты вычислений представляют в виде графиков.

На рис. 4.1 показаны разные формы графиков.

В декартовых координатах:

перемещение $S(t)$; $S(\varphi_1)$; $S(I)$ (рис. 4.1, *а*); скорость $v(t)$; $v(\varphi_1)$; передаточная функция скорости $v_q(\varphi_1)$ (рис. 4.1, *б*);

скорость $v(S)$; передаточная функция скорости $v_q(S)$ (рис. 4.1, *г*);

ускорение $a(t)$, $a(\varphi_1)$; передаточная функция ускорения $a_q(t)$, $a_q(\varphi_1)$ (рис. 4.1, *в*); ускорение $a(S)$, передаточная функция ускорения $a_q(S)$ (рис. 4.1, *д*).

В полярных координатах:

модуль вектора скорости $\bar{v}(\varphi_1)$ (рис. 4.1, *е*).

Графическое дифференцирование. Графическое дифференцирование начинают с построения графика функции по заданным значениям. При экспериментальном исследовании такой график вычерчивают с помощью самопишущих приборов. Далее проводят касательные к кривой в фиксированных положениях и вычисляют значения производной по тангенсу угла, образованного касательной с осью абсцисс.

Например, определение углового ускорения ε при заданном графике $\omega(t)$ проводят графическим дифференцированием.

На рис. 4.2, *а* кривая $\omega(t)$ изображена по оси ординат в масштабе μ_ω, мм/(рад·с$^{-1}$), по оси абсцисс μ_t, мм/с. Искомая функция $\varepsilon(t)$ может быть найдена по соотношению

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d(y_\omega/\mu_\omega)}{d(x_t/\mu_t)}=\frac{\mu_t}{\mu_\omega}\frac{dy_\omega}{dx_t}=\frac{\mu_t}{\mu_\omega}\operatorname{tg}\psi. \tag{4.8}$$

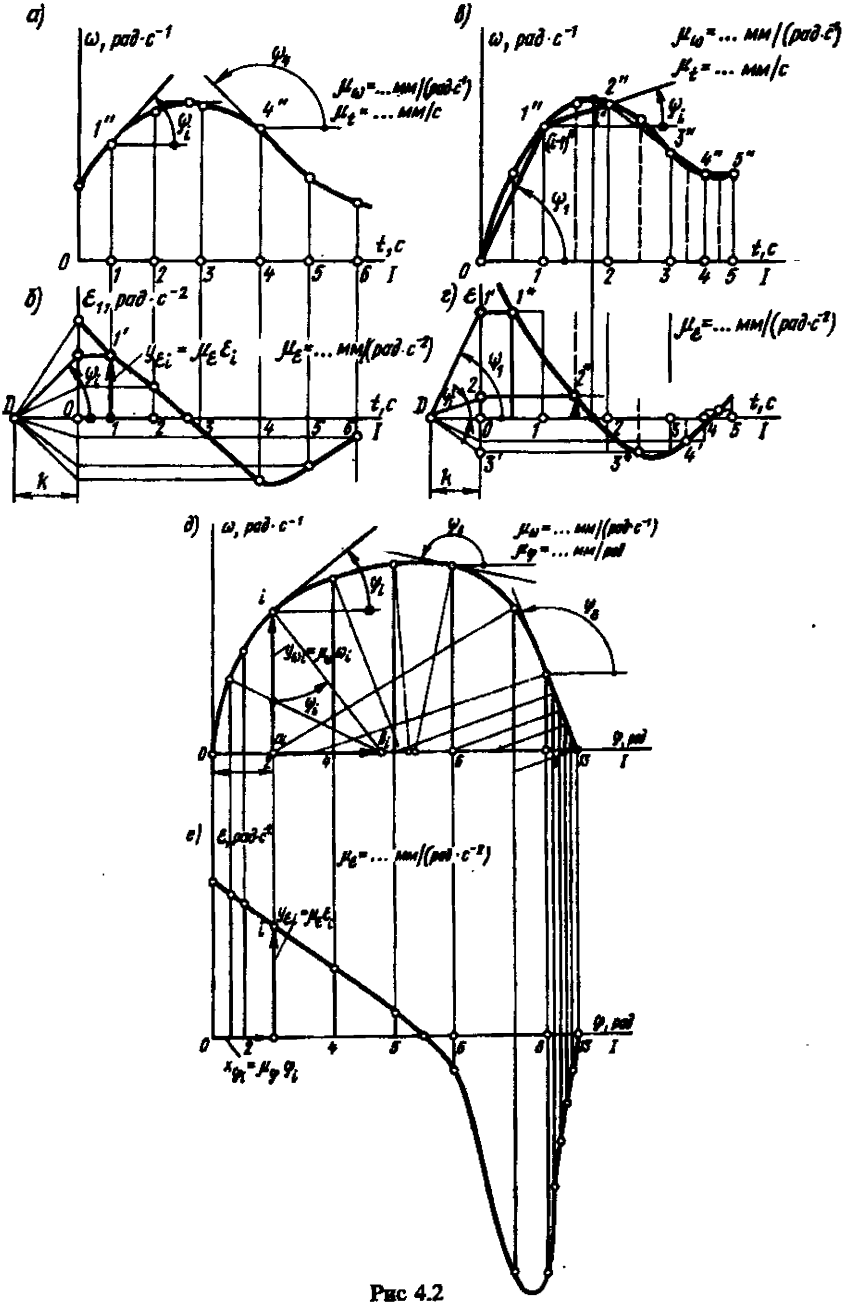

а)
ω, рад·с⁻¹
μω=... мм/(рад·с⁻¹)
μt=... мм/с
t, c
б)
ε11, рад·с⁻²
με=... мм/(рад·с⁻²)
в)
ω, рад·с⁻¹
μω=... мм/(рад·с⁻¹)
μt=... мм/с
t, c
г)
ε
με=... мм/(рад·с⁻²)
t, c
д)
ω, рад·с⁻¹
μω=... мм/(рад·с⁻¹)
μφ=... мм/рад
φ, рад
е)
ε, рад·с⁻²
με=... мм/(рад·с⁻²)
φ, рад

Рис 4.2

Тангенс угла ψ наклона касательной к кривой $\omega(t)$ в некоторой точке с номером i представляют в виде отношения отрезков $y_{\varepsilon i}/K$, где K — выбранный отрезок дифференцирования (или полюсное расстояние) OD, мм (рис. 4.2, *б*):

$$\operatorname{tg}\psi_i = y_{\varepsilon i}/K.$$

После подстановки этого соотношения в соотношение (4.8) получают

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_t}{\mu_\omega}\operatorname{tg}\psi_i = \frac{\mu_t}{\mu_\omega}\frac{y_{\varepsilon i}}{K} = y_{\varepsilon i}/\mu_\varepsilon, \tag{4.9}$$

где $y_{\varepsilon i}$ — ордината искомого графика углового ускорения;

$$\mu_\varepsilon = \mu_\omega K/\mu_t \tag{4.10}$$

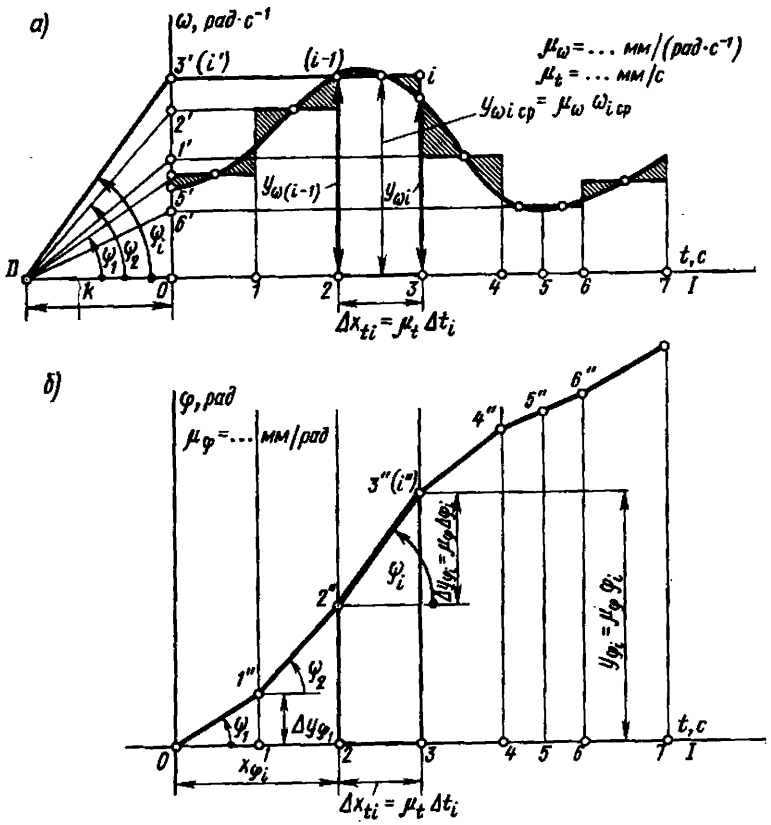


Рис. 4.3

— масштаб искомого графика $\varepsilon_i(t)$; единицы СИ: $[y_{\varepsilon i}]$ = мм; $[\mu_\varepsilon]$ = мм/(рад · с$^{-2}$).

График функции $\varepsilon = \varepsilon(t)$ строят по найденным значениям ординат для ряда позиций. Точки на кривой соединяют от руки плавной линией, а затем обводят с помощью лекала.

Графическое дифференцирование рассмотренным *методом касательных* имеет относительно низкую точность.

Более высокую точность получают при графическом дифференцировании *методом хорд* (рис. 4.2, *в*, *г*).

На заданной кривой отмечают ряд точек *1″*, *2″*, *3″*, которые соединяют хордами, т. е. заменяют заданную кривую ломаной

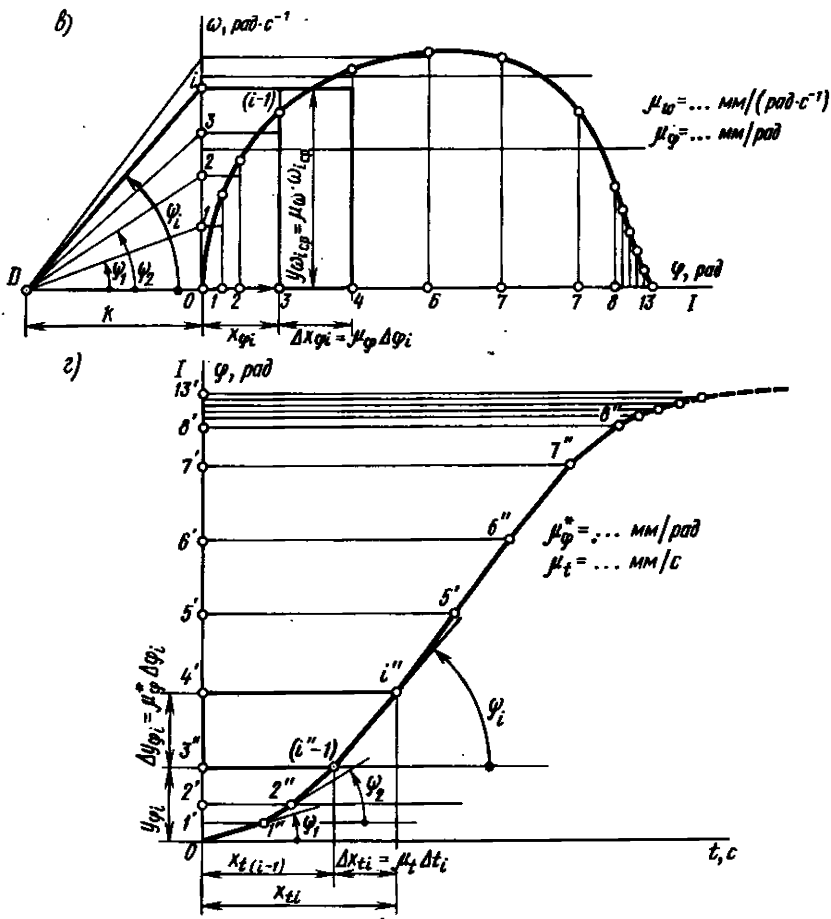


Рис. 4.3 (продолжение)

линией. Принимают следующее допущение: угол наклона касательных в точках, расположенных посередине каждого участка кривой, равен углу ψ_i наклона соответствующей хорды. Это допущение вносит некоторую погрешность, но она относится только к данной точке. Эти погрешности не суммируются, что обеспечивает приемлемую точность метода.

Остальные построения аналогичны ранее описанным при графическом дифференцировании методом касательных. Выбирают отрезок $DO=K$ (мм); приводят лучи, наклоненные под углами ψ_1, ψ_2, ..., ψ_i, ..., до пересечения с осью ординат в точках $1'$, $2'$, $3'$, ..., которые переносят на ординаты, проведенные в середине каждого из интервалов. Полученные точки 1^*, 2^*, 3^* являются точками искомой функции $\varepsilon=\varepsilon(t)=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$.

Масштабы по осям координат при этом методе построения связаны таким же соотношением (4.10), которое было выведено для случая графического дифференцирования методом касательных.

Определение углового ускорения ε входного звена при заданной функции $\omega(\varphi)$ или линейного ускорения a^τ входного звена при заданной функции $v(S)$ вычисляют по следующим соотношениям:

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi};$$

$$a^\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}S}. \qquad (4.11)$$

Если заданные функции $\omega(\varphi)$ или $v(S)$ представлены в виде графиков, то вычисление этих соотношений сводится к определению числового значения длины поднормали к кривой в соответствующей точке.

На рис. 4.2, *д* приведены необходимые построения для случая, когда задана функция $\omega=\omega(\varphi)$.

Для произвольно выбранной i-й точки на графике $\omega(\varphi)$ связь между отрезками $x_{\varphi i}$ и $y_{\omega i}$ и соответствующими кинематическими параметрами выражают с помощью масштабов:

$$x_{\varphi i}=\mu_\varphi\varphi_i;\ y_{\omega i}=\mu_\omega\omega_i.$$

Угловое ускорение выражают в виде следующего соотношения:

$$\varepsilon_i=\frac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}\varphi_i}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t}=\omega_i\frac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}\varphi_i}=\frac{y_{\omega i}}{\mu_\omega}\frac{\mathrm{d}(y_{\omega i}/\mu_\omega)}{\mathrm{d}(x_{\varphi i}/\mu_\varphi)}=$$

$$=\frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2}y_{\omega i}\frac{\mathrm{d}y_{\omega i}}{\mathrm{d}x_{\varphi i}}=\frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2}y_{\omega i}\operatorname{tg}\psi_i=\frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2}(a_ib_i)=\frac{(a_ib_i)}{\mu_\varepsilon}, \qquad (4.12)$$

где ψ_i — угол наклона касательной к кривой $\omega(\varphi)$ в i-й точке (рис. 4.2, *д*); $(a_ib_i)=y_{\omega i}\operatorname{tg}\psi_i$ — отрезок поднормали в i-й точке графика; $\mu_\varepsilon=\mu_\omega^2/\mu_\varphi$ — масштаб углового ускорения ε; единица СИ: $[\mu_\varepsilon]=$ мм/(рад·с$^{-2}$).

Аналогичные построения проводят для ряда положений *1*, *2*, *3*, *4*, ..., определяют поднормали и соответствующие им угловые ускорения ε. Результаты расчетов изображают в виде графика $\varepsilon=\varepsilon(\varphi)$ (рис. 4.2, *е*).

Графическое интегрирование. При графическом определении интеграла подынтегральная функция задается графиком. Для примера рассмотрим определение угла поворота $\varphi(t)=\int_{t_0}^{t_i}\omega dt$ выходного звена по заданной кривой $\omega(t)$.

График угловой скорости $\omega(t)$ изображается в декартовых координатах с учетом числовых значений масштабов: угловой скорости μ_ω и времени μ_t. Промежуток времени от t_0 до t_i делится на такое количество интервалов Δt_i, которое позволяет считать, что на каждом малом промежутке времени Δt_i движение можно принять равномерным.

Эти промежутки времени, отмеченные на рис. 4.3, *а* точками *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, не обязательно должны быть равными.

В каждом интервале времени, например от t_{i-1} до t_i, можно приближенно считать, что

$$y_{\omega i\text{ср}}\approx(y_{\omega(i-1)}+y_{\omega i})/2,$$

т. е. можно принять, что площадь криволинейной трапеции равновелика площади прямоугольника высотой $y_{\omega i\text{ср}}$ и основанием Δx_{ti}.

Концы средних ординат для каждого интервала $y_{\omega 1\text{ср}}$, $y_{\omega 2\text{ср}}$, ..., $y_{\omega i\text{ср}}$ проецируют на ось ординат и соединяют найденные точки *1'*, *2'*, *3'*, ..., *i'* с точкой *D* (полюс построения), которая ограничивает слева выбранный отрезок интегрирования (полюсное расстояние) *OD* длиной *K*, мм (рис. 4.3, *а*).

Лучи *D1'*, *D2'*, *D3'*, ..., проведенные через точку *D*, образуют углы ψ_1, ψ_2, ..., ψ_i с положительным направлением оси *x*, причем

$$\operatorname{tg}\psi_i=y_{\omega i\text{ср}}/K.$$

На искомом графике (φ, ψ) (рис. 4.3, *б*) проводят линии *01''*, *1''2''*, *2''3''*, ..., параллельные в пределах соответствующих интервалов лучам *D1'*, *D2'*, *D3'*, ... Первый отрезок *01''* проводят через начало координат *0*, следующие отрезки соответственно через точку *1''*, затем через точку *2''* и т. д. Эти линии наклонены относительно положительного направления оси *x* под углами ψ_1, ψ_2, ..., ψ_i соответственно, т. е.

$$\operatorname{tg}\psi_i = \Delta y_{\varphi i}/\Delta x_{ti}.$$

Отрезки на графиках связаны с соответствующими физическими параметрами с помощью масштабов соотношениями:

$$y_{\omega i ср} = \mu_\omega \omega_{i ср};\ \Delta y_{\varphi i} = \mu_\varphi \Delta\varphi_i;\ \Delta x_{ti} = \mu_t \Delta t_i.$$

Приравнивая правые части написанных выше соотношений для тангенса угла ψ_i, получают

$$\frac{\Delta y_{\varphi i}}{\Delta x_{ti}} = \frac{y_{\omega i ср}}{K},\ \text{или}\ \Delta y_{\varphi i} = \frac{y_{\omega i ср}\Delta x_{ti}}{K}.$$

По чертежу (рис. 4.3, *б*) следует

$$y_{\varphi i} = y_{\varphi(i-1)} + \Delta y_{\varphi i} = \sum_{i=1}^{i} \Delta y_{\varphi i} = \sum_{i=1}^{i} \frac{y_{\omega i ср}\Delta x_{ti}}{K} = \sum_{i=1}^{i} \frac{\mu_\omega \omega_{i ср}\mu_t \Delta t_i}{K} =$$

$$= \frac{\mu_\omega \mu_t}{K} \lim_{\Delta t \to 0} \sum \omega_{i ср}\Delta t_i = \frac{\mu_\omega \mu_t}{K} \int_{t_0}^{t_i} \mu\, dt = \mu_\varphi \varphi_i,$$

где $\varphi_i = \int_{t_0}^{t_i} \omega\, dt$.

Масштаб искомого графика

$$\mu_\varphi = \mu_\omega \mu_t / K,\quad [\mu_\varphi] = \text{мм/рад}. \tag{4.13}$$

Следовательно, ломаная линия $01''2''3''$, ..., i'' дает приближенный график функции $\varphi(t) = \int \omega\, dt$, а ординаты в узловых точках $1 - 1''$, $2 - 2''$, $3 - 3''$, ... соответствуют значению этой функции. Через найденные точки проводят плавную линию, которая дает более или менее точные результаты для всех промежуточных точек.

Увеличение числа узловых точек и масштаба чертежа позволяет повысить точность метода графического интегрирования. Отрезок K выбирается произвольно, но его величина влияет на размеры ординат искомой функции, т. е. его назначают с учетом желаемого масштаба графика первообразной функции: чем больше его величина, тем меньше этот масштаб.

При исследовании и проектировании механизмов закон изменения скорости входного звена может быть задан функциями $\omega(\varphi_1)$ или $v(S)$ обобщенных координат φ_1 и S. В этом случае необходимо вычисление интегралов:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega}\ \text{или}\ S(t) = \int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{S_0}^{S} \frac{dS}{v}. \tag{4.14}$$

Если функции $\omega(\varphi)$ и $v(S)$ заданы в виде графиков (рис. 4.3, *в*), то искомые функции $\varphi(t)$ и $S(t)$ находят графическим интегрированием, проводя построения, аналогичные ранее описанным, но с некоторыми отличиями. Так, ось ординат искомого графика (рис. 4.3, *г*) разбивают на интервалы, равные интервалам на оси абсцисс (оси φ_1) на графике $\omega(\varphi)$ (рис. 4.3, *в*). В этом случае масштабы по осям φ сохраняют одинаковыми, т. е. $\mu_\varphi = \mu_\varphi^*$. Точки *1″*, *2″*, *3″*, *4″* искомой кривой (рис. 4.3, *г*) получают при пересечении линий, параллельных оси абсцисс, с линиями, проведенными параллельно соответствующим лучам *D1*, *D2*, *D3*, ... , т. е. наклоненными относительно оси x под углами $\psi_1, \psi_2, \psi_3 - \psi_i, \ldots$. Отрезок $D0 = K$ — отрезок интегрирования в мм.

Обоснование этого метода интегрирования вытекает из соотношений, вытекающих из графических построений:

$$\operatorname{tg}\psi_i = \frac{y_{\omega i\text{ср}}}{K} = \frac{\mu_\omega \omega_{i\text{ср}}}{K} \text{ (рис. 4.3, } в\text{);}$$

$$\operatorname{tg}\psi_i = \frac{\Delta y_{\varphi i}}{\Delta x_{ti}} = \frac{\mu_\varphi^* \Delta\varphi_i}{\mu_t \Delta t_i};\ x_{ti} = \sum_{i=1}^{i} \Delta x_{ti} \text{ (рис. 4.3, } г\text{).} \qquad (4.15)$$

Делают необходимые подстановки и преобразования:

$$x_{ti} = \sum_{i=1}^{i} \Delta x_{ti} = \sum_{i=1}^{i} \frac{\Delta y_{\varphi i}}{\operatorname{tg}\psi_i} = \sum_{i=1}^{i} \frac{\Delta y_{\varphi i} K}{y_{\omega\text{ср}i}} = \sum_{i=1}^{i} \frac{K\mu_\varphi^* \Delta\varphi_i}{\mu_\omega \omega_{i\text{ср}}} =$$

$$= \frac{K\mu_\varphi^*}{\mu_\omega} \lim_{\Delta\varphi_i \to 0} \sum_{i=1}^{i} \frac{\Delta\varphi_i}{\omega_{\text{ср}i}} = \frac{K\mu_\varphi^*}{\mu_\omega} \int \frac{d\varphi}{\omega} = \mu_t t_i, \qquad (4.16)$$

где $\mu_t = K\mu_\varphi^*/\mu_\omega$ — масштаб времени движения; $t = \int d\varphi/\omega$ — время движения; единицы СИ: $[\mu_t]$ = мм/с; $[K]$ = мм; $[\mu_\omega]$ = мм/(м·с$^{-1}$); $[\mu_\varphi]$ = мм/рад.

Полученные при построениях точки *1″*, *2″*, ..., *i″* соединяют плавной кривой и получают искомый график $\varphi = \varphi(t)$, т. е. искомый закон движения входного звена.

Это доказательство основано на допущении, что кривую $(1/\omega, \varphi)$ на малом интервале $\Delta\varphi$ можно заменить линейной функцией, а площадь криволинейной трапеции — площадью прямоугольника с вы-

сотой, равной полусумме ординат на границах данного интервала.

При малых величинах ω целесообразно в этой области брать большее число узловых точек, как это сделано на рис. 4.3, *в* для интервалов *0 — 3* и *8 — 13*, которые разделены на более мелкие, например интервалы *0 — 1*; *1 — 2*; *2 — 3*.

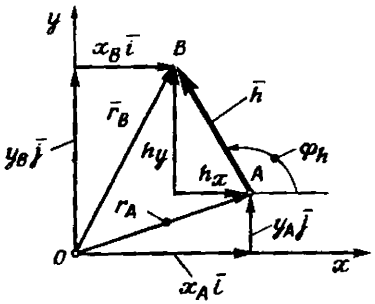
§ 4.3. КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Движение точки и звена на плоскости определено, если известно их положение относительно выбранной системы отсчета и изменения их координат с течением времени. Способ определения движения точки или звена посредством кинематических уравнений движения в прямоугольных координатах принято называть *координатным*. Иногда его называют *аналитическим* способом.

При координатном способе за аргумент принимают время или обобщенную координату механизма и, придавая ему различные частные значения, вычисляют соответствующие значения функций положения (координат) и их производных: проекции на координатные оси скоростей и ускорений или кинематических передаточных функций скоростей и ускорений.

Координаты любой точки вполне и однозначно определяются радиусом — вектором точки, проведенным из начала отсчета. Поэтому система векторов, связанных с соответствующими точками механизма, определяет как расстояние между точками, так и направление, в котором точки находятся по отношению друг к другу (рис. 4.4).

Поэтому базой для составления кинематических уравнений в координатной форме является *векторная модель механизма*, т. е. совокупность геометрических векторов, соединяющих кинематические пары (точки звеньев) между собой на структурной (кинематической) схеме механизма в такой последовательности, которая целесообразна для расчета кинематических параметров механизма координатным способом.



$DA=\{x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A\}$
$DB=\{x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B\}$
$PFH=\{\varphi_h, \dot{\varphi}_h, \ddot{\varphi}_h\}$
$PRH=\{h, \dot{h}, \ddot{h}\}$
$VBH=\{h, \varphi_h, \dot{h}_x, \dot{h}_y, \ddot{h}_x, \ddot{h}_y\}$

Рис. 4.4

Под *геометрическим вектором* понимают направленный отрезок в пространстве или на плоскости, имеющий начальную точку (точку приложения вектора) и конечную точку (рис. 4.4). Однозначное отображение вектора при каждом значе-

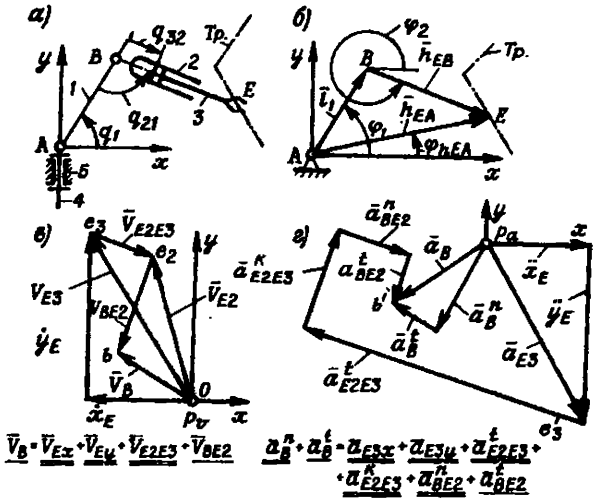


Рис. 4.5

нии аргумента (времени или обобщенной координаты) называют *вектор-функцией* скалярного аргумента.

Так как объем информации при вычислениях достаточно велик, то для краткости записи используют массивы, т. е. упорядоченные множества, обозначенные именем (идентификатором). Число элементов в массиве определяет его длину. Положение элемента в массиве определяется значением его индексов. Введем следующие идентификаторы для одномерных массивов, связанных с геометрическим вектором $\bar{h}$ (рис. 4.4).

Точка A приложения вектора (начало вектора) — массив DA из шести элементов:

$$DA = \{x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A\},$$

т. е. координаты точки A и их производные по времени.

Точка B — конец вектора — массив DB из шести элементов:

$$DB = \{x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B\},$$

т. е. координаты точки B и их производные по времени.

Точка S_2 — центр масс на звене *2* — массив из шести элементов:

$$DS_2 = \{x_{S2}, y_{S2}, \dot{x}_{S2}, \dot{y}_{S2}, \ddot{x}_{S2}, \ddot{y}_{S2}\},$$

т. е. координаты центра масс и их производные по времени.

Угловая координата φ_3 звена *3* и ее производные — массив из трех элементов:

$$PFH3 = \{\varphi_3, \dot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_3\} = \{\varphi_3, \omega_3, \varepsilon_3\}.$$

Длина вектора h_2 и ее производные — массив из трех элементов:

$$PRH2=\{h_2,\ \dot{h}_2,\ \ddot{h}_2\}.$$

Вектор h_2 и производные его проекций — массив из шести элементов:

$$VBH2=\{h_2,\ \varphi_{h2},\ \dot{h}_{2x},\ \dot{h}_{2y},\ \ddot{h}_{2x},\ \ddot{h}_{2y}\}.$$

Для примера на рис. 4.5, *а* приведена кинематическая схема трехподвижного манипулятора, обеспечивающего движение схвата E по траектории Тр, если задать три обобщенные координаты: q_1, q_{21} и q_{32}. При решении обратной задачи задают движение точки массивом $DE=\{x_E,\ y_E,\ \dot{x}_E,\ \dot{y}_E,\ \ddot{x}_E,\ \ddot{y}_E\}$ и одну из обобщенных координат (например, q_{32}), а другие две координаты являются искомыми. С каждым звеном или с точками звена связывают соответствующий геометрический вектор, совокупность которых определяет векторную модель механизма: $\bar{l}_1$, $\bar{h}_{EB}$, $\bar{h}_{EA}$ (рис. 4.5, *б*). Угловые координаты векторов отсчитывают от положительного направления оси Ax против хода часовой стрелки: φ_1, φ_2, φ_{hEA}.

Функции положения механизма

Уравнение векторного контура ABE записывают в форме

$$\bar{l}_1+\bar{h}_{EB}-\bar{h}_{EA}=0 \tag{4.17}$$

и проецируют на координатные оси:

$$\begin{aligned} l_1\cos\varphi_1+h_{EB}\cos\varphi_2-x_E=0,\\ l_1\sin\varphi_1+h_{EB}\sin\varphi_2-y_E=0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

При заданных l_1, φ_1, φ_2, h_{EB} вычисляют координаты x_E, y_E. При заданных x_E, y_E и h_{EB} вычисляют φ_1 и φ_2.

Функции скоростей

Систему уравнений, определяющих положение звеньев, дифференцируют по времени:

$$\begin{aligned} -\dot{\varphi}_1 l_1\sin\varphi_1+\dot{h}_{EB}\cos\varphi_2-\dot{\varphi}_2 h_{EB}\sin\varphi_2-\dot{x}_E=0,\\ \dot{\varphi}_1 l_1\cos\varphi_1+\dot{h}_{EB}\sin\varphi_2+\dot{\varphi}_2 h_{EB}\cos\varphi_2-\dot{y}_E=0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Из пяти параметров $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{h}_{EB}$, $\dot{x}_{EB}$, $\dot{y}_E$ три параметра должны быть заданы, а остальные два вычисляют в результате решения системы двух линейных уравнений.

При заданных значениях обобщенных скоростей вычисляют $\dot{x}_E$ и $\dot{y}_E$. При заданных $\dot{x}_E$, $\dot{y}_E$, $\dot{h}_{EB}$ вычисляют искомые $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$, например, по правилу Крамера:

$$\begin{aligned} a_{11}\dot{\varphi}_1+a_{12}\dot{\varphi}_2=b_1,\\ a_{21}\dot{\varphi}_1+a_{22}\dot{\varphi}_2=b_2. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Значения коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} и свободных членов b_1, b_2 определяют из уравнений (4.19):

$$a_{11}=-l_1\sin\varphi_1;\ a_{12}=-h_{EB}\sin\varphi_2;\ b_1=\dot{x}_E-\dot{h}_{EB}\cos\varphi_2,$$
$$a_{21}=l_1\cos\varphi_1;\ a_{22}=h_{EB}\cos\varphi_2;\ b_2=\dot{y}_E-\dot{h}_{EB}\sin\varphi_2.$$

Определители:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=$$
$$=-l_1h_{EB}\sin\varphi_1\cos\varphi_2-l_1h_{EB}\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=l_1h_{EB}\sin(\varphi_2-\varphi_1),$$
$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}=(\dot{x}_E-\dot{h}_{EB}\cos\varphi_2)\,h_{EB}\cos\varphi_2+(\dot{y}_E-\dot{h}_{EB}\sin\varphi_2)\,h_{EB}\cdot\sin\varphi_2,$$
$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=-(\dot{y}_E-\dot{h}_{EB}\sin\varphi_2)\,l_1\sin\varphi_1-(\dot{x}_E-\dot{h}_{EB}\cos\varphi_2)\,l_1\cos\varphi_2.$$

Искомые угловые скорости звеньев *1* и *2*:

$$\dot{\varphi}_1=\frac{D_1}{D}=\frac{(\dot{x}_E-\dot{h}_{EB}\cos\varphi_2)\cos\varphi_2+(\dot{y}_E-\dot{h}_{EB}\sin\varphi_2)\cdot\sin\varphi_2}{l_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)},\qquad(4.21)$$

$$\dot{\varphi}_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{(\dot{y}_E-\dot{h}_{EB}\sin\varphi_2)\sin\varphi_1+(\dot{x}_E-\dot{h}_{EB}\cos\varphi_2)\cos\varphi_1}{h_{ED}\sin(\varphi_2-\varphi_1)}.\qquad(4.22)$$

Функции ускорений

Систему уравнений, записанную для скоростей, дифференцируют по времени:

$$\begin{gathered}-\ddot{\varphi}_1l_1\sin\varphi_1-\dot{\varphi}_1^2l_1\cos\varphi_1+\ddot{h}_{EB}\cos\varphi_2-2\dot{\varphi}_2\dot{h}_{EB}\sin\varphi_2-\\ -\ddot{\varphi}_2h_{EB}\sin\varphi_2-\dot{\varphi}_2^2h_{EB}\cos\varphi_2-\ddot{x}_E=0,\\ \ddot{\varphi}_1l_1\cos\varphi_1-\dot{\varphi}_1^2l_1\sin\varphi_1+\ddot{h}_{EB}\sin\varphi_2+2\dot{\varphi}_2\dot{h}_{EB}\cos\varphi_2+\\ +\ddot{\varphi}_2h_{EB}\cos\varphi_2-\dot{\varphi}_2^2h_{EB}\sin\varphi_2-\ddot{y}_E=0.\end{gathered}\qquad(4.23)$$

При задании значений $\ddot{x}_E$, $\ddot{y}_E$ и $\ddot{h}_{EB}$ и ранее вычисленных функциях положения (4.18) и скоростей звеньев (4.21), (4.22) получают систему двух линейных уравнений относительно искомых угловых ускорений $\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_2$:

$$\begin{gathered}a_{11}\ddot{\varphi}_1+a_{12}\ddot{\varphi}_2=b_1,\\ a_{21}\ddot{\varphi}_1+a_{22}\ddot{\varphi}_2=b_2.\end{gathered}\qquad(4.24)$$

Здесь

$$a_{11}=-l_1\sin\varphi_1;\ a_{12}=-h_{EB}\sin\varphi_2;\ b_1=\ddot{x}_E+\dot{\varphi}_1^2\,l_1\cos\varphi_1-$$
$$-\ddot{h}_{EB}\cos\varphi_2+2\dot{\varphi}_2\,\dot{h}_{EB}\sin\varphi_2+\dot{\varphi}_1^2\,h_{EB}\cos\varphi_2;$$
$$a_{21}=l_1\cos\varphi_1;\ a_{22}=h_{EB}\cos\varphi_2;\ b_2=\ddot{y}_E+\dot{\varphi}_1^2\,l_1\sin\varphi_1-\ddot{h}_{EB}\sin\varphi_2-$$
$$-2\dot{\varphi}_2\,\dot{h}_{EB}\cos\varphi_2+\dot{\varphi}_2^2\,h_{EB}\sin\varphi_2.$$

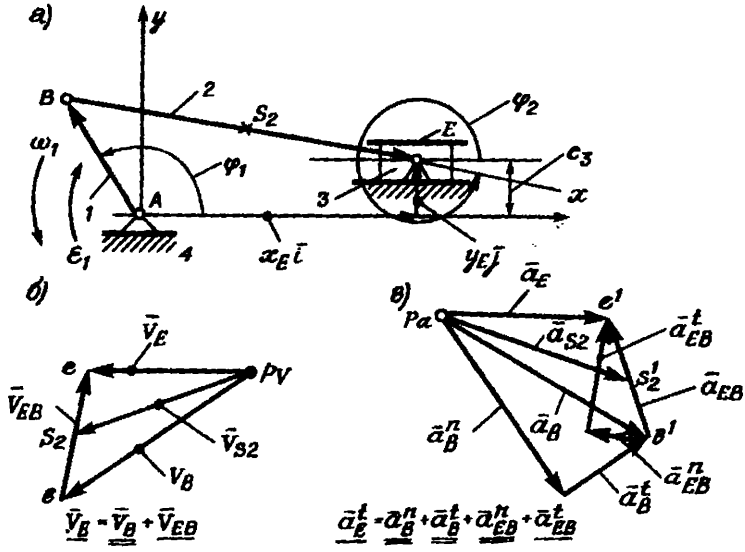


Рис. 4.6

Вычисляют значения D, D_1, D_2 и значения искомых неизвестных:

$$\ddot{\varphi}_1 = D_1/D;\ \ddot{\varphi}_2 = D_2/D.$$

В развитии рассмотренного примера можно показать, что частным случаем является кривошипно-ползунный механизм (рис. 4.6, *а*) с одной степенью свободы. Векторная модель на рис. 4.6, *а* совмещена с кинематической схемой механизма. Точка E ползуна *3* совершает поступательное движение вдоль направляющей *4*. Длина звена *2* постоянна: $l_2 = l_{EB}$. Уравнение векторного контура ABE записывают аналогично (4.17), т. е.

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 - y_E\bar{j} - x_E\bar{i} = 0,$$

и проецируют на координатные оси:

$$\begin{aligned} x_E &= l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2, \\ y_E &= l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 = e_3. \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Из уравнений (4.18) вычисляют:

$$\sin\varphi_2 = \frac{e_3 - l_1 \sin\varphi_1}{l_2};\ \cos\dot{\varphi}_2 = \pm\sqrt{1 - \sin^2\varphi_2};$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}(\sin\varphi_2/\cos\varphi_2)\operatorname{sgn}(\cos\varphi_2).$$

Два значения угла φ_2 при одном значении обобщенной координаты свидетельствуют о том, что механизм имеет две сборки:

расположение ползуна справа от оси Ay (рис. 4.6, *а*) и слева от той же оси. Поэтому для получения однозначного решения следует указать числовой показатель сборки с помощью функции знака $y=\operatorname{sgn} x=\{+1;\ 0;\ -1\}$; в данном примере $\operatorname{sgn}(\cos\varphi_2)=\pm 1$.

Для получения уравнений скорости дифференцируют по времени уравнения (4.25):

$$\begin{aligned}\dot{x}_E&=-\dot{\varphi}_1 l_1 \sin\varphi_1-\dot{\varphi}_2 l_2 \sin\varphi_2,\\ \dot{y}_E&=\dot{\varphi}_1 l_1 \cos\varphi_1+\dot{\varphi}_2 l_2 \cos\varphi_2=0.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Из второго уравнения (4.26) находят угловую скорость звена *2*:

$$\dot{\varphi}_2=-\dot{\varphi}_1 \frac{l_1\cos\varphi_1}{l_2\cos\varphi_2}=-\dot{\varphi}_1 \frac{\cos\varphi_1}{\lambda_2\cos\varphi_2}, \tag{4.27}$$

где $\lambda_2=l_2/l_1$.

Передаточное отношение

$$u_{21}=\omega_2/\omega_1=-\frac{l_1\cos\varphi_1}{l_2\cos\varphi_2}=-\frac{\cos\varphi_1}{\lambda_2\cos\varphi_2}.$$

Скорость ползуна можно вычислить по первому уравнению (4.26) или выражают его после подстановки (4.27) в уравнение (4.26) в форме

$$\dot{x}_E=-\dot{\varphi}_1 l_1 \sin\varphi_1+\dot{\varphi}_1 \frac{l_1\cos\varphi_1}{l_2\cos\varphi_2}\cdot l_2\sin\varphi_2=\dot{\varphi}_1 l_1\left(-\sin\varphi_1+\frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\right). \tag{4.28}$$

Передаточная функция v_{qE} скорости точки E

$$v_{qE}=v_E/\omega_1=l_1\left(-\sin\varphi_1+\frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\right). \tag{4.29}$$

Уравнения ускорений получают дифференцированием по времени уравнений (4.26):

$$\begin{aligned}\ddot{x}_E&=-\ddot{\varphi}_1 l_1 \sin\varphi_1-\dot{\varphi}_1^2 l_1\cos\varphi_1-\ddot{\varphi}_2 l_2\sin\varphi_2-\dot{\varphi}_2^2 l_2\cos\varphi_2,\\ \ddot{y}_E&=\ddot{\varphi}_1 l_1\cos\varphi_1-\dot{\varphi}_1^2 l_1\sin\varphi_1+\ddot{\varphi}_2 l_2\cos\varphi_2-\dot{\varphi}_2^2 l_2\sin\varphi_2=0.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Из второго уравнения системы (4.30) находят $\ddot{\varphi}_2$:

$$\ddot{\varphi}_2=\frac{l_1}{l_2\cos\varphi_2}\left[-\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1+\dot{\varphi}_1^2\left(\sin\varphi_1+\frac{l_1}{l_2}\sin\varphi_2\frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_2}\right)\right]. \tag{4.31}$$

Из первого уравнения системы (4.30) находят ускорение точки E:

$$\ddot{x}_E=\frac{l_1}{\cos\varphi_2}\left[\ddot{\varphi}_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\dot{\varphi}_1^2\left(\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{l_1}{l_2}\frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_2}\right)\right]. \tag{4.32}$$

На рис. 4.7 и 4.8 показаны графики изменения передаточных

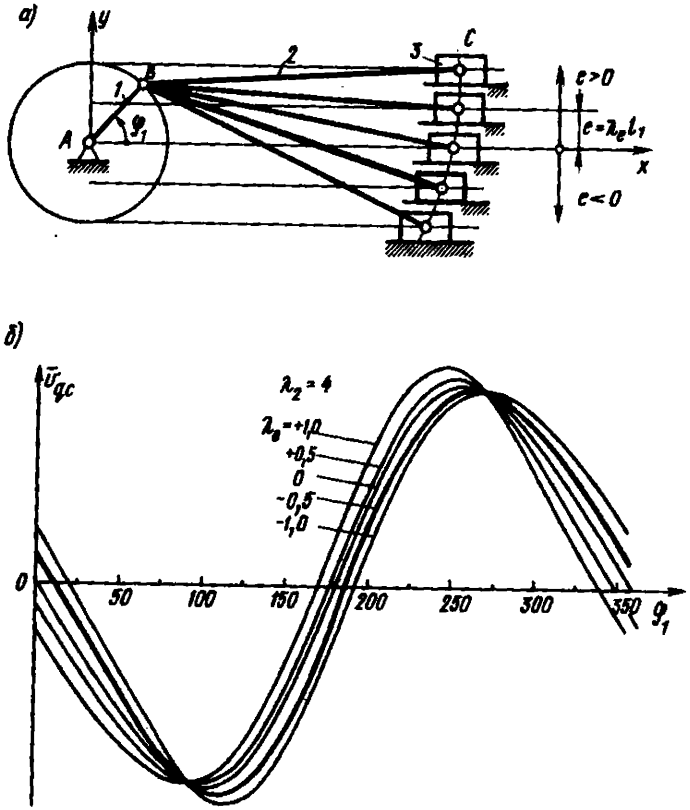


Рис. 4.7

функций скорости точки C $v_{qE}=v_C/\omega_1=\dot{x}_C/\dot{\varphi}_1$ (рис. 4.7, *б*) при разных смещениях $y_E=e$ направляющей ползуна (рис. 4.7, *а*) и передаточного отношения $u_{21}=\omega_2/\omega_1=\dot{\varphi}_2/\dot{\varphi}_1$ угловых скоростей ползуна и кривошипа (рис. 4.8) при разных коэффициентах $\lambda_2=l_2/l_1$, вычисленные и выведенные на графопостроитель при использовании ЭВМ.

Кривошипно-ползунный механизм используется во многих машинах, и при расчетах его кинематических характеристик часто пользуются приближенными формулами, которые получают путем разложения обратной тригонометрической функции $\arcsin x$ в степенной ряд $\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\ldots$.

Принимая для кривошипно-шатунного механизма смещение $e_3=0$ и $\lambda_2=l_2/l_1$, получают:

$$\varphi_2\approx-\arcsin(\sin\varphi_1/\lambda_2)\approx-\frac{\sin\varphi_1}{\lambda_2}-\frac{1}{6}\frac{\sin^3\varphi_1}{\lambda_2^3}-\frac{3}{40}\frac{\sin^5\varphi_1}{\lambda_2^5}-\ldots.$$

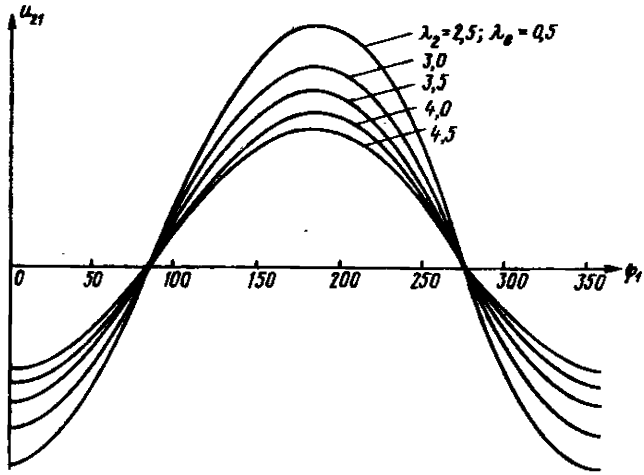


Рис. 4.8

$$\omega_2 \approx -\omega_1 \left[\frac{\cos\varphi_1}{\lambda_2} + \frac{\sin^2\varphi_1 \cos\varphi_1}{2\lambda_2^3} + \ldots \right].$$

$$\varepsilon_2 \approx \omega_1^2 \left[\frac{\sin\varphi_1}{\lambda_2} + \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_2^3} \left(-1 + \frac{3}{2} \sin^2\varphi_1 \right) \right],$$

$$x_E \approx l_1 \left(\lambda_2 + \cos\varphi_1 - \frac{1}{2\lambda_2} \sin^2\varphi_1 - \frac{1}{8\lambda_2^3} \sin^4\varphi_1 \right),$$

$$v_E \approx \omega_1 l_1 \left(-\sin\varphi_1 - \frac{1}{\lambda_2} \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - \frac{1}{2\lambda_2^3} \sin^3\varphi_1 \cos\varphi_1 \right),$$

$$a_E \approx \omega_1^2 l_1 \left[-\cos\varphi_1 + \frac{1}{\lambda_2} (1 - 2\cos^2\varphi_1) + \frac{1}{\lambda_2^3} \sin^2\varphi_1 \left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varphi_1 \right) \right].$$

§ 4.4. ВЕКТОРНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

В основу этого способа положена возможность определять характеристики движения точки или звена по отношению к основной системе отсчета и одновременно по отношению к подвижным системам отсчета, т. е. рассматривать сложное движение точки или звена как сумму переносного движения и относительного движения точки или звена. Зависимости между характеристиками абсолютного, переносного и относительного движения точки или звена, записанные в векторной форме, представляются в виде плана механизма, плана

скоростей механизма и плана ускорений механизма, выполняемых в соответствующих масштабах, позволяющих получать числовые значения той или иной характеристики движения.

Связь между тремя скоростями (абсолютной, относительной и переносной) одной и той же точки выражается так: вектор абсолютной скорости точки равен сумме векторов относительной скорости и переносной скорости той же точки:

$$\bar{v}=\bar{v}_r+\bar{v}_e. \tag{4.33}$$

Если переносное движение поступательное, то абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме полного относительного и полного переносного ускорения:

$$\bar{a}=\bar{a}_r+\bar{a}_e=\bar{a}_r^n+\bar{a}_r^t+\bar{a}_e^n+\bar{a}_e^t.$$

Если переносное движение не поступательное, то возникает добавочное ускорение — ускорение Кориолиса $\bar{a}^K$:

$$\bar{a}=\bar{a}_r+\bar{a}_e+\bar{a}^K=\bar{a}_r^n+\bar{a}_r^t+\bar{a}_e^n+\bar{a}_e^t+\bar{a}^K. \tag{4.34}$$

Решение этих основных соотношений показано на рис. 4.5 на примере трехподвижного манипулятора, схват E которого перемещается по траектории Tp (рис. 4.5, *а*). Для точки E звена *3* справедливы следующие соотношения:

$$\bar{v}_{E3}=\bar{v}_{E2}+\bar{v}_{E3E2}=\bar{v}_B+\bar{v}_{E2B}+\bar{v}_{E3E2}=\bar{v}_{E3x}+\bar{v}_{E3y}.$$

На рис. 4.5, *в* построен план скоростей по этому уравнению относительно искомой скорости $\bar{v}_B$ при заданных значениях v_{E3x}, v_{E3y}, v_{E3E2}, записанному в следующем виде:

$$\underline{\bar{v}_B}=\bar{v}_{E2}+\bar{v}_{BE2}=\underline{\underline{\bar{v}_{E3x}}}+\underline{\underline{\bar{v}_{E3y}}}+\underline{\underline{\bar{v}_{E2E3}}}+\underline{\bar{v}_{BE2}},$$

где $\bar{v}_B=\bar{\omega}_1\times\bar{l}_1$ — известен по направлению (подчеркнута величина одной чертой) — перпендикулярен BA;

$\underline{\underline{\bar{v}_{E2E3}}}$ — скорость относительного перемещения цилиндра относительно поршня. Значение скорости задано, направление — вдоль линии BE (вектор подчеркнут двумя чертами);

$\underline{\bar{v}_{BE2}}$ — известен по направлению — перпендикулярен линии EB;

$\underline{\underline{\bar{v}_{E3x}}}$ $\underline{\underline{\bar{v}_{E3y}}}$ — проекции скорости схвата E на координатные оси: заданы или могут быть определены, если заданы траектория и алгебраическая скорость схвата E вдоль траектории.

Масштаб плана скоростей $\mu_v=\ldots$ мм/(м·с$^{-1}$) вычисляют как отношение длины изображающего отрезка (мм) к значению заданной скорости в единицах изображенного значения скорости (м/с).

План ускорений того же манипулятора приведен на рис. 4.5, *г*. Он построен в масштабе ускорений $\mu_a = \ldots$ мм/(м·с$^{-2}$) по следующим соотношениям:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{E2} + \bar{a}_{BE2} = \underline{\underline{\bar{a}_{E3}}} + \underline{\underline{\bar{a}^t_{E2E3}}} + \underline{\underline{\bar{a}^K_{E2E3}}} + \bar{a}_{BE2},$$

или

$$\underline{\underline{\bar{a}^n_B}} + \bar{a}^t_B = \underline{\underline{\bar{a}_{E3x}}} + \underline{\underline{\bar{a}_{E3y}}} + \underline{\underline{\bar{a}^t_{E2E3}}} + \underline{\underline{\bar{a}^K_{E2E3}}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{BE2}}} + \underline{\underline{\bar{a}^t_{BE2}}}.$$

Здесь верхние индексы n и t относятся соответственно к касательным (тангенциальным) и нормальным составляющим ускорения. Касательное ускорение направлено по касательной к траектории соответственно абсолютного (например, $\bar{a}^t_B$) или относительного ($\bar{a}^t_{E2E3}$, $\bar{a}^t_{BE2}$) движения. Нормальное ускорение направлено по нормали в сторону вогнутости траектории (соответственно $\bar{a}^n_B$, $\bar{a}^n_{BE2}$), а его модуль равен квадрату скорости, делению на радиус кривизны траектории: $a^n_B = v^2_B/l_{BA}$; $a^n_{BE2} = v^2_{BE2}/h_{BE}$. Ускорение Кориолиса $\bar{a}^K_{E2E3} = 2(\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{E2E3})$. Для определения его направления достаточно вектор относительной скорости ($\bar{v}_{E2E3}$) повернуть на 90° в плоскости движения точки в сторону переносного вращения ($\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_2 = \bar{v}_{BE2}/h_{BE}$).

В заключение кинематического анализа механизма манипулятора следует отметить, что векторные уравнения скоростей и ускорений можно спроецировать на координатные оси основной системы отсчета и получить по два уравнения как суммы проекций составляющих скоростей или составляющих ускорений на эти оси. Одна пара уравнений будет тождественна системе уравнений (4.19), другая — система уравнений (4.23), полученных при координатном способе. Различие состоит только в разных обозначениях составляющих.

Второй пример построения планов скоростей и ускорений приведен на рис. 4.6, *б*, *в* для кривошипно-ползунного механизма.

План скоростей построен по векторному уравнению $\bar{v}_E = \bar{v}_B + \bar{v}_{EB}$ или в отрезках: $\overline{p_v e} = \overline{p_v b} + \overline{eb}$.

План ускорений построен по векторному уравнению:

$$\underline{\underline{\bar{a}^t_E}} = \underline{\underline{\bar{a}^n_B}} + \underline{\underline{\bar{a}^t_B}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{EB}}} + \underline{\underline{\bar{a}^t_{EB}}}.$$

Начальным звеном механизма принято звено *1*, для которого заданы угловая координата φ_1, угловая скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1. Искомыми являются скорость v_E и ускорение a_E ползуна *3*, угловая скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 шатуна, скорость v_{S2} и ускорение a_{S2} центра масс S_2 ползуна:

$$\omega_2 = v_{EB}/l_{EB};\ \varepsilon_2 = a^t_{EB}/l_{EB};\ v_{S2} = \frac{p_v s_2}{\mu_v};\ a_{S2} = \frac{p_a s'_2}{\mu_a}.$$

Положения точек s_2 и s'_2 на векторах $\overline{eb}$ и $\overline{e'b'}$ найдены способом пропорционального деления в соответствии с положением точки S_2 на шатуне BE:

$$bs_2 = eb\,\frac{BS_2}{EB};\ b's'_2 = e'b'\,\frac{BS_2}{EB}.$$

Если векторы скоростей и ускорений на планах скоростей и ускорений спроецировать на координатные оси основной системы отсчета, то получают системы тригонометрических уравнений, аналогичные системе уравнений (4.26) для скоростей и систем уравнений (4.30) для ускорений, полученных координатным способом.

§ 4.5. МОДУЛЬНАЯ СИСТЕМА КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ

Знание кинематических характеристик механизмов требуется при решении многих задач проектирования машин, к которым относятся, например, такие:

— оценка функциональных возможностей механизма выполнять требуемое движение звеньев при заданных или вычисленных размерах звеньев;

— оптимизация параметров механизма с учетом заданных ограничений и критериев;

— определение закона движения механизма при заданных активных силах и моментах сил, размерах звеньев, их массах и моментах инерции;

— расчет сил в кинематических парах механизма с учетом неравномерного движения звеньев;

— определение обобщенных координат, скоростей и ускорений ведущего звена (двигателя) по заданному движению исполнительного органа манипуляционных и рычажных механизмов с управляемыми двигателями;

— определение кинематических характеристик механизмов по заданному движению линейных, поворотных и роторных двигателей.

Успешное решение этих задач возможно только при системном подходе к проектированию. Под системой понимают совокупность элементов, функционально и структурно связанных и взаимодействующих друг с другом. Структура любой системы определяется связями между элементами, имеющими определенные характеристики и свойства. Связь любой системы с другими системами осуществляется входами в систему и выходами из нее. Применительно к рычажным механизмам такими элементами можно принять структурные группы, статически и кинематически определимые и имеющие нулевую подвижность относительно основания, связывающего внешние кинематические пары поводков этой группы.

При задании движения внешним парам группы звенья группы будут описывать движение, характеристики которого можно описать математическими уравнениями и соответствующими алгоритмами вычислительных и логических процедур.

При обработке входной информации на ЭВМ требуемые алгоритмы оформляются в виде соответствующей программы.

Независимые части программы оформляются в виде *программных модулей*. Модули могут оформляться в блоки — в оформленную последовательность операторов и комментариев, которые реализуют логически самостоятельную часть вычислительного процесса на ЭВМ.

Для механизмов II класса 2-го порядка структурные группы содержат по два звена, соединенных внутренней кинематической

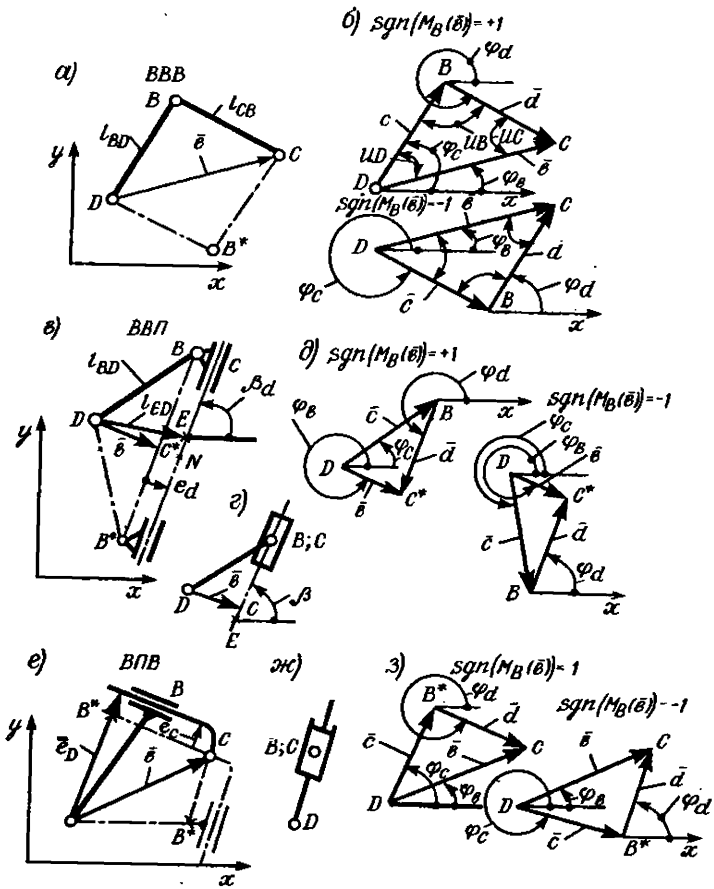


Рис. 4.9

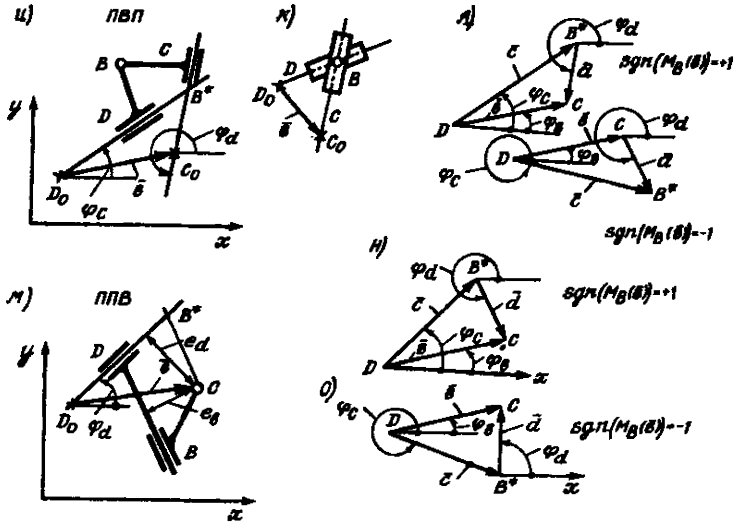


Рис. 4.9 (продолжение)

парой *В*, которая может быть вращательной (*В*) или поступательной (*П*). Возможные сочетания внешних и внутренних пар показаны на рис. 4.9, *а*, *с*, *д*, *ж*, *з*, *к*, *л*, *о* для групп типа *ВВВ*, *ВВП*, *ВПВ*, *ПВП*, *ППВ*. Движение внешних вращательных пар *D* и *C* задается массивами кинематических элементов движения: $DD=\{x_D, y_D, \dot{x}_D, \dot{y}_D, \ddot{x}_D, \ddot{y}_D\}$ и $DC=\{x_C, y_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C\}$.

Движение внешней поступательной пары задается координатами базовой точки C_0 и направляющей *C* массивом $DC_0O=\{x_{CO}, y_{CO}, \varphi_C, \dot{\varphi}_C, \ddot{\varphi}_C\}$ или базовой точки D_0 и направляющей *d* массивом $DDO=\{x_{DO}, y_{DO}, \varphi_d, \dot{\varphi}_d, \ddot{\varphi}_d\}$.

Справа на рис. 4.9, *б*, *е*, *и*, *м*, *н* приведены векторные модели структурных групп, построенные по векторному уравнению $\bar{b}=\bar{c}+\bar{d}$. Здесь вектор $\bar{b}$ определяется внешними парами групп, его называют *базовым*. Его кинематические параметры могут быть вычислены в виде массивов того или иного вида, например $VB=\{b, \varphi_b, \dot{b}_x, \dot{b}_y, \ddot{b}_x, \ddot{b}_y\}$; $VBRF=\{b, \varphi_b, \dot{b}, \dot{\varphi}_b, \ddot{b}, \ddot{\varphi}_b\}$ $PRB=\{b, \dot{b}, \ddot{b}\}$; $PFB=\{\varphi_b, \dot{\varphi}_b, \ddot{\varphi}_b\}$.

Анализ векторных моделей для двухзвенной структурной группы показывает, что векторы образуют косоугольный или прямоугольный треугольник. Для каждой структурной группы по отношению к базовому вектору возможны два расположения или две сборки механизма. На это обстоятельство указывалось в § 4.3, где было введено понятие о числовом показателе сборки с помощью функции знака (сигнум). Поэтому функция знака должна вводиться в выражения для угловых координат φ_c и φ_d векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ соответ-

ственно:

$$\varphi_c=\varphi_b+UD\,\mathrm{sgn}\,(M_B(\text{Б}))+2\pi k \qquad (k=0;\ \pm 1),$$

$$\varphi_d=\varphi_b-UC\,\mathrm{sgn}\,(M_B(\text{Б}))+2\pi k \qquad (k=0;\ \pm 1).$$

В зависимости от вида структурной группы и набора задаваемых параметров для каждой группы (длина звеньев c и d, смещение направляющей e_c и e_d, угловой координаты направляющей β_d, φ_c, φ_d, координат базовой точки направляющей поступательной пары) составляют алгоритм вычисления функций положения звеньев и координат внутренней пары. Практически все алгоритмы можно составить на основе решения косоугольных треугольников BCD на векторной модели структурной группы. Используют:

теорему косинусов

$$\cos UD=\frac{c^2+b^2-d^2}{2cb};\ \cos UC=\frac{b^2+d^2-c^2}{2bd};\ d=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos UD},$$

теорему синусов

$$c=b\,\frac{\sin UC}{\sin UB}=d\,\frac{\sin UC}{\sin UD};\ \sin UC=\frac{c}{b}\sin UB;\ \sin UD=\frac{d}{b}\sin UB,$$

формулу тангенсов

$$\mathrm{tg}\,UD=\frac{d\sin UC}{b-d\cos UC}=\frac{d\sin UB}{c-d\cos UB},$$

формулу косинусов $c=b\cos UD+d\cos UB$,

теорему половинного угла (при заданном полупериметре $p=(b+c+d)/2$)

$$\mathrm{tg}\,\frac{UD}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{p(p-d)}};\ \sin\frac{UD}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{cb}};\ \cos\frac{UD}{2}=\sqrt{\frac{p(p-d)}{cb}}.$$

Векторное уравнение геометрических связей в структурной группе можно записать в форме $\bar{b}=\bar{c}+\bar{d}$ или в форме проекций на координатные оси и найти искомые элементы положения звеньев с учетом заданных размеров механизма:

$$\begin{aligned} x_C-x_D&=c\cos\varphi_c+d\cos\varphi_d=b\cos\varphi_b,\\ y_C-y_D&=c\sin\varphi_c+d\sin\varphi_d=b\sin\varphi_b. \end{aligned} \tag{4.35}$$

После дифференцирования уравнений (4.35) по времени получают:

$$\dot{x}_C-\dot{x}_D=-\dot{\varphi}_c c\sin\varphi_c+\dot{c}\cos\varphi_c-\dot{\varphi}_d d\sin\varphi_d+\dot{d}\cos\varphi_d=$$

$$=-\dot{\varphi}_b b\sin\varphi_b+b\cos\varphi_b,$$

$$\dot{y}_C-\dot{y}_D=\dot{\varphi}_c c\cos\varphi_c+\dot{c}\sin\varphi_c+\dot{\varphi}_d d\cos\varphi_d+\dot{d}\sin\varphi_d=\dot{\varphi}_b b\cos\varphi_b+\dot{b}\sin\varphi_b. \tag{4.36}$$

После дифференцирования уравнений (4.36) по времени получают:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_C-\ddot{x}_D&=-\ddot{\varphi}_c c\sin\varphi_c-\dot{\varphi}_c^2 c\cos\varphi_c-2\dot{\varphi}_c\dot{c}\sin\varphi_c+\ddot{c}\cos\varphi_c-\\
&-\ddot{\varphi}_d d\sin\varphi_d-\dot{\varphi}_d^2 d\cos\varphi_d-2\dot{\varphi}_d\dot{d}\sin\varphi_d+\ddot{d}\cos\varphi_d=\\
&=-\ddot{\varphi}_b b\sin\varphi_b-\dot{\varphi}_b^2 b\cos\varphi_b-2\dot{\varphi}_b\dot{b}\sin\varphi_b+\ddot{b}\cos\varphi_b,\\
\ddot{y}_C-\ddot{y}_D&=\ddot{\varphi}_0 c\cos\varphi_c-\dot{\varphi}_0^2\sin\varphi_c-2\dot{\varphi}_0\dot{c}\cos\varphi_c+\ddot{c}\sin\varphi_c+\\
&+\ddot{\varphi}_d d\cos\varphi_d-\dot{\varphi}_d^2 d\sin\varphi_d+2\dot{\varphi}_d\dot{d}\cos\varphi_d+\ddot{d}\sin\varphi_d=\\
&=\ddot{\varphi}_b b\cos\varphi_b-\dot{\varphi}_b^2 b\sin\varphi_b+2\dot{\varphi}_b\dot{b}\cos\varphi_b+\ddot{b}\sin\varphi_b.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Подставляя в эти зависимости соответствующие значения задаваемых или вычисленных параметров в зависимости от вида структурной группы, получают по два линейных уравнения относительно двух искомых неизвестных, которые находят, например, по правилу Крамера. Из общих соотношений (4.35), (4.36), (4.37) можно составить отдельные модули для частных случаев (в частности, для каждой структурной группы раздельно) и оформить эти модули как составные части системы автоматизированного расчета кинематических характеристик рычажных и манипуляционных механизмов*.

Для примера на рис. 4.10 и 4.11 приведены векторные модели, планы скоростей и планы ускорений для структурных групп вида *ВВВ* и *ВВП*.

Функции положения звеньев составляют на основе проецирования векторного уравнения $\bar{b}=\bar{c}+\bar{d}$ на координатные оси и решения алгебраических уравнений для определения UD, UC, φ_b, φ_c, φ_d, b, x_B, y_B, x_{sd}, y_{sd}, x_{sc}, y_{sc} (рис. 4.10, *а*; 4.11, *а*).

Для группы *ВВВ* заданы кинематические характеристики внешних пар C и D. Для примера точка D является парой звена со стойкой и поэтому $DD=\{x_D,\ y_D,\ 4\times\varnothing\}$. При этом же условии построены план скоростей (рис. 4.10, *б*) и план ускорений (рис. 4.10, *в*). Для точки C задан массив $DC=\{x_c, y_c, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \ddot{x}_c, \ddot{y}_c\}$ или $DCV=\{x_c, y_c, \bar{v}_c, \bar{a}_c^n, \bar{a}_c^t\}$.

Скорость точки B определяется по векторному уравнению

$$\bar{v}_B=\underline{\underline{\bar{v}_C}}+\underline{\bar{v}_{BC}}=\underline{\underline{\bar{v}_D}}+\underline{\bar{v}_{BD}} \text{ (рис. 4.10, } б\text{)}.$$

**Попов С. А., Черная Л. А.* Математическое и программное обеспечение расчетов кинематических характеристик плоских рычажных и манипуляционных механизмов (система БЛОМСАР)/Под ред. Г. А. Тимофеева.— М.: Изд-во МГТУ, 1991.

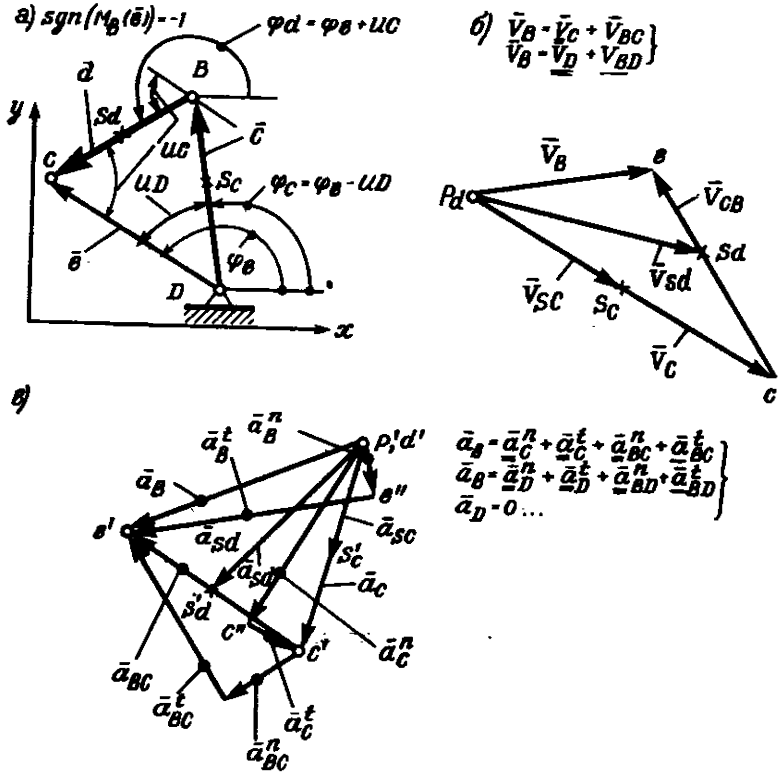


Рис. 4.10

Ускорение точки B определяется решением векторного уравнения

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^t + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^t = \bar{a}_D^n + \bar{a}_D^t + \bar{a}_{BD}^n + \bar{a}_{BD}^t \text{ (рис. 4.10, в).}$$

Ускорение центра масс S_d на звене BC определяют пропорциональным делением отрезка $c'b'$ в соотношении

$$b's_d = b'c' \frac{BS_d}{CB} \text{ и } \bar{a}_{sd} = \overline{p's_d}/\mu_a.$$

Планы скоростей и ускорений строят в соответствующих масштабах μ_v и μ_a, что позволяет вычислить числовые значения искомых скоростей и ускорений.

Для группы *ВВП* (рис. 4.11) планы скоростей (рис. 4.11, *б*, *в*) и планы ускорений (рис. 4.11, *г*, *д*) построены для двух вариантов задания значений кинематических параметров движения внешних пар $DC = \{x_c, y_c, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \ddot{x}_c, \ddot{y}_c\}$: первый вариант — $PR4 = \{x_E, y_E, 4 \times \varnothing\}$

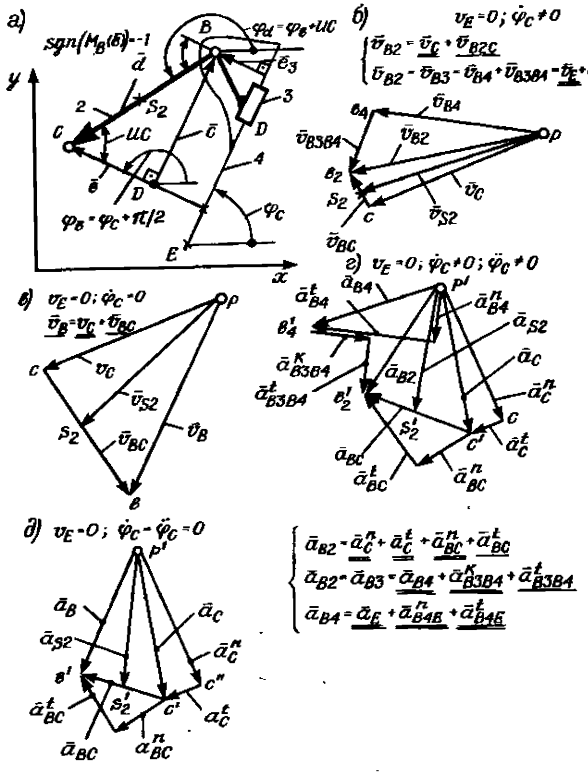


Рис. 4.11

и $PF4=\{\varphi_c,\ \dot{\varphi}_c,\ \ddot{\varphi}_c\}$; второй вариант — $PR4=\{x_E,\ y_E,\ 4\times\varnothing\}$ и $PF4=\{\varphi_c,\ 2\times\varnothing\}$.

Для первого варианта (направляющая *4* совершает плоское движение) план скоростей построен по уравнениям

$$\begin{aligned}&\bar{v}_B=\bar{v}_c+\bar{v}_{Bc},\\&\bar{v}_B=\bar{v}_{B3}=\bar{v}_{B4}+\bar{v}_{B3B4}=\bar{v}_E+\bar{v}_{B4E}+\bar{v}_{B3B4}.\end{aligned}\qquad\text{(рис. 4.11, б)}$$

Точка B_4 принадлежит направляющей *4*, но совпадает по положению с $B_2\equiv B_3$. План ускорений построен по уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}_B=\bar{a}_c^n+\bar{a}_c^t+\bar{a}_{Bc}^n+\bar{a}_{Bc}^t,\\&\bar{a}_B=a_{B3}=a_{B4}+a_{B3B4}^K+\bar{a}_{B3B4}^t,\\&\bar{a}_{B4}=a_E+a_{B4E}^n+a_{B4E}^t.\end{aligned}\right\}\text{(рис. 4.11, г)}$$

Ускорение Кориолиса: $\bar{a}_{B3B4}^K=2(\bar{\omega}_4\times\bar{v}_{B3B4})$.

Для второго варианта (направляющая *4* неподвижна, ползун *3* совершает поступательное прямолинейное движение):

уравнение скоростей

$$\underline{\bar{v}_b} = \underline{\bar{v}_c} + \underline{\bar{v}_{BC}} \text{ (рис. 4.11, } в\text{)},$$

уравнение ускорений

$$\bar{a}^t_B = \bar{a}^n_c + \bar{a}^t_c + \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^t_{BC} \text{ (рис. 4.11, } д\text{)}.$$

§ 4.6. ПРИМЕРЫ ГРАФИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

Планы механизма. Изображение кинематической схемы механизма в выбранном масштабе, соответствующее определенному положению начального звена (или начальных звеньев для механизмов с несколькими степенями свободы), называют *планом механизма*. Масштаб плана механизма определяет размеры отрезков, изображающих длину звеньев и координаты точек звеньев. Масштаб плана механизма обозначают через μ_l с единицей СИ [мм/м], т. е. под масштабом длины понимают отношение отрезка на плане в мм к числовому значению длины изображаемого звена в единицах СИ, т. е. в м. Например, $\mu_l = AB/l_{AB}$, $\mu_l = BC/l_{BC}$, где $[AB] = [BC] =$ мм; $[l_{AB}] = [l_{BC}] =$ м; $[\mu_l] =$ мм/м.

Для определения числового значения отрезков размеры соответствующих звеньев (м) необходимо умножить на выбранный масштаб плана механизма μ_l, например $BC = \mu_l l_{BC}$.

Рассмотрим графический метод на примере шестизвенного рычажного механизма (рис. 4.12), используемого, например, в устройстве автоматической прерывистой подачи деталей из накопителя (магазина) на ленточный транспортер. Звено *1* вращается неравномерно с остановами после поворота на угол 2π. Тем не менее при построении плана механизма можно угол поворота звена *1*, являющийся обобщенной координатой, разделить на ряд последовательных угловых шагов, равных между собой (например, на 12 угловых шагов, каждый из которых равен 30°). Любая точка входного звена *1* описывает окружность и последовательно занимает положения, равномерно расположенные на окружности радиуса l_{BA}. На рис. 4.12, *а* показана окружность, описываемая точкой *B*, последовательные положения которой отмечены арабскими цифрами *1*, *2*, *3*, ..., *12*. Для определения положений звеньев *2* и *3* достаточно найти положения кинематической пары *C*, шарнирно соединяющей эти звенья между собой.

Точка *C* описывает дуговую траекторию $\alpha_2 - \alpha_2$ радиуса l_{CD} в ее относительном движении вокруг точки *D* и дуговую траекторию $\alpha_1 - \alpha_1$ радиуса l_{CB} в ее движении относительно точки *B*. Точка пересечения этих двух дуговых траекторий $\alpha_1 - \alpha_1$ и $\alpha_2 - \alpha_2$ от-

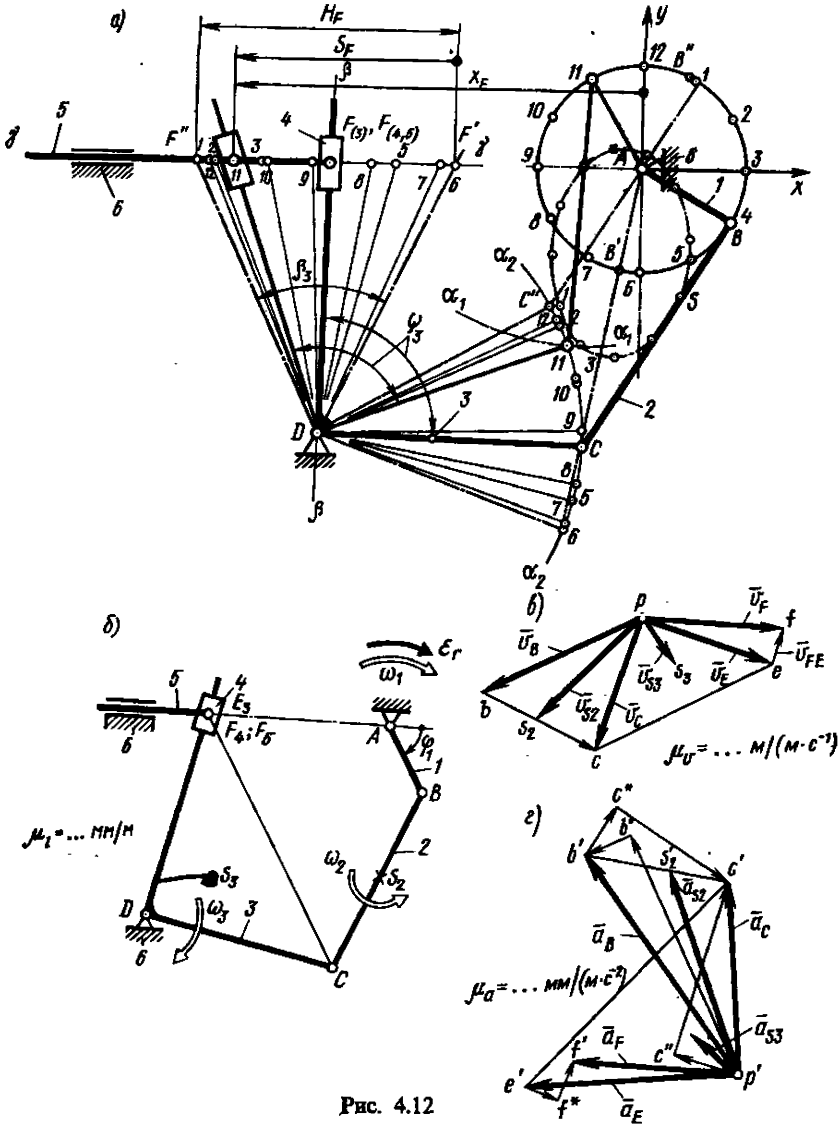


Рис. 4.12

носительного движения точки *C* (на рис. 4.12, *а* они показаны для позиции *11*) находится с помощью циркуля. Подобное построение иногда называют способом засечек. Для остальных положений входного звена *1* выполняют аналогичные построения и находят последовательные положения точки *C* на окружности радиуса l_{CD}, которые расположены неравномерно. Положения точки *C* отмечают также арабскими цифрами соответственно разметке положений

начального звена *1*. Для нахождения положения звеньев *2* и *3* достаточно соединить соответствующие точки (на рисунке показано утолщенными линиями в позиции *11*).

Для определения положений звеньев *4* и *5* достаточно найти положения точки *F*. Траекторией точки *F* относительно стойки *6* является прямая $\gamma - \gamma$, а траекторией этой же точки относительно звена *3* — прямая $\beta - \beta$, совпадающая с *FD*. Угол $FDC = \psi_3$ звена *3* является неизменным, и положения прямой $\beta - \beta$ (или *FD*) можно найти обычными геометрическими построениями, сохраняя конструктивный угол ψ_3 неизменным.

Пересечение траекторий относительного движения точки *F* прямых $\gamma - \gamma$ и $\beta - \beta$ определяет ее соответствующие положения. Эти положения точки *F* также отмечают арабскими цифрами соответственно разметке положений начального звена *1*.

На плане механизма в случае необходимости можно построить траектории, описываемые любой точкой того или иного звена, положение которого уже найдено. На рис. 4.12, *а*, например, показаны последовательные положения точки *S* на шатуне *2*. Проводя через размеченные положения плавную кривую, получают траекторию точки *S*. Подобные траектории точек, расположенные на звеньях, совершающих плоскопараллельные движения, называют шатунными кривыми. Эти кривые могут быть также описаны аналитическими соотношениями. Например, для шарнирного четырехзвенника *ABCD* траектория точки *S* (рис. 4.12, *а*) описывается алгебраической кривой шестого порядка. Предельные положения точек на своих траекториях обозначены буквами C', C'', F', F''. Они соответствуют крайним «мертвым» положениям, которые также можно найти построениями: положение C' — пересечение траектории $\alpha_2 - \alpha_2$ дугой радиуса $l_{AC} = l_1 + l_2$ с центром в точке *A*; положение C'' — пересечение той же траектории $\alpha_2 - \alpha_2$ дугой радиуса $l_{AC''} = l_2 - l_1$ с центром в точке *A*; положения F' и F'' соответствуют точкам C' и C'', B' и B''.

Расстояние $F'F''$ определяет в масштабе чертежа ход H_F выходного звена *5* относительно стойки *6*. Угол $\beta_3 = \angle F'DF''$ называют угловым ходом или углом поворота кулисы *3*.

При построении планов механизмов, имеющих трехповодковые группы, также используется метод пересечения двух траекторий относительного движения (способ засечек), причем одна из траекторий может быть шатунной кривой по отношению к системе, связанной с ведущим звеном. Иногда этот способ называют *способом ложных положений*. Особенности этого способа показаны на примере построения плана восьмизвенного кулисного механизма, приведенного на рис. 4.13.

В этом механизме с одной степенью свободы начальным является звено *1*, к которому в точках *B* и *C* присоединены звенья *2* и *3*. Эти звенья являются поводками трехповодковой группы с базис-

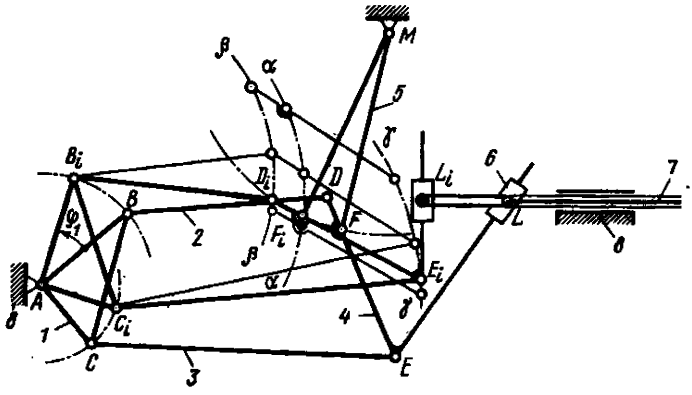


Рис. 4.13

ным звеном *4*. Звено *5* является третьим поводком в этой группе. Звенья *6* и *7* образуют двухповодковую группу стойка — звено *8*.

Для нахождения положения звеньев трехповодковой группы используют методику, заключающуюся в следующем.

Начальное звено *1* поворачивают на некоторый угол φ_1 и находят положения точек B_i и C_i на дуговых траекториях, описываемых этими точками относительно точки *A*. Точка *F*, соединяющая поводок *5* и базисное звено *4*, описывает относительно точки *M* дуговую траекторию радиуса l_{FM}. Однако найти положение точки *F* на этой дуговой траектории непосредственно способом засечек не удается. Поэтому необходимо провести дополнительное построение, связанное с нахождением траектории точки *F* относительно начального звена *1* в фиксированной позиции («замороженное» состояние). В этом относительном движении точка *D* описывает дуговую траекторию $\beta - \beta$ радиуса l_{DiBi}, а точка *E* — дуговую траекторию $\gamma - \gamma$ радиуса l_{EiCi}.

Задавшись рядом положений точки D_i на траектории $\beta - \beta$, на траектории $\gamma - \gamma$ способом засечек радиусом l_{DE} находят соответствующие положения точки E_i и строят траекторию $\alpha - \alpha$, описываемую точкой *F* при этом относительном движении звена *4* по отношению к начальному звену *1* в фиксированной позиции. Пересечение траектории $\alpha - \alpha$ точки *F* в относительном движении («ложной траектории») с возможной траекторией точки *F* по дуге окружности радиуса l_{FM} определяет искомое положение точки F_i и звена *4* при данном положении входного звена. Положение звеньев *2*, *3* и *4* на рисунке показано тонкими линиями. Положение звеньев *6* и *7* присоединенной двухповодковой группы определяется способом, описанным ранее. Для построения остальных планов механиз-

ма необходимо провести аналогичные действия для требуемого числа положений начального звена *1*.

При определении кинематических характеристик механизмов с высшими парами (например, кулачковых) приходится учитывать, что профили или один из профилей имеют сложные очертания (рис. 4.14). Координаты точек профиля обычно задаются графически или в табличной форме. Вычерчивание ряда положений подобного профиля затруднено. Наиболее целесообразным оказывается применение *метода обращения движения*. Суть этого метода заключается в том, что всему механизму в целом придают вращение с угловой скоростью, равной по величине, но противоположной по направлению, того звена, которое необходимо сделать неподвижным. Следовательно, подвижное начальное звено *1*, имеющее сложный профиль, условно считают неподвижным, а стойку *4* вращают в противоположном направлении с угловой скоростью $\omega_4^{(1)} = -\omega_1$ (рис. 4.14). Такое движение механизма называют *обращенным движением* звеньев по отношению к начальному звену *1*.

Относительное положение всех звеньев, в том числе входного

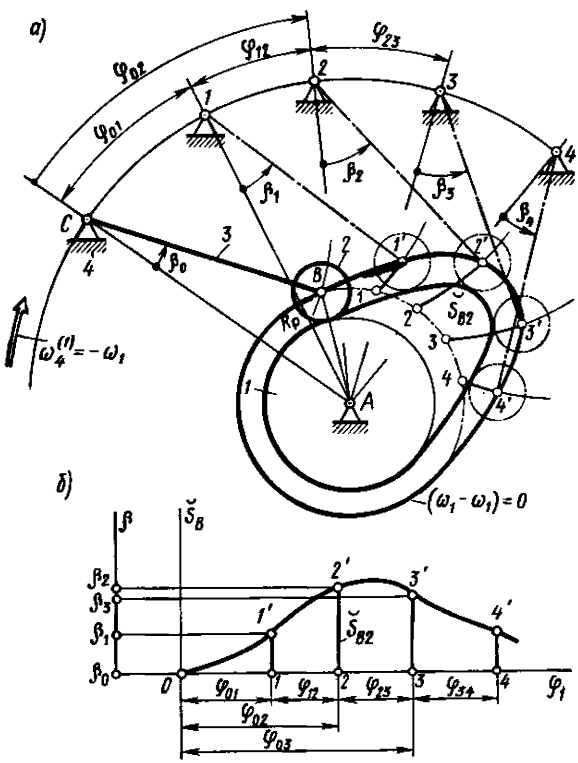


Рис. 4.14

и выходного, при обращении движения не изменяется. Пример использования метода обращения движения для построения планов положения показан для кулачкового механизма с дисковым кулачком и вращающимся роликовым толкателем (рис. 4.14). Стойке AC (звено *4*) сообщают относительное движение с угловой скоростью $-\omega_1$ и на окружности радиуса AC размечают ряд положений точки C: *0, 1, 2, 3, ...*— оси вращения толкателя, характеризуемые углами поворота φ_{01}, φ_{12}, φ_{23}, ... между смежными положениями или углами φ_{01}, φ_{02}, φ_{03}, ..., отсчитываемыми от начального положения стойки AC.

Ролик *2* радиуса $R_р$ при относительном движении обкатывается по *конструктивному профилю* кулачка, а его ось B (центр окружности) описывает кривую, называемую *центровым профилем*, показанную на рисунке тонкой линией. Положения осей ролика для размеченных положений механизма находят с помощью засечек на центровом профиле дугами радиуса, равного длине толкателя l_{BC}, и обозначают их цифрами с верхним индексом *1', 2', 3', 4', ...* .

Точки пересечения этих дуг с окружностью радиуса $R_0+R_р$ обозначают цифрами *1, 2, 3, ...* . Длина дуг *11', 22', 33', ...* равна перемещению S_B оси B ролика относительно начального положения механизма и пропорциональна углам относительного поворота толкателя, равным $\beta_1-\beta_0$, $\beta_2-\beta_0$, $\beta_3-\beta_0$, ... Измерение углов поворота толкателя *2* или соответствующих длин дуг, описываемых осью B ролика, позволяет построить графики, характеризующие изменение функций положения $S_B(\varphi_1)$ или $\beta(\varphi_1)$ в зависимости от угловой координаты φ_1 начального звена (рис. 4.14, *б*).

Применение изложенных выше приемов кинематического исследования двухповодковых групп рассмотрено ниже на примере шестизвенного кулисного механизма (см. рис. 4.12, *а*, *б*), используемого в разных технологических машинах.

Пусть начальное звено *1* механизма совершает вращательное движение относительно оси A с заданными угловой скоростью ω_1 и угловым ускорением ε_1. Для положения начального звена *1*, определяемого угловой координатой φ_1, можно найти скорость $v_B=\omega_1 l_{BA}$ точки B и ускорения:

нормальное $a_B^n=\omega_1^2 l_{BA}=v_B^2/l_{BA}$;

касательное $a_B^\tau=\varepsilon_1 l_{BA}$.

На планах скоростей (см. рис. 4.12, *в*) и ускорений (см. рис. 4.12, *г*) эти векторы изображают отрезками, направление и длина которых соответствует физическим величинам

$$\overline{pc}=\mu_v\bar{v}_B;\ \overline{p'b''}=\mu_a\bar{a}_B^n;\ \overline{b''b'}=\mu_a\overline{a_B^\tau}.$$

Единицы СИ масштабов: $[\mu_v]=$мм/(м·с$^{-1}$) и $[\mu_a]=$мм/(м·с$^{-2}$), а их числовое значение выбирают с учетом размеров поля на чертеже, отведенного для построения и требуемой точности расчетов. Чем

больше размеры отрезков, тем более точными будут результаты графических вычислений и построений.

Звенья *2* и *3* образуют двухповодковую группу, присоединенную одним концевым шарниром в точке *B* к начальному звену *1* и вторым концевым шарниром в точке *D* — к стойке *6*. Промежуточная кинематическая пара в точке *C* является вращательной, она соединяет два звена: *2* и *3*. По теореме о плоском движении этих звеньев записывают следующие векторные уравнения:

для определения скоростей

$$\bar{v}_C=\underline{\underline{\bar{v}_B}}+\underline{\bar{v}_{CB}};\ \bar{v}_C=\underline{\underline{\bar{v}_D}}+\underline{\bar{v}_{CD}}=\underline{\bar{v}_{CD}},$$

$\bar{v}_D=0$, так как ось *D* неподвижна;

для определения ускорения

$$\bar{a}_C=\underline{\underline{\bar{a}^n_B}}+\underline{\underline{\bar{a}^\tau_B}}+\underline{\underline{\bar{a}^n_{CB}}}+\underline{\bar{a}^\tau_{CB}};\ \bar{a}_C=\underline{\underline{\bar{a}_D}}+\underline{\underline{\bar{a}^n_{CD}}}+\underline{\bar{a}^\tau_{CD}},.$$

здесь $\bar{a}_D=0$.

Векторы относительных скоростей $\bar{v}_{CB}$ и $\bar{v}_{CD}$ направлены по касательным к траекториям относительного движения, т. е. $\bar{v}_{CB}\perp BC$; $\bar{v}_{CD}\perp CD$.

Числовые значения нормальных ускорений $\bar{a}^n_{CB}$ и $\bar{a}^n_{CD}$ определяются с учетом скоростей и радиусов кривизны траекторий движения точек:

$$\underline{\underline{a^n_{CB}}}=v^2_{CB}/l_{CB};\ \underline{\underline{a^n_{CD}}}=v^2_{CD}/l_{CD}.$$

Векторы нормальных ускорений направлены по нормали к центру кривизны соответствующей траектории относительного движения точек. Векторы касательных ускорений $\bar{a}^\tau_{CB}$ и $\bar{a}^\tau_{CD}$ направлены по касательным к траекториям относительного движения. Следовательно, $\bar{a}^n_{CB}\|CB$; $\bar{a}^\tau_{CB}\perp CB$; $\bar{a}^n_{CD}\|CD$; $\bar{a}^\tau_{CD}\perp CD$.

Графическое решение записанных выше векторных уравнений приведено в виде плана скоростей (см. рис. 4.12, *в*) и плана ускорения (см. рис. 4.12, *г*).

Искомые величины параметров $\bar{v}_C$ и $\bar{a}_C$ определяют по соотношениям

$$\bar{v}_C=\overline{pc}/\mu_v;\ \bar{a}_C=\overline{p'c'}/\mu_a.$$

К звену *2* рассматриваемого механизма присоединена вторая двухповодковая группа, составленная из звеньев *4* и *5*, образующих между собой вращательную пару в точке *F*. Звено *4* образует со звеном *3* поступательную кинематическую пару. Звено *5* со стойкой *6* также образует поступательную кинематическую пару. Наличие этих связей определяет относительное движение звеньев: ползун *5* движется вдоль направляющей стойки *6*, а звено *4* может скользить относительно направляющей *ED* на звене *3*, совершающей вращательное движение относительно оси *D*.

Для составления векторных уравнений для двухповодковой

группы из звеньев *4* и *5* рассматривают сложное движение ползуна *4*, т. е. движение точки F на звене *4* относительно точки E на звене *3*, положение которых в рассматриваемый момент совпадает. Для этих двух точек F_4 и E_3, принадлежащих разным звеньям, записывают следующие векторные уравнения:

для определения скоростей

$$\underline{\bar{v}_{F4}}=\underline{\underline{\bar{v}_{E3}}}+\underline{\bar{v}_{F4E3}} \text{ или } \underline{\bar{v}_F}=\underline{\underline{\bar{v}_E}}+\underline{\bar{v}_{FE}};$$

для определения ускорений

$$\underline{\bar{a}_F}=\underline{\bar{a}_F^{\tau}}=\underline{\underline{\bar{a}_E^n}}+\underline{\underline{\bar{a}_E^{\tau}}}+\underline{\underline{\bar{a}_{FE}^K}}+\underline{\underline{\bar{a}_{FE}^n}}+\underline{\bar{a}_{FE}^{\tau}}.$$

Здесь $\bar{a}_{FE}^n=0$, так как относительное движение — поступательное.

При построении плана скоростей скорость точки E определяют по соотношению $\bar{v}_E=\bar{v}_C+\bar{v}_{EC}$ или из подобия фигур: $\triangle pce \sim \triangle DCE$.

При построении плана ускорений ускорение точки E определяют по подобию фигур на схеме механизма и на плане ускорений: $\triangle p'c'e' \sim \triangle DCE$.

Решение векторного уравнения для определения скоростей приведено на рис. 4.12, *в*.

Вектор $\overline{ef}$ проведен параллельно линии DE, а вектор $\overline{pf}$ — параллельно направляющей стойки *6*. Искомая скорость v_F точки F определяется по соотношению

$$\bar{v}_F=\overline{pf}/\mu_v.$$

Скорость v_{FE} точки F звена *4* относительно точки E звена *3* определяют из соотношения $\bar{v}_{FE}=\overline{ef}/\mu_v$.

Угловые скорости звеньев *3* и *2* находят по соотношениям

$$\omega_3=\frac{v_C}{l_{CD}}=\frac{pc/\mu_v}{CD/\mu_l}=\frac{\mu_l}{\mu_v}\left(\frac{\overline{pc}}{CD}\right),$$

$\operatorname{sgn}\omega_3=-1$ (по часовой стрелке);

$$\omega_2=\frac{v_{CB}}{l_{BC}}=\frac{bc/\mu_v}{BC/\mu_l}=\frac{\mu_l}{\mu_v}\left(\frac{\overline{bc}}{BC}\right),$$

$\operatorname{sgn}\omega_2=+1$ (против часовой стрелки).

Векторные уравнения для определения ускорений следующие:

$$\underline{\underline{\bar{a}_C^n}}+\underline{\bar{a}_C^{\tau}}=\underline{\underline{\bar{a}_B^n}}+\underline{\underline{\bar{a}_{CB}^n}}+\underline{\bar{a}_{CB}^{\tau}};$$

$$\underline{\bar{a}_F^{\tau}}=\underline{\underline{\bar{a}_E}}+\underline{\underline{\bar{a}_{FE}^K}}+\underline{\underline{\bar{a}_{FE}^n}}+\underline{\bar{a}_{FE}^{\tau}},$$

здесь $\bar{a}_{FE}^n=0$. Их решение приведено на рис. 4.12, *г*.

Вектор $\overline{p'c''}$ приведен параллельно линии CD, его длина определена по соотношению $\overline{p'c''}=\mu_a\bar{a}_C^n$. Направление вектора $\overline{c''c'}$ проведе-

но перпендикулярно линии DC, а его длина определяется в результате решения векторного уравнения. Векторы $\overline{p'b''}=\mu_a\bar{a}_B^n$ и $\overline{b''b'}=\mu_a\bar{a}_B^\tau$ проводят соответственно параллельно и перпендикулярно звену BA с учетом направления углового ускорения ε_1. Для решения первого уравнения к вектору $\overline{p'b'}=\mu_a\bar{a}_B$ прибавляют вектор $\overline{b'c^*}=\mu_a\bar{a}_{CB}^n$ и вектор $\overline{c^*c'}$, длина которого находится из построения. Точка c' представляет собой точку пересечения двух векторов, пропорциональных $\bar{a}_{CB}^\tau$ и $\bar{a}_C^\tau$, известных по направлению, но не известных по величине. Искомое ускорение $\bar{a}_C=\overline{p'c'}/\mu_a$.

Ускорение точки E находят по подобию треугольников на схеме механизма и на плане ускорений: $\triangle CDE \sim \triangle c'p'e'$.

Векторное уравнение для определения ускорения точки F на ползуне *4* и ползуне *5* в правой части содержит два вектора, известных по величине и направлению: $\overline{p'c'}=\mu_a\bar{a}_E$ и $\overline{e'f^*}=\mu_a\bar{a}_{FE}^\kappa$, и один вектор $\overline{f^*f'}=\mu_a\bar{a}_{FE}^\tau$, направление которого параллельно линии ED.

Ускорение $\bar{a}_{FE}^\kappa$ находят по соотношению

$$\bar{a}_{FE}^\kappa=2\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r=2\bar{\omega}_3\times\bar{v}_{FE}.$$

Точку f' на плане ускорений получают как точку пересечения векторов $\overline{p'f'}$ и $\overline{f^*f'}$, известных по направлению. Искомое ускорение точки F

$$\bar{a}_F=\overline{p'f'}/\mu_a.$$

Ускорения центров масс S_2, S_3, S_5 звеньев *2*, *3*, *5* находят по методу подобия фигур и пропорционального деления отрезков векторов ускорения точек в относительном движении и на схеме механизма, например

$$\overline{b's_2'}=\overline{b'c'}\,\frac{BC_2}{BC} \text{ и } \bar{a}_{S2}=\mu_a\overline{p's_2'} \text{ или } \triangle c's_3'e' \sim \triangle CS_3E.$$

На рис. 4.12, *г* показана только одна сторона $c'e'$ треугольника $\bar{a}_{S3}=\overline{p's_3'}/\mu_a$.

Звено *5* совершает поступательное движение; следовательно,

$$\bar{a}_{S5}=\bar{a}_F=\overline{p'f'}/\mu_a.$$

Угловые ускорения звеньев находят по соотношениям

$$\varepsilon_2=a_{CB}^\tau/l_{CB}=\frac{\mu_l}{\mu_a}\frac{c^*c'}{BC};\ \operatorname{sgn}\varepsilon_2=+1;$$

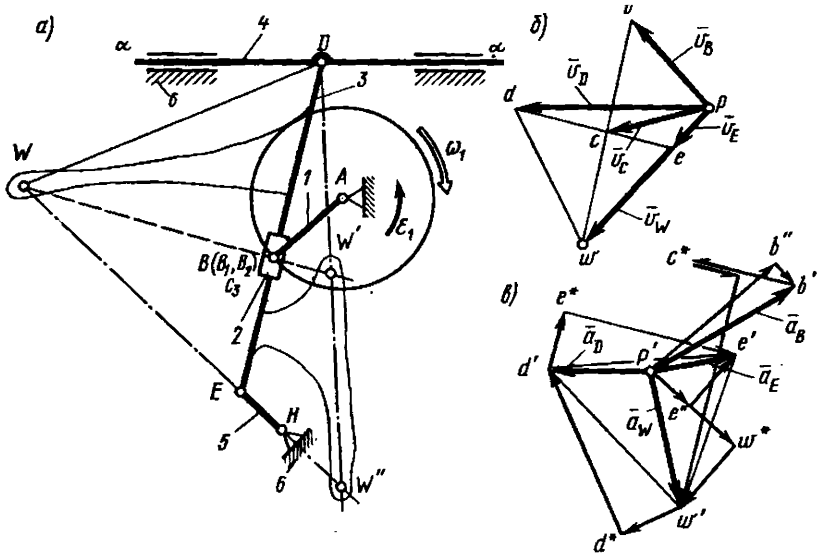


Рис. 4.15

$$\varepsilon_3 = a_C^{\tau}/l_{DC} = \frac{\mu_l}{\mu_a}\frac{c^*c}{CD}; \ \operatorname{sgn}\varepsilon_3 = +1.$$

При кинематическом исследовании механизмов *с трехповодковыми группами*, состоящими из базисного звена и трех поводков, уравнения, составленные для произвольно выбранных точек, непосредственно решить нельзя. Поэтому выбирают на базисном звене *3* точки, которые получили иазвание *особых* (рис. 4.15, *а*). Они находятся на пересечении осевых линий двух поводков или перпендикуляров к осям ползунов. Например, особая точка *W* находится на пересечении линии *EH* поводка *5* и перпендикуляра *WB* к направляющей *ED* ползуна *2* (второй поводок) (рис. 4.15, *а*). Следовательно, для каждой трехповодковой группы на базисном звене существуют три особые точки. На рис. 4.15, *а* особые точки обозначены буквами *W*, *W'* и *W''*. При кинематическом анализе достаточно найти параметры только одной особой точки, например *W*. Смысл выбора этих точек, например *W*, заключается в том, чтобы добиться одинакового направления скоростей относительного движения двух точек, для которых записывается векторное уравнение. Например, направление скорости $\bar{v}_{BC}$ для звена *2* совпадает с $\bar{v}_{CW}$ для базисного звена или направление скорости $\bar{v}_{HE}$ для поводка *5* совпадает с $\bar{v}_{EW}$ для базисного звена.

Проанализируем уравнение сложения скоростей

$$\bar{v}_C = \underline{\underline{\bar{v}_B}} + \underline{\bar{v}_{CB}}.$$

Это соотношение не решается непосредственно. Поэтому по теореме о плоскопараллельном движении базисного звена *3* составляют уравнения скоростей для особой точки *W*:

$$\bar{v}_W = \bar{v}_C + \underline{\bar{v}_{WC}} = \underline{\underline{\bar{v}_B}} + \underline{\bar{v}_{CB}} + \underline{\bar{v}_{WC}};$$
$$\bar{v}_W = \bar{v}_E + v_{WC}.$$

В этих уравнениях совпадают направления векторов $\bar{v}_{CB}$ и $\bar{v}_{WC}$ (перпендикулярно линии *ED*) и векторов $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_{WE}$ (перпендикулярно *HEW*).

Приравнивая правые части, получают уравнение

$$\bar{v}_W = \underline{\underline{\bar{v}_B}} + \overline{\underline{v_{CB}} + \underline{v_{WC}}} = \overline{\underline{v_E} + \underline{v_{WE}}}.$$

Это векторное уравнение, хотя и содержит четыре неизвестные величины, позволяет определить вектор v_W скорости особой точки *W*, так как в левой и правой частях уравнения векторы $\bar{v}_{CB}$ и $\bar{v}_{WC}$, а также $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_{WE}$ попарно имеют совпадающие направления. Решение векторного уравнения приведено на плане скоростей (рис. 4.15, *б*) в виде Δpbw со сторонами $\overline{pb} = \mu_v \bar{v}_B$; $\overline{pw} = \mu_v (\overline{v_E + v_{WE}})$; $\overline{bw} = \mu_v (\overline{\underline{v_{CB}} + \underline{v_{WC}}})$.

Отрезок $\overline{pw}$ пропорционален скорости $\bar{v}_w$ точки *W*, принадлежащей базисному звену *3*: $\overline{pw} = \mu_v \bar{v}_W$. Для нахождения скорости точки *D* составляют векторное уравнение:

$$\underline{\bar{v}_D} = \underline{\underline{\bar{v}_W}} + \underline{\bar{v}_{WD}}.$$

Здесь скорость точки *D* направлена вдоль направляющей $\alpha\alpha$ звена *4*, а относительная скорость v_{WD} — перпендикулярно линии *WD*. Решение этого векторного уравнения приведено на плане скоростей (рис. 4.15, *б*) в виде Δpdw: $dw \perp DW$; $pd \| \alpha\alpha$. Искомая скорость $\bar{v}_D = \overline{pd}/\mu_v$.

Скорости остальных точек базисного звена (например, *C* и *E*) легко находятся, например, по методу подобия фигур ($\Delta wde \sim \Delta WDE$ и $\Delta wcd \sim \Delta WCD$) или по методу пропорционального деления отрезков ($de/ec = DE/EC$).

Аналогичные рассуждения и построения выполняют для определения ускорений точек в механизме с трехповодковой группой.

Ниже приведены необходимые соотношения:

$$a_B^n = \omega_1^2 l_{BA};\ a_B^\tau = \varepsilon_1 l_{BA};$$
$$\bar{a}_C = \underline{\underline{\bar{a}_B}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CB}^n}} + \underline{\bar{a}_{CB}^\tau} + \underline{\bar{a}_{CB}^\kappa}.$$

Последнее уравнение содержит три неизвестных параметра, так как $a_{CB}^n = 0$.

Для особой точки W записывают систему уравнений:

$$\bar{a}_W=\bar{a}_E+\bar{a}^n_{WE}+\bar{a}^\tau_{WE}=\bar{a}^n_E+\bar{a}^n_{WE}+\bar{a}^\tau_E+\bar{a}^\tau_{WE};$$

$$\bar{a}_W=\bar{a}_C+\bar{a}^n_{WC}+\bar{a}^\tau_{WC}=\bar{a}_B+\bar{a}^\tau_{CB}+\bar{a}^n_{WC}+\bar{a}^\tau_{CB}+\bar{a}^\tau_{WC}.$$

Учитывают, что $\bar{a}^\tau_E \| \bar{a}^\tau_{WE}$ и $\bar{a}^\tau_{CB} \| \bar{a}^\tau_{WC}$, и, приравнивая правые части уравнений, имеют

$$\bar{a}_B+\bar{a}^\tau_{CB}+\bar{a}^n_{WC}+\overline{a^\tau_{CB}+a^\tau_{WC}}=\bar{a}^n_E+\bar{a}^n_{WE}+\overline{a^\tau_E+a^\tau_{WE}};$$

в этом уравнении две пары векторов имеют совпадающие направления, что позволяет найти ускорение $\bar{a}_W$ особой точки W: $\bar{a}_W=\overline{p'w'}/\mu_a$ (рис. 4.15, *в*).

Далее находят ускорения остальных точек, записав и решив векторные уравнения:

$$\bar{a}^\tau_D=\bar{a}_W+\bar{a}^n_{DW}+\bar{a}^\tau_{DW};$$

$$\bar{a}^n_E+\bar{a}^\tau_E=\bar{a}_D+\bar{a}^n_{ED}+\bar{a}^\tau_{ED}.$$

Искомые величины касательных ускорений точек D и E находят по величине соответствующих отрезков на плане ускорений (рис. 4.15, *в*) с учетом масштаба построения:

$$\bar{a}^\tau_D=\overline{p'd'}/\mu_a;\ \bar{a}^\tau_E=\overline{e''e'}/\mu_a;\ \bar{a}_E=\overline{p'e'}/\mu_a.$$

Определение кинематических передаточных функций графическим методом. При построении планов скоростей и ускорений, рассмотренных в этой главе, исходили из предположения, что известен закон изменения обобщенных координат механизма по времени. Для механизма с одной степенью свободы ($W=1$) полагали заданными значения угловой скорости ω_1 и углового ускорения ε_1. В том случае, когда эти величины на определенной стадии проектирования машины еще являются неизвестными, используют *планы возможных скоростей и возможных ускорений* (при условии, что $\varepsilon_1=0$). Графические построения аналогичны рассмотренным, но числовые значения масштабов μ_v и μ_a планов скоростей и планов ускорений неизвестны. Это не является препятствием для вычисления передаточных кинематических функций, являющихся *отношениями кинематических параметров для выходного и входного звеньев*. Эти параметры не зависят от масштабов графических построений. В этом легко убедиться на анализе примеров, рассмотренных выше.

Например, для механизма транспортера, изображенного на рис. 4.12, *а*, передаточные функции скорости движения отдельных точек и звеньев определяются из следующих соотношений:

Передаточные функции скорости точек F, S_2, S_3:

$$v_{qF}=\frac{v_F}{\omega_1}=\frac{v_F}{v_B/l_{BA}}=l_{BA}\frac{pf/\mu_v}{pb/\mu_v}=l_1\frac{pf}{pb};$$

$$v_{qS2}=\frac{v_{S2}}{\omega_1}=\frac{v_{S2}}{v_B/l_{BA}}=l_1\frac{ps_2}{pb};$$

$$v_{qS3}=\frac{v_{S3}}{\omega_1}=l_1\frac{ps_3}{pb}.$$

Передаточные отношения угловых скоростей звеньев *1*, *2* и *3*:

$$u_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{v_{CB}/l_{CB}}{v_B/l_{BA}}=\frac{l_{BA}}{l_{CB}}\frac{bc}{pb}=\frac{1}{\lambda_2}\frac{bc}{pb};$$

$$u_{31}=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{v_C/l_{CD}}{v_B/l_{BA}}=\frac{1}{\lambda_3}\frac{pc}{pb},$$

где $l_1=l_{BA}$; $\lambda_2=l_2/l_1=l_{BC}/l_{BA}$; $\lambda_3=l_3/l_1=l_{DC}/l_1$.

Аналогичные выкладки проводят и для передаточных функций ускорения движения точек и звеньев в предположении, что касательное ускорение входного звена равно нулю. Из приведенных соотношений видно, что передаточные кинематические функции выражены через отношения отрезков. При изменении масштаба построения длина отрезков может изменяться, но это не окажет влияния на их отношение, т. е. на числовое значение передаточных функций.

§ 4.7. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ ПАРАМИ

Передаточные кинематические функции механизмов с высшими парами определяют несколькими методами в зависимости от поставленной задачи.

Метод центроид. Для образования простейшего механизма с высшей парой достаточно присоединить звено к одному начальному звену и стойке (рис. 4.16, *а*) или к двум начальным звеньям (рис. 4.16, *б*). В первом случае получают трехзвенный механизм с одной степенью свободы ($n=2$; $p_н=2$; $p_в=1$):

$$W_п=3n-2p_н-p_в=3\cdot 2-2\cdot 2-1=1.$$

Во втором случае планетарный механизм имеет две степени свободы ($n=3$; $p_н=3$; $p_в=1$):

$$W_п=3n-2p_н-p_в=3\cdot 3-2\cdot 3-1=2.$$

Неподвижной центроидой называют геометрическое место мгновенных центров вращения движущейся плоской фигуры в неподвижной плоскости. *Подвижной центроидой* называют геометрическое место мгновенных центров скоростей в плоскости, связанной с движущейся плоской фигурой. При движении плоской фигуры в ее

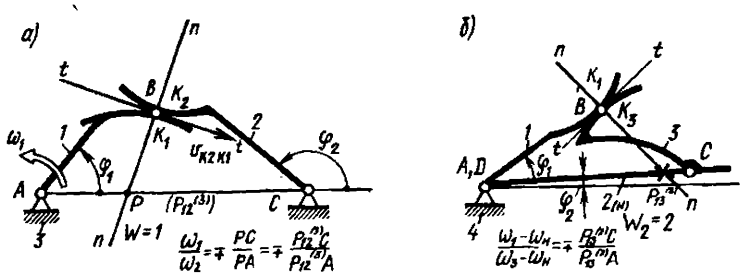


Рис. 4.16

плоскости подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной, т. е. длины соответствующих дуг неподвижной и подвижной центроид равны. Обратная теорема о центроидах гласит, что всякое движение плоской фигуры в ее плоскости можно осуществить путем качения без скольжения подвижной центроиды по неподвижной с соответствующей в каждый данный момент угловой скоростью.

Мгновенный центр скоростей P является точкой плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю. Он определяется как точка пересечения перпендикуляров, восставленных из любых двух точек фигуры к векторам скоростей этих точек.

В каждый момент времени с мгновенным центром скоростей совпадает *мгновенный центр вращения* — точка неподвижной плоскости, поворотом вокруг которой плоская фигура перемещается из данного положения в положение, бесконечно близкое к данному.

Метод центроид наиболее часто используют применительно к передаче вращательного движения между звеньями с параллельными осями. Отношение угловых скоростей звеньев *1* и *2* является функцией обобщенной координаты φ_1

$$u_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{d\varphi_1/dt}{d\varphi_2/dt}=u_{12}(\varphi_1).$$

На рис. 4.16, *а* показаны звенья *1* и *2*, вращающиеся относительно осей *A* и *C* и образующие между собой высшую кинематическую пару *B* в точке контакта (K_1 и K_2 — точки звеньев *1* и *2* соответственно). Найдем центроиды как геометрические места мгновенных центров вращения и мгновенных центров скоростей.

По отношению к звену *1* звено *2* имеет сложное движение (рис. 4.16, *б*). Однако, используя метод обращения движения, можно указать направление относительных скоростей точек *C* и K_2 относительно точек неподвижного звена *1*; скорость v_{CA} точки *C* относительно оси *A* перпендикулярна межосевому расстоянию *AC*, а точка K_2 в данный момент имеет скорость $v_{K_2-K_1}$ скольжения, направленную вдоль общей касательной *t — t* к соприкасающимся

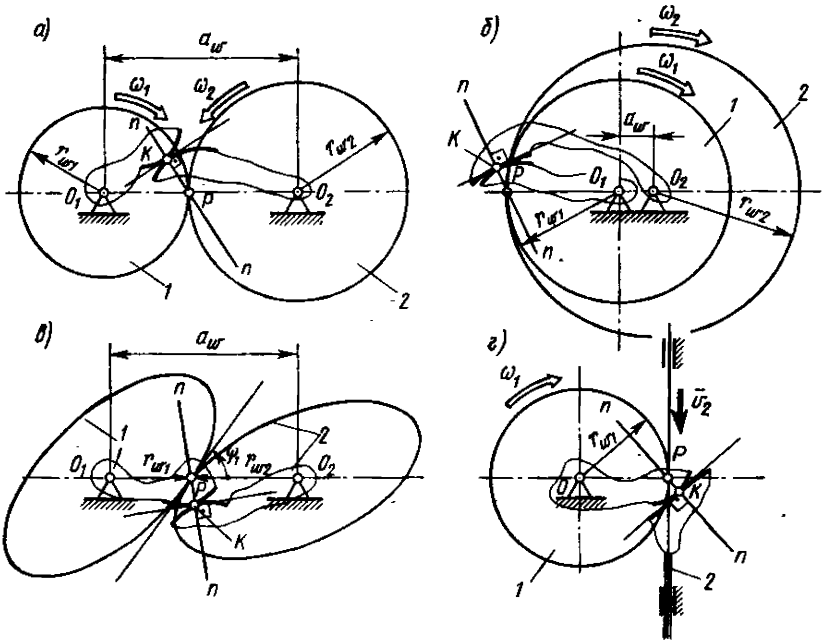


Рис. 4.17

профилям. Мгновенный центр скоростей P звена *2* в относительном движении (при неподвижном звене *1*) находится как точка пересечения двух перпендикуляров к скоростям этих точек. Иначе: мгновенный центр скоростей P звена *2* и совпадающий с ним мгновенный центр вращения в относительном движении находятся в точке пересечения межосевого расстояния AC и общей нормали n — n к профилям, проведенным в общей контактной точке $K(K_1$ и $K_2)$.

Скорость относительного движения звеньев в этой точке — мгновенном центре скоростей P — равна нулю, т. е. $\bar{v}_{12}=\bar{v}_{P1}-\bar{v}_{P2}=0$, где v_{P1} и $\bar{v}_{P2}$ — векторы скоростей точек P_1 и P_2 при вращении их соответственно вокруг осей A и C. Соответственно можно записать и следующее равенство: $|\omega_1 P\bar{A}|=|\omega_2 P\bar{C}|$, из которого следует, что

$$u_{12}=|\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_2|=PC/PA.$$

Мгновенный центр скоростей — точку P — называют *полюсом зацепления*. Термин «зацепление» в данном случае является синонимом термина «высшая пара». *Зубчатым зацеплением* называют процесс передачи движения поверхностями звеньев высшей пары,

которые при последовательном взаимодействии зубьев обеспечивают требуемый закон их относительного движения.

В ряде случаев оси вращения обозначают буквами O с индексами 1 и 2; O_1 и O_2 (рис. 4.17). При таких обозначениях соотношение (3.96) записывают в следующем виде:

$$u_{12}=|\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_2|=\mp PO_2/PO_1. \qquad (4.38)$$

Следовательно, полюс зацепления P звеньев *1* и *2* в относительном движении расположен на межосевой линии AC (рис. 4.16, *а*) или O_1O_2 (рис. 4.17, *а*) и делит межосевое расстояние на отрезки $AP(PO_1)$ и $PC(PO_2)$, отношение которых обратно пропорционально отношению мгновенных угловых скоростей звеньев (в том числе зубчатых колес). Если полюс зацепления P расположен между осями O_1 и O_2, то звенья вращаются в разных направлениях, т. е. u_{12} имеет знак минус, а зацепление называют *внешним* (рис. 4.17, *а*). Если полюс зацепления P находится вне отрезка O_1O_2, то звенья вращаются в одинаковом направлении и передаточное отношение u_{12} имеет знак плюс, а зацепление называют *внутренним* (рис. 4.17, *б*).

Скорость скольжения $v_{ск}$ профилей в относительном движении определяют по соотношению

$$v_{ск}=\omega_{21}l_{KP}=l_{KP}(\omega_1\mp\omega_2).$$

Обозначим межосевое расстояние $AC(O_1O_2)$ через a_w, а расстояние полюса зацепления P до осей $A(O_1)$ и $C(O_2)$ — через r_{w1} и r_{w2}. Тогда

$$u_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\mp\frac{PO_2}{PO_1}=\mp\frac{r_{w2}}{r_{w1}}=\frac{a_w\mp r_{w1}}{r_{w1}}, \qquad (4.39)$$

или радиусы центроид r_{w1} и r_{w2} определяют по соотношению

$$r_{w1}=\frac{a_w}{u_{12}\pm 1};\ r_{w2}=a_w\frac{u_{12}}{u_{12}\pm 1}. \qquad (4.40)$$

Если передаточное отношение u_{12} постоянно, то радиусы центроид r_{w1} и r_{w2} также постоянны. Следовательно, при передаче вращательного движения между звеньями с параллельными осями с постоянным межосевым расстоянием (a_w=const) и постоянным передаточным отношением (u_{12}=const) центроиды являются окружностями. В теории зацеплений эти окружности называют **начальными окружностями**.

На рис. 4.17 показано расположение начальных окружностей для

внешнего (рис. 4.17, *а*), внутреннего (рис. 4.17, *б*) и реечного (рис. 4.17, *в*) зацеплений с постоянными передаточными отношениями.

Если передаточное отношение u_{12} переменно, то радиусы центроид (рис. 4.17, *г*) являются переменными и их находят из следующих соотношений:

для колеса *1*

$$r_{w1}=\frac{a_w}{u_{12}\pm 1}=\frac{a_w}{u_{12}(\varphi_1)\pm 1};$$

для колеса *2*

$$r_{w2}=a_w\frac{u_{12}}{u_{12}\pm 1}=a_w\frac{u_{12}(\varphi_1)}{u_{12}(\varphi_1)\pm 1};\ \varphi_2=\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{u_{12}(\varphi_1)}.$$

Угол ψ_1 наклона общей касательной к центроидам в точке их касания относительно радиуса-вектора r_{w1} определяется как угол наклона касательной к кривой, заданной в полярных координатах:

$$\operatorname{tg}\psi_1=\frac{r_{w1}}{dr_{w1}/d\varphi_1}=-\frac{u_{12}(\varphi_1)\pm 1}{du_{12}/d\varphi_1}. \qquad (4.41)$$

Если некоторые звенья механизма участвуют в сложном движении, состоящем из суммы двух вращательных движений, то для определения передаточных отношений можно воспользоваться методом обращения движения.

На рис. 4.18, *а* изображены центроиды колес *1* и *2* зубчатого планетарного дифференциального механизма с водилом *H*. Колесо *2* участвует в двух вращениях: в переносном вместе с водилом *H* со скоростью ω_H и в относительном вокруг своей собственной оси со скоростью ω_{2H}, называемой относительной угловой скоростью.

Сообщим всем звеньям механизма вращения со скоростью, равной по величине и противоположной по направлению угловой скорости водила *H*, т. е. сообщим механизму угловую скорость $-\omega_H$ (рис. 4.18, *б*). При таком обращении движения водило можно условно рассматривать неподвиж-

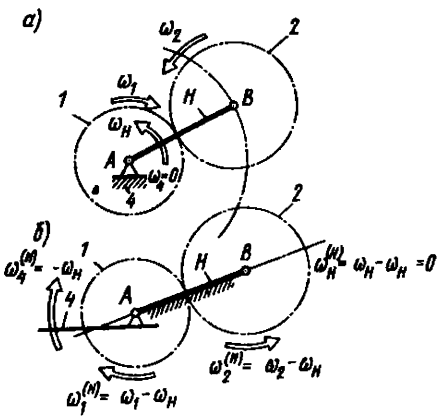


Рис. 4.18

ным, а колесо *1* — вращающимся вокруг неподвижной оси *A* с угловой скоростью ($\omega_1 - \omega_H$), а колесо *2* — вращающимся вокруг неподвижной оси *B* с угловой скоростью ($\omega_2 - \omega_H$).

Учитывая соотношения (4.39) между угловыми скоростями и радиусами центроид, находят соотношения, определяющие связь между угловыми скоростями и радиусами центроид планетарных зубчатых колес *1* и *2*:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = \mp \frac{r_{w2}}{r_{w1}}. \qquad (4.42)$$

Знак минус относится к внешнему зацеплению, плюс — к внутреннему. Это соотношение называют *формулой Виллиса*.

Треугольники скоростей для зубчатых механизмов. Для исследования зубчатых механизмов, особенно многорядных планетарных редукторов и дифференциалов, Л. П. Смирнов предложил использовать графический метод.

На рис. 4.19, *а* показана схема планетарного редуктора, с помощью которого вращательное движение центрального колеса *1* преобразуется во вращательное движение двух валов *6* и *H*, вращающихся в противоположных направлениях. Представление о распределении скоростей точек получают с помощью треугольников скоростей (рис. 4.19, *б*).

Вектор скорости точки *A* изображается в виде отрезка $AA' = \mu_v v_A$, а распределение скоростей точек радиальной прямой колеса *1* — наклонным лучом OA', проходящим через точки A' и *O* под углом ψ_1 к линии отсчета углов. Прямую $A'CB'$ распределения скоростей точек колес *2*, *3*, *5*, объединенных в блок (сателлит), проводят через

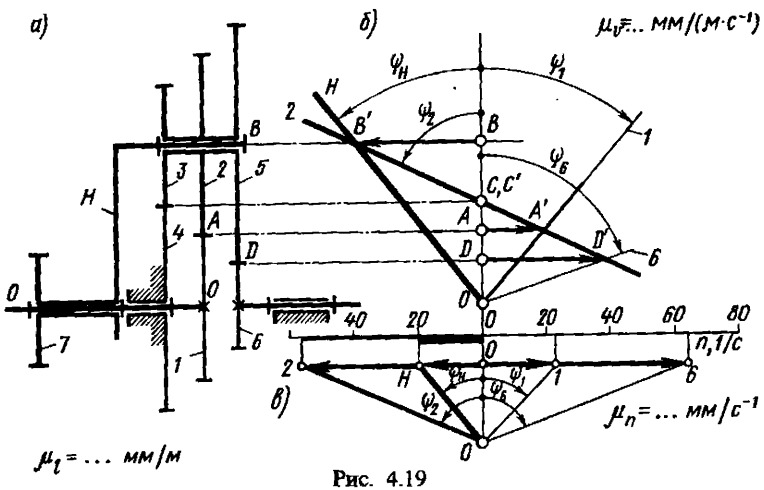


Рис. 4.19

точки A' и $C(C')$, так как через точку C проходит ось мгновенного вращения сателлита, ибо колесо *4* неподвижно, сателлит совершает сложное движение: вращение с водилом H вокруг оси OO и вокруг оси B. Отрезок BB' между линией отсчета и прямой распределения скоростей пропорционален скорости оси B сателлита. Для водила H прямая $B'O$ распределения линейных скоростей проходит через точку B' и ось вращения O под углом ψ_H. Линейная скорость точки D — полюса зацепления колес *5* и *6* — изображается отрезком DD'.

Для получения наглядной картины об угловых скоростях и частотах вращения зубчатых колес выбирают общую точку O (рис. 4.19, *в*), через которую проводят пучок лучей, параллельных соответствующим прямым распределения скоростей, т. е. лучей с углами наклона ψ_1, ψ_2, ψ_H, ψ_6. Если этот пучок лучей пересечь какой-либо прямой, перпендикулярной линии отсчета линейных скоростей, то можно отметить точки пересечения *1*, *2*, *H*, *6* и отрезки $O1$, $O2$, OH, $O6$, отсчитываемые от начала отсчета O. Нетрудно показать, что эти отрезки пропорциональны частоте вращения и угловой скорости соответствующих зубчатых колес. Записывают следующие соотношения:

$$OA=\mu_l r_{w1};\ AA'=\mu_v v_A;\ v_A=\omega_1 r_{w1};$$

$$\omega_1=\frac{v_A}{r_{w1}}=\frac{AA'/\mu_v}{OA/\mu_l}=\frac{\mu_l}{\mu_v}\operatorname{tg}\psi_1=\frac{\mu_l}{\mu_v}\frac{O1}{OO}=\frac{O1}{\mu_\omega}, \tag{4.43}$$

т. е. $O1=\mu_\omega\omega_1$.

Аналогично,

$$OH=\mu_\omega\omega_H;\ O6=\mu_\omega\omega_6;\ O2=\mu_\omega\omega_2,$$

где $\mu_\omega=(\mu_v/\mu_l)OO$ — масштаб угловой скорости; $[\mu_\omega]=$ мм/(рад·с$^{-1}$) — единица СИ масштаба угловой скорости.

Так как между частотой вращения n_1 (1/с) и угловой скоростью ω_1 (рад/с) существует соотношение $\omega_1=2\pi n_1$, то

$$n_1=\omega_1/(2\pi)=\overline{O1}/(2\pi\mu_\omega)=\overline{O1}/\mu_n,$$

где $\mu_n=2\pi\mu_\omega$ — масштаб частоты вращения; $[\mu_n]=$ мм/с$^{-1}$ — единица СИ масштаба частоты вращения.

Передаточные отношения определяют из соотношений

$$u_{61}=\omega_6/\omega_1=\operatorname{tg}\psi_6/\operatorname{tg}\psi_1=O6/O1;\ u_{71}=\omega_7/\omega_1=\operatorname{tg}\psi_H/\operatorname{tg}\psi_1=$$
$$=OH/O1. \tag{4.44}$$

На линии частот вращения зубчатых колес обычно для наглядности наносят шкалу (рис. 4.19, *в*).

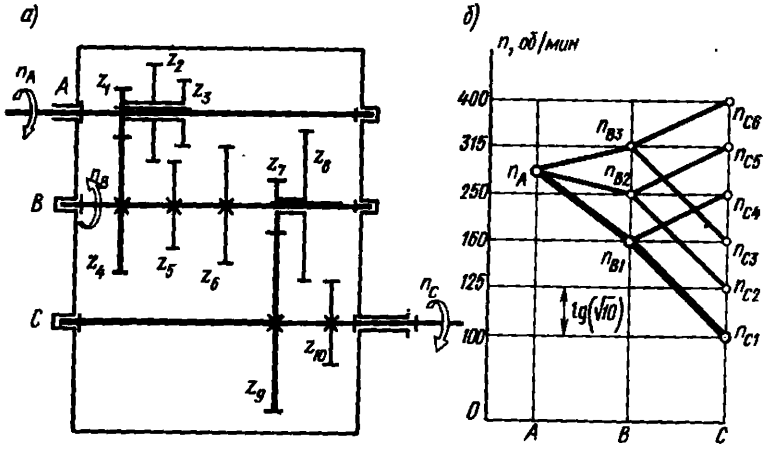


Рис. 4.20

При проектировании сложных зубчатых механизмов, например коробки передач (рис. 4.20, *а*), проводят последовательные построения, а результаты представляют в виде совокупности нескольких линий частот вращения для разных валов, например *A*, *B*, *C*. На рис. 4.20, *а* приведена схема шестиступенчатой коробки передач, состоящей из подвижного блока колес z_1, z_2, z_3 на валу *A*, подвижного блока колес z_7, z_8 на валу *B*, колес z_4, z_5, z_6, закрепленных на валу *B*, и колес z_9, z_{10}, закрепленных на валу *C*.

При проектировании подобных механизмов частота вращения выходного вала *C* должна изменяться в требуемых пределах по заданному закону, что и отражается в форме графика — «лучевой диаграммы». На рис. 4.20, *б* изображен один из таких графиков, показывающий изменение частоты вращения вала *C* в пределах от $n_{C1}=100$ мин$^{-1}$ до $n_{C6}=400$ мин$^{-1}$ с последовательностью частот вращения по закону геометрической прогрессии с заданным знаменателем прогресии $\sqrt[10]{10}=1{,}25$. Шкалу частот вращения принимают логарифмической с постоянной длиной отрезков между соседними значениями неравномерной шкалы.

Метод заменяющих рычажных механизмов. В плоских механизмах высшая кинематическая пара образуется путем касания двух кривых, по которым очерчены соприкасающиеся элементы звеньев, образующих эту пару (см. рис. 4.16, *а*). В частном случае один из элементов пары может быть точкой.

Для каждой из соприкасающихся кривых в точке контакта *K* можно найти радиусы кривизны и центры кривизны. Оба центра кривизны и контактная точка расположены на общей прямой, являющейся нормалью *n* — *n* к соприкасающимся кривым. Профиль на

плоскости может быть заменен в любой его точке кругом кривизны, т. е. окружностью, которая проходит через точку и две другие близкие точки кривой. Кривизна окружности эквивалентна самой кривой до производных второго порядка включительно. При смене контактной точки двух кривых с переменной кривизной центры кривизны и радиусы кривизны меняются. Если же кривизна кривых остается неизменной, то положение центров кривизны относительно соответствующих звеньев и радиусы кривизны остаются постоянными. Это обстоятельство позволяет заменять механизмы с высшими кинематическими парами эквивалентными механизмами с низшими кинематическими парами. Такие механизмы называт *заменяющими рычажными механизмами*. Они эквивалентны в кинематическом смысле механизму с высшими парами до производных второго порядка включительно.

Для образования заменяющего механизма любую высшую кинематическую пару заменяют одним звеном (например, звеном *BC* на рис. 4.21, *а*), длина которого равна сумме радиусов кривизны элементов кинематической пары ($l_{BC}=R_1+R_2$), и двумя низшими кинематическими парами. Вращательные кинематические пары *B* и *C* при замене высшей кинематической пары располагают в центрах кривизны соприкасающихся профилей (рис. 4.21, *а*). Если радиус кривизны одного из элементов равен бесконечности [прямая линия на звене *3* (рис. 4.21, *б*) и на звене *1* (рис. 4.21, *в*)], то заменяющим звеном является ползун *2*, направляющая $\gamma\gamma$ которого параллельна прямой линии профиля и проходит со смещением *a* через ($a=R$ на

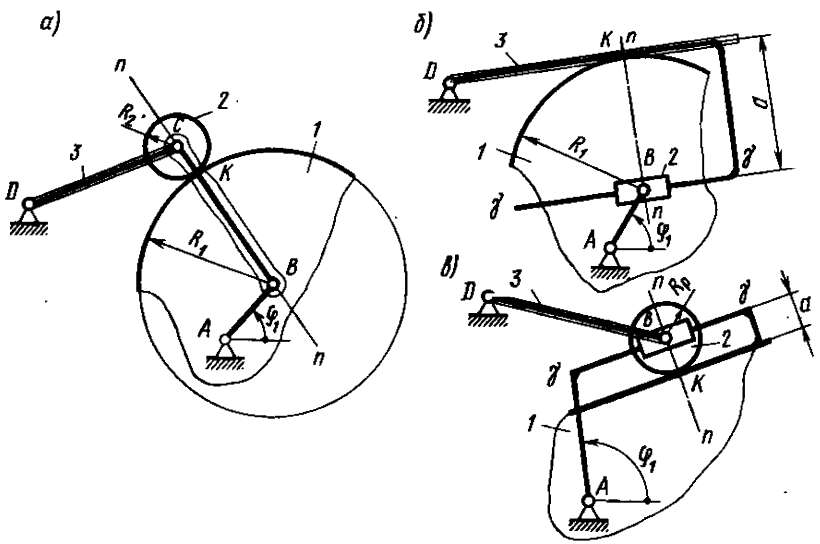


Рис. 4.21

рис. 4.21, *б*; $a=R_p$ на рис. 4.21, *в*) центр кривизны *B* другого профиля.

Если радиус кривизны одного из элементов равен нулю (заострение), то длина заменяющего звена равна радиусу кривизны второго профиля.

Если радиус кривизны одного из элементов равен нулю (заострение), а другого из элементов равен бесконечности (прямая линия), то заменяющим звеном является ползун, направляющая которого совпадает с профилем и проходит через контактную точку. Для заменяющих механизмов определяют кинематические характеристики изложенными выше методами.

§ 4.8. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

Наибольшее применение для определения кинематических характеристик пространственных рычажных механизмов в аналитической форме находят два метода: метод преобразования координат и геометрический метод, который заключается в последовательном проецировании кинематической схемы на ряд плоскостей с последу-

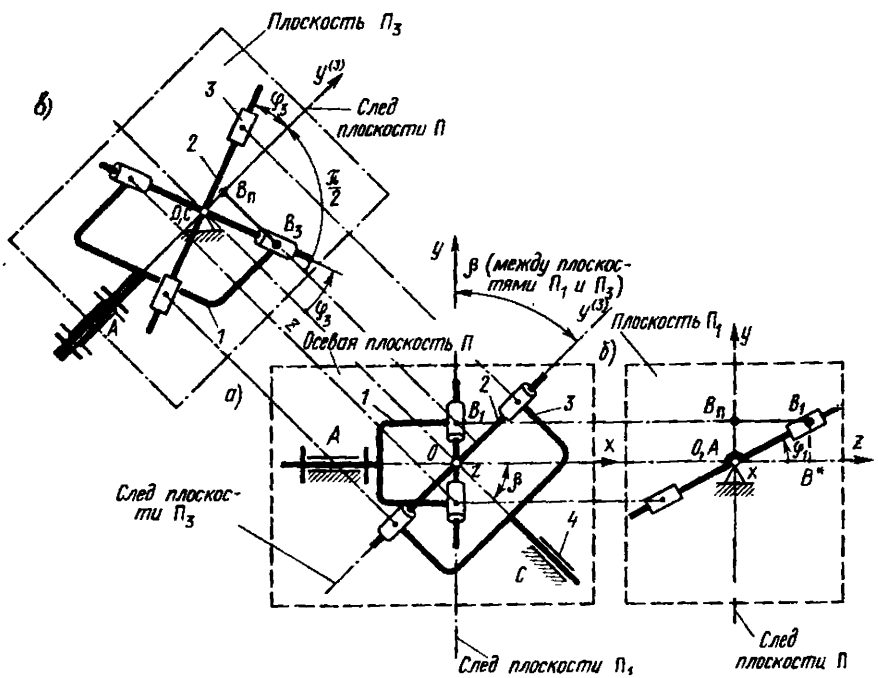


Рис. 4.22

ющим определением неизвестных величин с помощью тригонометрических формул. Первый метод наиболее целесообразно применять для открытых кинематических цепей со многими степенями свободы (например, механизмов роботов и манипуляторов), а второй — для более простых механизмов с одной степенью свободы. Одним из таких механизмов является универсальный шарнир, применяемый для передачи вращательного движения от ведущего вала *1* к ведомому валу *3*, оси которых расположены под углом (рис. 4.22, *а, б, в*). На рис. 4.23, *а, б, в* показаны примеры конструкции карданной передачи и деталей одинарного шарнира Гука грузового автомобиля.

Геометрический метод. Для составления аналитических соотношений между углами φ_1 и φ_3 звенья механизма проецируют на три плоскости (рис. 4.22): на осевую плоскость П, с изображением межосевого угла β без искажения и на две плоскости $П_1$ и $П_3$, которые перпендикулярны соответственно оси входного звена *1* и выходного звена *3* с изображением углов поворота φ_1 и φ_3 без искажения. Углы отсчитываются от выбранной системы отсчета *xyz*, связанной со стойкой *4*: φ_1 — от оси *Oz*, φ_3 — от оси *Oy*.

Проекции на разные плоскости точки *B*, обозначающей кинематическую пару между входным звеном *1* и крестовиной *2*, обозначены $B_п$, B_1, B_3. На проекции справа (плоскость $П_1$) отрезок $B_1B_п$ изображает без искажения расстояние точки *B* от осевой плоскости П.

Угловая координата φ_1 входного звена *1* определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = B_1B^*/B_пB_1. \tag{4.45}$$

Угловая координата φ_3 выходного звена *3* определяется соотношением (см. проекцию на плоскость $П_3$ слева на рис. 4.22, *в*)

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{tg}\varphi_3^* = B_пC/B_пB_3. \tag{4.46}$$

Углы φ_3 и φ_3^* в проекции на плоскость $П_3$ изображаются без искажения, они равны между собой, так как угол между осями крестовины, равный $\pi/2$, изображается на проекции также без искажения. Отрезок $B_3B_п$ равен отрезку $B_1B_п$, так как он характеризует расстояние точки B_3 от осевой плоскости П и изображается в проекции на плоскость $П_3$ без искажения.

Учитывая, что $B_пB_3 = B_пB_1$, соотношения (4.45) и (4.46) записывают в виде

$$\operatorname{tg}\varphi_3/\operatorname{tg}\varphi_1 = \left(\frac{B_пC}{B_пB_3}\right)\Big/\left(\frac{B_1B^*}{B_пB_1}\right) = \frac{B_пC}{B_1B^*}. \tag{4.47}$$

Соотношение между отрезками $B_{\text{п}}C$ и B_1B^* находят из $\triangle B_1OB_3$, изображенного на осевой плоскости П, в котором угол B_1OB_3 равен β и изображается без искажения:

$$\cos\beta = OB_3/OB_1. \tag{4.48}$$

Учитывая, что $OB_3 = B_{\text{п}}C$ и $OB_1 = B_1B^*$, соотношение (4.48) записывают в виде

$$\operatorname{tg}\varphi_3/\operatorname{tg}\varphi_1 = B_{\text{п}}C/B_1B^* = OB_3/OB_1 = \cos\beta,$$

или в окончательной форме

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{tg}\varphi_1\cos\beta. \tag{4.49}$$

Угловую скорость ω_3 выходного звена находят в результате дифференцирования:

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d}{dt}[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_1\cos\beta)] = \frac{1}{1+\cos^2\beta\operatorname{tg}^2\varphi_1}\frac{\cos\beta}{\cos^2\varphi_1}\omega_1 =$$

$$= \omega_1\frac{\cos\beta}{\cos^2\varphi_1 + (1-\sin^2\beta)\sin^2\varphi_1}, \text{ или } \omega_3 = \omega_1\frac{\cos\beta}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}.$$

Передаточное отношение u_{31} определяется соотношением

$$u_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\cos\beta}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}. \tag{4.50}$$

Из выражения (4.50) следует, что передаточное отношение карданного механизма является величиной переменной, изменяющейся в пределах: максимальное значение $u_{31\max} = 1/\cos\beta$ при $\varphi_1 = 0;\ \pi;\ 2\pi;$ ...; минимальное значение $u_{31\min} = \cos\beta$ при $\varphi_1 = \pi/2;\ \frac{3}{2}\pi;\ \ldots$.

Среднее значение $u_{31\text{ср}} = 1$, так как за один оборот входного звена *1* выходное звено *3* совершает также один оборот. Неравномерность вращения выходного звена *3* оценивают коэффициентом

$$\delta = \frac{\omega_{3\max} - \omega_{3\min}}{\omega_{3\text{ср}}} = \frac{1}{\cos\beta} - \cos\beta = \sin^2\beta/\cos\beta,$$

или

$$\delta = \sin\beta\operatorname{tg}\beta. \tag{4.51}$$

При увеличении межосевого угла β (град) коэффициент δ неравномерности вращения возрастает:

β, град...	5	10	15	20	25	30	35	40
δ...	0,00765	0,0306	0,0693	0,1245	0,1971	0,2887	0,4016	0,5394

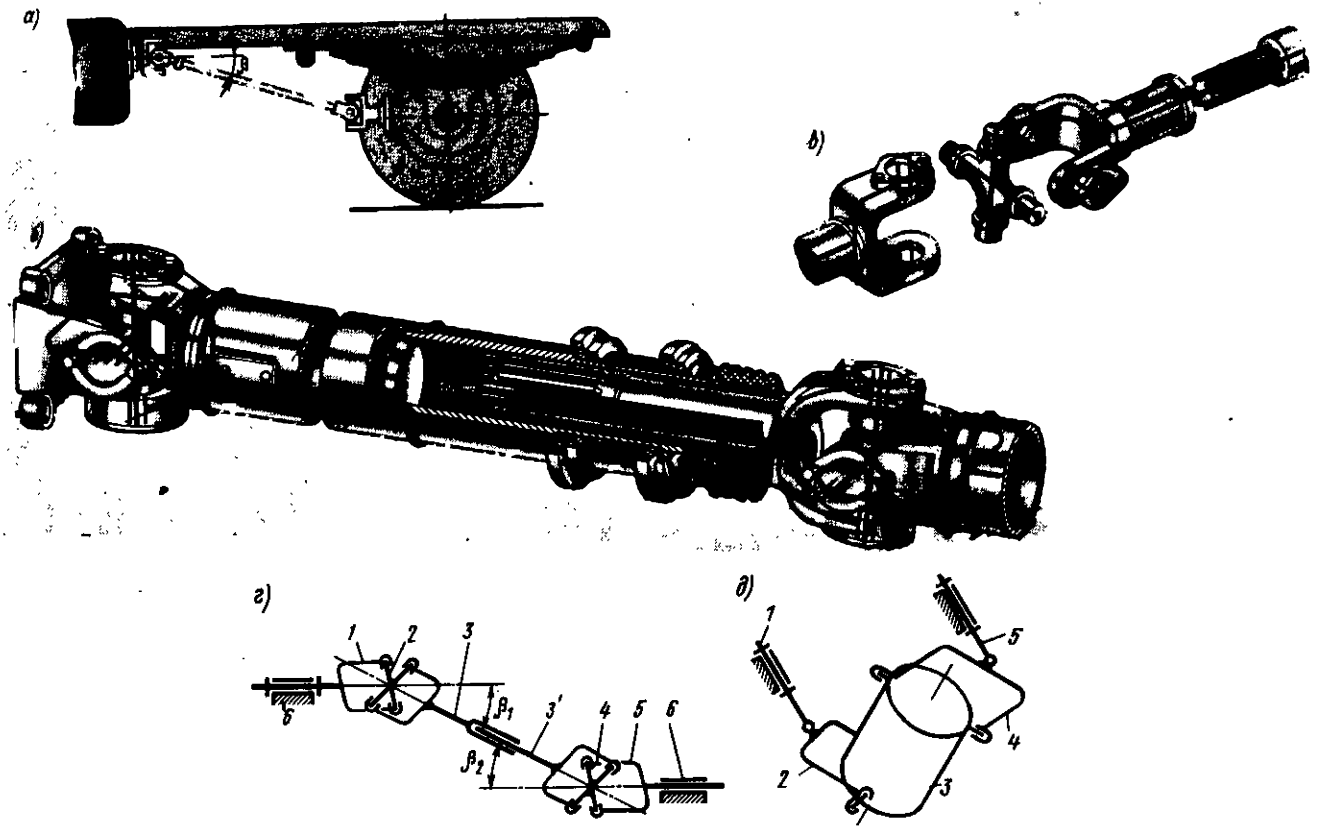


Рис 4.23

Угловое ускорение выходного звена *3* находят в результате повторного дифференцирования функции положения:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1^2 \frac{\cos\beta \sin^2\beta \cdot 2\sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{(1-\sin^2\beta \sin^2\varphi_1)^2},$$

или

$$\varepsilon_3 = \omega_1^2 \frac{\cos\beta \sin^2\beta \sin 2\varphi_1}{(1-\sin^2\beta \sin^2\varphi_1)^2}. \qquad (4.52)$$

Передаточная характеристика для ускорения выходного звена

$$\frac{\varepsilon_3}{\omega_1^2} = \frac{\cos\beta \sin^2\beta \sin 2\varphi_1}{(1-\sin^2\beta \sin^2\varphi_1)^2}. \qquad (4.53)$$

На практике для устранения неравномерности движения выходного вала применяют двойные карданные механизмы, обычно со свободным шлицевым соединением на одном из валов (промежуточном, ведущем или ведомом) для устранения контурных избыточных связей (см. рис. 4.23, *б*, *в*).

Углы β_1 и β_2 между осями входного и промежуточного и выходного валов выбирают равными: $\beta_1 = \beta_2$, а вилки на промежуточном валу располагают в одной плоскости (см. рис. 4.23, *г*). При этих условиях коэффициент δ неравномерности движения равен нулю в силу соотношений, которые можно записать, используя соотношения (4.45), (4.46), для определения передаточного отношения u_{51}:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_3 \cos\beta_1;\ \operatorname{tg}\varphi_5 = \operatorname{tg}\varphi_3 \cos\beta_2;$$

$$u_{51} = \omega_5/\omega_1 = \operatorname{tg}\varphi_5/\operatorname{tg}\varphi_1 = \cos\beta_2/\cos\beta_1 = 1.$$

Интересным случаем является использование неравномерности движения в двойном карданном механизме с пространственной рамой-крестовиной для различных смесителей, обеспечивающих эффективное перемешивание жидких и сыпучих сред с разными компонентами (см. рис. 4.23, *д*).

Сложное движение пространственного звена *3*, с которым связан сосуд для смешиваемых компонентов, способствует хорошему перемешиванию смеси. При определенных размерах звеньев коэффициент неравномерности движения достигает значений до 1,5 и более. При $\delta > 2$ ведомый вал совершает возвратно-вращательное движение.

Метод планов угловых скоростей. При исследовании и проектировании пространственных зубчатых и некоторых видов рычажных механизмов вполне эффективным является метод планов угловых скоростей, основанный на решении векторных уравнений типа

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}. \qquad (4.54)$$

Уравнение (4.54) решается, если определены направления векторов и задан закон изменения одного из этих векторов. Вектор $\bar{\omega}_{21}$ определяет положение мгновенной оси вращения OP в относительном движении звеньев, т. е. при вращении звена *2* из данного положения относительно неподвижного звена *1*, в положение, бесконечно близкое к данному.

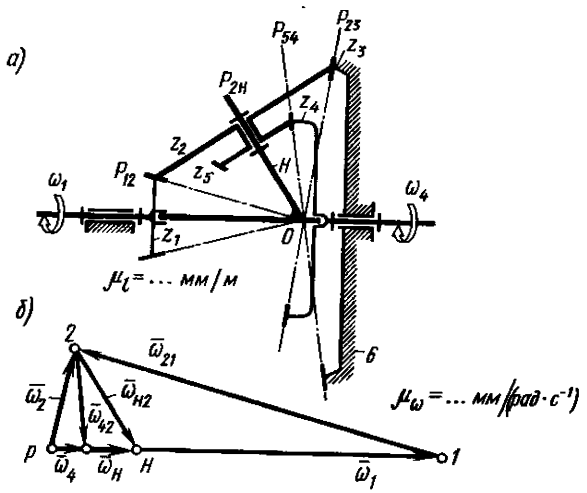


Рис. 4.24

Рассмотрим применение метода на примере планетарного зубчатого конического механизма, изображенного на рис. 4.24, *а* и состоящего из конических колес z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 и водила H. Колеса z_2 и z_5 объединены в общий блок, а колесо z_3 закреплено на стойке *6*.

Оси мгновенного относительного вращения обозначены $P_{12}O$, $P_{2H}O$, $P_{23}O$ и $P_{54}O$. Они пересекаются в общей точке O.

Можно записать следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_{21};\ \bar{\omega}_H=\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_{H2};\\
&\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_{23};\ \bar{\omega}_H=\bar{\omega}_5+\bar{\omega}_{H5};\\
&\bar{\omega}_5=\bar{\omega}_2;\\
&\bar{\omega}_4=\bar{\omega}_5+\bar{\omega}_{45};\ \bar{\omega}_3=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.55)$$

Система уравнений может быть записана в следующем виде:

$$\bar{\omega}_2=\underline{\bar{\omega}_{23}}=\underline{\underline{\bar{\omega}_1}}+\underline{\bar{\omega}_{21}}.$$

Это уравнение решается относительно $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}_{21}$ с помощью плана угловых скоростей, приведенного на рис. 4.24, *б*; в треугольнике *p12* вектор $\bar{\omega}_1$ изображен отрезком $p1=\mu_\omega\omega_1$; вектор $\bar{\omega}_{21}$ проведен параллельно оси $P_{12}O$, а вектор $\bar{\omega}_2$ — параллельно оси $P_{23}O$. Величину искомых векторов находят делением длины отрезков *p2* и *p12* на масштаб угловой скорости: $\omega_2=p2/\mu_\omega$; $\omega_{21}=12/\mu_\omega$.

Уравнение $\underline{\bar{\omega}_4}=\bar{\omega}_5+\bar{\omega}_{45}=\underline{\underline{\bar{\omega}_2}}+\underline{\bar{\omega}_{45}}$ также решается графически: вектор $(\overline{p4})=\mu_\omega\bar{\omega}_4$ проведен параллельно оси вращения колеса *4*, вектор $(\overline{24})=\mu_\omega\bar{\omega}_{45}$ — параллельно оси $P_{54}O$.

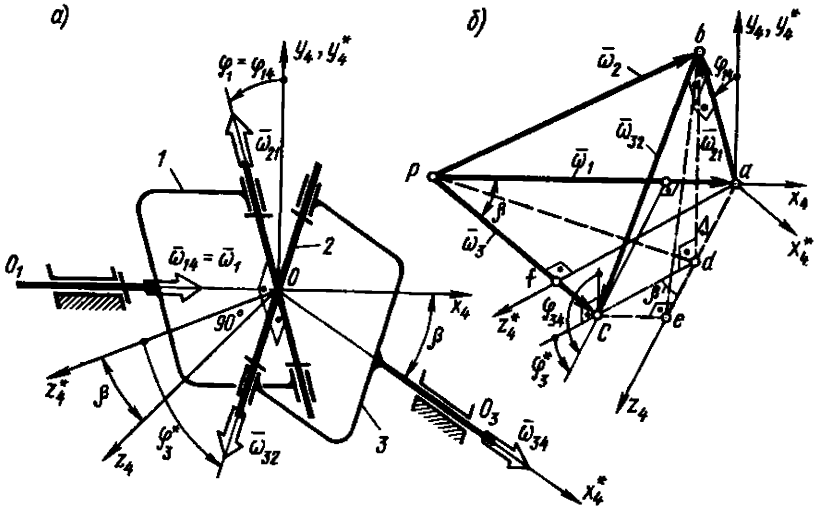


Рис. 4.25

Величину искомых векторов угловых скоростей находят по длине отрезков *p4* и *24* в $\Delta p24$: $\omega_4=p4/\mu_\omega$; $\omega_{45}=24/\mu_\omega$.

Уравнение $\underline{\bar{\omega}_H}=\underline{\bar{\omega}_2}+\omega_{H2}$ также решается графически построением треугольника *p2H*.

Величину искомых векторов находят из соотношений $\omega_H=pH/\mu_\omega$; $\omega_{H2}=2H/\mu_\omega$.

Метод планов угловых скоростей целесообразно, например, применить к исследованию карданного механизма.

Записывают систему векторных уравнений, связывающих между собой векторы угловых скоростей: $\bar{\omega}_1$ — входного звена, $\bar{\omega}_2$ — промежуточного звена (крестовины), $\bar{\omega}_3$ — выходного звена и векторов относительного вращения $\bar{\omega}_{21}$ и ω_{23} крестовины *2* относительно звеньев *1* и *3* (рис. 4.25, *а*):

$$\bar{\omega}_2=\underline{\bar{\omega}_1}+\underline{\bar{\omega}_{21}};\ \underline{\bar{\omega}_3}=\bar{\omega}_2+\underline{\bar{\omega}_{32}},$$

или

$$\underline{\bar{\omega}_3}=\underline{\bar{\omega}_1}+\underline{\bar{\omega}_{21}}+\underline{\bar{\omega}_{32}}.$$

В последнем векторном уравнении число неизвестных параметров равно трем, т. е. уравнение решается графическим построением в трехмерном пространстве (рис. 4.25, *б*). Длина отрезка *pa* выбирается так: $pa=\mu_\omega\omega_1$; длина остальных отрезков определяется в результате решения: $ab=\mu_\omega\omega_{21}$; $bc=\mu_\omega\omega_{32}$; $pc=\mu_\omega\omega_3$; $pb=\mu_\omega\omega_2$.

Функцию положения находят из совместного рассмотрения трех прямоугольных треугольников $\triangle abd$, $\triangle bdc$ и $\triangle cde$:

$$\text{из } \triangle ebd \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_{14} = bd/de;$$
$$\text{из } \triangle cbd \quad \operatorname{tg}\varphi_3^* = \operatorname{tg}\varphi_{34} = cd/bd;$$
$$\text{из } \triangle cde \quad \cos\beta = de/dc.$$

После подстановки имеют

$$\operatorname{tg}\varphi_3^* = cd/bd = \frac{de\operatorname{tg}\varphi_1}{cd} = \operatorname{tg}\varphi_1\cos\beta.$$

Для определения вектора угловой скорости $\bar{\omega}_3$ выполняют построение в осевой плоскости входного и выходного звеньев и записывают соотношения между отрезками:

$$pc = pf + fc = pa\cos\beta + ad\sin\beta;$$
$$\text{из } \triangle adb \quad ad = ab\sin\varphi_1;$$
$$\text{из } \triangle aeb \quad ab = ae\sin\varphi_1;$$
$$\text{из } \triangle pca^* \quad ae = pc\sin\beta.$$

После подстановки имеют

$$pc = pa\cos\beta + pc\sin^2\beta\sin^2\varphi_1,$$

или

$$pc = pa\frac{\cos\beta}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}.$$

Так как отрезки pc и pa пропорциональны угловым скоростям ω_3 и ω_1, то можно записать

$$\omega_3 = \omega_1\frac{\cos\beta}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}. \tag{4.56}$$

Угловую скорость ω_{21} находят по соотношению

$$ab = pc\sin\beta\sin\varphi_1$$

или

$$\omega_{21} = \omega_1\frac{\cos\beta\sin\beta\sin\varphi_1}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi_1}.$$

Соотношение (4.56) идентично соотношению (4.50), полученному при решении задачи геометрическим методом.

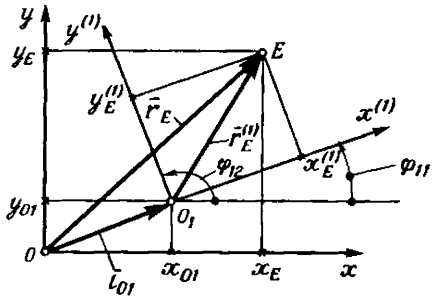


Рис. 4.26

§ 4.9. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Задача метода состоит в том, чтобы по координатам произвольно выбранной точки E (или вектора) на каком-либо звене механизма в одной системе координат (например, в локальной подвижной системе координат, связанной со звеном) найти координаты этой же точки (или вектора) в другой системе координат (например, в основной системе отсчета, связанной со стойкой) (рис. 4.26). Формулы, связывающие координаты произвольной точки $x_E^{(1)}$, $y_E^{(1)}$, $z_E^{(1)}$ в одной системе и x_E, y_E, z_E в другой системе, называют формулами преобразования декартовых прямоугольных координат.

Направляющие косинусы осей обозначают следующим образом.

Относительно системы Oxyz:

ось $O_1x^{(1)}$ имеет направляющие косинусы a_{11}, a_{21}, a_{31};

ось $O_1y^{(1)}$ имеет направляющие косинусы a_{12}, a_{22}, a_{32};

ось $O_1z^{(1)}$ имеет направляющие косинусы a_{13}, a_{23}, a_{33}.

Цифровые индексы соответствуют порядковому номеру оси: $1-x$; $2-y$; $3-z$; на первом месте в индексе приводится обозначение оси с индексом $(i-1)$ локальной системы отсчета; на втором месте в индексе обозначение (i-й) локальной системы координат.

Относительно системы $O_1x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$:

ось Ox имеет направляющие косинусы a_{11}, a_{12}, a_{13};

ось Oy имеет направляющие косинусы a_{21}, a_{22}, a_{23};

ось Oz имеет направляющие косинусы a_{31}, a_{32}, a_{33}.

Формулы преобразования имеют следующий вид:

от локальной системы $1-x^{(1)}$; $2-y^{(1)}$; $3-z^{(1)}$ к основной системе отсчета $Oxyz$

$$\begin{aligned} x_E &= a_{11}x_E^{(1)} + a_{12}y_E^{(1)} + a_{13}z_E^{(1)} + x_{01}; \\ y_E &= a_{21}x_E^{(1)} + a_{22}y_E^{(1)} + a_{23}z_E^{(1)} + y_{01}; \\ z_E &= a_{31}x_E^{(1)} + a_{32}y_E^{(1)} + a_{33}z_E^{(1)} + z_{01}; \end{aligned} \tag{4.57}$$

от основной системы отсчета к локальной системе $O_1x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$

$$\begin{aligned} x_E^{(1)} &= a_{11}(x_E - x_{01}) + a_{21}(y_E - y_{01}) + a_{31}(z_E - z_{01}); \\ y_E^{(1)} &= a_{12}(x_E - x_{01}) + a_{22}(y_E - y_{01}) + a_{32}(z_E - z_{01}); \\ z_E^{(1)} &= a_{13}(x_E - x_{01}) + a_{23}(y_E - y_{01}) + a_{33}(z_E - z_{01}). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Угловые координаты отсчитывают против хода часовой стрелки от направления соответствующей координатной оси.

Эти соотношения могут быть записаны в матричной форме:

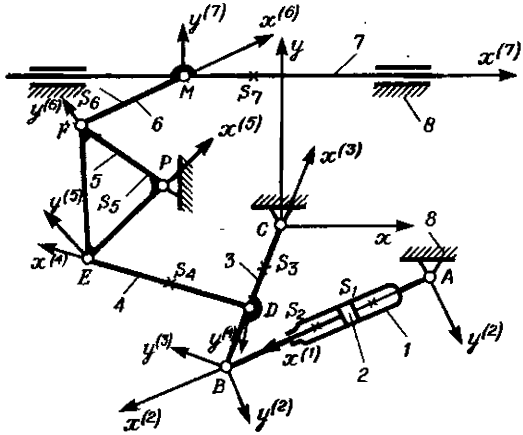


Рис. 4.27

$$\begin{vmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_{01} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_{01} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_E^{(1)} \\ y_E^{(1)} \\ z_E^{(1)} \\ 1 \end{vmatrix}, \text{ или } \begin{matrix} \bar{r}_E = T_{10} + \bar{r}_E^{(1)}, \\ \bar{r}_E = \bar{r}_E^{(1)} + \bar{l}_{01}, \end{matrix}$$

или

$$\begin{vmatrix} x_E^{(1)} \\ y_E^{(1)} \\ z_E^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (x_E - x_{01}) \\ (y_E - y_{01}) \\ (z_E - z_{01}) \end{vmatrix}, \text{ или } \begin{matrix} \bar{r}_E^{(1)} = T_{01}\,\bar{r}_E, \\ \bar{r}_E^{(1)} = \bar{r}_E - \bar{l}_{01}. \end{matrix}$$

На рис. 4.27 приведен пример выбора локальных систем координат для плоского восьмизвенного механизма. Основная система отсчета *Cxy* связана со стойкой *8*, а семь подвижных систем координат связаны с соответствующими подвижными звеньями *1*, ..., *7*. При вычислениях значений кинематических параметров механизма с использованием прикладных программ, основанных на методе преобразования координат, вводят информацию о координатах характерных точек на звене в локальной системе координат, размерах звеньев, координатах элементов кинематических пар на стойке и видах кинематических пар. ЭВМ позволяет единообразно выполнять последовательные преобразования координат и вычислять значения функций положения звеньев, координат кинематических пар, центров масс, а также линейные скорости и ускорения заданных точек, угловых скоростей и ускорений звеньев.

Подготовка информации для ввода в ЭВМ предусматривает, например, обозначения кинематической пары (*A*, *AP*, *B*, *D*, *C*, *E*, *P*, *F*, *M*, *MP*), ее вид (поступательные *AP* и *MP* и вращательные —

остальные) и номера звеньев, образующих пару $A-(8, 1)$; $AP-(1, 2)$; $B-(2, 3)$; $D-(3, 4)$; $C-(3, 8)$; $E-(4, 5)$; $P-(5, 8)$; $F-(5, 6)$; $M-(6,7)$; $MP-(7, 8)$.

Указываются номер стойки (например, 8) и обобщенные параметры движения начального звена или начальной (приводной) пары, например $h_{BA}=0{,}68$ м; $\dot{h}_{BA}=2{,}5$ м/с; $\ddot{h}_{BA}=10$ м/с^2.

Для каждого звена выбирают локальную систему координат, для которой указывают начало координат, координаты заданных точек, ориентацию оси $O_ix^{(i)}$ в поступательной паре с помощью параметров нормали R и β_R.

Для примера механизм, показанный на рис. 4.27, можно задать следующими значениями параметров звеньев [длины (м), углы (град)]:

цилиндр *1*: $x_A^{(1)}=y_A^{(1)}=0$; $R=0$; $\beta_R=270°$; $x_{S1}^{(1)}=0{,}2$; $y_{S1}^{(1)}=0$;

поршень *2*: $x_B^{(2)}=y_B^{(2)}=0$; $R=0$; $\beta_R=270°$; $x_{S2}^{(2)}=-0{,}2$; $y_{S2}^{(2)}=0$;

звено *3*: $x_{B2}^{(3)}=y_B^{(3)}=0$; $x_C^{(3)}=0{,}4$; $y_C^{(3)}=0$; $x_D^{(3)}=0{,}15$; $y_D^{(3)}=0$; $x_{S3}^{(3)}=0{,}2$; $y_{S3}^{(3)}=0$;

шатун *4*: $x_D^{(4)}=y_D^{(4)}=0$; $x_E^{(4)}=0{,}52$; $y_E^{(4)}=0$; $x_{S4}^{(4)}=0{,}3$; $y_{S4}^{(4)}=0$;

коромысло *5*: $x_F^{(5)}=y_F^{(5)}=0$; $x_F^{(5)}=0$; $y_F^{(5)}=0{,}28$; $x_E^{(5)}=-0{,}4$; $y_E^{(5)}=0$; $x_{S5}^{(5)}=0{,}115$; $y_{S5}^{(5)}=0{,}096$;

поводок *6*: $x_F^{(6)}=y_F^{(6)}=0$; $x_M^{(6)}=0{,}4$; $y_M^{(6)}=0$; $x_{S6}^{(6)}=0{,}15$; $y_{S6}^{(6)}=0$;

ползун *7*: $x_M^{(7)}=y_M^{(7)}=0$; $R=0$; $\beta_R=90°$; $x_{S7}^{(7)}=0{,}2$; $y_{S7}^{(7)}=0$;

стойка *8* — основная система отсчета Cxy:

$$x_C=y_C=0;\ x_A=0{,}4;\ y_A=-0{,}1;\ x_P=-0{,}42;$$
$$y_P=0{,}27;\ R=y_M=0{,}58;\ \beta_R=90°.$$

Если вычисления проводить без использования прикладных программ, то для плоских механизмов метод преобразования координат оказывается более трудоемким по сравнению с координатным и векторным способами. Для пространственных механизмов метод преобразования координат является наиболее приемлемым и с успехом используется при расчете параметров движения роботов и манипуляторов.

ГЛАВА 5
ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАШИНЫ С ЖЕСТКИМИ ЗВЕНЬЯМИ

К механизму машины во время ее движения приложены различные силы. Это движущие силы, силы сопротивления, силы тяжести и др. Характер действия сил может быть разным: некоторые из них зависят от положения звеньев механизма,

другие - от их скорости, силы могут быть и постоянными. Своим действием приложенные силы сообщают механизму тот или иной закон движения.

Кинематические характеристики скорость, ускорение, время срабатывания и др. — определяются посредством решения уравнения движения. Выбор способа решения уравнения движения зависит от характера действия заданных сил и от передаточных свойств механизма. При этом размеры, массы и моменты инерции звеньев должны быть известны. Однако распространена и обратная задача, когда заданы кинематические характеристики режима движения машины и необходимо найти массы, моменты инерции, а следовательно, и размеры звеньев, при которых механизм, нагруженный заданными силами, двигался бы в требуемом режиме. В настоящей главе рассматриваются способы решения как прямой задачи — динамического исследования механизма машины, так и обратной — его динамического проектирования. При этом необходимо подчеркнуть, что при решении обеих задач предполагается, что все звенья механизма являются абсолютно жесткими.

§ 5.1. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В МАШИНАХ, И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В введении к учебнику было сказано, что *машиной* называют устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека. Это значит, что через машину проходит поток механической энергии от ее источника до ее потребителя. Обычно источник, т. е. двигатель *ДВ*, и потребитель, т. е. рабочая машина *РМ*, связаны передаточным механизмом *П*. В дальнейшем всю сложную систему *ДВ — П — РМ*, состоящую из трех главных частей, будем называть машинной установкой, или коротко — машиной. Отметим, что во многих современных машинах (станки, подъемные краны и др.) их главные части столь тесно связаны в единое конструктивное целое, что указать четкие границы между ними очень трудно.

Рассмотрим силы и пары сил*, приложенные к механизму машины. Их можно разделить на следующие группы.

1. Движущие силы и моменты, совершающие *положительную* работу за время своего действия или за один цикл, если они изменяются периодически. Эти силы и моменты приложены к звеньям механизма, которые называют ведущими.

2. Силы и моменты сопротивления, совершающие *отрицательную* работу за время своего действия или за один цикл. Эти силы и моменты делятся, во-первых, на силы и моменты полезного сопротивления, которые совершают требуемую от машины работу и приложены к звеньям, называемым ведомыми, и, во-вторых, на силы и моменты сопротивления среды (газа, жидкости), в которой движутся звенья механизма. Силы сопротивления среды обычно малы по сравнению с другими силами, поэтому в дальнейшем они учитываться не будут, а силы

*В дальнейшем, как это принято в технической литературе, вместо выражения «приложена пара сил с моментом *M*» будем употреблять более короткий оборот «приложен момент *M*».

и моменты полезного сопротивления будут называться просто силами и моментами сопротивления.

3. Силы тяжести подвижных звеньев и силы упругости пружин. На отдельных участках движения механизма эти силы могут совершать как положительную, так и отрицательную работу. Однако за полный кинематический *цикл работа этих сил равна нулю*, так как точки их приложения движутся циклически.

4. Силы и моменты, приложенные к корпусу машины (т. е. стойке) извне. К ним помимо силы тяжести корпуса относятся реакция основания (фундамента) машины на ее корпус и многие другие силы. Все эти силы и моменты, поскольку они приложены к неподвижному корпусу (стойке), работы *не совершают*.

5. Силы взаимодействия между звеньями механизма, т. е. силы, действующие в его кинематических парах. Эти силы, согласно третьему закону Ньютона, всегда взаимообратны. Их нормальные составляющие работы *не совершают*, а касательные составляющие, т. е. силы трения, работу совершают, причем работа силы трения на относительном перемещении звеньев кинематической пары *отрицательна*.

Силы и моменты первых трех групп относятся к категории активных. Обычно они известны или могут быть оценены. Все эти силы и моменты приложены к механизму извне, а поэтому являются *внешними*. К числу внешних относятся также и все силы и моменты 4-й группы. Однако не все они являются активными.

Силы 5-й группы, если рассматривать механизм в целом, не выделяя отдельных его частей, являются *внутренними*. Эти силы представляют собой реакции на действие активных сил. Реакцией будет также и сила (или момент), с которой основание (фундамент) машины действует на ее корпус (т. е. на стойку механизма). Реакции наперед неизвестны. Они зависят от активных сил и моментов и от ускорений звеньев механизма.

Наибольшее влияние на закон движения механизма оказывают движущие силы и моменты, а также силы и моменты сопротивления. Их физическая природа, величина и характер действия определяются рабочим процессом машины или прибора, в которых использован рассматриваемый механизм. В большинстве случаев эти силы и моменты не остаются постоянными, а изменяют свою величину при изменении положения звеньев механизма или их скорости. Эти функциональные зависимости, представленные графически, или массивом чисел, или аналитически, носят название механических характеристик и при решении задач являются известными.

При изображении механических характеристик будем придерживаться следующего правила знаков: силу и момент будем считать положительными, если на рассматриваемом участке пути (линейном или угловом) они производят положительную работу.

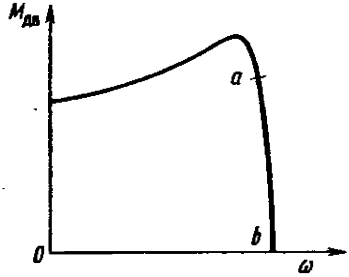


Рис. 5.1

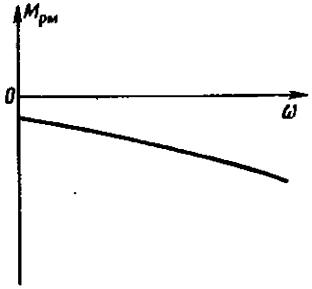


Рис. 5.2

Характеристики сил, зависящих от скорости. На рис. 5.1 показана механическая характеристика асинхронного электродвигателя — зависимость движущего момента от угловой скорости ротора машины. Рабочей частью характеристики является участок *ab*, на котором движущий момент резко уменьшается даже при незначительном увеличении скорости вращения.

От скорости зависят силы и моменты, действующие также в таких роторных машинах, как электрогенераторы, вентиляторы, воздуходувки, центробежные насосы (рис. 5.2) и многие другие.

При увеличении скорости момент двигателей (т. е. источников механической энергии) обычно уменьшается, а момент рабочих машин (т. е. потребителей механической энергии) обычно по модулю увеличивается. Такое свойство очень полезно, так как автоматически содействует устойчивому поддержанию установившегося режима движения машинной установки (машины), и чем сильнее оно выражено, тем устойчивость больше. Назовем такое свойство машин *саморегулированием*.

Характеристики сил, зависящих от перемещения. На рис. 5.3 показаны кинематическая схема механизма двух-

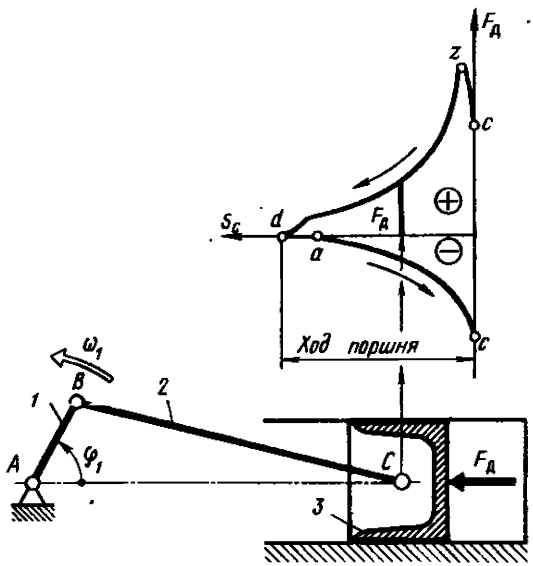


Рис. 5.3

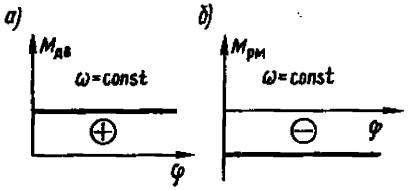


Рис. 5.4

тактного двигателя внутреннего сгорания (ДВС) и его механическая характеристика. Сила $F_д$, приложенная к поршню *3*, действует всегда влево. Поэтому при движении поршня влево (процесс расширения газов) она совершает положительную работу и показана со знаком плюс (ветвь *czd*). При движении поршня вправо (процесс сжатия газов) сила $F_д$ получает знак минус (ветвь *dac*). Если подача топлива в ДВС не изменяется, то при следующем обороте начального звена (звено *1*) механическая характеристика $F_д = F_д(s_C)$ повторит свою форму. Это значит, что сила $F_д$ будет изменяться периодически.

Работа силы $F_д$ графически изобразится площадью, ограниченной кривой $F_д(s_C)$. На рис. 5.3 эта площадь имеет две части: положительную и отрицательную, причем первая больше второй. Поэтому работа силы $F_д$ за полный период будет положительной. Следовательно, сила $F_д$ является движущей, хотя она и знакопеременна. Отметим попутно, что если сила, будучи знакопеременной, совершает за один период отрицательную работу, то она является силой сопротивления.

Силы, зависящие только от перемещений, действуют во многих других машинах и приборах (в поршневых компрессорах, ковочных машинах, строгальных и долбежных станках, разнообразных приборах как с пневмоприводом, так и с пружинными двигателями и т. д.), причем действие сил может быть как периодическим, так и непериодическим.

Вместе с тем нужно отметить, что момент машин роторного типа от перемещения, т. е. от угла поворота ротора, не зависит; характеристики таких машин при $\omega = \text{const}$ изображены на рис. 5.4, *а*, *б* при этом у двигателей $M_{дв} > 0$, а у рабочих машин $M_{рм} < 0$.

Если изменять подачу топлива в ДВС, то его механическая

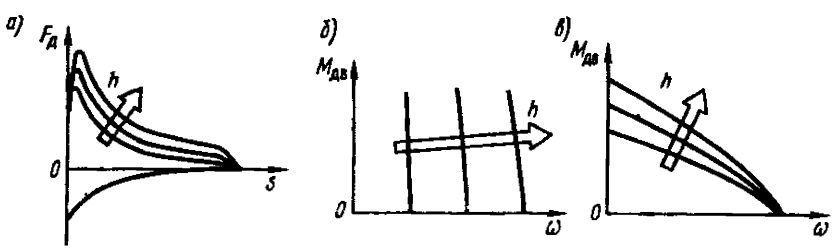


Рис. 5.5

характеристика примет вид семейства кривых (рис. 5.5, *а*): чем больше подача топлива (параметр h семейства), тем выше располагается характеристика. Семейством кривых изображается и механическая характеристика шунтового электродвигателя (рис. 5.5, *б*): чем больше сопротивление цепи обмотки возбуждения двигателя (параметр h), тем правее размещается кривая. Характеристика гидродинамической муфты также имеет вид семейства кривых (рис. 5.5, *в*): чем больше наполнение муфты жидкостью (параметр h), тем выше располагаются характеристики.

Таким образом, воздействуя на параметр h, можно управлять режимом работы привода — теплового, электрического или гидравлического, увеличивая его движущую силу или скорость. Вместе с тем параметр управления h связан с величиной потока энергии, протекающей через машину, т. е. определяет ее нагруженность и производительность.

§ 5.2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАШИНЫ

Механизм машины обычно является многозвенной системой, нагруженной силами и моментами, приложенными к различным ее звеньям. Чтобы лучше представить себе это, рассмотрим в качестве примера машинную установку, в которой двигатель внутреннего сгорания (ДВС) приводит в движение через зубчатую передачу вал рабочей машины (рис. 5.6, *а*). Пусть ею будет электрогенератор, или вентилятор, или центробежный насос, или какая-либо другая рабочая машина.

К поршню *3* приложена движущая сила $F_д$, к ротору *4* рабочей машины — момент сопротивления $M_{рм}$, ко всем звеньям — силы тяжести, во всех кинематических парах действуют силы трения. Если ДВС имеет несколько цилиндров, то число подвижных звеньев будет уже больше четырех. При этом на каждый поршень будет действовать движущая сила, так что картина нагружения механизма станет еще более сложной.

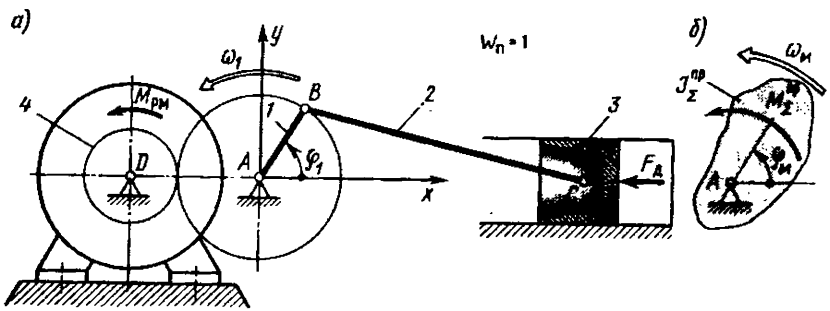


Рис. 5.6

Определение закона движения такой сложной многозвенной системы представляет собою трудную задачу. Однако в рассматриваемом примере механизм имеет *одну* степень свободы ($W_п = 1$). Это значит, что прежде всего надо определить закон движения всего лишь одного из его звеньев, которое тем самым будет являться начальным (а затем, используя обычные кинематические методы, изложенные в гл. 4, найти закон движения всех остальных звеньев). Такая постановка задачи приводит к мысли заменить весь сложный многозвенный механизм одним условным звеном, движущимся относительно стойки (рис. 5.6, *б*).

Выберем в качестве начального звена исследуемого механизма коленчатый вал ДВС, т. е. звено *1* (рис. 5.6, *а*)*. К условному звену (рис. 5.6, *б*) заменяющему весь механизм предъявим такое требование: пусть его момент инерции $J_\Sigma^{пр}$ и момент $M_\Sigma^{пр}$, которым оно нагружено, будут такими, что закон движения условного звена получится *полностью совпадающим* с законом движения начального звена *1*. Это значит, что условное звено окажется своеобразной динамической моделью механизма. А отсюда следует, что если определить закон движения этой простой модели (рис. 5.6, *б*), то автоматически станет известным искомый закон движения начального звена заданного механизма, т. е. будет справедливым для любого момента времени уравнение

$$\omega_1 = \omega_м, \tag{5.1}$$

в котором ω_1 — угловая скорость начального звена (во взятом примере звена *1*), а $\omega_м$ — угловая скорость модели.

Из сказанного следует, что при построении модели механизма все силы и моменты, приложенные к нему, оказываются приведенными к одному звену и замененными суммарным приведенным моментом $M_\Sigma^{пр}$, т. е. той расчетной величиной, которую в теоретической механике называют обобщенной силой. Следовательно, $M_\Sigma^{пр}$ является эквивалентом всей заданной нагрузки, приложенной к механизму. Равным образом, массы всех звеньев (точнее говоря, их инертности) оказываются также приведенными к одному звену и замененными суммарным приведенным моментом инерции $J_\Sigma^{пр}$, который является, таким образом, эквивалентом всей инертности механизма. Сам же заданный многозвенный механизм (рис. 5.6, *а*), нагруженный сложной системой сил и моментов, оказывается замененным простой моделью (рис. 5.6, *б*).

Итак, построение динамической модели состоит в приведении сил (определение $M_\Sigma^{пр}$) и в приведении масс (определение $J_\Sigma^{пр}$). Подчеркнем при этом, что динамическая модель должна быть обязате-

*Если заданный механизм имеет звено, находящееся в непрерывном вращательном движении, то именно его и целесообразно выбирать в качестве начального.

льно построена так, чтобы было выполнено уравнение (5.1); иначе сам переход от заданного реального механизма к его модели становится бессмысленным. Выполнение же уравнения (5.1), как следует из уравнения Лагранжа II рода, будет обеспечено в том случае, если *при приведении сил будет соблюдено условие равенства элементарных работ, а при приведении масс — условие равенства кинетических энергий.*

§ 5.3. ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ

Рассмотрим приведение сил на примере механизма с *одной* степенью свободы ($W_n=1$) (рис. 5.7, *а*). Выберем в качестве начального звено *1*. Механизм нагружен силами $\bar{F}$ и $\bar{F}_3$ и моментом M_4. Заменим механизм его моделью и приведем к ней обе силы и момент. В результате силы $\bar{F}$ и $\bar{F}_2$ и момент M_4 будут представлены соответствующими приведенными моментами (рис. 5.7, *б*). Их алгебраическая сумма даст величину суммарного приведенного момента

$$M_{\Sigma}^{пр}=M_{F}^{пр}+M_{F_3}^{пр}+M_{M_4}^{пр}, \qquad (5.2)$$

приложенного к модели (рис. 5.7, *в*).

Приведем силу F, т. е. найдем $M_F^{пр}$. Для этого, согласно § 5.2, надо записать исходное условие — *равенство элементарных работ* фактически приложенной силы $\bar{F}$ и заменяющего ее при-

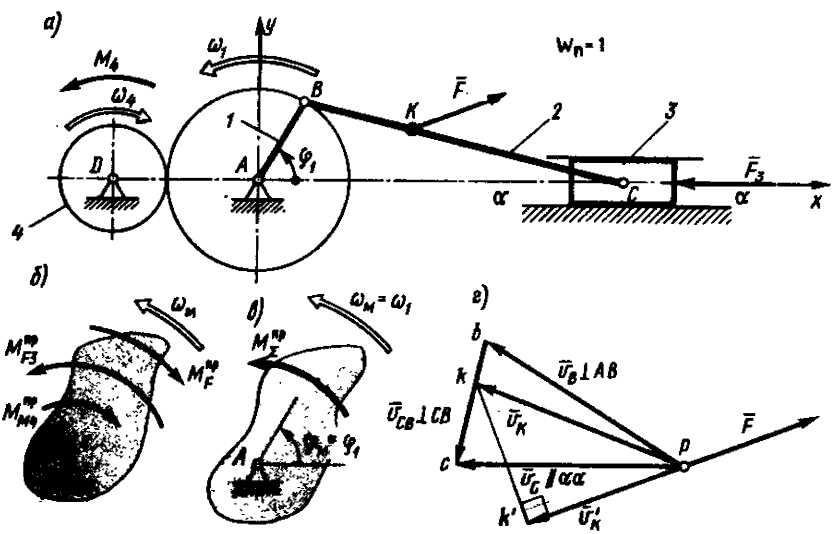


Рис. 5.7

веденного момента $M_F^{пр}$: $dA(\bar{M}_F^{пр}) = dA(\bar{F})$, т. е. $\bar{M}_F^{пр} \cdot d\bar{\varphi}_м = \bar{F} d\bar{s}_K$. Отсюда получим

$$M_F^{пр} d\varphi_м = F ds_K \cos(\bar{F}, d\bar{s}_K), \tag{5.3}$$

где $d\varphi_м$ и ds_K — возможные перемещения модели и точки K приложения силы. Учитывая уравнение (5.1), из которого следует $d\varphi_м = d\varphi_1$, решим уравнение (5.3) относительно искомого приведенного момента:

$$M_F^{пр} = F \frac{ds_K}{d\varphi_1} \cos(\bar{F}, d\bar{s}_K) = F \frac{ds_K/dt}{d\varphi_1/dt} \cos(\bar{F}, d\bar{s}_K) = F \frac{v_K}{\omega_1} \cos(\bar{F}, d\bar{s}_K),$$

откуда, имея в виду, что $\angle(\bar{F}, d\bar{s}_K) = \angle(\bar{F}, \bar{v}_K)$, получим

$$M_F^{пр} = F \frac{v_K}{\omega_1} \cos(\bar{F}, \bar{v}_K). \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) имеет обобщающий смысл: под буквой F можно понимать любую силу, известную по модулю и направлению, приложенную в точке K механизма, начальное звено которого обозначено номером *1*. Напомним, что приведенный момент $M_F^{пр}$ заменяет собой действие силы F.

Приведем момент M_4. Запишем исходное уравнение — равенство элементарных работ: $dA(\bar{M}_{M4}^{пр}) = dA(\bar{M}_4)$, откуда

$$M_{M4}^{пр} d\varphi_м = M_4 d\varphi_4, \tag{5.5}$$

где $d\varphi_м$ и $d\varphi_4$ — возможные перемещения модели и звена *4*. Решим (5.5) относительно $M_{M4}^{пр}$, помня, что $d\varphi_м = d\varphi_1$:

$$M_{M4}^{пр} = M_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = M_4 \frac{d\varphi_4/dt}{d\varphi_1/dt} = M_4 \frac{\omega_4}{\omega_1},$$

т. е. в окончательном виде

$$M_{M4}^{пр} = M_4 \frac{\omega_4}{\omega_1}. \tag{5.6}$$

Приведенный момент $M_{M4}^{пр}$ заменяет собой действие момента M_4.

Уравнению (5.6) можно придать обобщающий вид:

$$M_{Mj}^{пр} = M_j \frac{\omega_j}{\omega_1}, \tag{5.7}$$

где M_j — фактически приложенный к звену j момент.

Практическое использование для расчетов уравнений (5.4) и (5.7)

можно осуществить либо графически (способом планов возможных скоростей), либо аналитически (с помощью аналогов скоростей).

Графический способ. Для этого преобразуем уравнение (5.4), учитывая, что $\omega_1 = v_B/l_{AB}$:

$$M_F^{пр} = Fl_{AB}\frac{v_K}{v_B}|\cos(\bar{F}, \bar{v}_K)|. \qquad (5.8)$$

В уравнение (5.8) следует подставлять абсолютную величину $|\cos(\bar{F}, \bar{v}_K)|$.

Чтобы найти отношение v_K/v_B возможных скоростей и угол $(\bar{F}, \bar{v}_K)$, построим план возможных скоростей, который для механизмов с $W_п = 1$ выполняется по той же методике, что и план действительных скоростей (см. § 4.4). При этом надо помнить, что возможные скорости в отличие от действительных не зависят от приложенных сил, т. е. никак не связаны с законом движения механизма, и к тому же конкретного числового значения не имеют. После построения получим

$$M_F^{пр} = Fl_{AB}\frac{pk}{pb}\cos|(\bar{F}, \bar{v}_K)|.$$

Направление приведенного момента $M_F^{пр}$ определяется так: поскольку сила $\bar{F}^\tau$ действует навстречу $\bar{v}_K'$ (рис. 5.7, *г*), то и момент $M_F^{пр}$ должен быть направлен навстречу $\omega_м$ (рис. 5.7, *б*).

Используем уравнение (5.8) для приведения силы $\bar{F}_3$, учитывая, что $\cos(\bar{F}_3, \bar{v}_C) = 1$, так как $\angle(\bar{F}_3, \bar{v}_C) = 0$:

$$M_{F3}^{пр} = F_3 l_{AB}\frac{v_C}{v_B} = F_3 l_{AB}\frac{pc}{pb}. \qquad (5.9)$$

Для определения приведенного момента $M_{M4}^{пр}$ вернемся к уравнению (5.6), в котором $\omega_4/\omega_1 = u_{41}$ (рис. 5.7, *а*):

$$M_{M4}^{пр} = M_4|u_{41}|. \qquad (5.10)$$

В уравнение (5.10) следует подставлять абсолютную величину передаточного отношения $|u_{41}| = z_1/z_4$. Приведенный момент $M_{M4}^{пр}$ направлен против $\omega_м$ (рис. 5.7, *б*), так как заданный момент M_4 действует навстречу ω_4.

Укажем, что при изображении на графиках приведенных моментов, подсчитанных способом планов, они получают те знаки, которые заменяемые ими силы и моменты имеют на механических характеристиках.

Аналитический способ. Для этого назначим прямоугольную систему координат Axy (рис. 5.7, *а*).

Составим расчетное уравнение для определения $M_F^{пр}$. Мощность силы F выразим через проекции:

$$Fv_K \cos(\bar{F}, \bar{v}_K) = F_x v_{Kx} + F_y v_{Ky}.$$

Подставив это выражение в уравнение (5.4), получим

$$M_F^{пр} = F_x \frac{v_{Kx}}{\omega_1} + F_y \frac{v_{Ky}}{\omega_1}.$$

Как известно из § 4.1, отношения $v_{Kx}/\omega_1 = v_{qKx}$ и $v_{Ky}/\omega_1 = v_{qKy}$ являются проекциями аналога скорости точки K. Поэтому последнее уравнение примет окончательный расчетный вид:

$$M_F^{пр} = F_x v_{qKx} + F_y v_{qKy}. \tag{5.11}$$

Следует подчеркнуть, что в уравнение (5.11) все проекции подставляются со своими знаками.

Если в результате расчета приведенный момент $M_F^{пр} > 0$, то он направлен против часовой стрелки; если же $M_F^{пр} < 0$, то $M_F^{пр}$ направлен по часовой стрелке.

Применим уравнение (5.11) для приведения силы $\bar{F}_3$:

$$M_{F3}^{пр} = F_{3x} v_{qCx}. \tag{5.12}$$

В заданном механизме точка C движется вдоль оси x (рис. 5.7, *а*), поэтому $v_{qCy} = 0$. Знак $M_{F3}^{пр}$ укажет его направление.

Для приведения момента M_4 используем уравнение (5.6). Передаточное отношение $u_{41} = \omega_4/\omega_1 = -z_1/z_4 < 0$, поскольку при внешнем зацеплении зубчатых колес *4* и *1* они вращаются навстречу друг другу (рис. 5.7, *а*). Поэтому

$$M_{M4}^{пр} = M_4(-z_1/z_4). \tag{5.13}$$

Знак $M_{M4}^{пр}$ укажет направление его действия.

В более общем случае, когда звено j, к которому приложен момент M_j, не связано какой-либо передачей с начальным звеном *1*, отношение ω_j/ω_1 [см. уравнение (5.7)] представляет собой аналог ω_{qj} угловой скорости ω_j (см. § 4.1). Следовательно, расчетное уравнение в общем виде записывается так:

$$M_{Mj}^{пр} = M_j \omega_{qj}. \tag{5.14}$$

Достоинством аналитического способа является то, что применение его открывает возможность использования ЭВМ для выполнения расчетов.

Определив $M_F^{пр}$, $M_{F3}^{пр}$, $M_{M4}^{пр}$ (графически или аналитически), их нужно, согласно уравнению (5.2), алгебраически сложить и получить искомый суммарный приведенный момент $M_\Sigma^{пр}$. Таким образом, благодаря приведению сил вся нагрузка, приложенная к механизму

(рис. 5.7, *а*), оказалась замененной одним суммарным приведенным моментом (рис. 5.7, *в*). Отметим, что $M_{\Sigma}^{пр}$ можно также определить графически, применив теорему Жуковского [1, 5].

§ 5.4. ПРИВЕДЕНИЕ МАСС

Приведение масс рассмотрим на примере механизма (рис. 5.8, *а*), выбрав в качестве начального звено *1*.

Заменим заданный механизм его динамической моделью (рис. 5.8, *б*) — сосредоточим в ней инертность всех звеньев механизма. Обозначим момент инерции модели $J_{\Sigma}^{пр}$. Следовательно, $J_{\Sigma}^{пр}$ является эквивалентом инертности всего механизма и называется его приведенным моментом инерции. Как было указано в § 5.2, величина $J_{\Sigma}^{пр}$ определяется из условия *равенства кинетических энергий* $T_м$ модели и всего механизма T:

$$T_м = T. \tag{5.15}$$

Кинетическая энергия модели (рис. 5.8, *б*) определяется следующим образом:

$$T_м = \frac{J_{\Sigma}^{пр}\omega_м^2}{2}. \tag{5.16}$$

Напомним, что кинетическая энергия звена i в общем виде может быть записана так:

$$T_i = \frac{m_i v_{Si}^2}{2} + \frac{J_{iS}\omega_i^2}{2}, \tag{5.17}$$

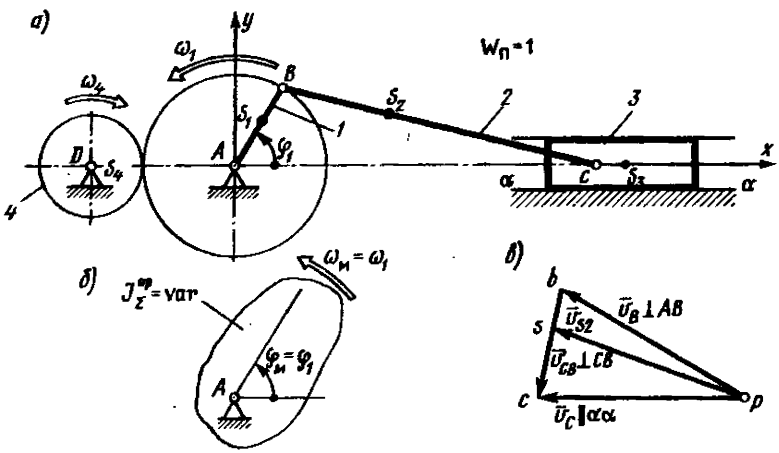


Рис. 5.8

где v_{Si} — скорость центра масс S_i звена i; J_{iS} — момент инерции звена i относительно оси, проходящей через центр масс S_i. В случае поступательного движения $\omega_i=0$. В случае вращательного движения вокруг оси A уравнение (5.17) приводится к виду

$$T_i=\frac{J_{iA}\omega_i^2}{2}.$$

Кинетическая энергия T заданного механизма (рис. 5.8, *а*) складывается из кинетических энергий всех его четырех подвижных звеньев: $T=T_1+T_2+T_3+T_4$. Звено *1* участвует во вращательном движении, звено *2* — в плоском, звено *3* — в поступательном, звено *4* — во вращательном. Поэтому

$$T=\frac{J_{1A}\omega_1^2}{2}+\left(\frac{m_2v_{S2}^2}{2}+\frac{J_{2S}\omega_2^2}{2}\right)+\frac{m_3v_C^2}{2}+\frac{J_{4D}\omega_4^2}{2}.$$

Подставим выражения $T_м$ и T в исходное уравнение (5.15) и, учитывая уравнение (5.1), после простых преобразований получим

$$J_\Sigma^{пр}=J_{1A}+m_2\left(\frac{v_{S2}}{\omega_1}\right)^2+J_{2S}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+m_3\left(\frac{v_C}{\omega_1}\right)^2+J_{4D}\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2. \quad (5.18)$$

Практическое использование уравнения (5.18) может быть осуществлено или графически (с помощью планов возможных скоростей), или аналитически (с помощью аналогов скоростей).

Графический способ. Преобразуем уравнение (5.18), учитывая, что $\omega_1=v_B/l_{AB}$, $\omega_2=v_{CB}/l_{CB}$, $\omega_4/\omega_1=u_{41}$:

$$J_\Sigma^{пр}=J_{1A}+\left[m_2l_{AB}^2\left(\frac{v_{S2}}{v_B}\right)^2+J_{2S}\left(\frac{l_{AB}}{l_{CB}}\right)^2\left(\frac{v_{CB}}{v_B}\right)^2\right]+$$
$$+m_3l_{AB}^2\left(\frac{v_C}{v_B}\right)^2+J_{4D}u_{41}^2. \quad (5.19)$$

В механизме с одной степенью свободы отношения действительных скоростей равны отношениям возможных скоростей. Поэтому эти отношения возьмем из плана возможных скоростей (рис. 5.8, *в*).

Аналитический способ. Согласно § 4.1, отношения, заключенные в скобках уравнения (5.18), представляют собой аналоги скоростей:

$$\frac{v_{S2}}{\omega_1}=v_{qS2},\ \frac{\omega_2}{\omega_1}=\omega_{q2},\ \frac{v_C}{\omega_1}=v_{qC},\ \frac{\omega_4}{\omega_1}=\omega_{q4},$$

поэтому уравнение (5.18) запишем в таком виде:

$$J_\Sigma^{пр}=J_{1A}+(m_2v_{qS2}^2+J_{2S}\omega_{q2}^2)+m_3v_{qC}^2+J_{4D}\omega_{q4}^2. \quad (5.20)$$

Заметим, что $v_{qS2}^2 = v_{qS2x}^2 + v_{qS2y}^2$, $v_{qC}^2 = v_{qCx}^2$, так как $v_{qCy} = 0$. Кроме того, $\omega_{q4} = \omega_4/\omega_1 = u_{41} = -z_1/z_4 = \text{const}$. Расчеты при аналитическом способе можно выполнить на ЭВМ.

Уравнению (5.20) можно придать обобщающий вид, справедливый для любого механизма:

$$J_{\Sigma}^{\text{пр}} = \sum_{i=1}^{n} (m_i v_{qSi}^2 + J_{iS}\omega_{qi}^2), \tag{5.21}$$

где n — число подвижных звеньев механизма. Внутри скобок стоят аналоги скоростей v_{qSi} и ω_{qi}, которые характеризуют передаточные свойства механизма и не зависят от его закона движения. Поэтому приведенный момент инерции $J_{\Sigma}^{\text{пр}}$ механизма от его закона движения также не зависит и является характеристикой самого механизма.

Приведенный момент инерции механизма $J_{\Sigma}^{\text{пр}}$ можно рассматривать как сумму приведенных моментов инерции отдельных его звеньев. Поэтому уравнения (5.19) и (5.20) представим в таком виде:

$$J_{\Sigma}^{\text{пр}} = J_1^{\text{пр}} + J_2^{\text{пр}} + J_3^{\text{пр}} + J_4^{\text{пр}},$$

где

$$J_1^{\text{пр}} = J_{1A} = \text{const}, \tag{5.22}$$

$$J_2^{\text{пр}} = m_2 l_{AB}^2 \left(\frac{v_{S2}}{v_B}\right)^2 + J_{2S}\left(\frac{l_{AB}}{l_{CB}}\right)^2 \left(\frac{v_{CB}}{v_B}\right)^2 = \\ = m_2 v_{qS2}^2 + J_{2S}\omega_{q2}^2 = \text{var}, \tag{5.23}$$

$$J_3^{\text{пр}} = m_3 l_{AB}^2 \left(\frac{v_C}{v_B}\right)^2 = m_3 v_{qC}^2 = \text{var}, \tag{5.24}$$

$$J_4^{\text{пр}} = J_{4D} u_{41}^2 = \text{const}. \tag{5.25}$$

Приведенные моменты инерции $J_2^{\text{пр}}$ и $J_3^{\text{пр}}$ — величины переменные, так как в выражения (5.23) и (5.24) входят либо отношения возможных скоростей, либо аналоги скоростей, которые зависят от положения механизма. Поэтому приведенный момент инерции всего механизма [уравнения (5.19) и (5.20)] также будет переменным, зависящим от обобщенной координаты φ_1. Многим механизмам свойствен периодический характер этой зависимости. Однако есть механизмы (например, зубчатые, шарнирный параллелограмм и др.), приведенный момент инерции которых постоянен.

Из сказанного следует, что модель, которой заменяется механизм (рис. 5.8, *б*), является *условным* телом, потому что момент инерции ее (в общем случае) — переменный, тогда как реальные физические тела имеют постоянные моменты инерции.

В заключение укажем, что так как ни планы возможных скоростей, ни аналоги скоростей от закона движения механизма не зависят, то приведение масс, равно как и приведение сил, можно делать и *не зная закона его движения*. Следовательно, решая динамическую задачу, вполне возможно (и нужно) сначала построить динамическую модель механизма, сделав приведение сил и масс, а затем уже находить закон ее движения.

§ 5.5. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

Выполнив приведение сил и масс, любой механизм с одной степенью свободы (рычажный, зубчатый, кулачковый и др.), сколь бы сложным он ни был, можно заменить его динамической моделью (рис. 5.9). Эта модель в общем случае имеет переменный приведенный момент инерции J_Σ, и к ней приложен суммарный приведенный момент M_Σ*. Закон движения модели *такой же*, как и закон движения начального звена механизма [см. уравнение (5.1)].

Основой для составления уравнения движения механизма с *одной* степенью свободы служит теорема об изменении кинетической энергии:

$$T - T_{\text{нач}} = \Sigma A. \tag{5.26}$$

Работу совершают все активные силы и моменты и силы трения во всех кинематических парах механизма (см. § 5.1).

Уравнение движения в энергетической форме. Запишем формулу для кинетической энергии модели, учитывая уравнение (5.1):

$$T_{\text{м}} = J_\Sigma \omega^2/2. \tag{5.27}$$

Так как вся нагрузка, приложенная к модели, выражается суммарным приведенным моментом M_Σ, то сумма работ равна

$$\Sigma A = \int_{\varphi_{\text{нач}}}^{\varphi} M_\Sigma \, \mathrm{d}\varphi. \tag{5.28}$$

Здесь переменная интегрирования $\varphi_{\text{м}}$ заменена координатой φ начального звена, так как $\varphi_{\text{м}} = \varphi$.

Учитывая (5.16) и подставив выражения (5.27) и (5.28) в основное уравнение (5.26), получим уравнение движения в энергетической форме:

$$\frac{J_\Sigma \omega^2}{2} - \frac{J_{\Sigma\text{нач}} \omega_{\text{нач}}^2}{2} = \int_{\varphi_{\text{нач}}}^{\varphi} M_\Sigma \, \mathrm{d}\varphi, \tag{5.29}$$

---

*Для упрощения записи здесь и в дальнейшем опускаем значок «пр» при приведенных моментах и приведенных моментах инерции, а также номер 1 начального звена в обозначении его координаты φ, угловой скорости ω и углового ускорения ε.

где искомой величиной является угловая скорость ω начального звена механизма. В общем случае верхний предел φ интегрирования в уравнении (5.29) считается переменным.

Если вся нагрузка, приложенная к механизму, зависит только от его положения, то и суммарный приведенный момент M_Σ есть функция только координаты φ. В этом случае уравнение (5.29) решается непосредственно относительно искомой величины ω:

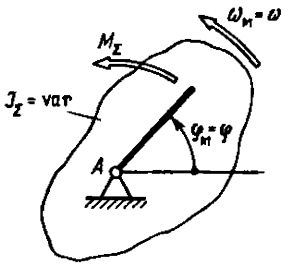


Рис. 5.9

$$\omega = \sqrt{\frac{2\int\limits_{\varphi_{нач}}^{\varphi} M_\Sigma(\varphi)\,d\varphi}{J_\Sigma} + \frac{J_{\Sigma нач}}{J_\Sigma}\,\omega_{нач}^2}. \qquad (5.30)$$

Укажем, что интеграл под корнем имеет знак, который надо учитывать.

Уравнение движения в дифференциальной форме. Продифференцируем уравнение (5.29) по координате φ:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{J_\Sigma\omega^2}{2}\right) = M_\Sigma.$$

Определим производную, стоящую в левой части уравнения, помня, что в общем случае переменной величиной является не только угловая скорость ω, но и J_Σ (см. § 5.4). Поэтому

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{J_\Sigma\omega^2}{2}\right) = J_\Sigma\omega\,\frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2}\,\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi} = J_\Sigma\,\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\,\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi}\,\omega^2,$$

откуда

$$J_\Sigma\,\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\,\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi}\,\omega^2 = M_\Sigma. \qquad (5.31)$$

Это и есть уравнение движения в дифференциальной форме, поскольку искомая переменная величина — угловая скорость ω начального звена механизма — стоит под знаком производной. При пользовании уравнением (5.31) надо помнить, что суммарный приведенный момент M_Σ, а также производная $dJ_\Sigma/d\varphi$ суть величины алгебраические и подставляются со своими знаками.

В том случае, когда исследуется механизм, имеющий $J_\Sigma = \text{const}$

(например, зубчатый механизм с круглыми колесами), уравнение его движения упрощается и приобретает такой вид:

$$J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} = M_\Sigma. \tag{5.32}$$

Уравнение движения в дифференциальной форме (5.31) может быть получено также и из уравнений Лагранжа II рода [2], [4].

Для определения углового ускорения ε начального звена используем уравнение (5.31), решим его относительно $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$:

$$\varepsilon = \frac{M_\Sigma}{J_\Sigma} - \frac{\omega^2}{2J_\Sigma}\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi}. \tag{5.33}$$

Величины M_Σ и $dJ_\Sigma/d\varphi$ подставляются в уравнение (5.33) со своими знаками. Если угловое ускорение ε получится со знаком, противоположным знаку угловой скорости ω, то это значит, что начальное звено механизма движется замедленно.

Производная $dJ_\Sigma/d\varphi$ подсчитывается или численным дифференцированием на ЭВМ, или графическим дифференцированием (см. § 4.2). Другой значительно более точный (но и более трудоемкий) способ определения производной $dJ_\Sigma/d\varphi$ можно найти в литературе (см.: *Минут С. Б.* Об определении производной приведенного момента инерции массы звеньев механизма// Науч. тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1970; *Зиновьев В. А., Бессонов А. П.* Основы динамики машинных агрегатов. М., 1964).

Угловое ускорение ε можно определить также способом, описанным в § 4.2 (способом поднормали). Там же изложены способы построения функций $\varepsilon(t)$ и $\varphi(t)$.

Процесс движения машины в общем случае состоит из трех фаз: разбега, установившегося режима и выбега (рис. 5.10). Разбег и выбег относятся к неустановившемуся режиму, который характеризуется *непериодическими*, т. е. неповторяющимися, изменениями скорости главного вала машины (начального звена). Такой процесс движения называют *переходным*.

При установившемся режиме скорость главного вала изменяется периодически. В частном случае скорость может быть постоянной. В установившемся режиме работает большинство энергетических и технологических машин. Часто установившееся движение чередуется с разгонами (при повышениях скоростного режима) и торможениями (при понижениях скоростного режима). Так работают, например, автомобильный двигатель и различные другие транспортные машины. Многие механизмы в установившемся режиме вообще не работают. Это особенно характерно для целого ряда приборов

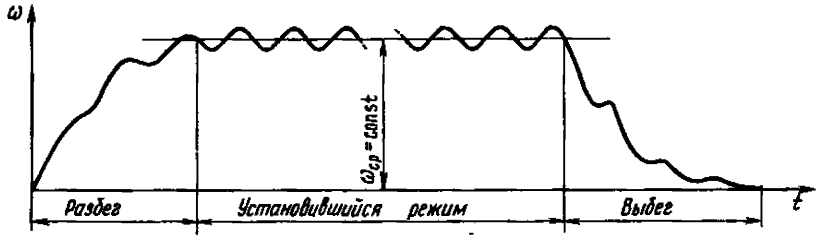


Рис. 5.10

(реле, контакторы и т. п.). Их механизм во время срабатывания переходит из одного положения в другое, не совершая замкнутого повторяющегося кинематического цикла.

В трех последующих параграфах будет рассмотрен неустановившийся, а в остальных параграфах — установившийся режим движения.

§ 5.6. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ МЕХАНИЗМА, НАГРУЖЕННОГО СИЛАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ТОЛЬКО ОТ ПОЛОЖЕНИЯ

Неустановившийся режим движения машины имеет место тогда, когда ее пускают в ход и она, набирая скорость, выходит на установившийся режим, а также тогда, когда для остановки машины ее двигатель выключают и она продолжает двигаться за счет накопленного запаса кинетической энергии; при этом машина постепенно теряет скорость из-за действия сил трения или каких-либо других сил сопротивления, в том числе и специальных тормозных сил. В этих случаях необходимо знать, насколько быстро происходят переход из неподвижного состояния в рабочее и обратный переход до полной остановки. Применительно к транспортным машинам изучение обратного перехода особенно важно для надежного расчета длины тормозного пути. Исследование неустановившегося режима движения дает возможность определить время срабатывания механизма, что абсолютно необходимо для проектирования многих приборов, таких, как фотозатворы, средства автоматической защиты и др.

Разгоны (разбеги) и торможения могут происходить с большим ускорением. Это вызывает значительное динамическое нагружение механизма, что, в свою очередь, может привести к перенапряжениям и даже к поломкам.

Во время разбега и выбега угловая скорость многих машин проходит через критическую (резонансную) зону. Во избежание динамической перегрузки механизма и возможной аварии проход этой зоны должен быть достаточно быстрым, что надо обеспечить при проектировании, сделав расчет обеих фаз неустановившегося

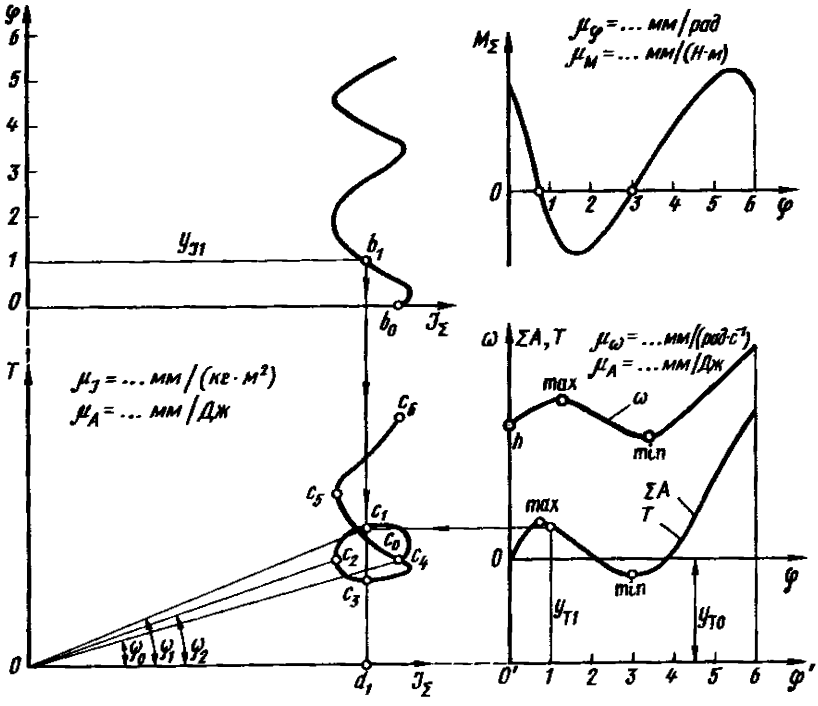


Рис. 5.11

режима. Решение многих других динамических задач также связано с исследованием этого режима.

Таким образом, изучение неустановившихся (переходных) процессов весьма существенно для грамотного динамического проектирования механизма, машины или прибора.

Для определения закона движения механизма при неустановившемся режиме должны быть известны следующие исходные данные: кинематическая схема механизма; характеристики геометрии масс всех подвижных звеньев; механические характеристики сил и моментов; начальные условия движения. Последнее важно для исследования именно неустановившегося режима.

Рассмотрим механизм, нагруженный силами и моментами, которые являются функциями только *перемещения* своих точек приложения. Пусть приведенный момент инерции рассматриваемого механизма имеет *переменную* величину $J_\Sigma = \text{var}$. Требуется определить зависимость скорости начального звена от его угла поворота, т. е. $\omega(\varphi)$. Подобная задача является весьма распространенной. В качестве примеров можно привести механизмы дизель-компрессоров,

буровых станков и подъемных кранов с приводом от двигателей внутреннего сгорания, различных устройств с пневмоприводом, приборов с пружинными двигателями и др.

Для решения поставленной задачи нужно взять уравнение движения в энергетической форме [см. уравнение (5.30)]:

$$\omega=\sqrt{\frac{2\Sigma A}{J_\Sigma}+\frac{J_{\Sigma\text{нач}}}{J_\Sigma}\,\omega^2_{\text{нач}}}, \qquad (5.34)$$

где ΣA определяется по уравнению (5.28).

Порядок определения искомой угловой скорости ω графическим способом таков (рис. 5.11):

1. Выполняется приведение масс и строится диаграмма приведенного момента инерции механизма $J_\Sigma(\varphi)$, которая показана на рис. 5.11 повернутой на 90°*. Начальное положение отмечено как нулевое. Для отсчета углов φ принято $\varphi_{\text{нач}}=\varphi_0=0$.

2. По механическим характеристикам строятся диаграммы приведенного движущего момента и приведенного момента сопротивления, а затем диаграмма суммарного приведенного момента $M_\Sigma(\varphi)$. Если в механизме есть пружины, то приведенные моменты их упругих сил должны войти в суммарный приведенный момент. В том случае, когда силы тяжести и силы трения значительны, их приведенные моменты также должны войти слагаемыми в величину M_Σ.

В результате выполнения п. 1 и 2 заданный механизм приводится к динамической модели.

3. Графическим интегрированием (см. § 4.2) строится диаграмма суммы работы $\Sigma A(\varphi)$. Ординаты этой диаграммы отсчитываются от оси φ.

4. По уравнению (5.34) с учетом начальных условий подсчитывается для каждого положения механизма угловая скорость ω и относительно оси φ строится искомая зависимость $\omega(\varphi)$. ΣA подставляется в (5.34) со своим знаком. Величина $\omega_0=\omega_{\text{нач}}$ содержится в исходных данных и изображена ординатой $Oh=\mu_\omega\omega_0$. Величина $J_{\Sigma_{\text{нач}}}=Ob_0/\mu_J$ (рис. 5.11) есть значение приведенного момента инерции механизма в нулевой позиции.

В таком же порядке нужно вести расчет и численным способом с применением ЭВМ.

Наглядное представление о том, как изменяется скорость, можно получить графическим путем, разработанным И. И. Артоболевс-

---

*Поворот диаграммы $J_\Sigma(\varphi)$ на 90° нужен для определения угловой скорости ω методом энергомасс, который будет изложен в конце параграфа.

ким. Для этого необходимо построить кривую энергомасс $T(J_\Sigma)$ (диаграмму Виттенбауэра).

Сместим вниз ось φ на диаграмме $\Sigma A(\varphi)$ на величину $y_{T0}=\mu_A T_0$ (рис. 5.11), где $T_0=J_{\Sigma 0}\omega_0^2/2$. Тогда ординаты, отсчитываемые от новой, смещенной оси φ', изобразят текущее значение кинетической энергии T в различных положениях механизма. Затем исключим из зависимостей $T(\varphi)$ и $J_\Sigma(\varphi)$ параметр φ (на рис. 5.11 это показано для положения *1*) и получим диаграмму энергомасс $T(J_\Sigma)$.

Теперь определим угловую скорость из уравнения (5.27) с учетом уравнения (5.15):

$$\omega=\sqrt{2T/J_\Sigma}. \tag{5.35}$$

Соединим любую точку диаграммы $T(J_\Sigma)$ (например, точку c_1) с началом координат. Напишем уравнение (5.35) применительно к положению *1* механизма, выразив T и J_Σ через изображающие их отрезки: $T_1=y_{T1}/\mu_A$, $J_{\Sigma 1}=y_{J1}/\mu_J$. Тогда

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2\mu_J}{\mu_A}\frac{y_{T1}}{y_{J1}}}=\sqrt{\frac{2\mu_J}{\mu_A}}\sqrt{\frac{c_1d_1}{0d_1}}=\sqrt{\frac{2\mu_J}{\mu_A}}\sqrt{\operatorname{tg}\psi_1}. \tag{5.36}$$

Сравним между собой углы ψ. Согласно уравнению (5.36), угловая скорость ω_1 в 1-м положении больше ω_0 — угловой скорости в начальном положении, потому что $\psi_1>\psi_0$; рассуждая таким же образом, получим, что $\omega_2<\omega_1$, так как $\psi_2<\psi_1$ и т. д. Следовательно, переходя по кривой энергомасс от позиции к позиции, можно наглядно проследить, как изменяется угловая скорость начального звена механизма при изменении его положения.

Метод построения графика $\omega(\varphi)$ останется в силе и для механизмов, у которых $J_\Sigma=\text{const}$. При этом графики функций $J_\Sigma(\varphi)$ и $T(J_\Sigma)$ будут представлять прямые линии.

Вышеизложенный метод пригоден для изучения обеих фаз неустановившегося движения, т. е. и разбега (разгона), и выбега. Это же относится и к методам, изложенным в двух последующих параграфах.

§ 5.7. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ МЕХАНИЗМА, НАГРУЖЕННОГО СИЛАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ТОЛЬКО ОТ СКОРОСТИ

Рассматриваемый случай отличается от предыдущего, во-первых, тем, что силы и моменты не зависят от перемещения, а являются функциями только *скорости*, и, во-вторых, тем, что приведенный момент инерции механизма есть величина *постоянная*: $J_\Sigma=\text{const}$.

Типичными примерами для таких условий являются турбогенераторы и гидрогенераторы, многие грузоподъемные машины и станки, прокатные станы, центробежные насосы и воздуходувки с электроприводом, следящие системы с электромоторным приводом и целый ряд других устройств.

Для решения поставленной задачи нужно взять уравнение движения в дифференциальной форме [см. уравнение (5.32)]:

$$J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} = M_\Sigma(\omega).$$

Разделим переменные ω и t и проинтегрируем, приняв $t_{нач}=0$:

$$t = J_\Sigma \int_{\omega_{нач}}^{\omega} \frac{d\omega}{M_\Sigma(\omega)}. \qquad (5.37)$$

По уравнению (5.37) определяется закон изменения скорости $\omega(t)$. Напомним, что M_Σ подставляется в уравнение (5.37) с учетом знака.

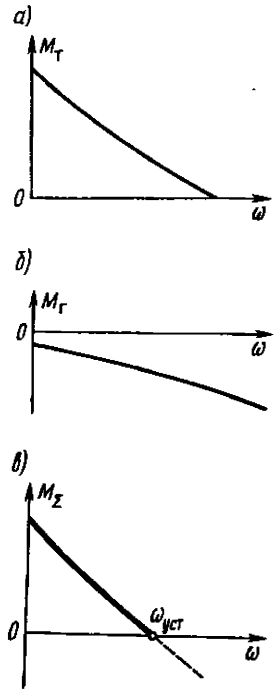


Рис. 5.12

В качестве примера неустановившегося движения рассмотрим разгон трубогенератора из неподвижного состояния; это значит, что при $t=0$ угловая скорость $\omega_{нач}=0$. Механические характеристики машин представлены на рис. 5.12, *а*, *б*. Примем в качестве начального звена вал одной из машин и приведем к нему все массы и оба момента, т. е. подсчитаем $J_\Sigma=\text{const}$ и $M_\Sigma=M_т+M_г$ (рис. 5.12, *в*). График $M_\Sigma(\omega)$ близок к прямой, поэтому можно его аппроксимировать уравнением $M_\Sigma=A-B\omega$. Член A равен $M_{\Sigma нач}$, а коэффициент B характеризует крутизну спада зависимости $M_\Sigma(\omega)$. Теперь уравнение (5.37) примет такой вид:

$$t = J_\Sigma \int_{0}^{\omega} \frac{d\omega}{A-B\omega}.$$

Решение его при заданных начальных условиях

$$\omega = \omega_{уст}(1-e^{-t/T}) \qquad (5.38)$$

представлено на рис. 5.13, причем $\omega_{уст}=A/B$.

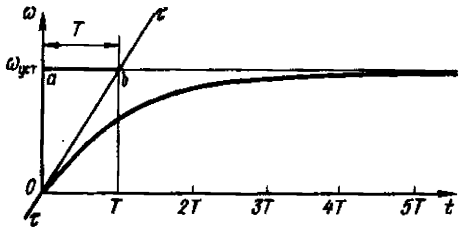


Рис. 5.13

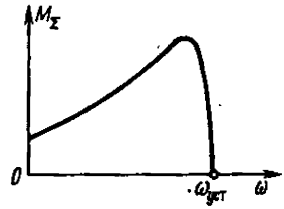


Рис. 5.14

В уравнении (5.38) $T=J_\Sigma/B$; эта величина называется постоянной времени машинного агрегата. Графически она изображена на рис. 5.13 отрезком *ab*. Физический смысл ее состоит в следующем. Если бы в процессе разгона суммарный момент M_Σ не уменьшался, а оставался постоянным, равным $M_{\Sigma\text{нач}}=A$, то движение было бы равноускоренным, а угловая скорость ω достигала бы значения $\omega_{\text{уст}}$ через время T.

Теоретически процесс разгона продолжается бесконечно долго. Однако уже при $t=3T$ отношение $\omega/\omega_{\text{уст}}$ составит 0,95; при $t=4T$ оно возрастет до 0,98, а при $t=5T$ получим $\omega/\omega_{\text{уст}}=0{,}995$, т. е. при $t=(4\div5)T$ процесс разгона практически закончится. Знание величины T позволяет, таким образом, определить продолжительность разгона машины. Отсюда следует очевидный результат: чем больше инертность агрегата (чем больше J_Σ), тем больше T, равное J_Σ/B, тем более продолжительным будет разгон.

Из сказанного следует, что если задать время разгона, то можно определить ту величину J_Σ, при которой процесс разгона действительно займет заданное время. Так, если потребовать, чтобы разгон продолжался в течение $t=t^*$, считая, что он практически завершается через время $t=5T$, то $5T=t^*$. Отсюда $5(J_\Sigma/B)=t^*$, или $J_\Sigma=(1/5)Bt^*$. Таким образом, используя изложенную методику, можно не только найти закон изменения скорости механизма [см. уравнение (5.38)], но и решить обратную задачу — по заданным условиям движения (например, по времени срабатывания t^*) определить, каковы должны быть параметры механизма (моменты инерции звеньев, а затем и их размеры), т. е. выполнить динамическое проектирование механизма.

В рассматриваемом примере угловая скорость ω начального звена получилась нарастающей без колебаний. Это является результатом того, что моменты, приложенные к валам машин, периодически не изменяются (поскольку они не зависят от угловых координат валов), а приведенный момент инерции машинной установки постоянен.

Во многих случаях линейная аппроксимация зависимости $M_\Sigma(\omega)$ невозможна. Так, например, в случае разгона токарного станка асинхронным двигателем зависимость $M_\Sigma(\omega)$ имеет вид, представленный на рис. 5.14. В этом случае уравнение (5.37) можно решить графически или применить численное интегрирование на ЭВМ (см. § 4.2).

§ 5.8. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ МЕХАНИЗМА, НАГРУЖЕННОГО СИЛАМИ И МОМЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ КАК ОТ ПОЛОЖЕНИЯ, ТАК И ОТ СКОРОСТИ

Рассмотрим более общий случай динамического исследования неустановившегося режима, когда силы и моменты, приложенные к механизму, являются функциями как *перемещения* (т. е. изменения положения), так и *скорости*, а приведенный момент инерции механизма есть величина *переменная*: $J_\Sigma = \mathrm{var}$. Примерами могут служить технологические машины с электроприводом (металлорежущие станки, ковочные прессы и др.), различные приборы с электромагнитным приводом (реле, контакторы, средства автоматической защиты и др.); сюда же относится изучение таких динамических процессов, как запуск двигателей внутреннего сгорания от электростартера, пуск мотор-компрессорных установок, станков и т. п.

Поставленная задача решается путем использования уравнения движения (5.29):

$$\frac{J_\Sigma \omega^2}{2} - \frac{J_{\Sigma\text{нач}}\omega^2_{\text{нач}}}{2} = \Sigma A.$$

Один из методов решения этого уравнения предложен М. А. Скуридиным (см.: *Скуридин М. А.* Определение движения механизма по уравнению кинетической энергии при задании сил функциями скорости и времени// Науч. тр. АН СССР, 1951. Т. XII. Вып. 45). Особенность его заключается в том, что работа сил, зависящих только от положения, отделяется от работы сил, зависящих от скорости. Поэтому и приведение этих двух видов сил делается *раздельно*. Покажем метод решения поставленной задачи на конкретном примере пуска в ход кулисного механизма поперечно-строгального станка (рис. 5.15, *а*).

Исходные данные перечислены в начале § 5.6. Так как станок запускается в режиме холостого хода, т. е. когда нет процесса резания, то вся энергия электродвигателя расходуется на увеличение кинетической энергии машины и на преодоление потерь трения. Наиболее сильно трение проявляет себя между ползуном *5* и неподвижной направляющей. Силу трения $F_т$ в этой поступательной паре можно принять примерно постоянной (рис. 5.15, *б*). Трение в других кинематических парах учитывать не будем, поскольку оно

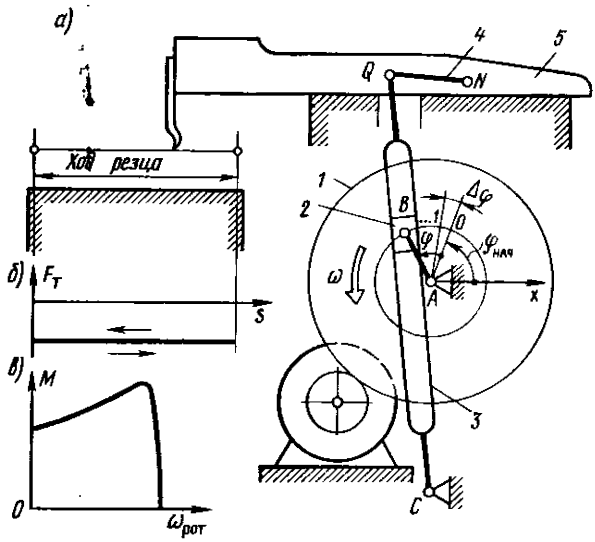


Рис. 5.15

относительно слабо выражено. Точно так же опустим влияние сил тяжести. Механическая характеристика асинхронного электродвигателя $M(\omega_{рот})$ изображена на рис. 5.15, *в*. Пусть начальные условия движения таковы: при $t=t_{нач}$ имеем $\varphi=\varphi_{нач}$, $\omega=\omega_{нач}=0$.

Выберем в качестве начального звена большее колесо *1* зубчатой передачи. Наметим ряд положений механизма: 0, 1, 2, ...; отсчет углов φ будем вести от начального (нулевого) положения $\varphi_0=\varphi_{нач}$ (рис. 5.15, *а*).

Приведем массы звеньев механизма и построим диаграмму $J_\Sigma(\varphi)$ (;рис. 5.16). Затем выполним приведение силы трения $F_т$ и ее приведенный момент M_φ представим графически (рис. 5.17). Важно отметить, что M_φ есть функция *только* координаты φ начального звена. Наконец, приведем момент электродвигателя (рис. 5.18, *а*); приведенный момент M_ω есть функция угловой скорости ω*. Запишем уравнение движения так:

$$\frac{J_\Sigma\omega^2}{2}-\frac{J_{\Sigma нач}\omega^2_{нач}}{2}=A_\varphi+A_\omega, \qquad (5.39)$$

*В общем случае график $M_\omega(\omega)$ представляет не одну кривую, а семейство их с параметром φ, т. е. $M_\omega(\varphi, \omega)$.

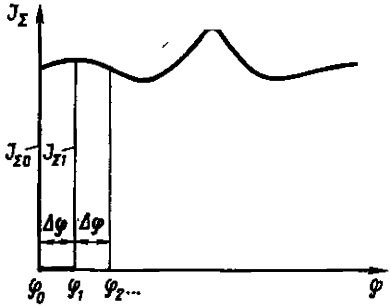


Рис. 5.16

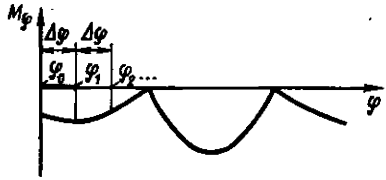


Рис.5.17

где A_φ — работа приведенного момента M_φ; A_ω — работа приведенного момента M_ω.

Рассмотрим два близких положения: нулевое, для которого заданы φ_0 и ω_0, и первое; они отделены небольшим интервалом $\Delta\varphi$. Для нулевого положения по начальным условиям легко определить величины $J_{\Sigma 0}$, $T_0 = J_{\Sigma 0}\omega_0^2/2$, $M_{\omega 0}$ (см. рис. 5.16, 5.18, *а*). Для первого положения можно определить $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$, а по углу φ_1 — и величину $J_{\Sigma 1}$ (рис. 5.16).

Напишем уравнение движения (5.39) для интервала *0 — 1*, т. е. от φ_0 до φ_1:

$$\frac{J_{\Sigma 1}\omega_1^2}{2} - \frac{J_{\Sigma 0}\omega_0^2}{2} = A_{\varphi 01} + A_{\omega 01}. \qquad (5.40)$$

Работу $A_{\varphi 01}$ определим интегрированием зависимости $M_\varphi(\varphi)$ (рис. 5.17) на участке *0 — 1*. Работу $A_{\omega 01}$ оценим следующим образом. Так как скорость ω в процессе движения изменяется, то изменяется и приведенный момент M_ω, как это видно из рис. 5.18, *а*. В каждом новом положении скорость ω начального звена и приведенный момент M_ω приобретают новые значения, какие — пока неизвестно. Но приближенно можно принять, что в пределах небольшого интервала *0 — 1* момент M_ω при увеличении угла φ изменяется линейно и в конце интервала получит некоторое значение $M_{\omega 1}$ (рис. 5.18, *б*); поэтому

$$A_{\omega 01} \approx \frac{M_{\omega 0} + M_{\omega 1}}{2}\,\Delta\varphi. \qquad (5.41)$$

Ошибка от сделанного приближения будет тем меньше, чем меньше выбранный интервал $\Delta\varphi$.

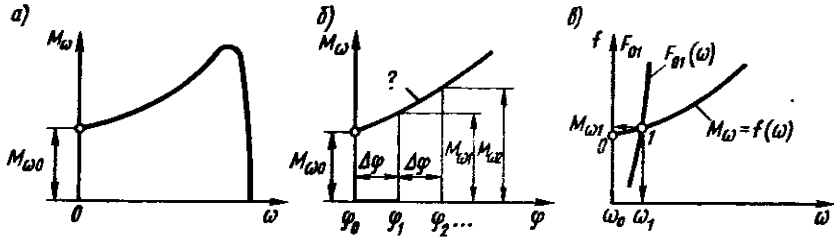


Рис. 5.18

Подставим в уравнение (5.4) величину $A_{\omega 01}$ из формулы (5.4). Тогда $\frac{J_{\Sigma 1}\omega_1^2}{2} - T_0 = A_{\varphi 01} + \frac{M_{\omega 0} + M_{\omega 1}}{2}\Delta\varphi$. Отсюда

$$\frac{J_{\Sigma 1}}{\Delta\varphi}\omega_1^2 - \left(\frac{2T_0}{\Delta\varphi} + M_{\omega 0} + \frac{2A_{\varphi 01}}{\Delta\varphi}\right) = M_{\omega 1}. \qquad (5.42)$$

Обозначим сумму, содержащуюся в скобках, буквой B:

$$B_{01} = \frac{2T_0}{\Delta\varphi} + M_{\omega 0} + \frac{2A_{\varphi 01}}{\Delta\varphi}. \qquad (5.43)$$

Тогда уравнение приобретает окончательный расчетный вид:

$$\frac{J_{\Sigma 1}}{\Delta\varphi}\omega_1^2 - B_{01} = M_{\omega 1}. \qquad (5.44)$$

Напомним, что в уравнениях (5.43) и (5.44) нужно учитывать знак величин $M_{\omega 0}$, $M_{\omega 1}$ и $A_{\varphi 01}$. В разбираемом примере $A_{\varphi 01} < 0$; кроме того, $T_0 = 0$, так как $\omega_0 = 0$.

Как было указано выше, задавшись интервалом $\Delta\varphi$, можно определить $J_{\Sigma 1}$ и все слагаемые величины B_{01}. Для данного интервала эта величина является вполне определенной и не зависящей от угловой скорости ω. Следовательно, в уравнении (5.44) неизвестными будут только величины ω_1 и $M_{\omega 1}$. При этом $M_{\omega 1}$ строго связан с ω_1 зависимостью $M_\omega(\omega)$ (рис. 5.18, *а*). Поэтому уравнение (5.44) можно решить графическим путем, наложив на характеристику $M_\omega = f(\omega)$ график функции $\frac{J_{\Sigma 1}}{\Delta\varphi}\omega^2 - B_{01} = F_{01}(\omega)$ (рис. 5.18, *в*). Координаты ω_1 и $M_{\omega 1}$ точки пересечения *1* являются искомыми решениями.

Если характеристика $M_\omega = f(\omega)$ представлена в виде формулы, то уравнение (5.44) можно решить аналитическим путем.

Определив ω_1 в конце интервала *0 — 1*, перейдем к интервалу *1 — 2*. Расчетное уравнение для него имеет вид

$$\frac{J_{\Sigma 2}}{\Delta\varphi}\omega_2^2 - B_{12} = M_{\omega 2}, \tag{5.45}$$

где

$$B_{12} = \frac{2T_1}{\Delta\varphi} + M_{\omega 1} + \frac{2A_{\varphi 12}}{\Delta\varphi}. \tag{5.46}$$

Новое уравнение решается относительно ω_2 таким же способом, как и предыдущее.

Так, последовательно пройдя все интервалы углов φ, получим ряд значений угловой скорости ω, по которым можно построить график искомого закона изменения скорости $\omega = \omega(\varphi)$.

В предыдущих параграфах были рассмотрены динамические процессы, протекающие в машинных установках, механизмы которых имеют одну степень свободы. Динамика механизмов с двумя и более степенями свободы, встречающихся пока значительно реже, еще только разрабатывается. С имеющимися разработками в этой области можно познакомиться в книгах [4,5].

§ 5.9. НЕРАВНОМЕРНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

Перейдем к установившемуся режиму движения механизма. По-прежнему будем рассматривать машины, механизмы которых имеют одну степень свободы. Для этих механизмов установившимся движением называют такое, при котором скорость начального звена (обобщенная скорость) является *периодической* функцией времени. График $\omega(t)$ при установившемся движении (тахограмма) представлен на рис. 5.19. Как видно, угловая скорость ω периодически колеблется относительно некоторого постоянного среднего значения.

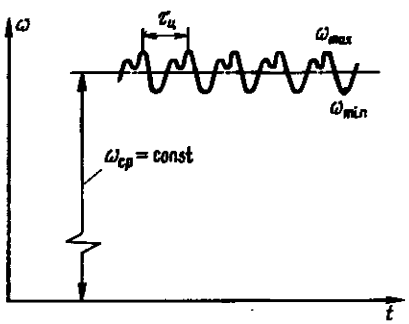


Рис. 5.19

В § 5.1 и 5.4 было отмечено, что силы, приложенные к механизмам целого ряда машин, а также приведенный момент инерции J_Σ *периодически* изменяются. Если к тому же сумма работ всех сил за период их действия равна нулю, то угловая скорость начального звена механизма также *неизбежно* будет изменяться периодически.

Указанные выше условия являются необходимыми и достаточными для поддержания установившегося режима.

Период изменения скорости начального звена (обобщенной скорости механизма) называют циклом установившегося движения или сокращенно циклом. Время $\tau_ц$ цикла равно или кратно периоду действия сил. Поэтому при установившемся режиме сумма работ всех сил за цикл равна нулю:

$$\Sigma A_ц = 0. \tag{5.47}$$

Так как работа сил тяжести за цикл равна нулю, то равенство (5.47) будет выполняться, если работа движущих сил за цикл равна работе всех сил сопротивления за цикл (по модулю):

$$A_д^ц = |A_с^ц|. \tag{5.48}$$

Уравнение работ (5.48) [или (5.47)] является основным энергетическим уравнением установившегося режима. Из него вытекает [см. уравнение (5.26)], что приращения кинетической энергии механизма за цикл не происходит: $T_{кон} = T_{нач}$; следовательно, угловая скорость начального звена в начале и в конце цикла одинакова.

Итак, при установившемся режиме скорость ω начального звена хотя и остается в среднем постоянной, но внутри цикла изменяется, проходя через максимальное ω_{max} и минимальное ω_{min} значения (рис. 5.19). Неравномерность вращения оценивается **коэффициентом неравномерности**

$$\delta = (\omega_{max} - \omega_{min})/\omega_{ср}, \tag{5.49}$$

где $\omega_{ср}$ — средняя за цикл скорость. Из уравнения (5.49) видно, что δ характеризует размах колебаний скорости по отношению к ее среднему значению. Чем меньше δ, тем относительно меньше размах колебаний, тем спокойнее вращается начальное звено. Величина $\omega_{ср}$ (рад/с) подсчитывается по формуле $\omega_{ср} = 2\pi n$, в которой n — частота вращения начального звена, $с^{-1}$.

Для каждого вида машин имеется свое допустимое значение коэффициента неравномерности [δ], выработанное практикой; так, для металлорежущих станков это 1/25 — 1/50, для прядильных машин — 1/50 — 1/100, для дизельного привода электрогенераторов — 1/100 — 1/200.

Коэффициент неравномерности есть величина *весьма малая*, что позволяет принять среднее значение угловой скорости равным среднему арифметическому из его максимального и минимального значений:

$$\omega_{ср} = (\omega_{max} + \omega_{min})/2. \tag{5.50}$$

Совместное решение уравнений (5.49) и (5.50) дает значения мак-

симальной и минимальной скорости:

$$\omega_{max} = \omega_{ср}(1 + \delta/2),\ \omega_{min} = \omega_{ср}(1 - \delta/2). \qquad (5.51)$$

Как видно из уравнений (5.51), отличие ω_{max} и ω_{min} от $\omega_{ср}$, отнесенное к $\omega_{ср}$, составляет $\pm\delta/2$, т. е. обычно не более $\pm 2\%$.

В установившемся режиме работают очень многие машины (станки, прессы, прокатные станы, лесопильные рамы, текстильные машины, генераторы электрической энергии, компрессоры, насосы и т. д.). Наилучшее условие для работы всех этих машин — абсолютно равномерное вращение их главного вала (принимаемого обычно в качестве начального звена). Колебания скорости главного вала вызывают дополнительные динамические нагрузки, вследствие чего снижаются долговечность и надежность машин. Более того, колебания скорости ухудшают рабочий процесс машины. Следовательно, поскольку колебания скорости полностью устранить нельзя, нужно по возможности хотя бы сократить их размах. Иными словами, значение коэффициента неравномерности δ надо сделать приемлемо малым. Рассмотрим, каким образом можно решить эту задачу.

Все звенья механизма обладают инертностью. Как известно из физики, это свойство состоит в том, что чем инертнее материальное тело, тем медленнее происходят изменения его скорости, вызываемые действием приложенных сил. Поэтому, чтобы получить вращение главного вала машины с циклической неравномерностью, не превышающей требуемой величины, инертность этого вала со всеми жестко связанными с ним деталями надо сделать достаточно большой. Для этого на главном валу машины надо закрепить добавочную массу, выполненную в виде колеса с развитым ободом и называемую маховиком. Его момент инерции должен быть таким, чтобы неравномерность вращения главного вала машины не превышала заданных пределов.

Итак, основное назначение маховика состоит в *ограничении колебаний* угловой скорости главного вала машины в пределах, определяемых значением коэффициента неравномерности $[\delta]$. Определение момента инерции маховика по заданным условиям движения (т. е. по заданному значению $[\delta]$) производится в процессе проектирования машины и составляет одну из задач ее динамического синтеза. Подчеркнем при этом, что свое основное назначение маховик может выполнить только при установившемся режиме.

§ 5.10. ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ И АНАЛИЗ ПО МЕТОДУ МЕРЦАЛОВА

Динамический синтез и анализ выполним для условий установившегося режима.

Пусть дана кинематическая схема механизма. Выберем в качестве начального звено, совершающее непрерывное вращательное дви-

жение; им обычно бывает главный вал машины. Распределим все подвижные звенья по двум группам и сделаем приведение масс. В группу I обязательно включим начальное звено с закрепленным на нем маховиком, а также все те звенья, которые связаны с ним постоянным передаточным отношением; в группу II войдут все остальные звенья механизма. Так, для примера, рассмотренного в § 5.4 (см. рис. 5.8), группу I составят начальное звено *1* и звено *4* (так как $u_{41}=\text{const}$), группу II — звенья *2* и *3*. Заметим, что приведенные моменты инерции звеньев группы I суть величины постоянные, а звеньев группы II — переменные [см. уравнения (5.22) — (5.25)]. Запишем приведенный момент инерции J_Σ всего механизма:

$$J_\Sigma = J_{\text{I}} + J_{\text{II}}, \tag{5.52}$$

где $J_{\text{I}}=\text{const}$; $J_{\text{II}}=\text{var}$.

Решим обе задачи — и динамический синтез и динамический анализ — наиболее простым и наглядным методом Мерцалова, основанным на применении диаграммы $T_{\text{I}}(\varphi)$. Сначала выполним динамический синтез, составив прежде всего расчетную формулу для определения приведенного момента инерции I группы звеньев, необходимого для обеспечения заданного значения $[\delta]$.

Кинетическая энергия I группы звеньев выражается так: $T_{\text{I}}=\frac{1}{2}J_{\text{I}}\omega^2$. Угловая скорость ω колеблется внутри цикла между значениями $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$ (рис. 5.19); следовательно, колеблется и кинетическая энергия T_{I}, проходя через максимальное $T_{\text{I}\max}=\frac{1}{2}J_{\text{I}}\omega_{\max}^2$ и минимальное $T_{\text{I}\min}=\frac{1}{2}J_{\text{I}}\omega_{\min}^2$ значения. Подчеркнем, что момент инерции J_{I} имеет постоянную величину, не зависящую от положения механизма.

Определим наибольший перепад кинетической энергии группы I звеньев: $\Delta T_{\text{I}\text{яб}}=T_{\text{I}\max}-T_{\text{I}\min}$. Подставив значения $T_{\text{I}\max}$ и $T_{\text{I}\min}$, получим

$$\Delta T_{\text{I}\text{яб}}=\frac{J_{\text{I}}\omega_{\max}^2}{2}-\frac{J_{\text{I}}\omega_{\min}^2}{2}=\frac{J_{\text{I}}}{2}(\omega_{\max}^2-\omega_{\min}^2)=J_{\text{I}}\omega_{\text{ср}}\frac{\omega_{\max}+\omega_{\min}}{2}\cdot\frac{\omega_{\max}-\omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}.$$

Используя формулы (5.49) и (5.50), имеем

$$\Delta T_{\text{I}\text{яб}}=J_{\text{I}}\omega_{\text{ср}}^2\delta,$$

или, решая относительно искомой величины J_{I},

$$J_{\text{I}}=\frac{\Delta T_{\text{I}\text{яб}}}{\omega_{\text{ср}}^2[\delta]}. \tag{5.53}$$

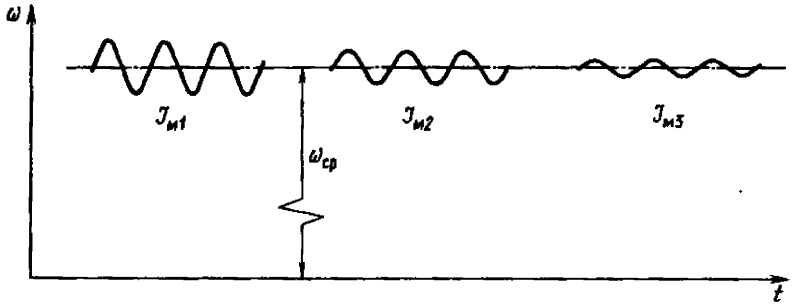


Рис. 5.20

Формула (5.53) является расчетной для определения приведенного момента инерции группы I звеньев, необходимого для обеспечения вращения начального звена с заданной неравномерностью, выраженной коэффициентом $[\delta]$, т. е. является уравнением динамического синтеза при установившемся режиме. Заметим, что чем меньше заданное значение $[\delta]$, т. е. чем равномернее должно вращаться начальное звено и чем меньше, следовательно, его угловое ускорение, тем больше должен быть необходимый момент инерции J_{I}, тем массивнее получится маховик, входящий в группу I звеньев. На рис. 5.20 представлены три тахограммы, снятые с одной и той же машины, но при разных маховиках: $J_{\text{мх1}} < J_{\text{мх2}} < J_{\text{мх3}}$.

Частоту вращения n начального звена (по которой вычисляют $\omega_{\text{ср}} = 2\pi n$) и коэффициент неравномерности $[\delta]$, необходимые для уравнения (5.53), задают при проектировании. Значение $\Delta T_{\text{I}\delta}$ определяют следующим образом.

Кинетическая энергия T всех подвижных звеньев механизма состоит из слагаемых T_{I} и T_{II}: $T = T_{\text{I}} + T_{\text{II}}$. Отсюда

$$T_{\text{I}} = T - T_{\text{II}}. \tag{5.54}$$

Кинетическую энергию T выразим из уравнения (5.26):

$$T = \Sigma A + T_{\text{нач}}, \tag{5.55}$$

тогда

$$T_{\text{I}} = \Sigma A + T_{\text{нач}} - T_{\text{II}}. \tag{5.56}$$

По уравнению (5.56) для одного полного цикла строят диаграмму $T_{\text{I}}(\varphi)$ и по этой диаграмме находят величину $\Delta T_{\text{I}\delta}$, входящую в расчетное уравнение динамического синтеза (5.53).

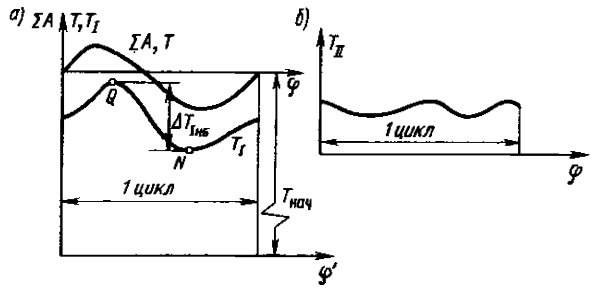


Рис. 5.21

Проиллюстрируем сказанное графиками. Пусть известны диаграмма $\Sigma A(\varphi)$ (верхняя кривая на рис. 5.21, *а*, построенная относительно оси φ) и диаграмма $T_{II}(\varphi)$ (рис. 5.21, *б*) кинетической энергии группы II звеньев, т. е. тех, приведенные моменты инерции которых переменны. Согласно уравнению (5.56), прибавим к сумме работ ΣA значение кинетической энергии $T_{нач}$ всего механизма в начале цикла. Для этого сместим ось φ на величину $T_{нач}$ вниз (рис. 5.21, *а*), после чего верхняя кривая на рис. 5.21, *а* будет относительно оси φ' изображать кинетическую энергию T всего механизма, как это следует из уравнения (5.55). Вычтем, согласно уравнению (5.54), из кинетической энергии T кинетическую энергию T_{II} и получим нижнюю кривую на рис. 5.21, *а*. Нижняя кривая, отнесенная к оси φ', и является кривой кинетической энергии $T_I(\varphi)$. Отметим на этой кривой точку максимума Q и точку минимума N и по ним определим наибольший перепад кинетической энергии $\Delta T_{Інб}$, необходимый для подсчета J_I по уравнению (5.53).

Обратим внимание, что для подсчета J_I по формуле (5.53) надо знать не величину кинетической энергии T_I, а ее наибольшее изменение $\Delta T_{Інб}$. Но $\Delta T_{Інб}$ не зависит от начального значения $T_{нач}$, и, следовательно, для определения $\Delta T_{Інб}$ не нужно знать числового значения $T_{нач}$, т. е. не нужно выявлять положение сдвинутой оси абсцисс φ'.

Составим порядок определения момента инерции маховика по методу Мерцалова графическим способом:

— приведение сил и моментов; построение диаграммы суммарного приведенного момента $M_\Sigma(\varphi)$ (см. § 5.3);

— построение диаграммы $\Sigma A(\varphi)$ способом графического интегрирования [см. уравнение (5.28)];

— приведение масс; построение диаграммы $J_{II}(\varphi)$ (см. § 5.4);

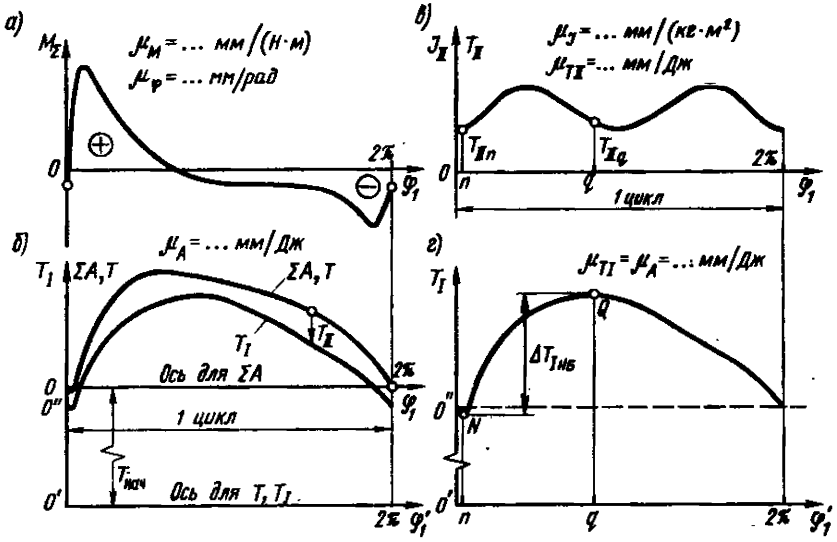


Рис. 5.22

— определение кинетической энергии T_{II} по формуле $T_{II} = \frac{1}{2} J_{II} \omega_{ср}^2$ и переход к диаграмме $T_{II}(\varphi)$;

— построение диаграммы кинетической энергии $T_I(\varphi)$ по уравнению (5.56) (без выявления положения сдвинутой оси абсцисс) и определение $\Delta T_{I\text{нб}}$;

— подсчет J_I по уравнению (5.53) и определение момента инерции маховика.

В таком же порядке нужно вести расчет и численным способом с применением ЭВМ.

На рис. 5.22 изображены графики, выполненные для расчета маховика по методу Мерцалова для машинной установки, составленной из ДВС и электрогенератора (см. рис. 5.6, *а*). Механические характеристики, необходимые для расчета, заданы в функции перемещения (см. рис. 5.3, 5.4, *б*), поскольку вал генератора вращается практически равномерно. Начальным звеном назначим коленчатый вал ДВС — звено *1*. Рассмотрим особенности расчета.

Сначала надо сделать приведение (см. § 5.3) движущей силы $F_д$ (см. рис. 5.3) и для одного полного цикла получить зависимость $M_д(\varphi)$*. Так как маховик может выполнить свое основное назначе-

*При исследовании установившегося режима начало цикла может быть выбрано в любом положении начального звена; выберем в качестве начального (нулевого) положения то, в котором поршень *3* занимает крайнюю правую позицию (см. рис. 5.6, *а*, 5.3).

ние только в условиях установившегося режима, то при его расчете непременно должно быть *соблюдено основное энергетическое уравнение* (5.48): $A_д^п = |A_c^п|$. Это уравнение обусловливает обязательное соотношение между работами движущих сил и сил сопротивления, а именно: $\int_0^{2\pi} M_д \, d\varphi_I = \int_0^{2\pi} |M_c| \, d\varphi_I$. Отсюда, учитывая, что $M_c = M_{рм} z_1/z_4 = \text{const}$, получим $|M_c| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_д(\varphi) \, d\varphi$.

Подсчитав $|M_c|$, нужно определить $M_\Sigma = M_д + M_c$ (рис. 5.22, *а*). Признаком установившегося режима на рис. 5.22, *а* является то, что площадки над осью абсцисс и под ней *равновелики*, а на рис. 5.22, *б* — то, что ордината кривой ΣA в конце цикла *равна нулю*.

Так как механизм во взятом примере (см. рис. 5.6, *а*) такой же, как и рассмотренный в § 5.4, то, используя формулы (5.22) — (5.25), заключаем, что в состав группы I входят звенья *1* и *4*, а в состав группы II — звенья *2* и *3* (см. начало параграфа). График приведенного момента инерции $J_{II} = J_2^{пр} + J_3^{пр}$ представлен на рис. 5.22, *в*.

Кинетическая энергия T_{II} определяется уравнением $T_{II} = \frac{\omega^2}{2} J_{II}$. Пока задача динамического синтеза не завершена, точное текущее значение ω еще не известно. Но вследствие малости коэффициента неравномерности справедливо приближенное равенство $\omega \approx \omega_{ср}$ (см. § 5.9). Поэтому можно принять $T_{II} \approx \frac{\omega_{ср}^2}{2} J_{II}$. Так как $\omega_{ср}^2/2 = \text{const}$, то график $J_{II}(\varphi_I)$ представляет собой одновременно и график $T_{II}(\varphi_I)$, но выполненный в другом масштабе (рис. 5.22, *в*); соотношение между масштабами таково: $\mu_{TII} = 2\mu_J/\omega_{ср}^2$. Таким образом, метод Мерцалова не является, строго говоря, точным, но вследствие малости ошибки вполне пригоден для практических расчетов.

Поскольку T_{II} подсчитано не вполне точно, график $T_I(\varphi)$ (рис. 5.22, *б* и 5.22, *г*), а вместе с ним и наибольший перепад $\Delta T_{Iнб}$ кинетической энергии (рис. 5.22, *г*) содержат некоторую ошибку. При $[\delta] > 0{,}10$ можно сделать уточнение величины $\Delta T_{Iнб}$ по формуле, предложенной Д. М. Лукичевым: $\Delta T_{Iнб}^* = \Delta T_{Iнб} - [\delta](T_{IIn} + T_{IIq})$ (см.: *Лукичев Д. М.* Расчет маховика машины// Вопросы теории механизмов и машин, 1953. № 23). В этой формуле T_{IIn} и T_{IIq} — значения кинетической энергии T_{II} в тех положениях *n* и *q* механизма, в которых кинетическая энергия T_I проходит свои крайние экстремумы; в уравнение (5.53) следует подставить $\Delta T_{Iнб}^*$.

Определив $\Delta T_{Iнб}$, по уравнению (5.53) динамического синтеза при установившемся режиме подсчитываем J_I, а затем $J_{мх}$. Во многих

случаях момент инерции маховика $J_{мх}$ преобладает над остальными моментами инерции I группы звеньев. Поэтому всякие изменения кинетической энергии T_I происходят прежде всего за счет изменений кинетической энергии маховика.

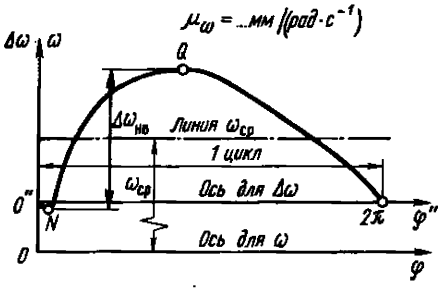


Рис. 5.23

Рассмотрим роль маховика. В процессе расширения газов (см. рис. 5.3) ДВС вырабатывает энергии больше, чем потребляет генератор. Избыток ее идет на увеличение T_I (участок NQ на рис. 5.22, *г*), т. е. прежде всего на увеличение кинетической энергии маховика. Во время процесса сжатия газов ДВС сам потребляет энергию на совершение работы сжатия. Генератор в это время также продолжает забирать энергию с вала ДВС. Оба эти расхода энергии возмещаются за счет уменьшения T_I (участок QN на рис. 5.22, *г*), т. е. в основном за счет уменьшения кинетической энергии маховика.

Таким образом, маховик *то накапливает* кинетическую энергию, когда работа двигателя оказывается в избытке, *то отдает* часть ее. Чем больше $J_{мх}$ (а следовательно, и J_I), тем выше аккумулирующая способность маховика, тем меньше будут колебания ω_I при колебаниях потока энергии, тем равномернее будет вращаться вал машины, что видно из уравнения (5.53), решенного относительно δ:

$$\delta = \frac{\Delta T_{Iнб}}{\omega_{ср}^2 J_I}. \qquad (5.57)$$

Аккумулирующая способность маховика используется не только для обеспечения допустимой неравномерности хода машин. Так, в автомашинах маховик содействует трогению автомобиля с места. Маховики непременно применяются в машинах ударного действия — молотах, прокатных станах и др.,— помогая электродвигателю во время удара. В настоящее время разрабатываются проекты транспортных машин, в которых маховик — механический аккумулятор — должен использоваться как экологически чистый и автономный источник энергии.

Выше было изложено решение задачи динамического синтеза, состоящей в определении момента инерции маховика $J_{мх}$, обеспечивающего требуемое условие движения, заданное коэффициентом неравномерности [δ]. Теперь решим обратную задачу — задачу динамического анализа. При установившемся режиме известны все характеристики механизма, в том числе и $J_{мх}$, требуется определить

закон движения, а затем и фактическое значение δ. Решение этой задачи также основано на применении диаграммы $T_{\mathrm{I}}(\varphi)$, которая строится по методу Мерцалова (рис. 5.22).

Проведем через начальную точку O'' кривой $T_{\mathrm{I}}(\varphi_{\mathrm{I}})$ ось (показана на рис. 5.22, *г* штрихами). Относительно этой новой оси кривая изобразит изменение кинетической энергии ΔT_{I}, которое выражается так:

$$\Delta T_{\mathrm{I}} = T_{\mathrm{I}} - T_{\mathrm{I}\text{нач}} = \frac{J_{\mathrm{I}}\omega^2}{2} - \frac{J_{\mathrm{I}}\omega^2_{\text{нач}}}{2} = J_{\mathrm{I}}\frac{\omega+\omega_{\text{нач}}}{2}(\omega-\omega_{\text{нач}}).$$

Так как неравномерность вращения начального звена заведомо мала, то можно приближенно принять $(\omega+\omega_{\text{нач}})/2 \approx \omega_{\text{ср}}$. Тогда, обозначив $\omega-\omega_{\text{нач}}=\Delta\omega$, получим

$$\Delta T_{\mathrm{I}} \approx J_{\mathrm{I}}\omega_{\text{ср}}\Delta\omega.$$

Но $J_{\mathrm{I}}\omega_{\text{ср}}=\text{const}$. Следовательно, при установившемся движении с малым значением коэффициента неравномерности δ изменение кинетической энергии ΔT_{I} приблизительно пропорционально изменению $\Delta\omega$ угловой скорости начального звена. Поэтому кривая на рис. 5.22, *г* одновременно изображает как $\Delta T_{\mathrm{I}}(\varphi)$, так и $\Delta\omega(\varphi)$, но в разных масштабах; соотношение между масштабами таково: $\mu_\omega = \mu_{T\mathrm{I}} J_{\mathrm{I}}\omega_{\text{ср}}$. График $\Delta\omega(\varphi)$ изображен на рис. 5.23.

Коэффициент неравномерности δ определяют по формуле

$$\delta = \frac{\omega_{\max}-\omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{\Delta\omega_{\text{яб}}}{\omega_{\text{ср}}}.$$

Угловое ускорение ε начального звена при установившемся движении подсчитывают по уравнению (5.33), в котором $J_\Sigma = J_{\mathrm{I}} + J_{\mathrm{II}}$. Значения M_Σ и J_{II} берут с соответствующих диаграмм (рис. 5.22, *а*, *в*); $\omega \approx \omega_{\text{ср}}$. Производную $\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi} = \frac{dJ_{\mathrm{II}}}{d\varphi}$ определяют графическим или численным дифференцированием функции $J_{\mathrm{II}}(\varphi)$ (поскольку $J_{\mathrm{I}}=\text{const}$) так, как указано в § 5.5. В величинах M_Σ и $\frac{dJ_{\mathrm{II}}}{d\varphi}$ нужно учитывать знак.

Угловое ускорение начального звена можно также выразить следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\omega.$$

Тогда ε определяют по диаграмме $\omega(\varphi)$ (рис. 5.23), применяя графическое или численное дифференцирование.

§ 5.11. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СКОРОСТИ НА ДЕЙСТВУЮЩИЕ СИЛЫ

Для динамического анализа и синтеза, сделанного в § 5.10 по методу Мерцалова, характерен неучет влияния скорости на действующие силы и моменты. Так, в примере проектирования маховика для ДВС (см. § 5.10) момент сопротивления электрогенератора был задан в виде характеристики $M_{рм}(\varphi)$ (см. рис. 5.4, *б*), а не характеристики $M_{рм}(\omega)$ (см. рис. 5.2). Такой же неучет влияния скорости свойствен и некоторым другим методам динамического синтеза (например, методам Артоболевского, Виттенбауэра [1, 2]).

Пренебрежение влиянием скорости на силы и моменты допустимо по той причине, что скорость начального звена вследствие малой неравномерности его вращения отклоняется от своего среднего значения в большинстве случаев не более чем на $\pm 2\%$ (см. § 5.9). Поэтому изменения сил и моментов, приложенных к начальному звену и зависящих от скорости, также будут небольшими и ими можно пренебречь.

Однако существуют машины, в которых влияние скорости на силы и моменты выражено очень резко. К ним относятся, например, асинхронные и шунтовые двигатели, получившие наиболее широкое распространение в промышленном электроприводе. Механические характеристики этих машин — в их рабочей части — представляют собой практически прямую линию, расположенную почти вертикально (например, рис. 5.1, 5.5, *б*). Это значит, что даже небольшие колебания угловой скорости вызывают заметные изменения движущего момента. Поэтому следует ожидать, что *резко выраженная* зависимость момента от скорости должна оказать свое влияние на результаты динамического анализа и синтеза.

Рассмотрим машинную установку, работающую в установившемся режиме и состоящую из асинхронного электродвигателя (*ДВ*), передачи (*П*) и рабочей машины (*РМ*) (рис. 5.24). Пусть механизм рабочей машины будет многозвенным рычажным. Примем ее вал за начальное звено и сделаем приведение сил и масс. Характеристики электродвигателя и рабочей машины, полученные после приведения, показаны на рис. 5.25, *а*, *б*.

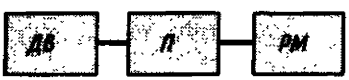


Рис. 5.24

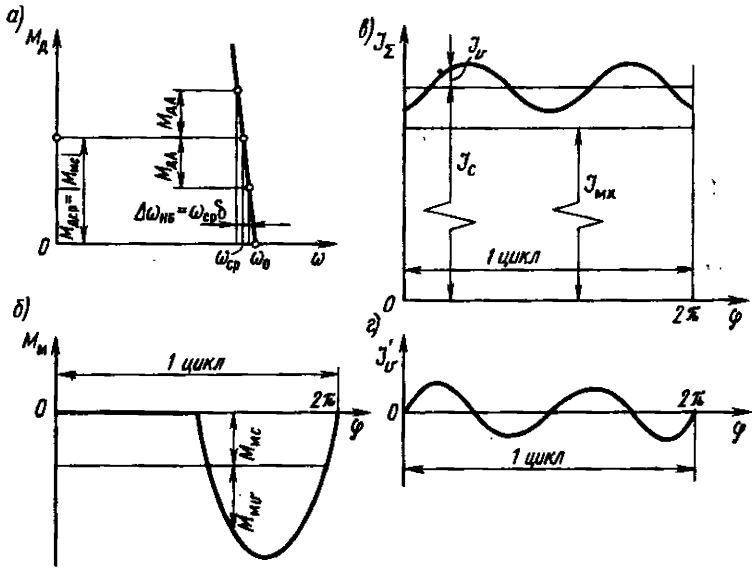


Рис. 5.25

Рабочую часть характеристики двигателя аппроксимируем прямой

$$M_д = A - B\omega. \tag{5.58}$$

Из (5.58) следует, что увеличение скорости ω вызывает уменьшение движущего момента $M_д$ и, наоборот, уменьшение ω вызывает увеличение $M_д$. В § 5.1 такое свойство двигателя было названо саморегулированием. Согласно уравнению (5.58), саморегулирование тем сильнее выражено, чем больше коэффициент B. Отметим также, что момент электродвигателя $M_д = \mathrm{invar}(\varphi)$ (см. § 5.1).

Момент сопротивления обозначим $M_м$; у многих технологических машин он существенно зависит от угла φ (рис. 5.25, *б*), но мало зависит от ω. Поэтому примем $M_м = \mathrm{invar}(\omega)$. Представим момент $M_м$ как сумму двух слагаемых: постоянного (constante) $M_{мс}$ и переменного (variable) $M_{мv}$:

$$M_м = M_{мс} + M_{мv}. \tag{5.59}$$

Слагаемое $M_{мс}$ есть среднее за цикл значение момента $M_м$ рабочей

машины: $M_{Mc}=M_{ср}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} M_M\,d\varphi=\text{const}$. Переменное слагаемое есть функция только обобщенной координаты φ: $M_{Mv}=M_{Mv}(\varphi)$; при этом $\int\limits_0^{2\pi} M_{Mv}\,d\varphi=0$.

Суммарный приведенный момент инерции всей машинной установки также представим как сумму двух слагаемых (рис. 5.25, *в*):

$$J_\Sigma=J_c+J_v, \tag{5.60}$$

где $J_c=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} J_\Sigma\,d\varphi=\text{const}$.

Слагаемое J_c как величина, заведомо очень большая, показано на рис. 5.25, *в* с обрывом. В его состав входит момент инерции маховика J_{Mx}. Переменное слагаемое $J_v=J_v(\varphi)$*. Для уравнения движения понадобится производная $dJ_\Sigma/d\varphi$. Из уравнения (5.60) следует, что $dJ_\Sigma/d\varphi=dJ_v/d\varphi$. График $dJ_v/d\varphi=J'_v$ в функции от обобщенной координаты φ представлен на рис. 5.25, *г*. Так как $J_v=J_v(\varphi)$ есть функция периодическая, то $\int\limits_0^{2\pi} J'_v\,d\varphi=0$.

Напишем уравнение движения машины в дифференциальной форме [см. уравнение (5.31)]:

$$J_\Sigma\frac{d\omega}{dt}+\frac{1}{2}\frac{dJ_\Sigma}{d\varphi}\omega^2=M_Д+M_M.$$

С учетом уравнений (5.58) — (5.60) после несложных преобразований получим

$$J_c\dot{\omega}+B\omega=(A+M_{Mc})+\left[M_{Mv}+\left(-J_v\dot{\omega}-\frac{1}{2}J'_v\omega^2\right)\right]. \tag{5.61}$$

Двучлен $A+M_{Mc}=L_c$ есть величина постоянная. Многочлен $M_{Mv}+\left(-J_v\dot{\omega}-\frac{1}{2}J'_v\omega^2\right)=L_v$ периодически и явно зависит от φ, т. е. $L_v=L_v(\varphi)$. Посредством многочлена $L_v(\varphi)$ математически выража-

*Следует обратить внимание, что разложение J_Σ на два слагаемых в уравнении (5.60) сделано несколько иначе, чем в уравнении (5.52), что продиктовано математическими соображениями.

ются два воздействия, оказываемые на закон движения начального звена, т. е. вала рабочей машины; это, во-первых, периодические изменения ее момента сопротивления — слагаемое $M_{\text{мv}}$; во-вторых, колебательное движение тех звеньев ее механизма (ползунов, коромысел, кулис и т. п.), которые связаны с начальным звеном переменным передаточным отношением,— слагаемое $\left(-J_v\dot{\omega}-\frac{1}{2}J'_v\omega^2\right)$. Результатом этого двоякого воздействия являются внутрицикловые колебания угловой скорости ω вала рабочей машины. Поэтому назовем L_v вынуждающим моментом; он характеризует виброактивность рабочей машины.

Так как неравномерность вращения вала рабочей машины мала, то $\omega\approx\omega_{\text{ср}}$, а угловое ускорение $\varepsilon=\dot{\omega}$ есть величина малая. Поэтому, допуская небольшую ошибку, многочлен $L_v(\varphi)$ можно записать так: $L_v(\varphi)=M_{\text{мv}}-J'_c\omega_{\text{ср}}^2/2$. Укажем вместе с этим, что принять произведение $J_c\dot{\omega}\approx 0$ никак нельзя. Заметная величина $J_c\dot{\omega}$ при малом значении $\dot{\omega}$ объясняется следующим: чем с меньшим угловым ускорением $\varepsilon=\dot{\omega}$ должен вращаться вал рабочей машины (т. е. начальное звено), тем бóльшим должен быть момент инерции маховика $J_{\text{мх}}$, а стало быть, и J_c (см. § 5.10), поэтому произведение малой величины $\dot{\omega}$ на заведомо большую J_c отнюдь не мало́.

Разложим вынуждающий момент $L_v(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$L_v(\varphi)=L_{v_1}(\varphi)+L_{v_2}(2\varphi)+L_{v_3}(3\varphi)+\ldots\ . \tag{5.62}$$

В ряду удержим только 1-ю гармонику L_{v1}, поскольку обычно именно она бывает наиболее влиятельной. Тогда $L_v(\varphi)=L_{\text{A}1}\cos\varphi$. Так как при вращении с малой неравномерностью $\varphi\approx\omega_{\text{ср}}t$, то

$$L_v(\varphi)=L_{\text{A}1}\cos(\omega_{\text{ср}}t)=L_v(t).$$

Решим задачу динамического анализа, т. е. по известным характеристикам механизма определим закон его движения. Для этого подставим выражение $L_v(t)$ в уравнение (5.61):

$$J_c\dot{\omega}+B\omega=(A+M_{\text{мс}})+L_{\text{A}1}\cos(\omega_{\text{ср}}t). \tag{5.63}$$

Для установившегося режима решение уравнения (5.63) имеет вид

$$\omega=\omega_{\text{ср}}+\frac{L_{\text{A}1}}{\sqrt{(J_c\omega_{\text{ср}})^2+B^2}}\sin(\omega_{\text{ср}}t+\beta), \tag{5.64}$$

где

$$\omega_{ср}=(A+M_{мс})/B, \tag{5.65}$$

$$\operatorname{tg}\beta=B/(J_c\omega_{ср}). \tag{5.66}$$

Напомним, что $M_{мс}<0$. График колебаний угловой скорости вала рабочей машины относительно ее среднего уровня изображен на рис. 5.26, *а*.

Используя уравнения (5.49) и (5.64), определим коэффициент неравномерности δ вращения вала рабочей машины:

$$\delta=(\omega_{max}-\omega_{min})/\omega_{ср}=\frac{2L_{A1}}{\omega_{ср}\sqrt{(J_c\omega_{ср})^2+B^2}}. \tag{5.67}$$

Зная уравнение (5.64) $\omega=\omega(\varphi)$, составим выражение для движущего момента

$$M_д=A-B\omega=A-B\omega_{ср}-\frac{BL_{A1}}{\sqrt{(J_c\omega_{ср})^2+B^2}}\sin(\varphi+\beta). \tag{5.68}$$

Таким образом, движущий момент в течение цикла будет изменяться по гармоническому закону, колеблясь около своего среднего значения $M_{дср}=A-B\omega_{ср}$. Используя (5.65), заключаем, что это среднее значение равно абсолютному среднему значению $|M_{мс}|$ момента сопротивления, что и следовало ожидать, имея в виду установившийся режим движения. Амплитуда $M_{дA1}$ колебаний движущего момента выразится так:

$$M_{дA1}=\frac{BL_{A1}}{\sqrt{(J_c\omega_{ср})^2+B^2}}. \tag{5.69}$$

Результаты, представленные уравнениями (5.64) и (5.68), можно уточнить, если про-

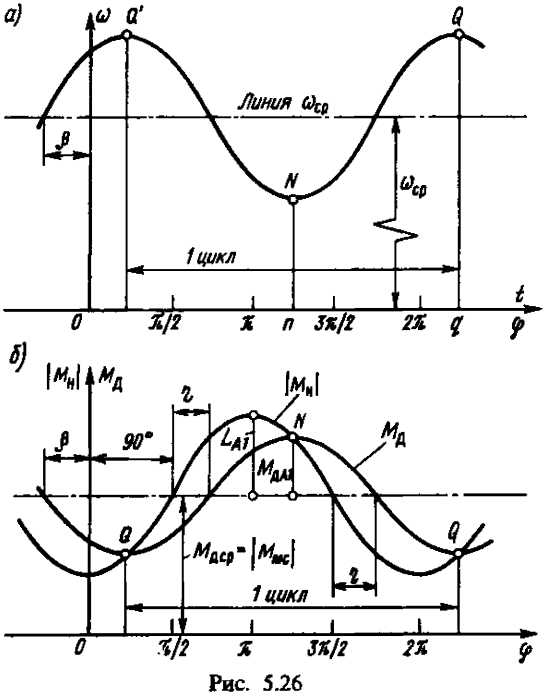


Рис. 5.26

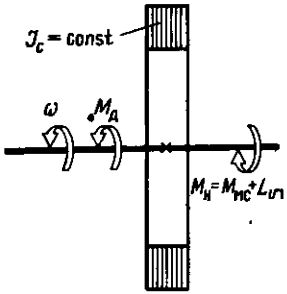


Рис. 5.27

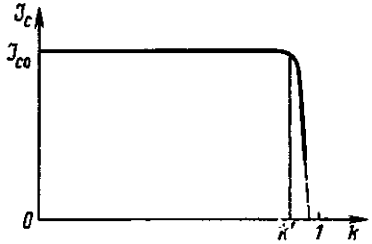


Рис. 5.28

делать аналогичные действия, взяв 2-ю гармонику L_{v2} ряда Фурье (5.62), затем 3-ю L_{v3} и т. д., и, используя принцип суперпозиции, все полученные решения алгебраически сложить. После сложения функции $\omega(\varphi)$ и $M_д(\varphi)$ не получатся уже гармоническими. Они будут отражать особенности механизма рабочей машины и ее механической характеристики. При использовании ЭВМ применение принципа суперпозиции не составит труда.

Рассмотрим динамику вращательного движения вала рабочей машины для случая $L_v \approx L_{v1} = L_{A1}\cos\varphi$. Уравнение (5.63) запишем в следующем виде:

$$J_c\dot{\omega} = M_д + (M_{мс} + L_{v1}).$$

Двучлен $M_{мс} + L_{v1}$ содержит момент сопротивления $M_м$ рабочей машины; назовем этот двучлен нагрузочным моментом $M_н = M_н(\varphi)$, который противодействует движущему моменту $M_д$. Тогда

$$J_c\dot{\omega} = M_д + M_н. \qquad (5.70)$$

Рис. 5.27 является иллюстрацией уравнения (5.70).

Изобразим функции $M_д(\varphi)$ и $|M_н|(\varphi)$ графически (рис. 5.26, *б*). Момент $M_д$ запаздывает по отношению к моменту $|M_н|(\varphi)$ на фазовый угол $\eta = 90° - \beta$. Имея в виду уравнение (5.66), получим

$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{ctg}\beta = J_c\omega_{ср}/B. \qquad (5.71)$$

Из рис. 5.26 видно, что когда $|M_н| > M_д$, т. е. когда сопротивление больше движущего воздействия, угловая скорость ω уменьшается (участок $Q'N$). Поскольку момент $M_д$ зависит от угловой скорости ω, ее уменьшение вызывает увеличение $M_д$ (см. рис. 5.25, *а*, 5.26, *б*). Обратная картина происходит на участке NQ. Таким образом,

двигатель, обладающий саморегулированием, отслеживает всякое изменение нагрузки и стремится приблизить текущее значение $M_д$ к текущему значению $|M_н|$.

Нетрудно заметить, что площадка, расположенная между точками N и Q (рис. 5.26, *б*) изображает избыточную работу движущего момента, которая воплощается в наибольший перепад $(\Delta T_c)_{нб}=\frac{1}{2}J_c\omega_{max}^2-\frac{1}{2}J_c\omega_{min}^2$ кинетической энергии, заключенной в маховой массе J_c.

Из формул (5.69) и (5.71) следует, что чем больше коэффициент B, тем больше амплитуда $M_{дA1}$ и тем меньше угол η, т. е. тем ближе располагается кривая $M_д(\varphi)$ к кривой $|M_н(\varphi)|$. Такой же вывод будет справедлив и для периодического процесса, вынуждаемого 2-й, 3-й и более высокими гармониками разложения в ряд Фурье [см. уравнение (5.62)]. Но чем больше коэффициент B [из уравнения (5.58)], т. е. чем ближе механическая характеристика двигателя к вертикали (см. рис. 5.25, *а*), тем сильнее выражено саморегулирование двигателя. Значит, чем *резче* выражено саморегулирование, тем ближе друг к другу (в любом положении механизма) значения моментов $M_д$ и $|M_н|$, т. е. *тем меньше* тот наибольший перепад кинетической энергии $(\Delta T_c)_{нб}$, который должна воспринять маховая масса J_c.

Сделав этот важный вывод, перейдем к решению задачи динамического синтеза, т. е. к определению момента инерции J_c, обеспечивающего заданный коэффициент неравномерности $[\delta]$. Для этого из уравнения (5.67) определим искомую величину J_c:

$$J_c=\frac{2L_A}{[\delta]\omega_{ср}^2}\sqrt{1-\left([\delta]\frac{B\omega_{ср}}{2L_A}\right)^2}. \qquad (5.72)$$

Напомним, что уравнение (5.72) составлено для случая, когда вынуждающий момент $L_v(\varphi)=L_{A1}\cos\varphi$.

Если расчет маховика ведется классическими методами Мерцалова, Виттенбауэра, Артоболевского, т. е. не учитывается влияние скорости на $M_д$, то $B=0$ [см. уравнение (5.58)]. Тогда из уравнения (5.72) получим $J_c=J_{c0}=2L_{A1}/([\delta]\omega_{ср}^2)$, где $2L_{A1}=(\Delta T_c)_{нб}$ — тот наибольший перепад кинетической энергии, который получается при $B=0$ и вынуждающем моменте $L_v(\varphi)=L_{A1}\cos\varphi$.

Преобразуем подкоренное выражение в уравнении (5.72). Для этого введем коэффициент саморегулирования $k=\omega_{ср}/\omega_0$ (см. рис. 5.25, *а*). Если характеристика $M_д(\omega)$ — горизонталь, т. е. $M_д$ не

зависит от скорости, то $k=0$; если $M_д(\omega)$ — вертикаль, то $k=1$. Таким образом, $0 \leqslant k < 1$, и чем сильнее выражено саморегулирование, тем больше k.

Из рис. 5.25, *а* следует, что $B\omega_{ср} = \frac{k}{1-k} M_{дср}$. Подставив $B\omega_{ср}$ под корень уравнения (5.72), получим

$$J_c = J_{c0} \sqrt{1 - \frac{[\delta]^2}{\gamma^2} \left(\frac{k}{1-k}\right)^2} = J_{c0}\alpha, \qquad (5.73)$$

где $\gamma = 2L_{A1}/|M_{мс}|$ — коэффициент, показывающий неравномерность вынуждающего момента $L_{v1}(\varphi)$, а α — поправочный коэффициент.

На рис. 5.28 по уравнению (5.73) изображен график необходимого момента инерции $J_c(k)$ при заданных L_{A1}, γ, $\omega_{ср}$, $[\delta]$. Если момент $M_д$ не зависит от скорости ($k=0$), то $J_c = J_{c0}$. Если момент $M_д$ есть функция скорости, т. е. $k \neq 0$, но $0 < k < k'$ (рис. 5.28), то график $J_c(k)$ протекает почти горизонтально, т. е. $J_c \approx J_{c0}$. Умеренное саморегулирование *практически не влияет* на необходимую величину J_c. Это значит, что для машин, у которых саморегулирование выражено не резко ($k < k'$), т. е. характеристика $M(\omega)$ далека от вертикали (рис. 5.2, 5.5, *в*) (а таких машин очень много), маховик можно проектировать, используя классические методы.

Если же саморегулирование выражено резко ($k > k'$), то в протекании кривой $J_c(k)$ наступает крутой спад (рис. 5.28). При $[\delta] = 1/20$, $\gamma = 2$ (пример, типичный для многих рабочих машин) спад начинается близ точки с абсциссой $k' = 0{,}9$, для которой $J_c = 0{,}974 J_{c0}$. Если $k > k'$, то даже небольшое обострение саморегулирования (т. е. небольшое увеличение коэффициента k) приводит к резкому снижению необходимой величины J_c, т. е. к уменьшению проектируемого маховика. Такой результат имеет большое практическое значение: если привод рабочих машин осуществляется от асинхронных или шунтовых электродвигателей, характеристика которых близка к вертикали (рис. 5.1, 5.5, *б*) и у которых, следовательно, $k > 0{,}9$, то необходимый момент инерции явно меньше J_{c0}. Значит, в указанных случаях классические методы динамического синтеза дают завышенный результат. Этим и объясняется тот непонятный, на первый взгляд, факт, что валы различных станков, механических пил, прессов и т. п. рабочих машин, приводимых от асинхронных двигателей и имеющих сравнительно небольшие маховики, вращаются тем не менее с небольшой неравномерностью. Расчет с учетом влияния *резко выраженного* саморегулирования (когда $k > k'$) позво-

ляет сознательно создавать маховики *с небольшим* моментом инерции, а следовательно, компактные и с меньшей металлоемкостью.

Выше [см. уравнение (5.72)] было рассмотрено влияние саморегулирования на значение J_c в случае гармонического нагружения $L_{vi}(\varphi) = L_{Ai}\cos\varphi$. Можно показать, что и при других, более сложных видах нагружения характер влияния саморегулирования остается таким же, как он изображен на рис. 5.28.

Величина J_c, подсчитанная по уравнению (5.72), есть постоянная составляющая суммарного момента инерции, приведенного к валу рабочей машины. Определив J_c и зная приведенные моменты инерции звеньев двигателя, передачи и рабочей машины, находим $J_{мх}$, т. е. ту часть J_c, которая приходится на маховик (рис. 5.25, *в*).

В рассматриваемом примере (см. рис. 5.24) источником виброактивности является рабочая машина (*РМ*), а не двигатель (*ДВ*). Поэтому маховик целесообразно располагать именно на валу рабочей машины, т. е. на валу, *прилегающем к источнику виброактивности*, а не на валу, удаленном от него, т. е. не на валу электродвигателя. Подробное исследование этого явления сделано М. З. Коловским [15].

ГЛАВА 6
СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМОВ

Во время движения механизма в его кинематических парах действуют силы, являющиеся силами взаимодействия между звеньями. Напомним (см. § 5.1), что эти силы относятся к внутренним силам по отношению к механизму в целом. Нагруженность кинематических пар силами взаимодействия является важной динамической характеристикой механизма. Знание сил в кинематических парах необходимо для расчета звеньев механизма на прочность, жесткость, вибростойкость, износоустойчивость, для расчетов подшипников на долговечность и для проведения других подобных расчетов, выполняемых при проектировании механизма. Определение внутренних сил, а также — в ряде задач — сил и пар сил, приложенных к механизму извне, составляет содержание его силового расчета. При этом надо подчеркнуть, что в настоящей главе влияние трения в кинематических парах на искомые силы рассматриваться не будет.

§ 6.1. ОБЩАЯ МЕТОДИКА СИЛОВОГО РАСЧЕТА

Изложение методов силового расчета в данной книге будет сделано только для *плоских* механизмов. При этом примем, что механизм имеет *плоскость симметрии*, которая параллельна плоскости движения и в которой действуют *все* приложенные силы. Указанному условию отвечает очень большое число механизмов энергетических, технологических, транспортных машин и различных приборов.

Силовой расчет следует выполнять с учетом *ускоренного* движе-

ния звеньев, так как их ускорения в современных быстроходных машинах весьма значительны. Неучет ускоренного движения звеньев вызовет недооценку нагружающих сил, что может привести к ошибкам в дальнейших инженерных расчетах.

Учет ускоренного движения звеньев выполним методом кинетостатики, *условно* приложив к каждому подвижному звену механизма главный вектор $\bar{\Phi}_i$ и главный момент $M_{\Phi i}$ сил инерции. Тогда для каждого звена можно записать три уравнения кинетостатики:

$$\sum_i F_x + \Phi_{ix} = 0; \tag{6.1}$$

$$\sum_i F_y + \Phi_{iy} = 0; \tag{6.2}$$

$$\sum_i M_O(\bar{F}) + \sum_i M + M_O(\bar{\Phi}_i) + M_{\Phi i} = 0. \tag{6.3}$$

Два алгебраических уравнения (6.1) и (6.2) могут быть заменены одним эквивалентным векторным уравнением сил:

$$\sum_i \bar{F} + \bar{\Phi}_i = 0.$$

Главный вектор $\bar{\Phi}_i$ и главный момент $M_{\Phi i}$ сил инерции звена i определяются по уравнениям

$$\bar{\Phi}_i = -m_i \bar{a}_{Si}; \; M_{\Phi i} = -J_{iS}\varepsilon_i. \tag{6.4}$$

Уравнение $M_{\Phi i} = -J_{iS}\varepsilon_i$ предполагает, что главный вектор сил инерции $\bar{\Phi}_i$ приложен к центру масс S_i.

Следует подчеркнуть, что никакой силы $\bar{\Phi}_i$ и никакой пары сил $M_{\Phi i}$ к звену i в действительности не приложено. Главный вектор $\bar{\Phi}_i$ и главный момент $M_{\Phi i}$ сил инерции *не имеют никакого физического содержания* и в расчетных уравнениях (6.1) — (6.3) выполняют роль не более чем чисто математических величин, посредством которых учитывается влияние ускоренного движения звеньев.

Силы в кинематических парах, являющиеся искомыми, определяют из уравнений (6.1) — (6.3), в которых они содержатся в составе сумм $\sum_i F_x$, $\sum_i F_y$, $\sum_i M_O(\bar{F})$. Поскольку значения Φ_{ix}, Φ_{iy}, $M_{\Phi i}$ зависят от ускорений, искомые силы также зависят от ускорений. Следовательно, для проведения силового расчета надо знать закон движения механизма.

Рассмотрим действие сил в кинематических парах, считая, что влияние трения мало́ и им можно пренебречь.

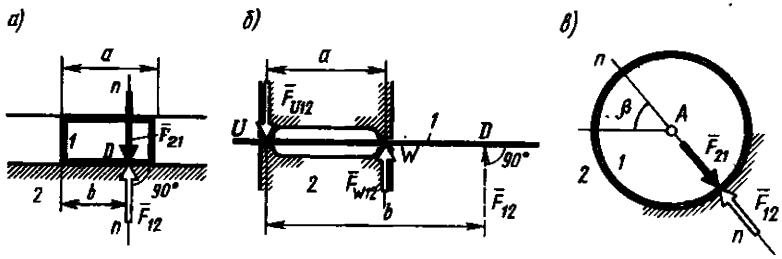


Рис. 6.1

Сила взаимодействия звеньев, образующих низшую пару, представляет собой равнодействующую элементарных сил, распределенных по поверхности соприкосновения звеньев. Как известно из теоретической механики, сила взаимодействия двух соприкасающихся тел *при отсутствии трения* направлена *по общей нормали* к их поверхности.

В поступательной паре сила $\bar{F}_{12}$, приложенная к звену *1* от звена *2*, направлена по нормали *n — n* (рис. 6.1, *а*). Модуль силы $\bar{F}_{21}$ и расстояние *b* неизвестны и должны быть определены в процессе силового расчета. Сказанное полностью относится и к силе $\bar{F}_{21}$, приложенной к звену *2* от звена *1*, так как силы взаимодействия $\bar{F}_{12}$ и $\bar{F}_{21}$ связаны третьим законом Ньютона: $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$.

При выполнении силового расчета расстояние *b* может получиться больше длины *a* (рис. 6.1, *б*). Это означает, что к звену *1* приложена уже не одна, а две реакции: $\bar{F}_{U12}$ и $\bar{F}_{W12}$ — направленные навстречу друг другу и неизвестные по модулю. Именно они и представляют реальное силовое воздействие на стержень *1* от звена *2*, а вектор $\bar{F}_{12}$, полученный формально из уравнений (показан на рис. 6.1, *б* штрихами), является лишь их равнодействующей.

Таким образом, поступательная пара в любом случае (рис. 6.1, *а*, *б*) вносит в расчетные уравнения две неизвестные величины.

Во вращательной паре сила $\bar{F}_{12}$ направлена нормально к цилиндрической поверхности соприкосновения обоих звеньев, т. е. проходит *через центр шарнира A* (рис. 6.1, *в*). Положение центра шарнира всегда известно, но модуль силы $\bar{F}_{12}$ и угол β неизвестны. И эта низшая пара приносит в расчет две неизвестные.

Следовательно, от каждой силы, действующей в любой низшей кинематической паре, в расчетных уравнениях (6.1) — (6.3) появляются *две неизвестные* величины.

Пусть вращательная пара конструктивно выполнена в виде двух подшипников: *O'* и *O''* (рис. 6.2). Сила $\bar{F}_{12}$, полученная из расчета, расположена (во взятом примере) в плоскости *BB* зубчатой передачи и является равнодействующей реакций $\bar{F}'_{12}$ и $\bar{F}''_{12}$. Эти реакции и представляют собой реальное силовое нагружение под-

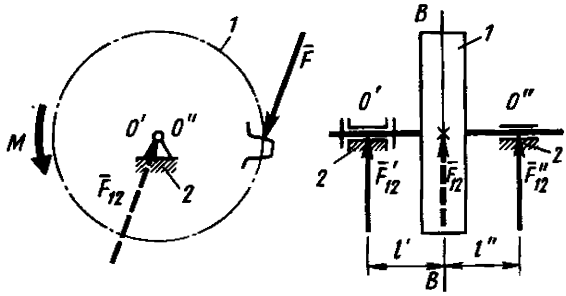


Рис. 6.2

шипников. Именно они нужны для расчета подшипников на долговечность, а вала — на прочность.

В высшей паре контакт звеньев может быть либо точечным, либо линейным. Силовое взаимодействие звеньев при точечном контакте выражается в виде сосредоточенной силы, при линейном — в виде нагрузки, распределенной по линии контакта. В последнем случае под силой взаимодействия понимают равнодействующую элементарных распределенных сил.

Сила $\bar{F}_{12}$ в высшей паре направлена *по общей нормали* $n - n$ (рис. 6.3). Следовательно, для силы $\bar{F}_{12}$ известны как точка приложения (точка K), так и линия действия и неизвестным остается только модуль. Таким образом, в расчетных уравнениях (6.1) — (6.3) члены, образованные силами взаимодействия в высших парах, содержат *по одному неизвестному*.

Рассмотрим статическую определенность любого плоского механизма без избыточных связей ($q=0$), в состав которого входят n подвижных звеньев, $p_н$ низших и $p_в$ высших кинематических пар. Так как для каждого звена механизма можно записать три расчетных уравнения (6.1) — (6.3), то общее число уравнений для всех его n подвижных звеньев составит $N_у=3n$.

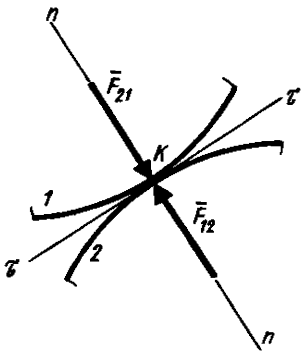


Рис. 6.3

Выше было показано, что каждая низшая пара вносит в расчетные уравнения две неизвестные величины, а каждая высшая — одну. Поэтому все кинематические пары вносят $N_F=2p_н+p_в$ неизвестных. Эти неизвестные относятся к силам в кинематических парах, т. е. к внутренним силам. Конкретно N_F неизвестных представляют собой модули этих сил, линейные координаты точек их приложения, угловые координаты линий их действия.

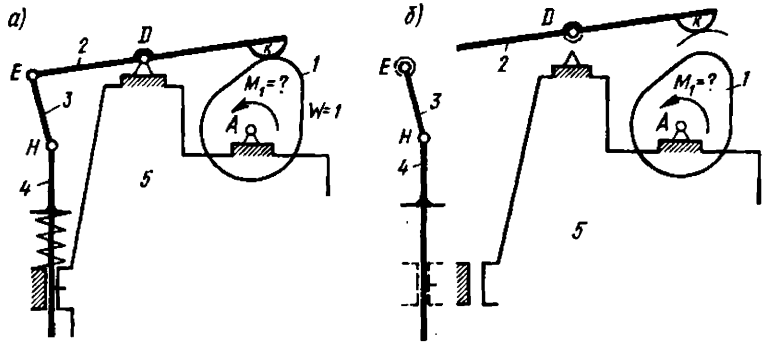


Рис. 6.4

Запишем для плоского механизма формулу Чебышева (см. § 3.3):

$$3n=(2p_н+p_в)+W_п.$$

Сопоставив с ней выражения для $N_у$ и N_F, получим $N_у=N_F+W_п$. Таким образом, число уравнений $N_у$ достаточно для определения всех N_F внутренних неизвестных. Отсюда следует принципиально важный вывод: *механизм без избыточных связей статически определим.*

Оставшиеся $W_п$ уравнений используются для определения тех внешних силовых факторов, т. е. сил и пар сил, приложенных к механизму извне, которые не заданы и в силовом расчете являются искомыми*. Следовательно, число этих внешних неизвестных не должно превышать числа степеней свободы механизма. Если же все внешнее нагружение задано, то оставшиеся $W_п$ уравнений используются как контрольные.

Установим последовательность выполнения силового расчета. Пусть задан механизм (рис. 6.4, *а*) без избыточных связей, имеющий $W_п=1$. Допустим, что момент M_1 (пара сил), приложенный к кулачковому валу извне, не задан и является искомым. Остальными неизвестными будут внутренние силы в кинематических парах. Чтобы определить их, механизм надо расчленить.

Прежде всего надо выделить *двухзвенный механизм*, состоящий из подвижного звена и стойки. Подвижным звеном двухзвенного механизма должно быть обязательно то, к которому приложен искомый внешний силовой фактор (в рассматриваемом примере — кулачок *1*, нагруженный неизвестным внешним моментом M_1; рис.

*В ряде учебников неизвестные внешние силовые факторы называют уравновешивающими силами и уравновешивающими моментами.

6.4, *б*). Затем оставшуюся часть заданного механизма надо расчленить на *структурные группы* Ассура (см. гл. 3). В рассматриваемом механизме таких групп две: одна состоит из звена *2*, высшей пары *2/1* и вращательной пары *2/5*, другая — из звеньев *3* и *4*, вращательных пар *3/2* и *3/4* и поступательной пары *4/5*. Подчеркнем, что именно при таком расчленении заданного механизма в силовом нагружении каждой структурной группы неизвестными будут только силы в кинематических парах. Поэтому число неизвестных в группе составит $N_F = 2p_{н.г} + p_{в.г}$, а число расчетных уравнений для нее $N_у = 3n_г$.

В то же время, для структурной группы справедливо соотношение $3n_г = 2p_{н.г} + p_{в.г}$ (см. § 3.3). Сопоставляя его с выражениями, полученными для $N_у$ и N_F, заключаем, что $N_у = N_F$. Это значит, что структурная группа Ассура, сколь бы сложной она ни была, обладает замечательным свойством: она *статически определима*.

Если в механизме имеются избыточные связи, то те структурные группы, которые их содержат, являются статически неопределимыми. Вместе с ними статически неопределимым становится и весь механизм.

После того как силовой расчет всех структурных групп проделан, двухзвенный механизм *1*; *5* (рис. 6.4, *б*) получает статическую определимость. При этом необходимо совершенно четко отметить, что если его подвижное звено совершает вращательное движение, то вовсе не обязательно вращение принимать равномерным. Более того, если искусственно задавать вращение без углового ускорения, то решение уравнения моментов, составленного для подвижного звена двухзвенного механизма, во многих случаях может оказаться далеким от истинного даже при вращении с весьма малым коэффициентом неравномерности, а в иных случаях и попросту абсурдным.

На основании вышеизложенного можно сформулировать общую методику силового расчета: силовой расчет механизма без избыточных связей следует проводить по структурным группам, начиная от группы, наиболее удаленной от двухзвенного механизма, и заканчивая расчет самим двухзвенным механизмом. Таким образом, силовой расчет проводится в порядке, обратном кинематическому. Структурное расчленение надо проводить так, чтобы неизвестный внешний силовой фактор оказался приложенным к подвижному звену именно двухзвенного механизма. Добавим, что если все внешние силовые факторы, нагружающие заданный механизм, известны,

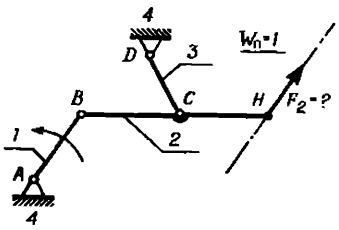


Рис. 6.5

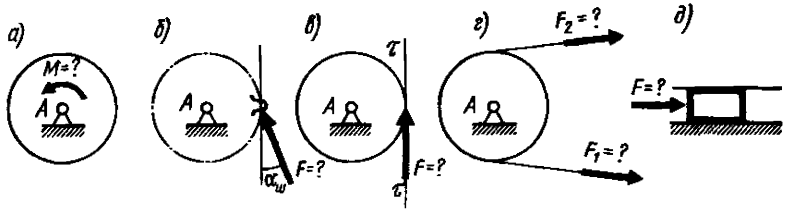


Рис. 6.6

то выбор двухзвенного механизма для структурного расчленения становится произвольным. Сформулированная общая методика верна также и для механизмов с $W_п > 1$ степенями свободы.

Здесь, однако, надо иметь в виду, что не всегда силовой расчет можно выполнить путем расчленения заданного механизма на двухзвенный механизм и группы Ассура. Рассмотрим, например, механизм, в котором внешняя сила $\bar{F}_2$ является искомой по модулю (рис. 6.5, линия действия силы $\bar{F}_2$ задана). Если попытаться выделить группу Ассура либо *2 — 3*, либо *1 — 2* и соответственно двухзвенный механизм, то в любом из этих случаев неизвестная по модулю внешняя сила $\bar{F}_2$ окажется приложенной к выделенной группе, а не к первичному механизму, что сделает группу статически неопределимой. Поэтому при заданных условиях, когда искомый внешний силовой фактор (сила $\bar{F}_2$) приложен к звену, *не связанному со стойкой*, нельзя выделять группу Ассура, а надо решать статически определимую трехзвенную систему *1 — 2 — 3*, а затем (если нужно) сделать силовой расчет стойки *4*.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим, что конкретно представляет собой при $W_п = 1$ неизвестный внешний силовой фактор, приложенный к подвижному звену двухзвенного механизма.

Если подвижное звено соединено с источником (или потребителем механической энергии — в зависимости от направления потока энергии) посредством муфты (рис. 6.6, *а*), то внешним силовым фактором является неизвестный момент *M*. Если же подвод (или отвод) энергии осуществляется через зубчатую или фрикционную передачу (рис. 6.6, *б*, *в*), то внешним силовым фактором будет неизвестная по модулю сила $\bar{F}$. Расположение линии действия силы $\bar{F}$ определяется либо геометрией зубчатой передачи (углом зацепления α_w), либо проходит через точку соприкосновения фрикционных катков касательно к их рабочим поверхностям. При ременной передаче (рис. 6.6, *г*) внешний силовой фактор представлен уже не одной, а двумя неизвестными по модулю силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, связанными между собой формулой Эйлера [1]. Поэтому внешний силовой фактор по-прежнему один раз неизвестен. Линии действия сил $\bar{F}_1$

и $\bar{F}_2$ определяются положением ведущей и ведомой ветвей ременной передачи. Если же подвижное звено двухзвенного механизма совершает прямолинейно поступательное движение (рис. 6.6, *д*), то внешним силовым фактором является неизвестная по модулю сила $\bar{F}$, действующая обычно вдоль направляющей поверхности. Таким образом, и здесь внешний силовой фактор один раз неизвестен.

§ 6.2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД СИЛОВОГО РАСЧЕТА МЕХАНИЗМА

Аналитический, или, иначе, координатный, метод рассмотрим на примере центрального кривошипно-ползунного механизма. Исходные данные: 1) кинематическая схема (рис. 6.7); 2) массы и моменты инерции всех звеньев и расположение на них центров масс; 3) закон движения механизма; 4) внешнее нагружение $\bar{F}_3$ и M_1. Зависимости $F_3(\varphi_1)$, $M_1(\varphi_1)$ и закон движения $\omega_1(\varphi_1)$, $\varepsilon_1(\varphi_1)$ принять заданными в табличной форме. Силами тяжести пренебречь, поскольку в механизмах современных машин они малы по сравнению с другими силами.

Определение сил в кинематических парах. Зададимся системой координат Axy (рис. 6.7). Методами кинематического анализа (см. гл. 4) для каждого значения обобщенной координаты φ_1 определим координаты центров масс x_{S2}, y_{S2}, x_{S3} и координаты центров шарниров x_B, y_B, x_C, а также проекции ускорений центров масс a_{S2x}, a_{S2y}, a_{S3x} и угловое ускорение ε_2. Обратим внимание, что все эти величины имеют знак, который обязательно надо учитывать в последующих расчетах.

Определим проекции главных векторов и главные моменты сил инерции, заметив, что $a_{S3y}=0$, $\varepsilon_3=0$ (рис. 6.7):

$$\Phi_{2x}=-m_2a_{S2x};\ \Phi_{2y}=-m_2a_{S2y};\ \Phi_{3x}=-m_3a_{S3x};\ \Phi_{3y}=0; \qquad (6.5)$$

$$M_{\Phi1}=-J_{1A}\varepsilon_1;\ M_{\Phi2}=-J_{2S}\varepsilon_2;\ M_{\Phi3}=0. \qquad (6.6)$$

Главный вектор сил инерции звена *1* $\bar{\Phi}_1=-m_1a_{S1}=0$, так как $a_{S1}=0$, поскольку центр масс S_1 благодаря противовесу находится на оси вращения A (рис. 6.7). Отметим, что величины главных векторов и главных моментов сил инерции существенно зависят от квадрата угловой скорости ω_1^2 начального звена *1*; это имеет особое значение для быстроходных механизмов.

Для каждого звена механизма составим два уравнения проекций на оси x и y и одно уравнение моментов. Модуль искомой силы $\bar{F}$ в кинематической паре найдем через ее проекции: $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$, а угол наклона φ_F вектора $\bar{F}$ к оси x — по очевидным формулам $\cos\varphi_F=F_x/F$, $\sin\varphi_F=F_y/F$. Момент относительно точки O силы $\bar{F}$,

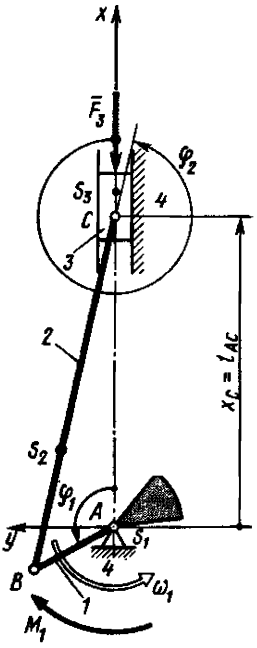


Рис. 6.7

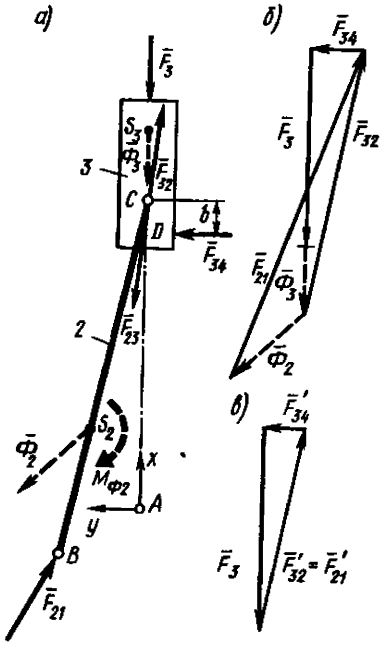


Рис. 6.8

приложенной в точке K, определим из уравнения $M_O(\bar{F}) = F_y(x_K - x_O) - F_x(y_K - y_O)$. Напомним также, что, поскольку силовой расчет выполняется методом кинетостатики, в число реальных внешних силовых факторов *чисто условно* вводятся главные векторы $\bar{\Phi}_i$ и главные моменты $M_{\Phi i}$ сил инерции подвижных звеньев механизма. Поэтому все уравнения проекций и уравнения моментов формально математически сводятся к нулю, хотя подвижные звенья механизма не находятся в равновесии, а движутся ускоренно.

Расчленим механизм на структурную группу Ассура *3 — 2* и двухзвенный механизм *1*; *4*. Сделаем силовой расчет группы *3 — 2*. К ее звеньям приложены известные внешние силы $\bar{F}_3$, $\bar{\omega}_3$, $\bar{\Phi}_2$ и момент $M_{\Phi 2}$ (рис. 6.8, *а*). Неизвестными являются модуль и направление силы $\bar{F}_{21}$, модуль силы $\bar{F}_{34}$ и ее плечо b, модуль и направление сил взаимодействия в шарнире C, связанных соотношением $\bar{F}_{23} = -\bar{F}_{32}$.

Сумма проекций на ось x сил, приложенных к звену *3*, равна нулю: $\sum\limits_3 F_x = 0$. Следовательно,

$$F_{3x}+\Phi_{3x}+F_{32x}=0. \qquad (6.7)$$

Искомой является проекция F_{32x}. Знаки в этом уравнении, как и во всех последующих, имеют алгебраический смысл. Это значит, что числовые значения проекций сил подставляются в уравнения проекций и моментов со строгим соблюдением их знаков. Так, проекция F_{3x} имеет знак минус, поскольку сила $\bar{F}_3$ направлена вниз (рис. 6.8, *а*). Модуль и направление силы $\bar{F}_3$ надо взять из исходных данных. Величина и знак проекции Φ_{3x} определяются из уравнения (6.5). Очевидно, что проекция $F_{34x}=0$ (рис. 6.8, *а*).

Сумма моментов относительно точки *B* всех сил, приложенных к звену *2*, равна нулю: $\sum\limits_{2} M_B=0$. Отсюда

$$F_{23y}(x_C-x_B)-F_{23x}(y_C-y_B)+\Phi_{2y}(x_{S2}-x_B)-\Phi_{2x}(y_{S2}-y_B)+M_{\Phi 2}=0. \qquad (6.8)$$

В уравнении (6.8) искомой является F_{23y}; величина и знак момента $M_{\Phi 2}$ определяются из уравнения (6.6), а $F_{23x}=-F_{32x}$. Теперь определим модуль силы $\bar{F}_{23}$, нагружающей шарнир *C*, и ее угловую координату φ_{F23} так, как было указано выше.

Сумма проекций на ось *x* для звена *2*: $\sum\limits_{2} F_x=0$, или

$$F_{23x}+\Phi_{2x}+F_{21x}=0, \qquad (6.9)$$

откуда определяем проекцию F_{21x}.

Сумма проекций на ось *y* для звена *2*: $\sum\limits_{2} F_y=0$, т. е.

$$F_{23y}+\Phi_{2y}+F_{21y}=0, \qquad (6.10)$$

где искомой является F_{21y}.

Затем подсчитаем модуль силы $\bar{F}_{21}$, нагружающей шарнир *B*, и ее угловую координату φ_{F21}.

Составим сумму проекций на ось *y* для звена *3*: $\sum\limits_{3} F_y=0$, обратив внимание, что $F_{3y}=0$ и $\Phi_{3y}=0$:

$$F_{32y}+F_{34y}=0. \qquad (6.11)$$

Отсюда найдем проекцию F_{34y}. Ее абсолютная величина покажет модуль, а знак — направление силы $\bar{F}_{34}$, приложенной к ползуну *3* от стойки *4*.

Осталось неиспользованным уравнение моментов $\sum_3 M_c = 0$. Его употребим для определения плеча b силы $\bar{F}_{34}$ (рис. 6.8, *а*):

$$F_{34y}(x_D - x_C) = 0, \qquad (6.12)$$

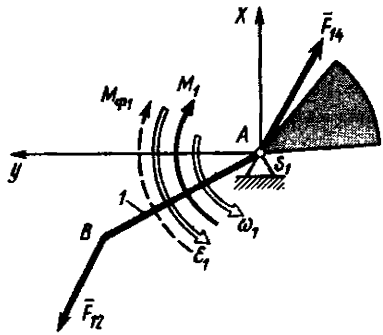


Рис. 6.9

откуда получим $b = x_C - x_D = 0$ и $x_D = x_C$.

Таким образом, для структурной группы *2* — *3* были использованы шесть уравнений (6.7) — (6.12), из которых были определены все неизвестные.

На рис. 6.8, *б* представлен план сил, приложенных к звеньям структурной группы. Этот план наглядно показывает, насколько важно учитывать влияние ускоренного движения звеньев. Если им пренебречь, т. е. положить силы инерции $\bar{\Phi}_2$ и $\bar{\Phi}_3$ равными нулю (рис. 6.8, *в*), то такой неучет приведет к заниженным значениям сил в кинематических парах (сил $\bar{F}_{21}$, $\bar{F}_{32}$, $\bar{F}_{34}$), что особенно проявит себя в механизмах быстроходных машин.

Перейдем к силовому расчету двухзвенного механизма, составленного из подвижного звена *1* и стойки *4* (рис. 6.9). К звену *1* приложены: ставшая известной силы $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$, момент M_1, направленный согласно заданию (рис. 6.7) по часовой стрелке, главный момент сил инерции $M_{\Phi 1}$ и неизвестная по модулю и направлению реакция $\bar{F}_{14}$ стойки. Напомним, что главный вектор сил инерции $\Phi_1 = 0$.

Поскольку $\Phi_1 = 0$, уравнения проекций сил, приложенных к звену *1*, т. е. $\sum_1 F_x = 0$, $\sum_1 F_y = 0$, приобретают такой вид:

$$F_{14x} + F_{12x} = 0; \qquad (6.13)$$

$$F_{14y} + F_{12y} = 0, \qquad (6.14)$$

откуда $F_{14x} = -F_{12x}$, $F_{14y} = -F_{12y}$.

Составим уравнение моментов для звена *1* относительно точки *A*:

$$M_A(\bar{F}_{12}) + M_1 + M_{\Phi 1} = 0. \qquad (6.15)$$

Момент $M_A(\bar{F}_{12})$ подставляется в уравнение с тем знаком, который он получает при подсчете по формуле $M_A(\bar{F}_{12})=\Phi_{12y}x_B-F_{12x}\cdot y_B$.

Уравнение (6.15) является контрольным, поскольку все три слагаемых в его левой части известны. Однако оно может быть и расчетным, когда момент M_1 неизвестен. Здесь надо заметить, что если нужно определить только внешний (уравновешивающий) момент M_1 и не нужно определять силы в кинематических парах, то момент M_1 можно найти и более коротким путем, не расчленяя механизм, а применив теорему Жуковского [1, 5].

При малой неравномерности вращения звена *1* его угловое ускорение ε_1 в начале расчета часто не определяют, поскольку оно весьма мало. Однако принять вследствие этого $M_{\Phi 1}=-\varepsilon_1 J_{1A}\approx 0$ никак нельзя. Неравенство момента $M_{\Phi 1}$ нулю вытекает из уравнения (6.15), поскольку моменты M_1 и $M_A(\bar{F}_{12})$ заведомо не равны и сильно отличаются друг от друга. Заметная величина $M_{\Phi 1}$ при очень малом значении ε_1 объясняется следующим: чем с меньшим угловым ускорением ε_1 должно вращаться звено *1*, тем бóльшим должен быть момент инерции J_{1A} этого звена (см. § 5.10); поэтому произведение весьма малой величины ε_1 на весьма большую J_{1A}, т. е. $|\varepsilon_1 J_{1A}|=|M_{\Phi 1}|$, отнюдь не малó. Момент $M_{\Phi 1}$ может иметь значительную величину, что весьма существенно для расчета главного вала машины (звена *1*) на прочность.

Определение силовых факторов, нагружающих корпус машины и ее основание. Рассмотрим стойку кривошипно-ползунного механизма. Конструктивно это корпус машины, который устанавливается на специальном основании. Если машина — автомобильный ДВС, то таким основанием будет рама автомобиля, если — стационарный компрессор или пресс, то — фундамент, на котором установлен компрессор или пресс и т. д.

К стойке *4* приложены следующие силы и моменты (рис. 6.10, *а*): ставшие известными воздействия звена *1* $\bar{F}_{41}=-\bar{F}_{14}$ и звена *3* $\bar{F}_{43}=-\bar{F}_{34}$, сила $\bar{F}_{4p}=-\bar{F}_3$, зависящая от рабочего процесса машины, и, наконец, реакция основания, представленная в виде двух силовых факторов, а именно: неизвестного по модулю и направлению главного вектора $\bar{F}_4$ и неизвестного главного момента M_4. Условимся определять величину главного момента M_4, полагая, что линия действия главного вектора $\bar{F}_4$ проходит через точку *A*. Напомним, что в перечислении сил, действующих на стойку, как и ранее, условно не включена ее сила тяжести.

Если силовой расчет выполняется для кривошипно-ползунного механизма поршневой машины (насоса, компрессора, детандера, ДВС и т. п.), то сила $\bar{F}_{4p}$ является силой давления рабочего тела (жидкости, газа), находящегося внутри цилиндра *Ц*, на его крышку

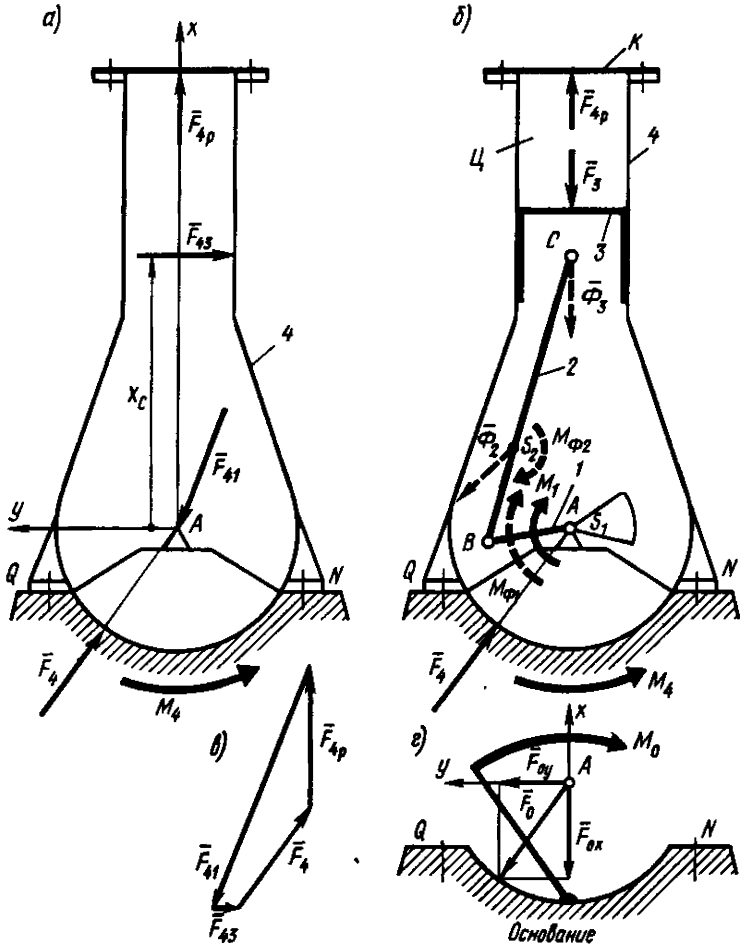


Рис. 6.10

K (рис. 6.10, *б*). Если кривошипно-ползунный механизм есть главный механизм пресса или станка, то силой $\bar{F}_{4p}$ является то воздействие, которое обрабатываемое изделие оказывает на стол пресса или станка.

Составим три уравнения равновесия стойки:

$$F_{41x}+F_{4px}+F_{4x}=0, \tag{6.16}$$

$$F_{41y}+F_{43y}+F_{4y}=0, \tag{6.17}$$

$$F_{43y}x_C+M_4=0. \tag{6.18}$$

Из уравнения (6.16) определим F_{4x}, из уравнения (6.17) — F_{4y}. Затем подсчитаем модуль вектора $\bar{F}_4$ и его угловую координату φ_{F4}. Из уравнения (6.18) найдем M_4.

Физический смысл уравнения (6.18) состоит в следующем. Сила $\bar{F}_{43}$ создает относительно точки A момент $M_A(\bar{F}_{43})$ (рис. 6.10, *а*), стремящийся опрокинуть корпус машины. Препятствует этому опрокидыванию только момент M_4, действующий от основания на корпус (т. е. на стойку), так как остальные силы, приложенные к стойке, момента относительно точки A не создают.

Опрокидывание испытывает корпус и компрессора, и ДВС, и электродвигателя, т. е. *любой машины*, независимо от того, какой рабочий процесс в ней протекает. Опрокидывание испытывает также *любой передаточный механизм*. Поэтому машину и передаточный механизм всегда надо надежно закреплять на их основании. Конструктивное исполнение этого закрепления и методика его расчета излагаются в курсе «Детали машин» и в специальных машиностроительных курсах.

На рис. 6.10, *б* показаны силы и моменты, только внешние для механизма в целом. Поэтому на рис. 6.10, *б* не показаны силы взаимодействия в кинематических парах, являющиеся для механизма в целом внутренними. Отметив это, составим иные выражения для F_{4x} F_{4y} и M_4.

Сложим уравнения (6.7), (6.9), (6.13), (6.16), охватывающие все четыре звена механизма. Проекции $F_{32x}=-F_{23x}$, $F_{21x}=-F_{12x}$, $F_{14x}=-F_{41x}$, $F_{34x}=-F_{43x}$ сил взаимодействия в кинематических парах в суммарное уравнение не войдут. В него войдут проекции только внешних сил, но, хотя силы $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_{4p}$ и внешние*, их проекции в него также не войдут, поскольку силы $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_{4p}$ равны и противоположно направлены (рис. 6.10, *б*). В результате суммарное уравнение примет вид $\Phi_{2x}+\Phi_{3x}+F_{4x}=0$, откуда

$$F_{4x}=-(\Phi_{2x}+\Phi_{3x}). \qquad (6.19)$$

Сложим уравнения (6.10), (6.11), (6.14), (6.17). В итоге получим

$$F_{4y}=-\Phi_{2y}. \qquad (6.20)$$

*Силы $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_{4p}$ — это воздействия рабочего тела (например, газа, жидкости в случае поршневой машины или обрабатываемого изделия, в случае машины технологической). Но рабочее тело не является звеном механизма и в его состав не входит, а потому для механизма силы $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_{4p}$ — это силы внешние (а не внутренние, как это может показаться).

Составим уравнение моментов относительно точки A для всех четырех звеньев (см. рис. 6.8, *а*, 6.9, 6.10, *а*), т. е. для механизма в целом. Заметим, что моменты сил взаимодействия $\bar{F}_{23}$ и $\bar{F}_{32}$ в шарнире C равны и противоположны друг другу (см. рис. 6.8, *а*), а поэтому в уравнение моментов не войдут. То же самое относится к моментам сил взаимодействия во всех остальных кинематических парах, т. е. сил, являющихся внутренними для механизма в целом. Следовательно, в уравнение войдут только моменты сил и пар сил, приложенных к механизму извне (рис. 6.10, *б*). Поэтому для механизма в целом оно примет вид

$$M_1+M_A(\bar{\Phi}_2)+M_{\Phi 2}+M_{\Phi 1}+M_4=0, \qquad (6.21)$$

откуда и определяем момент M_4.

Определим, какое давление на свое основание (фундамент) оказывает машина, механизмом которой является кривошипно-ползунный. Систему нагружения основания со стороны машины можно свести к главному вектору $\bar{F}_0=-\bar{F}_4$, линия действия которого проходит через точку A (ось вращения звена *1*, т. е. вала машины) и к главному моменту $M_0=-M_4$ (рис. 6.10, *г*).

Проекция главного вектора $\bar{F}_0$ на оси x и y:

$$F_{0x}=\Phi_{1x}+\Phi_{2x}+\Phi_{3x}=\Phi_{\Sigma x}; \qquad (6.22)$$

$$F_{0y}=\Phi_{1y}+\Phi_{2y}=\Phi_{\Sigma y}. \qquad (6.23)$$

Главный момент M_0 выразится так:

$$M_0=[M_{\Phi 1}+M_{\Phi 2}+M_A(\bar{\Phi}_1)+M_A(\bar{\Phi}_2)]+M_1=M_{\Phi\Sigma}+M_1. \qquad (6.24)$$

В уравнениях (6.22) — (6.24) буквами $\bar{\Phi}_\Sigma$ и $M_{\Phi\Sigma}$ обозначены общий главный вектор (через его проекции) и общий главный момент системы сил инерции всех подвижных звеньев механизма. Члены Φ_{1x}, Φ_{1y}, $M_A(\bar{\Phi}_1)$ входят в состав этих уравнений в том случае, когда центр масс звена *1* не находится на его оси вращения; слагаемые $\Phi_{3y}=0$, $M_A(\bar{\Phi}_3)=0$ (рис. 6.8, *а*), $M_{\Phi 3}=0$ [см. уравнение (6.6)].

Как видно из уравнений (6.22) и (6.23), главный вектор $\bar{F}_0$ вычисляется посредством сил инерции, а это указывает на то, что он есть результат ускоренного движения всех подвижных звеньев механизма, т. е. имеет динамическую природу. Отметим, что на основание машины передается также воздействие ее силы тяжести и в ряде случаев воздействия других активных сил (например, сил затяжки фундаментных болтов), которые в силовом расчете не рассматривались. Следовательно, в общем случае главный вектор $\bar{F}_0$ содержит две составляющие: во-первых, динамическую составляющую,

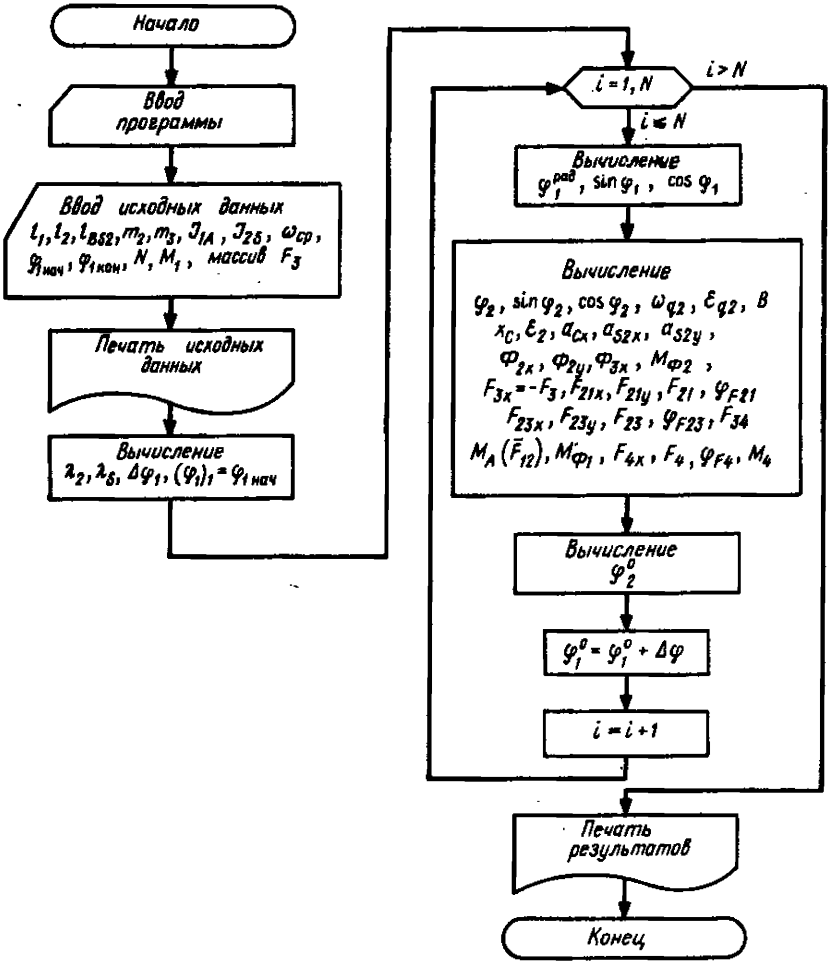


Рис. 6.11

вызванную *ускоренным движением* звеньев механизма, и, во-вторых, составляющую, вызванную действием *активных сил*.

Главный момент M_0 в общем случае складывается также из двух составляющих: во-первых, из динамической составляющей, являющейся результатом *ускоренного движения* звеньев [см., например, квадратные скобки в уравнении (6.24)], и, во-вторых, из составляющей, вызванной действием активных сил и моментов [например, момента M_1 в уравнении (6.24)].

Отметим, что силы, нагружающие основание, фактически приложены именно в тех местах, где корпус машины (т. е. стойка *4* механизма) закрепляется на основании (на рис. 6.10 — в местах Q и N).

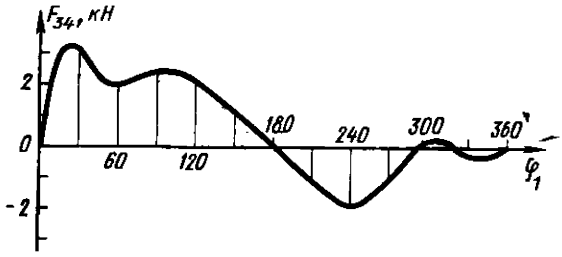


Рис. 6.12

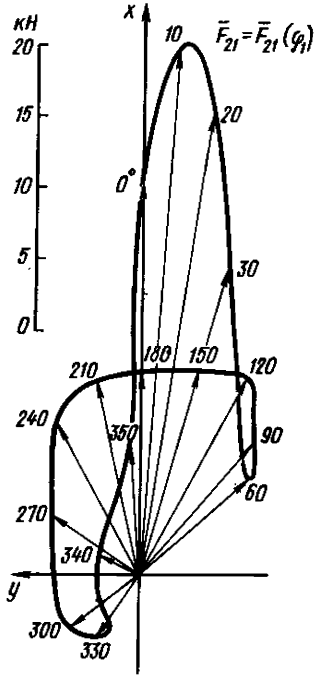


Рис. 6.14

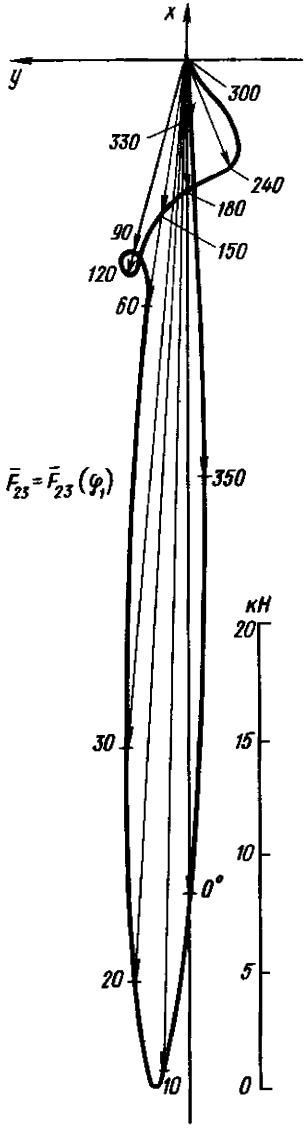


Рис. 6.13

Поэтому главный вектор F_0 и главный момент M_0 — чисто расчетные величины, характеризующие лишь суммарный результат воздействия машины на ее основание (рис. 6.10, *в*).

Выполнять силовой расчет надо многократно, для различных положений механизма. Это значит, что силовой расчет представля-

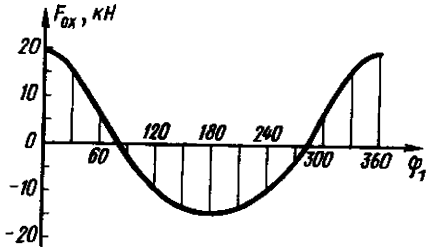


Рис. 6.15

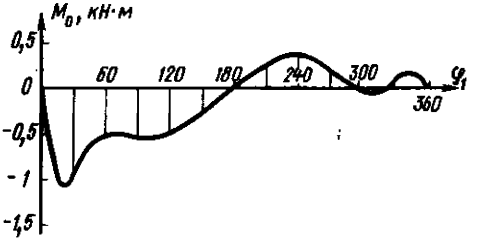


Рис. 6.16

ет собой весьма трудоемкую работу. Радикально снизить трудоемкость можно путем применения ЭВМ.

Анализ результатов силового расчета, выполненного на ЭВМ. На основании методики, изложенной в § 6.2, составлена схема алгоритма силового расчета кривошипно-ползунного механизма. Эта схема алгоритма годится для любой одноцилиндровой двухтактной поршневой машины, а также для кривошипного пресса и других двухтактных технологических машин, главным механизмом которых является кривошипно-ползунный.

По схеме алгоритма разработана программа и сделан силовой расчет механизма дизеля, работающего в установившемся режиме с малым коэффициентом неравномерности на электрогенератор. Шаг изменения обобщенной координаты φ_1 в пределах одного оборота коленчатого вала $\Delta\varphi_1 = 5°$. ЭВМ выполнила весь расчет (решение 33 уравнений 72 раза каждое) за 46 с.

Результаты расчета можно представить графически. На рис. 6.12 изображен график изменения силы $\bar{F}_{34}$, приложенной к поршню *3* со стороны цилиндра (стойки) *4* (см. рис. 6.10, *б*). Положительные ординаты соответствуют действию силы влево. Как видно, при $0 < \varphi_1 < 180°$ поршень прижат к зеркалу цилиндра своей правой образующей; при $180° < \varphi_1 < 360°$ он должен был бы быть прижат левой образующей. Однако на участке 290° — 320° происходит весьма нежелательное двукратное перемещение поршня в зазоре, сначала слева направо, а затем обратно справа налево. Этого перемещения не было бы, если массы m_3 и m_2 поршня и шатуна имели бы меньшую величину.

На рис. 6.13 и 6.14 изображены годографы сил, приложенных к шатуну *2* от поршня *3* (сила $\bar{F}_{23}$) и от коленчатого вала *1* (сила $\bar{F}_{21}$). Цифрами указаны соответствующие значения обобщенной координаты φ_1 в градусах. Годографы сил и график $F_{34}(\varphi_1)$ нужны для расчета деталей механизма на прочность, жесткость и продольную устойчивость, а также для расчета кинематических пар *3/4*, *2/3*, *2/1* на износ, долговечность и невыдавливаемость смазочного материала (см. гл. 9).

График изменения вертикальной составляющей $\bar{F}_{0x}$ главного век-

тора $\bar{F}_0$, действующего от корпуса ДВС на его основание (рис. 6.10, *г*), показан на рис. 6.15. Знаком плюс отмечено действие составляющей вверх. В то же время горизонтальная составляющая $\bar{F}_{0y}$ главного вектора изменяется по закону синуса. Ее амплитуда равна 6 кН.

На рис. 6.16 изображен главный момент M_0, действующий на основание от корпуса ДВС. Знак плюс указывает, что главный момент M_0 направлен против часовой стрелки.

Графический, или, иначе, векторный, метод силового расчета изложен в литературе [2, 17].

ГЛАВА 7
УРАВНОВЕШИВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ

В гл. 6 было показано, что при ускоренном движении звеньев механизма силовое воздействие машины на ее основание содержит динамические составляющие. При установившемся режиме динамические составляющие изменяются циклически. Это значит, что машина оказывает на свое основание периодические возмущения, вызывающие его вибрацию. Для устранения такого вредного воздействия или по крайней мере для его уменьшения надо путем специальных мероприятий свести к нулю эти составляющие или ограничить допустимым значением их амплитуду. Решение подобной задачи, относящейся к динамическому проектированию механизма машины, называется его уравновешиванием и составляет содержание настоящей главы. При этом особо будет рассмотрено динамическое воздействие вращающихся звеньев механизма (роторов) на их опоры и способы его устранения.

§ 7.1. НЕУРАВНОВЕШЕННОСТЬ МЕХАНИЗМОВ. СТАТИЧЕСКОЕ УРАВНОВЕШИВАНИЕ

Рассмотрим плоский механизм, начальное звено *1* которого вращается с *постоянной* угловой скоростью (рис. 7.1, *а*). При этом все остальные звенья будут двигаться с угловыми ускорениями, а центры масс S_1, S_2, S_3 будут иметь линейные ускорения. Опреде-

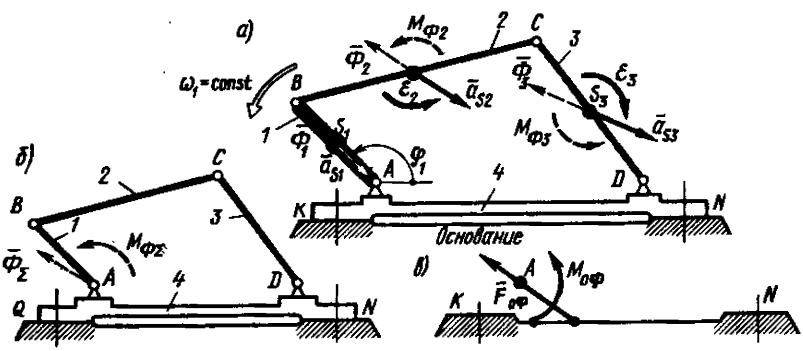


Рис. 7.1

лим по формулам (6.4) главные векторы и главные моменты сил инерции всех звеньев.

Пусть конструкция звеньев механизма такова, что они симметричны относительно плоскости чертежа, что свойственно механизмам очень многих машин. Тогда главные векторы и главные моменты (результирующие пары) сил инерции всех звеньев будут располагаться в этой плоскости.

Приведем всю систему сил инерции к центру A (рис. 7.1, *б*), в результате чего вся эта система сведется к общему главному вектору

$$\bar{\Phi}_{\Sigma}=\sum_{1}^{n}\bar{\Phi}_i \tag{7.1}$$

и к общему главному моменту

$$M_{\Phi\Sigma}=\sum_{2}^{n}M_{\Phi i}+\sum_{2}^{n}M_A(\bar{\Phi}_i), \tag{7.2}$$

где n — число подвижных звеньев механизма ($n=3$ на рис. 7.1, *а*). Так как выше было принято $\omega_1=\text{const}$, то $M_{\Phi 1}=0$, $M_A(\bar{\Phi}_1)=0$.

Ранее (в § 6.2) было показано, что динамические составляющие $\bar{F}_{o\Phi}$ и $M_{o\Phi}$ нагружения основания численно равны общему главному вектору $\bar{\Phi}_{\Sigma}$ и общему главному моменту $M_{\Phi\Sigma}$ системы сил инерции всех подвижных звеньев механизма: $\bar{F}_{o\Phi}=\bar{\Phi}_{\Sigma}$, $M_{o\Phi}=M_{\Phi\Sigma}$ (рис. 7.1, *в*). При этом необходимо отметить, что силы, нагружающие основание, фактически приложены в тех именно местах, где корпус машины (т. е. стойка *4* механизма) крепится к основанию (на рис. 7.1 — в местах Q и N). Поэтому $\bar{F}_{o\Phi}$ и $M_{o\Phi}$ — *чисто расчетные* величины, характеризующие лишь суммарный результат динамического воздействия механизма на его основание.

Если общий главный вектор сил инерции механизма $\bar{\Phi}_{\Sigma}\neq 0$, т. е. $\bar{F}_{o\Phi}\neq 0$, то такой механизм называют *статически неуравновешенным*. Если же $M_{\Phi\Sigma}\neq 0$, но $\bar{\Phi}_{\Sigma}=0$, т. е. $M_{o\Phi}\neq 0$, но $\bar{F}_{o\Phi}=0$, то говорят о *моментном неуравновешенности* механизма*.

Специальные мероприятия, выполняемые при проектировании механизма и ставящие своей целью достичь условия

$$\bar{\Phi}_{\Sigma}=0, \tag{7.3}$$

*Термин «статическая неуравновешенность» укоренился, хотя и очень неудачен. Он произошел вследствие того, что статическая неуравновешенность может быть обнаружена и без приведения механизма в движение, т. е. в неподвижном (статическом) состоянии. Однако по своей физической природе так называемая «статическая» неуравновешенность (равно как и моментная) представляет собой явление, в полном смысле динамическое.

представляют собой *статическое* уравновешивание механизма. Отметим, что при этом совсем не ставится задача достичь одновременно выполнения условия $M_{\Phi\Sigma}=0$. Следовательно, статически уравновешенный механизм никакого динамического воздействия на свое основание *в виде силы не оказывает* ($\bar{F}_{o\Phi}=\bar{\Phi}_{\Sigma}=0$). Вместе с тем такой механизм в общем случае продолжает оказывать динамическое воздействие в виде момента ($M_{o\Phi}=M_{\Phi\Sigma}\neq 0$).

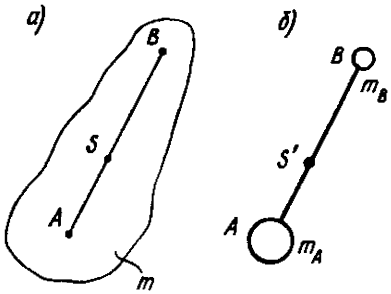


Рис. 7.2

Из теоретической механики известно, что $\bar{\Phi}_{\Sigma}=-m_{\Sigma}\bar{a}_S$, где m_{Σ} — масса системы всех подвижных звеньев механизма, а $\bar{a}_S$ — ускорение центра масс S этой системы. Отсюда следует, что условие (7.3) выполняется только при $a_S=0$, что, в свою очередь, возможно лишь в том случае, когда центр масс S системы подвижных звеньев механизма не перемещается. Таким образом, статическое уравновешивание есть такое действие, в результате которого *центр масс* системы подвижных звеньев работающего механизма *становится неподвижным*. Достичь этого можно методом заменяющих масс*. Рассмотрим этот метод.

Пусть дано тело N массой m, совершающее плоское или вращательное движение (рис. 7.2, *а*). Сосредоточим массу тела, распределенную по всему его объему, в точках A и B (рис. 7.2, *б*). Значения сосредоточенных масс m_A и m_B определим из уравнений:

$$m_A+m_B=m; \quad m_A l_{AS}=m_B l_{BS}. \tag{7.4}$$

Первое из уравнений (7.4) означает, что масса заменяющей системы $[m_A, m_B]$ равна массе заданного тела; второе — что центр масс S' системы $[m_A, m_B]$ располагается в том же месте, что и центр масс S заданного тела. А отсюда следует, что главный вектор сил инерции заменяющей системы $[m_A, m_B]$ равен главному вектору сил инерции заданного тела. Однако главный момент сил инерции системы масс $[m_A, m_B]$ не равен главному моменту сил инерции заданного тела.

Так как при статическом уравновешивании учитываются только

*Статическое уравновешивание можно выполнить также и методом векторов главных точек (см., например, [1, 2, 3]).

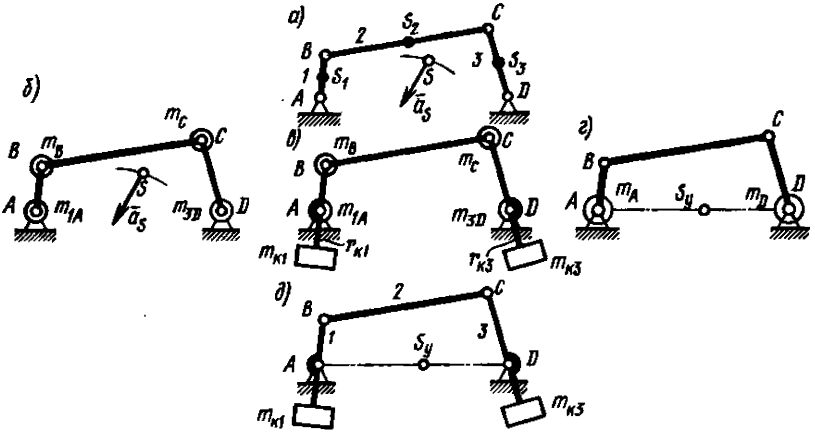


Рис. 7.3

главные векторы сил инерции звеньев [см. уравнение (7.3)] и не принимаются во внимание главные моменты сил инерции, то применительно именно к статическому уравновешиванию замена каждого звена двумя сосредоточенными массами является вполне корректной.

Выполним полное статическое уравновешивание шарнирного четырехзвенника (рис. 7.3, *а*), для которого заданы длины подвижных звеньев l_1, l_2, l_3, их массы m_1, m_2, m_3 и положения центров масс S_1, S_2, S_3. При работе механизма центр масс S системы подвижных звеньев *1, 2, 3* движется с ускорением $\bar{a}_S$, а это означает, что заданный механизм (рис. 7.3, *а*) статически неуравновешен.

Заменим каждое подвижное звено двумя сосредоточенными массами, используя уравнения (7.4): $m_{1A}=m_1 l_{BS1}/l_1$, $m_{1B}=m_1 l_{AS1}/l_1$, $m_{2B}=m_2 l_{CS2}/l_2$, $m_{2C}=m_2 l_{BS2}/l_2$, $m_{3C}=m_3 l_{DS3}/l_3$, $m_{3D}=m_3 l_{CS3}/l_3$. Объединим массы, размещенные в точках B и C: $m_B=m_{1B}+m_{2B}$, $m_C=m_{2C}+m_{3C}$. Таким образом, система подвижных звеньев заданного механизма окажется замененной четырьмя массами, сосредоточенными в точках A, B, C, D (рис. 7.3, *б*, на котором показаны ставшие безынертными звенья механизма). Центр масс S системы $[m_{1A}, m_B, m_C, m_{3D}]$ находится в том же месте, что и центр масс системы подвижных звеньев *1, 2, 3* заданного механизма, т. е. центр масс S по-прежнему движется с ускорением $\bar{a}_S$*.

Разместим на звеньях *1* и *3* противовесы (корректирующие

*В дальнейшем вместо выражения «центр масс системы подвижных звеньев заданного механизма» будем условно применять более короткий оборот: «центр масс заданного механизма».

массы) $m_{к1}$ и $m_{к3}$ (рис. 7.3, *в*) с таким расчетом, чтобы центры масс систем $[m_B, m_{к1}]$ и $[m_C, m_{к3}]$ оказались в неподвижных точках A и D. Для этого должны выполняться соотношения

$$m_{к1} r_{к1} = m_B l_1, \quad m_{к3} r_{к3} = m_C l_3. \qquad (7.5)$$

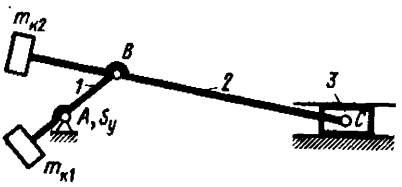


Рис. 7.4

Объединим массы, размещенные на звеньях *1* и *3*: $m_A = m_{1A} + m_B + m_{к1}$, $m_D = m_{3D} + m_C + m_{к3}$ (рис. 7.3, *в*, *г*). Таким образом, после размещения противовесов заданный механизм может быть заменен системой двух неподвижных масс: m_A и m_D. Поэтому центр масс S_y этой системы, а следовательно, и центр масс заданного механизма, но дополненного противовесами $m_{к1}$ и $m_{к3}$, тоже станет неподвижным (рис. 7.3, *г*, *д*). А это означает, что статическое уравновешивание заданного механизма достигнуто. Массы $m_{к1}$ и $m_{к3}$ противовесов надо определить из уравнений (7.5), задавшись размерами $r_{к1}$ и $r_{к3}$.

Таким образом, метод заменяющих масс состоит в следующем: каждое подвижное звено механизма надо заменить двумя сосредоточенными массами; затем, вводя противовесы (корректирующие массы) и объединяя их с заменяющими массами, добиться того, чтобы объединенные массы оказались в конечном счете размещенными в *неподвижных* точках механизма.

Отметим весьма существенное свойство механизма, полностью статически уравновешенного: такой механизм сохраняет свою пол-

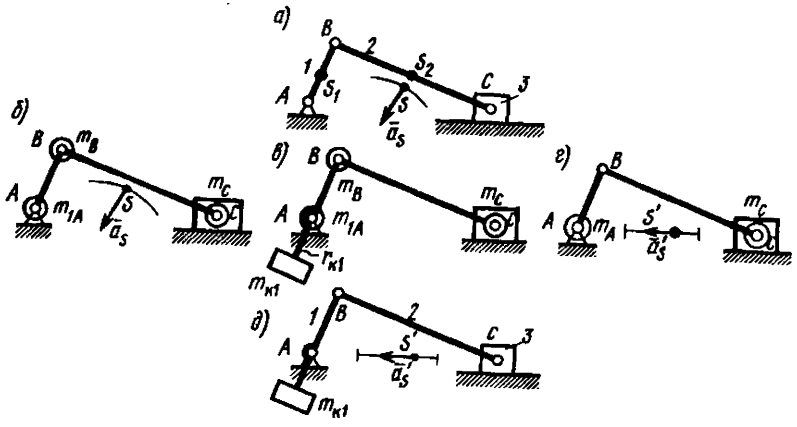


Рис. 7.5

ную статическую уравновешенность *при любом значении* ω_1 угловой скорости начального звена, как *постоянном*, так и *переменном*.

Двумя противовесами можно полностью статически уравновесить и кривошипно-ползунный механизм (рис. 7.4) (см. [1, 2, 3]). Однако установка противовеса $m_{к2}$ на шатуне *2* сильно удлиняет его, а вместе с тем увеличивает и габариты всего механизма. Поэтому такое решение конструктивно неудачно и в инженерной практике редко применяется. Обычно кривошипно-ползунный механизм статически уравновешивается только одним противовесом, размещаемым на звене *1*. Но в этом случае статическое уравновешивание будет уже не полным, а частичным.

Допустим, надо статически уравновесить горизонтальный кривошипно-ползунный механизм (рис. 7.5, *а*) таким образом, чтобы устранить динамическое воздействие на основание, но только в вертикальном направлении. Заменим подвижные звенья заданного механизма тремя сосредоточенными массами: m_{1A}, m_B, m_C (рис. 7.5, *б*, на котором показаны ставшие безынертными звенья механизма). Выполняя замену, всю массу m_3 сосредоточим в точке *C*, поскольку звено *3* движется поступательно. Используя уравнения (7.4), получим: $m_{1A}=m_1 l_{BS1}/l_1$, $m_B=m_{1B}+m_{2B}=m_1 l_{AS1}/l_1+m_2 l_{CS2}/l_2$, $m_C=m_{2C}+m_3=$ $=m_2 l_{BS2}/l_2+m_3$.

Разместим на звене *1* противовес $m_{к1}$ (рис. 7.5, *в*) с таким расчетом, чтобы центр масс системы $[m_{к1}, m_B]$ оказался в неподвижной точке *A*. Для этого выполним соотношение

$$m_{к1} r_{к1}=m_B l_1. \tag{7.6}$$

Объединим массы, размещенные на звене *1*: $m_A=m_{1A}+m_B+m_{к1}$ (рис. 7.5, *г*). Таким образом, после размещения противовеса $m_{к1}$ заданный механизм может быть заменен системой двух масс: неподвижной m_A и горизонтально движущейся m_C. Поэтому центр масс S' этой системы, а следовательно, и центр масс заданного механизма, но дополненного противовесом $m_{к1}$, будет двигаться, но только горизонтально (рис. 7.5, *г*, *д*). А отсюда следует, что вертикальное динамическое воздействие на основание механизма будет устранено. Но останется горизонтальное воздействие, которое может быть оценено по формуле $F_{оФx}=\Phi_{\Sigma x}=-(m_{2C}+m_3)\,a_{Cx}$. Массу противовеса $m_{к1}$ следует определить из уравнения (7.6), задавшись размером $r_{к1}$.

Различные современные методы уравновешивания механизмов всесторонне изложены В. А. Щепетильниковым (см.: *Щепетильников В. А.* Уравновешивание механизмов. М., 1982).

§ 7.2. НЕУРАВНОВЕШЕННОСТЬ РОТОРОВ

Ротором в теории балансировки (уравновешивания) называют любое вращающееся тело. Поэтому ротором является якорь электродвигателя, коленчатый вал компрессора, шпиндель токарного станка, баланс часов и т. п.

Из теоретической механики известно, что давление вращающегося тела на его опоры в общем случае складывается из двух составляющих: *статической*, вызванной действием заданных сил (силы тяжести тела и др.), и *динамической*, обусловленной ускоренным движением материальных частиц, из которых состоит вращающееся тело (т. е. ротор). Если динамическая составляющая не равна нулю, то ротор в этом случае называют *неуравновешенным*.

При *равномерном* вращении ротора вокруг оси z (рис. 7.6) проекции динамической составляющей определяются следующим образом: $X_A+X_B=\Phi_x$, $Y_A+Y_B=\Phi_y$, $-X_Aa+X_Bb=M_{\Phi y}$, $Y_Aa-Y_Bb=M_{\Phi x}$. Как видно, неуравновешенность численно оценивается посредством проекций главного вектора Φ и главного момента $\bar{M}_\Phi$ центробежных сил инерции ротора. Эти проекции подсчитываются по таким формулам:

$$\Phi_x=\omega^2 m x_S;\ \Phi_y=\omega^2 m y_S;\ M_{\Phi x}=-\omega^2 J_{yz};\ M_{\Phi y}=\omega^2 J_{xz}, \qquad (7.7)$$

где m — масса ротора; J_{yz} и J_{xz} — центробежные моменты инерции ротора относительно системы координат $Oxyz$ (рис. 7.6). Плоскость Oxy проходит через центр масс S ротора, а вся система координат $Oxyz$ вращается вместе с ротором. Отметим, что в рассматриваемой динамической задаче главный момент сил инерции ротора $\bar{M}_\Phi$ есть величина векторная.

Как следует из уравнений (7.7), неуравновешенность ротора возрастает пропорционально квадрату его угловой скорости. Поэтому если быстроходные роторы (рабочие колеса турбин, шлифовальные круги, магнитные барабаны ЭВМ и многие другие) неуравновешены, то они оказывают на свои опоры динамические давления, вызывающие вибрацию стойки (станины) и ее основания. Устранение этого вредного воздействия называют *балансировкой* (уравновешиванием) ротора. Решение данной задачи относится к динамическому проектированию машин.

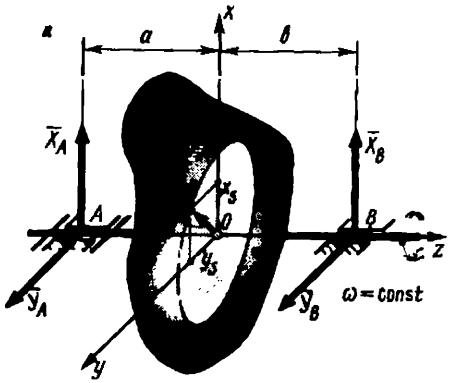


Рис. 7.6

Модуль главного вектора центробежных сил инерции ротора, согласно уравнениям (7.7), составит $\Phi=\omega^2 m\sqrt{x_S^2+y_S^2}$. В векторном виде запишем $\bar{\Phi}=\omega^2 m\bar{e}_{ст}$, где $\bar{e}_{ст}=\bar{l}_{OS}$ — радиус-вектор центра масс S ротора, координирующий его эксцентричное положение (рис. 7.6) и именуемый *эксцентриситетом* массы ротора. Обозначим

$$\bar{D}_{ст}=m\bar{e}_{ст}. \tag{7.8}$$

Вектор $\bar{D}_{ст}$ называют *главным вектором дисбалансов ротора*. Очевидно, что $\bar{\Phi}=\omega^2\bar{D}_{ст}$.

Модуль главного момента центробежных сил инерции ротора, согласно уравнениям (7.7), составит $M_\Phi=\omega^2\sqrt{J_{yz}^2+J_{xz}^2}=\omega^2 M_D$, где

$$M_D=\sqrt{J_{yz}^2+J_{xz}^2}. \tag{7.9}$$

Величина $\bar{M}_D$ называется *главным моментом дисбалансов ротора* и имеет векторный смысл, т. е. $\bar{M}_\Phi=\omega^2\bar{M}_D$. В дальнейшем неуравновешенность ротора количественно будем характеризовать не через Φ и $\bar{M}_\Phi$, а через пропорциональные им главный вектор $\bar{D}_{ст}$ и главный момент $\bar{M}_D$ дисбалансов ротора.

Виды неуравновешенности ротора. Статическая неуравновешенность свойственна такому ротору, центр масс S которого не находится на оси вращения, но главная центральная ось инерции (ось I—I) которого параллельна оси вращения (рис. 7.7, *а*). В этом случае $e_{ст}\neq 0$, $J_{xz}=J_{yz}=0$. Следовательно, согласно уравнениям (7.8) и (7.9), статическая неуравновешенность выражается только главным вектором $\bar{D}_{ст}$ дисбалансов, в то время как главный момент дисбалансов $\bar{M}_D=0$. Вектор $\bar{D}_{ст}$ направлен радиально и вращается вместе с ротором. Примером может служить одноколенчатый вал. Опоры A и B нагружены силами $\bar{F}_A$ и $\bar{F}_B$, векторы которых вращаются вместе с валом.

Статическая неуравновешенность может быть устранена, если к ротору прикрепить добавочную массу $m_к$, называемую *корректирующей*. Ее надо разместить с таким расчетом, чтобы $\bar{D}_к=m_к\bar{e}_к=-\bar{D}_{ст}$. Это значит, что центр корректирующей массы должен находиться на линии действия OS вектора $\bar{D}_{ст}$, а вектор $\bar{e}_к$ должен быть направлен в сторону, противоположную вектору $\bar{e}_{ст}$.

Однако статическую балансировку не всегда удается выполнить одной корректирующей массой. Так, конструкция одноколенчатого вала (рис. 7.7, *а*) вынуждает применить две массы, расположенные

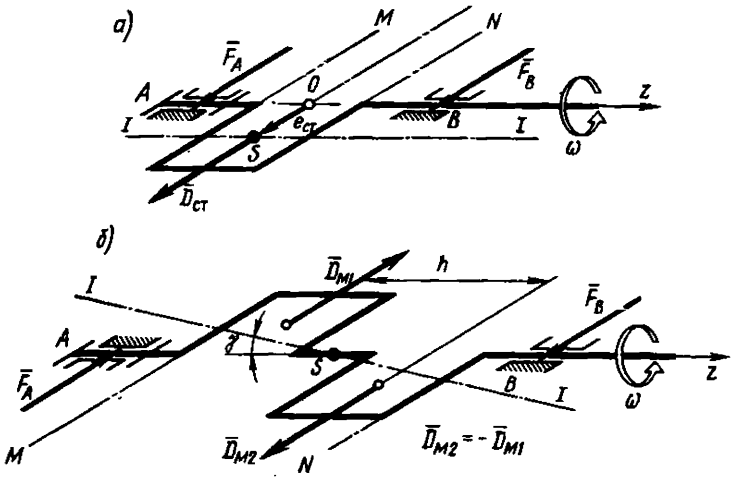


Рис. 7.7

в плоскостях коррекции M и N, так как пространство между этими двумя плоскостями должно быть полностью свободно для движения шатуна. В этом случае вектор $\bar{D}_к$ будет выражать суммарное воздействие обеих корректирующих масс. Следовательно, число и расположение плоскостей коррекции выбирают сообразно конструкции и назначению ротора.

Моментная неуравновешенность имеет место в том случае, когда центр масс S ротора находится на оси вращения, а главная центральная ось инерции $I—I$ ротора наклонена к оси вращения ротора под углом γ (рис. 7.7, *б*). В этом случае $e_{ст}=0$, $J_{xz}\neq 0$, $J_{yz}\neq 0$. Следовательно, $\bar{D}_{ст}=0$, так что моментная неуравновешенность выражается только лишь главным моментом $\bar{M}_D$ дисбалансов, т. е. парой дисбалансов $[\bar{D}_{M1}, \bar{D}_{M2}]$, которая вращается вместе с ротором. Примером может служить двухколенчатый вал, для которого $M_D=D_{M1}h$. Опоры A и B нагружены парой сил $[\bar{F}_A, \bar{F}_B]$, векторы которых вращаются вместе с валом.

Так как пара уравновешивается только парой, то устранить моментную неуравновешенность можно в том случае, если применить не менее чем две корректирующие массы. Их расположение в плоскостях коррекции и их величины должны быть такими, чтобы дисбалансы корректирующих масс составили именно пару. Момент $\bar{M}_{Dк}$ этой пары должен быть равен $-\bar{M}_D$. Значит, момент $\bar{M}_{Dк}$ должен быть направлен противоположно моменту пары $[\bar{D}_{M1}, \bar{D}_{M2}]$, т. е. применительно к положению ротора, изображенному на рис. 7.7, *б*, — против часовой стрелки.

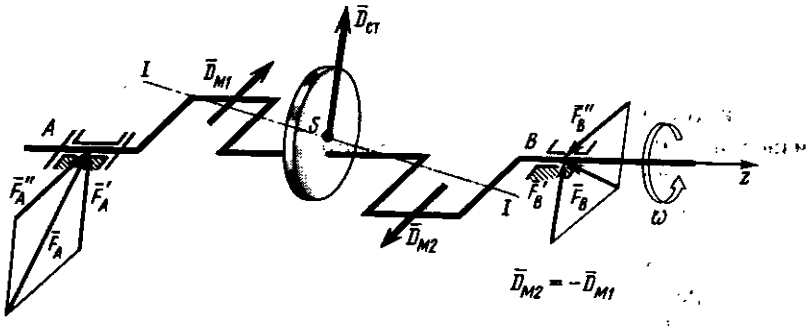


Рис. 7.8

Динамическая неуравновешенность является совокупностью двух предыдущих, т. е. $e_{ст} \neq 0$, $J_{xz} \neq 0$, $J_{yz} \neq 0$. Следовательно, динамическая неуравновешенность выражается через $\bar{D}_{ст}$ и $\bar{M}_D$. Из теоретической механики известно, что такая система нагружения эквивалентна двум скрещивающимся векторам. Поэтому динамическая неуравновешенность может быть выражена также и другим образом, а именно двумя скрещивающимися векторами дисбалансов $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$, которые расположены в двух плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и вращаются вместе с ротором («крест дисбалансов»). Примером динамически неуравновешенного ротора может служить двухколенчатый вал с эксцентрично закрепленным на нем круглым диском (рис. 7.8). Опоры A и B нагружены скрещивающимися силами $\bar{F}_A$ и $\bar{F}_B$, векторы которых вращаются вместе с валом.

Динамическую неуравновешенность можно устранить двумя корректирующими массами, расположенными в плоскостях коррекции, перпендикулярных оси вращения (см. § 7.3).

Из сказанного следует, что ликвидация всякой неуравновешенности — и статической, и моментной, и динамической — имеет своим результатом то, что главная центральная ось инерции ротора *совмещается* с его осью вращения, или аналитически $\bar{D}_{ст} = 0$, $\bar{M}_D = 0$. В этом случае ротор называют полностью сбалансированным. Отметим важное свойство такого ротора: если ротор полностью сбалансирован для некоторого значения угловой скорости ω, то он сохранит свою полную сбалансированность при *любой* другой угловой скорости, как *постоянной*, так и *переменной*.

§ 7.3. ДИНАМИЧЕСКАЯ БАЛАНСИРОВКА РОТОРОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Если эксплуатация машины или прибора требует применения полностью сбалансированного ротора, а конструкция его такова,

что ротор неуравновешен (например, рис. 7.7, 7.8), то балансировку такого ротора надо начать уже при проектировании.

Пусть ротор представляет собой совокупность нескольких деталей *1, 2, 3* (рис. 7.9, *а*), вращающихся, как единое целое. Массы m_i и координаты a_i, e_i и φ_i центров масс S_i всех этих деталей известны. Располагая этими сведениями, следует подсчитать дисбалансы неуравновешенных масс по формуле $\bar{D}_i = m_i \bar{e}_i$.

Выполняя балансировку ротора, можно было бы каждой неуравновешенной массе противопоставить свою корректирующую массу. Однако такое решение не является целесообразным, так как в системе ротора почти всегда происходит частичное взаимное уравновешивание дисбалансов. Поэтому следует применить другой метод.

Назначим две плоскости приведения *A* и *B*, перпендикулярные оси вращения *z*. На рис. 7.9, *а* плоскостью *A* выбрана та, в которой движется центр масс S_1, а плоскость *B* удалена от нее на расстояние *l*. Приведем к плоскостям *A* и *B* дисбалансы $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$, $\bar{D}_3$ всех неуравновешенных масс, т. е. заменим каждый вектор дисбаланса двумя, параллельными ему и расположенными в плоскостях приведения *A* и *B*. Для этого используем формулы $D_{iA} = D_i b_i / l$, $D_{iB} = D_i a_i / l$, т. е. применительно к рис. 7.9, *а*:

$$D_{1A} = D_1 b_1 / l = D_1; \quad D_{2A} = D_2 b_2 / l; \quad D_{3A} = D_3 b_3 / l;$$

$$D_{1B} = D_1 a_1 / l = 0; \quad D_{2B} = D_2 a_2 / l; \quad D_{3B} = D_3 a_3 / l. \qquad (7.10)$$

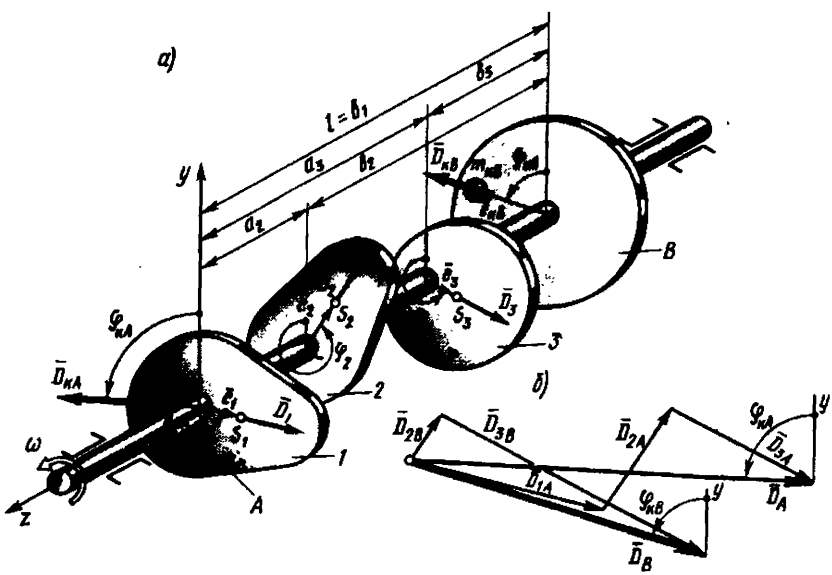


Рис. 7.9

В результате приведения пространственная система дисбалансов $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, $\overline{D}_3$ получилась замененной двумя плоскими системами. Сложим дисбалансы, расположенные в каждой из плоскостей (рис. 7.9, *б*):

$$\overline{D}_A=\Sigma\overline{D}_{iA}=\overline{D}_{1A}+\overline{D}_{2A}+\overline{D}_{3A};\quad \overline{D}_B=\Sigma\overline{D}_{iB}=\overline{D}_{2B}+\overline{D}_{3B}. \quad (7.11)$$

Таким образом, неуравновешенность заданного ротора можно представить *двумя скрещивающимися* векторами дисбалансов $\overline{D}_5$ и $\overline{D}_B$ (на рис. 7.9, *а* не показаны), расположенными в плоскостях приведения *A* и *B*. Поэтому заданный ротор, как и всякий другой, можно сбалансировать также двумя корректирующими массами. Если позволяет конструкция, разместим эти массы в плоскостях приведения *A* и *B*. Тогда они будут одновременно и плоскостями коррекции.

Условиями полной балансировки будут $\overline{D}_{кA}=-\overline{D}_A$, $\overline{D}_{кB}=-\overline{D}_B$. Векторы $\overline{D}_{кa}$ и $\overline{D}_{кB}$ показаны на рис. 7.9, *а*. Их угловые координаты $\varphi_{кa}$ и $\varphi_{кB}$ следует взять с планов дисбалансов (рис. 7.9, *б*). Корректирующие массы равны $m_{кA}=D_{кA}/e_{кA}$, $m_{кB}=D_{кB}/e_{кB}$, где $e_{кA}$ и $e_{кB}$ — их эксцентриситеты (рис. 7.9, *а*), назначаемые сообразно конструктивным возможностям ротора.

Устранение неуравновешенности ротора состоит в том, что корректирующие массы $m_{кA}$ и $m_{кB}$ должны быть размещены в плоскостях коррекции *A* и *B* в местах, определяемых координатами $\varphi_{кA}$, $e_{кA}$ и $\varphi_{кB}$, $e_{кB}$. Отметим, что вместо корректирующих масс (противовесов) можно применить так называемые «антипротивовесы». Это значит, что на линии действия вектора $\bar{D}_{кB}$ размещается не корректирующая масса, а диаметрально противоположно ей из ротора удаляется соответствующее количество материала (удаляется, как говорят, «тяжелое место» ротора). То же самое можно сделать и в другой плоскости коррекции. Конечно, возможность применения такого приема непосредственно определяется конструкцией ротора.

В заключение рассмотрим ротор, размеры которого вдоль оси вращения малы по сравнению с его радиальными размерами. Это значит применительно к рис. 7.9, *а*, что детали *1*, *2*, *3* расположены весьма близко друг у другу, так что размеры a_2 и a_3 малы. Тогда, согласно формулам (7.10), дисбалансы $\bar{D}_{2B}$ и $\bar{D}_{3B}$ будут также малыми и ими можно пренебречь. Следовательно, согласно уравнениям (7.11), $D_B\approx 0$, так что вся неуравновешенность ротора будет выражаться практически только одним дисбалансом $\bar{D}_A$ и будет поэтому статической. А отсюда вытекает, что и балансировка такого ротора с малыми размерами вдоль оси вращения должна быть

статической. Ее можно выполнить одной корректирующей массой, назначив плоскость коррекции так, чтобы она проходила через центр масс ротора. Добавим, что при малости размеров a_2 и a_3, т. е. координат z центров масс S_2 и S_3 (рис. 7.9, *а*), центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} ротора будут также малы. Следовательно, согласно уравнению (7.9), малым будет и главный момент дисбалансов $\bar{M}_D$ такого ротора, так что им можно пренебречь. Это еще раз подтверждает то, что неуравновешенность ротора, имеющего малые размеры вдоль оси вращения, практически будет только статической.

§ 7.4. СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ БАЛАНСИРОВКА ИЗГОТОВЛЕННЫХ РОТОРОВ*

Полностью сбалансированный при проектировании ротор после изготовления обладает тем не менее некоторой неуравновешенностью, вызванной неоднородностью материала и отклонениями фактических размеров ротора от их номинальных значений. Такая неуравновешенность устраняется в процессе изготовления на специальных балансировочных станках. Балансировка может быть как автоматической, так и неавтоматической. Сначала рассмотрим статическую и динамическую балансировки, выполняемые в неавтоматическом режиме.

Статическая балансировка. В § 7.3 было показано, что для роторов с малыми размерами вдоль оси вращения (шкивы, маховики, диски и т. п.) допустимо ограничиться статической балансировкой. При этом определяется только главный вектор дисбалансов $\bar{D}_{ст}$. Если требуется невысокая точность балансировки, то она выполняется в статическом режиме [2, 3, 8, т. 6].

Более точным и перспективным в отношении автоматизации процесса балансировки является способ определения статической неуравновешенности *в процессе вращения ротора*, т. е. в динамическом режиме**. Одним из примеров оборудования, работающего по этому принципу, служит балансировочный станок, изображенный на рис. 7.10. Неуравновешенный ротор *1*, закрепленный на шпинделе *4*, вращается с постоянной скоростью $\omega_б$ в подшипниках, смонтированных в плите *2*. Эта плита опирается на станину посредством упругих элементов *3*. С плитой *2* с помощью мягкой пружины *5* связана масса *6* сейсмического датчика. Собственная частота колебаний массы датчика должна быть значительно ниже частоты

*§ 7.4 написан Г. Н. Петровым.

**Отсюда следует, что термин «статическая неуравновешенность» не только очень неудачен (см. сноску § 7.1), но и попросту устаревает, поскольку современные точные и высокопроизводительные балансировочные станки определяют так называемую «статическую неуравновешенность» в динамическом режиме.

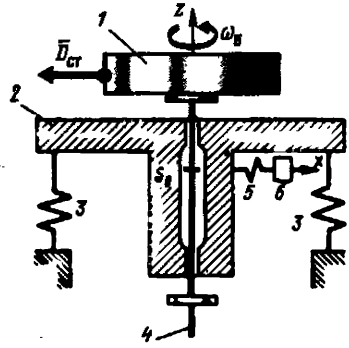


Рис. 7.10

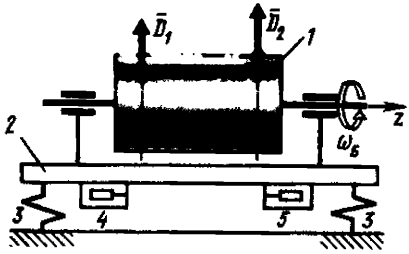


Рис. 7.11

вращения ротора. Массе *6* дана свобода прямолинейного перемещения вдоль оси *x*, проходящей через центр масс S_0 плиты.

При вращении шпинделя вместе с ротором ось *z* под влиянием неуравновешенности ротора описывает коническую поверхность, а плита совершает пространственное движение. Составляющая этого движения, направленная вдоль оси *x*, воспринимается массой *6*. Вынужденные колебания массы относительно плиты *2* преобразуются датчиком в ЭДС, направляемую в электронное счетно-решающее устройство (на рис. 7.10 не показано), являющееся неотъемлемой частью балансировочного станка. Это устройство выдает сведения об искомой неуравновешенности в виде модуля и угловой координаты главного вектора $\bar{D}_{ст}$ дисбалансов ротора. (На рис. 7.10 статическая неуравновешенность ротора условно представлена в виде неуравновешенности некоторой точечной массы, дисбаланс которой равен главному вектору $\bar{D}_{ст}$ дисбалансов ротора.) После определения $\bar{D}_{ст}$ оператор устраняет неуравновешенность обычно способом удаления материала (удаления «тяжелого места») (см. § 7.3).

Динамическая балансировка. Роторы, размеры которых вдоль оси вращения значительны, требуют динамической балансировки, так как главный момент дисбалансов $\bar{M}_D$ таких роторов будет существенным (см. § 7.3). Поэтому неуравновешенность будет выражаться не только главным вектором дисбалансов $\bar{D}_{ст}$, но и главным моментом дисбалансов $\bar{M}_D$, или двумя скрещивающимися векторами дисбалансов $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ (см. § 7.2 и 7.3), т. е. будет динамической. Такую неуравновешенность можно условно представить в виде неуравновешенности двух точечных масс, дисбалансы которых соответственно равны $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$.

Ось вращения ротора в станках, предназначенных для динамической балансировки, может быть или неподвижной, или может

двигаться относительно станины. В зависимости от числа возможных движений оси вращения (числа ее степеней свободы) балансировочные станки целесообразно разделить на три группы. К первой группе относятся станки, когда ось вращения балансируемого ротора совершает пространственное движение; ко второй — когда ось вращения колеблется относительно другой, неподвижной оси; к третьей — когда ось вращения неподвижна.

Пример станка первой группы, когда ось вращения ротора совершает во время балансировки пространственное движение, показан на рис. 7.11 [2]. Неуравновешенный ротор *1* вращается с постоянной угловой скоростью ω_6 в подшипниках, смонтированных на плите *2*. Она опирается на станину посредством четырех пружин *3*. С плитой *2* связаны два сейсмических датчика: *4* и *5*.

При вращении ротора под влиянием его неуравновешенности ось z и плита *2* совершают пространственное движение, которое воспринимается датчиками *4* и *5*. Датчики преобразуют вынужденные механические колебания плиты в ЭДС, направляемые в электронное счетно-решающее устройство (на рис. 7.11 не показано), которое является составной частью балансировочного станка. Электросхема этого устройства смонтирована таким образом, что измеритель дисбаланса $\bar{D}_1$ настраивается на исключение в своих показаниях влияния дисбаланса $\bar{D}_2$ и дает, таким образом, сведения только о дисбалансе $\bar{D}_1$. Точно так же благодаря специальной настройке измеритель дисбаланса $\bar{D}_2$ дает сведения только об этом дисбалансе. Следовательно, оба искомых дисбаланса одновременно определяются электронным устройством, чем обеспечивается *высокая производительность* станка. После определения $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ оператор балансирует ротор в плоскостях коррекции, обычно способом удаления материала (см. § 7.3).

Пример рамного балансировочного станка второй группы (без электронно-решающих устройств) и описание работы на нем имеются в литературе [2; 8, т. 6; 17].

Автоматическая балансировка. Станок для динамической балансировки называют автоматическим, если обе фазы балансировки — как измерение неуравновешенности, так и ее устранение — осуществляются без участия оператора. Возможны два метода автоматической балансировки: дискретный метод, когда обе фазы выполняются последовательно, причем вторая фаза — на неподвижном роторе, и непрерывный метод, когда обе фазы совмещены во времени и ротор во всем процессе балансировки не останавливается.

Устранять неуравновешенность можно двумя способами: добавлением или удалением корректирующих масс $m_{к1}$ и $m_{к2}$ в плоскостях коррекции. Автоматические балансировочные станки, работающие с добавлением корректирующих масс, необходимы для уравновешивания тонкостенных роторов.

Наиболее распространен способ удаления материала, осуществ-

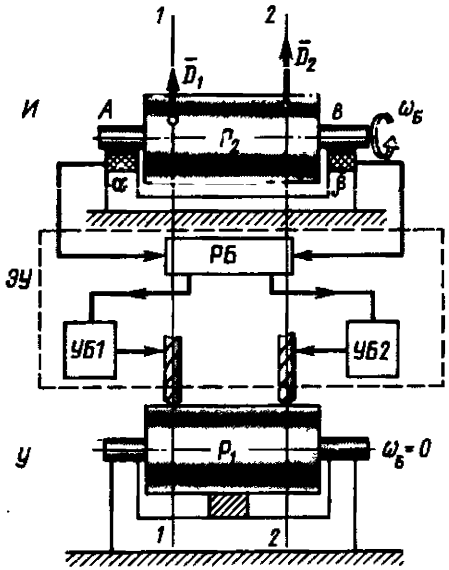


Рис. 7.12

ляемый путем сверления отверстий или фрезерования пазов на роторе, а также другими средствами. Станки, использующие этот способ, описаны ниже. Ось вращения ротора на этих станках неподвижна, и поэтому они относятся к третьей группе.

Автоматический станок для дискретной балансировки обычно состоит из двух агрегатов: измеряющего *И* и устраняющего *У* неуравновешенность (рис. 7.12),— связанных между собой электронным устройством *ЭУ*. Сведения о неуравновешенности ротора P_2 подаются в *ЭУ* от датчиков α и β неподвижных чувствительных опор *А* и *В*. В решающем блоке *РБ* эти сведения преобразуются в сигналы, эквивалентные дисбалансам $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ в плоскостях коррекции *1 — 1* и *2 — 2*. Сигналы направляются в блоки *УБ1* и *УБ2*, которые управляют инструментами, устраняющими дисбалансы в плоскостях коррекции. Но поступившие сигналы пока сохраняются там в памяти, так как в это время происходит устранение дисбалансов предыдущего ротора P_1 путем удаления материала. При этом никакой *обратной связи* между балансируемым ротором P_1 и *ЭУ не существует*. По завершении балансировки ротор P_1 снимается с агрегата *У*, а на его место автоматически переносится ротор P_2, для балансировки которого из памяти *УБ1* и *УБ2* вызываются очередные импульсы, управляющие инструментами, которые устраняют дисбалансы ротора P_2. В это время в измеряющий агрегат *И* на место ротора P_2 автоматически подается следующий ротор P_3 и процесс повторяется.

Основным требованием метода непрерывной балансировки является наличие *ненарушаемой обратной связи* между балансируемым ротором и электронным устройством. Одним из примеров такой балансировки является электрохимическая балансировка, действующая по принципу анодного растворения, а поэтому пригодная только для металлических роторов и к тому же нечувствительных к воздействию электролита на составные части ротора. Схема такого автоматического станка показана на рис. 7.13 [8, т. 6]. Блок *УБ*, который управляет удалением материала ротора, представляет коллектор с тремя электрически изолированными друг от друга соплами, через которые на ротор непрерывно подается элект-

ролит. Струя из центрального сопла *С* является общим токоподводящим электродом; струи из сопл *I* и *II*, расположенных в плоскостях коррекции *1 — 1* и *2 — 2*, выполняют роль токоснимающих электродов. Кратковременные включения тока *i* происходят в те моменты времени, когда «тяжелые места» ротора проходят под соплами *I* и *II*. Команды на включение этих импульсов формируются в решающем блоке *РБ* под действием сигналов, поступающих от специальных датчиков α и β и зависящих от величин реакций неподвижных чувствительных опор *А* и *В*. Короткие импульсы уходящего с ротора тока *i* вызывают в нужных местах на его поверхности (в плоскостях коррекции *1 — 1* и *2 — 2*) растворение металла (рис. 7.13). Таким образом, ротор в процессе балансировки непрерывно подает по каналам *a* и *b* обратной связи в *ЭУ* сведения о своей неуравновешенности, которая постепенно устраняется.

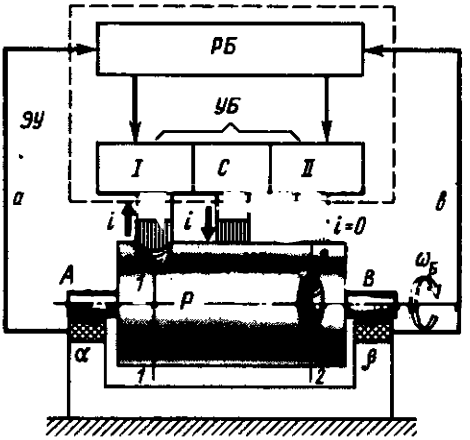


Рис. 7.13

Для удаления корректирующих масс из тела ротора, изготовленного из любого материала, применяется балансировка с использованием *лазера* [8, т. 6]. Этот способ стал возможным в связи с появлением и разработкой мощных оптических квантовых генераторов. Для повышения производительности применен лазер непрерывного действия и разработана оптическая система, обеспечивающая синхронное следование луча лазера за «тяжелой точкой» ротора в плоскости коррекции. Практически это осуществлено, например, в автоматическом лазерном балансировочном станке ЛБС-3, принципиальная схема которого приведена на рис. 7.14. Балансируемый ротор *Р* опирается на неподвижные чувствительные опоры *А* и *В* и приводится во вращение двигателем *Д*. От него же подается механический сигнал и в блок *УБ*, приводящий в синхронное с ротором вращение полый шпиндель с оптической призмой *П*. Сигналы опорных датчиков α и β перерабатываются в решающем блоке *РБ* в фазирующий импульс, также посылаемый в управляющий блок *УБ*, который обеспечивает требуемое фазовое положение призмы *П* относительно ротора *Р*. Луч из оптического квантового генератора *ОКГ* проходит через полый шпиндель и, отражаясь от вращающейся призмы *П* и неподвижного сферического зеркала *3*, фокусируется в «тяжелом месте» ротора, находящемся в плоскости коррекции *1 — 1*. Из этого места во время всего

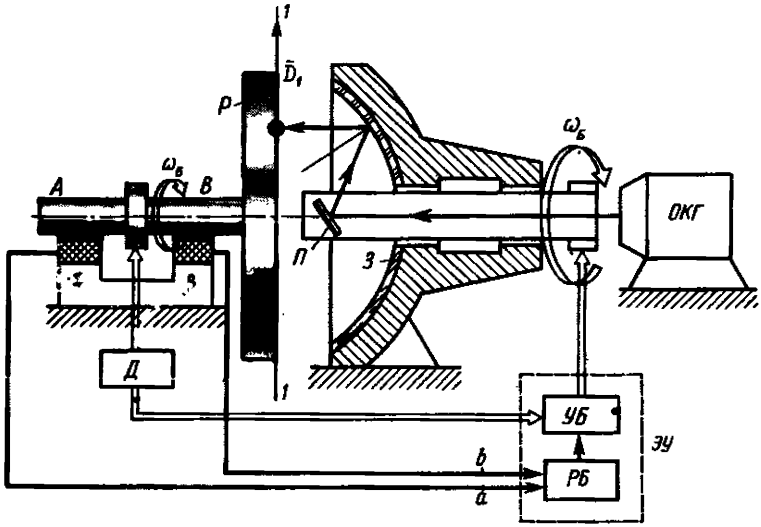


Рис. 7.14

процесса балансировки луч удаляет неуравновешенный материал ротора, постепенно уменьшая тем самым дисбаланс $\bar{D}_1$. Одновременно автоматически уменьшается энергия луча лазера.

Балансировочные автоматические устройства применяют не только в балансировочных станках, но также и в роторных машинных установках, когда в процессе их эксплуатации происходит по тем или иным причинам нарушение сбалансированности ротора. Например, на вал ротора такой установки жестко закрепляют автоматический компенсатор в виде обоймы со свободно расположенными внутри нее корректирующими массами (шары, кольца и др.) [8, т. 6]. Эти массы при вращении ротора (со сверхкритической скоростью) самоустанавливаются относительно обоймы, устойчиво обеспечивая уравновешенное состояние ротора.

ГЛАВА 8
ТРЕНИЕ В МЕХАНИЗМАХ И МАШИНАХ

При работе машин и механизмов происходит явление, которое сопровождается рассеиванием механической энергии. Это явление называют *трением*. Подсчитано, что около 33% мировых энергетических ресурсов бесполезно затрачивается на работу, связанную с трением. Вполне закономерно, что эти затраты необходимо сделать минимальными, т. е. уменьшить силы трения. Для быстроходных машин и механизмов такая задача становится еще более актуальной. Физические основы явления трения, силовой расчет механизма с учетом трения и оценка экономичности механизма посредством его коэффициента полезного действия кратко излагаются в настоящей главе.

§ 8.1. ВИДЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ВНЕШНЕГО ТРЕНИЯ

При исследовании физических основ явления трения различают трение внешнее и внутреннее. Внешнее трение — сопротивление относительному перемещению, возникающее между двумя телами в зонах соприкосновения поверхностей по касательным к ним и сопровождаемое диссипацией энергии. Внутреннее трение — процессы, происходящие в твердых, жидких и газообразных телах при их деформации и приводящие к необратимому рассеянию механической энергии.

Силу сопротивления при относительном перемещении одного тела по поверхности другого под действием внешней силы, тангенциально направленную к общей границе между этими телами, называют *силой трения*.

Материал, вводимый на поверхности трения для уменьшения силы трения и интенсивности изнашивания, называют *смазочным материалом*. Подведение смазочного материала к поверхности трения называют *смазыванием*, а действие смазочного материала, в результате которого между двумя поверхностями уменьшается сила трения и (или) интенсивность изнашивания,— *смазкой*.

В зависимости от состояния поверхностей трения различают два вида трения: *трение без смазочного материала* (сухое трение) и *трение со смазочным материалом*.

Трением без смазочного материала называют трение твердых тел *1* и *2* при отсутствии на поверхностях трения введенного смазочного материала любого вида (рис. 8.1, *а*).

Трением со смазочным материалом называют трение твердых тел *1* и *2* при наличии на поверхностях трения введенного смазочного материала любого вида (рис. 8.1, *б*).

Различают следующие виды смазки: твердую, при которой разделение поверхностей трения деталей *1* и *2* осуществляется твердым смазочным материалом (рис. 8.2, *а*); жидкостную, при которой полное разделение поверхностей трения деталей *1* и *2* осуществляется жидким смазочным материалом (рис. 8.2, *в*); газовую, при которой разделение поверхностей трения деталей *1* и *2* осуществляется газовым смазочным материалом (рис. 8.2, *б*); полужидкостную, при которой частично осуществляется

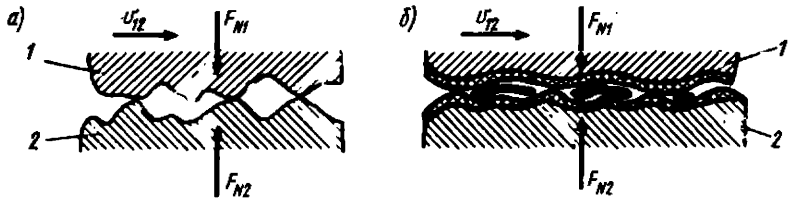


Рис. 8.1

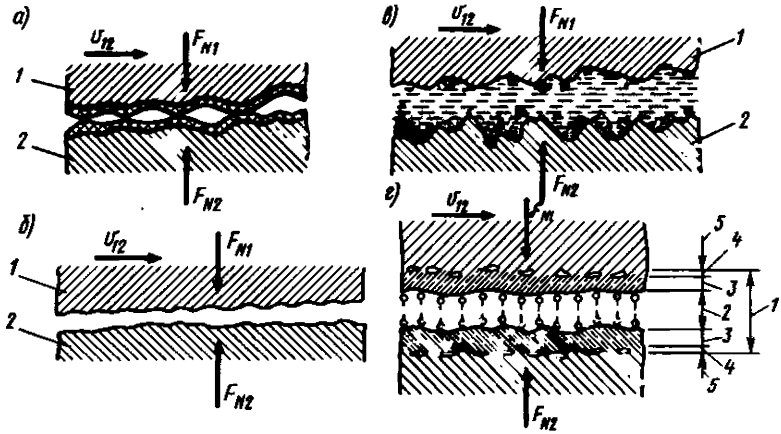


Рис. 8.2

жидкостная смазка; г р а н и ч н у ю, при которой трение и износ между поверхностями, находящимися в относительном движении, определяются свойствами поверхностей и свойствами смазочного материала, отличными от объемных (рис. 8.2, *г*). Промежуточный слой *1* называют третьим телом между основными материалами *5* фрикционной пары. Он состоит из адсорбированного слоя *2*, пленки оксидов или других химических соединений *3* и слоя дефектного основного материала *4*. При толщине слоя жидкости 0,1 мкм ее свойства уже отличаются от объемных свойств.

Различают также смазку: г и д р о с т а т и ч е с к у ю (г а з о с т а т и ч е с к у ю), при которой полное разделение поверхностей трения деталей *1* и *2*, находящихся в относительном движении или покое, осуществляется в результате поступления жидкости (газа)

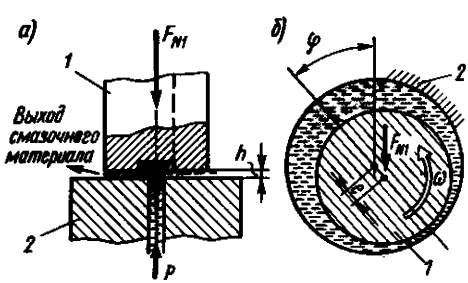


Рис. 8.3

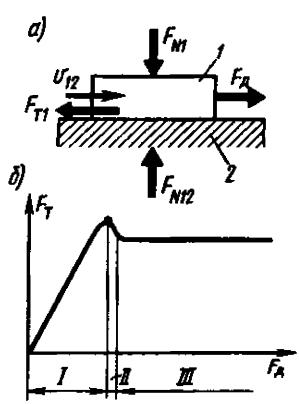


Рис. 8.4

в зазор h между поверхностями трения под внешним давлением p (рис. 8.3, *а*); гидродинамическую (газодинамическую), при которой полное разделение поверхностей трения *1* и *2* осуществляется в результате давления, самовозникающего в слое жидкости при относительном движении поверхностей (рис. 8.3, *б*); эластогидродинамическую, при которой характеристики трения и толщина пленки жидкого смазочного материала между двумя поверхностями определяются упругими свойствами материалов тел и самопроизвольным снижением напряжений, ползучестью, упругим последействием и необратимыми остаточными деформациями материалов, участвующих в трении.

Трению движения (рис. 8.4, *а*) предшествуют трение покоя (зона *I* на рис. 8.4, *б*), т. е. трение между телами *1* и *2* при относительном предварительном микросмещении двух тел, и период перехода (зона *II*) от покоя к скольжению (зона *III*). Предварительное смещение равно расстоянию, при котором сила трения покоя $F_{т.п}$ возрастает от нуля до некоторого максимального значения (рис. 8.4, *б*).

Эти микросмещения перед полным скольжением достаточно малы — порядка 0,1 — 1,0 мкм — в ряде случаев могут быть необратимыми. Силу трения покоя, любое превышение которой ведет к возникновению движения, называют *наибольшей силой трения покоя*. Отношение наибольшей силы трения покоя $F_{т.п}$ двух тел к силе, нормальной относительно поверхностей трения F_{N12}, прижимающей тела друг к другу, называют *коэффициентом сцепления* $f_{т.п}$.

По кинематическому признаку различают следующие виды трения движения: трение скольжения, трение качения, трение верчения, трение качения с проскальзыванием и трение при виброперемещениях.

Процессы трения рассматривают на моделях, позволяющих оценить молекулярное взаимодействие материалов контактирующих тел с учетом влияния внешней среды (оксиды, пленка, смазка). Первоначально разработанные теории механического сцепления, молекулярного притяжения, сваривания, среза и пропахивания получили значительное развитие в молекулярно-механической теории трения, нашедшей наиболее широкое распространение. Согласно этой теории, процесс трения происходит не только на границе раздела твердых тел, но и в некотором объеме поверхностных слоев, физико-механические свойства которых отличаются от свойств материалов в объеме тел. Это связано с деформированием поверхностных слоев, с изменением температуры, с образованием слоев адсорбированных паров влаги или газов, с образованием пленок оксидов, атомов или молекул окружающей среды и т. п.

Общее представление о значении коэффициентов трения сколь-

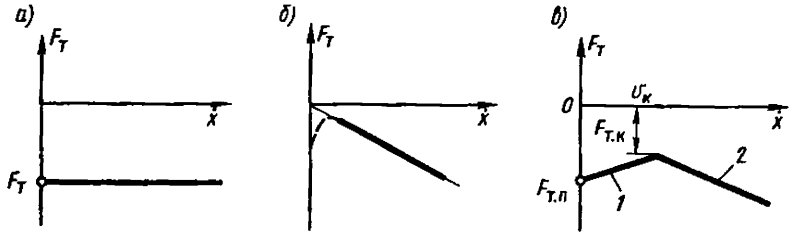


Рис. 8.5

жения $f_т$ дают экспериментальные данные для разных видов трения, приведенные ниже: трение ювенильных поверхностей при отсутствии смазки и оксидов — 0,8 — 6,0; трение окисленных поверхностей — 0,4 — 0,8; граничное трение при наличии мономолекулярного слоя смазки на поверхности — 0,2 — 0,6; граничное трение при наличии мультимолекулярного слоя полярных молекул — 0,1 — 0,4; гидродинамическое трение при наличии слоя неполярных молекул — 0,008 — 0,02; гидродинамическое трение при наличии жидкокристаллической объемной фазы — 0,0001 — 0,001.

Для расчетов механизмов, работающих при разных режимах и видах трения, важное значение имеет зависимость силы трения от скорости $v_{ск}$ относительно движения трущихся поверхностей.

Обобщение экспериментальных данных позволяет принимать для тех или иных условий следующие принципиальные зависимости:

сила сухого трения $F_т$ не зависит от скорости скольжения $v_{ск}=\dot{x}$ (рис. 8.5, *а*)

$$F_т=f_тF_N;$$

сила вязкого трения $F_т$ линейно зависит от скорости скольжения $\dot{x}$ (рис. 8.5, *б*)

$$F_т=k\dot{x};$$

сила сухого трения $F_т$ линейно зависит от скорости скольжения $\dot{x}$, но имеет относительно граничной скорости $v_к$ падающую *1* и возрастающую *2* ветви характеристики (рис. 8.5, *в*).

Резкое падение силы трения с увеличением скорости движения обычно наблюдается в зоне малых скоростей перемещений. Это, например, характерно для технологического оборудования (перемещение суппортов по направляющим, позиционирование автооператоров и роботов). При крутопадающей скоростной характеристике силы трения наблюдаются неустойчивость движения, характерное

скачкообразное движение. Это сопровождается неравномерностью подач, снижением точности обработки, неточностью позиционирования. В связи с этим снижается производительность оборудования, возрастает износ направляющих и инструментов, ухудшается качество обработанных на станках поверхностей деталей, возникают дополнительные динамические нагрузки в механизмах привода.

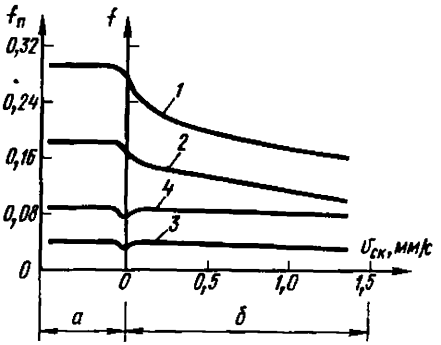


Рис. 8.6

Для уменьшения вредных последствий скачкообразного движения при малых скоростях перемещения используют разные способы. Широко применяют следующие:

— использование разгрузки (механической, пневматической, гидравлической и т. п.) для уменьшения нормального давления;

— уменьшение коэффициента трения во фрикционной паре применением фторопласта (кривая *3* на рис. 8.6) взамен чугуна (кривая *1*) и бронзы (кривая *2*) и антискачковой смазки (кривая *4*);

— использование гидростатической смазки;

— применение вместо опор скольжения направляющих качения.

Затраты энергии на внутренний сдвиг материала и внутриобъемное выделение теплоты при внутреннем трении оценивают демпфирующей способностью или коэффициентом поглощения.

Коэффициентом поглощения ψ (или относительным гистерезисом) называют отношение энергии W, рассеиваемой за один период гармонического колебания, к максимальной упругой энергии U:

$$\psi = W/U.$$

Для металлов коэффициент поглощения при внутреннем трении очень мал (около 0,01 — 0,02 для сталей разных марок) и при расчете звеньев из металла внутреннее трение обычно не учитывают. Однако для высокомолекулярных материалов (например, резины и пластмасс) коэффициент поглощения имеет порядок в пределах 0,1 — 1,0, т. е. почти в 100 раз больше, чем для металлов. Поэтому при расчетах деталей из резины и пластмасс необходимо учитывать потери на внутреннее трение в материале.

Внутреннее трение в твердых телах используется в основном для снижения уровня шумов при ударных и вибрационных нагрузках путем замены металлических материалов пластмассами и композиционными материалами, снижения напряжений в конструкциях, возникающих при колебаниях вблизи резонанса.

§ 8.2. ДЕЙСТВИЕ СИЛ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

В гл. 6. был рассмотрен силовой расчет механизмов без учета трения в кинематических парах. Наличие трения изменяет величину и направление действующих сил. Согласно положениям теоретической механики, при наличии трения скольжения сила взаимодействия двух соприкающихся тел *отклоняется* от общей нормали к их поверхностям на угол трения. Тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения:

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{т}} = f_{\text{т}}. \tag{8.1}$$

В данном параграфе проведен анализ действия сил в кинематических парах с учетом трения.

В поступательной паре сила $\bar{F}_{12}$, приложенная к звену *1* от звена *2*, отклоняется от нормали $n - n$ и составляет тупой угол $90° + \varphi_{\text{т}}$ с вектором скорости $\bar{v}_{12}$ движения звена *1* относительно звена *2* (рис. 8.7, *а*). Как видно из рисунка, касательная составляющая $\bar{F}_{\text{т}12}$ — сила трения — направлена против относительной скорости $\bar{v}_{12}$; в этом проявляется тормозящее действие трения. Обе составляющие реакции $\bar{F}_{12}$ связаны друг с другом соотношением

$$F_{\text{т}12} = f_{\text{т}} F_{N12}. \tag{8.2}$$

Модуль силы $\bar{F}_{12}$ и координата b точки ее приложения (точка D) неизвестны и определяются в ходе силового расчета. Все сказанное целиком относится и к силе $\bar{F}_{21}$ (на рис. 8.7, *а* не показана), приложенной к звену *2* со стороны звена *1*, так как, по третьему закону Ньютона, $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$.

Если в результате расчета получается, что $b > a$ (рис. 8.7, *б*), то

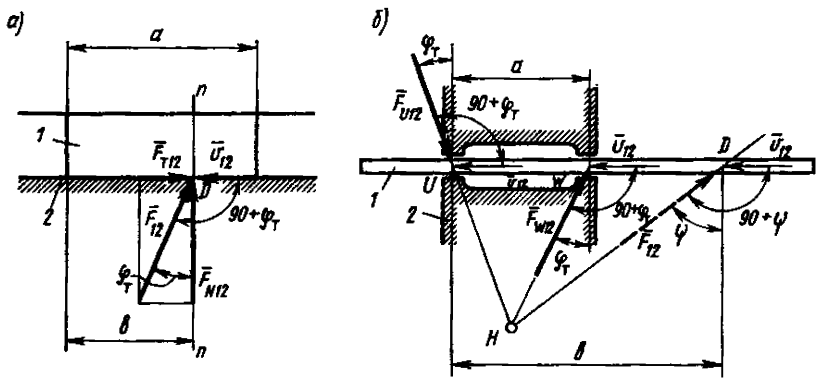


Рис. 8.7

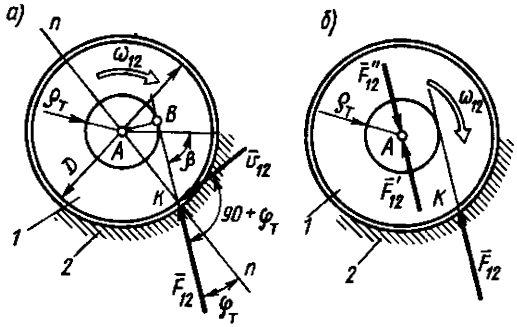


Рис. 8.8

это значит, что к звену *1* приложена не одна, а две реакции $\bar{F}_{U12}$ и $\bar{F}_{W12}$, неизвестные по модулю (см. § 6.1). Вследствие трения они отклоняются от нормали и составляют с вектором относительной скорости $\bar{v}_{12}$ угол $90°+\varphi_т$. Линии действия этих реакций пересекаются в точке *H*. Линия действия их равнодействующей $\bar{F}_{12}$ должна проходить через точки *H* и *D*. Равнодействующая $\bar{F}_{12}$ составляет с вектором $\bar{v}_{12}$ угол $90°+\psi$.

Если точки *D* и *W* совпадают, то $\psi=\varphi_т$ и $F_{U12}=0$. Но чем дальше точка *D* находится от края направляющего гнезда (от точки *W*), тем большим становится угол ψ. Отсюда следует, что суммарное тормозящее действие трения, оцениваемое касательной составляющей $F_{т12}=F_{12}\sin\psi$, в поступательной паре может быть весьма значительным и тем большим, чем дальше располагается точка *D* от точки *W*. Ясно также, что чем меньше размер *a*, тем ближе точка *H* к оси гнезда, тем больше угол ψ, т. е. чем больше трение в поступательной паре. Угол ψ может получиться много больше угла $\varphi_т$. Все это необходимо учитывать при проектировании поступательной пары.

Во вращательной паре (рис. 8.8, *а*) силы взаимодействия $\bar{F}_{12}=-\bar{F}_{21}$ (сила $\bar{F}_{21}$ на рис. 8.8 не показана) также отклоняются от нормали *n—n*, а потому проходят не через центр шарнира, а по касательной к окружности, центр которой совпадает с центром шарнира. Круг, ограниченный этой окружностью, называют **кругом трения**. Его радиус равен $\rho_т=(D/2)\sin\varphi_т$, где *D* — диаметр вала (оси шарнира). Так как угол трения $\varphi_т$ обычно не превышает 6 — 7°, то $\sin\varphi_т\approx\mathrm{tg}\varphi_т=f_т$. Поэтому с некоторым допущением можно принять

$$\rho_т=(D/2)f_т. \qquad (8.3)$$

Модуль силы $\bar{F}_{12}$ и положение точек *K* и *B*, а следовательно,

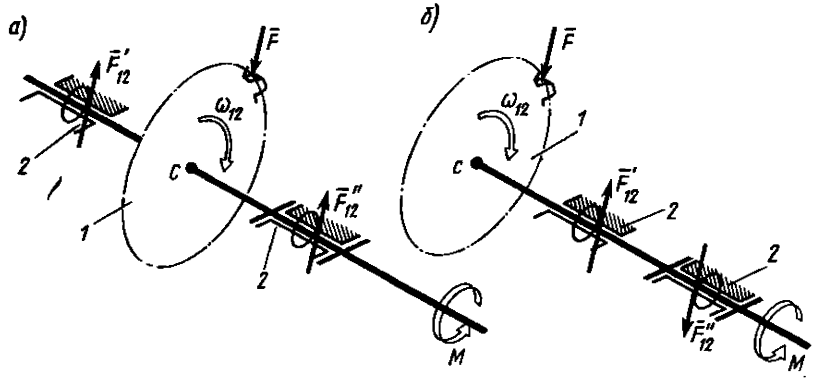


Рис. 8.9

и направлении линии действия силы $\bar{F}_{12}$, координируемое углом β, неизвестны и определяются силовым расчетом.

Действие силы $\bar{F}_{12}$ (рис. 8.8, *а*) можно заменить совместным действием силы $\bar{F}_{12}$, равной $\bar{F}_{12}$ и приложенной в центре шарнира, и пары сил $[\bar{F}_{12}, \bar{F}''_{12}]$ (рис. 8.8, *б*). Направление действия пары сил $[\bar{F}_{12}, \bar{F}''_{12}]$ противоположно угловой скорости ω_{12}, с которой звено *1* вращается относительно звена *2*. В этом проявляется тормозящее действие трения в шарнире. Пару сил $[\bar{F}_{12}, \bar{F}''_{12}]$, приложенную к звену *1* от звена *2*, будем называть моментом трения в шарнире, величина которого составит

$$M_{\text{т}12} = F_{12}\rho_{\text{т}}. \tag{8.4}$$

Очевидно, что $M_{\text{т}21} = -M_{\text{т}12}$.

Вращательная пара может быть выполнена конструктивно в виде двух подшипников. Если подшипники расположены по разные стороны от плоскости, в которой действует нагружающая сила $\bar{F}$ (рис. 8.9, *а*), то реакции обоих подшипников направлены в одну и ту же сторону и могут быть заменены равнодействующей $\bar{F}_{12}$, равной их арифметической сумме. По этой равнодействующей и подсчитывается общий момент трения обоих подшипников: $M_{\text{т}12} = F_{12}\rho_{\text{т}}$.

Иная картина будет, если подшипники находятся по одну сторону от плоскости, в которой действует нагружающая сила $\bar{F}$ (рис. 8.9, *б*) (например, при консольном расположении зубчатого колеса). В таком случае реакции подшипников направлены в противоположные стороны и равнодействующая этих реакций определяется уже их разностью (а не суммой), в то время как общий момент трения обоих подшипников по-прежнему равен арифметической сумме моментов трения в каждом подшипнике. Следовательно, общий мо-

мент трения нельзя оценивать посредством момента равнодействующей силы, так как трение при этом было бы сильно недоучтено. При одностороннем расположении подшипников силовой расчет с учетом трения нужно проводить, рассматривая в отдельности реакцию каждого подшипника, и нельзя заменять обе реакции их равнодействующей.

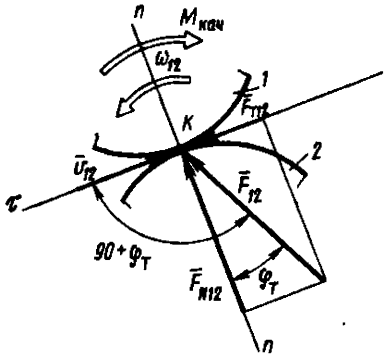


Рис. 8.10

Высшая кинематическая пара (рис. 8.10) в плоском механизме допускает два относительных движения: звенья *1* и *2* могут скользить ($\bar{v}_{12}$) и перекатываться друг по другу (ω_{12}). Поэтому и трение в высшей кинематической паре проявляется двояко: в виде трения скольжения и трения качения. Тормозящее действие трения качения ($M_{кач}$) в большинстве случаев весьма невелико, и поэтому его в дальнейшем учитывать не будем. Конечно, при расчете подшипников качения, при исследовании движения тяжелых предметов на подкладных катках и рольгангах и в других подобных задачах трением качения пренебрегать нельзя. Но такие задачи относятся к области специальных расчетов, а поэтому выходят за рамки учебной дисциплины.

Трение скольжения проявляет себя в высших кинематических парах так же, как и в низших: сила $\bar{F}_{12}$, приложенная к звену *1* от звена *2*, отклоняется от нормали на угол трения $\varphi_т$ и составляет с вектором относительной скорости $\bar{v}_{12}$ угол $90°+\varphi_т$. Угол $\varphi_т$ подсчитывается по уравнению (8.1). Касательная составляющая $\bar{F}_{т12}$ — сила трения — направлена навстречу относительной скорости $\bar{v}_{12}$. В этом проявляется тормозящее действие трения. Модуль сил взаимодействия $\bar{F}_{12}=-\bar{F}_{21}$ неизвестен и определяется силовым расчетом.

Если относительное движение в высшей паре сводится к одному лишь чистому качению (т. е. $v_{12}=0$), то сила трения $F_{т12}$ отнюдь не обязательно должна быть равной нулю. В этом случае она является **силой трения покоя**.

Сила трения покоя подчиняется соотношению $F_{т.п}\leqslant f_{т.п}F_N$, справедливому для любой кинематической пары. Допуская небольшую ошибку, можно принять $f_{т.п}\approx f_т$*. Поэтому для угла трения $\varphi_{т.п}$, на

*Напомним, что коэффициент сцепления $f_{т.п}$, строго говоря, несколько больше коэффициента трения скольжения $f_т$.

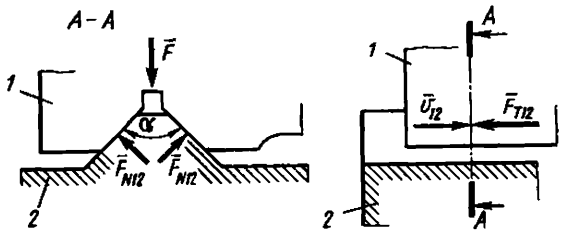


Рис. 8.11

который при покое фактически отклоняется реакция, имеет место следующее соотношение: $\varphi_{т.п} \leqslant \varphi_т$, где $\varphi_т = \operatorname{arctg} f_т$ — угол трения скольжения. Если при покое трение не проявляет себя, то $\varphi_{т.п} = 0$, и реакция направлена нормально поверхности соприкосновения.

Как было отмечено ранее (см. § 8.1), коэффициенты трения зависят от многих причин и определяются опытным путем. Поэтому в справочниках приведены лишь усредненные значения коэффициентов трения $f_э$, вследствие чего результаты силового расчета всегда имеют *некоторую погрешность*.

Следует также иметь в виду, что значение коэффициента трения $f_т$, подставляемое в расчетные формулы, зависит от конструктивного исполнения кинематической пары и может весьма заметно отличаться от значения $f_э$, получаемого из физического эксперимента с плоскими образцами. Так, если поступательная пара в сечении, перпендикулярном вектору относительной скорости $\bar{v}_{12}$, имеет клиновидную форму, например кинематическая пара, образованная задней бабкой *1* и направляющими станины *2* токарного станка (рис. 8.11), то в формулу $F_{т12} = f_т F$ подставляют расчетное значение коэффициента трения, определяемое по уравнению $f_т = f_э / \sin(\alpha/2)$.

Во вращательной паре расчетное значение $f_т$, подставляемое в уравнение (8.3), зависит от степени приработанности звеньев, составляющих пару. Для неприработавшихся звеньев принимают $f_т = 1{,}57 f_э$, а для приработанных — $f_т = 1{,}27 f_э$.

В винтовой паре соотношение между $f_т$ и $f_э$ определяется профилем резьбы (см.: *Решетов Д. Н.* Детали машин. М., 1989).

Необходимо иметь в виду, что все вышеизложенное о действии сил в кинематических парах справедливо в случае *отсутствия смазки и при граничной смазке*. В случае жидкостной смазки существенное влияние на действие сил оказывает скоростной режим кинематической пары.

§ 8.3. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМА С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

Основные положения силового расчета с учетом трения такие же, как и расчета без учета трения (см. § 6.1). Это объясняется тем, что, согласно анализу действия сил в кинематических парах, сделан-

ному в § 8.2, наличие трения *не изменяет* числа неизвестных в кинематических парах. Следовательно, структурные группы Ассура и при учете трения *сохраняют свою статическую определимость*. Поэтому силовой расчет проводится по структурным группам с использованием уравнений кинетостатики (6.1) — (6.3), в которые должны быть включены силы трения и моменты трения. Последнее обстоятельство, однако, в большинстве случаев очень сильно усложняет вычисления. Чтобы снизить их сложность, И. И. Артоболевский предложил применить *метод последовательных приближений*. Покажем, как выполняется силовой расчет этим методом на конкретном примере кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 6.7).

Для силового расчета с учетом трения в состав исходных данных надо дополнительно ввести коэффициенты трения в кинематических парах: $f_{тA}$, $f_{тB}$, $f_{тC}$, $f_{т34}$. Кроме того, из кинематического расчета механизма должны быть получены направления относительных скоростей во всех кинематических парах, т. е. ω_{14}, ω_{21}, ω_{23}, v_{34}.

Напомним, что силовой расчет кривошипно-ползунного механизма без учета трения, или в начальном приближении, был уже проделан (см. § 6.2), в результате чего были получены силы взаимодействия во всех кинематических парах, т. е. силы $\bar{F}_{14}$, $\bar{F}_{21}$, $\bar{F}_{23}$, $\bar{F}_{34}$.

Теперь выполним расчет в следующем, первом приближении. Для этого по заданным диаметрам шарниров A, B и C определим радиусы кругов трения в них: $\rho_{тA}=(D_A/2)f_{тA}$, $\rho_{тB}=(D_B/2)f_{тB}$, $\rho_{тC}=(D_C/2)f_{тC}$ [см. уравнение (8.3)], а затем и моменты трения в этих шарнирах: $M_{т14}=F_{14}\rho_{тA}$, $M_{т21}=F_{21}\rho_{тB}$, $M_{т23}=F_{23}\rho_{тC}$ [см. уравнение (8.4)]. Найдем также силу трения в поступательной паре *3/4*: $F_{т34}=f_{т34}F_{N34}$, где $F_{N34}=F_{34}$.

Расчет в первом приближении делается в *том же порядке*, что и в начальном приближении. Следовательно, как и прежде, начнем его со структурной группы *2-3*

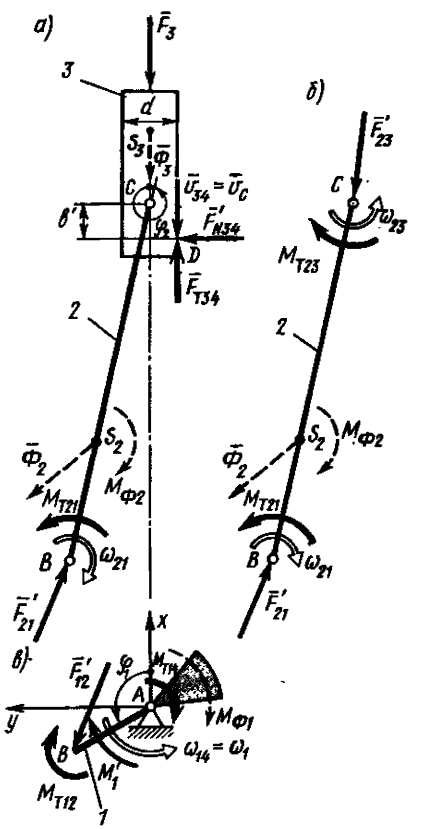


Рис. 8.12

(рис. 8.12, *а*). К ее звеньям приложены известные силы и моменты $\bar{\Phi}_2$, $M_{\Phi 2}$, $\bar{\Phi}_3$ и движущая сила $\bar{F}_3$. К звеньям *2* и *3* приложены также подсчитанные выше момент трения $M_{\tau 21}$, сила трения $\bar{F}_{\tau 34}$ и моменты трения $M_{\tau 23}$ и $M_{\tau 32}=-M_{\tau 23}$ в шарнире *C* (на рис. 8.12, *а* не показаны). Сила и моменты трения направлены навстречу соответствующим относительным скоростям. Неизвестными являются модуль и направление силы $\bar{F}_{21}'$, модуль нормальной составляющей F_{N34}' и плечо b', модуль и направление сил взаимодействия $\bar{F}_{23}'=-\bar{F}_{32}'$ в шарнире *C* (рис. 8.12, *б*).

Сумма проекций на ось *x* сил, приложенных к звену *3*, равна нулю: $\sum\limits_3 F_x=0$. В развернутом виде получим

$$F_{3x}+\Phi_{3x}+F_{34x}'+F_{32x}'=0, \tag{8.5}$$

где $F_{34x}'=F_{\tau 34}$.

Из уравнения (8.5) определим F_{32x}'. Напомним, что уравнение (8.5), как все последующие уравнения проекций и моментов, записано в алгебраическом виде. Поэтому числовые значения координат точек и проекций сил должны подставляться во все уравнения со строгим соблюдением их знаков.

Сумма моментов относительно точки *B* всех сил, приложенных к звену *2*, равна нулю: $\sum\limits_2 M_B=0$. Отсюда

$$F_{23y}'(x_C-x_B)-F_{23x}'(y_C-y_B)+\Phi_{2y}(x_{S2}-x_B)-\Phi_{2x}(y_{S2}-y_B)+$$
$$+M_{\Phi 2}+M_{\tau 21}+M_{\tau 23}=0. \tag{8.6}$$

В уравнении (8.6) искомой величиной является F_{23y}'.

Сумма проекций на ось *x* для звена *2*: $\sum\limits_2 F_x=0$, или

$$F_{23x}'+\Phi_{2x}+F_{21x}'=0, \tag{8.7}$$

откуда определяем проекцию F_{21x}'.

Сумма проекций на ось *y* для звена *2*: $\sum\limits_2 F_y=0$, т. е.

$$F_{23y}'+\Phi_{2y}+F_{21y}'=0, \tag{8.8}$$

где искомой величиной является F_{21y}'.

Сумма проекций на ось *y* для звена *3*: $\sum\limits_3 F_y=0$, откуда

$$F_{32y}'+F_{34y}'=0. \tag{8.9}$$

Из уравнения (8.9) найдем F_{34y}', или F_{N34}'.

Составим уравнение моментов для звена *3*: $\sum\limits_{3} M_C=0$:

$$F'_{34y}(x_D-x_C)-F'_{34x}(y_D-y_C)+M_{\tau 32}=0, \qquad (8.10)$$

где $y_C=0$, $y_D=-d/2$ (рис. 8.12).

Из уравнения (8.10) найдем искомую величину плеча: $b'=x_C-x'_D$, а затем и координату x'_D.

Зная проекции сил, определим их модули F'_{21}, F'_{23}, F'_{34} и угловые координаты φ'_{F21}, φ'_{F23} (см. § 6.2).

Перейдем к силовому расчету двухзвенного механизма *1 — 4* (рис. 8.12, *в*). К его подвижному звену *1* приложены следующие силы и моменты: ставшая известной сила $\bar{F}'_{12}=-\bar{F}'_{21}$, главный момент сил инерции $M_{\Phi 1}$, моменты трения $M_{\tau 14}$ и $M_{\tau 12}=-M_{\tau 21}$ в шарнирах *A* и *B*; неизвестными являются момент полезного сопротивления M'_1, а также модуль и направление реакции $\bar{F}'_{14}$ в кинематической паре *1 — 4* (на рис. 8.12, *в* не показана).

Проекции реакции стойки $\bar{F}'_{14}$ найдем из уравнений $\sum\limits_{1} F_x=0$, $\sum\limits_{1} F_y=0$:

$$F'_{14x}+F'_{12x}=0; \qquad (8.11)$$

$$F'_{14y}+F'_{12y}=0, \qquad (8.12)$$

а затем модуль силы $\bar{F}'_{14}$ и ее угловую координату φ'_{F14}.

Момент полезного сопротивления M'_1 подсчитаем из уравнения моментов $\sum\limits_{1} M_A=0$:

$$M_A(\bar{F}'_{12})+M'_1+M_{\Phi 1}+M_{\tau 12}+M_{\tau 14}=0, \qquad (8.13)$$

где $M_A(\bar{F}'_{12})=F'_{12y}x_B-F'_{12x}y_B$.

Значение M'_1 получится меньше значения M_1, взятого из начального приближения, выполненного без учета трения. Такой результат очевиден, так как при наличии трения заданная движущая сила F_3 преодолевает уже меньшее полезное сопротивление, чем то, которое могла бы преодолеть, если бы трения не было.

В результате силового расчета, выполненного в первом приближении, получены *уточненные* значения сил $\bar{F}'_{14}$, $\bar{F}'_{21}$, $\bar{F}'_{23}$, $\bar{F}'_{N34}$, действующих в кинематических парах, и плеча b'. Для этого были использованы уравнения (8.5) — (8.13), в существе своем такие же, как и уравнения (6.7) — (6.15).

По полученным в первом приближении значениям сил можно определить моменты трения в шарнирах и силу трения в поступательной паре *3/4*, а затем проделать расчет во втором приближении, используя уравнения, подобные (8.5) — (8.13). В результате получим еще более точные, более близкие к окончательному результату значения $\bar{F}''_{14}$, $\bar{F}''_{21}$, $\bar{F}''_{23}$, $\bar{F}''_{N34}$ и b''. Процесс последовательных приближений можно продолжать и дальше в зависимости от требуемой степени точности расчета. Однако опыт показывает, что достаточно первого приближения.

Метод последовательных приближений можно применять, когда механизм *далек* от самоторможения. В этом случае обеспечивается быстрая сходимость решения к точному. При самоторможении метод последовательных приближений *принципиально непригоден*. Явление самоторможения будет рассмотрено в § 8.4.

§ 8.4. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ НА ТРЕНИЕ. МЕХАНИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

Энергия, подводимая к механизму в виде работы $A_д$ движущих сил и моментов за цикл установившегося режима, расходуется на совершение полезной работы $A_{пс}$, т. е. работы сил и моментов полезного сопротивления, а также на совершение работы $A_т$, связанной с преодолением сил трения в кинематических парах и сил сопротивления среды: $A_д = A_{пс} + A_т$. Значения $A_{пс}$ и $A_т$ подставляются в это и в последующие уравнения по абсолютной величине.

Механическим коэффициентом полезного действия (или сокращенно КПД) называют отношение

$$\eta = A_{пс}/A_д. \tag{8.14}$$

Как видно, КПД показывает, какая доля механической энергии, подведенной к машине, полезно расходуется на совершение той работы, для которой машина создана (например, на выполнение технологической обработки изделий, на производство электроэнергии, на подъем груза и т. п.).

Отношение $\xi = A_т/A_д$ называют *механическим коэффициентом потерь*, который характеризует, какая доля механической энергии $A_д$, подведенной к машине, вследствие наличия различных видов трения превращается в конечном счете в теплоту и бесполезно теряется, рассеиваясь в окружающем пространстве. Так как потери на трение неизбежны, то всегда $\xi > 0$. Между коэффициентом потерь и КПД существует очевидная связь: $\xi = 1 - \eta$. В современных условиях, когда экономное расходование энергии является одной из первоочередных задач народного хозяйства, КПД и коэффициент потерь являются важными характеристиками механизмов машин.

В уравнение (8.14) вместо работ $A_д$ и $A_{пс}$, совершаемых за цикл, можно подставлять средние за цикл значения соответствующих мощностей:

$$\eta = P_{пс}/P_д. \tag{8.15}$$

Для механизмов различных передач (зубчатых, ременных и др.), имеющих один ведущий (индекс «вщ») и один ведомый (индекс «вм») валы, уравнение (8.15) принимает вид

$$\eta = \frac{M_{вм}\omega_{вм}}{M_{вщ}\omega_{вщ}} = \frac{M_{вм}}{M_{вщ}u}.$$

Если с механизма, находящегося в установившемся движении, снята полезная нагрузка ($A_{пс}=0$), то такой режим называют *холостым ходом*. Очевидно, что $\eta_{х.х}=0$, $\xi_{х.х}=1$, так как вся энергия, подводимая к механизму при холостом ходе, тратится только лишь на преодоление его собственных потерь. Отсюда следует, что $0 \leqslant \eta < 1$, $1 \geqslant \xi > 0$.

Подчеркнем, что КПД и коэффициент потерь определяются только тогда, когда механизм находится в установившемся движении. Если оно является периодически изменяющимся, то КПД и коэффициент потерь представляет собой средние за цикл энергетические характеристики механизма.

Обычно КПД отдельных механизмов определяют экспериментально и указывают в справочниках. Расчетные формулы для определения КПД системы механизмов, соединенных последовательно или параллельно, приведены в литературе [1, 2, 3, 4].

Рассмотрим, каким образом определяют КПД отдельного механизма расчетным путем, например механизма двойного клина (рис. 8.13, *а*). Пусть к клину *1* приложена движущая сила $\bar{F}_1$, перемещающая его вниз. При этом клин *2* будет отжиматься вправо, преодолевая действие пружины. Это будет прямым ходом механизма. Перемещения клиньев связаны векторным соотношением $\bar{\Delta s}_2 = \bar{\Delta s}_1 + \bar{\Delta s}_{21}$ (рис. 8.13, *б*), откуда

$$\Delta s_2 = \Delta s_1 \operatorname{tg}\gamma. \tag{8.16}$$

При прямом ходе на клин *1* кроме движущей силы $\bar{F}_1$ действуют еще реакции $\bar{F}_{12}$ и $\bar{F}_{13}$, которые вследствие трения составляют с относительными перемещениями $\bar{\Delta s}_{12}$ и $\bar{\Delta s}_{13} = \bar{\Delta s}_1$ угол $90° + \varphi_т$. Так как КПД определяется в обязательном предположении, что звенья движутся равномерно, то силы инерции принимаются равными нулю. При определении КПД не рассматриваются также силы тяжести звеньев.

По уравнению сил, приложенных к клину *1*, $\bar{F}_1 + \bar{F}_{13} + \bar{F}_{12} = 0$

строим план сил (рис. 8.13, *в*), для которого, используя теорему синусов, записываем

$$F_{12}/\sin(90^\circ-\varphi_т)=F_1/\sin(\gamma+2\varphi_т),$$

отсюда

$$F_{12}=F_1\frac{\cos\varphi_т}{\sin(\gamma+2\varphi_т)}. \qquad (8.17)$$

На клин *2* действуют сила $\bar{F}_{21}=-\bar{F}_{12}$, сила полезного сопротивления $\bar{F}_2$ и реакция $\bar{F}_{23}$ (рис. 8.13, *а*), связанные уравнением $\bar{F}_{21}+\bar{F}_{23}+\bar{F}_2=0$. Из плана сил (рис. 8.13, *в*) по теореме синусов находим

$$F_2=F_{21}\frac{\cos(\gamma+2\varphi_т)}{\cos\varphi_т}. \qquad (8.18)$$

КПД при прямом ходе составит

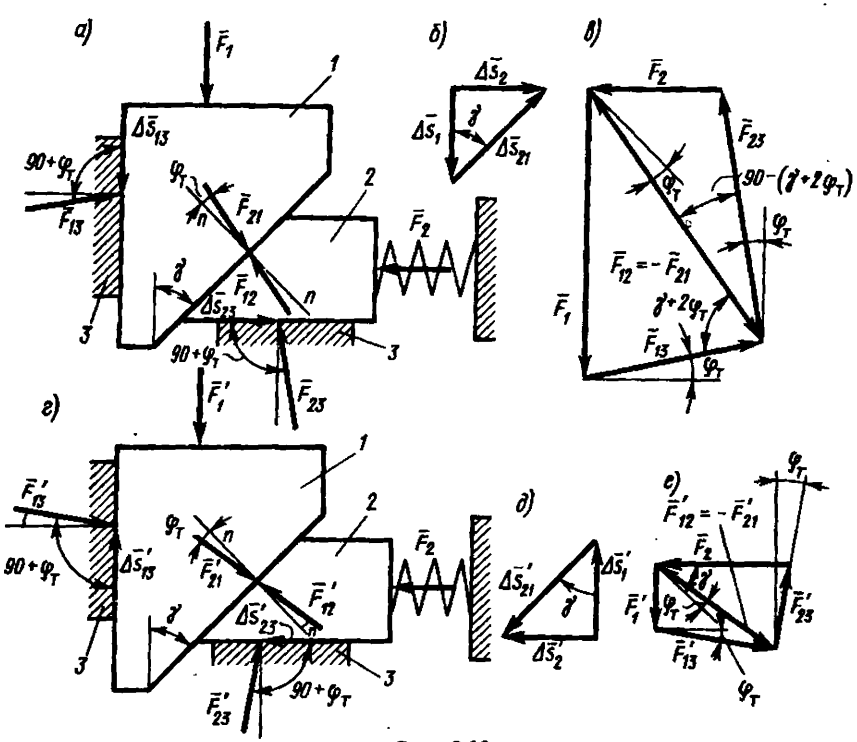


Рис. 8.13

$$\eta_{пр}=F_2\Delta s_2/(F_1\Delta s_1),$$

или, используя уравнения (8.16) — (8.18), получим

$$\eta_{пр}=\mathrm{tg}\gamma/\mathrm{tg}(\gamma+2\varphi_т). \qquad (8.19)$$

Добавим, что для винтовой пары скольжения и для червячной зубчатой пары КПД имеет схожее выражение

$$\eta=\mathrm{tg}\gamma/\mathrm{tg}(\gamma+\varphi_т),$$

где γ — угол подъема витков винта или червяка.

Допустим, что прямой ход закончился, клинья *1* и *2* остановились, а затем под действием силы $\bar{F}_2$ начали свое обратное движение. При этом изменит свое направление и поток энергии: сила $\bar{F}_2$ станет движущей, а сила $\bar{F}'_1$ — силой полезного сопротивления (рис. 8.13, *г*). Треугольник перемещений при обратном ходе показан на рис. 8.13, *д*: направления всех перемещений изменились на обратные. Поэтому силы трения в кинематических парах также изменят свои направления на противоположные. С учетом этого построим план сил при обратном ходе (рис. 8.13, *е*). Нетрудно заметить, что в уравнениях знаки при углах трения должны также измениться на противоположные.

Запишем КПД обратного хода: $\eta_{об}=F_1\Delta s_1/(F_2\Delta s_2)$. Чтобы раскрыть это выражение, нет необходимости повторять силовой расчет. Определить $\eta_{об}$ можно так: взять величину, обратную $\eta_{пр}$ [см. уравнение (8.19)], и изменить знак при угле трения на обратный, т. е.

$$\eta_{об}=\mathrm{tg}(\gamma-2\varphi_т)/\mathrm{tg}\gamma.$$

Если выполнить механизм с углом $\gamma<2\varphi_т$, то прямой ход будет возможен: сила $\bar{F}_1$ переместит клин *1* вниз, а клин *2* будет отодвинут вправо. Однако обратный ход будет невозможен: если $\gamma<2\varphi_т$, то клин *1* при обратном ходе защемляется между клином *2* и вертикальной стенкой стойки, так что движущая сила $\bar{F}_3$, сколь бы велика она ни была, не сможет осуществить обратный ход, даже если с клина *1* снять полезную нагрузку $\bar{F}'_1$. Наступает *самоторможение при обратном ходе*. Обратный ход был бы возможен, если силу $\bar{F}'_1$ сделать также движущей, направив ее вверх. Тогда она будет вытаскивать клин *1* вверх, помогая движущей силе $\bar{F}_2$ осуществлять обратный ход.

Самоторможение механизма при обратном ходе используется в клиновых соединениях, а также в эксцентриковых зажимах, винтовых домкратах и др.

Если угол γ назначить в пределах $2\varphi_т<\gamma<90°-2\varphi_т$, то будет возможен как прямой, так и обратный ход. Часть энергии, подве-

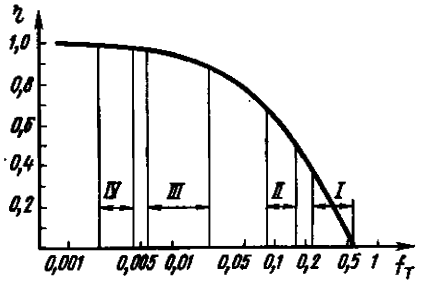


Рис. 8.14

денной к клину *1* при прямом ходе, будет возвращена ему при обратном ходе, другая весьма значительная часть энергии будет поглощена трением. Этим свойством клиновых механизмов широко пользуются в различных поглощающих устройствах, например в механизмах автосцепок локомотивов и вагонов.

При $\gamma > 90° - 2\varphi_т$ прямой ход механизма становится невозможным. В этом случае клин *2* защемляется между клином *1* и горизонтальной опорной плоскостью стойки; движущая сила $\bar{F}_1$, сколь бы велика она ни была, не может вызвать прямой ход механизма, даже если с клина *2* снять полезную нагрузку $\bar{F}_2$; наступает самоторможение при прямом ходе. Механизм в этом случае абсолютно неработоспособен и применения не имеет.

Для механизма, находящегося в состоянии самоторможения, КПД теряет физический смысл, так как механизм при этом неподвижен и силы никакой работы не совершают. Однако если формально подсчитать КПД при самоторможении, то получим $\eta_с < 0$; абсолютной величиной $\eta_с$ характеризуют «надежность» самоторможения.

Возникновение самоторможения обусловлено обязательным наличием трения. Чем слабее трение (чем меньше $f_т$, а следовательно, и $\varphi_т$), тем у́же область самоторможения. При отсутствии трения самоторможение механизма наступить не может. У такого идеального механизма $\eta_{пр} = \eta_{об} = 1$ во всем диапазоне углов γ (кроме 0 и 90°).

Подсчитаем мощность сил трения, необходимую для расчета износа трущихся поверхностей. Мощность силы трения на поверхности соприкосновения клина *1* и стойки *3* составит $P_{13т} = F_{13т} v_{13} = F_{13} \sin \varphi_т v_{13}$. Точно так же $P_{12т} = F_{12} \sin \varphi_т v_{12}$, $P_{23} = F_{23} \sin \varphi_т v_{23}$. Связь между скоростями такая же, как и между перемещениями (рис. 8.13, *б*). Поэтому если клин *1* движется со скоростью v_1, то $v_{13} = v_1$, $v_{12} = v_1/\cos\gamma$, $v_{23} = v_1 \cdot \operatorname{tg}\gamma$.

В заключение рассмотрим уравнение (8.19). Из него следует, что коэффициент трения $f_т$, определяющий значение угла трения $\varphi_т$, оказывает большое влияние на КПД. Эта зависимость наглядно показана на рис. 8.14 (при $\gamma = 30°$) для разных видов трения и смазки: *I* — трение без смазочного материала $\eta = 5$ — 40%; *II* — гранич-

ная смазка $\eta = 50 - 70\%$; *III* — гидродинамическая и гидростатическая смазка $\eta = 90 - 97\%$; *IV* — трение качения* $\eta = 98 - 99\%$.

Рассмотренный пример показывает, что высокие значения КПД можно получить только при замене трения скольжения трением качения или в условиях совершенной жидкостной смазки. Поэтому в современных конструкциях станков с программным управлением, в прецизионных станках и другом технологическом оборудовании, где требуется высокая точность позиционирования и малые потери мощности на трение, широкое распространение получили шариковые винтовые пары качения или гидростатические передачи винт — гайка. В первом случае по винтовым канавкам винта и гайки перекатываются шарики, а во втором случае между рабочими поверхностями винта и гайки создается масляный слой, давление в котором поддерживается на требуемом уровне.

ГЛАВА 9
ИЗНОС ПОВЕРХНОСТЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР МЕХАНИЗМОВ

При трении контактных поверхностей в механизмах и машинах возникает изнашивание — процесс постепенного изменения размеров и формы элементов кинематических пар, проявляющийся в отделении с поверхности трения материала деталей и (или) его остаточной деформации. Характер и интенсивность изнашивания зависят от большого числа факторов, которые подробно изучаются в дисциплине «Трибоника» (или «Триботехника») или в других курсах. Важнейшими факторами являются химико-термические явления в зоне контакта, смазка поверхностей, механические явления в условиях высоких локальных температур и др. В рамках данной дисциплины обсуждаются влияние на изнашивание сил и скорости скольжения в кинематических парах механизмов и их учет при расчете и прогнозировании износа механизмов.

§ 9.1. МЕХАНИКА КОНТАКТА И ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗНАШИВАНИЯ

Контакт элементов кинематических пар является дискретным в связи с наличием на поверхностях отклонений от номинальных размеров, расположения и формы и шероховатости, т. е. совокупности неровностей с относительно малыми шагами и высотой от 0,05 — 0,10 мкм (гладкие поверхности) до 100 — 200 мкм (грубые металлические поверхности). Дискретный контакт происходит на отдельных площадках в контактной зоне. Поэтому при расчетах износа различают три вида площади контакта: номинальную A_a, контурную A_c и фактическую A_r. Так как реальный контакт твердых тел дискретен, то деформируются микрообъемы материала, к кото-

*При трении качения надо брать приведенный коэффициент трения $f_т^{пр}$ и приведенный угол трения $\varphi_т^{пр} = \mathrm{arctg} f_т^{пр}$.

рым неприменимы классические расчеты на прочность. Свойства материалов, участвующих в трении, обычно сильно отличаются от свойств исходных материалов деталей и изменяются в процессе изнашивания поверхностных слоев. Различают три стадии процесса изнашивания: приработка, установившийся процесс изнашивания и катастрофический износ, который отличается интенсивностью изнашивания. Составить простую модель изнашивания не удается, так как следует учитывать огромное число факторов: скорости относительного движения, нормальные и тангенциальные силы, вид деформации (упругая, пластическая, упругопластическая), механические свойства тел (твердость, модули упругости и т. д.), топографию шероховатых поверхностей, макрогеометрию элементов пар (плоские и пространственные контакты), температурный режим, химическое взаимодействие и т. д.

В связи с этим инженерные расчеты по износу элементов кинематических пар проводят с помощью интегральных характеристик: скорость изнашивания и интенсивность изнашивания.

Различают износ линейный $И_h$ (в направлении, нормальном к поверхности трения), износ по массе $И_m$ и износ объемный $И_v$.

Отношение износа к пути трения $L_т$, на котором произошел этот износ, называют *интегральной интенсивностью изнашивания* соответственно:

линейной $I_h = И_h/L_т$ (мкм/км);

массовой $I_m = И_m/L_т$ (г/м);

объемной $I_v = И_v/L_т$ (мм^3/м).

Отношение линейного износа ко времени, в течение которого он произошел, называют *скоростью линейного изнашивания*:

$$\gamma_h = dИ_h/dt = \Delta И_h/\Delta t \text{ (мкм/ч)}.$$

Отношение объема изношенного материала $И_v$ к работе сил трения $F_т$, вызвавших это изнашивание за время t, называют *энергетической интенсивностью изнашивания*:

$$I_w = И_v/\left(\int_0^t F_т v_{ск} dt\right) \text{ (мм}^3\text{/Дж)}.$$

Свойство материала оказывать сопротивление изнашиванию в определенных условиях трения называют *износостойкостью*. Износостойкость — величина, обратная скорости изнашивания или интенсивности изнашивания. В расчетах иногда используют *удельную работу сил трения* на единицу объема изношенного объема (или массы, или толщины слоя):

$$\gamma_w = \frac{1}{I_w} = \frac{\int_0^t F_T V_{ск} dt}{И_v}.$$

Единицы измерения:

$$[\gamma_{wv}] = Дж/мм^3;\ [\gamma_{wm}] = Дж/г;\ [\gamma_{wh}] = Дж/мкм.$$

Линейная интенсивность изнашивания меняется в широких пределах: от 10^{-3} до 10^{-13}. Конкретные значения для разных условий получают на основе накопленного опыта и экспериментальных исследований.

Для примера можно проанализировать следующие характерные значения интенсивности изнашивания некоторых деталей машин (безразмерный коэффициент).

1. Коленчатые валы автомобилей:
   шатунные шейки — $4 \cdot 10^{-11}$ — $5 \cdot 10^{-12}$;
   коренные шейки — $(1{,}6 — 1{,}8)\,10^{-12}$.
2. Гильзы цилиндров двигателей автомобиля — $(1{,}1 — 5{,}6)10^{-11}$.
3. Поршневые кольца двигателей — $(0{,}6 — 1{,}2)10^{-11}$.
4. Направляющие станин станков — $(0{,}4 — 2{,}0)10^{-10}$.
5. Зубчатые колеса экскаватора — $5 \cdot 10^{-12}$ — $1{,}5 \cdot 10^{-11}$.
6. Зуб ковша экскаватора — 10^{-4} — 10^{-3}.
7. Режущий инструмент из твердого сплава — $10^{-10}(1{,}3 — 2{,}9)10^{-9}$.
8. Фрикционные элементы тормозов (колодочные — дисковые) — $2 \cdot 10^{-6}$ — $4 \cdot 10^{-10}$.

Основные факторы, влияющие на интенсивность изнашивания, следующие:

Удельная нагрузка (номинальное давление p_a). Для неприработанных поверхностей $I_h \sim p_a^{(1,4-3)}$, для приработанных $I_h \sim p_a$, т. е. можно принимать I_h пропорциональным давлению в зоне контакта.

Упругие свойства материала. Показатель степени модуля упругости E в зависимости влияния на интенсивность изнашивания изменяется в очень широких пределах, например для направленной шероховатой поверхности 0,6 — 7,0.

Прочность материала. Чем прочнее материал при испытании на разрыв, тем выше его износостойкость.

Коэффициент трения. Коэффициент трения зависит от очень многих условий (свойств материала, нагрузки, шероховатости, молекулярного взаимодействия на контакте и др.). Показатель степени при коэффициенте трения изменяется в пределах от 2 до 10.

Шероховатость и волнистость поверхности оказывают на износ значительное влияние на стадии приработки (иногда до 2 — 4 порядков). После приработки поверхности исходная микрогеометрия шероховатой поверхности практически не оказывает влияния.

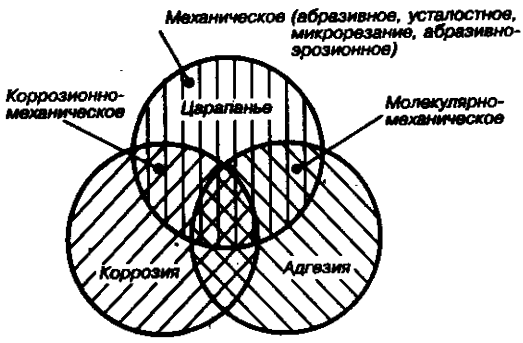


Рис. 9.1

Вид относительного движения. Износ деталей машин связан с четырьмя основными видами относительного движения: скольжением, качением, ударом и вибрацией. На практике часто наблюдается сочетание этих движений, например скольжение с качением, скольжение с вибрацией, качение с ударами и т. д.

Действующие при этих движениях механизмы поверхностного изнашивания очень сложны, взаимосвязаны. Однако здесь различают три основные группы изнашивания: механическое, молекулярно-механическое и коррозионно-механическое (рис. 9.1).

Механическое изнашивание обусловлено механическим взаимодействием между материалами трущихся тел. Это все виды абразивного изнашивания в результате режущего или царапающего действия твердых частиц и включений; эрозионное изнашивание при воздействии потока газов, жидкостей или твердых частиц; кавитационное изнашивание при движении тела в жидкости в условиях кавитации; усталостное изнашивание в результате повторного деформирования микрообъемом материала, приводящего к возникновению трещин и отделению частичек материала.

Молекулярно-механическое изнашивание происходит в результате одновременного механического воздействия и действия молекулярных и (или) атомарных сил. Закономерности этого вида изнашивания установлены молекулярно-механической (адгезионно-деформационной) теорией трения, построенной на основе заданной модели контактирующих поверхностей. По этой теории трение обусловлено деформированием материала неровностей (механическая составляющая силы трения) и преодолением молекулярных (адгезионных) связей в зоне контакта (молекулярная составляющая силы трения).

Коррозионно-механическое (механохимическое) изнашивание материала, вступившего в химическое взаимодействие со средой (например, образование пленок, химических соединений кислорода и металла при окислительном изнашивании). Особенно часто проявляется при наличии в зоне трения химически активных специальных материалов, газовых сред, охлаждающих жидкостей.

Вид изношенных поверхностей в зависимости от вида изнашивания:

абразивное — царапины, канавки, полосы;

усталостное — трещины, выкрашивание;

адгезионное — чешуйки, выступы, выкрашивание;

коррозионно-механическое — пленки, частицы, продукты реакций.

Следует обратить внимание на то, что в обычных условиях наблюдается сочетание разных видов изнашивания; это крайне затрудняет выполнение надежных расчетов с учетом разных факторов. Практически при определении сроков службы кинематических пар механизмов и машин используют интегральные показатели, основанные на обобщении опыта эксплуатации машин в разных условиях.

§ 9.2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ИЗНОСА ЭЛЕМЕНТОВ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

Расчет износа деталей машин при упругом, пластическом контакте и микрорезании поверхностей трения основан на усталостной теории, учитывающей давление p на поверхности трения, относительную скорость v и время t работы узла трения. Линейный износ $И$ выражают соотношением

$$И=\int_0^t kp^m v^n \mathrm{d}t,$$

где k, m и n — коэффициенты, характеризующие узел трения в заданных условиях работы узла трения. Предельные значения коэффициентов: $m=0{,}5$ — $3{,}0$; $n=0{,}9$ — $1{,}2$; k — коэффициент линейного износа, принимаемый по опытным данным.

Для упрощения расчетов степенную функцию заменяют линейной: $И=\int_0^t kpv\,\mathrm{d}t$. В этом случае $[k]=$ мкм/(МПа · км).

Иногда используют данные о скорости изнашивания $\gamma=kpv$ при средних режимах эксплуатации, полученные опытным путем; в зависимости от вида контактного взаимодействия поверхности упругое (зубчатое колесо, калибры, поршневые кольца) $5\cdot10^{-5}$ — $2\cdot10^{-4}$; упругопластическое (подшипники скольжения, направляющие, ходовые винты) $2\cdot10^{-4}$ — $4\cdot10^{-4}$; пластическое (фрикционные муфты, диски и колодки тормозов) $4\cdot10^{-4}$ — $64\cdot10^{-4}$; хрупкое, вязкое разрушение, микрорезание $6{,}4\cdot10^{-3}$ — $12{,}5\cdot10^{-3}$.

Здесь единицей скорости изнашивания принят линейный износ в мкм за 1 ч изнашивания (мкм/ч).

Объем учебника не позволяет привести необходимые вычисления, и приходится ограничиться только обсуждением трех примеров.

Пример 1. Износ цилиндропоршневых деталей двигателя (рис. 9.2, *а*).

Поршень *1* имеет поршневые кольца *2* и совершает возвратно-поступательное движение в гильзе *3* цилиндра двигателя.

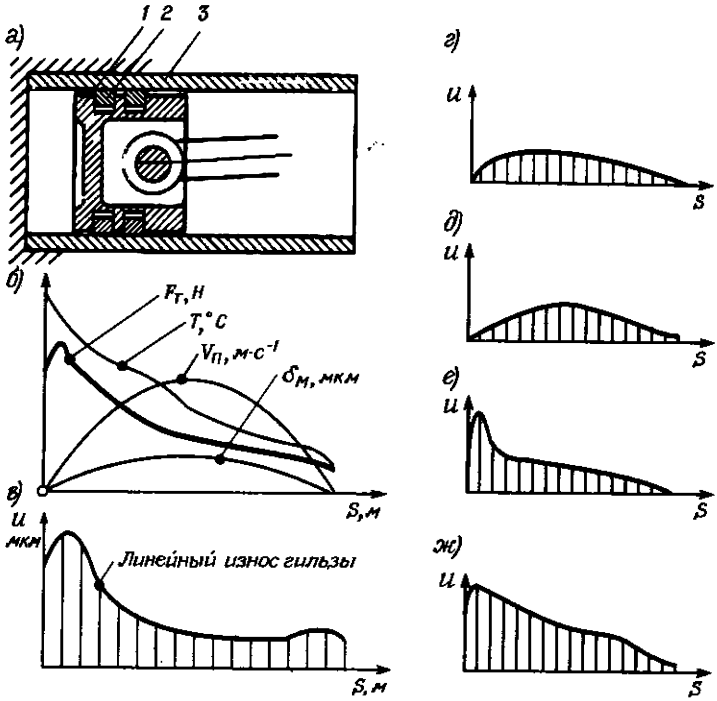


Рис. 9.2

Скорость движения поршня переменная (рис. 9.2, *б*). Наиболее неблагоприятные условия работы — в левом крайнем положении, где наблюдаются максимальное давление в камере сжатия, высокие температуры и наименьшая толщина масляной пленки, так как масло выгорает при воспламенении смеси и выдувается из-под поршневых колец вплоть до полного разрушения масляной пленки. Коэффициент трения изменяется по ходу поршня в пределах 0,20 — 0,02. Наилучшие условия смазки в средней части хода. Продукты сгорания ускоряют усталостно-коррозионные явления. На поверхностях гильзы и колец наблюдаются молекулярное схватывание, усталостные и абразивные повреждения.

Эпюры линейного износа гильзы показаны на рис. 9.2, *в* — *ж*. Эпюра износа на рис. 9.2, *г* характеризует почти равномерный абразивный износ по длине цилиндра и умеренный коррозионный износ. На рис. 9.2, *д* показан износ с преобладающим абразивным износом в средней части гильзы в условиях загрязненной смазки. На рис. 9.2, *в*, *е* показана эпюра износа, когда в сильной мере проявляется коррозионный износ в левой части гильзы в связи с недостаточной смазкой и напряженным тепловым режимом работы.

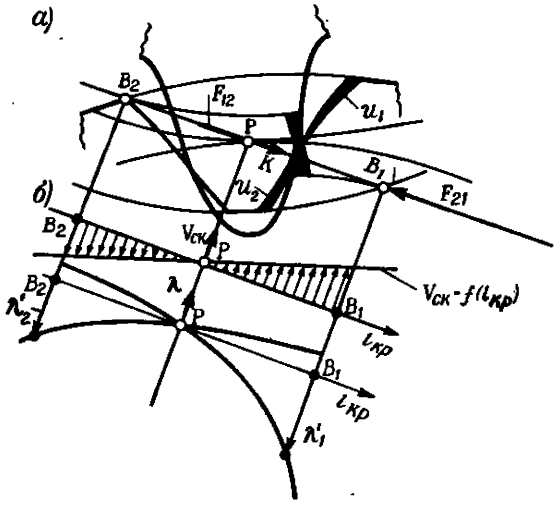


Рис. 9.3

На рис. 9.2, *ж* приведена эпюра для случая, когда сильная коррозия проявляется по всей длине гильзы.

Поршневые кольца изнашиваются в основном в радиальном направлении. Наибольший износ наблюдается у первых двух поршневых колец. Среднее значение максимального износа колец тепловозного дизеля при испытаниях колебалось в пределах (1,6 — 5)10^{-3} мкм/км*.

Пример 2. Износ зубьев цилиндрической зубчатой передачи (рис. 9.3).

Экспериментальные наблюдения показывают, что характерными видами изиоса являются абразивное изнашивание, фрикционная усталость и контактное усталостное выкрашивание (питтинг). Малонагруженные передачи и передачи с хорошей смазкой изнашиваются равномерно в пределах активной части профиля зуба. Для тяжелонагруженных передач эпюра износа по профилю зуба (рис. 9.3, *а*) свидетельствует о неравномерном износе и коррелируется с графиками скорости скольжения $v_{ск}$ профилей (рис. 9.3, *б*) и коэффициентов скольжения $\lambda_1 = v_{ск}/v'_{к1}$ и $\lambda_2 = v_{ск}/(v'_{к2}u_{21})$ (рис. 9.3, *в*). Наибольший износ наблюдается у ножек зубьев. При испытании зубчатых передач четырехступенчатого редуктора силы в зацеплении изменялись от 200 Н в ступени I до 10000 Н в ступени IV, износ зубьев — от 15 до 45 мкм в ступени I, от 25 до 100 мкм в ступени IV, а интенсивность изнашивания при смазке маслом с химически ак-

*Трение, изнашивание и смазка. Справочник. Кн. 2.— М.: Машиностроение, 1979.

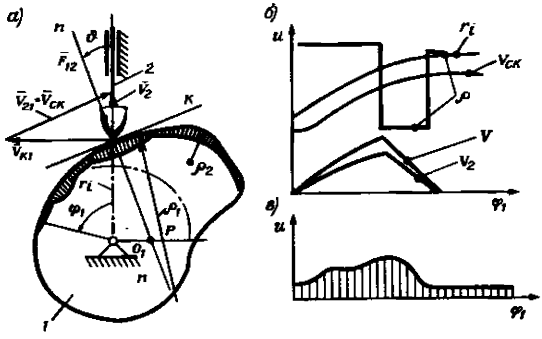


Рис. 9.4

тивными присадками составляла от $5 \cdot 10^{-10}$ до $3 \cdot 10^{-9}$ в ступени I и от $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ до $3 \cdot 10^{-7}$ в ступени IV.

Пример 3. Износ профиля дискового кулачка (рис. 9.4).

Профиль кулачка изнашивается неравномерно (рис. 9.4, *а*) из-за переменности контактных напряжений в поверхностных слоях кулачка *1* и толкателя *2* в связи с изменением нормальной силы F_{21} и радиусов кривизны ρ профилей, скорости скольжения $v_{ск}$, угла давления ϑ (рис. 9.4, *б*), скорости толкателя v_2. Линейный износ профиля (рис. 9.7, *в*) можно рассчитать по формуле

$$И = \int_0^t kpv_{ск}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\varphi} kp\,\frac{v_{ск}}{\omega_1}\,\mathrm{d}\varphi_1.$$

ГЛАВА 10
ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАШИНЫ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЗВЕНЬЕВ

В гл. 5 было исследовано движение машины. При этом предполагалось, что звенья механизма машины абсолютно жесткие. Однако в действительности звенья обладают податливостью, вследствие чего они деформируются под действием приложенных сил. Поэтому на основное движение звеньев механизма накладывается добавочное, порожденное их упругостью и представляющее собой колебательный процесс. Этот процесс приводит не только к нарушению закона движения механизма, но и может вызвать динамические перегрузки его звеньев и кинематических пар. Исследованию влияния упругости на движение машины посвящена данная глава, материал которой изложен по методике, разработанной М. З. Коловским [15].

§ 10.1. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАШИНЫ

Рассмотрим машинную установку, состоящую из двигателя *ДВ*, передаточного механизма *П* и рабочей машины *РМ* (т. е. потребителя механической энергии) (рис. 10.1, *а*).

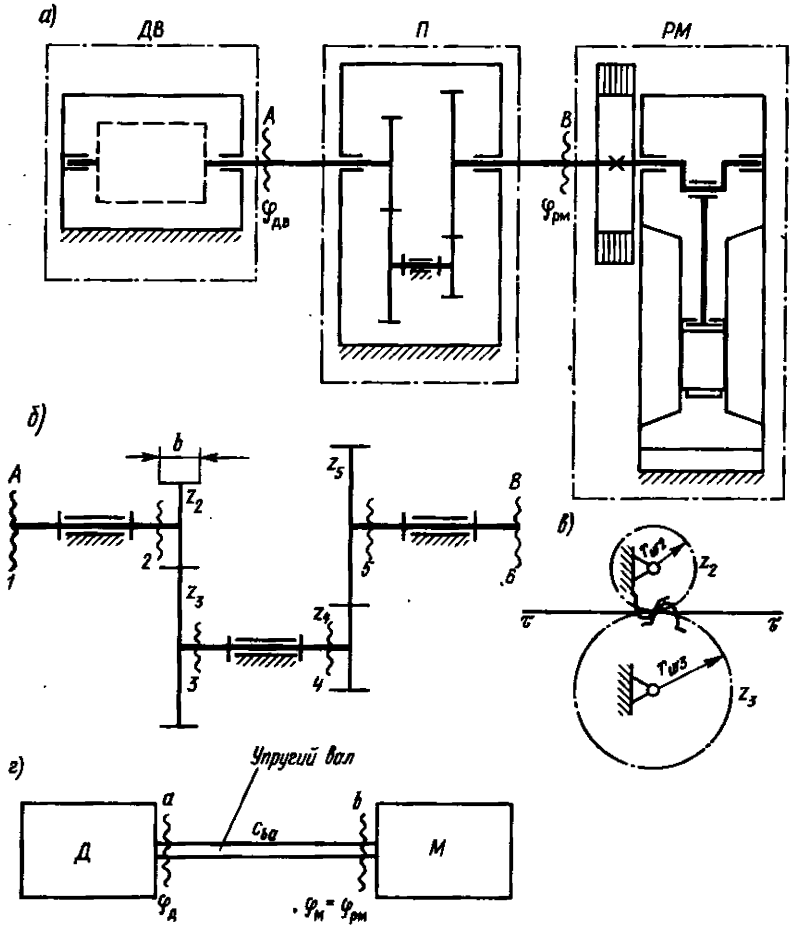


Рис. 10.1

Пусть передаточный механизм является зубчатым (рис. 10.1, *б*). Его валы подвергаются скручиванию, зубья — изгибу. Определим жесткость передаточного механизма.

Во время работы механизма в зубчатом зацеплении действует сила, деформирующая зубья. Рассмотрим составляющую F_τ этой силы, касательную начальным окружностям, а также составляющую δ_τ упругого перемещения зубьев по этому же направлению $\tau\tau$ (рис. 10.1, *в*). Сила и упругая деформация связаны соотношением $F_\tau = c\delta_\tau$, где c — линейная жесткость зубчатого зацепления. Линейная жесткость пропорциональна длине b зубьев: $c = ab$, где a —

коэффициент, который для стальных колес принимают равным 15 000 МПа.

В дальнейших расчетах удобнее пользоваться не линейной жесткостью, а угловой. Чтобы перейти к ней, закрепим неподвижно ступицу в сечении *2* колеса z_2, а к валу большего колеса z_3 в сечении *3* приложим момент M_3. Под его действием зубья сдеформируются и сечение *3* повернется на угол φ_3. Очевидно, что $\delta_\tau = \varphi_3 r_{w3}$, а $F_\tau = M_3/r_{w3}$. Подставим эти выражения в уравнение $F_\tau = c\delta_\tau$, после чего получим $M_3 = cr_{w3}^2\varphi_3$ или окончательно $M_3 = c_{32}\varphi_3$, где $c_{32} = cr_{w3}^2$. Величина c_{32} есть угловая жесткость зубчатого зацепления, приведенная к сечению *3* при неподвижном сечении *2*.

Если же поступить наоборот, т. е. закрепить сечение *3*, а к сечению *2* приложить момент M_2, то сечение *2* повернется на угол φ_2. Проделав те же действия, что и ранее, получим $M_2 = c_{23}\varphi_2$, где $c_{23} = cr_{w2}^2$. Здесь необходимо обратить особое внимание на то, что $c_{23} \neq c_{32}$. Можно записать, что $c_{23} = cr_{w3}^2(r_{w2}/r_{w3})^2 = c_{32}u_{32}^2$, т. е. $c_{23} = c_{32}u_{32}^2$, где $u_{32} = r_{w2}/r_{w3} = z_2/z_3$ — передаточное отношение зубчатого зацепления.

Жесткость вала длиной l и диаметром d (например, вала *3* — *4*, рис. 10.1, *б*) определяется по формуле, известной из курса «Сопротивление материалов»: $c_{34} = GJ_p/l$, где $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $J_p = \pi d^4/32$. Для угловой жесткости вала справедливо $c_{34} = c_{43}$. Отметим также, что угловая жесткость вала обычно много меньше угловой жесткости зубчатого зацепления.

Определим жесткость всего передаточного механизма *П* (рис. 10.1, *б*). При этом не будем учитывать инертность зубчатых колес и валов, так как она мала по сравнению с инертностью других звеньев машинного агрегата. Сделаем сечение *1* неподвижным, а к сечению *6* приложим момент M_6. Под действием этого момента участок *6* — *5* будет скручен и сечение *6* повернется относительно сечения *5*. Равным образом, момент M_6 вызовет деформацию зубьев в зацеплении *5* — *4*, вследствие чего сечение *5* повернется относительно сечения *4*. Этот поворот вызовет добавочное угловое перемещение сечения *6*. Рассуждая и дальше так же, придем к заключению, что полное угловое перемещение φ_6 сечения *6* представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых вызвано деформацией соответствующего участка передачи.

При определении этих слагаемых необходимо придерживаться следующих положений:

1) подсчитывая поворот сечения *6*, вызванный деформацией какого-либо участка (например, участка *4* — *3*), все остальные последовательно включенные участки при этом следует считать абсолютно жесткими;

2) так как участок *4* — *3* связан с сечением *6* не прямо, а через

зубчатое зацепление *5 — 4*, то, определяя угол поворота сечения *6*, вызванный углом скручивания φ_{43}, нужно этот угол φ_{43} умножать на передаточное отношение $u_{54}=z_4/z_5$;

3) по причине, изложенной в п. 2, момент, скручивающий участок *4 — 3*, не равен M_6 и поэтому его надо определять как $M_6 u_{54}$.

Учитывая все это, запишем

$$\varphi_6=\frac{M_6}{c_{65}}+\frac{M_6}{c_{54}}+\frac{M_6 u_{54}}{c_{43}}u_{54}+\frac{M_6 u_{54}}{c_{32}}u_{54}+\frac{M_6 u_{52}}{c_{21}}u_{52}=$$

$$=M_6\left(\frac{1}{c_{65}}+\frac{1}{c_{54}}+\frac{u_{54}^2}{c_{43}}+\frac{u_{54}^2}{c_{32}}+\frac{u_{52}^2}{c_{21}}\right).$$

Жесткостью c_{61} передачи, приведенной к сечению *6* при неподвижном сечении *1*, назовем отношение $c_{61}=M_6/\varphi_6$, откуда

$$\frac{1}{c_{61}}=\frac{1}{c_{65}}+\frac{1}{c_{54}}+\frac{1}{c_{43}/u_{54}^2}+\frac{1}{c_{32}/u_{54}^2}+\frac{1}{c_{21}/u_{52}^2}.$$

Если нужно было бы определить жесткость c_{16} передачи *П*, но приведенную к сечению *1* при неподвижном сечении *6*, то $c_{16}=c_{61}u_{52}^2$, где $u_{52}=z_2z_4/(z_3z_5)$ — передаточное отношение зубчатого механизма.

Таким образом, передачу *П* можно заменить ее моделью — некоторым условным упругим валом с жесткостью $c=c_{ba}$, который якобы соединяет двигатель *Д* с рабочей машиной *М* (рис. 10.1, *г*). Угол скручивания этого вала определяется как разность угловых координат его концевых сечений *b* и *a*.

Примем, что кинематические характеристики $\varphi_м$, $\dot\varphi_м$, $\ddot\varphi_м$ сечения *b* вала в точности такие же, как и кинематические характеристики выходного сечения *B* передачи (рис. 10.1, *б*), т. е.

$$\varphi_м=\varphi_{рм},\ \dot\varphi_м=\dot\varphi_{рм},\ \ddot\varphi_м=\ddot\varphi_{рм}. \qquad (10.1)$$

Но податливый вал моделирует только упругие свойства передачи *П*; ее передаточных свойств он воспроизвести не может. Их учитывают с помощью уравнений

$$\varphi_д=\varphi_{дв}u_{BA};\ \dot\varphi_д=\dot\varphi_{дв}u_{BA};\ \ddot\varphi_д=\ddot\varphi_{дв}u_{BA}, \qquad (10.2)$$

где $\varphi_д$, $\dot\varphi_д$, $\ddot\varphi_д$ — кинематические характеристики сечения *a* условного вала; $\varphi_{дв}$, $\dot\varphi_{дв}$, $\ddot\varphi_{дв}$ — кинематические характеристики входного сечения *A* передачи; u_{BA} — передаточное отношение, которое для механизма (рис. 10.1, *б*) $u_{52}=z_2z_4/(z_3z_5)$.

Так как, согласно уравнениям (10.1), именно выходные характеристики передачи при замене ее упругим валом не претерпели изменения, то операции, выполненные по уравнениям (10.2), усло-

вимся называть «пересчетом к выходному сечению передачи». Однако при этом нельзя забывать, что между сечением a с координатой $\varphi_д$ и сечением b с координатой $\varphi_м$ находится условный *упругий* вал (рис. 10.1, *г*), и поэтому пересчет к выходному сечению передачи отнюдь не означает равенства координат $\varphi_д$ и $\varphi_м$. Такое равенство имело бы место только в случае абсолютно жесткой передачи.

Поворот сечения b упругого вала по отношению к сечению a составит $\varphi_м - \varphi_д$. Поэтому упругий момент, приложенный к рабочей машине M от передачи, выразится так:

$$M_{му} = -c(\varphi_м - \varphi_д), \tag{10.3}$$

где c — жесткость упругого вала, приведенная к выходному сечению b; знак минус указывает на то, что реакция упругого элемента направлена всегда навстречу его деформации.

В соответствии с этим упругий момент $M_{ду}$, приложенный к двигателю $Д$ от передачи, равен $-M_{му}$, поэтому

$$M_{ду} = -c(\varphi_д - \varphi_м). \tag{10.4}$$

Колебательный процесс всегда сопровождается действием сил сопротивления (так называемых диссипативных сил). Природа этих сил различна. Их причины — трение в кинематических парах, а также в неподвижных соединениях деталей (конструкционное трение в резьбе, в стыках и т. п.); внутреннее трение, возникающее между частицами материала (в металлах — весьма небольшое); наконец, специальные демпферы, устанавливаемые в нужных случаях на валопроводах для ограничения возникающих колебаний.

Связь между силой сопротивления и характеристиками движения — сложная. Однако опыт показывает, что при небольших амплитудах — что как раз и свойственно рассматриваемой задаче — можно считать, что сила сопротивления примерно пропорциональна скорости относительного движения.

Силы сопротивления проявляют себя в различных местах механизма. Но все их можно привести к одному сечению и заменить одним моментом вязкого сопротивления. Поскольку для передачи $П$, замененной условным валом, скорость сечения b относительно сечения a составляет $\dot{\varphi}_м - \dot{\varphi}_д$ (рис. 10.1, *г*), момент вязкого сопротивления, приложенный к рабочей машине M от передачи, выразится следующим образом:

$$M_{мт} = -k(\dot{\varphi}_м - \dot{\varphi}_д), \tag{10.5}$$

где k — коэффициент сопротивления, приведенный к сечению b; знак минус показывает, что момент сопротивления направлен все-

гда против относительной скорости. Аналогично момент вязкого сопротивления, приложенный к двигателю *Д* от передачи, запишется так:

$$M_{\text{дт}} = -k(\dot{\varphi}_{\text{д}} - \dot{\varphi}_{\text{м}}). \qquad (10.6)$$

Если бы нужно было определить коэффициент сопротивления k_{16}, приведенный к сечению *I* (рис. 10.1, *б*), то $k_{16} = k_{61} u_{52}^2$, где k_{61} — коэффициент сопротивления, приведенный к сечению *6*. Отметим также, что значение коэффициента сопротивления находится опытным путем.

Составим уравнения движения машинной установки. Так как учитываются *упругие деформации* звеньев передачи, *то жесткой кинематической связи* между ее входными и выходными характеристиками *нет*, и на основное движение механизма накладывается колебательный процесс. Следовательно, механизм имеет уже не одну (как при абсолютно жесткой передаче), а две степени свободы, поэтому для его исследования надо назначить две обобщенные координаты и составить два уравнения движения. Как уже было отмечено, инертность звеньев передачи (из-за ее малости) учитывать не будем.

Сначала составим уравнение рабочей машины в дифференциальной форме (см. § 5.5). Выберем в качестве начального звена входной вал рабочей машины с координатой $\varphi_{\text{рм}} = \varphi_{\text{м}}$. К нему приведем все массы и силы, приложенные к механизму рабочей машины (см. § 5.4, 5.3), после чего запишем

$$J_{\text{м}}\ddot{\varphi}_{\text{м}} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}J_{\text{м}}}{\mathrm{d}\varphi_{\text{м}}}\dot{\varphi}_{\text{м}}^2 = M_{\Sigma\text{м}}.$$

В суммарный приведенный момент $M_{\Sigma\text{м}}$ войдут приведенный момент сопротивления рабочей машины $M_{\text{м}}(\varphi_{\text{м}}, \dot{\varphi}_{\text{м}})$ и момент $M_{\text{мп}}$, приложенный к валу рабочей машины от передачи. Он состоит из упругого момента $M_{\text{му}}$ и момента вязкого сопротивления $M_{\text{мт}}$ [см. уравнения (10.3) и (10.5)], т. е.

$$M_{\text{мп}} = M_{\text{му}} + M_{\text{мт}} = -c(\varphi_{\text{м}} - \varphi_{\text{д}}) - k(\dot{\varphi}_{\text{м}} - \dot{\varphi}_{\text{д}}). \qquad (10.7)$$

Теперь уравнение рабочей машины примет такой вид:

$$J_{\text{м}}\ddot{\varphi}_{\text{м}} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}J_{\text{м}}}{\mathrm{d}\varphi_{\text{м}}}\dot{\varphi}_{\text{м}}^2 = M_{\text{м}}(\varphi_{\text{м}}, \dot{\varphi}_{\text{м}}) - c(\varphi_{\text{м}} - \varphi_{\text{д}}) - k(\dot{\varphi}_{\text{м}} - \dot{\varphi}_{\text{д}}). \qquad (10.8)$$

Составим уравнение двигателя с механизмом любой структуры. Начальным звеном выберем выходной вал двигателя с координатой $\varphi_{\text{дв}}$. Приведя к нему все массы и силы, приложенные к механизму

двигателя, запишем

$$J_{дв}\ddot{\varphi}_{дв}+\frac{1}{2}\frac{dJ_{дв}}{d\varphi_{дв}}\dot{\varphi}_{дв}^2=M_{\Sigma дв}.$$

В суммарный приведенный момент $M_{\Sigma дв}$ войдут приведенный движущий момент $M_{дв}(\varphi_{дв}, \dot{\varphi}_{дв})$ и момент $M_{двп}$, приложенный к валу двигателя от передачи.

Замена передачи условным валом (рис. 10.1, *г*) потребовала пересчета к ее выходному сечению кинематических характеристик двигателя по уравнениям (10.2). Эта же причина вынуждает сделать пересчет приведенного момента инерции $J_{дв}$ двигателя и его производной $dJ_{дв}/d\varphi_{дв}$, а также моментов $M_{дв}$ и $M_{двп}$ к выходному сечению передачи по уравнениям

$$J_д=\frac{J_{дв}}{u_{BA}^2};\quad \frac{dJ_д}{d\varphi_д}=\frac{1}{u_{BA}^3}\frac{dJ_{дв}}{d\varphi_{дв}};\quad M_д=\frac{M_{дв}}{u_{BA}};\quad M_{дп}=\frac{M_{двп}}{u_{BA}}. \qquad (10.9)$$

Для передачи, изображенной на рис. 10.1, *б*, $u_{BA}=u_{52}=z_2z_4/(z_3z_5)$.

Момент $M_{дп}$ состоит из двух слагаемых: $M_{ду}$ и $M_{дт}$ [см. уравнения (10.4) и (10.6)]. Учитывая это, а также используя уравнения (10.2) и (10.9), получим после простых преобразований

$$J_д\ddot{\varphi}_д+\frac{1}{2}\frac{dJ_д}{d\varphi_д}\dot{\varphi}_д^2=M_д(\varphi_д, \dot{\varphi}_д)-c(\varphi_д-\varphi_м)-k(\dot{\varphi}_д-\dot{\varphi}_м). \qquad (10.10)$$

Системой уравнений (10.8) и (10.10) описывается динамический процесс, протекающий в машинной установке при учете упругости звеньев передачи. Неизвестными функциями в этой системе являются обобщенные координаты $\varphi_д=\varphi_д(t)$ и $\varphi_м=\varphi_м(t)$.

Ранее при замене передачи упругим валом было предложено условие, что кинематические характеристики $\varphi_м$, $\dot{\varphi}_м$, $\ddot{\varphi}_м$ сечения *b* этого вала в точности такие же, как и кинематические характеристики выходного сечения *B* передачи, что и было записано в виде уравнений (10.1). Но в равной мере можно было бы предложить и другое условие: кинематические характеристики $\varphi_д$, $\dot{\varphi}_д$, $\ddot{\varphi}_д$ сечения *a* упругого вала в точности такие же, как и кинематические характеристики входного сечения *A* передачи, т. е. $\varphi_д=\varphi_{дв}$; $\dot{\varphi}_д=\dot{\varphi}_{дв}$; $\ddot{\varphi}_д=\ddot{\varphi}_{дв}$. Тогда уравнения (10.1), (10.2) и (10.9) потеряли бы силу. При постановке второго условия все кинематические, инерционные и силовые характеристики рабочей машины надо было бы пересчитать к входному сечению *A* передачи. К этому сечению

нужно было бы привести коэффициенты жесткости c и сопротивления k, а именно: $c_{ab}=c_{ba}u_{BA}^2$, $k_{ab}=k_{ba}u_{BA}^2$.

Отметим, что в дальнейшем изложении будут использоваться первое условие и связанные с ним уравнения (10.1), (10.2) и (10.9).

§ 10.2. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ МАШИННОЙ УСТАНОВКИ

Рассмотрим *установившееся* движение машинной установки, происходящее с *малым* коэффициентом неравномерности. Возьмем типичный пример, когда двигатель установки — роторная машина, передаточный механизм — зубчатый с передаточным отношением $u_{BA}=u_{52}=z_2z_4/(z_3z_5)$ (рис. 10.1), а рабочая машина имеет рычажный механизм — допустим, кривошипно-ползунный.

Пересчитаем по уравнениям (10.2) и (10.9) все кинематические, инерционные и силовые характеристики двигателя к выходному сечению B передачи. К этому же сечению приведем коэффициенты жесткости $c=c_{61}$ и сопротивления $k=k_{61}$.

Пусть двигатель имеет *абсолютно жесткую* характеристику (рис. 10.2, *а*); его момент не зависит от угла поворота $M_д=\text{invar}\ (\varphi_д)$, а момент инерции его ротора — постоянный: $J_д=\text{const}$.

Как и ранее (см. § 5.11), момент сопротивления рабочей машины примем не зависящим от скорости вращения: $M_м=\text{invar}\ (\dot{\varphi}_м)$. Но

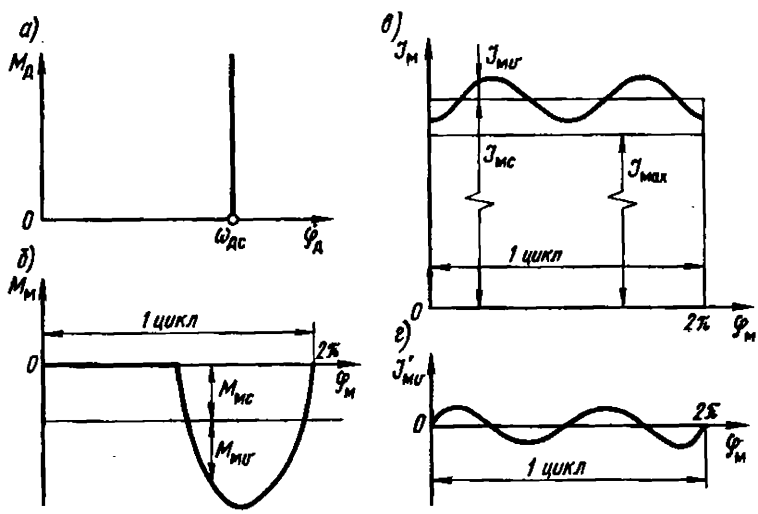


Рис. 10.2

момент $M_м$ существенно зависит от угла поворота $\varphi_м$ (рис. 10.2, *б*). Представим момент $M_м$ как сумму двух слагаемых: $M_м = M_{мс} + M_{мv}$, в которой

$$M_{мс} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_м(\varphi_м)\,d\varphi_м = \text{const};\ M_{мv} = \text{var},\ \text{причем}\ \int_0^{2\pi} M_{мv}(\varphi_м)\,d\varphi_м = 0.$$

Приведенный к валу рабочей машины момент инерции $J_м$ ее механизма и его производная $dJ_м/d\varphi_м$ представлены на рис. 10.2, *в*, *г*. Примем, что $J_м = J_{мс} + J_{мv}$; при этом

$$J_{мс} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_м(\varphi_м)\,d\varphi_м = \text{const};$$

$$J_{мv} = \text{var};\ \int_0^{2\pi} J_{мv}(\varphi_м)\,d\varphi_м = 0.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{dJ_м}{d\varphi_м} = \frac{dJ_{мv}}{d\varphi_м} = J'_{мv};\quad \int_0^{2\pi} J'_{мv}(\varphi_м)\,d\varphi_м = 0.$$

С учетом этого запишем уравнения движения машинного агрегата (10.8) и (10.10) в таком виде:

$$J_{мс}\ddot{\varphi}_м + J_{мv}\ddot{\varphi}_м + \frac{1}{2}J'_{мv}\dot{\varphi}_м^2 = M_{мс} + M_{мv} - c(\varphi_м - \varphi_д) - k(\dot{\varphi}_м - \dot{\varphi}_д); \quad (10.11)$$

$$J_д\ddot{\varphi}_д = M_д - c(\varphi_д - \varphi_м) - k(\dot{\varphi}_д - \dot{\varphi}_м). \quad (10.12)$$

Представим уравнение (10.11) следующим образом:

$$J_{мс}\ddot{\varphi}_м = M_{мп} + M_{мс} + \left[M_{мv} + \left(-J_{мv}\ddot{\varphi}_м - \frac{1}{2}J'_{мv}\dot{\varphi}_м^2\right)\right],$$

где $M_{мп}$ — момент, приложенный к рабочей машине от передачи и определяемый по уравнению (10.7). Напомним, что $M_{мс} = \text{const}$ (рис. 10.2, *б*). Члены, заключенные в квадратные скобки, зависят явно от угловой координаты $\varphi_м$ (рис. 10.2, *б*, *в*, *г*) и изменяются периодически. Объединим их одним обозначением

$$L_{мv}(\varphi_м) = M_{мv} + \left(-J_{мv}\ddot{\varphi}_м - \frac{1}{2}J'_{мv}\dot{\varphi}_м^2\right). \quad (10.13)$$

Теперь уравнение (10.11) примет вид

$$J_{мс}\ddot{\varphi}_м = M_{мп} + M_{мс} + L_{мv}(\varphi_м). \qquad (10.14)$$

Аналогично запишем уравнение (10.12):

$$J_д\ddot{\varphi}_д = M_д + M_{дп}, \qquad (10.15)$$

где $M_{дп} = M_{ду} + M_{дт}$ — момент, приложенный к двигателю от передачи [см. уравнения (10.4) и (10.6)].

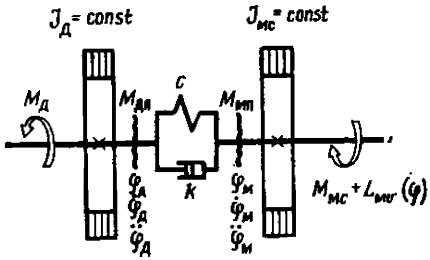


Рис. 10.3

Динамическая модель исследуемой машинной установки, построенная по уравнениям (10.14) и (10.15), изображена на рис. 10.3. Решим уравнения (10.14) и (10.15) относительно искомых функций $\varphi_м(t)$ и $\varphi_д(t)$.

Так как характеристика двигателя абсолютно жесткая (т. е. вертикаль, рис. 10.2, *а*), то решение для $\varphi_д(t)$ и ее производных получаем сразу:

$$\dot{\varphi}_д = \omega_{дс} = \text{const}; \ \varphi_д = \omega_{дс}t; \ \ddot{\varphi}_д = 0. \qquad (10.16)$$

Таким образом, вращение вала двигателя равномерное, с угловой скоростью $\omega_{дв} = \omega_{дс}/u_{52} = \text{const}$. Движущий момент $M_д$, пересчитанный к выходному сечению передачи, а следовательно, и фактический момент двигателя $M_{дв} = M_д u_{52}$ будут иметь переменную величину. Момент $M_д(t)$ определяют из уравнения (10.12) после того, как будет найдена $\varphi_м(t)$.

Получив решения (10.16), замечаем, что уравнение (10.11), являющееся развернутой формой уравнения (10.14), содержит только одну неизвестную функцию $\varphi_м(t)$, которую и определим из этого уравнения. Как видно, оно является нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Для решения таких уравнений в нелинейной механике используется *метод последовательных приближений*. Применительно к задачам динамики машин этот метод был впервые разработан и эффективно применен М. З. Коловским [15].

Оставим в правой части уравнения (10.14) только член $L_{мv}(\varphi_м)$, зависящий явно от угловой координаты $\varphi_м$, а остальные слагаемые перенесем в левую часть и запишем ее с учетом уравнения (10.7):

$$J_{мс}\ddot{\varphi}_м + k\dot{\varphi}_м + c\varphi_м - (k\dot{\varphi}_д + c\varphi_д + M_{мс}) = L_{мv}(\varphi_м). \qquad (10.17)$$

В уравнении (10.17) $J_{мс}$, $M_{мс}$, k, c — не изменяющиеся в процессе

движения величины. В то же время член $L_{мv}(\varphi_м)$, стоящий в правой части уравнения (10.17), периодически изменяется. Он математически представляет воздействие, *вынуждающее колебательный процесс*. Это воздействие [см. уравнение (10.13)] проистекает со стороны рабочей машины и порождено, во-первых, ее технологическим процессом — слагаемое $M_{мv}$ и, во-вторых, кривошипно-ползунным механизмом рабочей машины — слагаемое $(-J_{мv}\ddot{\varphi}_м - J'_{мv}\dot{\varphi}_м^2/2)$. В дальнейшем многочлен $L_{мv}(\varphi_м)$ будем называть вынуждающим моментом.

Искомый закон движения $\varphi_м(t)$ определим в процессе последовательных приближений.

Начальное (нулевое) приближение. Так как заведомо известно, что неравномерность вращения вала рабочей машины мала, то вначале положим, что момент $L_{мv}(\varphi_м)$, вызывающий эту неравномерность, примерно равен нулю. С учетом этого запишем уравнение (10.17), подставив в него решение (10.16). Тогда

$$J_{мv}\ddot{\varphi}_м + k(\dot{\varphi}_м - \omega_{дс}) + c(\varphi_м - \omega_{дс}t) - M_{мс} = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения для установившегося режима имеет такой вид: $\varphi_м = \omega_{дс}t - \Delta$; $\dot{\varphi}_м = \omega_{дс} = \text{const}$; $\ddot{\varphi}_м = 0$, где

$$\Delta = -M_{мс}/c. \tag{10.18}$$

Таким образом, в начальном приближении вал рабочей машины вращается равномерно; его угловая скорость $\dot{\varphi}_м = \omega_{мс} = \omega_{дс} = \omega_{дв}u_{52} = \text{const}$. Координаты выходного сечения B передачи и ее входного сечения A (рис. 10.1, *б*) связаны соотношением $\varphi_м = \varphi_{дв}u_{52} - \Delta$, где $\Delta = \text{const}$ — *статическая деформация* передачи, приведенная к ее выходному сечению.

Первое приближение. Теперь учтем влияние вынуждающего момента $L_{мv}(\varphi_м)$, подставив в его выражение [см. уравнение (10.13)] результаты начального приближения. Тогда получим $L_{мv} = M_{мv} - J'_{мv}\omega_{мс}^2/2$, где $M_{мv}$ и $J'_{мv}$ периодически зависят от взятого из начального приближения угла $\varphi_м = \omega_{мс}t - \Delta$, т. е. от времени t. Поэтому $L_{мс} = L_{мv}(t)$ есть периодическая функция времени.

Решение $\varphi_м = \varphi_м(t)$ уравнения (10.17) для первого приближения будем искать в виде

$$\varphi_м = \omega_{мс}t - \Delta + \eta, \tag{10.19}$$

где $\eta=\eta(t)$ — динамическая деформация. Из уравнения (10.19) определим $\dot{\varphi}_м=\omega_{мс}+\dot{\eta}$; $\ddot{\varphi}_м=\ddot{\eta}$. Подставим полученные выражения в уравнение (10.17) и после несложных преобразований получим

$$J_{мс}\ddot{\eta}+k\dot{\eta}+c\eta=L_{мv}(t). \qquad (10.20)$$

Разложим вынуждающий момент $L_{мv}(t)$ в ряд Фурье:

$$L_{мv}(t)=L_{мA1}\cos(\omega_{мс}t-\Delta-\beta_1)+L_{мA2}\cos(2\omega_{мс}t-2\Delta-\beta_2)+\ldots=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}L_{мAi}\cos(i\omega_{мс}t-i\Delta-\beta_i);$$

амплитуды $L_{мAi}$ и фазы β_i определяются по формулам Эйлера — Фурье. Теперь для решения уравнения (10.20) можно использовать принцип суперпозиции:

$$\eta=\eta_1+\eta_2+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i. \qquad (10.21)$$

Первое слагаемое η_1 определим из дифференциального уравнения (10.20), в правую часть которого подставим первую гармонику из разложения в ряд Фурье:

$$J_{мс}\ddot{\eta}_1+k\dot{\eta}_1+c\eta_1=L_{мA1}\cos(\omega_{мс}t-\Delta-\beta_1).$$

Для установившегося режима необходимо найти только частное решение этого уравнения, хорошо известное из курса теоретической механики:

$$\eta_1=\frac{L_{мA1}}{\sqrt{(c-\omega_{мс}^2J_{мс})^2+(k\omega_{мс})^2}}\cos(\omega_{мс}t-\Delta-\beta_1-\gamma_1)=$$
$$=\eta_{A1}\cos(\omega_{мс}t-\Delta-\beta_1-\gamma_1), \qquad (10.22)$$

где $\operatorname{tg}\gamma_1=k\omega_{мс}/(c-\omega_{мс}^2J_{мс})$.

Аналогично получим частное решение η_i для слагаемого с номером i:

$$\eta_i=\frac{L_{мAi}}{\sqrt{[c-(i\omega_{мс})^2J_{мс}]^2+(ki\omega_{мс})^2}}\cos(i\omega_{мс}t-i\Delta-\beta_i-\gamma_i)=$$
$$=\eta_{Ai}\cos(i\omega_{мс}t-i\Delta-\beta_i-\gamma_i),$$

где $\operatorname{tg}\gamma_i=ki\omega_{мс}/[c-(i\omega_{мс})^2J_{мс}]$.

Таким образом, $\eta=\eta(t)$ есть та *динамическая деформация*, кото-

рая вызвана податливостью передаточного механизма и которая вместе со статической деформацией Δ накладывается на основное движение машинной установки [см. уравнение (10.19)]. Эта динамическая деформация выражается как сумма упругих гармонических колебаний [см. уравнение (10.21)], происходящих с частотами $\nu_1 = \omega_{мс}$, $\nu_2 = 2\omega_{мс}$, $\nu_3 = 3\omega_{мс}$, ..., где $\omega_{мс}$ — средняя угловая скорость рабочей машины. Как было отмечено ранее,

$$\omega_{мс} = \omega_{дс} = \omega_{дв} u_{52} = \text{const}. \tag{10.23}$$

Надо иметь в виду, что ряд (10.21) обычно быстро сходится, поскольку амплитудные значения $L_{мA1}$, $L_{мA2}$, $L_{мA3}$, ... во многих случаях монотонно и быстро убывают при увеличении i — номера члена ряда (10.21). Поэтому при приближенном решении задачи часто бывает достаточно рассматривать только фуикцию $\eta_1(t)$, вызванную воздействием первой гармоники.

§ 10.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УПРУГОСТИ ЗВЕНЬЕВ

Определим частоту собственных колебаний агрегата. Для этого надо снять с механизма вынуждающий момент ($L_{мv} = 0$) и вязкое сопротивление ($k = 0$). Тогда дифференциальное уравнение (10.20) будет описывать собственные (свободные) колебания и примет вид

$$J_{мс}\ddot{\eta} + c\eta = 0.$$

Отсюда согласно положениям теоретической механики получим частоту собственных колебаний

$$p = \sqrt{c/J_{мс}}. \tag{10.24}$$

Подчеркнем, что p есть угловая частота, единица измерения которой рад/с, а не частота периодического процесса в Гц.

Рассмотрим, как влияет упругость передачи на закон движения вала рабочей машины. Согласно уравнению (10.22), амплитуда динамической деформации η_{A1} при учете только первой гармоники возмущающего момента

$$\eta_{A1} = \frac{L_{мA1}}{\sqrt{(c - \omega_{мс}^2 J_{мс})^2 + (k\omega_{мс})^2}}. \tag{10.25}$$

Функция $\eta_{A1} = \eta_{A1}(c)$ представлена на рис. 10.4, *а* при неизменном значении средней угловой скорости $\omega_{мс}$ рабочей машины*.

---

*Очень малые значения жесткости c конструктивно нереализуемы; поэтому в области очень малых значений (включая $c = 0$) график $\eta_{A1}(c)$ показан штрихами.

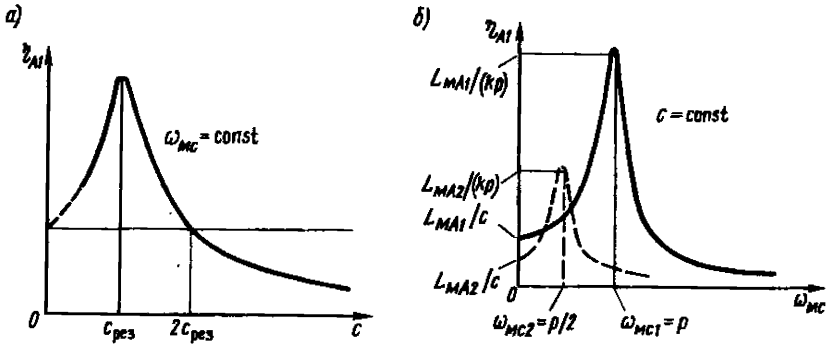


Рис. 10.4

При статическом нагружении увеличение жесткости ведет к уменьшению деформации. Однако в условиях динамического колебательного процесса зависимость деформации от жесткости *более сложная*. Если жесткость мала [т. е. $c<c_{рез}$, где $c_{рез}=\omega_{мс}^2 J_{мс}$ — та жесткость, при которой наступает максимум динамической деформации (рис. 10.4, *а*)], то при периодической нагрузке увеличение жесткости вызывает увеличение (а не уменьшение) деформации. Если жесткость велика ($c>c_{рез}$), то при ее увеличении деформация будет уменьшаться. Такое влияние жесткости конструктор должен обязательно учитывать при проектировании передаточного механизма, чтобы избежать **резонанса**.

На рис. 10.4, *б* сплошной линией изображена зависимость $\eta_{A1}=\eta_{A1}(\omega_{мс})$ при заданном значении жесткости c передачи. Резонанс в системе наступает тогда, когда частота ν_1 первой гармоники совпадает с собственной частотой: $\nu_1=p$. Так как частота первой гармоники равна средней угловой скорости рабочей машины $\nu_1=\omega_{мс}$, то, следовательно, резонанс наступает, когда $\omega_{мс}=\omega_{мс_1}=p$, или согласно уравнению (10.24) $\omega_{мс}=\omega_{мс_1}=\sqrt{c/J_{мс}}$. Поэтому при резонансе $\eta_{A1}=L_{мA1}/(kp)$ [см. уравнение (10.25)].

Введем известный из курса теоретической механики **коэффициент динамичности**

$$\sigma_1=\frac{\eta_{A1}}{L_{мA1}/c},$$

где $L_{мA1}/c$ — та статическая деформация, которую мог бы вызвать момент, равный амплитудному значению $L_{мA1}$ первой гармоники

вынуждающего момента. Таким образом, коэффициент σ_1, больший единицы, характеризует перегрузку, вызванную динамическими деформациями. При резонансе, когда $\omega_{мс}=p=\sqrt{c/J_{мс}}$,

$$\sigma_{рез}=c/(kp)=\sqrt{cJ_{мс}}/k.$$

Как видно, резонансное значение коэффициента динамичности зависит от сопротивления k. Если бы сопротивления не было ($k=0$), то $\sigma_{рез}\to\infty$. Но сопротивление, хоть и небольшое, всегда есть. Следовательно, $\sigma_{рез}$ имеет конечную величину, которая, однако, может достигать значений 15 — 20. Поэтому работа на резонансном режиме ($\omega_{мс}=\omega_{мс1}$) *недопустима*. Если все же избежать этого режима никак нельзя, то следует поставить *специальный демпфер*, который искусственно увеличит сопротивление и снизит $\sigma_{рез}$.

Расчеты показывают, что если средняя угловая скорость $\omega_{мс}$ рабочей машины в 1,5 — 2 раза отличается от собственной частоты p, то сопротивление обычно практически не влияет на величину амплитуды η_{A1} вынужденных колебаний и ее можно определять, положив в формуле (10.25) $k=0$ (см.: *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М., 1979).

Если угловая скорость $\omega_{мс}$, при которой эксплуатируется рабочая машина, меньше собственной частоты p, то надо проверить отсутствие резонанса, вызываемого второй и более высокими гармониками. Для второй гармоники, частота которой $\nu_2=2\omega_{мс}$, резонанс наступает при $\nu_2=p$, откуда $\omega_{мс_2}=p/2$. График $\eta_{A2}(\omega_{мс})$ амплитуды колебаний, вынуждаемых второй гармоникой, показан на рис. 10.4, *б* штрихами.

Рассмотрим момент $M_{пм}=-M_{мп}$, которым рабочая машина нагружает передачу, т. е. момент в сечении *B* (рис. 10.1, *а*). Согласно уравнению (10.7),

$$M_{пм}=k(\dot{\varphi}_м-\dot{\varphi}_д)+c(\varphi_м-\varphi_д).$$

Преобразуем это уравнение с учетом уравнений (10.16), (10.18), (10.19) и (10.23). После простых преобразований получим

$$M_{пм}=M_{мс}+(k\dot{\eta}+c\eta). \qquad (10.26)$$

В уравнении (10.26) первое слагаемое — постоянный момент $M_{мс}$, нагружающий передачу. Двучлен, заключенный в скобки, есть переменная динамическая составляющая нагружения $M_{пv}=k\dot{\eta}+c\eta$.

Рассмотрим составляющую $M_{пv}$, введя возмущение только от первой гармоники:

$$M_{мv1} = k\dot{\eta}_1 + c\eta_1.$$

Для этого найдем сначала зависимость $\dot{\eta}_1(t)$.

Из уравнения (10.22) следует $\dot{\eta}_1 = -\eta_{A1}\omega_{мс}\sin(\omega_{мс}t - \alpha_1)$, где $\alpha_1 = \Delta + \beta_1 + \gamma_1$. Поэтому $M_{пv1} = -k\eta_{A1}\omega_{мс}\sin(\omega_{мс}t - \alpha_1) + c\eta_{A1}\cos(\omega_{мс}t - \alpha_1)$. После элементарных тригонометрических преобразований получим

$$M_{пv1} = \eta_{A1}\sqrt{c^2 + (k\omega_{мс})^2}\cos(\omega_{мс}t - \alpha_1 + \zeta_1) =$$
$$= M_{пA1}\cos(\omega_{мс}t - \alpha_1 + \zeta_1).$$

Введем по предложению М. З. Коловского **степень динамической нагруженности передачи** χ_1, которую определим как отношение амплитуды первой гармоники $M_{пA1}$ динамической составляющей $M_{пv}$ к амплитуде первой гармоники $L_{мA1}$ вынуждающего момента $L_{мv}$, учитывая уравнение (10.25):

$$\chi_1 = \frac{M_{пA1}}{L_{мA1}} = \frac{\sqrt{c^2 + (k\omega_{мс})^2}}{\sqrt{(c - \omega_{мс}^2 J_{мс})^2 + (k\omega_{мс})^2}}. \qquad (10.27)$$

График $\chi_1 = \chi_1(c)$ показан на рис. 10.5 при неизменном значении $\omega_{мс}$. Если $\chi_1 > 1$, то имеет место динамическая перегруженность передаточного механизма. При резонансе, когда $c = c_{рез} = \omega_{мс}^2 J_{мс}$, коэффициент χ_1 может достигать значений, весьма превышающих единицу.

Как следует из уравнения (10.27), при $c = c_{рез}/2$ коэффициент χ_1 принимает значение, равное единице. Можно показать, что если для значения $c = c_{рез}/2$ подсчитать коэффициент χ для гармоник более высокого порядка, чем первая, то $\chi_i < 1$. Иными словами, если жесткость $c < c_{рез}/2 = \omega_{мс}^2 J_{мс}/2$, то амплитуды $M_{пAi}$ всех гармоник динамического момента $M_{пv}$ будут меньше, чем амплитуды $L_{мAi}$ соответствующих гармоник

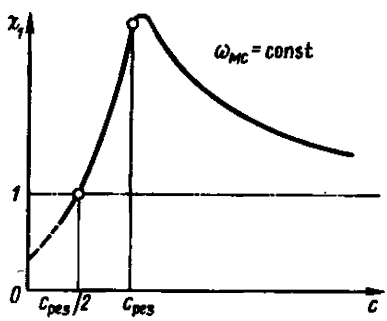


Рис. 10.5

вынуждающего момента $L_{мv}$. Этим можно воспользоваться, чтобы *улучшить динамические характеристики* участка *AB* машинного агрегата (см. рис. 10.1, *а*).

Если на участке *AB* последовательно с передачей *П* включить *упругую муфту*, подобрав ее жесткость так, чтобы общая жесткость участка стала меньше $c_{рез}/2$ (т. е. меньше $\omega_{мс}^2 J_{мс}/2$), то динамическая составляющая $M_{пv}$ момента, нагружающего передачу, станет меньше вынуждающего момента $L_{мv}$. При этом, однако, нельзя упускать из виду, что малая жесткость, защищая передачу от перегрузок, может повлечь за собой слишком большие деформации. Поэтому необходима осторожность в выборе предела снижения жесткости участка *AB*.

Кроме того, при $c < c_{рез}/2$ выход на рабочий скоростной режим $\omega_{мс}$ во время пуска машинной установки неизбежно будет связан с проходом зоны резонанса, так как при $c < c_{рез}/2$ средняя угловая скорость $\omega_{мс}$ рабочей машины больше частоты p собственных колебаний установки (зарезонансный режим). Проход зоны резонанса сопровождается хоть кратковременными, но значительными динамическими перегрузками. Особенно опасен в этом отношении процесс выбега, когда после выключения двигателя машина, будучи предоставленной самой себе, теряет скорость под действием небольших сопротивлений (трение в кинематических парах и т. п.). Здесь обратный проход зоны резонанса может оказаться достаточно длительным, вследствие чего амплитуды вынужденных колебаний успеют возрасти до недопустимого предела. В то же время для конструкции, обладающей большой жесткостью ($c > c_{рез}$), средняя угловая скорость $\omega_{мс}$ рабочей машины меньше частоты собственных колебаний p машинной установки (дорезонансный режим), так что проход зоны резонанса с гармоникой первого порядка (как прямой, так и обратный) попросту отсутствует.

ГЛАВА 11
ВИБРОАКТИВНОСТЬ И ВИБРОЗАЩИТА МАШИН

Создание высокопроизводительных машин и скоростных транспортных средств, форсированных по мощностям, нагрузкам и другим рабочим характеристикам, неизбежно приводит к увеличению интенсивности и расширению спектра вибрационных и виброакустических полей. Этому способствует также широкое использование в промышленности и строительстве новых высокоэффективных машин, работающих на основе вибрационных и виброударных процессов. Вредная вибрация нарушает планируемые конструктором законы движения машин, механизмов и систем управления, порождает неустойчивость рабочих процессов и может вызвать отказ и полную расстройку всей системы. Из-за вибрации увеличиваются динамические нагрузки в элементах конструкций (кинематических парах механизмов, стыках и др.), в резуль-

тате снижается несущая способность деталей, развиваются трещины, возникают усталостные разрушения. Действие вибрации может изменить внутреннюю и поверхностную структуру материалов, условия трения и износа на контактных поверхностях деталей машин и привести к нагреву конструкций.

Вибрация порождает шум, являющийся важным экологическим показателем среды обитания человека. Вибрация оказывает и непосредственное влияние на человека, снижая его функциональные возможности и работоспособность. Поэтому особое значение приобретают методы и средства оценки виброактивности и уменьшения уровня вибрации. Совокупность таких методов и средств принято называть виброзащитой.

§ 11.1. ИСТОЧНИКИ КОЛЕБАНИЙ И ОБЪЕКТЫ ВИБРОЗАЩИТЫ

При постановке задач виброзащиты в исследуемой механической системе обычно выделяют две подсистемы: *И* и *О* (рис. 11.1), соединенные между собой связями *С*. Подсистему *И*, в которой непосредственно происходят физические процессы, вызывающие колебания, называют *источником колебаний*. Подсистема *О* представляет ту часть механической системы, колебания в которой требуется уменьшить, ее называют *объектом виброзащиты*. Силы, возникающие в связях *С*, соединяющих объект с источником колебаний, и вызывающие колебания объекта, называют *силовыми (динамическими) воздействиями*. [8, т. 6; 14].

Рассмотрим некоторые характерные примеры:

двигатель (турбина, генератор, двигатель внутреннего сгорания, любой роторный механизм), установленный на фундаменте, имеет неуравновешенный ротор. Здесь источником колебаний является ротор, а объектом виброзащиты — корпус двигателя, динамические воздействия представляют собой динамические реакции опор ротора. Задача виброзащиты — уменьшить колебания корпуса двигателя, вызванные неуравновешенностью ротора; при решении задачи о защите человека-оператора от вибрации, например при его работе на автомобиле или на тракторе, можно стремиться к уменьшению колебаний шасси со всеми установленными на нем агрегатами; можно стремиться к уменьшению колебаний кабины водителя или только сиденья. В каждом случае объект, источник и динамические воздействия будут определяться по-разному.

Иногда бывают заданы не динамические воздействия, а перемещения точек крепления связей к источнику. Такие воздействия называют *кинематическими*, и они характерны для кулачковых механизмов, зубчатых передач и транспортных машин при их движении по неровной дороге. Силовые и кинематические воздействия часто объединяются общим термином — механические воздействия [14].

Механические воздействия принято делить на три класса: линейные перегрузки; вибрационные воздействия; ударные воздействия.

Линейными перегрузками называют кинематические воздействия, возникающие при ускоренном движении источника колебаний. Особенно значительные линейные перегрузки возникают на транспортных машинах, в особенности на летательных аппаратах, при увели-

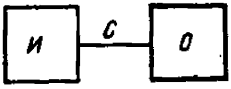


Рис. 11.1

чении скорости, торможения, а также различных маневрах (виражи, разворот и т. д.). Основными характеристиками линейных перегрузок являются постоянное ускорение a_0 (рис. 11.2) и максимальная скорость изменения ускорения da/dt.

Вибрационные воздействия (кинематические и силовые) являются колебательными процессами. Силовые воздействия характеризуются функциями времени составляющих сил $F(t)$ или моментов сил $M(t)$, действующих на объект; кинематические воздействия характеризуются ускорениями $a(t)$ точек источника колебаний, связанных с объектом виброзащиты, их скоростями $v(t)$ и перемещениями $s(t)$.

Вибрационные воздействия делятся на стационарные, нестационарные и случайные. Простейшим видом стационарного вибрационного воздействия является гармоническое. *Гармоническими* называют периодические процессы, которые могут быть описаны функцией времени:

$$x(t)=X_0\sin(\omega_0 t+\psi), \tag{11.1}$$

где X_0 — амплитуда; ω_0 — частота; ψ — начальная фаза; t — время.

При анализе гармонического процесса часто пренебрегают начальной фазой и уравнение (11.1) записывается в виде

$$x(t)=X_0\sin\omega_0 t. \tag{11.2}$$

Выражение (11.2) может быть представлено графически в функции времени (рис. 11.3, *а*) или в виде амплитудно-частотной характеристики — частотного спектра (рис. 11.3, *б*). Время, в течение которого совершается одно полное колебание материальной точки, называют периодом T. Частота и период связаны соотношением $T=2\pi/\omega_0$. Частотный спектр представляется одной составляющей амплитуды на данной частоте. Такой спектр называют еще дискретным или линейным. К числу примеров колебательных систем, находящихся под действием гармонических сил, можно отнести вибрации несбалансированного ротора, поршневых машин, неуравновешенных рычажных механизмов, а также вибрации, вызванные электромагнитными полями, и др.

В машинах, содержащих цикловые механизмы, при установив-

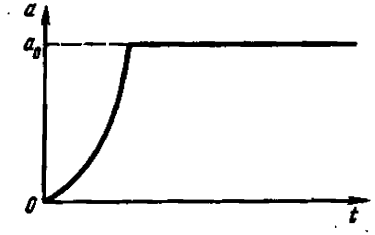


Рис. 11.2

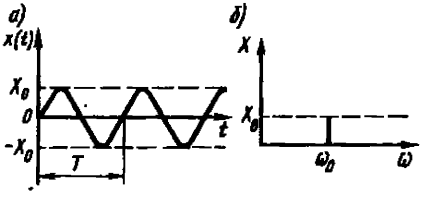


Рис. 11.3

шемся движении возникают периодические механические воздействия:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t). \qquad (11.3)$$

Часто в таких системах можно пренебречь влиянием всех гармоник, кроме одной, и считать воздействие гармоническим. Это возможно в тех случаях, когда одна из гармоник (обычно первая) превалирует над остальными или когда одна из гармоник является резонансной для данного объекта.

Вибрационные возбуждения, с которыми приходится иметь дело на многих современных технических объектах, обычно являются полигармоническими, что вызвано существованием большого числа независимых источников вибрации и нерегулярностью некоторых физических процессов (например, процессы горения в реактивном двигателе, обтекание тел турбулентным потоком, взрывные и ударные процессы).

Такие вибрационные процессы могут быть представлены в виде суммы бесконечного (или конечного) числа k гармонических компонент вида

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t), \qquad (11.4)$$

где

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos k\omega_1 t\,\mathrm{d}t;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin k\omega_1 t\,\mathrm{d}t;\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Возможен и другой способ записи полигармонического процесса:

$$x(t)=X_0+\sum_{k=1}^{\infty}X_k\sin(k\omega_1 t+\psi_k), \qquad (11.5)$$

где $X_0=\frac{a_0}{2}$; $X_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$; $\psi_k=\mathrm{arctg}\,(a_k/b_k)$; $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Из анализа формулы (11.5) следует, что полигармонический процесс состоит из постоянной компоненты X_0 и бесконечного (или конечного) числа синусоидальных компонент, называемых гармониками, с амплитудами X_k и начальными фазами ψ_k. Частоты всех гармоник кратны основной частоте ω_1. Как правило, виброизолируемые объекты подвергаются именно полигармоническому возбуж-

дению, и поэтому описание реальных процессов простой гармонической функцией оказывается недостаточным. В действительности, когда тот или иной процесс относят к типу гармонических, имеют в виду только приближенное представление процесса, который на самом деле является полигармоническим. Так, например, спектры вибраций машин наряду с основной рабочей частотой содержат интенсивные гармонические составляющие кратных частот.

Нестационарные вибрационные воздействия возбуждаются чаще всего переходными процессами, происходящими в источниках. Например, силовое воздействие на корпус двигателя с неуравновешенным ротором, возникающее при разгоне, может быть приближенно описано выражением

$$x = a(\omega)\cos\omega(t)t, \tag{11.6}$$

где $\omega(t)$ — закон изменения угловой скорости ротора.

Диапазон, в котором располагаются частоты полигармонических воздействий, возникающих в современных технических объектах, весьма широк. Полигармонические воздействия, охватывающие диапазон, превышающий несколько октав ($\omega_{max}/\omega_{min} > 10$), называют широкополосными; если ширина диапазона мала по сравнению со средней частотой процесса, воздействие называют узкополосным. Узкополосные воздействия проявляются в форме биений. При решении задач виброзащиты учет ширины полосы механических воздействий имеет первостепенное значение. В частности, от широкополосности воздействия зависит выбор динамической модели (расчетной схемы) защищаемого объекта; она должна выбираться с таким расчетом, чтобы были учтены собственные частоты объекта, расположенные в полосе спектра воздействия.

Высокочастотные вибрационные воздействия могут передаваться объекту не только через элементы механических соединений его с источником, но и через окружающую среду (воздух, воду). Такие воздействия, называемые акустическими, оказываются особенно интенсивными на современных реактивных летательных аппаратах. Интенсивность акустических воздействий характеризуется звуковым давлением акустического поля и интенсивностью звука — отношением падающей звуковой мощности к площади этой поверхности. Связь между абсолютным и относительным звуковым давлением выражается формулой

$$p = p_0 10^{D/20},$$

где p — звуковое давление, Па; D — относительное звуковое давление, дБ; p_0 — пороговое давление, соответствующее $D=0$; обычно принимают $p = 2\cdot 10^{-5}$ Па. Единица интенсивности звука в системе СИ $[I] = \text{Вт/м}^2$.

Примерные значения амплитуд отдельных гармоник полигармонических кинематических воздействий, лежащих в различных частотных диапазонах, следующие:

Диапазон частот, Гц	0,1 — 10	10 — 150	150 — 500	500 — 2000
Амплитуды g, ед.	0,001 — 1	0,5 — 5	4 — 15	7 — 20

Случайные вибрационные возбуждения зачастую не являются полностью предсказуемыми, подобно гармоническому или полигармоническому возбуждению. Например, такие процессы, как аэродинамический шум струи газа, пульсация жидкости при ее движении в трубопроводе, вибрации платформы, на которой установлено несколько агрегатов, вибрации, обусловленные шероховатостями пар трения, являются по своей природе стохастическими. Эти процессы трудно аппроксимировать регулярными функциями. Стохастический сигнал не может быть представлен графически наперед заданным, так как он обусловлен процессом, содержащим элемент случайности.

Ударными называют кратковременные механические воздействия, в которых максимальные значения сил являются весьма большими. Функцию, выражающую зависимость силы, момента силы или ускорения при ударе от времени, называют формой удара. Основными характеристиками формы являются длительность удара и его амплитуда — максимальное значение механического воздействия при ударе.

Возбуждения кинематического ударного типа возникают при резких изменениях скорости движения источника (например, при посадке самолета, запуске ракеты, наезде колеса автомобиля на глубокую выбоину, при пересопряжении зубьев зубчатых колес и т. п.). Часто эти явления сопровождаются возникновением колебаний конструкций источника и возбуждением вибрационных воздействий.

В некоторых случаях ударное воздействие можно рассматривать как классический удар, сводящийся к «мгновенному» изменению скорости движения источника или к приложению «мгновенных» сил и моментов. В этих случаях

$$x(t) = \Delta q \delta(t),$$

где Δq — приращение скорости, импульс силы или момента силы за время удара. Использование такого представления допустимо лишь в тех случаях, когда продолжительность удара существенно меньше наименьшего из периодов собственных колебаний объекта. В остальных случаях необходимо учитывать форму удара, которая обычно определяется непосредственными измерениями в натурных условиях.

§ 11.2. ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ТЕХНИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ И НА ЧЕЛОВЕКА

Рассмотрим, как влияют механические воздействия на различные технические объекты (машины, приборы, аппараты) и человека.

1. Действие линейных перегрузок эквивалентно статическому нагружению объекта. В некоторых случаях, главным образом при наличии в объекте соединений с силовым замыканием, действие линейной перегрузки может вызвать нарушение нормального функционирования системы (размыкание пружины электрических контактов, ложные срабатывания релейных устройств и т. п.).

2. Наиболее опасными для технических объектов оказываются вибрационные воздействия. Знакопеременные напряжения, вызванные вибрационными воздействиями, приводят к накоплению повреждений в материале, что вызывает появление усталостных трещин и разрушение. Кроме усталостных напряжений в механических системах наблюдаются и другие явления, вызываемые вибрациями, например постепенное ослабление («разбалтывание») неподвижных соединений. Вибрационные воздействия вызывают малые относительные смещения сопряженных поверхностей в соединениях деталей машин, при этом происходит изменение структуры поверхностных слоев сопрягаемых деталей, их износ и, как результат, уменьшение силы трения в соединении, что вызывает изменение диссипативных свойств объекта, смещает его собственные частоты, что может вызвать резонансные режимы.

Если в механизме имеются подвижные соединения с зазорами (например, кинематические пары в механизмах), вибрационные воздействия могут вызвать соударения сопрягаемых поверхностей, приводящие к их разрушению и генерированию шума. В большинстве случаев разрушение объекта при вибрационных воздействиях связано с возникновением резонансных явлений. Поэтому при полигармонических воздействиях наибольшую опасность представляют те гармоники, которые могут вызвать резонанс объекта.

3. Ударные воздействия также могут явиться причиной разрушения объекта. Часто повреждения, вызываемые ударом, носят характер хрупких разрушений. Однако многократные удары могут приводить и к установостным разрушениям, особенно в тех случаях, когда периодическое ударное воздействие оказывается способным вызвать резонансные колебания объекта.

4. Вибрационные и ударные воздействия, не вызывая разрушений объектов, могут приводить к нарушению их нормального функционирования. Например, вибрации металлорежущих станков и другого технологического оборудования, вызванные действием различных источников, приводят к снижению точности и чистоты обработки, а также и к другим нарушениям технологических процессов.

Механические воздействия существенно влияют на точность

приборов, устанавливаемых в системах управления движением и служащих для измерения параметров движений. Под действием вибраций и ударов резко увеличивается «уход» гироскопических приборов, а следовательно, и ошибка измерений, производимых этими приборами; приборы, содержащие измерительное устройство маятникового типа, обнаруживают склонность к смещению нулевого положения.

Нарушение функционирования объекта, не связанное с разрушениями или с другими необратимыми изменениями, называют *отказом*. Способность объекта не разрушаться при механических воздействиях называют *вибропрочностью*, а способность нормально функционировать — *виброустойчивостью*. Цель виброзащиты технических объектов — повышение их вибропрочности и виброустойчивости.

5. Вибрация, возникающая при работе машин различных типов и оборудования, оказывает вредное влияние на людей, находящихся вблизи источника вибрации или в непосредственном контакте с ним. Вибрация вызывает нарушения физиологического и функционального состояния человека-оператора. Стойкие физиологические изменения называют вибрационной болезнью. Функциональные нарушения могут выражаться в ухудшении зрения, изменении реакции вестибулярного аппарата (нарушение координации движений; возникновение галлюцинаций, относящихся к ориентации тела, и т. п.), а также к более быстрой утомляемости.

В первую очередь вибрация оказывает вредное влияние на рабочих, использующих ручные механизированные инструменты, на персонал, обслуживающий вибрационные машины (виброгрохоты, вибромолоты, виброштамповки свай, труб и т. п., виброконвейеры, виброкатки, виброуплотнители, вибросепараторы, вибраторы жидкого металла, средства вибрационной очистки и т. д.), а также многие строительные, дорожные и сельскохозяйственные машины (бульдозеры, грейдеры, скреперы, тракторы, комбайны и т. д.). В несколько меньшей степени действие вибрации обычно испытывает персонал, связанный с работой машин и механизмов, содержащих неуравновешенные движущиеся элементы, а также с работой всех видов транспортных средств. В перечисленных случаях возникает необходимость ограничения вредного воздействия вибрации на человека. Допустимые для человека динамические воздействия регламентируются санитарными нормами и правилами. Создание эффективных методов и средств индивидуальной и комплексной виброзащиты человека-оператора является *одной из важнейших технико-экономических и социальных задач современной техники*.

§ 11.3. АНАЛИЗ ДЕЙСТВИЯ ВИБРАЦИЙ

Характер нарушений условий функционирования объектов (механизмов, приборов) под действием вибраций определяется видом механических воздействий и свойствами объекта.

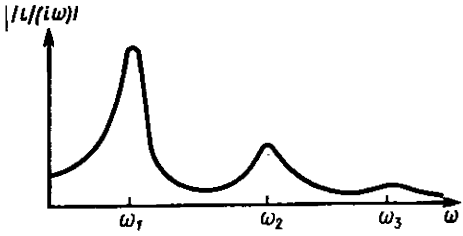


Рис. 11.4

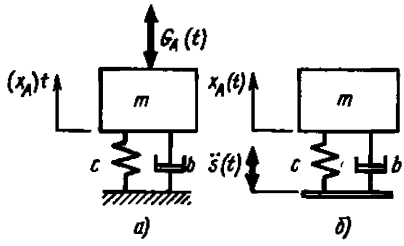


Рис. 11.5

Модель объекта должна отражать основные черты реальной системы, влияющие на оценку ее динамической реакции, и вместе с тем быть удобной для анализа и интерпретации результатов. Наиболее приемлемой в этих условиях является линейная модель, достаточно передающая свойства широкого класса конструкций при малых колебаниях. Удобной формой описания свойств линейного объекта в условиях вибрационных воздействий являются *операторы динамической податливости* $l_{BA}(p)$, связывающие силу $G_B(t)$, приложенную в заданном направлении в точке B объекта, с проекцией перемещения $x_A(t)$ точки A на некоторое направление: $x_A(t)=l_{BA}(p)G_B(t)$. Обратные операторы $k_{BA}(p)=l_{BA}^{-1}(p)$ называют *операторами динамической жесткости*. Характеристики $l_A(p)$, $k_A(p)$, связывающие силу, приложенную в точке A, с проекцией перемещения этой же точки на направление действия силы, называют *операторами динамической податливости* и *динамической жесткости* в точке A. Частотные характеристики объекта $l_{BA}(i\omega)$, $k_{BA}(i\omega)$ называют соответственно *динамической податливостью* и *динамической жесткостью*.

На рис. 11.4 показан примерный вид зависимости модуля динамической податливости от частоты.

Выражение для оператора динамической податливости может быть представлено в виде

$$l_{BA}(p)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{g_{B\nu}g_{A\nu}}{p^2+2\beta_\nu\omega_\nu p+\omega_\nu^2}.$$

Здесь ω_ν — собственные частоты консервативной системы; $g_{B\nu}$ — нормированные коэффициенты ν-й формы колебаний в точках A и B; β_ν — безразмерный коэффициент линейного демпфирования на ν-й форме колебаний. При $p=i\omega$, опуская малые величины второго порядка, имеем частотную характеристику объекта:

$$l_{BA}(i\omega)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{g_{B\nu}g_{A\nu}}{(\omega_\nu^2-\omega^2)^2+4\beta_\nu\omega_\nu^2\omega^2}(\omega_\nu^2-\omega^2-i2\beta_\nu\omega_\nu\omega).$$

Таким образом, динамическая податливость объекта с n степенями свободы представлена в виде суммы податливостей n систем с одной степенью свободы, имеющих собственные частоты консервативной системы (системы, для которой при колебаниях полная механическая энергия постоянна). На этих частотах ($\omega=\omega_\nu$) динамическая податливость возрастает по модулю ввиду появления в знаменателе ν-го слагаемого малого члена $2\beta_\nu\omega_\nu$. С увеличением номера ν-й формы колебаний максимальная величина модуля динамической податливости уменьшается.

При рассмотрении математических моделей конкретных линейных систем выражения для динамических податливостей могут быть вычислены непосредственно путем отыскания решения от действия гармонической силы с единичной амплитудой.

Во многих случаях допустимо пренебрежение всеми формами колебаний, за исключением одной преобладающей. Такие объекты обычно моделируются системами с одной степенью свободы (рис. 11.5, *а*, *б*), имеющими массу m, коэффициент упругости c и коэффициент вязкого трения b. При возбуждении системы силой $G(t)$ модуль динамической податливости имеет следующий вид:

$$|l_A(i\omega)|=m^{-1}[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega_0^2\omega^2]^{-1/2};$$

$$\beta=b/(2m\omega_0).$$

Реакция объекта на механическое воздействие может вычисляться как во временны́х, так и в частотных представлениях. Реакцию системы на вибрационное воздействие удобнее вычислять в частотных представлениях. Для гармонических и полигармонических воздействий вычисления амплитудных и фазовых искажений осуществляют для каждой гармонической компоненты процесса. В силу линейности объекта эффект от действия нескольких гармонических компонент равен сумме воздействий от каждой из них.

Виброизоляция. Виброизолятор, или амортизатор,— элемент виброзащитной системы, наиболее существенная часть которого — упругий элемент. В результате внутреннего трения в упругом элементе происходит демпфирование колебаний. Кроме того, в ряде конструкций амортизаторов применяют специальные демпфирующие устройства для рассеяния энергии колебаний. Динамические характеристики амортизатора существенно зависят от его статических характеристик, причем и те и другие являются нелинейными. Нелинейность характеристик амортизатора определяется рядом причин: нелинейными свойствами упругого элемента (например, резины), внутренним трением в упругом элементе, наличием конструктивных особенностей амортизатора типа ограничительных упоров, демпферов сухого трения, нелинейных пружин и т. д. На рис. 11.6 изображены различные амортизаторы и их силовые характеристики (по оси абсцисс — перемещения, по

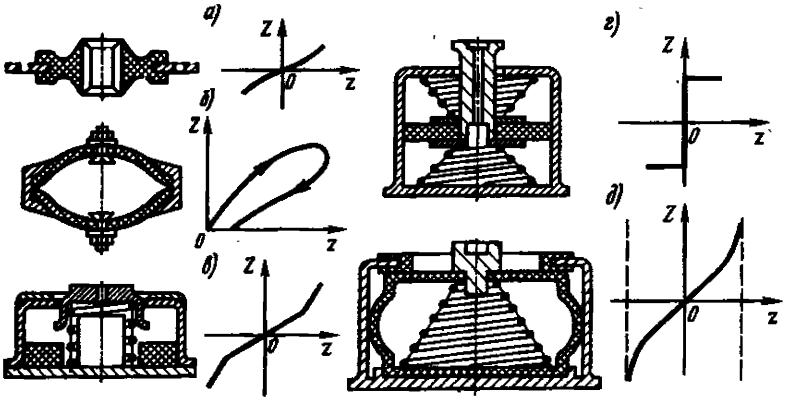


Рис. 11.6

оси ординат — реакции): *а* — резинометаллический; *б* — сетчатый; *в* — с упругими ограничителями хода; *г* — демпферный; *д* — с конической пружиной.

В любом амортизаторе могут быть определены три взаимно перпендикулярных направления x, y, z, такие, что перемещение точки крепления амортизатора в одном из этих направлений вызывает силовую реакцию амортизатора в противоположном направлении. Эти направления называются главными. Если через X, Y и Z обозначить проекции реакции амортизатора на главные направления и учесть упругие и демпфирующие свойства реальных амортизаторов при малых колебаниях, то можно предположить следующее: реакции по главным направлениям зависят только от соответствующих перемещений и их первых производных по времени. Тогда функции

$$X=X(x, \dot{x}),\ Y=Y(y, \dot{y}),\ Z=Z(z, \dot{z}) \tag{11.7}$$

называют динамическими характеристиками амортизатора.

При анализе малых колебаний амортизируемого объекта вблизи положения равновесия можно считать перемещения x, y и z малыми и линеаризовать динамические характеристики (11.7), разлагая их в ряд Маклорена и отбрасывая члены, имеющие порядок выше первого:

$$X(x, \dot{x})\approx c_x x+k_x\dot{x},\ Y(y, \dot{y})\approx c_y y+k_y\dot{y},$$
$$Z(z, \dot{z})=c_z z+k_z\dot{z}, \tag{11.8}$$

где

$$c_x=\frac{\partial X}{\partial x}(0, 0);\ c_y=\frac{\partial Y}{\partial y}(0, 0);\ c_z=\frac{\partial Z}{\partial z}(0, 0)$$

— жесткости амортизатора в главных направлениях, а

$$k_x=\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}(0,0);\ k_y=\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}(0,0);$$

$$k_z=\frac{\partial Z}{\partial \dot{z}}(0,0)$$

— коэффициенты демпфирования.

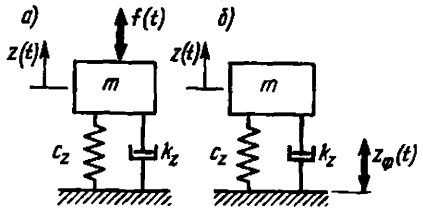


Рис. 11.7

Рассмотрим малые колебания амортизированного объекта (рис. 11.7, *а*), имеющего массу m. Для вывода уравнения движения амортизированных систем можно использовать принцип Даламбера. В произвольный момент времени t при значении текущей координаты z на массу m действует реакция $Z(z, \dot{z})$ амортизатора. Приравнивая нулю сумму сил, приложенных к массе m, и силы инерции $m\ddot{z}$ в соответствии с (11.8), получаем дифференциальное уравнение движения массы m:

$$m\ddot{z}+k_z\dot{z}+c_z z=0. \qquad (11.9)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$ms^2+k_z s+c_z=0. \qquad (11.10)$$

Его корни

$$S_{1,2}=\frac{1}{2m}\left(-k_z\pm\sqrt{k_z^2-4mc_z}\right).$$

Общее решение уравнения (11.9) имеет вид

$$z=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t},$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий; $S_{1,2}$ — корни характеристического уравнения (11.10), которые для удобства можно представить в таком виде:

$$S_{1,2}=-\xi\omega_0\pm\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_0,$$

где $c_z/m=\omega_0^2$; $k_z/(2\sqrt{c_z m})=\xi$; ω_0 — собственная частота амортизированной системы; ξ — безразмерный коэффициент затухания.

На рис. 11.7, *б* дана схема системы амортизации при изоляции фундамента от колебаний $z_\phi=Z_0\sin\omega t$.

§ 11.4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВИБРОЗАЩИТЫ

Уменьшение интенсивности колебаний объекта может быть достигнуто следующими способами.

Снижение виброактивности источника. Возбуждение колебаний

может быть обусловлено различными причинами. Удобно разделить возмущающие факторы на две группы. К первой группе относят явления, связанные с трением в кинематических парах. Снижение виброактивности факторов этой группы связано с изменением свойств материалов трущихся поверхностей и может быть достигнуто способами, специфическими для каждого частного случая, например применением специальных смазок.

Вторая группа возмущающих факторов связана с движущимися телами (вращение роторов, перемещение звеньев механизмов).

Снижение виброактивности источника в этом случае заключается в уменьшении динамических реакций с помощью уравновешивания движущихся масс (см. гл.7).

Изменение конструкции объекта. Можно указать два способа снижения колебаний, общих для всех механических систем. Первый способ состоит в устранении резонансных явлений. Если объект обладает линейными свойствами, то задача сводится к соответствующему изменению его собственных частот. Для нелинейных объектов должны выполняться условия отсутствия резонансных явлений. Второй способ заключается в увеличении диссипации механической энергии в объекте. Этот способ виброзащиты, называемый демпфированием, будет рассмотрен ниже.

Динамическое гашение колебаний. Динамический виброгаситель (кратко — гаситель) формирует дополнительные динамические воздействия, прикладываемые к объекту в точках присоединения гасителя. Динамическое гашение осуществляется при таком выборе параметров гасителя, при котором эти дополнительные воздействия частично уравновешивают (компенсируют) динамические воздействия, возбуждаемые источником. В табл. 11.1 даны основные виды динамических гасителей колебаний.

Виброизоляция. Действие виброизоляции сводится к ослаблению связей между источником и объектом; при этом уменьшаются динамические воздействия, передаваемые объекту. Ослабление связей обычно сопровождается возникновением некоторых нежелательных явлений: увеличением статических смещений объекта, увеличением амплитуд относительных колебаний при низкочастотных воздействиях и при ударах, увеличением габаритов системы. Поэтому применение виброизоляции как метода виброзащиты в большинстве случаев связано с нахождением компромиссного решения, удовлетворяющего всю совокупность требований.

Виброзащитные устройства и их эффективность. Демпферы, динамические гасители и виброизоляторы образуют в совокупности виброзащитные устройства. *Пассивными* называют устройства, состоящие из инерционных, упругих и диссипативных элементов. *Активные* устройства могут кроме перечисленных содержать элементы немеханической природы и, как правило, обладают независимым источником энергии. Эффективность виброзащитных систем приня-

Таблица 11.1.

Динамические гасители колебаний

Гаситель	Принципиальная схема	Основные настроечные соотношения	Назначение
	Инерционные динамические гасители		
Пружинный	$G_0 e^{i\omega t}$; $c_г$; $m_г$	$\sqrt{\frac{c_г}{m_г}}=\omega$	Подавление продольных и крутильных гармонических колебаний фиксированной частоты
Катковый	ρ; $m_д \varepsilon(\omega)^2 e^{i\omega t}$; $m_г$; $\rho_г$	$m_г(\rho-\rho_г)=m_д\varepsilon$	Подавление продольных колебаний, вызванных вращением неуравновешенной массы $m_д$ с эксцентриситетом ε
Маятниковый: крутильных колебаний	$M_0 e^{in\Omega t}$; Ωt; ρ; l; φ_0; $m_г$	$\frac{n^2 l}{\rho}=1$; $m_г=\frac{M_0}{\Omega^2(\rho+l)\rho\Psi_0 j}$; $\Psi_0<0{,}35\div0{,}40$ (j — число маятников)	Подавление крутильных гармонических колебаний вращающихся тел

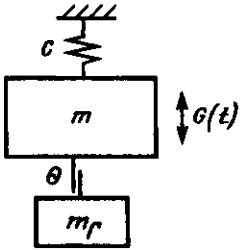
Продолжение табл. 11.1.

Гаситель	Принципиальная схема	Основные настроечные соотношения	Назначение
продольных колебаний		$\frac{n^2 l}{\rho + l} = 1;\ m_г = \frac{G_0}{n^2 \Omega^2 \rho \Psi_0 j}$ $\Psi_0 < 0{,}35 \div 0{,}40$	Подавление продольных гармонических колебаний, вызванных вращением
Плавающий ударный		$m_г \Delta = \frac{\pi G_0}{4\omega^2}$	Подавление периодических продольных и крутильных колебаний зарезонансного типа
Пружинный ударный		$\sqrt{\frac{c_г}{m_г}} = \frac{\omega}{2};\ \Delta \approx 0$	Подавление периодических продольных и крутильных резонансных колебаний

С активными элементами	$G_0 e^{i\omega t}$, $m_г$, $c_г$, $c_{гэ}$	$\sqrt{\frac{c_г + c_{гэ}}{m_г}} = \omega$	Подавление продольных и крутильных гармонических колебаний меняющейся частоты
	Динамические гасители с трением		
Пружинный	c, m, $G_0 e^{i\omega t}$, $c_г$, $в_г$, $m_г$	$\sqrt{\frac{c_г}{m_г}} = \frac{\sqrt{cm}}{m + m_г}$ $b_г = \sqrt{\frac{3 c_г m_г^2}{2(m + m_г)}}$	Подавление продольных и крутильных гармонических колебаний произвольной частоты

Продолжение табл. 11.1

Гаситель	Принципиальная схема	Основные настроечные соотношения	Назначение
Гироскопический	$G_0\Omega$; $M_0 e^{i\omega t}$; $G_г$; l; $b_г$; P; $\omega=\sqrt{\frac{C}{G}}$	$\sqrt{\frac{Pl}{J_г}}=\omega_0 \quad \frac{1}{1+\frac{J_0^2\Omega^2}{PlJ}}$; $b_г=\sqrt{\frac{3j_0^2\Omega^2 PlJ_г}{2(plJ+J_0^2\Omega^2)}}$	Подавление крутильных гармонических колебаний произвольной частоты
Поглотители колебаний			
Поглотитель: с вязким трением	c; m; $G(t)$; $b_г$; $m_г$	1. $\frac{b_г}{m_г}=\sqrt{\frac{2cm}{(2m+m_г)(m+m_г)}}$ — гармоническое возбуждение 2. $\frac{b_г}{m_г}=\sqrt{\frac{c}{m+m_г}}$ — широкополосное случайное возбуждение	Подавление продольных и крутильных колебаний с произвольным спектром

с сухим трением		$\theta = \frac{\pi G_0}{6}\left(1 - \frac{c}{m_г \omega^2} + \frac{m}{m_г}\right)^{-2}$ — гармоническое возбуждение с амплитудой G_0	Подавление продольных и крутильных колебаний с произвольным спектром

Примечания. 1. Если применение гасителя указано для продольных и крутильных колебаний, то приведенные настроечные соотношения соответствуют продольному случаю. Соотношения для гасителей крутильных колебаний получаются заменой m на J, $m_г$ на $J_г$, G_0 на M_0.

2. Если параметры возбуждения объекта заданы в виде закона колебаний демпфируемой точки $æ_0 e^{i\omega t}$, то существует связь $G_0 = æ_0 / |l(i\omega)|$, где $l(i\omega)$ — динамическая податливость точки крепления гасителя.

то оценивать отношением значения какого-либо характерного параметра колебаний объекта с виброзащитным устройством, к значению того же параметра при отсутствии виброзащиты. Это отношение называют *коэффициентом эффективности* вибрационной защиты.

§ 11.5. ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ. ДИССИПАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Диссипативные силы. При колебаниях упругих систем происходит рассеяние энергии в окружающую среду, а также в материале при деформации упругих элементов и в узлах сочленения деталей конструкции. Эти потери вызываются силами неупругого сопротивления — **диссипативными силами**, на преодоление которых непрерывно и необратимо расходуется энергия колебательной системы, а следовательно, возбудителей колебаний. Для описания диссипативных сил используются характеристики, представляющие зависимость диссипативных сил от скорости движения масс колебательной системы или от скорости деформации упругого элемента. Вид характеристики определяется природой сил сопротивления. Наиболее распространенные характеристики диссипативных сил представлены на рис. 11.8.

Вязкое сопротивление (рис. 11.8, *а*) характеризуется коэффициентом сопротивления *b_1 и описывается выражением

$$F_д(\dot{x}) = b_1 \dot{x}. \tag{11.11}$$

Такую характеристику имеют диссипативные силы, возникающие при малых колебаниях в вязкой среде (газе или жидкости), а также в ряде гидравлических демпферов.

При больших виброскоростях имеет место квадратичная зависимость (рис. 11.8, *б*) диссипативной силы от скорости:

$$F_д(\dot{x}) = b_2 \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x}. \tag{11.12}$$

Часто в конструкциях демпферов используют элементы сухого трения, характеристика которого (рис. 11.8, *в*) имеет вид

$$F_д(\dot{x}) = b_0 \operatorname{sgn} \dot{x}, \tag{11.13}$$

где $b_0 = \text{const}$ — сила сухого трения.

Все приведенные зависимости можно представить единой нелинейной характеристикой

$$F_д(\dot{x}) = b_\mu |\dot{x}|^\mu \operatorname{sgn} \dot{x}, \tag{11.14}$$

---

*Коэффициент сопротивления обозначают как буквой b, так и буквой k (см. гл. 9, § 10.3 и гл. II).

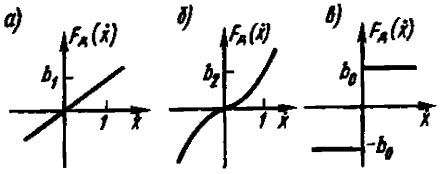


Рис. 11.8

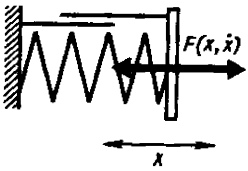


Рис. 11.9

где μ, b_μ — постоянные. При μ, равном 1, 2 и 0, соответственно получаются характеристики (11.11) — (11.13).

Гистерезис. Во многих случаях разделение полной силы на упругую и диссипативную является условным, а зачастую и вообще физически неосуществимым. Последнее относится прежде всего к силам внутреннего трения в материале упругого элемента и к силам конструкционного демпфирования, связанного с диссипацией энергии при деформации неподвижных соединений (заклепочных, резьбовых, прессовых и т. д.).

Если провести циклическое деформирование упругодиссипативного элемента (рис. 11.9), например, по закону

$$x = a\cos\omega t, \tag{11.15}$$

то обнаруживается различие линий нагрузки и разгрузки на диаграмме сила — перемещение (рис. 11.10). Это явление называют *гистерезисом*. Площадь, ограниченная петлей гистерезиса, выражает энергию Ψ, рассеянную за один цикл деформирования, и определяет работу диссипативных сил:

$$\Psi = \oint F(x, \dot{x})\mathrm{d}x = \int_0^T F_д(\dot{x})\dot{x}\mathrm{d}t,$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период деформирования [8].

Пусть, например, динамическая характеристика упругодиссипативного элемента имеет вид

$$F(x, \dot{x}) = F_y(x) + F_д(\dot{x}),$$

где $F_y(x) = cx$ — линейная упругая составляющая. Петля гистерезиса такого элемента с линейной диссипативной силой (11.11) при деформации по закону (11.15) имеет вид эллипса (рис. 11.10, *а*). Угол α наклона его большой оси характеризует жесткость элемента $c = \mathrm{tg}\,\alpha$. Рассеянная за цикл энергия (11.15)

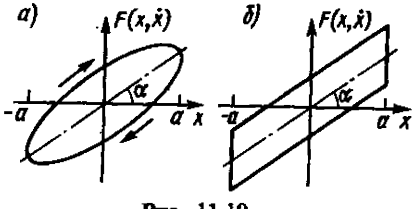


Рис. 11.10

$$\Psi=\int_0^T b_1\dot{x}^2(t)\mathrm{d}t=b_1(a\omega^2)\int_0^T \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t=\pi a^2\omega b_1. \qquad (11.16)$$

На рис. 11.10, *б* показана петля гистерезиса элемента с сухим трением (11.13). Для него рассеянная энергия

$$\Psi=4ab_0. \qquad (11.17)$$

Для элемента с диссипативной характеристикой вида (11.14) рассеянная за период энергия

$$\Psi=k_\mu a^{\mu+1}\omega^\mu b_\mu, \qquad (11.18)$$

где $k_\mu=\int_0^\pi |\sin\tau|^{\mu+1}\mathrm{d}\tau$. Некоторые значения k_μ приведены ниже:

μ	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3
k_μ	4,000	3,500	3,142	2,874	2,666	2,498	2,356

Рассеяние энергии при колебаниях упругодиссипативной системы оценивают коэффициентом поглощения (см. § 8.1). При упругой линейной характеристике потенциальная энергия Π упругого элемента

$$\Pi=ca^2/2;$$

коэффициент поглощения

$$\psi=2\Psi/(ca^2). \qquad (11.19)$$

Согласно (11.16) — (11.18), в зависимости от вида характеристики диссипативной силы коэффициент поглощения является функцией:

частоты при вязком демпфировании (11.11)

$$\psi=2\pi b_1\omega/c;$$

амплитуды при сухом трении (11.13)

$$\psi=8b_0/(ca);$$

амплитуды и частоты в общем случае (11.14)

$$\psi=2k_\mu a^{\mu-1}\omega^\mu b_\mu/c.$$

При отыскании периодических колебаний вида (11.15) системы, диссипативные свойства которой заданы одним из изложенных выше способов, исходную динамическую характеристику $F(x, \dot{x})$ заменяют эквивалентной упруговязкой моделью:

$$F(x, \dot{x})\approx cx+b\dot{x}. \qquad (11.20)$$

Коэффициент b эквивалентного демпфирования подбирают так, чтобы исходная и заменяющая схемы обладали одинаковой погло-

щающей способностью. Энергия (11.16), рассеянная линейным эквивалентным демпфером,

$$\Psi=\pi a^2\omega b. \tag{11.21}$$

Согласно (11.19), исходный диссипативный элемент, имеющий коэффициент поглощения ψ, рассеивает энергию

$$\Psi=\frac{1}{2}\psi c a^2. \tag{11.22}$$

Приравнивая (11.21) и (11.22), получаем **эквивалентный коэффициент сопротивления**

$$b=\frac{\psi c}{2\pi\omega}. \tag{11.23}$$

Коэффициент зависит не только от характеристик диссипативных сил, но и от параметров процесса.

Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы. Уравнение движения массы m записывают в виде

$$m\ddot{x}+cx+F(\dot{x})=Q_0\cos(\omega t-\varphi). \tag{11.24}$$

Отыскивая решение (11.15) и проводя линеаризацию (11.20) нелинейной функции $F(\dot{x})$, вместо (11.24) получим при $F(\dot{x})=b\dot{x}$.

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+cx=Q_0\cos(\omega t-\varphi). \tag{11.25}$$

В результате решения линеаризованного уравнения (11.25) амплитуда

$$a=\frac{Q_0}{c\sqrt{\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\left(\frac{b\omega}{c}\right)^2}},$$

где $\omega_0=\sqrt{c/m}$ — собственная частота системы.

Величина b является функцией амплитуды и частоты, т. е. $b=b(a,\omega)$. Поэтому это соотношение в общем случае представляет собой уравнение, решение которого определяет искомую амплитуду. Для резонансной амплитуды, достигаемой при малом демпфировании на частоте $\omega\approx\omega_0$, имеем

$$a_р=Q_0/(b\omega_0). \tag{11.26}$$

С помощью (11.23) выражению (11.26) можно придать вид

$$a_р=2\pi Q_0/(c\psi). \tag{11.27}$$

Для линейной системы соотношение (11.26) можно записать в виде [8, т. 1]

$$a_р=\pi Q_0/(c\delta), \tag{11.28}$$

где $\delta = 2\pi n/\omega_0$ — логарифмический декремент колебаний; $n = b/(2m)$ — коэффициент демпфирования.

Из сравнения (11.27), (11.28) видно, что

$$\psi = 2\delta. \tag{11.29}$$

Учет внутреннего трения в материалах. Многочисленными экспериментами установлено, что поглощающие свойства большинства материалов не зависят от частоты деформирования. Поэтому диссипативные свойства материала удобно характеризовать с помощью коэффициента поглощения ψ или связанного с ним равенством (11.29) логарифмического декремента колебаний δ. Эти величины, определяемые, как правило, экспериментально, представляют в виде зависимостей от амплитуд относительных деформаций, нормальных или касательных напряжений.

Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях. Наряду с внешними демпфирующими факторами на колебания механических систем заметное влияние могут оказать энергетические потери внутри самой конструкции (конструкционное демпфирование). Эти потери происходят из-за трения в кинематических парах, а также в соединениях типа прессовых, шлицевых, резьбовых, заклепочных и т. п. Хотя такие соединения принято называть неподвижными, в действительности при их нагружении неизбежно возникают малые проскальзывания по контактным поверхностям; на соответствующих относительных перемещениях силы трения совершают работу.

Лишь в некоторых простых схемах соединений поглощение энергии за один цикл можно вычислить с помощью теоретического расчета. Более надежные оценки рассеяния энергии могут быть получены экспериментальным путем — либо по параметрам резонансного пика в режиме моногармонических вынужденных колебаний, либо по огибающей свободных затухающих колебаний.

§ 11.6. ПРИНЦИПЫ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ. ВИБРОЗАЩИТНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Элементы расчетной модели и их характеристика [14]. В расчетной модели виброзащитной системы можно выделить три основные части: источник возмущения (*И*), объект защиты (*О*) и виброизолирующее устройство (*ВУ*). В простейшем случае источник и объект считаются твердыми телами, движущимися поступательно вдоль некоторой оси x (рис. 11.11, *а*).

Приложенные к системе внешние силы F (возмущения), а также внутренние силы R и R', с которыми виброизолирующее устройство, расположенное между источником и объектом, воздействует на них, считаются направленными вдоль оси x; тем самым ось x служит осью рассматриваемого виброизолирующего устройства.

В большинстве случаев масса одного из тел системы — источ-

ника или объекта — существенно превышает массу другого тела — соответственно объекта или источника. Тогда движение тела «большой» массы может считаться не зависящим от движения тела «малой» массы. Если, в частности, «большую» массу имеет объект, то его обычно считают неподвижным; движение системы вызывается в этом случае приложенными к источнику внешними силами, представляющими силовое возбуждение $F=F(t)$ (рис. 11.11, *б*). Если «большую» массу имеет источник, то закон его движения $\xi=\xi(t)$ можно считать заданным; это движение играет роль кинематического возбуждения объекта (рис. 11.11, *в*). В обоих случаях тело «большой» массы называют несущим или основанием, тело «малой» массы — несомым.

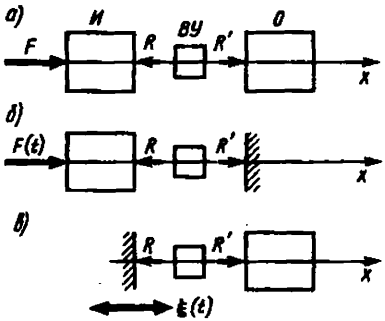


Рис. 11.11

Схему, представленную на рис. 11.11, *б*, обычно используют тогда, когда речь идет о защите зданий, сооружений, перекрытий или фундаментов от динамических воздействий, возбуждаемых установленными на них машинами и механизмами с неуравновешенными движущимися частями или иным виброактивным оборудованием. Схему, изображенную на рис. 11.11, *в*, используют в задачах виброзащиты приборов, аппаратов, точных механизмов или станков, т. е. оборудования, чувствительного к вибрациям и устанавливаемого на колеблющихся основаниях или на движущихся объектах.

Виброизолирующее устройство представляет важнейшую часть виброзащитной системы; его назначение состоит в создании такого режима движения, инициируемого заданными возмущениями, при котором реализуется цель защиты объекта. Во многих случаях это оказывается достижимым при использовании безынерционного виброизолирующего устройства, которое для схем, изображенных на рис. 11.11, представляет одноосный виброизолятор. Для такого виброизолятора реакции R и R' совпадают по величине ($R=R'$), причем в рассматриваемом ниже простейшем случае реакцию R можно считать пропорциональной деформации δ и скорости деформации $\dot{\delta}$ виброизолятора:

$$R=c\delta+b\dot{\delta}. \qquad (11.30)$$

Зависимость (11.30) описывает линейную характеристику простого безынерцинного виброизолятора; коэффициенты c и b называют соответственно жесткостью и коэффициентом демпфирования. При $b=0$ (11.30) описывает характеристику линейного идеального упругого элемента (пружины); при $c=0$ — характеристику линей-

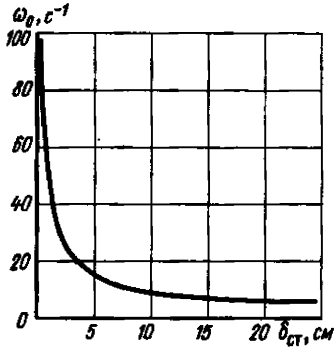


Рис. 11.12

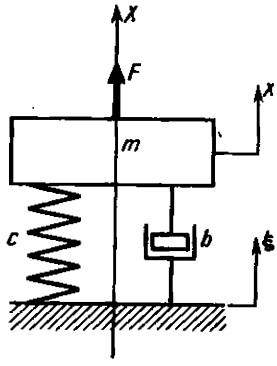


Рис. 11.13

ного вязкого демпфера. Таким образом, модель виброизолятора с характеристикой (11.30) определяет собственную частоту системы

$$\omega_0=\sqrt{c/m}.$$

Значение c определяет также статическую деформацию $\delta_{ст}$ (осадку) виброизолятора, связанную с ω_0 формулой

$$\omega_0=\sqrt{g\sin\alpha/\delta_{ст}},$$

где $\delta_{ст}$ — деформация под осевой статической нагрузкой $mg\sin\alpha$; m — масса несомого тела; α — угол наклона оси виброизолятора к горизонту. Зависимость $\omega_0=\omega_0(\delta_{ст})$ приведена на рис. 11.12.

Расчетная модель простейшей виброзащитной системы с одной степенью свободы дана на рис. 11.13; здесь m, x — соответственно масса и координата несомого тела; F — сила, приложенная к несомому телу; ξ — координата основания; c, b — соответственно жесткость и коэффициент демпфирования виброизолятора. Демпфирующие свойства такой системы характеризуются коэффициентом демпфирования

$$n=b/(2m)$$

и относительным демпфированием

$$\nu=n/\omega_0=b/(2\sqrt{cm}).$$

При $\nu=1$ в системе реализуется критическое демпфирование.

Эффективность виброзащиты. Коэффициенты эффективности при гармоническом возбуждении. Под эффективностью виброзащиты понимается степень реализации виброзащитным устройством целей

виброзащиты. При силовом гармоническом возбуждении

$$F(t)=F_0\sin\omega t;\ \xi(t)=0,$$

где F_0 и ω — соответственно амплитуда и частота вынуждающей силы; цель защиты может состоять в уменьшении амплитуды R_0 силы, передаваемой на неподвижный объект,

$$R_0=\frac{F_0\sqrt{\omega_0^4+4n^2\omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}$$

или в уменьшении амплитуды X_0 установившихся вынужденных колебаний источника:

$$X_0=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}.$$

При кинематическом гармоническом возбуждении

$$F(t)=0;\ \xi(t)=\xi_0\sin\omega t$$

цель защиты может заключаться в уменьшении амплитуды абсолютного ускорения (перегрузки) объекта

$$W=\frac{\xi_0\omega^2\sqrt{\omega_0^4+4n^2\omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}},$$

а также в уменьшении амплитуды его колебаний относительно основания:

$$X_0'=\frac{\xi_0\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}.$$

Количественно степень реализации цели виброзащиты можно охарактеризовать значениями безразмерных **коэффициентов эффективности**. Для расчетной модели, изображенной на рис. 11.13, при силовом возбуждении вводят коэффициенты

$$k_R=R_0/F_0;\ k_x=cX_0/F_0.$$

В случае кинематического возбуждения рассматривают коэффициенты

$$k_R=W/(\omega^2\xi_0);\ k_{x'}=X_0'/\xi_0.$$

Величины k_R и k_x называют соответственно *коэффициентом виброизоляции и коэффициентом динамичности.*

Зависимость k_R, k_x и $k_{x'}$ от безразмерных параметров ν и $z=\omega/\omega_0$ имеет такой вид:

$$k_R=\sqrt{\frac{1+4\nu^2z^2}{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}};$$

$$k_x=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}};\quad k_{x'}=\frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}}.$$

Эквивалентные коэффициенты жесткости и демпфирования. Виброизолирующее устройство часто выполняют в виде соединения нескольких виброизоляторов, образующих сложный виброизолятор. При определенных условиях реакция R такого соединения может аппроксимироваться зависимостью (11.30), где δ — деформация соединения в целом. Тогда рассматриваемый сложный виброизолятор эквивалентен (в смысле воздействия на источник и объект) простому, коэффициенты $c_э$ и $b_э$ называют *эквивалентными коэффициентами* жесткости и демпфирования.

Эффективность виброзащитных систем при полигармонических воздействиях. *Полигармоническим* называют процесс, представимый в виде конечной тригонометрической суммы. Например, полигармоническое возмущение кинематического типа задается суммой:

$$\xi(t)=\sum_{j=1}^{n}\xi_{j0}\sin(\omega_jt+\alpha_j),$$

где ξ_{j0}, ω_j, α_j — соответственно амплитуда, частота и начальная фаза j-й гармоники. Совокупность чисел ξ_{j0} $(j=1, 2, ..., n)$ образует *амплитудный спектр* воздействия. Условие эффективности виброзащиты может при этом отождествляться с совокупностью условий эффективности на каждой из гармоник воздействия. Так, если цель виброзащиты состоит в уменьшении *перегрузки* $\max|\ddot{x}(t)|$ объекта, условие эффективности эквивалентно выполнению n неравенств $k_{Rj}(\nu, z_j)\leqslant 1$, $(j=1, 2, ..., n)$, что равнозначно условию ограниченности ординат амплитудно-частотной характеристики системы в заданных точках $z=z_j$ $(j=1, 2, ..., n)$.

§ 11.7. ДИНАМИЧЕСКОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Метод динамического гашения колебаний состоит в присоединении к объекту виброзащиты дополнительных устройств с целью изменения его вибрационного состояния. Работа динамических гасителей основана на формировании силовых воздействий, передаваемых на объект. Этим динамическое гашение отличается от другого способа уменьшения вибрации, характеризуемого наложением на объект дополнительных *кинематических* связей, например закреплением отдельных его точек.

Изменение вибрационного состояния объекта при присоединении динамического гасителя может осуществляться как путем перераспределения колебательной энергии от объекта к гасителю, так и в направлении увеличения рассеяния энергии колебаний. Первое реализуется изменением настройки системы объект — гаситель по отношению к частотам действующих вибрационных возмущений путем коррекции упругоинерционных свойств системы. В этом случае присоединяемые к объекту устройства называют *инерционными динамическими гасителями*. Инерционные гасители применяют для подавления моногармонических или узкополосных случайных колебаний.

При действии вибрационных нагрузок более широкого частотного диапазона предпочтительней оказывается второй способ, основанный на повышении диссипативных свойств системы путем присоединения к объекту дополнительных специальных демпфируемых элементов. Динамические гасители диссипативного типа получили название *поглотителей колебаний*. Если они одновременно корректируют упругоинерционные и диссипативные свойства системы, то их называют *динамическими гасителями с трением*.

Динамические гасители могут быть конструктивно реализованы на основе пассивных элементов (масс, пружин, демпферов) и активных, имеющих собственные источники энергии. В последнем случае речь идет о применении систем автоматического регулирования, использующих электрические, гидравлические и пневматические управляемые элементы.

Динамическое гашение применимо для всех видов колебаний: продольных, изгибных, крутильных и т. д.; при этом вид колебаний, осуществляемых присоединенным устройством, как правило, аналогичен виду подавляемых колебаний.

Пружинный одномассный инерционный динамический гаситель. На рис. 11.14, *а* представлен простейший случай, когда демпфируемый объект моделируется сосредоточенной массой m, прикрепленной

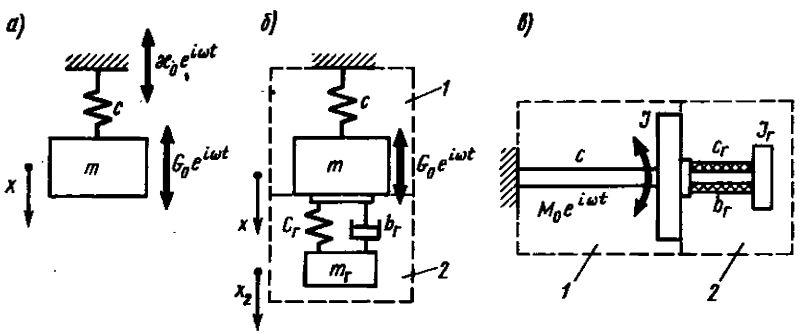


Рис. 11.14

к основанию линейной пружиной с жесткостью c. Колебания объекта возбуждаются либо периодической силой $G(t)=G_0e^{i\omega t}$, действующей на объект, либо вибрациями основания по закону $æ(t)=æ_0e^{i\omega t}$.

Под действием приложенного возмущения объект совершает одномерные колебания. Собственная частота демпфируемого объекта $\omega_0=\sqrt{c/m}$. При $\omega\to\omega_0$ колебания объекта *1* существенно возрастают. Для их уменьшения к нему присоединяется динамический гаситель *2* (рис. 11.14, *б*), имеющий сосредоточенную массу $m_г$, пружину с жесткостью $c_г$ и вязкий демпфер с коэффициентом трения $b_г$.

Дифференциальные уравнения продольных колебаний системы с гасителем имеют следующий вид:

$$m\ddot{x}+b_г(\dot{x}-\dot{x}_г)+cx+c_г(x-x_г)=G_0e^{i\omega t};$$
$$m_г\ddot{x}_г+b_г(\dot{x}_г-\dot{x})+c_г(x_г-x)=0, \qquad (11.31)$$

где x, $x_г$ — абсолютные координаты перемещений масс.

При динамическом гашении крутильных колебаний по схеме, показанной на рис. 11.14, *в*, уравнения, записанные относительно абсолютных углов поворота дисков демпфируемого объекта и гасителя φ, $\varphi_г$, имеют аналогичный вид:

$$J\ddot{\varphi}+b_г(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_г)+c\varphi+c_г(\varphi-\varphi_г)=M_0e^{i\omega t};$$
$$J_г\ddot{\varphi}_г+b_г(\dot{\varphi}_г-\dot{\varphi})+c_г(\varphi_г-\varphi)=0. \qquad (11.32)$$

Здесь J, $J_г$ — моменты инерции демпфируемого объекта и гасителя; c, $c_г$ — крутильные жесткости валов; $b_г$ — коэффициент вязких потерь при парциальных колебаниях гасителя; M_0 — амплитуда вибрационного крутящего момента, приложенного к диску демпфируемой системы.

Отыскиваем решения системы уравнений (11.31) в форме

$$x(t)=ae^{i\omega t},\ x_г(t)=a_гe^{i\omega t},$$

где a, $a_г$ — амплитуды колебаний демпфируемого объекта и динамического гасителя соответственно.

При настройке парциальной частоты упругих колебаний гасителя $\omega_г=\sqrt{c_г/m_г}$ на частоту внешнего возбуждения ω «остаточные» колебания объекта оказываются пропорциональными потерям в га-

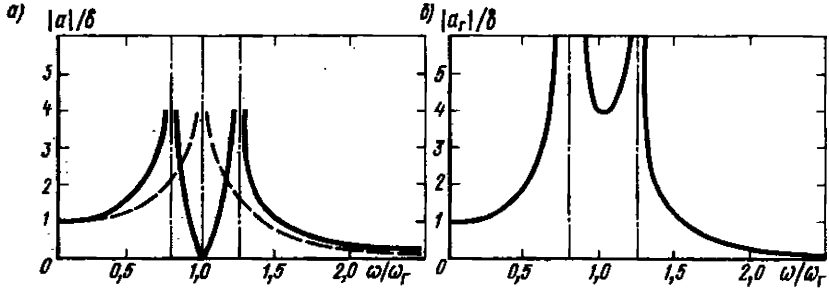


Рис. 11.15

сителе [8, т. 6]:

$$\frac{|a|}{\delta}=\frac{2\beta_{\text{г}}}{\{\mu^2\zeta^4+4\beta_{\text{г}}^2[1-\zeta^2(1+\mu)]^2\}^{1/2}}.$$

Здесь $\delta=G_0/c$; $\zeta=\omega/\omega_0$; $\mu=m_{\text{г}}/m$; $\beta_{\text{г}}=b_{\text{г}}/b_0$.

Таким образом, при указанной настройке при $\beta_{\text{г}}\to 0$ величина $|a|\to 0$, т. е. колебания демпфируемой системы полностью устраняются.

На рис. 11.15 приведены (*а* — для демпфируемого объекта, *б* — для гасителя) амплитудно-частотные характеристики рассматриваемой системы с гасителем (см. рис. 11.14, *б*). Для сравнения на рис. 11.15, *а* штриховой линией нанесена амплитудно-частотная характеристика объекта (см. рис. 11.14, *а*). При выбранной настройке присоединение гасителя образует такую результирующую систему с двумя степенями свободы, у которой на частоту возбуждения приходится антирезонанс. При этом частота антирезонанса совпадает также с частотой резонанса исходной системы.

Катковые инерционные динамические гасители. Возможности использования инерционных динамических гасителей могут быть расширены при обеспечении компенсирующей реакции гасителя. Это достигается, в частности, применением в качестве гасителей неизохронных элементов, имеющих возможность подстраивать частоту своих движений к частоте возбуждения. Существенной неизохронностью обладают, например, элементы, способные осуществлять обкатку замкнутых поверхностей: цилиндр в цилиндрической полости, шар в цилиндрической или сферической полости, кольцо, надетое на стержень, и т. п. Прикрепление таких элементов к вибрирующему объекту приводит к тому, что осуществляемое ими движение обкатки синхронизируется с внешним возбуждением. При этом периодическая реакция, создаваемая вращающимся элементом, противодействует вибрационной нагрузке.

В качестве примера рассмотрим демпфируемый объект с одной степенью свободы, возбуждаемый гармонической силой

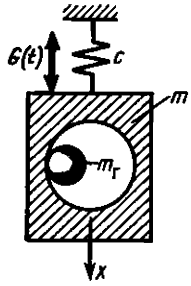


Рис. 11.16

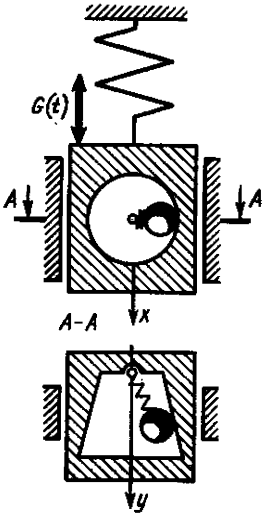


Рис. 11.17

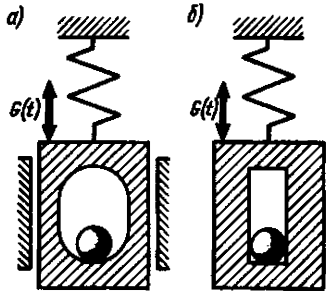


Рис. 11.18

$G(t)=G_0\cos(\omega t+\varphi)$ и снабженный шаровым или роликовым гасителем массой $m_г$ и радиусом $\rho_г$, расположенным в цилиндрической полости радиусом ρ (рис. 11.16). Рассматриваемая система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$(m+m_г)\ddot{x}+cx=G_0\cos(\omega t+\psi)+$$
$$+(\rho-\rho_г)m_г(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\varphi}\sin\varphi);$$
$$m_г(\rho-\rho_г)^2\ddot{\varphi}=m_г(\rho-\rho_г)\ddot{x}\sin\varphi. \qquad (11.33)$$

Здесь x — продольная координата объекта; φ — относительная угловая координата положения гасителя, отсчитываемая от вертикальной оси. Найдем условия стабилизации объекта, полагая $x=\dot{x}=\ddot{x}=0$. Из (11.33) имеем

$$\varphi=\omega_г t+\varphi_0, \qquad (11.34)$$

т. е. гаситель совершает равномерное вращение.

Соотношения для неизвестных величин $\omega_г$ и φ_0 определим, подставляя (11.34) в (11.33). В результате получим

$$m_г(\rho-\rho_г)\omega^2=G_0(\omega_г\equiv\omega);$$
$$\varphi_0=\psi+\pi. \qquad (11.35)$$

Центробежная реакция, передаваемая равномерно вращающимся телом демпфируемому объекту, полностью уравновешивает воз-

буждение и обеспечивает стабилизацию объекта. Осуществляя слежение за частотой возбуждения, катковые гасители рассматриваемого типа чувствительны к изменению амплитуды возбуждения на частоте настройки.

Если изменение амплитуды и частоты возбуждения осуществляется одновременно и так, что сохраняется равенство (11.35), то полное подавление колебаний выполняется во всем диапазоне изменения. Например, при возбуждении объекта неуравновешенной вращающейся массой $G_0=\varepsilon\omega^2 m_д$, где ε — эксцентриситет, а $m_д$ — масса дебаланса, условие настройки гасителя (11.35) будет

$$m_г(\rho-\rho_г)=m_д\varepsilon.$$

Иногда с увеличением частоты увеличивается эксцентриситет дебаланса $\varepsilon(\omega)$. Необходимое для компенсации увеличение радиуса полости $\rho(\omega)$ может быть осуществлено тогда выполнением конструкции гасителя в виде, показанном на рис. 11.17. Форма поверхности, по которой происходит обкатка, выполнена таким образом, чтобы при увеличении частоты и, следовательно, центробежной реакции шарик перемещался в направлении оси y вращения образующей. Характеристика пружины выбирается из условия, позволяющего обеспечить удержание шарика на требуемом радиусе.

Выбором формы осевого сечения полости можно регулировать в некоторых пределах спектр периодической реакции гасителя. Например, вытягивая окружность в эллипс (рис. 11.18, *а*), можно увеличить роль высших гармоник с кратными частотами в спектре реакции гасителя. Это полезно в тех случаях, когда аналогичные гармоники имеются в возбуждении. Теоретически, увеличивая эксцентриситет эллипса до единицы, т. е. вытягивая полость в поверхность, допускающую лишь одномерные перемещения массы гасителя (рис. 11.18, *б*), приходим к идее ударного гасителя (см. § 11.9), реакция которого имеет спектр кратных гармоник, близкий к равномерному.

Использование одного каткового гасителя требует наличия направляющих у демпфируемого объекта, компенсирующих боковые реакции гасителя. Их применения можно избежать при использовании двух одинаковых гасителей с половинной массой (рис. 11.19), расположенных симметрично относительно линии действия возмущающей силы. После прохождения резонансной частоты системы гасители синхронизируют свое вращение в противопо-

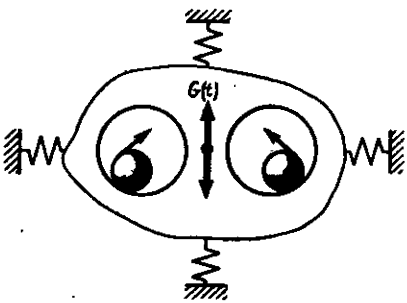


Рис. 11.19

ложных направлениях, компенсируя тем самым боковые нагрузки. Таким образом, диапазон эффективности таких гасителей — область зарезонансных частот.

Маятниковые инерционные динамические гасители. Поддержание равенства парциальной частоты динамического гасителя с частотой возбуждения в широком диапазоне может быть обеспечено при использовании гасителей колебаний маятникового типа, расположенных в поле центробежных сил, образованном вращением, являющимся причиной колебаний. На рис. 11.20 показаны схемы подобных гасителей, предназначенных для подавления крутильных (рис. 11.20, *а*) и продольных (рис. 11.20, *б*) колебаний. Рассмотрим принцип их действия на примере маятникового гасителя крутильных колебаний. Пусть диск (рис. 11.20, *а*) радиусом ρ и с моментом инерции J упруго связан с валом двигателя, совершающим вращение по закону

$$\varphi_0(t)=\Omega t+\vartheta_0 e^{i\omega t},$$

где Ω — средняя угловая скорость вала; ϑ_0 — показатель неравномерности вращения; ω — частота крутильных колебаний вала, причем $\omega=n\Omega$, где $n=1, 2, \ldots$ — кратность колебаний.

В результате приведенный к диску вибрационный момент $M(t)=c\,\vartheta_0 e^{i\omega t}$ (c — крутильная жесткость участка вала между двигателем и диском) возбуждает крутильные колебания диска. Для подавления указанных колебаний к диску шарнирно прикреплен маятник, имеющий массу $m_г$, расположенную на конце невесомого стержня длиной l (рис. 11.21). Рассмотрим колебания маятника относительно диска во вращающейся с угловой скоростью Ω системе координат, жестко связанной с диском (рис. 11.21, *а*). Приклады-

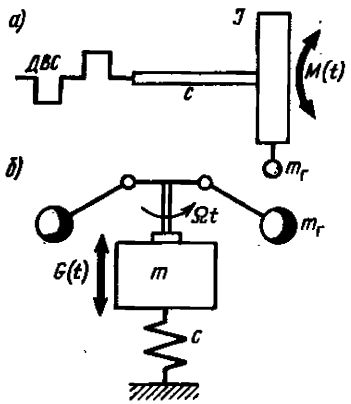


Рис. 11.20

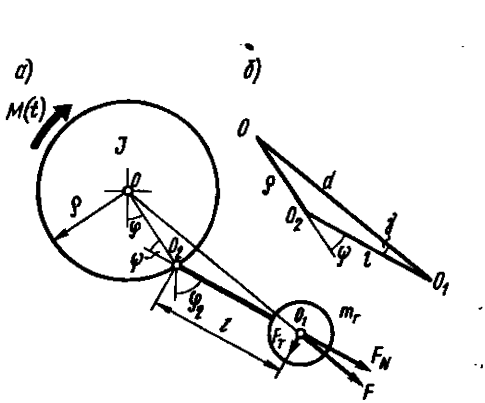


Рис. 11.21

вая к центру масс маятника центробежную силу $F=m_{\Gamma}\Omega^2 d$, где d — расстояние от центра масс маятника до центра вращения диска, разложим ее на две составляющие: F_N и F_T — вдоль оси маятника и перпендикулярно ей. Имеем

$$F_N=m_{\Gamma}\Omega^2 d\cos\gamma;\ F_T=m_{\Gamma}\Omega^2 d\sin\gamma.$$

Обозначая угловое отклонение маятника относительно диска через $\psi=\varphi_{\Gamma}-\varphi$, где φ, φ_{Γ} — абсолютные угловые отклонения диска и маятника, из треугольника на рис. 11.21, *б* с учетом малости острых углов найдем

$$\gamma=\rho\psi/(\rho+l).$$

В результате при малых колебаниях маятника

$$F_N\approx m_{\Gamma}\Omega^2(\rho+l);\ F_T\approx m_{\Gamma}\Omega^2\rho\psi.$$

Дифференциальные уравнения, описывающие колебания рассматриваемой системы с двумя степенями свободы, имеют следующий вид:

$$J\ddot{\varphi}+b_{\Gamma}(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\Gamma})+c\varphi-m_{\Gamma}\Omega^2\rho(\rho+l)(\varphi_{\Gamma}-\varphi)=\mathcal{V}_0 e^{i\omega t};$$

$$m_{\Gamma}l^2\ddot{\varphi}_{\Gamma}+b_{\Gamma}(\dot{\varphi}_{\Gamma}-\dot{\varphi})+m_{\Gamma}\Omega^2\rho l(\varphi_{\Gamma}-\varphi)+m_{\Gamma}\ddot{\varphi}\rho l=0. \qquad (11.36)$$

При составлении второго дифференциального уравнения не учитывались малые кориолисовы силы, а переносное движение диска учитывалось с помощью последнего члена. Согласно этому уравнению, парциальная собственная частота колебания маятника

$$\omega_{\Gamma}=\Omega\sqrt{\rho/l}=(\omega/n)\sqrt{\rho/l},$$

т. е. она пропорциональна угловой скорости вращения вала или частоте колебаний. Таким образом, при изменении частоты колебаний автоматически подстраивается частота гасителя.

При гашении чисто крутильных колебаний для компенсации изгибающего действия силы F_N целесообразно устанавливать два маятника в диаметрально противоположных точках диска. Создаваемый ими динамический эффект гашения колебаний имеет суммарное действие.

Конструктивное обеспечение настройки (11.36) обладает рядом особенностей. Простейшая схема типа той, что показана на рис. 11.22, *а*, оказывается осуществимой, как правило, лишь при $n=1$. С увеличением n длина маятников существенно уменьшается. Для обеспечения подвеса на малом плече l используют конструкции, показанные на рис. 11.22, *б* — *д*. На рис. 11.22, *б* приведена схема свободной бифилярной установки маятника-противовеса *1* на выступе кривошипа *2* коленчатого вала, в котором выполнены отвер-

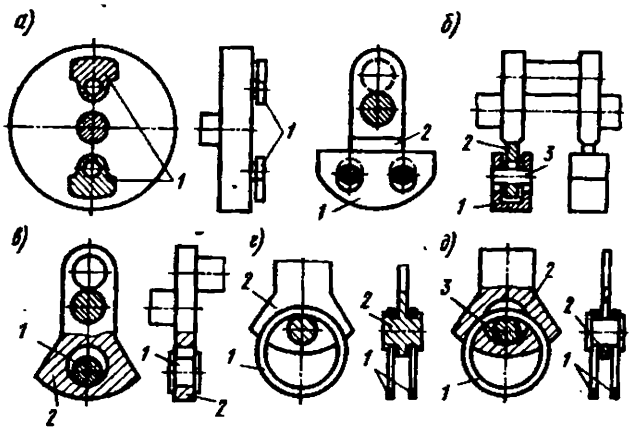


Рис. 11.22

стия радиусом ρ_1. Такой же радиус имеют круглые отверстия противовеса. Соединение осуществляется с помощью штифтов *3* радиусом ρ_2, меньшим радиусов отверстий. Описанное крепление обеспечивает поступательное движение противовеса по окружности радиусом $l=2(\rho_1-\rho_2)$.

Радиус крепления маятника-противовеса в данном случае $\rho=h-l$, где h — расстояние от центра вращения диска до центра масс противовеса.

Окончательная формула настройки маятника с бифилярным подвесом имеет вид

$$2n^2(\rho_1-\rho_2)/[h-2(\rho_1-\rho_2)]=1.$$

На рис. 11.22, *в* гашение колебаний осуществляется роликовым маятником *1*, помещенным свободно в цилиндрическом отверстии противовеса кривошипа *2*. Такая схема имеет при реализации существенные габаритные ограничения, поэтому вместо роликов используют иногда кольцевые маятники *1* (рис. 11.22, *г, д*).

Выбор параметров маятниковых гасителей крутильных колебаний удобно осуществлять из условия компенсации реактивным моментом $M_N=F_N\rho\sin\psi\approx m_\Gamma\Omega^2(\rho+l)\rho\psi$ возбуждающего момента $M(t)$. Приравнивая амплитуды этих величин, получим

$$m_\Gamma\Omega^2(\rho+l)\rho\psi_0=c\vartheta_0. \qquad (11.37)$$

Задавшись допустимой амплитудой относительных колебаний маятника $\psi_0<0{,}35\div0{,}4$ и конструктивными размерами, получаем из (11.37) для любого известного возбуждения значение массы гасителя m_Γ.

Действие маятникового гасителя продольных колебаний (см. рис. 11.20, *б*) во многом аналогично. Уравновешенная система двух или более маятников приводится во вращение относительно вертикальной оси. Частота собственных колебаний определяется выражением $\omega_0=\Omega\sqrt{(\rho+l)/l}$, где ρ — расстояние от центра шарнира до оси вращения; l — длина маятника. Развиваемая при малых относительных колебаниях маятников с частотой $\omega=\omega_0$ ($\omega=\Omega n$) суммарная реакция с амплитудой $m_{\text{г}}j\omega^2\rho\psi_0$ (j — число маятников) должна быть равна амплитуде возмущающей силы G_0.

«Маятниковые» элементы зачастую конструктивно реализуются в виде шаровых или цилиндрических тел, свободно расположенных в полостях объекта. Такие конструкции находят, например, применение при *гашении изгибных колебаний* коленчатых валов. При этом одно или два тела *1* (рис. 11.23, *а*) устанавливают в пазах противовеса кривошипа *2*, они способны совершать качательные движения в плоскости изгиба, обкатываясь по ограниченной цилиндрической или тороидальной поверхности. Часто также используют установку маятника с бифилярным подвесом *1* (рис. 11.23, *б*). Установочные плоскости качаний маятников для гашения изгибных и крутильных колебаний коленчатых валов оказываются взаимно перпендикулярными.

Инерционные динамические гасители с активными элементами. Использование в системах динамического гашения колебаний элементов с собственными источниками энергии расширяет их функциональные свойства. Появляется возможность достаточно просто и в широком диапазоне осуществлять подстройку параметров гасителя в связи с изменением действующих возмущений, производить непрерывную настройку в режиме слежения, отыскивать и реализовывать наилучшие законы для компенсирующих реакций.

При гашении моногармонических колебаний активные элементы могут быть применены для регулирования параметров динамического гасителя при медленных изменениях частоты возбуждения с целью обеспечения равенства парциальной частоты гасителя и ча-

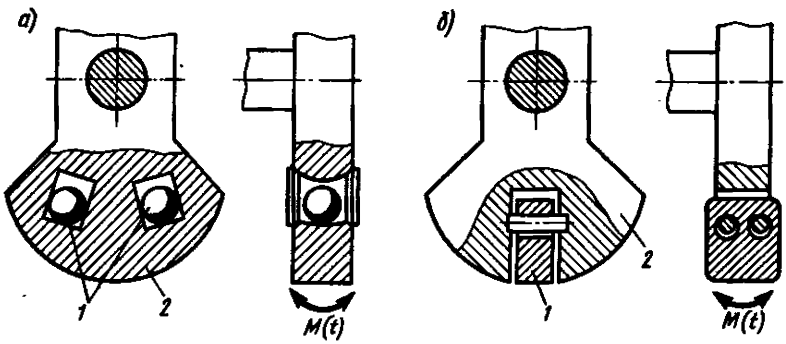


Рис. 11.23

стоты возбуждения

$$\omega_г = \omega. \qquad (11.38)$$

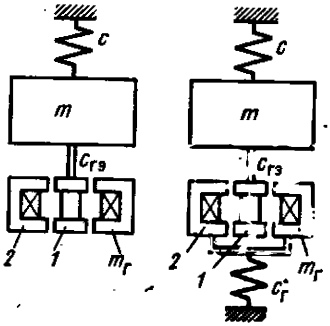


Рис. 11.24

На рис. 11.24 приведены схемы использования электромагнита в качестве регулятора эквивалентной жесткости динамического гасителя продольных колебаний. Схемы различаются прикреплением сердечника *1* и корпуса с катушкой *2* к демпфируемому объекту или неподвижному основанию.

Аналогичные схемы могут быть осуществлены для управляемого динамического *гашения крутильных колебаний*. В качестве исполнительного элемента удобно использовать модифицированную конструкцию двигателя постоянного тока (рис. 11.25), устранив относительный сдвиг полюсов ротора *1* и статора *2* и ликвидировав возможность переключения полюсов при колебаниях.

Силовое взаимодействие при относительных смещениях элементов описанных электромеханических устройств носит квазиупругий характер, причем коэффициент эквивалентной упругости $c_{гэ} = kI^2$, где I — сила тока в обмотках, а постоянная k определяется свойствами магнитопроводов и обмоток.

Переписав соотношение (11.38) в виде $c_{гэ} = m_г\omega^2$ для продольных колебаний или $c_{гэ} = J_г\omega^2$ для крутильных, заметим, что удобным способом регулирования эквивалентной упругости подвеса электромеханического гасителя является обеспечение силы тока в обмотках, пропорциональной частоте возбуждения.

Жесткость гасителя может изменяться также путем перемещения массы динамического гасителя *1* вдоль упругой балки с помощью регулируемого электродвигателя (рис. 11.26, *а*). Учитывая, что в режиме наилучшего динамического гашения (антирезонанс) фазы ко-

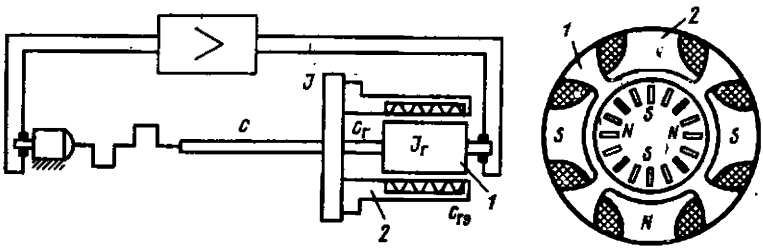


Рис. 11.25

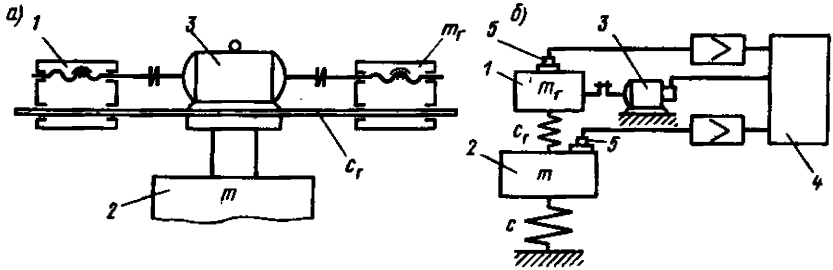


Рис. 11.26

лебаний объекта *2* и гасителя *1* сдвинуты на $\pi/2$, выработка управляющего сигнала осуществляется фазовым дискриминатором *4* (рис. 11.26, *б*), в котором сравниваются показания датчиков *5* абсолютных перемещений объекта и гасителя. При сдвиге фаз, отличающемся от $\pi/2$, срабатывает реле, включающее электродвигатель *3* в соответствии с необходимым направлением компенсирующей подстройки.

Эффективность активного динамического гашения ограничивается инерционностью системы управления. Для снижения массы присоединяемых к объекту частей корпус *1* исполнительного устройства (рис. 11.27) активного гасителя устанавливают иногда на неподвижном основании и передают силовое воздействие на какие-либо точки упругого объекта *2* по результатам измерения колебаний других точек (например, *3*), вибрации которых следует погасить.

В тех случаях, когда осуществляется гашение колебаний движущихся объектов, например транспортных устройств, неподвижная система, относительно которой вырабатываются компенсирующие силы, передаваемые на объект, может быть организована с помощью гироскопических устройств.

Пружинный одномассный динамический гаситель с трением. Расширение частотного диапазона, в котором осуществляется динамическое гашение колебаний, может быть достигнуто также при рациональном использовании диссипативных свойств пружинного одномассного гасителя. На рис. 11.28 приведены амплитудно-частотные характеристики объекта (см. рис. 11.14, *б*) для различных коэффициентов вязкого трения $\beta_г$. Здесь $|a|$ — амплитуда.

Наилучшая настройка $\nu=\omega_г/\omega_0$ динамического гасителя с трением при подавлении моногармонических колебаний, частота которых может принимать значения в широком диапазоне, будет соответствовать такому выбору параметров, при котором

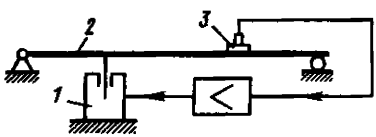


Рис. 11.27

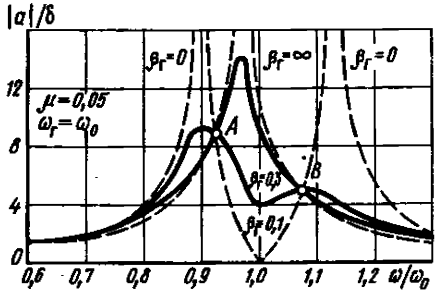


Рис. 11.28

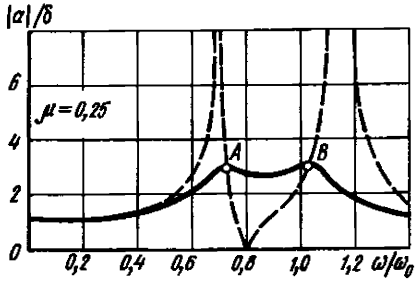


Рис. 11.29

ординаты точек A и B одинаковы и соответствуют максимумам амплитудно-частотной характеристики. Оптимальная настройка $\nu=\frac{1}{1+\mu}$.

Для обеспечения максимального значения амплитуды остаточных колебаний следует подобрать затухание $\beta_г$ таким образом, чтобы в точках A или B достигался экстремум амплитудно-частотной характеристики. На рис. 11.29 приведена амплитудно-частотная характеристика динамического гасителя с трением. Здесь $\mu=m_г/m$ ($m_г$ — масса гасителя; m — масса объекта); $\delta=G_0/c$ (G_0 — внешнее возбуждение).

Иногда гаситель с трением настраивают на собственную частоту демпфируемой системы, т. е. устанавливают $\nu=1$. Такая настройка близка к оптимальной лишь при весьма малых величинах μ.

Для выяснения габаритов гасителя и напряжений в пружине следует определить амплитуду $|a_0|$ колебаний массы гасителя относительно демпфируемой системы. В общем случае эта величина может быть определена из системы дифференциальных уравнений (11.31). На практике, однако, пользуются простым приближенным

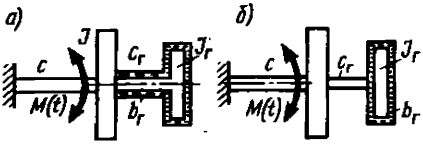


Рис. 11.30

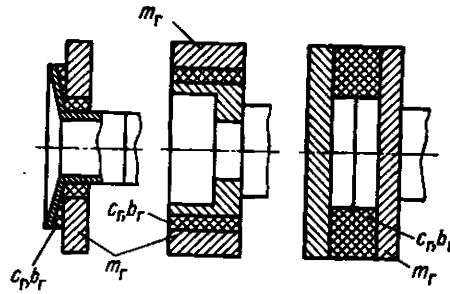


Рис. 11.31

соотношением, получаемым с помощью энергетического баланса.

Работа гармонической силы $G(t)$ при гармоническом движении демпфируемой системы $x(t)$ с амплитудой $|a|$ определяется соотношением

$$E_{\text{В}}=\pi G_0|a|\sin\varphi\approx\pi G_0|a|,$$

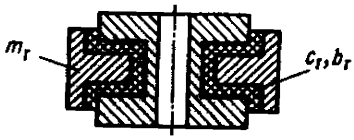


Рис. 11.32

где φ — значение фазы, близкое к $\pi/2$. Энергия, рассеиваемая в вязком демпфере в результате относительного движения масс m и $m_{\text{Г}}$:

$$E_{\text{Д}}=\pi b_{\text{Г}}\omega|a_0|^2.$$

Приравнивая величины $E_{\text{В}}$ и $E_{\text{Д}}$, получим

$$\frac{|a_0|}{\delta}=\sqrt{\frac{|a_0|}{\delta}\,\frac{1}{2\mu\nu\beta_{\text{Г}}\zeta}},$$

где $\zeta=\omega/\omega_0$; $\nu=\omega_{\text{Г}}/\omega_0$; $\beta_{\text{Г}}=b_{\text{Г}}/(2\sqrt{c_{\text{Г}}m_{\text{Г}}})$.

Конструкции динамического гасителя с трением можно создавать как с параллельным соединением упругого и демпфирующего элементов (рис. 11.30, *а*), так и последовательным (рис. 11.30, *б*). Удачным является выполнение упругодемпфирующего элемента в виде единой резиновой детали. На рис. 11.31 приведены примеры подобных конструкций, предназначенных для подавления крутильных колебаний. С помощью подобных деталей создаются также резинометаллические опоры с гасителем колебаний (рис. 11.32).

Гироскопические гасители колебаний. Для гашения колебаний транспортных объектов и в некоторых других специальных случаях находят применение динамические гасители, основанные на использовании гироскопов. Эквивалентное действие подобных систем аналогично работе пружинного гасителя с трением, хотя устройство и принцип функционирования различны. На рис. 11.33 приведена схема успокоителя бортовой качки судов. Ротор гироскопа *1* смонтирован в кожухе *2*, который может качаться относительно судна вокруг оси *3*, перпендикулярной продольной оси корабля. При этом центр тяжести кожуха располагается ниже оси качаний на расстоянии *l*. Колебания кожуха демпфируются с помощью тормозного барабана *4*. Масса ротора составляет обычно $\sim 1\%$ массы судна.

С помощью двигателя ротор приводится во вращение с максимально допустимой угловой скоростью Ω.

Запишем систему дифференциальных уравнений для малых колебаний:

$$J\ddot{\varphi}+c\varphi+J_0\Omega\dot{\varphi}_{\text{Г}}=M(t),$$

$$J_{\text{Г}}\ddot{\varphi}_{\text{Г}}+b_{\text{Г}}\dot{\varphi}_{\text{Г}}+Pl\varphi_{\text{Г}}-J_0\Omega\dot{\varphi}=0,$$

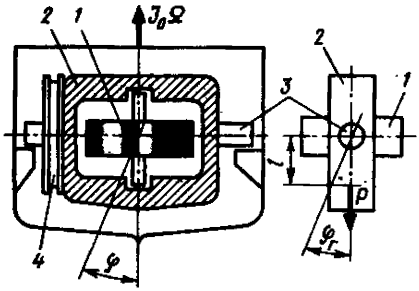


Рис. 11.33

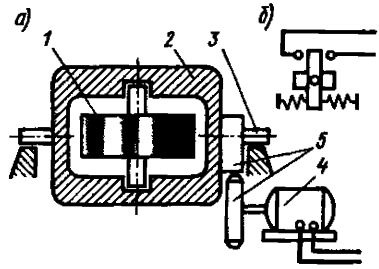


Рис. 11.34

где J — момент инерции судна относительно продольной оси; J_0 — момент инерции ротора; $J_г$ — момент инерции относительно поперечной оси *3*; P — вес кожуха; $\varphi_г$ — угол поворота кожуха; $b_г$ — коэффициент, характеризующий вязкое трение в барабане; c — остойчивость судна; $M(t)=M_0 e^{i\omega t}$ — момент внешних сил, определяемый волнением моря.

Наряду с рассмотренной схемой для гашения бортовой качки нашла применение гироскопическая схема с обратной связью. Кожух *2* исполнительного гироскопа с ротором *1* (рис. 11.34, *а*) установлен концентрично относительно оси *3* прецессии. Повороты кожуха осуществляются серводвигателем *4* через зубчатую передачу *5* с помощью сигналов малого направляющего гироскопа (рис. 11.34, *б*). Последний установлен аналогично исполнительному гироскопу и представляет собой его сильно уменьшенную копию. При бортовой качке в результате поворота кожуха направляющего гироскопа замыкаются соответствующие контакты реле, включающего серводвигатель. В результате кожух исполнительного гироскопа поворачивается таким образом, что возникающий реактивный момент, действующий на опоры кожуха, противодействует качке.

В большинстве современных судов для подавления качки используют устройства, основанные на применении управляемых или неподвижных крыльев, меняющих угол атаки при крене таким образом, чтобы возникающая подъемная сила при их обтекании водой противодействовала качке. В отличие от гироскопических успокоителей эти устройства осуществляют стабилизацию лишь при движении судна.

§ 11.8. ПОГЛОТИТЕЛИ КОЛЕБАНИЙ С ВЯЗКИМ И СУХИМ ТРЕНИЕМ

Поглотители колебаний с вязким трением. На рис. 11.35 показаны схемы простейших поглотителей колебаний вязкого типа, присоединенных к демпфируемому объекту с одной степенью свободы.

Поглотители широко используют для гашения как продольных, так и крутильных колебаний; при этом они пригодны для демпфирования колебаний, изменяющихся по любым законам. При подавлении моногармонических колебаний поглотители колебаний менее эффективны, чем динамические гасители с трением, однако даже в этом случае зачастую им отдают предпочтение из-за конструктивной простоты и отсутствия упругого элемента, склонного к усталостным поломкам.

Рассматриваемая система также может быть описана уравнениями (11.31) в случае продольных колебаний либо (11.32) в случае крутильных при условии, что $c_Г \equiv 0$.

При $\beta_0 = b_Г/(2m_Г\omega_0) = 0$ и $\beta_0 = \infty$ будут системы с одной степенью свободы, амплитудно-частотные характеристики которых показаны на рис. 11.36. Наилучшая настройка поглотителя дает максимум

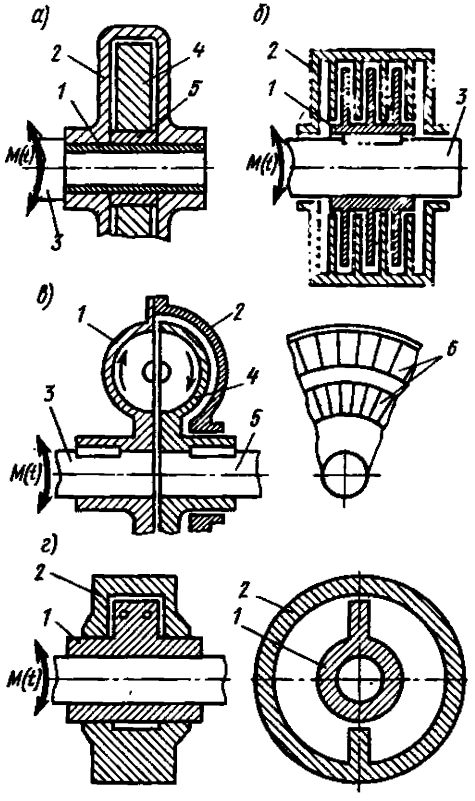


Рис. 11.35

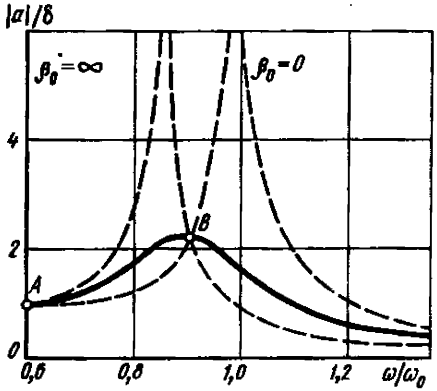


Рис. 11.36

амплитуды в точке *B*. Величина β_0, обеспечивающая экстремум характеристики в точке *B* (сплошная линия), определяется соотношением

$$\beta_0=\sqrt{1/[2(2+\mu)(1+\mu)]}.$$

Простейшая конструкция поглотителя колебаний вязкого типа приведена на рис. 11.35, *а*. Втулка *1*, жестко связанная с кожухом *2*, насажена на вал *3*, крутильные колебания которого требуется погасить. Внутри кожуха находится маховик *4*, способный проскальзывать относительно втулки благодаря вкладышу *5* с малым коэффициентом трения. Малый зазор между кожухом и маховиком заполнен жидкостью с большой вязкостью.

В схеме, изображенной на рис. 11.35, *б*, демпфирующий эффект создается при колебаниях жестко насаженной на вал *3* ступицы *1* с лопатками, прокручивающейся относительно маховика *2*; внутренние камеры заполнены вязкой жидкостью.

На рис. 11.35, *в* ведущий вал *3* вращает полумуфту *1*, имеющую торообразную полость внутренними перегородками *6* и скрепленный с ней кожух *2*, свободно прокручивающийся относительно аналогичной второй полумуфты *4*, жестко соединенной с ведомым валом *5*. Полость между полумуфтами заполнена жидкостью небольшой вязкости. Вследствие разности скоростей ведомого и ведущего вала под действием разности центробежных сил осуществляется круговая циркуляция жидкости в направлении, показанном стрелками. Возникающие при этом кориолисовы силы осуществляют передачу крутящего момента.

В поглотителе на рис. 11.35, *г* демпфирующая сила возникает при перетекании масла через малые отверстия при колебаниях диафрагмы *1* относительно заполненного маслом и свободно насаженного кожуха *2*.

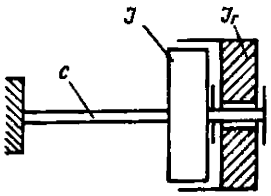


Рис. 11.37

Поглотители колебаний с сухим трением. Поглотители колебаний с сухим трением получили широкое распространение благодаря простоте конструкции и обслуживания, а также относительно малым габаритам. Их применяют для гашения как крутильных, так и продольных колебаний. Рассмотрим принцип действия такого поглотителя на примере гашения крутильных колебаний объекта с одной степенью свободы (рис.

11.37). В этом случае диск с моментом инерции $J_Г$ присоединяется к объекту с помощью пары сухого трения, создающей при относительных колебаниях момент постоянной величины θ, противодействующий относительному смещению объекта и поглотителя.

По аналогии с (11.32) дифференциальные уравнения системы могут быть записаны в таком виде:

$$J\ddot{\varphi}+\theta\ \mathrm{sgn}(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_Г)+c\varphi=M_0 e^{i\omega t};$$

$$J_Г\ddot{\varphi}_Г-\theta\ \mathrm{sgn}(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_Г)=0.$$

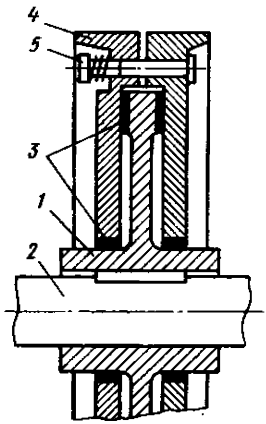


Рис. 11.38

На рис. 11.38 показана конструкция поглотителя с сухим трением. Ступица *1*, жестко соединенная с валом *2*, вовлекает во вращение через фрикционные диски *3* маховик *4*, свободно насаженный на вал. Регулировка величины сил сухого трения обеспечивается степенью сжатия пружины *5*. При колебаниях вала происходит относительное проскальзывание маховика и ступицы, приводящее к рассеянию энергии вследствие трения на фрикционных поверхностях.

Оптимальный момент сил сухого трения, дающий максимальное рассеяние энергии за цикл, $\theta=(\sqrt{2}/\pi)J_Г\omega^2\vartheta_0$, где ϑ_0 — амплитуда угловых колебаний вала при отсутствии демпфера.

Недостатком поглотителей сухого трения является непостоянство момента трения вследствие износа и загрязнения трущихся поверхностей, а также возможность перекоса и заедания дисков.

§ 11.9. УДАРНЫЕ ГАСИТЕЛИ КОЛЕБАНИЙ

Для оценки эффективности нелинейных динамических гасителей помимо информации о динамической податливости или жесткости демпфируемых элементов необходимо знать уровень их колебаний до установки гасителей. Таким образом, в случае экспериментального определения характеристик демпфируемой системы нужно произвести соответствующие измерения колебаний в условиях нормального функционирования объекта.

Нелинейный гаситель не может осуществить полную компенсацию колебаний при моногармоническом возбуждении $x_0(t)=æ_0(\omega)e^{i\omega t}$, и речь может идти только об их частичном подавлении. Уменьшая колебания на частоте внешнего воздействия, нелинейный гаситель возбуждает вместе с тем высокочастотные колебания системы. Эту особенность нелинейного динамического гашения следует иметь в виду в основном при использовании гасителей существенно нелинейного типа, например ударных.

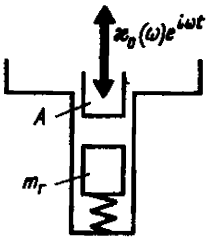


Рис. 11.39

Основу *ударного виброгасителя* составляет тело массой $m_г$ (рис. 11.39), соударяющееся с элементом A демпфируемой системы, колебания которого следует уменьшить. Наибольшее распространение получили плавающие ударные гасители (рис. 11.40, *а, б, в*), выполненные в виде шара, цилиндра, кольца, установленного свободно с зазором 2Δ. Плавающие гасители настраивают на режим двух поочередных соударений тела о каждый ограничитель за период движений, дающий для таких устройств наибольший эффект. Наряду с этим используют пружинные (рис. 11.40, *г*) и маятниковые (рис. 11.40, *д*) ударные гасители с соответствующей подвеской гасителя. В таких устройствах реализуют, как правило, режим односторонних соударений с одним ударом за период. Реже применяют аналогичные устройства двустороннего действия (рис. 11.40, *е*).

На рис. 11.41 приведены статические упругие характеристики $f(y)$ перемещения y гасителя относительно деформируемой точки A объекта для основных вариантов установки гасителей (*а* — плавающий гаситель; *б* — пружинный односторонний гаситель; *в* — пружинный двусторонний гаситель).

Непосредственная гармоническая линеаризация описанных статических характеристик невозможна, поскольку их значения при ударе неоднозначны. Удобным приемом является гармоническая линеаризация обратных функций $y=Q(R)$, характеризующих зависимость относительного смещения от «упругой» реакции гасителя. Например, для гасителя плавающего типа (рис. 11.42) $y=\Delta \operatorname{sgn} R$.

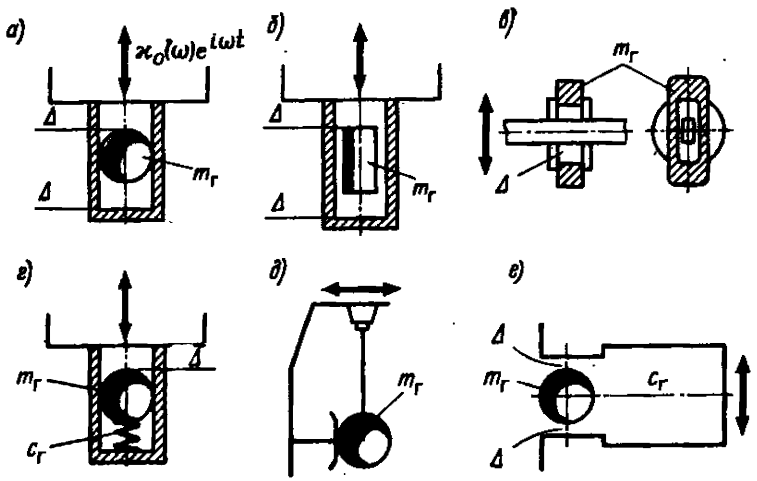


Рис. 11.40

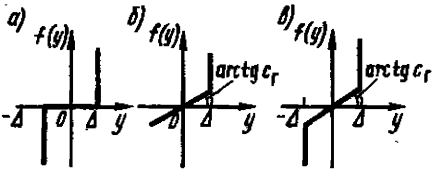


Рис. 11.41

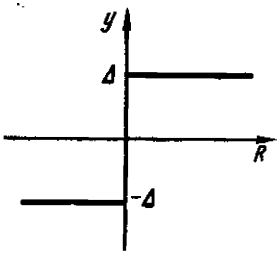


Рис. 11.42

Осуществляя гармоническую линеаризацию функций с помощью обычных приемов, имеем $y \approx q(R_0)R$, где $q(R_0)$ — коэффициент гармонической линеаризации, зависящий теперь от амплитуды R_0 периодической реакции гасителя, причем $q = c_г^{-1}$.

Определим зависимость $æ_0(\omega)$, для которой плавающий ударный гаситель обеспечивает полное подавление основного тона колебаний в широком диапазоне частот возмущения:

$$\frac{\varepsilon æ_0(\omega)}{|l_A(i\omega)|} = \frac{4\Delta m_г \omega^2}{\pi}. \qquad (11.39)$$

Левая часть равенства (11.39) характеризует амплитуду G_0 гармонической возмущающей силы. Таким образом, если $G_0(\omega) = \varepsilon m_A \omega^2$, т. е. возбуждение колебаний вызвано разгоном или торможением вращающейся неуравновешенной массы m_A, установленной с эксцентриситетом ε, то, подобрав параметры гасителя из условия

$$m_г \Delta = (\pi/4)\, \varepsilon m_A,$$

можно обеспечить подавление колебаний в широком частотном диапазоне существования режима с поочередными ударами об ограничители.

На рис. 11.43 показаны амплитудно-частотные характеристики системы с одной степенью свободы, снабженной пружинным ударным гасителем одностороннего действия. Система возбуждается гармонической силой постоянной амплитуды. При этом выполнены условия наиболее эффек-

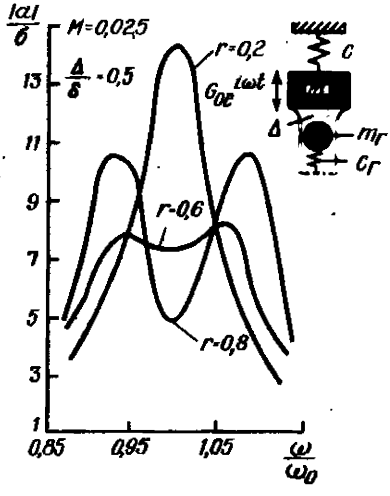


Рис. 11.43

тивной настройки

$$2\sqrt{c_г/m_г}=\sqrt{c/m}.$$

При $\omega=2\sqrt{c_г/m_г}$ гашение оказывается наилучшим. При настройке зазора обычно принимают $\Delta\approx 0$.

§ 11.10. ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ АКТИВНЫХ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ

В настоящее время разработано большое количество схем активных виброзащитных систем. На рис. 11.44 представлена схема управляемого электродинамического виброгасителя, в которой изменение параметров колебательной системы достигается в результате управления электронными элементами, что позволяет применять эту схему *для гашения колебательной системы, работающей в переходных режимах*. Здесь колеблющийся агрегат массы M опирается на упругие связи жесткости c и на магнитоэлектрические преобразователи (динамики *5* и *6*). Датчик перемещений *1*, соединенный с колеблющейся массой, передает сигнал $x(t)$ на усилитель *2* и дальше на дифференцирующее устройство *3* и усилитель *4*, питающий магнитоэлектрические преобразователи. Как видно из схемы, эти элементы образуют петлю электромеханической обратной связи. Меняя параметры петли, можно изменять параметры схемы, а следовательно, изменять ее резонансные свойства в широких пределах.

На рис. 11.45 показана схема пневмомеханической виброзащитной системы с пневматическим возбудителем (силовым цилиндром) двойного действия (*1* — пневмомеханический возбудитель; *2* — механическая обратная связь по смещению; *3* — сервоклапан; *4* — входной канал; *5* — выходной канал; *6* — дроссель; *7* — емкость; *8* — изолируемый объект).

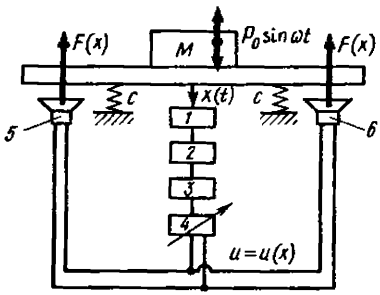


Рис. 11.44

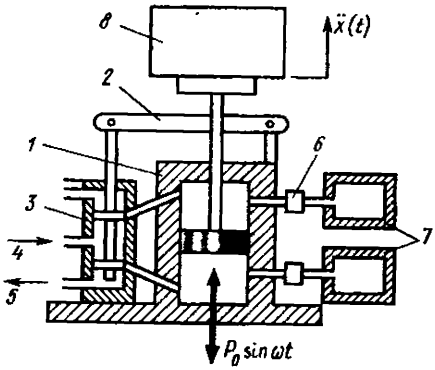


Рис. 11.45

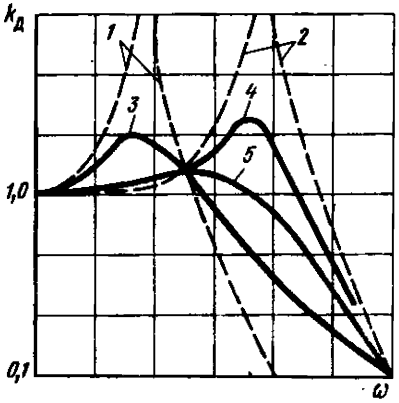


Рис. 11.46

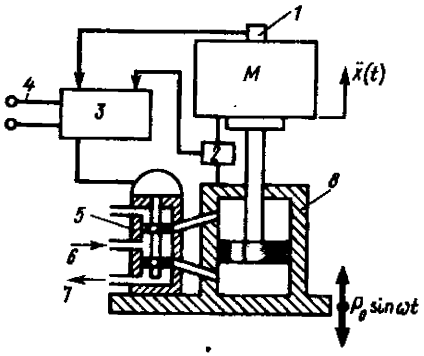


Рис. 11.47

Механическая обратная связь по смещению через золотниковое устройство управляет расходом газа, подаваемого внешним источником энергии. Вследствие наличия обратной связи по смещению, перемещающей золотник, выходное усилие возбудителя является функцией интеграла относительного смещения. Управление по интегралу от смещения может быть эффективным только на очень низких частотах. Поэтому обратная связь по смещению используется лишь для позиционирования защищаемого объекта. Качество же защиты от вибраций и ударов определяется жесткостью и демпфированием пассивной пневматической системы.

Система сравнительно мало чувствительна к изменению величины изолируемой массы.

Зависимость коэффициента $k_д$ по смещению от частоты ω для пневмомеханической виброзащитной системы со вспомогательными емкостями показана на рис. 11.46 в логарифмическом масштабе. Кривая *1* — при нулевом, *2* — бесконечном, *3* — низком, *4* — высоком, *5* — оптимальном демпфировании.

Кривые *3* и *4* получаются при отсутствии дросселирования и при полном перекрытии потока газа между возбудителем и дополнительными емкостями. Оптимальное демпфирование определяется минимизацией резонансного коэффициента динамичности. Довольно большие отклонения демпфирования от оптимального значения мало влияют на $k_д$.

На рис. 11.47 приведена схема электрогидравлической виброзащитной системы с силовым цилиндром двойного действия (*1* — датчик ускорения; *2* — датчик относительного смещения; *3* — сервоусилитель; *4* — электропитание; *5* — сервозолотник; *6* — входной канал; *7* — выходной канал; *8* — гидравлический возбудитель). В этой схеме сигналы от датчиков ускорения и относительного

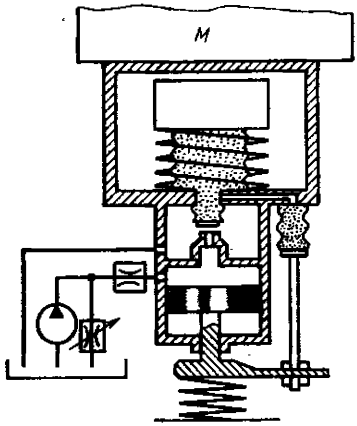


Рис. 11.48

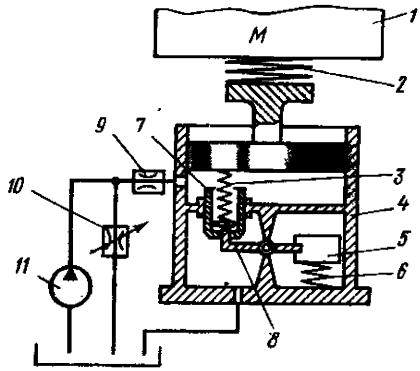


Рис. 11.49

смещения подаются в усилитель с электрическим питанием. Усилитель вырабатывает сигнал, управляющий движением золотника, который регулирует подачу (от внешнего гидравлического источника энергии) и слив малосжимаемой рабочей жидкости из силового цилиндра. Поток рабочей жидкости через золотник регулируется по ускорению, относительной скорости, относительному смещению и интегралу относительного смещения. Коэффициенты усиления по каждому каналу обратной связи настраиваются независимо.

Для устранения амплитудного и фазового искажения, вносимого люфтами в шарнирных соединениях рычага заслонки, а также его деформацией на высоких частотах, в схеме гидравлической виброзащитной системы (рис. 11.48) применяют «гидравлический рычаг». Последний представляет собой соединение двух сильфонов с разными диаметрами, заполненных несжимаемой жидкостью. С целью стабилизации положения изолируемого объекта относительно поршня силовой системы, а также компенсации теплового расширения жидкости в сильфонах применена система автоматического регулятора положения, вырабатывающая сигнал обратной связи по относительному смещению.

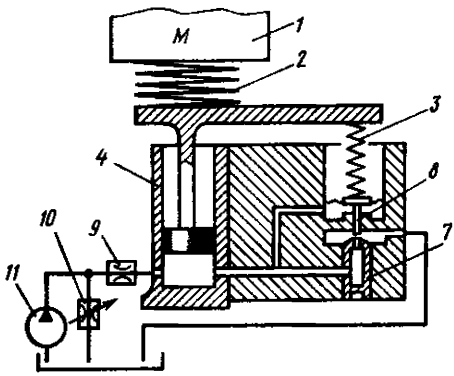


Рис. 11.50

Динамическая модель такой виброзащитной системы показана на рис. 11.49 (*1* — изолируемая масса; *2* — упругий элемент; *3* — обратная связь по положению; *4* — сило-

вой гидроцилиндр; *5* — масса; *6* — пружина; *7* — сопло; *8* — заслонка; *9* — постоянный дроссель; *10* — регулируемый дроссель; *11* — питающий насос).

В указанных схемах нижний диапазон эффективности ограничен значением собственной частоты датчика вибрационных перемещений. Устранение этого ограничения достигается в гидравлической виброзащитной системе, динамическая модель которой приведена на рис. 11.50 (описание позиций см. к рис. 11.49). Силовая система в виде гидроцилиндра здесь выполнена в одном корпусе с управляющей системой. Управляющая система содержит механизм регулирования давления рабочей жидкости, состоящий из датчика в виде чувствительной мембраны, регистрирующей колебания давления в полости силового цилиндра, заслонки, жестко укрепленной на мембране, и образующей вместе с соплом элемент, вырабатывающий управляющий сигнал.

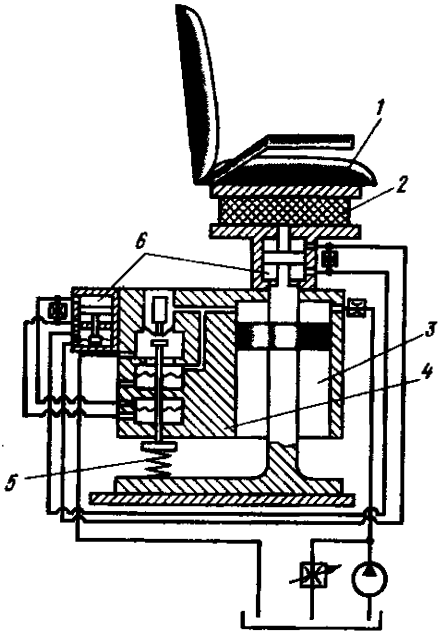


Рис. 11.51

На рис. 11.51 приведена схема гидравлической виброзащитной системы кресла *1* человека-оператора, содержащая упругий элемент *2*, гидроцилиндр *3*, силовой стабилизатор *4* в виде датчика пульсации давления рабочей жидкости и элемента типа сопло — заслонка, обратные связи *5*, *6* по положению и по ускорению. Обратная связь по положению обеспечивает стабилизацию кресла относительно фундамента. Обратная связь по ускорению введена для предсказания возмущающего воздействия с опережением, необходимым для компенсации возмущения и повышения эффективности системы в резонансных зонах тела человека-оператора. Система позволяет свести до минимума вертикальные колебания кресла с оператором.

ГЛАВА 12
СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

В гл. 4 было показано, как, располагая структурной схемой механизма и размерами его звеньев, определить функцию положения и передаточную функцию различных точек и звеньев механизма, т. е. определить его кинематические характеристики. При проектировании механизма необходимо решать и обратную задачу:

по выбранной структурной схеме и заданной кинематической характеристике определить размеры звеньев проектируемого механизма, при которых они совершали бы требуемые движения. Такую задачу называют *синтезом кинематической схемы механизма*, и методы ее решения излагаются в разд. II.

Кинематический синтез плоских механизмов с низшими кинематическими парами (рычажных механизмов) содержит ряд конкретных задач, среди которых следует указать: синтез по нескольким заданным дискретным положениям звеньев; синтез по заданной аналитически функции положения или по отдельным заданным кинематическим параметрам (средней скорости, отношению средних скоростей при прямом и обратных ходах и т. п.); синтез по заданной траектории точки звена.

В настоящей главе излагаются методы кинематического синтеза рычажных механизмов.

§ 12.1. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ СИНТЕЗА

Плоские рычажные механизмы, звенья которых образуют вращательные и поступательные кинематические пары, получили широкое распространение в современном машино- и приборостроении. К достоинствам этих механизмов относятся высокая технологичность изготовления, возможность выполнения шарнирных соединений на подшипниках качения, долговечность и надежность в работе.

К недостаткам рычажных механизмов необходимо отнести их меньшую универсальность, чем у кулачковых и зубчатых механизмов.

Проектирование механизмов представляет собой сложную комплексную проблему, решение которой разбивается на несколько этапов. Первым этапом проектирования является выбор кинематической схемы механизма, которая бы обеспечивала требуемый вид движения и его закон. Ко второму этапу проектирования относится разработка конструкторских форм механизма, обеспечивающих его прочность и долговечность. Третьим этапом проектирования является разработка технологических и технико-экономических показателей проектируемого механизма.

В теории механизмов в основном рассматриваются и решаются задачи первого этапа проектирования, с помощью которых разрабатываются кинематические схемы механизмов, воспроизводящих требуемый закон движения. Проектирование механизма начинается с выбора структурной схемы. Ее выбирают из справочных материалов или разрабатывают на основе анализа видов движения, которые должны быть реализованы. Этот этап проектирования вызывается структурным синтезом.

Если имеется несколько структурных схем различных механизмов, пригодных для реализации требуемых параметров, то из них следует выбрать наиболее подходящую. Разработчик должен, хотя бы в первом приближении, оценить кинематические, силовые, точностные и другие характеристики механизма, что заранее сделать достаточно трудно. На практике выбор структурной схемы производится чаще всего на основе предшествующего опыта, знаний или интуиции проектировщика. При огромном многообразии схем од-

них только рычажных механизмов такой эвристический подход к их выбору оправдан. Однако далеко не всегда проектировщик выбирает удачную структурную схему, о чем свидетельствуют конструкции некоторых существующих механизмов, применяемых в машинах и приборах. Вопрос о рациональном выборе структуры проектируемого механизма сравнительно сложен, поскольку он трудно поддается формализации.

После выбора структурной схемы механизма определяют геометрические размеры звеньев. При этом учитываются в основном кинематические функции, которые должен реализовать механизм. Этот этап проектирования называют этапом *кинематического синтеза* механизма, в рамках которого определяют относительные размеры звеньев, т. е. отношение геометрических размеров звеньев к размеру одного из них. Относительные геометрические размеры звеньев называют *геометрическими параметрами механизма*.

Структурный и геометрический синтез позволяет получить кинематическую схему механизма, отвечающую требованиям, предъявляемым к проектируемому механизму. Кинематические функции, которые должен реализовать проектируемый механизм, воспроизводятся им с определенной точностью. Точность определяется условиями работы механизма, а также требованиями, обусловленными технологическим процессом. На основании анализа спроектированного механизма по степени точности воспроизведения заданной функции решают, пригоден ли полученный механизм или необходимо провести корректировку предыдущих этапов проектирования с изменением исходных данных. Если и повторные расчеты не дают удовлетворительных результатов, то необходимо перейти к другой структурной схеме механизма и выполнить для нее соответствующие расчеты. Этот этап проектирования называют *этапом точностного проектирования*.

Таким образом, задача проектирования механизма является сложной, многопараметрической, причем число исходных параметров механизма, как правило, больше числа исходных данных, поэтому частью параметров приходится варьировать.

По принципу использования рычажные механизмы делятся на следующие группы.

1. Передаточные механизмы, реализующие заданную функциональную зависимость между положениями входного и выходного звеньев механизма или между их перемещениями.

2. Направляющие механизмы, в которых точка на звене, совершающем сложное движение, перемещается при движении механизма по заданной траектории.

Решение указанных задач синтеза рычажных механизмов с низшими парами может вестись как графическими, так и аналитическими методами. Выбор метода в значительной мере зависит от тех условий, которые поставлены при проектировании (в частности, точность). Графические методы нагляднее и проще с точки зрения

их усвоения, но недостаточно точны. В последние годы учеными широко развиты аналитические методы синтеза механизмов с низшими парами, с использованием которых разработаны системы алгоритмов и программное обеспечение автоматизированного проектирования рычажных механизмов.

§ 12.2. УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КРИВОШИПА В ПЛОСКИХ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМАХ

Важной кинематической характеристикой при синтезе механизма является проворачиваемость его звеньев (наличие в нем одного или двух кривошипов), которая зависит от соотношения длин звеньев [1]. Сперва рассмотрим плоский шарнирный четырехзвенник $ABCD$ (рис. 12.1, *а*) с длинами звеньев a, b, c и d. Для того чтобы звено AB могло стать кривошипом, оно должно при вращении последовательно пройти через крайние левое (AB_1) и правое (AB_3) положения.

Предполагая, что a — длина самого короткого звена, d — самого длинного, и используя известное соотношение между длинами сторон треугольника (длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон), запишем следующие неравенства:

из ΔB_1C_1D

$$d+a<b+c, \tag{12.1}$$

из ΔB_3C_3D

$$d-a<b+c. \tag{12.2}$$

Независимо от соотношения длин b и c неравенство (12.1) всегда обеспечит выполнение неравенства (12.2).

Если же самым длинным является звено BC или CD ($b>c>d$ или $c>b>d$), то неравенство (12.1) только усиливается.

Позиции AB_1 и AB_3 характеризуют крайние положения коромысла CD. Звено BC, согласно рис. 12.1, *а*, не делает полного оборота относительно стойки AD и потому является шатуном.

Неравенство (12.1) позволяет дать общую формулировку условия проворачиваемости звена плоского шарнирного четырехзвенника, а именно: самое короткое звено шарнирного четырехзвенника может быть кривошипом, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев. Это положение носит название *правила Грасгофа*.

Применяя это правило, шарнирные четырехзвенники разбивают на три группы:

механизм будет кривошипно-коромысловым (рис. 12.1, *а*), если размеры его звеньев удовлетворяют правилу Грасгофа и за стойку принято звено, расположенное рядом с самым коротким;

механизм будет двухкривошипным, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин оста-

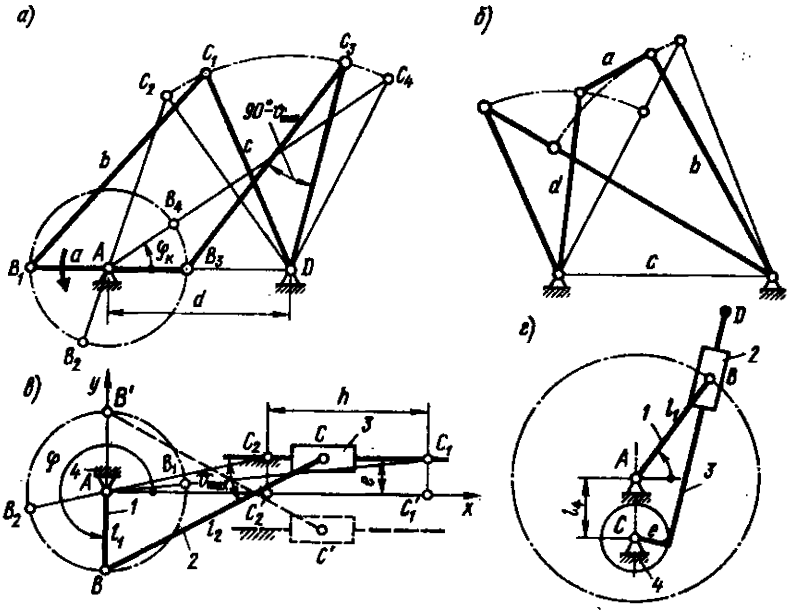


Рис. 12.1

льных звеньев и за стойку принято самое короткое его звено; это следует из того, что если кривошип при выполнении правила Грасгофа делает полный оборот относительно стойки и шатуна, то и эти звенья совершают полный оборот относительно кривошипа;

механизм будет двухкоромысловым, если размеры его звеньев не удовлетворяют правилу, а также в том случае, когда сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев, но самое короткое его звено является шатуном (рис. 12.1, *б*) и, следовательно, возможность быть ему кривошипом отпадает, потому что оно не является звеном, расположенным рядом со стойкой.

В предельном случае, когда неравенство (12.1) превращается в равенство, все звенья механизма в одном из крайних положений располагаются по одной прямой. В результате появится неопределенность движения выходного звена (оно сможет двигаться либо в одном, либо в другом направлении).

Во внеосном кривошипно-ползунном механизме (рис. 12.1, *в*) звено *1* будет кривошипом, если при вращении пройдет положения $\varphi = 90$ и 270°, что возможно при выполнении условия

$$l_1 < l_2 - |e|,$$

где e — внеосность (или дезаксиал). Штриховой линией изображена

схема, когда $e<0$. Если $l_1>l_2-|e|$, звено *1* будет коромыслом и такой механизм правильнее называть коромыслово-ползунным.

В кулисном механизме (рис. 12.1, *г*) звено *1* всегда может быть кривошипом; звено *CD* (кулиса) будет кривошипом, если при вращении пройдет положение $\varphi=270°$, что возможно при выполнении условия

$$l_1>l_4+e,$$

где e — внеосность кулисы; в этом случае имеем механизм с вращающейся кулисой. Если $l_1<l_4+e$, то кулиса *CD* будет коромыслом (механизм с качающейся кулисой). Наиболее распространены схемы кулисных механизмов, в которых внеосность $e=0$.

§ 12.3. СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПО ДВУМ ПОЛОЖЕНИЯМ ЗВЕНЬЕВ

Кривошипно-ползунный механизм. Для центрального кривошипно-ползунного механизма (внеосность $e=0$, рис. 12.2, *а*) ход ползуна *3* (его максимальное перемещение) равен удвоенной длине кривошипа: $h=2l_1$. Крайние положения ползуна соответствуют угловым координатам кривошипа $\varphi=0$ и 180°.

Как уже отмечалось, при проектировании механизмов нужно учитывать весьма важный параметр, характеризующий условие передачи сил и работоспособность механизма,— угол давления ϑ (угол между вектором силы, приложенной к ведомому звену, и вектором скорости точки приложения движущей силы; трение и ускоренное движение масс при этом пока не учитываются). Угол давления не должен превышать допустимого значения: $\vartheta_{max}\leqslant\vartheta_{доп}$. Угол ϑ при передаче усилия на ведомое звено отмечают на схеме механизма в зависимости от того, какое его звено является ведомым. Если им будет ползун *3*, то сила $\bar{F}_{32}$ передается на него с углом давления ϑ_{32}, а если кривошип *1*, то сила $\bar{F}_{12}$ составит угол ϑ_{12} с вектором скорости $\bar{v}_B$.

При ведомом кривошипе угол давления ϑ_{12} два раза за цикл (когда шатун и кривошип располагаются по одной прямой) получает максимальное значение, равное 90°. Эти положения кривошип проходит только благодаря инерции вращающихся масс деталей, жестко связанных с кривошипом *1*.

Наибольший угол давления ϑ_{32max} определяют путем исследования функции $\vartheta_{32}=\vartheta_{32}(\varphi)$ на максимум. Для центрального механизма ($e=0$) максимальное значение угла давления $\vartheta_{32max}=\arcsin l_1/l_2$ будет при $\varphi=90$ или 270°. Следовательно, чем меньше значение $\lambda_2=l_2/l_1$, тем меньше размеры механизма (по отношению к длине кривошипа), но больше углы давления. А с возрастанием величины ϑ_{32max} независимо от того, какое звено является ведомым, увеличи-

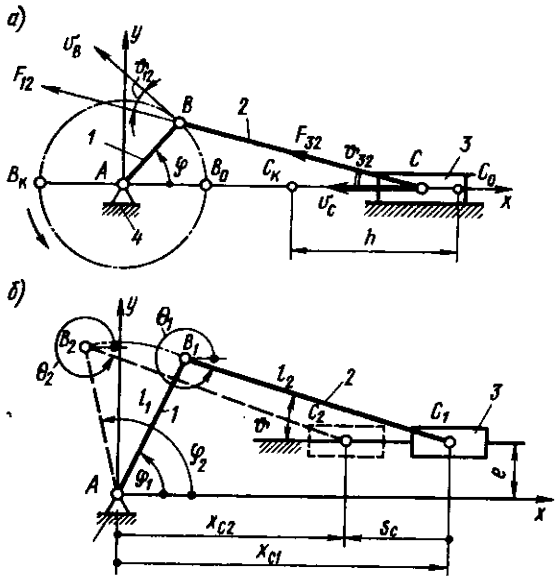


Рис. 12.2

вается усилие между ползуном и направляющей (между поршнем и стенкой цилиндра поршневой машины). Поэтому, например, для механизмов двигателей внутреннего сгорания отношение λ_2 принято выбирать в пределах $\lambda_2=3-5$, что соответствует значению $\vartheta_{32max}=19-11°$ (см.: *Баранов Г. Г.* Курс теории механизмов и машин. М., 1967).

Во внеосном кривошипно-ползунном механизме (см. рис. 12.1, *в*) ход ползуна (его максимальное перемещение) из ΔAC_1C_1 и ΔAC_2C_2

$$h=l_{C_1C_2}=\sqrt{(l_1+l_2)^2-e^2}-\sqrt{(l_2-l_1)^2-e^2}, \qquad (12.3)$$

откуда при заданных h, e и $\lambda_2=l_2/l_1$ можно найти l_1 (например, методом интерполяционного приближения — задаваясь рядом значений l_1, близких к $h/2$, и проверяя равенство левой и правой частей уравнения). Максимальный угол давления ϑ_{32max} при $e>0$ будет в положении, когда $\varphi=270°$; если же $e<0$, то при $\varphi=90°$.

Если заданы два положения кривошипа (рис. 12.2, *б*), определяемые координатами φ_1 и φ_2, перемещение ползуна s_C (с учетом знака — на рис. 12.2, *б* $s_C<0$) и отношения $\lambda_2=l_2/l_1$ и $\lambda_e=e/l_1$, то длины звеньев l_1 и l_2 определяют следующим образом.

Проецируя векторную цепь $\bar{l}_1+\bar{l}_2$ на ось y, имеем для любого положения $l_1\sin\varphi+l_2\sin\theta=e$, откуда угловая координата звена

2 в положениях *1* и *2*

$$\theta_{1,2}=\arcsin[(\lambda_e-\sin\varphi_{1,2})/\lambda_2].$$

Проецируя ту же цепь на ось x, имеем

$$s_C=x_{C_2}-x_{C_1}=(l_1\cos\varphi_2+l_2\cos\theta_2)-(l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\theta_1),$$

откуда после подстановки $l_2=\lambda_2 l_1$ получим

$$l_1=s_C/[\cos\varphi_2-\cos\varphi_1+\lambda_2(\cos\theta_2-\cos\theta_1)].$$

Затем по величине λ_2 находят l_2.

Кривошипно-коромысловый механизм (рис. 12.3). По заданным длине стойки l_4, длине ведомого коромысла l_3 и его координатам γ_1, γ_2 в крайних положениях неизвестные длины звеньев l_1 и l_2 находят следующим образом. Соединяя прямыми точки C_1 и C_2 с точкой A, имеем

$$l_{AC_1}=l_1+l_2;\ l_{AC_2}=l_2-l_1,$$

откуда

$$l_1=(l_{AC_1}-l_{AC_2})/2;\ l_2=(l_{AC_1}+l_{AC_2})/2. \qquad (12.4)$$

Максимальный угол давления $\vartheta_{32\max}$ будет при $\varphi=0$ или 180°.

Механизм с возвратно-вращающимся (качающимся) цилиндром. Этот механизм, применяемый в гидроприводах, изображен на рис. 12.4, *а* в крайних положениях AB_1C и AB_2C. При переходе из одного крайнего положения в другое поршень *2* перемещается на расстояние h (ход поршня), а ведомое коромысло *1* длиной l_1 поворачивается на нужный угол β. Чтобы полностью использовать цилиндр при перемещении поршня, задаются отношением длины цилиндра $l_3\approx l_{B_1C}$ к ходу поршня h в виде коэффициента $k=l_3/h>1$, определяемого конструктивно; например $k=1{,}3$; 1,4 и т. д.

Приходится также учитывать угол давления ϑ как угол между осью цилиндра, по направлению которой передается усилие $\bar{F}_{12}$, и вектором скорости $\bar{v}_B$ точки приложения силы. Этот угол переменный, поэтому при проектировании задаются допускаемым углом давления $\vartheta_{доп}$, с тем чтобы при работе механизма не превысить его.

Синтез *оптимальной по углам давления* схемы такого механизма при заданных l_1, k, β ведут следующим образом (рис. 12.4, *а*). Построив положения AB_1 и AB_2 ведомого звена *1*, примем ход поршня $h=l_{B_1B_2}$. Отложив на продолжении прямой B_2B_1 отрезок $l_3=l_{B_1C}=kh$, получим точку C. В крайних положениях механизма, как это видно из $\triangle AB_1N$ и $\triangle ANB_2$, угол давления по абсолютной величине будет наибольшим: $\vartheta_{\max}=\beta/2$.

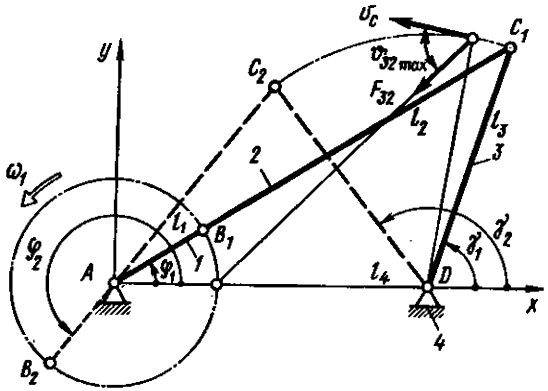


Рис. 12.3

Во всех остальных положениях угол давления будет меньше, поскольку при переходе точки B из положения B_1 в положение B_2 он меняет свой знак и, следовательно, проходит через нулевое значение. Из ΔAB_1N находим

$$h=2l_1\sin(\beta/2).$$

Из ΔAB_1C, по теореме косинусов, длина стойки

$$l_4=l_{AC}=\sqrt{l_1^2+l_3^2-2l_1l_3\cos\beta/2}.$$

При небольших углах β ϑ_{max} может быть в данной схеме значительно меньше $\vartheta_{доп}$ и этот вариант кинематической схемы можно улучшить с точки зрения габаритов механизма путем уменьшения длины стойки l_4.

Оптимальную по габаритам схему механизма при условии $\vartheta_{max}=\vartheta_{доп}$ получим следующим образом (рис. 12.4, *б*). Пусть заданы l_1, k, β, $\vartheta_{доп}$. Вычертив первый вариант схемы, переместим точку C в новое положение C_0, для которого угол давления в положении *2* механизма увеличится и будет равен допускаемому: $\vartheta''=\vartheta_{доп}$. При перемещении точки C угол давления в положении *1* также меняется: сперва он уменьшается, а затем может, пройдя через нулевое значение, поменять знак и снова увеличиваться.

Ход поршня теперь будет $h=l_{B2D}<l_{B1B2}$; его можно найти, решая квадратное уравнение, полученное из $\Delta C_0B_1B_2$ по теореме косинусов:

$$(B_1C_0)^2=(B_1B_2)^2+(C_0B_2)^2-2B_1B_2\cdot C_0B_2\cos(\vartheta_{доп}-\beta/2),$$

где $B_1C_0=kh$, $B_1B_2=2l_1\sin(\beta/2)$, $C_0B_2=kh+h=(k+1)h$.

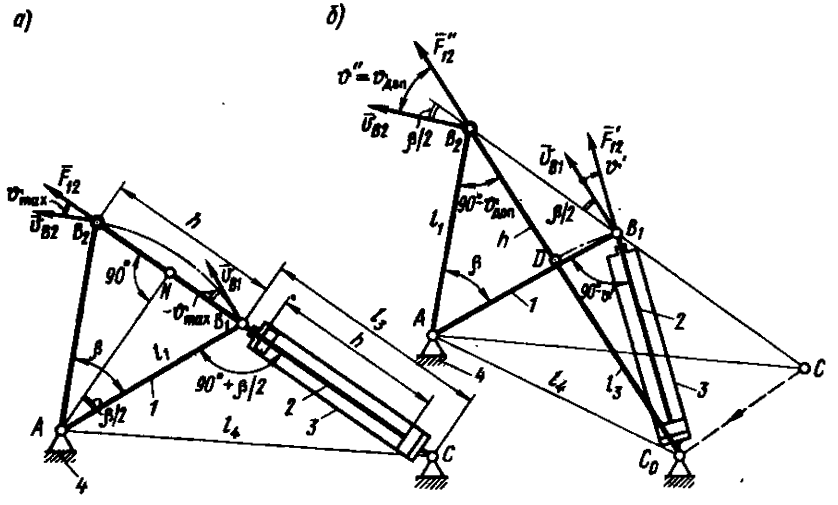


Рис. 12.4

Решение приводит к формуле

$$h=-b/2+\sqrt{b^2/4-c},$$

где

$$b=-4l_1(k+1)\sin(\beta/2)\cos(\vartheta_{доп}-\beta/2)/(2k+1);$$

$$c=[2l_1\sin(\beta/2)]^2/(2k+1).$$

После этого определяют $l_3=kh$ и длину стойки из $\triangle AC_0B_2$:

$$l_4=\sqrt{l^{21}+(l_3+h)^2-2l_1(l_3+h)\sin\vartheta_{доп}}.$$

Данный вариант кинематической схемы является весьма целесообразным для случая, когда нужно преодолевать большую нагрузку на ведомом звене в начале движения, поскольку угол давления $\vartheta'<\vartheta''=\vartheta_{доп}$, в результате чего увеличивается момент движущей силы F'_{12} относительно оси A и уменьшаются потери на трение в кинематических парах.

Кинематические пары следует подобрать так, чтобы механизм был статически определимым, или же, если это затруднительно, свести к минимуму число избыточных связей. В данном случае механизм будет статически определимым (без избыточных связей), если пара A вращательная, пары B и C сферические, пара поршень — цилиндр цилиндрическая. Тогда, учитывая, что число сте-

пеней свободы механизма $W = W_o + W_м = 1 + 2 = 3$ (две местные подвижности — независимые вращения поршня со штоком и цилиндра относительно своих осей), по формуле Малышева получим $q = 0$.

§ 12.4. СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПО ТРЕМ ПОЛОЖЕНИЯМ ЗВЕНЬЕВ

Шарнирный четырехзвенник. Пусть заданы (рис. 12.5, *а*) длина стойки l_4, угловые координаты входного звена *1* в трех положениях $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и соответствующие угловые координаты выходного звена *3*: $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Нужно найти длины звеньев l_1, l_2, l_3.

Рассмотрим векторный контур *ABCDA*, для которого в любом положении механизма $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_4 + \bar{l}_3$. Проецируя этот контур на координатные оси *x* и *y*, имеем

$$l_1 \cos\varphi + l_2 \cos\theta = l_4 + l_3 \cos\gamma; \qquad (12.5)$$

$$l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\theta = l_3 \sin\gamma. \qquad (12.6)$$

Исключим угол θ, решив уравнения (12.5) и (12.6) относительно слагаемых, содержащих θ, возведя полученные равенства в квадрат и сложив их:

$$l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + 2l_3l_4 \cos\gamma - 2l_1l_4 \cos\varphi - 2l_1l_3 \cos(\varphi - \gamma).$$

После деления на $2l_3l_4$ и замены текущих значений углов

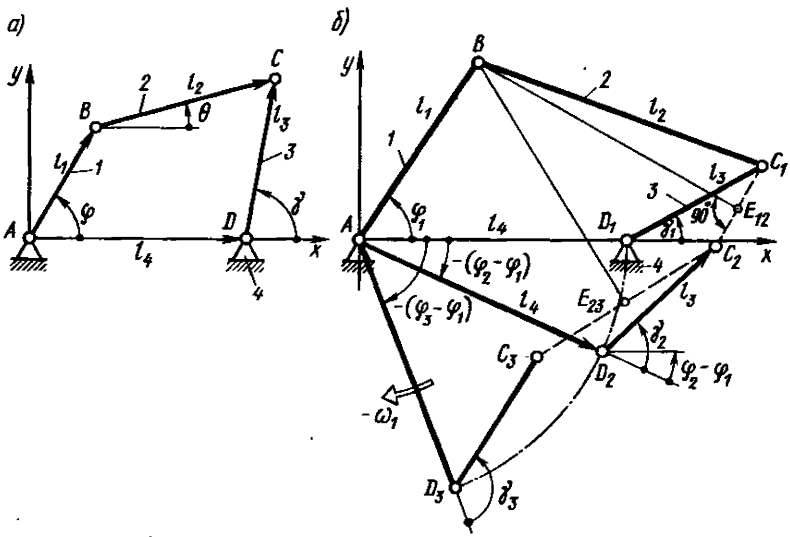


Рис. 12.5

φ и γ на заданные φ_i и γ_i ($i=1, 2, 3$) получим систему трех линейных уравнений

$$\frac{l_1}{l_4}\cos(\varphi_i-\gamma_i)+\frac{l_1}{l_3}\cos\varphi_i+\frac{l_2^2-l_1^2-l_3^2-l_4^2}{2l_3l_4}=\cos\gamma_i,$$

или

$$p_1\cos(\varphi_i-\gamma_i)+p_2\cos\varphi_i+p_3=\cos\gamma_i,\ (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (12.7)$$

где неизвестными являются безразмерные параметры

$$p_1=\frac{l_1}{l_4};\ p_2=\frac{l_1}{l_3};\ p_3=\frac{l_2^2-l_1^2-l_3^2-l_4^2}{2l_3l_4}. \qquad (12.8)$$

Из системы (12.7) находим p_1, p_2, p_3, а затем, согласно (12.8), находим искомые длины звеньев по формулам

$$l_1=p_1l_4;\ l_3=l_1/p_2;\ l_2=\sqrt{2l_3l_4p_3+l_1^2+l_3^2+l_4^2}.$$

Задачу синтеза шарнирного четырехзвенника по трем положениям выходного звена и соответствующим углам поворота входного звена решают методом обращения движения. В этом случае заданы длины звеньев l_4, l_3, координаты выходного звена *3* в трех положениях γ_1, γ_2, γ_3 и углы поворота входного звена $(\varphi_2-\varphi_1)$ и $(\varphi_3-\varphi_1)$. Требуется найти длины звеньев l_1, l_2 и начальную угловую координату (в положении *1*) φ_1.

Положение шарнира B по заданным условиям находят путем сообщения всему механизму относительно центра A угловой скорости $(-\omega_1)$. В результате звено AB в системе координат Axy станет неподвижным, а вместо него в противоположном направлении будет вращаться стойка AD_1 (рис. 12.5, *б*). Для положений *2* и *3* механизма угловыми координатами стойки по отношению к оси абсцисс будут $-(\varphi_2-\varphi_1)$ и $-(\varphi_3-\varphi_1)$. Положение шарнира C является определенным по отношению к стойке и найдется путем построения заданных углов γ_1, γ_2, γ_3 (точки C_1, C_2, C_3). Длина шатуна BC для трех заданных положений одна и та же ($BC=BC_i$, $i=1,\ 2,\ 3$), поэтому точки C_i должны находиться на окружности, описанной из центра B. Следовательно, положение неизвестной точки B найдется, если точки C_i соединить двумя прямыми C_1C_2 и C_2C_3, провести через их середины E_{12}, E_{23} перпендикуляры и найти точку пересечения последних. При аналитическом решении для получения формул координат x_i, y_i точек C_i кинематическая цепь AD_iC_i представлена в виде суммы двух векторов: $\bar{l}_4$ и $\bar{l}_3$. Координаты точек C_i определяются проекциями указанной векторной цепи на координатные оси:

$$x_i = l_4 \cos(\varphi_i - \varphi_1) + l_3 \cos[\gamma_i - (\varphi_i - \varphi_1)];$$

$$y_i = -l_4 \sin(\varphi_i - \varphi_1) + l_3 \sin[\gamma_i - (\varphi_i - \varphi_1)].$$

Координаты точки B найдем из системы уравнений окружности, описанной из центра B радиусом l_2:

$$(x_i - x_B)^2 + (y_i - y_B)^2 = l_2^2,\ i = 1,\ 2,\ 3. \qquad (12.9)$$

Система (12.9) трех уравнений с тремя неизвестными x_B, y_B и l_2 после несложных преобразований для исключения x_B^2 и y_B^2 сводится к линейной.

По координатам x_B и y_B определяют искомые параметры кинематической схемы механизма:

длину входного звена *1*

$$l_{AB} = l_1 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}; \qquad (12.10)$$

длину шатуна BC

$$l_{BC} = l_2 = \sqrt{(x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2} \qquad (12.11)$$

(как расстояние между точками $B(x_B, y_B)$ и $C_1(x_1, y_1)$);

начальную угловую координату входного звена

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}(y_B / x_B). \qquad (12.12)$$

Кривошипно-ползунный механизм. Проектирование схемы данного механизма по трем положениям входного и выходного звеньев производят в системе координат Axy (рис. 12.6) аналогично синтезу четырехшарнирного механизма. Задача сводится к определению неизвестных длин звеньев l_1 и l_2, а также начальной угловой координаты φ_1 звена *1* при заданных внеосности (эксцентриситете) e, трех линейных координатах точки C ползуна x_{C1}, x_{C2}, x_{C3} и углах поворота звена *1* по отношению к его начальному (первому) положению $\varphi_2 - \varphi_1$ и $\varphi_3 - \varphi_1$.

Чтобы найти положение шарнира B по этим условиям, применяют метод обращения движения, сообщая всему механизму относительно центра A угловую скорость $-\omega_1$. В результате звено AB станет неподвижным, а вместо него в противоположном направлении будут вращаться стойка и, следовательно, ось направляющей ползуна. При наличии эксцентриситета e эта ось во всех положениях касается окружности радиусом, равным e.

Графически центр шарнира B находят как точку пересечения перпендикуляра BE_{12} и BE_{23} к серединам отрезков C_1C_2 и C_2C_3.

При аналитическом решении определяют координаты x_i и y_i то-

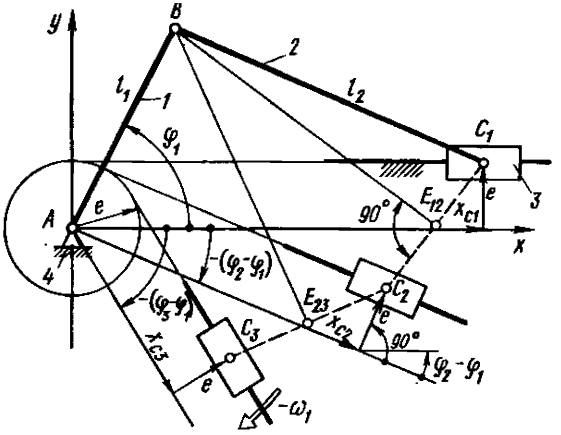


Рис. 12.6

чек ползуна C_i ($i=1, 2, 3$) из уравнений проекций на координатные оси суммы векторов $\bar{x}_{Ci}+\bar{e}$;

$$x_i=x_{Ci}\cos[-(\varphi_i-\varphi_1)]+e\cos[90^\circ-(\varphi_i-\varphi_1)];$$
$$y_i=x_{Ci}\sin[-(\varphi_i-\varphi_1)]+e\sin[90^\circ-(\varphi_i-\varphi_1)],$$

или после преобразования

$$x_i=x_{Ci}\cos(\varphi_i-\varphi_1)+e\sin(\varphi_i-\varphi_1);$$
$$y_i=-x_{Ci}\sin(\varphi_i-\varphi_1)+e\cos(\varphi_i-\varphi_1).$$

Дальнейшее решение аналогично решению четырехшарнирного механизма и проводится по формулам (12.9) — (12.12).

§ 12.5. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ ПО СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ ЗВЕНА И ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ИЗМЕНЕНИЯ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА

Кривошипно-коромысловый механизм. Даны длина выходного звена l_3 и координаты γ_1 и γ_2 его крайних положений (рис. 12.7). Разность $\gamma_2-\gamma_1=\beta$ является угловым ходом (размахом) выходного звена. Кривошип AB вращается равномерно, а его центр вращения находится в некоторой, пока неизвестной, точке A на оси x.

Движение коромысла из положения *1* в положение *2* примем за прямой ход, а движение в противоположном направлении — за обратный ход.

Требуется спроектировать кинематическую схему механизма, для которого отношение средних угловых скоростей выходного звена при обратном и прямом ходах равно некоторой заданной величине $K_\omega = \omega_{обр}/\omega_{пр}$ (коэффициент изменения средней скорости выходного звена).

На рис. 12.7 изображены два крайних положения механизма, в каждом из которых кривошип и шатун находятся на одной прямой; угол между этими двумя прямыми AC_1 и AC_2 обозначен буквой θ. Из чертежа следует, что за время прямого хода $t_{пр}$ кривошип повернется на угол $(180° + \theta)$, а за время обратного хода $t_{обр}$ — на угол $(180° - \theta)$. Следовательно, при равномерном вращении кривошипа

$$K_\omega = \frac{\beta/t_{обр}}{\beta/t_{пр}} = \frac{180° + \theta}{180° - \theta},$$

откуда

$$\theta = 180° \frac{K_\omega - 1}{K_\omega + 1}.$$

Если угловой ход β поделить прямой DE пополам и через точку C_2 провести прямую C_2F, составляющую угол θ с направлением DE, то она пересечется с последним в некоторой точке F. Окружность радиусом $l_{FC_2} = r$ будет геометрическим местом искомых центров вращения кривошипа A, поскольку в любой точке этой окружности вписанный $\angle C_1AC_2$ равен половине центрального $\angle C_1FC_2 = 2\theta$, опирающегося на ту же дугу C_1C_2, и, следовательно, равен θ. Точка A пересечения указанной окружности с осью абсцисс, согласно исходным данным задачи, будет центром вращения кривошипа. После этого задача сводится к синтезу механизма по двум крайним положениям звена *3* (см. § 12.2); длины кривошипа l_1 и шатуна l_2 определяются по формулам (12.4).

Если в спроектированном механизме максимальный угол давления больше допускаемого, следует выбрать другое положение центра вращения кривошипа на окружности радиусом r (выше точки A).

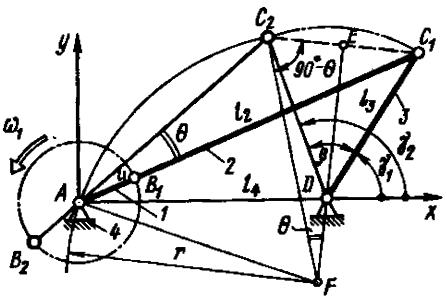


Рис. 12.7

Кривошипно-ползунный механизм. При проектировании машин иногда задают среднюю скорость ползуна (по-

ршня) $v_{ср}$ (м/с). Для центрального кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 12.2, *а*) двойной ход ползуна (поршня), соответствующий одному обороту кривошипа, $2h=4l_1$.

Если частота вращения (об/с) кривошипного вала равна n(1/с), то

$$v_{ср}=2hn=4l_1n,$$

откуда длина кривошипа (м) $l_1=v_{ср}/(4n)$.

Затем по заданной величине $\lambda_2=l_2/l_1$ можно найти и длину шатуна l_2.

Механизм с качающейся кулисой. Шестизвенный кулисный механизм (рис. 12.8, *а*) преобразует вращательное движение кривошипа *1* в возвратно-поступательное движение ползуна *5*, при этом средняя скорость $v_{обр}$ ползуна при обратном ходе больше в K_v раз средней скорости $v_{пр}$ прямого хода. Исходными данными обычно служат ход h выходного звена *5* и коэффициент изменения его средней скорости $K_v=v_{обр}/v_{пр}$.

Например, в строгальных и долбежных станках изделие обрабатывается в одном направлении с заданной скоростью резания, а холостой (обратный) ход режущего инструмента осуществляется с большей средней скоростью; в этом случае $K_v>1$.

Коэффициент K_v и угол β размаха (угловой ход) кулисы связаны (при $\omega_1=\text{const}$) зависимостью

$$K_v=\frac{h/t_{обр}}{h/t_{пр}}=\frac{180°+\beta}{180°-\beta},$$

откуда

$$\beta=180°\,\frac{K_v-1}{K_v+1}.$$

Длину кулисы находят из рассмотрения ее крайнего положения по формуле

$$l_3=l_{CD}=h/[2\sin(\beta/2)].$$

В среднем (вертикальном) положении кулисы CD длины звеньев l_3, $l_6=l_{AC}$ (стойки) и $l_1=l_{AB}$ связаны соотношением

$$l_3=l_6+l_1+a, \qquad (12.13)$$

где размер a выбирают конструктивно с целью наиболее полного использования длины кулисы. С другой стороны, из прямоуголь-

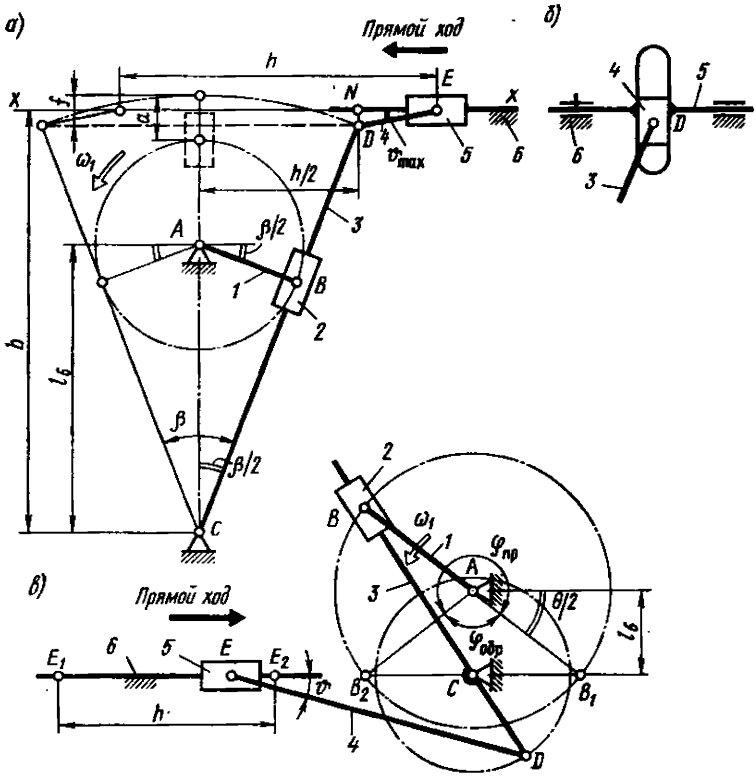


Рис. 12.8

ного $\triangle ABC$ находим

$$l_1 = l_6 \sin(\beta/2). \qquad (12.14)$$

Подстановка значения l_1 в выражение (12.13) дает длину стойки (межосевое расстояние)

$$l_6 = (l_3 - a)/[1 + \sin(\beta/2)].$$

После вычисления l_6 можно по формуле (12.14) найти l_1; для механизмов данного типа обычно $l_6/l_1 \geqslant 2$.

При ведущем кривошипе угол давления при передаче усилия от кулисного камня (ползуна) *2* к кулисе *3* $\vartheta_{32} = 0$, что является достоинством кулисных механизмов. Для обеспечения наименьших углов давления при передаче усилия от звена *4* к ведомому ползуну *5* целесообразно положение оси *xx* выбрать так, чтобы она делила стрелку сегмента *f* пополам. Тогда из прямоугольного $\triangle NDE$ длина звена *4*

$$l_4 = l_{DE} \geqslant f/(2\sin \vartheta_{доп}),$$

где $f = l_3 - l_3 \cos(\beta/2)$; в этом случае будет обеспечено соотношение $\vartheta_{max} \leqslant \vartheta_{доп}$.

Расстояние между осью вращения кулисы и осью направляющей ползуна *5* определяют по формуле

$$b = l_3 - f/2.$$

Применяют и другой вариант двухповодковой группы звеньев *4*, *5* с двумя поступательными и одной вращательной парами (рис. 12.8, *б*). По углам давления этот вариант лучше предыдущего: $\vartheta_{54} = 0$.

Механизм с вращающейся кулисой. Схема наиболее часто встречающегося варианта такого механизма изображена на рис. 12.8, *в*. Исходные данные: длина $l_1 = l_{AB}$ кривошипа, ход h ползуна *5* и коэффициент изменения его средней скорости $K_v = v_{обр}/v_{пр} > 1$.

Прямой ход ползуна *5* совершается при повороте кривошипа *1* на угол $\varphi_{пр} = 180° + \theta$, обратный — при повороте кривошипа на угол $\varphi_{обр} = 180° - \theta$. Поэтому при $\omega_1 = \text{const}$

$$K_v = \frac{h/t_{обр}}{h/t_{пр}} = \frac{180° + \theta}{180° - \theta},$$

откуда

$$\theta = 180° \frac{K_v - 1}{K_v + 1}.$$

Расстояние $l_6 = l_{AC}$ между осями вращения кривошипа *1* и кулисы *3* из $\triangle AB_1C$ определяется по формуле

$$l_6 = l_1 \sin(\vartheta/2);$$

обычно для механизмов данного типа $l_1/l_6 \geqslant 2$.

Крайние положения точки E ползуна (E_1 и E_2) определяются положениями точки B (B_1 и B_2), когда направления кулисы *3* и шатуна *4* совпадают, поэтому длина кривошипа CD

$$l_{CD} = h/2.$$

Длина шатуна *4* должна быть такой, чтобы максимальная величина угла давления $\vartheta = \vartheta_{54}$ не превосходила допускаемого значе-

ния $\vartheta_{доп}$, поэтому

$$l_4 \geqslant h/(2\sin\vartheta_{доп}).$$

Удлинять шатун *4* сверх полученного предела не следует, так как это увеличит габариты всего механизма. Для получения наименьших усилий в кулисной паре *2-3* (камень — кулиса) желательно выбрать длину кривошипа *1* как можно больней, однако следует учитывать, что при этом возрастают габариты механизма.

Методика решения более сложных задач синтеза рычажных механизмов по заданной непрерывной функции положения и по заданной траектории в данном учебнике не рассматривается (см. об этом в [5]).

РАЗДЕЛ II
МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СХЕМ ОСНОВНЫХ ВИДОВ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА 13

МЕТОДЫ СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ ПАРАМИ

Осуществление требуемых движений механизмами, содержащими только низшие кинематические пары (т. е. рычажными механизмами), не всегда бывает целесообразным ввиду сложности кинематической схемы. В таких случаях применяются механизмы с высшими кинематическими парами, которые воспроизводят требуемое движение при малом числе звеньев. Минимальное их число равно трем: входное и выходное звенья и стойка. Другое весьма существенное достоинство механизмов с высшими парами состоит в том, что они преобразуют движения теоретически точно, чего механизмы с низшими парами выполнить не могут.

Поверхности элементов высшей кинематической пары, обеспечивающие заданный закон движения, называют сопряженными поверхностями. Механизмы могут иметь либо одну, либо несколько пар сопряженных поверхностей. Первый случай используется, например, в кулачковых механизмах, воспроизводящих возвратное движение выходного звена по заданному закону, задаваемому посредством передаточной функции. Второй случай используется в зубчатом зацеплении, в котором непрерывное движение выходного звена обеспечивается путем последовательного взаимодействия нескольких пар сопряженных поверхностей. Передаточная функция зубчатых механизмов, как правило, постоянна и называется передаточным отношением. Наличие высшей кинематической пары вносит существенные особенности в методы синтеза механизма.

§ 13.1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Основная теорема зацепления устанавливает связь между геометрией сопряженных поверхностей и законом относительного движения элементов высшей кинематической пары. При зацеплении в плоскости основная теорема зацепления устанавливает связь между геометрией сопряженных профилей и их относительным движением.

Применительно к задачам синтеза сопряженных поверхностей и сопряженных профилей закон относительного движения является заданным. В соотношениях

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}$$

или

$$\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 \qquad (13.1)$$

векторы угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ известны, что позволяет найти векторы относительной угловой скорости: $\bar{\omega}_{12} = -\bar{\omega}_{21}$.

Векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ могут быть параллельными, пересекаться в одной точке или скрещиваться (рис. 13.1).

Геометрическое место положений мгновенных осей вращения в основной системе отсчета называют *неподвижным аксоидом*, а в движущемся теле — *подвижным аксоидом*. При параллельных неподвижных осях вращения (рис. 13.1, *а*) аксоидами являются цилиндры с радиусами r_{w1} и r_{w2}, соприкасающиеся между собой по образующей и перекатывающиеся друг по другу *без скольжения*. Если векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ направлены в разные стороны, то аксоидные цилиндры касаются внешним образом. Если векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ имеют одинаковое направление, то аксоидные цилиндры касаются внутренним образом (меньший цилиндр расположен внутри большего).

При пересекающихся неподвижных осях (рис. 13.1, *б*) аксоидами являются два конуса с углами при вершине $2\delta_{w1}$ и $2\delta_{w2}$. Углы аксоидных конусов δ_{w1} и δ_{w2} определяют положение мгновенной оси вращения в основной системе отсчета. Их значения можно найти по теореме синусов из треугольника, являющегося векторным решением соотношения (13.1) (рис.13.1, *б*):

$$|\bar{\omega}_1|/\sin\delta_{w2} = |\bar{\omega}_2|/\sin\delta_{w1}.$$

Передаточное отношение $u_{12} = |\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_2|$ выражается соотношением

$$u_{12} = \frac{|\bar{\omega}_1|}{|\bar{\omega}_2|} = \frac{\sin\delta_{w2}}{\sin\delta_{w1}} = \frac{\sin(\Sigma - \delta_{w1})}{\sin\delta_{w1}} = \frac{\sin\Sigma}{\operatorname{tg}\delta_{w1}} - \cos\Sigma. \qquad (13.2)$$

При скрещивающихся осях (рис. 13.1, *в*) относительное дви-

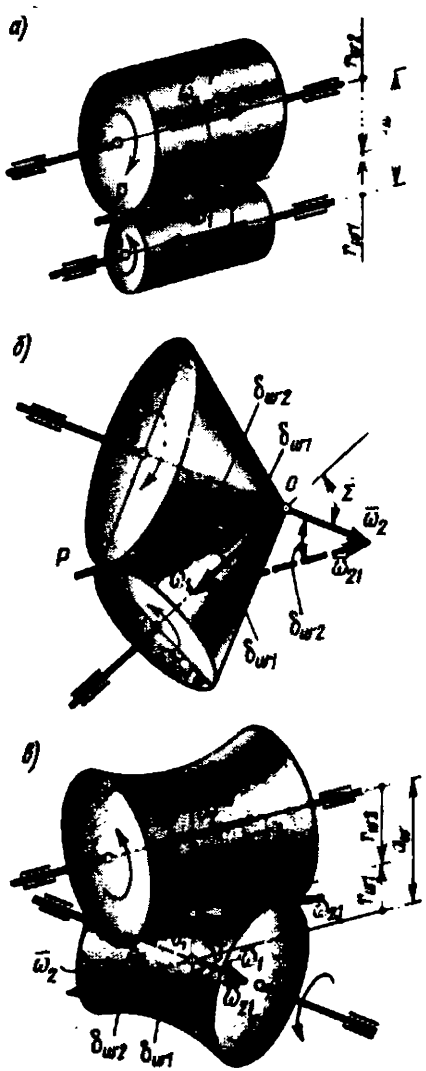


Рис. 13.1

жение звеньев является **винтовым**, т. е. движение тела состоит из его вращения вокруг некоторой оси и поступательного движения со скоростью, параллельной этой оси. В этом случае находят **мгновенную винтовую ось**. Если угловые скорости $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ постоянны, то аксоидами звеньев в относительном движении являются однополостные гиперболоиды вращения с прямолинейной образующей, которые катятся друг по другу, касаясь по мгновенной винтовой оси, со скольжением вдоль этой оси.

Линия кратчайшего расстояния между осями на рис. 13.1, *в* обозначена O_1O_2, а ее длина — a_w. На этой линии расположена точка P, через которую проходит мгновенная винтовая ось.

В сечении, перпендикулярном мгновенной винтовой оси винта, составляющие скорости точки P равны, т. е.

$$r_{w1}|\bar{\omega}_1|\cos\delta_{w1}=r_{w2}|\bar{\omega}_2|\cos\delta_{w2},$$

откуда следует, что передаточное отношение можно определить из соотношения

$$u_{12}=|\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_2|=r_{w2}\cos\delta_{w2}/(r_{w1}\cos\delta_{w1}). \qquad (13.3)$$

Модуль вектора относительной угловой скорости вращения находят по теореме косинусов при решении векторного уравнения (13.1):

$$\omega_{21}=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_1\omega_2\cos\Sigma}.$$

При заданном законе относительного движения звеньев, элементы которых образуют высшую кинематическую пару, в общем случае формулируют основную теорему зацепления в следующем виде: *сопряженные поверхности в любой точке контакта имеют общую нормаль к этим поверхностям, которая перпендикулярна вектору скорости точки контакта в заданном относительном движении поверхностей.*

Доказательство этой теоремы заключается в том, что если сформулированное условие не выполняется, то имеется составляющая относительной скорости элементов высшей кинематической пары, направленная вдоль общей нормали. В этом случае элементы высшей пары должны либо оторваться друг от друга, либо взаимно внедряться, что противоречит условию образования контакта в высшей паре. Так как подобное предположение является невозможным, то это является доказательством основной теоремы зацепления. Краткая запись основной теоремы зацепления в аналитической форме основана на условии перпендикулярности векторов $\bar{v}_r$ и $\bar{n}$, записанном в форме скалярного произведения векторов:

$$\bar{v}_r\cdot\bar{n}=0,$$

где $\bar{v}_r$ — вектор скорости относительного движения в касательной

плоскости к элементам высшей кинематической пары; $\bar{n}$ — единичный вектор общей нормали в точке контакта.

Основная теорема плоского зацепления. Идея основной теоремы плоского зацепления была высказана английским ученым Виллисом (см.: *Willis R.* Principles of mechanism. London, 1841) при разработке классификации механизмов на основе анализа отношения скоростей звеньев. В современной интерпретации эту теорему (называемую *теоремой Виллиса*) формулируют в следующей форме: общая нормаль в точке контакта сопряженных профилей в любой момент зацепления должна проходить через полюс зацепления P, положение которого на межосевой линии O_1O_2 определяется заданным относительным движением звеньев.

Из ранее выведенного соотношения (4.39) следует, что положение полюса P однозначно определяется через радиус r_{w1}, если заданы межосевое расстояние a_w и передаточное отношение u_{12}.

Для доказательства сформулированной теоремы в точке контакта K профилей Π_1 и Π_2 (рис. 13.2) рассматривают векторы скоростей точек A и B, принадлежащих соответственно звеньям *1* и *2*, и соотношения между ними (точки K, A, B совпадают по положению):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Направление векторов определяют из условий движения точек: $\bar{v}_A \perp AO_1$; $\bar{v}_B \perp BO_2$; $\bar{v}_{BA} \| t-t$ или $\bar{v}_{BA} \perp n-n$, где $t-t$ и $n-n$ — общая касательная и общая нормаль к сопряженным профилям Π_1 и Π_2. Далее через ось O_1 проводят линию O_1D, параллельную общей нормали ($n'-n' \| n-n$), и отмечают точку D на пересечении с радиусом O_2KD. Полученный ΔO_1DK подобен ΔabK, образованному векторами $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$, $\bar{v}_{BA}$.

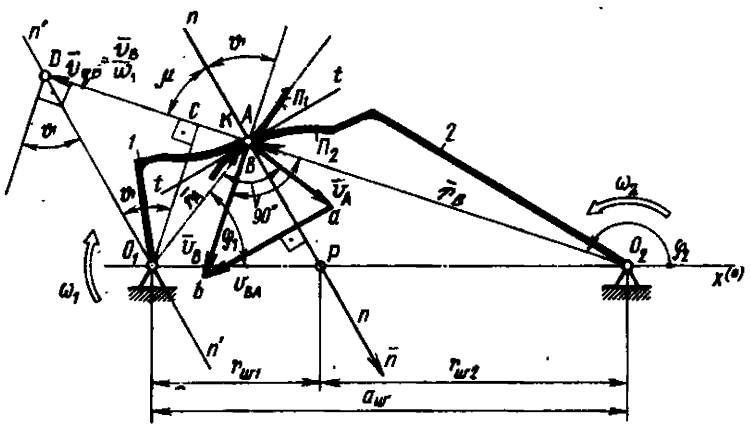


Рис. 13.2

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{aK}{O_1K}=\frac{bK}{DK}, \text{ или } \frac{|\bar{v}_A|}{|\bar{v}_B|}=\frac{O_1K}{DK}, \text{ или } \frac{\omega_1 r_A}{\omega_2 r_B}=\frac{r_A}{\mu_l DK}. \qquad (13.4)$$

Так как $DK/KO_2=O_1P/PO_2$ (что следует по условию пересечения сторон угла DO_2O_1 двумя параллельными прямыми), то после подстановки получают соотношение

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{(r_B/\mu_l)}{DK}=\frac{KO_2}{DK}=\frac{PO_2}{PO_1}. \qquad (13.5)$$

Соотношение (13.5) идентично соотношению (13.4), что является доказательством прохождения общей нормали $n-n$ через полюс зацепления P. Иногда используют и иную форму доказательства, рассматривая проекции абсолютных скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ точек A и B в момент их контактирования в положении K, которые должны быть равны друг другу по условию контактирования профилей Π_1 и Π_2 без размыкания контакта и без внедрения одного профиля в другой.

Из анализа основной теоремы зацепления следует, что при заданном законе изменения передаточной функции, т. е. при заданных центроидах, определяющих положение полюса P на межосевой линии O_1O_2, конструктор располагает свободой выбора геометрии контактируемых профилей. Любой паре центроид соответствует множество сопряженных профилей, обеспечивающих заданное изменение отношения угловых скоростей звеньев.

Целесообразность выбора той или иной пары профилей с определенной геометрией конструктор увязывает с технологией изготовления (с методом изготовления, станочным оборудованием, режущим инструментом, методами контроля и т. п.), с работоспособностью передачи («несущая способность», высокий к.п.д., малый износ профилей, надежность и долговечность и т. п.), с чувствительностью передачи к погрешностям, возникающим при изготовлении, монтаже и эксплуатации.

Из основной теоремы зацепления следует, что сопряженные профили должны располагаться относительно центроид так, чтобы в любой точке контакта общая нормаль проходила через полюс зацепления P. Если это требование не выполняется, то такие профили не могут быть сопряженными. На рис. 13.3, *а* показаны центроида $Ц$ и профиль Π, к которому проведен ряд нормалей $n-n$. На участке AB профиля Π нормали пересекают центроиду $Ц$, а на участке BC нормали не имеют общих точек с центроидой $Ц$. Следовательно, для участка AB профиля Π возможно найти сопряженный профиль, а для участка BC сопряженный профиль спроектировать невозможно. В этом случае высота головки зуба должна быть

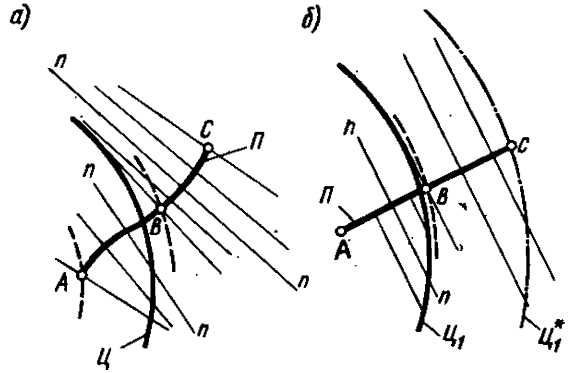


Рис. 13.3

ограничена (на рис. 13.3, *а* пунктирной линией условно показана линия вершин зубьев, проходящая через точку *B*).

Аналогичные рассуждения можно распространить на частный случай профиля *П*, очерченного по прямой линии (рис. 13.3, *б*): на участке *AB* нормали пересекают центроиду $Ц_1$, а на участке *BC* нормали не имеют общих точек с центроидой $Ц_1$. Однако если выбрать другую центроиду $Ц_1^*$ (или иначе расположить прямолинейный профиль по отношению к центроиде), то можно добиться, чтобы нормали к профилю на всем участке *AC* пересекали центроиду $Ц_1^*$, т. е. для всего профиля *AC* найти другой сопряженный профиль. Это условие, вытекающее из основной теоремы зацепления, является необходимым, но иногда оказывается недостаточным, ибо возможны и другие ограничения.

Ранее в гл. 4 было показано, что важной кинематической характеристикой любого механизма, не зависящей от времени и закона изменения обобщенной координаты, является передаточная функция v_{qB} скорости движения, представляющая собой первую производную перемещения S_B какой-либо точки *B* по обобщенной координате φ_1:

$$v_{qB}=\mathrm{d}S_B/\mathrm{d}\varphi_1=v_B/\omega_1.$$

При передаче вращательного движения высшей парой кинематической передаточной функции v_{qB} можно придать определенный геометрический образ. Пусть в качестве обобщенной координаты выбран угол поворота φ_1 звена *1*, а в качестве функции — перемещение S_B точки *B* ведомого звена *2* (см. рис. 13.2).

Передаточная функция $v_{qB}=v_B/\omega_1$ имеет единицу СИ м·рад$^{-1}$. Ее можно изобразить на схеме механизма в виде некоторого отрезка *DK* в масштабе μ_q=[мм/(м·рад$^{-1}$)].

Геометрический образ о передаточной функции скорости движения формулируют в следующем виде: отрезок DK, расположенный на прямой, соединяющей контактную точку K с осью вращения O_2 ведомого звена, между общей нормалью $n-n$ в контактной точке K и прямой $n'-n'$, проведенной ей параллельно через ось вращения O_1 ведущего звена, пропорционален передаточной функции $v_{qB}=v_B/\omega_1$.

Для доказательства этой теоремы рассматривают подобие треугольников $\Delta DKO_1 \infty \Delta Kab$ (см. рис. 13.2):

$$\frac{KD}{Bb}=\frac{AO_1}{Aa} \text{ или } \frac{KD}{v_B}=\frac{AO_1}{v_A}=\frac{AO_1}{\omega r_a}=\frac{\mu_l}{\omega_1}.$$

После преобразования получают

$$KD=\mu_l(v_B/\omega_1), \text{ или } KD=\mu_l v_{qB}.$$

Это соотношение и требовалось обосновать. Кинематическая передаточная функция v_{qB} при произвольно выбранной геометрии контактируемых профилей изменяется и ее можно представить в виде графиков в координатах v_{qB}, S_B или v_{qB}, φ_2.

Следует обратить внимание, что расположение отрезка KD, пропорционального кинематической передаточной функции v_{qB}, относительно контактной точки зависит от схемы зацепления. При внешнем зацеплении, когда полюс зацепления P расположен между осями вращения O_1 и O_2, отрезок KD по линии O_2D расположен также с внешней стороны по отношению к отрезку O_2K.

При внутреннем зацеплении, когда полюс зацепления P расположен вне отрезка O_1O_2, отрезок KD расположен внутренним образом на линии O_2D, т. е. от точки K в сторону оси O_2. Иногда пользуются определенным правилом: вектор скорости v_B выходного звена *2*, будучи повернут на 90° в направлении угловой скорости ω_1 входного звена, показывает расположение вектора DK, пропорционального кинематической передаточной функции относительно контактной точки K.

§ 13.2. СКОРОСТЬ СКОЛЬЖЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

Соотношение между угловыми скоростями ω_1, ω_2 звеньев, скоростью скольжения профилей и расстоянием контактной точки K от полюса зацепления P формулируется в следующем виде: **скорость скольжения** сопряженных профилей в высшей паре равна произведению расстояния l_{KP} между контактной точкой K и полюсом зацепления P на угловую скорость $\bar{\omega}_{12}=\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2$ в относительном движении профилей (см. рис. 13.2).

Для доказательства рассматривают подобие треугольников: $\Delta Kab \infty \Delta O_1KD$; следовательно,

$$\frac{ab}{DO_1}=\frac{Ka}{KO_1}, \text{ или } \frac{v_{ск}}{DO_1}=\frac{v_A}{KO_1}; \tag{13.6}$$

$\Delta DO_1O_2 \infty \Delta KPO_2$; следовательно,

$$\frac{DO_1}{KP}=\frac{O_1O_2}{PO_2}=\frac{O_1P+PO_2}{PO_2}=\frac{O_1P}{PO_2}+1=\mp\frac{\omega_2}{\omega_1}+1. \tag{13.7}$$

Соотношение (13.6) с учетом соотношения (13.7) преобразуют в следующем виде относительно искомой скорости скольжения:

$$v_{ск}=v_A\frac{DO_1}{KO_1}=\frac{\omega_1 r_A}{r_A\mu_l}DO_1=\frac{\omega_1}{\mu_l}KP\left(\mp\frac{\omega_2}{\omega_1}+1\right),$$

или

$$v_{ск}=\left(\frac{KP}{\mu_l}\right)(\omega_1\mp\omega_2)=l_{KP}(\omega_1\mp\omega_2). \tag{13.8}$$

Соотношение (13.8) соответствует сформулированной выше теореме о скорости скольжения контактируемых профилей. В полюсе зацепления P между профилями скольжение отсутствует. Чем дальше расположена контактная точка K относительно полюса зацепления P, тем больше скорость скольжения. Учитывая, что износ контактируемых поверхностей является функцией скорости скольжения, конструктор должен выбирать такое расположение сопряженных профилей относительно центроид, чтобы скорость скольжения находилась в допустимых пределах.

Наиболее распространенными являются передачи с сопряженными профилями, имеющими головку и ножку зуба, т. е. профилями, расположенными по обе стороны от центроид.

В ряде случаев можно использовать сопряженные профили, имеющие только ножки или только головки зубьев, т. е. проектировать передачи с дополюсным, заполюсным или внеполюсным зацеплениями.

Несмотря на то что скорость $\bar{v}_{ск}=\bar{v}_{K2K1}=\bar{v}_{BA}$ скольжения профилей $П_1$ и $П_2$ одинакова, они изнашиваются с разной интенсивностью. В связи с этим полезно рассмотреть движение каждого профиля $П_1$ и $П_2$ относительно общей контактной точки K (рис. 13.4):

$$\underline{\underline{\bar{v}_A}}=\underline{\bar{v}_K}+\underline{\bar{v}_{AK}}, \text{ или } \underline{\underline{\bar{v}_{K1}}}=\underline{\bar{v}_K}+\underline{\bar{v}_{K1K}};$$

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}}=\underline{\bar{v}_K}+\underline{\bar{v}_{BK}}, \text{ или } \underline{\underline{\bar{v}_{K2}}}=\underline{\bar{v}_K}+\underline{\bar{v}_{K2K}}. \tag{13.9}$$

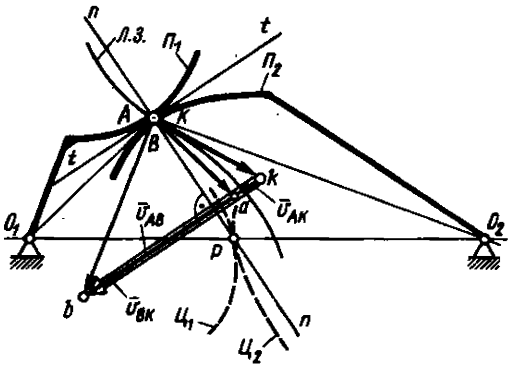


Рис. 13.4

Направление вектора скорости $\bar{v}_K$ общей контактной точки совпадает с касательной к линии зацепления (л.з.) — геометрическому месту контактных точек K на неподвижной плоскости при взаимодействии профилей $П_1$ и $П_2$ (см. рис. 13.2).

Направление векторов скоростей $\bar{v}_{K1K}=\bar{v}_{AK}$ и $\bar{v}_{K2K}=\bar{v}_{BK}$ совпадает с общей касательной $t-t$ к профилям $П_1$ и $П_2$ в точке контакта K.

Векторным соотношениям (13.9) соответствуют построения на рис. 13.4 в виде планов скоростей.

Скорость скольжения $\bar{v}_{AK}=\overline{ak}/\mu_v$ профиля $П_1$ относительно контактной точки K при заданной на рис. 13.4 геометрии высшей пары существенно меньше, чем скорость скольжения $\bar{v}_{BK}=\overline{kb}/\mu_v$ профиля $П_2$ относительно той же контактной точки K. Это означает, что за один и тот же промежуток времени на профиле $П_2$ будет контактировать участок большей длины, чем на профиле $П_1$. В силу отмеченного при прочих постоянных условиях профиль $П_1$ на данном участке будет изнашиваться больше, чем участок на профиле $П_2$, даже если материал профилей одинаков по износостойкости.

Скорость скольжения $\bar{v}_{K2K1}$ профилей друг относительно друга и скорости скольжения $\bar{v}_{K1K}$ и $\bar{v}_{K2K}$ профилей относительно общей контактной точки в процессе взаимодействия профилей все время меняется: уменьшается до нуля при движении контактной точки K к полюсу P и далее увеличивается, меняя при этом свое направление. Такой характер скольжения профилей влияет на интенсивность износа на разных участках профилей элементов высшей кинематической пары в том случае, если основным видом износа является абразивный износ.

Производить оценку скольжения профилей в относительном движении только по величине скорости скольжения недостаточно: необходимо еще учитывать скорость движения контактной точки по каждому профилю, т. е. скорости $\bar{v}_{BK}$ и $\bar{v}_{AK}$ (рис. 13.4).

Отношения скорости скольжения $\bar{v}_{ск}=\bar{v}_{BA}$ профилей к относительным скоростям $\bar{v}_{AK}$ и $\bar{v}_{BK}$ точек A и B профилей при перемещении относительно общей контактной точки K называют *коэффициентами скольжения* λ_A и λ_B соответственно:

$$\lambda_A=v_{ск}/v_{AK} \text{ и } \lambda_B=v_{ск}/v_{BK}. \qquad (13.10)$$

Если скорость точки на профиле совпадает со скоростью перемещения контактной точки по линии зацепления, то в этом случае коэффициент скольжения теоретически равен бесконечности. Такой случай имеет место в кулачковых механизмах, когда один из элементов высшей кинематической пары вырождается в точку (острие).

§ 13.3. УГОЛ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ВЫСШЕЙ ПАРОЙ

Положение общей нормали $n-n$ в точке контакта K взаимодействующих профилей может быть зафиксировано разными способами. Угол между нормалью $n-n$ и радиусом-вектором r_A, проведенным от оси O_1 в контактную точку K, называют *углом ведущего профиля* (см. рис. 13.2). Угол между нормалью $n-n$ и радиусом-вектором r_B, проведенным от оси O_2 в контактную точку K, называют *углом передачи* μ. Угол между нормалью $n-n$ и вектором скорости v_B точки ведомого звена называют *углом давления* ϑ. При проектировании механизмов с высшей парой эти углы играют большую роль. Особенно приходится учитывать условия передачи сил и моментов сил и назначать в связи с этим определенные ограничения. Например, часто применяют ограничения по углу давления $\vartheta \leqslant \vartheta_{доп}$, при котором изменяющиеся углы давления ϑ не должны превосходить определенный допускаемый уровень $\vartheta_{доп}$.

Связь между углом давления ϑ и кинематическими параметрами механизма находят в следующем виде: схема на рис. 13.2 позволяет записать следующие соотношения:

$$\operatorname{tg}\vartheta = DC/CO_1 = (AD - AC)/CO_1 = [AD - (CO_2 - BO_2)]/CO_1,$$

где CO_1 — перпендикуляр к лучу O_2D, опущенный из центра O_1.

В это выражение можно подставить значения отрезков:

$$AD = \mu_l(v_B/\omega_1);\ BO_2 = \mu_l r_B;$$

$$CO_1 = O_1O_2 \sin\varphi_2 = \mu_l a_w \sin\varphi_2;$$

$$CO_2 = O_1O_2 \cos\varphi_2 = \mu_l a_w \cos\varphi_2$$

— и получить формулу в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{(v_B/\omega_1) - (a_w \cos\varphi_2 - r_B)}{a_w \sin\varphi_2}. \qquad (13.11)$$

В формуле (13.11) величины v_B/ω_1, r_B и φ_2 являются переменными.

Если в механизме с высшей парой в частном случае ведомое звено *2* совершает прямолинейно-поступательное движение, то формула (13.11) также приобретает частное значение:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{(v_B/\omega_1) \mp e}{S_H + S_B}, \qquad (13.12)$$

где e — внеосность — смещение оси ведомого звена относительно оси вращения ведущего звена; $S_н+S_B=y_B$ — координата точки на ведомом звене в направлении его поступательного движения относительно координатных осей, имеющих начало координат на оси вращения ведущего звена.

Теорему об угле давления ϑ можно сформулировать в следующем виде: угол давления при передаче вращательного движения в простом плоском механизме с высшей парой зависит от передаточной функции $v_{qB}=v_B/\omega_1$, межосевого расстояния a_w и координат r_{B2} и φ_2 контактной точки ведомого звена и определяется соотношением (13.11).

В некоторых частных случаях передача движения сопряженными профилями может осуществляться с постоянными углами давления.

§ 13.4. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА СОПРЯЖЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

Метод последовательных положений профиля. Определение сопряженного профиля $П_2$ по заданному профилю $П_1$ (рис. 13.5, *а*) методом последовательных положений заключается в обращении движения центроиды $Ц_1$ относительно неподвижной центроиды $Ц_2$,

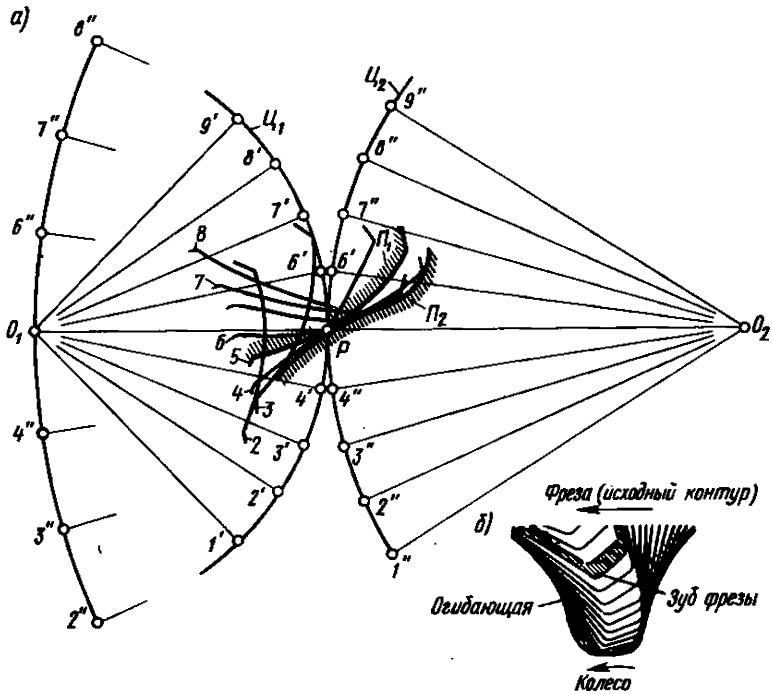


Рис. 13.5

вычерчивании ряда положений профиля $П_1$ и построении к ним огибающей кривой, которая является искомым профилем $П_2$.

Так как центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ обкатываются друг по другу без скольжения, то длина соответствующих участков центроид должна быть одинаковой: $P1'=P1''$; $P2'=P2''$; $P3'=P3''$; ...; $P8'=P8''$; $P9'=P9''$ или $1'2'=1''2''$; $2'3'=2''3''$; ... .

При обращении движения лучи $O_1 1'$; $O_1 2'$; $O_1 3'$; ...; $O_1 8'$; $O_1 9'$ будут последовательно занимать положения $1''1$, $2''2$, $3''3$, ..., $8''8$, $9''9$. Зафиксировав профиль $П_1$ относительно линии O_1O_2, можно вычертить ряд его последовательных положений. Так, положение линии O_1O_2 при обращении движения соответственно совпадает с $O_2 1''1$, $O_2 2''2$, $O_2 3''3$, ..., $O_2 8''8$, $O_2 9''9$ и т. д. Огибающая ряда последовательных положений профиля $П_1$ является искомым профилем $П_2$.

На рис. 13.5, *б* показан пример выполненного построения для исследования станочного зацепления исходного контура инструмента и эвольвентного зубчатого колеса.

Метод построения сопряженного профиля по положениям нормалей (способ Рело). Данный метод основан на основной теореме зацепления и используется в тех случаях, когда можно легко определить положение нормалей к заданному профилю $П_1$ (рис. 13.6).

На профиле $П_1$ выбирают ряд точек *1, 2, 3, ..., 6* и проводят в каждой точке нормаль к профилю до пересечения с центроидой в точках соответственно *1', 2', 3', ..., 6'*. Центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ обкатываются друг по другу без скольжения, поэтому на центроиде $Ц_2$ можно

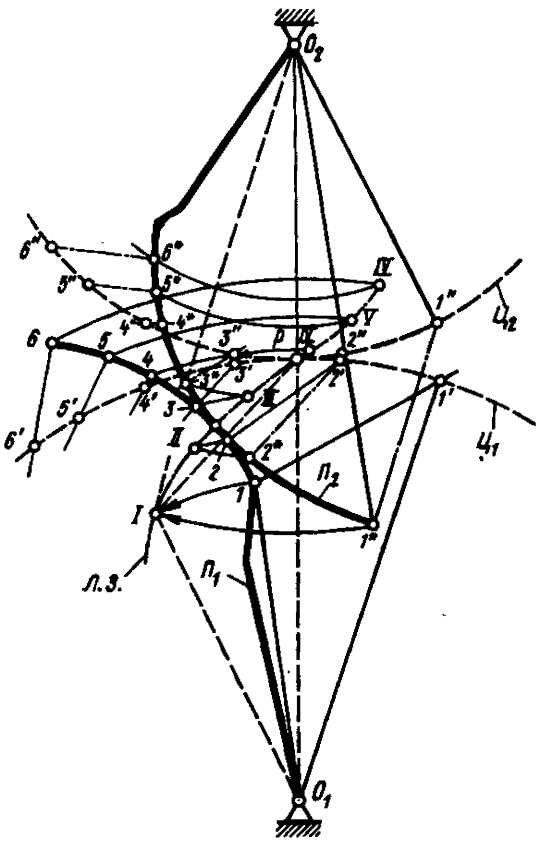


Рис. 13.6

найти соответственные точки $1''$, $2''$, $3''$, ..., $6''$ по условию: $\overset{\smile}{P1''}=\overset{\smile}{P1'}$; $\overset{\smile}{P2''}=\overset{\smile}{P2}$; $\overset{\smile}{P3''}=\overset{\smile}{P3'}$; ...; $\overset{\smile}{P6''}=\overset{\smile}{P6'}$, которые будут контактировать при прохождении полюса P с точками $1'$, $2'$, $3'$, ..., $6'$ центроиды $Ц_1$. Положение точек контакта профилей на неподвижной плоскости легко найти поворотом треугольников $11'O_1$; $22'O_1$; $33'O_1$; ...; $66'O_1$ вокруг оси O_1 до положений, при которых бы соответствующая нормаль $11'$; $22'$; $33'$; ...; $66'$ неизменно проходила бы через полюс P: PIO_1; $PIIO_1$; $PIIIO_1$; ...; $PVIO_1$. Геометрическое место точек контакта I, II, III, ..., VI является линией зацепления (л.з.).

В этих положениях соответствующие нормали к профилям $П_1$ и $П_2$ являются общими. Если их повернуть относительно оси O_2 на соответствующие углы, то они займут положения $1^*1''$; $2^*2''$; ...; $6^*6''$. При этом происходит поворот треугольников IPO_2, $IIPO_2$, ..., $VIPO_2$ до положения $1^*1''O_2$; $2^*2''O_2$; ...; $6^*6''O_2$.

Соединив полученные при построении точки 1^*, 2^*, 3^*, ..., 6^* плавной кривой, получают *искомый профиль $П_2$, сопряженный с заданным профилем $П_1$*.

Следовательно, построение сопряженного профиля по методу Рело основано на использовании понятия о линии зацепления — геометрическом месте контактных точек в неподвижной системе координат, связанной со стойкой.

§ 13.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПРОФИЛЕЙ

Условия взаимодействия сопряженных профилей, определяемые основной теоремой зацепления, могут быть представлены в аналитической форме. Такая форма оказывается полезной и даже предпочтительной при проектировании и исследовании зацеплений, являющихся теоретической основой нестандартных передач разнообразного назначения, профилирования режущего инструмента, работающего по методу огибания, и т. п.

Расчет координат сопряженного профиля и линии зацепления. Теоретические поверхности взаимодействующих зубьев, обеспечивающие заданный закон изменения передаточного отношения, называют *сопряженными поверхностями зубьев*.

При плоском зацеплении обычно один из профилей (например, $П_1^*$ на рис. 13.7) задан уравнением в той или иной форме:

$$y^1=f_1(x^{(1)}),\ \text{или}\ F(x^{(1)}, y^{(1)})=0,\ \text{или}\ x^{(1)}=f_1(u);\ y^{(1)}=f_2(u).$$

Система координат $O_1x^{(1)}y^{(1)}$ связана с профилем $П_1^*$. Если на профиле $П_1^*$ выбрать произвольную точку K_1, то на профиле $П_2^*$ можно найти сопряженную точку K_2, если существуют нормали K_1P_1 и K_2P_2, пересекающие центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$. Участки PP_1 и PP_2 центроид обкатываются друг по другу без скольжения. Обязатель-

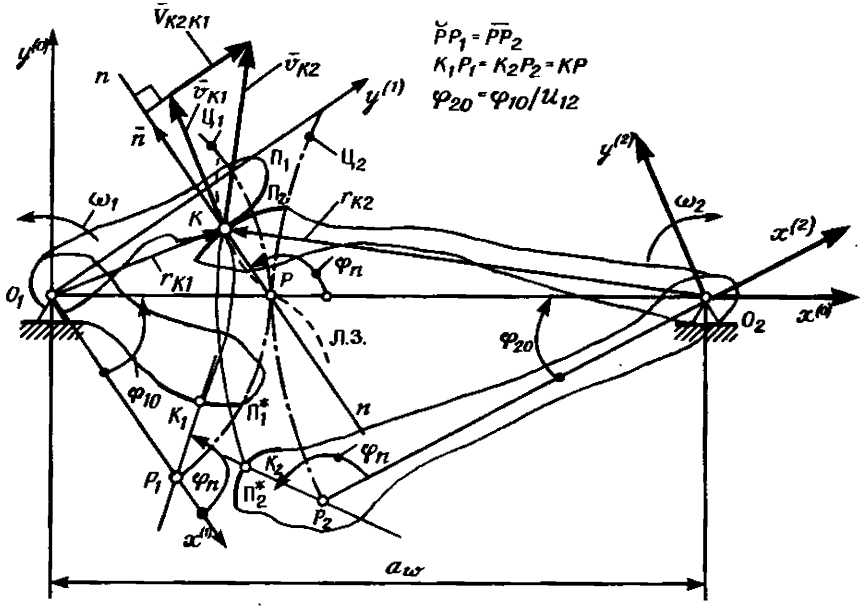


Рис. 13.7

ными условиями являются равенство длины дуг на центроидах: $PP_1 = PP_2$ — и равенство нормалей: $K_1P_1 = K_2P_2$, так как в общей точке K контакта профилей должна существовать общая нормаль $n-n$, проходящая через полюс зацепления P.

Углы поворота координатных осей $O_1x^{(1)}$ и $O_2x^{(2)}$, соответственно φ_{10} и φ_{20}, зависят от передаточного отношения $u_{12} = \omega_1/\omega_2$, т. е. $\varphi_{20} = \varphi_{10}/u_{12}$, а углы φ_n наклона нормалей K_1P_1 и K_2P_2 должны быть одинаковы и равны углу наклона нормали $n-n$ в общей контактной точке K.

В момент контакта профилей линейные скорости точек профилей $П_1$ и $П_2$ определяются соотношениями

$$\bar{v}_{к1} = \bar{\omega}_{к1} \times \bar{r}_{к101} \text{ и } \bar{v}_{к2} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{к202}.$$

Вектор относительной скорости $\bar{v}_{к2к1} = \bar{v}_{к2} - \bar{v}_{к2}$ должен быть перпендикулярен вектору нормали $\bar{n}$ к профилям в контактной точке K. Два ненулевых вектора, $\bar{v}_{к2к1}$ и $\bar{n}$, взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\bar{v}_{к2к1} \times \bar{n} = 0$, или

$$\bar{v}_{к2к1} \times \bar{n} = v_{к2к1}^{(x_1)} n^{(x_1)} + v_{к2к1}^{(y_1)} n^{(y_1)} = 0, \qquad (13.13)$$

проекции $n^{(x_1)}$ и $n^{(y_1)}$ орта нормали

$$n^{(x_1)}=\cos\varphi_n;\ n^{(y_1)}=\sin\varphi_n.$$

Угол φ_n наклона нормали к оси $O_1x^{(1)}$ определяется по соотношению

$$\operatorname{tg}\varphi_n=\left(-\frac{dx^{(1)}}{dy^{(1)}}\right)_{K_1}=\left(-\frac{dx^{(1)}}{dy^{(1)}}\right)_K. \tag{13.14}$$

Проекции вектора скорости скольжения $v_{к2к1}$ на координатные оси $O_1x^{(1)}$ и $O_1y^{(1)}$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned} v_{к2к1}^{(x_1)}&=v_{к2}^{(x_1)}-v_{к1}^{(x_1)}=-\omega_2(y_к^{(1)}+a_w\sin\varphi_{10})+\omega_1 y_к^{(1)},\\ v_{к2к1}^{(y_1)}&=v_{к2}^{(y_1)}-v_{к1}^{(y_1)}=\omega_2(x_к^{(1)}-a_w\cos\varphi_{10})-\omega_1 x_к^{(1)}. \end{aligned} \tag{13.15}$$

После подстановки уравнение зацепления сопряженных профилей получают в виде

$$[-\omega_2(y_к^{(1)}+a_w\sin\varphi_{10})+\omega_1 y_к^{(1)}]\cos\varphi_n+[\omega_2(x_к^{(1)}-a_w\cos\varphi_{10})-$$
$$-\omega_1 x_к^{(1)}]\sin\varphi_n=0.$$

Учитывают, что $\omega_1/\omega_2=u_{12}$ и $\omega_2=\omega_1=u_{21}$; $\dfrac{\cos\varphi_n}{\sin\varphi_n}=\left(-\dfrac{dy^{(1)}}{dx^{(1)}}\right)_K$ записывают в виде

$$[y_к^{(1)}-u_{21}(y_к^{(1)}+a_w\sin\varphi_{10})]\left(\frac{dy^{(1)}}{dx^{(1)}}\right)_K+x_к^{(1)}-u_{21}(x_к^{(1)}-a_w\cos\varphi_{20})=0. \tag{13.16}$$

Это соотношение позволяет определить значение угловой координаты оси $O_1x^{(1)}$, при которой заданная точка K на профиле Π_1^* вступит в контакт с искомой точкой K_2 на профиле Π_2^* после его поворота на угол φ_{20}. Точки K_1 и K_2 перемещаются по окружностям радиусов соответственно K_1O_1 и K_2O_2.

Геометрическое место точек контакта K при их движении относительно основной системы отсчета $O_1x^{(0)}y^{(0)}$, связанной с осями колес, называют *линией зацепления* (на рис. 13.7 — *Л.3.*). Уравнение линии зацепления легко выразить из формы преобразования координат точки K:

$$\begin{aligned} x_к^{(0)}&=x_к^{(1)}\cos\varphi_{10}-y_к^{(1)}\sin\varphi_{10},\\ y_к^{(0)}&=x_к^{(1)}\sin\varphi_{10}+y_к^{(1)}\cos\varphi_{10}. \end{aligned} \tag{13.17}$$

Уравнения сопряженного профиля Π_2 также выражают по формулам преобразования координат точки K:

$$x_{\text{к}}^{(2)} = x_{\text{к}}^{(0)} \cos \varphi_{20} - y_{\text{к}}^{(0)} \sin \varphi_{20} - a_w \cos \varphi_{20},$$

$$y_{\text{к}}^{(2)} = + x_{\text{к}}^{(0)} \sin \varphi_{20} + y_{\text{к}}^{(0)} \cos \varphi_{20} + a_w \sin \varphi_{20}. \qquad (13.18)$$

§ 13.6. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ

При расчете геометрических параметров элементов высшей кинематической пары учитывают технологические возможности изготовления деталей на формообразующих станках (металлорежущих, прокатных станах, прессах и т. д.). Геометрия соответствующего формообразующего инструмента тесным образом связана с **производящими поверхностями**. Для инструментов, осуществляющих процесс формообразования путем срезания стружки, такой производящей поверхностью является воображаемая поверхность, содержащая режущие кромки инструмента или образуемая при их главном движении, необходимом для резания. Если режущие кромки — прямые, а главное движение — прямолинейное, то производящей поверхностью является плоскость. Если режущие кромки криволинейные, а главное движение — прямолинейное, то производящей поверхностью является цилиндрическая поверхность (например, эвольвентная поверхность для долбяков).

Зацепление проектируемой поверхности зубьев с производящей поверхностью по аналогии с зацеплением нарезаемого колеса с производящей поверхностью режущего инструмента называют *станочным зацеплением*. Этот термин был предложен **В. А. Гавриленко**, крупным ученым, обобщившим и развившим основные положения теории зацепления эвольвентных передач [13].

Сущность станочного зацепления заключается в том, что *производящая поверхность* (поверхность режущих кромок инструмента) *и проектируемая поверхность зуба* («нарезаемого» колеса) *имеют такое же относительное движение, какое имели бы зубчатые колеса при зацеплении друг с другом при взаимодействии аксоидных поверхностей.*

При нарезании цилиндрических зубчатых колес оси производящего колеса (т. е. воображаемого зубчатого колеса, у которого боковые поверхности являются производящими поверхностями) и проектируемого («нарезаемого») колеса параллельны между собой и аксоидами являются цилиндры. Если производящее колесо имеет конечное число зубьев, то режущими инструментами являются долбяк (рис. 13.8, *е*), абразивный хон (рис. 13.8, *ж*), которыми можно обрабатывать боковые поверхности зубьев колес с различными числами зубьев (рис. 13.8, *з*). При бесконечно большом радиусе аксонда производящего колеса инструмент должен иметь бесконечно большое число зубьев, т. е. превратиться в *рейку*. В этом

Рис 13.8

случае инструментом обычно являются червячная фреза (рис. 13.8, *б*) или абразивный червячный круг (рис. 13.8, *г*), у которых реечный производящий контур (рис. 13.8, *д*) расположен на винтовой поверхности. Частым случаем является инструмент, называемый зуборезной гребенкой (рис. 13.8, *а*), или пара тарельчатых шлифовальных кругов (рис. 13.8, *в*). Главным движением резания у долбяка, гребенки и абразивного хона является поступательное движение, а у червячной фрезы и шлифовальных кругов — вращательное.

В процессе движения огибания (обкатки) основной шаг инструмента по профильной нормали соответствует основному шагу проектируемого («нарезаемого») колеса. Процесс перехода от формообразования одного зуба к другому в процессе обкатки осуществляется автоматически при непрерывном относительном движении (рис. 13.8, *д*, *з*).

Реечный контур, принятый в качестве базового для определения теоретических форм и размеров зубьев семейства зубчатых колес, представителем которого он является, называют *исходным контуром*. Исходный контур является объектом стандартизации, ибо он определяет геометрию зуборезного инструмента и зубчатых колес.

При проектировании конических передач используют станочные зацепления, у которых аксоидами производящих поверхностей являются конические поверхности. Оси аксоидных конусов производящего колеса и проектируемого («нарезаемого») колеса пересекаются. Наиболее употребительным при расчетах является частный случай, когда аксоидом производящего колеса является плоскость, имеющая ось вращения, проходящую через вершину аксоида. Колесо с плоским аксоидом называют теоретическим *исходным плоским колесом*. Развертка торцового сечения такого исходного плоского колеса имеет контур зубьев условной рейки, называемый *торцовым теоретическим* (номинальным) *исходным контуром*.

Расчет любого зубчатого зацепления предполагает использование двух станочных зацеплений с соответствующими производящими колесами и производящими механизмами огибания. Если производящие поверхности могут быть приведены в такое положение, что они совпадают между собой при наложении друг с другом во всех точках, то такие поверхности называют *конгруэнтной производящей парой*. На рис. 13.9 показаны конгруэнтные исходные контуры *1* и *2* реечного профиля. Использование принципа конгруэнтной производящей пары упрощает анализ сопряженности боко-

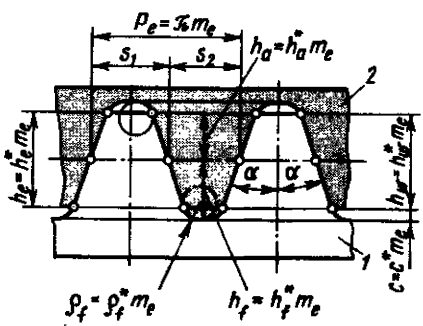


Рис. 13.9

вых поверхностей в зацеплении, рода контакта, наличия или отсутствия интерференции профилей.

Идея построения теории зацепления на базе производящей пары была выдвинута французским ученым Т. Оливье в работе «Геометрическая теория зацеплений» (1842 г.) и развита российским ученым Х. И. Гохманом, опубликовавшим в 1886 г. работу «Аналитический метод решения вопросов о зацеплениях», и очень четко и последовательно использована при разработке теории эвольвентного зацепления научной школой МВТУ им Н. Э. Баумана под руководством проф. В. А. Гавриленко [13].

Интерференция в рабочем зацеплении отсутствует, если использовать конгруэнтную производящую пару. Производящая пара обеспечивает касание боковых поверхностей зубьев по линии, так как совпадают станочные мгновенные контактные линии.

В случае использования пар с неконгруэнтными производящими поверхностями в передаче возможны как точечный, так и линейный контакт, но не исключена и интерференция боковых поверхностей зубьев. В таких случаях необходим дополнительный анализ проектируемой передачи по тем или иным показателям.

ГЛАВА 14
ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ЗУБЧАТАЯ ПЕРЕДАЧА

Передача непрерывного вращения от одного вала к другому с заданным передаточным отношением чаще всего осуществляется с помощью зубчатых механизмов. Зубчатые механизмы получили широкое распространение как в машиностроении, так и в приборостроении благодаря компактности, большой надежности и точности в воспроизведении заданного закона движения. Если оси вращения валов механизма параллельны, то аксоидами его зубчатых колес являются цилиндры (см. § 13.1), вследствие чего такую зубчатую передачу называют *цилиндрической*; она относится к плоским механизмам. В данной главе излагаются основы синтеза цилиндрической зубчатой передачи по заданному передаточному отношению. Эти основы называют *геометрическим расчетом зубчатой передачи*.

§ 14.1. ПЕРЕДАЧА ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Цилиндрической зубчатой передачей называют механизм, который посредством зубчатого зацепления передает вращение с одного вала на другой, оси которых *параллельны*. Такие механизмы широко распространены в технике; они применяются в станках и часах, автомобилях и арифмометрах, прокатных станах и тахометрах и во многих других машинах и приборах. Пример простой цилиндрической зубчатой передачи внешнего зацепления схематически изображен на рис. 14.1: посредством зубчатых колес *1* и *2* вращение передается с ведущего вала (*вщ*) на ведомый (*вм*), оси которых O_1O_1 и O_2O_2 параллельны и неподвижны (стойка *3*). При внешнем зацеплении колеса *1* и *2* вращаются в *противоположные* стороны (см. рис. 3.18, *а*).

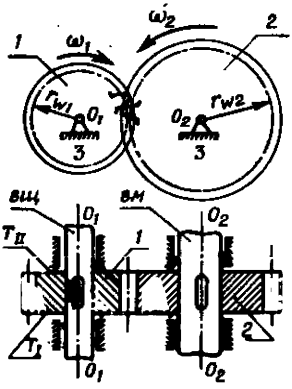


Рис. 14.1

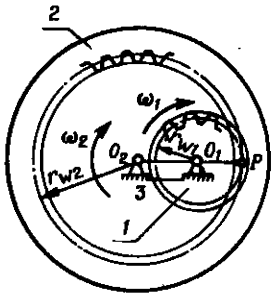


Рис. 14.2

Простую цилиндрическую зубчатую передачу, т. е. составленную только из двух зубчатых колес с параллельными и неподвижными осями, можно сформировать также и на основе внутреннего зацепления (рис. 14.2). Большее (охватывающее) колесо *2* такой передачи имеет форму кольца, причем зубья расположены с его внутренней стороны (так называемые внутренние зубья); зубчатое кольцо соединяется со ступицей колеса с помощью диска или спиц. Стойка *3* имеет оси O_1 и O_2. При внутреннем зацеплении оба колеса *1* и *2* вращаются в *одну* сторону (см. рис. 3.18, *б*).

Боковые поверхности взаимодействующих зубьев соприкасаются по линии; следовательно, зубчатые колеса *1* и *2* образуют высшую кинематическую пару.

Крайние плоскости T_I и T_{II}, перпендикулярные осям вращения (рис. 14.1), называют *торцевыми*. В сечении боковых поверхностей зубьев плоскостью T_I образуются торцевые профили зубьев. В точности такие же профили образуются в сечении любой другой плоскостью, параллельной торцевой T_I. Поэтому в дальнейшем при изучении процесса зацепления нет необходимости рассматривать взаимодействие боковых поверхностей зубьев, а достаточно рассмотреть взаимодействие их профилей, расположенных в торцевой плоскости T_I. Вследствие этого как внешнее, так и внутреннее зацепление цилиндрических зубчатых колес называют *плоским*.

Отметим, что наиболее широкое распространение получили передачи, профили зубьев которых очерчены по *эвольвенте*.

§ 14.2. ЭВОЛЬВЕНТА, ЕЕ СВОЙСТВА И ЕЕ УРАВНЕНИЕ

Проведем окружность радиусом r_b, называемую *основной*, далее проведем к ней касательно производящую прямую *пп* и покатим ее по окружности *без скольжения* сначала по часовой стрелке, а затем

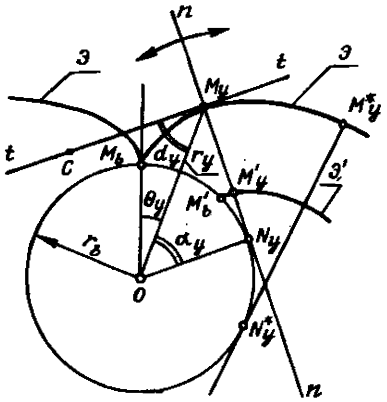


Рис. 14.3

против (рис. 14.3). Любая точка прямой, например точка M_y, опишет при этом кривую Э, называемую эвольвентой. Как видно из рис. 14.3, эвольвента имеет две симметричные ветви и точку возврата M_b, находящуюся на основной окружности.

Отметим свойства эвольвенты, наиболее важные для расчета зубчатых передач.

1. Нормаль к эвольвенте есть производящая прямая nn, т. е. нормаль к эвольвенте касательна к основной окружности.

2. При увеличении радиуса r_b основной окружности эвольвента постепенно теряет свою кривизну; в пределе при $r_b \to \infty$ эвольвента превращается в прямую линию.

3. Радиус кривизны ρ_y эвольвенты в текущей точке M_y равен отрезку $N_y M_y$. Отсюда следует, что в точке M_y^* (рис. 14.3), более удаленной от точки M_b, чем точка M_y, радиус кривизны $\rho_y^* = N_y^* M_y^*$ больше, чем радиус кривизны $\rho_y = M_y N_y$.

Укажем полярные координаты точки M_y: полярный угол Θ_y и полярный радиус-вектор r_y (отрезок OM_y), а также профильный угол OM_yC, обозначаемый α_y (рис. 14.3). Составим уравнение эвольвенты, т. е. установим аналитическую связь между координатами Θ_y, r_y и профильным углом α_y.

Так как прямая nn катится по основной окружности без скольжения, то отрезок $M_y N_y$ в точности равен дуге $\overset{\smile}{M_b N_y}$:

$$\overline{M_y N_y} = \overset{\smile}{M_b N_y}. \qquad (14.1)$$

Из первого свойства эвольвенты следует, что $\angle M_y O N_y = \angle O M_y C = \alpha_y$. Поэтому $M_y N_y = r_b \cdot \operatorname{tg}\alpha_y$, а $M_b N_y = r_b(\Theta_y + \alpha_y)$. Подставив эти выражения в (14.1), получим $\operatorname{tg}\alpha_y = \Theta_y + \alpha_y$, откуда

$$\Theta_y = \operatorname{tg}\alpha_y - \alpha_y. \qquad (14.2)$$

Из $\Delta O N_y M_y$ (рис. 14.3) имеем

$$r_y = r_b / \cos\alpha_y. \qquad (14.3)$$

Исключив из системы уравнений (14.2) — (14.3) параметр α_y, получим связь между координатами Θ_y и r_y. Таким образом, система уравнений (14.2), (14.3) представляет собой уравнение эвольвенты в параметрической форме.

Из уравнения (14.2) видно, что $\Theta_y = f(\alpha_y)$. Эта зависимость называется эвольвентной и символически записывается так:

$$\Theta_y = \operatorname{inv} \alpha_y. \tag{14.4}$$

Эвольвентная зависимость (14.4) сведена в таблицы [12].

Если взять на производящей прямой nn другую точку (например, M'_y, рис. 14.3) и покатить прямую nn по основной окружности без скольжения, то точка M'_y опишет эвольвенту Э′, в точности такую же, как и эвольвента Э, но несколько сдвинутую относительно нее. Из уравнения (14.1) следует

$$\overline{M_y M'_y} = \overset{\smile}{M_b M'_b}, \tag{14.5}$$

что будет использовано в § 14.10.

§ 14.3. ЭВОЛЬВЕНТНОЕ ПРЯМОЗУБОЕ КОЛЕСО

Условимся, что в дальнейшем изложении, вплоть до § 14.11, будем иметь дело с передачами, составленными только из прямозубых колес. Познакомимся с основными элементами эвольвентного прямозубого колеса, зубья которого расположены параллельно его оси, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 14.4).

К элементам эвольвентного колеса относятся прежде всего число зубьев z и радиус r_b основной окружности, на базе которой построен эвольвентный профиль зубьев. Окружность, ограничивающую зубья по их вершинам, называют окружностью вершин (радиус r_a). Проведем еще одну окружность произвольного радиуса r_y между окружностями вершин и основной.

Дуговое расстояние между двумя соседними зубьями называют *шагом*. Шаги пропорциональны радиусам: $p_a : p_b : p_y = r_a : r_b : r_y$. Угловой шаг зубьев составляет $\tau = 360°/z$.

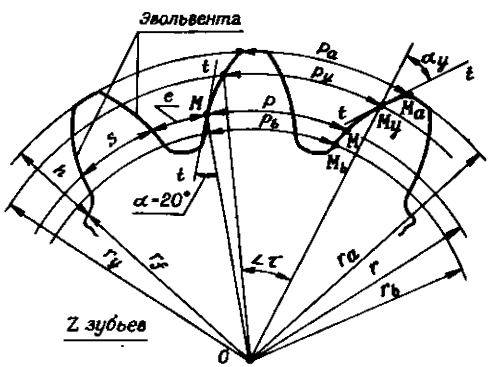


Рис. 14.4

В точке M_y эвольвенты, расположенной на произвольной окружности, покажем профильный угол α_y (рис. 14.4). Согласно уравнению (14.3), $\cos\alpha_y = r_b/r_y$. Поэтому в точке M_b, лежащей на основной окружности, $\cos\alpha_b = r_b/r_b = 1$, т. е. $\alpha_b = 0$. По мере удаления по эвольвенте от точки M_b профильный угол растет от нуля, приобретая наибольшее значение α_a в точке M_a, находящейся на окружности вершин.

Окружность, проходящую через точку M, в которой профильный угол имеет строго определенное значение α, называют делительной. По ГОСТу для делительной окружности прямозубого колеса профильный угол $\alpha = 20°$ (рис. 14.4).

Длина делительной окружности $\pi d = zp$, где p — шаг по делительной окружности; d — ее диаметр. Отсюда получим

$$p/\pi = d/z = m. \tag{14.6}$$

Доля делительного диаметра d, приходящаяся на один зуб и обозначаемая буквой m, называется *модулем*. Значения модуля также стандартизованы. Величина модуля определяется из прочностного расчета зубчатых передач. Чем сильнее нагружена передача, тем больше должен быть модуль. Так как различные передачи совершенно неодинаково нагружены, то ГОСТ предусматривает не одно, а серию значений модуля m.

Составим расчетные формулы для эвольвентного прямозубого колеса. Радиус делительной окружности получим из (14.6):

$$r = mz/2. \tag{14.7}$$

Так как модуль есть прочностная характеристика и его произвольно уменьшать нельзя, то сокращать радиус r, а следовательно, размер зубчатого колеса и передачи в целом нужно прежде всего за счет уменьшения числа зубьев z. На это важное для конструктора соображение необходимо обратить особое внимание.

Применив уравнение (14.3) к делительной окружности, получим $r = r_b/\cos\alpha$. Отсюда

$$r_b = r\cos\alpha = \frac{mz}{2}\cos\alpha. \tag{14.8}$$

Из уравнений (14.3) и (14.8) вытекает

$$r_y = \frac{mz}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_y}. \tag{14.9}$$

Согласно уравнению (14.6), запишем

$$p = \pi m. \tag{14.10}$$

Так как шаги пропорциональны радиусам, то

$$p_b = \pi m \cos\alpha, \tag{14.11}$$

$$p_y = \pi m \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_y}. \tag{14.12}$$

Укажем также толщину зуба s и ширину впадины по делительной окружности e, высоту зуба h и радиус окружности впадин r_f (рис. 14.4).

§ 14.4. ЭВОЛЬВЕНТНАЯ ПРЯМОЗУБАЯ РЕЙКА

Зубчатое колесо, число зубьев которого бесконечно велико, называют *рейкой* ($z=\infty$). Конечно, реально можно изготовить не всю бесконечно длинную рейку, а лишь часть ее (рис. 14.5). Но эта часть может быть настолько длинной, насколько нужно.

Радиус делительной окружности рейки бесконечно велик: $r = mz/2 = \infty$. Поэтому делительная окружность рейки, а также окружности вершин и впадин ее зубьев превратились в параллельные прямые линии.

Радиус основной окружности рейки также бесконечно велик: $r_b = \frac{mz}{2}\cos\alpha = \infty$. Следовательно, согласно второму свойству эвольвенты (см. § 14.2) эвольвентный профиль рейки приобрел прямолинейное очертание (рис. 14.5). Такое свойство эвольвенты оказалось особенно ценным в области изготовления зубчатых колес. Поэтому на него надо обратить самое пристальное внимание. Подчеркнем, что указанным свойством обладает только эвольвента, в то время как эпициклоида, гипоциклоида и другие кривые, используемые для профилирования некоторых цилиндрических передач, таким свойством не обладают.

Прямолинейная (т. е. эвольвентная!) часть CD профиля рейки наклонена под углом α; неэвольвентная часть AC может иметь произвольное очертание. Делительной прямой UU рейки является та, по которой толщина s зуба рейки равна ширине e впадины, т. е. равна половине шага: $s = e = p/2 = \pi m/2$. Согласно ГОСТу, $\alpha = 20°$, $h_a^* = 1$, $h_l^* = 2$, $c^* = 0{,}25$; для модуля m, которым определяется прочность зуба рейки, в ГОСТе предусмотрен ряд значений.

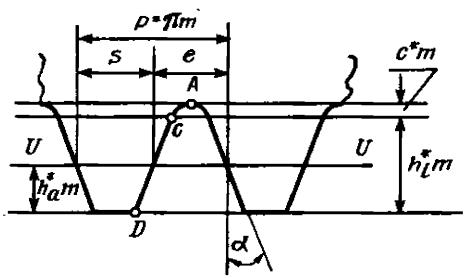


Рис. 14.5

§ 14.5. ЭВОЛЬВЕНТНОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ

Рассмотрим элементы и свойства внешнего зацепления, образованного эвольвентными профилями $Э_1$ и $Э_2$ (рис. 14.6). Эти профили базируются на основных окружностях, проведенных радиусами r_{b_1} и r_{b_2}. Поскольку преимущественное распространение в технике получили зубчатые передачи с постоянным передаточным отношением, прежде всего выясним, способны ли эвольвентные профили обеспечить это постоянство.

Пусть в некоторый момент своего движения с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 профили находятся в положениях $Э_1'$ и $Э_2'$ (рис. 14.6). Согласно первому свойству эвольвенты (см. § 14.2), нормаль к профилю $Э_1'$, проведенная через точку контакта K', должна быть касательной к первой основной окружности, а нормаль к профилю $Э_2'$ — ко второй основной окружности. Поэтому общая к обоим профилям нормаль должна быть касательной к обеим основным окружностям, т. е. ею является прямая N_1N_2 (рис. 14.6).

Рассуждая точно так же для другого момента времени, когда профили находятся в новых положениях $Э_1''$ и $Э_2''$, установим, что и в этот новый момент времени общей нормалью будет по-прежнему прямая N_1N_2. Следовательно, общая нормаль в процессе движения взаимодействующих эвольвентных профилей своего положения не изменяет и пересекает межосевую линию всегда в одном и том же месте, т. е. полюс зацепления P неподвижен. Отсюда из основной теоремы зацепления (см. § 13.1) следует, что в эвольвентном зацеплении передаточное отношение в процессе движения профилей не изменяется:

$$|u_{12}|=|\omega_1|/|\omega_2|=O_2P/O_1P=\text{const}. \qquad (14.13)$$

Благодаря этому свойству эвольвентные профили и смогли найти применение в технике.

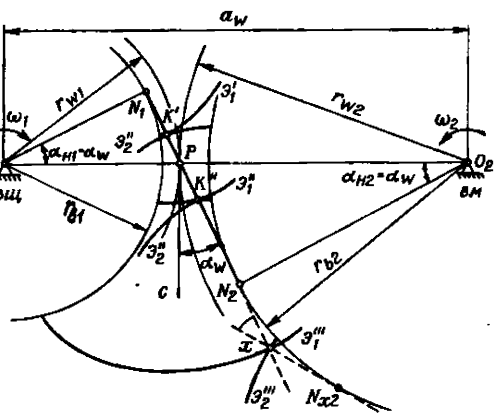


Рис. 14.6

Проведем через полюс P две окружности, которые называют *начальными* (рис. 14.6). Жестко свяжем их соответственно с эвольвентными профилями, т. е. заставим их вращаться с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. В § 4.7 было показано, что начальные окружности катятся друг по другу без скольжения. Это является их основным физическим свойством.

Теперь запишем урав-

нение (14.13) в таком виде:

$$u_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\mp\frac{O_2P}{O_1P}=\mp\frac{r_{w2}}{r_{w1}}=\text{const}, \qquad (14.14)$$

где r_{w1} и r_{w2} — радиусы начальных окружностей; знак минус относится к внешнему зацеплению, в котором ω_1 и ω_2 направлены в разные стороны (см. рис. 14.1), знак плюс — к внутреннему, в котором ω_1 и ω_2 направлены одинаково (см. рис. 14.2).

В процессе зацепления точка K касания двух эвольвентных профилей движется вдоль прямой N_1N_2, нормальной к профилям. Следовательно, именно на этой прямой, называемой линией зацепления, эвольвентные профили касаются друг друга. Рассмотрим, как располагаются эвольвентные профили друг относительно друга вне участка N_1N_2, например, в точке X (рис. 14.6). Нормалью к профилю $Э_1'''$* является прямая XN_1; нормалью к профилю $Э_2'''$ — прямая XN_{X2}. Как видно, профили $Э_1'''$ и $Э_2'''$ не имеют общей нормали, а следовательно, не имеют и общей касательной, т. е. они не касаются, а пересекают друг друга. Это значит, что они не являются сопряженными, а потому в правильном зацеплении находиться не могут. То же самое произойдет за пределами N_1N_2, «выше» точки N_1. Следовательно, правильное внешнее зацепление двух эвольвентных профилей может иметь место только на участке N_1N_2, так что линия внешнего эвольвентного зацепления представляет собой ограниченный отрезок N_1N_2.

Угол α_w, составленный линией зацепления N_1N_2 и прямой PC, перпендикулярной межосевой линии O_1O_2 (рис. 14.6), называют углом зацепления. Угол зацепления α_w численно равен профильному углу α_{n1} и α_{n2} в тех точках H_1 и H_2 эвольвентных профилей $Э_1$ и $Э_2$, которые расположены на соответствующих начальных окружностях:

$$\alpha_w=\alpha_{n1}=\alpha_{n2}. \qquad (14.15)$$

Отметим весьма ценное свойство, присущее только эвольвентному зацеплению: если по какой-либо причине межосевое расстояние a_w (рис. 14.6) изменится по отношению к своему проектному значению, то это не приведет к нарушению запроектированного передаточного отношения, т. е. в эвольвентном зацеплении передаточное отношение u_{12} не зависит от межосевого расстояния a_w.

---

*Эвольвента может быть сколь угодно длинной.

§ 14.6. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАНОЧНОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Наилучшим в настоящее время, а поэтому и самым распространенным способом изготовления зубчатых колес является способ обкатки. Суть его состоит в следующем.

Представим себе прямозубую рейку *ПР* (рис. 14.7), которую будем называть производящей. Возьмем цилиндрическую заготовку, сделанную из весьма податливого, весьма пластичного материала. Покатим заготовку вдоль производящей рейки *ПР*, сильно прижимая ее к рейке. В результате такого обката зубья рейки выдавят впадины на заготовке и она получит зубчатую форму. Нетрудно заметить, что зубья производящей рейки и зубья, формируемые на заготовке при обкате, осуществляют процесс зацепления. Отсюда следует принципиальный вывод: в основу способа обкатки положен процесс зацепления.

Здесь важно отметить, что если зубья производящей рейки имеют прямолинейный (т. е. эвольвентный) профиль (как на рис. 14.5), то зубья изготовляемого колеса *К* получат также эвольвентный профиль.

Формирование зубьев можно осуществить и на неподвижной заготовке, но тогда обкатывать вокруг нее надо рейку. Можно, наконец, рейке сообщить прямолинейно поступательное движение, а заготовку вращать с соответствующей скоростью вокруг ее оси. Таким образом, для образования зубьев не имеют значения абсолютные движения звеньев *ПР* и *К*; важно, чтобы их относительное движение представляло собой процесс зацепления, во время которого происходит взаимоогибание зубчатой поверхности производящей рейки *ПР* и формируемой поверхности зубьев колеса *К* (см. § 13.4). Поэтому способ обкатки имеет и второе название — способ огибания.

Если заготовка выполнена из непластичного или малопластичного материала (например, из металла), то движению обкатки должно быть добавлено движение резания. Делается это следующим образом.

Режущий инструмент имеет форму зубчатой рейки и называется гребенкой *Г* (рис. 14.8)*. На нижней стороне гребенки по контуру ее зубьев затачивается режущая кромка *РК* (рис. 14.9, *а*). Заготовка нарезаемого колеса *К* совершает сложное движение обката, состоящее из движения *1* перпендикулярно оси *ОО* вдоль гребенки *Г* и вращения *2* вокруг оси *ОО*. Гребенка *Г* совершает возвратно-поступательное движение *3*, параллельное оси *ОО* колеса *К*, для снятия стружки по всей ширине его обода. Движение обката *1*,

*Помимо гребенки в качестве режущего инструмента применяются червячная фреза и долбяк.

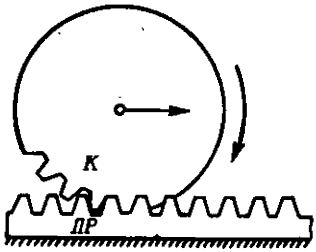


Рис. 14.7

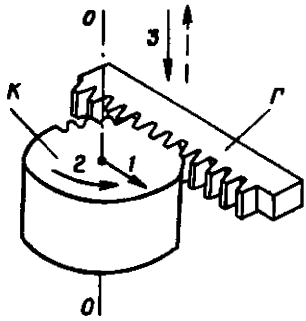


Рис. 14.8

2 выполняется прерывисто и всякий раз с малым перемещением; оно чередуется с движением резания *3*.

При технологическом движении гребенки *Г* вниз ее режущие кромки описывают зубчатую поверхность, которую называют производящей (см. § 13.6). На рис. 14.9 производящая поверхность показана схематично в виде вертикально проецирующих линий. Рассечем эту воображаемую поверхность торцевой плоскостью *Т* нарезаемого колеса *К*, перпендикулярной его оси *ОО* (рис. 14.9, *а, б*). В сечении получим линию зубчатой формы, называемую *исходным производящим контуром* (ИПК).

Посмотрим сверху вертикально вниз на гребенку *Г* и нарезаемое колесо *К* (см. рис. 14.8). Тогда движения резания *3* видно не будет, поскольку оно осуществляется в вертикальном направлении, но

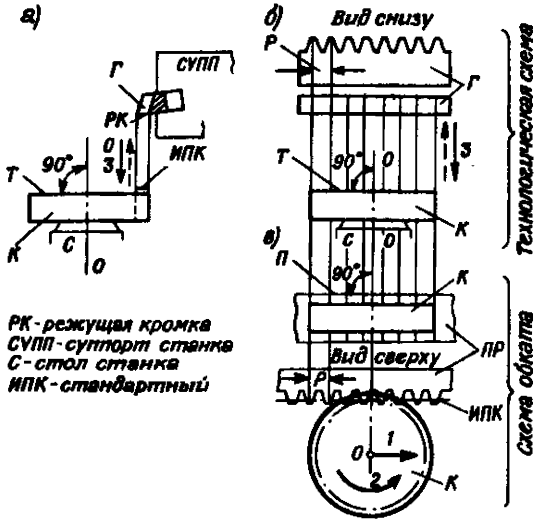


Рис. 14.9

движение обката *1*, *2*, выполняемое в горизонтальном направлении (вместе со столом станка *C*, рис. 14.9), будет видно без всякого искажения. Если зубчатую производящую поверхность, расположенную вертикально, мысленно сделать материальной, то движение обката будет восприниматься как качение изготовляемого колеса *K* по некоторой воображаемой прямозубой производящей рейке *ПР* (рис. 14.9, *в*)*. Зубья этой рейки образованы производящей поверхностью, а их сечение плоскостью *П*, перпендикулярной оси *OO* колеса *K*, есть ИПК.

Из сказанного следует, что заготовка и инструмент движутся на станке друг относительно друга так, как будто происходит зацепление профиля нарезаемых зубьев с ИПК. Это зацепление называют станочным. В основе своей оно сводится к качению изготовляемого колеса *K* по производящей рейке *ПР* (рис. 14.9, *в*).

На рис. 14.9, *в* показан ИПК, имеющий очертания зубчатой рейки. Эвольвентные кромки реечного ИПК прямолинейны (см. § 14.4). Поэтому режущий инструмент (червячная фреза или гребенка), образующий своим движением эвольвентный реечный ИПК, обладает очень ценным свойством: его можно изготовить сравнительно дешево и достаточно точно. Это свойство, присущее только эвольвентному режущему инструменту, является его главнейшим достоинством, благодаря которому именно эвольвентные зубчатые передачи получили широчайшее применение в машиностроении.

§ 14.7. РЕЕЧНОЕ СТАНОЧНОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ

На рис. 14.10 изображено станочное зацепление реечного ИПК с профилем зуба нарезаемого колеса. Реечный ИПК обладает геометрическими свойствами зубчатой рейки (см. § 14.4, рис. 14.5), но имеет более длинные зубья. Главной линией ИПК является делительная прямая *UU*, по которой шаг $p=\pi m$ делится точно пополам между толщиной зуба s_0 и шириной впадины e_0: $s_0=e_0=p/2$ (рис. 14.10). ИПК имеет прямолинейную, т. е. эвольвентную, часть *CD* и плавно сопряженную с ней неэвольвентную часть — скругление *DE*. Прямолинейная часть наклонена под углом α. Через граничную точку *D*, разделяющую обе части ИПК, проходит прямая граничных точек *QQ*. Скругление *DE* выполняется по дуге окружности с радиусом ρ_f. Участок *AC* может иметь произвольное очертание.

Согласно ГОСТу, $\alpha=20°$, $h_a^*=1{,}0$, $h_l^*=2h_a^*$, $c^*=0{,}25$, модуль m равен модулю нарезаемого колеса. Радиус скругления $\rho_f=c^*m/(1-\sin\alpha)=0{,}380m$. Таким образом, реечный ИПК характеризуется четырьмя стандартными параметрами: m, α, h_a^*, c^*. Физи-

*На рис. 14.9, *б*, *в* гребенка *Г* и производящая рейка *ПР* изображены в двух проекциях.

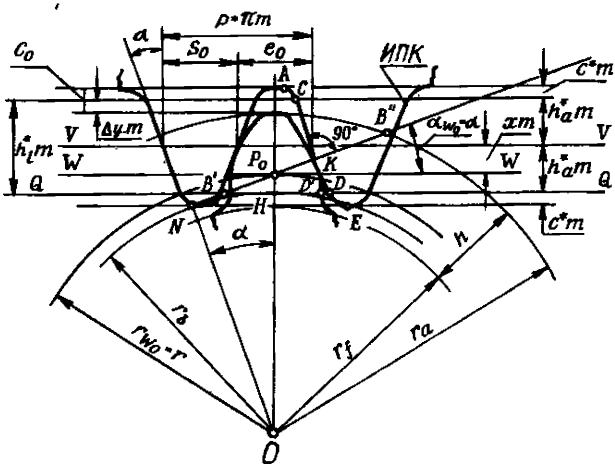


Рис. 14.10

ческий смысл ИПК состоит в том, что он является тем следом, который режущая кромка инструмента оставляет на материале изготовляемого колеса.

Реечное станочное зацепление, как и всякое зацепление, имеет начальные линии. Ими являются станочно-начальная прямая WW рейки и станочно-начальная окружность колеса (рис. 14.10). Напомним, что эти линии катятся друг по другу без скольжения (см. § 14.5). Можно показать, что в реечном станочном зацеплении радиус r_{w0} станочно-начальной окружности равен радиусу r делительной окружности: $r_{w0}=r$.

Линия реечного станочного зацепления начинается в точке N ее касания с основной окружностью колеса и через полюс P_0 уходит наискось вверх в бесконечность (рис. 14.10). Левее точки N линии зацепления быть не может (см. § 14.5). Угол реечного станочного зацепления α_{w0} равен углу α (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Отметим также, что профильный угол зуба колеса в точке, находящейся на делительной окружности, в процессе нарезания получается равным профильному углу α реечного ИПК, т. е. у прямозубого колеса равным стандартному значению 20°. Длина активной части линии станочного зацепления ограничена точками B' и B'', расположенными на ее пересечении с граничной прямой QQ и с окружностью вершин.

При нарезании профиль зуба колеса получает как эвольвентную, так и неэвольвентную части. Переход эвольвентной части в неэвольвентную находится в точке D', на окружности граничных точек колеса, радиус которой $r_l=OD'=OB'$ (рис. 14.10). Граничные точки D' зуба колеса и D зуба ИПК в процессе станочного зацепления входят в контакт друг с другом на линии NP_0 в точке B'.

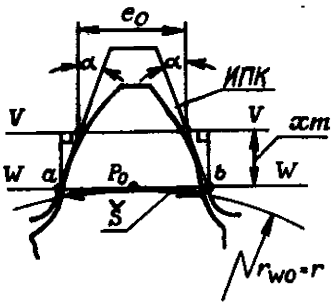


Рис. 14.11

На станке инструмент можно устанавливать по-разному относительно нарезаемого колеса. Поэтому в станочном зацеплении делительная прямая *UU* может быть расположена различным образом по отношению к делительной окружности: 1) она может касаться делительной окружности — нулевая установка инструмента; 2) быть отодвинутой от нее — положительная установка; 3) пересекать ее — отрицательная установка.

Расстояние между делительной прямой и делительной окружностью называют *смещением инструмента*. Его выражают в виде произведения модуля m на коэффициент смещения x и ему присваивают знак. При нулевой установке инструмента смещение $mx=0$, $x=0$; при положительной установке $mx>0$, $x>0$; при отрицательной установке смещением является стрелка сегмента, которую делительная прямая *UU* отсекает от делительной окружности, и в этом случае $mx<0$, $x<0$. На рис. 14.10 изображено реечное станочное зацепление при нарезании зубчатого колеса с положительным смещением.

Промежуток между окружностью вершин зубьев колеса и прямой впадин ИПК представляет собой станочный зазор c_0 (рис. 14.10). Величина его складывается из двух частей: c^*m и Δym, где Δy — коэффициент уравнительного смещения.

Составим расчетные формулы, вытекающие из чертежа станочного зацепления (рис. 14.10). Радиус окружности вершин

$$r_a=r+mx+h_a^*m-\Delta y\cdot m=m(z/2+h_a^*+x-\Delta y). \qquad (14.16)$$

Высота зуба

$$h=m(2h_a^*+c^*-\Delta y). \qquad (14.17)$$

Радиус окружности впадин

$$r_f=r_a-h=m(z/2-h_a^*-c^*+x). \qquad (14.18)$$

Коэффициент смещения x подставляется в уравнения (14.16), (14.18) с учетом его знака. Если $x=0$ (смещения инструмента нет) и если $\Delta y=0$, то при стандартных значениях $h_a^*=1{,}0$, $c^*=0{,}25$ получим $r_a=m(z/2+1)$, $h=2{,}25m$, $r_f=m(z/2-1{,}25)$.

Станочно-начальная окружность (она же делительная) перекатывается по станочно-начальной прямой *WW* без скольжения. Поэтому толщина зуба s по делительной окружности нарезаемого колеса точно равна ширине ab впадины ИПК по станочно-начальной прямой (рис. 14.11). Отрезок ab складывается из ширины впадины ИПК

по делительной прямой $e_0=\pi m/2$ и двух катетов, каждый из которых равен $xm\,\mathrm{tg}\alpha$. Поэтому

$$s=\pi m/2+2xm\,\mathrm{tg}\alpha. \qquad (14.19)$$

Если инструмент установлен без смещения ($xm=0$), то $s=\pi m/2$; значит, толщина зуба s по делительной окружности нарезаемого колеса равна ширине впадины e, так как $s+e=p=\pi m$. В этом случае получается колесо с равноделенным шагом $s=e$. Если $mx>0$, то $s>\pi m/2$ и, следовательно, $s>e$ (см. рис. 14.4). Если $mx<0$, то $s<\pi/2$ и поэтому $s<e$.

§ 14.8. ПОДРЕЗАНИЕ И ЗАОСТРЕНИЕ ЗУБА

Согласно свойствам эвольвентного зацепления (см. § 14.5), прямолинейная часть ИПК и эвольвентная часть профиля зуба нарезаемого колеса располагаются касательно друг к другу только на линии станочного зацепления, начинающейся в точке N (см. рис. 14.10). Левее этой точки прямолинейный участок ИПК не касается эвольвентного профиля зуба колеса, а пересекает его. Так как ИПК физически является тем следом, который режущая кромка инструмента оставляет на материале изготовляемого колеса, то указанное пересечение приводит к подрезанию зуба у его основания (рис. 14.12), а впадина между зубьями нарезаемого колеса получается принудительно более широкой. Подрезание уменьшает эвольвентную часть профиля зуба (что приводит к сокращению продолжительности зацепления каждой пары зубьев проектируемой передачи) и ослабляет зуб в его опасном сечении FF. Поэтому подрезание недопустимо.

Подрезания не происходит, когда граница B' активной части линии станочного зацепления располагается правее точки N (см. рис. 14.10), т. е. когда выполняется условие

$$P_0N\geqslant P_0B'. \qquad (14.20)$$

Используя условие (14.20), определим минимальное число зубьев колеса, при котором они не будут подрезаны. Из ΔP_0ON (см. рис. 14.10) следует $P_0N=r\sin\alpha=(mz/2)\sin\alpha$, а из $\Delta P_0HB'$ следует $P_0B'=P_0H/\sin\alpha_{w0}=(h_a^*-x)m/\sin\alpha$. Подставляя величины P_0N и P_0B' в условие (14.20) и решая относительно z, получим

$$z\geqslant 2(h_a^*-x)/\sin^2\alpha. \qquad (14.21)$$

Если $x=0$, то из выражения (14.21) найдем минимальное число зубьев колеса без смещения, которые не будут подрезаны реечным инструментом:

$$z_{\min}=2h_a^*/\sin^2\alpha. \qquad (14.22)$$

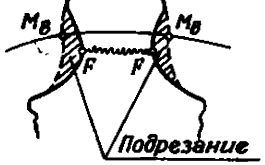


Рис. 14.12

При проектировании колес без смещения число зубьев z необходимо брать равным или больше z_{min}. В случае стандартного инструмента ($h_a^*=1{,}0$, $\alpha=20°$) $z_{min}\approx 17$.

В § 14.3 было указано, что для уменьшения габаритов зубчатых передач колеса следует проектировать с малым числом зубьев. Поэтому при $z<17$, чтобы не произошло подрезания, колеса должны быть изготовлены со смещением инструмента. Выясним, каково же то минимальное смещение, при котором не получается подрезания зубьев. Оно определяется также из условия (14.20), на основании которого составлено выражение (14.21). Представим его так: $(z/2)\sin^2\alpha\geqslant h_a^*-x$. Подставляя сюда значение $\sin^2\alpha$ из уравнения (14.22) и решая относительно x, запишем $x\geqslant h_a^*(z_{min}-z)/z_{min}$, а переходя к минимальному значению x_{min}, получим формулу

$$x_{min}=h_a^*(z_{min}-z)/z_{min}. \qquad (14.23)$$

При проектировании зубчатых колес коэффициент смещения x надо назначать равным или бо́льшим x_{min}. Уравнение (14.23) показывает, что малозубовые колеса, у которых $z<z_{min}$, можно нарезать только с положительным смещением инструмента, соблюдая соотношение $x\geqslant x_{min}$.

Здесь следует отметить, что подрезания можно избежать, применив способ изготовления зубчатых колес, отличный от способа обкатки. Однако и в этом случае условия $z\geqslant z_{min}$ (для колес без смещения) и $x\geqslant x_{min}$ (для всех колес) нужно обязательно соблюдать. При несоблюдении этих условий впадины между зубьями меньшего

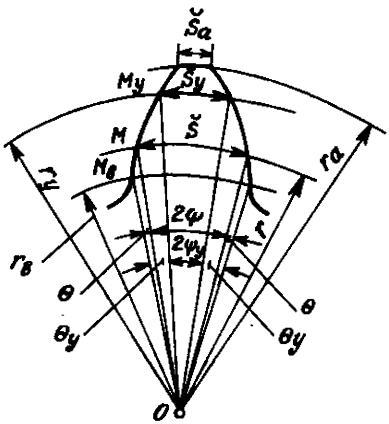


Рис. 14.13

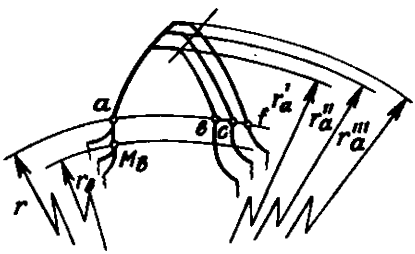


Рис. 14.14

колеса могут получиться столь тесными, что зубьям большего колеса изготовленной передачи будет недостаточно места для их движения и передача заклинится.

Пусть дано зубчатое колесо (рис. 14.13), параметры которого составляют z, x, m, α. Требуется определить толщину зуба s_y по окружности, радиус которой r_y имеет произвольную величину, но не меньшую r_b. Согласно рис. 14.13, запишем $s_y = r_y\, 2\psi_y$. Центральный угол $2\psi_y$ составит $2\psi_y = 2\psi + 2\Theta - 2\Theta_y$, где $2\psi = s/r$, а $\Theta = \mathrm{inv}\alpha$, $\Theta_y = \mathrm{inv}\alpha_y$ [см. уравнение (14.4)]. Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим

$$s_y = r_y(s/r + 2\mathrm{inv}\alpha - 2\mathrm{inv}\alpha_y). \qquad (14.24)$$

Радиус r_y возьмем из уравнения (14.9), дугу s — из уравнения (14.19), а радиус r — из уравнения (14.7). Тогда искомая формула приобретает окончательный развернутый вид:

$$s_y = m\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_y}\left[\frac{\pi}{2} + 2x\,\mathrm{tg}\alpha - z(\mathrm{inv}\alpha_y - \mathrm{inv}\alpha)\right], \qquad (14.25)$$

где, согласно уравнению (14.3), $\alpha_y = \mathrm{arccos}(r_b/r_y) = \mathrm{arccos}[mz\cdot\cos\alpha/(2r_y)]$. Значения $\mathrm{inv}\alpha_y$ и $\mathrm{inv}\alpha$ надо определять по углам α_y и α с помощью таблиц эвольвентной функции [12].

Толщина зуба s_a на его вершине составит

$$s_a = m\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_a}\left[\frac{\pi}{2} + 2x\,\mathrm{tg}\alpha - z(\mathrm{inv}\alpha_a - \mathrm{inv}\alpha)\right]. \qquad (14.26)$$

Здесь очень важно обратить внимание на то, что при увеличении коэффициента смещения x толщина зуба s_a будет уменьшаться вследствие быстрого, прогрессирующего роста $\mathrm{inv}\alpha_a$. При некотором критическом значении $x_{крит}$ наступает заострение зуба: $s_a = 0$. Опасность заострения особенно велика у колес с малым числом зубьев (менее 17). Для предотвращения излома вершины заостренного зуба коэффициент смещения x ограничивают верхним значением x_{max} так, чтобы толщина зуба s_a, подсчитанная по уравнению (14.26), была не менее $0{,}2m$.

На рис. 14.14 сравниваются зубья трех колес, имеющих одинаковое число z и нарезанных одним и тем же инструментом, но с различными смещениями: $x' < x'' < x'''$. Колеса имеют одинаковые радиусы делительных r и основных r_b окружностей; следовательно,

профили зубьев всех трех колес очерчены по одной и той же эвольвенте. Но толщины зубьев s' (дуга ab), s'' (дуга ac), s''' (дуга af) и радиусы окружностей вершин r'_a, r''_a, r'''_a у колес будут разные.

Как видно из рис. 14.14, по мере увеличения x толщина зуба у основания увеличивается, а у вершины уменьшается, т. е. коэффициент смещения x существенно влияет на форму зуба. Таким образом, из зубьев трех рассматриваемых колес зуб третьего колеса будет самым прочным. Кроме того, для эвольвентной части профиля зуба третьего колеса используется участок эвольвенты, наиболее удаленный от ее основания M_b и обладающий поэтому большими радиусами кривизны (см. третье свойство эвольвенты, § 14.2), что способствует уменьшению контактных напряжений и износа боковой поверхности зуба. Следовательно, назначая при проектировании тот или иной коэффициент смещения, можно влиять на форму зубьев колес и на качество зубчатой передачи, наделяя ее желательными свойствами. Однако следует заметить, что указанная зависимость формы зубьев и свойств зубчатой передачи от коэффициента смещения x резко ощутима при малых числах зубьев и ослабляется по мере увеличения z.

§ 14.9. ЭВОЛЬВЕНТНАЯ ЗУБЧАТАЯ ПЕРЕДАЧА

На рис. 14.15 изображена зубчатая передача внешнего зацепления, составленная из двух эвольвентных колес*. Окружности вершин их зубьев пересекают линию зацепления N_1N_2 в точках B' и B''. В точке B' зубья шестерни и колеса первый раз касаются друг друга — это точка начала зацепления. Далее, в процессе вращения колес место контакта зубьев движется вдоль линии зацепления к точке B'', являющейся точкой конца зацепления, поскольку здесь зубья шестерни и колеса касаются друг друга последний раз. Отрезок $B'B''$, на котором взаимодействуют сопряженные профили зубьев, называют активной частью линии зацепления.

Так как правильное зацепление может иметь место только в пределах отрезка N_1N_2 (см. § 14.5), то зубчатую передачу надо проектировать так, чтобы участок $B'B''$ обязательно укладывался в этих пределах. В противном случае неправильное взаимное расположение зубьев вне отрезка N_1N_2 вызовет нарушение передаточного отношения, повышенный износ и усталостные напряжения в зубьях, а в некоторых случаях их поломку или заклинивание передачи.

Пусть шестерня *1* является ведущей и вращается по часовой стрелке (рис. 14.15). Тогда в работе будет находиться «нижняя» сторона зуба *I* шестерни и «верхняя» сторона зуба *II* колеса. Именно

*В технической литературе меньшее колесо принято называть шестерней, а большее — просто колесом.

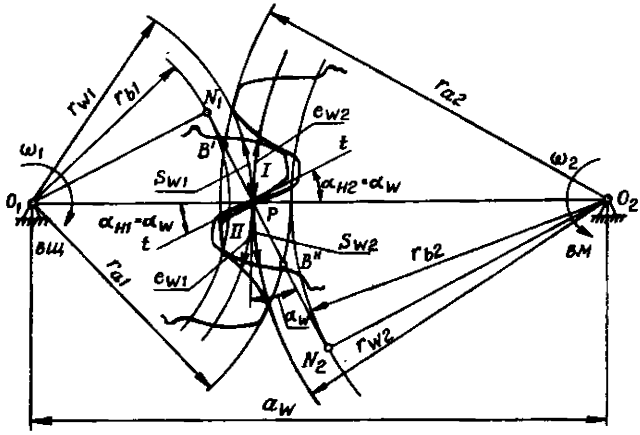


Рис. 14.15

этими сторонами зубья прижаты друг к другу, именно эти стороны будут изнашиваться в процессе эксплуатации; другая сторона каждого из зубьев *I* и *II* будет разгружена. Линия зацепления N_1N_2 нормальна к рабочим сторонам зубьев. Поэтому если не учитывать трение между зубьями, то сила, приложенная от шестерни к колесу, и сила, взаимообратная ей, действуют вдоль линии зацепления.

Так как зубчатые колеса имеют толщину, то, строго говоря, на рис. 14.15 изображена не зубчатая передача, а ее проекция на плоскость, перпендикулярную осям вращения. Отсюда следует, что начальные окружности, изображенные на чертеже, являются проекциями начальных цилиндров, оси которых совпадают с осями вращения колес. Напомним, что начальные цилиндры* (или иначе — аксоидные цилиндры) в процессе зацепления катятся друг по другу без скольжения (см. § 13.1). Заметим, что движение одного колеса относительно другого в цилиндрической передаче является плоским, а процесс зацепления сопряженных профилей зубьев происходит в плоскости, перпендикулярной осям вращения.

Перейдем к составлению уравнений, необходимых для проектирования эвольвентной зубчатой передачи. Эти уравнения составляются из условия, что зубья одного колеса входят во впадины другого колеса номинально плотно, без бокового зазора (рис. 14.15). Учтя это, а также то, что начальные окружности катятся друг по другу без скольжения (см. § 14.5), запишем: $s_{w1}=e_{w2}$ и $e_{w1}=s_{w2}$, где s_{w1} и s_{w2} — толщина зубьев; e_{w1} и e_{w2} — ширина впадин по начальным окружностям колес зубчатой передачи (рис. 14.15).

*Отметим, что именно поэтому передачу на параллельных осях и называют цилиндрической.

Так как начальные окружности перекатываются без скольжения, то шаги p_{w1} и p_{w2} равны друг другу: $p_{w1}=p_{w2}=p_w$. Шаг $p_w=s_{w1}+e_{w1}$, или, поскольку $e_{w1}=s_{w2}$,

$$p_w=s_{w1}+s_{w2}. \tag{14.27}$$

Запишем развернутые выражения величин p_w, s_{w1}, s_{w2} и, применив к начальным окружностям уравнения (14.12), (14.25) и учтя, конечно, уравнение (14.15): $p_w=\pi m\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}$,

$$s_{w1}=m\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}\left[\frac{\pi}{2}+2\,\mathrm{tg}\alpha\cdot x_1-z_1(\mathrm{inv}\alpha_w-\mathrm{inv}\alpha)\right],$$

$$s_{w2}=m\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}\left[\frac{\pi}{2}+2\,\mathrm{tg}\alpha\cdot x_2-z_2(\mathrm{inv}\alpha_w-\mathrm{inv}\alpha)\right].$$

Подставив эти выражения в уравнение (14.27) и выполнив несложные преобразования, получим

$$\mathrm{inv}\alpha_w=\mathrm{inv}\alpha+\frac{2(x_1+x_2)\mathrm{tg}\alpha}{z_1+z_2}. \tag{14.28}$$

После подсчета $\mathrm{inv}\alpha_w$ по уравнению (14.28) сам угол α_w следует определить по таблицам эвольвентной функции [12].

Так как в общем случае $x_1+x_2\neq0$, то, как следует из уравнения (14.28), $\mathrm{inv}\alpha_w\neq\mathrm{inv}\alpha$, т. е. $\alpha_w\neq\alpha$. Значит, в общем случае угол зацепления $\alpha_w\neq20°$.

Межосевое расстояние зубчатой передачи (рис. 14.15)

$$a_w=r_{w1}+r_{w2}. \tag{14.29}$$

Применив уравнение (14.9) к начальным окружностям и учтя уравнение (14.15), запишем

$$r_{w1}=\frac{mz_1}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w},\quad r_{w2}=\frac{mz_2}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}. \tag{14.30}$$

После подстановки этих выражений в (14.29) получим

$$a_w=\frac{m(z_1+z_2)}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}. \tag{14.31}$$

Использовав уравнение (14.7), выразим межосевое расстояние

a_w через радиусы r_1 и r_2 делительных окружностей: $a_w=(r_1+r_2)\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}$. Так как в общем случае $\alpha_w\neq\alpha$, то $a_w\neq r_1+r_2$. Поэтому представим межосевое расстояние так (рис. 14.16):

$$a_w=r_1+r_2+ym. \quad (14.32)$$

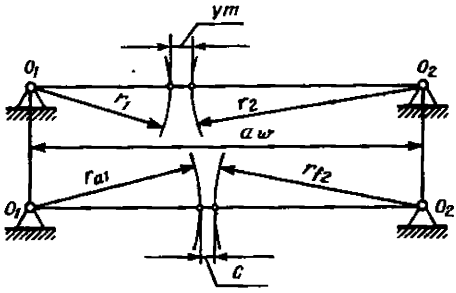


Рис. 14.16

Здесь y — коэффициент воспринимаемого смещения.

Решая совместно уравнения (14.31) и (14.32) относительно y, получим

$$y=\frac{z_1+z_2}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}-1\right). \quad (14.33)$$

Если $y=0$, то делительные окружности колес касаются друг друга. Такая передача называется нулевой и получается, когда $x_1=0$, $x_2=0$ (передача без смещения) или когда $x_1=-x_2$ (равносмещенная передача). Равносмещенная передача возможна в том случае, если числа зубьев z_1 и z_2 её колес подчиняются условию $z_1+z_2\geqslant 2z_{\min}$ (см. § 14.8). При $y>0$ (положительная передача) делительные окружности колес отодвинуты друг от друга на расстояние ym (рис. 14.16). Если же $y<0$ (отрицательная передача), то делительные окружности пересекают друг друга.

Подчеркнем еще раз: если угол зацепления α_w и межосевое расстояние a_w подсчитываются по уравнениям (14.28), (14.32) и (14.33), то передача номинально не будет иметь бокового зазора между зубьями.

Составим расчетную формулу для коэффициента уравнительного смещения Δy, упомянутого ранее в § 14.7. При определении номинальных размеров передачи должны быть выполнены два условия: 1) зубья колес должны зацепляться друг с другом без бокового зазора; 2) между окружностями вершин и впадин зубчатых колес должен быть радиальный зазор $c=c^*m$ (рис. 14.16), где, согласно ГОСТу, $c^*=0{,}25$. Выполнение первого условия обеспечивается тем, что межосевое расстояние a_w выражается через воспринимаемое смещение ym по уравнению (14.32). Второе условие требует, чтобы

$$a_w=r_{a1}+c+r_{f2} \quad (14.34)$$

(или $a_w = r_{a2} + c + r_{f1}$). Решая совместно уравнения (14.32) и (14.34), получим $r_1 + ym + r_2 = r_{a1} + c + r_{f2}$. Радиусы в последнем равенстве подставим из уравнений (14.7), (14.16), (14.18), а $c = c^* m$. После подстановки и простых преобразований получим

$$\Delta y = x_1 + x_2 - y. \tag{14.35}$$

Итак, уравнительное смещение $\Delta y \cdot m$ (см. рис. 14.10) вводится для получения зубчатой передачи номинально без бокового зазора, но со стандартной величиной радиального зазора. Отметим, что в передаче, колеса которой нарезаны реечным инструментом, всегда $\Delta y \geqslant 0$.

Если зубчатая передача составлена из колес без смещений ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), то, согласно уравнениям (14.28), (14.33), (14.35), (14.32), такая передача будет характеризоваться следующими параметрами: $\alpha_w = \alpha = 20°$, $y = 0$, $\Delta y = 0$, $a_w = r_1 + r_2 = m(z_1 + z_2)/2$, т. е. межосевое расстояние равно сумме радиусов делительных окружностей. В передаче без смещений, согласно (14.30), $r_{w1} = mz_1/2 = r_1$, $r_{w2} = mz_2/2 = r_2$, т. е. начальные окружности колес совпадают с делительными окружностями. Точно такие же параметры будет иметь и равносмещенная передача ($x_2 = -x_1$).

§ 14.10. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

Свойства спроектированной зубчатой передачи характеризуются ее качественными показателями, главнейшим из которых является коэффициент перекрытия.

Коэффициент перекрытия характеризует такие важнейшие свойства процесса зацепления, как его непрерывность и продолжительность. Рассмотрим по-прежнему зацепление прямых зубьев. На рис. 14.17 изображена линия зацепления N_1N_2, на ней B' — точка начала зацепления, B'' — точка конца зацепления (см. § 14.9). Штрихами (через точку B') показано то место, где эвольвентные профили зубьев шестерни *1* начинают зацепление с зубьями колеса *2*. Зубья a/b изображены в момент конца их зацепления. Зубья c/d — соседние зубьям a/b. Поэтому угол τ_1 — угловой шаг шестерни *1*. На рис. 14.17 изображен также угол $\varphi_{\alpha 1}$ поворота шестерни *1* за время полного зацепления одной пары зубьев, называемый *углом торцевого перекрытия*.

Рассмотрим три по-разному спроектированные передачи. Первая передача спроектирована так, что $\varphi_{\alpha 1} > \tau_1$, т. е. $\varphi_{\alpha 1}/\tau_1 > 1$ (рис. 14.17). Это значит, что к тому моменту времени, когда зубья a/b выходят из зацепления, зубья c/d уже прошли начало зацепления (точку B'). Следовательно, некоторое время две пары зубьев, a/b и c/d, работали сообща, т. е. имело место двухпарное зацепление, или, как говорят иначе, имело место перекрытие работы пары зубьев a/b работой соседней пары зубьев c/d.

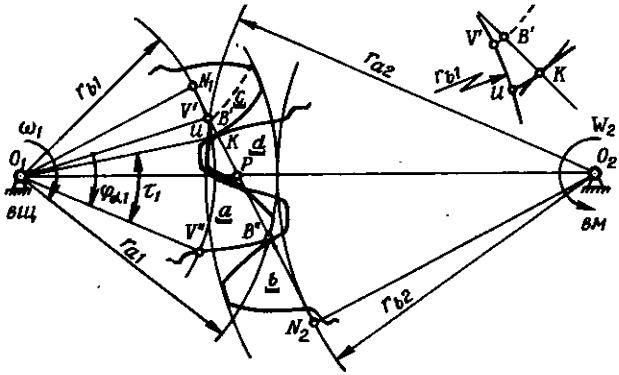


Рис. 14.17

Вторая передача (ее изображение отсутствует и его надо представить мысленно) спроектирована так, что $\varphi_{\alpha 1}=\tau_1$, т. е. $\varphi_{\alpha 1}/\tau_1=1$. Это значит, что в тот момент времени, когда зубья a/b выходят из зацепления, зубья c/d только входят в него: совместной работы зубьев нет, т. е. нет перекрытия, а имеет место однопарное зацепление, но перерывов процесса зацепления в такой передаче теоретически не будет.

Третья передача (ее изображение также отсутствует) спроектирована так, что $\varphi_{\alpha 1}<\tau_1$, т. е. $\varphi_{\alpha 1}/\tau_1<1$. Это значит, что в тот момент времени, когда зубья a/b выходят из зацепления, зубья c/d еще не успели соприкоснуться, так что неизбежно будут перерывы в процессе зацепления.

Таким образом, отношение $\varepsilon_\alpha=\varphi_{\alpha 1}/\tau_1$, называемое коэффициентом перекрытия прямозубой передачи, указывает на непрерывность процесса зацепления (если $\varepsilon_\alpha \geqslant 1$), характеризует продолжительность двухпарного зацепления (если $\varepsilon_\alpha>1$) и предупреждает о перерывах в зацеплении (если $\varepsilon_\alpha<1$). Так как перерывы в процессе зацепления абсолютно неприемлемы, то минимально допустимым значением ε_α является 1,05, обеспечивающее непрерывность зацепления с 5%-ным запасом.

Составим расчетную формулу для определения $\varepsilon_\alpha=\varphi_{\alpha 1}/\tau_1$. Запишем следующее соотношение, вытекающее из рис. 14.17: $\varepsilon_\alpha=\dfrac{\varphi_{\alpha 1}}{\tau_1}=\dfrac{\overset{\smile}{v'v''}}{\overset{\smile}{uv''}}$. Согласно уравнению (14.5), $\overset{\smile}{v'v''}=\overset{\smile}{B'B''}$; дуга $uv''=p_{b_1}$ есть шаг по основной окружности шестерни, равный шагу по основной окружности колеса: $p_{b_1}=p_{b_2}=p_b$. Поэтому

$$\varepsilon_\alpha=\frac{B'B''}{p_b}. \qquad (14.36)$$

Отметим, что $\varphi_{\alpha 1}/\tau_1 = \varphi_{\alpha 2}/\tau_2$, так что уравнение (14.36) можно было бы также получить, исходя и из формулы $\varepsilon_\alpha = \varphi_{\alpha 2}/\tau_2$.

Далее запишем $B'B'' = PB'' + PB'$ (рис. 14.18). Первое слагаемое выразим так: $PB'' = N_1B'' - N_1P = r_{b1}\operatorname{tg}\alpha_{a1} - r_{b1}\operatorname{tg}\alpha_w = \frac{mz_1}{2} \times \cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha_{a1} - \operatorname{tg}\alpha_w)$. Аналогично получим $PB' = \frac{mz_2}{2}\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha_{a2} - \operatorname{tg}\alpha_w)$. В этих выражениях α_{a1} и α_{a2} — профильные углы на вершинах эвольвентных зубьев шестерни *1* и колеса *2*. Как следует из уравнения (14.11), шаг p_b по основным окружностям шестерни *1* и колеса *2* равен $p_b = \pi m\cos\alpha$.

Подставим составленные выражения в исходное уравнение (14.36) и после простых сокращений получим

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1}{2\pi}(\operatorname{tg}\alpha_{a1} - \operatorname{tg}\alpha_w) + \frac{z_2}{2\pi}(\operatorname{tg}\alpha_{a2} - \operatorname{tg}\alpha_w). \qquad (14.37)$$

Укажем главные свойства коэффициента перекрытия ε_α. Он увеличивается при увеличении числа зубьев z_1 и z_2, но не беспредельно, поскольку одновременно уменьшаются разности, стоящие в скобках уравнения (14.37). Если зубчатые колеса нарезаны стандартным инструментом ($\alpha = 20°$, $h_a^* = 1$), то теоретически максимально возможное для прямозубой передачи значение $\varepsilon_{\alpha\max} = 1{,}98 \approx 2{,}0$.

Коэффициент перекрытия ε_α уменьшается при увеличении коэффициентов смещения x_1 и x_2. Поэтому при проектировании прямозубой передачи коэффициенты смещения надо ограничивать значениями $x_{\max 1}$ и $x_{\max 2}$ так, чтобы ε_α не получился меньше 1,05.

Кратко рассмотрим еще два качественных показателя.

Коэффициент удельного давления учитывает влияние геометрии зубьев (радиусов кривизны их профилей) на величину контактных напряжений, возникающих в местах соприкосновения зубьев. Чем больше радиусы кривизны, тем меньше контактные напряжения. Коэффициент удельного давления $\vartheta = \frac{m}{\rho}$, где ρ — приведенный радиус кривизны эвольвентных профилей в точке K контакта, определяемый так: $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$. Используя третье свойство эвольвенты (см. § 14.2), запишем $\frac{1}{\rho} = \frac{N_1N_2}{N_1K \cdot N_2K}$ (см., например, рис. 14.17).

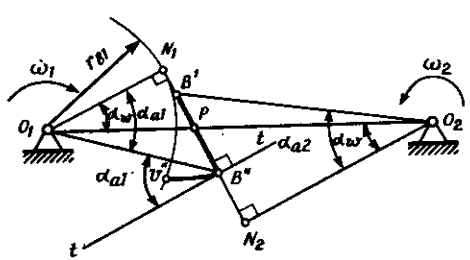


Рис. 14.18

Коэффициент ϑ принято подсчитывать для того момента зацепления, когда зубья соприкасаются в полюсе P. Тогда

$$\vartheta_P = \frac{mN_1N_2}{N_1P \cdot N_2P} = \frac{2(z_1+z_2)}{z_1 z_2 \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha_w}. \qquad (14.38)$$

Коэффициент ϑ_P уменьшается при увеличении коэффициентов смещения x_1 и x_2. Поэтому конструктор может снижать контактные напряжения, назначая коэффициенты смещения x_1 и x_2 так, чтобы коэффициент удельного давления ϑ_P имел возможно меньшее значение.

Коэффициенты скольжения учитывают влияние геометрических и кинематических факторов на величину проскальзывания профилей в процессе их зацепления (см. § 13.2) и выражаются формулами (13.10). Чем интенсивнее проскальзывание, тем значительнее износ зубьев. Коэффициент скольжения $\lambda_{1\text{расч}}$ шестерни *1* принято подсчитывать для того момента зацепления, когда зубья соприкасаются в точке B' линии зацепления, т. е. когда в зацеплении находится ножка зуба шестерни; коэффициент скольжения $\lambda_{2\text{расч}}$ колеса *2* — когда зубья соприкасаются в точке B'' (см. рис. 14.17), т. е. когда в зацеплении находится ножка зуба колеса. Тогда расчетные формулы применительно к внешнему эвольвентному зацеплению примут такой вид:

$$\lambda_{1\text{расч}} = (1+z_1/z_2)\frac{B'P}{N_1P - B'P} = (1+z_1/z_2)\frac{z_2(\operatorname{tg}\alpha_{a2} - \operatorname{tg}\alpha_w)}{(z_1+z_2)\operatorname{tg}\alpha_w - z_2\operatorname{tg}\alpha_{a2}}, \qquad (14.39)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = (1+z_1/z_2)\frac{B''P}{N_2P - B''P} = (1+z_1/z_2)\frac{z_1(\operatorname{tg}\alpha_{a1} - \operatorname{tg}\alpha_w)}{(z_1+z_2)\operatorname{tg}\alpha_w - z_1\operatorname{tg}\alpha_{a1}}. \qquad (14.40)$$

Коэффициенты скольжения $\lambda_{1\text{расч}}$ и $\lambda_{2\text{расч}}$ зависят от коэффициентов смещения x_1 и x_2. Воздействуя на x_1 и x_2, конструктор получает значения коэффициентов $\lambda_{1\text{расч}}$ и $\lambda_{2\text{расч}}$, отвечающие условиям эксплуатации.

Отметим в заключение, что большой вклад в теорию и практику проектирования зубчатых передач внес профессор Л. Н. Решетов.

§ 14.11. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПЕРЕДАЧА, СОСТАВЛЕННАЯ ИЗ КОЛЕС С КОСЫМИ ЗУБЬЯМИ. ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ СМЕЩЕНИЯ

Переходя к изучению косозубых передач, отметим прежде всего, что косые зубья располагаются на цилиндрах обоих колес по винтовым линиям (рис. 14.19). Если цилиндры развернуть на плоскость, то косые зубья (в развертке) окажутся расположенными по наклон-

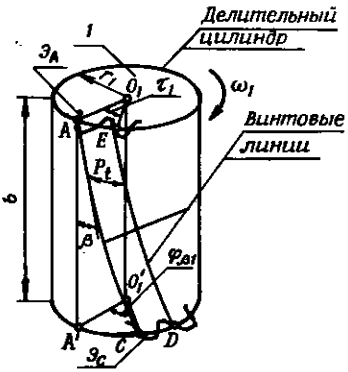


Рис. 14.19

ным параллельным прямым. Так же будут расположены и косые зубья рейки.

Косозубые колеса, как и прямозубые, изготовляются способом обкатки (см. § 14.6), в основу которого положен процесс станочного зацепления. Для нарезания применяется тот же стандартный инструмент, но устанавливается он на станке наклонно, под углом β (рис. 14.20). Поэтому производящая зубчатая поверхность, которую в своем технологическом движении *3* описывают режущие кромки инструмента — гребенки *Г*, тоже будет наклонной. На рис. 14.20 производящая поверхность показана схематично в виде наклонно проецирующих линий. А так как эта поверхность (если ее мысленно сделать материальной) образует зубья воображаемой производящей рейки *ПР*, то, следовательно, зубья рейки получатся косыми. Наглядно процесс обкатки можно представить себе как качение изготовляемого колеса по производящей рейке *ПР*, имеющей косые зубья, наклоненные под углом β.

Такой же наклон получат зубья изготовляемого колеса на его станочно-начальном цилиндре. А так как в реечном станочном зацеплении делительный цилиндр совпадает со станочно-начальным (см. § 14.7), то именно на делительном цилиндре зубья получатся расположенными под углом β (см. рис. 14.19), на который наклонен инструмент на станке.

Из сравнения рис. 14.9 и 14.20 видно, что движения обката *1* и *2* при изготовлении как прямозубых, так и косозубых колес одинаковы. А отсюда следует весьма важный вывод: все принципиальные положения, касающиеся станочного зацепления прямозубого колеса с прямозубой производящей рейкой (см. § 14.6 — 14.8), справедливы также для станочного зацепления косозубого колеса с косозубой производящей рейкой.

Вместе с тем процесс изготовления косозубых колес имеет, конечно, и свои особенности, вытекающие из того, что инструмент установлен на станке наклонно. Определим, каким будет в этих новых условиях исходный производящий контур (ИПК), вступающий в станочное зацепление с профилем нарезаемых зубьев. Для этого (см. § 14.6) рассечем наклонную зубчатую производящую поверхность плоскостью *П*, перпендикулярной оси *OO* колеса; в сечении получим искомый ИПК.

Нетрудно заметить, что благодаря наклону инструмента параметры полученного ИПК будут отличаться от параметров стандартного ИПК, который образуется при пересечении производящей

поверхности плоскостью $П$, ей перпендикулярной (см. рис. 14.9, *в*). Например, шаг p_t нового ИПК составит $p_t = p/\cos\beta$ (рис. 14.20), где p — шаг стандартного ИПК. Поэтому $m_t = m/\cos\beta$, где m — стандартный модуль инструмента. Чтобы в дальнейшем отличать стандартные параметры m, α, h_a^*, c^* от расчетных, будем присваивать последним значок t: m_t, α_t, h_{at}^*, c_t^*. Следовательно, особенность станочного зацепления при изготовлении косозубых колес состоит в том, что благодаря наклонной установке инструмента ИПК не является больше стандартным, а становится расчетным.

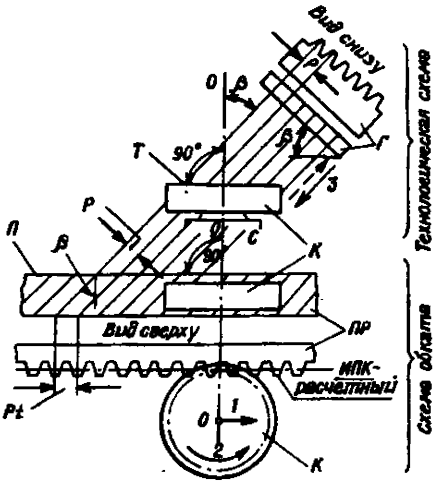


Рис. 14.20

Здесь надо сделать принципиально важное добавление. Расчетный реечный ИПК (рис. 14.20), как и стандартный (см. рис. 14.9), имеет прямолинейные, т. е. эвольвентные, кромки. Поэтому в торцевой плоскости T косозубого колеса (рис. 14.20), как и в любой, ей параллельной, зубья при изготовлении получают эвольвентный профиль. Но именно в этих плоскостях, перпендикулярных осям вращения колес проектируемой передачи, и происходит сам процесс зацепления профилей ее зубьев. Значит, косозубая цилиндрическая передача является эвольвентной передачей. Отсюда следует еще один важный вывод: все теоретические положения и зависимости, полученные выше для прямозубой эвольвентной передачи (см. § 14.3, 14.4, 14.5, 14.9), полностью справедливы и для косозубой, но сформированной не на базе стандартного, а на базе расчетного ИПК. Поэтому математическая структура всех ранее составленных формул сохранится, но написание их будет иметь ту особенность, что всюду вместо стандартных параметров m, α, h_a^*, c^* в них надо подставлять рачетные параметры m_t, α_t, h_{at}^*, c_t^*, зависящие от угла β.

Например:

прямозубая передача:	*косозубая передача:*
$r_b = \dfrac{mz}{2}\cos\alpha,$	$r_b = \dfrac{m_t z}{2}\cos\alpha_t,$
$h = m(2h_a^* + c^* - \Delta y),$	$h = m_t(2h_{at}^* + c_t^* - \Delta y)$

и т. п.

Укажем (без вывода) формулы перехода от стандартных параметров к расчетным:

$$m_t = m/\cos\beta,\ \operatorname{tg}\alpha_t = \operatorname{tg}\alpha/\cos\beta,\ h_{at}^* = h_a^*\cos\beta,\ c_t^* = c^*\cos\beta. \quad (14.41)$$

Косое направление зубьев наделяет цилиндрическую передачу особыми свойствами. Рассмотрим их. Благодаря косине зуба он выходит из зацепления не сразу весь целиком, а постепенно. После того как профиль $Э_A$ выйдет из зацепления, шестерня *1* повернется еще на угол $\varphi_{\beta 1}$ до момента выхода из зацепления профиля $Э_C$ (см. рис. 14.19). Продолжительность зацепления одной пары зубьев в косозубой передаче бо́льшая, чем в прямозубой, в которой зуб выходит из зацепления одновременно весь по всей своей длине. Поэтому угол поворота $\varphi_{\gamma 1}$ шестерни *1* за время полного зацепления одной пары косых зубьев составит уже не $\varphi_{\alpha 1}$, как в зацеплении прямых зубьев (см. § 14.10), а

$$\varphi_{\gamma 1} = \varphi_{\alpha 1} + \varphi_{\beta 1}.$$

Коэффициентом перекрытия косозубой передачи называют отношение $\varepsilon_\gamma = \varphi_{\gamma 1}/\tau_1 = \varphi_{\gamma 2}/\tau_2$. Раскроем его:

$$\varepsilon_\gamma = \varphi_{\gamma 1}/\tau_1 = \varphi_{\alpha 1}/\tau_1 + \varphi_{\beta 1}/\tau_1 = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta.$$

Слагаемое ε_α, называемое коэффициентом торцевого перекрытия, подсчитаем по уравнению (14.37). Слагаемое ε_β — коэффициент осевого перекрытия — определим так: $\varepsilon_\beta = \dfrac{\varphi_{\beta 1}}{\tau_1} = \dfrac{\overset{\frown}{A'C}}{\overset{\frown}{AE}} = \dfrac{b\operatorname{tg}\beta}{p_t}$ (рис. 14.19)*. Подставив $p_t = \pi m_t$, получим

$$\varepsilon_\beta = \frac{b\operatorname{tg}\beta}{\pi m_t}. \quad (14.42)$$

Теперь окончательно запишем формулу для определения коэффициента перекрытия косозубой передачи:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{z_1}{2\pi}(\operatorname{tg}\alpha_{a1} - \operatorname{tg}\alpha_w) + \frac{z_2}{2\pi}(\operatorname{tg}\alpha_{a2} - \operatorname{tg}\alpha_w) + \frac{b\operatorname{tg}\beta}{\pi m_t}. \quad (14.43)$$

В прямозубой передаче (где $\beta = 0$) коэффициент осевого перекрытия $\varepsilon_\beta = 0$, так что $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha$. Следовательно, коэффициент перекрытия косозубой передачи (где $\beta \neq 0$) больше, а иногда и значительно больше коэффициента перекрытия прямозубой, что является достоинством косозубой передачи. Проф. Л. Н. Решетов рекомендует угол β назначать так, чтобы получить для ε_β целое значение: 1, реже 2, еще реже 3; это уменьшит износ зубьев.

---

*Винтовые линии *AC* и *ED* проведены на делительном цилиндре.

Для косозубых колес уравнение (14.22) приобретает вид $z_{\min}^{\text{кос}} = \frac{2h_{at}^*}{\sin^2\alpha_t}$. Так как, согласно формулам (14.41), $h_{at}^* < h_a^*$, $\alpha_t > \alpha$, то $z_{\min}^{\text{кос}} < z_{\min}$, т. е. косозубые колеса менее подвержены подрезанию, чем прямозубые.

Л. Н. Решетов рассчитал и изготовил косозубую передачу, шестерня которой имеет всего-навсего один (!) зуб, не пораженный подрезом. Этим наглядно и убедительно была продемонстрирована возможность создания малогабаритных зубчатых передач (в том числе и прямозубых) путем снижения чисел зубьев менее $z_{\min}$, не опасаясь их подрезания.

В данной главе была кратко изложена геометрическая теория цилиндрической эвольвентной зубчатой передачи, которую разработал проф. В. А. Гавриленко [13] — основатель научной школы по зубчатым передачам.

Проектируя зубчатую передачу, косозубую или прямозубую, конструктор должен назначить коэффициенты смещения x_1 и x_2. При этом должны быть выполнены три обязательных условия: 1) отсутствие подрезания; 2) отсутствие заострения; 3) непрерывность зацепления. Первое условие применительно к шестерне выполняется, если ее коэффициент смещения x_1 превосходит свой минимальный уровень $x_{\min 1}$ (см. § 14.8). Второе и третье условия ограничивают коэффициент смещения x_1 пределом $x'_{\max 1}$, когда $s_{a1} = 0{,}2m$ (см. § 14.8), и $x''_{\max 1}$, когда $\varepsilon_\gamma = 1{,}05$ (см. § 14.10 и 14.11). Эти пределы неодинаковы, и для расчета зубчатой передачи важен тот $x_{\max 1}$, который имеет меньшее значение. Таким образом, коэффициент смещения x_1 шестерни надо назначать так, чтобы соблюдалось соотношение $x_{\min 1} \leqslant x_1 \leqslant x_{\max 1}$. То же следует сказать и о коэффициенте смещения x_2 колеса: $x_{\min 2} \leqslant x_2 \leqslant x_{\max 2}$. Внутри указанных пределов коэффициенты смещения x_1 и x_2 целесообразно назначать, руководствуясь рекомендациями ГОСТа или используя блокирующие контуры (см. приложение к ГОСТ 16532 — 81), а также с помощью диаграммы качественных показателей [12].

ГЛАВА 15
ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Во многих машинах осуществление требуемых движений механизмов связано с необходимостью передать вращение с одного вала на другой при условии, что оси этих валов либо пересекаются, либо скрещиваются. В таких условиях применяют соответственно или коническую, или гиперболоидную зубчатую передачу. Аксоидами колес первой являются конусы, аксоидами второй — однополостные гиперболоиды (см. § 13.1). Обе передачи относятся к категории пространственных механизмов. Изложению основ их синтеза (геометрического расчета) по заданному передаточному отношению посвящена данная глава.

Если угол между осями равен 90°, то коническую зубчатую передачу называют *ортогональной*. В общем случае в неортогональной передаче угол, дополненный до 180° к углу между векторами угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ звеньев *1* и *2*, называют *межосевым углом* Σ (рис. 15.1, *а*).

Связь между векторами $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ угловых скоростей *1* и *2* определяется соотношением

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}. \tag{15.1}$$

Положение вектора $\bar{\omega}_{21}$ относительно векторов $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ определяют углами δ_{w1} и δ_{w2}, сумма которых равна межосевому углу Σ:

$$\delta_{w1} + \delta_{w2} = \Sigma. \tag{15.2}$$

Если через точку *O* пересечения осей O_1O и O_2O провести вектор $\bar{\omega}_{21}$, то он совпадет с мгновенной осью *OP* относительного движения ведущего и ведомого звеньев и определит конические поверхности аксоидов, называемых *начальными конусами*. При обозначении параметров, относящихся к начальному конусу, используют индекс *w*. Углы δ_{w1} и δ_{w2} начальных конусов определяют при решении векторного соотношения (15.1) с использованием теоремы синусов (рис. 15.1, *а*):

$$\sin\delta_{w1}/|\bar{\omega}_2| = \sin\delta_{w2}/|\bar{\omega}_1|.$$

Отношение модулей угловых скоростей $|\bar{\omega}_1|$ и $|\bar{\omega}_2|$ является передаточным отношением:

$$u_{12} = |\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_2| = \sin\delta_{w2}/\sin\delta_{w1}. \tag{15.3}$$

При заданных межосевом угле Σ и передаточном отношении u_{12} углы начальных конусов определяют при совместном решении соотношений (15.2) и (15.3):

$$u_{12} = \frac{\sin\delta_{w2}}{\sin\delta_{w1}} = \frac{\sin(\Sigma - \delta_{w1})}{\sin\delta_{w1}} = \frac{\sin\Sigma\cos\delta_{w1} - \cos\Sigma\sin\delta_{w1}}{\sin\delta_{w1}} = \frac{\sin\Sigma}{\operatorname{tg}\delta_{w1}} - \cos\Sigma.$$

Искомые углы δ_{w1} и δ_{w2} начальных конусов находят по формулам

$$\delta_{w1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\Sigma}{u_{12} + \cos\Sigma}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\Sigma}{z_2/z_1 + \cos\Sigma}\right); \tag{15.4}$$

$$\delta_{w2} = \Sigma - \delta_{w1}. \tag{15.5}$$

Для ортогональной передачи при Σ = 90° соотношения (15.4) и (15.5) имеют частный вид:

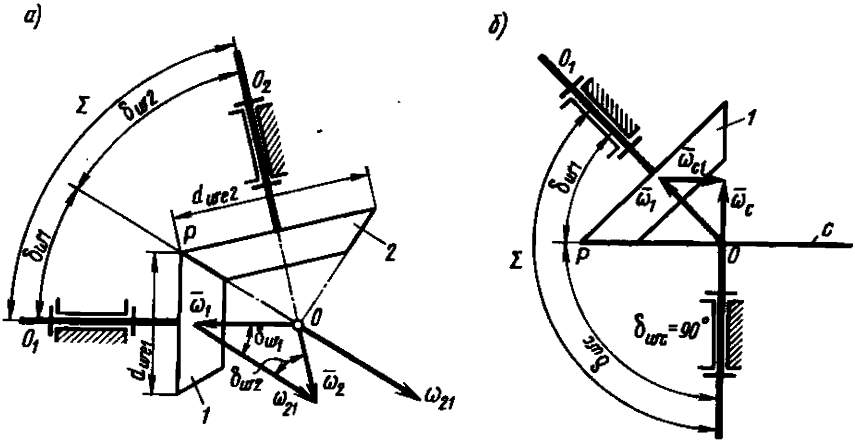


Рис. 15.1

$$\delta_{w1}=\operatorname{arctg}(1/u_{12})=\operatorname{arctg}(z_1/z_2);\ \delta_{w2}=\operatorname{arctg}u_{12}=\operatorname{arctg}(z_2/z_1). \qquad (15.6)$$

Частным случаем неортогональной передачи является **плоская конническая передача**, в которой поверхность одного из начальных колес является плоскостью и угол при вершине $\delta_{wc}=90°$ (рис. 15.1, *б*).

Параметры, относящиеся к плоскому коническому колесу, обозначают с добавлением индекса *c* (например: число зубьев плоского колеса z_c, угловая скорость ω_c). Формирование колес, размеров зубьев и расположение их элементов проводят относительно базовой конической поверхности на каждом колесе, называемой *делительным конусом*. При проектировании конических передач углы δ_1 и δ_2 делительных конусов принимают совпадающими с углами δ_{w1} и δ_{w2} начальных конусов, что упрощает расчетные соотношения. Зубья образуют на колесе зубчатый венец, который располагается между конусом вершин с углом δ_a и конусом впадин с углом δ_f (рис. 15.2). При изготовлении заготовок и колес используют базовое расстояние *A* и размеры *B* до вершины конуса и *C* — до базовой плоскости.

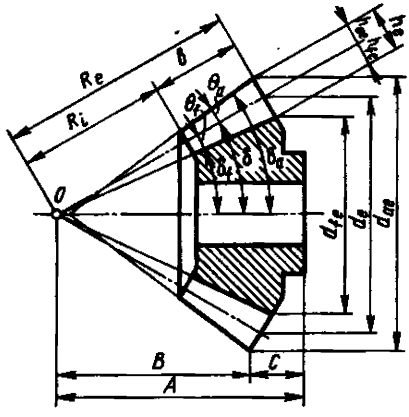


Рис. 15.2

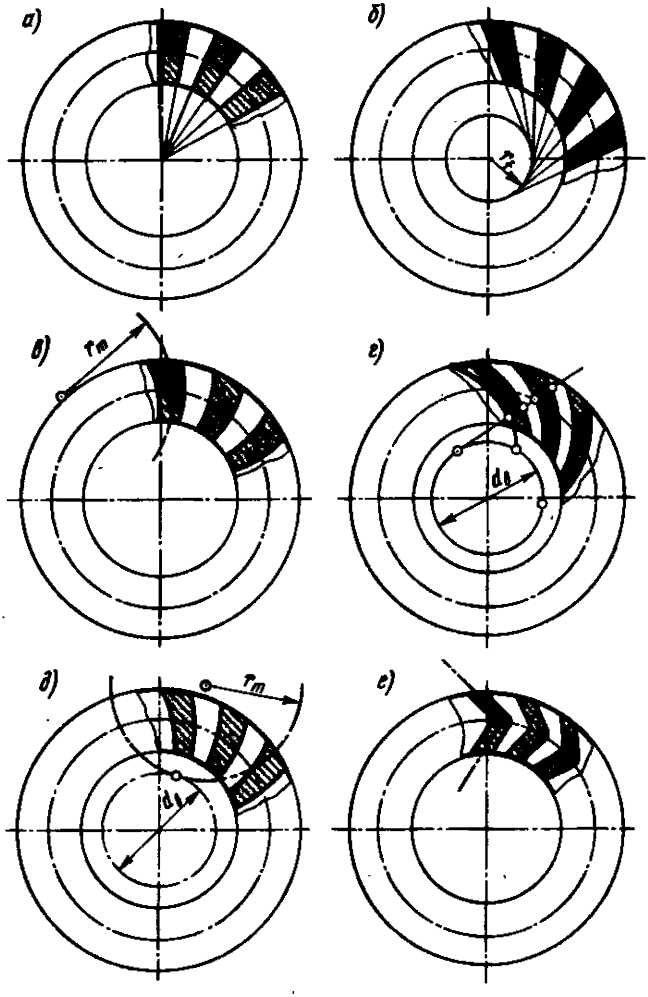


Рис. 15.3

Поверхность, отделяющая зуб от впадины, называется боковой поверхностью зуба. Пересечение боковой поверхности зуба с соосной поверхностью называют *линией зуба*. Линия зуба может совпадать с образующей делительного соосного конуса (прямые зубья) или иметь угол β наклона линии зуба на делительной поверхности. Различают виды конических колес, отличающихся по форме линий зубьев на развертке делительного конуса (рис. 15.3): *а* — с прямыми; *б* — тангенциальными; *в* — круговыми; *г, д, е* — криволинейными зубьями. Прямозубые передачи используют для

работы при легких нагрузках и невысоких скоростях (обычно при частоте вращения <100 об/мин). Для работы в режиме максимальных нагрузок, при высоких скоростях и для обеспечения максимальной плавности работы и бесшумности используют передачи с криволинейными зубьями.

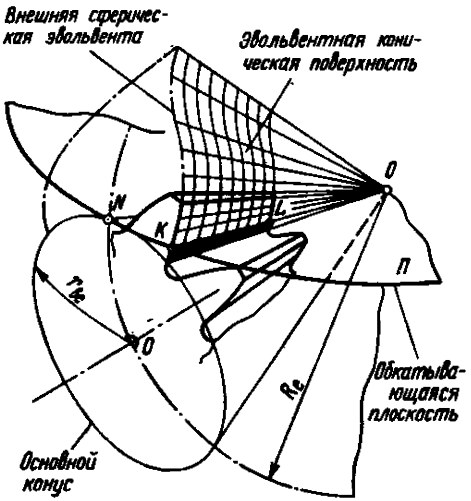


Рис. 15.4

Образование боковой поверхности зубьев можно проследить по рис. 15.4. Плоскость *П* касается основного конуса и перекатывается по нему без скольжения. Любая прямая *KL* на обкатывающейся плоскости *П* в пространстве опишет коническую эвольвентную поверхность, а любая точка (*K*, *L* или другая) описывает траекторию, расположенную на сфере определенного радиуса, называемую *сферической эвольвентой*. В каждом сферическом сечении на боковой поверхности зуба можно выделить линию пересечения, называемую *профилем зуба*. Профили зубьев в сечениях конического колеса отличаются друг от друга. Различают торцевые сечения: внешнее, среднее, внутреннее и текущее. При обозначении параметров в том или ином сечении добавляют соответствующий индекс (см. рис. 15.2), например для внешнего сечения — *e*, для среднего — *m*, для внутреннего — *i*, для текущего — *x*.

Радиус R_e внешнего торцевого сечения называют *внешним конусным расстоянием*. Расстояние между внешним и внутренним торцевыми сечениями конического колеса называют *шириной зубчатого венца* и обозначают *b* (см. рис. 15.2).

Взаимодействие сопряженных эвольвентных конических поверхностей при заданных начальных конусах представляет коническое эвольвентное зацепление (рис. 15.5).

Полюсная прямая *PO*, лежащая в плоскости N_1ON_2, касательной к основным конусам, может рассматриваться как образующая боковых поверхностей зубьев. Любые сопряженные сферические эвольвенты $Э_1$ и $Э_2$ имеют линию зацепления, расположенную на сфере (например, N_1PN_2) и являющуюся дугой большого круга сферы.

Взаимодействие сферических эвольвент описать в аналитической форме довольно сложно. Учитывая, что высотные размеры зубьев невелики по сравнению с радиусом сферы и профили зубьев рас-

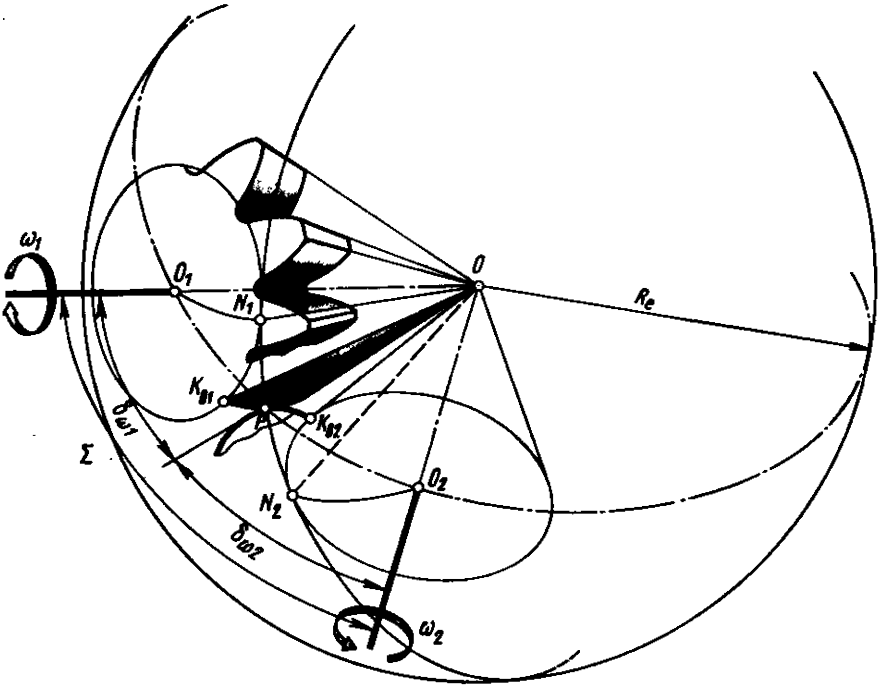


Рис. 15.5

положены на узком сферическом поясе, используют инженерную методику расчета, которая заключается в использовании дополнительных конусов (рис. 15.6).

Дополнительным делительным конусом называют соосную коническую поверхность, образующая которого (например, PO_{v1} или PO_{e2} на рис. 15.6) перпендикулярна образующей делительного конуса конического зубчатого колеса. Введение дополнительных конусов позволяет рассматривать взаимодействие профилей зубьев не на сфере, а на поверхности соприкасающихся со сферой дополнительных конусов. Если дополнительные конусы развернуть на плоскость, то профили зубьев становятся плоскими кривыми, достаточно близкими к обычным эвольвентам, соответствующим определенным размерам основных окружностей, радиусы $O_{ve1}N_1$ и $O_{ve2}N_2$ которых находят для *эквивалентной цилиндрической передачи*. Параметры эквивалентной цилиндрической передачи имеют дополнительный индекс *vt*. Каждое из зубчатых колес такой передачи называют *эквивалентным цилиндрическим зубчатым колесом* с числами зубьев z_{vt1} и z_{vt2} в отличие от чисел зубьев z_1 и z_2 на конических колесах.

Связь между числами зубьев z_1 и z_{vt1} или z_2 и z_{vt2} легко установить при рассмотрении размеров концентрических окружностей конического и эквивалентного цилиндрического колес:

$$r_{vte1}=\frac{0{,}5d_{e1}}{\cos\delta_1}=\frac{0{,}5m_e z_1}{\cos\delta_1}=0{,}5m_e z_{vt1};$$

$$r_{vte2}=\frac{0{,}5d_{e2}}{\cos\delta_2}=\frac{0{,}5m_e z_1}{\cos\delta_2}=0{,}5m_e z_{vt2}.$$

Внешний окружной модуль m_e, соответствующий расстоянию между одноименными профилями соседних зубьев по дуге концентрической окружности конического колеса на внешнем торце, равен модулю эквивалентной цилиндрической передачи. Поэтому числа зубьев z_{vt1} и z_{vt2} можно выразить соотношениями

$$z_{vt1}=z_1/\cos\delta_1;\ z_{vt2}=z_2/\cos\delta_2. \qquad (15.7)$$

В общем случае числа z_{vt1} и z_{vt2} являются дробными и в процессе расчета не округляются, а вычисляются с точностью до 0,01.

Передаточное отношение эквивалентной цилиндрической пере-

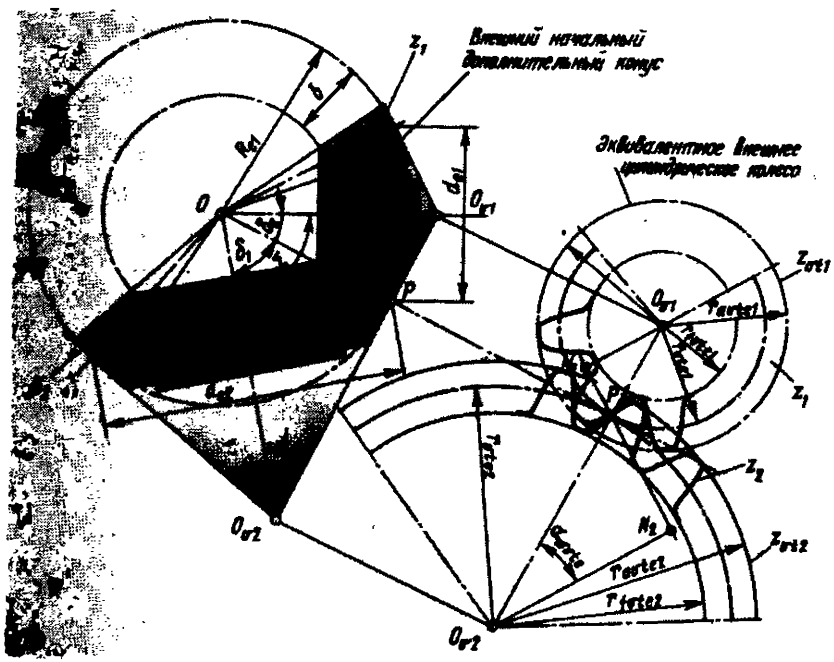


Рис. 15.6

дачи определяется следующим соотношением:

$$u_{v12}=\frac{z_{v12}}{z_{v11}}=\frac{z_2/\cos\delta_2}{z_1/\cos\delta_1}=u_{12}\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2}. \qquad (15.8)$$

Угол зацепления a_{wvte} эквивалентной цилиндрической передачи, радиусы r_{avte1} и r_{avte2} окружностей вершин, радиусы r_{fvte1} и r_{fvte2} окружностей впадин (рис. 15.6) рассчитывают по формулам, аналогичным выведенным ранее для цилиндрических эвольвентных передач.

При расчете конических передач с криволинейной линией зуба (см. рис. 15.3) эквивалентная цилиндрическая передача является не прямозубой, а имеет винтовые зубья. Поэтому профили зубьев рассматривают в соответствующих нормальных сечениях. Прямозубое цилиндрическое зубчатое колесо, размеры и форма зубьев которого в главном сечении практически идентичны размерам и форме зубьев конического зубчатого колеса с тангенциальными и криволинейными зубьями в сечении, нормальном к средней линии зуба, называют *биэквивалентным цилиндрическим колесом*, число зубьев которого обозначают z_{vn} (соответственно z_{vn1} и z_{vn2}).

С достаточной для практических расчетов точностью коэффициент формы зубьев таких конических колес оценивают по аналогии с биэквивалентным цилиндрическим колесом, число зубьев которого

$$z_{vn1}=\frac{z_1}{\cos\delta_1\cos^3\beta_n}; \quad z_{vn2}=\frac{z_2}{\cos\delta_2\cos^3\beta_n}, \qquad (15.9)$$

где β_n — угол наклона средней линии зуба, соответствующий внешнему, среднему, внутреннему или другим расчетным нормальным сечениям зуба конического зубчатого колеса.

Геометрия боковых поверхностей и профилей зубьев теснейшим образом связана с технологией изготовления конических колес. Способ копирования фасонного профиля инструмента для образования профиля на коническом колесе не может быть использован, ибо размеры впадины конического колеса изменяются по мере приближения к вершине конуса. В связи с этим такие инструменты, как модульная дисковая фреза, пальцевая фреза, фасонный шлифовальный круг, могут использоваться только для черновой прорезки впадин или для образования впадин колес не выше 8-й степени точности.

Для нарезания более точных конических колес используют способ обкатки в станочном зацеплении нарезаемой заготовки с *воображаемым производящим колесом*. Боковые поверхности производящего колеса образуются за счет движения режущих кромок инструмента в процессе главного движения резания, обеспечивающего

срезание припуска. Преимущественное распространение получили инструменты с прямолинейным лезвием. При прямолинейном главном движении прямолинейное лезвие образует *плоскую производящую поверхность*. Такая поверхность не может образовать эвольвентную коническую поверхность со сферическими эвольвентными профилями. Получаемые сопряженные конические поверхности, отличающиеся от эвольвентных конических поверхностей, называют *квазиэвольвентными* (по старой терминологии — октоидальными).

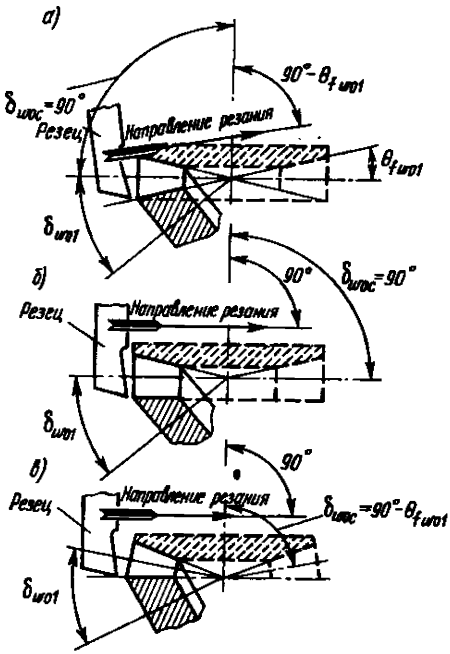


Рис. 15.7

Производящие колеса могут быть плоскими с $\delta_{woc}=90°$ (рис. 15.7, *а*, *б*) или плосковершинными с $\delta_{woc}=90°-\theta_{fwo1}$ (рис. 15.7, *в*) при одном и том же угле δ_{wo1} при вершине аксоидного конуса станочного зацепления.

В первых двух случаях образуемые квазиэвольвентные конические колеса будут сопряженными, ибо производящие плоские колеса образуют совпадающую пару, у которой боковые производящие поверхности зубьев могут совпадать при наложении во всех своих точках (как отливка и форма или шаблон и контршаблон). Однако станок, реализующий схему станочного зацепления по рис. 15.7, *а*, должен иметь поворотные направляющие, допускающие установку резцовых направляющих под углом $(90°-\theta_{fwo1})$, где θ_{fwo1} — угол ножки зуба нарезаемого колеса в станочном зацеплении. Это усложняет конструкцию станка и используется ограниченно.

В случае движения резцов без учета угла θ_{fwo1} (рис. 15.7, *б*) высота ножки зуба по мере приближения к вершине конуса остается неизменной, что ослабляет зуб и приводит иногда к подрезу ножки.

Большинство моделей станков использует *плосковершинное производящее колесо*, у которого вершины зубьев расположены в плоскости, а угол аксоидного конуса в станочном зацеплении рассчитывается с учетом угла θ_{fwo1} ножки зуба нарезаемого колеса. Два плосковершинных колеса не образуют совпадающую производящую пару, и поэтому нарезаемые квазиэвольвентные колеса будут

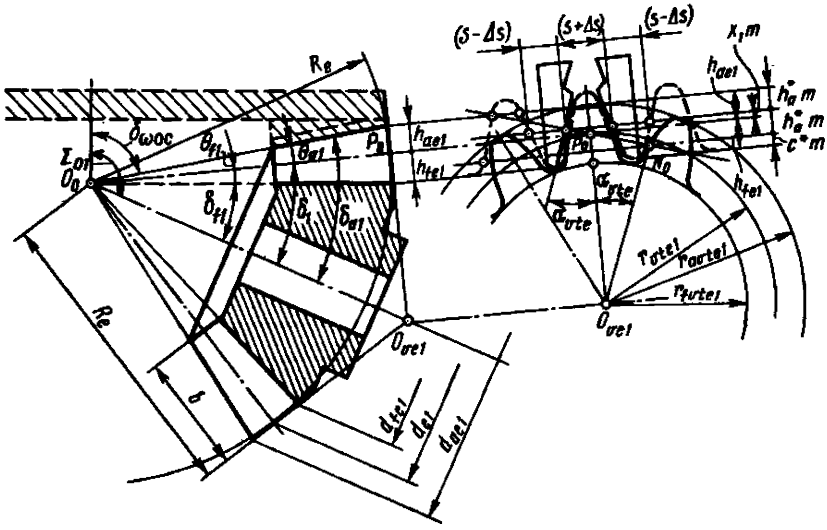


Рис. 15.8

несопряженными. Эти погрешности обычно являются незначительными и ими обычно пренебрегают.

Расчетная схема, приведенная на рис. 15.8, позволяет на базе станочного зацепления конического колеса с производящим плоскошвершинным колесом перейти к эквивалентному станочному зацеплению с теоретическим исходным контуром. Исходный контур, совпадающий с реечным контуром, принятым в качестве базового для определения теоретических форм и размеров зубьев конических колес, регламентирован по ряду параметров: $\alpha=20°$; $h_a^*=1{,}2$; $c^*=0{,}2$; $\rho_f^*\leqslant 0{,}3$. Однако с учетом особенностей методов нарезания зубьев эти параметры можно изменять в пределах использования стандартного инструмента. Так, например, можно допускать неравенство толщины зуба и ширины впадины по делительной прямой за счет относительного расположения соседних резцов; не требуется строгого соответствия номинального модуля резцов модулю нарезаемого колеса. Внешний модуль может быть нестандартным и даже дробным. Можно изменять угол α за счет наклона резцов.

Расчет параметров конической передачи проводят в такой последовательности (рис. 15.8):

число зубьев плоского колеса

$$z_c'=\frac{1}{\sin\Sigma}\sqrt{z_1^2+z_2^2+2z_1z_2\cos\Sigma}; \qquad (15.10)$$

при $\Sigma=90°$

$$z_c=\sqrt{z_1^2+z_2^2}; \qquad (15.11)$$

внешнее конусное расстояние

$$R_e = 0{,}5 m_e z_c; \tag{15.12}$$

ширина зубчатого венца $b \leqslant 0{,}3 R_e$, или $b \leqslant 10 m_e$; коэффициент ширины зубчатого венца $k_{be} = b/R_{we} = 0{,}2 \div 0{,}3$;

угол делительного конуса

$$\delta_1 = \operatorname{arctg}[\sin\Sigma/(z_2/z_1 + \cos\Sigma)]; \tag{15.13}$$

$$\delta_2 = \Sigma - \delta_1; \tag{15.14}$$

при $\Sigma = 90°$

$$\delta_1 = \operatorname{arctg}(z_1/z_2); \tag{15.15}$$

коэффициент смещения исходного контура $x_1 = 0 \div 0{,}6$ в зависимости от числа зубьев z_1 и передаточного отношения передачи; $x_2 = -x_1$;

$$x_1 \geqslant x_{1\min} = 1{,}068 - 0{,}058 z_1/\cos\delta_1; \tag{15.16}$$

коэффициент изменения расчетной толщины зуба исходного контура

$$x_{\tau 1} = 0{,}03 - 0{,}008(z_2/z_1 - 2{,}5); \quad x_{\tau 2} = -x_{\tau 1}. \tag{15.17}$$

Расчет параметров зубчатых колес проводят по следующим расчетным формулам, вывод которых основан на расчетной схеме (рис. 15.8):

внешняя высота головки зуба

$$h_{ae1} = (h_a^* + x_1) m_e; \quad h_{ae2} = 2h_a^* m_e - h_{ae1}; \tag{15.18}$$

внешняя высота ножки зуба

$$h_{fe1} = h_{ae2} + c^* m_e; \quad h_{fe2} = h_{ae1} + c^* m_e; \tag{15.19}$$

внешняя высота зуба

$$h_e = h_{ae} + h_{fe}; \tag{15.20}$$

внешняя окружная толщина зуба

$$s_{e1} = (0{,}5\pi + 2x_1 \operatorname{tg}\alpha + x_{\tau 1}) m_e; \; s_{e2} = \pi m_e - s_{e1}; \tag{15.21}$$

угол ножки зуба

$$\theta_{f1} = \operatorname{arctg}(h_{fe1}/R_e); \tag{15.22}$$

$$\theta_{f2} = \operatorname{arctg}(h_{fe2}/R_e); \tag{15.23}$$

угол головки зуба

$$\theta_{a1} < \theta_{f2}; \quad \theta_{a2} < \theta_{f1}; \tag{15.24}$$

угол конуса вершин

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1}; \quad \delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2}; \tag{15.25}$$

угол конуса впадин

$$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_{f1}; \quad \delta_{f2} = \delta_2 - \theta_{f2}; \tag{15.26}$$

внешний делительный диаметр

$$d_{e1} = m_e z_1; \quad d_{e2} = m_e z_2; \tag{15.27}$$

внешний диаметр вершин зубьев

$$d_{ae1} = d_{e1} + 2h_{ae1}\cos\delta_1; \quad d_{ae2} = d_{e2} + 2h_{ae2}\cos\delta_2. \tag{15.28}$$

При проверке качества зацепления по геометрическим показателям рассчитывают коэффициент ε_a торцевого перекрытия, внешнюю окружную толщину зуба s_{ae} на поверхности вершин и проверяют отсутствие подрезания зубьев с использованием эквивалентного цилиндрического зацепления.

Рекомендуемые значения показателей следующие: коэффициент торцевого перекрытия $\varepsilon_a \geqslant 1{,}3$; относительная окружная толщина зуба на поверхности вершин $s^*_{ae} = s_{ae}/m_e \geqslant 0{,}3$ — при однородной структуре металла; $s^*_{ae} \geqslant 0{,}4$ — при поверхностном упрочнении зубьев.

При выборе исходных данных учитывают заданное передаточное отношение u_{12} и его допустимое отклонение в связи с тем, что числа зубьев — целые числа. Рекомендуется числа зубьев колес назначать в пределах от 12 до 100.

Для прямозубой конической пары передаточные отношения рекомендуется назначать: $u_{12} \leqslant 5$ — для замедляющей, $u_{12} \geqslant 0{,}35$ — для ускоряющей передач.

Межосевой угол Σ назначают в пределах от 10 до 170°, для ортогональной передачи его назначают равным 90°.

Параметры исходного контура стандартизованы. На рис. 13.8 они приведены в соответствии с ГОСТ 13754 — 81.

Коэффициент ширины зубчатого колеса $k_{be} = b/R_{we}$ рекомендуется выбирать в пределах 0,2 — 0,8. Увеличение длины зуба за эти пределы на практике приводит к краевому контакту зубьев вследствие погрешностей монтажа и деформаций их под нагрузкой, т. е. не приводит к повышению несущей способности передачи.

При проектировании быстроходных передач, работающих при переменных нагрузках, числа зубьев z_1 и z_2 должны быть взаимно

простыми числами, т. е. не иметь общих делителей. Если передача работает при постоянной нагрузке и умеренных линейных скоростях, то стремятся к тому, чтобы числа z_1 и z_2 были бы кратны друг другу, или имели возможно большее число общих делителей, что способствует ускоренной приработке рабочих поверхностей зубьев.

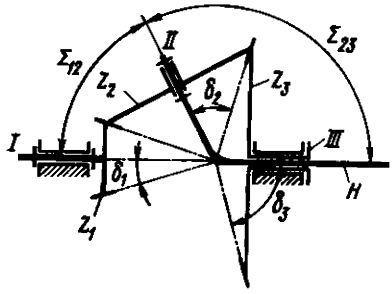


Рис. 15.9

При расчете соосных конических передач необходимо согласовывать числа зубьев, углы их начальных конусов и углы между осями. Например, для планетарного механизма с коническими колесами, схема которого изображена на рис. 15.9, должны выполняться следующие соотношения:

$$\Sigma_{12}+\Sigma_{23}=180^\circ;$$

$$\operatorname{tg}\delta_2=\frac{\sin\Sigma_{12}}{z_1/z_2+\cos\Sigma_{12}};$$

$$\operatorname{tg}\delta_2=\frac{\sin\Sigma_{23}}{z_3/z_2+\cos\Sigma_{23}}.$$

Решая эти соотношения совместно, получают соотношение для межосевого угла Σ_{12}:

$$\cos\Sigma_{12}=(z_3-z_1)/(2z_2).$$

Из последнего соотношения легко установить нижний предел для чисел z_2: $z_2 \geqslant 0{,}5(z_3-z_1)$.

§ 15.2 ЧЕРВЯЧНАЯ ЗУБЧАТАЯ ПЕРЕДАЧА

Червячная зубчатая передача, являющаяся частным случаем гиперболоидной, используется для передачи вращения между скрещивающимися осями с постоянным отношением скоростей звеньев. В подавляющем большинстве случаев угол скрещивания осей выбирается равным 90°. Известны две разновидности червячного зацепления: а) с цилиндрическим червяком (рис. 15.10, *б*) (поверхность витков такого червяка является геликоидом); б) с глобоидным червяком (рис. 15.10, *в*), по форме которого зацепление названо глобоидным. В зависимости от направления линии витка червяка червячные передачи бывают с правым и левым направлением линии витка. В зависимости от формы винтовой поверхности червяка передачи бывают с архимедовым (архимедова спираль), конволютным (удлиненная или укороченная эвольвента) или эвольвентным

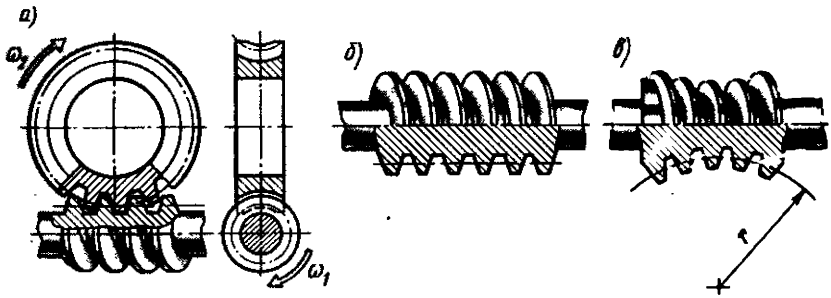


Рис. 15.10

червяком. Червячное колесо есть косозубое колесо с зубчатым венцом специальной горловидной формы, охватывающим червяк и образующим как бы бесконечную гайку. Работу червячной передачи можно представить как непрерывное ввинчивание винта — червяка — в бесконечную гайку — червячное колесо. Червяк, как правило, является ведущим звеном, а червячное колесо — ведомым. Обратная передача движения (за редким исключением) неосуществима из-за эффекта самоторможения. На рис. 15.10, *а* представлена червячная зубчатая передача с червяком цилиндрической формы.

В отличие от винтовой передачи, составленной из цилиндрических колес с винтовыми зубьями, в червячном зацеплении поверхности зубьев имеют не точечное, а линейное касание, что позволяет использовать такое зацепление для передачи значительных нагрузок. Другим важным достоинством червячной передачи является возможность обеспечения большого передаточного отношения от 20 до 500. Кроме того, червячная передача, как и другие косозубые передачи, обладает высокой плавностью и бесшумностью вращения.

Однако червячные передачи имеют и существенные недостатки:

1) КПД этих передач по сравнению с КПД других передач весьма низок — 0,5 — 0,7;

2) повышенное скольжение контактирующих профилей вызывает их износ и требует применения для венцов червячных колес антифрикционных материалов;

3) значительное выделение теплоты в зоне зацепления червяка с колесом требует интенсивного охлаждения передачи;

4) большое осевое усилие на червяк требует постановки червяка на подшипники, способные воспринимать большие осевые реакции.

Нарезание червяков и червячных колес. По ГОСТ 18498 — 73 введены обозначения различных видов червяков. Например, архимедов червяк обозначается как червяк *ZA*, конволютный — червяк *ZN*, эвольвентный — червяк *ZJ* и т. д. Каждый из них требует особого способа нарезания. Нарезание червяков осуществляется либо резцами на токарно-винторезных станках, либо модульными фрезами на резьбофрезерных станках.

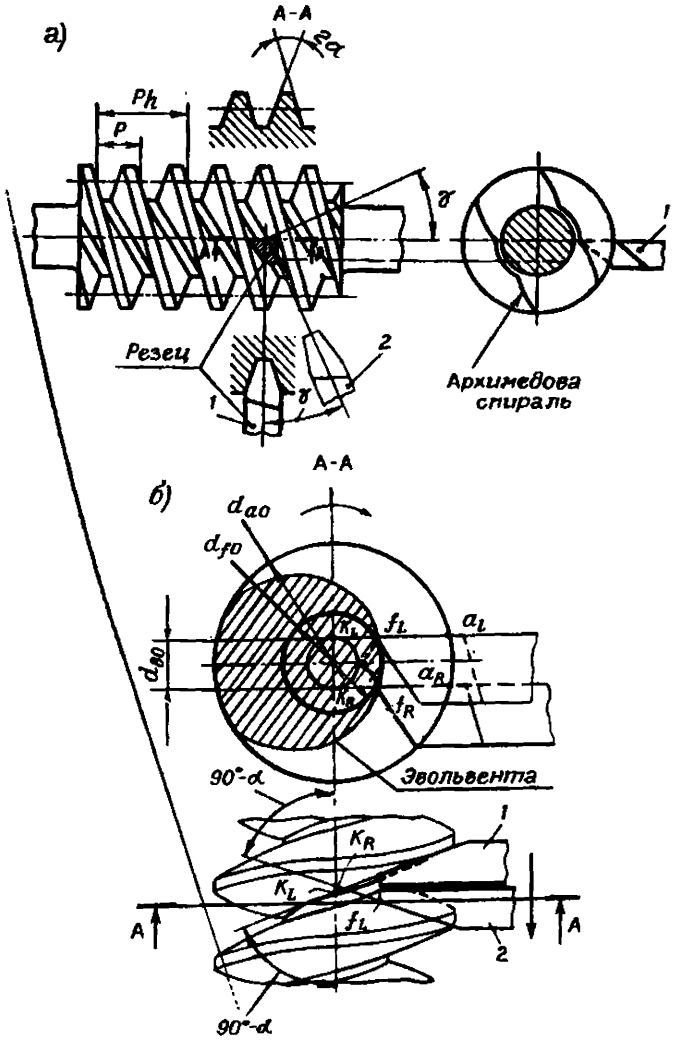


Рис. 15.11

Если резец, имеющий в сечении форму трапеции, установить на токарно-винторезном станке (рис. 15.11, *а*) так, чтобы верхняя плоскость резца *А — А* проходила через ось червяка (положение *I*), то при нарезании получится винтовая поверхность, которая в сечении, перпендикулярном оси червяка, дает кривую — архимедову спираль, а червяк будем называть архимедовым. Архимедов червяк в осевом сечении имеет прямолинейный профиль витка, аналогичный инструментальной рейке. Угол между боковыми поверхностя-

ми профиля витка у стандартных (по ГОСТ 19036 — 81) червяков $\alpha = 20°$.

Если же резец повернуть на угол подъема винтовой линии червяка γ (положение *2*) так, чтобы верхняя плоскость резца $A - A$ была перпендикулярна винтовой линии, то при нарезании получится винтовая поверхность, которая в сечении, перпендикулярном оси червяка, дает кривую конволюту, а червяк соответственно будем называть конволютным.

Для нарезания эвольвентных червяков используются два резца (рис. 15. 11, *б*). Резец *1* с правой режущей кромкой, установленный выше оси червяка на расстоянии радиуса основного цилиндра, ($d_{bo}/2$), образует левую поверхность витка. Резец *2*, установленный ниже оси червяка на расстоянии радиуса основного цилиндра, образует правую поверхность витка червяка. Режущие кромки $a_L - f_L$ и $a_R - f_R$ совпадают с образующими прямыми, а в результате при нарезании получается винтовая поверхность, которая в сечении, перпендикулярном оси червяка, дает кривую эвольвенту окружности.

Червячные колеса чаще всего нарезают червячными фрезами, причем червячная фреза должна представлять собой копию червяка, с которым будет зацепляться червячное колесо. Станочное зацепление червячного колеса и фрезы воспроизводит рабочее зацепление червячной передачи.

Работоспособность червячной передачи зависит от твердости и чистоты винтовой поверхности червяка, поэтому после нарезания резьбы и термообработки червяки шлифуют, а иногда и полируют.

Кинематические и геометрические соотношения в червячной передаче. Червячная передача характеризуется передаточным числом $u = z_2/z_1$, где z_2 — число зубьев колеса (обычно $z_2 = 18 \div 300$); z_1 — число витков червяка (обычно $z_1 = 1 \div 4$), а также передаточным отношением $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = u$, где ω_1 и ω_2 — угловые скорости соответственно червяка и колеса.

Геометрические размеры червячной передачи определяются межосевым расстоянием a_ω, которое зависит от диаметров червяка и колеса (рис. 15.12) и регламентируется ГОСТ 2144 — 76.

Главными параметрами червяка являются модуль m и коэффициент диаметра q. Модулем червяка называют линейную величину, в π раз меньшую расчетного шага червяка. Расчетным шагом червяка является делительный осевой шаг витков. У одновиткового червяка расчетным шагом является делительный ход витка, равный расстоянию между одноименными профилями данного витка по образующей делительного цилиндра. Коэффициент диаметра q равен отношению делительного диаметра червяка к его модулю: $q = d_1/m$. Модули и коэффициенты q регламентируются стандартом по ГОСТ 19672 — 74. Чтобы червяк не был слишком тонким, q увеличивают с уменьшением модуля.

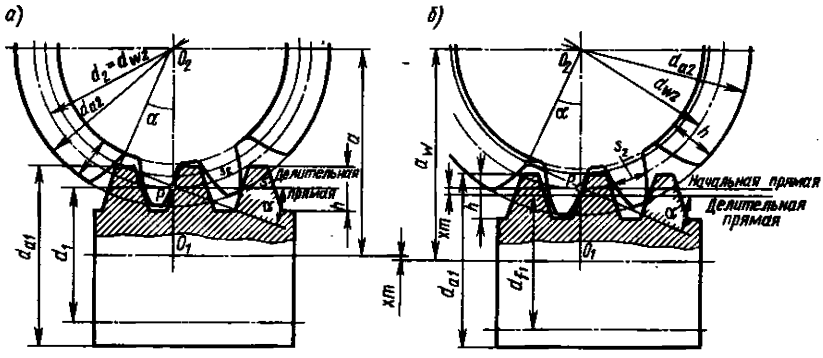


Рис. 15.12

Окружности, определяющие размеры червяка в средней торцевой плоскости, называют средними концентрическими. Различают окружности: делительную, диаметром d_1, начальную, диаметром d_{w1}, вершин витков — d_{a1}, впадин — d_{f1}, принадлежащие соответственно поверхностям делительной, начальной, вершин витков и впадин.

Диаметр делительного цилиндра червяка выбирают кратным осевому модулю червяка:

$$d_1 = m\,q.$$

Начальный диаметр червяка без смещения d_{w1} равен делительному. Если коэффициент смещения исходного производящего контура инструмента при нарезании червячного колеса $x \neq 0$, то начальный цилиндр червяка уже не сливается с его делительным цилиндром:

$$d_{w1} = m(q + 2x).$$

Наклон винтовой линии витка по делительному цилиндру определяют делительным углом подъема γ из соотношения

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{pz_1}{\pi d_1} = \frac{mz_1}{d_1} = \frac{z_1}{q}.$$

Высота головки h_{a1} и ножки h_{f1} витков определяется по формулам

$$h_{a1} = h_a^* m;\ h_{f1} = h_f^* m,$$

где коэффициент высоты головки $h_a^* = 1$, коэффициент высоты ножки для архимедовых и конволютных червяков равен 1, 2, а для эвольвентных $(1 + 0{,}2\cos\gamma)$.

Диаметр вершин витков червяка

$$d_{a1}=m(q+2h_a^*);$$

диаметр цилиндра впадин

$$d_{f1}=d_1-2h_{f1};$$

толщина витка по делительному цилиндру

$$s_1=\frac{\pi m}{2}.$$

На основании ранее выведенных в § 14.3 формул для эвольвентной цилиндрической зубчатой передачи основные размеры червячного колеса в среднем сечении и червячной передачи определяют по следующим формулам:
диаметр делительной окружности

$$d_2=mz_2;$$

диаметр окружности вершин зубьев

$$d_{a2}=m(z_2+2x+2h_a^*);$$

диаметр окружности впадин

$$d_{f2}=m(z_2+2x-2h_f^*);$$

высота зуба

$$h=m(h_a^*+h_f^*);$$

толщина зуба по делительной окружности

$$s_2=m(\frac{\pi}{2}+2x\,\mathrm{tg}\,\alpha);$$

межосевое расстояние зубчатой передачи

$$a_w=m[(q+z_2)/2+x].$$

Смещение червяка в основном выполняют с целью вписывания передачи в стандартное межосевое расстояние. Коэффициент смещения x исходного производящего контура инструмента выбирают в пределах ± 1. Предпочтительно использовать положительные смещения, при которых повышается прочность зубьев колеса.

ГЛАВА 16
МНОГОЗВЕННЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

При проектировании зубчатых механизмов многих машин и приборов (манипуляторов, станков, автомобилей, летательных аппаратов, печатающих устройств ЭВМ, индикаторов, тахометров и др.) возникает необходимость передавать вращение с большим передаточным отношением или при значительных межосевых расстояниях. В таких случаях применяют многозвенные зубчатые механизмы, либо снижающие скорость вращения выходного вала по сравнению с входным — редукторы, либо повышающие ее — мультипликаторы. Эти механизмы могут быть как плоскими, так и пространственными. Они подразделяются на механизмы с неподвижными осями всех колес и механизмы, оси отдельных колес которых перемещаются относительно стойки. Последние могут быть как с жесткими колесами (планетарные передачи), так и с гибкими (волновые зубчатые передачи). Их большим достоинством является ощутимая компактность по сравнению с механизмами с неподвижными осями. Проектирование многозвенных зубчатых механизмов включает два этапа: выбор структурной схемы; определение чисел зубьев для воспроизведения заданного передаточного отношения.

§ 16.1. МНОГОЗВЕННЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСЯМИ КОЛЕС

Число степеней свободы многозвенных зубчатых механизмов с неподвижными осями колес равно единице, благодаря чему $u=\text{const}$. Такие механизмы проектируются либо **несоосными** (рис. 16.1, 16.2, 16.3), либо **соосными**, когда ось входного и выходного звена располагается на единой линии.

Первые, наиболее часто встречающиеся в практике, структурно подразделяются на рядовые зубчатые механизмы (с развернутой схемой) и ступенчатые (рис. 16.3).

Общее передаточное отношение многозвенного механизма равно произведению передаточных отношений отдельных механизмов (ступеней), последовательно включенных в его состав:

$$u_{1j}=u_{12}\,u_{23}\,u_{34}\ldots u_{(j-1)j}. \qquad (16.1)$$

Рядовые зубчатые механизмы представляют собой последовательное соединение нескольких пар *единичных* зубчатых колес (см. рис. 16.2, *а*, *б*), вращающихся вокруг неподвижных осей. Имея схему механизма и зная числа зубьев или радиусы начальных окружностей колес r_{wi}, можно определить общее передаточное отношение такого редуктора аналитически или графически. Для колес без смещения начальные окружности совпадают с делительными, т. е. $r_{wi}=r_i$.

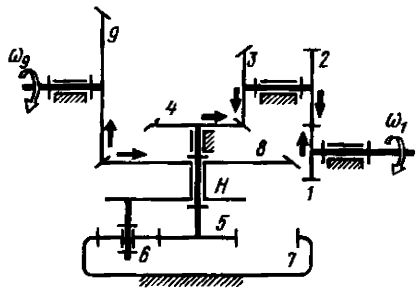


Рис. 16.1

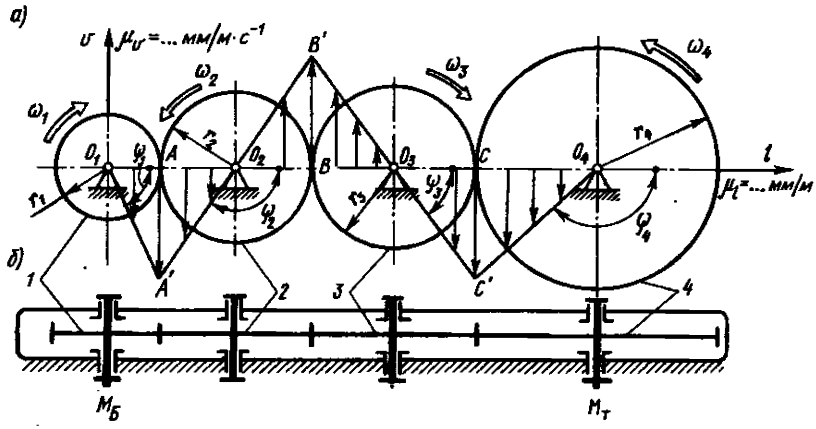


Рис. 16.2

Аналитическое определение передаточного отношения основывается на формулах (4.39) и (16.1). Так, для рядового механизма (см. рис. 16.2) общее передаточное отношение будет $u_р = u_{14} = u_{12}u_{23}u_{34}$, где $u_{12} = \omega_1/\omega_2 = -r_2/r_1 = -z_2/z_1$ — передаточное отношение первой пары сцепляющихся зубчатых колес внешнего (знак минус) зацепления; $u_{23} = \omega_2/\omega_3 = -r_3/r_2 = -z_3/z_2$ — передаточное отношение второй пары аналогичных колес; $u_{34} = \omega_3/\omega_4 = -r_4/r_3 = -z_4/z_3$ — третьей пары.

Тогда искомое передаточное отношение

$$u_р = u_{14} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2}\right)\left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1} = -\frac{r_4}{r_1}.$$

В общем случае при j колесах в механизме

$$u_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} = (-1)^t \frac{z_j}{z_i} = (-1)^t \frac{r_j}{r_i}. \qquad (16.2)$$

Общее передаточное отношение рядового зубчатого механизма постоянно и равно обратному отношению чисел зубьев или радиусов крайних колес. Знак передаточного отношения определяется множителем $(-1)^t$, где t — число передач внешнего зацепления. Но значение u_{ij} в таких передачах относительно невелико, так как оно ограничено допустимой величиной z_i и z_j, а числа зубьев промежуточных колес (*2* и *3* на рис. 16.2), находящихся одновременно в зацеплении с предшествующими и последующими колесами, не влияют на величину общего передаточного отношения механизма. Применяют эти колеса в основном там, где необходимо изменить

направление вращения ведомого вала при неизменном направлении вращения ведущего (коробки передач станков, автомобилей и пр.), либо там, где необходимо обеспечить передачу движения при больших межосевых расстояниях (когда нельзя увеличить размеры ведущих и ведомых колес).

Графическое определение передаточного отношения таких зубчатых механизмов можно осуществить методом планов скоростей (треугольников скоростей) (см. § 4.36). Треугольники скоростей можно построить, если известны линейные скорости не менее двух точек звена (по величине и направлению). Используя этот метод и построив треугольники скоростей (ломаная $O_1A'B'C'O_4$ на рис. 16.2, *а*), получаем наглядное представление о характере изменения скоростей от одного вала к другому. Можно определить графически угловую скорость любого колеса [см. формулу (4.6)]; так, $\omega_4 = v_c/r_4 = (CC'/\mu_v)\ (\mu_e/O_4C) = -(\mu_e/\mu_v)\,\mathrm{tg}\psi_4$, или частоту его вращения $n_4 = 30\omega_4/\pi = \mu_e 30\,\mathrm{tg}\psi_4/(\mu_v\pi)$ об/мин.

Тогда передаточное отношение всего механизма

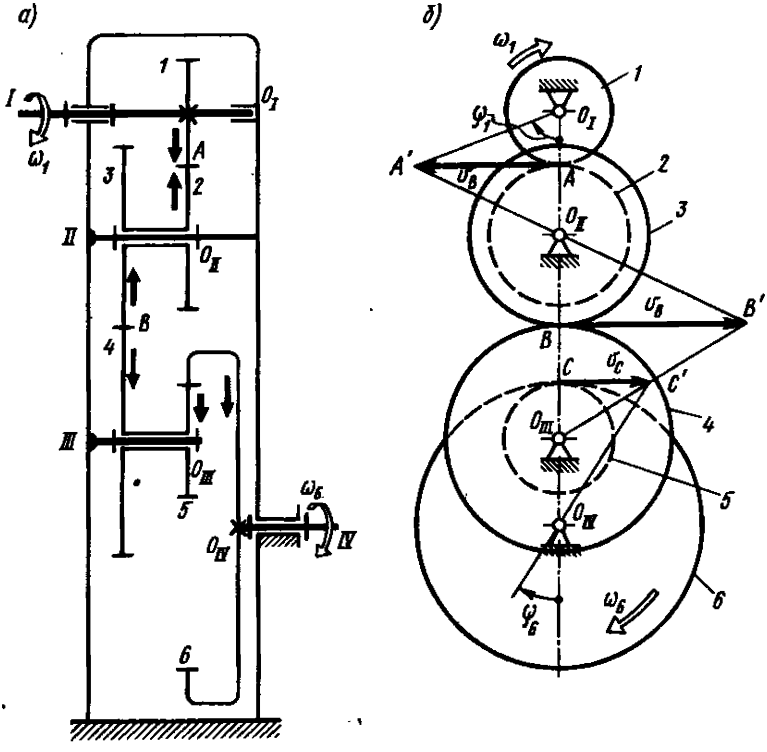


Рис. 16.3

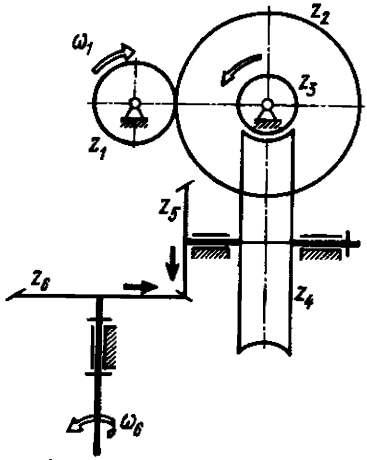


Рис. 16.4

$$u_{14}=\frac{\omega_1}{\omega_4}=\frac{\operatorname{tg}\psi_1\,\mu_c/\mu_v}{\operatorname{tg}\psi_4\,\mu_c/\mu_v}=-\frac{\operatorname{tg}\psi_1}{\operatorname{tg}\psi_4},$$

или в общем случае

$$u_{ij}=\pm\operatorname{tg}\psi_i/\operatorname{tg}\psi_j. \qquad (16.3)$$

Знак отношения определяется по знаку тангенса.

Ступенчатые зубчатые механизмы представляют собой последовательное соединение нескольких пар блочных колес (спаренные колеса *2* и *3*; *4* и *5* на рис. 16.3, *а*). Передаточное отношение этого механизма

$$u_{16}=u_{12}u_{34}u_{56}=\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_3}{\omega_4}\frac{\omega_5}{\omega_6}=$$

$$=\left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_4}{z_3}\right)\left(+\frac{z_6}{z_5}\right)=+\frac{r_2r_4r_6}{r_1r_3r_5};$$

так как $\omega_2=\omega_3$; $\omega_4=\omega_5$, то после сокращения получаем

$$u_{16}=\frac{\omega_1}{\omega_6}=+\frac{z_2z_4z_6}{z_1z_3z_5}.$$

Или в общем случае при j колесах и t внешних зацеплениях полное передаточное отношение ступенчатой передачи

$$u_{ij}=(-1)^t\,\frac{z_2z_4z_6\ldots z_j}{z_iz_3z_5\ldots z_{(j-1)}}, \qquad (16.4)$$

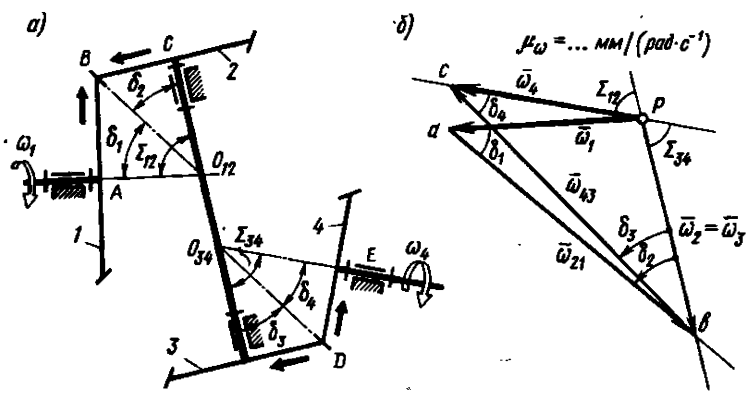


Рис. 16.5

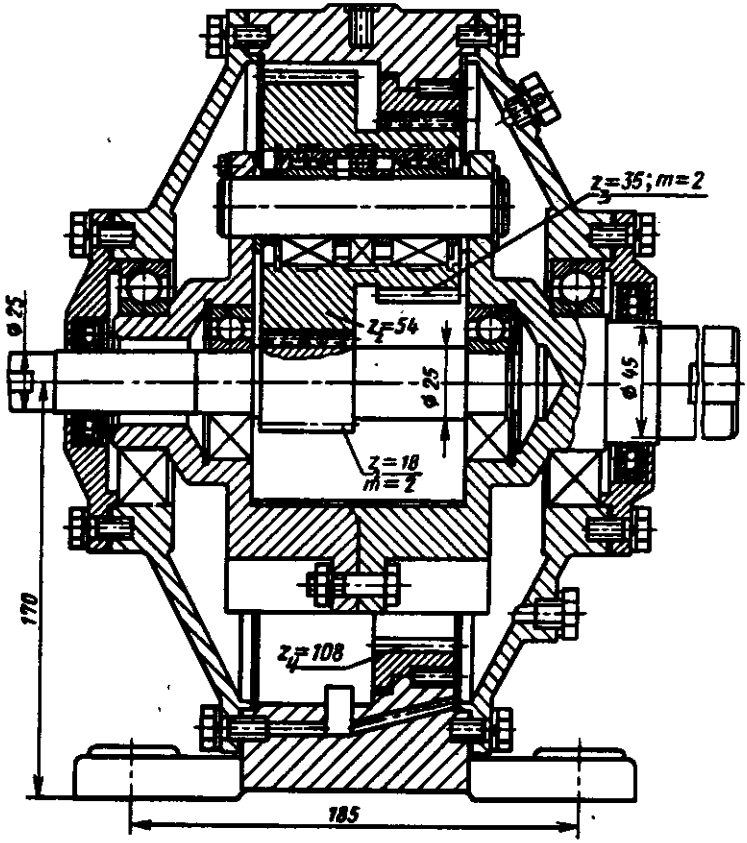


Рис. 16.6

т. е. равно отношению произведения чисел зубьев ведомых колес к произведению чисел зубьев ведущих колес.

За счет подбора чисел зубьев колес в ступенчатом редукторе можно получить бо́льшие передаточные отношения при тех же габаритах, что и у рядового. Знак передаточного отношения определяется множителем $(-1)^i$ или по правилу стрелок (см. рис. 16.3). В этом случае направление вращения колеса показывают на схеме механизма прямой стрелкой в ту сторону, куда движутся точки на обращенных к наблюдателю сторонах венцов колес (см. стрелки на колесах *1* и *2*). Пользуясь этим правилом, устанавливаем, что ведущее *1* и ведомое *6* колеса вращаются в одну и ту же сторону. Треугольники скоростей (рис. 16.3, *б*), построенные по изложенной выше методике, позволяют определить графически

$$u_{16}=\frac{\operatorname{tg}\psi_1}{\operatorname{tg}\psi_6}=+\frac{AA'\cdot CO_{IV}}{O_1A\cdot CC'}.$$

Ступенчатые зубчатые механизмы часто применяются в коробках скоростей, где передаточное отношение изменяется скачкообразно. Это позволяет при $\omega_1=\text{const}$ сообщать выходному звену различные по величине и направлению скорости и воспроизводить любой ряд передаточных отношений с заданной закономерностью (см. рис. 4.20).

Пространственные многозвенные зубчатые механизмы используются в тех случаях, когда необходимо передавать движение между скрещивающимися осями (рис. 16.4) или пересекающимися (рис. 16.5, *а*). В последнем случае применяются механизмы из конических колес, углы между осями которых Σ_{12} и Σ_{34} могут иметь любые значения (чаще всего они равны 90°). При аналитическом исследовании такого механизма определяется ω_4 или передаточное отношение [см. формулу (16.3)] по известным параметрам из выражения $u_{14}=u_{12}u_{34}=|\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_4|=\sin\delta_2\cdot\sin\delta_4/(\sin\delta_1\cdot\sin\delta_3)$. Направление вращения колес определяется с помощью стрелок. При графическом методе исследования таких механизмов (рис. 16.5, *б*) на основе векторных уравнений скоростей $\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_{21}$; $\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_3$; $\bar{\omega}_4=\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_{43}$ строится план угловых скоростей (рис. 16.5, *б*), в котором векторы абсолютных скоростей проходят вдоль осей вращения, а относительных ($\bar{\omega}_{21}$, $\bar{\omega}_{43}$) — по осям мгновенного относительного вращения (BO_{12} и DO_{34}). Из этого плана находим искомое передаточное отношение $u_{14}=|\bar{\omega}_1|/|\bar{\omega}_4|=\overline{pa}/\overline{pc}$ и скорость вращения ведомого колеса $\omega_4=\overline{pc}/\mu_\omega$.

§ 16.2. ПЛАНЕТАРНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Такие многозвенные зубчатые механизмы обязательно имеют колеса с движущимися геометрическими осями (см. рис. 4.11), которые называют *планетарными* или *сателлитами*. Подвижное звено, в котором помещены оси сателлитов, называют *водилом*. Вращающееся вокруг неподвижной оси колесо, по которому обкатываются сателлиты, называют *центральным*; неподвижное центральное колесо — *опорным*. Как правило, планетарные механизмы изготовляются соосными.

Планетарные механизмы подразделяются на **планетарные редукторы** и **мультипликаторы**, которые обладают одной степенью свободы и обязательно имеют опорное звено, и **зубчатые дифференциальные механизмы**, число степеней свободы которых два и более ($W\geqslant 2$) и которые опорного звена не имеют. Типичным примером планетарного редуктора является соосный механизм с цилиндрическими колесами, конструкция которого

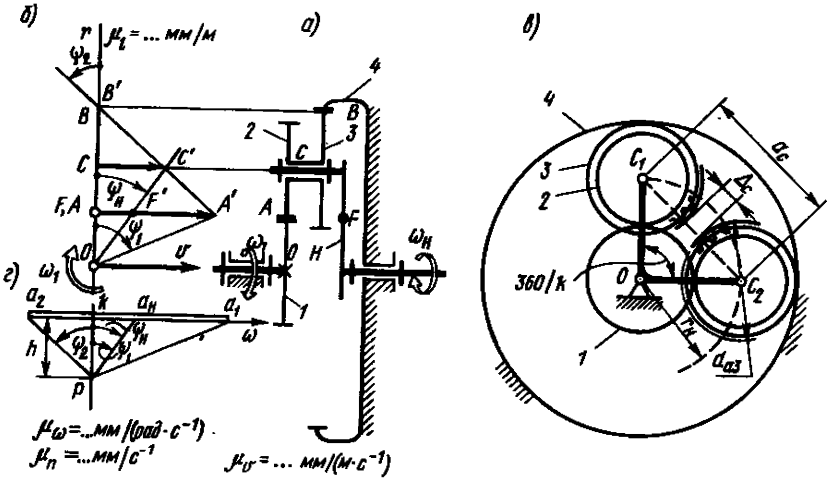


Рис. 16.7

представлена на рис. 16.6, а кинематическая схема изображена на рис. 16.7, *а*. Этот механизм состоит из центрального колеса *1* и водила *H*, вращающихся вокруг неподвижных осей, трех сателлитов, составленных из двух жестко связанных в единый блок колес *2* и *3*, опорного колеса *4* и стойки. При вращении колеса *1* сателлиты *2-3* поворачиваются как рычаг относительно мгновенного центра вращения *B* (колесо *4* неподвижно) и заставляют вращаться водило *H*. При этом планетарные колеса (сателлиты) совершают сложное движение: вращаются вокруг собственной оси (относительно водила) с ω_2 и вместе с водилом обкатываются с ω_H вокруг оси *OO* (переносное движение). Число степеней свободы этого механизма равно единице. Поэтому редуктор имеет постоянное передаточное отношение. Обычно у реального механизма имеется несколько симметрично расположенных сателлитов *k* (колеса *2, 3* на рис. 16.7, *а, в*). Их вводят с целью уменьшения габаритов механизма, снижения усилия в зацеплении, разгрузки подшипников центральных колес, улучшения уравновешивания водила, хотя механизм в этом случае имеет избыточные связи ($q>0$), т. е. является статически неопределимым. При кинематических расчетах учитывается один сателлит, так как остальные являются пассивными в кинематическом отношении.

Если в рассмотренном механизме (рис. 16.7) освободить от закрепления опорное колесо *4* (корпус редуктора) и сообщить ему вращение, то все центральные колеса станут подвижными и механизм превратится в дифференциальный (рис. 16.8), так как число степеней свободы *W* его будет равно двум. Число степеней свободы (подвижности) *W* механизма показывает, скольким звеньям диф-

13-462

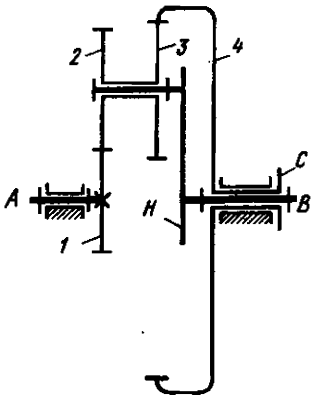


Рис. 16.8

ференциала необходимо сообщить независимые движения, чтобы получить определенность движения всех остальных звеньев. Здесь в зависимости от направления вращения наружных валов может происходить либо разложение движения (одного ведущего на два ведомых), либо сложение движения. Ведущим считается такой вал, у которого направление скорости вращения и момента сил совпадают. Следовательно, планетарный редуктор (или мультипликатор), имеющий неподвижное колесо, можно превратить в дифференциал, если освободить неподвижное (опорное) колесо и сообщить ему вращение. Наоборот, любой дифференциал можно превратить в планетарный редуктор, если закрепить одно (при $W=2$) или несколько из его центральных колес. Это так называемое *свойство обратимости планетарных механизмов*, которое позволяет применять одинаковые методы исследования и проектирования для редукторов и для дифференциалов. При этом каждому элементарному дифференциалу будут соответствовать два планетарных редуктора, получаемых при остановке одного из центральных колес. Планетарные механизмы применяются либо для воспроизведения заданной траектории (направляющие механизмы), либо, чаще, для изменения скоростей вращения (воспроизведение заданного передаточного отношения).

Аналитический метод исследования основывается на способе обращения движения, устанавливающего связь между геометрическими и кинематическими параметрами планетарных механизмов.

Мысленно сообщается всем звеньям механизма угловая скорость, равная по величине и противоположная по направлению угловой скорости водила ω_H. Тогда водило становится неподвижным и механизм из планетарного обращается в зубчатый механизм с неподвижными осями колес (обращенный механизм), состоящий из нескольких последовательно соединенных пар зубчатых колес (*1, 2* и *3, 4* для схемы на рис. 16.7, *а*). Но скорости этих колес будут иными: вместо $\omega_1^{(4)}$ будет $\omega_1^{(H)}=\omega_1^{(4)}-\omega_H^{(4)}$ (индекс в скобках указывает номер неподвижного звена); аналогично вместо $\omega_2^{(4)}=\omega_3^{(4)}$ будет $\omega_2^{(H)}=\omega_2^{(4)}-\omega_H^{(4)}=\omega_3^{(4)}-\omega_H^{(4)}$; вместо $\omega_4=0$ будет $\omega_4^{(H)}=0-\omega_H^{(4)}$. Для каждой планетарной пары обращенного механизма по формуле Виллиса (4.35) можно записать $(\omega_1^{(4)}-\omega_H^{(4)})/(\omega_2^{(4)}-\omega_H^{(4)})=-r_2/r_1$; $(\omega_3^{(4)}-\omega_H^{(4)})/(0-\omega_H^{(4)})=+r_4/r_3$. Здесь r_i — радиусы начальных окружностей.

В итоге получается система уравнений, связывающих относи-

тельные угловые скорости отдельных планетарных пар при остановленном водиле; решая ее, находим искомую величину ω или u. При этом число уравнений системы должно соответствовать числу искомых величин. Перемножая последние два выражения, имеем $(\omega_1^{(4)}-\omega_H^{(4)})/(0-\omega_H^{(4)})=-(r_2r_4)/(r_1/r_3)$. Но $[-(r_2r_4)/(r_1r_3)]=(-r_2/r_1)\times\times(+r_4/r_3)=u_{12}^{(H)}u_{34}^{(H)}=u_{14}^{(H)}$. Тогда $[(\omega_1^{(4)}/\omega_H^{(4)})-1]/(0-1)=u_{14}^{(H)}$. Откуда передаточное отношение реального механизма (при $\omega_4=0$)

$$u_{1H}^{(4)}=1-u_{14}^{(H)}. \tag{16.5}$$

Эта формула справедлива для любой схемы планетарного редуктора при наличии неподвижного центрального колеса. Значит, и передаточное отношение от любого планетарного колеса i к водилу H при неподвижном опорном колесе j равно единице минус передаточное отношение $u_{ij}^{(H)}$ от этого же колеса к опорному в обращенном механизме, т. е.

$$u_{iH}^{(j)}=1-u_{ij}^{(H)}, \tag{16.6}$$

или

$$u_{iH}^{(j)}+u_{ij}^{(H)}=1.$$

Значит, для планетарных механизмов с круглыми колесами сумма передаточных отношений при различных останавливаемых звеньях всегда равна единице. Передаточное отношение $u_{ij}^{(H)}$ обращенного механизма подсчитывают от подвижного колеса i к тому колесу, которое в реальном планетарном механизме неподвижно (j). Поэтому для схемы на рис. 16.7, *а* $u_{ij}^{(H)}=u_{14}^{(H)}=-r_2r_4/(r_1r_3)$, а для всего механизма

$$u_{1H}^{(4)}=1-u_{14}^{(H)}=1+\frac{r_2r_4}{r_1r_3}=1+\frac{z_2z_4}{z_1z_3}. \tag{16.7}$$

В отличие от механизма с неподвижными осями передаточное отношение планетарного редуктора зависит не только от числа зубьев и знака их отношения, но и числа ступеней между колесами (при остановленном водиле). Поэтому каждая конкретная схема планетарного редуктора имеет свое, вполне определенное $u_{iH}^{(j)}$, написанное через числа зубьев (или радиусы). При определении угловой скорости промежуточного колеса рекомендуется пользоваться формулой (16.6).

Графический метод исследования сводится к построению треугольников линейных скоростей каждого колеса (см. гл. 4) и нахождению из них ω_i или u_{iH}. Для этого переносятся на вертикаль (см. рис. 16.7, *б*) характерные точки схемы ($OABC$) и откладывается отрезок $AA'=v_A\mu_v$, соответствующий вектору скорости точки A колеса *1*. Соединяя точки A' и O наклонным лучом (под углом ψ_1), получаем треугольник скоростей этого колеса, в котором OA' — прямая распределения линейных скоростей первого колеса.

Треугольник скоростей колес *2-3* строится по известным линейным скоростям двух точек: точки A (где $v_{A2}=v_{A1}$) и точки B (мгновенный центр скоростей колес *2-3*), где $v_B=0$. Соединяя точки A' и B, получаем прямую распределения скоростей колес *2-3* (под углом ψ_2). На этой прямой лежит точка C' — конец вектора CC', который соответствует линейной скорости центра сателлитов *2-3* и точки C водила. Проводя луч OC' (под углом ψ_H), получаем треугольник скоростей для водила ($\Delta OCC'$). Отношение тангенсов углов наклона линий скоростей входного и выходного звеньев дает значение передаточного отношения данной схемы редуктора $u_{1H}^{(4)}=\omega_1/\omega_H=$ $=\operatorname{tg}\psi_1/\operatorname{tg}\psi_H=(AA'/OA)\,(OC/CC')$. Учитывая, что $AA'=CC'\,(AB/BC)$, имеем $u_{1H}^{(4)}=(r_4-r_1)\,(r_1+r_3)/(r_1r_3)=1+(r_2r_4)/(r_1r_3)$; $\omega_2=\omega_3=\frac{\mu_e}{\mu_v}\operatorname{tg}\varphi_2$.

Строя план угловых скоростей (рис. 16.7, *г*), можно определить $\omega_2=ka_2/\mu_\omega$; $\omega_H=ka_H/\mu_\omega$ ($\mu_\omega=\frac{\mu_v}{\mu_e}pk$) или $n_H=ka_H/\mu_n$; $u_{1H}^{(4)}=ka_1/(ka_H)$.

Если известны моменты сил M_1 и M_2 на входном и выходном валах редуктора и если считать, что трение отсутствует и звенья движутся равномерно, то передаточное отношение может быть определено из соотношения

$$u_{1H}^{(4)}=\omega_1^{(4)}/\omega_H^{(4)}=-M_H/M_1. \qquad (16.8)$$

Кинематическое исследование дифференциального механизма с целью нахождения скоростей вращения звеньев проводится аналогично.

Любой элементарный дифференциал с $W=2$, который нельзя разложить на более простые самостоятельные механизмы (рис. 16.8), в отличие от редуктора имеет три наружных вала: A, B, C. Поэтому положение каждого звена в таком механизме определяется двумя независимыми обобщенными координатами (углами поворота двух валов), т. е. $\varphi_C=f(\varphi_A, \varphi_B)$. Тогда угловая скорость ведомого звена, согласно формуле (4.1), будет

$$\omega_C=u_{CA}^{(B)}\omega_A+u_{CB}^{(A)}\omega_B. \qquad (16.9)$$

Используя эту формулу, можно определить ω_H для механизма, изображенного на рис. 16.8 (при известных z_i, ω_1, ω_4):

$$\omega_H=\omega_1 u_{H1}^{(4)}+\omega_4 u_{H4}^{(1)}. \qquad (16.10)$$

Частное передаточное отношение (при $\omega_4=0$)

$$u_{H1}^{(4)}=\frac{1}{u_{1H}^{(4)}}=\frac{1}{1+\frac{z_2z_4}{z_1z_3}}=\frac{z_1z_3}{z_1z_3+z_2z_4}.$$

Аналогично при остановленном первом колесе ($\omega_1=0$) имеем

$$u_{H4}^{(1)}=\frac{1}{u_{4H}^{(1)}}=\frac{1}{1+\frac{z_3z_1}{z_2z_4}}=\frac{z_2z_4}{z_2z_4+z_1z_3}.$$

Подставляя эти значения в (16.10), получаем

$$\omega_H=\frac{\omega_1z_1z_3+\omega_4z_2z_4}{z_2z_4+z_1z_3}.$$

Дифференциал с $W=2$ позволяет реализовать шесть различных передаточных отношений от одного вала к другому при остановленном третьем: $u_{AB}^{(C)}$; $u_{BA}^{(C)}$; $u_{AC}^{(B)}$; $u_{CA}^{(B)}$; $u_{BC}^{(A)}$; $u_{CB}^{(A)}$. Но все эти значения взаимосвязаны, поскольку $u_{BA}^{(C)}=1/u_{AB}^{(C)}$ и т. д.; $u_{AB}^{(C)}+u_{AC}^{(B)}=1$; $u_{BC}^{(A)}+u_{BA}^{(C)}=1$; $u_{CA}^{(B)}+u_{CB}^{(A)}=1$. Кроме того, среди этих шести значений всегда есть одно наибольшее (>2) и положительное, которым удобно пользоваться для характеристики механизма в целом.

Кинематический расчет пространственных планетарных передач, составленных из конических зубчатых колес, осуществляется аналитическим или графическим методом, но при исследованиях оперируют векторной величиной угловой скорости. Такие механизмы нашли широкое применение в виде дифференциалов с двумя степенями свободы (рис. 16.9, *а*). Этот механизм состоит из центральных колес *1*, *3* и водила *H*, вращающихся вокруг оси *AOF*, планетарного колеса *2*, участвующего в двух вращательных движениях в пространстве (вместе с водилом вокруг оси *OF* и относительно водила вокруг оси *OC*). Следовательно, ось *OC* является осью вращения колеса *2* относительно водила *H*, линия *OB* — осью мгновенного вращения колеса *2* относительно колеса *1*, линия *OD* — осью мгновенного вращения колеса *2* относительно колеса *3*.

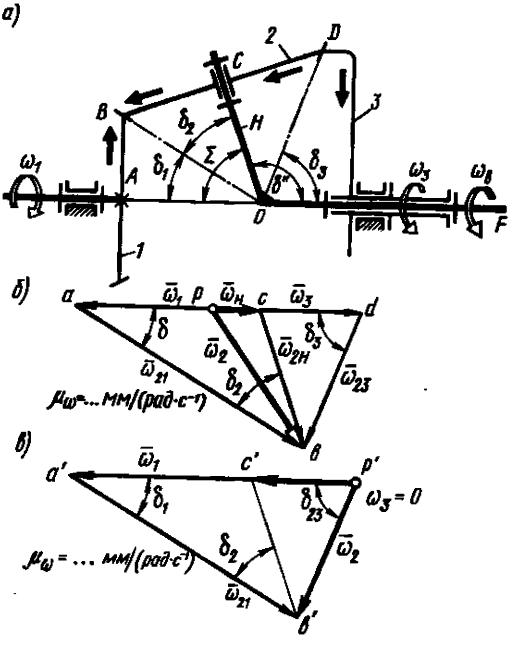


Рис. 16.9

Графический метод исследования основан на построении плана угловых скоростей (см. гл. 3). Задавшись величиной

и направлением ω_1 и ω_3 (так как $W=2$), строим план угловых скоростей (рис. 16.9, *б*), из которого определяем искомую скорость водила ω_H.

При аналитическом решении, останавливая водило, получаем обращенный механизм, у которого скорость первого колеса $\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_H$, второго $\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_H$, третьего $\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_H$. Но эти векторные разности не параллельны, поэтому их следует брать по абсолютной величине. Тогда для колес *1-2* и соответственно *2-3* будет

$$|\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_H|/|\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_H|=z_2/z_1;\ |\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_H|/|\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_H|=z_3/z_1.$$

После перемножения получим $|\bar{\omega}-\bar{\omega}_H|/|\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_H|=z_3/z_1$. Но так как векторы $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_H$, $\bar{\omega}_3$ направлены по одной прямой, то разности скоростей в последнем уравнении являются алгебраическими. Знак определяется по правилу стрелок, показывающих направление вращения колес при остановленном водиле. Тогда $(\omega_1-\omega_H)/(\omega_3-\omega_H)=-z_3/z_1$. Минус справа потому, что направления стрелок на колесах *1* и *3* (рис. 16.9, *а*) не совпадают. Из последнего выражения определяется $\omega_H=(\omega_1+\omega_3 z_3/z_1)/(1+z_3/z_1)$. Это же решение может быть получено и из рассмотрения треугольников *abc* и *bcd* (рис. 16.9, *б*).

Широко используется дифференциальный механизм данной схемы с $z_1=z_3$ и $\Sigma=90°$ в автомобилях, станках, счетно-решающих устройствах. При этом $\omega_H=0{,}5\,(\omega_1+\omega_3)$. Поэтому при $\omega_3=0$ колесо *1* будет вращаться в два раза быстрее водила. Если $\omega_H=0$, то $\omega_1=-\omega_3$ и колеса будут вращаться только в противоположные стороны. Если это редуктор, т. е. одно колесо заторможено ($\omega_3=0$), то, используя те же уравнения, будем иметь свой план угловых скоростей (рис. 16.9, *в*). Взяв из него отношение отрезков $a'p'/c'p'=\omega_1/\omega_H$, $u_{1H}^{(3)}$, взяв отношение $a'c'/c'p'=(\omega_1-\omega_H)/(\omega_3-\omega_H)$, получим $u_{13}^{(H)}$, величина которого положительна. Используя (16.6), находим аналитически $u_{1H}^{(13)}=1-u_{13}^{(H)}=1-(-z_3/z_1)=1+z_3/z_1$.

§ 16.3. ВЫБОР СХЕМ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ И ИХ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ

В инженерной практике получили распространение четыре схемы простейших планетарных механизмов, в которых сателлиты (двойные — рис. 16.7, 16.10, одинарные — рис. 16.11) зацепляются одновременно с двумя центральными колесами. Все они имеют три соосных вала, один из которых неподвижный. Поочередное затормаживание одного из валов позволяет получать в каждом механизме на выходе три различные скорости. Передаточное отношение всех этих редукторов определяется одинаково формулой (16.6), из которой следует, что в зависимости от знака $u_{ij}^{(H)}$ механизмы обладают разными кинематическими возможностями. Если $u_{ij}^{(H)}>0$, то передаточное отношение реального планетарного механизма

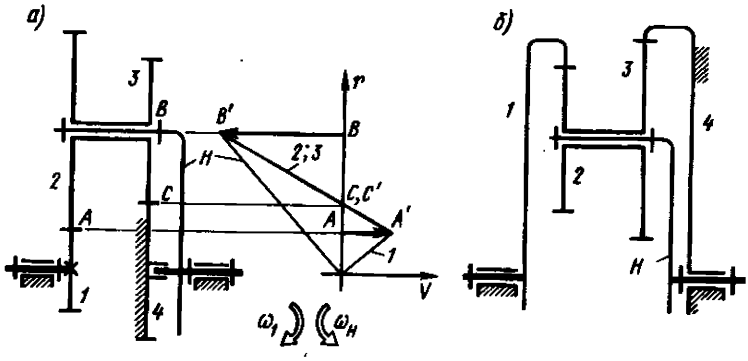


Рис. 16.10

$u_{\text{рел}} = u_{1H}^{(i)}$ может быть значительно больше передаточного отношения обращенного механизма $u_{ij}^{(H)}$, составленного из тех же колес. Если $u_{ij}^{(H)} < 0$, то передаточное отношение планетарного механизма $u_{1H}^{(i)}$ лишь на единицу больше $u_{ij}^{(H)}$ обращенного механизма. В соответствии с этим будут различны потери на трение и динамические качества передач. Все эти качества в значительной мере предопределяются принципом образования структурных схем простейших планетарных механизмов. Поэтому все схемы простейших механизмов по своим свойствам подразделяются на две основные группы: механизмы с положительным передаточным отношением обращенного механизма ($u_{ij}^{(H)} > 0$) — рис. 16.10, *а,б*, и механизмы с отрицательным передаточным отношением обращенного механизма ($u_{ij}^{(H)} < 0$) — схемы на рис. 16.7 и 16.11.

Механизмы первой группы имеют двойные сателлиты и могут быть составлены из колес однотипного только внешнего (схема *а*) *либо только внутреннего* (схема *б*) *зацепления*. Передаточное отношение реального механизма будет $u_{1H}^{(4)} = 1 - (z_2 z_4 / z_1 z_3)$. Как правило, такие механизмы работают как понижающие передачи, т. е. ведущим является водило. Тогда получим $u_{H1}^{(4)} = 1/u_{1H}^{(4)} = z_1 z_3/(z_1 z_3 - z_2 z_4)$.

Так как приведенный механизм здесь (рис. 16.10, *а*) получается двухрядным (колеса *1-2* и *3-4*), то за счет подбора чисел зубьев колес можно получить большие передаточные отношения. Так, например, если в схеме на рис. 16.10, *а* принять $z_1 = z_3 = 100$; $z_2 = 99$; $z_4 = 101$, то $u_{1H}^{(4)} = 1/(1 - u_{14}^{(H)}) = 1/[1 - (9999/100\,000)] = 10\,000$. Однако к.п.д. $< 1\%$.

Передаточное отношение в таких механизмах тем больше, чем меньше $u_{14}^{(H)}$ отличается от 1. Но при увеличении $u_{H1}^{(4)}$ одновременно значительно снижается к.п.д. Обычно такие механизмы используются при одном сателлите, когда необходимо получить большое передаточное отношение, не взирая на низкий к.п.д. (в несиловых передачах). Особенностью механизмов этих схем является то, что за

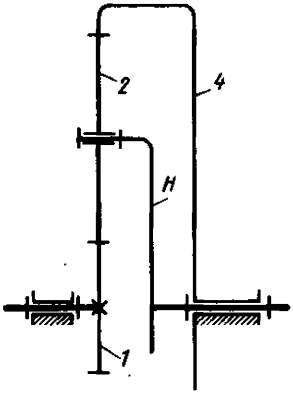


Рис. 16.11

счет изменения размеров закрепленного центрального колеса (рис. 16.10) можно получить вращение наружных валов, либо одного направления, либо разных. При очень больших передаточных отношениях значительно больше проявляется влияние неточности изготовления и сборки на постоянство передаточного отношения в пределах оборота. Поэтому, несмотря на большие кинематические возможности, планетарные механизмы этой группы используют лишь в тех случаях, когда полезные нагрузки невелики. Обычно здесь $u_р = 30 \div 100$ при приемлемых к.п.д., а в маломощных передачах $u_р$ достигает 1500 — 1700. Преимущество имеют механизмы с двумя внутренними зацеплениями, обладающие меньшими габаритами и большими к.п.д. (рис. 16.10, *б*).

Механизмы второй группы составляются обязательно из колес разнотипного зацепления с двойным (рис. 16.7) *или одинарным* (рис. 16.11) *сателлитом*. В соответствии с этим обращенный механизм получается либо двухрядный (рис. 16.7), у которого $u_{14}^{(H)} = (-z_2/z_1)(+z_4/z_3) < 0$, либо однорядный (рис. 16.11). Поэтому у реального механизма для первой схемы $u_{1H}^{(4)} = 1 + (z_2 z_4/z_1 z_3)$, для второй (где $z_2 = z_3$) будет $u_{1H}^{(4)} = 1 + (z_4/z_1)$, а направление вращения

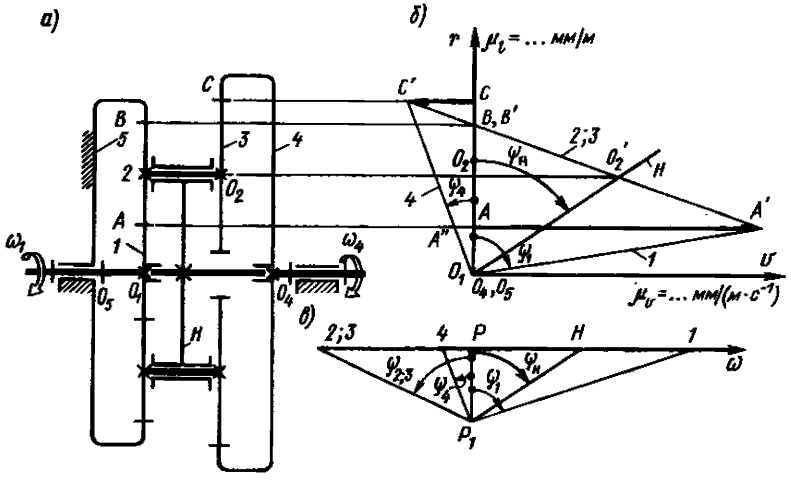


Рис. 16.12

выходного и входного валов всегда одинаково. Механизмы этих схем имеют широкое применение в силовых передачах многосателлитных редукторах средней и большой мощности при $u_{1H}^{(4)}=3\div15$ и высоком к.п.д. (0,96 — 0,98). Наличие нескольких сателлитов ($k>1$) позволяет значительно снизить габариты, улучшить динамику (уравновешивание, разгрузку опор центральных колес и водила и пр.) и уменьшить вес по сравнению с другими видами зубчатых передач при тех же передаточных отношениях. При ведущем колесе *1* эти механизмы работают как редуктор. Однорядный механизм (рис. 16.11), обычно применяемый при $u_{1H}^{(4)}=3\div8$, имеет те же достоинства, что и вышеупомянутые механизмы, но выгодно отличается малым осевым размером, наименьшая величина которого получается при $u_{1H}^{(4)}\leqslant4$. Механизм такой схемы широко используется в силовых передачах, в многоступенчатых планетарных коробках скоростей или как самостоятельная передача и особенно в качестве встроенных редукторов электроприводов, установок дистанционного управления, летательных аппаратов и т. д.

Последующее развитие структуры планетарных механизмов в осевом направлении приводит к схемам с тремя центральными колесами рис. 16.12. Водило здесь свободно вращается в опорах, не передавая движения. При кинематическом исследовании этот механизм расчленяется на два простых: первый включает центральные колеса *1*, *5*, сателлит *2* и водило *H* (рис. 16.12, *а*); второй состоит из центрального колеса *4*, сателлита *3* и водила *H*. При неподвижном колесе *5* $W=1$ и общее передаточное отношение редуктора

$$u_{14}^{(5)}=\frac{\omega_1}{\omega_4}=\frac{\omega_1}{\omega_H}\frac{\omega_H}{\omega_4}=u_{1H}^{(5)}u_{H4}^{(5)}=$$

$$=(1-u_{15}^{(H)})\frac{1}{1-u_{45}^{(H)}};$$

$$u_{14}^{(5)}=\left(1+\frac{z_5}{z_1}\right)\frac{1}{1-\dfrac{z_3z_5}{z_4z_2}}=\frac{z_2z_4(z_1+z_5)}{z_1(z_4z_2-z_3z_5)}.$$

Это позволяет за счет подбора соответствующих чисел зубьев получать большие передаточные отношения ($u_р>100$) при хорошем к.п.д. и большой компактности. Из построенных треугольников скоростей (рис. 16.12, *б*) и плана угловых скоростей (рис. 16.12, *в*) видно, что ведущее и ведомое колеса вращаются в разные стороны. Наиболее рациональная конструкция получается при $u_р=20\div100$, хотя к.п.д. несколько ниже, чем в планетарных передачах с двумя центральными колесами.

Развитие структуры планетарных механизмов в радиальном направлении приводит к бипланетарным механизмам (рис. 16.13), которые состоят из основного планетарного механизма (о.п.м.)

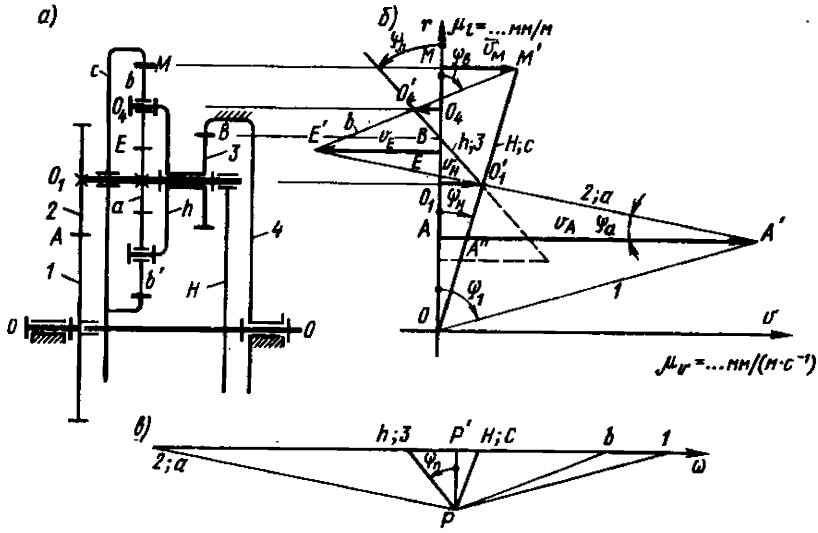


Рис. 16.13

(звенья *1, 2, H, 4*) и сателлитного планетарного механизма (с.п.м.) из звеньев (*a, b, c, 3 — h*). Сателлит *2* о.п.м. скреплен с центральным колесом *a* с.п.м., сателлит *3* — с водилом *h* с.п.м., а водило *H* — с колесом *c*. Останавливая водило *H* ($\omega_H=0$), получаем планетарный механизм $a-b-c-h$ и две пары колес *1-2* и *3-4* с неподвижными осями, для которого $u_{14}^{(H)}=u_{12}^{(H)}u_{ah}^{(H)}u_{34}^{(H)}$ (рис. 16.13, *а*). Применяя второе обращение (полагая $\omega_h=0$) только для с.п.м., получим (при $\omega_c=0$) $u_{ah}^{(c)}=1-u_{ac}^{(h)}=1+(z_c/z_a)$. Передаточное отношение всего бипланетарного механизма

$$u_{1H}^{(4)}=1-u_{14}^{(H)}=1-u_{12}^{(H)}(1-u_{ac}^{(h)})\,u_{34}^{(H)}, \qquad (16.11)$$

или

$$u_{1H}^{(4)}=1-\left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(1+\frac{z_c}{z_a}\right)\left(+\frac{z_4}{z_3}\right)=1+\frac{z_2z_4}{z_1z_3}\left(\frac{z_a+z_c}{z_a}\right).$$

Обычно $u_{1H}^{(4)}=17\div85$ при хороших к.п.д. Угловые скорости промежуточных звеньев: относительная скорость малого водила *h* будет $\omega_{hH}=\omega_{3H}=\omega_3-\omega_H=-u_{34}^{(H)}\omega_H=-u_{34}^{(H)}\omega_1/u_{1H}^{(4)}$; большого водила: $\omega_H=\omega_1/u_H^{(4)}$; ведущего звена с.п.м. $\omega_a=\omega_2-\omega_H=(\omega_1/u_{12}^{(H)})(1-u_{H1}^{(4)})$ и т. д.

Графические построения для определения передаточного отношения (рис. 16.13, *б*) удобно начинать с линии *H*; задаваясь ω_H, строят скорость $v_H=\omega_H O_1O$, а затем проводятся линия *h* (скорость

оси сателлита O_4O_4), линия b (по v_{04} и $v_м$), линия *2-а* и линия *1*:

$$u_{1H}^{(4)}=\omega_1/\omega_H=\operatorname{tg}\psi_1/\operatorname{tg}\psi_H=AA'/AA''>0;\ \omega_a=(\mu_e/\mu_v)\operatorname{tg}\psi_a.$$

Из плана угловых скоростей (рис. 16.13, *в*) видно, что входное *1* и выходное *H* звенья вращаются в одном и том же направлении. Такие механизмы в основном применяются для получения сложного движения исполнительных органов в технологических машинах.

Если два соосных вала зубчатого дифференциала соединяются (замыкаются) с ведущим или ведомым валом через какую-либо передачу (простую зубчатую или планетарную), то получается замкнутая планетарная передача (рис. 16.14, *а, б*). Такой механизм получается, если в однорядном дифференциале с тремя вращающимися соосными валами замкнуть звено *3* и *H* через зубчатую передачу, состоящую из двух пар колес *4-5* и *6-7*. Тогда ведомое звено *7* получает вращение от звена *3* через колеса *4-5* и параллельно от звена *H* через пару колес *6-7*. Механизм имеет одну степень свободы $W=1$.

Построение плана скоростей удобнее начинать с конечного звена *7*, а затем строить линии *3-4*, *6-H*, *2* и *1*. Передаточное отношение всего механизма $u_{17}=-\operatorname{tg}\psi_1/\operatorname{tg}\psi_7$.

Для аналитического определения передаточного отношения следует пользоваться формулой Виллиса. Останавливая водило, имеем для колес *1-3*: $(\omega_1-\omega_H)/(\omega_3-\omega_H)=-r_3/r_1$; для колес *4-5* будет $\omega_4/\omega_5=-r_5/r_4$; для колес *6-7* имеем $\omega_6/\omega_7=+r_7/r_6$. Заменяя в первом выражении $\omega_3=\omega_4=-\omega_5(r_7/r_4)$ и $\omega_H=\omega_6=\omega_7(r_7/r_6)$, имеем

$$\frac{\omega_1-\omega_7(r_7/r_6)}{-\omega_5(r_5/r_4)-\omega_7(r_7/r_6)}=-\frac{r_3}{r_1}.$$

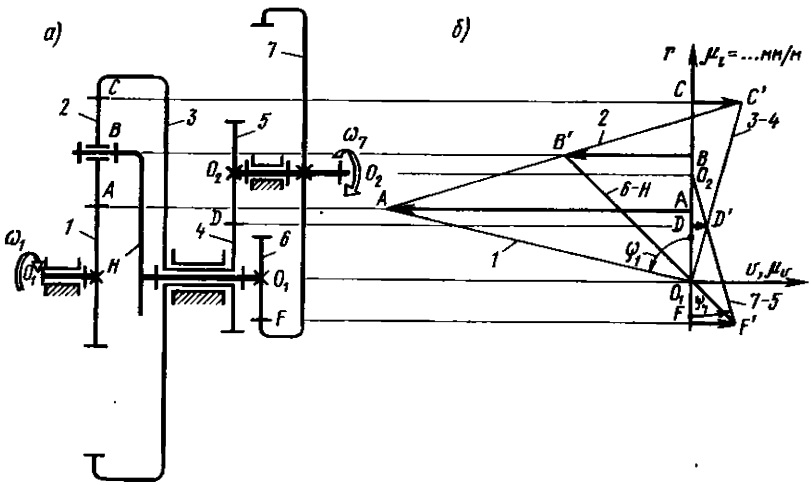


Рис. 16.14

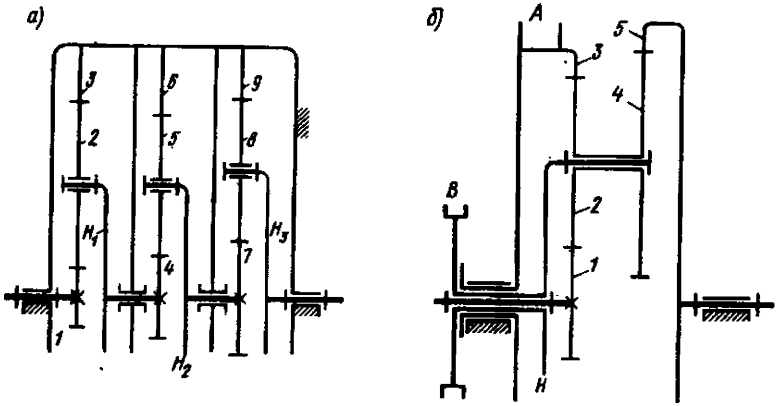


Рис. 16.15

Делим на ω_7 и определяем

$$u_{17}=\omega_1/\omega_7=-\frac{r_3}{r_1}\left(-\frac{r_5}{r_4}-\frac{r_7}{r_6}\right)+\frac{r_7}{r_6}=\frac{r_3r_5}{r_1r_4}+\frac{r_3r_7}{r_1r_6}+\frac{r_7}{r_6}.$$

Замкнутые дифференциальные механизмы обычно имеют более высокий к.п.д., что объясняется возможностью разделения передаваемой мощности на два параллельных потока и позволяет реализовать значительно большие крутящие моменты на выходе при малых габаритах привода. При этом надо следить, чтобы потоки мощности не были встречными, что может вызвать циркуляцию ее и потери. Такие передачи используются, как правило, в силовых приводах.

Для осуществления больших передаточных отношений применяются многоступенчатые планетарные механизмы, образуемые последовательным соединением простейших планетарных механизмов (рис. 16.15, *а*). Такой многоступенчатый редуктор, составленный из трех однорядных механизмов по рис. 16.11, *а*, будет иметь

$$u_{общ}=u_{1H3}=u^{(3)}_{1H1}u^{(6)}_{4H2}u^{(9)}_{7H3}=(1+z_3/z_1)\left(1+\frac{z_6}{z_4}\right)(1+z_9/z_7).$$

Если $u^{(3)}_{1H1}=u^{(6)}_{4H2}=u^{(9)}_{7H3}=7$, то при высоком к. п. д. (88 — 94%) и меньших габаритах $u_{общ}=7^3=343$, что больше, чем у редуктора с неподвижными осями (при одинаковых мощностях и таком же $u_{общ}$). Соединение здесь звеньев с тормозами позволяет получать различные значения угловой скорости ведомого звена ω_{H3} при неизменной скорости ведущего вала.

Механизм, включающий две планетарные ступени с общим водилом (рис. 16.15, *б*), называют сдвоенным планетарным механизмом. Такие механизмы используются в коробках скоростей (транспортные, грузоподъемные машины). Затормаживая в них по очереди звенья, можно получить несколько скоростей вращения ведомого звена при постоянной скорости ведущего. Так, в схеме, приведенной на рис. 16.15, *б*, при затормаживании звена *3* (тормозной барабан *A*) получается двухступенчатый редуктор: первая планетарная ступень составлена из звеньев *1-2-3-H* и вторая — из звеньев *H-3-4-5*. Общее передаточное отношение редуктора

$$u_{\text{общ}} = u_{1H}^{(3)} u_{H5}^{(3)} = (1 - u_{13}^{(H)}) \frac{1}{1 - u_{53}^{(H)}} = \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right) \frac{1}{1 - \dfrac{z_4 z_3}{z_5 z_6}}.$$

При затормаживании звена *H* (водило) получается ступенчатый механизм с неподвижными осями, составленный из колес *1-2-4-5* $u_{\text{общ}} = -z_2 z_5/(z_1 z_4)$; колесо *3* при этом вращается вхолостую.

Увеличивая число планетарных ступеней, можно получить коробку скоростей с большим числом скоростей ведомого вала (трехскоростная, четырехскоростная и т. д.), исследование которых проводят аналогично, к.п.д. при этом обычно 0,9 — 0,8.

При проектировании многоступенчатых планетарных механизмов первостепенное значение имеет распределение общего передаточного отношения $u_{\text{общ}}$ по ступеням так, чтобы в каждой ступени оно не превышало рационально допустимого значения и чтобы в тихоходной передаче оно было бы меньше, чем в быстроходной (первой от ведущего звена). От выбора передаточных отношений отдельных ступеней зависят габариты механизма, к.п.д., точность передачи движения, условия изготовления и т. д. При этом должны учитываться и конкретные условия, в которых будет работать механизм. В коробках скоростей транспортных машин $u_{\text{общ}}$ разбивается так, чтобы наибольшие размеры ступеней по диаметру были бы одинаковыми.

Для приборных устройств, где требуется точность поворота выходного вала, следует назначать большее передаточное отношение для последней ступени.

Таким образом, заданное передаточное отношение можно обеспечить множеством различных схем планетарных передач, которые будут значительно отличаться по размерам, к.п.д., динамическим качествам. Схемы должны выбираться как с учетом качества простых планетарных передач, из которых компонуется зубчатый редуктор, так и назначения механизма, условия и режима его работы, места установки, а также учета типа передачи и вида зацепления, распределения $u_{\text{общ}}$ по ступеням и выбора числа ступеней, оценки

потерь на трение, вибрации и упругости звеньев и пр. Поэтому в общем случае выбор схемы с учетом множества факторов может быть выполнен только методами оптимизации с применением ЭВМ.

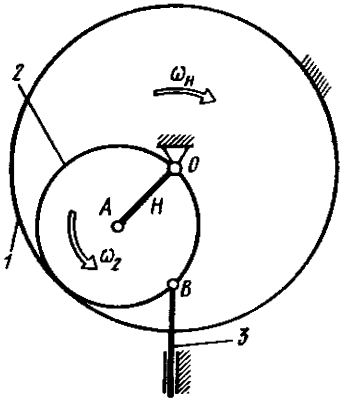


Рис. 16.16

В инженерной практике планетарные механизмы применяются также в качестве направляющих механизмов. Например, для преобразования вращательного движения в поступательное в прессах используется планетарный механизм с одним неподвижным центральным колесом (рис. 16.16). При вращении водила точка *B* сателлита *2* перемещается по прямой, совпадающей с диаметром неподвижного колеса *1*, у которого $z_1=2z_2$. Соединяя шарнирно точку *B* сателлита со звеном *3*, получаем прямолинейное движение его. Здесь $u_{H2}^{(1)}=\omega_H/\omega_2=1/u_{2H}^{(1)}=1/(1-z_1/z_2)=1/(1-2)=-1$, т. е. $\omega_2=-\omega_H$. Если в этом механизме обеспечить $(z_1-z_2)=1\div4$, то можно получить значительные $u_{H2}^{(1)}$, что как раз и реализовано в волновых зубчатых передачах, в которых волнообразователь выполняет роль водила, а движение гибкого колеса соответствует движению сателлита.

В рабочих машинах для получения сложного движения исполнительного звена используется механизм, состоящий из одного неподвижного центрального колеса, вокруг которого вращается водило с сателлитами *2* и *3*. Если $z_3=z_1$ (рис. 16.17), то третье колесо движется поступательно (не вращается), что хорошо видно из треугольника скоростей звена *3*, у которого $v_C=v_D=v_E$ (так как

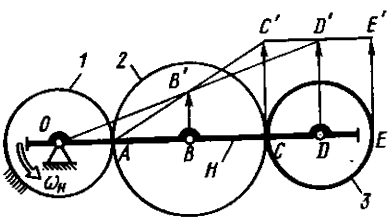


Рис. 16.17

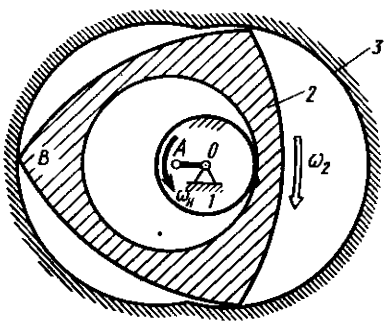


Рис. 16.18

$C'D'E' \| OD$). На этом колесе *3* обычно закрепляется исполнительное звено.

Если здесь центральное колесо *1* (при $\omega_1 = 0$) сочетается с сателлитом *2* с внутренними зубьями, который выполнен заодно с роторным поршнем двигателя (рис. 16.18), получающим вращение за счет изменения давления продуктов сгорания в цилиндре *3*, то можно с вала водила снимать вращение с $\omega_H = \omega_2 z_2/(z_2 - z_1)$. При этом точка *B* сателлита описывает эпитрохоиду, по которой выполнена рабочая полость цилиндра *3*.

§ 16.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ ЗУБЬЕВ КОЛЕС ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

После выбора схемы планетарной передачи, назначения числа сателлитов (k) и модуля (m) производится определение чисел зубьев колес так, чтобы наиболее точно обеспечить заданное передаточное отношение, а также условия соосности, соседства, сборки и отсутствия заклинивания колес передачи.

Заданное передаточное отношение обеспечивают подбором чисел зубьев так, чтобы при подстановке их значений в выражение (16.6) получаемое фактическое значение передаточного отношения максимально приближалось к заданному. Допустимое отклонение фактического от заданного 1—4%.

Условие соосности входного и выходного валов указывает на то, что оба центральных зубчатых колеса и водило должны иметь общую геометрическую ось вращения, благодаря чему обеспечивается зацепление сателлитов с центральными колесами и $r_H = \text{const}$. Для этого (см. рис. 16.10, *а, б*; 16.7, *а*; 16.11) должно быть:

$$\begin{aligned} r_{H1} &= r_1 + r_2 = r_3 + r_4; & z_1 + z_2 &= z_3 + z_4; \\ r_{H2} &= r_1 - r_2 = r_4 - r_3; & z_1 - z_2 &= z_4 - z_3; \\ r_{H3} &= r_1 + r_2 = r_4 - r_3; & z_1 + z_2 &= z_4 - z_3; \\ r_{H4} &= r_1 + r_2 = r_3 - r_2; & z_1 + z_2 &= z_3 - z_2. \end{aligned} \qquad (16.12)$$

Это условие ограничивает выбор размеров (или z) одного из четырех колес при произвольном назначении трех остальных.

Условие соседства (условие совместного размещения нескольких сателлитов по общей окружности в одной плоскости) требует, чтобы при многосателлитной конструкции соседние сателлиты не задевали своими зубьями друг друга. Для этого необходимо назначать числа зубьев (радиусы) колес так, чтобы расстояние между осями соседних сателлитов a_c было бы больше диаметра окружности вершин d_{ac}^{max} наибольшего из сателлитов *3* (см. рис. 16.7, *в*), т. е. $a_c > d_{ac}^{max}$ или $a_c = d_{ac}^{max} + \Delta_c$, где Δ_c — зазор между окружностями вер-

шин соседних сателлитов, величина которого определяется допусками на точность сборки. Из треугольника C_1OC_2 этого рисунка $a_c = 2(r_1+r_2)\sin(\pi/k)$, где k — число сателлитов. Тогда $\sin(\pi/k) > d_{ac}^{max}/[2(r_1+r_2)]$. Для колес без смещения это условие имеет вид

$$\sin\frac{\pi}{k} > \frac{z_c^{max}+2h_a^*}{z_1+z_2}. \qquad (16.13)$$

Если в механизме $z_2 > z_3$, то берется $z_c^{max} = z_2$; если $z_2 < z_3$, то ставят $z_c^{max} = z_3$. В знаменателе берется плюс при внешнем и минус при внутреннем зацеплении колес *1—2*.

Условие сборки (собираемости) при равных углах между сателлитами учитывает необходимость одновременного зацепления всех сателлитов с центральными колесами при симметричной геометрии зон зацепления. После установки первого сателлита подвижное центральное колесо принимает строго определенное положение, и если не выполнить некоторых требований, то при установке следующих сателлитов их зубья могут и не оказаться точно против впадин одного из центральных колес и тогда осуществить сборку механизма невозможно.

Избежать этого можно выбором чисел зубьев колес таким образом, чтобы зубья сателлитов (колеса *2* и *3* на рис. 16.7, *в*) точно вошли во впадины центральных колес (*1* и *4*).

Проще всего правильная сборка осуществляется, если сателлиты равномерно располагаются по окружности r_H, т. е. если центральные углы между радиусами-векторами центров сателлитов одинаковы и равны $360/k$. Это упрощает изготовление и эксплуатацию механизма (позволяет избежать применения противовесов). Чтобы сформулировать искомое условие, рассмотрим процесс сборки редуктора (см. рис. 16.7, *в*). Причем условимся ставить сателлиты на свою ось в водиле в одном и том же положении, когда центр сателлита располагается на вертикали, проходящей через ось центральных колес и ось симметрии впадины зуба этих колес. Обычно оба колеса блока сателлитов имеют одинаковую ориентацию зубьев друг относительно друга у всех k блочных сателлитов. Поставив первый сателлит на ось, когда она занимает «вертикальное» положение, поворачиваем водило на угол $\varphi_H = \frac{2\pi}{k}$. При этом первое колесо повернется также на некоторый угол $\varphi_1 = \varphi_H u_{1H}$.

Но при этом, как правило, середина его впадины между зубьями не совпадает с вертикалью и установить второй сателлит на свою ось, находящуюся теперь на том месте, которое занимал первый сателлит до поворота водила («вертикальное» положение), оказыва-

ется невозможно. Тогда надо повернуть водило дополнительно на один полный оборот (2π) или несколько полных поворотов водила $П$, т. е. взять $\varphi_H = 2\pi/k + 2\pi П$ так, чтобы совместилась ось впадины первого колеса с вертикалью. При одинаковых сателлитах второй сателлит войдет на свое место в том же «вертикальном» положении только тогда, когда сцепляющееся с ним центральное колесо (ведущее) повернется на целое число угловых шагов τ_1 (целое число зубьев z_1), т. е. когда $\varphi_1 = Ц\tau_1 = Ц2\pi/z_1$, где $Ц$ — любое целое число. Делая подстановку, получаем, $Ц2\pi/z_1 = \varphi_H u_{1H}$, или $Ц2\pi/z_1 = (2\pi/k + 2\pi П)\, u_{1H}$. Откуда

$$\frac{z_1 u_{1H}}{k}(1 + kП) = Ц. \qquad (16.14)$$

В простейшем случае при $П = 0$ $(z_1 u_{1H})/k = Ц_0$. Тогда окончательно условие сборки имеет вид

$$Ц_0\,(1 + kП) = Ц. \qquad (16.15)$$

Выполнение этого условия означает, что если один из сателлитов установить в выбранном вертикальном положении, то все последующие сателлиты свободно входят в зацепление с соответствующими центральными колесами в том же положении при повороте водила на угол

$$\varphi_H = \frac{2\pi}{k}(1 + kП). \qquad (16.16)$$

Если при назначенном числе зубьев $Ц_0$ окажется не целым числом, то надо подобрать $П \neq 0$ таким, чтобы выражение $(1 + kП)$ стало кратным знаменателю, а $Ц$ обращалось в целое число. Если $Ц_0$ равно целому числу, то для установки сателлитов достаточно повернуть водило только на угол $\varphi_H = 2\pi/k$. Можно также использовать условие сборки в виде

$$\frac{z_1 z_3 u_{1H}^{(4)}}{k Д_{2,\,3}} = Ц,$$

где z_1 — число зубьев ведущего колеса; $Д_{2,\,3}$ — наибольший общий делитель чисел зубьев колес z_2 и z_3 сателлита.

Условие правильного зацепления — условие отсутствия заклинивания передачи (при назначенном числе зубьев колес, выполненных без подреза и среза зубьев). Чтобы избежать заклинивания передач

внутреннего зацепления, составленных из эвольвентных нулевых колес с прямыми зубьями, необходимо (см. гл. 13) для колес с внутренними зубьями при $\alpha=20°$ и $h_a^*=1{,}0$ выбрать $z_{\min вн}=85$; при $h_a^*=0{,}8$ должно быть $z_{\min вн}=58$; для сцепляющихся с ними колес с внешними зубьями соответственно $z_{\min вн}=20$ или 18 зубьев, а для всей передачи разность чисел зубьев сцепляющихся колес $z_{вн}-z_{вш}$ должна быть не менее 8 при $h_a^*=1{,}0$ и не менее 7 при $h_a^*=0{,}8$.

Во избежание подрезания зубьев эвольвентных нулевых колес для передач внешнего зацепления при $\alpha=20°$ и $h_a^*=1{,}0$ следует выбирать $z_{\min}\geqslant 17$; при $h_a^*=0{,}8$ соответственно $z_{\min}\geqslant 14$ (см. гл. 14).

В зацеплениях, составленных из эвольвентных косозубых колес, число зубьев малого колеса может быть значительно снижено.

При неэвольвентном профиле зуба условие правильного зацепления должно быть выбрано в соответствии с теорией используемого зацепления (см. гл. 14).

При составлении исходных уравнений (условий) для каждой конкретной схемы необходимо учитывать вид профиля колеса, модули рядов колес, конструктивные ограничения (габариты, КПД, допустимая скорость вращения сателлита).

Таким образом, задача определения числа зубьев сводится к составлению исходных уравнений, отражающих указанные условия для каждой конкретной схемы, и совместному решению их. Методов решения, а значит, и методов подбора чисел зубьев, обеспечивающих все эти условия, имеется много.

Так, для однорядного механизма (см. рис. 16.11), составленного из эвольвентных прямозубых нулевых колес, исходные уравнения вышеперечисленных условий будут: уравнение передаточного отношения $u_{1H}^{(4)}=1+z_4/z_1$; условие соосности $z_1+z_2=z_4-z_2$; условие равного угла между сателлитами (условие сборки) $z_1u_{1H}^{(4)}(1+kП)/k=Ц$; условие соседства (для нулевых колес) $\sin(\pi/k)>(z_2+2h_a^*)/(z_1+z_2)$; условие правильного зацепления (при $h_a^*=1{,}0$ и $\alpha=20°$) в виде неравенств $z_1\geqslant 17$; $z_4\geqslant 85$; $(z_4-z_2)>8$; $z_2\geqslant 20$.

Из первого условия определим $z_4=z_1(u_{1H}^{(4)}-1)$, а из второго — $z_2=(z_4-z_1)/2=[z_1(u_{1H}^{(4)}-1)-z_1]/2=z_1(u_{1H}^{(4)}-2)/2$.

Для определения чисел зубьев колес составим систему отношений:

$$z_1:z_2:z_4:Ц=z_1:\frac{z_1(u_{1H}^{(4)}-2)}{2}:z_1(u_{1H}^{(4)}-1):\frac{z_1u_{1H}^{(4)}}{k}(1+kП),$$

или

$$z_1:z_2:z_4:Ц=\left[1:\frac{u_{1H}^{(4)}-2}{2}:(u_{1H}^{(4)}-1):\frac{u_{1H}^{(4)}}{k}(1+kП)\right]z_1. \qquad (16.17)$$

Это основное уравнение, позволяющее подобрать числа зубьев этих колес при выполнении первых трех условий. Здесь нужно назначить $z_1 \geqslant 17$ и получить $z_2 \geqslant 20$; $z_4 \geqslant 85$; $(z_4 - z_3) > 8$ и $Ц$ — целое число (для заданного числа сателлитов). Если $Ц$ не целое число, то условие сборки следует расширить, взяв $Ц = Ц\ (1 + kП)$, и подобрать $П$ так, чтобы $Ц$ было целым числом при назначенном z_1. Если эта попытка не дает решения, выбирают новое значение z_1. Полученные z_1, z_2, z_4 должны быть проверены по условию соседства.

Пусть известно для этой схемы механизма $u_{1H}^{(4)} = 18/5$; $k = 3$. Составим основное уравнение на базе (16.17):

$$z_1 : z_2 : z_4 : Ц = \left[1 : \frac{4}{5} : \frac{13}{5} : \frac{6}{5}\ (1 + 3П)\right] z_1,$$

зададим ряд значений z_1: пусть $z_1 = 20$ (> 17), тогда $z_2 = z_1 4/5 = 16$ (что < 20); $z_4 = 13 z_1/5 = 52$ (что < 85). Так как z_2 и z_4 меньше допустимых значений, то этот вариант отпадает. Зададим новое значение $z_1 = 35$ и получим $z_2 = 35 \cdot 4/5 = 28$; $z_3 = 91$ (> 85) и $Ц = (6/5)\ 35\ (1 + 3П) = 42\ (1 + 3П)$. Значит правая часть этого соотношения будет являться целым числом уже при $П = 0$. Поэтому и угол поворота водила для установки следующего сателлита $\varphi_H = 120°$. Полученные z проверяем по условию соседства $\sin(\pi/k) > (28 + 2)/(35 + 28)$ и убеждаемся, что неравенство выполняется. Таким образом, второй вариант при $z_1 = 35$; $z_2 = 28$; $z_4 = 91$ дает наименьшие габариты и обеспечивает $z_3 > 20$ и $z_4 > 85$.

Наиболее распространенным методом подбора чисел зубьев является *метод сомножителей*, при котором числа зубьев определяются только по двум условиям — передаточному отношению и условию соосности, а поверки — по условию сборки и соседства.

Рассмотрим сущность этого метода на примере механизма, изображенного на рис. 16.10, *а*, составленного из нулевых колес. Из уравнения передаточного отношения этой схемы $u_{1H}^{(4)} = 1 - (z_2 z_4 / z_1 z_3)$ находится значение дроби $z_2 z_4 / (z_1 z_3) = 1 - u_{1H}^{(4)} = M/N$. Каждое из этих двух взаимно простых чисел M и N несократимой дроби представляется в виде сомножителей $C_2 C_4 / (C_1 C_3)$. В свою очередь, каждое из C_i должно быть пропорционально z_i. Полагая C_2/C_1 пропорциональным z_2/z_1, получаем $z_2 = z_1\ (C_2/C_1)$. Аналогично рассуждая, имеем $z_4 = z_3\ (C_4/C_3)$. Подставляя эти значения в условия соосности $z_1 + z_2 = z_4 + z_3$, получаем (при одинаковых модулях) $z_1 + z_1\ (C_2/C_1) = z_3\ (C_4/C_3) + z_3$, или $z_1\ [(C_1 + C_2)\ C_3] = z_3\ [(C_4 + C_3)\ C_1]$.

Чтобы это соотношение было тождественно, проще всего положить $z_1 = C_1\ (C_4 + C_3)$ и $z_3 = C_3\ (C_1 + C_2)$. Аналогичные рассуждения дают $z_2 = C_2\ (C_4 + C_3)$ и $z_4 = C_4\ (C_1 + C_3)$. Чтобы выполнялось условие правильного зацепления, вводится множитель γ (любое положительное число). Тогда окончательно имеем для этой схемы:

$$z_1 = C_1\ (C_4 + C_3)\ \gamma; \quad z_2 = C_2\ (C_4 + C_3)\ \gamma;$$
$$z_3 = C_3\ (C_1 + C_2)\ \gamma; \quad z_4 = C_4\ (C_1 + C_2)\ \gamma. \tag{16.18}$$

Полученные значения z_1, z_2, z_3, z_4 проверяют по условию сборки и соседства.

Подбор чисел зубьев планетарных зубчатых механизмов по заданному передаточному отношению требует выполнеиия большого числа математических операций. Поэтому такую задачу практически решают с помощью ЭВМ. Для этого используется программа разложения заданного $u_р$ на сомножители и последующего определения z с учетом ограничений и наименьших габаритов. Иногда в программу вводятся требуемые $u_р = M/N$; $z_{i\min}$; $z_{i\max}$, k, ограничения и путем перебора определяют комбинации чисел зубьев, из которых выбирается нужное сочетание z_1, z_2, z_3, z_4 при минимальных габаритах, сохранении заданного соотношения передаточного отношения по ступеням.

Пример. Определить z_1, z_2, z_3, z_4 для механизма (см. рис. 16.10, *а*), у которого $u_{1H}^{(4)} = -1/24$; $k = 3$; $m = 1$. Находим $(z_2 z_4)/(z_1 z_3) = 1 - (-1/24) = 25/24$, которое раскладываем на сомножители

$$\frac{C_2 C_4}{C_1 C_3} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 8}$$

и т. д. Так как таких комбинаций сомножителей может быть много, то и возможных вариантов решений, удовлетворяющих указанным условиям, тоже много. Подсчитывая по формулам (16.18) числа зубьев для четырех вариантов сочетаний сомножителей, имеем:

	1	2	3	4
z_1	$6\ (5+4)\ \gamma = 54\gamma$	$8 \cdot 8\gamma = 64\gamma$	$4 \cdot 11\gamma = 44\gamma$	$3 \cdot 13\gamma = 39\gamma$
z_2	$5\ (5+4)\ \gamma = 45\gamma$	$5 \cdot 8\gamma = 40\gamma$	$5 \cdot 11\gamma = 55\gamma$	$5 \cdot 13\gamma = 65\gamma$
z_3	$4\ (6+5)\ \gamma = 44\gamma$	$3 \cdot 13\gamma = 39\gamma$	$6 \cdot 9\gamma = 54\gamma$	$8 \cdot 8\gamma = 64\gamma$
z_4	$5\ (6+5)\ \gamma = 55\gamma$	$5 \cdot 13\gamma = 65\gamma$	$5 \cdot 9\gamma = 45\gamma$	$5 \cdot 8\gamma = 40\gamma$

По условиям правильного зацепления во всех вариантах можно выбрать $\gamma=1$. Наименьшие габариты будут для варианта 1 и 3. Проверяем их по условию сборки:

$$Ц=\frac{z_1 u_{1H}^{(4)}}{k}(1+kП)=\frac{54}{3}\left(-\frac{1}{24}\right)(1+3П)=-\frac{3}{4}(1+3П).$$

Чтобы оно выполнялось, необходимо иметь $(1+3П)$, кратным 4, что имеет место при $П=1$. Это означает, что при сборке водило необходимо повернуть на угол $\varphi_H=(2\pi/3)(1+3\cdot 1)=2\pi/3+2\pi$, т. е. на угол 120° плюс полный оборот и тогда обеспечивается сборка механизма с тремя равномерно распределенными по окружности сателлитами. Проверяем условие соседства: $\sin(\pi/k)>(45+2)/(54+45)$; оно тоже выполняется. Для 3-го варианта $(4\times 4)/3\,(-1/24)\,(1+3П)\neq Ц$, т. е. левая часть не обращается в целое число и вариант отбрасываем. Поэтому останавливаем выбор на $z_1=54$; $z_2=45$; $z_3=44$; $z_4=55$.

Для схемы механизма с двумя внутренними зацеплениями (см. рис. 16.10, *б*) при известных $u_{1H}^{(4)}$, m, k формулы для определения z_i получаются на основе аналогичных рассуждений, но с учетом особенностей условия соосности рассматриваемой схемы: $z_1-z_2=z_4-z_3$:

$$z_1=C_1(C_4-C_3)\gamma;\quad z_2=C_2(C_4-C_3)\gamma;$$
$$z_3=C_3(C_1-C_2)\gamma;\quad z_4=C_4(C_1-C_2)\gamma. \tag{16.19}$$

В механизме со смешанным зацеплением (рис. 16.7), учитывая условие соосности $z_1+z_2=z_4-z_3$, формулы подсчета чисел зубьев имеют такой вид:

$$z_1=C_1(C_4-C_3)\gamma;\quad z_2=C_2(C_4-C_3)\gamma;$$
$$z_3=C_3(C_1+C_2)\gamma;\quad z_4=C_4(C_1+C_2)\gamma. \tag{16.20}$$

Общий множитель γ выбирается так, чтобы все числа зубьев были целыми и выполнялось условие правильного зацепления. Обязательно полученные z_i проверяют по условию сборки (16.14) и совместности (16.13), а также соответствия заданным ограничениям.

§ 16.5. ВОЛНОВЫЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Волновая зубчатая передача (рис. 16.19) — механизм, содержащий зацепляющиеся между собой гибкое и жесткое зубчатые колеса и обеспечивающий преобразование и передачу движения благодаря

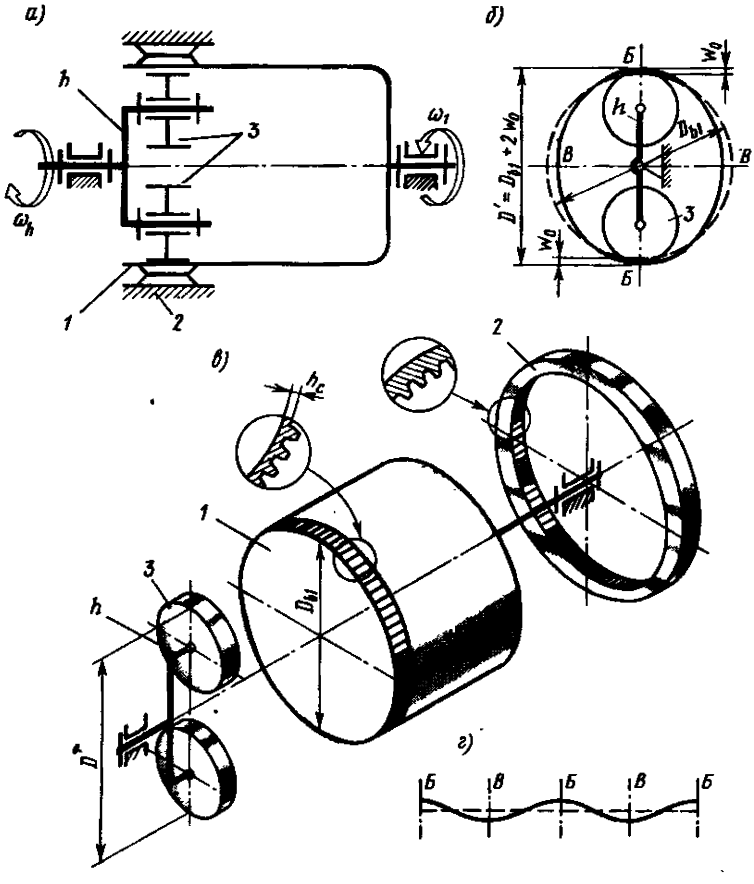


Рис. 16.19

деформированию гибкого колеса. Волновая зубчатая передача (ВЗП) состоит из трех основных элементов: гибкого колеса *1* (рис. 16.19, *а, б, в*), жесткого колеса *2* и генератора волн *h*. Ее можно рассматривать как конструктивную разновидность планетарной передачи с внутренним зацеплением, характерной особенностью которой является использование сателлита (гибкого колеса), деформируемого в процессе передачи движения. Гибкое зубчатое колесо представляет собой тонкостенную оболочку, один конец которой соединен с валом и сохраняет цилиндрическую форму, а на другом — нарезан зубчатый венец с числом зубьев $z_г$. При сборке этот конец оболочки деформируется на величину $2w_0$ генератором волн. Контур деформированного гибкого колеса образует относительно недеформированного две волны деформации (рис. 16.19, *г*). Размер

по сечению *ББ* называют большой осью, а по *ВВ* — малой осью кривой деформации. В зоне большой оси деформации происходит зацепление зубьев гибкого и жесткого колес. Для обеспечения симметрии нагружения волновой зубчатой передачи обычно используют две волны деформации и четные числа зубьев колес, которые связаны соотношением $z_ж - z_г = 2$.

Гибкое колесо *1* поджато к жесткому *2* роликами *3*, расположенными на водиле *h*. Такой генератор называют роликовым. Роликовый генератор волн может быть преобразован в дисковый генератор волн при значительном увеличении диаметров роликов *3* (рис. 16.20, *а*) и расположении их в параллельных плоскостях. Чтобы задать зубчатому венцу гибкого колеса определенную принудитель-

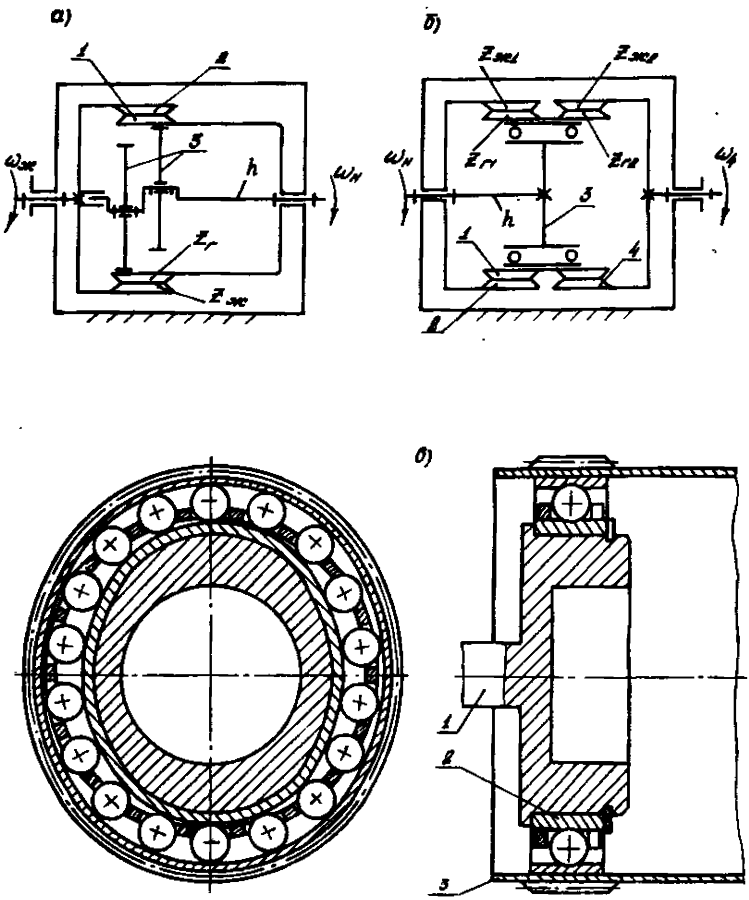


Рис. 16.20

ную форму деформации, генератор нужно выполнить в виде симметричного кулачка специального профиля. Такой генератор называют кулачковым (рис. 16.20, *в*). На кулачок *1* напрессовывают гибкий подшипник *2*, чтобы уменьшить трение между гибким колесом *3* и генератором волн. Дисковые и кулачковые генераторы волн применяют в высоко нагруженных передачах. Кроме механических генераторов волн применяются также электромагнитные, пневматические и гидравлические генераторы.

Кинематика волновой передачи. При вращении генератора волн обе волны деформации перемещаются по периметру гибкого колеса. В результате каждый зуб гибкого колеса за один оборот генератора волн дважды входит в зацепление с зубьями жесткого колеса. Если числа зубьев колес равны $z_ж$ и $z_г$, а угловые шаги $\tau_ж=\frac{2\pi}{z_ж}$ и $\tau_г=\frac{2\pi}{z_г}$, то передаточное отношение такой передачи можно подсчитать следующим образом. При остановленном жестком колесе после полного оборота генератора волн $\varphi_h=2\pi$ вал гибкого колеса повернется в противоположном движению генератора волн направлении на угол, равный $\varphi_г=2\pi\,(z_г-z_ж)/z_г$.

Перейдя от углов поворота к угловым скоростям, получим передаточное отношение ВЗП от генератора волн к гибкому колесу при неподвижном жестком:

$$u_{hг}^{ж}=\frac{\omega_h}{\omega_г}=\frac{\varphi_h}{\varphi_г}=\frac{2\pi}{2\pi\,(z_г-z_ж)/z_г}=-\frac{z_г}{z_ж-z_г}. \qquad (16.21)$$

В ВЗП с остановленным гибким колесом при повороте генератора волн на угол $\varphi_h=2\pi$ жесткое колесо повернется в том же направлении на угол $\varphi_ж=2\pi\,(z_ж-z_г)/z_ж$. В этом случае передаточное отношение от генератора волн к жесткому колесу при неподвижном гибком

$$u_{hж}^{(г)}=\frac{\omega_h}{\omega_ж}=\frac{\varphi_h}{\varphi_ж}=\frac{2\pi}{2\pi\,(z_ж-z_г)/z_ж}=\frac{z_ж}{z_ж-z_г}. \qquad (16.22)$$

Волновая передача может быть двухступенчатой (рис. 16.20, *б*). В этом случае гибкое колесо *1* выполняется в виде кольца с двумя зубчатыми венцами $z_{г1}$ и $z_{г2}$, которые входят в зацепления с жесткими колесами *2* и *4*, имеющими соответственно $z_{ж1}$ и $z_{ж2}$ зубьев. Если жесткое колесо *2* неподвижно, то движение от вала генератора волн преобразуется с помощью двух волновых зацеплений и переда-

ется на выходной вал, соединенный с жестким колесом *4*. Передаточное отношение двухступенчатой ВЗП определяется по формуле

$$u_{h4}^{(2)} = \frac{z_{г1} z_{ж2}}{z_{г1} z_{ж2} - z_{ж1} z_{г2}}. \qquad (16.23)$$

Особенности волнового зацепления. Гибкое колесо ВЗП при его нагружении изменяет свою начальную форму. Это происходит из-за наличия зазоров и упругости элементов, взаимодействующих с гибким колесом. Изменение формы гибкого колеса *1* ограничено с внешней стороны жестким колесом *2*, а с внутренней — генератором волн *h*. Гибкое колесо, опирающееся на генератор волн в пределах участков постоянной кривизны 2β (рис. 16.21), стремится принять форму жесткого колеса. С увеличением момента закручивающего гибкое колесо зоны выбранных зазоров в зацеплении увеличиваются, что приводит к увеличению числа пар зубьев в зацеплении. Благодаря многопарности зацепления (нагрузку могут передавать до 40% всех пар зубьев) нагрузочная способность ВЗП выше, чем планетарной. КПД волновой передачи также выше, потому что в зацеплении зубья почти не перемещаются при прилегании гибкого колеса к жесткому. При стальных гибких колесах в одноступенчатых волновых передачах можно получить передаточное отношение 60—320, а КПД 0,85—0,80. Двухступенчатые ВЗП обеспечивают передаточные отношения от $2 \cdot 10^3$ до 10^4 и более при КПД от 0,7 до 0,1.

Многопарность и многозонность волнового зацепления приводят к значительному усреднению ошибок изготовления и сборки, в результате чего обеспечивается высокая кинематическая точность ВЗП.

Относительно небольшая величина радиальной деформации гибкого колеса позволяет выполнить его в виде колоколообразной оболочки и изготовить герметичные ВЗП, передающие вращения через герметичную перегородку без подвижных уплотнений (см. рис. 3.8).

Наиболее ответственные детали ВЗП — гибкий подшипник и гибкое колесо. Гибкое колесо имеет тонкостенное донышко, допускающее осевые перемещения торца цилиндрической оболочки при ее деформировании с другого края. Длину гибкого колеса выбирают от $0{,}5d_{ст}$ до $1{,}1d_{ст}$, где $d_{ст}$ — диаметр недеформированной серединной поверхности гибкого колеса. Толщину h_c гибкого колеса под зубчатым венцом выбирают примерно равной $0{,}01d_{ст}$.

Методика проектирования ВЗП. Существует несколько методов расчета геометрических параметров волновых зубчатых передач. Настоящая методика, разработанная на кафедре теории механиз-

мов и машин МГТУ, основывается на предположении, что конструкции генераторов волн рассматриваемых передач обеспечивают постоянную кривизну серединного слоя деформированного гибкого колеса в пределах зон зацепления, ограниченных центральными углами 2β (см. рис. 16.21, *а*). Вне этих зон гибкое колесо имеет свободную форму деформации. На участке постоянной кривизны зацепление в волновой передаче рассматривается как внутреннее эвольвентное зацепление жесткого колеса с числом зубьев $z_ж$ и усло-

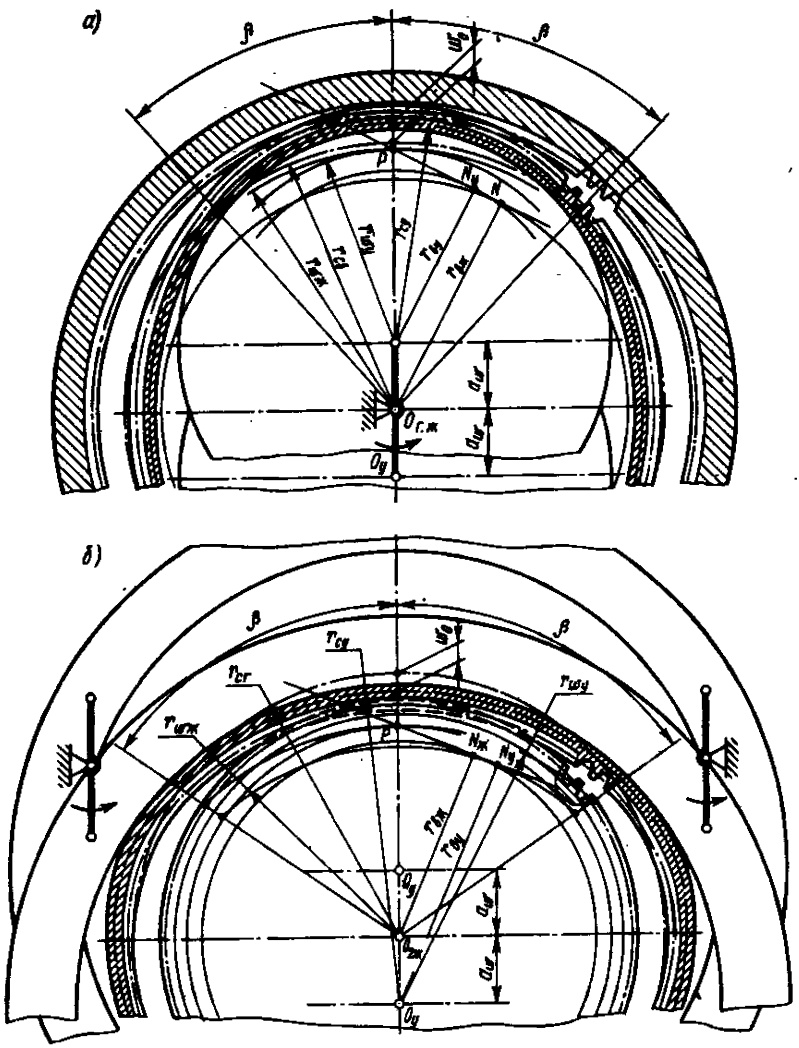


Рис. 16.21

вного, имеющего параметры гибкого и расчетное число зубьев z_y.

Исходными параметрами для расчета являются передаточное отношение передачи, ее схема, номинальный крутящий момент на выходном валу, частота вращения генератора волн, срок службы передачи, прочностные характеристики гибкого колеса. Проектировочный расчет заключается в определении диаметра серединной поверхности гибкого колеса по изгибной прочности, из расчета на выносливость или из расчета заданного коэффициента крутильной жесткости [14]. Больший из вычисленных диаметров берется за основу для определения модуля зацепления $m' = d_{ст}/z_г$, который округляется до ближайшего стандартного значения.

Делительные диаметры колес и толщина h_c обода гибкого колеса под зубчатым венцом определяются по формулам

$$d_г = mz_г; \quad d_ж = mz_ж;$$

$$h_c = \left(60 + \frac{z_г}{5}\right) m z_г \cdot 10^{-4}. \tag{16.24}$$

Основным варьируемым параметром является относительная радиальная деформация гибкого колеса по большой оси:

$$\frac{w_0}{r_{ст}} = \left(\frac{z_ж - z_г}{z_г}\right) \gamma; \tag{16.25}$$

где $\gamma = 0{,}9 \div 1{,}2$ — коэффициент относительной радиальной деформации.

Расчетное число зубьев условного колеса

$$z_y = \frac{z_г}{1 \pm K_\beta \left(\frac{w_0}{r_{ст}}\right)}. \tag{16.26}$$

Формула (16.26), как и все последующие, содержащие двойные знаки арифметических действий,— объединенная. Верхний знак относится к внутреннему деформированию гибкого колеса дисковым или кулачковым генератором волн, нижний — к внешнему деформированию кольцевым генератором (рис. 16.21, *б*):

$$K_\beta = \frac{\frac{4\beta}{\pi} \sin\beta - \frac{4}{\pi} \cos\beta - 2\sin\beta}{\frac{\pi}{2} - \beta - \sin\beta\cos\beta}, \tag{16.27}$$

где β — угловая координата участка постоянной кривизны ($40° < \beta \leqslant 65°$).

Далее из рассмотрения геометрической картины волнового зацепления (см. рис. 16.21) определяется радиус серединной окружности деформированного гибкого колеса:

$$r_{cy}=m\left(\frac{z_г}{2}\mp h_a^*\mp c^*\mp\frac{h_c}{2m}+x_г\right), \qquad (16.28)$$

где h_a^*, c^* — параметры исходного контура; $x_г$ — коэффициент смещения исходного контура:

$$x_г=\left(h_a^*+c^*+\frac{h_c}{2m}\right)\delta, \qquad (16.29)$$

$\delta=1{,}0\div1{,}4$ — коэффициент изменения смещения.

При изменении величин β, γ и δ в указанных диапазонах их возможного изменения можно произвести оптимизацию качества зацепления. Целевой функцией является теоретический коэффициент перекрытия.

Радиус серединной окружности недеформированного гибкого колеса

$$r_{cг}=\frac{z_г}{z_y}r_{cy}. \qquad (16.30)$$

Межосевое расстояние передачи, равное эксцентриситету установки деформирующих дисков,

$$a_w=e=\pm r_{cг}\left(1+\frac{w_0}{r_{cг}}\right)\mp r_{cy}. \qquad (16.31)$$

Зная межосевое расстояние, можно определить угол зацепления волновой передачи:

$$\alpha_w=\arccos\left[\frac{(z_ж-z_y)\,m\cos\alpha}{2a_w}\right]. \qquad (16.32)$$

Жесткое колесо в передачах с дисковым или кулачковым генератором внутреннего деформирования, имеющее внутренние зубья, обрабатывается долбяком с числом зубьев z_0. Угол станочного зацепления жесткого колеса и долбяка

$$\operatorname{inv}\alpha_{wож}=\operatorname{inv}\alpha-\frac{(\operatorname{inv}\alpha-\operatorname{inv}\alpha_w)\,(z_ж-z_y)-2x_г\operatorname{tg}\alpha}{z_ж-z_0}, \qquad (16.33)$$

и коэффициент смещения жесткого колеса

$$x_ж=\frac{z_ж-z_0}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_{wож}}-1\right). \qquad (16.34)$$

Остальные параметры и исполнительные размеры элементов волновой передачи рассчитывают так же, как у зубчатой передачи внутреннего эвольвентного зацепления. Методика расчета различных схем ВЗП в полном объеме содержится в работе [14].

Области применения ВЗП. Отмеченные достоинства волновой передачи определяют наиболее рациональные области ее применения: силовые и кинематические приводы общего назначения с большим передаточным отношением, задающие и исполнительные механизмы повышенной кинематической точности, быстродействующие приводы систем автоматического управления и регулирования, электромеханические приводы промышленных роботов, приводы для передачи движения в герметизированное пространство в химической, атомной и космической технике.

ГЛАВА 17
МЕХАНИЗМЫ С ПРЕРЫВИСТЫМ ДВИЖЕНИЕМ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА

В машинах автоматического и полуавтоматического действия широко используются механизмы, которые позволяют в пределах рабочего цикла иметь остановки выходного звена заданной продолжительности при непрерывном движении входного звена. Такие механизмы называют механизмами с остановками или механизмами с прерывистым движением выходного звена. Остановка может быть полной или почти полной (квазиостановка), а ее продолжительность — как заданной, так и неопределенной. Оценку долей движения и остановки в общем рабочем цикле механизма осуществляют посредством относительных коэффициентов времени движения и времени остановки выходного звена. Для сообщения прерывистого движения выходному звену применяются разные механизмы: храповые, мальтийские, зубчатые с неполными колесами и др.

§ 17.1. ЗУБЧАТЫЕ И ХРАПОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

На рис. 17.1, *а* приведена схема зубчатого механизма прерывистого движения, в котором ведущее звено *1* представляет собой зубчатый сектор с z_1 зубьями, который может входить в зацепление с зубчатым колесом *2*, число зубьев которого $z_2 = z_1$. После поворота зубчатого сектора *1* на угол $\varphi_{1п}$ звено *2* останавливается

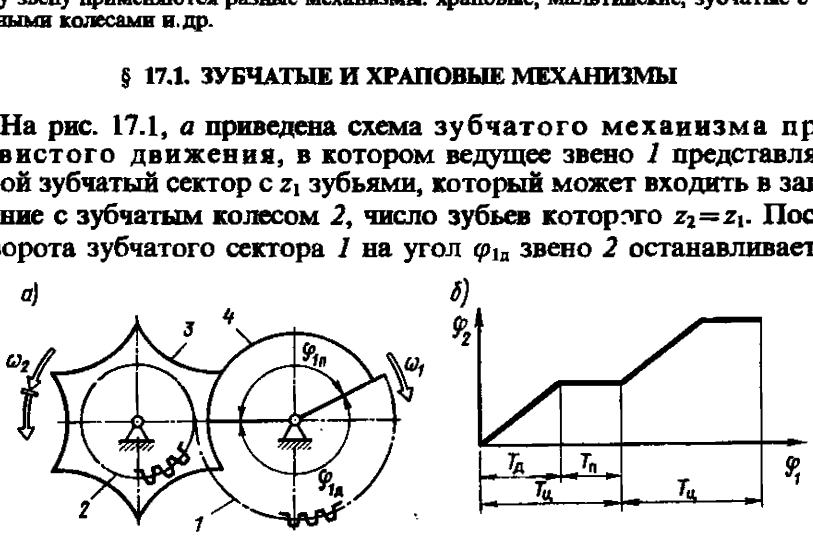


Рис. 17.1

и фиксируется в неподвижном состоянии запирающими дугами: выступом *4* на ведущем звене *1* и вырезом *3* на ведомом звене *2*. Состояние остановки соответствует повороту ведущего колеса на угол $\varphi_{1п}$.

Коэффициент $k_п$ времени остановки (рис. 17.1, *б*)

$$k_п = T_п/T_ц = \varphi_{1п}/(2\pi).$$

Угол $\varphi_{1д}$ содержит целое число угловых шагов $2\pi/z_1$, которое соответствует целому числу угловых шагов $2\pi/z_2$ на колесе *1*. Однако коэффициент перекрытия в зубчатой передаче сектор *2* — колесо *1* обычно >1 и это может вызвать дополнительный поворот колеса *2* по сравнению с углом 2π, что нарушит условие сопряжения зубьев в начале следующей фазы движения. Для устранения этого явления на стадии проектирования механизма предусматривают обеспечение коэффициента перекрытия последней пары зубьев равным 1. Это наиболее просто достигается уменьшением высоты последнего зуба на сегменте *1* на расчетную величину.

Недостатком зубчатых механизмов с неполным числом зубьев является наличие удара в моменты начала зацепления и начала фиксации остановки запирающими дугами. Поэтому они используются в тихоходных машинах при незначительной величине ускоряемых масс.

Более широкое применение находят рычажные механизмы в со-

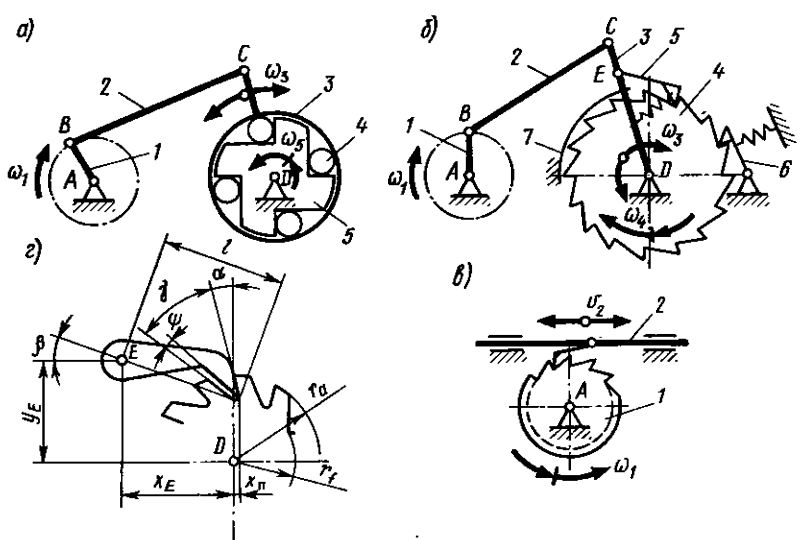


Рис. 17.2

четании с муфтами свободного хода или с храповыми колесами.

В муфте свободного хода (рис. 17.2, *а*) ролики или шарики *4* расположены между элементами звеньев *3* и *5*. В зависимости от направления относительного поворота звеньев *3* и *5* ролики или шарики *4* могут заклиниваться между поверхностями или проскальзывать. Для удержания роликов или шариков в постоянном контакте с поверхностью звена *3* применяют пружины, натяжения которых можно регулировать винтами (на схеме не показаны). Непрерывное вращение кривошипа *1* преобразуется в одностороннее прерывистое движение звена *5* посредством шатуна *2*, коромысла *3* и роликов или шариков *4*. Угловая скорость ω_5 звена *5* является переменной.

Храповые механизмы (рис. 17.2, *б*, *в*), допускающие движение выходного звена только в одном направлении с остановками, имеют в своем составе ведомое храповое колесо *4* с зубьями, в рабочие поверхности которых упираются элементы рабочей *5* и стопорной *6* собачек (рис. 17.2, *б*). Рабочая собачка *5* шарнирно закрепляется на коромысле *3* шарнирного четырехзвенника *ABCD* с кривошипом *1* и шатуном *2*. При постоянном угле качания коромысла *3* число захватываемых собачкой зубьев можно регулировать щитком *7*, передвигая его по наружной дуге. Стопорная собачка *6* не допускает поворота храпового колеса *4* под действием сил полезного сопротивления.

В некоторых устройствах входное звено *2* может совершать поступательное движение (рис. 17.2, *в*), а храповое колесо *1* — вращательное движение с остановками. Для надежного контакта собачек с зубьями храпового колеса используют принудительное замыкание силой упругости пружины (рис. 17.2, *б*).

Профили зубьев храповых колес могут иметь различное исполнение: нормальное с заострением (рис. 17.2, *б*) и усиленное с фаской (рис. 17.2, *г*); без поднутрения ($\alpha=0$) и с поднутрением ($\alpha\neq0$), где α — угол поднутрения профиля.

Основным размерным параметром храповых колес является стандартный модуль m (ГОСТ 9563—60) по окружности вершин радиуса $r_a=mz$. Высота зуба $h=r_a-r_f$ зависит от формы зуба. Для нормального профиля без поднутрения высота зуба определяется по формуле

$$h=\frac{mz\sin(\pi/z)}{\sin\gamma}\cos(\gamma-\pi/z).$$

Для нормального профиля с поднутрением высота зуба определяется аналогично:

$$h=\frac{mz\sin(\pi/z)}{\sin\gamma}\cos(\gamma+\alpha-\pi/2)\cos\alpha.$$

Угол впадины γ по нормали станкостроения в зависимости от

модуля равен 55 или 60°. Угол головки собачки выполняется меньшим, чем γ на угол $\psi = 5°$. Остальные размеры l, y_E, x_E, $x_П$ назначаются в зависимости от выбранных значений m и z.

Храповые механизмы редко применяют в быстроходных машинах из-за большого уровня шума при их работе и малой надежности вращения на их выходе при отсутствии тормозной системы.

Значительно большее распространение по сравнению с храповыми получили мальтийские механизмы из-за более благоприятных кинематических характеристик и надежного обеспечения заданного времени покоя, связанного с выполнением многократно повторяющихся операций определенной продолжительности.

§ 17.2. МАЛЬТИЙСКИЕ МЕХАНИЗМЫ

В станках-автоматах, обрабатывающих центрах и автоматических линиях нашли широкое применение устройства, преобразующие непрерывное вращательное движение входного звена в одностороннее прерывистое движение выходного звена, называемого *шаговыми механизмами*. С помощью этих механизмов транспортируются заготовки, происходит смена инструментов и приспособлений на один линейный или угловой шаг, т. е. с одной фиксированной позиции на другую позицию. Среди шаговых механизмов простейшими являются мальтийские механизмы, получившие свое название от сходства очертаний выходного звена с эмблемой духовно-рыцарского Мальтийского ордена. Некоторые разновидности мальтийских механизмов приведены на рис. 17.3: *а* — с поступательным и *б*, *в*, *г* — вращательным движением выходного звена; *б* — с внешним и *в* — внутренним зацеплением; *б*, *в* — между параллельными и *г* — пересекающимися осями.

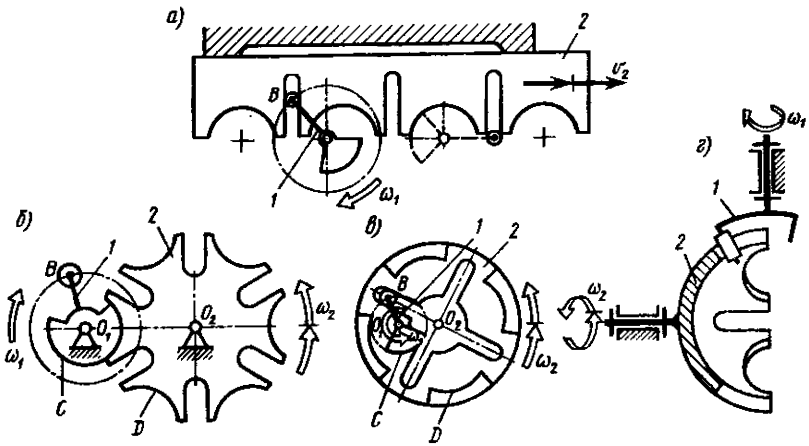


Рис. 17.3

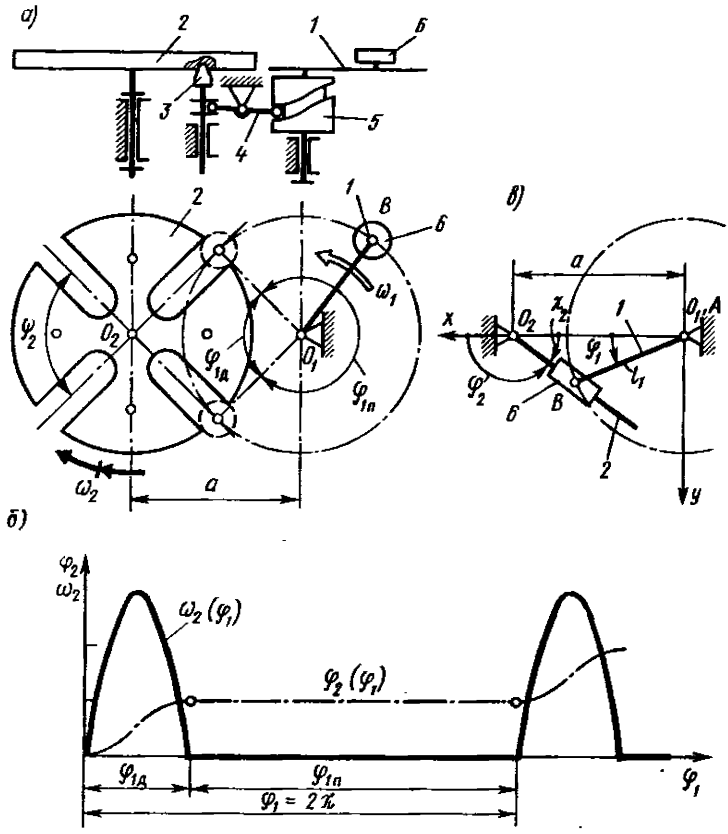


Рис. 17.4

Выходное звено *2* мальтийского механизма выполняется в виде диска или стола, на котором расположено несколько пазов. Наиболее часто число пазов *z* равно четырем (рис. 17.3, *в* и 17.4, *а*) или шести (рис. 17.3, *б*). В паз может входить палец *B*, расположенный на ведущем кривошипе *1*, вращающемся относительно оси O_1. Палец *B* входит в паз по касательной к окружности радиуса O_1B, совпадающей с направлением оси паза, что необходимо для устранения жесткого удара. Начальное положение диска с пазами должно быть фиксированным. Для этого применяют различные стопорные устройства. Например, на рис. 17.4, *а* стол *2* фиксируется в определенном положении фиксатором *3*, движение которого согласовано с вращением входного звена *1* с помощью цилиндрического кулачка *5* и рычага *4*. При повороте диска *2* на угол ψ_2 фиксатор *3* не имеет связи с диском *2*. После выхода пальца *B* из паза наступает оконча-

ние поворота диска *2* и он надежно фиксируется в заданном положении фиксатором *3*. Для этой же цели можно использовать стопорные устройства типа запирающих дуг *C* и *D* равного радиуса (рис. 17.3, *б*, *в*). В момент, когда центры кривизны поверхностей *C* и *D* совпадают и находятся на оси O_1, запирающие дуги обеспечивают надежное фиксирование выходного звена *2* в неподвижном состоянии. Это состояние сохраняется в период поворота входного звена на угол $\varphi_{1п}$ (рис. 17.4, *б*).

Механизм, у которых радиальные пазы расположены на диске равномерно, иазывают *правильными* (*или однородными*) *мальтийскими механизмами.*

Коэффициент времени движения мальтийского механизма определяют по соотношению

$$k_д=\frac{T_д}{T_ц}=\frac{\varphi_{1д}}{2\pi}=\frac{\pi-\psi_2}{2\pi}=\frac{\pi-2\pi/z}{2\pi}=\frac{z-2}{2z};$$

коэффициент времени остановки

$$k_п=\frac{T_п}{T_ц}=\frac{2\pi-\varphi_{1д}}{2\pi}=\frac{\pi+\psi_2}{2\pi}=\frac{\pi+2\pi/z}{2\pi}=\frac{z+2}{2z}.$$

Для двухпазового диска ($z=2$) $k_д=0$ и $k_п=1$, т. е. такой механизм является неработоспособным. Поэтому наименьшее число пазов на диске мальтийского механизма равно трем:

При увеличении числа пазов коэффициенты $k_д$ и $k_п$ меняются в следующих пределах:

z	2	3	4	5	6	8	10
$k_д$ . . .	0	0,167	0,25	0,30	0,33	0,375	0,40
$k_п$ . . .	1	0,833	0,75	0,70	0,67	0,625	0,60

Следовательно, для технологических машин, у которых рабочий процесс или операция производится в период остановки диска, применяют диски с малым числом пазов. Это позволяет снизить потери времени на вспомогательный ход, соответствующий повороту выходного звена. Однако этот критерий является не единственным и в ряде случаев он может оказаться не определяющим окончательный выбор числа пазов. Это связано с динамикой привода, ибо поворот ведомых звеньев происходит неравномерно. Для определения кинематических передаточных функций мальтийского механизма рассматривают расчетную схему, представленную на рис. 17.4, *в* в виде заменяющего кулисного механизма (см. гл. 4): кулиса *2* совпадает с осью паза на диске *2*, а ползун *6* заменяет палец, скользящий вдоль паза при вращении входиого звена *1* длиной l_1. Длину межосевого расстояния O_1O_2 обозначают буквой *a*.

Угол φ_2 поворота кулисы определяют по соотношению

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{l_1\sin\varphi_1}{a-l_1\cos\varphi_1}=\frac{\lambda_1\sin\varphi_1}{1-\lambda_1\cos\varphi_1}=\frac{\sin\varphi_1}{\lambda_a-\cos\varphi_1}, \tag{17.1}$$

где $\lambda_a=a/l_1$ — относительная длина межосевого расстояния a; $\lambda_1=l_1/a$ — относительная длина радиуса входного звена l_1; отсюда

$$\varphi_2=\pi-\operatorname{arctg}\,[\sin\varphi_1/(\lambda_a-\cos\varphi_1)], \tag{17.2}$$

или

$$\varphi_2=\pi-\chi,$$

где

$$\chi=\arcsin\left[-\frac{\lambda_1\sin\varphi_1}{\sqrt{1-2\lambda_1\cos\varphi_1+\lambda_1^2}}\right].$$

Угловую скорость ω_2 выходного звена мальтийского механизма определяют путем дифференцирования выражения (16.2) по обобщенной координате φ_1:

$$\omega_2=\frac{d\varphi_2}{dt}=\omega_1\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}=-\omega_1\frac{\lambda_1(\cos\varphi_1-\lambda_1)}{1-2\lambda_1\cos\varphi_1+\lambda_1^2}. \tag{17.3}$$

Угловая скорость ω_2 достигает максимального значения при угле $\varphi_1=0$:

$$\omega_{2\max}=-\omega_1\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}=-\omega_1\frac{\sin(\pi/z)}{1-\sin(\pi/z)}.$$

Максимальные значения передаточного отношения $u_{21\max}=\omega_{2\max}/\omega_1$ в зависимости от числа z пазов следующие:

z	3	4	5	6	8	10	12
$u_{21\max}$ . .	−6,46	−2,41	−1,43	−1,0	−0,62	−0,45	−0,35

Угловое ускорение ε_2 выходного звена мальтийского механизма определяют путем дифференцирования выражения (17.3):

$$\varepsilon_2=\omega_1^2\frac{\lambda_1(1-\lambda_1^2)\sin\varphi_1}{(1-2\lambda_1\cos\varphi_1+\lambda_1^2)^2}.$$

Кинематическая передаточная функция $(\varepsilon_2/\omega_1^2)$ углового ускорения выходного звена достигает максимального значения при значениях угла φ_1, определяемых по соотношению

$$(\varphi_1)_{\varepsilon max} = \arccos\left[-\frac{1+\lambda_1^2}{4\lambda_1} + \sqrt{\left(\frac{1+\lambda_1^2}{4\lambda_1}\right)^2 + 2}\right].$$

Максимальные значения кинематической передаточной функции $(\varepsilon_2/\omega_1^2)_{max}$ в зависимости от числа z пазов следующие:

z	3	4	5	6	8	10	12
$(\varepsilon_2/\omega_1^2)_{max}$.	31,44	5,41	2,30	1,35	0,70	0,46	0,35
$(\varphi_1)_{\varepsilon max}$ . .	4,71	11,46	17,58	22,92	31,65	38,49	44,00

Из приведенных данных следует, что при малом числе пазов выходное звено мальтийского механизма имеет плохие динамические характеристики. Например, если сравнить два механизма, диски которых имеют 3 и 8 пазов, а кривошипы вращаются с одинаковой постоянной частотой, то максимальное значение углового ускорения у трехпазового диска в 45 раз больше, чем у восьмипазового диска. Соответственно возрастают и динамические нагрузки в кинематических парах. Если сравнение провести для случая равенства продолжительности периодов остановки за счет изменения частоты вращения входного звена, то различие в угловых ускорениях выходного звена для сравниваемых чисел пазов достигает 80.

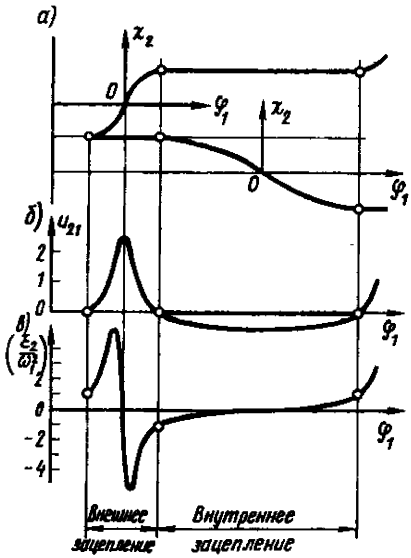


Рис. 17.5

Оптимальное сочетание требуемого коэффициента времени остановки, коэффициента времени движения и допустимых значений динамических нагрузок в кинематических парах выбирают на основе анализа конкретных условий работы механизма. На практике чаще всего применяют диски с числом пазов 4, 6 и 8. Следует обратить внимание, что угловое ускорение диска в начале периода движения и при остановке изменяется скачком от нулевого значения до некоторой конечной величины. Величина этого скачка определяет интенсивность «мягкого» удара.

Если нет жестких ограничений на коэффициент времени движения, то можно применять мальтийские механизмы с внутренним зацеплением (рис. 17.3, *в*), которые имеют более благоприятные динамические свойства. При внутреннем зацеплении максимальные ускорения выходного звена значительно меньше, чем при внешнем зацеплении, однако время поворота выходного звена всегда больше времени остановки, так как $k_д > 0{,}5$.

Представление об особенностях мальтийских механизмов с внешним и внутренним зацеплением дают графики, приведенные на рис. 17.5: *а* — функций положения $\chi_2(\varphi_1)$ и кинематических передаточных функций; *б* — скорости u_{21} и *в* — ускорения ε_2/ω_1^2 выходного звена. Линии на графиках относятся либо (правый участок) к внешнему зацеплению, либо (левый участок) — к внутреннему зацеплению.

§ 17.3. РЫЧАЖНЫЕ МЕХАНИЗМЫ С КВАЗИОСТАНОВКАМИ

В тех случаях, когда необходимо передавать большие нагрузки с высокой надежностью и с плавным законом изменения ускорений ведомого звена, в качестве механизмов прерывистого движения применяют рычажные механизмы с низшими кинематическими парами или зубчато-рычажные механизмы, используя некоторые особенности кривых, описываемых точками звеньев, совершающих плоское движение.

На рис. 17.6, *а* приведена схема планетарно-рычажного механизма с длительной квазиостановкой (кажущейся остановкой) выходного звена ползуна *5* в крайнем правом положении. Этот эффект достигается тем, что палец *C* шатуна *4* установлен не на оси *B* кривошипа *1*, как это имеет место в обычном кривошипно-ползунном механизме, а на некотором расстоянии *BC* вдоль радиуса планетарного колеса *2*, обкатывающего по неподвижному колесу *3* с внутренними зубьями, закрепленному на стойке *6*. Числа зубьев колес z_2 и z_3 в планетарном зуб-

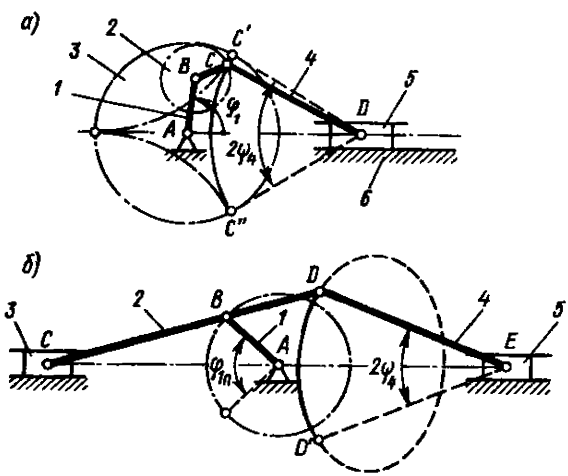


Рис. 17.6

чатом механизме подбирают такими, чтобы точка C описывала требуемую траекторию. В описываемом механизме (рис. 17.6, *а*) отношение чисел зубьев колес *3* и *1* подобрано равным трем. В этом случае точка C описывает замкнутую гипоциклоиду. Каждая из ветвей этой гипоциклоиды (например, $C'C''$, которая на рис. 17.6, *а* показана тонкой линией) на некотором участке имеет кривизну, близкую к постоянной. Если длину шатуна CD выбрать равной радиусу кривизны этого участка траектории точки C, то точка D будет почти неподвижной, т. е. ползун *5* будет иметь продолжительную квазиостановку.

Аналогичное свойство шатунной кривой используется и в механизме прерывистого действия, схема которого приведена на рис. 17.6, *б*. Спаренные кривошипно-ползунные механизмы из звеньев *1, 2, 3, 4, 5* имеют ту особенность, что один из ползунов — звено *5* — имеет длительную квазиостановку в крайнем правом положении. Это достигается тем, что палец D шатуна *4* соединен не с кривошипом *1*, а с шатуном *2*. Точка D описывает сложную шатунную кривую, но ее можно на некотором участке, например DD' (рис. 17.6, *б*), аппроксимировать дугой постоянной кривизны. Назначив длину шатуна DE равной радиусу кривизны этой дуги в пределах угла $2\psi_4$, получают механизм с *квазипрерывистым движением* ползуна *5*.

Иногда используют участки кривых, имеющие прямолинейные очертания. Если по такой квазипрямой перемещать ползун кулисного механизма, то кулиса будет иметь квазиостановку во время движения ползуна в пазу кулисы на этом участке траектории. Конструктивным недостатком подобных механизмов с квазиостановками часто является значительная длина звеньев и, как следствие, увеличение габаритов.

ГЛАВА 18
КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Рабочий процесс многих машин вызывает необходимость иметь в их составе механизмы, движение выходных звеньев которых должно быть выполнено строго по заданному закону и согласовано с движением других механизмов. Наиболее простыми, надежными и компактными для выполнения такой задачи являются кулачковые механизмы. Воспроизведение движения выходного звена — толкателя — они осуществляют теоретически точно. Их входное звено называют кулачком. Закон движения толкателя, задаваемый передаточной функцией, определяется профилем кулачка и является основной характеристикой кулачкового механизма, от которой зависят его функциональные свойства, а также динамические и вибрационные качества. Проектирование кулачкового механизма разделяется на ряд этапов: назначение закона движения толкателя, выбор структурной схемы, определение основных и габаритных размеров, расчет координат профиля кулачка. Методы выполнения этих этапов изложены в настоящей главе.

§ 18.1. ВИДЫ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ И ИХ ОСОБЕННОСТИ

Общее представление о кинематических схемах кулачковых механизмов можно получить на примере газораспределительных механизмов двигателей внутреннего сгорания, показанных на рис. 18.1. Эти механизмы служат для открытия и закрытия клапанов, что позволяет наполнять цилиндры двигателей горючей смесью (или воздухом), выпускать отработанные газы и надежно изолировать камеру сгорания от окружающей среды во время тактов сжатия и рабочего хода.

Кинематические схемы механизмов газораспределения приведены на рис. 18.1, *а, б, в*, а конструктивное оформление их звеньев *1* и *2* — на рис. 18.1, *г, д, е, ж, з, и*.

В зависимости от особенностей конструкции, функционального назначения машины и ряда других факторов применяют разные виды кулачков (рис. 18.2), основными из которых являются: *а*,

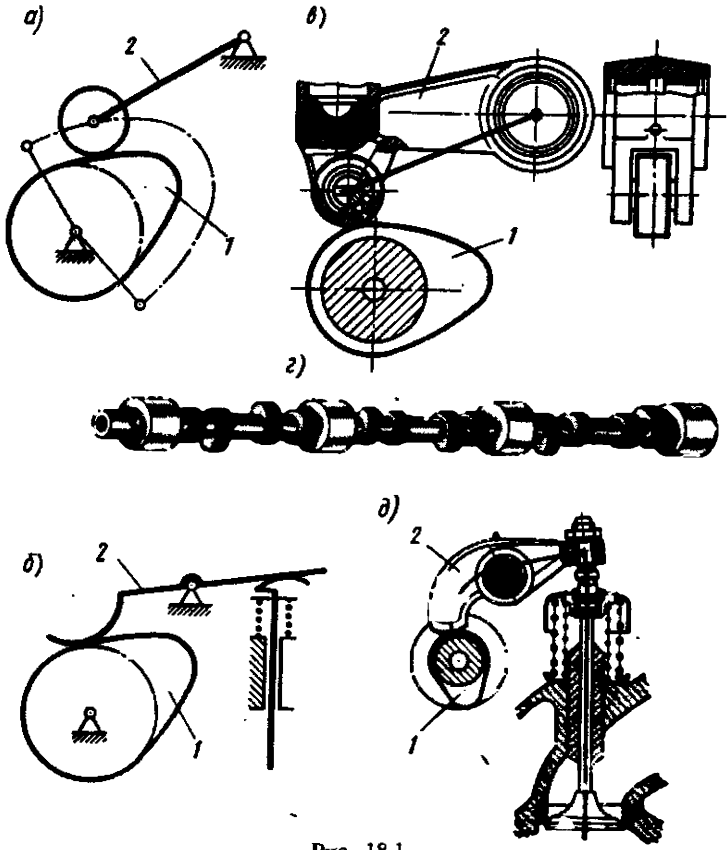


Рис. 18.1

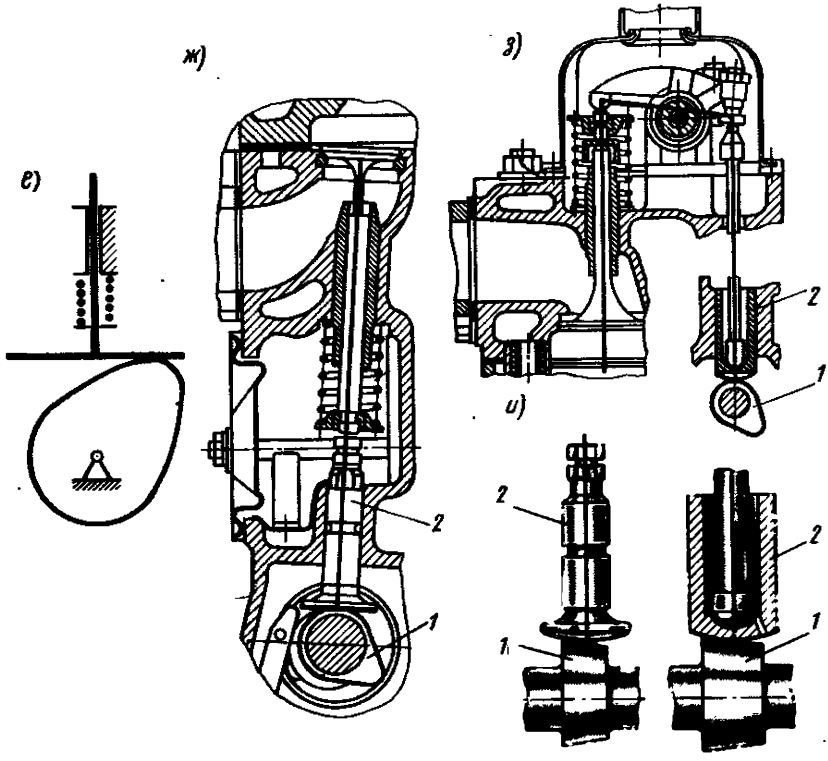


Рис. 18.1 (продолжение)

б — плоские с поступательным перемещением кулачка; *в, г — цилиндрические; д, е, ж — дисковые; з — конические; и — гиперболоидные; к — коноидные*. Толкатель кулачкового механизма (рис. 18.2) совершает движение: *а, в, г, д, ж, з* — поступательное; *б, е, и* — вращательное; *к* — сочетание двух поступательных.

Контакт элементов в высшей кинематической паре может обеспечиваться *геометрическим замыканием* за счет пазов (рис. 18.2, *б, ж, и*), охватывающих роликов (рис. 18.2, *г*) и т. п. или *силовым замыканием* пары путем воздействия силы: тяжести, упругости пружин (см. рис. 18.1, *б, в, е, ж, з*), давления жидкости или воздуха и т. п.

Рабочая поверхность толкателей, воспринимающая нагрузку от кулачка, подвержена износу. Чтобы уменьшить износ, распределить его равномернее по контактной поверхности толкателя и увеличить надежность и долговечность механизма, используют башмаки раз-

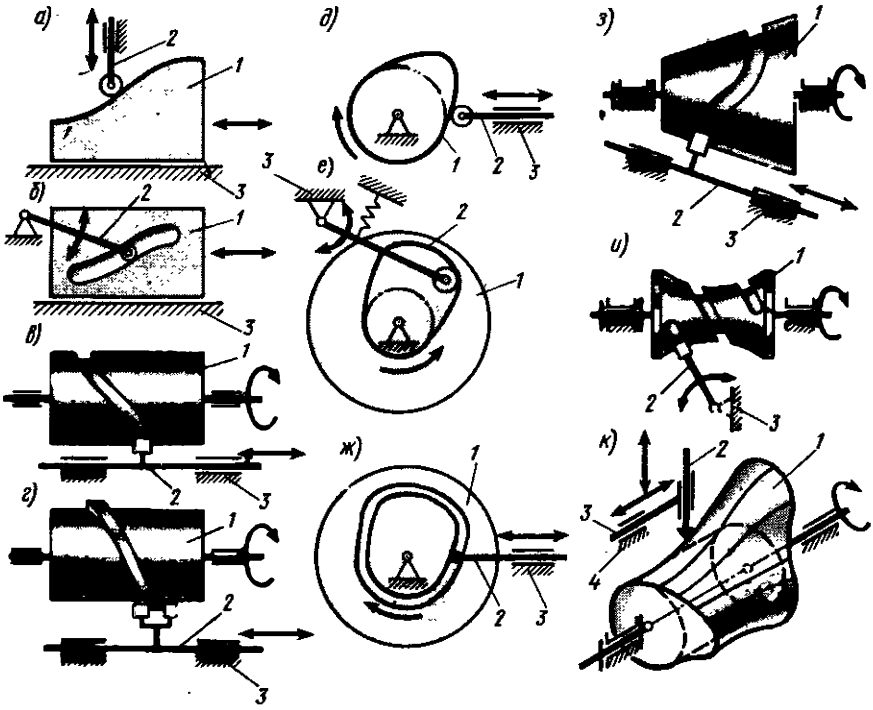


Рис. 18.2

личной конструкции; наибольшее применение получили (см. на рис. 18.1): *а, г* — роликовые; *в, ж* — тарельчатые с плоской, *б, е* — цилиндрической и *з, и* — сферической контактными поверхностями, а также остроконечные со сферой малого радиуса (ибо конец толкателя не может быть выполнен абсолютно острым, т. е. точечным). Выполнение башмака в виде роликов позволяет частично исключить трение скольжения, заменив его трением качения, уменьшить износ элементов высшей кинематической пары и повысить надежность механизма.

Общее число возможных сочетаний кулачков, толкателей, башмаков, способов замыкания кинематической пары и их конструктивного оформления весьма велико. Наиболее целесообразное сочетание выбирается с учетом большого числа факторов. Удачное решение получают на основе опыта эксплуатации и данных о надежности и долговечности кулачковых механизмов разнообразных машин. Однако есть основные факторы и показатели, которые необходимо учитывать при проектировании конкретных кулачковых механизмов.

Единого универсального критерия, учитывающего весь сложный комплекс вопросов, связанных с выбором закона движения толка-

теля, не существует. Поэтому при оценке эффективности профиля кулачка устанавливают комплекс заданных условий и ограничений и располагают их в порядке убывающей важности. На первых этапах проектирования находят решение для обязательных условий, а затем проводят уточнения, исходя из экономических, технологических, эксплуатационных и других практических соображений.

§ 18.2. ЗАКОН ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЛКАТЕЛЯ И ЕГО ВЫБОР

Наиболее типичным графиком зависимости между перемещением толкателя и углом поворота кулачка является кривая, приведенная на рис. 18.3, *б* для кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем (рис. 18.3, *а*). На этом графике внутри цикла (угол $\varphi_{1ц}$) можно выделить четыре фазы и соответствующие им фазовые углы поворота кулачка: угол удаления ($\varphi_у$), угол дальнего стояния ($\varphi_д$), угол сближения ($\varphi_с$) и угол ближнего стояния ($\varphi_б$). При геометрическом замыкании контакта в высшей кинематической паре кулачок является ведущим звеном на обоих фазах движения толкателя: как при удалении, так и при сближении. При силовом замыкании контакта (рис. 18.1, *б*) движение толкателя на фазе сближения происходит под действием приложенной силы пружины (или силы тяжести, или давления воздуха и т. п.), а на фазе удаления — под действием профиля кулачка, который возбуждает силу в контакте, направленную по общей нормали *n—n* (рис. 18.3, *а*). Угол между нормалью *n—n* и направлением движения выходного звена *2* называют *углом давления* ϑ. Текущий угол давления ϑ_i является величиной переменной и может иметь знак (плюс или

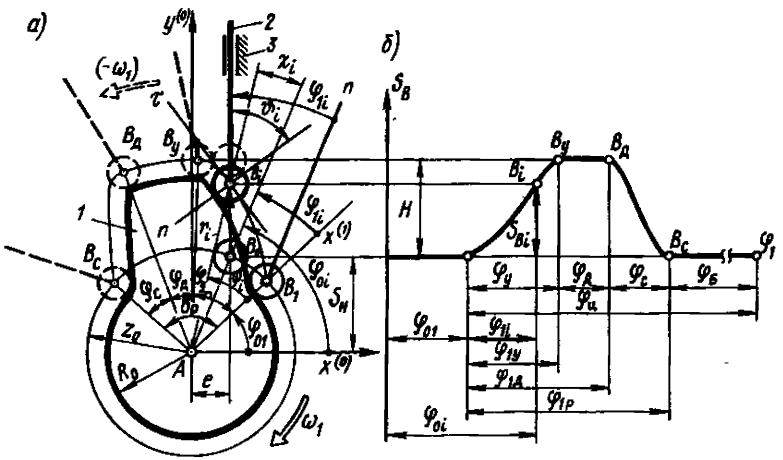


Рис. 18.3

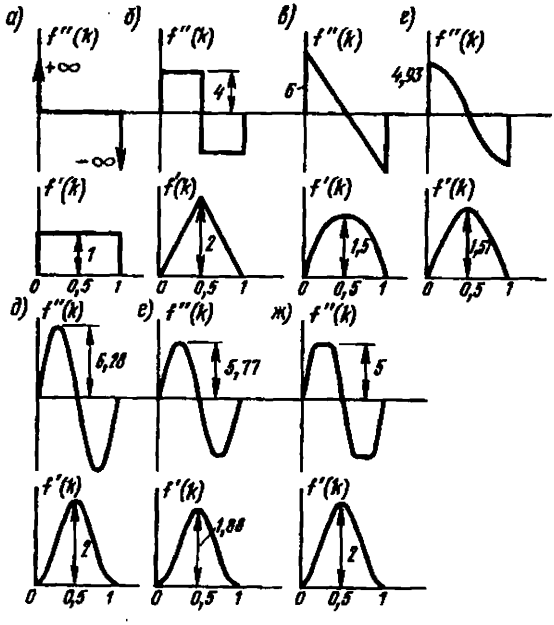


Рис. 18.4

минус) в зависимости от расположения нормали относительно вектора скорости толкателя.

Сумма фазовых углов $\varphi_у+\varphi_д+\varphi_с=\varphi_{1р}$ определяет рабочий профильный угол $\delta_р=\varphi_{1р}$ на кулачке, равный центральному углу, внутри которого расположен рабочий профиль кулачка (рис. 18.3, *б*).

Координаты $x_B^{(0)}$, $y_B^{(0)}$ точки B на профиле кулачка определяют положение толкателей в неподвижной системе координат $Ax^{(0)}y^{(0)}$. Координата $x_B^{(0)}=e$ определяет смещение оси толкателя *2* относительно оси A вращения кулачка *1*. Координата $y_B^{(0)}$ может быть представлена в форме суммы $(S_н+S_{Bi})$, в которой первое слагаемое $S_н=\sqrt{r_0^2+e^2}$ является величиной постоянной, а второе — $S_{Bi}(\varphi_1)$ — функцией угла поворота кулачка φ_1. Радиус r_0 называют начальным радиусом центрового профиля, являющегося траекторией оси ролика в относительном качении по конструктивному профилю с начальным радиусом R_0. Следует обратить внимание, что полярный угол ψ_i точки B_i на профиле кулачка в общем случае не равен углу поворота кулачка φ_{1i}:

$$\psi_i=\varphi_{1i}+\chi_i,$$

где $\chi_i = \operatorname{arctg}[(S_н + S_{Bi})/e] - \operatorname{arctg}(S_н/e)$. В частном случае при $e=0$ угол $\chi_i=0$ и $\varphi_{1i}=\psi_i$.

Радиус-вектор AB точки B, r_i и его наибольшее значение $r_{наиб}$ определяются из соотношений

$$r_i=\sqrt{(S_н+S_{Bi})^2+e^2};\ r_{наиб}=\sqrt{(S_н+H)^2+e^2}.$$

Координаты точки B в подвижной системе координат $Ax^{(1)}y^{(1)}$, связанной с кулачком *1*, определяют из соотношений

$$x_B^{(1)}=r_i\cos\psi_i;\ y_B^{(1)}=r_i\sin\psi_i.$$

В практике проектирования наибольшее применение получили относительно простые законы движения толкателя, показанные на рис. 18.4 для фазы удаления толкателя; *а* — линейный; *б* — параболический; *г* — косинусоидальный; *д* — синусоидальный; *в*, *е*, *ж* — описанные полиномами. Функции перемещения приведены в табл. 18.1 в зависимости от безразмерного параметра k, значения которого на фазе удаления находятся в пределах $0 \leqslant k_y \leqslant 1$.

Функция перемещения толкателя	Пределы изменения $k_y=\varphi_{1i}/\varphi_y$	Графики скорости и ускорения толкателя	Максимальные значения коэффициентов	
			$[f'(k_y)]_{max}$	$[f''(k_y)]_{max}$
$S=Hk_y$	0...1,0	Рис. 18.4, *а*	1,0	$\pm\infty$
$S=\begin{cases}2Hk_y^2\\H[1-2(1-k_y)^2]\end{cases}$	0...0,5 0,5...1,0	Рис. 18.4, *б*	2,0	± 4
$S=H(3k_y^2-2k_y^3)$	0...1,0	Рис. 18.4, *в*	1,5	± 6
$S=\frac{1}{2}H[1-\cos(\pi k_y)]$	0...1,0	Рис. 18.4, *г*	1,57	$\pm 4{,}93$
$S=H(k_y-(\sin 2\pi k_y)/(2\pi))$	0...1,0	Рис. 18.4, *д*	2,0	$\pm 6{,}28$
$S=H(10k_y^3-15k_y^4+6k_y^5)$	0...1,0	Рис. 18.4, *е*	1,88	$\pm 5{,}77$
$S=\begin{cases}H\frac{8}{3}(5k_y^3-15k_y^4+24k_y^5-16k_y^6)\\H\left[1-\frac{8}{3}[5(1-k_y^3)-15(1-k_y)^4+\right.\\\left.+24(1-k_y)^5-16(1-k_y)^6\right]\end{cases}$	0...0,5 0,5...1,0	Рис. 18.4, *ж*	2,0	$\pm 5{,}0$

При линейном законе скорость движения толкателя $v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ на фазе удаления постоянна, ускорение $a^\tau=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ равно нулю, но в начале и конце фазы ускорение равно бесконечности, что проявляется

в форме «жесткого» удара. Такой закон допустим при малых массах толкателя и малых скоростях движения.

В точках разрыва кривой ускорений (рис. 18.4), характерных для параболического (*б, в*) и косинусоидального (*г*) законов движения, ускорение и силы инерции толкателя изменяются на конечную величину («мягкий» удар). При плавных кривых изменения ускорения (*д, е, ж*) удары теоретически отсутствуют, если погрешности изготовления профилей достаточно малы.

Наибольшее применение имеют кулачки, обеспечивающие плавную и безразрывную кривую ускорения толкателя (рис. 18.3, *д, е, ж*). Иногда безударный профиль задается тремя плавными кривыми: полуволной синусоиды на участке положительного ускорения, четвертьволной синусоиды и квадратной параболой на участке отрицательных ускорений. В табл. 18.1 приведены числовые значения максимальных скоростей f' $(k_y)_{max}$ и ускорений f'' $(k_y)_{max}$ толкателя в относительной форме.

§ 18.3. УГОЛ ДАВЛЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ ВОЗРАСТАНИЯ СИЛ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

Угол давления ϑ определяет положение нормали в высшей кинематической паре относительно вектора скорости и контактной точки ведомого звена (см. рис. 13.2). Его величина определяется размерами механизма, передаточной функцией $v_{qB}=v_B/\omega_1$ скорости движения и перемещения S_B толкателя [см. формулы (13.11) и (13.12)].

При заданной внешней статической нагрузке на толкателе, например силе $F_{пс2}$ полезного сопротивления, силе $F_п$ упругости пружины для силового замыкания и силе тяжести G_2 толкателя (рис. 18.5, *а*), реакции в кинематических парах являются зависимыми от угла давления, т. е. от закона движения толкателя и габаритных размеров механизма. Этот вывод легко установить из анализа плана сил, приложенных к толкателю (рис. 18.5, *а, б*) и формул (13.11) и (13.12). Чем больше угол давления ϑ, тем больше реакции F_{23} и F_{21} в кинематических парах, а следовательно, тем больше силы трения при заданных коэффициентах трения: $f_{т21}$ — между башмаком толкателя *2* и кулачком *1*, $f_{т23}$ — толкателем *2* и направляющими *3*. При расчетах сил в кинематических парах для поступательной кинематической пары между толкателем и направляющими используют приведенный коэффициент трения $f_{т23}^{пр}$, который рассчитывают по величине угла $\varphi_{т23}^{пр}$, определяющего положение реакции F_{23} относительно перпендикуляра к направлению перемещения толкателя.

Можно написать следующие соотношения между силами, приложенными к звену *2* (рис. 18.5, *а*):

$$\bar{F}_{c2}=\underline{\underline{\bar{F}_{пс2}}}+\underline{\underline{\bar{G}_2}}+\underline{\underline{\bar{F}_п}}+\underline{\underline{\bar{\Phi}_2}};$$

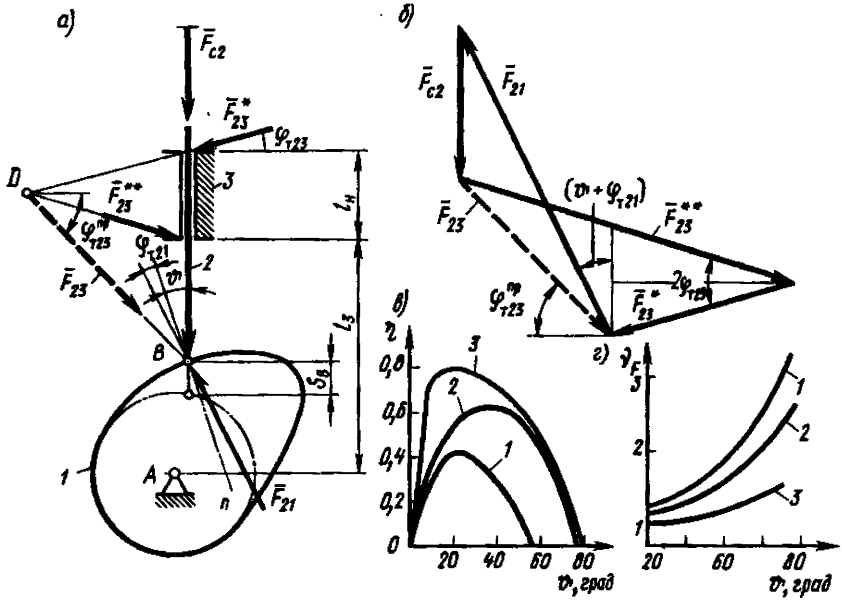


Рис. 18.5

$$\underline{\bar{F}_{23}}+\underline{\underline{\bar{F}_{c2}}}+\underline{\bar{F}_{21}}=0;$$

$$\underline{\bar{F}_{23}^{*}}+\underline{\bar{F}_{23}^{**}}=\underline{\underline{\bar{F}_{23}}}.$$

Так как сила $\bar{F}_{21}$ должна проходить через узлы сил D и B, координаты которых легко найти, то

$$\operatorname{tg}\varphi_{\tau 23}^{пр}=\frac{l_3+0{,}5l_н-S_н+S_B(\varphi_1)}{0{,}5l_н/\operatorname{tg}\varphi_{\tau 23}}.$$

Принимая $\varphi_{\tau 23}^{пр}=\operatorname{arctg}f_{\tau 23}^{пр}\approx f_{\tau 23}^{пр}$; $\varphi_{\tau 23}=\operatorname{arctg}f_{\tau 23}\approx f_{\tau 23}$, соотношение (18.2) записывают окончательно в следующем виде:

$$f_{\tau 23}^{пр}=f_{\tau 23}=\left(\frac{l_3-S_н+0{,}5l_н-S_B(\varphi_1)}{0{,}5l_н}\right).$$

В качестве параметра, оценивающего влияние угла давления на условия передачи сил в кулачковых механизмах, Л. Н. Решетов предложил использовать отношение сил $\nu_F=F_{21}/F_{c2}$, названное *коэффициентом возрастания усилий*.

Аналитическое соотношение для определения v_F в случае плоского кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем легко найти из плана сил (рис. 18.5, *б*) по теореме синусов:

$$\frac{F_{c2}}{\sin(90^\circ-\varphi_{\text{тр}23}-\vartheta-\varphi_{\text{т}21})}=\frac{F_{21}}{\sin(180^\circ-\varphi_{\text{тр}23})}$$

или

$$v_F=\frac{F_{21}}{F_{c2}}=\frac{\cos\varphi_{\text{тр}23}}{\cos(\vartheta+\varphi_{\text{тр}23}+\varphi_{\text{т}21})}.$$

На рис. 18.5, *г* показаны кривые изменения коэффициента v_F возрастания усилий для трех случаев при разных значениях коэффициентов трения $(f_{\text{т}21}+f_{\text{тр}23})$: кривая *1* — 0,1; *2* — 0,2; *3* — 0,5. Задаваясь допустимым коэффициентом v_F, можно рассчитать значение допускаемого угла давления:

$$\vartheta_{\text{доп}}=\arccos\left(\frac{\cos\varphi_{\text{тр}23}}{v_{F\text{доп}}}\right)-\varphi_{\text{тр}23}-\varphi_{\text{т}21}.$$

Чем меньше коэффициенты трения $f_{\text{т}21}$ и $f_{\text{тр}23}$ и больше допустимое значение коэффициента v_F, тем большие углы давления ϑ возможно использовать при проектировании кулачковых механизмов.

При ориентировочных расчетах принимают следующие значения допускаемых углов давления $\vartheta_{\text{доп}}$: для поступательно движущегося толкателя $\vartheta_{\text{доп}}=30...15^\circ$; для вращающегося толкателя $\vartheta_{\text{доп}}=45...20^\circ$.

Если габариты механизма позволяют, то для уменьшения потерь на трение целесообразно принимать меньшие значения угла: $\vartheta_{\text{доп}}=15...20^\circ$. Это оказывает положительное влияние на коэффициент полезного действия η, оценивающий отношение работы сил трения к работе движущих сил за какой-то промежуток времени. Для механизма с поступательно движущимся толкателем на рис. 18.5, *в* приведены три графика, показывающие изменение мгновенного к.п.д. в зависимости от угла давления при разных сочетаниях коэффициентов трения $f_{\text{т}21}$ и $f_{\text{т}23}$:

Кривая	*1*	*2*	*3*
$f_{\text{т}21}$	0,2	0,2	0,01
$f_{\text{тр}23}$	0,4	0	0,2

Графики показывают, что максимальные значения к.п.д. соответствуют определенным углам давления.

§ 18.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА ПО ЗАДАННОМУ ДОПУСКАЕМОМУ УГЛУ ДАВЛЕНИЯ

Габаритные размеры механизма (радиус кулачка r_0, смещение e осей толкателя и кулачка, межосевое расстояние a и т. п.), обеспечивающие эффективную работу спроектированного механизма, зависят от заданных условий и ограничений. Оптимальным решением при заданных ограничениях называют такое, при котором выходные параметры синтеза, в данном случае габаритные размеры механизма, будут наименьшими. Следовательно, математическая модель оптимизации с учетом соотношений (13.11) и (13.12) может быть записана в такой форме:

для поступательно движущегося толкателя

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{(v_B/\omega_1)\cdot \operatorname{sgn}\omega_1 \mp e}{S_н + S_B(\varphi_1)} \leqslant \vartheta_{доп}; \tag{18.1}$$

для вращающегося толкателя

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{(v_B/\omega_1)\cdot \operatorname{sgn}\omega_1 - (a\cos\varphi_2 - l_2)}{a\sin\varphi_2} \leqslant \vartheta_{доп}. \tag{18.2}$$

Соотношения (18.1) и (18.2) являются ограничениями по углу давления, который является величиной переменной, зависящей от заданного закона изменения кинематических параметров движения толкателя.

При проектировании кулачковых механизмов конструктор стремится выбрать закон движения толкателя, который бы наилучшим образом удовлетворял заданным требованиям. Во многих случаях в качестве исходного принимают график изменения ускорения толкателя a_B (или относительных значений ускорения $v_a = a_{Bi}/a_{Bнач}$) в функции угла поворота кулачка (рис. 18.6, *а*). Остальные кинематические параметры получают в аналитической форме или путем численного или графического интегрирования. Например, график скорости толкателя v_B или кинематической передаточной функции скорости $v_{qB} = v_B/\omega_1$ (рис. 18.6, *б*) при графическом интегрировании находят по соотношениям

$$a_B^{\tau} = \frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_B}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \frac{dv_B}{d\varphi_1},$$

откуда

$$v_B = \int_{t_н} a_B^{\tau}\,dt; \quad v_{qB} = v_B/\omega_1 = \int_{\varphi_{1н}} \left(\frac{a_B^{\tau}}{\omega_1^2}\right) d\varphi_1.$$

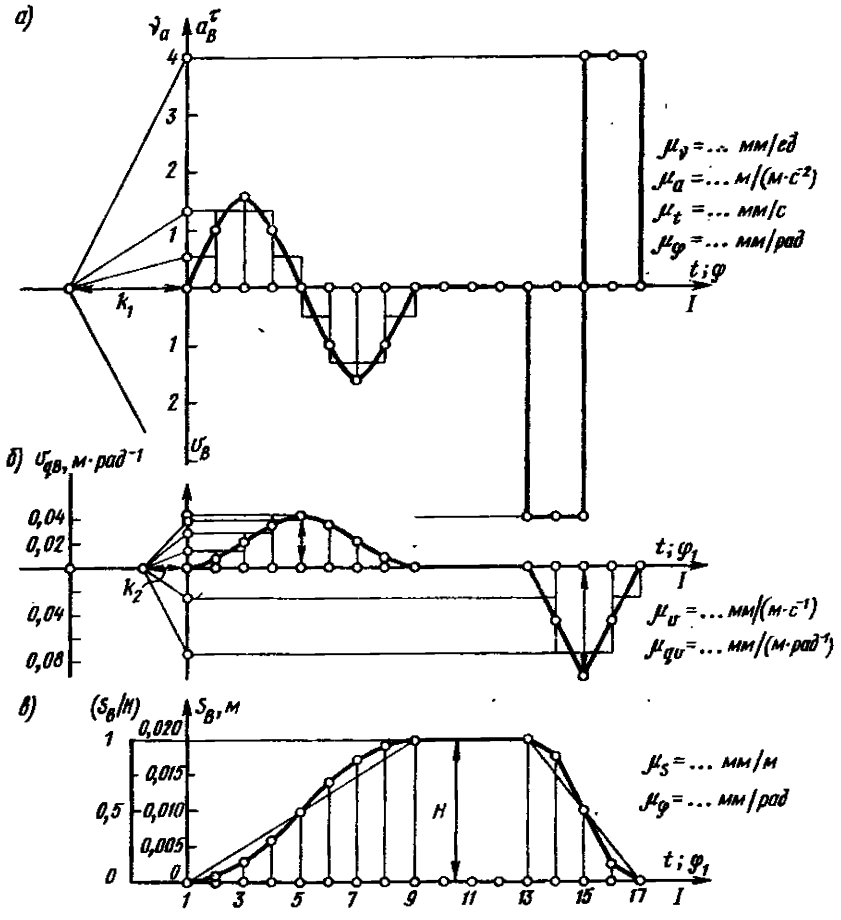


Рис. 18.6

Связь между масштабами графиков (рис. 18.6, *а*, *б*) следующая: $\mu_v = \mu_a \mu_t / K_1$; $\mu_{qv} = \mu_{qa} \mu_\varphi / K_1$, где $[\mu_v] = $ мм/(м · с$^{-1}$); $[\mu_{qv}] = $ мм/(м · рад$^{-1}$).

Аналогичен переход к графику перемещений толкателя (рис. 18.6, *в*) по соотношениям

$$v_B = \frac{dS_B}{dt} = \frac{dS_B}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \frac{dS_B}{d\varphi_1},$$

откуда

$$S_B = \int_{t_н} v_B \, dt; \quad S_B = \int_{\varphi_{1н}} \left(\frac{v_B}{\omega_1}\right) d\varphi_1 = \int_{\varphi_{1н}} v_{qB} \, d\varphi_1.$$

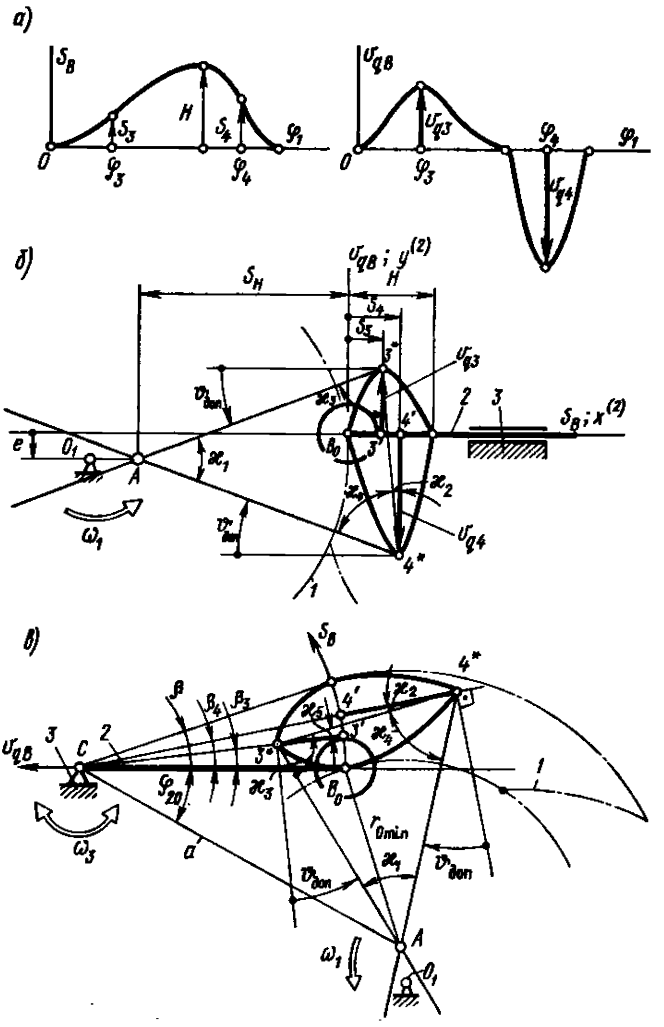


Рис. 18.7

При этом связь между масштабами графиков определяют из соотношений $\mu_s = \mu_v \mu_t / K_2$ и $\mu_s = \mu_{qv} \mu_\varphi / K_2$, где $[\mu_s]$ = мм/м.

Записанным выше ограничениям по углу давления ϑ можно придать геометрическую интерпретацию. Используя заданные (рис. 18.7, *а*) или вычисленные (см. рис. 18.6, *б*, *в*) функции положения $S_B(\varphi_1)$ и передаточную функцию скорости $v_{qB}(\varphi_1)$, строят график

в координатах v_{qB}, S_B, т. е. аналогично построению на фазовой плоскости: скорость $\dot{x}$ — перемещение x.

При вращающемся толкателе выбирают полярную систему координат с началом в точке C (рис. 18.7, *в*), при поступательно движущемся толкателе — прямоугольную систему координат $x^{(2)}y^{(2)}$ с началом в точке B_0 на начальной окружности кулачка (рис. 18.7, *б*). Система координат — правая: поворот от положительного направления перемещения S_B к отрезкам, изображающим положительные величины кинематической передаточной функции v_{qB}, проводят против часовой стрелки. Следовательно, при отсчете S_B вправо от нижнего положения ролика B — положительные значения v_{qB} откладывают вверх, отрицательные — вниз (рис. 18.7, *а*). При этом кулачок *1* вращается в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки (рис. 18.7, *б*). Значения масштабов по осям координат $[\mu_s]$=мм/м и $[\mu_{qv}]$=мм/(м·рад$^{-1}$) принимают одинаковыми, что позволяет изображать углы давления $\mathcal{V}$ без искажения. Максимальные значения передаточной функции $v_{qB\max}$ на фазе удаления для краткости обозначают через v_{q3}, на фазе сближения — через v_{q4}.

На рис. 18.7, *б*, *в* эти величины изображены отрезками $3'3^* = \mu_{qv} v_{q3}$ и $4'4^* = \mu_{qv} v_{q4}$. Принимая условие, что этим значениям v_{qB} соответствуют углы давления, равные допускаемому $\mathcal{V}_{\text{доп}}$, находят предельное положение оси O_1 вращения кулачка в точке A пересечения ограничивающих лучей (рис. 18.7, *б*). Каждый из этих лучей определяет «допустимую полуплоскость», лежащую по одну ее сторону. Часть плоскости, которая принадлежит всем этим полуплоскостям, образует область допустимых решений (ОДР), в которой наверняка выполняются ограничения по соотношениям (18.1) и (18.2). В этой области (рис. 18.7, *б*, *в*) можно выбирать ось O_1 вращения кулачка по условию $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}_{\text{доп}}$.

Такая геометрическая интерпретация соотношений (18.1) и (18.2) используется для графического определения искомых габаритных размеров кулачкового механизма: межосевого расстояния $a = l_{CO1}$ и радиуса $r_0 \geqslant r_{0\min} = l_{AB0}$ при вращающемся толкателе (рис. 18.7, *в*) или смещения осей «*e*» и радиуса $r_0 \geqslant r_{0\min} = l_{AB0}$ при поступательно движущемся толкателе (рис. 18.6, *б*).

При аналитических методах синтеза и при использовании ЭВМ для вычисления координат профиля необходимо располагать соответствующими зависимостями, представленными в аналитической форме. Обозначения необходимых параметров показаны на рис.

18.7, *в* для вращающегося и на рис. 18.7, *б* — для поступательно движущегося толкателя.

Перемещения S_B оси ролика относительно начального положения B_0, соответствующие передаточным функциям скорости v_{q3} и v_{q4}, обозначают для краткости записи через S_3 и S_4. Их находят по графику перемещений при графическом интегрировании заданной функции или с помощью стандартных подпрограмм нахождения максимума при интегрировании с использованием ЭВМ.

Перемещениям S_3 и S_4 соответствуют углы поворота толкателя $\beta_3 = S_3/l_2$ и $\beta_4 = S_4/l_2$, где l_2 — длина толкателя.

Угол $æ_2$ в треугольнике $C3^*4^*$ (рис. 18.7, *в*) определяют по теореме синусов, так как известны длины двух сторон этого треугольника: $C4^* = l_2 - v_{q4} \operatorname{sgn} \omega_1$ и $C3^* = l_2 - v_{q3} \operatorname{sgn} \omega_1$ (обозначения масштабов опущены); здесь $v_{q4} < 0$, тогда

$$\frac{C3^*}{\sin æ_2} = \frac{3^*4^*}{\sin(\beta_4 - \beta_3)} \text{ или } \sin æ_2 = \frac{(l_2 - v_{q3} \operatorname{sgn} \omega_1) \sin(\beta_4 - \beta_3)}{l_{34}}. \quad (18.3)$$

Расстояние между точками 3^* и 4^*, обозначенное через l_{34}, определяют по теореме косинусов:

$$l_{34} = 3^*4^* = \sqrt{(l_2 - v_{q3} \operatorname{sgn} \omega_1)^2 + (l_2 - v_{q4} \operatorname{sgn} \omega_1)^2 - 2(l_2 - v_{q3} \operatorname{sgn} \omega_1)(l_2 - v_{q4} \operatorname{sgn} \omega_1) \cos(\beta_4 - \beta_3)}. \quad (18.4)$$

В случае поступательно движущегося толкателя соотношения (18.3) и (18.4) приобретают частные значения (рис. 18.7, *б*):

$$æ_2 = \operatorname{arctg}[(S_4 - S_3)/(v_{q3} - v_{q4})];$$

$$l_{34} = 3^*4^* = (v_{q3} - v_{q4})/\cos æ_2.$$

Далее рассматривают угол $æ_5$ и треугольник $A3^*4^*$, в котором известна одна сторона 3^*4^* и можно найти два угла $æ_3$ и $æ_4$ и далее угол $æ_1$:

$$æ_5 = æ_2 + (\beta_4 - \beta_3); \quad (18.5)$$

$$æ_3 = 90° - \vartheta_{доп} + (\beta_4 - \beta_3) + æ_2; \quad (18.6)$$

$$æ_4 = 90° - \vartheta_{доп} - æ_2; \quad (18.7)$$

$$æ_1 = 180° - (æ_3 + æ_4) = 2\vartheta_{доп} - (\beta_4 - \beta_3). \quad (18.8)$$

Для поступательно движущегося толкателя углы β_4 и β_3 в пределе равны нулю и формулы (18.6) и (18.8) приобретают частное значение:

$$æ_3 = 90° - \vartheta_{доп} + æ_2;$$

$$æ_4 = 90° - \vartheta_{доп} - æ_2;$$

$$æ_1 = 2\vartheta_{доп}.$$

Одну из сторон $A3^* = l_{31}$ рассматриваемого треугольника $A3^*4^*$ находят по теореме синусов:

$$\frac{A3^*}{\sin æ_4} = \frac{3^*4^*}{\sin æ_1}, \text{ или } l_{31} = A3^* = l_{34}\frac{\sin æ_4}{\sin æ_1}.$$

Межосевое расстояние $a = l_{CA}$ находят по теореме косинусов из треугольника $C3^*A$ (рис. 18.7, *в*):

$$a = \sqrt{(l_2 - v_{q3}\operatorname{sgn}\omega_1)^2 + l_{31}^2 + 2\,(l_2 - v_{q3}\operatorname{sgn}\omega_1)l_{31}\sin\vartheta_{доп}}. \quad (18.9)$$

Угол φ_{20}, определяющий ближнее положение оси толкателя CB_0 относительно межосевого расстояния CA, находят из треугольника $C3^*A$ по теореме синусов:

$$\frac{A3^*}{\sin(\varphi_{20} + \beta_3)} = \frac{a}{\sin(90° + \vartheta_{доп})}, \text{ или } \sin(\varphi_{20} + \beta_3) = \frac{l_{31}}{a}\cos\vartheta_{доп},$$

откуда

$$\varphi_{20} = \arcsin\left(\frac{l_{31}}{a}\cos\vartheta_{доп}\right) - \beta_3. \quad (18.10)$$

Радиус r_0 начальной окружности кулачка находят из треугольника CB_0A:

$$r_0 = \sqrt{a^2 + l_2^2 - 2al_2\cos\varphi_{20}}. \quad (18.11)$$

В случае поступательно движущегося толкателя находят смещение e оси его направляющей относительно оси A вращения кулачка, координату $S_н$ и радиус r_0 начальной окружности (рис. 18.7, *б*):

$$e = l_{31}\sin\vartheta_{доп} - v_{q3}; \quad (18.12)$$

$$S_н = l_{31}\cos\vartheta_{доп} - S_3; \quad (18.13)$$

$$r_0 = \sqrt{S_н^2 + e^2}. \quad (18.14)$$

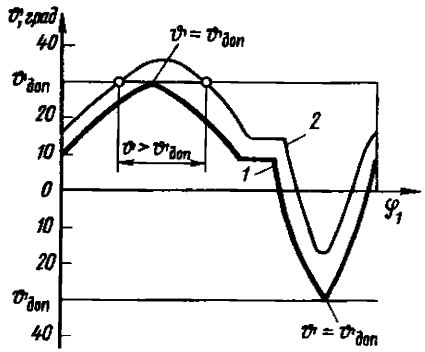


Рис. 18.8

При выборе оси O_1 вращения кулачка в точке A пересечения граничных лучей график изменения углов ϑ в функции угла φ_1 поворота кулачка касается в двух точках прямых, соответствующих углам $\vartheta_{доп}$ (рис. 18.8, кривая *1*), и решение считается оптимальным по критерию минимальных размеров кулачка. Если ось O_1 расположить вне области ОДР, то в некоторых положениях толкателя угол ϑ превышает угол $\vartheta_{доп}$ (рис. 18.8, кривая *2*).

При жестких ограничениях по габаритным размерам механизма принимают во внимание тот факт, что опасность заклинивания толкателя при ведущем кулачке и силовом замыкании контакта характерна только для фазы удаления. На фазе сближения толкатель движется под действием силы упругости пружины или силы тяжести и заклинивание невозможно. Это позволяет расширить границы ОДР для положения оси вращения кулачка с учетом допускаемого угла давления $\vartheta_{доп}$ и направления вращения кулачка.

На рис. 18.9, *а*, *б* показано несколько областей ОДР для механизма с вращающимся толкателем, а на рис. 18.9, *в* — для механизма с поступательным движением толкателя:

ОДР — направление вращения кулачка реверсивное, допускаемые углы давления при удалении и сближении одинаковы и равны $\vartheta_{доп}$ (рис. 18.9, *а*, *б*, *в*);

ОДР1 — направление вращения кулачка реверсивное, значения допускаемых углов на фазе удаления и фазе сближения различные;

ОДР2 — удаление толкателя осуществляется при вращении кулачка против часовой стрелки; предельное значение угла давления при сближении не регламентировано (рис. 18.9, *а*, *б*);

ОДР3 — удаление толкателя осуществляется при вращении кулачка по часовой стрелке, предельное значение угла давления при сближении не регламентировано (рис. 18.9, *б*).

На рис. 18.9, *в* показано расположение оси O_1 кулачка при разных частных ограничениях: при $e=0$: O_{11}; O_{12}; O_{17} и при $e\neq 0$: O_{15}; O_{18}; O_{19}.

Соответственно ограничениям на движение звеньев получают разные габаритные размеры кулачкового механизма. На рис. 18.10 показаны три центровых профиля кулачков, оси вращения которых были выбраны соответственно: профиль *а* — в ОДР при $\operatorname{sgn}\omega_1=\pm 1$

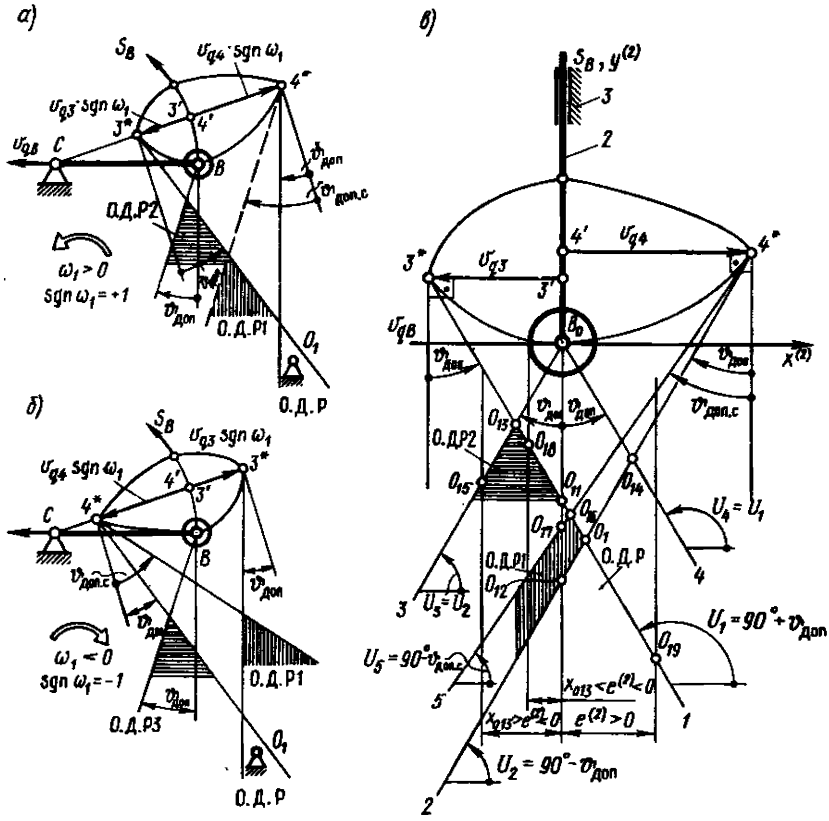


Рис. 18.9

и $e=0$; профиль *б* — в ОДР при $\operatorname{sgn}\omega_1 = \pm 1$ и $e \neq 0$; профиль *в* — в ОДР при $\operatorname{sgn}\omega_1 = +1$.

Соответствующие аналитические зависимости получают как частные случаи ранее выведенных соотношений (18.3)—(18.9).

Для режима движения механизма, соответствующего области ОДР (см. рис. 18.9, *а*), принимают v_{q4} и S_4 равными нулю.

Если область дозволенных решений ограничивается лучами 5^*A и 6^*A (рис. 18.11, *а*, *б*), то в расчетные формулы (18.3)—(18.9) подставляют значения v_{q5} и v_{q6}, s_5 и s_6 взамен v_{q3}, v_{q4}, s_3 и s_4 соответственно.

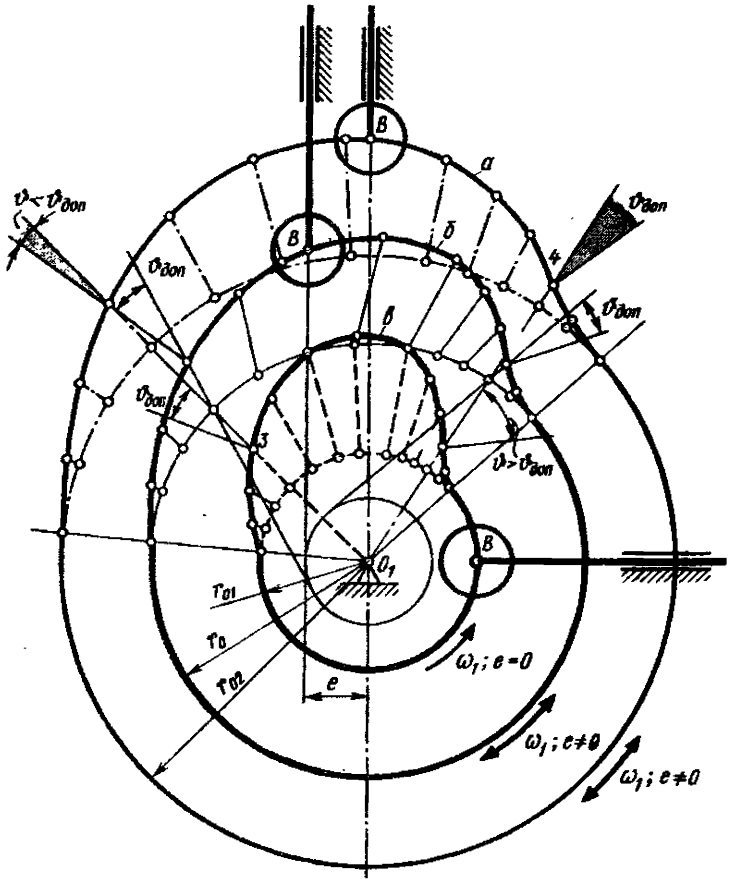


Рис. 18.10

При вращающемся толкателе имеют место следующие соотношения:

$$\beta_3 = S_3/l_2;\ \beta_4 = 0;$$

$$\sin æ_2 = [(l_2 - v_{q3})/l_{34}]\ \sin\beta_3;$$

$$l_{34} = \sqrt{(l_2 - v_{q3})^2 + l_2^2 - 2\ (l_2 - v_{q3})\ l_2 \cos\beta_3};$$

$$æ_3 = 90^\circ - \vartheta_{доп} - \beta_3 + æ_2;$$

$$æ_3 = 90^\circ - \vartheta_{доп} - æ_2;$$

$$æ_1 = 180^\circ - (æ_3 + æ_4) = 2\vartheta_{доп} - \beta_3.$$

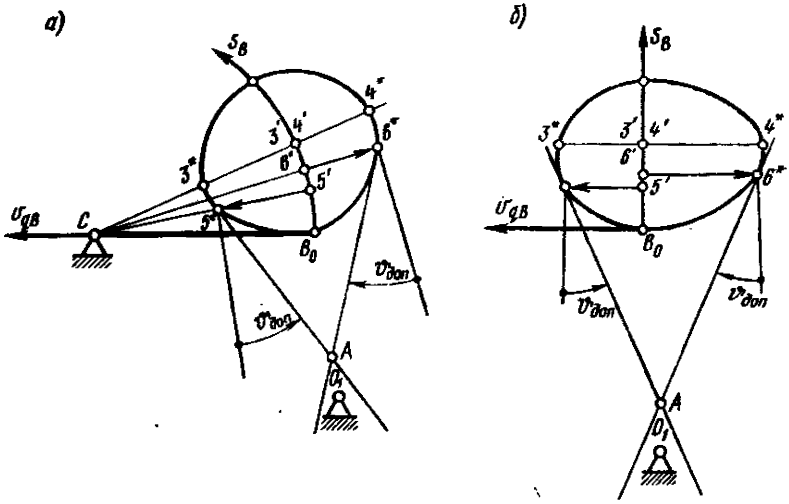


Рис. 18.11

При поступательно движущемся толкателе зависимости будут следующими:

$$æ_2 = \operatorname{arctg}(-s_3/v_{q3});$$

$$l_{34} = v_{q3}/\cos æ_2;$$

$$l_{31} = v_{q3}\frac{\sin(90^\circ - \vartheta_{доп} - æ_2)}{\cos æ_2 \sin 2\vartheta_{доп}}, \text{ или } l_{31} = v_{q3}\frac{\cos(\vartheta_{доп} + æ_2)}{\cos æ_2 \sin 2\vartheta_{доп}}.$$

Остальные формулы (18.9)—(18.14) остаются без изменений.

Расчеты по изложенной методике рекомендуется выполнять на ЭВМ.

§ 18.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАБАРИТНЫХ РАЗМЕРОВ КУЛАЧКА ПО УСЛОВИЮ ВЫПУКЛОСТИ ПРОФИЛЯ

Если башмак толкателя выполнить плоским, то угол давления остается постоянным в любой момент взаимодействия кулачка с толкателем. В частном случае, когда плоскость башмака перпендикулярна оси толкателя, угол давления ϑ становится равным нулю (рис. 18.12, *а, б*). Это позволяет направляющие толкателя выполнить в виде цилиндрической пары и распределить износ башмака на бо́льшую поверхность за счет перемещения контактной точки *B* вдоль башмака. Для такой конструкции элементов высшей кинематической пары ограничением является условие выпуклости

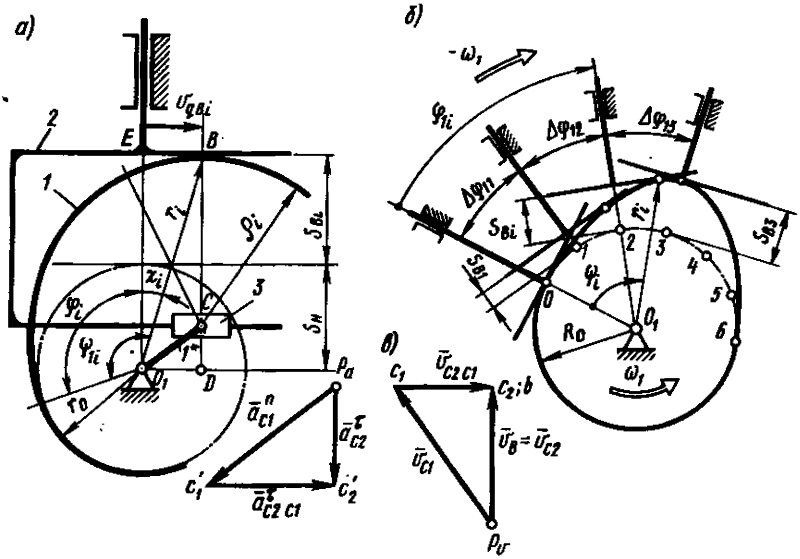


Рис. 18.12

профиля кулачка, которое можно записать в форме ограничения на радиус кривизны ρ профиля:

$$\rho_{\min} \geqslant 0. \tag{18.15}$$

В соответствии с обозначениями, приведенными на рис. 18.12, *а*, это условие можно выразить следующим неравенством:

$$\rho_i = S_н + S_{Bi}(\varphi_1) - l_{CD}. \tag{18.16}$$

В соотношении (18.16) $S_н = r_0$; $S_{Bi}(\varphi_1)$ — текущее значение функции перемещения; l_{CD} — отрезок, имеющий определенный геометрический смысл, который легко выяснить сопоставлением ΔO_1CD на схеме механизма с $\Delta p_a c_1' c_2'$ плана ускорений (рис. 18.12, *в*), построенного для заменяющего рычажного механизма из звеньев *1**, *3*, *2*, по уравнению

$$\bar{a}^\tau_{C2} = \bar{a}^n_{C1} + \bar{a}^\tau_{C2C1} + \bar{a}^\kappa_{C2C1},$$

в котором $\bar{a}^\kappa_{C2C1} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 2\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{C2C1} = 0$. Из подобия треугольников следует

$$\frac{OC}{a^n_{C1}} = \frac{CD}{a^\tau_{C2}}, \text{ или } l_{CD} = a^\tau_{C2}\frac{l_{OC}}{a^n_{C1}} = \frac{a^\tau_{C2}}{\omega_1^2} = a^\tau_{qC2},$$

т. е. расстояние между точками C и D численно равно передаточной функции ускорения точки C_2 (или B) толкателя 2:

$$a^{\tau}_{qC2}=a^{\tau}_{qB}=a^{\tau}_{C2}/\omega_1^2=l_{CD}.$$

Следовательно, соотношение (17.16) можно записать так:

$$\rho_i=r_0+S_{Bi}(\varphi_1)-a^{\tau}_{qBi}(\varphi_1)$$

или разрешить его относительно радиуса r_0 начальной окружности кулачка:

$$r_0=\rho_i-S_{Bi}(\varphi_1)+a^{\tau}_{qBi}(\varphi_1).$$

В частном случае при $\rho_i=0$ и $a^{\tau}_{qBi}=a^{\tau}_{qB\max}$ при $S_{Bi}=H$ значение радиуса r_0 минимально.

§ 18.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПРОФИЛЯ ДИСКОВЫХ КУЛАЧКОВ

В технической документации или на рабочих чертежах необходимо приводить данные о координатах профиля кулачка. Координаты рассчитываются либо для центрового, либо для конструктивного профилей в зависимости от технологии изготовления кулачков.

Если размер ролика отличается от размеров инструмента — фрезы или шлифовального круга, то рассчитывают координаты технологического профиля, определяющего положение оси инструмента, необходимое для настройки станка, например с числовым программным управлением. Для контроля точности профиля рассчитывают координаты измерительного профиля, соответствующего размерам индентора измерительной машины.

Координаты центрового профиля дискового кулачка с поступательно движущимся толкателем. Расчетная схема изображена на рис. 18.13, *а*. Координаты текущей точки B_i на центровом профиле: в полярной системе координат r_i и ψ_i; в декартовой подвижной системе координат $Ax^{(1)}y^{(1)}$, связанной с кулачком 1: $x^{(1)}_{Bi}$, $y^{(1)}_{Bi}$.

Координаты текущей точки C_i на конструктивном профиле: в полярной системе координат R_{Ci} и $\psi_{Ci}=\psi_i+\gamma_i$; в декартовой системе координат $Ax^{(1)}y^{(1)}-x^{(1)}_{Ci}$, $y^{(1)}_{Ci}$ (на чертеже не обозначены). Габаритные размеры r_0, $R_р$, $S_н$, e принимают заданными или вычисленными ранее. Перемещение толкателя (S_{Bi} — текущее значение и H — ход толкателя) заданы в функции обобщенной координаты φ_1 либо в аналитической форме, либо в форме массива (таблицы) значений.

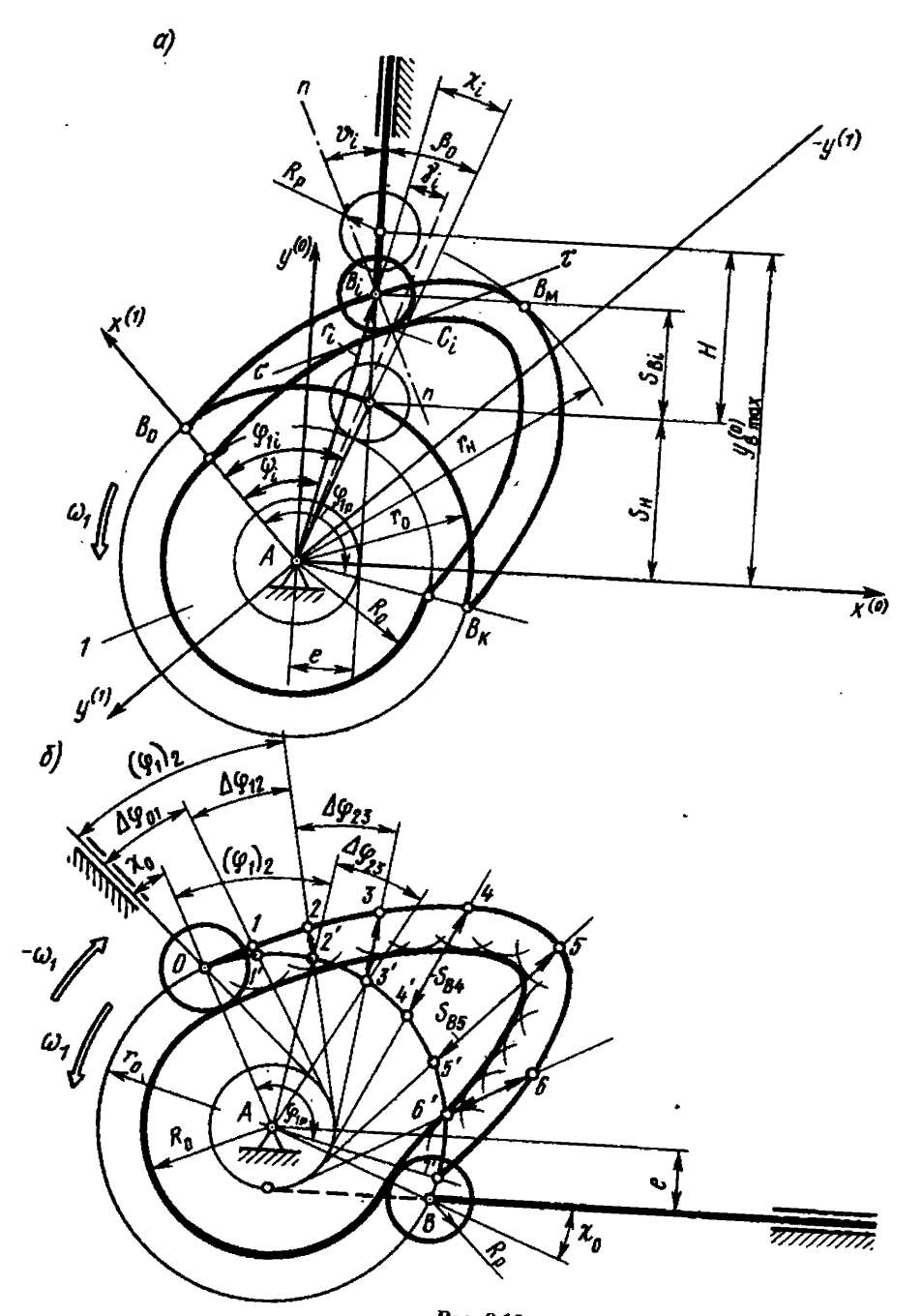

а)
б)
χ_i
ϑ_i
β_0
γ_i
R_p
$-y^{(1)}$
$y^{(0)}$
$x^{(1)}$
$x^{(0)}$
$y^{(1)}$
B_i
B_M
C_i
r_i
r_H
r_0
B_0
B_K
φ_{1i}
φ_i
φ_{10}
ω_1
$-\omega_1$
A
R_0
e
1
S_{Bi}
H
S_H
$y^{(0)}_{B\,max}$
$(\varphi_1)_2$
$\Delta\varphi_{01}$
$\Delta\varphi_{12}$
$\Delta\varphi_{23}$
$\Delta\varphi_{25}$
λ_0
O
S_{B4}
S_{B5}
B
χ_0
R_p

Рис. 8.13

Анализируя расчетную схему (рис. 18.13, *а*), можно записать следующие соотношения:

координаты точки B_i на центровом профиле

$$r_i=\sqrt{e^2+(S_н+S_{Bi})^2}; \tag{18.17}$$

$$r_н=\sqrt{e^2+(S_н+H)^2} \tag{18.18}$$

(следует учитывать, что при переходе от системы координат $x^{(2)}B_0y^{(2)}$ к системе $x^{(1)}Ay^{(1)}$ меняется знак смещения: $e^{(1)}=-e^{(2)}$);

$$\beta_0=\operatorname{arctg}(e/S_н);$$

$$\chi_i=\operatorname{arctg}[(S_н+S_{Bi})/e]-\operatorname{arctg}(S_н/e). \tag{18.19}$$

При отсчете углов по часовой стрелке от оси $Ax^{(1)}$ (см. рис. 18.12, *а*) и смещении оси толкателя $e>0$

$$\psi_i=\varphi_{1i}-\chi_i; \tag{18.20}$$

$$x_{Bi}^{(1)}=r_i\cos\psi_i; \tag{18.21}$$

$$y_{Bi}^{(1)}=-r_i\sin\psi_i. \tag{18.22}$$

Координаты точки C_i на конструктивном профиле:

$$\vartheta_i=\operatorname{arctg}[(v_{qBi}-e)/(S_н+S_{Bi})]; \tag{18.23}$$

$$R_{Ci}=\sqrt{R_р^2+r_i^2-2R_р r_i\cos(\vartheta_i+\beta_0-æ_i)}; \tag{18.24}$$

$$\gamma_i=\arccos[(r_i^2+R_{Ci}^2-R_р^2)/(2r_iR_{Ci})]; \tag{18.25}$$

$$\psi_{Ci}=\psi_i+\gamma_i; \tag{18.26}$$

$$x_{Ci}^{(1)}=R_{Ci}\cos\psi_{Ci}; \tag{18.27}$$

$$y_{Ci}^{(1)}=-R_{Ci}\sin\psi_{Ci}. \tag{18.28}$$

Расчеты координат по формулам (18.17)—(18.28) проводят с использованием ЭВМ и стандартных подпрограмм из математического обеспечения системы автоматизированных расчетов по курсовому проектированию.

Частные случаи профилей дискового кулачка. В практике проектирования широко используют кулачковые механизмы без смещения оси толкателя ($e=0$). В этом случае формулы (18.11)—(18.14) приобретают частный вид:

$$r_i=r_0+S_{Bi}; \tag{18.29}$$

$$\beta_i=0; \tag{18.30}$$

$$\psi_i = \varphi_{1i}. \tag{18.31}$$

Для некоторых законов движения толкателя (например, движение с постоянными скоростью, ускорением и углом давления) уравнение профиля легко выразить в аналитической форме.

Так, для случая движения толкателя с постоянной скоростью ($v_B = \text{const}$) кинематическая передаточная функция скорости $v_{qB} = v_B/\omega_1$ является величиной постоянной, а перемещение толкателя определяется соотношением

$$S_B = \int\limits_{\varphi_{10}} v_{qB}\,\mathrm{d}\varphi_1 = \frac{v_B}{\omega_1}\,\varphi_{i1}.$$

Подставляя это соотношение в формулы (18.29) и (18.31), имеем

$$r_i = r_0 + (v_B/\omega_1)\,\psi_i. \tag{18.32}$$

Соотношение (18.32) является уравнением архимедовой спирали.

Для случая движения толкателя с постоянным ускорением ($a_B^\tau = \text{const}$) кинематическая передаточная функция ускорения ($a_{qB}^\tau = a_B^\tau/\omega_1^2$) является величиной постоянной, а перемещение толкателя определяется в результате двойного интегрирования:

$$S_B = \iint\limits_{\varphi_{10}} \left(\frac{a_B^\tau}{\omega_1^2}\right) \mathrm{d}\varphi_1^2 = \frac{a_B^\tau}{\omega_1^2}\,\frac{\varphi_{1i}^2}{2}.$$

Подставляя это соотношение в формулы (18.29) и (18.31), имеем

$$r_i = r_0 + (a_B^\tau/\omega_1^2)\,\psi_i^2/2. \tag{18.33}$$

Это уравнение кривой 2-го порядка.

Для случая передачи движения от кулачка к ролику с постоянным углом давления ϑ формула (18.23) приобретает частное значение:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v_{qB}}{S_н + S_{Bi}} = \frac{v_B}{\omega_1\,(r_0 + S_{Bi})} = \frac{v_B}{\omega_1 r_i} = \frac{\omega_1\,\mathrm{d}S_B/\mathrm{d}\varphi_1}{\omega_1 r_i} = \frac{\mathrm{d}r_i}{r_i\,\mathrm{d}\varphi_1},$$

или

$$\mathrm{d}r_i/r_i = \operatorname{tg}\vartheta\;\mathrm{d}\varphi_1. \tag{18.34}$$

Принимая $\vartheta = \vartheta_{доп}$, после интегрирования уравнения (18.34) получаем уравнение профиля:

$$r_i = r_0\,e^{\psi_i \operatorname{tg}\vartheta_{доп}}. \tag{18.35}$$

Соотношение (18.35) является уравнением логарифмической спирали.

Графический метод профилирования. В этом случае используют метод обращения движения, описанный в гл. 4.

Построение выполняют в такой последовательности (рис. 18.13, *б*). Вычерчивают окружности радиусами e, r_0 и $R_0=r_0+R_р$ с общим центром в точке A. На начальной окружности радиуса r_0 выбирают начальную точку 0 профиля и отмечают дуговые шаги $01'$, $1'2'$, $2'3'$, ..., равные $\Delta\varphi_1 r_0$ в соответствии с заданным углом $\varphi_{1р}$ рабочего профиля и выбранным числом N шагов ($\Delta\varphi_1=\varphi_{1р}/N$). Через отмеченные точки $1'$, $2'$, $3'$ проводят положения $1'1$; $2'2$; $3'3$; $4'4$; ... оси толкателя в обращенном движении стойки ($-\omega_1$) с учетом направления вращения кулачка. Эти линии проходят через точки 0, $1'$, $2'$, $3'$, ... касательно к окружности, радиус которой равен величине смещения e. Сумма углов $\Delta\varphi_{01}+\Delta\varphi_{12}+\Delta\varphi_{23}+...$ равна заданному углу $\varphi_{1р}$. В направлении относительного движения толкателя от начальной окружности (точки 0, $1'$, $2'$, $3'$, ...) откладывают с учетом масштаба длины звеньев величины перемещений S_{Bi} толкателя: отрезки $1'1$, $2'2$, $3'3$, ...

Через точки 0, 1, 2, 3, ... проводят плавную кривую, являющуюся центровым профилем кулачка. Конструктивный профиль получают как огибающую относительных положений ролика, ось которого последовательно движется по центровому профилю (рис. 18.13, *б*).

Координаты центрового профиля дискового кулачка с вращающимся толкателем. Расчетная схема изображена на рис. 18.14, *а*. Координаты текущей точки B_i на центровом профиле кулачка обозначены: в полярной системе координат r_i и ψ_i, в декартовой системе $O_1x^{(1)}y^{(1)}-x_B^{(1)}$ и $y_B^{(1)}$ (ось $O_1x^{(1)}$ направлена через начальную точку профиля).

Радиус r_i текущей точки B_i на центровом профиле кулачка выражают из $\Delta O_1C_iB_i$ по теореме косинусов:

$$r_i=\sqrt{a^2+l_2^2-2al_2\cos\varphi_{2i}}, \tag{18.36}$$

где

$$\varphi_{2i}=\varphi_{20}+\beta_i; \tag{18.37}$$

$$\beta_i=S_{Bi}/l_2; \tag{18.38}$$

$$\varphi_{20}=\arcsin\,[(r_0/l_2)\sin\psi_0]; \tag{18.39}$$

$$\psi_0=\arccos\,[(a^2+r_0^2-l_2^2)/(2ar_0)]. \tag{18.40}$$

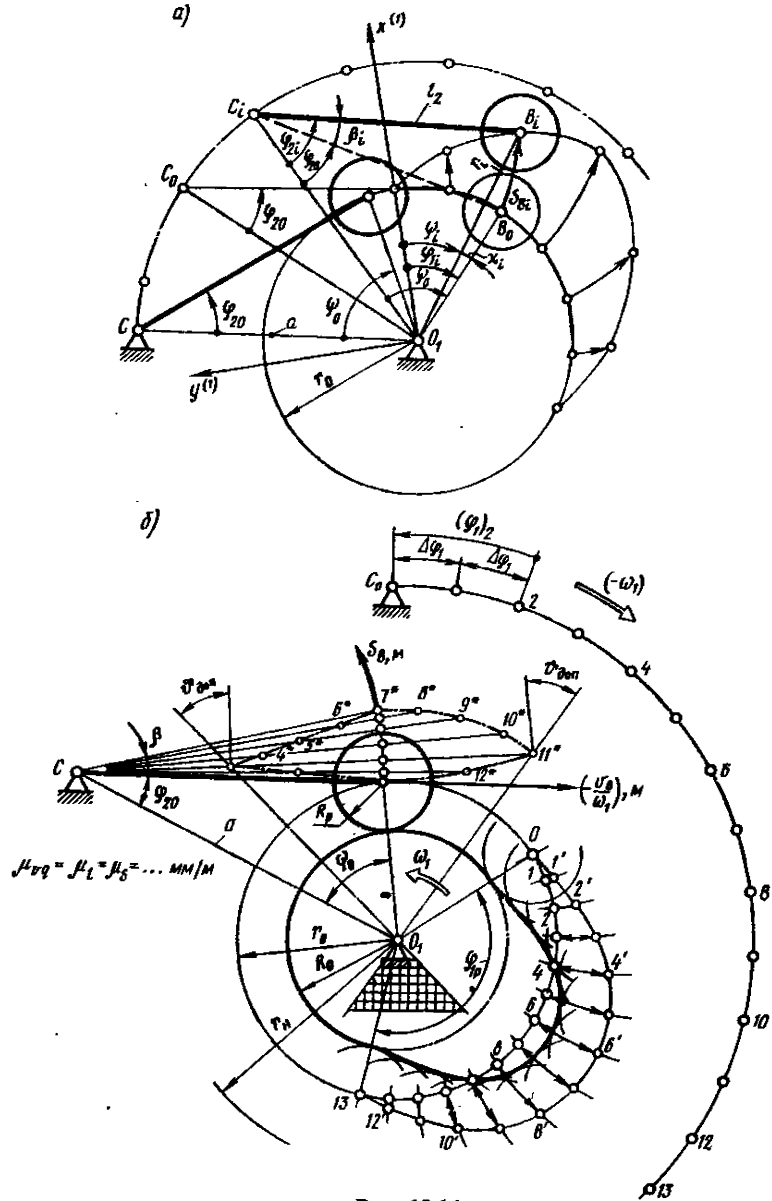


Рис. 18.14

Полярный угол ψ_i текущей точки B_i на центровом профиле кулачка

$$\psi_i = \varphi_{1i} - \chi_i, \tag{18.41}$$

где

$$\chi_i = \psi_0 - \arcsin\,[(l_2/r_0)\,\sin\varphi_{2i}]. \qquad (18.42)$$

Декартовы координаты текущей точки B_i выражают через полярные координаты:

$$x_B^{(1)} = r_i \cos\psi_i; \quad y_B^{(1)} = -r_i \sin\psi_i.$$

При графическом методе профилирования используют метод обращения движения, т. е. вращают стойку (линию CO_1) (рис. 18.14, *б*) относительно неподвижного кулачка *1*. Для ряда фиксированных положений CO_1 линии стойки: *0, 1, 2, 3, 4, ...*, определяемых числом шагов $\Delta\varphi_1 = \varphi_{1р}/N$, находят на окружности радиуса r_0 методом засечек размером l_2 (длина толкателя) точки *0, 1, 2, 3, ...*, от которых откладывают дуги *11′, 22′, 33′*, изображающие в масштабе чертежа перемещения S_{B1}, S_{B2}, S_{B3}, ... оси *B* ролика толкателя. Точки *0, 1′, 2′, 3′, ...* соединяют кривой, являющейся центровым профилем кулачка. Выбрав радиус ролика $R_р$, графически строят конструктивный профиль кулачка, как огибающую относительных положений ролика, ось которого занимает последовательные положения на центровом профиле.

Выбор радиуса $R_р$ ролика. Радиус $R_р$ ролика в силовых механизмах назначают по условию контактной прочности, т. е. с учетом ширины ролика, механических свойств материалов рабочих поверхностей ролика и кулачка и заданной долговечности. В кинематических передачах геометрическим ограничением являются допустимые ошибки положения и отсутствие самопересечения конструктивного профиля, когда радиус ролика ошибочно назначают больше, чем минимальный радиус кривизны ρ_{min} на каком-либо участке центрового профиля *1* (рис. 18.15). Подобное самопересечение профиля показано на рис. 18.15 для профиля *4* при $R_{р4} > \rho_{min}$. При $R_{р3} = \rho_{min}$ на конструктивном профиле *3* имеет место теоретическое заострение профиля ($\rho_1 = 0$). При выполнении условия $R_{р2} < \rho_{min}$ кривизна конструктивного профиля *2* во всех точках не достигает предельного значения. На практике принимают $R_р \leqslant 0{,}7\rho_{min}$, назначая конкретные значения в соответствии

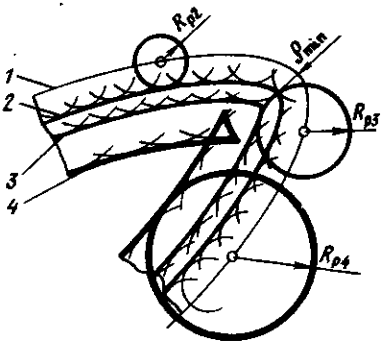


Рис. 18.15

со стандартным рядом диаметров и длин в машиностроении (ГОСТ 6636—69). Кроме того, радиус ролика ограничивают условием

$$R_р \leqslant 0{,}4 r_0.$$

Координаты дискового кулачка с плоским толкателем. Расчетная схема изображена на рис. 18.12, *а*. Полярные координаты текущей точки B_i на профиле кулачка обозначены r_i и ψ_i. Смещение BE контактной точки B относительно оси толкателя легко находят из подобия $\triangle CO_1D$ на схеме механизма и треугольника на плане скоростей (см. рис. 18.12, *в*), построенному согласно векторному уравнению: $\bar{v}_B = \bar{v}_{C2} = \bar{v}_{C1} + \bar{v}_{C2C1}$.

Точка D совпадает с полюсом P зацепления высшей кинематической пары: $O_1D/v_B = CO_1/v_{C1}$, откуда $BE = O_1D = v_B/\omega_1 = v_{qB}$, т. е. расстояние BE численно равно кинематической передаточной функции v_{qB} скорости толкателя.

Угол χ_i смещения контактной точки B_i находят из соотношения

$$\operatorname{tg}\chi_i = \frac{BE}{EO_1} = \frac{v_{qBi}}{S_н + S_{Bi}} = \frac{v_{qBi}}{r_0 + S_{Bi}}.$$

Полярные координаты:

$$\psi_i = \varphi_{1i} + \chi_i; \quad r_i = \sqrt{(r_0 + S_{Bi})^2 + v_{qBi}^2}.$$

При графическом способе профилирования используют метод обращенного движения стойки относительно неподвижного кулачка (см. рис. 18.12, *б*).

От начального положения стойки O_1O откладывают углы $\Delta\varphi_{11}$, $\Delta\varphi_{12}$, $\Delta\varphi_{13}$ поворота стойки при ее вращении в направлении, противоположном вращению кулачка. От начальной окружности радиуса R_0 в направлении перемещения толкателя откладывают от точек *1*, *2*, *3*, *4*, ... в соответствующем масштабе перемещения S_{B1}, S_{B2}, S_{B3}, ... толкателя, заданные таблицей или графиком перемещений, и вычерчивают положение башмака (тарелки) толкателя. Огибающая семейства прямых (положений башмака) является конструктивным профилем кулачка (т. е. $R_i = r_i$).

§ 18.7. МЕХАНИЗМЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КУЛАЧКАМИ

В технологических машинах-автоматах и полуавтоматах широкое применение получили кулачки *1*, выполненные в форме цилиндров (или барабанов), имеющих паз и совершающих вращательное движение с угловой скоростью ω_1 (рис. 18.16, *а*). Толкатель *2* совер-

шает либо поступательное (см. рис. 18.2, *в*, *г*), либо вращательное движение.

При графическом профилировании используют развертку цилиндра кулачка на плоскость (рис. 18.16, *б*). Используя метод обращения движения, считают, что развертка неподвижна, а ось *C* качания толкателя *2* движется со скоростью $\bar{v}_C = -\bar{v}_{B1}$, где $v_{B1} = \omega_1 r_1$ — скорость точки центрового профиля на барабане. Заданные перемещения оси *B* ролика откладывают по дугам S_{Bi}, S_{Bk}, ... радиуса $l_2 = l_{BC}$.

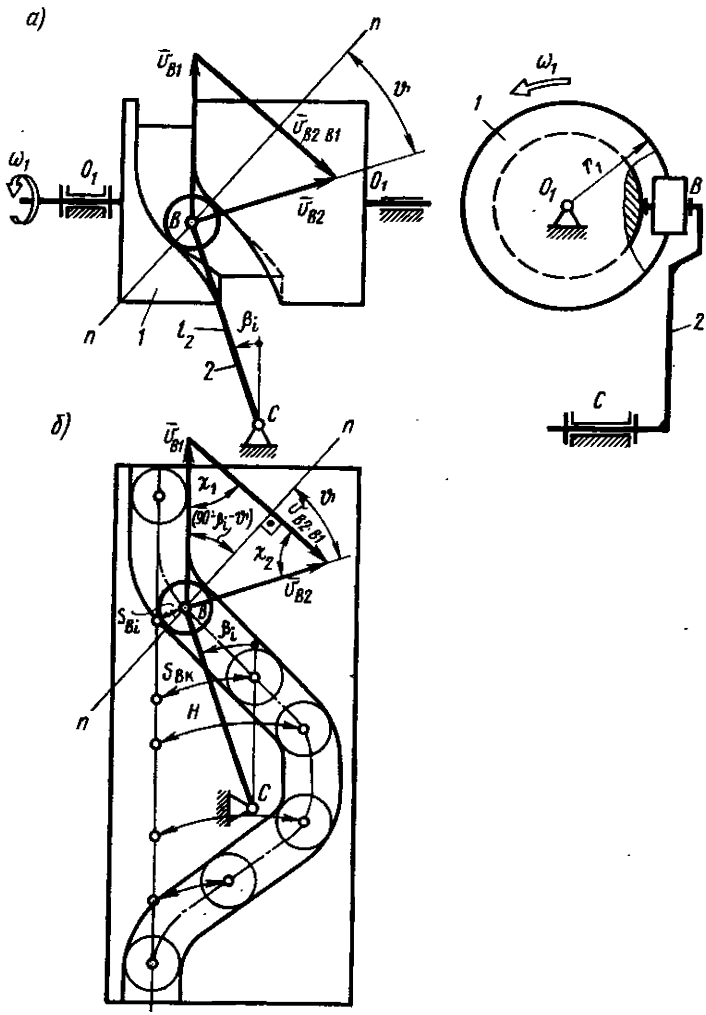


Рис. 18.16

Наибольший подъем толкателя — ход H — также откладывают по дуге радиуса l_2.

Угол ϑ между вектором скорости толкателя $\bar{v}_{B2}$ и нормалью $n—n$ к профилю кулачка на развертке является углом давления. В векторном треугольнике скоростей углы χ_1 и χ_2 выражают в следующем виде: $\chi_1 = \vartheta + \beta_i$; $\chi_2 = 90° - \chi$. По теореме синусов записывают соотношение

$$v_{B1}/\sin\chi_2 = v_{B2}/\sin\chi_1, \text{ или } \omega_1 r_1/\cos\vartheta = v_{B2}/\sin(\vartheta + \beta_i).$$

Так как $\sin(\vartheta + \beta_i) = \sin\vartheta\cos\beta_i + \cos\vartheta\sin\beta_i$, то после подстановки получают

$$r_1 = \frac{v_{B2}/\omega_1}{\operatorname{tg}\vartheta\cos\beta_i + \sin\beta_i} = \frac{v_{qB2}}{\operatorname{tg}\vartheta\cos\beta_i + \sin\beta_i}. \qquad (18.43)$$

Ограничивая угол давления ϑ по условию $\vartheta \leqslant \vartheta_{доп}$, можно вычислить (или построить графически) изменение величины $r_1(\beta_i)$ и принять ее наибольшее значение за минимальный радиус цилиндрического кулачка, обеспечивающий работу механизма без заклинивания. Частным случаем является механизм, в котором толкатель перемещается поступательно. В этом случае кривая профиля кулачка на развертке аналогична графику перемещения толкателя при равенстве соответствующих масштабов. Угол β_i в любом положении равен нулю и выведенное выше соотношение (18.43) принимает частное значение:

$$r_1 = \frac{v_{B1}/\omega_1}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{v_{qB2}}{\operatorname{tg}\vartheta}.$$

Из последнего соотношения следует $r_{1\,min} = v_{qB2\,max}/\operatorname{tg}\vartheta_{доп}$.

§ 18.8. ВЛИЯНИЕ УПРУГОСТИ ЗВЕНЬЕВ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА НА ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЛКАТЕЛЯ И ФОРМУ ПРОФИЛЯ КУЛАЧКА

При синтезе быстроходных кулачковых механизмов приходится учитывать характеристики реальных звеньев, которые отличаются от характеристик абсолютно твердых тел. Например, низкая жесткость, значительные массы и высокие ускорения при движении звеньев газораспределительных механизмов ДВС (см. рис. 18.1, *ж*, *з*; 18.17, *а*) приводят к возникновению упругих колебаний, которые накладываются на закон движения выходных звеньев. Считается, что в этом механизме по крайней мере четыре звена обладают податливостью: распределительный вал *1*, штанга *2*, коромысло

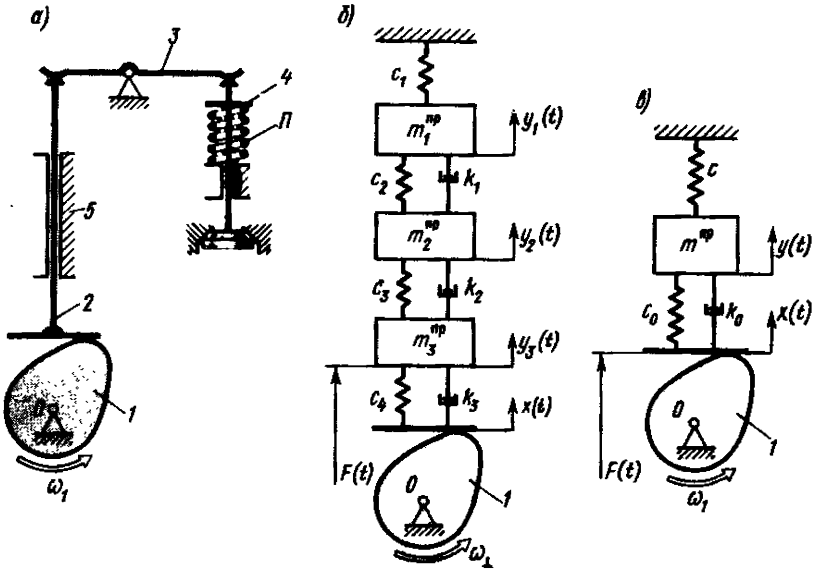


Рис. 18.17

3 и клапан *4* с клапанной пружиной (рис. 18.17, *а*). В период, когда клапан *4* закрыт, все звенья механизма разгружены и можно принять, что каждый следующий подъем ведомых звеньев не связан с предыдущим и не зависит от него.

При выборе динамической модели механизма, которая отражала бы влияние упругости звеньев реального механизма, стремятся учесть инерционные свойства механизма в форме конечного числа приведенных масс, которые соединены безынерционными геометрическими, кинематическими или упругодиссипативными связями. На рис. 18.17 показаны две динамические модели: трехмассная (рис. 18.17, *б*) и одномассная (рис. 18.17, *в*), отличающиеся уровнем идеализации рассматриваемого механизма.

При приведении масс и моментов инерции звеньев к той или иной модели стремятся сохранить баланс кинетической энергии. При учете упругости звеньев эта задача решается приближенно. При трехмассной модели к массе $m_1^{пр}$ относят массу клапана m_4, треть массы клапанных пружин и часть массы от момента инерции коромысла. При расчете массы $m_2^{пр}$ учитывают одну треть массы штанги *2*, оставшуюся часть массы от момента инерции коромысла. При расчете массы $m_3^{пр}$ учитывают оставшиеся две трети массы штанги *2*, массу башмака и часть массы распределительного вала, соответствующую участку между соседними опорами.

При одномассной динамической модели (рис. 18.17, *в*) масса $m^{пр}$ учитывает инерционные характеристики всех звеньев механиз-

ма, приведенные к одной точке с учетом соответствующих кинематических передаточных функций.

Аналогичные рассуждения проводят относительно коэффициентов жесткости c_1, c_2, c_3, c_4 в трехмассной модели, c_0 и c — в одномассной модели и соответствующих коэффициентов демпфирования k_1, k_2, k_3 и k_0. Коэффициенты жесткости c_1 и c соответствуют коэффициенту жесткости клапанной пружины; c_2 — коэффициенту жесткости коромысла; c_3 — приведенному коэффициенту жесткости штанги *2*; c_4 — приведенному коэффициенту жесткости участка распределительного вала; c_0 — приведенной жесткости механизма. Для упрощения расчетной схемы коэффициенты демпфирования k принимают в первом приближении равными нулю.

Вынужденные колебания масс в трехмассной системе описываются следующей системой дифференциальных уравнений (верхний индекс «пр» у приведенных масс опущен для краткости записи):

$$m_1\ddot{y}_1+(c_1+c_2)\,y_1-c_2y_2=0;$$

$$m_2\ddot{y}_2-c_2y_1+(c_2+c_3)\,y_2-c_3y_3=0;$$

$$m_3\ddot{y}_3-c_3y_2+(c_3+c_4)\,y_3=F\,(t).$$

В правой части последнего уравнения функция $F\,(t)$ описывает изменение возбуждающей силы, учитывающей силу предварительной затяжки клапанных пружин, силу упругости вследствие перемещения ведомого звена, задаваемого профилем кулачка.

Вынужденные колебания массы m в одномассной системе описываются дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{y}+k_0\dot{y}+(c_0+c)\,y=F\,(t).$$

Если ординаты y_1, y_2, y_3 и y соответствуют перемещениям звена приведения за счет упругости звеньев, а ордината $x\,(t)$ соответствует номинальному перемещению за счет профиля кулачка, то разность соответствующих величин выражает деформацию $z\,(t)$ звеньев кинематической цепи механизма. Например, для одномассной модели

$$z\,(t)=x\,(t)-y\,(t).$$

Решение написанных дифференциальных уравнений при произвольном виде функции $F\,(t)$ проводят одним из численных методов с использованием ЭВМ.

Не приводя в учебнике подробных выкладок, можно остановиться только на важнейших выводах, которые характеризуют динамические качества кулачкового механизма с учетом упругости звеньев.

В момент разрыва кинематической цепи (при $z \leqslant 0$) штанга *2* отрывается от кулачка *1*, возникают дополнительные динамические нагрузки на звенья и клапан *4* становится неуправляемым. При интенсивных отрывах наблюдается повторный отскок клапана за счет ударного восстановления контакта. Все эти явления являются нежелательными и их следует устранять на стадии проектирования профиля кулачка.

Упругие колебания вызывают изменение действительной скорости в момент посадки клапана на седло по сравнению со скоростью, определяемой профилем кулачка. Это приводит к преждевременной посадке клапана на седло или к повторному отскоку клапана.

Особое внимание при синтезе следует уделять выбору величин положительных ускорений толкателя, соответствующих концевым участкам профиля кулачка, так как эти участки вызывают наибольшие расчетные деформации в механизме. Наибольшая амплитуда упругих колебаний соответствует концу участка положительных ускорений и она возрастает с увеличением частоты вращения распределительного вала, так как максимальное ускорение связано с частотой вращения квадратичной зависимостью.

ГЛАВА 19
МАНИПУЛЯЦИОННЫЕ РОБОТЫ

Робототехника — новое направление науки и техники, связанное с созданием и применением робототехнических систем. Робот, являющийся одним из основных объектов изучения в этой науке, представляет собой автоматическую машину для воспроизведения двигательных и интеллектуальных функций человека. Существуют различные классы роботов, среди которых важнейшими являются автоматические манипуляционные роботы. Частный вид этих роботов — промышленные роботы.

На сегодняшний день промышленные роботы и подобное им оборудование являются практически единственным средством автоматизации мелкосерийного производства. Важная особенность промышленных роботов состоит в том, что они позволяют наиболее просто совместить в едином цикле как транспортные, так и основные технологические операции, что позволяет создать на базе универсального оборудования гибкие автоматизированные производства.

Среди всех частей промышленного робота исполнительное устройство — механизм, обеспечивающий движение рабочего органа, — имеет определяющее значение. Именно от этого устройства во многом зависят такие важные характеристики робота, как быстродействие, маневренность, точность позиционирования, возможность работы в стесненных пространствах.

§ 19.1. КЛАССИФИКАЦИЯ, НАЗНАЧЕНИЕ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

История механики богата примерами, которые свидетельствуют о постоянном стремлении человека создать механизмы и устройства, подобные живым существам. Это стремление обусловлено многими причинами, среди которых не последнее место занимает желание заменить человека при выполнении сложной и вредной работы. В 40-х годах в связи с потребностями атомной технологии появились манипуляторы, основное назначение которых — выпол-

нение разнообразных технологических операций с радиоактивными веществами. Применение таких устройств позволило удалить человека из опасной зоны, за ним остались только функции дистанционного управления. Первыми такой манипулятор разработали сотрудники Аргонской национальной лаборатории США. Манипулятор под названием Master-Slave состоял из исполнительной механической руки (Slave), помещаемой в опасную для человека зону, и задающей механической руки (Master), которой в безопасной зоне манипулировал оператор. Исполнительная рука отличалась от задающей только наличием схвата. Связь между ними осуществлялась кинематическими передачами так, что звенья исполнительной руки копировали движение звеньев задающей. Отсюда название манипулятора — копирующий.

В наше время на смену малоэффективным устройствам прошлого пришли более эффективные автоматически действующие робототехнические устройства. В основе создания современных робототехнических устройств лежат новые технологии, получившие развитие лишь во второй половине XX в.: вычислительная техника и информатика. Робототехнические устройства стали важным средством комплексной автоматизации промышленного производства, они позволяют наиболее просто совместить в едином цикле как погрузочно-разгрузочные, так и основные технологические операции. Наиболее важные применения автоматических роботов связывают с разработкой и созданием автоматизированных участков, цехов и заводов.

Точного и однозначного определения робота не существует. Скорее всего можно говорить о целой группе определений. Наиболее полно сущность роботов можно отразить, определив их как программируемые устройства (машины), предназначенные для воспроизведения рабочих функций руки человека в процессе его трудовой деятельности. Понятие «программируемые» играет немаловажную роль: оно показывает, что действие робота не сводится к решению какой-то одной задачи — его функции можно целенаправленно изменять. Большинство современных роботов включают в себя компьютеры, которые помогают реализовать заданные программные действия.

В данной главе рассматриваются манипуляционные роботы. Манипуляционным роботом называют техническое устройство (машина), предназначенное для выполнения работ универсального характера, исполнительными устройствами которого служат манипуляторы (механические руки). В зависимости от степени участия человека в управлении манипуляционные роботы подразделяются на три типа: автоматические, биотехнические и интерактивные.

Автоматические манипуляционные роботы возникли и развились из систем программного управления станками. Процесс управления их действиями может происходить с участием и без непосредственного участия человека. Функциональная схема автоматического ма-

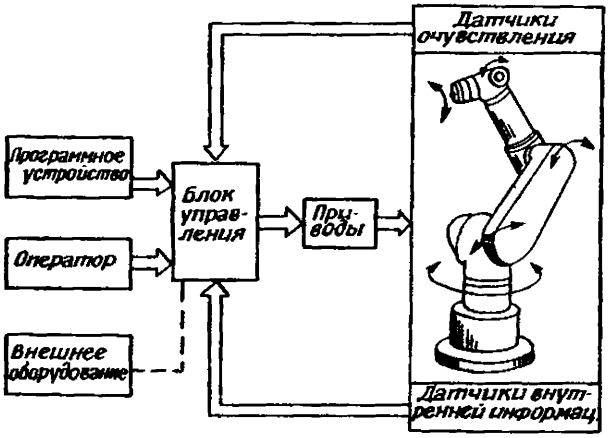


Рис. 19.1

нипуляционного робота представлена на рис. 19.1. Манипуляционный робот состоит из манипулятора, исполнительных устройств, устройств очувствления, устройств связи с оператором и ЭВМ. Манипулятор имитирует движения руки человека и представляет собой многозвенный разомкнутый механизм с одноподвижными вращательными и поступательными кинематическими парами. Число степеней подвижности манипуляторов изменяется в пределах от 3 до 10. Функцию кисти в манипуляторе выполняет так называемый схват, конструкция которого предусматривает выполнение операций с определенным типом объектов манипулирования. Информационная система предназначена для сбора информации о состоянии внешней среды. В качестве ее элементов используются телевизионные, ультразвуковые, тактильные и другие датчики. Управляющая система служит для выработки законов управления приводами исполнительных органов на основании созданных алгоритмов и собранной информации.

В автоматических манипуляционных роботах можно выделить три разновидности в зависимости от связи с человеком-оператором: программные, адаптивные и интеллектуальные.

Программные роботы работают по жесткой программе, заложенной в устройстве памяти, однако их можно перенастраивать на работу с другой жесткой программой действий. Их также называют автоматическими программными манипуляторами или промышленными роботами. Простота изменения программы, т. е. возможность переобучения промышленных роботов новым операциям, сделала эти роботы достаточно универсальными и гибко перенастраиваемыми на различные классы задач.

Адаптивные роботы отличаются от программных большим количеством внешних (оптических, телевизионных, тактильных) и вну-

тренних датчиков. Системы управления роботами этого типа более сложные, не ограничиваются только работой по жесткой программе движения и могут в зависимости от внешних условий несколько корректировать ее. Как правило, они требуют для своей реализации управляющую ЭВМ. Важной частью адаптивных роботов является их развитое программное обеспечение, предназначенное для обработки информации, поступающей от внешних и внутренних датчиков и оперативного изменения программы движения. Благодаря способности воспринимать изменения во внешней среде и приспосабливаться к существующим условиям функционирования адаптивные роботы могут манипулировать с неориентированными деталями произвольной формы и производить сборочные операции.

Характерной особенностью интеллектуальных роботов является их способность вести диалог с человеком, распознавать и анализировать сложные ситуации, планировать движения манипулятора и осуществлять их реализацию в условиях ограниченной информации о внешней среде. Все это обеспечивается совершенством управляющих систем, включающих в себя элементы искусственного интеллекта, способность к обучению и адаптации в процессе работы.

Биотехнические манипуляционные роботы берут свое начало от копирующих и командных механических систем. Операции, которые могут выполнять роботы этого типа, являются менее определенными, чем технологические операции, осуществляемые автоматическими роботами. Широкое распространение они получили при работе с радиоактивными материалами.

Управление манипуляторами этого типа роботов осуществляется оператором, а ЭВМ используется для облегчения его работы.

Различают три разновидности управления биотехническими манипуляционными роботами: копирующее, командное и полуавтоматическое. Копирующее управление осуществляется с помощью задающего устройства, кинематически подобного исполнительной руке робота. Такие системы называют копирующими манипуляторами. Человек-оператор перемещает задающее устройство, а манипулятор повторяет эти движения одновременно по всем степеням подвижности. В случае командного управления оператор с командного устройства дистанционно задает движение звеньям манипулятора путем поочередного включения соответствующих приводов. При полуавтоматическом управлении оператор, манипулируя управляющей рукояткой, имеющей несколько степеней свободы, задает движение схвата манипулятора. ЭВМ по сигналу от управляющей рукоятки формирует сигналы управления на приводы всех звеньев манипулятора. Существуют также биотехнические системы, в которых управление манипулятором осуществляется при помощи биоимпульсов от соответствующих мышц человеческой руки.

Интерактивные манипуляционные роботы отличаются активным участием человека в процессе управления, которое выражается

в различных формах взаимодействия его с ЭВМ. Здесь также различают три разновидности управления: автоматизированное, супервизорное и диалоговое.

При автоматизированном управлении простые операции робот выполняет без управляющего воздействия со стороны оператора, а остальные — при участии оператора в биотехническом режиме. Супервизорное управление отличается тем, что весь цикл операций разбивается на части, выполняемые манипуляционным роботом автоматически, но переход от одной части к другой осуществляется оператором путем подачи соответствующих команд. При диалоговом управлении оператору и ЭВМ представляется возможность совместно принимать решения и управлять манипулятором в сложных ситуациях.

§ 19.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ, СТРУКТУРА И ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ

Первый вопрос, с которым сталкивается создатель манипулятора, — выбор его кинематической схемы, структуры его скелета. В процессе выполнения операций с объектами манипулирования в большинстве случаев манипуляторы имитируют движение рук человека. Поэтому структурная схема манипулятора должна обладать кинематическими характеристиками, аналогичными характеристикам руки человека. Подвижности, имеющиеся у руки челове-

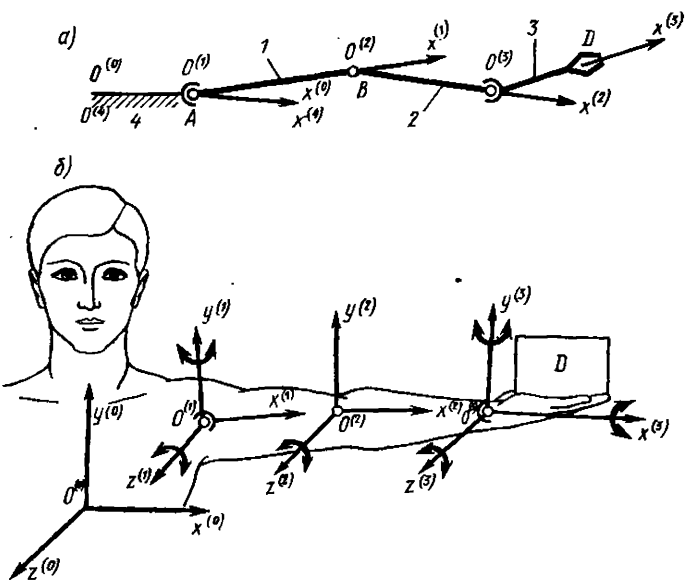


Рис. 19.2

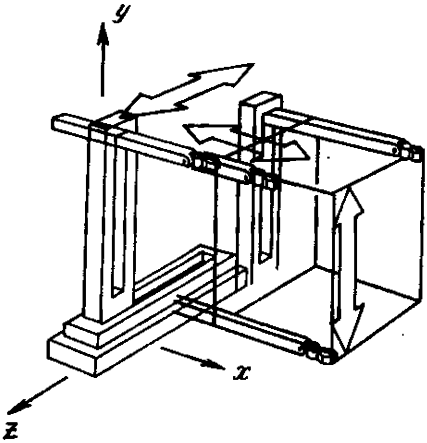


Рис. 19.3

ка (без учета подвижностей пальцев), можно обеспечить с помощью пространственной кинематической цепи, у которой к неподвижному звену *4* (аналог лопатка) посредством различных кинематических пар присоединяются звенья (рис. 19.2): трехподвижной парой *A* — звено *1* (плечо), через одноподвижную пару *B* — звено *2* (предплечье) — и трехподвижной парой *3* (кисть). Используя для оценки степени подвижности руки человека формулу Малышева (3.1) без учета движения кисти (пальцев и фаланг), получим $W=7$; с учетом всех звеньев и в самой кисти имеем $W=27$.

Опыт работы с неориентированными объектами показывает, что манипулятор должен иметь по крайней мере семь (и более) степеней подвижности. Три степени необходимы для перемещения инструмента в любую точку зоны обслуживания, а три — для ориентации инструмента, например схвата электрода, краскораспылителя и т. п. Как минимум одна степень подвижности должна быть у схвата.

Каждая степень подвижности манипуляционного робота управляется индивидуальным приводом, в результате чего исполнительный орган получает направленное вполне определенное движение. В современных манипуляторах используют электромеханические, гидравлические, пневматические или комбинированные приводы.

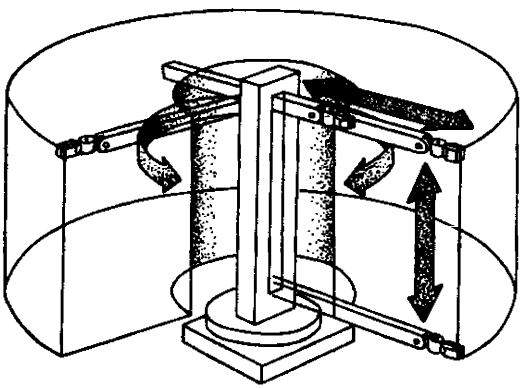


Рис. 19.4

Поскольку манипулятор предназначен для замены физических функций руки человека, у робота можно выделить три основные группы движений: глобальные, региональные и локальные.

Глобальные движения осуществляются путем перемещения подвижного основания робота с помощью двигательной системы. В стационарных роботах глобальные движения отсутствуют. Их ста-

нины неподвижно крепятся к полу, кронштейну или потолку возле технологического оборудования.

Региональные движения — перемещения схвата робота в различные зоны рабочего пространства, определяемого размерами звеньев манипулятора.

Локальные движения — перемещения схвата, соизмеряемые с его размерами, в частности ориентация в малой зоне рабочего пространства.

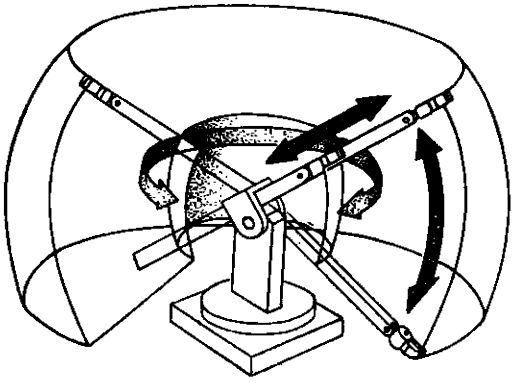


Рис. 19.5

Иногда глобальные и региональные движения называют транспортирующими движениями, а локальные — ориентирующими.

Существует большое количество схем манипуляторов, различным образом реализующих региональные движения, но наиболее распространенными в промышленности являются пять следующих схем с одноподвижными кинематическими парами:

манипулятор (рис. 19.3), функционирующий в декартовой (прямоугольной) системе координат, прост в управлении и отличается высокой точностью действий. Схват манипулятора поступательно перемещается вдоль трех основных осей: x, y и z (т. е. слева-направо, вперед-назад и вверх-вниз);

манипулятор (рис. 19.4), работающий в цилиндрической системе координат. Его схват может выдвигаться и втягиваться, а также перемещаться вверх и вниз вдоль стойки. Кроме того, весь узел манипулятора может поворачиваться вокруг оси основания, но не на полный оборот, что позволяет ему выполнять операции в окружающей цилиндрической зоне;

манипулятор (рис. 19.5), действующий в сферической (или полярной) системе координат. Его схват может выдвигаться и втягиваться. Вертикальные перемещения манипулятора достигаются путем поворота его в верти-

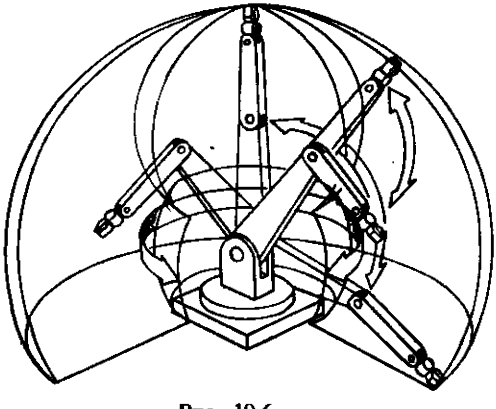


Рис. 19.6

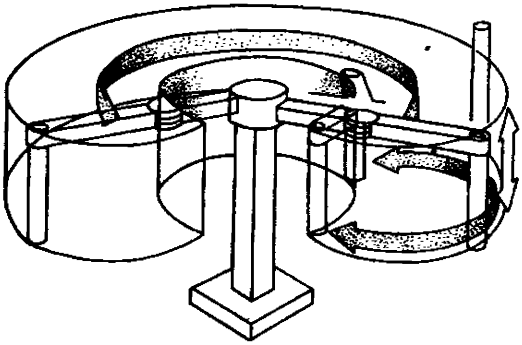


Рис. 19.7

кальной плоскости в «плечевом» суставе. Весь узел манипулятора может также поворачиваться вокруг оси основания. Зона действия подобного манипулятора представляет усеченную сферу. Первые модели промышленных роботов были сконструированы именно по этому принципу;

шарнирный манипулятор (рис. 19.6), действующий в ангулярной системе координат, не имеет поступательных кинематических пар, а имеет только вращательные кинематические пары. Манипулятор такого типа очень напоминает руку человека, поскольку имеет «плечевое» и «локтевое» сочленения, а также «запястье». Его зона обслуживания значительно больше, чем у роботов других типов. Он способен обходить препятствия гораздо более разнообразными путями и даже складываться, но вместе с тем он исключительно сложен в управлении;

своеобразную схему имеет манипулятор системы SCARA (рис. 19.7), представляющий собой вариант манипулятора с цилиндрической системой координат. Все кинематические пары этого манипулятора располагаются в горизонтальной плоскости, благодаря чему механизм способен разворачиваться подобно складной ширме. Его зона обслуживания имеет цилиндрическую форму.

Перспективными представляются роботы еще двух типов. Первый из них, «Spine» (рис. 19.8), спроектирован специалистами фирмы «Спайн роботикс». В нем используется длинный хоботоподобный манипулятор, состоящий из множества чечевицеобразных дисков, которые соединены между собой двумя парами тросов, обеспечивающих натяжение. Тросы соединены с поршнями гидравлических цилиндров, которые, создавая натяжение, вызывают перемещение манипулятора. Специальные датчики передают на систему управления информацию о положении манипулятора и его кисти. Такой робот отличается чрезвычайно большой гибкостью, значительным радиусом действия и высокой маневренностью.

Другой робот маятникового типа, IR B1000, разработан специалистами фирмы ASEA; его манипулятор подвешен подобно маятнику с двойным карданным подвесом и может перемещаться по направляющим относительно продольной и поперечной осей. По утверждению специалистов фирмы ASEA, это устройство движется в 1,5 раза быстрее, чем традиционные манипуляторы, что обеспечивает высокую производительность.

Кинематическая цепь, реализующая локальные движения, назы-

вается кистью робота, поскольку она выполняет функции, аналогичные функциям кисти руки человека. Назначение кисти — обеспечить ориентирующие движения. Для удержания объекта манипулирования кисть снабжается схватом. Существует столько же типов схватов, сколько и областей применения роботов. Конструкции схватов могут представлять собой устройства от обыкновенных клещей для захвата предметов двумя или несколькими губками до специально сконструированных схватов, в гнезда которых устанавливаются сменные инструменты для выполнения ряда технологических операций, таких, как сверление, нарезание резьбы, сварка, резка, окраска и т. д.

Рассмотрим основные геометро-кинематические и структурные характеристики манипуляторов, к которым прежде всего относят число степеней подвижности, форму и размеры рабочей зоны, маневренность, угол и коэффициент сервиса.

Число степеней подвижности схвата манипулятора можно подсчитать как сумму подвижностей всех пар открытой кинематической цепи. Сказанное не противоречит формуле Малышева (3.1) для пространственных механизмов, так как в открытых цепях число подвижных звеньев всегда равно числу кинематических пар.

Для рассмотренных механизмов манипуляторов с одноподвижными парами (рис. 19.3—19.7) можно использовать формулу

$$W=6n-5p_1=6\cdot 3-5\cdot 3=3,$$

где n — число подвижных звеньев; p_1 — число одноподвижных пар.

Под маневренностью манипулятора понимают число его степеней подвижности при неподвижном схвате. Маневренность характеризует возможность кинематической цепи манипулятора занимать разные положения при одном и том же положении схвата. Маневренность манипулятора зависит не только от вида и числа кинематических

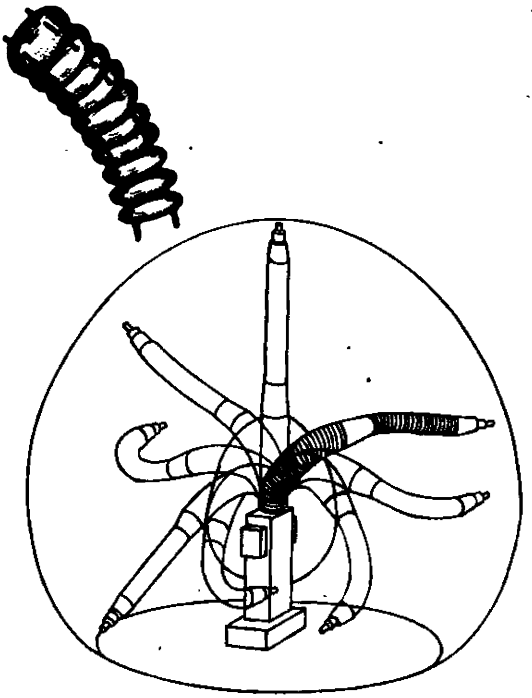


Рис. 19.8

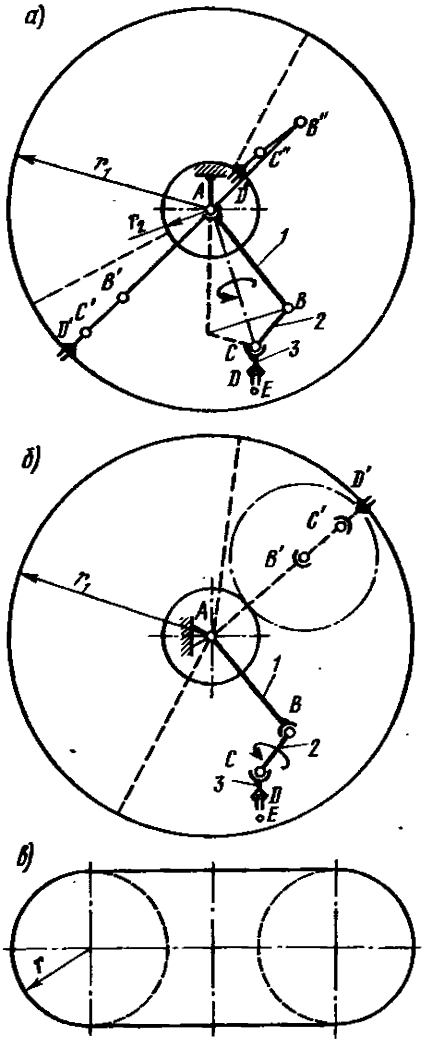


Рис. 19.9

пар, но и от их расположения. Так, манипулятор, изображенный на рис. 19.9, *а*, имеет маневренность, равную единице, — это групповая подвижность, означающая возможность совместного вращения звеньев *1, 2* вокруг оси *AC*, проходящей через центры сферических пар. Маневренность, равная единице, в этом случая означает, что к заданной точке *E* в заданном направлении *CE* схват может подойти при различных положениях остальных звеньев *1, 2*, геометрическим местом которых будут конические поверхности с вершинами в точках *A* и *C* и образующими *AB* и *CB*.

Если пары *A* и *B* поменять местами (рис. 19.9, *б*), то число степеней подвижности по формуле Малышева останется прежним:

$$W=6n-\Sigma(6-i)p_i=6\cdot 2-5\cdot 1-3\times\times 2=1,$$

но это местная подвижность, означающая возможность вращения звена *2* вокруг оси *BC*, при этом маневренность будет равна нулю, поскольку в данном случае схват может подойти к заданной точке *E* рабочей зоны в заданном направлении *CE* только при одном единственном положении звеньев *1, 2*.

Повышенная маневренность увеличивает возможности для выполнения сложных операций с объектом манипулирования наиболее рациональным путем в условиях наличия препятствий в рабочей зоне, но усложняет задачу управления таким роботом, поскольку приводит к неоднозначному решению задачи расчета обобщенных координат.

Для некоторых геометрических характеристик промышленных роботов ГОСТ 25686—85 вводит ряд определений.

Исполнительным устройством называют устройство, выполняющее все двигательные функции робота.

Рабочий орган — составная часть исполнительного устройства для непосредственного выполнения технологических операций или вспомогательных переходов.

Рабочее пространство манипулятора — часть физического пространства, в котором может находиться исполнительное устройство при функционировании манипулятора.

Рабочая зона — пространство, в котором может находиться рабочий орган.

Не в любой точке рабочей зоны схват может занимать произвольное положение из-за конструктивных ограничений на углы поворота в шарнирах, поэтому рабочая зона реально уменьшается до зоны обслуживания.

Зона обслуживания — пространство, в котором рабочий орган выполняет свои функции в соответствии с назначением.

Для манипулятора, изображенного на рис. 19.9, *а*, рабочая зона — пространство между сферами радиусом $r_1 = AD'$ и радиусом $r_2 = AD''$, а зона обслуживания лишь часть такого пространства (штриховая линия на рис. 19.9, *а*); для манипулятора, изображенного на рис. 19.9, *б*, рабочая зона — тор (кольцо кругового сечения) с размерами $r_1 = AD'$ и $r = B'D'$ (рис. 19.9, *в*), а зона обслуживания — часть такого тора (штрихованная линия на рис. 19.9, *б*).

Манипулятор с тремя поступательными парами (см. рис. 19.3) имеет рабочую зону в виде прямоугольного параллелепипеда. Для манипулятора с одной вращательной и двумя поступательными парами (см. рис. 19.4) рабочая зона — кольцевой цилиндрический сектор.

В общем случае для каждой точки рабочей зоны манипулятора существует некоторый телесный угол ψ — угол сервиса, внутри которого схват может подойти к этой точке. Как известно, величина телесного угла определяется отношением площади сферы, вырезанной телесным углом, к квадрату радиуса сферы, поэтому максимальное значение телесного угла $\psi_{max} = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$ ср (стерадиан).

Отношение угла ψ к его максимальному значению $\theta = \psi\ (4\pi)$ называют коэффициентом сервиса в данной точке. Величина θ может изменяться от нуля для точек на границе рабочей зоны, где схват может быть подведен в единственном направлении, до единицы для точек зоны полного сервиса, где схват может быть подведен в любом направлении.

Определение значения коэффициента сервиса ψ связано с анализом движения звеньев механизма манипулятора при различных фиксированных положениях центра схвата.

Методику вычисления θ рассмотрим на примере манипулятора с двумя сферическими и одной вращательной парами (рис. 19.9, *а*). Для определения угла сервиса ψ в некоторой точке E рабочей зоны рассмотрим механизм манипулятора как пространственный четыре-

хзвенник со сферическими парами A, C, D и вращательной парой B; точка D центра схвата совпадает с заданной точкой E на линии *4* (рис. 19.10, *а*). Сперва определим возможные положения звена CD (схвата) в плоскости чертежа, а затем все его возможные положения в пространстве путем вращения плоского четырехзвенника относительно условной стойки AD длиной r, совпадающей с осью x пространственной системы координат $Oxyz$ [5].

В области, где коэффициент сервиса $\theta=1$, угол сервиса $\psi=4\pi$. Следовательно, точка C должна иметь возможность занять любое положение на сфере радиусом $DC=l_3$ с центром в точке D. Для этого в плоском четырехзвеннике звено CD должно быть кривошипом, т. е. поворачиваться на полный оборот. Как известно (см. § 12.2), условие существования кривошипа состоит в том, что сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев должна быть меньше суммы длин остальных звеньев. Если, например, звено *1* самое длинное, а звено *3* самое короткое, то $l_1+l_3\leqslant r+l_2$, откуда $r_{\min}=r_1=l_1-l_2+l_3$ (см. рис. 19.10, *б*).

Если самое длинное звено $AD'=r$, а самое короткое звено *3*, то $r+l_3\leqslant l_1+l_2$, откуда $r_{\max}=r_2=l_1+l_2-l_3$.

В пределах от r_1 до r_2 коэффициент сервиса $\theta=1$ (зона *II* на рис. 19.10, *б*).

Если же звено *3* является коромыслом, то $\theta<1$. В предельных положениях, когда звенья *1*, *2*, *3* находятся на одной прямой Ax, $\theta=0$. Это имеет место при $r=r_0=l_1-l_2-l_3$ и при $r=r_3=l_1+l_2+l_3$. Следовательно, в зонах *I* и *III* на рис. 19.10, *б* $\theta<1$.

В любой промежуточной точке зон *I* или *III*, например в точке D', можно определить коэффициент сервиса θ следующим образом. Найдя максимально возможный угол поворота φ_m коромысла $C'D'$, когда звенья AB' и $B'C'$ находятся на одной прямой, определим поверхность сферического сектора радиусом $R=l_3$ и углом $\varphi=\varphi_m$ (рис. 19.10, *в*). Формулу поверхности S шарового сектора получим путем суммирования элементарных поверхностей $\mathrm{d}S=2\pi R\sin\varphi R\,\mathrm{d}\varphi$ в пределах от $\varphi=0$ до $\varphi=\varphi_m$:

$$S=\int_0^{\varphi_m}2\pi R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2\pi R^2\,(1-\cos\varphi_m).$$

В нашем случае $R=l_3$ и $S=2\pi l_3^2\,(1-\cos\varphi_m)$; следовательно,

$$\theta=\frac{\psi}{4\pi}=\frac{S/l_3^2}{4\pi}=\frac{1-\cos\varphi_m}{2}.$$

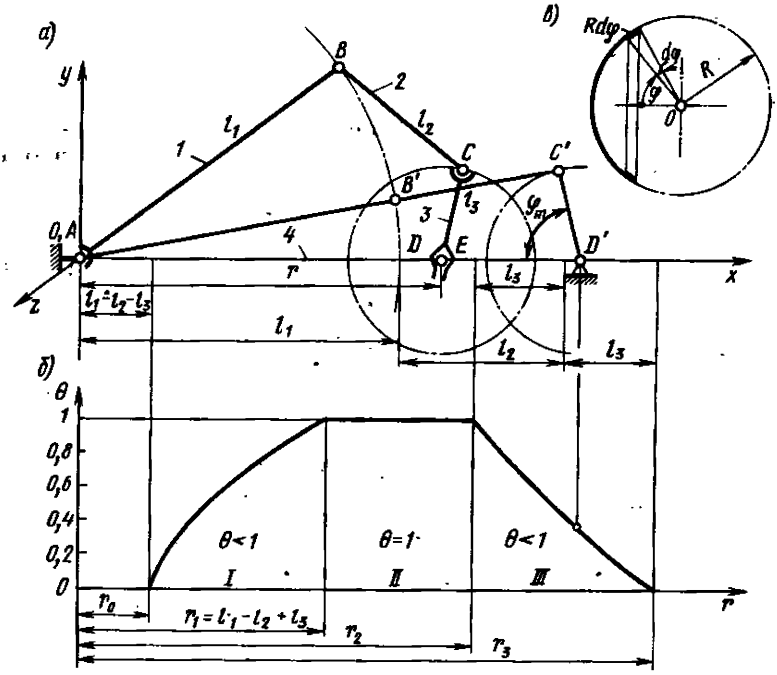


Рис. 19.10

На рис. 19.10, *а* при $r = AD' \cos\varphi_m \approx 0{,}24$ коэффициент сервиса $\theta = 0{,}38$. График зависимости $\theta = \theta\ (r)$ для манипулятора с размерами звеньев, изображенных на рис. 19.10, *а*, представлен на рис. 19.10, *б*. Подобные графики нужны не только при исследовании имеющегося манипулятора, но и при проектировании кинематических схем манипуляторов по заданным условиям.

К техническим показателям, характеризующим промышленные роботы, также относятся грузоподъемность, быстродействие, точность позиционирования, энергетические затраты и т. д.

§ 19.3. ЗАДАЧИ О ПОЛОЖЕНИЯХ МАНИПУЛЯТОРОВ

При решении задач проектирования и управления промышленными роботами приходится определять как положения его звеньев относительно неподвижной системы координат (абсолютные положения звеньев), так и их относительные положения (например, обобщенные координаты). Соответственно эти задачи известны в робототехнике как прямая и обратная задачи о положениях.

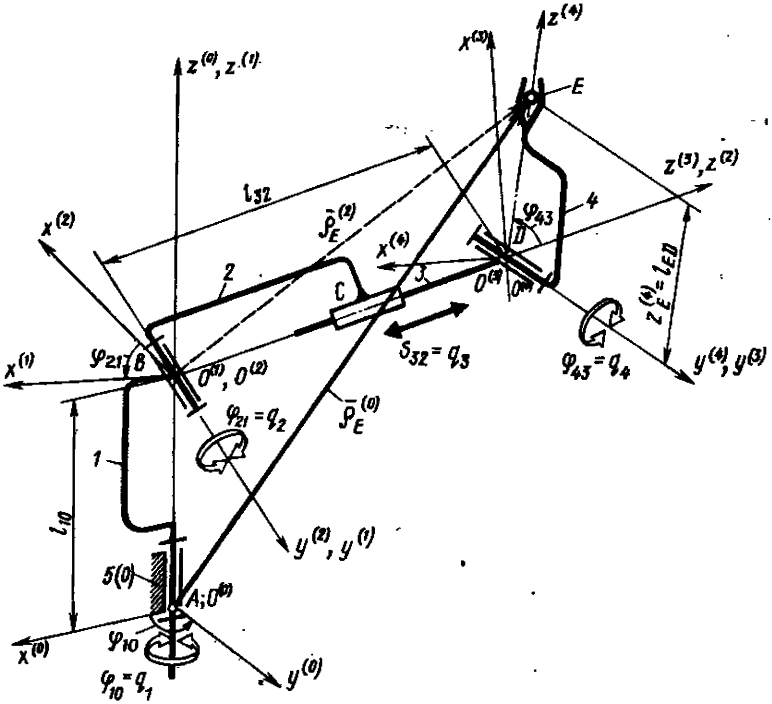


Рис. 19.11

Для исследования движения исполнительного механизма манипулятора в пространстве наибольшее распространение получил метод преобразования координат с матричной формой записи. Он позволяет упорядочить выполняемые действия и сократить математические выкладки. При этом методе выбирают число систем координат, равное числу элементов звеньев, образующих кинематические пары. Неподвижная система координат $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ обычно связывается со стойкой, а с каждой кинематической парой связывается подвижная система координат, одна из осей которой связана с характерными признаками звена, например осевой линией. Для примера на рис. 19.2, *а* показаны координатные оси $O^{(1)}x^{(1)}$, $O^{(2)}x^{(2)}$, $O^{(3)}x^{(3)}$, $O^{(4)}x^{(4)}$, (или $O^{(0)}x^{(0)}$) четырехзвенной открытой кинематической цепи из звеньев *1, 2, 3, 4*, моделирующей структуру руки человека (см. рис. 19.2, *б*). Ось $z^{(i)}$ направляют вдоль оси кинематической пары, а ось $y^{(i)}$ дополняет правую систему координат $O^{(i)}x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$.

Применение метода преобразования координат для решения

прямой задачи о положениях проиллюстрируем на примере кинематической схемы промышленного робота (рис. 19.11). Четыре подвижных звена *1, 2, 3* и *4* образуют четыре одноподвижные пары, из которых три вращательные и одна поступательная. Число степеней подвижности робота равно четырем:

$$W=6n-5p_1=6\cdot 4-5\cdot 4=4.$$

Поэтому для решения прямой задачи о положениях должны быть заданы четыре обобщенные координаты: относительные углы поворота звеньев $\varphi_{10}=q_1(t)$; $\varphi_{21}=q_2(t)$, $\varphi_{43}=q_4(t)$ и относительное перемещение вдоль оси звена *3* $S_{32}=q_3(t)$ (рис. 19.11).

Требуется определить радиус-вектор $\rho_E^{(0)}$ точки E схвата относительно неподвижной системы координат $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$, связанной со стойкой *5* (или *0*). Оси систем координат ориентированы относительно элементов кинематических пар следующим образом:

ось $z^{(0)}$ неподвижной системы координат стойки направлена вдоль оси вращательной пары A;

со звеном *1* связана система $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$, имеющая смещение l_{10} начала координат $O^{(2)}$ вдоль оси $z^{(1)}$. Ось $z^{(1)}$ совпадает с осью $z^{(0)}$, а ось $y^{(1)}$ направлена по оси вращательной кинематической пары B;

со звеном *2* связана система $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$, имеющая начало координат $O^{(2)}$, совпадающее с точкой $O^{(1)}$. Ось $y^{(2)}$ совпадает с осью $y^{(1)}$, т. е. с осью вращательной кинематической пары B;

начало координат системы $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$ имеет смещение l_{32} относительно точки $O^{(2)}$ вдоль оси $z^{(2)}$. Ось $z^{(3)}$ выбрана совпадающей с осью $z^{(2)}$;

координата $z^{(4)}$ точки E схвата *4* задана в системе $O^{(4)}x^{(4)}y^{(4)}z^{(4)}$, ось $y^{(4)}$ которой направлена по оси вращательной кинематической пары D.

Для определения радиуса-вектора $\rho_E^{(0)}$ необходимо разрешить матричное уравнение перехода к системе координат $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$:

$$\bar{\rho}_E^{(0)}=T_{40}\cdot\rho_E^{(4)}=T_{43}\cdot T_{32}\cdot T_{21}\cdot T_{10}\cdot\rho_E^{(4)}. \qquad (19.1)$$

Достоинство метода проявляется в случае специального выбора подвижных систем координат. Если координатные оси совмещать с осью вращательной пары или направлением поступательной пары, то матрицы перехода существенно упрощаются.

Координаты точки E в трехмерном пространстве записываются

в виде столбцевых матриц:

$$\bar{\rho}_E^{(4)}=\begin{vmatrix} x_E^{(4)} \\ y_E^{(4)} \\ z_E^{(4)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{ED} \end{vmatrix}_{\text{1}} \text{ или } \bar{\rho}_E^{(0)}=\begin{vmatrix} x_E^{(0)} \\ y_E^{(0)} \\ z_E^{(0)} \end{vmatrix}.$$

Здесь $T_{10}^{(z)}$ — матрица перехода от системы $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ к системе $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$ (элементарная матрица поворота вокруг оси z и перемещения вдоль оси z):

$$T_{10}^{(z)}=\begin{vmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$T_{21}^{(y)}$ — матрица перехода от системы $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ к системе $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ (элементарная матрица поворота относительно оси y):

$$T_{21}^{(y)}=\begin{vmatrix} \cos\varphi_{21} & 0 & \sin\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{21} & 0 & \cos\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$T_{32}^{(x)}$ — матрица перехода от системы $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$ к системе $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ (элементарная матрица перемещения вдоль оси x):

$$T_{32}^{(x)}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$T_{43}^{(y)}$ — матрица перехода от системы $O^{(4)}x^{(4)}y^{(4)}z^{(4)}$ к системе $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$ (элементарная матрица поворота вокруг оси y):

$$T_{43}^{(y)}=\begin{vmatrix} \cos\varphi_{43} & 0 & \sin\varphi_{43} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{43} & 0 & \cos\varphi_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подставив эти матрицы в формулу (19.1), получим координаты точки E в системе $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$. Развернутые формулы, определяющие положение точки E схвата, ввиду громоздкости не приведены. При решении конкретных задач на ЭВМ целесообразно воспользоваться библиотекой стандартных подпрограмм для выполнения элементарных операций с матрицами.

Для определения скорости и ускорения точек звеньев пространственных механизмов манипуляторов при использовании метода преобразования координат имеют в виду, что радиус-вектор $\rho_E^{(0)}$, например, точки E есть векторная функция обобщенных координат:

$$\bar{\rho}_E^{(0)}=\bar{\rho}_E\,(q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_n),$$

поэтому скорость v_E точки E определяется по соотношению

$$v_E=\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}_E}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{\rho}_E}{\partial q_i}\,\dot{q}_i, \tag{19.2}$$

или

$$v_{Ex}=\dot{x}_E^{(0)}=\frac{\mathrm{d}x_E^{(0)}}{\mathrm{d}t};$$

$$v_{Ey}=\dot{y}_E^{(0)}=\frac{\mathrm{d}y_E^{(0)}}{\mathrm{d}t};$$

$$v_{Ez}=\dot{z}_E^{(0)}=\frac{\mathrm{d}z_E^{(0)}}{\mathrm{d}t}; \tag{19.3}$$

$$v_E=\sqrt{v_{Ex}^2+v_{Ey}^2+v_{Ez}^2}.$$

Абсолютную угловую скорость j-го звена относительно стойки находят сложением угловых скоростей при относительном движении звеньев:

$$\bar{\omega}_{j0}=\sum_{i=1}^{n}\omega_{i/(i-1)}; \tag{19.4}$$

индекс $i/(i-1)$ указывает на порядковые номера звеньев, участвующих в относительном движении, например

$$\bar{\omega}_{40}=\bar{\omega}_{10}+\bar{\omega}_{21}+\bar{\omega}_{32}+\bar{\omega}_{43}.$$

Решения обратных задач о положениях манипуляторов в явном виде имеют важное значение как при проектировании, так и при управлении. При проектировании такие решения позволяют оценить влияние конструктивных параметров на процесс движения, при управлении — построить быстродействующие алгоритмы управления.

Сложность задачи о положениях связана с ее нелинейностью, поэтому точные решения не всегда возможны. Однако особенность исполнительных механизмов промышленных роботов, состоящая в том, что оси соседних кинематических пар или параллельны, или перпендикулярны между собой, позволяет получать в таких случаях явное решение [16]. После решения задачи о положениях задачи о скоростях и ускорениях становятся линейными и решаются известными методами.

§ 19.4. ЗАДАЧИ УРАВНОВЕШИВАНИЯ И ДИНАМИКИ

Решение задач кинематики манипуляторов, рассмотренные в § 19.3, позволяют найти фактическое движение схвата в зависимости от относительного движения в управляемых кинематических парах, от обобщенных координат. Для исследования механизмов манипуляторов промышленных роботов могут использоваться все известные методы теории механизмов. Так, для определения всех сил и моментов в управляющих кинематических парах при заданном движении звеньев манипулятора можно воспользоваться методами кинетостатики. При этом внешний силовой фактор, обычно рассматриваемый в этом методе, — это и есть управляющие моменты (во вращательных парах) или управляющие силы (в поступательных). В процессе движения промышленного робота (ПР) управляющие силы изменяются и, для того чтобы воспроизвести заданное движение схвата, управляющая система приводами должна обеспечить переменные моменты и силы, закон изменения которых как раз и определяется методами кинетостатики.

Те требования по быстродействию, которые предъявляются к роботу, приводят, как правило, к значительным управляющим силам. Более того, анализ показывает, что при рассмотрении кине-

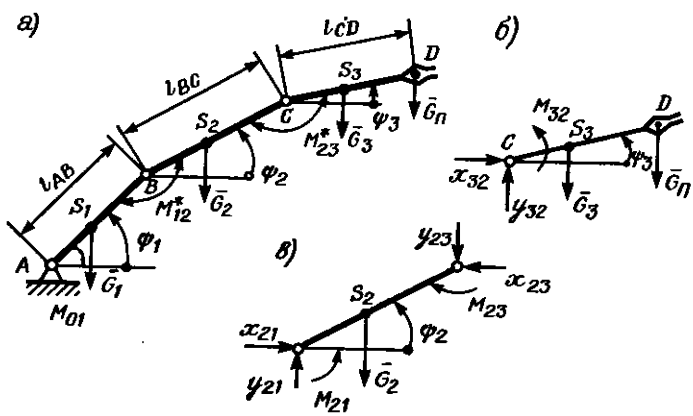


Рис. 19.12

тостатики реальной конструкции любой из рассмотренных ранее схем (см. рис. 19.3—19.7) управляющие моменты оказываются существенно большими, чем можно бы предположить исходя из массы манипулируемого объекта и размеров ПР. Эта разница, неблагоприятно сказывающаяся на конструкциях приводов и системах управления ими, возникает главным образом из-за того, что приводам приходится кроме силы тяжести веса полезного груза «удерживать» и силы тяжести звеньев, и силы тяжести самих приводов, как правило, размещаемых непосредственно на звеньях ПР.

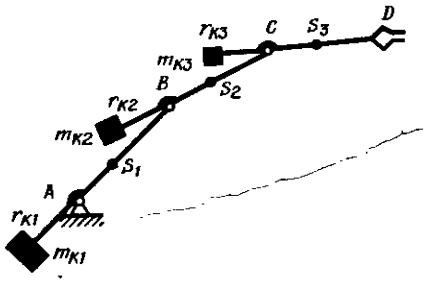


Рис. 19.13

Так, при рассмотрении сил для схемы ПР по рис. 19.12, *б* видно, что если момент M_{32} при неподвижном схвате зависит от силы веса G_3 звена *3* и его абсолютного положения

$$M_{32}=(G_{\text{п}}\,l_{CD}+G_3\,l_{CS_3})\cos\Psi_{32},$$

то момент M_{21} зависит не только от массы звена *2*, что естественно, но и от момента M_{23} (рис. 19.12, *в*)

$$M_{21}=[G_2 l_{BS_2}+(G_{\text{п}}+G_3)\,l_{BC}]\cos\Psi_{21}+M_{23},$$

здесь M_{ij} — управляющие моменты, действующие между звеньями i и j (первый индекс $i=1, 2, 3, \ldots$ указывает номер звена, к которому приложен момент сил); Ψ_{ij} — угловая координата звена i в неподвижной системе координат.

Эти дополнительные переменные момента, зависящие от положения звеньев, безусловно вредны. Они фактически маскируют полезную нагрузку и требуют более мощных двигателей. Однако более мощные двигатели более тяжелые. Это в свою очередь требует дополнительных усилий на преодоление их увеличившейся массы и т. д. Поэтому конструкции ПР получаются громоздкими, их масса становится значительно больше массы манипулируемого груза.

Рассмотрим статическое уравновешивание звеньев манипулятора ПР путем введения дополнительных корректирующих масс на примере схемы манипулятора рис. 19.13. Уравновесим вначале массу третьего звена. Статический момент корректирующей массы m_{K_3}, необходимый для этого, $G_{K_3}r_{K_3}=G_3 l_{CS_3}$. Можно уравновесить и сам полезный груз, увеличив корректирующую массу и выполнив

условие

$$G'_{K_3} \cdot r_{K_3} = G_3 \cdot l_{CS_3} + G_{\text{п}} \cdot l_{CD}.$$

Однако этого, как правило, не делают, так как заранее неизвестно, с грузом какой массы будет работать робот. После введения корректирующей массы $m_{K_3} = G'_{K_3}/g$ момент M_{32} становится равным нулю (или из него исключается составляющая от силы тяжести G_3).

Корректирующие массы на втором и первом звеньях можно определить, исходя из аналогичного условия равенства нулю статических управляющих моментов M_{21} и M_{10}:

$$G_{K_2} \cdot r_{K_2} = G_2 \cdot l_{BS_2} + (G_{\text{п}} + G_3 + G_{K_3}) \cdot l_{BC},$$

$$G_{K_1} \cdot r_{K_1} = G_1 \cdot l_{AS_1} + (G_{\text{п}} + G_3 + G_{K_3} + G_2 + G_{K_2}) \cdot l_{AB}.$$

Здесь стоит обратить внимание на то обстоятельство, что при определении корректирующих масс $m_{K_2} = G_{K_2}/g$ и $m_{K_1} = G_{K_1}/g$ приходится учитывать не только собственные массы звеньев *1* и *2*, но и уже найденные корректирующие массы, т. е. уравновешивать также и корректирующие массы предыдущих звеньев.

Если например принять, что массы всех звеньев рассматриваемого манипулятора одинаковы, центры масс их расположены посередине звеньев ($l_{Si} = l_i/2$) и $r_{Ki} = l_{Si}$, то получим, что корректирующая масса на первом звене в 17 раз больше массы любого из звеньев. При этом происходит суммарное увеличение массы всего *ПР* более чем в 8 раз. Такое достаточно простое решение не может быть признано рациональным, не говоря уже о том, что сами корректирующие массы располагаются в рабочем пространстве *ПР* и уменьшают его.

Иногда удается использовать в качестве корректирующих масс сами двигатели, смещая их так, чтобы их центры масс не проходили через центры вращения кинематических пар. На практике редко используют полное статическое уравновешивание звеньев манипулятора, ограничиваясь одним-двумя наиболее массивными, т. е. проводят неполное уравновешивание.

Значительно более перспективным представляется статическое уравновешивание звеньев манипулятора с помощью пружин. Однако непосредственное их использование затруднительно, так как обычная пружина имеет линейный закон изменения силы от деформации, тогда как значения необходимых статических моментов уравновешивания зависят от тригонометрических функций углов положения звеньев *ПР*. Тем не менее на практике известен ряд пружинных механизмов, дающих необходимую зависимость «сила — перемещение», что и позволяет с их помощью точно решить задачу уравновешивания.

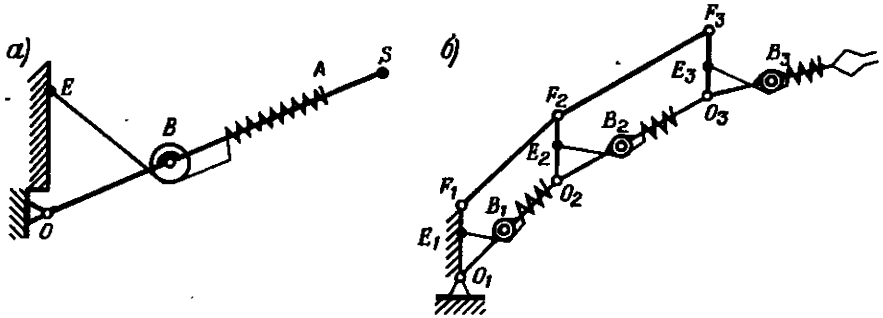


Рис. 19.14

Один из наиболее простых механизмов показан на рис. 19.14, *а*. Пружина растяжения одним концом в точке *A* жестко закрепляется на качающемся звене, а другим концом через трос и блок *B* неподвижно закрепляется в точке *E*. Если сила тяжести звена *G* и расстояние до его центра масс от точки *O* равно l_{OS}, то, выбрав жесткость пружины равной $G=\frac{Gl_{OS}}{l_{CB}l_{OE}}$ (Н/м), мы полностью уравновесим его силу тяжести, т. е. достигнем эффекта, аналогичного эффекту применения корректирующей массы (противовеса).

В случае уравновешивания многозвенной кинематической цепи каждое звено уравновешивают отдельно, а «неподвижную» точку для каждого звена создают искусственно, используя, например, механизм транслятора — последовательность параллелограммных механизмов (рис. 19.14, *б*).

Для определения фактического движения звеньев *ПР* под действием приложенных управляющих сил и моментов необходимо составить уравнения динамики. Для этого можно воспользоваться традиционными методами динамики, например уравнениями Лагранжа, или рассмотреть равновесие каждого звена с использованием принципа Д'Аламбера. Каждый из методов имеет свои достоинства и недостатки, и поэтому нельзя однозначно рекомендовать какой-либо из них.

Так, в методе Лагранжа необходимо вначале найти полную кинетическую энергию всего механизма, выражая ее через обобщенные координаты и скорости. Затем составить систему уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i, \quad i=1, 2, ..., W.$$

Число этих уравнений *W* равно числу степеней подвижности манипулятора, и это является одним из достоинств метода.

Обобщенные силы Q_i могут быть найдены методами приведения (из условия равенства элементарных работ всех внешних сил на возможных перемещениях работе обобщенной силы Q_i при изменении только одной обобщенной координаты q_i). Как правило, это будут сами неизвестные управляющие моменты или силы. Силы же реакций в кинематических парах манипулятора в уравнения не входят — и это также является достоинством метода.

Однако само аналитическое выражение кинетической энергии звеньев *ПР* очень громоздко. Полная кинетическая энергия складывается из суммы кинетических энергий каждого из звеньев, которые можно записать в общем случае так:

$$T_i=\frac{1}{2}\left(m_i v_{si}^2+J_i^{(\omega)}\omega_i^2\right),$$

где v_{si} — абсолютная скорость центра масс звена; ω_i — угловая скорость звена; m_i — масса звена; $J_i^{(\omega)}$ — момент инерции звена относительно оси, совпадающей с мгновенной осью угловой скорости.

Этот момент инерции для звена произвольной несимметричной формы вычислить очень сложно. Некоторого упрощения можно добиться, если взять звено симметричной формы с главными центральными осями инерции, совпадающими с осями координат.

Но это лишь часть проблемы. Кинематические зависимости, приведенные в § 19.3, определяющие зависимость скорости центра масс и его угловой скорости, достаточно громоздки. Эта громоздкость многократно увеличивается при выполнении необходимых в методе Лагранжа дифференцирований кинетической энергии. Все это даже для манипулятора с несколькими звеньями приводит к сложным многостраничным записям точных аналитических выражений для W дифференциальных уравнений движения, как правило, не дающих какой-либо возможности найти их аналитическое решение.

Поэтому чаще всего прибегают к численному анализу уже на этапе получения самих уравнений движения, путем численного выполнения процедур дифференцирования. Полученные уравнения затем решают также численными методами.

При использовании принципа Д'Аламбера механизм разбивают на отдельные звенья и рассматривают равновесие каждого звена, т. е. записывают систему уравнений:

$$m_i\ddot{\bar{q}}_{si}=\Sigma\bar{F}_i+\Sigma\bar{F}_{ij},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ W,$$

$$J_i^{(a)}\dot{\bar{\omega}}_i=\Sigma\bar{M}_i+\Sigma\bar{M}_s\left(F_{ij}\right)+\Sigma\bar{M}_{ij},$$

где $\ddot{\bar{q}}_{si}$ и $\dot{\bar{\omega}}_i$ — подлежащие определению ускорение центра масс i-го

звена и его угловое ускорение; $\bar{F}_i$, $\bar{M}_i$ — внешние силы и моменты, приложенные к звену; $\bar{F}_{ij}$ — реакции в кинематических парах; $\bar{M}_{ij}$, $\bar{M}_s(F_{ij})$ — моменты сил реакции и моменты от сил реакции на звено относительно центра масс звена.

Проецируя каждое из этих векторных дифференциальных уравнений на оси координат, получим систему из $6W$ скалярных уравнений.

Таким образом, хотя сами уравнения и существенно проще, их в шесть раз больше. Кроме того, в эти уравнения входят силы и моменты реакций, которые при определении закона движения необходимо из системы уравнений исключить.

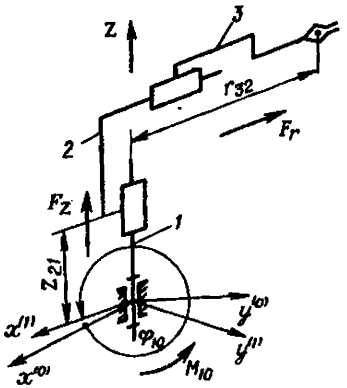


Рис. 19.15

Должно быть понятно, что и метод Лагранжа и принцип Д'Аламбера описывают движение одной и той же системы, поэтому результирующая система уравнений после исключения реакций будет одинаковой, хотя для численного анализа полная система уравнений по прицину Д'Аламбера более благоприятна. Общая форма дифференциальных уравнений движения, полученных любым способом, имеет вид

$$\{A(q)\}[\ddot{q}]+\{B(q,\dot{q})\}+\{C(q)\}=Q.$$

Здесь $\{A\}$ — инерционная матрица; $\{B\}$ — вектор сил и моментов сил инерции; $\{C\}$ — вектор сил и моментов сил тяжести; Q — обобщенная сила; $[\ddot{q}]$ — матрица-столбец обобщенных ускорений.

Эта система W нелинейных дифференциальных уравнений в общем случае не имеет аналитического решения и может быть проанализирована только численными методами. Так, для манипулятора с одной вращательной и двумя поступательными парами (рис. 19.15), т. е. с тремя обобщенными координатами r_{32}, φ_{10} и z_{12}, система уравнений движения имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{32} \\ \varphi_{10} \\ z_{21} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1(r_{32},\ \dot{\varphi}_{10}) \\ b_2(r_{32},\ \dot{r}_{32},\ \dot{\varphi}_{10}) \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_r \\ M_{10} \\ Fz \end{bmatrix}.$$

Последнее из трех уравнений независимо от других, чего нельзя сказать о первых. В первом уравнении есть член b_1, зависящий не только от выдвижения звена *3*, но и от скорости его поворота. Такое

явление называют взаимовлиянием приводов друг на друга, и оно безусловно вредно.

Исключения этого взаимовлияния, т. е. динамической развязки, иногда удается достичь таким подбором коэффициентов, чтобы система дифференциальных уравнений движения представляла собой W независимых уравнений. Такое решение позволяет при тех же приводах существенно увеличить ускорение и, следовательно, быстродействие робота.

И наконец, еще на одном нетрадиционном методе улучшения динамики некоторых *ПР* следует остановиться. Очень часто, работая в технологической цепи, *ПР* совершает одни и те же повторяющиеся движения: при работе циклически — взять деталь, перенести ее на стеллаж, вернуться за следующей и т. д. Работа циклического привода в этом случае происходит в такой последовательности: разгон, торможение, останов, реверс, снова разгон, торможение, останов, реверс и т. д. Таким образом, дважды за цикл робот останавливается, его энергия полностью теряется. Кроме бесполезного расхода энергии это сказывается и на быстродействии — ведь дважды за цикл приходится разгонять значительные инерционные массы звеньев.

Представляется целесообразным энергию торможения в конце цикла не рассеивать на тормозе, а запасать в каком-либо устройстве накопления потенциальной энергии (например пружине), с тем чтобы использовать ее при разгоне системы. Это должно существенно уменьшить мощность и массу привода, так как основной универсальный цикл система будет совершать под действием пружины, т. е. совершать колебания, а привод (весьма небольшой) потребуется только для компенсации неизбежных потерь на трение, т. е. для создания режима автоколебаний. Общая схема такого привода приведена в [16].

ГЛАВА 20
СОГЛАСОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ МЕХАНИЗМОВ

Совокупность механизмов, соединенных между собой определенным образом и предназначенных для выполнения взаимосогласованных движений, подчиненных общим для данной совокупности закономерностям, называют системой механизмов. Система механизмов является основой практически любых современных машин. Разнообразные механизмы обеспечивают требуемое движение звеньев, связанное с преобразованием энергии, состояния, свойств или положения объектов и материалов, с управлением, контролем и регулированием движения рабочих органов машины. Системы механизмов бывают достаточно сложными.

В любой системе механизмов должны быть согласованы параметры функционирования, т. е. положения, скорости и ускорения исполнительных звеньев отдельных механизмов, управляющих и контролирующих устройств. Достижение требуемой цели путем преднамеренного управляющего воздействия на объект или систему называют управлением. Совокупность предписаний (т. е. последовательность и содержание команд), обеспечивающих заданное функционирование системы механизмов, называют программой управления или алгоритмом управления.

§ 20.1. СИСТЕМА ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МЕХАНИЗМОВ

К системе программного управления относят средства, на которые возложена задача управления работой в заданном режиме функционально взаимосвязанных механизмов. Совокупность средств программного управления, участвующих в выработке по заданной программе управляющих воздействий на исполнительные органы машины и другие механизмы, включает *технические средства* (приводы, аппараты электроавтоматики, измерительные преобразователи, устройства контроля, адаптации и диагностики, вычислительно-логические устройства, каналы связи и т. п.) и *программное обеспечение*, осуществляющее организацию процесса управления и реализацию задач управления применительно к конкретной системе механизмов. Для примера на рис. 20.1 представлена принципиальная схема системы механизмов технологической машины, на которой выделены механизмы, предназначенные для обеспечения функционирования машины и выполнения совокупности действий, необходимых для обработки заготовки (материала) и получения изделия с заданными параметрами.

Система, обеспечивающая согласованность перемещений всех исполнительных органов в соответствии с заданной программой управления, называется *системой управления машин*. Если система управления обеспечивает требуемую согласованность движения всех исполнительных устройств в зависимости от времени, то ее называют системой управления машины по времени. Если система управления обеспечивает требуемую согласованность движения всех исполнительных устройств в зависимости от их положения, то ее называют системой управления машины по пути.

В *системе автоматического управления* (САУ) все управляющие воздействия осуществляются без непосредственного участия человека. При *полуавтоматическом и ручном управлении* управляющие воздействия выполняются или вырабатываются с участием человека-оператора.

По виду начальной (априорной) информации, включаемой

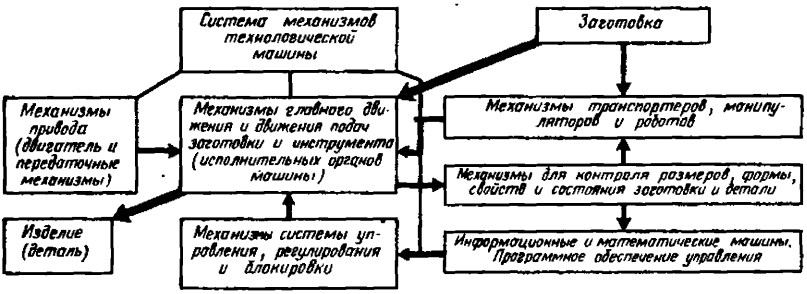


Рис. 20.1

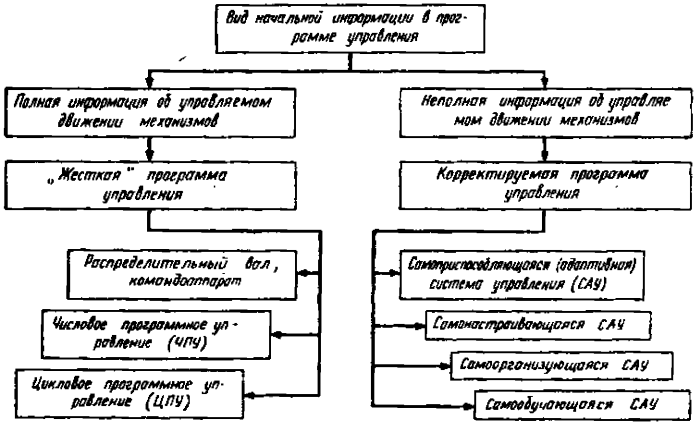


Рис. 20.2

в программу управления механизмами, САУ разделяют на две группы: с полной и неполной начальной информацией (рис. 20.2). В первом случае заданная программа является неизменной («жесткой») и выполняется независимо от получаемых результатов. Только в экстремальных условиях ее выполнение может быть приостановлено, если по каким-либо причинам контролируемые параметры достигли пороговых (предельно допустимых) значений.

Во втором случае с целью оптимального управления неполная начальная информация дополняется текущей информацией, вырабатываемой с помощью различных измерительных и контролирующих устройств и датчиков и используемой для корректировки программы управления. Такие САУ могут быть *самоприспособляющимися* (адаптивными), *самонастраивающимися, самоорганизующимися* и *самообучающимися* (рис. 20.2).

В самоприспособляющихся системах оптимальное управление обеспечивается за счет изменения только управляющего воздействия. Например, в системах управления металлорежущими станками самоприспособляющиеся устройства обеспечивают автоматическое приспособление режима работы станка к изменяющимся условиям обработки: снижают продольную подачу суппорта с целью уменьшения прогиба обрабатываемой заготовки, когда текущее значение силы резания превысит заданное пороговое значение.

Адаптивные системы имеют датчики, позволяющие получать информацию от внешней среды и в зависимости от этой информации осуществлять те или иные движения. Например, адаптивные роботы снабжены помимо основной программы дополнительными подпрограммами, позволяющими роботу ориентироваться в окружающей обстановке и изменять режим работы с помощью *обратной связи*.

В более сложных системах управления достаточно задать конечную цель работы. Используя ЭВМ и информацию о состоянии машины, такие САУ логически оценивают ситуацию и находят оптимальное решение с учетом конкретной обстановки в соответствии с разработанными алгоритмами поиска.

Перечень функций конкретной системы программного управления зависит от уровня сложности управляемой системы механизмов. Например, системы числового программного управления металлообрабатывающим оборудованием (станками) в зависимости от функциональных возможностей (количества осей координат) подразделяют на системы:

для станков с прямоугольным формообразованием по одной оси координат;

для станков с контурным формообразованием по двум или трем осям координат;

для обрабатывающих центров и станков со сложным объемным формообразованием по четырем-пяти осям координат;

для тяжелых и уникальных станков и станочных модулей со специальными задачами управления по десяти—двенадцати осям координат.

Компоненты устройств, входящих в систему программного управления (СПУ), по своему информационному назначению подразделяют на ранги определенных уровней, которые связаны между собой информационными каналами.

На уровне 1-го ранга СПУ формируется информация с помощью соответствующих преобразователей о положении исполнительных органов, о состоянии системы механизмов и параметрах возмущений, действующих в системе, о правильном ходе рабочих процессов и возникающих неполадках и способах их устранения. Например, на металлорежущих станках по информационным каналам 1-го ранга передается информация датчика обратной связи о положении исполнительных органов; датчиков, измеряющих температурные и силовые деформации, силовые параметры процесса резания, текущий износ инструмента, колебания в системе станок — приспособление — инструмент — заготовка, колебания припуска на заготовке, колебания твердости материала.

Уровень 2-го ранга СПУ — это совокупность исполнительных регулируемых приводов и механизмов: основных, осуществляющих программное перемещение исполнительных органов; вспомогательных, выполняющих различного рода вспомогательные команды; дополнительных, предназначенных для корректирующих и подналадочных перемещений.

Уровень 3-го ранга СПУ — это технические средства, входящие в состав системы программного управления, алгоритмы работы которых реализуются схемным путем или с помощью программ, вводимых в их запоминающие устройства.

Уровень 4-го ранга и выше выходит за пределы СПУ конкрет-

ного станка, а используется при управлении гибкими производственными системами (ГПС).

По характеру управляющих сигналов САУ разделяют на две группы: дискретные и непрерывные (аналоговые).

В дискретных САУ обязательно наличие устройств, в которых управляющие воздействия изменяются дискретно, т. е. скачками (импульсами) даже при плавном изменении входных величин. Примерами дискретных САУ являются системы, содержащие элементы релейного или импульсного действия. При импульсном действии скачки выходной величины происходят через заданные интервалы времени; при релейном действии — при достижении входной величиной определенных пороговых значений.

Программа в дискретных САУ реализуется в виде совокупности дискретных величин, задаваемых обычно в алфавитно-цифровой форме, зафиксированной на специальных программоносителях (перфорированных картах и лентах, магнитных дисках, лентах и картах или специальных коммутаторах).

Траекторию перемещения звена представляют в виде определенной последовательности элементарных перемещений вдоль координатных осей.

Пример системы механизмов, движение которых осуществляется с помощью дискретных управляющих сигналов, приведен на рис. 20.3, *б*. Движение точки *A* по заданной траектории $\beta - \beta$ осуществляется с помощью электродвигателей *M1* и *M2*, которые могут вращаться одновременно или иметь остановки. Сложная траектория $\beta - \beta$ обеспечивается совместной и согласованной работой двух винтовых механизмов с винтами *2* и *5*, получающими вращение от электродвигателей *3* и *4* в соответствии с программой управления. Характерный вид подобной траектории показан на рис. 18.3, *б* при движении звена из начальной точки с координатами $x_{Aн}$, $y_{Aн}$ до конечной точки с координатами $x_{Aк}$, $y_{Aк}$. Последовательность управляющих воздействий для перемещения по осям координат в соответствии с функциональной связью между координатами опорных точек, заданных программой управления, вырабатывается с помощью специальных вычислительных устройств, например, интерполяторов в системах числового программного управления.

В аналоговых САУ значения непрерывных сигналов являются непрерывными функциями времени, которые реализуются в виде изменения каких-либо физических элементов. Примерами аналоговых САУ являются системы с кулачками, распределительными валами, с устройствами изменения угла сдвига по фазе двух напряжений и т. д.

Пример системы механизмов с аналоговой системой управления приведен на рис. 20.3, *а*. Движение точки *A* по заданной траектории $\beta - \beta$ осуществляется в результате сложения перемещений: звена *1* (например, продольное перемещение стола металлообрабатывающего станка) и звена *8* (перемещение суппорта), осуществляемых

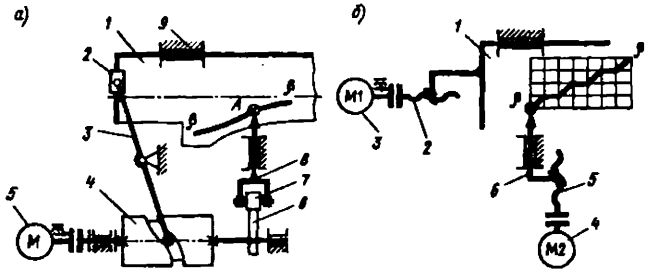


Рис. 20.3

посредством цилиндрического кулачка *4* и вращающегося толкателя *3* и дискового кулачка *6*, в контакте с которым находится ролик *7*, закрепленный на поступательно движущемся толкателе *8*. Источником движения является электродвигатель *5*. В качестве программоносителя в данной системе являются профили кулачков, являющиеся аналогами относительных перемещений звеньев *1* и *8*. Подобные системы управления называют незамкнутыми САУ с одним априорным потоком информации прямого действия (без усилителей).

Во многих случаях используют *смешанную систему* задания алгоритма управления, в которой часть программы реализуется в аналоговой форме, а часть программы — в числовой форме. Например, смешанный способ задания алгоритма управления используется в ряде станков-автоматов для обработки заготовок.

Управление системой механизмов может быть централизованным, децентрализованным и смешанным.

При централизованном управлении обеспечивается выполнение заранее установленной программы, независимой от положения звеньев тех или иных механизмов. Такое управление осуществляется в функции времени программным управлением. Система механизмов при программном управлении функционирует достаточно надежно, но при ее проектировании предусматривают определенные предохранительные устройства, гарантирующие выключение механизмов, торможение или останов двигателей при перегрузках или аварийных ситуациях. При таком управлении команды подаются от распределительных валов, командоаппаратов или с помощью пультов.

При децентрализованном управлении движением механизмов в функции положения звеньев информация передается от упоров, путевых и конечных переключателей и выключателей или иных датчиков положения или перемещения. Надежность функционирования системы механизмов при децентрализованном управлении зависит от надежности датчиков и других элементов системы управления. Децентрализованное управление может быть также с регулированием по заданным режимам работы (например, по давлению, предельной нагрузке, скорости и т. д.).

При смешанном управлении движением системы механизмов ис-

пользуются отдельные элементы централизованного и децентрализованного управления, что обеспечивает большую надежность и универсальность. При смешанном управлении можно уменьшить количество предохранительных устройств, заменив их установкой датчиков, контролирующих выполнение команд или положение звеньев. Например, при работе автоматической линии при смешанном управлении невыполнение какой-либо команды о перемещении звена в определенное положение фиксируется путевым датчиком, по сигналу которого отключается командоаппарат, вал которого при нормальной работе вращается равномерно. При устранении неисправностей командоаппарат включается, что обеспечивает дальнейшее функционирование системы механизмов по системе программного управления.

При смешанном управлении осуществляется наиболее оптимальное сочетание разнообразных требований, обеспечивающих управление по времени, по положению и перемещению звеньев, по ограничиванию режимов движения звеньев и нагрузок на звенья и в кинематических парах.

Одним из методов программирования промышленных роботов (ПР) является *программирование методом обучения*, при котором в памяти устройств программного управления (УПУ) формируются данные, определяющие автоматическое функционирование ПР в рабочем режиме. Процесс обучения состоит из четырех фаз: приведение системы в требуемое состояние; запоминание состояния систем ПР; преобразование запомненных данных; воспроизведение движения. В процессе обучения формируется либо линейная управляющая программа, либо управляющая программа с ответвлениями, обеспечивающая адаптивное поведение ПР (поисковые движения, контрольные операции, реакции на сбои и отказы и т. п.).

Структуру системы управления движением промышленного робота можно проследить по схеме, приведенной на рис. 20.4, отражающей определенные уровни управления. На первом уровне автоматизированные приводы для всех степеней подвижности обеспечивают движение исполнительных звеньев и механизмов робота в пределах рабочей зоны с помощью управляющих программ по каждому частному циклу. Информация о положении исполнительных звеньев, характеристиках внешней среды и объекта манипулирования вырабатывается датчиками и по каналам обратной связи передается оператору или в специальные устройства более высоких уровней управления для внесения коррективов в движение, если в этом возникает необходимость. Формирование сигналов управления движением приводов и устройствами автоматики обычно осуществляют на втором уровне, обеспечивающем согласование движения звеньев робота во взаимодействии с окружающей средой, т. е. с другими устройствами, в частности с технологическим оборудованием.

При отработке управления программированием ПР методом обучения устройствами памяти (оперативными запоминающими

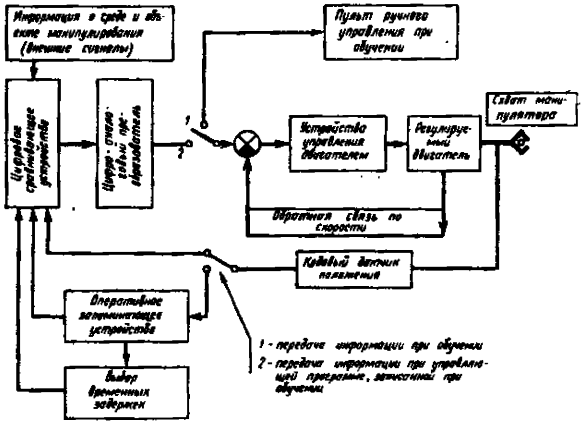


Рис. 20.4

устройствами — ОЗУ) запоминаются все параметры движения, осуществляемого при ручном управлении циклом, и в последующем многократно воспроизводятся в рабочем режиме. В блоке памяти на магнитной ленте или барабане записывается кодовая информация о координатах звеньев для каждой заданной позиции, о скорости движения, о временных задержках, о сигналах об исполнении команд управления, о комбинации и порядке переходов элементарных операций и шагов программы.

В блок памяти также записываются внешние сигналы об обслуживаемой среде (команды передачи и разрешения приема сигналов обслуживаемых устройств, технологического оборудования и т. д.), сигналы о скорости движения, о временных интервалах, о вспомогательных операциях по захвату объекта, о последовательности переходов при выполнении цикла работы и т. п.

Удобство разработки управляющих программ в режиме обучения по сравнению с аналитическим методом программирования заключается в простоте принципа, возможности использования любой системы координат, уточнения позиционирования при наличии зазоров в кинематических парах, податливости звеньев и деформации их под нагрузкой.

Программное управление движением может быть цикловым, позиционным, контурным или комбинированным.

При цикловом управлении задают координаты, скорости и другие параметры, необходимые для выполнения последовательности движения в пределах частных циклов, и временные интервалы между частными циклами. Информация о выполнении частных циклов вырабатывается обычно средствами путевой автоматики для предельных значений по каждой из координат (концевые выключатели и т. п.).

При позиционном управлении задают независимые перемещения

по каждой координате, соответствующие требуемой точке рабочей зоны манипулятора.

При контурном управлении обеспечивается одновременное, непрерывное и согласованное движение приводов звеньев манипулятора, обеспечивающее движение исполнительного звена по заданной траектории в рабочей зоне с требуемыми скоростью и ускорением. Контурное управление требует сложного программного обеспечения, связанного с циклами интерполяции участков траектории и с отработкой команд в реальном масштабе времени. Обычно при контурном управлении используют мини-ЭВМ, цифровые дифференциальные анализаторы и другие устройства.

При комбинированном управлении используют методы циклового, позиционного и контурного управления, сочетая их возможности и преимущества при решении конкретных задач.

Информация о положении рабочих органов машин, о режиме движения звеньев механизмов, о параметрах и характеристиках процессов, необходимая для автоматического функционирования системы механизмов в соответствии с алгоритмами управления, вырабатывается датчиками.

По характеру создаваемых импульсов различают датчики: механические, электрические, фотоэлектрические, электронные, пневматические, гидравлические и т. д.

Различают следующие причины, вызывающие появление импульса датчика: силовые, когда давление рабочей среды или сила, действующая на определенные элементы звеньев механизма, достигают заданной величины; размерные, когда размер, определяющий требуемое положение, достигает заданной величины; путевые, когда движущееся звено механизма занимает определенное (предусмотренное) положение; скоростные, когда скорость движения звена механизма достигает заданной величины; временные, когда сигналы подаются по заданному промежутку цикла работы.

По виду используемой энергии различают исполнительные устройства: механические, электрические, электромеханические, гидравлические и пневматические.

В качестве электрических исполнительных устройств используют электродвигатели (асинхронные с короткозамкнутым ротором с двумя скоростями: рабочей и «ползучей», и шаговые), электромагниты и электромагнитные муфты (дисковые, асинхронные и порошковые).

В качестве гидравлических приводов используют гидроцилиндры (поступательное движение выходного звена), гидромоторы (вращательное движение выходного звена), поворотные гидродвигатели (ограниченный угол поворота выходного звена).

В качестве пневматических двигателей используют поршневые и диафрагменные.

§ 20.2. ЦИКЛОГРАММА СИСТЕМЫ МЕХАНИЗМОВ

Большинство механизмов используется в машинах и устройствах, имеющих цикловой характер работы. За период цикла осуществляется определенная совокупность работ и процессов, в результате которой система приходит в точно такое же состояние, в котором она находилась в начале цикла.

Различают разные виды циклов. Периодическое совпадение положений и направления движения точек всех звеньев механизма или системы механизмов называют *кинематическим циклом*. Периодически повторяющееся изменение мощности действующих сил и моментов сил характеризует *энергетический цикл*.

Периодически повторяющаяся совокупность операций технологической машины называется *рабочим циклом*. По истечении *технологического цикла* заканчивается изготовление детали или изделия. Период времени с момента подачи сырья или материала на первую операцию до получения готового изделия называют *производственным циклом*.

Графическое изображение последовательности движения исполнительных звеньев механизма или согласованности перемещений исполнительных органов за цикл называют *графиком цикличности* или *циклограммой*.

В основу разработки циклограмм принимают синхронные во времени графики перемещений исполнительных органов механизмов или устройств. Для примера на рис. 20.5, показаны: *а* — изменение угла поворота коленчатого вала; *б, в* — перемещение поршня, впускного и выпускного клапанов одного из цилиндров ДВС и соответствующие им *д* — линейные; *г* — прямоугольные и *е* — круговые циклограммы.

На линейной циклограмме графики перемещений исполнительных органов условно изображают наклонными прямыми, а периоды остановки («выстой») — горизонтальными прямыми.

На прямоугольной и круговой циклограммах графики перемещений не изображают, а интервалы отдельных этапов движения или операций выделяют штриховкой или толстыми линиями (прямая или дуга окружности), протяженность которых соответствует определенным этапам движения. Такие циклограммы обычно дополняют названиями отдельных этапов движения или операций.

Циклограммы используют для анализа требуемой синхронизации перемещений исполнительных звеньев и последовательности относительных положений звеньев внутри цикла, при этом определяют время отдельных интервалов движения (рабочих и вспомогательных), оценивают возможности совмещения технологических и транспортных операций, сокращения времени некоторых операций, разбивки операций на менее продолжительные переходы и т. п. Такой анализ часто позволяет уплотнить циклограмму, т. е. уменьшить время цикла и повысить производительность технологических машин.

Согласование перемещений исполнительных звеньев механизма проводят в зависимости или от времени, или от положения звеньев. В первом случае используют систему управления по времени, во втором случае — систему управления по пути. Промежуток времени, по истечении которого повторяется последовательность перемещения всех исполнительных звеньев механизма, называют *временем цикла*. На циклограммах иногда указывают не время движения, а угол поворота главного вала основного механизма. Условно считают, что этот вал вращается равномерно. За цикл установившегося движения принимают период изменения обобщенной скорости механизма в функции времени. Например, для кривошипно-ползунного механизма двухтактного или четырехтактного ДВС цикловые углы поворота будут разными: в двухтактном ДВС соответствует повороту коленчатого вала на один оборот, а в четырехтактном — повороту на два оборота.

В пределах каждого цикла различают **такты** или **фазы**, которые позволяют выделить основное состояние механизма или машины. Например, можно выделить такты движения и такты покоя исполнительных звеньев, такты впуска, сжатия, расширения воздуха или рабочей смеси и выпуска отработавших газов в четырехтактном карбюраторном ДВС, такт продувки и сжатия и такт рабочего хода

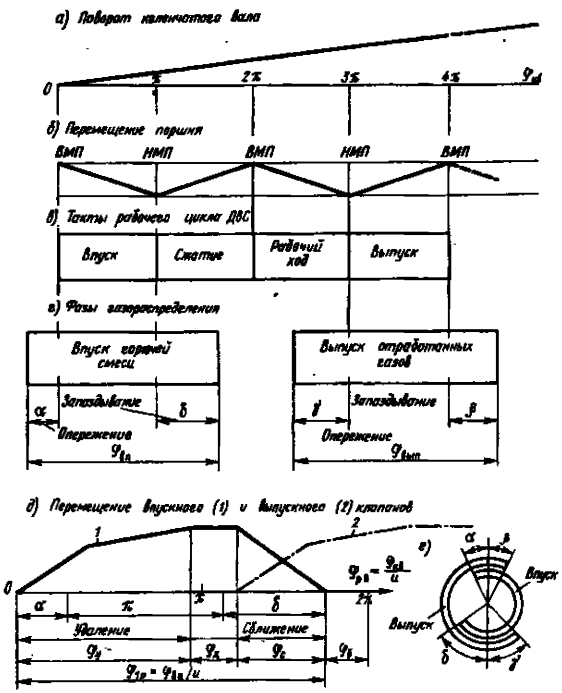


Рис. 20.5

и выпуска в двухтактном дизеле (рис. 20.5, *г*). В течение такта движения состояние ни одного из исполнительных механизмов не изменяется, т. е. состояние движения звеньев либо сохраняется, либо отсутствует.

Схему согласованности перемещений исполнительных органов в зависимости от их положений называют *тактограммой*. Например, на циклограмме или тактограмме кулачкового механизма выделяют четыре основные фазы: удаления, дальнего покоя, сближения и ближнего покоя толкателя.

Фазовые углы назначают на основе анализа рабочих циклов машины. Например, в ДВС интервалы тактов принимают по положению поршня в предельных положениях: в верхней и нижней «мертвых точках» (в. м. т. и н. м. т.), т. е. угол поворота коленчатого вала за время одного такта равен 180°. Моменты открытия и закрытия клапанов в ДВС называют фазами газораспределения. Они обеспечиваются кулачками на распределительном валу. Впускной клапан должен открываться до прихода поршня в в. м. т., т. е. с опережением на некоторый угол α, а закрываться с некоторым запаздыванием на угол δ (рис. 20.5, *е*). Выпускной клапан открывается до прихода поршня в н. м. т., т. е. с опережением на угол γ, а закрывается с запаздыванием на угол β. Конкретные величины углов опережения и запаздывания зависят от марки двигателя. Например, для ВАЗ-2106 $\alpha=12°$; $\delta=40°$; $\gamma=42°$; $\beta=10°$; для ЗИЛ-130: $\alpha=31°$; $\delta=83°$; $\gamma=67°$; $\beta=47°$.

Кулачковый распределительный вал представляет собой совокупность кулачков, установленных на общем валу, но предназначенных для передачи движения или команд на движение разным исполнительным органам.

Один из радиусов-векторов на распределительном валу принимают за начало отсчета (базовый), относительно которого определяют углы установки отдельных кулачков. Эти углы достаточно просто определяют аналитически или графически с использованием метода обращения движения. Для примера на рис. 20.6 показано определение угла установки δ_{21} кулачка *K2* относительно кулачка *K1* при заданном смещении фаз начала движения толкателей по углу поворота φ_{21} распределительного вала.

Вначале определяют углы ψ_{01} и ψ_{02}, характеризующие начальное положение толкателей B_1O_{21} и B_2O_{22} относительно межосевой линии $O_1O_{21}O_{22}$.

Угол установки δ_{21} кулачка *K2* относительно кулачка *K1* определяют по соотношению $\delta_{21}=\varphi_{21}+\psi_{01}+\psi_{02}$.

В этом соотношении учтено, что оси B_1 и B_2 расположены по разным сторонам относительно линии $O_1O_{21}O_{22}$ (рис. 20.6).

Для выяснения особенностей основ управления системой механизмов с несколькими двигателями на рис. 20.7 приведены принципиальные схемы ряда устройств агрегатного станка, на поворотном

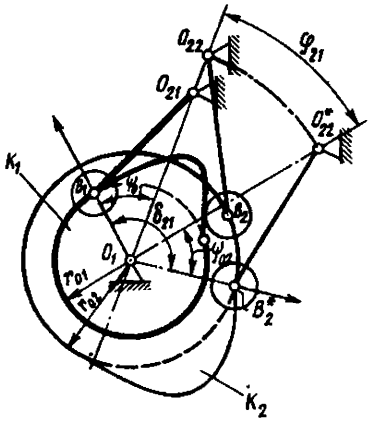


Рис. 20.6

столе *2* которого установлена деталь *1*. В детали *1* обрабатывается одно (или несколько отверстий) с помощью сверлильной головки *8*, перемещаемой по направляющим с помощью цилиндра *Ц1*. Перемещение головки осуществляется по трем режимам: быстрый подвод инструмента к детали a_1a_1', рабочая подача при сверлении $a_1'a_1''$ и быстрый отвод $a_1''a_1$ головки в исходное положение. Положения силовой головки *8* фиксируются переключателями: *К1* и *К3* — в крайних положениях и *К2* — при изменении скорости подачи с быстрой на рабочую. Во время обработки планшайба занимает определенное положение, фиксируемое фиксатором *9*, перемещаемым с помощью цилиндра *Ц3*. Положения фиксатора контролируются переключателями *К4* и *К5*. В фиксированном положении планшайба надежно закрепляется тормозом *4*, приводимым в действие цилиндром *Ц2*. Положение штока цилиндра *Ц2* контролируется переключателями *К6* и *К7*.

После окончания обработки отверстия планшайба поворачивается вокруг своей оси с помощью зубчатой передачи *3*, зубчатореечной передачи *6* и цилиндра *Ц4*. После поворота и фиксации положения планшайбы шток цилиндра *Ц4* возвращает рейку в исходное положение. Положения штока фиксируются переключателями *К8* и *К9*. Положения зажима планшайбы обозначают a_2, а разжима — $\bar{a}_2$. Положения фиксатора обозначают: при отводе — a_3, а при

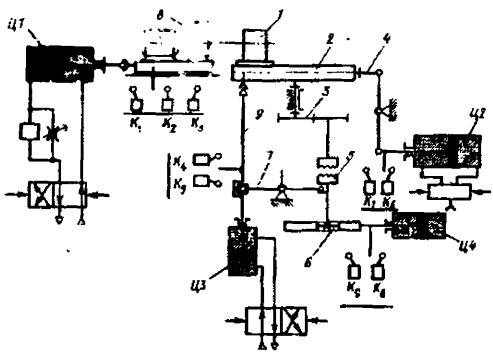


Рис. 20.7

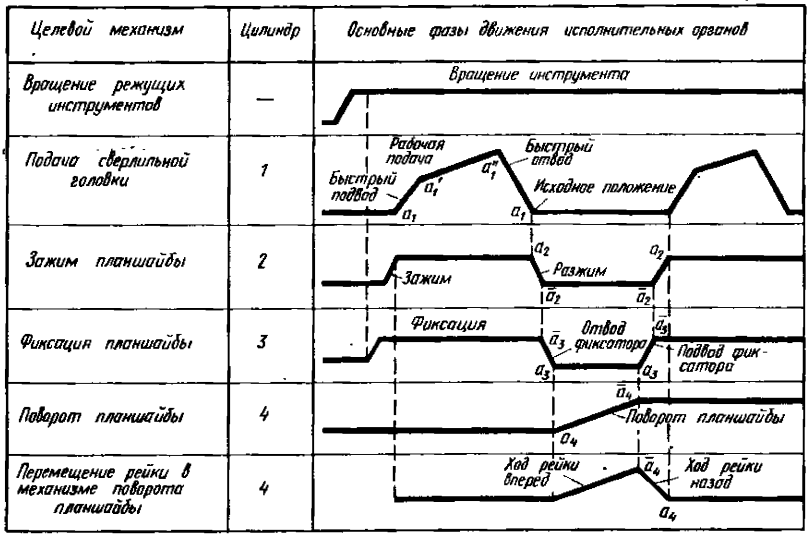


Рис. 20.8

фиксации — $\bar{a}_3$. Состояния планшайбы во время поворота планшайбы и при обратном ходе рейки (останов) соответственно обозначают a_4 и $\bar{a}_4$.

Циклограмма работы целевых механизмов станка приведена на рис. 20.8. Наклонными линиями на циклограмме показаны интервалы перемещения исполнительных органов и соответствующих им штоков силовых цилиндров. При разработке циклограммы учитывают необходимые блокировки: цикл может начаться после включения вращения режущих инструментов; обработка может проводиться только после зажима планшайбы в фиксированном положении; разжим планшайбы и отвод фиксатора возможен лишь после вывода инструмента из обрабатываемого отверстия; при поломке инструмента выключаются вращение и подача силовой головки; после выполнения операции все механизмы (за исключением планшайбы, поворачивающейся в заданном направлении) занимают исходные положения.

Иногда используют видоизмененные циклограммы работы системы механизмов, в которых не учитывается масштаб времени. Такая циклограмма отражает только последовательность включений тех или иных механизмов и управляющих устройств и ее принято называть тактограммой или таблицей включений.

Тактом работы системы механизмов и устройств называется промежуток времени между двумя соседними изменениями его полного состояния. Такты обозначают числами 1, 2, 3, 4, ...

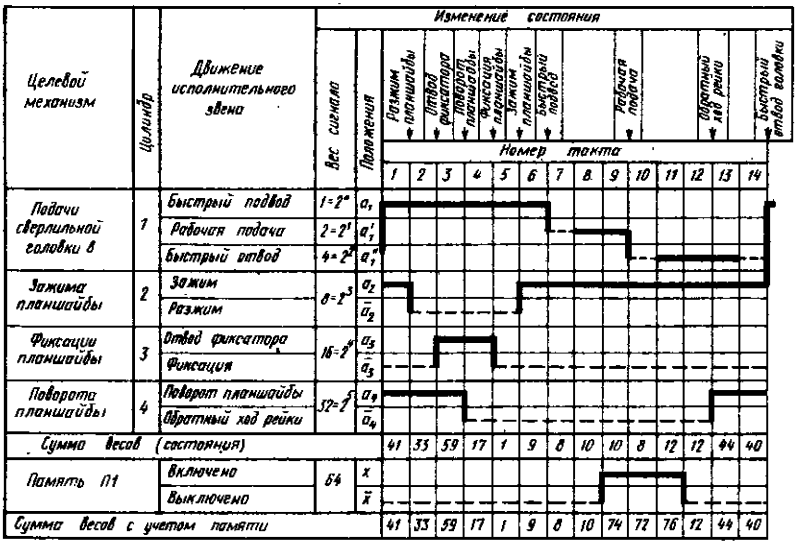


Рис. 20.9

Положение исполнительных звеньев механизмов и устройств фиксируется в определенных положениях. Обычно выбирают два таких положения: включено — выключено, движется — заторможено, намагничено — размагничено и т. п.

Переход от одного положения к другому происходит за очень короткие промежутки времени, на тактограммах (см. рис. 20.9) он изображается толстой вертикальной линией в пределах строки. Эти линии являются границами тактов. Фиксированным положениям исполнительных звеньев соответствуют горизонтальные линии в соответствующих строках: толстая линия — для одного положения (единичный входной сигнал), штриховая (или тонкая) — для другого положения (нулевой входной сигнал).

В ряде случаев для одного исполнительного звена необходимо различать несколько положений, например: включено на быстрый подвод вперед, включено на ход вперед с рабочей скоростью, включено на быстрый обратный ход, выключено.

Устройства, имеющие два состояния, относятся к классу релейных устройств. Они характеризуются входными каналами a_1, a_2, a_3, ... и выходными каналами f_1, f_2, f_3, ... По каждому каналу могут подаваться дискретные сигналы, принимающие значения 0 и 1. Комбинации значений сигналов в один и тот же момент времени во входных каналах релейного устройства называют входом, а в выходных каналах — выходом. Операции над дискретными сигналами выполняются по правилам алгебры логики.

Для полного описания состояния дискретных многотактных систем включают также элемент памяти (например, триггеры).

Для каждого такта необходимо иметь разные значения входа, которые оцениваются десятичными эквивалентами. С этой целью каждый входной канал имеет определенный вес: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 и т. д. Для определения веса такта умножают вес входного канала на значение сигнала (0 или 1) и полученные значения суммируют.

Например, на рис. 20.9 разным состояниям целевых механизмов присвоены веса 1, 2, 4, 8, 16, 32 и определена сумма весов для всех состояний, различаемых тактами в пределах от 1 до 14: 41, 33, 59, 17, 1 и т. д. Для 7 и 10 тактов, а также тактов 8 и 9, 11 и 12 эквивалентные суммы весов оказались одинаковыми (соответственно равными 8, 10 и 12). В таких случаях для реализации системы управления вводят дополнительный входной канал — элемент памяти *П11*, которому присваивают соответствующий вес (на рис. 20.9 вес элемента памяти равен 64). Такие элементы памяти вводят до тех пор, пока каждому входному сигналу не будет соответствовать отличный от предшествующих суммарный вес. В таблицу (рис. 20.9) оказалось достаточным включить один элемент памяти, чтобы в строке «сумма весов с учетом памяти» появились для всех 14 тактов разные значения десятичного эквивалента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин. М., 1988.
2. *Гавриленко В. А.* и др. Теория механизмов. М., 1973.
3. *Юдин В. А., Петрокас Л. В.* Теория механизмов и машин. М., 1977.
4. *Кожевников С. Н.* Теория механизмов и машин. М., 1973.
5. *Левитский Н. И.* Теория механизмов и машин. М., 1979.
6. *Фролов К. В.* Методы совершенствования машин и современные задачи машиноведения. М., 1984.
7. *Решетов Л. Н.* Самоустанавливающиеся механизмы. Справочник. М., 1979.
8. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. М., 1979—1981.
9. Основы балансировочной техники. В 2 т./ Под ред. *В. А. Щепетильникова.* М., 1975.
10. *Проников А. С.* Надежность машин. М., 1978.
11. Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2 т./ Под ред. *И. В. Крагельского* и *В. В. Алисина.* М., 1979.
12. *Попов С. А.* Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин. М., 1986.
13. *Гавриленко В. А.* Основы теории эвольвентной зубчатой передачи. М., 1969.
14. *Коловский М. З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. М., 1966.
15. *Коловский М. З.* Динамика машин. Л., 1989.
16. Механика промышленных роботов. В 3 т./ Под ред. *К. В. Фролова, Е. И. Воробьева.* М., 1988.
17. Теория механизмов и машин. / Под ред. *К. В. Фролова.* М., 1987.
18. Системы автоматизированного проектирования. В 9 кн./ Кн. 1. Принципы построения и структура. / Под ред. *И. П. Норенкова.* М., 1986.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Введение 5

Глава 1. **Проблемы теории механизмов и машин** 10

Раздел I. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЗМОВ, МАШИН И СИСТЕМ МАШИН 19

Глава 2. **Основы проектирования механизмов и машин** 19
§ 2.1. Логика процесса проектирования 19
§ 2.2. Основные принципы проектирования 27
§ 2.3. Автоматизированное проектирование 33

Глава 3. **Строение механизмов** 38
§ 3.1. Основные определения 38
§ 3.2. Кинематические пары и соединения 40
§ 3.3. Структурный анализ механизма 47
§ 3.4. Контурные избыточные связи в квазиплоских механизмах и их исключение 53
§ 3.5. Структурный синтез механизмов 58
§ 3.6. Классификация механизмов 62

Глава 4. **Кинематические характеристики механизмов** 67
§ 4.1. Основные понятия 67
§ 4.2. Графики движения (дуговой координаты), скорости, ускорения и кинематических передаточных функций 68
§ 4.3. Координатный способ определения кинематических характеристик плоских рычажных механизмов 78
§ 4.4. Векторный способ определения скоростей и ускорений плоских механизмов 85
§ 4.5. Модульная система кинематического анализа механизмов 88
§ 4.6. Примеры графического исследования механизмов 95
§ 4.7. Кинематические характеристики плоских механизмов с высшими парами 107
§ 4.8. Кинематические характеристики пространственных механизмов 116
§ 4.9. Метод преобразования декартовых прямоугольных координат . . 124

Глава 5. **Исследование движения машины с жесткими звеньями** 126
§ 5.1. Силы, действующие в машинах, и их характеристики 127
§ 5.2. Динамическая модель машины 131
§ 5.3. Приведение сил 133
§ 5.4. Приведение масс 137
§ 5.5. Уравнение движения механизма 140
§ 5.6. Закон изменения скорости механизма, нагруженного силами, зависящими только от положения 143
§ 5.7. Закон изменения скорости механизма, нагруженного силами, зависящими только от скорости 146
§ 5.8. Закон изменения скорости механизма, нагруженного силами и моментами, зависящими как от положения, так и от скорости 149
§ 5.9. Неравномерность движения механизма 153
§ 5.10. Динамический синтез и анализ по методу Мерцалова 155
§ 5.11. Динамический анализ и синтез с учетом влияния скорости на действующие силы 163

Глава 6. **Силовой расчет механизмов** 171
§ 6.1. Общая методика силового расчета 171
§ 6.2. Аналитический метод силового расчета механизма 178

Глава 7. **Уравновешивание механизмов** 189
§ 7.1. Неуравновешенность механизмов. Статическое уравновешивание 189
§ 7.2. Неуравновешенность роторов 195
§ 7.3. Динамическая балансировка роторов при проектировании 198
§ 7.4. Статическая и динамическая балансировка изготовленных роторов 201

Глава 8. **Трение в механизмах и машинах** 206
§ 8.1. Виды и характеристики внешнего трения 207
§ 8.2. Действие сил в кинематических парах с учетом трения 212
§ 8.3. Силовой расчет механизма с учетом трения 216
§ 8.4. Потери энергии на трение. Механический коэффициент полезного действия 220

Глава 9. **Износ поверхностей кинематических пар механизмов** 225
§ 9.1. Механика контакта и основные закономерности изнашивания . . . 225
§ 9.2. Методика расчета износа элементов кинематических пар 229

Глава 10. **Исследование движения машины с учетом упругости звеньев** 232
§ 10.1. Динамическая модель машины 232
§ 10.2. Установившееся движение машинной установки 239
§ 10.3. Исследование влияния упругости звеньев 244

Глава 11. **Виброактивность и виброзащита машин** 248
§ 11.1. Источники колебаний и объекты виброзащиты 249
§ 11.2. Влияние механических воздействий на технические объекты и на человека 254
§ 11.3. Анализ действия вибраций 255
§ 11.4. Основные методы виброзащиты 259
§ 11.5. Демпфирование колебаний. Диссипативные характеристики механических систем 266
§ 11.6. Принципы виброизоляции. Виброзащитные системы с одной степенью свободы 270
§ 11.7. Динамическое гашение колебаний 274
§ 11.8. Поглотители колебаний с вязким и сухим трением 288
§ 11.9. Ударные гасители колебаний 291
§ 11.10. Основные схемы активных виброзащитных систем 294

Глава 12. **Синтез плоских механизмов с низшими парами** 297
§ 12.1. Основные этапы синтеза 298
§ 12.2. Условие существования кривошипа в плоских четырехзвенных механизмах 300
§ 12.3. Синтез четырехзвенных механизмов по двум положениям звеньев 302
§ 12.4. Синтез четырехзвенных механизмов по трем положениям звеньев 307
§ 12.5. Синтез механизмов по средней скорости звена и по коэффициенту изменения средней скорости выходного звена 310

Раздел II. МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СХЕМ ОСНОВНЫХ ВИДОВ МЕХАНИЗМОВ 316

Глава 13. **Методы синтеза механизмов с высшими парами** 316
§ 13.1. Основная теорема зацепления 316
§ 13.2. Скорость скольжения сопряженных профилей 322
§ 13.3. Угол давления при передаче движения высшей парой 325
§ 13.4. Графические методы синтеза сопряженных профилей 326
§ 13.5. Дифференциальная форма основного уравнения зацепления профилей 328
§ 13.6. Производящие поверхности 331

Глава 14. **Цилиндрическая зубчатая передача** 334
§ 14.1. Передача внешнего и внутреннего зацепления 334
§ 14.2. Эвольвента, ее свойства и ее уравнение 335

§ 14.3. Эвольвентное прямозубое колесо 337
§ 14.4. Эвольвентная прямозубая рейка 339
§ 14.5. Эвольвентное зацепление 340
§ 14.6. Основные положения станочного зацепления 342
§ 14.7. Реечное станочное зацепление 344
§ 14.8. Подрезание и заострение зуба 347
§ 14.9. Эвольвентная зубчатая передача 350
§ 14.10. Качественные показатели зубчатой передачи 354
§ 14.11. Цилиндрическая передача, составленная из колес с косыми зубьями. Выбор коэффициентов смещения 357

Глава 15. **Пространственные зубчатые передачи** 361
§ 15.1. Коническая зубчатая передача 362
§ 15.2. Червячная зубчатая передача 373

Глава 16. **Многозвенные зубчатые механизмы** 379
§ 16.1. Многозвенные зубчатые механизмы с неподвижными осями колес 379
§ 16.2. Планетарные зубчатые механизмы 384
§ 16.3. Выбор схем планетарных механизмов и их кинематические особенности 390
§ 16.4. Определение чисел зубьев колес планетарных механизмов 399
§ 16.5. Волновые зубчатые передачи 405

Глава 17. **Механизмы с прерывистым движением выходного звена** 413
§ 17.1. Зубчатые и храповые механизмы 413
§ 17.2. Мальтийские механизмы 416
§ 17.3. Рычажные механизмы с квазиостановками 421

Глава 18. **Кулачковые механизмы** 422
§ 18.1. Виды кулачковых механизмов и их особенности 423
§ 18.2. Закон перемещения толкателя и его выбор 426
§ 18.3. Угол давления и коэффициент возрастания сил в кинематических парах 429
§ 18.4. Определение размеров кулачкового механизма по заданному допускаемому углу давления 432
§ 18.5. Определение габаритных размеров кулачка по условию выпуклости профиля 441
§ 18.6. Определение координат профиля дисковых кулачков 443
§ 18.7. Механизмы с цилиндрическими кулачками 450
§ 18.8. Влияние упругости звеньев кулачкового механизма на закон движения толкателя и форму профиля кулачка 452

Глава 19. **Манипуляционные роботы** 455
§ 19.1. Классификация, назначение и области применения 455
§ 19.2. Кинематические схемы, структура и технические характеристики манипуляторов 459
§ 19.3. Задачи о положениях манипуляторов 467
§ 19.4. Задачи уравновешивания и динамики 472

Глава 20. **Согласование движения системы механизмов** 478
§ 20.1. Система программного управления движением механизмов 479
§ 20.2. Циклограмма системы механизмов 487

Литература 493